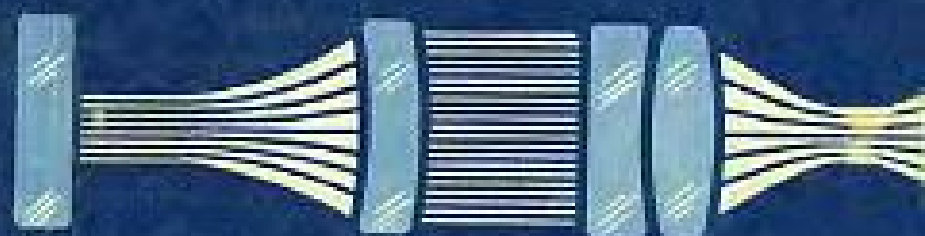


Е.Ф.Ищенко

ОТКРЫТЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ



Е. Ф. Ищенко

ОТКРЫТЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ
И РАСЧЕТА



МОСКВА СОВЕТСКОЕ РАДИО — 1980



ББК 22.34

И98

УДК 535.14

Ищенко Е. Ф. Открытые оптические резонаторы: Некоторые вопросы теории и расчета. — М.: Сов. радио, 1980—208 с., ил.

Излагается теория однополостных открытых оптических резонаторов, широко применяемых в квантовой электронике. Рассмотрены резонаторы, содержащие внутренние оптические элементы и неоднородную среду. Большое внимание уделено прикладным методам расчета пространственных, частотных и поляризационных характеристик собственных типов колебаний, а также дифракционных потерь. Описаны общие свойства гауссовых пучков и теория их преобразования идеальными оптическими системами. Анализируется искажение собственных волн при разбюстировке резонаторов.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, специализирующихся в разработке и применении приборов квантовой электроники.

4 табл., 60 рис., библиограф. 134 назв.

Рецензенты: д-р техн. наук Ю. А. Ананьев,
д-р физ.-мат. наук В. П. Быков
и д-р техн. наук проф. В. П. Васильев.

Редакция литературы по электронной технике

И $\frac{30407-045}{046(01)-80}$ 43—80 2402040000

© Издательство «Советское радио», 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ

Открытые оптические резонаторы играют важную роль в современной квантовой электронике. Хотя и ранее оптические интерферометры находили широкое применение в спектроскопии, бурное развитие теории и техники оптических резонаторов в последние годы обусловлено тем, что они оказались почти идеальным устройством для создания положительной обратной связи в лазерах. Совокупность оптического резонатора и помещаемой в его полость активной среды может рассматриваться как автоколебательная система, затухание в которой компенсируется усилением в активной среде. При этом параметры резонатора существенным образом влияют на генерируемое излучение, в значительной степени определяя его пространственно-частотные, поляризационные и энергетические характеристики. В то же время самостоятельное значение сохраняют пассивные резонаторы (не содержащие в своей полости активной среды). Такие устройства используются в технике для пространственно-частотной селекции лазерного излучения и в качестве оптических дискриминаторов. Особое распространение получили пассивные перестраиваемые резонаторные системы — так называемые сканирующие интерферометры, используемые для анализа частотных характеристик лазерного излучения.

Техника оптических резонаторов существует относительно недавно [89—91]. Однако к настоящему времени усилиями отечественных и зарубежных исследователей накоплен большой экспериментальный и теоретический материал. Установилась специфическая терминология, во многом заимствованная из техники СВЧ. Широкая практика использования резонаторных систем выработала свои приемы расчета и проектирования. Таким образом, можно говорить о появлении нового раздела физической оптики — теории открытых оптических резонаторов. При рассмотрении свойств открытых оптических резонаторов существенную роль играют как волновые, так и лучевые представления. Для понимания и расчета наиболее фундаментальных характеристик резонатора

необходимо привлекать методы волновой оптики. При этом резонатор может рассматриваться как повторяющаяся дифракционная структура. В то же время в ряде случаев достаточно и разумно ограничиться лучевыми методами, рассматривая резонаторную полость как периодическую геометрооптическую систему. Таким образом, открытый оптический резонатор является типичным объектом пограничной области оптики, которая в последнее время получила название «квазиоптика».

К теории оптических резонаторов примыкает раздел: оптика когерентных резонаторных пучков, изучающая преобразование этих пучков внешними пассивными оптическими системами. Своеобразие пространственного распределения амплитуды и необходимость учета фазовых соотношений создают определенную специфику вопроса. Методы расчета оптических систем, разработанные классической некогерентной прикладной оптикой, в общем случае оказываются неприемлемыми для резонаторных пучков.

В основу настоящей книги положены результаты исследований, проведенных на кафедре физики Московского энергетического института. Книга рассчитана на научных работников и инженеров, специализирующихся в области разработки и применения различного рода лазерных систем. Поэтому в книге основное внимание уделено прикладным аспектам теории оптических резонаторов. Широко используются приближенные методы исследования с целью дать материалы для расчета и проектирования реальных устройств. Конечно, в рамках ограниченного объема невозможно решить все вопросы техники оптических резонаторов; необходим рациональный отбор материала. Содержание книги ограничено стационарным режимом. Не включены также вопросы селекции собственных волн и частотной стабильности в связи с существованием монографий [4, 5]. Кроме того, из соображений методического единства круг затрагиваемых вопросов ограничен рамками линейной оптики. Последовательность изложения соответствует принципу постепенного углубления материала, что должно сделать книгу удобной для использования также студентами вузов.

Глава I

ОБЩИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОТКРЫТЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Открытый резонатор лазера отличается от резонаторов СВЧ диапазона тем, что имеет размеры, значительно превышающие длину волны генерируемого излучения. Специфической особенностью открытого резонатора является отсутствие боковых отражающих стенок. В простейшем случае открытый оптический резонатор представляет собой систему из двух обращенных друг к другу отражающих поверхностей, в которой могут возбуждаться колебания оптического диапазона. В квантовой электронике используются и более сложные резонаторы, составленные тремя, четырьмя и большим числом отражающих и преломляющих оптических элементов.

В качестве оптических элементов, составляющих резонатор, используются: зеркала (металлические или интерференционные), полупрозрачные пластины, оптические столбы, линзы, призмы полного внутреннего отражения. В тех резонаторах, где важно провести спектральное разделение излучения, используются дисперсионные элементы — дисперсионные призмы, дифракционные решетки. И, наконец, в состав резонатора входит активная среда с инверсной населенностью.

1.1. ФУНКЦИИ И УСТРОЙСТВО ОТКРЫТЫХ ОПТИЧЕСКИХ РЕЗОНАТОРОВ

Резонатор с инверсной активной средой представляет собой оптический генератор с положительной обратной связью. Инверсная активная среда, возбуждаемая системой накачки, усиливает проходящее через нее излучение в частотном интервале рабочего перехода. При малом сигнале коэффициент ненасыщенного усиления (K_0) не зависит от величины сигнала. Переход от режима усиления к режиму генерации осуществляется в любом

генераторе с помощью системы положительной обратной связи. Часть усиленного сигнала (β) должна вновь подаваться на вход усилителя. Эту величину называют коэффициентом обратной связи.

Условие возникновения режима генерации, как известно, определяется соотношением

$$K_0\beta > 1, \quad (1.1)$$

которое играет фундаментальную роль в теории генерирующих систем, определяя так называемый порог генерации. Основным назначением резонатора лазера как раз и является возвращение части усиленного излучения обратно в активную среду. В процессе установления режима генерации интенсивность излучения нарастает, а коэффициент усиления уменьшается за счет насыщения активной среды. В установившемся режиме коэффициент насыщенного усиления K задается величиной обратной связи, так как $K\beta=1$.

При этом устройство оптического резонатора в большой степени определяет характеристики генерируемого излучения, такие как распределение амплитуды и фазы в поперечном сечении, угловую расходимость, общую генерируемую мощность (энергию), частотный спектр, состояние поляризации.

Кроме того, параметры резонатора влияют на пороговую мощность (энергию) накачки лазера.

В лазерной технике широко применяются также резонаторы, не содержащие активной среды. Они используются для пространственно-частотной селекции генерируемого излучения, анализа спектральных характеристик излучения, в качестве оптических линий задержки и как оптические дискриминаторы в системах активной стабилизации частоты.

Свойства открытого оптического резонатора определяются рядом его конструктивных особенностей и, в первую очередь, так называемой схемой резонатора. Под схемой понимают число и взаимное расположение оптических элементов, образующих данный резонатор. Наиболее часто используемые схемы резонаторов изображены на рис. 1.1.

Простейший оптический резонатор образован системой из двух обращенных друг к другу зеркал (рис. 1.1,а). Поток энергии распространяется между отражающими поверхностями в обоих направлениях.

Расстояние между отражающими поверхностями активного резонатора определяется в основном размерами применяемой активной среды и может колебаться от десятых долей миллиметра (в полупроводниковых) до нескольких метров (в некоторых газовых лазерах). Активная среда может занимать либо часть объема полости резонатора, либо весь объем (в последнем случае в твердотельных и полупроводниковых лазерах отражающими поверхностями являются непосредственно торцы активного вещества). Среда, заполняющая резонатор, имеет различный показатель преломления (от величины, близкой к 1 в газовых лазерах, до 2,5—4,5 в полупроводниковых лазерах), при этом возможна оптическая неоднородность по объему резонатора.

В устройствах квантовой электроники используются и резонаторы, образованные более чем двумя элементами. Такой резонатор может содержать не одну, а несколько взаимоперекрывающихся полостей, т. е. участков резонатора, в которых волны совершают циклический замкнутый проход (рис. 1.1, б, г, ж).

Резонаторы можно разделить на два принципиально различных вида: линейные и кольцевые. В линейном резонаторе (рис. 1.1, а—г) электромагнитная волна пересекает любое его поперечное сечение в обоих встречных направлениях, в кольцевом (рис. 1.1, д—ж) возникают две квазинезависимые встречные волны, каждая из которых проходит любое поперечное сечение только в одном направлении. Резонаторы различаются числом образующих оптических элементов и фигурой осевой линии. Линейный резонатор можно образовать не менее чем двумя элементами, кольцевой образуется обычно

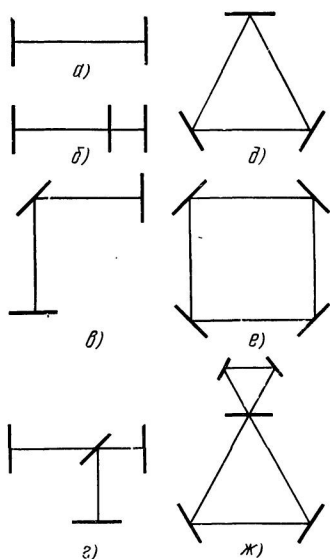


Рис. 1.1 Схемы открытых резонаторов:
а, в, д, е — однополостных; б, г, ж — двухполостных

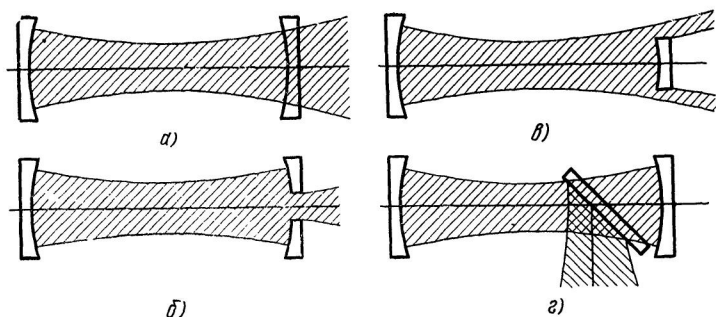


Рис. 1.2. Схемы вывода излучения

три или четырьмя элементами; при этом осевой контур имеет форму треугольника или четырехугольника. Так, например, на рис. 1.1,ж показан двухполостный кольцевой резонатор, каждая полость которого имеет форму равностороннего треугольника *).

Резонаторная полость имеет одно или несколько плеч — пространство между соседними оптическими [i -м и $(i+1)$ -м] элементами. Плечи характеризуются своей геометрической длиной l_i^{i+1} и показателем преломления среды n_i^{i+1} , который может быть функцией всех трех пространственных координат. Полость линейного резонатора, изображенного на рис. 1.1,в, имеет два плеча, а полость кольцевого резонатора, показанного на рис. 1.1,е — четыре.

Оптические элементы, образующие резонатор, размещаются в специальных конструктивных узлах, которые позволяют стабилизировать положение этих элементов и производить их юстировку. В других случаях резонатор выполняется в виде жесткой неюстируемой моноблочной конструкции. Вывод излучения из резонатора или ввод в резонатор осуществляется с помощью так называемых устройств связи. Наиболее часто встречается устройство связи в виде полупрозрачного зеркала (рис. 1.2,а). Иногда используют элемент с отверстием связи (рис. 1.2,б); таких отверстий может быть несколь-

*) Осевой линией резонатора называют такую единственную (возможно, ломаную) линию, что распространяющийся вдоль нее луч самосопрягается после каждого прохода резонатора.

ко. Возможен также вывод излучения через края одного из отражателей (рис. 1.2,в) или с помощью полупрозрачной пластинки, помещаемой внутрь полости (рис. 1.2,г).

Открытый оптический резонатор — квазиоптическое устройство. Ряд характеристик резонатора может быть выявлен при рассмотрении в рамках лучевой оптики, для анализа других необходимо привлекать волновые представления.

Геометрооптические свойства резонатора определяются так называемой конфигурацией, т. е. числом, взаимным расположением и оптической силой элементов, образующих резонатор.

Как уже отмечалось, осевой луч самосопрягается после каждого прохода резонатора. При распространении в резонаторе произвольного луча существует следующая альтернатива: либо луч может удалиться от оси на сколь угодно большое расстояние, либо при сколь угодно большом числе отражений от зеркал резонатора можно указать некоторое максимальное удаление луча от оси. В соответствии с этим все резонаторы делятся на два класса: устойчивые (стабильные) и неустойчивые (нестабильные). В устойчивом резонаторе проходы луча зачерчивают часть объема его полости, образуя ограниченное каустикой бесконечное лучевое семейство, которое является геометрооптическим аналогом волнового типа колебаний.

Волновые свойства резонатора (кроме схемы и конфигурации) определяются размерами диафрагм и их взаимным расположением в каждом плече резонатора. Рассмотрим одно плечо резонатора, расположенное между двумя плоскостями ограничивающих диафрагм, которые обычно совпадают с образующими элементами (рис. 1.3). Роль волновых эффектов, возникающих при прохождении потока энергии в данном плече, определяется числом зон Френеля, укладывающихся на отверстии одной диафрагмы при наблюдении из центра другой. В приближении плоских падающих волн число зон

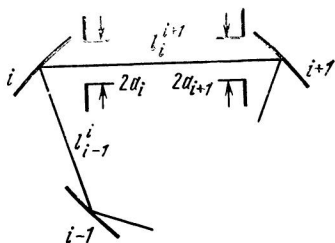


Рис. 1.3. К введению параметра Френеля резонатора

Френеля, видимых из центра каждой диафрагмы, определяется соотношением

$$N_i^{i+1} = a_i^2 / \lambda l_i^{i+1}, \quad N_{i+1}^i = a_{i+1}^2 / \lambda l_i^{i+1}. \quad (1.2)$$

Величины N_i^{i+1} и N_{i+1}^i характеризуют волновые свойства данного плеча резонатора и называются параметрами (числами) Френеля. Апертуры a_i и a_{i+1} могут быть разными в различных меридиональных сечениях μ . Таким образом, волновые свойства резонатора, содержащего m плеч, можно характеризовать криволинейным отрезком $N(\mu)$ в $2m$ -мерном N -пространстве.

1.2. ТИПЫ КОЛЕБАНИЙ ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА

Произвольная оптическая волна, введенная в резонатор извне или возбуждаемая в резонаторной полости, последовательно проходит образующие элементы, претерпевая на каждом из них фазовое, геометрооптическое и дифракционное искажения, теряя при этом свою энергию. Можно характеризовать волну в любой точке внутрирезонаторного пространства в фиксированный момент времени амплитудой, фазой и состоянием поляризации. После циклического обхода резонаторной полости рассматриваемая произвольная волна вновь вернется в отмеченную точку пространства; при этом характеристики волны в общем случае изменятся. Существует, однако, бесконечный дискретный набор волн, которые в результате различного рода взаимодействий с образующими резонатор элементами в каждом последующем проходе восстанавливают относительное пространственное распределение амплитуды и фазы, а также состояние поляризации в каждом поперечном сечении резонаторной полости. Такие волны называются собственными волнами или собственными типами колебаний резонатора.

В отличие от замкнутых объемных резонансных систем СВЧ диапазона в открытом оптическом резонаторе возбуждаются волны, характеризующиеся почти строго ортогональной ориентацией векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} к направлению распространения (оси резонатора). Подобная структура поля электромагнитной волны, когда оба вектора располагаются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, позволяет называть волну *поперечной электромагнитной* или, согласно принятой терми-

нологии, ТЕМ-волной*). Конкретный характер распределения поля данной моды указывается в обозначении тремя индексами (m, n, q), соответствующими трем ортогональным измерениям резонатора.

Продольное (вдоль оси) распределение электромагнитного поля в резонаторе аналогично распределениям, возникающим в замкнутых объемных резонаторах. Как правило, это волна с периодическим изменением мгновенных составляющих поля вдоль оси резонатора. Число полуволн, укладывающихся по длине линейного резонатора (или число волн — по длине кольцевого), указывается в обозначении данного типа колебаний с помощью продольного индекса q . Для оптических резонаторов это число велико и обычно известно лишь приближенно, поэтому продольный индекс записывается в обозначении собственной волны либо буквенно: $q, q+1, q+2, \dots$, либо вообще опускается.

Собственные ТЕМ-волны удобно характеризовать распределением амплитуды, значением фазы и эквифазной поверхностью, состоянием поляризации в любом поперечном сечении резонатора. При циклическом проходе собственной волны в резонаторе поперечное распределение амплитуды воспроизводится с точностью до постоянного множителя, определяющего потери энергии в резонаторе. Каждому собственному типу колебаний соответствует определенная величина коэффициента потерь. Совокупность коэффициентов потерь собственных волн образует спектр потерь данного резонатора.

Набег фазы при циклическом проходе собственной волны в стационарном режиме должен быть кратным 2π . Это условие определяет резонансную частоту каждого типа колебаний. Совокупность частот собственных волн образует частотный спектр колебаний. Для понимания структуры частотного спектра рассмотрим резонатор, образованный двумя плоскими зеркалами, и будем считать собственные колебания резонатора бесконечными плоскими волнами. В этом идеализированном случае фазовое условие резонанса в линейном резонаторе запишется предельно просто:

$$2kL=2\pi q. \quad (1.3)$$

*) Это обозначение происходит от английского термина Transversal Electromagnetic Mode — поперечная электромагнитная мода (тип колебаний).

Здесь k — константа распространения излучения в среде, заполняющей резонатор; L — длина резонатора; q — произвольное целое число (продольный индекс собственного типа колебаний). Из (1.3) в отсутствие дисперсии среды легко получить выражение, определяющее собственные частоты:

$$\nu = cq/2L, \quad (1.4a)$$

где c — скорость распространения излучения в среде, заполняющей резонатор. Выражение (1.4a) описывает эквидистантный ряд частот с интервалом $c/2L$. Для однополостного кольцевого резонатора аналогично можно найти

$$\nu = cq/L. \quad (1.4б)$$

В реальных резонаторах, где волновые фронты искривлены, а полость содержит диспергирующую среду, спектр резонансных частот усложняется [3, 11, 12].

Состояние поляризации собственной волны восстанавливается в любом поперечном сечении резонатора после циклического обхода. Существование определенных собственных состояний поляризации резонатора связано с наличием амплитудной или фазовой анизотропии образующих резонатор элементов. Обычно резонатор имеет два собственных состояния поляризации, которые характерны для всей системы собственных типов колебаний (см. гл. 7).

Поперечные распределения поля собственных типов колебаний в открытых резонаторах формируются дифракционными и геометрооптическими эффектами и отличаются от периодических распределений, характерных для замкнутых систем. Эти распределения, а также спектр потерь имеют различный характер в устойчивых и неустойчивых резонаторах.

В устойчивом резонаторе распределения поля образуют характерные чередования максимумов и минимумов. Характер симметрии распределения поля моды зависит от формы и оптической однородности сечения резонатора. При прямоугольной симметрии индексы m , n в обозначении типа колебаний соответствуют числу перемен знака поля вдоль каждой поперечной оси. Низший тип колебаний (так называемая основная, или фундаментальная, мода) не содержит изменений знака поля.

При центральной симметрии распределения поля ха-

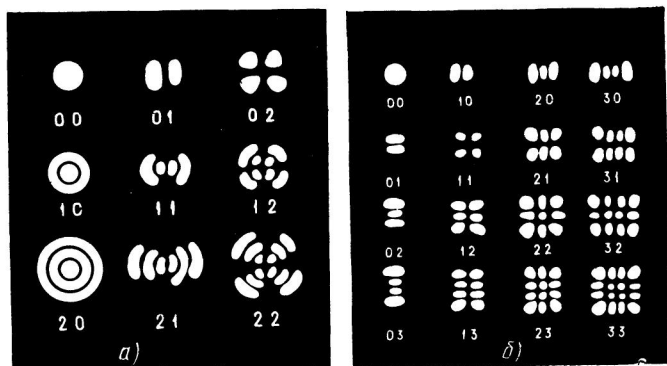


Рис. 1.4. Модовые рисунки для центральной (а) и прямоугольной (б) симметрий

характерными измерениями являются радиальное и азимутальное. Первый поперечный индекс здесь указывает число пар перемен знака вдоль диаметра. Второй индекс соответствует числу пар перемен знака в распределении поля вдоль азимута в интервале от 0 до 2π . Каждому типу колебаний, характеризующемуся данной парой поперечных индексов ^{*}), соответствует свой модовый рисунок, наблюдаемый в поперечном сечении резонаторного пучка. Эти модовые рисунки для низших типов колебаний схематически показаны на рис. 1.4 ^{**}). Если излучение резонатора содержит ряд поперечных типов колебаний, то наблюдаемая в сечении пучка картина может оказаться сложной суперпозицией модовых рисунков. Для анализа модового состава излучения в этом случае требуются специальные частотные исследования.

Описанные обозначения резонансных типов колебаний не содержат информации о расположении векторов электромагнитного поля относительно координатных осей сечения резонатора. Поэтому в некоторых работах по теории оптических резонаторов тип колебаний

^{*}) По установившейся в литературе терминологии совокупность типов колебаний, характеризующихся одной парой поперечных индексов, называется *поперечным типом колебаний*. Такой поперечный тип колебаний может содержать ряд продольных составляющих, отличающихся продольным индексом.

^{**}) При центральной симметрии сечения фаза азимутального распределения определяется случайными причинами и может изменяться во времени. Поэтому при долговременном наблюдении азимутальное распределение поля усредняется,

обозначают буквами E или H с указанием (в верхнем индексе) той координатной оси сечения, вдоль которой ориентируется соответствующая составляющая электромагнитного поля. Нижние индексы обозначения указывают характер распределения амплитуды поля. Продольный индекс (как и в ТЕМ-обозначениях) соответствует числу полуволн вдоль оси резонатора, а поперечные указывают число интервалов вдоль поперечной координаты, внутри которых мгновенное поле не меняет знак. Таким образом, поперечные индексы здесь на единицу больше, чем в ТЕМ-обозначениях.

Следует учитывать также, что обозначение $E_{mnq}^{(x)}$ равнозначно $H_{mnq}^{(y)}$, а $E_{mnq}^{(y)}$ равнозначно $H_{mnq}^{(x)}$. Точно так же при центральной симметрии поля в сечении резонатора волна $E_{mnq}^{(r)}$ соответствует волне $H_{mnq}^{(\varphi)}$, а $E_{mnq}^{(\varphi)}$ — волне $H_{mnq}^{(r)}$.

Коэффициент потерь собственной волны зависит от поперечных индексов. В резонаторах с зеркалами ограниченной апертуры наименьшими потерями обладают основные волны. Моды высших порядков характеризуются большими потерями, причем в устойчивом резонаторе коэффициент потерь оказывается монотонно возрастающей функцией поперечных индексов собственной волны.

В неустойчивом резонаторе, геометрия которого характеризуется большой величиной параметра Френеля ($N \gg 2\pi$), формирование собственных типов колебаний определяется главным образом геометрическими эффектами. Распределение амплитуды собственной волны в поперечном сечении резонатора имеет правильный монотонный характер. В отличие от волн устойчивого резонатора здесь амплитуда поля на краях зеркала может иметь существенное значение. Основная мода характеризуется однородным распределением поля. Амплитуда мод высшего порядка возрастает по мере удаления от оптической оси. Коэффициенты потерь мод в таком резонаторе значительно больше, чем в соответствующем устойчивом резонаторе. Монотонно нарастающая зависимость потерь от поперечных индексов здесь сохраняется. Зависимость потерь от параметра Френеля, естественно исчезает (из-за малости дифракционных эффектов).

В неустойчивом резонаторе с малой величиной параметра Френеля ($N < 2\pi$) нельзя пренебречь дифракционными эффектами в механизме формирования собственных типов колебаний. Поперечное распределение поля собственной волны имеет зачастую сложный нерегулярный характер, постепенно переходящий в регулярные распределения при возрастании параметра Френеля,

Поперечные индексы волны здесь не находят такого четкого физического образа, как в устойчивом резонаторе.

Коэффициент потерь собственной волны немонотонно зависит от параметра Френеля и поперечных индексов. Для разных типов колебаний коэффициенты потерь могут совпадать.

Возбуждение в активном резонаторе того или иного типа колебаний определяется выполнением порогового условия генерации (1.1). Различные типы колебаний характеризуются разной величиной дифракционных потерь, разным положением резонансных частот в спектральном контуре усиления. Поля собственных волн резонатора по-разному согласуются с пространственным распределением усиления в активной среде. Все эти обстоятельства создают неодинаковые условия для возбуждения различных мод и ограничивают модовый состав излучения конкретного активного резонатора. На возбуждение типов колебаний существенно влияют эффекты межмодовой конкуренции.

Обычно в излучении присутствует целый ряд типов колебаний, характеризуемых низшими поперечными индексами. Достижение такого режима работы активного резонатора, при котором возбуждается только один основной тип колебаний (одночастотный режим), представляет большой технический интерес, так как при этом излучение оказывается максимально когерентным, монохроматичным и направленным.

Самостоятельное значение имеет также реализация режима возбуждения одной поперечной моды, т. е. совокупности типов колебаний, характеризуемых одинаковыми поперечными индексами. Такой режим принято называть одномодовым, хотя на самом деле он может соответствовать целому ряду типов колебаний, отличающихся продольными индексами.

1.3. ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ В РЕЗОНАТОРЕ

Существование электромагнитных колебаний в любом реальном резонаторе всегда связано с потерями энергии. Общую величину потерь принято относить к одному циклическому проходу волны в резонаторе и характеризовать коэффициентом потерь α , определяющим долю внутррезонаторной энергии, которая теряется за один проход. Величину коэффициента потерь вы-

ражают в относительных единицах или процентах. Иногда используют логарифмический коэффициент A , выраженный в децибелах.

Приведем связь между α и A , выраженными соответственно в процентах и децибелах:

$$A = 10 \lg \left(1 - \frac{\alpha}{100} \right)^{-1}, \quad \alpha = 100 [1 - 10^{-(A/10)}]. \quad (1.5)$$

Удобно учитывать, что для малых потерь ($\alpha < 1\%$) соотношения (1.5) соответствуют почти пропорциональной зависимости:

$$\alpha \approx 23 A.$$

Потери энергии в резонаторе обусловлены различными физическими причинами. Часть энергии возбуждаемых колебаний выводится из резонатора во внешнее пространство в виде направленного пучка излучения. Доля выводимой энергии характеризуется коэффициентом связи τ . В простейшем случае вывода энергии с помощью полупрозрачного отражателя (рис. 1.2,а) коэффициент связи равен коэффициенту пропускания этого оптического элемента.

Виды потерь, не связанные с полезным выводом энергии, называют диссипативными. К таким потерям можно отнести неизбежное поглощение и рассеяние на образующих резонатор оптических элементах. Если рассматриваемая резонаторная полость связана с другими, то возможен обмен энергией между ними. Это явление можно характеризовать коэффициентом взаимной связи между полостями резонатора. В отличие от других видов потерь этот коэффициент может иметь разный знак в зависимости от амплитудно-фазовых соотношений в связанных полостях.

В лазерах с внешним расположением зеркал торцы активного элемента попадают во внутреннюю полость резонатора. Прохождение излучения через границу раздела сред с различными показателями преломления связано с френелевским отражением. Френелевское отражение обычно может рассматриваться как дополнительные потери, если это отражение не сфазировано и не съюстировано с волной, отраженной от зеркал резонатора. Специальными мерами согласования можно существенно уменьшить эти потери.

При нормальном расположении торцевой грани френелевское отражение зависит только от показателей пре-

ломления граничащих сред n_1 и n_2 :

$$\alpha = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2.$$

При больших n френелевские потери составляют значительную величину [1, 7].

Френелевские потери могут существенно ухудшить характеристики генерации. В газовых лазерах, где усиление в активной среде часто мало, а торцевая пластинка содержит две преломляющие грани, френелевские потери делают невозможной генерацию на большинстве переходов. Для борьбы с френелевскими потерями часто применяют просветление оптических поверхностей. Другим способом борьбы с френелевскими потерями является так называемое *брюстеровское* расположение торцевых граней активного элемента.

Отражение от грани раздела сред при наклонном падении излучения существенно зависит от состояния поляризации падающего излучения. Наибольший коэффициент отражения соответствует плоско-поляризованной составляющей излучения, для которой электрический вектор перпендикулярен плоскости падения. В этом случае коэффициент отражения

$$\rho_{\perp}(i) = \left[\frac{\sin(i - i')}{\sin(i + i')} \right]^2, \quad (1.6a)$$

где i и i' — углы падения и преломления. Наименьший коэффициент отражения соответствует плоскополяризованной составляющей, для которой электрический вектор располагается в плоскости падения *).

$$\rho_{\parallel}(i) = \left[\frac{\operatorname{tg}(i - i')}{\operatorname{tg}(i + i')} \right]^2. \quad (1.6b)$$

Характерным для зависимости $\rho_{\parallel}(i)$ является равенство нулю коэффициента отражения, если угол падения равен *брюстеровскому*, т. е. если выполняется условие

$$\operatorname{tg} i_0 = n_2/n_1. \quad (1.7)$$

*) В литературе встречаются различные обозначения характерных компонентов падающей волны. Так, компонент с ориентацией электрического вектора в плоскости падения обозначается как ТН или p -волна (parallel). Компонент с расположением электрического вектора перпендикулярно плоскости падения обозначается как ТЕ или s -волна (от немецкого senkrecht — отвесный, вертикальный).

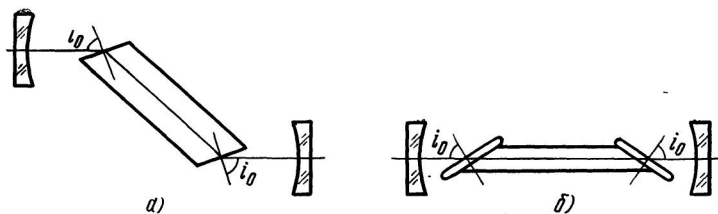


Рис. 1.5. Брюстеровское расположение торцевых граней активного элемента лазеров:

а — твердотельных; б — газовых

Такое расположение торцевых граней используется в твердотельных и в газовых лазерах (рис. 1.5). В последнем случае торцевые грани газоразрядных трубок выполняют в виде брестеровских окон. Резонатор, содержащий брестеровские грани, оказывается амплитудно-анизотропным. Собственные типы колебаний отличающиеся азимутом линейной поляризации, характеризуются различными потерями.

Неточность выполнения брестеровских граней влечет за собой появление френелевских потерь. Обычно встречаются две ошибки в выполнении граней: несоблюдение угла i_0 между осью резонатора и нормалью к грани и несовпадение плоскостей падения на разных гранях активного элемента. Если брестеровский угол выдержан с точностью до малой величины δ , то из (1.66) нетрудно получить приближенное, но удобное в инженерной практике соотношение:

$$\rho_{\parallel} (i_0 + \delta) = A\delta^2 / (1 - B\delta)^2, \quad (1.8)$$

где

$$A = 0,7615 \cdot 10^{-2} (n^4 - 1)^2 / n^6;$$

$$B = 0,8725 \cdot 10^{-2} (n^2 + 1)^2 / n^3.$$

При подстановке δ в градусах формула (1.8) дает величину френелевских потерь на грани в процентах с относительной погрешностью не хуже 1% при $|\delta| < 10^\circ$. Для удобства практических расчетов на рис. 1.6 приведены зависимости $A(n)$ и $B(n)$. Если нормали к различным брестеровским граням не лежат в одной плоскости, то собственные состояния поляризации искажаются, что также приводит к дополнительным поляризационным потерям (см. гл. 7).

При падении излучения согласованной поляризации на идеально выполненную брестеровскую грань коэффициент отражения практически не равен нулю, хотя и очень мал. Теоретическое обоснование этого явления выходит за рамки теории Френеля и связано с существованием так называемых переходных слоев [1]. Неза-

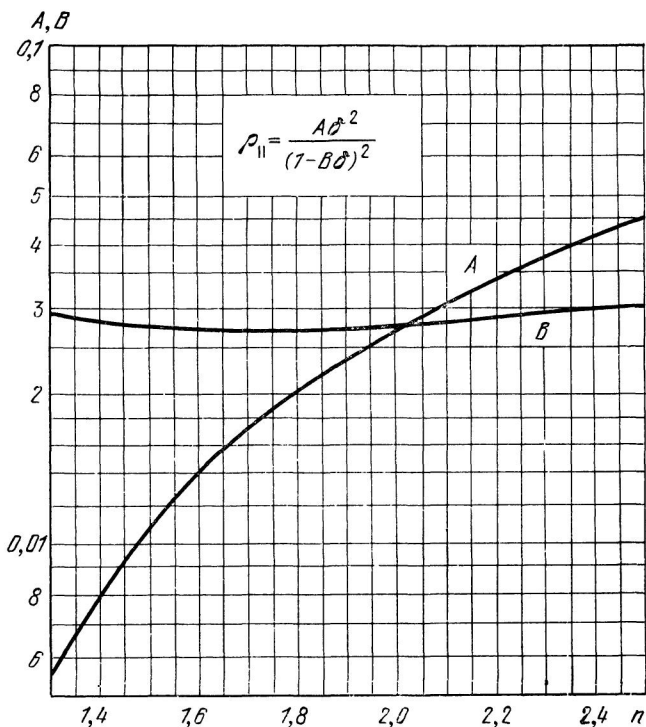


Рис. 1.6. К расчету френселевских потерь на брюстеровской грани

висимо от обработки поверхности материала на границе, разделяющей два вещества с разными показателями преломления n_1 и n_2), естественно образуется переходный микрослой, в котором показатель преломления плавно меняется от n_1 до n_2 , что приводит к нарушению закона Брюстера и к возникновению дополнительных потерь.

На внутренних оптических поверхностях резонатора возникает рассеяние на микрорельефе. Этот вид потерь связан с классом чистоты оптической обработки поверхности: улучшение чистоты обработки приводит к резкому снижению потерь на рассеяние. Кроме того, в газовых лазерах существуют потери в толще материала брюстеровских пластинок. Как известно, эти потери зависят от материала и технологии изготовления пластинки [100, 101].

При прохождении излучения через активную среду в твердотельных и полупроводниковых лазерах часть излучения рассеивается на оптических неоднородностях. Эти потери являются распределенными и нарастают с увеличением длины активного элемента. Конструкция лазера может включать в себя дополнительные модуляторы, дефлекторы, дисперсионные элементы, вводимые в резонатор. Введение дополнительных элементов в резонатор, естественно, приводит к увеличению потерь.

Существенную роль в технике открытых оптических резонаторов играют дифракционные потери. Любой реальный резонатор содержит те или иные элементы, которые ограничивают его поперечный размер. Такими ограничивающими элементами могут оказаться оправы зеркал, апертура активного элемента или специальные диафрагмы. Излучение последовательно проходит через ограничивающие элементы; при этом вследствие дифракционного взаимодействия с диафрагмами и отражения от сферических зеркал в каждом плече резонатора устанавливается конечная угловая апертура волны. Часть волнового фронта экранируется последующим ограничивающим элементом, что приводит к потерям энергии.

Величина дифракционных потерь на каждом участке резонатора определяется параметром Френеля и формой волнового фронта. Уменьшение числа Френеля связано с возрастанием роли волновых эффектов и, в частности, приводит к увеличению дифракционных потерь. Кроме того, величина потерь, естественно, зависит от поперечного распределения амплитуды резонансной волны, и, таким образом, различным поперечным модам соответствуют разные дифракционные потери. В системе центрированных диафрагм модам высшего порядка соответствует большая величина дифракционных потерь. Расчет коэффициента дифракционных потерь является одной из основных задач теории оптических резонаторов и подробно рассматривается в гл. 3.

В неустойчивых резонаторах основную долю потерь обычно составляет апертурный вывод энергии из резонатора. Этот вывод энергии может использоваться как полезный эффект, но он принципиально присущ любому неустойчивому резонатору.

Общая величина потерь, характеризуемая суммарным коэффициентом α_s , определяет обратную связь данного

резонатор: $\beta = 1 - \alpha_{\Sigma}$. При малом уровне потерь ($\alpha_{\Sigma} \ll 1$) суммарный коэффициент приближенно может быть вычислен как сумма частных коэффициентов потерь. При значительных потерях вычисление α_{Σ} усложняется, так как коэффициент потерь, вообще говоря, не аддитивен:

$$\alpha_{\Sigma} = 1 - \prod_i (1 - \alpha_i). \quad (1.9a)$$

Если пользоваться логарифмическим коэффициентом потерь, то

$$A_{\Sigma} = \sum_i A_i. \quad (1.9b)$$

Следует особо отметить, что в сложных резонаторах, включающих несколько связанных полостей, величины суммарного коэффициента потерь и коэффициента обратной связи определяются не только энергетическими, но и фазовыми характеристиками резонаторных волн.

1.4. ЗАТУХАНИЕ КОЛЕБАНИЙ. ДОБРОТНОСТЬ

Уменьшение амплитуды колебаний в любой резонансной системе, когда время затухания много больше периода колебаний, характеризуется коэффициентом затухания или логарифмическим декрементом затухания [14]. За отрезок времени Δt , малый по сравнению с временем затухания, относительное уменьшение амплитуды A можно считать пропорциональным интервалу Δt : $\Delta A/A = \delta \Delta t$. Коэффициент пропорциональности δ называют коэффициентом затухания. Нетрудно видеть, что величина δ обратно пропорциональна времени, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

За один проход излучения в резонаторе длиной L , т. е. за время $\Delta t = L/c$, относительное уменьшение потока энергии определяется коэффициентом суммарных потерь: $\alpha_{\Sigma} = \Delta P/P$. Относительное снижение мощности равно удвоенному относительному снижению амплитуды $\Delta P/P = 2\Delta A/A = 2\delta \Delta t$. Следовательно, коэффициент затухания амплитуды связан с коэффициентом суммарных потерь соотношением

$$\delta = c\alpha_{\Sigma}/2L, \quad (1.10)$$

где c — скорость распространения света в резонаторе.

Другой характеристикой затухания колебаний в резонаторе является логарифмический декремент затухания. Этот параметр указывает относительное снижение амплитуды в каждом последующем периоде оптических колебаний ($T = \lambda/c$). Таким образом, декремент затухания — безразмерная величина

$$d = \delta T = \alpha_x \lambda / 2L. \quad (1.11)$$

Резонансная частота реальной колебательной системы отличается от резонансной частоты идеальной системы без потерь. Как известно [13, 14], если ω_0 — угловая частота идеальной системы, то наличие затухания снижает частоту до величины

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (1.12)$$

Ширина частотной полосы резонатора конечна, так как затухающие электромагнитные колебания, естественно, не являются монохроматическими. Энергетический спектр экспоненциально затухающих колебаний представляет собой лоренцеву линию с шириной (по уровню 0,5 от максимума)

$$\Delta\omega = 2\delta = \omega_0 d / \pi. \quad (1.13)$$

Свойство оптического резонатора сохранять энергию электромагнитных колебаний принято (так же, как для любой резонансной колебательной системы) характеризовать добротностью. Добротность резонатора определяется отношением средней накопленной в резонаторе энергии W к величине потерь энергии за период световых колебаний ΔW_T :

$$Q = 2\pi W / \Delta W_T. \quad (1.14)$$

Пусть поток энергии, проходящий через произвольное сечение резонатора, будет в какой-то момент равен P_t . В результате одного обхода резонатора этот поток уменьшится и окажется равным βP_t , где β — коэффициент обратной связи. Среднюю энергию электромагнитного поля в резонаторе, соответствующую рассматриваемому проходу волны, можно оценить как $W = nLP_t \sqrt{\beta}/c_0$, где L — длина резонатора; n — показатель преломления; c_0 — скорость света в свободном пространстве. В то же время потери энергии за период электромагнитных колебаний составят $\Delta W_T = P_t T (1 - \beta)$,

где T — период колебаний. Таким образом, получим для величины добротности выражение [12]

$$Q = 2\pi n L \sqrt{\beta} / (1 - \beta) \lambda_0. \quad (1.15)$$

Здесь λ_0 — длина волны излучения в вакууме. Если среда, заполняющая резонатор, неоднородна по длине (z) и показатель преломления меняется вдоль оси резонатора, то

$$Q = \frac{2\pi \sqrt{\beta}}{(1 - \beta) \lambda_0} \int_0^L n(z) dz.$$

Добротность увеличивается с ростом коэффициента обратной связи, так как последний определяет потери энергии за один проход волны в резонаторе. При $\beta \rightarrow 1$ добротность бесконечно возрастает, если же $\beta \rightarrow 0$, добротность падает до нуля. Добротность зависит и от длины волны излучения, так как последняя определяет период колебаний, к которому относятся потери энергии. Следует отметить, что пропорциональность добротности длине резонатора соблюдается только при независимости потерь от длины. На практике часть потерь зависит от длины (потери на рассеяние в среде резонатора и дифракционные потери), вследствие чего коэффициент обратной связи становится функцией длины резонатора и зависимость $Q(L)$ усложняется.

Величина добротности резонатора меняется в широких пределах. Для газовых генераторов характерна высокая величина добротности $Q = 10^8 - 10^9$. В твердотельных приборах добротность значительно ниже. Полупроводниковые генераторы характеризуются наименьшей добротностью резонатора $Q = 10^3 - 10^4$.

То, что величина добротности резонатора конечна, приводит, как отмечалось выше, к уменьшению резонансной частоты. Учитывая связь между добротностью и логарифмическим декрементом затухания ($Q = \pi/d$), из (1.12) получаем $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - (1/4Q^2)}$. Таким образом, частотный сдвиг, возникающий вследствие конечной величины добротности резонатора, может быть вычислен как

$$\omega_0 - \omega = \omega_0 / 8Q^2. \quad (1.16)$$

Ширину резонансной линии излучения также удобно выражать через добротность

$$\Delta\omega = \omega_0 / Q. \quad (1.17)$$

Нетрудно видеть, что сдвиг резонансной частоты в реальных условиях значительно меньше ширины линии. Сама же ширина резонансной линии колеблется в широких пределах в зависимости от доброт-

ности резонатора. Для наиболее добротных газовых систем величин $\Delta\omega$ минимальна и достигает 10^5 — 10^6 Гц.

Интересно отметить, что добротность кольцевого резонатора для встречных волн может быть разной (амплитудная невязанность). Количественной мерой этого эффекта является так называемая *разнодобротность* $\Delta Q/Q$. Разная величина добротности для встречных волн приводит к различию в энергетике их генерации вплоть до возникновения режима однонаправленной генерации. Кроме того, амплитудная невязанность резонатора приводит в соответствии с (1.16) к различию резонансных частот встречных волн.

В кольцевом резонаторе возможна также фазовая невязанность, которая непосредственно приводит к неравенству собственных частот встречных волн. Используя фазовое условие резонанса, легко найдем

$$\omega_1 - \omega_2 = c\Delta\Phi/L, \quad (1.18)$$

где $\Delta\Phi$ — разность фазовых набегов для встречных волн. Эффект фазовой невязанности оказывается полезным в некоторых приложениях кольцевых резонаторов и специально создается введением в резонатор так называемых фазовых невязанных устройств.

Глава 2

ЛУЧЕВАЯ ОПТИКА ИДЕАЛЬНОГО ДВУХЗЕРКАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим простейший двухзеркальный резонатор, образованный двумя обращенными друг к другу идеально съюстированными и безабберационными отражающими поверхностями (рис. 2.1). Такой линейный однополостной резонатор играет фундаментальную роль в теории по двум причинам. Во-первых, большой класс реальных устройств можно рассматривать приближенно как идеальный пустой двухзеркальный резонатор. Во-вторых, анализ многих более сложных оптических резонаторных систем может быть сведен к анализу системы идеальных или возмущенных двухзеркальных резонаторов.

Рассматриваемые резонаторы (рис. 2.1) характеризуются расстоянием L между отражающими поверхностями, радиусом кривизны R_i *) и поперечными размера-

*) Используемый в дальнейшем выбор знака радиуса кривизны отражающей поверхности обусловлен традицией литературы по открытым резонаторам и не соответствует принятому в геометрической оптике. Мы считаем радиус кривизны образующей поверхности положительным, если ее выпуклость обращена во внешнее пространство.

ми образующих поверхностей a_i , а также длиной волны излучения λ . При этом свойства резонатора в рамках геометрической оптики определяются совокупностью двух параметров конфигурации $g_i = 1 - L/R_i$ ($i = 1$ и 2), а роль дифракционных эффектов зависит от значений двух чисел Френеля $N_i = a_i^2/\lambda L$. Ряд свойств резонатора (особенно при больших N_i) следует из геометрического рассмотрения, которое и составляет содержание настоящей главы *).

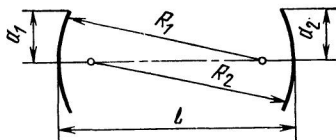


Рис. 2.1. Простейший двухзеркальный резонатор

При исследовании идеального двухзеркального резонатора его считают центрированной оптической системой. Оптической осью резонатора называют общую нормаль к обеим отражающим поверхностям, т. е. линию, проходящую через центры кривизны этих поверхностей. В съюстированном состоянии резонатора его оптическая ось совпадает с осями симметрии отражающих элементов.

Применяемые на практике оптические резонаторы характеризуются очень малой величиной отношения поперечного размера к длине (обычно $a_i/L \leq 0,02$). Такой же порядок имеет отношение поперечного размера к радиусу кривизны зеркал. Это позволяет ограничить рассмотрение параксиальными лучами и проводить его в рамках гауссовой оптики.

2.1. КОНФИГУРАЦИЯ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ. G-ПЛОСКОСТЬ

Основной характеристикой резонатора в геометрической оптике является его конфигурация, т. е. совокупность значений кривизны зеркал и расстояния между ними. Конфигурация простейшего резонатора, составленного из двух сферических отражающих поверхностей, задается двумя параметрами конфигурации

$$g_1 = 1 - L/R_1 \text{ и } g_2 = 1 - L/R_2. \quad (2.1)$$

*) Приближение лучевой оптики используется в ряде работ по теории открытых резонаторов [17, 84—87, 97, 121].

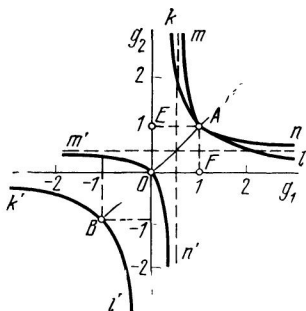


Рис. 2.2. G -диаграмма

Возможность замены трех переменных R_1 , R_2 и L , характеризующих конфигурацию резонатора, двумя параметрами g_1 и g_2 показана в работе [21].

При описании резонаторов часто используют так называемую G -плоскость в декартовой системе координат g_1 и g_2 (рис. 2.2). Любая произвольная конфигурация резонатора однозначно соответствует некоторой точке на G -плоскости. Резонатор, составленный из

плоских зеркал, соответствует, очевидно, точке $A(+1, +1)$ на диаграмме рис. 2.2. Симметричные конфигурации, образованные зеркалами одинаковой кривизны ($g_1 = g_2$), соответствуют точкам, располагающимся на прямой AB , которая делит первый и третий квадранты диаграммы пополам.

Большое значение в теории имеют *конфокальные* конфигурации (фокальные точки образующих отражателей совпадают). Записав условие конфокальности в виде $R_1/2 + R_2/2 = L$, найдем уравнение геометрического места конфокальных конфигураций:

$$2g_1g_2 = g_1 + g_2. \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что уравнению (2.2) соответствуют две ветви гиперболы mAn и $m'On'$ с асимптотами $g_1 = \pm 1/2$ и $g_2 = \pm 1/2$. Легко также убедиться, что ветвь mAn описывает такие конфокальные конфигурации, при которых общий фокус оказывается вне резонаторной полости ($\text{sign } g_1 = \text{sign } g_2$)^{*}. Такие резонаторы называют *телескопическими*. Ветвь $m'On'$ соответствует «внутреннему» расположению общего фокуса ($\text{sign } g_1 = -\text{sign } g_2$). *Симметричный конфокальный* резонатор с внутренним фокусом отображается началом координат 0.

^{*} Точка A попадает на конфокальную ветвь, так как плоский резонатор может считаться конфокальным с расположением общего фокуса в бесконечности,

Другой характерной конфигурацией резонатора является так называемая *концентрическая* (центры кривизны образующих поверхностей совпадают). Для концентрических конфигураций выполняется условие $R_1 + R_2 = L$, из которого следует уравнение геометрического места таких конфигураций:

$$g_1 g_2 = 1. \quad (2.3)$$

Уравнению (2.3) соответствуют две ветви гиперболы kAl и $k'B'l'$, асимптотами которой являются координатные оси. Ветвь kAl , включающая точку A , относится к резонаторам с внешним расположением общего центра кривизны образующих поверхностей. Ветвь $k'B'l'$ соответствует расположению общего центра кривизны внутри резонаторной полости. Симметричный концентрический резонатор с внутренним положением общего центра кривизны (его называют *сферическим*) отображается точкой $B(-1, -1)$.

Конфигурация, образованная плоской поверхностью и сферической поверхностью с радиусом, равным длине резонатора, называется *полусферической*. Ей соответствуют точки $E(0, +1)$ и $F(+1, 0)$ на G -плоскости. Резонаторы с параметрами $g_i = 1$ и $g_k = 0,5$ называются *полуconfокальными*.

2.2. ХОД ЛУЧА В РЕЗОНАТОРЕ. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЛИНЗ. УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Проследим за поведением светового луча в резонаторе. Каждый луч, попадающий на образующее зеркало, отражается вновь в резонаторную полость. Последовательно отражаясь, исходный луч многократно пересекает пространство между зеркалами.

Можно представить некую бесконечную периодическую последовательность линз, ход лучей в которой соответствует ходу лучей в резонаторе. Такая последовательность должна быть, очевидно, составлена из чередующихся тонких линз (рис. 2.3), каждая из которых имеет оптическую силу одного из зеркал резонатора, при этом расстояние между соседними линзами равно длине резонатора. Границы периода такой оптической структуры можно устанавливать произвольно, но всегда

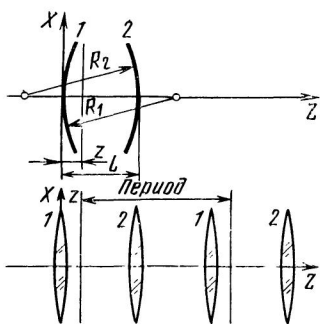


Рис. 2.3. Двухзеркальный резонатор и соответствующая ему бесконечная последовательность линз с фокусными расстояниями $f_1=R_1/2$ и $f_2=R_2/2$

обе границы соответствуют одному сечению резонатора, а расстояние между ними равно удвоенной длине резонатора. Описанная эквивалентная последовательность линз часто рассматривается как аналог двухзеркального резонатора [11, 15, 16, 59]. Введем систему декартовых координат XYZ так, чтобы ось Z совпала с оптической осью резонатора, а оси X и Y располагались в ортогональных меридиональных плоскостях. Начало координат поместим в центр зеркала 1 (рис. 2.3). Произвольный оптический луч оказы-

вается однозначно заданным, если известны его координаты в произвольном поперечном сечении z резонатора и углы наклона луча к координатным меридиональным плоскостям $x_z, y_z, \varphi_z, \psi_z$.

Если начальные координаты луча имели значения $x_z^{(0)}, y_z^{(0)}, \varphi_z^{(0)}, \psi_z^{(0)}$, то после полного обхода резонатора (после отражения от обоих зеркал) и возвращения луча в ту же плоскость z координаты примут, вообще говоря, новые значения: $x_z^{(1)}, y_z^{(1)}, \varphi_z^{(1)}, \psi_z^{(1)}$. После некоторого n -го обхода резонатора рассматриваемый луч будет иметь координаты $x_z^{(n)}, y_z^{(n)}, \varphi_z^{(n)}, \psi_z^{(n)}$.

Анализ последовательных прохождений луча в резонаторе удобно вести с помощью метода лучевых матриц, подробно описанного в приложении А*). Преобразование координат параксиального луча, которое совершает любая безабберационная оптическая система, оказывается линейным. В частности, для рассматриваемого идеального резонатора

$$x_z^{(1)} = A_z^{(1)} x_z^{(0)} + B_z^{(1)} \varphi_z^{(0)}, \quad \varphi_z^{(1)} = C_z^{(1)} x_z^{(0)} + D_z^{(1)} \varphi_z^{(0)}, \quad (2.4)$$

*) Близкий к матричному операторный метод использован в работе [86].

$$y_z^{(1)} = A_z^{(1)} y_z^{(0)} + B_z^{(1)} \psi_z^{(0)}, \quad \psi_z^{(1)} = C_z^{(1)} y_z^{(0)} + D_z^{(1)} \psi_z^{(0)}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты этого линейного преобразования образуют вещественную лучевую матрицу $\hat{M} = (A_z^{(1)}, B_z^{(1)}, C_z^{(1)}, D_z^{(1)})$, которая характеризует оптическую систему (в данном случае период эквивалентной линзовой последовательности с границами, соответствующими сечению z).

Как показано в приложении А, лучевая матрица произвольной сложной оптической системы, состоящей из тонких линз и промежутков между ними, равна произведению последовательно взятых матриц составляющих элементов. При этом матрица тонкой линзы с фокусом f имеет вид

$$\hat{M}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица свободного пространства длиной d записывается так:

$$\hat{M}_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае матрица периода эквивалентной линзовой последовательности с произвольным расположением границ периода (рис. 2.3) определяется произведением

$$\hat{M}^{(1)} = \hat{M}_z \hat{M}_{f_1} \hat{M}_L \hat{M}_{f_2} \hat{M}_{(L-z)}.$$

Произведя вычисления, найдем элементы лучевой матрицы

$$\begin{aligned} A_z^{(1)} &= (1 - L/f_2) - (1/f_1 + 1/f_2 - L/f_1 f_2)z, \\ B_z^{(1)} &= (2 - L/f_1)L - (2 - L/f_2)Lz/f_1 + \\ &\quad + (1/f_1 + 1/f_2 - L/f_1 f_2)z^2, \\ C_z^{(1)} &= -1/f_1 - 1/f_2 + L/f_1 f_2, \\ D_z^{(1)} &= (1 - L/f_1)(1 - L/f_2) - L/f_1 + \\ &\quad + (1/f_1 + 1/f_2 - L/f_1 f_2)z. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Продольная координата z отсчитывается от зеркала (линзы) 1.

В приложении А показано, что лучевые матрицы вида (2.5) обладают некоторыми особенностями. Определитель таких матриц всегда равен единице (унимодулярность). Другим свойством матрицы периода является независимость суммы $A_z^{(1)} + D_z^{(1)}$ от выбора граничных сечений z . Поэтому величину $[A_z^{(1)} + D_z^{(1)}]/2 = I$, играющую важную роль в теории резонаторов, можно назвать лучевым инвариантом резонатора. Учитывая связь фокусных расстояний эквивалентных линз с параметрами конфигурации резонатора, нетрудно найти

$$I = [A_z^{(1)} + D_z^{(1)}]/2 = 2g_1 g_2 - 1. \quad (2.6)$$

Координаты луча, соответствующие произвольному числу n проходов в резонаторе, также линейно связаны с начальными координатами:

$$x_z^{(n)} = A_z^{(n)} x_z^{(0)} + B_z^{(n)} \varphi_z^{(0)},$$

$$\varphi_z^{(n)} = C_z^{(n)} x_z^{(0)} + D_z^{(n)} \varphi_z^{(0)},$$

$$y_z^{(n)} = A_z^{(n)} y_z^{(0)} + B_z^{(n)} \psi_z^{(0)},$$

$$\psi_z^{(n)} = C_z^{(n)} y_z^{(0)} + D_z^{(n)} \psi_z^{(0)}.$$

Здесь $A_z^{(n)}$, $B_z^{(n)}$, $C_z^{(n)}$, $D_z^{(n)}$ — элементы лучевой матрицы, характеризующей оптическую систему, которая состоит из n периодов. Такая матрица вычисляется как n -я степень матрицы, описывающей один период.

$$m^{(n)} = \begin{pmatrix} A_z^{(n)} & B_z^{(n)} \\ C_z^{(n)} & D_z^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_z^{(1)} & B_z^{(1)} \\ C_z^{(1)} & D_z^{(1)} \end{pmatrix}^n.$$

Используя известную в теории матричного исчисления [82] теорему Сильвестра, запишем

$$A_z^{(n)} = \frac{1}{\sin \theta} \{A_z^{(1)} \sin(n\theta) - \sin[(n-1)\theta]\},$$

$$B_z^{(n)} = B_z^{(1)} \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}, \quad C_z^{(n)} = C_z^{(1)} \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}, \quad (2.7)$$

$$D_z^{(n)} = \frac{1}{\sin \theta} \{D_z^{(1)} \sin(n\theta) - \sin[(n-1)\theta]\},$$

где $\theta = \arccos I$.

Выражения (2.7) позволяют сразу указать условие устойчивости резонатора. Напомним, что устойчивость резонатора соответствует конечному значению координат луча при бесконечном возрастании числа проходов. Поскольку координаты исходного луча, естественно, конечны, то для формулирования условия устойчивости следует потребовать ограниченность элементов лучевой матрицы $M^{(n)}$. Нетрудно видеть, что последнее требование выполняется, если угол θ веществен, т. е. если

$$-1 < I < +1. \quad (2.8)$$

Используя выражение (2.6), перейдем к общепринятой форме записи условия устойчивости

$$0 < g_1 g_2 < 1. \quad (2.9)$$

Условие (2.9) определяет область устойчивых резонаторов на G -плоскости, ограниченную координатными осями и гиперболами концентрических конфигураций.

В заключение отметим, что четкая граница по потерям между устойчивыми и неустойчивыми резонаторами существует только в приближении геометрикооптического рассмотрения ($N_{i,k} \rightarrow \infty$). В реальности переход в неустойчивую область соответствует более или менее (в зависимости от величин $N_{i,k}$) крутому нарастанию потерь резонатора.

2.3. ЛУЧЕВЫЕ СЕМЕЙСТВА, КАУСТИКИ И ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ УСТОЙЧИВОГО РЕЗОНАТОРА

Рассмотрим теперь некоторые закономерности образования лучевых семейств в устойчивом резонаторе. Выражения $x_z^{(n)}$ и $y_z^{(n)}$ могут рассматриваться как параметрические уравнения «движения» следа луча в произвольном поперечном сечении резонатора z . Используя (2.7), запишем эти уравнения

$$x_z^{(n)} = (\sin \theta)^{-1} \{ [A_z^{(1)} \sin(n\theta) - \sin(n-1)\theta] x_z^{(0)} + [B_z^{(1)} \sin(n\theta)] \varphi_z^{(0)} \}, \quad (2.10)$$

$$y_z^{(n)} = (\sin \theta)^{-1} \{ [A_z^{(1)} \sin(n\theta) - \sin(n-1)\theta] y_z^{(0)} + [B_z^{(1)} \sin(n\theta)] \psi_z^{(0)} \}. \quad (2.10)$$

Нетрудно видеть, что выражения (2.10) дают для устойчивого резонатора гармонический закон изменения каждой поперечной координаты следа:

$$\begin{aligned} x_z^{(n)} &= X_z \sin(n\theta + \Phi_z), \\ y_z^{(n)} &= Y_z \sin(n\theta + \Psi_z). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Амплитуды и начальные фазы задаются координатами исходного луча и конфигурацией резонатора*). Сопоставляя выражения (2.11) и (2.10), можно найти параметры гармонического закона изменения поперечных координат

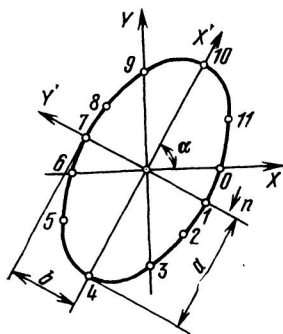
$$\begin{aligned} X &= (1 - I^2)^{-1/2} [(1 - AD)x^2 + B(A - D)x\varphi + B^2\varphi^2]^{1/2}, \\ Y &= (1 - I^2)^{-1/2} [(1 - AD)y^2 + B(A - D)y\psi + B^2\psi^2]^{1/2}, \\ \Phi &= \text{arctg} \{ 2x(1 - I^2)^{1/2} / [(A - D)x + 2B\varphi] \}, \\ \Psi &= \text{arctg} \{ 2y(1 - I^2)^{1/2} / [(A - D)y + 2B\psi] \}^{**}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

*) Здесь рассматриваются резонаторы, составленные из идеальных центрированных безабберационных отражающих поверхностей круглой апертуры. Однако данный метод анализа применим и к резонаторам, обладающим простым астигматизмом, в частности к резонатору, составленному из полосовых цилиндрических зеркал с одинаковым расположением отражающих полос. В случае астигматического резонатора целесообразно помещать поперечные координатные оси в главных меридиональных сечениях. При этом лучевые матрицы периода для сечений XOZ и YOZ окажутся разными. В частности, для полосового резонатора с ориентацией полос вдоль оси Y лучевая матрица периода для сечения XOZ по-прежнему задается выражениями (2.5), а для ортогонального сечения YOZ получим

$$\hat{M}_y = \begin{pmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**) Здесь и ниже в приводимых формулах для произвольного поперечного сечения резонатора в обозначениях параметров гармонического закона изменения поперечных координат (2.11) X_z , Y_z , Φ_z , Ψ_z , координат исходного луча $x_z^{(0)}$, $y_z^{(0)}$, элементов лучевой матрицы периода $A_z^{(1)}$, $B_z^{(1)}$, $C_z^{(1)}$, $D_z^{(1)}$ опущены индексы.

Рис. 2.4. След лучевого семейства устойчивого резонатора



Выражения (2.11) определяют эллиптический след лучевого семейства в произвольном поперечном сечении резонатора (рис. 2.4). В процессе последовательных проходов резонаторной полости след луча «обегает» периметр этого эллипса. Величины полуосей и азимут эллипса зависят от конфигурации резонатора и координат исходного луча

$$a, b = \left\{ \frac{2X^2Y^2 \sin^2(\Psi - \Phi)}{(X^2 + Y^2) \mp \sqrt{X^4 + Y^4 + 2X^2Y^2 [1 - 2 \sin^2(\Psi - \Phi)]}} \right\}^{1/2}, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2XY \cos(\Psi - \Phi)}{X^2 - Y^2}.$$

В результате ряда проходов луч может самосопрячься. Такое лучевое семейство окажется замкнутым с ограниченным числом лучей. Число проходов луча N_0 , соответствующих замыканию семейства, не зависит от параметров исходного луча, а определяется только конфигурацией резонатора. Из выражений (2.11) следует, что N_0 является наименьшим целым числом вида $N_0 = 2\pi k / \Theta$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Некоторые устойчивые конфигурации резонатора соответствуют быстрому замыканию лучевых семейств. Конфигурации с заданным N_0 определяются формулой

$$g_1 g_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi k}{N_0} \right) \right]. \quad (2.14)$$

Здесь k — любое целое положительное число.

Лучевые семейства в устойчивых резонаторах ограничены каустической поверхностью. Из симметрии задачи следует, что каустическая поверхность является поверхностью вращения. Образующая каустическая кривая задается уравнением $a(z)$. При этом очевидно, что в образовании данной каустической поверхности примут

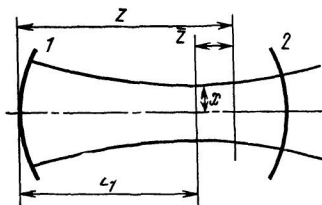


Рис. 2.5. Каустика лучевого семейства устойчивого резонатора при $y=0$

участие все лучевые семейства с одинаковой величиной $a(z)$. Рассмотрим форму каустической кривой.

Для анализа формы огибающей линии семейства совместим поперечные координатные оси с главными осями эллиптического следа — перейдем к осям X' , Y' (рис. 2.4). Нетрудно убедиться, что такая перемена координатных осей приведет к упрощению формул (2.13):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 0, \quad a = X, \quad b = Y.$$

Каустическая кривая в этом случае задается функцией $X(z)$. Кроме того, очевидно, что без потери общности анализа можно полагать начальным любой луч данного семейства. Выберем в качестве начального луч, для которого $\varphi = 0$. Тогда уравнение огибающей $X(z)$ существенно упростится

$$X(z) = x \sqrt{(1 - AD)/(1 - I^2)}.$$

Если подставить элементы лучевой матрицы (2.5), выраженные через параметры конфигурации, то получим уравнение каустической кривой в виде

$$X(z) = x \sqrt{\frac{1 - [c_1 - c_3(2z/L)][c_2 + c_3(2z/L)]}{4g_1g_2(1 - g_1g_2)}},$$

где $c_1 = 2g_2 - 1$; $c_2 = 4g_1g_2 - 2g_2 - 1$; $c_3 = g_1 + g_2 - 2g_1g_2$.

С помощью известных методов анализа кривых второго порядка нетрудно убедиться, что полученное уравнение описывает гиперболу (рис. 2.5), симметричную относительно плоскости, с координатой

$$z_1 = \frac{g_2(1 - g_1)L}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2}.$$

Перенесем теперь начало координат в центр гиперболы, обозначив новую продольную координату $\bar{z} = z - z_1$ (см. рис. 2.5). Введя параметр

$$R_0 = 2L \frac{\sqrt{g_1g_2(1 - g_1g_2)}}{g_1 + g_2 - 2g_1g_2},$$

который зависит только от конфигурации резонатора, получим уравнение гиперболической каустики в виде

$$X(\bar{z}) = x \sqrt{1 + (\bar{z}/R_0)^2} \quad (2.15)$$

с асимптотами $X(\bar{z}) = 2x\bar{z}/R_0$.

Наименьшее сечение каустики, так называемая «перетяжка» (рис. 2.5), располагается на расстоянии z_1 от первого зеркала, и его радиус как раз равен координате исходного луча x . Различные лучевые семейства, отличающиеся исходным лучом, образуют подобные каустики.

Представление о существовании и форме каустических поверхностей в устойчивых резонаторах вытекает из следующей теоремы геометрической оптики: *при отражении от поверхности эллипсоида вращения падающий и отраженный лучи касаются поверхности одного и того же гиперboloида или эллипсоида вращения, конфокальных с отражающим эллипсоидом* [2].

Если определить волновые поверхности лучевого семейства как сферические, ортогональные каустическим [9], то нетрудно найти их радиус. В самом деле, воспользуемся очевидным соотношением для радиуса кривизны поверхности, ортогональной к каустике:

$$R(\bar{z}) = X(\bar{z}) \left/ \frac{\partial X(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right.$$

Подставляя значения $X(\bar{z})$ и $\partial X(\bar{z})/\partial \bar{z}$ из (2.15), получаем

$$R = \frac{R_0^2}{4\bar{z}} \left[1 + \left(\frac{2\bar{z}}{R_0} \right)^2 \right]. \quad (2.16)$$

Кривизна определенной таким образом волновой поверхности не зависит от выбора лучевого семейства, а является универсальной характеристикой данного резонатора. Это позволяет считать найденную структуру волновых поверхностей [формула (2.16)] собственной для данного резонатора. В минимальном сечении каустики ($\bar{z}=0$) кривизна волновой поверхности равна нулю. С увеличением \bar{z} кривизна возрастает, достигая максимума при $z=R_0/2$. Дальнейшее удаление от минимального сечения связано с монотонным уменьшением кривизны волновой поверхности.

2.4. ЛУЧЕВАЯ ОПТИКА НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Для неустойчивых резонаторов проведенный в предыдущем параграфе анализ хода лучей теряет смысл, так как в этом случае $|I| = |\cos \theta| > 1$ и параметр θ не может быть вещественным. Положим $\theta = \theta + i\tau$. Тогда,

используя тригонометрические функции комплексного аргумента, получаем $I = \cos \Theta = \cos \theta \operatorname{ch} \tau - i \sin \theta \operatorname{sh} \tau$. Так как инвариант I всегда выражается вещественным числом, то θ может принимать значения $\theta = k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. В зависимости от знака I возможны два варианта неустойчивых резонаторов с несколько различными свойствами.

Рассмотрим сначала случай $I > 1$, соответствующий четному k и положению конфигурационной точки в первом или третьем квадрантах G -диаграммы. В этом случае

$$I = \operatorname{ch} \tau, \quad \tau = \operatorname{arch} I = \tau_0 + \ln(I + \sqrt{I^2 - 1}).$$

Используя формулы (2.10), легко получить параметрические уравнения следа луча в произвольном сечении полости

$$x_z^{(n)} = [(A - I)x + B\varphi](I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau) + x \operatorname{ch}(n\tau), \quad (2.17a)$$

$$y_z^{(n)} = [(A - I)y + B\psi](I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau) + y \operatorname{ch}(n\tau).$$

Здесь, как и раньше, x, y — линейные, а φ, ψ — угловые координаты исходного луча в произвольном поперечном сечении z резонаторной полости; n — число проходов луча. Поскольку выбор поперечных осей XU произволен, удобно положить $y = 0$. Тогда уравнения

$$x_z^{(n)} = [(A - I)x + B\varphi](I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau) + x \operatorname{ch}(n\tau), \quad (2.17b)$$

$$y_z^{(n)} = B\psi(I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau)$$

определяет траекторию следа луча в поперечном сечении резонатора. Эта траектория изображена на рис. 2.6. Видно, что в отличие от устойчивых резонаторов здесь траектория следа оказывается незамкнутой. Луч последовательно удаляется от оси резонатора, стремясь к фиксированной меридиональной плоскости, координируемой углом

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left[\frac{B\psi}{(A - I + \sqrt{I^2 - 1})x + B\varphi} \right].$$

Если $I < -1$, что соответствует положению конфигурационной точки во втором или четвертом квадратах

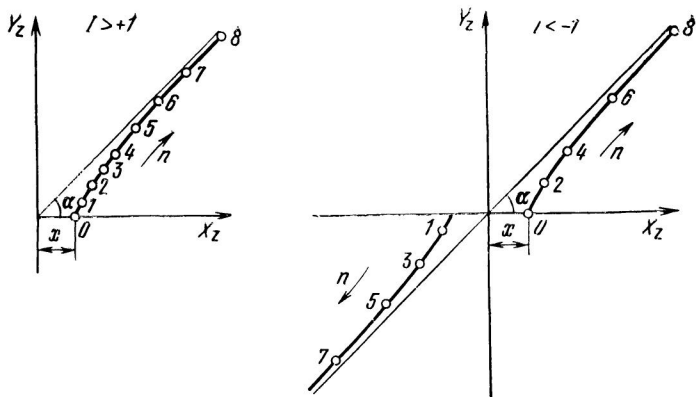


Рис. 2.6. След лучевого семейства неустойчивого резонатора

G -диаграммы, число k может принимать только нечетные значения. В этом случае

$$I = -\operatorname{ch} \tau, \quad \tau = \operatorname{arch}(-I) = \ln(-I + \sqrt{I^2 - 1}).$$

Для траектории луча аналогично можно получить следующие параметрические уравнения при $y=0$:

$$x_z^{(n)} = (-1)^n \{[(A-1)x + B\varphi](I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau) + x \operatorname{ch}(n\tau)\}, \quad (2.17\text{в})$$

$$y_z^{(n)} = (-1)^n B\psi (I^2 - 1)^{-1/2} \operatorname{sh}(n\tau).$$

Нетрудно видеть, что координаты лучевого следа меняют знак в каждом последующем проходе. Таким образом, траектория следа луча имеет две ветви (рис. 2.6). Однако, как и в случае $I > +1$, луч последовательно удаляется от оси резонатора, стремясь к фиксированной меридиональной плоскости, координируемой углом α . Волновые поверхности таких пучков образуют совокупность концентрических сфер. Из соображений симметрии ясно, что собственные волновые фронты коаксиальны отражающим поверхностям и поэтому могут характеризоваться меридиональными лучами (например, $y_0=0$, $\varphi_0=0$). Радиус кривизны волновой поверхности опре-

Делится отношением линейной координаты луча к угловой в данном сечении

$$R_z = \frac{x_z^{(0)}}{\varphi_z^{(0)}} = \frac{x_z^{(1)}}{\varphi_z^{(1)}} = \dots = \frac{x_z^{(n)}}{\varphi_z^{(n)}}.$$

Выразим угловую координату луча через линейную ($\varphi_z = x_z/R_z$) и составим следующее уравнение преобразования координат луча после произвольного $(n+1)$ -го прохода:

$$\begin{pmatrix} x_z^{(n+1)} \\ x_z^{(n+1)}/R_z \end{pmatrix} = \hat{M}_z \begin{pmatrix} x_z^{(n)} \\ x_z^{(n)}/R_z \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Отсюда легко получить уравнение, содержащее радиус кривизны собственной волны $A + B/R_z = CR_z + D$. Это уравнение дает два значения для R_z , соответствующее двум сопряженным волнам:

$$R_{z1,2} = \frac{1}{C} \left[\frac{1}{2}(A - D) \pm \sqrt{T^2 - 1} \right]. \quad (2.19)$$

При положительном R_z выпуклость волнового фронта обращена в сторону направления распространения волны. Кривизна волнового фронта зависит от конфигурации резонатора и рассматриваемого поперечного сечения z . В пределах прохода волны от одного зеркала резонатора к другому радиус кривизны линейно зависит от продольной координаты, что соответствует гомоцентричности собственного пучка. Положение центра собственного пучка задается очевидным условием $z_0 = z - R_z$.

Заметим, что в отличие от устойчивых резонаторов кривизна волнового фронта прямой и обратной волн не совпадает. Кроме того, плоский фронт либо реализуется в пределах всего прохода волны, либо невозможен ни в одном сечении резонатора.

Как следует из (2.19), получение плоской волны в рамках лучевой оптики возможно, если $C = 0$. Нетрудно убедиться, что это условие соответствует конфокальному неустойчивому резонатору:

$$1/f_1 + 1/f_2 = L/(f_1 f_2), \quad f_1 + f_2 = L.$$

Практически для реализации плоской волны используют *телескопические* резонаторы, составленные из зеркал с кривизной разного знака.

Сечение собственного пучка не восстанавливается при полном обходе волны. Действительно, из матричного уравнения (2.18) легко найти

$$M = x_{n+1}/x_n = CR + D = A + B/R.$$

Здесь безразмерный коэффициент M имеет смысл коэффициента поперечного увеличения для полного циклического обхода волны. Это существенная и удобная характеристика неустойчивого резонатора, просто определяющая его параметры. Из (2.19) получим возможные значения коэффициента увеличения

$$M_{1,2} = I \pm \sqrt{I^2 - 1}. \quad (2.20a)$$

Коэффициент увеличения не зависит от выбора сечения резонатора, а определяется только величиной g_1, g_2 . Легко заметить, что оба возможных значения коэффициента увеличения связаны соотношением $M_1 = M_2^{-1}$

Учитывая, что величины I и M могут иметь разные знаки, удобно представить выражение (2.20a) в виде

$$|M_{1,2}| = |I| \pm \sqrt{I^2 - 1}. \quad (2.20b)$$

При использовании знака «+» в (2.20b) получаем $|M_1| > 1$. Второе значение $|M_2| < 1$ соответствует знаку «—» в (2.20b). Первое решение описывает расходящуюся волну, сечение которой увеличивается после каждого прохода, второе решение — сходящуюся волну, сечение которой убывает после каждого прохода.

Итак, рассмотрение неустойчивого резонатора в рамках лучевой оптики приводит к выводу об одновременном существовании в таком резонаторе собственных пучков (волн) двух видов: расходящихся ($|M| > 1$) и сходящихся ($|M| < 1$). Анализ устойчивости найденных выше решений показывает, однако, что по отношению к случайным возмущениям расходящаяся волна устойчива, а сходящаяся — неустойчива.

Устойчивость волны в данном случае связана с поведением случайных возмущений волнового фронта. Представим, что в результате случайных причин стационарная собственная волна возмущена — кривизна волнового фронта изменилась на малую величину относительно собственного решения (2.19). Если это возмущение будет при дальнейших проходах волны нарастать,

То волна существенно исказится, окажется несобственной и быстро затухнет. Если же возникшая волновая aberrация будет при дальнейших проходах уменьшаться, то в конце концов кривизна волнового фронта приобретет свое стационарное значение и волна окажется устойчивой.

Пусть кривизна волновой поверхности в произвольном сечении резонатора в n -м проходе волны $\rho + \Delta\rho_n$, где ρ — стационарная кривизна волновой поверхности; $\Delta\rho_n$ — случайное возмущение кривизны. В следующем $(n+1)$ -м проходе кривизна волновой поверхности будет иметь величину $\rho + \Delta\rho_{n+1}$. Очевидно, что устойчивость волны определяется условием $\Delta\rho_{n+1} < \Delta\rho_n$. Таким образом, критерием устойчивости может служить значение производной $\partial\rho_{n+1}/\partial\rho_n$: при $|\partial\rho_{n+1}/\partial\rho_n| > 1$ волна неустойчива, при $|\partial\rho_{n+1}/\partial\rho_n| < 1$ волна устойчива. Из матричного уравнения (2.18) легко получить

$$\rho_{n+1} = (C + D\rho_n) / (A + B\rho_n).$$

Отсюда с учетом унимодулярности лучевой матрицы найдем

$$\left| \frac{\partial\rho_{n+1}}{\partial\rho_n} \right| = \frac{D(A + B\rho_n) - B(C + D\rho_n)}{(A + B\rho_n)^2} = \frac{1}{M^2}.$$

Таким образом, расходящаяся волна ($|M| > 1$) оказывается устойчивой, а сходящаяся ($|M| < 1$) — неустойчивой. Желая рассматривать только устойчивую волну, мы должны выбирать знак в формулах (2.19) и (2.20) такой же, как у величины l .

Рассмотрение неустойчивых резонаторов в рамках лучевой оптики позволяет установить поперечное распределение амплитуды для собственных волн. Поскольку в процессе последовательных проходов относительное распределение амплитуды в собственной волне по радиусу апертуры $f(r)$ сохраняется, а сечение волны увеличивается, то очевидным оказывается следующее функциональное уравнение:

$$\Lambda_n f(r) = f(r/M), \quad (2.21)$$

где Λ_n — некоторая, вообще говоря, комплексная константа; M — коэффициент линейного расширения собственной волны.

Уравнение (2.21) имеет решение вида

$$f_n(r) = C_n r^n. \quad (2.22)$$

Требование существования функции $f_n(r)$ и всех ее производных в точке $r=0$ приводит к ограничению возможных значений n , которые могут принимать только целые положительные значения $n=0, 1, 2, \dots$. Выражение типа (2.22) описывает поперечные радиальные распределения амплитуды собственных волн в лучевом при-

ближении. Основная волна ($n=0$) имеет постоянную амплитуду по всему сечению. Для волн высшего порядка амплитуда, принимая нулевое значение на оси резонатора, возрастает к краям по степенному закону.

Существенная особенность неустойчивых резонаторов — наличие потерь энергии в рамках лучевого приближения. Поскольку сечение собственных волн возрастает с каждым проходом, часть энергии неизбежно удаляется из резонаторной полости. Рассматривая распределения типа (2.22), легко получить коэффициент потерь для полного циклического прохода волны в резонаторе

$$\alpha = 1 - M^{-2(n+1)}. \quad (2.23)$$

Величина потерь быстро возрастает с удалением конфигурации резонатора от границ устойчивости*).

Глава 3

ДВУХЗЕРКАЛЬНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ (ВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

В формировании собственных типов колебаний оптических резонаторов существенную роль играют дифракционные эффекты. Поэтому в рамках лучевой оптики невозможно исследовать ряд важных модовых характеристик (детальное пространственное распределение электромагнитного поля, затухание, сдвиг резонансных частот), обусловленных конечной величиной длины волны излучения и ограничением поперечных размеров резонаторной полости. Указанные характеристики, естественно, вытекают из волнового рассмотрения вопроса, которое составляет содержание данной главы.

Строгое исследование электромагнитного поля в открытом резонаторе должно быть основано на рассмотрении уравнений Максвелла (или соответствующих волновых уравнений) с определенными начальными и граничными условиями. Из стационарного решения этой задачи можно получить характеристики резонансных

*) Здесь рассмотрены только радиальные распределения амплитуды при аксиальной симметрии резонатора. Более общий случай двумерного распределения рассмотрен в § 5.3.

типов колебаний. Подобный способ построения теорий открытых резонаторов наталкивается, однако, на серьезные математические трудности, осложняющие получение обзримых прикладных результатов [36—39, 56, 57, 125]. Один из возможных путей преодоления этих трудностей заключается в поисках асимптотического решения волнового уравнения, в приближении малости длины волны оптического излучения по сравнению с поперечными размерами резонаторной полости [2, 64].

Другой метод сводится к использованию скалярной теории дифракции Кирхгофа [1, 11, 24, 25]. Обычно линейные размеры резонатора (расстояние между зеркалами, радиусы кривизны отражающих поверхностей, поперечные размеры) на много порядков превышают длину волны излучения. Кроме того, продольные размеры резонатора существенно больше поперечных, так что волновой вектор излучения ориентирован близко к оси резонатора. В этой ситуации рационально использовать приближение скалярной теории дифракции Кирхгофа. Такой подход, позволяющий наиболее наглядно исследовать характеристики резонаторных систем, используется в основном в данной главе. Адекватность использования методов скалярной теории дифракции, с одной стороны, и асимптотического (при $N \gg 1$) исследования волнового уравнения, с другой стороны, для однородного заполнения резонатора показана в [40]. В данной главе, как и в предыдущей, резонатор полагается составленным из безаберрационных, съюстированных зеркал.

3.1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО РАССМОТРЕНИЯ

Из скалярной теории дифракции Кирхгофа следует [1, 6, 7, 11], что если задано поле на некоторой поверхности S (рис. 3.1), то поле в любой точке P области Френеля, обусловленное освещением от поверхности S , определяется следующим выражением:

$$E_P = \int_S \frac{ik}{4\pi d} (1 + \cos \theta) \exp(-ikd) E_S dS. \quad (3.1)$$

Здесь d — расстояние между элементом поверхности dS и рассматриваемой точкой P ; θ — угол между отрезком d и нормалью к dS ; $k = 2\pi/\lambda$ — постоянная распространения

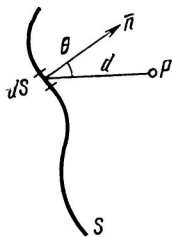


Рис. 3.1. К пояснению интегрального преобразования Кирхгофа

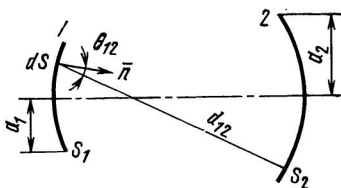


Рис. 3.2. К выводу основных интегральных уравнений теории открытого оптического резонатора

ния излучения в среде, заполняющей пространство между S и P . Используя (3.1), можно для оптического резонатора (рис. 3.2) определить поле на зеркале 2 через поле на противоположном зеркале 1

$$E_2 = \int_{S_1} \frac{ik}{\epsilon \pi d_{12}} (1 + \cos \theta_{12}) \exp(-ikd_{12}) E_1 dS. \quad (3.2)$$

Особенность геометрии реальных оптических резонаторов, а именно то обстоятельство, что его поперечные размеры значительно меньше длины резонатора и радиусов кривизны отражающих поверхностей ($a_1, a_2 \ll L, R_1, R_2$), позволяет упростить интегральное выражение (3.2). Величина d_{12} внутри области интегрирования изменяется очень слабо и поэтому может считаться в знаменателе подынтегрального выражения (3.2) постоянной ($d_{12} \equiv L$). То же можно сказать и в отношении величины $\cos \theta_{12}$ (т. е. $\cos \theta_{12} \equiv 1$). Рассмотрим теперь фазовый множитель $\exp(-ikd_{12})$. Мы не можем, естественно, считать его постоянным, так как он пробегает все возможные значения по единичному кругу на комплексной плоскости уже при изменении расстояния d_{12} на величину длины волны. Обратимся к двумерному разложению d_{12} по параметрам x_i/L и y_i/L (приложение В)

$$\begin{aligned} d_{12} = L \left\{ 1 + \frac{g_1}{2L^2} (x_1^2 + y_1^2) + \frac{g_2}{2L^2} (x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{L^2} (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8L^4} [g_1 (1 - 3g_1 + g_1^2) (x_1^2 + y_1^2)^2 + g_2 (1 - 3g_2 + g_2^2) (x_2^2 + y_2^2)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - g_1 - g_2) (x_1^2 + y_1^2) (x_2^2 + y_2^2) - 4(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 + \right. \\ \left. + 4g_1 (x_1^2 + y_1^2) (x_1 x_2 + y_1 y_2) + 4g_2 (x_2^2 + y_2^2) (x_1 x_2 + y_1 y_2) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обычно в теории резонаторов ограничиваются членами второго порядка. Нетрудно видеть, что такое приближение (его называют параболическим) *) корректно, если последующий член четвертого порядка дает пренебрежимо малый фазовый набег, т. е. если выполнено соотношение

$$kL(a_{\text{макс}}/L)^4 \ll 2\pi. \quad (3.4)$$

Условие (3.4) выполняется практически всегда, в чем легко убедиться подстановкой параметров реальных резонаторов. Это позволяет использовать на практике параболическое приближение и записывать величину d_{12} (3.2) следующим образом:

$$d_{12} = L + (1/2L) [g_1(x_1^2 + y_1^2) + g_2(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)]. \quad (3.5)$$

С учетом указанных упрощений интегральное преобразование (3.2) приобретает вид, используемый для построения теории резонаторов в квазиоптическом приближении:

$$E(x_2, y_2) = \int_{S_1} \frac{ik}{2\pi L} e^{-ikL} \exp \left\{ -\frac{ik}{2L} [g_1(x_1^2 + y_1^2) + g_2(x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)] \right\} E(x_1, y_1) dS_1. \quad (3.6)$$

Симметричный резонатор. Рассмотрим сначала резонатор, составленный из одинаковых зеркал, характеризуемых параметром конфигурации g и апертурным размером a . В этом случае из соображений симметрии ясно, что поле собственной волны E_{mn} будет воспроизводиться на втором зеркале с точностью до постоянного комплексного множителя γ_{mn} . Таким образом, можно записать уравнение относительно распределения поля на зеркалах

$$E_{mn}(x, y) = \gamma_{mn} e^{-ikL} \int_S K(x, y, x', y') E(x', y') dS', \quad (3.7)$$

где

$$K = \frac{ik}{2\pi L} \exp \left\{ -\frac{ik}{2L} [g(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2) - 2(xx' + yy')] \right\}.$$

*) Ограничение разложения членом второго порядка соответствует замене сферических отражающих поверхностей близкими поверхностями параболоида вращения. Такое приближение характерно для работ, выполненных в рамках квазиоптики; его называют также квазиоптическим. В работе [64] показано, что для вырожденных устойчивых резонаторов параболическое приближение может оказаться недостаточным.

Здесь и в дальнейшем штрихом помечены переменные интегрирования.

Полученное выражение является однородным линейным интегральным уравнением Фредгольма относительно двумерной функции $E(x, y)$. Собственные функции этого уравнения представляют собой распределение амплитуды оптического поля на зеркалах, а собственные значения определяют потерю энергии (α_{mn}) и изменение фазы поля (Φ_{mn}) за один однонаправленный проход волны в резонаторе:

$$\alpha_{mn} = 1 - |\gamma_{mn}|^{-2}, \quad (3.8a)$$

$$\Phi_{mn} = kL - \arg \gamma_{mn}. \quad (3.8б)$$

Из (3.8б) следует выражение для собственных частот

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left(q + \frac{1}{\pi} \arg \gamma_{mn} \right). \quad (3.8в)$$

При составлении и анализе уравнений типа (3.7) обычно не учитывают потери энергии и изменения фазы непосредственно на зеркалах. Поэтому выражения (3.8) определяют характеристики собственных волн, формируемые лишь геометрооптическим и дифракционным преобразованием волн. Скачок фазы величиной π на каждом зеркале здесь ничего не меняет, а дополнительные (постоянные по сечению) изменения амплитуды и фазы легко могут быть учтены введением дополнительного комплексного множителя.

Вид ядра интегрального уравнения (3.7) и, следовательно, его решение существенно зависят от симметрии поперечного сечения резонатора. Обычно рассматривают прямоугольную и центральную симметрию. В обоих случаях удается свести задачу к одномерной.

Если сечение имеет прямоугольную симметрию, то целесообразно искать двумерное решение уравнения (3.7) в виде произведения одномерных функций, каждая из которых описывает распределение поля по одной из поперечных координат:

$$E_{mn}(x, y) = E_m(x) E_n(y). \quad (3.9)$$

Подставляя решение (3.9) в (3.7) и полагая $dS = dx dy$, а также $\gamma_{mn} = \gamma_m \gamma_n$, легко убедиться, что исходное интегральное уравнение распадается на два независимых. Каждое из полученных таким образом уравнений со-

держит одномерное распределение поля и может исследоваться независимо, без потери общности анализа:

$$E_m(x) = \gamma_m \exp\left(-\frac{ikL}{2}\right) \sqrt{\frac{ik}{2\pi L}} \times \\ \times \int_{-a}^{+a} \exp\left\{\frac{-ik}{2L} [g(x^2 + x'^2) - 2xx']\right\} E_m(x') dx'. \quad (3.10a)$$

Переходя к безразмерной поперечной координате $\xi = x\sqrt{k/L}$, получаем наиболее распространенный вид исходного интегрального уравнения:

$$E_m(\xi) = \gamma_m \exp\left(-\frac{ikL}{2}\right) \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \times \\ \times \int_{-V_c}^{+V_c} \exp\left\{-\frac{i}{2} [g(\xi^2 + \xi'^2) - 2\xi\xi']\right\} E_m(\xi') d\xi'. \quad (3.10б)$$

Здесь $c = 2\pi N = ka^2/L$.

Физический смысл такого разложения двумерного уравнения (3.9) на два независимых одномерных заключается в том, что резонатор, составленный из сферических зеркал с прямоугольной симметрией сечения, может рассматриваться как суперпозиция двух резонаторов, каждый из которых образован бесконечными полосовыми зеркалами; причем характерные поперечные измерения составляющих резонаторов ортогональны.

Если поперечное сечение резонатора обладает центральной симметрией, то целесообразно перейти к цилиндрическим координатам (r, φ, z) и искать решение в виде

$$E_{p, l}(r, \varphi) = E_{p, l}(r) \cos(l\varphi). \quad (3.11)$$

Подставляя выражение (3.11) в исходное уравнение (3.7), переходя к цилиндрическим координатам ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dS = r dr d\varphi$), а также используя известное интегральное представление бесселевых функций

$$J_l(x) = \frac{\int_0^{2\pi} \exp[ix \cos(\varphi' - \varphi)] \cos(l\varphi') d\varphi'}{2\pi i^l \cos(l\varphi)}, \quad (3.12)$$

нетрудно убедиться, что азимутальная координата φ исключается, а уравнение для радиальной функции

$E_{pl}(r)$ принимает следующий вид:

$$E_{p,l}(r) = \gamma_{p,l} e^{-ikL} \left(\frac{i^{l+1} k}{L} \right) \times \\ \times \int_0^a \exp \left[-\frac{ik}{2L} g(r^2 + r'^2) \right] J_l \left(\frac{kr r'}{L} \right) E_{p,l}(r') r' dr'. \quad (3.13a)$$

Переходя к безразмерной поперечной координате $\rho = r \sqrt{k/L}$, находим

$$E_{p,l}(\rho) = \gamma_{p,l} e^{-ikL} (i^{l+1}) \times \\ \times \int_0^{\sqrt{c}} \exp \left[-\frac{i}{2} g(\rho^2 + \rho'^2) \right] J_l(\rho \rho') E_{p,l}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (3.13b)$$

Несимметричный резонатор. Для резонатора, образованного зеркалами различной кривизны и апертуры (g_1, g_2, a_1, a_2), можно составить систему из двух «зацепляющихся» интегральных уравнений типа (3.7). Эта система сводится к одному уравнению относительно распределения на любом из зеркал (индекс «1»)

$$E_{mn}(x_1, y_1) = \gamma_{mn} e^{-2ikL} (k/2\pi L)^2 \times \\ \times \int_{S_1} \int_{S_2} \exp \left\{ -\frac{ik}{2L} [g_1(x_1^2 + y_1^2 + x_1'^2 + y_1'^2) + \right. \\ \left. + 2g_2(x_2'^2 + y_2'^2) - 2(x_1 x_2' + y_1 y_2' + x_1' x_2' + \right. \\ \left. + y_1' y_2')] \right\} E_{mn}(x_1', y_1') dS_1' dS_2'. \quad (3.14)$$

Собственные значения уравнения (3.14) определяют потери и фазовые набег за полный циклический проход волны в несимметричном резонаторе. При этом характеристики для прямого и обратного хода волны могут быть различными. Средние коэффициенты потерь и изменение фазы поля за односторонний проход волны определяются соотношениями

$$\alpha_{mn} = 1 - |\gamma_{mn}|^{-1}, \quad (3.15a)$$

$$\Phi_{mn} = kL - 1/2 \arg \gamma_{mn}. \quad (3.15b)$$

Уравнение (3.14) для двух видов симметрии поперечного сечения резонатора может быть сведено к одномерному так же, как для симметричного резонатора. При прямоугольной симметрии сечения уравнение (3.14) распадается на два одномерных уравнения вида

$$E_m(\xi_1) = \gamma_m e^{-ikL} \left(\frac{i}{2\pi} \right) \int_{-V_{c_1}^-}^{+V_{c_1}^-} \int_{-V_{c_2}^-}^{+V_{c_2}^-} \exp \left\{ -i \left[\frac{g_1}{2} (\xi_1^2 + \xi_1'^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + g_2 \xi_2'^2 - \xi_2' (\xi_1 + \xi_1') \right] \right\} E_m(\xi_1') d\xi_1' d\xi_2', \quad (3.16)$$

где $\xi = x \sqrt{k/L}$.

Если апертура резонатора круглая, то, используя решение в виде $E_{pl}(\rho, \varphi) = E_{pl}(\rho) \cos(l\varphi)$ и соотношение (3.12), можно получить следующее одномерное уравнение:

$$E_{pl}(\rho_1) = \gamma_{pl} e^{-2ikL} i^{2(l+1)} \int_0^{V_{c_1}^-} \int_0^{V_{c_2}^-} \exp \left\{ -i \left[\frac{g_1}{2} (\rho_1^2 + \rho_1'^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + g_2 \rho_2'^2 \right] \right\} J_l(\rho_1 \rho_2') J_l(\rho_1' \rho_2') E_{pl}(\rho_1') \rho_1' \rho_2' d\rho_1' d\rho_2', \quad (3.17)$$

где $\rho = r \sqrt{k/L}$. Потери и фазовые набег в этом случае определяются соотношениями (3.15).

Уравнения (3.16) и (3.17) так же, как (3.10) и (3.13), являются фундаментальными в теории оптических резонаторов, определяя характеристики собственных типов колебаний. Все уравнения принадлежат к одному виду. Это однородные линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода относительно одномерной функции. Ядра уравнения симметричны, но не эрмитовы. Свойства таких уравнений достаточно хорошо изучены. Известно, что решения образуют полную систему ортогональных функций [11, 83].

Поле в любой точке малоугольной зоны внутри и вне резонатора может быть определено с помощью того же интегрального преобразования Кирхгофа (3.6). Если известно поле $E_{mn}(x_i, y_i)$ на i -м зеркале, то распределе-

ние поля в любой плоскости, отстоящей от зеркала i на расстояние z , можно записать следующим образом:

$$E_{mn}(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int_{S_i} \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} \left[\left(1 + \frac{z}{R_i}\right) (x_i^2 + y_i^2) + (x^2 + y^2) - 2(x_i x + y_i y) \right] \right\} E_{mn}(x_i, y_i) dS_i. \quad (3.18)$$

Здесь R_i — радиус кривизны зеркала; он считается положительным, если зеркало обращено выпуклостью к рассматриваемой плоскости.

Интегральное преобразование (3.18) для рассматриваемых типов симметрии может быть сведено к более простому. В случае прямоугольной симметрии сечения двумерное преобразование (3.18) распадается на два одномерных следующего вида:

$$E_m(x, z) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi z}} \exp\left(-\frac{ikz}{2}\right) \times \int_{-a_i}^{+a_i} \exp\left\{-\frac{ik}{2z} \left[\left(1 + \frac{z}{R_i}\right) x_i^2 + x^2 - 2x_i x\right]\right\} E_m(x_i) dx_i. \quad (3.19)$$

При центральной симметрии сечения резонатора, переходя к цилиндрическим координатам, используя вид распределения поля (3.11) и соотношение (3.12), легко получить радиальное распределение

$$E_{pl}(r, z) = \frac{k}{z} i^{(l+1)} e^{-ikz} \int_0^{a_i} \exp\left\{-\frac{ik}{2z} \left[\left(1 + \frac{z}{R_i}\right) r_i^2 + r^2\right]\right\} J_l\left(\frac{kr r_i}{z}\right) E_{pl}(r_i) r_i dr_i. \quad (3.20)$$

Особый интерес на практике представляет угловое распределение поля в дальней зоне. В случае прямоугольной симметрии сечения получим для каждой координатной плоскости одномерное фурье-преобразование

$$E_m(\psi) = C_m \int_{-a}^{+a} E_m(x) e^{ikx\psi} dx. \quad (3.21a)$$

Для резонатора с круглой апертурой найдем

$$E_{pl}(\psi) = C_{pl} \int_0^a J_l(kr\psi) E_{pl}(r) r dr. \quad (3.216)$$

В формулах (3.21) используется интегрирование по выходному зрачку резонатора, а размерный коэффициент C введен для нормировки углового распределения поля. Энергетическая диаграмма направленности резонаторного пучка задается, естественно, квадратом модуля выражений (3.21).

3.2. ПОДОБИЕ ДВУХЗЕРКАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Строгое решение интегральных уравнений (3.16) и (3.17), описывающих свойства резонатора, возможно лишь в специальных случаях. Однако, не решая исходные уравнения, можно на основании известных свойств симметрии такого рода интегральных уравнений (см. приложение Б) установить связь между характеристиками резонаторов с различной геометрией (совокупностью значений c_1, c_2, g_1, g_2). Рассмотрим некоторые преобразования в четырехмерном пространстве c_1, c_2, g_1, g_2 , приводящие к простым соотношениям между характеристиками соответствующих резонаторов. Полученные свойства подобия оказываются весьма полезными при расчете реальных резонаторных систем.

Первое свойство подобия двухзеркальных резонаторов заключается в том, что одновременная замена в уравнениях (3.16) и (3.17) $g_{1,2} \rightleftharpoons g_{2,1}$ и $c_{1,2} \rightleftharpoons c_{2,1}$ означает просто перенумерацию зеркал и не меняет самого уравнения. Собственные функции для разных зеркал при этом меняются местами, а собственные значения сохраняются. Поэтому спектры потерь и частот резонатора при перестановке зеркал остаются прежними. Если размеры зеркал одинаковы, то из сказанного следует, что свойства двух резонаторов идентичны, когда соответственные точки на G -диаграмме симметричны относительно прямой $g_1 = g_2$ [41].

Второе свойство подобия можно установить, рассматривая преобразование знака параметров конфигурации $g'_{1,2} \rightarrow -g_{1,2}$ при неизменности поперечных размеров резонатора ($c'_{1,2} = c_{1,2}$). Для резонатора с круглым сечением из (3.17) сразу видно, что изменение знака пара-

метров конфигурации приводит к изменению ядра на комплексно-сопряженное. Для резонатора с прямоугольным сечением аналогичная трансформация ядра уравнения не столь очевидна.

Представим ядро (3.16) в виде произведения двух функций:

$$K_1(\xi_1, \xi'_1) = \frac{i}{2\pi} \exp \left[\frac{-i}{2} g_1 (\xi_1^2 + \xi_1'^2) \right],$$

$$K_2(\xi_1, \xi'_1) = \int_{-V_{c_2}^-}^{+V_{c_2}^-} \exp \{ -i [g_2 \xi_2'^2 - \xi'_2 (\xi_1 + \xi'_1)] \} d\xi'_2.$$

При изменении знака g_1 функция $K_1(\xi_1, \xi'_1)$ преобразуется в $-K_1^*(\xi_1, \xi'_1)$. Функцию $K_2(\xi_1, \xi'_1)$ запишем в виде

$$K_2(\xi_1, \xi'_1) = \int_{-V_{c_2}^-}^{+V_{c_2}^-} \cos(u) d\xi'_2 + i \int_{-V_{c_2}^-}^{+V_{c_2}^-} \sin(u) d\xi'_2,$$

где $u(\xi_1, \xi'_1, \xi'_2) = -g_2 \xi_2'^2 + \xi'_2 (\xi_1 + \xi'_1)$. Видно, что при изменении знака g_2 функция $u(\xi_1, \xi'_1, \xi'_2)$ преобразуется в $-u(\xi_1, \xi'_1, -\xi'_2)$. Это соответствует изменению знака вещественной части $K_2(\xi_1, \xi'_1)$; следовательно, изменение знака g_2 приводит к трансформации $K_2(\xi_1, \xi'_1) \rightarrow -K_2^*(\xi_1, \xi'_1)$. Следовательно, ядро интегрального уравнения (3.16) также претерпит преобразование комплексного сопряжения.

Как показано в приложении Б, указанное преобразование ядра интегрального уравнения рассматриваемого типа приводит к изменению собственных функций и собственных значений уравнения:

$$E_m(\xi) \rightarrow E_m^*(\xi), \quad \gamma_m \rightarrow \gamma_m^*,$$

$$E_{pl}(\rho) \rightarrow E_{pl}^*(\rho), \quad \gamma_{pl} \rightarrow \gamma_{pl}^*.$$

Характеристики нового резонатора, отличающегося знаком параметров конфигурации, окажутся следующими. Распределение амплитуды поля по зеркалу не изменится. Модуль собственного значения и, следовательно, коэффициент дифракционных потерь при этом также сохраняются. Аргумент собственного значения меняет знак. Это означает, что у резонаторов с параметрами

$g'_1 = -g_1$ и $g'_2 = -g_2$ собственные частоты связаны соотношением

$$\nu_{mnq}(g'_1, g'_2) - \nu_{mnq}(g_1, g_2) = \frac{c}{2\pi L} [\arg \gamma_m(g_1) + \arg \gamma_n(g_2)]$$

для резонатора с прямоугольной апертурой и

$$\nu_{plq}(g'_1, g'_2) - \nu_{plq}(g_1, g_2) = \frac{c}{2\pi L} \arg \gamma_{pl}(g_1, g_2)$$

для резонатора с круглой апертурой.

Рассмотренное преобразование в силу первого свойства подобия эквивалентно преобразованию $g_{1,2} \rightarrow -g_{2,1}$, что соответствует на G -диаграмме симметрии относительно прямой $g_1 = -g_2$. Учитывая оба свойства симметрии, при анализе резонаторов можно ограничиться областью $|g_1| \geq |g_2|$ [41].

Для установления **третьего свойства подобия** открытых резонаторов перейдем в уравнениях (3.16) и (3.17) к новым переменным: соответственно

$$u_i = \xi_i \sqrt[4]{c_k/c_i} \quad \text{и} \quad v_i = \rho_i \sqrt[4]{c_k/c_i} \quad (i = 1, 2; k = 2, 1).$$

В этом случае упомянутые уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} E_m(u_1) = & \gamma_m e^{-ikL} \left(\frac{i}{2\pi} \right) \int_{-\sqrt[4]{c_1 c_2}}^{+\sqrt[4]{c_1 c_2}} \exp \left[-\frac{ig_1}{2} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} (u_1^2 + \right. \\ & \left. + u_1'^2) \right] E_m(u_1') \int_{-\sqrt[4]{c_1 c_2}}^{+\sqrt[4]{c_1 c_2}} \exp \left\{ -i \left[g_2 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} u_2'^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - u_2'(u_1 + u_1') \right] \right\} du_1' du_2', \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} E_{pl}(v_1) = & \gamma_{pl} e^{-2ikL} \int_0^{\sqrt[4]{c_1 c_2}} \int_0^{\sqrt[4]{c_1 c_2}} \exp \left\{ -i \left[\frac{g_1}{2} \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} (v_1^2 + v_1'^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + g_2 \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} v_2'^2 \right] \right\} J_l(v_1' v_2') J_l(v_1 v_2') E_{pl}(v_1') v_1' v_2' dv_1' dv_2'. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Приведенная форма записи исходных уравнений показывает, что при таком изменении параметров резонатора, когда комплексы величин $G_1 = g_1 \sqrt{c_1/c_2}$, $G_2 = g_2 \sqrt{c_2/c_1}$ и $c = \sqrt{c_1 c_2}$ сохраняют свои значения, остаются неизменными и характеристики собственных волн*). Таким образом, свойства резонатора по существу определяются только тремя обобщенными параметрами, которые являются комбинациями четырех введенных ранее величин (g_1, g_2, c_1, c_2). Разумеется, выбор трех обобщенных параметров неоднозначен. Так, в работе [41] используются обобщенные параметры $g_1 c_1 = G_1 c$, $g_2 c_2 = G_2 c$ и $g_1 g_2 = G_1 G_2$.

Четвертое свойство подобия. Ядро уравнения (3.16) можно, произведя интегрирование, представить в следующем виде:

$$K(\xi_1, \xi'_1) = \sqrt{\frac{i}{16\pi g_2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[\left(g_1 - \frac{1}{2g_2} \right) (\xi_1^2 + \xi_1'^2) - \frac{\xi_1 \xi_1'}{g_2} \right] \right\} \left\{ \Phi \left[\sqrt{i} \left(\sqrt{c_2 g_2} - \frac{\xi_1 + \xi_1'}{2\sqrt{g_2}} \right) \right] + \right. \\ \left. + \Phi \left[\sqrt{i} \left(\sqrt{c_2 g_2} - \frac{\xi_1 + \xi_1'}{2\sqrt{g_2}} \right) \right] \right\}. \quad (3.24)$$

Здесь $\Phi(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z e^{-t^2} dt$ — интеграл вероятности от комплексного аргумента**). Нетрудно видеть, что если выполнено условие

$$\sqrt{c_2 g_2} - \sqrt{c_1/g_2} \gg 1, \quad (3.25a)$$

*) Это свойство подобия открытых резонаторов впервые сформулировано в работе Дж. Гордона и Х. Когельника [18], где три обобщенных параметра даны в виде $G_1 = g_1(a_1/a_2)$, $G_2 = g_2(a_2/a_1)$, $N = a_1 a_2 / \lambda L$.

***) Выражение (3.24) может быть записано с использованием более распространенных в оптической литературе функций — интегралов Френеля. При $z = x \sqrt{i}$, где x — вещественная переменная,

$$\Phi(x \sqrt{i}) = \sqrt{2\pi i} \left\{ \int_0^{x \sqrt{2/\pi}} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt - i \int_0^{x \sqrt{2/\pi}} \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \right\}.$$

то модули аргументов функции $\Phi(z)$ в выражении (3.24) значительно превышают единицу. Тогда с большой точностью можно принять $\Phi(z) = 1$ *). Ядро уравнения (3.16) в этом случае определится выражением

$$K(\xi_1, \xi'_1) = \sqrt{\frac{i}{4\pi g_2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[\left(g_1 - \frac{1}{2g_2} \right) (\xi_1^2 + \xi_1'^2) - \frac{\xi_1 \xi_1'}{g_2} \right] \right\}.$$

Вводя новую переменную $\bar{\xi}_1 = \xi_1 / \sqrt{2g_2}$, получаем следующее уравнение:

$$E_m(\bar{\xi}_1) = \gamma_m e^{-ikL} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \times \\ \times \int_{-V_{c_1/2g_2}}^{+V_{c_1/2g_2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} [2g_1 g_2 - 1] (\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_1'^2) - 2\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1' \right\} E_m(\bar{\xi}_1') d\bar{\xi}_1',$$

аналогичное уравнению для симметричного резонатора (3.10) с параметрами $g_0 = 2g_1 g_2 - 1$, $c_0 = c_1 / 2g_2$. Таким образом, если апертуры зеркал рассматриваемого резонатора настолько различаются, что выполняется условие (3.25а) или адекватное условие

$$(c_1/c_2) \leq g^2, \quad c_2 \gg 1, \quad (3.25б)$$

то можно заменить реальный произвольный резонатор эквивалентным симметричным, апертурный размер a_0 , длина L_0 и радиус кривизны зеркал R_0 которого определяются соотношениями

$$\frac{a_0^2}{L_0} = \frac{a_1^2}{2L(1 - L/R_2)}, \\ \frac{L_0}{R_0} = 2L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{L}{R_1 R_2} \right). \quad (3.26)$$

Здесь индекс «1» относится к зеркалу меньшего сечения. При этом односторонний проход волны в эквивалентном симметричном резонаторе соответствует циклическому проходу в реальном резонаторе. Средние за проход коэффициент потерь и фазовый набег в реальном резонаторе (α , Φ) выразятся через соответствующие параметры эквивалентного симметричного резонатора (α_0 , Φ_0) так:

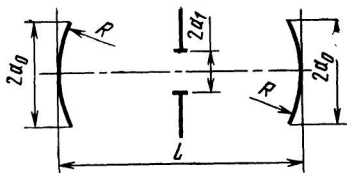
$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \alpha_0}, \quad \Phi = \Phi_0 / 2.$$

Пятое свойство подобия. Рассмотрим еще одно интересное для практики свойство подобия резонаторов. Представим симметричный резонатор длиной L , составленный из одинаковых зеркал с радиусом кривизны R и апертурным размером a_0 . В центре резонатора расположена диафрагма, размер отверстия которой a_1 (рис. 3.3). Вследствие симметрии схемы целесообразно рассматривать структуру,

*) Здесь справедливо следующее асимптотическое выражение [32, 33]:

$$\Phi(x \sqrt{i}) \cong 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - i \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Рис. 3.3. К пояснению пятого свойства подобия открытых оптических резонаторов



образованную диафрагмой и зеркалом, как самостоятельный несимметричный резонатор длиной $L/2$. С учетом четвертого свойства подобия можно утверждать, что при выполнении условия, вытекающего из (3.25), т. е. при

$$\sqrt{\frac{k}{L}} \left(a_0 \sqrt{2g'} - \frac{2a_1}{\sqrt{2g'}} \right) \gg 1,$$

где $g' = 1 - L/2R$, интегральное уравнение относительно распределения поля на диафрагме будет следующим:

$$E_m(\bar{\xi}) = \gamma_m e^{-ikL/2} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-V_{c_1/2g'}}^{+V_{c_1/2g'}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} [(2g'-1)(\bar{\xi}^2 + \bar{\xi}'^2) - 2\bar{\xi}\bar{\xi}'] \right\} E_m(\bar{\xi}') d\bar{\xi}'. \quad \text{Здесь } \bar{\xi} = \xi/\sqrt{2g'} = x\sqrt{k/Lg'}.$$

Нетрудно видеть, что это уравнение совпадает с уравнением для обычного симметричного резонатора без диафрагмы (3.106) при $a = a_1(1 - L/2R)^{-1/2}$ и $g = 2g' - 1 = 1 - L/R$. Отсюда следует, что введение в центр симметричного резонатора диафрагмы с отверстием размером $2a_1$ эквивалентно в отношении дифракционных потерь ограничению апертурного размера зеркал до величины $a_1(1 - L/2R)^{-1/2}$.

Обратимся к изучению тех характеристик резонаторов, которые определяются волновой теорией. Как следует из предыдущего параграфа, нет необходимости рассматривать все возможные конфигурации резонатора с произвольным соотношением размеров образующих зеркал. Достаточно ограничиться такими конфигурациями, которые соответствуют любой половине первого квадранта G -плоскости, а также изучить резонаторы с одинаковыми поперечными размерами зеркал. Распространить наше рассмотрение на резонаторы с другой геометрией можно с помощью сформулированных выше законов подобия.

В каждом рассматриваемом резонаторе нас будут интересовать следующие характеристики собственных типов колебаний:

- 1) пространственное распределение поля,
- 2) дифракционные и лучевые потери,
- 3) частотный спектр.

Начнем наше рассмотрение с симметричного конфокального резонатора.

3.3. СИММЕТРИЧНЫЙ КОНФОКАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Конфокальный резонатор с одинаковыми зеркалами играет особую роль в теории оптических резонаторов, так как только симметричная конфокальная конфигурация ($g_1 = g_2 = 0$) позволяет получить аналитическое решение исходных интегральных уравнений (3.10) и (3.13). Поэтому рассмотрение резонаторов других конфигураций часто сводят к поискам эквивалентного конфокального резонатора или к анализу возмущенной конфокальной системы. Пространственное распределение поля собственных волн конфокального резонатора — так называемый гауссов пучок (гл. 4) — приобретает фундаментальное значение в теории.

Исходные уравнения для анализа свойств симметричного конфокального резонатора могут быть получены из (3.10) и (3.13) подстановкой $g = 0$. Для резонатора, составленного из цилиндрических зеркал или из сферических зеркал, соответственно найдем

$$E_m(\xi) = \gamma_m e^{-ikL/2} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-V_c^-}^{+V_c^-} \exp(i\xi\xi') E_m(\xi') d\xi', \quad (3.27a)$$

$$E_{pl}(\rho) = \gamma_{pl} e^{-ikL} i^{(l+1)} \int_0^{V_c^-} J_l(\rho\rho') E_{pl}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (3.27b)$$

Здесь $\xi = x \sqrt{k/L}$ и $\rho = r \sqrt{k/L}$ — безразмерные поперечная и радиальная координаты.

Пространственное распределение поля. Уравнения (3.27) допускают аналитическое решение [25], выражаемое через специальные функции — так называемые обобщенные сфероидальные волновые функции*). Собствен-

*) Обобщенные волновые сфероидальные функции, определяющие собственные функции и собственные значения уравнений (3.27), находят все большее приложение в технике. Свойствам этих функций посвящен сборник [83]. Там же можно найти подробную библиографию.

ные функции уравнений выражаются угловыми сферидальными волновыми функциями $S_{m0}(c, x/a)$ или $S_{pl}(c, r/a)$, которые образуют полную ортонормированную систему на отражающей поверхности. Для любого значения $c=2\pi N$ существует бесконечный набор собственных функций и соответствующих собственных значений каждого из уравнений (3.27).

Правая часть уравнений (3.27) соответствует преобразованию Кирхгофа (3.21), введенного для вычисления углового распределения поля в дальней зоне. Таким образом, распределение поля на зеркалах конфокального резонатора оказывается собственным для указанного преобразования и, следовательно, соответствует угловому распределению поля в дальней зоне. Другая особенность конфокальных резонаторов вытекает из того, что для вещественных аргументов волновые сферидальные функции вещественны. Таким образом, фаза поля постоянна по всей поверхности зеркала и отражающая поверхность совпадает с фронтом волны, распространяющейся в резонаторе.

Обычно для описания распределения амплитуды поля собственных волн по зеркалу используют не угловые волновые функции, а их асимптотическое представление — полиномы Эрмита — Гаусса или полиномы Лагерра — Гаусса. В приближении $c=2\pi N > 2\pi$ распределение амплитуды по зеркалу может быть представлено в виде

$$E_m(\xi) = C_m H_m(\xi) e^{-\xi^2/2} \quad (3.28a)$$

для цилиндрических зеркал и в виде

$$E_{pl}(\rho, \varphi) = C_{pl} \rho^l L_p^l(\rho^2) e^{-\rho^2/2} \cos l\varphi \quad (3.28b)$$

для сферических зеркал с круглой апертурой. Здесь C_m и C_{pl} — нормирующие множители; $H_m(\xi)$ — полиномы Эрмита; $L_p^l(\rho^2)$ — полиномы Лагерра. Представление (3.28) несправедливо для $c < 2\pi$ и тогда для описания распределения приходится пользоваться угловыми волновыми функциями.

В формулах (3.28) безразмерный аргумент не зависит от апертуры резонатора. Это означает, что распределение поля в данном приближении ($N > 1$) не связано с его поперечным размером. Поле конфокального резонатора концентрируется вблизи оси, что является принципиальным отличием таких резонаторов. Пространст-

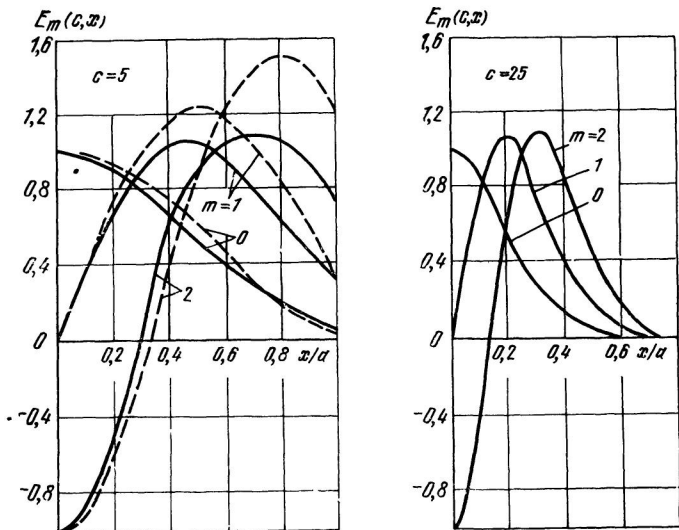


Рис. 3.4. Распределение поля по зеркалу цилиндрического конфокального резонатора

венный масштаб распределения поля определяется множителем $\sqrt{k/L}$. На рис. 3.4 представлены распределения амплитуды по зеркалу для низших мод резонатора с цилиндрическими зеркалами. Поскольку аргументом на всех графиках является координата $x/a = \xi/\sqrt{c}$, то пространственный масштаб кривых оказывается зависящим от параметра c . Непрерывные кривые представляют приближение (3.28), штриховые — при $c=5$ соответствуют угловым функциям $S_{m0}(c, x/a)$. При $c > 2\pi$ распределение поля по зеркалу неотлично от приближенного представления (3.28).

Пространственный масштаб распределения поля на зеркалах принято указывать значением поперечной координаты, которое соответствует уменьшению экспоненциального члена в выражениях (3.28) в e раз. Нетрудно видеть, что эта величина, часто называемая размером пятна, определится как $\omega_s = \sqrt{2L/k}$. Размер пятна указывает, на каком расстоянии от центра зеркала амплитуда поля основной моды уменьшается в e раз. Размер пятна не зависит от апертуры зеркала и определяется только длиной резонатора и длиной волны излучения,

С увеличением ω_S пропорционально расширяются распределения поля и высших поперечных типов колебаний.

Основная мода характеризуется гауссовым распределением амплитуды вне зависимости от типа симметрии апертуры резонатора. Характер распределения амплитуды и интенсивности в модах высшего порядка иллюстрируется рис. 1.4.

Пространственное амплитудно-фазовое распределение поля в случае конфокального резонатора образует характерный пучок — так называемый *гауссов пучок*. Распределение поля $E_{mn}(x, y, z)$ или $E_{pl}(r, \varphi, z)$ в зависимости от симметрии задачи можно получить, подставляя функции (3.28) в интегральное преобразование (3.20). Вычислив интеграл Кирхгофа для асимптотического случая ($c \gg 2\pi$), получим

$$E_{mn} = \frac{C_{mn} F_{mn}(x/\omega_S, \zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \exp \left\{ -i \left[\frac{kL\zeta}{2} + \frac{kr^2\zeta}{L(1 + \zeta^2)} - \mu \operatorname{arctg} \zeta \right] \right\}, \quad (3.29)$$

$$E_{pl} = \frac{C_{pl} F_{pl}(r/\omega_S, \zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \exp \left\{ -i \left[\frac{kL\zeta}{2} + \frac{kr^2\zeta}{L(1 + \zeta^2)} - \mu \operatorname{arctg} \zeta \right] \right\}.$$

Здесь C_{mn} и C_{pl} — нормирующие множители; $\zeta = 2z/L$ — относительная продольная координата, отсчитываемая от центра резонатора. Функции F_{mn} и F_{pl} определяют поперечное распределение амплитуды в зависимости от симметрии задачи

$$F_{mn} \left(\frac{x}{\omega_S}, \zeta \right) = H_m \left(\frac{2x}{\omega_S \sqrt{1 + \zeta^2}} \right) H_n \left(\frac{2y}{\omega_S \sqrt{1 + \zeta^2}} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{\omega_S^2(1 + \zeta^2)} \right], \\ F_{pl} \left(\frac{r}{\omega_S}, \zeta \right) = \left(\frac{2r}{\omega_S \sqrt{1 + \zeta^2}} \right)^l L_l^p \left[\frac{4r^2}{\omega_S^2(1 + \zeta^2)} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{2r^2}{\omega_S^2(1 + \zeta^2)} \right],$$

где μ — порядок моды, принимающий значения $(m + n + 1)$ для прямоугольной симметрии сечения или $(2p + l + 1)$ для центральной симметрии сечения. Когда вывод излучения осуществляется через частично прозрачное зеркало, поле вне резонатора описывается формулами (3.29) для бегущей волны с учетом ослабления на зеркале. Внутри резонатора поле представляет собой стоячую волну. Поперечная стоячая волна также описывается выражениями (3.29) с той лишь разницей, что экспоненциальная фазовая функция заменяется синусоидальной функцией того же аргумента.

Выражения (3.29) характеризует резонаторный пучок во внешнем пространстве. Амплитуда поля на оси ($x = y = 0, r = 0$) уменьшается при удалении от резонатора по закону $(1 + \zeta^2)^{-1/2}$. При $\zeta \gg 1$ эта зависимость переходит в обратную пропорциональность, характерную для гомоцентрического пучка. Фаза колебаний на оси пучка изменяется следующим образом:

$$\Phi_0 = 1/2 kL \zeta - \mu \operatorname{arctg} \zeta.$$

При $\zeta \gg 1$ зависимость $\Phi_0(z)$ становится линейной

$$\Phi_0 = kz - \mu\pi/2,$$

что также соответствует гомоцентрическому пучку. Таким образом, зону вблизи резонатора, где $\zeta \leq 1$, можно считать зоной формирования пучка со сложной амплитудно-фазовой зависимостью от продольной координаты. Вне этой зоны пучок можно полагать гомоцентрическим, исходящим из осевой точки вблизи центра резонатора.

Характер поперечного распределения поля данной моды в любом сечении пучка ($\zeta = \text{const}$) остается, как следует из (3.29), постоянным. Изменяется лишь масштаб распределения. Принято оценивать ширину резонаторного пучка в произвольном сечении расстоянием от оси, на котором амплитуда основной моды спадает в e раз. Из (3.29) нетрудно видеть, что размер пятна является функцией продольной координаты:

$$w(\zeta) = w_s \sqrt{(1 + \zeta^2)/2}. \quad (3.30)$$

Выражение (3.30), определяющее форму резонаторного пучка, соответствует рис. 2.5. Резонаторный пучок имеет минимальное сечение (перетяжку) в центре резонатора ($\zeta = 0$). Сечение пучка не зависит от апертуры

резонатора и определяется только его длиной и длиной волны излучения $\omega_0 = \omega_S / \sqrt{2} = \sqrt{L/k}$.

Описанная структура поля конфокального резонатора согласуется с геометрическими представлениями о каустике резонатора (гл. 2). Действительно, выражение (3.30) переходит в (2.15), если учесть, что для симметричного конфокального резонатора $R_0 = R = L$, и положить в формуле (2.15) $x = \omega_0$.

Поверхность равной фазы определяется фазовым членом в выражении (3.29). Приравняем фазу в произвольной точке поверхности (x, y, z) фазе в точке пересечения эквифазной поверхности с осью пучка $(0, 0, z_0)$. Это даст уравнение волновой поверхности

$$z - z_0 = -\zeta(x^2 + y^2)/L(1 + \zeta^2).$$

Поверхность, задаваемая этим уравнением, вблизи оси может быть заменена сферой радиусом

$$R = L(1 + \zeta^2)/2\zeta. \quad (3.31)$$

Выпуклая сторона сферы равной фазы обращена от центра резонатора. Кривизна волновой поверхности сначала возрастает при удалении от перетяжки, а затем снова стремится к нулю. Максимальная кривизна соответствует тому поперечному сечению, где расположены зеркала ($\zeta = \pm 1$).

Угловое распределение поля конфокального резонатора в дальней зоне, как отмечалось ранее, повторяет распределение поля по зеркалу. Угловое распределение можно получить, используя формулы (3.21) или преобразуя (3.29) для случая $z \rightarrow \infty$.

Вводя угловую координату $\psi = \lim_{z \rightarrow \infty} (x/z)$ или $\psi = \lim_{z \rightarrow \infty} (r/z)$, найдем для рассматриваемых вариантов симметрии

$$E_m(\psi) = C_m H_m(\psi \sqrt{kL/2}) \exp(-kL\psi^2/4),$$

$$E_{p,l}(\psi) = C_{p,l}(\psi \sqrt{kL/2})^l L^l_p(kL\psi^2/2) \exp(-kL\psi^2/4).$$

Дифракционные потери. Относительные потери энергии, обусловленные дифракцией на конечной апертуре зеркал, определяются собственными значениями уравнений (3.27), которые выражаются через радиальные вол-

новые функции $R_{mn}(c, 1)$. Конфокальный резонатор характеризуется наименьшими дифракционными потерями из всех возможных устойчивых конфигураций. Собственные значения уравнения (3.27а) определяют коэффициенты потерь за односторонний проход волны для резонатора, составленного из бесконечно длинных цилиндрических полостей:

$$\alpha_m = 1 - |\gamma_m|^{-2}.$$

Потери для резонатора с прямоугольной апертурой задаются суперпозицией собственных значений уравнений типа (3.27а), записанных для ортогональных поперечных координат:

$$\alpha_{mn} = 1 - |\gamma_m|^{-2} |\gamma_n|^{-2} = 1 - (1 - \alpha_m)(1 - \alpha_n).$$

Для расчета значений α_{mn} можно воспользоваться таблицами [83]. При $c > 2\pi$ и малых m, n обычно прибегают к асимптотике радиальных вытянутых волновых функций и получают аналитическое соотношение [27]

$$\alpha_m = 4 \sqrt{\pi} \frac{1}{m!} 8^m c^{(m+1/2)} e^{-2c}. \quad (3.32a)$$

На рис. 3.5 приведены значения коэффициентов потерь для цилиндрических конфокальных резонаторов. Видно, что формула (3.32а) дает удовлетворительные результаты только для $\alpha_m < 0,1\%$. Для расширения диапазона применимости можно использовать эмпирическую коррекцию формулы (3.32а)

$$\alpha_m = 4 \sqrt{\pi} \frac{1}{m!} 8^m (c - 1,4)^{m+1/2} e^{-2c}. \quad (3.32б)$$

Из рис. 3.5 видно, что скорректированная формула (3.32б) обеспечивает расчет потерь для $\alpha_m < 10\%$.

Для резонатора с круглой апертурой коэффициент дифракционных потерь определяется собственным значением уравнения (3.27б): $\alpha_{pl} = 1 - |\gamma_{pl}|^{-2}$. Коэффициенты потерь для низших мод представлены на рис. 3.6. Используя асимптотическое представление обобщенных радиальных волновых функций, Слепьян [29, 30] вывел соотношение

$$\alpha_{pl} = \frac{2\pi (4c)^{2p+l+1}}{p! (p+l)!} e^{-2c}. \quad (3.33a)$$

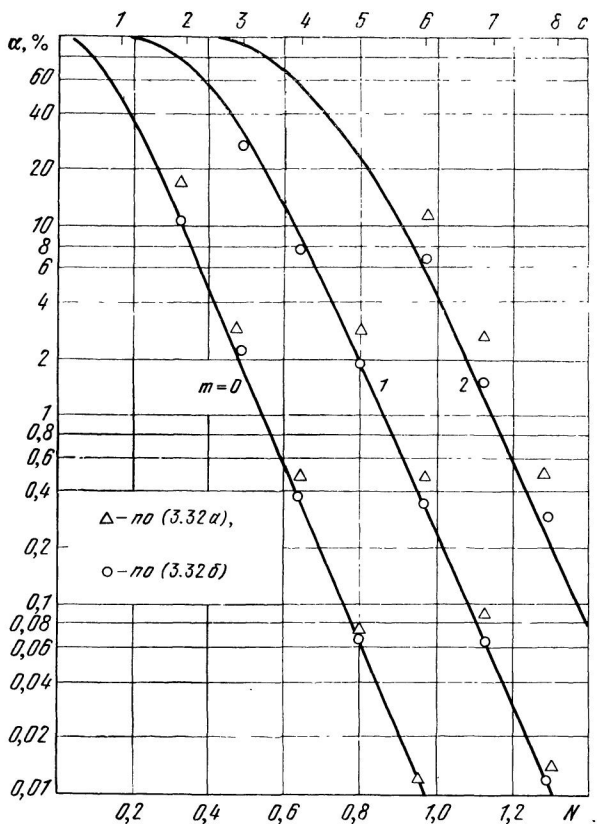


Рис. 3.5. Зависимость дифракционных потерь в конфокальном резонаторе с цилиндрическими зеркалами от параметра Френеля; сплошная линия — численное решение уравнения (3.27а), Δ — по формуле 3.32а, \circ — по формуле 3.32б.

Это соотношение дает результаты, совпадающие с численным расчетом только при очень малых потерях. Удовлетворительные результаты для $\alpha_{pl} < 10\%$ может обеспечить эмпирическая коррекция формулы (3.33а):

$$\alpha_{pl} = \frac{2\pi(4c - 4,52)^{2p+l+1}}{p!(p+l)!} e^{-2c}. \quad (3.33б)$$

Из рис. 3.6 видно, что формула (3.33б) справедлива вплоть до $\alpha_{pl} = 10\%$.

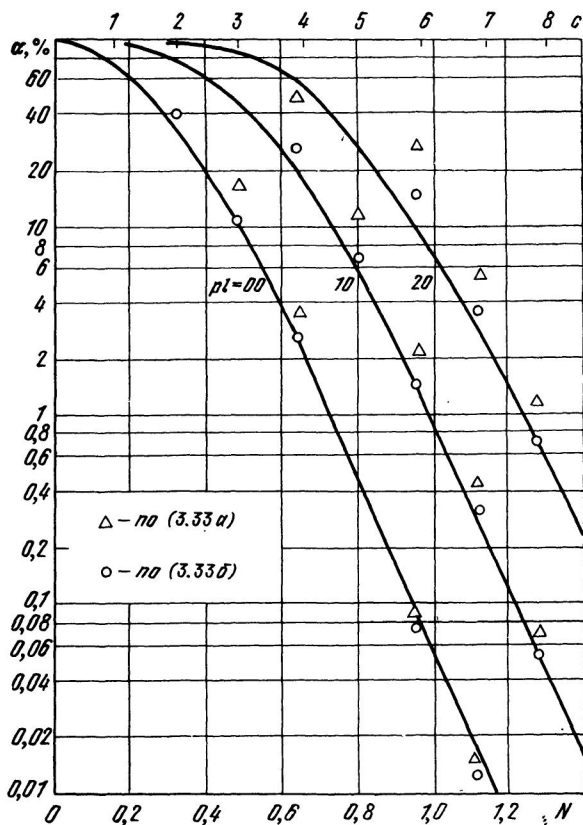


Рис. 3.6. Зависимость дифракционных потерь в конфокальном резонаторе со сферическими зеркалами от параметра Френеля; сплошная линия — численное решение уравнения (3.276), Δ — по формуле 3.33а, \circ — формула 3.33б.

Фазовые набег и спектр частот. В конфокальном резонаторе поверхность равной фазы совпадает с поверхностью зеркала, фазовый набег волны при прохождении резонатора не зависит от размера апертуры и отличается от фазового набега идеальной плоской волны (kL) на величину Φ_{mn} или Φ_{pl} . Анализируя собственные значения уравнений (3.27) или выражения (3.29), нетрудно найти

$$\Phi_{mn} = (m + n + 1)\pi/2; \quad \Phi_{pl} = (2p + l + 1)\pi/2.$$

Выражение для резонансных частот получим из фазового условия резонанса. Для резонатора с прямоугольной симметрией сечения

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{2}(m + n + 1) \right]. \quad (3.34a)$$

Спектр частот данной поперечной моды (m, n), как и в идеальном интерферометре Фабри—Перо, представляет собой ряд эквидистантно расположенных частот. Расстояние между соседними продольными компонентами $\Delta\nu = c/2L$ (см. гл. 1), однако в отличие от системы плоских волн частотные ряды соседних поперечных типов колебаний сдвинуты относительно друг друга точно на $\Delta\nu/2$. Таким образом, все поперечные типы колебаний с четной и нечетной суммами индексов оказываются порознь частотно-вырожденными. Это вырождение (в отличие от системы плоских волн) не зависит от апертурного размера. Частоты биений оказываются кратными $c/4L$.

Для резонатора с центральной симметрией сечения получим

$$\nu_{mnl} = \frac{c}{2L} \left[q + \frac{1}{2}(2p + l + 1) \right]. \quad (3.34b)$$

Здесь также существует частотное выражение поперечных типов колебаний, однако оказываются вырожденными моды с одинаковым значением величины $(2p + l)$, например TEM_{02} и TEM_{10} . Общий вид частотного спектра и расстояние между продольными частотами остаются такими же, но сдвиги частот различных поперечных мод изменяются.

Если конфокальный резонатор составлен из зеркал одинаковой кривизны ($R_1 = R_2 = L$), но разных поперечных размеров ($c_1 \neq c_2$), то для анализа приходится использовать уравнения несимметричного резонатора (3.16) или (3.18). В этом случае, как известно из [21], собственные волны, оставаясь гауссовыми, деформируются. Размер перетяжки уменьшается, а плоскость перетяжки смещается из центра резонатора в сторону отражателя меньших размеров. Для расчета собственных волн можно пользоваться выражениями (3.29), если вместо действительной длины резонатора L ввести эффективную длину

$$L_{\text{эфф}} = 2L \left(\sqrt{c_1/c_2} + \sqrt{c_2/c_1} \right)^{-1},$$

а начало продольной координаты z вместе с плоскостью перетяжки поместить на расстояниях от зеркал $z_1 = c_1 L / (c_1 + c_2)$; $z_2 = c_2 L / (c_1 + c_2)$. Размеры пятен на зеркалах оказываются разными;

причем отношение их равно отношению поперечных размеров отражателей, а произведение постоянно

$$w_1/w_2 = \sqrt{c_1/c_2}; \quad w_1 w_2 = L\lambda/\pi.$$

Дифракционные потери конфокального резонатора с разными апертурами зеркал, как следует из третьего свойства подобия резонаторов (§ 3.2), определяются величиной $c = \sqrt{c_1 c_2}$.

3.4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

Резонатор, образованный двумя плоскими параллельными отражающими поверхностями, был первым использован в лазерной технике. В настоящее время применение плоскопараллельного резонатора ограничено высоким уровнем дифракционных потерь и чрезвычайной критичностью к разъюстировке. В лазерной технике большее распространение находят сферические резонаторы. Заметим, что зачастую в тех случаях, когда используются плоские зеркала, в твердотельных приборах вследствие конечной величины оптической силы активного элемента резонатор оказывается по своим характеристикам эквивалентен сферическому (гл. 6). Использование плоских резонаторов оказывается целесообразным, когда важно обеспечить максимальный объем моды (см. § 3.7) и минимальную расходимость возбуждаемых волн без существенного увеличения потерь. Знание свойств плоскопараллельного резонатора важно и в методическом плане для понимания асимптотики характеристик собственных волн произвольного резонатора при приближении его конфигурации к границам области устойчивости.

Свойства плоскопараллельного резонатора с одинаковыми зеркалами можно изучать на основании анализа интегральных уравнений, получаемых из (3.10) и (3.13) подстановкой $g=1$. Для резонатора с плоскими полосовыми или круглыми зеркалами ядра уравнений имеют вид

$$K(\xi, \xi') = \sqrt{i/2\pi} \exp[-i(\xi - \xi')^2/2], \quad (3.35a)$$

$$K(\rho, \rho') = i^{l+1} J_l(\rho\rho') \rho' \exp[-i(\rho^2 + \rho'^2)/2]. \quad (3.35b)$$

Уравнения с ядрами (3.35) в общем виде не решаются. Ряд работ посвящен численному исследованию плоско-параллельных резонаторов [22, 24].

Другой путь исследования заключается в нахождении асимптотического ($c \gg 2\pi$) решения (см., например [2]). Результаты обеих групп работ прекрасно согласуются. В рамках асимптотического решения резонаторной задачи [2] целесообразно представить собственные значения уравнений (3.35) в виде $\gamma_{mn} = \exp(i2\pi\rho_{mn})$, где $\rho = \rho' - i\rho''$ определяет изменение характеристик собственных волн, связанное с ограничением апертуры резонатора ($|\rho| \ll 1$). При этом, очевидно, дифракционные потери будут определены формулой

$$\alpha = 1 - e^{-4\pi\rho''}, \quad (3.36)$$

а частота

$$\nu = c(q + 2\rho')/2L. \quad (3.37)$$

Что касается распределения поля на зеркалах, то, поскольку резонатор симметричен, собственные функции уравнений (3.26) являются либо четными, либо нечетными функциями переменных ξ и ρ . Л. А. Вайнштейн [2] вводит эти функции в виде

$$E_m(\xi) = \begin{cases} \cos(s_m \xi) & \text{при } m \text{ четном,} \\ \sin(s_m \xi) & \text{при } m \text{ нечетном} \end{cases} \quad (3.38a)$$

для полосовых резонаторов и

$$E_{\rho l}(\rho, \varphi) = J_l(t_{\rho l} \rho) \cos l\varphi \quad (3.38b)$$

для резонаторов с круглыми зеркалами*). При этом

$$s_m = \sqrt{4\pi\rho} = \frac{\pi(m+1)}{M + \beta(1+i)}, \quad (3.39a)$$

$$t_{\rho l} = \sqrt{4\pi\rho} = \frac{2\kappa_{\rho l}}{M + \beta(1+i)}. \quad (3.39b)$$

Здесь и далее (§ 3.4) используются следующие обозначения: $M = 2\sqrt{c}$ — мера апертурного ограничения резонатора; $\beta = 0,824$ — параметр асимптотической теории; m , ρ и l — поперечный, радиальный и азимутальный индексы собственных волн; $\kappa_{\rho l}$ — $(\rho + 1)$ -й корень функции Бесселя l -го порядка.

*) J_l — функция Бесселя l -го порядка первого рода.

Пространственное распределение поля. Для полосового резонатора, используя (3.38а) и (3.39а), можно записать распределение поля по зеркалу в виде

$$E_m(\xi) = \frac{\cos \left[\frac{\pi(m+1)\xi}{M + \beta(1+i)} \right]}{\sin \left[\frac{\pi(m+1)\xi}{M + \beta(1+i)} \right]}. \quad (3.40)$$

Здесь и далее знак «cos» соответствует четным модам, а «sin» — нечетным. Вводя новую безразмерную декартову координату $X = x/a = 2\xi/M$ и разделяя аргумент тригонометрической функции на вещественную и мнимую составляющие, находим

$$E_m(X) = \frac{\cos \{A_m X - iB_m X\}}{\sin \{A_m X - iB_m X\}}, \quad (3.41)$$

где

$$A_m = \frac{(m+1)(1 + \beta/M)(\pi/2)}{1 + 2(\beta/M) + 2(\beta/M)^2};$$

$$B_m = \frac{(m+1)(\beta/M)(\pi/2)}{1 + 2(\beta/M) + 2(\beta/M)^2}.$$

Для цилиндрического резонатора из (3.38б) и (3.39б) следует такое распределение поля по круглому зеркалу:

$$E_{pl}(\rho, \varphi) = J_l \left[\frac{2\kappa_{pl}\rho}{M + \beta(1+i)} \right] \cos l\varphi. \quad (3.42)$$

И здесь, вводя безразмерную радиальную координату $R = r/a = 2\rho/M$ и разделяя аргумент функции Бесселя на вещественную и мнимую части, можно найти

$$E_{pl}(R, \varphi) = J_{pl}(C_{pl}R - iD_{pl}R) \cos l\varphi, \quad (3.43)$$

где

$$C_{pl} = \frac{\kappa_{pl}(1 + \beta/M)}{1 + 2(\beta/M) + 2(\beta/M)^2};$$

$$D_{pl} = \frac{\kappa_{pl}(\beta/M)}{1 + 2(\beta/M) + 2(\beta/M)^2}.$$

При анализе распределения амплитуды и фазы поля по зеркалу удобно учесть, что мнимая часть аргумента тригонометрических и бесселевых функций в выражениях (3.41) и (3.43) уменьшается с увеличением апер-

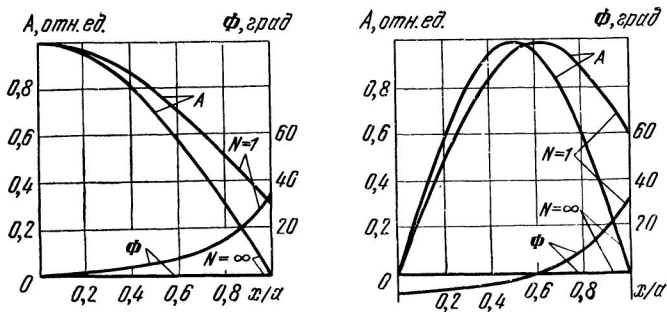


Рис. 3.7. Распределение амплитуды (A) и фазы (Φ) поля по зеркалу полосового плоского резонатора

туры резонатора. В рамках рассматриваемого асимптотического приближения $(\beta/M) \ll 1$ можно воспользоваться разложением в ряд функций комплексного переменного и получить приближенные формулы

$$E_m(X) = \begin{cases} \cos(A_m X) + iB_m X \sin(A_m X), \\ \sin(A_m X) - iB_m X \cos(A_m X), \end{cases} \quad (3.44a)$$

$$E_{\rho l}(R) = J_l(C_{\rho l} R) - i \left[D_{\rho l} R J_{l-1}(C_{\rho l} R) - \right. \\ \left. - l \frac{D_{\rho l}}{C_{\rho l}} J_l(C_{\rho l} R) \right]. \quad (3.44b)$$

На рис. 3.7 показано распределение амплитуды и фазы низших мод собственного поля по полосовому зеркалу. Амплитуда поля сохраняет существенное значение по всей поверхности зеркала. На краю зеркала амплитуда возрастает с увеличением индекса моды и с уменьшением параметра Френеля. Волновая поверхность, вообще говоря, не совпадает с отражающей. Максимальное «отслоение» волновой поверхности наблюдается на краю зеркала.

Вне зеркал в полости резонатора поперечное распределение поля приблизительно сохраняется. Важно отметить, что в плоскопараллельном резонаторе в отличие от конфокального поле не концентрируется вблизи оси, а заполняет все поперечное сечение полости. При увеличении апертуры поперечное амплитудно-фазовое распределение расширяется.

Большой интерес представляет угловая диаграмма направленности излучения плоскопараллельного резонатора $I(\psi)$, так как именно такому резонатору соответствует предельная минимальная расходимость собственных пучков устойчивых резонаторов. Для расчета диаграммы направленности следует подставить распределения (3.40) в (3.42) в (3.21). Введя переменную $\Theta = ka\psi$, нетрудно найти для полосового резонатора

$$I_m(\Theta) = C_m \left| \frac{\sin(A_m - \Theta - iB_m)}{A_m - \Theta - iB_m} + (-1)^m \frac{\sin(A_m + \Theta - iB_m)}{A_m + \Theta - iB_m} \right|^2, \quad (3.45a)$$

где C_m — нормирующий множитель. Предельный случай при $M \rightarrow \infty$ соответствует выражению

$$I_m(\Theta) = \left\{ \frac{\cos(\Theta + m\pi/2)}{1 - \left[\frac{2\Theta}{\pi(m+1)} \right]^2} \right\}^2. \quad (3.45b)$$

Здесь нормирующий множитель выбран так, чтобы осевая интенсивность четных мод равнялась единице.

На рис. 3.8 показаны диаграммы направленности основной моды полосового резонатора. Если резонатор характеризуется большим числом Френеля ($N > 10$), то диаграмма направленности описывается формулой (3.45b). Интенсивность пучка постепенно спадает при удалении от оси так, что первый минимум соответствует величине $\Theta_1 = 3\pi/2$. Основной лепесток диаграммы содержит более 99% энергии пучка. По мере уменьшения числа Френеля диаграмма направленности резонатора деформируется: энергия основного лепестка переходит в побочные, минимумы функции $I(\Theta)$ уже не равны нулю. На рисунке для сравнения показана диаграмма направленности, соответствующая дифракции плоской однородной волны на щели (штриховая линия).

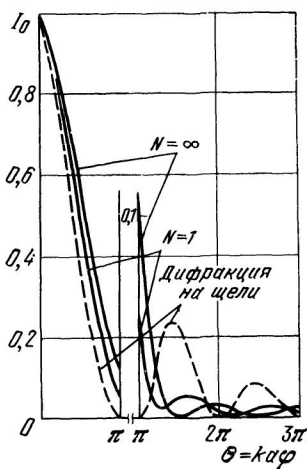


Рис. 3.8. Диаграмма направленности основной моды плоского полосового резонатора

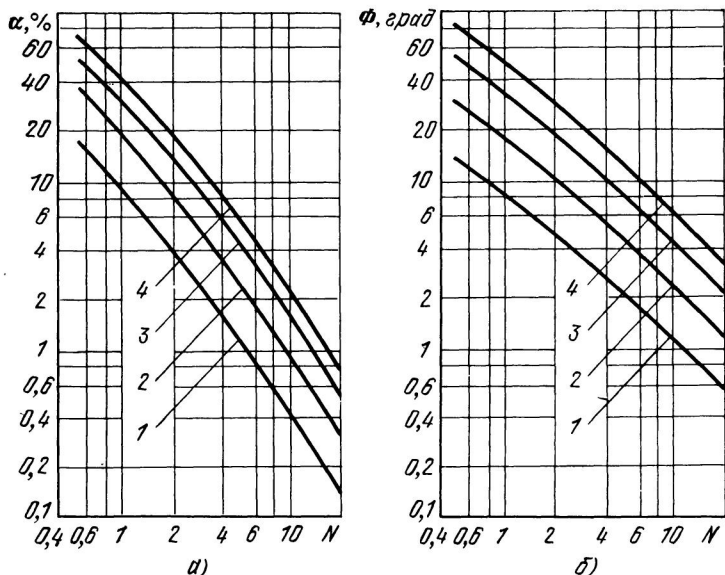


Рис. 3.9. Зависимость дифракционных потерь (а) и дополнительных фазовых набегов (б) от параметра Френеля для двух низших мод плоских резонаторов, составленных из полосовых (1, 3) и круглых (2, 4) зеркал

Дифракционные потери. В плоскопараллельном резонаторе дифракционные эффекты проявляются в большей степени, чем в каком-либо другом резонаторе. Дифракционные потери в таком резонаторе максимальны. На рис. 3.9 приведены зависимости коэффициентов потерь от параметра Френеля для низших мод цилиндрических и полосовых резонаторов, полученные численным решением уравнений (3.26) [24]. Видно, что дифракционные потери резко уменьшаются с ростом параметра Френеля. Высшим модам соответствуют большие потери. Асимптотическое решение задачи [2] дает выражения, хорошо согласующиеся с численными результатами. Для резонаторов с полосовыми и круглыми зеркалами соответственно, используя (3.36) и (3.39) можно получить выражения

$$\alpha_m = 1 - \exp \left[\frac{-16,3 (m+1)^2}{(M+\beta)^3} \right], \quad (3.46a)$$

$$\alpha_{pl} = 1 - \exp \left[\frac{-6,6x^2_{pl}}{(M+\beta)^3} \right]. \quad (3.46б)$$

Значения корней функций Бесселя (x_{pl}) приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

l	p			
	0	1	2	3
0	2,405	5,520	8,654	11,791
1	3,832	7,016	10,174	13,323

Формулы (3.46) пригодны для $N \geq 0,5$.

Фазовые набег и спектр частот. Усредненный по апертуре резонатора фазовый набег, соответствующий одностороннему проходу волны, определяет спектр собственных частот резонатора. Обычно приводят не полный набег фазы, а его добавку к набегу плоской волны (Φ_m, Φ_{pl}). Эта величина задается аргументом собственных значений уравнений (3.35). Частота данной моды определяется фазовым условием резонанса. Совокупности собственных мод, отличающихся только продольным индексом q (так называемой поперечной моде), соответствует эквидистантный ряд частот, разделенных интервалом $\Delta\nu_q = c/2L$.

В идеальном плоскопараллельном резонаторе с бесконечной апертурой дифракционными эффектами можно пренебречь и считать распространяющуюся собственную волну плоской. В этом приближении собственные значения уравнений (3.35) вещественны и частотные ряды всех поперечных типов колебаний совпадают (частотное вырождение поперечных мод). Будем называть такой вырожденный частотный ряд базовым. Спектр биений такого резонатора состоит, очевидно, только из набора частот, кратных $\Delta\nu_q$. Число частот биений на единицу меньше числа возбуждаемых частот.

В реальных резонаторах с конечной апертурой величины Φ_m, Φ_{pl} отличны от нуля и резонансный частотный ряд оказывается сдвинутым относительно базового. Сдвиг частотного ряда произвольной поперечной моды (mn, pl) может быть вычислен как $\Delta\nu_{mn} = \Delta\nu_q \Phi_{mn}/\pi$. При этом частотное вырождение снимается и спектр биений усложняется. Наряду с частотами, кратными $\Delta\nu_q$, в спектре появляются в общем случае частоты вида

$s\Delta v_q \pm (\Delta v_{mn} - \Delta v_{m'n'})$, где $s=0, 1, 2, \dots$, а mn и $m'n'$ — индексы возбуждаемых поперечных мод.

Дополнительный фазовый набег возрастает по мере ограничения апертуры резонатора, т. е. уменьшения параметра Френеля (рис. 3.9) и роста индекса моды. Асимптотическая теория плоскопараллельного резонатора [2] дает следующие аналитические выражения $\Phi(N)$ для резонаторов с полосовыми и круглыми зеркалами соответственно:

$$\Phi_m = 282,7(m+1)^2 \frac{M(M+2\beta)}{[(M+\beta)^2 + \beta^2]^2}, \quad (3.47a)$$

$$\Phi_{pl} = 114,6\kappa_{pl}^2 \frac{M(M+2\beta)}{[(M+\beta)^2 + \beta^2]^2}. \quad (3.47б)$$

Формулы (3.47) справедливы при $N \geq 0,5$. В диапазоне $0 \leq N \leq 50$ хорошую точность обеспечивают полуэмпирические соотношения

$$\Phi_m = \frac{(2m+1)45}{1+4,4N(2m+1)/(m+1)^2}, \quad (3.47в)$$

$$\Phi_{pl} = \frac{(2p+l+1)90}{1+(2p+l+1)3,73(\kappa_{00}/\kappa_{pl})^2N}. \quad (3.47г)$$

(В формулах (3.47) значения фазового набега получаются в градусах.)

В заключение параграфа заметим, что, как следует из свойств подобия резонаторов (§ 3.2), распределение амплитуды поля по зеркалам и дифракционные потери для концентрического резонатора оказываются такими же, что и для плоскопараллельного (при равенстве параметра Френеля). Вообще же пространственное распределение полей внутри и вне полости концентрического и плоского резонаторов существенно различно.

3.5. УСТОЙЧИВЫЙ РЕЗОНАТОР ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

На практике чаще используются такие резонаторы, которые не являются ни плоскими, ни концентрическими, ни конфокальными. Расчет распределения поля, дифракционных потерь и частот резонатора произвольной конфигурации представляет собой сложную задачу. Урав-

нения (3.16), (3.18) при произвольных значениях параметров конфигурации не решаются, поэтому приходится искать другие пути.

Численные результаты. Большое практическое и теоретическое значение имеет численный расчет характеристик резонаторов произвольной конфигурации на базе численного решения интегральных уравнений с использованием ЭВМ. Работы такого рода не только дают фактический материал, необходимый для проектирования резонаторов, но и служат для проверки правильности приближенных аналитических методов расчета, играя роль численного эксперимента.

Рассмотрим основные характеристики резонаторов некоторых произвольных конфигураций, полученные численным методом [26]. Выберем для обзора два типа симметричных резонаторов, составленных из сферических и цилиндрических зеркал. Параметры конфигурации рассматриваемых резонаторов варьируются в пределах $0 \leq g \leq 1$ (отрезок OA на G -диаграмме рис. 2.2). Используя изложенные выше свойства подобия двухзер-

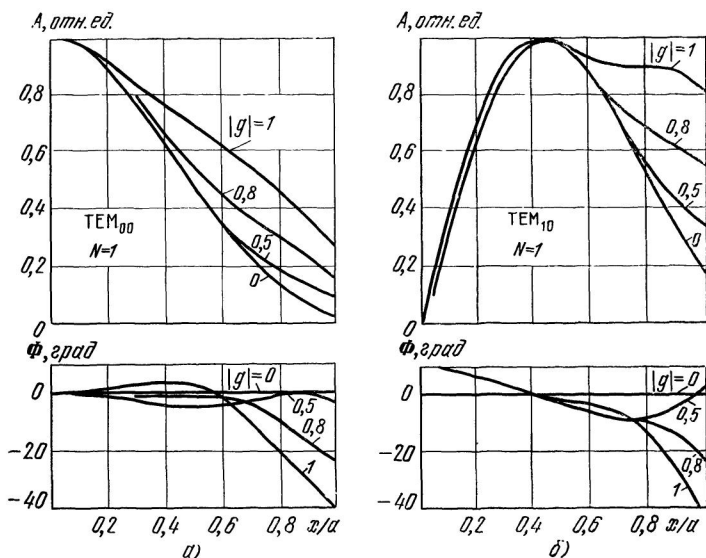
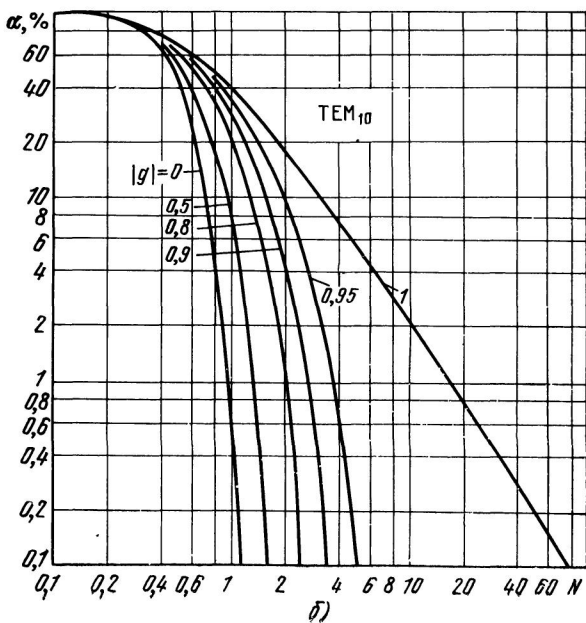
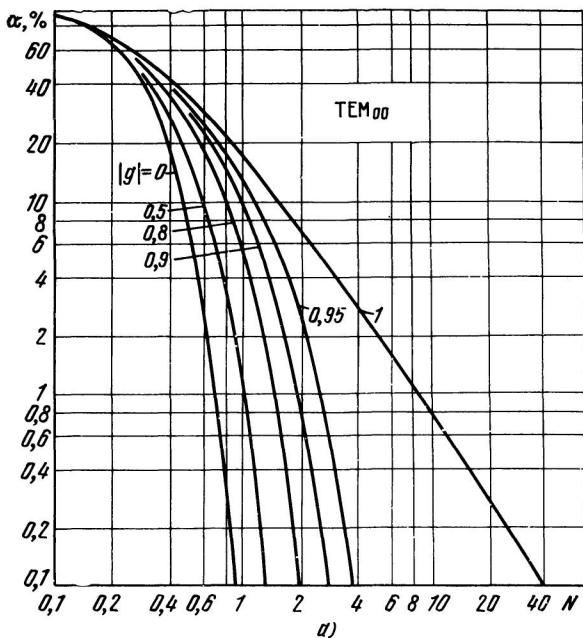


Рис. 3.10. Распределение поля на круглых зеркалах произвольного резонатора

(На рис. 3.10, 3.11 и 3.14 расположение модовых индексов обратное, т. е. l, p .)

Рис. 3.11.
 Зависимость дифракционных потерь в симметричном сферическом резонаторе от параметра Френеля:
 а — мода 00;
 б — мода 10



кальных резонаторов, нетрудно распространить наше рассмотрение на другие конфигурации. Для некоторых резонаторов можно получить характеристики интерполяцией и экстраполяцией существующих численных данных.

Распределения амплитуды и фазы резонансного поля на круглых зеркалах симметричного резонатора ($N=1$) для двух низших типов колебаний показаны на рис. 3.10. Для плоского и конфокального резонаторов численные результаты хорошо согласуются с расчетами, проведенными по формулам § 3.3 и 3.4 (несмотря на то, что рассматриваемый резонатор характеризуется относительно небольшим значением параметра Френеля). В конфокальном резонаторе фаза не меняется по зеркалу, а само поле (для реальных чисел N) концентрируется вблизи оси. Плоский резонатор, напротив, характеризуется максимальным изменением фазы и наиболее «широким» распределением амплитуды. Для резонаторов промежуточных конфигураций распределения амплитуды и фазы постепенно изменяются, переходя от одного экстремального распределения к другому.

Зависимость коэффициента дифракционных потерь за проход от параметра Френеля для двух низших типов колебаний сферических резонаторов различной конфигурации показана на рис. 3.11, для цилиндрических резонаторов — на рис. 3.12. Для всех резонаторов дифракционные потери, естественно, возрастают с увеличением порядка моды и уменьшением параметра Френеля. Наименьшие дифракционные потери соответствуют конфокальному резонатору, а наибольшие — плоскому. Предельные зависимости ($g=0$, $g=1$) хорошо аппроксимируются соотношениями, приведенными в § 3.3 и 3.4.

Зависимость коэффициента потерь от параметра конфигурации $\alpha(g)$ — четная, но в общем случае сложная немонотонная функция. На рис. 3.13 представлены эти зависимости для основного типа колебаний цилиндрического резонатора с небольшими числами Френеля. Видно, что функция $\alpha(g)$ претерпевает провалы, которые становятся все более резкими по мере роста параметра Френеля. Положение и глубина этих провалов определенным образом связаны с N_0 — числом проходов луча, замыкающих лучевое семейство (гл. 2). Провалы в функции $\alpha(g)$ более резко выражены для малых N_0 и сглаживаются при возрастании N_0 . Основной провал

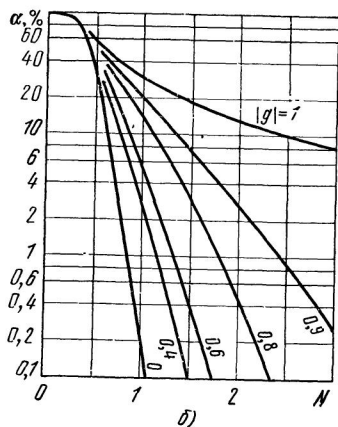
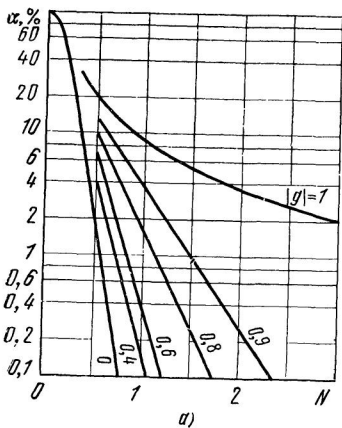


Рис. 3.12. Зависимость дифракционных потерь в симметричном цилиндрическом резонаторе:

a — мода 0; b — мода 1

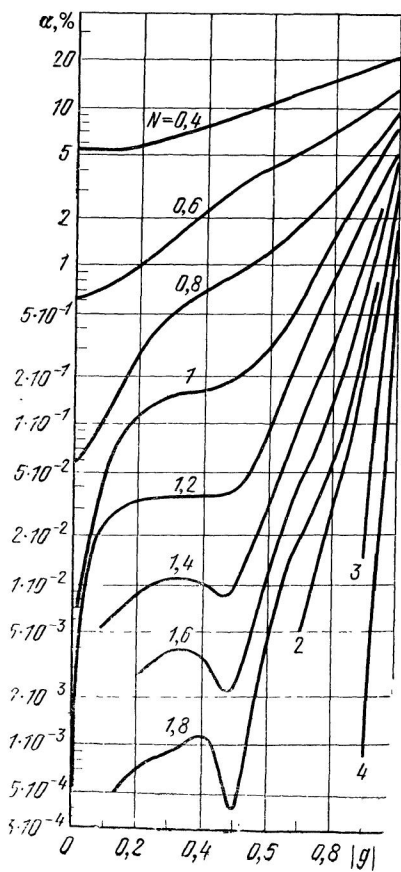


Рис. 3.13. Зависимость коэффициента дифракционных потерь основного типа колебаний устойчивого цилиндрического резонатора от параметра конфигурации (параболическое приближение)

приходится на конфокальную конфигурацию, соответствующую минимально возможному значению $N_0=2$. Положение резонансных провалов может быть найдено из формулы (2.14), которая для рассматриваемых здесь симметричных конфигураций сводится к следующей:

$$g = \pm \cos(\pi k / N_0).$$

Здесь k — произвольное целое число. В табл. 3.2 приведены некоторые значения g , рассчитанные по этой формуле.

Таблица 3.2

N_0	k		
	1	2	3
2	0	—	—
3	0,500	—	—
4	0,707	0	—
5	0,809	0,309	—
6	0,866	0,500	0

Дополнительный (по отношению к плоской волне) набег фазы за один проход волны в резонаторе зависит в общем случае не только от порядка моды и параметра Френеля, но и от конфигурации резонатора. Эта зависимость для двух низших типов колебаний сферического резонатора иллюстрируется рис. 3.14, а для низших типов колебаний цилиндрического резонатора — рис. 3.15. Для конфокальной конфигурации, в соответствии с § 3.3, фазовый набег не меняется при варьировании параметра Френеля. Наиболее сильная зависимость $\Phi_{mn}(N)$ характерна для плоскопараллельного резонатора; она хорошо описывается формулами § 3.4. Для резонаторов промежуточной конфигурации зависимость $\Phi_{mn}(N)$ монотонно изменяется. Если принять фазовый набег плоской волны за нулевой (как это сделано на рис. 3.14, 3.15), то с уменьшением параметра g (увеличение кривизны зеркала) фазовый набег в резонаторе увеличивается, а с увеличением параметра Френеля — уменьшается, асимптотически стремясь к некоторой величине $\Phi_{mn}(\infty)$, характерной для каждой конфигурации.

При малых апертурах произвольного резонатора до-

полнительный фазовый набег может быть оценен как

$$\Phi_{mn}(g) = \Phi_{mn}(0) - g[\Phi_{mn}(0) - \Phi_{mn}(1)]. \quad (3.48a)$$

Здесь $\Phi_{mn}(1)$ и $\Phi_{mn}(0)$ — фазовые набег рассматриваемой волны соответственно для плоского и конфокального резонаторов, которые могут быть найдены по формулам § 3.3 и 3.4 или из рис. 3.14 и 3.15. Если апертура резо-

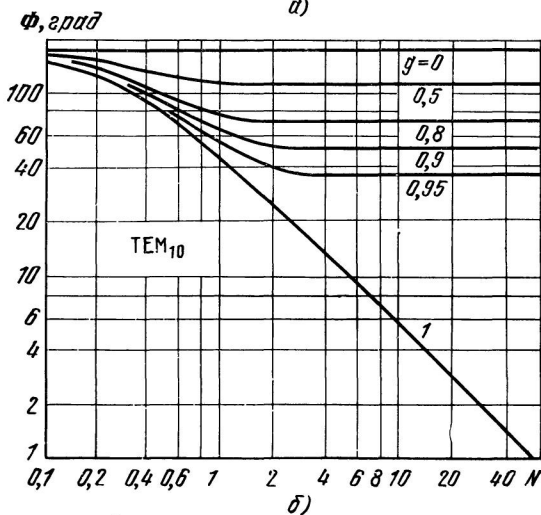
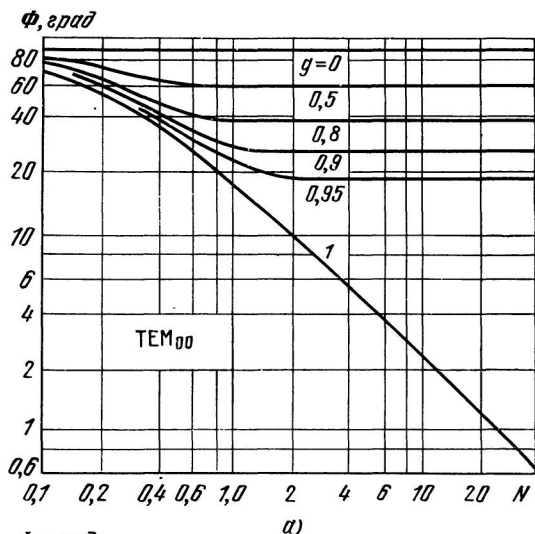


Рис. 3.14. Зависимость дополнительного фазового набег в симметричном сферическом резонаторе от параметра Френеля:
 а — мода 00; б — мода 10

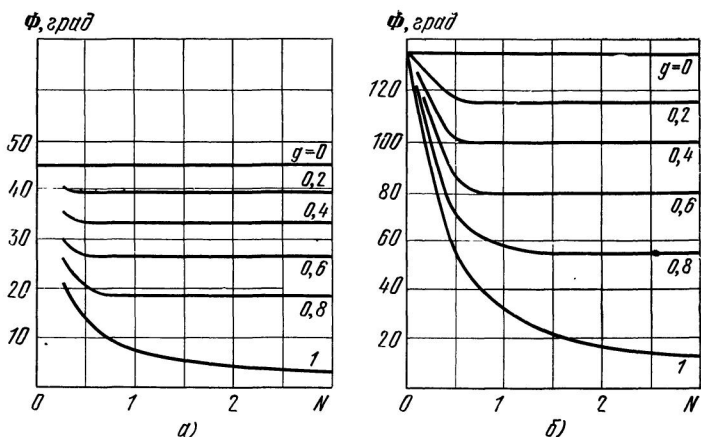


Рис. 3.15. Зависимость дополнительного фазового набег в симметричном цилиндрическом резонаторе от параметра Френеля:
а — мода 0; б — мода 1

натора велика, то для $g > 0$ фазовый набег определится формулой *)

$$\Phi_{mn}(g) = \mu \arccos g, \quad (3.48б)$$

а для $g < 0$ — формулой

$$\Phi_{mn}(g) = \mu(\pi - \arccos g), \quad (3.48в)$$

где μ — порядок моды ($\mu = m + n + 1$ или $\mu = 2p + l + 1$). В произвольном случае следует брать большее из значений, вычисленных по формулам (3.48а и б) при $g > 0$, или меньшее из значений при $g < 0$, определенных по (3.48а и в). Предлагаемая интерполяция обеспечивает 20%-ную точность в интервале $0,5 < N < 50$.

Отмеченные выше конфигурации с замкнутыми лучевыми семействами кроме минимальных дифракционных потерь характеризуются еще частотным вырождением поперечных типов колебаний. При больших параметрах Френеля типы колебаний, порядок которых отличается на величину

$$\Delta\mu = \frac{\pi}{\arccos |g|} = \frac{N_0}{k},$$

*) Формулы (3.48б и в) следуют из рассматриваемого ниже приближения «эквивалентного конфокального резонатора».

оказываются частотно-вырожденными. Для несимметричных резонаторов вырожденные конфигурации определяются формулой (2.14).

Особенность вырожденных устойчивых конфигураций можно наблюдать экспериментально, если фиксировать интенсивность возбуждаемых в активном резонаторе колебаний при непрерывном изменении его длины [17, 93, 106]. В точках, соответствующих вырожденным конфигурациям, наблюдаются резкие экстремумы мощности. Любопытно, что в различных экспериментах фиксировались максимумы и минимумы мощности. Это явление легко понять, если учесть, что вырожденные резонаторы характеризуются двумя факторами, противоположно влияющими на энергетику генерации. С одной стороны, локальное уменьшение дифракционных потерь тем резче, чем меньше общий уровень этих потерь. С другой стороны, частотное и пространственное (по продольной оси) вырождение поперечных типов колебаний. Таким образом, в режиме одной поперечной моды при малом уровне недифракционных потерь, когда межмодовая конкуренция не играет роли, а дифракционные потери составляют значительную долю в общем балансе потерь, можно ожидать максимума мощности [93]. Напротив, при высоком общем уровне потерь, когда с дифракционными эффектами можно не считаться, в многомодовом режиме следует ожидать минимума мощности [17, 106].

Метод ЭКР. При всей важности численных методов совершенно очевидно, что они не могут заменить приближенных аналитических методов. В качестве первого приближения, пригодного для оценок распределения собственного поля резонатора, спектра частот и потерь, широко применяется так называемый метод ЭКР (эквивалентного конфокального резонатора), предложенный Бойдом и Гордоном еще в 1961 г [25]. Рассматривая распределения фазы колебаний на зеркалах произвольного резонатора, полученные либо численными, либо более строгими аналитическими методами, нетрудно видеть, что фаза слабо изменяется по зеркалу. При $N \gg 1$ отражающие поверхности зеркал произвольного резонатора почти совпадают с волновыми фронтами.

Для каждого реального резонатора можно найти такой воображаемый конфокальный, в наборе волновых поверхностей которого найдутся две, совпадающие по кривизне и расстоянию друг от друга с отражающими поверхностями рассматриваемого резонатора. Такой воображаемый конфокальный резонатор и называется эквивалентным конфокальным резонатором. Расстояние между зеркалами (или радиус кривизны зеркал) эквивалентного конфокального резонатора назовем конфо-

кальным параметром рассматриваемого произвольного резонатора (R_0).

В основе метода ЭКР лежит предположение о том, что поле рассматриваемого произвольного резонатора совпадает с полем эквивалентного конфокального резонатора.

Эквивалентный конфокальный резонатор определяется своей длиной ($L_0=R_0$) и местоположением перетяжки относительно зеркал рассматриваемого резонатора (z_i, z_k). Исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_i &= R_0^2/4z_i = R_i, \\ z_k + R_0^2/4z_k &= R_k, \\ z_i + z_k &= L. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Решая систему уравнений (3.49), находим параметры эквивалентного конфокального резонатора

$$R_0 = \frac{2\sqrt{L(R_i - L)(R_k - L)(R_i + R_k - L)}}{R_i + R_k - 2L}, \quad (3.50a)$$

$$z_i = \frac{L(R_k - L)}{R_i + R_k - 2L} \quad (3.50б)$$

или, вводя параметры конфигурации g_i и g_k ,

$$R_0 = \frac{2L\sqrt{g_i g_k (1 - g_i g_k)}}{g_i + g_k - 2g_i g_k}, \quad (3.50в)$$

$$z_i = L \frac{g_k (1 - g_i)}{g_i + g_k - 2g_i g_k}. \quad (3.50г)$$

Здесь z_i положительно, если перетяжка находится от i -го зеркала со стороны резонатора.

Для того чтобы приближенно определить дифракционные потери резонатора в рамках метода ЭКР, следует взять апертуру эквивалентного конфокального резонатора пропорционально размеру пятен в соответствующих сечениях резонаторного пучка: $a'_i/a = \omega'_s/\omega_s$. Это дает следующее выражение для апертуры эквивалентного конфокального резонатора:

$$a'_i = a_i \sqrt{\frac{2}{1 + (2z_i/R_0)^2}}, \quad (3.51a)$$

или, вводя параметры конфигурации,

$$a'_i = a_i \sqrt{\frac{2g_i(1-g_i g_k)}{(g_i + g_k - 2g_i g_k)}}. \quad (3.516)$$

Параметр Френеля эквивалентного конфокального резонатора получим из формул (3.50) и (3.51)

$$N' = N \sqrt{1 - g_i g_k}. \quad (3.52)$$

Величина коэффициента потерь может быть найдена из соотношений § 3.3, если вместо параметра Френеля подставить параметр $c' = 2\pi N'$. Для заданной длины и апертуры резонатора параметр Френеля максимален и, следовательно, потери минимальны при $g_i = g_k = 0$, т. е. при конфокальной конфигурации. Следует отметить, что приближение ЭКР дает коэффициент потерь весьма неточно. Точность вычисления повышается для конфигураций, близких к конфокальной, а также при $N \rightarrow \infty$.

Фазовый набег при прохождении волны между двумя отражателями рассматриваемого резонатора можно определить в приближении ЭКР по формуле (3.29) для конфокального резонатора

$$\Phi_{mn} = (kR_0/2) (\zeta_1 + \zeta_2) - \mu (\operatorname{arctg} \zeta_1 + \operatorname{arctg} \zeta_2).$$

Здесь

$$\zeta_1 = \frac{2z_1}{R_0} = \frac{g_2(1-g_1)}{\sqrt{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}},$$

$$\zeta_2 = \frac{2z_2}{R_0} = \frac{g_1(1-g_2)}{\sqrt{g_1 g_2(1-g_1 g_2)}}.$$

Отсюда легко найти

$$\Phi_{mn} = kL - \mu \operatorname{arctg} \sqrt{(1/g_1 g_2) - 1}$$

или

$$\Phi_{mn} = kL - \mu \arccos \sqrt{g_1 g_2}. \quad (3.53)$$

Для резонансных частот получим условие

$$\nu_{m,nq} = \frac{c}{2L} \left(q + \mu \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{g_1 g_2} \right). \quad (3.54)$$

Рассмотрим теперь область применимости метода ЭКР. Ограничения корректности метода связаны для идеального двухзеркального резонатора с двумя условиями. Первое условие применимости метода заключается в возможности пренебречь дифракционными эффек-

тами. Для этого размеры всех диафрагм должны значительно превышать размер каустики в соответствующих сечениях резонатора.

Нетрудно получить количественный критерий выполнения указанного условия. Рассмотрим резонатор длиной L , образованный зеркалами с R_i и R_k . Из (3.50) можно получить выражение для размера пятна основной моды на i -м зеркале:

$$\omega_i^2 = \frac{2L}{k} \sqrt{\frac{g_i}{g_i(1-g_i g_k)}}.$$

Размер пятна произвольной моды μ на i -м зеркале дается соотношением

$$\omega_{i\mu}^2 = \frac{2\kappa_\mu^2 L}{k} \sqrt{\frac{g_i}{g_i(1-g_i g_k)}},$$

где κ_μ — коэффициент, указывающий, во сколько раз размер пятна произвольной моды больше размера пятна основной моды. Потребовав, чтобы размер пятна оказался много меньше апертурного размера, получим условие

$$2\kappa_\mu^2 \sqrt{\frac{g_i}{g_i(1-g_i g_k)}} \ll 2\pi N_i, \quad (3.55)$$

где $N_i = a^2_i / \lambda L$ — параметр Френеля.

Приведенное условие ограничивает параметр Френеля для каждой конфигурации снизу. Конкретное соотношение между параметрами резонатора, обеспечивающее применимость законов подобия резонаторных систем, зависит от характера и требуемой точности расчета. Оценки показывают, что при

$$N_i \geq \sqrt{\frac{g_i}{g_i(1+g_i g_k)}}$$

для основной моды дифракционные потери не превышают 0,1%, а точность вычисления резонансных частот не хуже 1%.

Второе условие применимости метода связано с возможностью пользоваться приближением гауссовой оптики для каждого меридионального сечения резонатора. Дополнительные фазовые набег, возникающие вследствие различных aberrаций, должны быть значительно меньше 2π . Рассмотрим, к чему приводит это условие для резонатора, составленного из идеальных съюстированных зеркал. В этом случае член четвертого порядка в разложении оптического пути между двумя произвольными точками разных зеркал резонатора записывается так [9] *):

$$\Delta d_i(r_1, r_2, t) = (1/8L^3) [g_1(1-3g_1+g_1^2)r_1^4 + g_2(1-3g_2+g_2^2)r_2^4 + \\ + 2(1-g_1-g_2)r_1^2 r_2^2 - t^4 + 2g_1 r_1^2 t^2 + 2g_2 r_2^2 t^2],$$

где $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$; $t^2 = 2(x_i x_k + y_i y_k)$.

Диапазон изменения величины Δd_i в пределах апертуры резонатора определяет вклад aberrации в формирование моды. Поэтому

*) См. также приложение В.

условием пренебрежения абберационными эффектами является неравенство

$$k\Delta d_4(a_1, a_2) \ll 2\pi. \quad (3.56)$$

Для симметричных резонаторов соотношение (3.56) упрощается и может быть сведено к следующему:

$$^{1/4}N^3 \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 (1-g)^3 \ll 1.$$

Это условие ограничивает параметр Френеля для каждой конфигурации сверху. Правда, ограничение зависит от величины a/λ , которая для реальных резонаторов изменяется от 10^3 до 10^4 .

Указанные условия (3.55) и (3.56) образуют множество значений N , g_1 , g_2 , допускающее использование метода ЭКР для расчета полей и фазовых соотношений. Нетрудно убедиться, что реальные резонаторы, как правило, принадлежат этому множеству. Условия применимости метода легче выполняются для резонаторов большей апертуры и для низших типов колебаний.

Кроме рассмотренного метода ЭКР, существуют и другие приближенные приемы аналитической оценки характеристик резонатора произвольной конфигурации. Ряд работ основан на использовании теории возмущений. Резонатор произвольной конфигурации рассматривается как возмущенная конфокальная или плоская система. Характеристики типа колебаний произвольного резонатора получают в виде разложения по модам конфокального или плоского резонатора соответственно. Область конфигураций, для которых подобная методика обеспечивает допустимую точность, естественно ограничена районами G -плоскости, непосредственно окружающими точки $g_1=g_2=0$ и $g_1=g_2=1$. Мы здесь не рассматриваем применение методов теории возмущений, полагая, что приближение ЭКР обеспечивает решение большинства задач резонаторной техники, которые ставит практика.

3.6. НЕУСТОЙЧИВЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Неустойчивые резонаторы занимают особое место в технике из-за специфики своих свойств. Они принципиально способны обеспечить лучшие пространственно-частотные характеристики излучения для лазерных систем с большим усилением и объемом активного элемента [42—49, 99, 122, 124, 127]. Общее волновое рассмотрение свойств неустойчивых резонаторов можно проводить на базе уравнений (3.14) с некоторыми дополнениями. В частности, к неустойчивым configura-

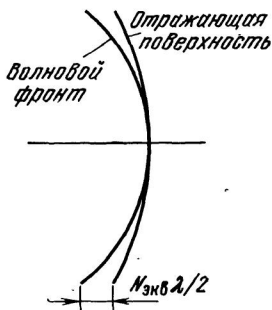


Рис. 3.16. К введению параметра $N_{\text{экр}}$

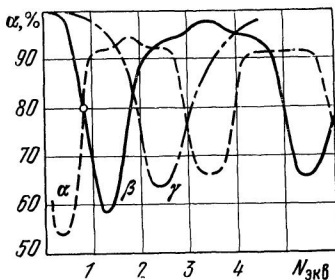


Рис. 3.17. Зависимость потерь в неустойчивом резонаторе от эквивалентного параметра Френеля

циям применимы свойства подобия резонаторов (§ 3.2).

Одной из особенностей неустойчивых резонаторов является обнаруживаемое в рамках лучевой оптики (гл. 2) несовпадение поверхностей равной фазы с отражающими поверхностями зеркал. Волновые поверхности падающей и отраженной волн также не совпадают. Это обстоятельство существенно влияет на формирование характеристик собственных волн резонатора. Качественно понятно, что чем сильнее геометрическое преобразование волновых фронтов на зеркале, тем меньше относительное значение дифракционного изменения отраженной волны.

Расстояние у края апертуры между отражающей поверхностью и примыкающей к ней волновой поверхностью (рис. 3.16), выраженное в полуволнах, оказывается удобной мерой дифракционных эффектов. Этот безразмерный параметр, называемый эквивалентным параметром Френеля ($N_{\text{экр}}$), используется для характеристики волновых свойств неустойчивого резонатора вместо параметра Френеля N :

$$N_{\text{экр}} = a^2 |(\tilde{\rho} - \rho)|/\lambda,$$

где a — апертурный размер зеркала; λ — длина волны; $\tilde{\rho}$ — кривизна волновой поверхности, примыкающей к зеркалу; ρ — кривизна зеркала. В равной мере используется параметр $s_{\text{экр}} = 2\pi N_{\text{экр}}$. С увеличением эквивалентного параметра Френеля роль дифракции на аперту-

ре зеркал резонатора ослабевает. Для различных конкретных конфигураций резонатора $N_{\text{экв}}$ пропорционально N :

$$N_{i_{\text{экв}}} = N_i \sqrt{g_i^2 - g_i/g_k} = N_i [(M^2 - 1)/4Mg_k],$$

где M — введенный ранее (гл. 2) коэффициент линейного расширения волны.

При изучении неустойчивых резонаторов вместо поля на зеркале иногда рассматривают поле на прилегающей волновой поверхности, которая определяется в лучевом приближении. Нетрудно видеть, что обе собственные функции различаются лишь фазовым множителем $\exp(\pm ic_{\text{экв}}x^2/2a^2)$.

Рассмотрим результаты численного анализа интегральных уравнений для поля в неустойчивых резонаторах [46].

Потери энергии в неустойчивом резонаторе с конечной апертурой определяются как дифракционными, так и геометрическими эффектами. Коэффициент потерь, определяемый модулем собственных значений уравнений (3.16), (3.17), сложно немонотонно зависит от геометрии резонатора. На рис. 3.17 представлены характерные зависимости коэффициентов потерь от эквивалентного параметра Френеля. В области малых $N_{\text{экв}}$ различным модам соответствуют разные потери, уменьшающиеся с ростом $N_{\text{экв}}$. При некоторых (разных для различных мод) значениях параметра Френеля рассматриваемые зависимости претерпевают минимум. Затем потери растут вплоть до максимума. Дальнейшее возрастание $N_{\text{экв}}$ реализует квазипериодическую зависимость $\alpha(N_{\text{экв}})$. При этом положение экстремумов характерно для каждой моды; с возрастанием $N_{\text{экв}}$ амплитуда изменения потерь уменьшается, а среднее значение коэффициента потерь стремится к значению, соответствующему геометрическому приближению (см. § 2.4 и 5.3).

Для начального участка зависимости $\alpha(N_{\text{экв}})$ характерно пересечение кривых для различных типов колебаний. Таким образом, на различных интервалах изменения параметра Френеля ряд мод, расположенный в порядке возрастания потерь, перестраивается. В частности, наиболее добротными могут оказаться различные моды. Традиционно принято обозначать моды индексами, возрастающими с уменьшением добротности. Здесь такие обозначения однозначны только в определенных

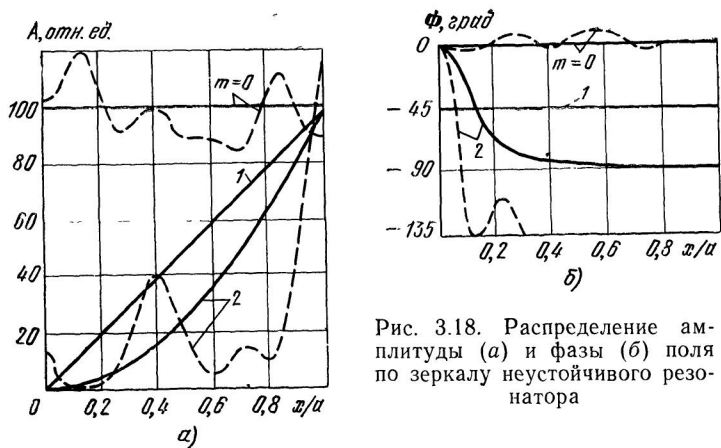


Рис. 3.18. Распределение амплитуды (а) и фазы (б) поля по зеркалу неустойчивого резонатора

интервалах изменения $N_{\text{ЭКВ}}$. Поэтому различные моды неустойчивого резонатора обозначаются малыми буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ в порядке возрастания потерь при $N_{\text{ЭКВ}} \rightarrow 0$. Пересечение зависимостей $\alpha(N_{\text{ЭКВ}})$ характеризует вырождение мод неустойчивого резонатора по потерям.

Распределение амплитуды и фазы по волновой поверхности лучевого приближения в общем случае носят нерегулярный характер (штриховые кривые на рис. 3.18), только отдаленно напоминая лучевое приближение. При изменении $N_{\text{ЭКВ}}$ эти распределения меняются. При вырождении двух мод их пространственные характеристики становятся похожими.

Описанные характеристики неустойчивого резонатора с ограниченной апертурой оказываются неудобными на практике, так как вырождение мод затрудняет достижение одномодового режима. Характеристики реальных резонаторов, однако, гораздо ближе к геометрическому приближению, чем это следует из численного анализа исходных уравнений. Описанные характеристики вырожденных мод получаются при идеальном симметричном и резком контуре апертуры резонатора. Нарушение формы контура или сглаживание фронта коэффициента отражения на краю зеркала, неизбежное на практике, автоматически снимает вырождение собственных типов колебаний [49, 118]. Для полного снятия вырождения достаточно, чтобы коэффициент отражения

спадал на краю зеркала в пределах зоны размером $h \approx a/2N_{\text{ЭКВ}}$.

Поскольку в реальных резонаторах дифракционные эффекты автоматически или намеренно уменьшены, важное значение для практики приобретает асимптотическое ($N_{\text{ЭКВ}} \rightarrow \infty$) решение исходных уравнений. Это решение найдено и проанализировано в ряде работ, например [44, 121, 122, 124]. Асимптотическое решение дает набор колебаний, характеристики которых близки к полученным в рамках геометрооптического приближения в гл. 2. В частности, потери в асимптотическом случае определяются исключительно лучевой оптикой и поэтому могут рассчитываться по формулам (2.23)*. Таким образом, моды реального резонатора существенно различаются по добротности, что благоприятствует реализации одномодового режима.

Распределение поля на зеркалах неустойчивого резонатора $E_m(x)$ или $E_{pl}(r)$ в асимптотическом приближении описывается функциями Эрмита — Гаусса или Лагерра — Гаусса от комплексного аргумента. Для резонатора с цилиндрическими зеркалами шириной $2a$

$$E_m(x) = C_m H_m \left(\sqrt{ic_{\text{ЭКВ}}} \frac{x}{a} \right) \exp \left(\pm \frac{ic_{\text{ЭКВ}} x^2}{2a^2} \right). \quad (3.57a)$$

Для резонатора, составленного из сферических зеркал с радиусом апертуры a :

$$E_{pl}(r) = C_{pl} \left(\sqrt{ic_{\text{ЭКВ}}} \frac{r}{a} \right)^l L_p^l \left(ic_{\text{ЭКВ}} \frac{r^2}{a^2} \right) \exp \left(\pm \frac{ic_{\text{ЭКВ}} r^2}{2a^2} \right). \quad (3.57b)$$

В приведенных выражениях C_m и C_{pl} — нормирующие постоянные, а фазовый множитель $\exp(\pm ic_{\text{ЭКВ}} x^2 / 2a^2)$ соответствует переходу от поверхности зеркала к касательной волновой поверхности.

Примерные распределения амплитуды и фазы по граничной волновой поверхности лучевого приближения для резонатора с нерезкой апертурой и параметрами $g_1 = g_2 = 1,8$; $c_{\text{ЭКВ}} = 37$ изображены на рис. 3.18 непрерывными линиями. Распределения имеют регулярный характер, близкий к лучевому приближению. Отличие от лучевого приближения обнаруживается вблизи оптической оси для высших типов колебаний.

* Относительно потерь в неустойчивом резонаторе см. также § 5.3.

3.7. СОГЛАСОВАНИЕ ПОЛЯ УСТОЙЧИВОГО РЕЗОНАТОРА С АКТИВНОЙ СРЕДОЙ

При выборе конфигурации активного устойчивого резонатора большое значение имеет согласование его поля с параметрами активной среды. Возбуждаемые в резонаторе волны должны максимально взаимодействовать с ансамблем активных молекул среды. Опуская **здесь частотный аспект проблемы***), рассмотрим вопрос согласования пространственных характеристик.

Для количественной характеристики пространственного согласования резонатора со средой целесообразно ввести специальные параметры — так называемые относительный объем моды и относительный эффективный показатель усиления. Если распределение усиления по среде однородно, то указанное согласование может быть охарактеризовано величиной относительного объема моды. Под относительным объемом моды понимают отношение объема части активной среды (на рис. 3.19 заштрихована), которая ограничена поверхностью с амплитудой основной моды, в « e » раз меньшей осевой, в том же поперечном сечении, ко всему объему среды. Введенный таким образом относительный объем моды обычно меньше единицы. Увеличение этой характеристики улучшает заполнение активной среды полем резонатора. Если расстояние от оси резонатора до поверхности, ограничивающей объем моды, обозначить ω , то для астигматичного резонатора относительный объем моды выразится так (см. рис. 3.19):

$$V = \frac{1}{a^2 l} \int_{z_1}^{z_2} \omega_x \omega_y dz \quad (3.58a)$$

или (при $\omega_x = \omega_y = \omega$)

$$V = \frac{1}{a^2 l} \int_{z_1}^{z_2} \omega^2 dz. \quad (3.58б)$$

Здесь a — радиус сечения активной среды. Эти соотношения позволяют находить относительный объем основной моды как в процессе численных расчетов, так и с использованием метода ЭКР.

Относительный объем моды, как показывает анализ, зависит от конфигурации резонатора, положения и размеров активной среды, длины волны излучения. На рис. 3.20 приведена зависимость $V(g)$ для симметричного сферического резонатора ($a^2/\lambda L = 1$) при расположении среды в центре резонатора с различной степенью заполнения ($\Lambda = l/L$). В зоне применимости метода ЭКР легко получить из (3.58б) выражения

$$V = \frac{\lambda L}{2\pi a^2} \left(\sqrt{\frac{1+g}{1-g}} + \frac{\Lambda^2}{3} \sqrt{\frac{1-g}{1+g}} \right), \quad (3.59a)$$

для симметричного резонатора при $g_1 = g_2 = g$ и

$$V = \frac{\lambda L}{\pi a^2} \left(\sqrt{\frac{g}{1+g}} + \frac{3 + \Lambda^2}{12} \sqrt{\frac{1-g}{g}} \right) \quad (3.59б)$$

*) Вопросы частотного согласования подробно рассмотрены в [3].

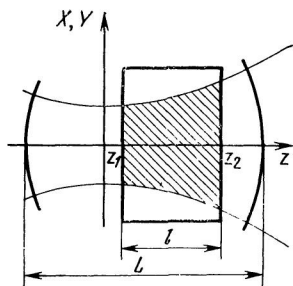


Рис. 3.19. К введению относительного объема моды

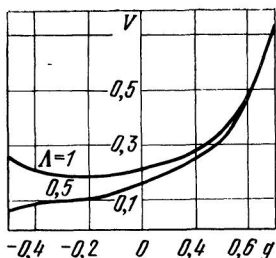


Рис. 3.20. Зависимость $V(g)$ для симметричного сферического резонатора ($a^2/\lambda L=1$)

для резонатора при $g_1=1$ и $g_2=g$. Приведенные формулы соответствуют расположению среды в центре резонатора.

Из формул (3.59) следует, что относительный объем моды возрастает к границам области устойчивости. Для резонатора, составленного из плоских зеркал, анализ численных расчетов показывает, что объем моды максимален; он почти не зависит от степени заполнения и определяется лишь параметром Френеля N . Для $N > 1$ применимо следующее эмпирическое соотношение:

$$V = (0,725 + 0,14/N)^2.$$

Объем моды концентрического резонатора существенно зависит от степени заполнения. Здесь можно воспользоваться соотношением

$$V = (\Lambda^2/3) (0,725 + 0,14/N)^2.$$

В заключение отметим, что использование относительного объема моды [см. (3.58)] в качестве критерия согласования резонаторного поля с активной средой возможно лишь при равномерном распределении усиления. Если активная среда существенно неоднородна, то для характеристики согласования приходится вводить иные эффективные величины.

Глава 4

ОПТИКА ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Из предыдущих параграфов следует, что пространственное амплитудно-фазовое распределение электромагнитного поля собственных типов колебаний устойчивого резонатора образует характерный пучок. Волновые поверхности этого пучка близки к сферическим, а поперечная структура задается в первом приближении полиномами Эрмита — Гаусса при прямоугольной симметрии

сечения или полиномами Лагерра — Гаусса при аксиальной симметрии сечения (см. § 3.3). Фундаментальная мода характеризуется гауссовым поперечным распределением амплитуды в любом сечении пучка. Соответствующая продольная структура пучка определяется гиперболоидной каустической поверхностью; пучок расширяется при распространении от наименьшего сечения (рис. 2.5).

Каждое поперечное сечение z такого резонаторного пучка характеризуется радиусом кривизны сферического волнового фронта R_z и расстоянием ω_z от оси, на котором амплитуда основной моды уменьшается в e раз. В то же время однозначное задание пучка может осуществляться указанием местоположения наименьшего сечения (перетяжки) и размера пятна в этом сечении ω_0 .

Такого рода пучки называют гауссовыми; они играют существенную роль в оптике. Собственная волна реальных устойчивых резонаторов при $N \gg 1$ столь близка к гауссову пучку, что последний может описывать излучение для широкого класса лазеров с устойчивым резонатором. Гауссовы волны оказываются собственными для различных пассивных резонаторов и линзовых волноводов [6]. Гауссов когерентный пучок, не являясь ни гомоцентрическим, ни плоской волной, обладает определенной спецификой в закономерностях распространения и взаимодействия с оптическими системами. В этом смысле гауссов пучок оказывается новым объектом для технической оптики и требует в общем случае модернизации методов расчета оптических систем, предназначенных для трансформации лазерного излучения. В данной главе рассматриваются свойства и способы описания гауссовых пучков, а также закономерности их распространения и преобразования внешними (расположенными вне резонатора) простыми оптическими системами.

4.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА В ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущей главе гауссов пучок вводился как результат решения интегральных уравнений, составленных в рамках теории Кирхгофа. Покажем здесь, что основные закономерности распространения гауссова пучка в однородном изотропном пространстве следуют непосредственно из анализа скалярного волнового урав-

нения [20]. Скалярная амплитуда электромагнитного поля должна удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0, \quad (4.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — постоянная распространения.

Представим предполагаемое решение исходного волнового уравнения (4.1) в виде

$$u = u_0 f(x, y, z) \exp(-ikz), \quad (4.2)$$

где $f(x, y, z)$ — некоторая неизвестная комплексная функция координат, определяющая пространственное распределение амплитуды и фазы гауссовой волны. Функция $f(x, y, z)$ характеризует отличия гауссова пучка от плоской волны [для плоской волны $f(x, y, z) = \text{const}$]: неоднородность поперечного распределения, расширение пучка по мере удаления от перетяжки, кривизна волнового фронта.

Подставив решение (4.2) в исходное волновое уравнение (4.1), можно получить уравнение относительно $f(x, y, z)$. При этом, учитывая параксиальный характер гауссова пучка, будем считать, что изменение искомой функции по координате z значительно слабее изменения по поперечным координатам x и y , и пренебрежем величиной $\partial^2 f / \partial z^2$. Прделав указанную подстановку, получим известное параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) напоминает по форме стационарное уравнение Шредингера; набор решений его хорошо изучен [34]. Мы ограничимся сначала анализом решения, соответствующего фундаментальной моде, полагая, что переход к модам высших порядков не представит затруднений [6].

Запишем решение (4.3) в виде

$$f(x, y, z) = \exp \left[-i \left(p + \frac{kr^2}{2q} \right) \right], \quad (4.4)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$; $p(z)$ и $q(z)$ — комплексные функции продольной координаты z . Структура решения (4.4) позволяет установить физический смысл этих функций. Функция $p(z)$ представляет собой комплексную фазу на оси пучка; эта фаза отсчитывается относительно некоторой воображаемой плоской волны. Мнимая часть $p(z)$ опре-

делает изменение амплитуды на оси пучка, обусловленное расширением гауссова пучка. Функция $q(z)$ — комплексная характеристика, определяющая относительное поперечное распределение амплитуды и фазы поля. Вещественная часть $q(z)$ задает распределение фазы, а мнимая — распределение амплитуды.

Рассмотрим, при каких условиях выражение (4.4) является решением уравнения (4.3). Для этого подставим предполагаемое решение в исходное дифференциальное уравнение и получим

$$2i \frac{k}{q} + 2k \frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{kr}{q}\right)^2 \left(1 - \frac{\partial q}{\partial z}\right) = 0.$$

Видно, что это уравнение обращается в тождество при выполнении следующих условий:

$$\partial p / \partial z = -i/q, \quad (4.5a)$$

$$\partial q / \partial z = 1. \quad (4.5b)$$

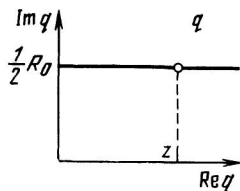
Соотношения (4.5) определяют закономерности распространения гауссова пучка в оптически однородном, изотропном пространстве.

Прежде всего отметим, что для любого сечения пучка справедливо соотношение (4.4) при различных значениях функций $p(z)$ и $q(z)$. Физически это соответствует сохранению гауссовой поперечной структуры пучка в любом его сечении при изменении масштабов амплитудно-фазового распределения. Аналогичное положение справедливо и для высших мод.

Обратимся далее к изменению масштабов распределения поля, задаваемых функциями $p(z)$ и $q(z)$. Комплексный параметр гауссова пучка (q) определяет относительное распределение фазы и амплитуды поля в произвольном поперечном сечении пучка (z). Будем считать (в соответствии с § 3.3), что волновой фронт представляет собой сферу с радиусом R , а распределение амплитуды имеет вид функции Гаусса, причем амплитуда уменьшается в « e » раз на расстоянии ω от оси пучка. Тогда, очевидно, в выражении (4.4) $\text{Im}(kr^2/2q) = -r^2/\omega^2$, а $\text{Re}(kr^2/2q) = kr^2/2R$. Связь комплексного параметра q с характеристиками гауссовой волны в данном сечении (R , ω) оказывается следующей:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{k\omega^2}. \quad (4.6)$$

Рис. 4.1. Изменение комплексного параметра q при распространении гауссова пучка в свободном пространстве



В то же время мы знаем, что пространственные характеристики гауссова пучка в любом его поперечном сечении однозначно определяются конфокальным параметром R_0 (или размером пятна в перетяжке ω_0) и расстоянием рассматриваемого сечения от перетяжки z . В минимальном сечении пучка (перетяжке) волновой фронт плоский и, следовательно, комплексный параметр q здесь оказывается чисто мнимым: $q(0) = \frac{i}{2} k \omega_0^2 = \frac{i}{2} R_0$. Используя один из законов распространения гауссова пучка (4.5б), легко получить для произвольного сечения

$$q(z) = q(0) + z = z + iR_0/2. \quad (4.7)$$

Таким образом, вещественная часть $q(z)$ определяет также расстояние до перетяжки, а мнимая — конфокальный параметр или размер пучка в перетяжке. На значительном удалении от перетяжки ($|z| \gg 1/2 R_0$) параметр q оказывается почти чисто вещественным. На комплексной плоскости q (рис. 4.1) геометрическое место точек, соответствующих различным сечениям пучка, образует горизонтальную прямую, которая отстоит от вещественной оси на $1/2 R_0 = 1/2 k \omega_0^2$.

Закон изменения комплексного параметра $q(z)$ при распространении пучка в свободном пространстве, задаваемый формулой (4.7), естественно соответствует введенным в предыдущей главе функциям $R(z)$ и $\omega(z)$, характерным для резонаторного пучка. Действительно, комбинируя выражения (4.6) и (4.7), получаем комплексное уравнение

$$\frac{1}{z + ik\omega_0^2/2} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{k\omega^2}.$$

Решение этого уравнения дает известные (гл. 3) зависимости

$$R(z) = z[1 + (k\omega^2_0/2z)^2], \quad (4.8a)$$

$$\omega^2(z) = \omega^2_0[1 + (2z/k\omega^2_0)^2]. \quad (4.8б)$$

Рассмотрим теперь изменение комплексной переменной $p(z)$. Используя первый закон распространения гауссова пучка (4.5a) и раскрывая $q(z)$ в соответствии с (4.7), находим

$$idp = \frac{dz}{z + ik\omega^2_0/2}.$$

Интегрируя в пределах от 0 до z , получаем

$$ip(z) = \ln[1 - i(2z/k\omega^2_0)].$$

Отсюда, используя соотношения

$$\operatorname{Re} [\ln(a + ib)] = \ln \sqrt{a^2 + b^2} \text{ и } \operatorname{Im} [\ln(a + ib)] = \operatorname{arctg}(b/a),$$

выразим функцию $p(z)$ в виде

$$p(z) = -\operatorname{arctg}(2z/k\omega^2_0) - i \ln \sqrt{1 + (2z/k\omega^2_0)^2}. \quad (4.9)$$

Вещественная часть $p(z)$ представляет собой фазу на оси гауссова пучка, измеряемую по отношению к идеальной плоской волне, излучаемой из сечения перетяжки. Из (4.9) видно, что этот «гауссов» сдвиг фазы равен

$$\Phi = \operatorname{arctg}(2z/k\omega^2_0). \quad (4.10)$$

Указанный фазовый сдвиг, равный нулю в перетяжке, возрастает при удалении от последней, стремясь в пределе ($z \rightarrow \pm\infty$) к $\pm\pi/2$. Так что при $|z| \gg 1/2R_0$ можно рассчитывать фазу на оси гауссова пучка как и для плоской волны, исходящей из сечения $z = \lambda/4$. Мнимая часть $p(z)$ определяет уменьшение амплитуды поля на оси пучка

$$\operatorname{Im} p(z) = -\ln \sqrt{1 + (2z/k\omega^2_0)^2} = \ln(\omega_0/\omega). \quad (4.11)$$

Таким образом, осевая амплитуда поля уменьшается обратно пропорционально увеличению сечения гауссова пучка.

Суммируя вышесказанное, можно записать уравнение основной моды гауссовой волны следующим образом:

$$u(r, z) = C \left(\frac{w_0}{w} \right) \exp \left\{ -\frac{r^2}{w^2} - i \left[kz - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{2z}{kw^2_0} \right) + \frac{kr^2}{2R} \right] \right\}.$$

Параболическому уравнению (4.3) удовлетворяют и более общие решения, которые описывают гауссовы пучки высших порядков [6]. При прямоугольной симметрии сечения пучка общее решение имеет вид

$$u_{mn} = C \left(\frac{w_0}{w} \right) H_m \left(\sqrt{2}x/w \right) H_n \left(\sqrt{2}y/w \right) \times \\ \times \exp \left\{ -\left(r^2/w \right)^2 - i \left[kz - (m+n+1) \operatorname{arctg} (2z/kw^2_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + (kr^2/2R) \right] \right\}, \quad (4.12)$$

где $H_m(\sqrt{2}x/w)$ и $H_n(\sqrt{2}y/w)$ — полиномы Эрмита, а $w(z)$ и $R(z)$ заданы формулами (4.8).

Гауссовы волны, описываемые уравнением (4.12), соответствуют решениям резонансной задачи, полученным в гл. 3 для устойчивых резонаторов. Качественная картина распределения интенсивности в сечении таких пучков соответствует рис. 1.4.

4.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА ТОНКОЙ ЛИНЗОЙ

Идеальная центрированная тонкая линза бесконечной апертуры (в том смысле, что ее апертура значительно превышает диаметр пучка) преобразует лишь волновой фронт, оставляя неизменным поперечное распределение амплитуды. В параксиальном приближении можно полагать, что волновой фронт остается сферическим — изменяется только его кривизна. Однако местоположение перетяжки и конфокальный параметр преобразованного пучка, вообще говоря, окажутся другими. Так как указанные характеристики пучка одинаковы для всех мод, то нижеследующее рассмотрение оказывается применимым к любому типу колебаний.

Идеальная тонкая линза с фокусом f преобразует падающую на нее сферическую волну с радиусом фронта R_1 в сферическую волну с радиусом фронта R_2 . При этом

$$1/R_2 = 1/R_1 - 1/f, \quad (4.13)$$

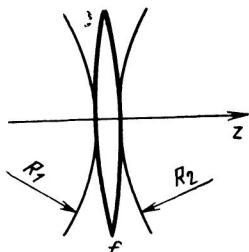


Рис. 4.2. Преобразование волнового фронта тонкой линзой

Это преобразование волнового фронта иллюстрирует рис. 4.2. Радиус кривизны в (4.13) берется положительным, если волновой фронт обращен выпуклостью в сторону распространения волны. Волновой фронт гауссова пучка преобразуется линзой таким же образом. Так как диаметр пучка непосредственно слева и справа от линзы одинаков, то комплексные параметры падающего и прошедшего пучков оказываются связанными соотношением

$$1/q_2 = 1/q_1 - 1/f. \quad (4.14)$$

Пусть падающий пучок характеризуется определенными положением перетяжки d_1 относительно линзы и конфокальным параметром R_{01} , а преобразованный пучок характеризуется другими значениями d_2 и R_{02} . Тогда, раскрыв значение q справа и слева от линзы, мы получим комплексное уравнение

$$\left(d_2 + \frac{i}{2} R_{02}\right)^{-1} = \left(d_1 + \frac{i}{2} R_{01}\right)^{-1} - f^{-1}.$$

Решив это уравнение, найдем соотношения, связывающие характеристики преобразованного и падающего пучков с фокусным расстоянием тонкой линзы:

$$R_{02} = \frac{R_{01}}{(1 - d_1/f)^2 + (R_{01}/2f)^2}, \quad (4.15a)$$

$$(1 - d_2/f) = \frac{(1 - d_1/f)}{(1 - d_1/f)^2 + (R_{01}/2f)^2}. \quad (4.15b)$$

Эти соотношения можно использовать для габаритных расчетов различных оптических систем, преобразующих гауссовы пучки.

4.3. ЛУЧЕВЫЕ ДИАГРАММЫ

Изложенные выше закономерности распределения гауссова пучка и преобразования его тонкой линзой могут быть представлены в виде геометрического образа — так называемых лучевых диаграмм. Существует несколько видов таких диаграмм, которые бывает удобно использовать для графического нахождения параметров пучка в любом сечении. Обсуждение различных видов лучевых диаграмм

можно найти в работе Х. Когельника [19, 20]. Мы остановимся на диаграмме С. Коллинза, предложенной еще в 1964 г. [52].

Лучевая диаграмма Коллинза представляет собой графическое изображение параметров гауссова пучка на комплексной полуплоскости параметра i/q . Представим систему прямоугольных координат (рис. 4.3), на которой по оси абсцисс откладывается величина $X = \operatorname{Re}(i/q) = 2/kw^2$, связанная с поперечным размером пучка. По оси ординат в этой системе откладывается величина $Y = \operatorname{Im}(i/q) = 1/R$.

Каждая точка в рассматриваемой системе координат соответствует некоторому сечению произвольного гауссова пучка, которое характеризуется своим поперечным размером w и радиусом кривизны волновой поверхности R . Совокупность возможных значений X , Y , очевидно, займет полуплоскость $X \geq 0$.

Основные уравнения, определяющие зависимость параметров сечения пучка от аксиальной координаты (см. выражения (4.8)), при введении переменных X и Y будут иметь следующий вид:

$$\frac{1}{Y} = z \left[1 + \left(\frac{kz^2}{2z} \right)^2 \right], \quad \frac{1}{X} = \frac{kz^2}{2} \left[1 + \left(\frac{2z}{kw^2_0} \right)^2 \right]. \quad (4.16)$$

Исключая из этих уравнений аксиальную координату z , находим, что данный гауссов пучок (kw^2_0) отображается на плоскости XY окружностью $OGFH$ (рис. 4.3), соответствующей уравнению

$$X^2 + Y^2 - \frac{2}{kw^2_0} X = 0.$$

Радиус этой окружности равен $1/kw^2_0$, а центр располагается на оси абсцисс на расстоянии $1/kw^2_0$ от начала координат.

Каждая точка этой окружности соответствует некоторому сечению пучка, при этом координаты точки определяют размер пучка и кривизну волновой поверхности в данном сечении. Сечению перетяжки соответствует точка F . Удаление от перетяжки в ту или иную сторону изображается на диаграмме движением по окружности *по* или *против* часовой стрелки. Сечение пучка, бесконечно удаленное от перетяжки, соответствует началу координат. Нетрудно видеть, что движение по окружности $OGFH$ согласуется с закономерностями изменения параметров пучка.

Исключив из уравнений (4.16) параметр гауссова пучка (kw^2_0), можно найти геометрическое место точек, соответствующее данному расстоянию от перетяжки z в любом пучке. Это тоже окружность (DCO на рис. 4.3), определяемая уравнением $X^2 + Y^2 - Y/z = 0$. Центр этой окружности располагается на оси ординат на расстоянии $1/2z$ от начала координат и равен $1/2z$. Пересечение окружности DCO и $OGFH$ (точка C) однозначно определяет сечение пучка и его параметры.

Зная обобщенную характеристику данного гауссова пучка $R_0 = kw^2_0$, можно построить окружность $OGFH$ и определить параметры пучка в любом сечении, задаваемом кривой DCO . Местоположение зеркал резонатора определяется окружностями DCO , диаметр которых обратно пропорционален расстояниям от зеркал до перетяжки (точки A и B на рис. 4.3). Ординаты этих точек соответствуют кривизне образующих резонаторов зеркал. Абсциссы точек A и B дают размеры пятен на зеркалах. Дуга AFB изображает пространство внутри резонатора, а дуга AOB — внешнее пространство.

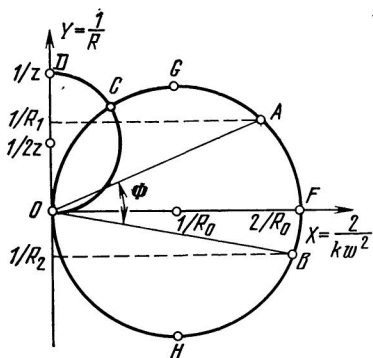


Рис. 4.3. Круговая диаграмма гауссова пучка

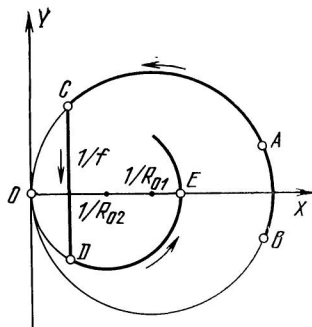


Рис. 4.4. Отображение действия тонкой линзы на круговой диаграмме

Заметим, что угол COF на лучевой диаграмме равен сдвигу фаз между плоской волной и гауссовым пучком, исходящими из сечения перетяжки. В самом деле, на рис. 4.3 этот угол определяется соотношением

$$\Phi = \text{arctg}(kw^2/2R) = \text{arctg}(2z/kw_0^2),$$

что как раз соответствует (4.10). Отсюда следует, что угол AOB равен дополнительному (по отношению к плоской волне) фазовому набегу за один проход гауссовой волны в резонаторе. Графическое нахождение этого угла может быть использовано для вычисления резонансных частот (гл. 3).

С помощью лучевой диаграммы удобно оценивать преобразование гауссова пучка тонкой линзой. Как следует из (4.14), тонкая линза с фокусом f уменьшает мнимую часть параметра i/q на величину $1/f$. Поэтому если в сечении пучка, соответствующем, скажем, точке C лучевой диаграммы помещена линза, то, вычитая из ординаты C величину $1/f$ (рис. 4.4), мы получим точку D , определяющую параметры преобразованного пучка сразу за линзой. Окружность, изображающую гауссов пучок за линзой, следует провести через начало координат и точку D (с центром на оси абсцисс). Двигаясь по этой окружности в том же направлении (*по* или *против* часовой стрелки), что и до линзы, мы получаем изменение параметров пучка за линзой.

Аналогичным образом можно учесть воздействие нескольких тонких линз.

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассмотрим изменение параметров гауссова пучка при его прохождении через произвольную*) оптическую

*) Имеются в виду такие оптические системы, которые могут быть описаны с помощью лучевых матриц (Приложение А).

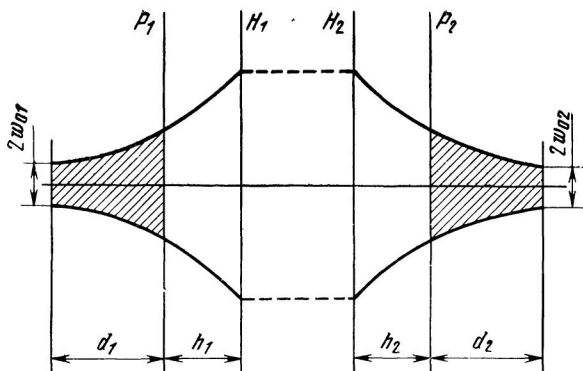


Рис. 4.5. К постановке задачи о преобразовании гауссова пучка произвольной оптической системой

систему. Отнесем наше рассмотрение к фиксированному меридиональному сечению пучка и оптической системы (рис. 4.5). Пусть пучок, входящий в оптическую систему, характеризуется положением перетяжки d_1 относительно входной плоскости и конфокальным параметром $R_{01} = k\omega_{01}^2$. Это эквивалентно заданию комплексного лучевого параметра q_1 во входной плоскости системы. Пусть также рассматриваемое меридиональное сечение произвольной оптической системы задается своим лучевым матричным оператором

$$\widehat{M} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Задача заключается в определении параметра q_2 в выходной плоскости оптической системы или соответствующей пары величин: конфокального параметра R_{02} и расстояния от выходной плоскости до перетяжки преобразованного пучка d_2 . (Собственно говоря, предыдущие параграфы настоящей главы уже содержат информацию, достаточную для определения характеристик преобразованного гауссова пучка.) Последовательно применяя соотношение

$$1/q_2 = 1/q_1 - 1/f \quad (4.17a)$$

для каждой тонкой линзы с фокусом f и формулу

$$q_2 = q_1 + d \quad (4.17b)$$

для каждого однородного промежутка длиной d , можно вычислить параметры преобразованного пучка.

Из (4.17) видно, что для однородного пространства и для тонкой линзы выполняется соотношение

$$q_2 = (Aq_1 + B) / (Cq_1 + D),$$

где A, B, C, D — элементы лучевой матрицы однородного пространства или тонкой линзы.

Учитывая, что любую идеальную оптическую систему можно представить в виде последовательно расположенных тонких линз и однородных пространств, можно записать закон преобразования комплексного параметра пучка сложной оптической системой [19]:

$$q_2 = (Aq_1 + B) / (Cq_1 + D). \quad (4.18)$$

Здесь A, B, C, D — элементы лучевой матрицы сложной оптической системы. Это важное соотношение называется *законом ABCD*.

Следует отметить, что гауссов пучок можно рассматривать как обобщение понятий гомоцентрического пучка и плоской волны. В самом деле, из выражения (4.12) видно, что при $R_0 \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$ основная мода гауссова пучка переходит в гомоцентрический пучок или в плоскую однородную волну. Введенный закон *ABCD* также является обобщением известных соотношений гауссовой оптики, определяющих преобразование гомоцентрических и плоских волн. Закон *ABCD* переходит в известные формулы при $R_0 \rightarrow 0$ или $R_0 \rightarrow \infty$.

Комплексное уравнение закона *ABCD* соответствует двум вещественным уравнениям

$$\operatorname{Re}(q_2) = \frac{AC |q_1|^2 + (AD + BC) \operatorname{Re}(q_1) + BD}{C^2 |q_1|^2 + 2CD \operatorname{Re}(q_1) + D^2}, \quad (4.19a)$$

$$\operatorname{Im}(q_2) = \frac{(AD + BC) \operatorname{Im}(q_1)}{C^2 |q_1|^2 + 2CD \operatorname{Re}(q_1) + D^2}. \quad (4.19b)$$

Из этих соотношений, раскрывая значения $\operatorname{Re}(q)$, $\operatorname{Im}(q)$ и $|q_1|$, а также учитывая, что для лучевых матриц $AD - BC \equiv n_1/n_2$, можно найти параметры преобразованного пучка

$$d_2 = \frac{AC (z_1 + R_{01}^2/4) + (AD + BC) d_1 + BD}{C^2 (d_1^2 + R_{01}^2/4) + 2CD d_1 + D^2}, \quad (4.20a)$$

$$R_{02} = \frac{(n_1/n_2) R_{01}}{C^2 (d_1^2 + R_{01}^2/4) + 2CD d_1 + D^2}. \quad (4.20b)$$

Степень изменения гауссова пучка оптической системой удобно оценивать коэффициентом преобразования, понимая под этим термином соотношение начального и исходного конфокальных параметров:

$$\alpha = \frac{R_{01}}{R_{c2}} = \frac{n_2}{n_1} \left[C^2 \left(d_1^2 + \frac{1}{4} R_{01}^2 \right) + 2CDd_1 + D^2 \right]. \quad (4.21)$$

Расходимость пучка изменится после преобразования пропорционально $\sqrt{\alpha}$, а линейный размер перетяжки — обратно пропорционально $\sqrt{\alpha}$.

Сравнивая полученные формулы с соотношениями для гомоцентрических пучков, можно видеть, что специфика гауссовых волн заключается в существовании конечного параметра R_0 . Из (4.20) видно также, что при выполнении двух условий

$$\left(\frac{1}{2} R_{01} \right)^2 \ll d_1^2 + \left(\frac{D}{C} + \frac{B}{A} \right) d_1 + \frac{BD}{AC}, \quad (4.22a)$$

$$\left(\frac{1}{2} R_{01} \right)^2 \ll d_1^2 + \frac{2D}{C} d_1 + \left(\frac{D}{C} \right)^2, \quad (4.22b)$$

которые обычно заменяют одним, заведомо более строгим

$$(R_{01}/2) \ll d_1, \quad (4.23)$$

указанная специфика пропадает.

4.5. СОГЛАСОВАНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА С ПАССИВНЫМ РЕЗОНАТОРОМ

При взаимодействии гауссова пучка с пассивной оптической системой, обладающей резонансными свойствами, возникает задача их согласования*). Такой оптической системой может быть пассивный интерферометр, используемый для частотного анализа излучения лазера или как дискриминатор в системе стабилизации частоты. В этом случае отсутствие согласования внешнего пучка с интерферометром приводит к большим энергетическим потерям, а также к возбуждению в последнем паразитных типов колебаний, что существенно искажает режим

*) В § 4.5 и 4.6 рассматривается лишь пространственный аспект согласования. Такая постановка вопроса (без учета частотных характеристик) возможна либо в отношении нерезонаторных оптических систем, либо (как здесь) в отношении резонаторов, собственная частота которых функционально сканируется в широком интервале.

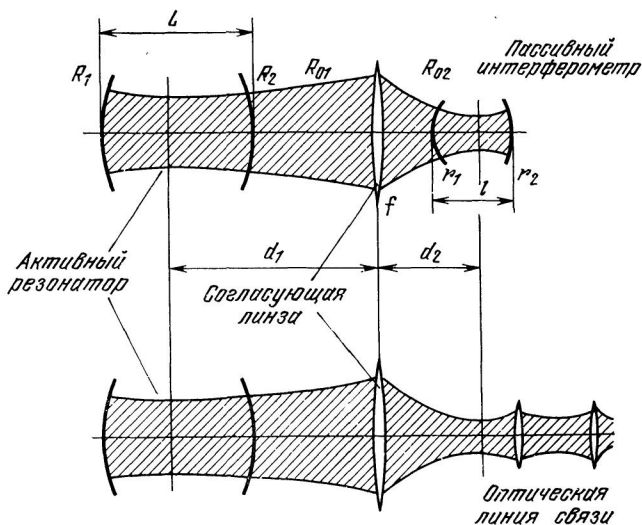


Рис. 4.6. Согласование гауссовых пучков с помощью положительной линзы

работы. Пассивной оптической системой, требующей согласования, является также оптическая линия передачи. Здесь отсутствие согласования ведет к резкому увеличению энергетических потерь и к искажению характеристик (частотных и пространственных) передаваемого излучения.

Согласование гауссова пучка с внешней пассивной резонансной системой заключается в таком его преобразовании, чтобы пространственное распределение поля пучка совпало с полем резонансной моды согласуемой пассивной оптической системы. Согласование сводится к трем моментам: совмещению осей, совмещению плоскостей перетяжек и выравниванию размеров пятен в перетяжках или конфокальных параметров. Первый из указанных моментов осуществляется просто взаимной юстировкой пучка и пассивной резонансной системы. Поэтому обратимся к реализации двух других моментов согласования.

Если пассивный резонатор располагается внутри активного резонатора, то согласование осуществляется надлежащим выбором параметров обоих резонаторов

без использования специальных согласующих устройств. Если же активный резонатор лазера и согласуемая с ним внешняя пассивная резонансная система имеют свои несовпадающие перетяжки, то согласование обычно осуществляется с помощью положительной тонкой линзы, располагаемой между согласуемыми объектами (рис. 4.6). В этом случае преобразованный линзой пучок должен пространственно совпадать с собственной модой пассивной резонансной системы.

Рассмотрим возможность уравнивания конфокальных параметров двух гауссовых пучков и возникающие здесь количественные соотношения. Для этого обратимся к формулам преобразования пучка тонкой линзой (4.15) и проанализируем зависимость коэффициента преобразования $\alpha = R_{01}/R_{02}$ от величины d_1/f . Эта зависимость изображена на рис. 4.7. Для некоторого конечного значения параметра $R_{01}/2f$ коэффициент преобразования с ростом d_1/f сначала падает от начального значения $[1 + (R_{01}/2f)^2]$. При $d_1/f = 1$ коэффициент достигает минимума, равного $(R_{01}/2f)^2$, а затем монотонно растет, стремясь к бесконечности при $d_1/f \rightarrow \infty$. Видно, что при варьировании величины d_1/f от 1 до ∞ в принципе возможно достижение любого конфокального параметра преобразованного пучка, удовлетворяющего неравенству $R_{02} \leq \leq (4f^2/R_{01})$. Следовательно, для получения нужного значения R_{02} при заданном значении R_{01} фокусное расстояние линзы не должно быть меньше некоторого минимума, а именно:

$$f \geq f_{\text{мин}} = 1/2 \sqrt{R_{01}R_{02}} = 1/2 k \omega_{01} \omega_{02}. \quad (4.24)$$

Найдем теперь правильное положение согласующей линзы с произвольным фокусным расстоянием, которое больше минимального значения. Из соотношения (4.15а) следует

$$\frac{d_1}{f} = 1 \pm \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}} - \left(\frac{R_{01}}{2f}\right)^2}. \quad (4.25)$$

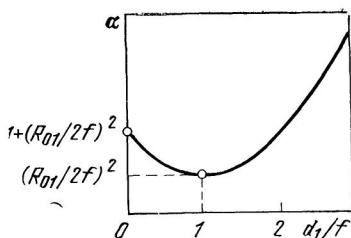


Рис. 4.7. Зависимость коэффициента преобразования от отношения d_1/f

Большой практический интерес представляет выбор знака «+» в формуле (4.25), что соответствует правой ветви кривой рис. 4.7 ($d_1/f \gg 1$). Учитывая это обстоятельство, находим

$$d_1 = f + f \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}} - \left(\frac{R_{01}}{2f}\right)^2} \quad (4.26)$$

или с учетом (4.24)

$$d_1 = f + \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} \sqrt{f^2 - f_{\text{мин}}^2}. \quad (4.27)$$

Для нахождения расстояния d_2 от согласующей линзы до перетяжки преобразованного пучка обратимся к выражению (4.15), из которых следует

$$1 - \frac{d_2}{f} = \frac{R_{02}}{R_{01}} \left(1 - \frac{d_1}{f}\right).$$

Подставив значение d_1 из формулы (4.26), найдем

$$d_2 = f + f \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}} - \left(\frac{R_{02}}{2f}\right)^2} \quad (4.28)$$

или с учетом (4.24)

$$d_2 = f + \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \sqrt{f^2 - f_{\text{мин}}^2}. \quad (4.29)$$

Выражения (4.27) и (4.29) дают значения d_1 и d_2 , определяющие положение линзы относительно обеих перетяжек.

В соответствии с вышесказанным согласующая линза может иметь в принципе любое фокусное расстояние, большее $f_{\text{мин}}$. Однако нетрудно видеть, что при неограниченном возрастании величины f также возрастают расстояния d_1 и d_2 , прямо определяющие габаритные размеры установки. Если полагать (как это бывает на практике), что габаритные установки ограничены, то можно ограничить возможные значения f сверху. Принимая условие

$$d_1 + d_2 \leq D,$$

получаем из (4.27) и (4.29)

$$2f + \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} + \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}\right) \sqrt{f^2 - f_{\text{мин}}^2} \leq D.$$

Решая это неравенство относительно f , находим максимально возможное значение фокусного расстояния согласующей линзы при условии ограничения габаритов установки

$$f_{\text{макс}} = \frac{W \sqrt{D^2 + f_{\text{мин}}^2 (W^2 - 4)} - 2D}{W^2 - 4}. \quad (4.30)$$

Здесь D — максимально допустимое расстояние между перетяжками согласуемых резонансных систем; $W = (\omega_{01}/\omega_{02}) + (\omega_{02}/\omega_{01})$. Обычно второй член в подкоренном выражении значительно меньше первого и поэтому в инженерной практике можно пользоваться приближенным выражением

$$f_{\text{макс}} \approx D / (W + 2)^*. \quad (4.31)$$

4.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГАУССОВА ПУЧКА В НЕСОГЛАСОВАННОЙ ПАССИВНОЙ РЕЗОНАТОРНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим подробнее, как гауссов пучок, характеризуемый определенным спектром собственных типов колебаний, взаимодействует с пассивной резонаторной системой, обладающей своим набором собственных типов колебаний. В режиме идеального согласования оба набора собственных мод одинаковы и каждая мода пучка возбуждает только соответствующий тип колебаний. При нарушении согласования каждая мода падающего пучка способна возбудить ряд типов колебаний пассивной системы.

Если, например, в несогласованную пассивную систему вводится волна, характеризуемая индексами \bar{m} и \bar{n} , то она возбуждает спектр собственных волн, характеризуемых набором индексов m и n . Амплитуда, фаза и мощность возбуждаемых волн могут быть различными. Процесс преобразования падающей волны в собственные волны пассивного резонатора удобно описать, введя коэффициент преобразования C_{mn}^{mn} . Модуль коэффициента определяет относительную амплитуду, аргумент — сдвиг фазы по отношению к возбуждающей волне. Относительная мощность возбуждаемой волны задается $|C_{mn}^{mn}|^2$. Коэффициенты связи можно найти, используя условие равенства полей (возбуждающей волны, с одной стороны, и суперпозиции возбуждаемых волн, с другой стороны) в произвольно выбранном поперечном сечении:

$$f_{\bar{m}\bar{n}} = \sum_m \sum_n C_{mn}^{mn} f_{mn}. \quad (4.32)$$

*) Ошибка, связанная с использованием этого выражения вместо точной формулы (4.30), оценивается следующим членом разложения корня:

$$\Delta f_{\text{макс}} = +f_{\text{мин}} W / 2D. \quad (4.33)$$

Таким образом, математической моделью процесса является разложение вводимой волны по собственным модам массивной системы, при этом коэффициенты разложения оказываются коэффициентами преобразования.

Ограничимся гауссовыми пучками с прямоугольной (x, y) симметрией распределения поля в поперечном сечении*). В этом случае, принимая во внимание ортогональность волновых функций, можно свести задачу преобразования волн к двум одномерным. Коэффициенты преобразования определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{C^{mn}}{mn} &= \frac{C^m}{m} \frac{C^n}{n}, \\ \frac{C^m}{m} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_m(x)}{m} f_m^*(x) dx, \\ \frac{C^n}{n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_n(y)}{n} f_n^*(y) dy. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Здесь $f(x)$ и $f(y)$ — нормированные распределения поля в произвольном поперечном сечении. Можно заметить, что в процессе преобразования волн существуют «правила отбора»: преобразование волны $\bar{m}n$ в волну mn невозможно, если хотя бы в одном из измерений меняется четность индексов. Действительно, при изменении четности индексов подынтегральное выражение в формулах (4.34) оказывается нечетным и интеграл, а с ним и коэффициент преобразования равны нулю.

Опуская громоздкие вычисления [50], приведем коэффициенты передачи для некоторых волн. Для этого охарактеризуем возбуждающую волну и систему возбуждаемых волн соответственно конфокальными параметрами \bar{R}_0 и R_0 . Пусть рассогласование (рис. 48,а) сводится к неравенству конфокальных параметров ($\bar{R}_0 \neq R_0$) и к несовпадению сечений перетяжек (Λ — расстояние между ними). Тогда

$$\begin{aligned} C^0_0 &= \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\bar{R}_0}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{\bar{R}_0}} \right) + \frac{i\Lambda}{\sqrt{\bar{R}_0 R_0}} \right]^{-1/2}, \\ C^1_1 &= (C^0_0)^2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} C^0_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C^0_0) \left[\sqrt{\frac{R_0}{\bar{R}_0}} (C^0_0)^2 - 1 \right], \\ C^2_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (C^0_0) \left[\sqrt{\frac{\bar{R}_0}{R_0}} (C^0_0)^2 - 1 \right]. \end{aligned}$$

*) Детальный анализ коэффициентов преобразования для любой симметрии задачи можно найти в [50].

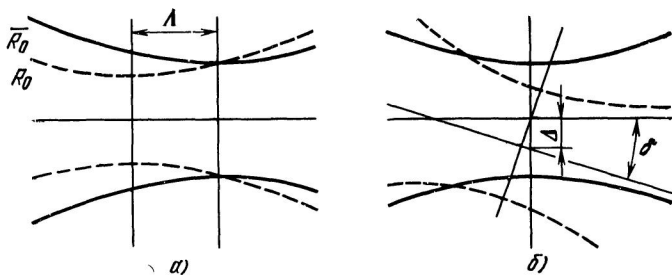


Рис. 4.8. Взаимное расположение несогласованных каустик:
 а — несовпадение перетяжек; б — несовпадение осей

При идеальном согласовании $\bar{R}_0 = R_0$, $\Lambda = 0$. Из формул найдем $C_0^0 = 1$ и $C_m^m = \delta_m^m$ (здесь δ_m^m — символ Кронекера), что согласуется с физической картиной преобразования только в соответственные волны. При небольшом рассогласовании $|C_0^0| < 1$ коэффициенты C_m^m для соответственных волн уменьшаются и тем сильнее, чем больше индекс волны. В этом смысле основная волна менее чувствительна к рассогласованию, чем волны высшего порядка. Коэффициенты C_m^m для несоответственных волн наоборот возрастают, причем тем сильнее, чем больше разность $\bar{m} - m$. Заметим также, что фазовый сдвиг возбуждаемой волны возникает только при несовпадении плоскостей перетяжек ($\Lambda = 0$).

На практике часто важно знать относительную энергетiku возбуждаемых в пассивном резонаторе колебаний. Доля мощности, переходящая из моды $m\bar{n}$ падающего пучка в моду $m\bar{n}$ возбуждаемой системы волн, задается, естественно, как $|C_{m\bar{n}}^{m\bar{n}}|^2 = |C_m^m|^2 |C_{\bar{n}}^{\bar{n}}|^2$.

Введем коэффициент κ , определяющий долю мощности основной моды возбуждающего пучка, которая переходит в основную же моду возбуждаемого спектра:

$$\kappa = \left[\frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{\bar{R}_0}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{\bar{R}_0}} \right)^2 + \frac{\Lambda^2}{\bar{R}_0 R_0} \right]^{-1}. \quad (4.36)$$

Величина κ оказывается удобной для характеристики степени рассогласования и определения доли мощности, переходящей из одной моды. Для четных индексов можно найти [50]

$$|C_0^0|^2 = \sqrt{\kappa},$$

$$|C_m^m|^2 = |C_0^0|^2 = \frac{m!}{2^m \left(\frac{m}{2}!\right)^2} \sqrt{\kappa} (1 - \kappa)^{m/2}, \quad (4.37a)$$

$$|C_2^2|^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\kappa} (1 - 3\kappa)^2.$$

Для нечетных индексов

$$|C^1_1|^2 = \kappa^{3/2},$$

$$|C^m_1|^2 = |C^1_m|^2 = \frac{m! \kappa^{3/2}}{2^{(m-1)} \left(\frac{m-1}{2}\right)!^2} (1 - \kappa)^{\frac{m-1}{2}}, \quad (4.376)$$

$$|C^3_3|^2 = \frac{1}{4} \kappa^{3/2} (3 - 5\kappa)^2.$$

Формулы (4.37) удивительно просты. Доля мощности, переходящая из моды возбуждающего пучка в моду пассивного резонатора, зависит только от четырех индексов взаимодействующих мод и параметра κ . Отличие κ от единицы характеризует степень рассогласования. При $\kappa = 1$ $|C^m_m|^2 = \delta^m_m$.

Рассогласование гауссова пучка с пассивным резонатором может выражаться в несовпадении осей (рис. 4.8,б). Возникающее при этом нарушение условий связи можно характеризовать изменением параметра κ . Несовпадение осей сводится к их параллельному смещению (Δ) и развороту (δ) относительно друг друга. Расчет, проведенный на базе формул (4.35), позволяет получить следующее соотношение:

$$\kappa(\Delta, \delta) = \kappa(0, 0) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{\omega_0^2} - \frac{\delta^2}{\psi_0^2}\right). \quad (4.38)$$

Здесь $\kappa(0, 0)$ — значение коэффициента κ при идеальном совпадении осей; $\omega_0 = \sqrt{R/k}$ — размер перетяжки; $\psi_0 = 2/\sqrt{kR_0}$ — угол расходимости основной моды. Эффект рассогласования зависит лишь от относительного линейного и углового смещения осей.

4.7. ГАУССОВ ПУЧОК В СРЕДЕ С ПОПЕРЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В последнее время появилась возможность канализации световых пучков с помощью световодов, выполненных из оптически неоднородного материала. Показатель преломления материала световода изменяется от оси к оболочке (в первом приближении) по закону

$$n(r) = n_0 - \sigma r^2/2, \quad (4.39)$$

где σ — мера оптической неоднородности.

Рассмотрим закономерности распространения гауссова пучка в среде с коаксиальной оптической неоднородностью вида (4.39). Для исследования пространственных характеристик пучка используем метод лучевых матриц. Использование матричного метода для построения лучевой оптики неоднородной среды возможно, если неод-

нородность настолько мала, что выполняется условие $\sigma r^2 \ll n_0$.

Существенным также является вопрос о применимости метода для расчета преобразования гауссовых волн в неоднородной среде. Корректность матричного метода обычно проверяется сравнением с результатами решения соответствующего волнового уравнения. Как известно [6], решение приближенного волнового уравнения вида

$$\nabla^2 u + (2\pi/\lambda)^2 u n^2(r) = 0 \quad (4.39a)$$

для плоского слоя среды с квадратичной неоднородностью показателя преломления типа (4.39) дает тот же результат, что и матричный метод. Таким образом вторым условием применимости метода лучевых матриц будет условие $(\lambda/2\pi) |\text{grad} \ln n^2| \ll 1$, означающее, что относительное изменение квадрата показателя преломления должно быть много меньше единицы. Для большинства практических задач техники оба указанных условия выполняются.

Обратимся к вычислению лучевой матрицы для слоя среды с оптической неоднородностью, заданной формулой (4.39). На рис. 4.9 изображен меридиональный луч, распространяющийся в среде с поперечной вариацией показателя преломления $n(r)$. Из закона преломления следует, что для любого сечения величина $n \cos \varphi$ остается постоянной. Приравняв нулю производную $\partial(n \cos \varphi) / \partial z$ и используя условие параксиальности рассматриваемого луча, легко получить следующее уравнение [6]:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = \frac{1}{n} \frac{dn}{dr}, \quad (4.40)$$

описывающее траекторию луча для произвольной зависимости $n(r)$. В случае квадратичной оптической неоднородности (4.39) общее уравнение сводится к уравнению

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{\sigma}{n_0} r, \quad (4.41)$$

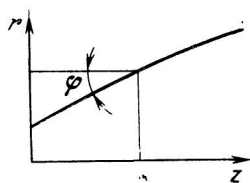


Рис. 4.9. Распространение меридионального луча в неоднородной среде

решая которое, получаем:

при $\sigma > 0$

$$r = r_0 \cos\left(2\pi \frac{z}{m}\right) + \varphi_0 \frac{m}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{z}{m}\right), \quad (4.42a)$$

при $\sigma < 0$

$$r = r_0 \operatorname{ch}\left(2\pi \frac{z}{m}\right) + \varphi_0 \frac{m}{2\pi} \operatorname{sh}\left(2\pi \frac{z}{m}\right). \quad (4.42б)$$

Здесь r_0 и φ_0 — начальные координаты луча; $m = 2\pi \sqrt{n_0/|\sigma|}$ — характерный параметр среды с оптической неоднородностью. Выражения для угловой координаты луча получаются дифференцированием (4.42). Таким образом, лучевые матрицы для среды с квадратичной оптической неоднородностью при расположении границ оптической системы внутри среды оказываются такими:

при $\sigma > 0$

$$\widehat{M}(z) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi z/m) & (m/2\pi) \sin(2\pi z/m) \\ -(2\pi/m) \sin(2\pi z/m) & \cos(2\pi z/m) \end{pmatrix}, \quad (4.43a)$$

при $\sigma < 0$

$$\widehat{M}(z) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(2\pi z/m) & (m/2\pi) \operatorname{sh}(2\pi z/m) \\ (2\pi/m) \operatorname{sh}(2\pi z/m) & \operatorname{ch}(2\pi z/m) \end{pmatrix}. \quad (4.43б)$$

Используя общие выражения (4.19), легко показать, что при распространении по световоду не нарушается гауссов характер пучка. При этом компоненты комплексного параметра пучка $x = \operatorname{Re} q^{-1} = R^{-1}$ и $y = \operatorname{Im} q^{-1} = 2(k\omega^2)^{-1}$ изменяются следующим образом ($\sigma > 0$):

$$x(z) = \frac{\frac{2\pi}{m} \left[\left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 (x_0^2 + y_0^2) - 1 \right] \sin \Psi + 2x_0 \cos \Psi}{(1 + \cos \Psi) + \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 (x_0 + y_0)^2 (1 - \cos \Psi) + \left(\frac{2m}{\pi} \right) x_0 \sin \Psi} \quad (4.44a)$$

$$y(z) = \frac{2y_0}{(1 + \cos \Psi) + \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 (x_0 + y_0)^2 (1 - \cos \Psi) + \left(\frac{2m}{\pi} \right) x_0 \sin \Psi} \quad (4.44б)$$

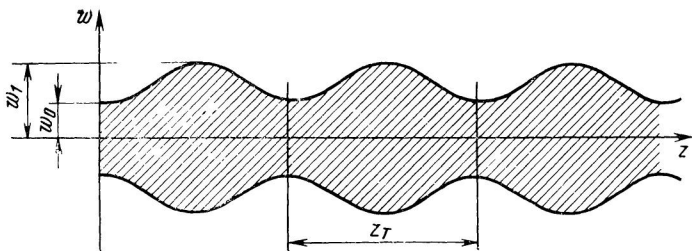


Рис. 4.10. Структура гауссова пучка в среде с поперечной квадратичной неоднородностью:

$$\omega_1 = (2/k\omega_0) \sqrt{n_0/\sigma}; \quad z_T = \pi \sqrt{n_0/\sigma}$$

Здесь $\Psi = 4\pi z/m$; x_0 и y_0 — характеристики пучка на входе световода.

Уравнения (4.44) дают периодическое изменение параметров гауссова пучка по длине световода. Период определяется характеристиками неоднородной среды

$$z_T = m/2 = \pi \sqrt{n_0/\sigma}.$$

Удобно отсчитывать продольную координату от такого сечения, где фронт волны плоский ($x_0=0$)^{*}). В этом случае легко найти следующие уравнения для кривизны волновой поверхности и поперечного размера гауссова пучка:

$$\frac{1}{R_z} = \frac{(2\pi/m) [(my_0/2\pi)^2 - 1] \sin \Psi}{[1 + (my_0/2\pi)^2] + [1 - (my_0/2\pi)^2] \cos \Psi}, \quad (4.45a)$$

$$\omega_z = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{my_0}{2\pi} \right)^2 \right] + \left[1 - \left(\frac{my_0}{2\pi} \right)^2 \right] \cos \Psi \right\}}, \quad (4.45b)$$

где ω_0 — размер пучка на входе световода.

Структура пучка, описываемого данными формулами, показана на рис. 4.10. Сечение пучка в световоде с положительной неоднородностью ($\sigma > 0$) периодически меня-

^{*}) При произвольных параметрах пучка на входе световода такое сечение располагается на расстоянии

$$z_0 = (m/4\pi) \operatorname{arctg} \left\{ \frac{mx_0/\pi}{|1 - (m/2\pi)^2 (x_0 + y_0)^2|} \right\}$$

от входа световода.

ётся в пределах от ω_0 до ω_1 . Отсюда немедленно вытекает условие создания в световоде пучка постоянного поперечного размера:

$$\omega_0 = \sqrt{(2/k) \sqrt{n_0/\sigma}}. \quad (4.46)$$

Для согласования гауссовой волны со световодом пере-тяжка радиусом ω_0 должна находиться во входной плоскости световода.

Глава 5

СЛОЖНЫЕ ОДНОПОЛОСТНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

Наряду с рассмотренными простыми двухзеркальными резонаторами в лазерной технике широко распространены более сложные однополостные устройства, единственная резонансная полость которых образуется не двумя, а большим числом оптических элементов. Резонаторы, в формировании собственных типов колебаний которых существенно участвуют более двух оптических элементов, называются сложными. Класс сложных однополостных резонаторов, объединяемый общей методикой расчета, включает в себя широкий ряд реальных устройств. Строго говоря, любой реальный активный резонатор содержит те или иные оптические элементы. Таким внутренним оптическим элементом является сама активная среда. Кроме того, двухзеркальный резонатор может содержать дополнительные функциональные оптические элементы, используемые для модуляции и пространственно-частотной селекции излучения.

Любой оптический элемент, вводимый в резонатор, в какой-то степени искажает его характеристики (пространственное распределение поля, устойчивость, спектр частот). Если этим искажением невозможно пренебречь, то такой резонатор оказывается сложным. К сложным однополостным резонаторам относятся и такие, полость которых образуется несколькими отражателями. Это могут быть линейные резонаторы вида, показанного на рис. 1.1, в. К этому же классу принадлежат имеющие широкое практическое применение кольцевые резонаторы (рис. 1.1, д, е).

Понятно, что для расчета и анализа характеристик сложных резонаторов методы, изложенные в гл. 2 и 3, вообще говоря, недостаточны. В настоящей главе излагаются приближенные методы расчета характеристик сложных резонаторов.

5.1. СОДЕРЖАНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КОГЕЛЬНИКА—КОЛЛИНЗА

Нетрудно убедиться, что почти любую сложную резонаторную полость можно при анализе геометрооптических и волновых свойств заменить последовательностью тонких линз, замыкаемых с обеих сторон концевыми зеркалами (рис. 5.1). Каждый внутренний оптический элемент полости может быть адекватно заменен тонкой линзой или системой тонких линз, обладающей соответствующей оптической силой и апертурой. При этом эквивалентная схема (рис. 5.1) может оказаться астигматичной.

Линейный резонатор сводится к схеме рис. 5.1, если внутренние зеркала заменить тонкими линзами. Тонкая линза, заменяющая реальный оптический элемент, оказывается астигматичной даже для сферического зеркала, если осевой луч не совпадает с нормалью к отражающей поверхности. Фокусные расстояния для главных сечений линзы связаны с радиусом кривизны R заменяемого зеркала и углом падения осевого луча φ известными соотношениями

$$f_{\text{мин}} = 1/2R \cos \varphi, \quad f_{\text{макс}} = 1/2R \sec \varphi. \quad (5.1)$$

В кольцевом резонаторе поверхность зеркала в общем случае не совпадает с волновой поверхностью в данном сечении резонатора. Если конфигурация кольцевого резонатора симметрична, то можно привести ее к виду, показанному на рис. 5.1, рассекая резонатор по сечению симметрии с последующим спрямляющим раз-

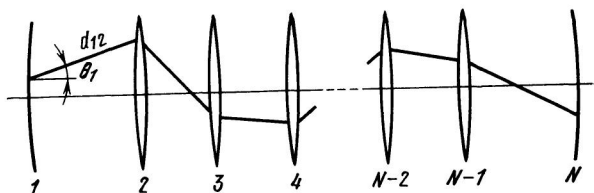


Рис. 5.1. Эквивалентная схема сложного резонатора

воротом его оси. При этом эквивалентная линейная оптическая структура оказывается астигматичной [экстремальные фокальные расстояния линз определяются соотношением (5.1)].

Если сечение симметрии и «разреза» осевого контура проходит через зеркало, то кривизна концевых зеркал в эквивалентной схеме рис. 5.1 определяется кривизной рассекаемого зеркала

$$R_{\text{мин}}=R \cos \varphi, \quad R_{\text{макс}}=R \sec \varphi. \quad (5.2)$$

Если же сечение симметрии и разреза попадает между отражателями, то по соображениям симметрии можно полагать, что оно пройдет через перетяжку; концевое зеркало в эквивалентной линейной структуре при этом должно быть плоским.

Вообще при сведении произвольного многозеркального резонатора к эквивалентной структуре вида, показанного на рис. 5.1, последняя почти всегда оказывается астигматичной. Однако если осевая линия рассматриваемого резонатора лежит в одной плоскости, то эквивалентная структура обладает так называемым простым астигматизмом (главные меридиональные сечения всех тонких линз совпадают).

При рассмотрении сложных резонаторных систем более или менее строгое аналитическое решение дифракционной задачи становится еще более громоздким, мало пригодным для инженерной практики. Это можно видеть на примере оптической структуры рис. 5.1, имитирующей сложный резонатор, образованный произвольным числом N тонких оптических элементов. Пусть координаты x_1, y_1 и x_N, y_N определяют след луча на концевых отражающих поверхностях, а координаты x_i, y_i определяют след луча на произвольном ($i=2, 3, \dots, N-1$) оптическом элементе. Тогда поля на двух концевых отражающих поверхностях связаны уравнением, вытекающим из последовательного применения принципа Гюйгенса к каждому звену сложного резонатора:

$$E_N(x_N, y_N) = \left(\frac{ik}{4\pi}\right)^{N-1} \int_{S_{N-1}} \frac{1 + \cos \theta_{N-1}}{d_{N-1, N}} \times \\ \times \exp(-ikd_{N-1, N}) \int_{S_{N-2}} \frac{1 + \cos \theta_{N-2}}{d_{N-2, N-1}} \times$$

$$\times \exp(-ikd_{N-2, N-1}) \times \dots \times \int_{S_1} \frac{1 + \cos \theta_1}{d_{12}} \times$$

$$\times \exp(ikd_{12}) E_1(x_1, y_1) dx_{N-1} dy_{N-1} \times \dots \times dx_1 dy_1, \quad (5.3)$$

где каждый интеграл берется по выходной поверхности соответствующего оптического элемента. В выражении (5.3) $d_{i, i+1} = d_{i, i+1}(x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1})$ — оптический путь вдоль луча, соединяющего точки x_i, y_i на i -й поверхности и x_{i+1}, y_{i+1} на $(i+1)$ -й поверхности; θ_i — угол, который этот луч образует с нормалью к i -й поверхности.

Решение (5.3), возможное в ряде простых частных случаев, позволяет более строго анализировать свойства сложного резонатора. Однако существует группа прикладных задач (анализ устойчивости резонатора, расчет резонансного поля внутри и вне полости, расчет резонансных частот), которые целесообразно решать в рамках приближения, аналогичного приближению эквивалентного конфокального резонатора (ЭКР) для двухзеркальных резонаторов, не прибегая к строгому решению интегральных уравнений типа (5.3). Такой упрощенный подход особенно интересен для инженерной практики [19, 20, 51—53]. В дальнейшем мы будем называть этот метод приближением Когельника—Коллинза по фамилиям авторов первых фундаментальных работ в этой области.

Рассматриваемый метод расчета резонаторов связан с некоторыми упрощающими моментами. Во-первых, размеры апертур всех оптических элементов полагаются значительно превышающими поперечные размеры зоны поля собственной волны, в которой амплитуда поля имеет существенную величину. Это позволяет пренебречь дифракционными эффектами и считать пределы интегрирования в (5.3) бесконечными. Во-вторых, оптические поверхности считаются центрированными и безаберрационными в любом меридиональном сечении резонатора. Различные меридиональные сечения полости могут различаться кривизной оптических поверхностей, но астигматизм должен быть простым.

Эти упрощения позволяют существенно облегчить расчет характеристик собственных типов колебаний резонатора. Поскольку идеальная тонкая линза с бесконечной апертурой не меняет гауссова характера проходя-

щего пучка, рационально до решения (5.3) выбрать гауссов вид распределения резонансного поля. Двумерное поперечное распределение для произвольной моды (m, n) на любой оптической поверхности i представляется простой суперпозицией двух одномерных. При прямоугольной симметрии поперечного сечения резонатора

$$E_{mni}(x_i, y_i) = E_{mi}(x_i) E_{ni}(y_i), \quad (5.4a)$$

а при аксиальной симметрии

$$E_{pli}(r_i, \varphi_i) = E_{pli}(r_i) \cos(l\varphi_i). \quad (5.4b)$$

В резонансной полости, образуемой более чем двумя отражающими элементами, порядок симметрии сечения снижается из-за астигматизма, обусловленного преломлением или отражением наклонных пучков сферическими поверхностями. В дальнейшем будем рассматривать только более распространенный случай прямоугольной симметрии поперечного сечения полости; переход к аксиальной симметрии сечения не представляет затруднений.

Полагается, что вид поперечного распределения напряженности поля сохраняется в любом сечении резонатора, изменяются только масштабы. Таким образом, поперечное распределение в произвольном сечении i можно представить в виде

$$E_{vi}(\mu_i) = e_{vi} F_v(\mu_i/\omega_{\mu_i}), \quad (5.5)$$

где μ_i — текущая поперечная координата в рассматриваемом произвольном сечении; v — индекс моды ($v=m$ при $\mu=x$ и $v=n$ при $\mu=y$); F_v — универсальная функция безразмерного аргумента; ω_{μ_i} и e_{vi} — масштабные коэффициенты для данного сечения.

Универсальная функция $F_v(\mu_i/\omega_{\mu_i})$ берется в соответствии с асимптотическим решением для конфокального резонатора) в виде полиномов Эрмита — Гаусса^{*)}. Требование постоянства потока энергии в любом сечении

^{*)} Для неустойчивого резонатора аргумент полиномов оказывается комплексным (см. гл. 3).

резонатора приводит к такому соотношению между масштабными коэффициентами:

$$e^2_{\nu i} \omega_{\mu i} = \text{const.} \quad (5.6)$$

Таким образом, поперечное распределение амплитуды поля устойчивого резонатора в рассматриваемом приближении принимается:

$$\begin{aligned} E_{nm i}(x_i, y_i) = & \frac{C_{mn}}{V \omega_{x i} \omega_{y i}} H_m \left(\frac{x}{\omega_{x i}} \sqrt{2} \right) H_n \left(\frac{y}{\omega_{y i}} \sqrt{2} \right) \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{x_i}{\omega_{x i}} \right)^2 - \left(\frac{y_i}{\omega_{y i}} \right)^2 \right] \times \\ & \times \exp \left[- ik \left(\frac{x^2_i}{2R_{x i}} + \frac{y^2_i}{2R_{y i}} \right) \right]^*. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Что касается применимости метода Когельника — Коллинза, то очевидно, что метод применим к таким сложным резонаторам, каждое плечо которых в любом меридиональном сечении удовлетворяет условиям применимости метода ЭКР, изложенным в гл. 3.

Рассмотренные выше исходные допущения метода позволяют упростить резонаторную задачу нахождения собственных распределений поля. Свойства резонатора в рамках данного приближения определяются его геометрооптической структурой — взаимным расположением и оптической силой составляющих резонатор элементов.

Для компактного описания геометрооптических свойств сложной резонаторной системы используется различный формализм. Один из методов описания геометрооптических свойств произвольной резонаторной системы разработан С. Коллинзом [52]. Этот наиболее последовательный и общий метод связан с введением специального эйконала оптической структуры (рис. 5.1). Коэффициенты разложения второго порядка введенного эйконала однозначно определяют свойства резонатора в рамках рассматриваемого приближения.

*) В гл. 4 рассматриваются гауссовы волны, основная мода которых характеризуется круговой симметрией ($\omega_{x i} = \omega_{y i}$, $R_{x i} = R_{y i}$). Свойства астигматичных гауссовых волн ($\omega_{x i} \neq \omega_{y i}$, $R_{x i} \neq R_{y i}$) подробно исследуются в [133].

Другой метод развит в работах Х. Когельника [19, 20]. Он основан на понятии лучевой матрицы, элементы которой определяют характеристики резонаторного пучка. Этот метод чрезвычайно удобен для расчета пространственных характеристик пучка при наличии сложных оптических элементов не только внутри, но и вне резонатора. Следует отметить, что матричные методы в оптике в настоящее время находят широкое применение [104].

Практически оба метода представляют интерес, так как для различных конкретных задач любой из них может оказаться более удобным. Поэтому рассмотрим далее оба метода, обращая внимание на взаимосвязь между ними *).

5.2. МЕТОД С. КОЛЛИНЗА

Рассмотрим луч, проходящий через резонатор между его концевыми зеркалами (рис. 5.1). Пусть поперечные координаты луча на зеркале I будут x_1, y_1 , а на зеркале N — x_N, y_N . Траектория луча, будет, очевидно, такой, чтобы оптический путь между точками x_1, y_1 и x_N, y_N оказался экстремальным (принцип Ферма). В таком случае оптический путь, соответствующий данному лучу в данном изотропном резонаторе, является некоторой однозначной функцией четырех координат следов луча на концевых зеркалах $E_K(x_1, y_1, x_N, y_N)$. Конкретный вид функции зависит от расположения и оптической силы внутренних оптических элементов резонатора. Введенная функция исчерпывающе и однозначно описывает геометрооптические свойства резонатора, и мы можем (по аналогии с традиционными оптическими системами) назвать ее *эйконалом Коллинза*, так как именно С. Коллинз [52] впервые использовал ее для анализа свойств сложного резонатора.

Нетрудно видеть, что при плоских концевых зеркалах эйконал Коллинза совпадает с координатным эйконалом Брунса. Это обстоятельство существенно, так как позволяет связать оба эйконала и воспользоваться известными свойствами эйконала Брунса для исследования оптических резонаторов. Если форма поверхности

*) В работе У. Ригрода [53] развивается метод расчета, опирающийся на понятие эквивалентной толстой линзы. Метод по существу может быть сведен к матричному.

концевых зеркал задана в виде явных уравнений $z_1(x_1, y_1)$ и $z_N(x_N, y_N)$, а $E_B(x_1, y_1, x_N, y_N)$ — эйконал Брунса для внутренней оптической системы резонатора при таком положении граничных плоскостей, когда они касаются вершин концевых зеркал *), то

$$E_K(x_1, y_1, x_N, y_N) \approx E_B(x_1, y_1, x_N, y_N) + z_1(x_1, y_1) - z_N(x_N, y_N). \quad (5.8a)$$

Выражение эйконала Коллинза в явной форме затруднено, и поэтому удобно представлять эйконал в виде разложения по возрастающим степеням поперечных координат на зеркалах. Разложение эйконала существенно упрощается, если резонатор образован центрированными оптическими поверхностями и, следовательно, иметь ось симметрии — оптическую ось **). В этом случае поперечные координаты могут входить в разложение только в четных комбинациях [9]. Свойство резонатора в рамках гауссовой оптики, как известно, определяет разложение, содержащее члены не выше второго порядка. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся разложением второго порядка. Учитывая простой астигматизм резонатора, можно записать (приложение В)

$$E_K = E_{K0} + \frac{1}{2} \xi_{x11} x_1^2 - \xi_{x1N} x_1 x_N + \frac{1}{2} \xi_{xNN} x_N^2 + \frac{1}{2} \xi_{y11} y_1^2 - \xi_{y1N} y_1 y_N + \frac{1}{2} \xi_{yNN} y_N^2 + \dots \quad (5.8б)$$

Здесь E_{K0} — нулевой член разложения эйконала Коллинза (численные коэффициенты в (5.8б) выбраны для получения более компактных выражений коэффициентов разложения).

Коэффициенты разложения второго порядка определяются расположением и оптической силой образующих элементов резонатора и содержат всю информацию о его свойствах в рамках гауссовой оптики ***). Отметим связь коэффициентов разложения эйконала Коллинза с соответствующими коэффициентами координатного эйконала

*) Такой эйконал Брунса в дальнейшем мы будем называть ответственным.

**) Более общий случай рассмотрен в [9].

***) В работе [52] Коллинз записывает разложение эйконала в несколько иной форме. Сами коэффициенты разложения он называет *коэффициентами оптического пути*.

ла Брунса (последние помечены штрихом). Сравнивая (5.8а и б), находим

$$\begin{aligned}\xi_{x11} &= \xi'_{x11} - 1/R_{1x}, & \xi_{y11} &= \xi'_{y11} - 1/R_{1y}, \\ \xi_{x1N} &= \xi'_{x1N}, & \xi_{y1N} &= \xi'_{y1N}, \\ \xi_{xNN} &= \xi'_{xNN} - 1/R_{Nx}, & \xi_{yNN} &= \xi'_{yNN} - 1/R_{Ny},\end{aligned}\quad (5-9)$$

где $R_{1,N,x,y}$ — радиусы кривизны соответствующей концевой отражающей поверхности.

Нетрудно определить коэффициенты разложения для простейшего двухзеркального резонатора. В самом деле, из рассмотрения геометрии резонатора, составленного из двух съюстированных сферических зеркал, следует

$$\begin{aligned}E_B &= \sqrt{L^2 + (x_1 - x_N)^2 + (y_1 - y_N)^2} = \\ &= L + \frac{x_1^2}{2L} - \frac{x_1 x_N}{L} + \frac{x_N^2}{2L} + \frac{y_1^2}{2L} - \frac{y_1 y_N}{L} + \frac{y_N^2}{2L} + \dots\end{aligned}$$

Отсюда, используя (5.8б) и (5.9), находим коэффициенты разложения E_K :

$$\begin{aligned}\xi_{x11} &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{L}{R_{1x}} \right), & \xi_{y11} &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{L}{R_{1y}} \right), \\ \xi_{x12} &= \frac{1}{L}, & \xi_{y12} &= \frac{1}{L}, \\ \xi_{x22} &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{L}{R_{2x}} \right), & \xi_{y22} &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{L}{R_{2y}} \right).\end{aligned}$$

Общий метод вычисления коэффициентов разложения эйконала Коллинза подробно изложен в [52]; здесь мы приводим его без вывода. Пусть рассматривается резонатор, состоящий из элементов (рис. 5.1), причем элементы 1 и N — концевые зеркала, а элементы 2, 3, ..., $(N-1)$ — внутренние оптические элементы.

$l_{i(i+1)}$ — расстояние между i -м и $(i+1)$ -м элементами, f_i — фокусное расстояние i -го элемента в рассматриваемом главном сечении резонатора. Каждому координатному сечению резонатора соответствует некоторый характеристический определитель D_x и D_y , зависящий от расположения и оптической силы элементов в данном сечении. В случае астигматичного резонатора эти определители не равны,

Характеристический определитель — это определитель $(N-1)$ -го порядка; причем отличны от нуля только диагональные и соседние с ними элементы определителя. Первая и последняя строки содержат по два ненулевых элемента:

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= f_2 - l_{1,2}, \quad a_{1,2} = -f_2, \\ a_{(N-1), (N-2)} &= -f_{(N-1)}, \quad a_{(N-1), (N-1)} = \\ &= f_{(N-1)} - l_{(N-1), N}. \end{aligned} \quad (5.10a)$$

Остальные элементы определителя таковы:

$$\begin{aligned} a_{i, (i-1)} &= -f_i, \quad a_{i,i} = f_i + f_{(i+1)} - l_{i, (i+1)}, \\ a_{i, (i+1)} &= -f_{(i+1)}. \end{aligned} \quad (5.10б)$$

Таким образом, характеристический определитель имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} (f_2 - l_{12}) & (-f_2) & 0 & \dots & \dots & \dots \\ (-f_2) & (f_2 + f_3 - l_{23}) & (-f_3) & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -f_3 & (f_3 + f_4 - l_{34}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & (-f_{N-2}) & (f_{N-2} + f_{N-1} - l_{(N-2), (N-1)}) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & (-f_{N-1}) & (-f_{N-1} - l_{(N-1), N}) & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (5.10в)$$

Коэффициенты разложения эйконала Коллинза выражаются через характеристический определитель и его миноры $D_{i,k}$:

$$\begin{aligned} \xi_{\mu 11} &= - \left(\frac{1}{R_{\mu 1}} + \frac{D_{\mu 11}}{D_{\mu}} \right), \\ \xi_{\mu NN} &= - \left(\frac{1}{R_{\mu N}} + \frac{D_{\mu (N-1) (N-1)}}{D_{\mu}} \right), \end{aligned}$$

$$\xi_{\mu 1N} = (-1)^{N-1} \frac{D_{\mu 1N-1}}{D_{\mu}}. \quad (5.11)$$

Здесь индекс μ указывает рассматриваемое сечение резонатора ($\mu=x, y$).

Нетрудно убедиться, что при изменении положений концевых сечений коэффициенты разложения эйконала меняются, однако величина

$$G_{\mu} = \xi_{\mu 11} \xi_{\mu NN} / \xi_{\mu 1N}^2, \quad (5.12)$$

для данного меридионального сечения μ остается постоянной. Применяя выражение (5.12) к простейшему двухзеркальному резонатору, нетрудно заметить, что величина G связана с введенным в гл. 2 геометрооптическим инвариантом резонатора: $I=2G-1$.

Подстановка разложения эйконала Коллинза (5.86) в исходное интегральное уравнение (5.3) с учетом постулированного гауссова распределения поля (5.7) позволяет получить характеристики резонатора, выраженные через коэффициенты разложения эйконала. Опуская громоздкие выкладки, подробно описанные в [52], остановимся на полученных результатах.

Условие устойчивости в общем случае астигматичного резонатора определяется следующей системой неравенств:

$$0 < G_x < 1, \quad 0 < G_y < 1. \quad (5.13)$$

Размер пятен на концевых зеркалах устойчивого резонатора задается соотношением

$$k\omega_{\mu i}^2 = 2(|\xi_{\mu ii}| \sqrt{G^{-1} - 1})^{-1}, \quad (5.14)$$

где $i=1, N$ определяет концевую поверхность, а μ — рассматриваемое меридиональное сечение. Эти соотношения характеризуют распределение поля в концевых сечениях. Поскольку выбор концевых сечений произволен, то метод позволяет получить поперечное распределение поля в любом сечении резонатора.

Пространственные характеристики резонансного поля принято выражать через обобщенные параметры: местоположение z и размер перетяжки ω_0 или конфокальный

параметр $R_0 = k\omega^2_0$ *). В терминах метода Коллинза трудно получить следующие соотношения для звена резонатора и внешнего пространства, сопряженных с концевым i -м зеркалом:

$$z_i = \frac{R_i}{1 + R_i^2 \xi_{ii}^2 (G^{-1} - 1)}, \quad (5.15)$$

$$R_{oi} = k\omega_{oi}^2 = \frac{2R_i^2 |\xi_{ii}| \sqrt{G^{-1} - 1}}{1 + R_i^2 \xi_{ii}^2 (G^{-1} - 1)}.$$

Здесь R_i — радиус кривизны соответствующей концевой отражающей поверхности; z_i — расстояние от концевой поверхности до перетяжки, принимаемое положительным при внутреннем расположении перетяжки.

Выражение для резонансных частот изотропного резонатора получается из условия вещественности собственных значений исходного интегрального уравнения (5.3). Для идеального изотропного линейного резонатора дополнительный по отношению к плоским волнам набег фазы определяется как

$$\Phi_{mn} = (m + 1/2) \arccos \sqrt{G_x} + (n + 1/2) \arccos \sqrt{G_y}.$$

Резонансные частоты идеальной изотропной линейной полости следуют из условия фазового резонанса

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2E_{K0}} \left(q + \frac{1}{\pi} \Phi_{mn} \right), \quad (5.16a)$$

где E_{K0} — нулевой член разложения эйконала Коллинза, представляющий оптическое расстояние между концевыми зеркалами вдоль осевого луча.

При расчете резонансных частот кольцевого резонатора следует учитывать два специфических момента. Во-первых, длина оптического пути, соответствующего фазовому резонансу собственных волн, оказывается равной E_{K0} . Во-вторых, при нечетном числе зеркал, образующих полость, приходится считаться с потерей полу волны при отражении на каждом зеркале. Для четносимметричных волн это обстоятельство несущественно,

*) Это, разумеется, относится лишь к устойчивым резонаторам. Расчет неустойчивых резонаторов удобнее вести в рамках метода лучевых матриц. Поэтому соответствующий материал излагается в § 5.3.

Но для нечетно-симметричных дополнительный суммарный полуволновой фазовый набег оказывается важным. В последнем случае для резонанса собственной волны на длине осевого контура должно укладываться нечетное число полуволн. Общее выражение для резонансных частот произвольного устойчивого резонатора можно записать следующим образом *):

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2E_{K0}} \left\{ \gamma q + \varepsilon + \frac{1}{\pi} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \arccos \sqrt{G_x} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \sqrt{G_y} \right] \right\}, \quad (5.166)$$

где γ и ε — определенные коэффициенты. Для линейного резонатора $\gamma=1$, $\varepsilon=0$, для любого кольцевого резонатора $\gamma=2$, а $\varepsilon=0$ во всех случаях, за исключением нечетно-симметричных волн в полости, образованной нечетным числом отражателей. В последнем случае ε следует положить равным единице. (Нечетный индекс должен соответствовать поперечной оси сечения, лежащей в плоскости контура.)

5.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЛУЧЕВЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНОГО РЕЗОНАТОРА

Сложный резонатор так же, как и двухзеркальный (см. гл. 2), можно свести к некоторой бесконечной периодической последовательности тонких линз и воспользоваться аппаратом лучевых матриц, подробно описанным в Приложении А. Возможность такого представления не ограничивается свойствами симметрии рассматриваемого резонатора, что позволяет использовать данный метод для более широкого класса резонаторов. Нетрудно видеть, что для анализа работы резонатора достаточно рассмотреть один период (с произвольными границами) эквивалентной линзовой структуры. В рассматриваемом методе, развитом в работах Х. Когельника [19, 20], характеристики резонатора описываются лучевой матрицей периода эквивалентной линзовой последовательности. Резонатор, обладающий простым астигматиз-

*) Соотношения для неустойчивых резонаторов приводятся в § 5.3.

мом, характеризуется двумя лучевыми матрицами M_x и M_y , соответствующими двум главным меридиональным сечениям. Обратимся к связи параметров собственного поля резонатора с элементами лучевых матриц данного резонатора.

Анализ устойчивости сложного резонатора можно вести по аналогии с простейшим двухзеркальным. Используя материалы гл. 2, нетрудно получить условие устойчивости в виде совместного выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned} -1 < [^{1/2}(A_x + D_x)] < +1, \\ -1 < [^{1/2}(A_y + D_y)] < +1, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где A_x , D_x и A_y , D_y — диагональные элементы лучевых матриц, характеризующих главные сечения рассматриваемого резонатора.

Для вычисления пространственных характеристик собственного поля резонатора воспользуемся комплексным параметром гауссова пучка q , введенным в гл. 4. Если анализируется астигматичный резонатор, то будем относить этот параметр, равно как и получаемые пространственные характеристики, только к определенному меридиональному сечению резонатора.

Совместное рассмотрение условия самовоспроизводимости собственного поля с законом $ABCD$ позволяет составить для комплексного параметра q следующее уравнение:

$$q = (Aq + B) / (Cq + D).$$

Решая эквивалентную систему двух вещественных уравнений (отбросив физически неприемлемые решения и учтя унимодулярность лучевой матрицы), нетрудно найти выражения для размера пятна и кривизны фазового фронта на границах выбранного периода устойчивого резонатора:

$$\omega = \sqrt{\frac{4B/k}{V4 - (A + D)^2}}, \quad (5.18a)$$

$$1/R = (D - A) / 2B. \quad (5.18б)$$

Заметим, что в соответствии с формулами (5.18) вещественные значения размера пятна получаются лишь для устойчивых конфигураций резонатора.

Пространственные характеристики собственной волны в произвольном поперечном сечении резонатора можно вычислить, постепенно переходя от граничного сечения с учетом закономерностей преобразования гауссовых пучков тонкими линзами (см. гл. 4). Другой способ заключается в соответствующем выборе границ периода. При этом полезно помнить, что сумма $A+D$ не зависит от выбора границ периода.

Структура гауссова пучка однозначно определяется указанием местоположения перетяжки (z_0) и размером пятна в перетяжке ω_0 . Для звена сложного резонатора, примыкающего к границам периода эквивалентной линзовой последовательности, эти параметры можно выразить через радиус пучка ω и радиус кривизны фазового фронта R на границах периода:

$$\omega_0^2 = \frac{\omega^2}{1 + (\pi\omega^2/\lambda R)^2}, \quad (5.19a)$$

$$z_0 = \frac{R}{1 + (\lambda R/\pi\omega^2)^2}. \quad (5.19б)$$

Эти соотношения легко выводятся из формул (4.8). Отсюда можно получить

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= B \sqrt{4 - (A+D)^2} / k(1 - AD), \\ z_0 &= B(D - A) / 2(1 - AD). \end{aligned} \quad (5.19в)$$

Положительные значения z_0 в (5.19) соответствуют внутреннему расположению перетяжки.

Существенную роль в упрощении расчетов сложных резонаторов играют соображения симметрии. Полный обход резонатора может состоять из нескольких повторяющихся периодов, как, например, в резонаторах, образованных одинаковыми зеркалами. Очевидно, что в этом случае достаточно ограничиться рассмотрением одного периода*). Кроме того, границы периода удобно выбрать так, чтобы он оказался симметричным. Нетрудно убедиться, что симметризация периода эквивалентной линзовой последовательности возможна для кольцевого резонатора, имеющего хотя бы одно сечение симметрии, и для любого линейного резонатора (приложение Г).

*) В указанном случае лучевая матрица, соответствующая полному обходу резонатора, представляется как степень матрицы одного периода. Постановка в выражения (5.17), (5.18) элементов матрицы периода сразу доказывает высказанное положение.

Лучевая матрица половины наименьшего симметричного периода при наибольшей простоте содержит полную информацию о геометрикооптических свойствах резонатора. Такую матрицу будем в дальнейшем называть *характеристической* матрицей. Заметим, что в то время, как матрица периода может быть различной (в зависимости от выбора границ периода), характеристическая матрица данного резонатора единственна. Из-за своей простоты характеристическая матрица наиболее удобна для практических расчетов.

Введем матрицу полупериода, начинающегося с левой граничной поверхности симметричного периода:

$$\widehat{m}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Матрица другого полупериода выразится следующим образом:

$$\widehat{m}_2 = \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

Связь между элементами характеристической матрицы и элементами матрицы всего симметричного периода очевидна

$$A = D = 2ad - 1, \quad B = 2bd, \quad C = 2ac. \quad (5.20)$$

Здесь учтено, что концевые сечения полупериода располагаются в одинаковых средах; это позволяет использовать унимодулярность лучевых матриц.

Зная условие устойчивости, выраженное через элементы полной лучевой матрицы (5.17), нетрудно получить это условие в терминах характеристической матрицы:

$$0 < a_x d_x < 1, \quad 0 < a_y d_y < 1, \quad (5.21)$$

где a_x , d_y и d_x , d_y — элементы лучевых матриц, характеризующих главные сечения астигматичного резонатора. Пространственные характеристики пучка устойчивого резонатора также достаточно просто выражаются через элементы характеристической матрицы. Например, для левого граничного сечения

$$k\omega^2 = \frac{4bd}{V1 - (2ad - 1)^2}. \quad (5.22)$$

Полезно установить связь между элементами характеристической матрицы и коэффициентами разложения эйконала Коллинза, введенными в предыдущем параграфе. Для этого достаточно свести

оптическую схему симметризованного полупериода произвольного сложного резонатора к эквивалентной схеме с плоскими концевыми зеркалами и воспользоваться свойствами соответствующего эйконала Брунса. Если x_1, φ_1 и x_N, φ_N — координаты меридионального луча на входе и выходе полупериода, то, как известно [9],

$$\partial E_B / \partial x_1 = -n_1 \varphi_1,$$

$$\partial E_B / \partial x_N = n_N \varphi_N.$$

Дифференцируя разложение эйконала (5.8) и полагая оптическую плотность среды на границах полупериода одинаковой, равной n , получим следующие соотношения:

$$\xi_{11} x_1 - \xi_{1N} x_N = -n \varphi_1,$$

$$\xi_{NN} x_N - \xi_{1N} x_1 = n \varphi_N. \quad (5.23)$$

Решая эту систему относительно x_N и φ_N и учитывая, что коэффициенты получаемых при этом линейных выражений являются элементами характеристической матрицы, находим

$$a = \frac{\xi_{11}}{\xi_{1N}}, \quad b = \frac{n}{\xi_{1N}},$$

$$c = \frac{1}{n} \left(\frac{\xi_{11} \xi_{NN}}{\xi_{1N}} - \xi_{1N} \right), \quad d = \frac{\xi_{NN}}{\xi_{1N}}. \quad (5.24)$$

Введенный выше геометрический инвариант резонатора G выражается через элементы лучевых матриц так:

$$G = \frac{\xi_{11} \xi_{NN}}{\xi_{1N}^2} = ad = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (A + D) + 1 \right]. \quad (5.25)$$

Параметр G , так же как введенную в гл. 3 величину $I = 2G - 1$, удобно использовать для практических расчетов резонаторных характеристик. Используя (5.25), легко получить радиус кривизны волновой поверхности для левого граничного сечения симметричного периода неустойчивого резонатора

$$R = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{I+1}{I-1}}. \quad (5.26)$$

Коэффициент линейного расширения волны в сложном неустойчивом резонаторе, как следует из гл. 3, определяется соотношением

$$M = I \pm \sqrt{I^2 - 1}. \quad (5.27)$$

Подстановка (5.25) в (5.16) дает выражение для резонансных частот в терминах метода лучевых матриц. В частности, если полный обход резонатора состоит из p повторяющихся периодов длиной l , то для собственных частот резонатора легко получить соотношение

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2pl} \left\{ \gamma q + \varepsilon + \frac{p}{\pi} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \arccos \sqrt{G_x} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos \sqrt{G_y} \right] \right\}. \quad (5.28)$$

Эта формула нуждается в пояснениях. Во-первых, значения коэффициентов γ и ε вводятся в примечаниях к выражениям (5.16). Во-вторых, нетрудно заметить, что для устойчивых резонаторов величина $\arccos \sqrt{G}$ всегда принимает вещественные значения. В случае же неустойчивых резонаторов величина $\arccos \sqrt{G}$ оказывается комплексной. При этом

$$\arccos \sqrt{G} = \begin{cases} i\tau & \text{при } G > 1, \\ \pi + i\tau & \text{при } G < 0. \end{cases} \quad (5.29)$$

Используя материал гл. 2, легко показать, что $\tau = \ln M$, где M — коэффициент линейного расширения волны. Таким образом, вещественная часть величины $\arccos \sqrt{G}$, влияющая на резонансные частоты, принимает значения либо 0 ($G > 1$), либо π ($G < 0$). Мнимая же часть $\arccos \sqrt{G}$ определяет те потери в неустойчивом резонаторе, которые связаны с расширением волны.

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{M_x} \right)^{2p \left(m + \frac{1}{2} \right)} \left(\frac{1}{M_y} \right)^{2p \left(n + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.30)$$

5.4. ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОТЕРИ В СЛОЖНОМ РЕЗОНАТОРЕ

Расчет дифракционных потерь в сложной резонаторной полости — нетривиальная волновая задача, выходящая за рамки рассмотренного приближения Когельника — Коллинза. Возможный путь ее решения в общем случае должен основываться, видимо, на рассмотрении уравнений типа (5.3) с привлечением ЭВМ. В некоторых простых случаях, когда резонансная полость обладает сильной симметрией, оказывается возможным свести задачу к рассмотрению двухзеркального резонатора и воспользоваться методами, изложенными в гл. 3. Именно такие резонаторы имеют наибольшее прикладное значение.

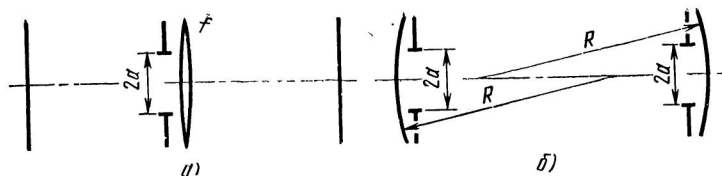


Рис. 5.2. Пример подобия линейных резонаторов

Из линейных резонаторных структур, допускающих упомянутую редуцицию дифракционной задачи, следует прежде всего отметить плоскопараллельный резонатор с симметрично расположенной линзой (рис. 5.2,а). Как отмечено в [2], такой резонатор эквивалентен двухзеркальному, образованному одинаковыми сферическими зеркалами. Кривизну образующих поверхностей эквивалентного резонатора легко найти, сравнивая собственные лучевые матрицы обеих структур, изображенных на рис. 5.2,а и б при $R=2f$. Апертурное сечение рассматриваемого резонатора должно совпадать с местоположением линзы. В приложении к гауссовым пучкам апертурное сечение определяется максимальным отношением размера пятна к радиусу диафрагмы.

Резонатор (на рис. 5.1), также может быть рассчитан по характеристикам двухзеркального, если внутренние линзы одинаковы и расположены эквидистантно, а радиус кривизны конечных отражателей соответствует условию $R=2f$. Здесь также существенно, чтобы апертурные сечения совпадали с образующими оптическими элементами резонатора. Если число образующих элементов N , то однократное прохождение волны в таком резонаторе эквивалентно $(N-1)$ -кратному прохождению волны в симметричном двухзеркальном резонаторе с параметрами конфигурации $g_1=g_2=1-(l/2f)$ и параметром Френеля $N=a^2/\lambda L$. Суммарные дифракционные потери составят величину $\alpha_{\Sigma} = 1 - (1 - \alpha)^{N-1}$.

Существуют две схемы n -зеркального кольцевого резонатора, которые допускают очевидную редуцицию дифракционной задачи: 1) резонатор, у которого только один образующий элемент обладает конечной оптической силой (например, одно сферическое зеркало), а апертурное сечение располагается вблизи этого элемента, 2) резонатор, составленный из n одинаковых элементов с осевым контуром в виде правильного n -угольника; апертурные сечения располагаются вблизи образующих оптических элементов.

Для оценки дифракционных потерь существенно местоположение апертурного сечения в схеме сложного резонатора. Расчет упрощается при симметричном расположении апертурного сечения. При расположении диафрагмы в центре плеча можно воспользоваться пятым свойством подобия резонаторов (§ 3.2).

В кольцевых резонаторах вследствие принципиального астигматизма возбуждаются моды, обладающие прямоугольной симметрией сечения; при этом пространственные масштабы распределения поля в обоих характерных меридиональных сечениях могут оказаться существенно разными. Если диафрагма имеет прямоугольную форму ($2a \times 2b$) с ориентацией сторон параллельно характерным сечениям,

то эквивалентный линейный резонатор можно представить как суперпозицию двух полосовых резонаторов с ортогональной ориентацией образующих зеркальных полос. Конечный размер полос составляет соответственно $2a$ или $2b$. Каждый из полосовых подрезонаторов обладает своими параметрами g_i и N_i . Дифракционные потери определяются в соответствии с гл. 3, а именно:

$$\alpha^{(mn)} = 1 - [1 - \alpha_x^{(m)}(g_x; N_x)] [1 - \alpha_y^{(n)}(g_y, N_y)]. \quad (5.31)$$

Если апертурное сечение резонатора круглое с радиусом $a=b$, то описанная оценка даст, очевидно, заниженное значение потерь. Как показывает практика такого рода расчетов, слегка завышенное значение потерь получается при замене круглой апертуры равновеликим квадратом. Таким образом, если радиус апертурного отверстия a , то для оценки коэффициента потерь снизу в формуле (5.31) надо принимать число Френеля равным

$$N_y^{(-)} = N_x^{(-)} = a^2/\lambda L.$$

Для оценки коэффициента дифракционных потерь сверху следует в формуле (5.31) взять

$$N_y^{(+)} = N_x^{(+)} = \pi a^2/4\lambda L = 0,785N^{(-)}.$$

Глава 6

РЕЗОНАТОРЫ, ЗАПОЛНЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

В гл. 2 и 3 предполагалось, что оптические характеристики среды, заполняющей резонатор, не влияют на характеристики возбуждаемых собственных волн. Такое приближение (так называемое *приближение пустого резонатора*) во многих случаях оказывается достаточным. Однако в квантовой электронике все большее место занимают генерирующие системы, для анализа работы которых необходимо учитывать поперечную оптическую неоднородность заполняющей резонатор активной среды [56—58, 60, 87, 88, 105—112, 123, 126—129]. Такими системами могут быть не только твердотельные и полупроводниковые, но и мощные газоразрядные лазеры. В активном элементе указанных лазерных систем в рабочем режиме устанавливается неоднородное распределение оптических параметров, что существенно меняет характеристики собственных волн резонатора.

Оптическая неоднородность среды может быть задана пространственным изменением комплексного показателя преломления:

$$\tilde{n}(x, y, z) = n(x, y, z) + i\lambda\kappa(x, y, z) / 2\pi. \quad (6.1)$$

Вообще говоря, следует учитывать неоднородность как показателя преломления n , так и коэффициента усиления или поглощения κ среды, заполняющей резонатор. Так, например, поперечная вариация показателя преломления приводит к изменению параметров пространственного распределения собственных полей; внутри самой среды деформируется продольная и поперечная структуры собственных волн [58, 63, 87, 123].

Еще более кардинальные изменения вызывает поперечная вариация коэффициента усиления (поглощения). В этом случае изменяется характер собственных волн [60—62], например, для устойчивых конфигураций они перестают быть гауссовыми. Возникает пространственная невязанность встречных волн*). Условие устойчивости в обычной трактовке (гл. 2) теряет смысл [129].

При рассмотрении резонаторов, заполненных неоднородной средой, возникает проблема адекватного метода исследования, который допускал бы получение обзримых прикладных результатов. Решение волнового уравнения [56—58] для широкого круга конфигураций резонатора с неоднородной средой затруднено. Из приближенных методов представляет интерес матричный метод (гл. 5), широко используемый в данной книге из-за его аналитической простоты и пригодности для любых конфигураций. Однако анализ показывает, что матричный метод в его традиционной трактовке (гл. 2, 4, 5) для резонаторов с неоднородностью коэффициента усиления или поглощения, вообще говоря, неприменим (приложение Г).

Что касается резонаторов с неоднородностью показателя преломления, то метод корректен лишь для случаев, когда изменение показателя преломления мало**). Поэтому для единства изложения в настоящей главе рас-

*) Это следствие поперечной неоднородности усиления (поглощения) приводит с учетом нелинейности активной среды к фазовой невязанности встречных проходов волны, а в кольцевых лазерах — к частотной невязанности встречных волн [88].

***) Сходные ограничения имеет и метод интегрального преобразования Кирхгофа.

смаатриваются лишь особенности резонаторных систем со слабой вещественной поперечной оптической неоднородностью в рамках приближения Когельника—Коллинза с использованием метода лучевых матриц. Метод позволяет получить ряд результатов, весьма интересных для рационального построения таких резонаторов.

6.1. НЕКОТОРЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕДЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Характер поперечной оптической неоднородности в общем случае может быть сложным. Рассмотрим простейший случай, когда зависимость показателя преломления от поперечной координаты r имеет следующий вид:

$$n = n_0 - \sigma r^2 / 2, \quad (6.2)$$

причем $\sigma r^2 \ll n_0$. Параметр σ , имеющий размерность м^{-2} , характеризует степень и знак оптической неоднородности среды. Данная модель оптической неоднородности играет особую роль в теории, так как, во-первых, она соответствует первым членам разложения для любой монотонной осесимметричной зависимости $n(r)$ и, во-вторых, позволяет корректно и до конца воспользоваться матричным методом. Заметим также, что выбранная модель соответствует модели, рассмотренной в § 4.7.

В рамках избранного нами метода характеристики резонатора определяются лучевой матрицей резонатора или эквивалентной периодической линзовой структуры [6]. Полная матрица периода определяется произведением лучевых матриц всех составленных элементов резонатора.

Рассмотрим в этом плане активный элемент с поперечной неоднородностью, характеризуемой зависимостью показателя преломления от поперечной координаты. Активный элемент можно рассматривать в приближении гауссовой оптики как линейный преобразователь координат луча и характеризовать его соответствующей лучевой матрицей.

Вид лучевой матрицы будет зависеть от того, где располагать границы оптической системы: внутри или вне среды. Поэтому следует разделять внутреннюю \bar{M} и внешнюю \bar{M}' лучевые матрицы. Связь между ними опре-

деляется законом преломления на плоских гранях среды:

$$\widehat{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n'/n \end{pmatrix} \widehat{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n/n' \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где n' и n — показатели преломления материала активного элемента и окружающей среды соответственно.

Внутренняя лучевая матрица неоднородного элемента вычисляется в § 4.7. Полагая $l \sqrt{|\sigma|/n_0} \ll 1$ и ограничиваясь квадратичным членом в разложении тригонометрических и гиперболических функций, представим внешнюю матрицу активного элемента в виде

$$\widehat{M}' = \begin{pmatrix} 1 - \sigma l^2/2n_0 & l/n_0 \\ -\sigma l & 1 - \sigma l^2/2n_0 \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

где l — длина активного элемента. Показатель преломления материала активного элемента на его оси принят равным n_0 , а окружающей среды — 1. Нетрудно видеть, что при такой записи матрицы она соответствует любому знаку оптической неоднородности.

Активный элемент с квадратичной поперечной неоднородностью можно рассматривать как некую идеальную оптическую систему. Найдем положение главных плоскостей (z_{H1} и z_{H2}) и фокусное расстояние f такой оптической системы (см. приложение А):

$$z_{H1} = z_{H2} = (1 - A)/(-C) = l/2n_0, \quad f = -1/C = 1/\sigma.$$

Степень поперечной оптической неоднородности среды удобно оценивать по фокусирующему действию активного элемента на проходящий параллельный пучок. Для этого можно измерить известными методами фокусное расстояние f . Величину f или относительную оптическую силу $\Phi = l/f$ мы в дальнейшем используем как практически удобные и наглядные характеристики неоднородности среды, заполняющей резонатор.

6.2. РЕЗОНАТОР С ЛИНЗОПОДОБНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Рассмотрим произвольный линейный резонатор, составленный из двух зеркал, с помещенным в него активным элементом, который обладает поперечной

оптической неоднородностью (рис. 6.1). Используются обозначения:

L — полная длина резонатора; l — длина активного элемента; R_i — радиус кривизны i -й отражающей поверхности; l_i — расстояние от i -го зеркала до ближайшей грани активного элемента; f — фокальное расстояние активного элемента как мера его оптической неоднородности; n_0 — показатель преломления активной среды по оси.

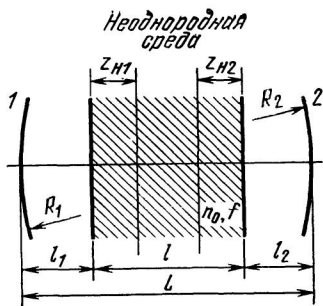


Рис. 6.1. Схема резонатора с неоднородным активным элементом

В данном случае удобно описывать свойства резонатора с привлечением введенной ранее (гл. 5) характеристической матрицы. В соответствии с рис. 6.1

$$\widehat{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R_2^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Подставив лучевую матрицу активного элемента в виде (6.4) и произведя вычисления, получим следующие выражения для элементов характеристической матрицы резонатора:

$$a = 1 - \frac{1}{R_1} \left(l_1 + l_2 + \frac{l}{n_0} \right) - \left(1 - \frac{l_1 + l_2}{R_1} \right) \frac{l}{2n_0 f} - \frac{l_2}{f} \left(1 - \frac{l_1}{R_1} \right),$$

$$b = \left(l_1 + l_2 + \frac{l}{n_0} \right) - (l_1 + l_2) \frac{l}{2n_0 f} - \frac{l_1 l_2}{f}, \quad (6.6)$$

$$-c = \left(1 - \frac{l}{2n_0 f} \right) \left[\frac{1}{R_1} \left(1 - \frac{l_2}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} \left(1 - \frac{l_1}{R_1} \right) \right] + \frac{1}{f} \left(1 - \frac{l_1}{R_1} \right) \left(1 - \frac{l_2}{R_2} \right) - \frac{l}{n_0 R_1 R_2},$$

$$d = 1 - \frac{1}{R_2} \left(l_1 + l_2 + \frac{l}{n_0} \right) - \left(1 - \frac{l_1 + l_2}{R_2} \right) \frac{l}{2n_0 f} - \frac{l_1}{f} \left(1 - \frac{l_2}{R_2} \right).$$

Применим эти выражения для анализа свойств резонатора, заполненного средой с поперечной оптической неоднородностью.

Обратимся к условию устойчивости резонатора. В терминах характеристической матрицы условие устойчивости записывается следующим образом: $0 < ad < 1$. Сравнивая это выражение с условием устойчивости пустого резонатора, нетрудно видеть, что два множителя центральной части неравенства соответствуют так называемым параметрам конфигурации. В данном случае это будут параметры конфигурации заполненного резонатора

$$g_i = 1 - \frac{1}{R_i} \left(l_i + \frac{l}{n_0} + l_k \right) - \frac{l_k}{f} \left(1 - \frac{l_i}{R_i} \right) - \frac{l}{2n_0 f} \left(1 - \frac{l_i + l_k}{R_i} \right). \quad (6.7)$$

Само условие устойчивости находит такую же графическую интерпретацию на G -диаграмме, как и для пустого резонатора. Однако новые параметры конфигурации определяются не только кривизной зеркал и расстоянием между ними, но и оптическими параметрами активного элемента (n_0 , f) и его расположением в резонаторе (l_i , l_k , l). Существуют конфигурации, которые, являясь неустойчивыми в приближении пустого резонатора, оказываются устойчивыми при учете влияния активной среды. Такие конфигурации, видимо, можно называть «квазиустойчивыми». Существуют также конфигурации резонаторов, которые оказываются за пределами области устойчивости при ее деформации линзой активного элемента. Соответствующие конфигурации можно назвать «квазиустойчивыми».

В некоторых ионных газоразрядных лазерах изменение концентрации молекул (находящихся в рабочих возбужденных состояниях) по сечению разрядного канала настолько существенно, что образующаяся резонансная оптическая неоднородность может конкурировать с обычной газовой линзой. Тогда оптическая сила образующейся суммарной неоднородности оказывается разной для различ-

ных участков спектрального интервала генерации. Если конфигурация пустого резонатора выбрана близкой к границе устойчивости, то для одних собственных частот заполненный резонатор может оказаться устойчивым, а для других — неустойчивым. При достаточном усилении возникают условия для одновременного возбуждения типов колебаний как устойчивого, так и неустойчивого резонаторов. Такое любопытное явление наблюдалось и описано в [105].

В качестве другого примера роли линзоподобной среды в резонаторе приведем лазер на АИГ: Nd^{3+} непрерывного действия, активный элемент которого, обладая термически наведенным двулучепреломлением, имеет различную оптическую силу для мод с радиальной и азимутальной поляризациями [107]. Выбирая конфигурацию резонатора, можно создать условия для генерации мод только одной выбранной поляризации [108].

6.3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОБСТВЕННЫХ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ

Поскольку, как было показано в § 6.1, среда с квадратичным распределением показателя преломления эквивалентна некоторой идеальной толстой линзе, характер пространственного распределения собственного поля вне среды будет таким же, как и для пустого резонатора (гауссовы волны — для устойчивых и гомоцентрические пучки — для неустойчивых резонаторов). Однако параметры этого распределения могут быть иными. Расчет параметров распределения собственных полей можно производить, используя формулы гл. 5 и характеристическую матрицу резонатора (6.6). В дальнейшем мы воспользуемся схемой резонатора, изображенной на рис. 6.1.

Для определения собственной волны устойчивого резонатора достаточно знать местоположение перетяжки и конфокальный параметр. Можно вычислить сначала размер пятна на зеркале по формуле (5.22), а затем конфокальный параметр и расстояние перетяжки от этого зеркала (5.19).

Собственная волна неустойчивого резонатора в рамках рассматриваемого приближения может быть определена кривизной волнового фронта в любом сечении. Используя соотношение (5.26), можно легко найти радиус кривизны на границах симметричного периода, а затем перейти к кривизне в любом сечении резонатора.

При изменении оптической силы активной среды изменяется расходимость и модовый состав излучения, что для практики часто нежелательно. Поэтому целесооб-

разно выбирать такие конфигурации резонаторов, в которых пространственные характеристики излучения слабо зависят от оптической силы линзы, помещенной в резонатор. Этой проблеме посвящен ряд публикаций [109—112]. Для анализа чувствительности пространственного распределения поля собственных волн резонатора к изменению оптической силы внутренней линзы обычно рассматривают выражение (5.22) или (5.26) с учетом (6.6). При этом наилучшая стабильность резонаторного пучка реализуется при выполнении условий

$$\frac{\partial \omega}{\partial (1/f)} = 0 \text{ для устойчивого резонатора,} \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial (1/f)} = 0 \text{ для неустойчивого резонатора.}$$

Здесь ω — размер пятна основной моды на выходном зеркале; R — радиус кривизны волновой поверхности.

Глава 7

ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АНИЗОТРОПНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

В предыдущих главах, руководствуясь методическими соображениями, мы считали рассматриваемые резонаторные системы изотропными. Это позволяло до сих пор отвлекаться от поляризационных свойств собственных типов колебаний, поскольку в изотропных резонаторах все состояния поляризации вырождены и любое оказывается собственным. Однако почти все используемые на практике оптические резонаторы в большей или меньшей степени анизотропны. Анизотропным называют резонатор, содержащий такие оптические элементы, амплитудно-фазовые характеристики пропускания или отражения которых зависят от состояния поляризации излучения.

Указанная зависимость может быть сильной и четко детерминированной для принципиально анизотропных элементов. В других случаях в элементах, которые прин-

ципально изотропны, зависимость свойств от состояния поляризации волны слаба и часто имеет статистический характер. Она возникает вследствие проявления остаточных кристаллографических свойств материала или механических напряжений в элементах резонатора. В табл. 7.1 *) приведены параметры, характеризующие анизотропию некоторых, наиболее распространенных в резонаторной технике, оптических материалов [100—103].

Таблица 7.1

Марка стекла	Коэффициент двойного лучепреломления, $\text{нм} \cdot \text{см}^{-1}$	Постоянная Верде, $10^{-4} \frac{\text{мин} \cdot \text{м}}{\text{см} \cdot \text{А}}$	Относительное температурное приращение постоянной Верде, $\times 10^{-3}$	Коэффициент фотоупругости, $\text{нм} \cdot \text{см} \cdot \text{Н}^{-1}$
ЛК1	6	1,76	5,2	0,301
ЛК5	2	1,95		0,232
ЛК6	2	1,88		0,235
К8	2	2,01	13	0,270
БК8	2	2,14	12,1	0,286
БК10	2	2,51	10,5	0,296
ТФ1	2	5,65	14,1	0,255
КВ, КУ2	30	1,88	3	0,357
КУ1	2	1,88	3	0,357

Любая анизотропия резонатора снимает вырождение различных состояний поляризации и выделяет среди множества возможных несколько (два в линейных и четыре в кольцевых резонаторах) собственных состояний поляризации данного резонатора. Таким образом, собственные типы колебаний анизотропных резонаторов (кроме рассмотренных ранее энергетических, пространственных и частотных характеристик) различаются также состоянием поляризации. Различным собственным состояниям поляризации соответствуют, вообще говоря, разные потери и изменения фазы. Поэтому при наличии амплитудно-фазовой анизотропии резонатора описанным в предыдущих главах расчетам должен сопутствовать анализ собственных состояний поляризации и соответствующих дополнительных поляризационных потерь и изменений фазы. Такой анализ и составляет содержание данной главы.

*) Значения постоянной Верде приведены по СИ,

7.1. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ СОСТОЯНИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Понятие поляризации ТЕМ-волны, как известно, определяет пространственно-временную ориентацию электрического и магнитного векторов в поперечном сечении [67]. Понятие поляризации предполагает наличие упорядоченной ориентации компонентов электромагнитного поля излучения. Наиболее распространенное, традиционное описание состояния поляризации основано на фигуре, которую описывает проекция конца электрического вектора в поперечном сечении ТЕМ-волны. В общем случае полностью поляризованного монохроматического излучения это эллипс (рис. 7.1).

Полную информацию о состоянии поляризации содержат два эллипсометрических параметра: 1) азимут большой оси эллипса α , 2) эллиптичность $\varepsilon = b/a$ или угол эллиптичности $\beta = \arctg(b/a)$. Следуя исторической традиции, волну называют правополяризованной, если при наблюдении со стороны излучателя конец электрического вектора вращается по часовой стрелке. Вращение в обратном направлении соответствует левополяризованной волне. Направление вращения указывают знаком эллиптичности.

Принято различать три типа поляризации: линейную ($\beta = 0$), круговую ($|\beta| = 45^\circ$) и эллиптическую ($0 < |\beta| < 45^\circ$). Внутри каждого типа существуют различные формы поляризации. Линейный тип поляризации содержит бесконечное число форм, отличающихся азимутом α ориентации электрического вектора. Круговая поляризация имеет две формы в зависимости от направления вращения электрического вектора. Эллиптическая поляризация, как и линейная, содержит бесконечное множество форм. Однако для эллиптической поляризации кроме вариации азимута главных осей существуют отличия по эллиптичности и направлению вращения.

Среди бесконечного множества форм поляризации различают пары так называемых ортогональных поляризаций.

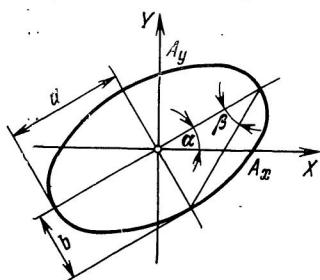


Рис. 7.1. Эллипс поляризации

Поляризации ортогональны, если они характеризуются одинаковой эллиптичностью с противоположными направлениями вращения ($\beta_1 = -\beta_2$) и ортогональными соответственными осями ($\alpha_1 - \alpha_2 = 90^\circ$).

Кроме задания эллипса поляризации, существует целый ряд более или менее наглядных способов описания состояния поляризации [67—69]. Для расчета наибольший интерес представляет описание поляризованного излучения с помощью вектора Джонса*).

Вектор Джонса представляет собой столбец из двух элементов, каждый из которых является комплексной амплитудой проекции электрического вектора на одну из произвольных ортогональных осей в поперечном сечении волны. Если излучение распространяется вдоль оси Z , а X и Y — произвольная ортогональная пара осей в поперечном сечении волны, то состояние поляризации указывается таким вектором Джонса:

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} A_x e^{i\varphi_x} \\ A_y e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Здесь A_x , A_y — максимальные величины проекции электрического вектора на оси X и Y ; φ_x и φ_y — фазы соответствующих компонентов вектора \mathbf{D} в один и тот же момент времени.

Вектор Джонса удобен для решения таких задач, в которых важно учитывать амплитудно-фазовые соотношения в рассматриваемой оптической структуре и допустимо пренебречь деполяризующими факторами. Суперпозиция нескольких волн описывается суммарным вектором Джонса.

Ортогональным поляризациям соответствуют ортогональные векторы, скалярное произведение которых равно нулю. Таким образом, если одна из ортогональных поляризаций задана вектором Джонса \mathbf{D}_1 (7.1), то второй поляризации соответствует вектор \mathbf{D}_2 :

$$\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} -A_y e^{i\varphi_y} \\ A_x e^{i\varphi_x} \end{pmatrix}.$$

*) Следует отметить, что, хотя в настоящее время для расчетов используется почти исключительно метод Джонса, другие приемы описания поляризации излучения (например, сфера Пуанкаре) также с успехом могут быть использованы для создания графоаналитических методов расчета и даже для построения расчетных аналоговых устройств.

Существенно, что состояние поляризации определяется отношением компонентов вектора Джонса, т. е. комплексным параметром $\Gamma = |\Gamma| e^{i\gamma}$, где для (7.1) $|\Gamma| = A_y/A_x$, а $\gamma = \arg \Gamma = \varphi_y - \varphi_x$. Связь между комплексным параметром поляризации Γ и вещественными эллипсометрическими величинами оказывается следующей:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2|\Gamma| \cos \gamma}{1 - |\Gamma|^2} \right), \quad (7.2)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2|\Gamma| \sin \gamma}{1 + |\Gamma|^2} \right).$$

Иногда пользуются выражением

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1 + |\Gamma|^2 - \sqrt{(1 + |\Gamma|^2)^2 - 4(\operatorname{Im} \Gamma)^2}}{1 + |\Gamma|^2 + \sqrt{(1 + |\Gamma|^2)^2 - 4(\operatorname{Im} \Gamma)^2}}}. \quad (7.3)$$

При этом направление вращения определяется знаком $\sin \gamma$ или $\operatorname{Im} \Gamma$. В ряде случаев могут представить интерес и обратные соотношения

$$C = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \sin^2 2\beta + 2}{\operatorname{tg}^2 2\alpha + \sin^2 2\beta},$$

$$|\Gamma| = \sqrt{C - \sqrt{C^2 - 1}}, \quad (7.4)$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \left(\frac{1 + |\Gamma|^2}{1 - |\Gamma|^2} \right) \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Нетрудно видеть, что на комплексной плоскости Γ линейным поляризациям соответствует вещественная ось; при этом $\alpha = \operatorname{arctg} \Gamma$. Поляризациям с нулевым азимутом соответствует мнимая ось; в этом случае $\varepsilon = |\Gamma|$. Для ортогональных поляризаций легко найти

$$\Gamma_1 \Gamma_2^* = -1. \quad (7.5)$$

7.2. МАТРИЦЫ ДЖОНСА. ВИДЫ ОПТИЧЕСКИХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Описание состояния поляризации с помощью вектора Джонса позволяет развить удобный метод расчета преобразования поляризации волны произвольными ани-

зотропными оптическими элементами [67—69]. В таких расчетах обычно принимаются следующие допущения:

1) рассматриваемые волны полагаются плоскими в любом поперечном сечении оптического устройства;

2) амплитудно-фазовые соотношения сохраняются по всему сечению волны и по всему спектральному интервалу рассматриваемого излучения.

В рамках этих допущений преобразование вектора Джонса ($\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}'$) произвольным оптическим устройством оказывается линейным:

$$D'_x = m_{11}D_x + m_{12}D_y, \quad (7.6)$$

$$D'_y = m_{21}D_x + m_{22}D_y.$$

Комплексные коэффициенты преобразования m_{ik} образуют матрицу 2×2

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

так что преобразование (7.6) можно записать в виде

$$\mathbf{L}' = \hat{M}\mathbf{L}. \quad (7.8)$$

Матрицу \hat{M} называют матрицей (оператором) Джонса. Она характеризует данное оптическое устройство и не зависит от состояния поляризации проходящего излучения. Вид матрицы Джонса, вообще говоря, зависит от ориентации поперечных осей выбранной системы координат и от направления прохождения волны через оптический элемент. Матрицу Джонса можно рационально нормировать, умножая все ее элементы на комплексный множитель. Практически удобной и потому распространенной нормировкой оказывается такая, при которой компоненты собственных векторов матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} D_{x1} \\ D_{y1} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} D_{x2} \\ D_{y2} \end{pmatrix}$$

связаны соотношением

$$\left| \begin{array}{cc} D_{x1} & D_{x2} \\ D_{y1} & D_{y2} \end{array} \right| = 1. \quad (7.9)$$

Собственные векторы и собственные значения матрицы Джонса имеют реальный физический смысл как характеристики соответствующего оптического элемента.

Собственные векторы матрицы являются векторами Джонса состояний поляризации, не изменяющихся при прохождении рассматриваемого оптического элемента. Оптическое пропускание и фазовый набег, которые реализуются в данном элементе для собственных состояний поляризации, определяются собственными значениями матрицы \hat{M} . Собственные значения в общем случае комплексны. Модуль собственного значения матрицы \hat{M} при указанной нормировке (7.9) определяет амплитудное пропускание, а аргумент — фазовый набег. Оптический элемент обладает невырожденной амплитудной анизотропией, если модули собственных значений матрицы \hat{M} различны. Неравенство аргументов собственных значений характеризует фазовую анизотропию оптического элемента.

Нетрудно убедиться, что преобразование поляризации рядом последовательно расположенных оптических элементов описывается произведением соответствующих матриц Джонса. Порядок перемножения матриц обратен порядку расположения соответствующих оптических элементов. Так, если излучение последовательно проходит элементы 1, 2, ..., $n-1$, n матрицы Джонса которых $\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_{n-1}, \hat{M}_n$, то суммарный оператор выразится произведением

$$\hat{M} = \prod_n^1 \hat{M}_i. \quad (7.10)$$

Все многообразие анизотропных оптических устройств, образующих резонатор, как правило, может быть сведено к суперпозиции нескольких простейших и описано с помощью нескольких основных матриц Джонса. В основу классификации простейших анизотропных элементов кладется характеристика собственных состояний поляризации и соотношение собственных значений для данного оптического элемента.

Собственные состояния поляризации данного оптического элемента однозначно определяют соответствующую матрицу Джонса. Пусть произвольный оптический элемент характеризуется двумя собственными поляризациями

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} D_{1x} \\ D_{1y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} D_{2x} \\ D_{2y} \end{pmatrix}$$

и соответствующими различными собственными значениями Λ_1 и Λ_2 . Тогда матрица, описывающая этот элемент, может быть представлена следующим выражением [75]:

$$\widehat{M} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} (\Lambda_1 D_{1x} D_{2y} - \Lambda_2 D_{2x} D_{1y}) & (\Lambda_2 - \Lambda_1) D_{1x} D_{2x} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2) D_{1y} D_{2y} & \Lambda_1 D_{1x} D_{2y} - \Lambda_2 D_{2x} D_{1y} \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

где $\Delta = D_{1x} D_{2y} - D_{2x} D_{1y} \neq 0$, так как векторы \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 линейно независимы.

Линейными называются такие анизотропные элементы, собственные состояния поляризации которых линейны. При этом собственные волны при прохождении данного элемента могут характеризоваться разными потерями или различными набегами фазы. В первом случае элемент будет называться амплитудным, во втором — фазовым. Для линейных анизотропных элементов как амплитудных, так и фазовых, вид матрицы зависит от ориентации поперечных координатных осей и не зависит от направления распространения излучения. Простейший диагональный вид матрицы Джонса соответствует такому выбору поперечных координатных осей, когда они совпадают с проекциями ортогональных собственных осей оптического элемента на плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны. Такие поперечные оси называют собственными. В дальнейшем мы приводим матрицы линейных анизотропных элементов относительно собственного координатного базиса.

Переход к любой другой паре поперечных осей, развернутой на угол θ относительно собственной пары, осуществляется с помощью преобразования

$$\widehat{M}_\theta = \widehat{S}(-\theta) \widehat{M}_0 \widehat{S}(\theta), \quad (7.12)$$

где $\widehat{S}(\theta)$ — матрица поворота, имеющая вид

$$S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

Оптический элемент, обладающий только амплитудной линейной анизотропией, имеет два ортогональных собственных вектора, которые в собственных осях могут быть записаны так:

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

Собственные состояния поляризации такого элемента различаются только коэффициентом пропускания, поэтому собственные значения соответствующей матрицы вещественны:

$$\Lambda_1 = T_1 \quad \Lambda_2 = T_2. \quad (7.15)$$

Используя (7.11), легко получить матрицу Джонса для линейного амплитудного анизотропного элемента в собственных осях:

$$\widehat{M}_{\text{ла}} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Линейные фазовые элементы имеют те же собственные состояния поляризации (7.14), а комплексные собственные значения соответствующей матрицы отличаются только аргументом. Если разность фазовых набегов для собственных волн равна ψ , то собственные значения могут быть записаны в виде

$$\Lambda_1 = e^{-i\psi/2}, \quad \Lambda_2 = e^{+i\psi/2}. \quad (7.17)$$

С учетом (7.11) матрица Джонса запишется так *):

$$\widehat{M}_{\text{лф}} = \begin{pmatrix} e^{-i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{+i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Циркулярные анизотропные элементы не имеют собственных осей и вид соответствующих матриц Джонса не зависит от выбора и поворота поперечных координатных осей, если только система координат остается правой.

При круговой анизотропии собственные векторы могут быть записаны как

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\pi/2} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Собственные значения матрицы при амплитудной анизотропии вещественны (7.15). Поэтому матрица Джонса для кругового амплитудного анизотропного элемента запишется следующим образом:

$$\widehat{M}_{\text{ка}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_1 + T_2 & i(T_2 - T_1) \\ i(T_1 - T_2) & T_1 + T_2 \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

*) Выбор знака ψ в (7.18) соответствует совмещению оси X с «быстрой» осью фазового элемента.

В случае круговой фазовой анизотропии, используя для собственных векторов (7.19), а для собственных значений (7.17), получаем

$$\widehat{M}_{\text{кф}} = \begin{pmatrix} \cos \psi/2 & -\sin \psi/2 \\ \sin \psi/2 & \cos \psi/2 \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Среди круговых анизотропных элементов различают полярные и неполярные. Неполярными называют такие элементы, действие которых не зависит от направления распространения излучения. К этому типу элементов в силу свойств симметрии относятся все кристаллы. Для полярных элементов, наоборот, существенно направление распространения волны. К таким элементам относятся среды во внешнем магнитном поле, которое и обуславливает полярность элемента. Полярный фазовый круговой анизотропный элемент называют фарадеевским вращателем. Матрица Джонса для любого вращателя совпадает с матрицей поворота (7.13), причем параметр $\psi/2$ имеет смысл угла поворота плоскости поляризации линейно-поляризованной волны.

Приведенные выше виды основных матриц Джонса (7.13), (7.16), (7.18), (7.20), (7.21) позволяют рассчитывать преобразование состояния поляризации практически любой совокупностью последовательно расположенных анизотропных оптических элементов.

Отражение волны от образующих резонаторов зеркальных элементов связано с определенными амплитудно-фазовыми соотношениями, которые необходимо учитывать при проведении поляризационного расчета. Каждое зеркальное отражение связано с инверсией симметрии системы координат. В результате этого преобразования либо ось X , либо ось Y меняет знак. Если мы для отраженной волны оставляем правую систему, ось Z которой направлена в сторону распространения, то следует учесть зеркальное преобразование координат специальной матрицей Джонса

$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

В этом смысле отражатель эквивалентен фазовой полуволновой пластинке, одна ось которой располагается в плоскости падения, другая — ортогонально. Наклонное отражение часто связано с фазовой и амплитудной анизотропией. Комбинируя матрицу зеркального отражения

(7.22) с введенными выше матрицами анизотропных элементов, можно найти оператор Джонса практически для любого отражательного элемента.

7.3. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ОДНОПОЛОСТНОГО РЕЗОНАТОРА

Метод Джонса широко используется для расчета собственных состояний поляризации оптических резонаторов [65, 66, 70—75, 130, 132]. Выбрав расчетное поперечное сечение и рассмотрев полный цикл распространения волны в полости резонатора, можно составить циклический матричный оператор Джонса с учетом всех анизотропных элементов резонатора. Циклический оператор является произведением частных операторов, описывающих действие каждого из анизотропных элементов, которые проходит волна. Составлять циклический оператор можно двумя способами, идентичными по физическому содержанию, но различающимися методически.

Первый способ нашел приложение при расчетах линейной резонаторной полости. Можно выбрать какую-то фиксированную систему прямоугольных координат, ось Z которой параллельна оси резонатора, представить все частные операторы в этой системе, используя соотношение (7.12), и затем перемножить их. При этом изменение направления распространения волны в резонаторе влечет за собой переориентацию векторных характеристик волны относительно выбранной фиксированной системы координат. Поэтому в рамках этого метода не нужно учитывать оператор зеркального отражения и зеркальное изменение ориентации собственных осей линейных элементов при обратном ходе волны. Оператор, описывающий действие полярного циклического элемента, оказывается одинаковым для прямого и обратного хода волны, а оператор одного и того же неполярного циклического элемента имеет различный вид в зависимости от направления распространения волны.

Другой способ является более общим и применяется как к линейным, так и к кольцевым резонаторам. В этом случае расчетная, например правая, система координат при переходе от одного элемента к другому, оставаясь правой, меняется так, что ось Z всегда ориентируется по направлению распространения волны, а поперечные оси

X, Y совмещаются с собственными осями очередного анизотропного элемента. Перед тем как применить оператор очередного элемента, нужно представить уже получившийся вектор Джонса в новой системе координат. Пройдя весь цикл, следует последним поворотом возвратиться в исходную систему координат. При таком подходе можно обойтись одним представлением для циклических неполярных элементов, но следует вводить оператор отражения (7.22) и учитывать зеркальное изменение ориентации собственных осей в обратном ходе волны.

Циклический матричный оператор определяет собственные состояния поляризации и их характеристики в расчетном сечении резонатора. Поскольку собственные поляризации восстанавливаются при возвращении волны в исходное сечение, то соответствующие векторы Джонса как раз являются собственными векторами циклического оператора \hat{M}_0 . Собственные значения $\Lambda = |\Lambda|e^{i\lambda}$ оператора \hat{M}_0 характеризуют потери и фазовые набеги собственных волн. Величина $1 - |\Lambda|^2$ при соответствующей нормировке оператора *) определяет коэффициент поляризационных потерь, а величина $\lambda = \arg \Lambda$ — фазовый набег в анизотропных элементах резонатора, учтенных при составлении циклического оператора. Потери и фазовый набег соответствуют полному проходу волны.

Матричное уравнение

$$\hat{M}_0 \mathbf{E} = \Lambda \mathbf{D} \quad (7.23)$$

имеет решения, отличные от нуля, только при условии

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \Lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует выражение для определения собственных значений

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\text{sp } \hat{M}_0 \pm \sqrt{(\text{sp } \hat{M}_0)^2 - 4 \det \hat{M}_0} \right], \quad (7.24)$$

которое дает два различных значения Λ . При этом коэффициенты поляризационных потерь обеих мод могут су-

*) Необходимая нормировка получается, если использовать для вычисления циклического оператора частные операторы в форме (7.13) — (7.22).

Щественно отличаться, так что волна с большими потерями практически не будет возбуждаться в резонаторе.

Из матричного уравнения (7.23) следует выражение для вычисления параметра поляризации Γ

$$m_{12}\Gamma^2 + (m_{11} - m_{22})\Gamma - m_{21} = 0. \quad (7.25)$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,2} &= \frac{\Lambda - m_{11}}{m_{12}} = \frac{m_{21}}{\Lambda - m_{22}} = \\ &= \frac{1}{2m_{12}} \left[(m_{22} - m_{11}) \pm \sqrt{(\operatorname{sp} \widehat{M}_0)^2 - 4 \det \widehat{M}_0} \right], \end{aligned} \quad (7.26)$$

что соответствует двум собственным состояниям поляризации. Собственные поляризации в других сечениях резонатора, вообще говоря, иные. Для вычисления параметра Γ в другом сечении резонатора следует либо повторить всю процедуру расчета для нового сечения, либо вычислить преобразование поляризации, подействовав на найденные ранее собственные векторы оператором Джонса, который учитывает действие промежуточных анизотропных элементов. Эллипсометрические параметры собственных поляризаций могут быть найдены в соответствии с формулами (7.2) и (7.3).

Следует особо отметить, что описанный расчет ведется в приближении плоских волн и учитывает только анизотропные элементы. Поэтому в общем случае величина $|\Lambda|$ не определяет полного коэффициента потерь, а величина λ — полного фазового набега за проход волны в резонаторе. На практике гораздо чаще интересуются относительными характеристиками собственных волн рассматриваемого резонатора. Отношение модулей собственных значений определяет отношение коэффициентов пропускания для обеих волн. Разность фазовых набегов задается величиной $(\lambda_1 - \lambda_2)$, так что частотный сдвиг разных собственных волн составит для линейной полости длиной L

$$\Delta v_{12} = (c/4\pi L) (\lambda_1 - \lambda_2), \quad (7.27a)$$

а для кольцевой полости длиной L

$$\Delta v_{12} = (c/2\pi L) (\lambda_1 - \lambda_2). \quad (7.27b)$$

Суммируя сказанное, можно указать следующий рациональный порядок расчета поляризационных характеристик резонатора.

1. Исходя из постановки задачи и методического удобства, выбирают расчетное сечение резонатора.

2. Представляют полную циклическую последовательность анизотропных элементов резонатора.

3. Представляют частные матричные операторы Джонса.

4. Вычисляют суммарный циклический оператор Джонса.

5. Находят собственные значения циклического оператора в соответствии с (7.24).

6. Анализируя собственные значения, устанавливают, какие волны реально возбуждаются в резонаторе.

7. Вычисляют векторы собственных поляризаций.

8. В случае необходимости осуществляют переход к другим сечениям резонатора.

9. Вычисляют эллипсометрические параметры для нужных сечений резонатора.

Для анализа собственных поляризаций резонатора полезно учитывать некоторые свойства циклического оператора Джонса. Если Γ_1 и Γ_2 — параметры, характеризующие собственные поляризации, а Λ_1 и Λ_2 — соответствующие величины амплитудного пропускания, то общий вид нормированного циклического оператора, как следует из 7.11, таков:

$$\widehat{M}_0 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\Gamma_2 - \Gamma_1)} \times \\ \times \begin{pmatrix} (\Lambda_1 \Gamma_2 - \Lambda_2 \Gamma_1) & (\Lambda_2 - \Lambda_1) \\ \Gamma_1 \Gamma_2 (\Lambda_1 - \Lambda_2) & (\Lambda_2 \Gamma_2 - \Lambda_1 \Gamma_1) \end{pmatrix}. \quad (7.28)$$

Определитель и след \widehat{M}_0 не зависят от выбора координатного базиса: $\det \widehat{M}_0 = \Lambda_1 \Lambda_2$, $\text{sp} \widehat{M}_0 = \Lambda_1 + \Lambda_2$. При этом легко показать, что для расчета $\det \widehat{M}_0$ достаточно перемножить собственные значения всех частных операторов Джонса:

$$\det \widehat{M}_0 = \prod_i (\Lambda_{i1} \Lambda_{i2}).$$

Следовательно, перестановка анизотропных элементов в резонаторе не меняет величину $\det \widehat{M}_0$. Характер собственных поляризаций существенно зависит от дискриминанта уравнения (7.25):

$$\mu = 4 \det \widehat{M}_0 - (\text{sp} \widehat{M}_0)^2 = -4m_{12}m_{21} - (m_{22} - m_{11})^2.$$

Величина μ также не зависит от выбора координатного базиса.

Ортогональным поляризациям соответствуют нормальные циклические операторы [82], т. е. такие, для которых выполняется соотношение $\widehat{M}_0 \widehat{M}_0^* = \widehat{M}_0^* \widehat{M}_0$ (где \widehat{M}_0^* — эрмитово сопряженный оператор). Отсюда легко получить условие ортогональности собственных поляризаций

$$m_{12} = m_{21}^*, \quad \text{Im}(m_{11}) = \text{Im}(m_{22}). \quad (7.29)$$

Если состояния поляризации ортогональны, то целесообразно перейти к системе поперечных координат X_0, Y_0 , совпадающих с осями эллипсов поляризаций. Это достигается поворотом на угол $\theta_0 = 1/2 \arctg [(m_{12} + m_{21}) / (m_{11} - m_{22})]$. Рационализированный таким образом циклический оператор Джонса приобретает вид

$$\begin{aligned} \widehat{M}_0^{(0)} &= \widehat{S}(-\theta_0) \widehat{M}_0 \widehat{S}(\theta_0) = \\ &= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos^2 \beta + \Lambda_2 \sin^2 \beta & i(\Lambda_2 - \Lambda_1) \sin \beta \cos \beta \\ i(\Lambda_1 - \Lambda_2) \sin \beta \cos \beta & \Lambda_2 \cos^2 \beta + \Lambda_1 \sin^2 \beta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Эллиптичность собственных поляризаций определяется соотношением

$$\beta = 1/2 \arctg [2im_{12}^{(0)} / (m_{11}^{(0)} - m_{22}^{(0)})]. \quad (7.31)$$

Рассмотрим характерные частные случаи. Если резонатор изотропен, то циклический оператор инвариантен к повороту; он имеет вид диагональной матрицы с равными диагональными элементами: $m_{11} = m_{22} = \Lambda$, $m_{12} = m_{21} = 0$. Такое состояние резонатора неустойчиво, ибо любая малая неконтролируемая анизотропия задает собственные поляризации (см. § 7.4). Если собственными являются круговые поляризации, то циклический оператор также не зависит от поворота координатного базиса; оператор имеет вид

$$\widehat{M}_0^{(0)} = \widehat{M}_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Lambda_1 + \Lambda_2 & i(\Lambda_2 - \Lambda_1) \\ i(\Lambda_1 - \Lambda_2) & \Lambda_1 + \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, если собственные поляризации линейны, то указанный поворот диагонализует циклический оператор

$$\widehat{M}_0^{(0)} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Когда резонатор кроме зеркал содержит лишь амплитудные линейные анизотропные элементы и вращатели, циклический оператор оказывается вещественным. В этом частном, но практически важном случае возможны следующие варианты решения поляризационной задачи в зависимости от дискриминанта уравнения (7.25) $\mu = 4 \det \widehat{M}_0 - (\text{sp} \widehat{M}_0)^2$. При $\mu = 0$ резонатор имеет две совпадающие линейные поляризации с азимутом $\alpha_1 = \alpha_2 = \arctg [(m_{22} - m_{11}) / 2m_{12}]$ и $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 1/2(m_{11} + m_{22})$. При $\mu < 0$ резонатор обладает чисто амплитудной анизотропией ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$), причем $\Lambda_1 - \Lambda_2 = \sqrt{-\mu}$. Собственные поляризации линейны, а плоскости поляризации образуют угол

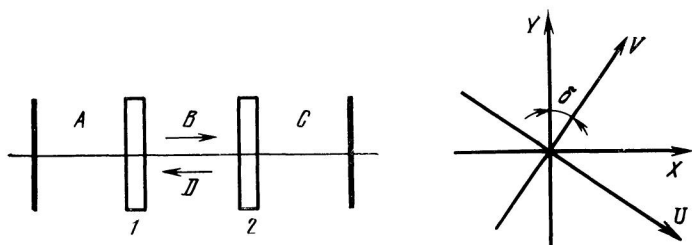


Рис. 7.2. К примеру 1.

$\Delta\alpha_{12} = \arctg [V\sqrt{-\mu}/(m_{12} - m_{21})]$. Наконец, при $\mu > 0$ анизотропия резонатора оказывается чисто фазовой:

$$|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = \sqrt{\det \widehat{M}_0},$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \arctg (V\sqrt{\mu}/sp \widehat{M}_0).$$

Эллиптические собственные поляризации различаются только направлением вращения

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 \arctg [(m_{22} - m_{11})/(m_{12} + m_{21})],$$

$$\beta_1 = -\beta_2 = 1/2 \arcsin [V\sqrt{\mu}/(m_{12} - m_{21})].$$

Пример 1. В качестве первого примера на расчет поляризационных характеристик рассмотрим линейный резонатор, образованный двумя зеркалами, в полости которого расположены два частичных линейных поляризатора (рис. 7.2). Такой резонатор может быть реализован в газовых лазерах с брестеровскими окнами (1 и 2). Положим, что оба поляризатора имеют одинаковые экстремальные коэффициенты пропускания T_1, T_2 . В случае брестеровских окон имеем

$$T_1 = 1, \quad T_2 = 4n^2/(1+n^2)^2,$$

где n — показатель преломления материала. Пусть собственные оси обеих пластинок образуют между собой малый угол δ . Решение этой задачи позволит оценить последствия неточной установки брестеровских окон в резонаторе.

При вычислении циклического оператора для линейного резонатора удобно воспользоваться первым из двух способов, описанных выше. Поперечные оси фиксированной системы координат расположим в плоскости падения (ось X) и перпендикулярно плоскости падения (ось Y) пластины 1 (см. рис. 7.2). С учетом этого для расчетного сечения A получим, полагая $T_2 = T$:

$$\begin{aligned} \widehat{M}_A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \delta + T^2 \sin^2 \delta & T(1 - T^2) \sin \delta \cos \delta \\ T(1 - T^2) \sin \delta \cos \delta & T^2 [\sin^2 \delta + T^2 \cos^2 \delta] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая, что нас в данной задаче интересуют малые углы рассогласования обеих брюстеровских пластин, представим циклический оператор в виде

$$\widehat{M}_A = \begin{pmatrix} 1 - \delta^2 (1 - T^2) & T (1 - T^2) \delta \\ T (1 - T^2) \delta & T^2 [T^2 + \delta^2 (1 - T^2)] \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора \widehat{M}_A действительны и различны:

$$\Lambda_1 = 1 - \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \delta^2, \quad \Lambda_2 = T^4 \left(1 + \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \delta^2 \right).$$

Соответствующие моды резонатора имеют одинаковые частоты и существенно различные потери. На практике в таких резонаторах возбуждается только более добротная мода (индекс 1), которую мы и рассматриваем далее. Поляризационные потери за односторонний проход волны в резонаторе выражаются формулой

$$1 - \Lambda_1 = \delta^2 (1 - T^2) / (1 + T^2).$$

Так как оператор \widehat{M}_A и собственные значения Λ вещественны, то собственные поляризации линейны. Для области A резонатора получим азимут поляризации $\alpha_A = \delta T / (1 + T^2)$. При точном согласовании брюстеровских пластин ($\delta = 0$) плоскость поляризации совпадает с плоскостью падения для первой пластины. При небольшом рассогласовании плоскость поляризации в области A разворачивается относительно плоскости падения для пластины 1.

Представляя вектор Джонса в виде $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ и используя его известное преобразование каждым элементом резонатора, легко найти азимут поляризации для любой области резонатора

$$\alpha_B = \frac{T^2}{1 + T^2} \delta, \quad \alpha_C = \frac{1 - T + T^2}{1 + T^2} \delta, \quad \alpha_D = \frac{1}{1 + T^2} \delta.$$

Рассогласование пластин приводит к развороту плоскости поляризации, различному в разных областях резонатора. Нетрудно видеть, что относительно плоскости, лежащей посередине между плоскостями падения, для обеих пластин разворот поляризации оказывается симметричным. Если отсчитывать азимут линейной поляризации от этой плоскости, то можно найти

$$\alpha'_C = -\alpha'_A = \frac{(1 - T)^2}{1 + T^2} \frac{\delta}{2}, \quad \alpha'_D = -\alpha'_B = \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \frac{\delta}{2}.$$

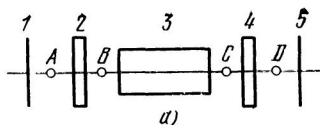
Интересно, что при рассогласовании брюстеровских пластин состояния поляризации в пучках, выводимых с разных концов резонатора, оказываются различными.

$$\alpha_C - \alpha_A = (1 - T)^2 \delta / (1 + T^2).$$

Пример 2. Резонатор содержит две согласованные брюстеровские пластины, между которыми располагается фарадеевский вращатель

Рис. 7.3. К примеру 2:

1 и 5 — зеркала резонатора; 2 и 4 — частичные поляризаторы; 3 — фарадеевский вращатель



(рис. 7.3,а). Такая схема реализуется в газовых ионных лазерах с внешними зеркалами, если на активную среду наложено продольное магнитное поле. Обозначим Φ — угол поворота плоскости поляризации в среде, а T — пропускание брьюстеровских пластин для s -компонента. Величина T задается соотношением $T = 4n^2(1+n^2)^{-2}$.

Выберем для расчета сечение A резонатора. Используем первый способ вычисления циклического оператора Джонса с фиксированной системой координат, поперечные оси которой совмещены с собственными осями частичных поляризаторов (брюстеровские пластины). Циклический оператор в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{M}_A &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Phi & \sin \Phi \\ -\sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \right]^2 = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \Phi - T^2 \sin^2 \Phi & T(1+T^2) \sin \Phi \cos \Phi \\ -T(1+T^2) \sin \Phi \cos \Phi & T^4 \cos^2 \Phi - T^2 \sin^2 \Phi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-T^2) + (1+T^2) \cos 2\Phi & T(1+T^2) \sin 2\Phi \\ -T(1+T^2) \sin 2\Phi & T^2[-(1-T^2) + (1+T^2) \cos 2\Phi] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поляризационные характеристики собственных типов колебаний такого резонатора зависят от величины поворота плоскости поляризации в среде. Полный цикл изменений характеристик осуществляется за $\Delta\Phi = \pi$. Собственные значения оператора \widehat{M}_A выражаются соотношением

$$\Lambda_{1,2} = 1/2 [\text{sp } \widehat{M}_A \pm \sqrt{(\text{sp } \widehat{M}_A)^2 - 4T^4}], \quad (7.32)$$

где $\text{sp } \widehat{M}_A = 1/2 [(1-T^2)^2 + (1+T^2)^2 \cos 2\Phi]$.

Отношение компонентов вектора Джонса

$$\Gamma_{1,2} = \frac{2\Lambda_{1,2} - (1-T^2) - (1+T^2) \cos 2\Phi}{T(1+T^2) \sin 2\Phi}. \quad (7.33)$$

Проследим, как изменяются характеристики собственных состояний поляризации при вариации угла Φ . В отсутствие магнитного

поля при $\Phi=0$ уравнения (7.32) и (7.33) дают, как и следовало ожидать, две линейные ортогональные поляризации, ориентированные в плоскости падения (p -компонент) и перпендикулярно плоскости падения (s -компонент) брестеровских граней. Моды имеют одинаковые частоты и разные поляризационные потери, так как $\Lambda_1=1$, $\Lambda_2=T^4$. При наложении на активную среду продольного магнитного поля и увеличении параметра Φ собственные поляризации резонатора, оставаясь линейными, разворачиваются навстречу друг другу. Собственные частоты остаются постоянными ($\Lambda_{1,2}$ — вещественны), потери более добротной моды увеличиваются, а менее добротной — уменьшаются. При некотором критическом значении $\Phi=\Phi_{кр}$ наступает полное вырождение собственных типов колебаний, когда их плоскости поляризации, частоты и потери совпадают. Из (7.32) можно найти

$$\Phi_{кр} = \pm \arcsin [(1-T^2)/(1+T^2)].$$

На рис. 7.3,б показана зависимость критического угла от показателя преломления материала брестеровских пластин. В критическом режиме обе моды поляризованы в плоскости, составляющей угол 45° с собственными осями системы. При этом $\Lambda_1=\Lambda_2=T^2$. При дальнейшем возрастании параметра $\Phi>\Phi_{кр}$ собственные моды оказываются поляризованными эллиптически, так что оси эллипса поляризации ориентированы под углом 45° к выбранным поперечным осям координат. Направление вращения векторов E в модах встречное. Эллиптичность поляризации растет в интервале $\Phi_{кр}<\Phi<90^\circ$. При этом потери обеих мод одинаковы, а разность частот возрастает. В точке $\Phi=90^\circ$ обе моды имеют ортогональные круговые поляризации и одинаковые потери ($|\Lambda_1|=|\Lambda_2|=T^2$), а их частоты расщеплены в соответствии с эффектом Фарадея. В области $90^\circ<\Phi<180^\circ$ изменение поляризационных характеристик происходит в обратном порядке так, что при $\Phi=180^\circ$ собственными окажутся те же ортогональные линейные поляризации, что и при $\Phi=0^\circ$.

Для газовых лазеров параметр Φ обычно мал. В этом случае для вещественных собственных значений можно получить следующие приближенные соотношения:

$$\Lambda_1 = 1 - \frac{1+T^2}{1-T^2} \Phi^2, \quad \Lambda_2 = T^4 \left(1 + \frac{1+T^2}{1-T^2} \Phi^2 \right).$$

Потери собственных мод сильно отличаются, и обычно возбуждается только более добротная мода (индекс 1). Поляризационные потери за проход для этой моды равны $\Phi^2(1+T^2)/(1-T^2)$.

Азимут плоскости поляризации в сечении A составляет $\alpha_A = -T\Phi/(1-T^2)$. Для других сечений резонатора (см. рис. 7.3) легко найти

$$\alpha_B = -\frac{T^2\Phi}{1-T^2}, \quad \alpha_C = -\frac{\Phi}{1-T^2},$$

$$\alpha_D = -\frac{T\Phi}{1-T^2}.$$

Направление поляризации излучения на обоих зеркалах совпадает.

7.4. РАСЧЕТ МАЛЫХ ИСКАЖЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ПОЛЯРИЗАЦИИ

На практике часто требуется найти небольшие изменения собственных состояний поляризации некоторого идеализированного резонатора при воздействии на него различного рода возмущений. При этом характеристики собственных волн идеального резонатора известны. Возмущения могут быть связаны с погрешностями изготовления резонатора, с наличием остаточной анизотропии, с учетом наведенной анизотропии за счет внешних факторов (магнитные поля, механические напряжения). Если таких возмущений несколько, то расчет по описанному выше методу Джонса усложняется, а окончательные формулы делаются громоздкими. В то же время указанные факторы могут существенно повлиять на характеристики собственных поляризаций резонатора. В этом случае целесообразно использовать для расчета метод возмущений [76].

Широко известный метод возмущений сводится к приближенному нахождению собственных векторов и собственных значений матрицы $\hat{M} = \hat{M}^{(0)} + \delta \hat{M}^{(1)}$, где $\hat{M}^{(0)}$ — невозмущенная матрица; $\hat{M}^{(1)}$ — матрица возмущения; δ — малый параметр возмущения. Собственные векторы и собственные значения матрицы \hat{M} ищутся в виде разложений по малому параметру δ , причем в нулевом приближении собственные векторы и собственные значения совпадают с решениями для невозмущенной матрицы.

Можно показать [76], что для возможности применения метода возмущений необходимо и достаточно, чтобы невозмущенная матрица Джонса и эрмитово сопряженная матрица имели одни и те же собственные векторы. Этому требованию удовлетворяют нормальные матрицы [82], т. е. такие, для которых справедливо соотношение $\hat{M}^{(0)} \hat{M}^{(0)*} = \hat{M}^{(0)*} \hat{M}^{(0)}$, где знак $*$ соответствует эрмитову сопряжению. Существенно также, что для нормальных матриц операция умножения на произвольный вектор с последующим скалярным умножением на другой произвольный вектор обладает свойством коммутативности, т. е. $(\hat{M} \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_2) = (\hat{M} \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_1)$. Матрица $\hat{M}^{(0)}$ тогда и только тогда является нормальной, когда она имеет полную ортонормированную систему собственных векторов. Отсюда критерием возможности применения метода возмущений для расчета поляризационных характеристик является ортогональность собственных

поляризаций невозмущенного резонатора. На практике такие резонаторы распространены. Метод возмущений, очевидно, можно применять и в том случае, когда невозмущенный резонатор изотропен. Это обстоятельство очень важно, так как позволяет решать такие задачи, где малая анизотропия определяет поляризационные характеристики резонатора.

Итак, пусть анизотропному резонатору в некотором базисе соответствует циклический матричный оператор Джонса

$$\widehat{M}(\delta) = \begin{pmatrix} m_{11}(\delta) & m_{12}(\delta) \\ m_{21}(\delta) & m_{22}(\delta) \end{pmatrix},$$

все элементы которого — некоторые функции малого параметра δ . Вычисление этого оператора осуществляют обычными методами, описанными в § 7.3. Представим оператор $\widehat{M}(\delta)$ в виде ряда Тейлора в окрестности точки $\delta=0$:

$$\widehat{M}(\delta) = \widehat{M}^{(0)}(0) + \widehat{M}^{(1)}(0)\delta + \widehat{M}^{(2)}(0)\delta^2 + \dots \quad (7.34)$$

Здесь $\widehat{M}^{(0)}(0)$ — невозмущенная матрица, а

$$\widehat{M}^{(n)}(0) = \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)}(0) & m_{12}^{(n)}(0) \\ m_{21}^{(n)}(0) & m_{22}^{(n)}(0) \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

— матрица возмущения n -го порядка ($m_{ik}^{(n)}(0)$ — производная n -го порядка по δ от функции $m_{ik}(\delta)$ в точке $\delta=0$).

Рассмотрим решение задачи

$$\widehat{M}\mathbf{D} = \Lambda\mathbf{D}. \quad (7.36)$$

Будем искать собственные значения в виде разложений по параметру δ :

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\delta) &= \Lambda_i^{(0)} + \Lambda_i^{(1)}\delta + \Lambda_i^{(2)}\delta^2 + \dots, \\ \Gamma_i(\delta) &= \Gamma_i^{(0)} + \Gamma_i^{(1)}\delta + \Gamma_i^{(2)}\delta^2 + \dots \end{aligned} \quad (7.37)$$

Здесь и далее $i=1, 2$. Нулевые члены этих рядов, очевидно, являются решениями для невозмущенного резонатора ($\widehat{M}^{(0)}\mathbf{D}^{(0)} = \Lambda^{(0)}\mathbf{D}^{(0)}$).

Обратимся сначала к случаю, когда невозмущенный резонатор является анизотропным ($\Lambda_1^{(0)} \neq \Lambda_2^{(0)}$), а его собственные поляризации ортогональны:

$$\mathbf{D}_1^{(0)} \cdot \mathbf{D}_2^{(1)} = \delta_{12}.$$

Здесь δ_{12} — символ Кронекера *). Найдем поправки к собственным числам и собственным векторам, воспользовавшись обычным приемом метода возмущений. Заметим, что на практике для большинства задач достаточно найти поправки первого и второго порядка для Λ_i и поправку первого порядка для \mathbf{D}_i . Подставив разложения (7.34) и (7.37) в (7.36) и приравняв коэффициенты при первых и вторых степенях параметра δ , получим

$$\widehat{M}^{(1)} \mathbf{D}_i^{(0)} + \widehat{M}^{(0)} \mathbf{E}_i^{(1)} = \Lambda_i^{(1)} \mathbf{D}_i^{(0)} + \Lambda_i^{(0)} \mathbf{D}_i^{(1)}, \quad (7.38a)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M}^{(0)} \mathbf{D}_i^{(2)} + \widehat{M}^{(1)} \mathbf{D}_i^{(1)} + \widehat{M}^{(2)} \mathbf{D}_i^{(0)} = & \Lambda_i^{(0)} \mathbf{D}_i^{(2)} + \\ & + \Lambda_i^{(1)} \mathbf{D}_i^{(1)} + \Lambda_i^{(2)} \mathbf{D}_i^{(0)}. \end{aligned} \quad (7.38b)$$

Умножая (7.38a) скалярно на $\mathbf{D}_i^{(0)}$ и учитывая, что невозмущенная матрица нормальна, получаем

$$\Lambda_i^{(1)} = \widehat{M}^{(1)} \mathbf{D}_i^{(0)} \cdot \mathbf{D}_i^{(0)}. \quad (7.39)$$

Умножая (7.38a) скалярно на $\mathbf{D}_k^{(0)}$, где $k \neq i$, и используя условие нормировки, находим

$$\mathbf{E}_i^{(1)} = \left(\frac{\widehat{M}^{(1)} \mathbf{D}_i^{(0)} \cdot \mathbf{D}_k^{(0)}}{\Lambda_i^{(0)} - \Lambda_k^{(0)}} \right) \cdot \mathbf{D}_k^{(0)}. \quad (7.40)$$

Поправки второго приближения находятся аналогично из (7.38b), в частности:

$$\Lambda_i^{(2)} = \widehat{M}^{(2)} \mathbf{D}_i^{(0)} \cdot \mathbf{D}_i^{(0)} + \widehat{M}^{(1)} \mathbf{D}_i^{(1)} \cdot \mathbf{D}_i^{(0)}. \quad (7.41)$$

Частным, но практически важным случаем оказывается такой, когда собственные поляризации невозмущен-

*) Требование нормировки, очевидно, не ограничивает круг решаемых задач.

ного резонатора образуют линейную ортогональную пару. Если воспользоваться согласованным базисом, то

$$D_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } D_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть циклический оператор является функцией ряда малых параметров $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$. Несложный анализ общих выражений (7.39) — (7.41) показывает, что в этом случае с точностью до членов второго порядка

$$\Lambda_i(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m) = \Lambda_i^{(0)} + \sum_{l=1}^m \delta_l (m_{ii}^{(1)})_l + \\ + \sum_{l=1}^m \delta_l^2 \left[\frac{(m_{ii}^{(2)})_l}{2} + \frac{(m_{ik}^{(1)})_l (m_{ki}^{(1)})_l}{\Lambda_i^{(0)} - \Lambda_k^{(0)}} \right]^* \quad (7.42)$$

Для возмущенных собственных векторов получим в первом приближении

$$\Gamma_1 = \frac{\sum_1^m \delta_l (m_{21}^{(1)})_l}{\Lambda_1^{(0)} - \Lambda_2^{(0)}}, \quad \Gamma_2 = \frac{\Lambda_1^{(0)} - \Lambda_2^{(0)}}{\sum_1^m \delta_l (m_{12}^{(1)})_l} \quad (7.43)$$

Состояние поляризации резонатора при его возмущении может, вообще говоря, изменять азимут и приобретать эллиптичность. Исследуя формулы (7.2) и (7.3), находим, что изменение азимута можно сразу определить как

$$\Delta \alpha_i = \text{Re} \left[\frac{\sum_1^m \delta_l (m_{ki}^{(1)})_l}{\Lambda_i^{(0)} - \Lambda_k^{(0)}} \right], \quad (7.44)$$

*) Здесь $(m_{ik}^{(n)})_l$ — производная n -го порядка соответствующего элемента циклического оператора по параметру δ_l в точке $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_m = 0$.

$$\epsilon_i \approx \beta_i = \text{Im} \left[\frac{\sum_{l=1}^m \delta_l (m_{ki}^{(l)})_l}{\Lambda_i^{(0)} - \Lambda_k^{(0)}} \right]. \quad (7.45)$$

(Формулы (7.44) и (7.45) позволяют оценивать искажение собственных линейных поляризаций при различных возмущениях резонатора.)

Пример 3. В качестве примера использования изложенного аппарата воспользуемся уже рассмотренной ранее задачей о двух брестеровских пластинах в резонаторе, собственные оси которых развернуты на малый угол δ (пример 1). Мы составили для области A резонатора (рис. 7.2) следующий циклический оператор:

$$\widehat{M}_A = \begin{pmatrix} \cos^2 \delta + T^2 \sin^2 \delta & T(1 - T^2) \sin \delta \cos \delta \\ T(1 - T^2) \sin \delta \cos \delta & T^2(\sin^2 \delta + T^2 \cos^2 \delta) \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать угол δ как малый параметр возмущения. Тогда задача, соответствующая невозмущенному оператору

$$\widehat{M}_A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^4 \end{pmatrix},$$

имеет в качестве решений линейную ортогональную пару собственных поляризаций и собственные числа $\Lambda_1 = 1$, $\Lambda_2 = T^4$.

Использование формулы (7.42) сразу дает поправки первого и второго порядка для собственных значений

$$\Lambda_1^{(1)} = 0, \quad \Lambda_2^{(1)} = 0, \\ \Lambda_1^{(2)} = -\frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \quad \Lambda_2^{(2)} = T^4 \frac{1 - T^2}{1 + T^2}.$$

Далее, поскольку величина

$$\delta m_{ki}^{(1)} / (\Lambda_i^{(0)} - \Lambda_k^{(0)}) = \delta T / (1 + T^2)$$

чисто вещественная, то она определяет лишь поворот плоскости поляризации, в то время как эллиптичность остается нулевой. Все эти выводы соответствуют выводам, полученным выше другим методом.

Пример 4. Пусть в трех- или четырехзеркальном кольцевом резонаторе (рис. 7.4) с амплитудно-анизотропным элементом $A\mathcal{E}$ (брестеровские окна) расположен возмущенный оптический элемент $B\mathcal{E}$ (возмущение типа линейной фазовой пластинки с произвольным расположением собственных осей). Требуется определить состояние поляризации встречных волн в сечении A , непосредственно примыкающем к возмущенному элементу.

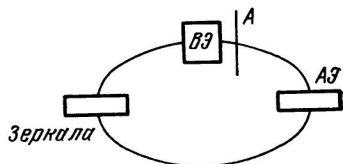


Рис. 7.4. К примеру 4

Координатный базис нашей задачи выберем так, чтобы поперечные оси лежали в плоскости и перпендикулярно плоскости рисунка. Тогда для амплитудного элемента, реализуемого брестеровскими гранями, имеем матрицу

$$\widehat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix},$$

где T — полный амплитудный коэффициент пропускания s -компонента. Очевидно, что $T = [4n^2(1+n^2)^{-2}]^m$, где n — показатель преломления материала, а m — число брестеровских окон. Совокупность всех зеркал можно описать матрицей

$$\widehat{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix},$$

где $k=3, 4$ — число зеркал резонатора. Для линейной фазовой пластинки с произвольно ориентированными осями получим

$$\begin{aligned} \widehat{M}_3 &= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + e^{i\psi} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\psi} - 1) \\ \sin \alpha \cos \alpha (e^{i\psi} - 1) & \sin^2 \alpha + e^{i\psi} \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь α — азимут «быстрой» оси пластинки, а ψ — малая величина избыточного фазового набег.

Перемножая приведенные матрицы в нужном порядке, нетрудно найти циклический оператор для правой и левой волн. Для правой волны получим

$$\vec{\widehat{M}} = \widehat{M}_3 \widehat{M}_2 \widehat{M}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & (-1)^k T m_{12} \\ m_{21} & (-1)^k T m_{22} \end{pmatrix},$$

а для левой волны — транспонированный матричный оператор

$$\overleftarrow{\widehat{M}} = \widehat{M}_1 \widehat{M}_2 \widehat{M}_3 = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ (-1)^k T m_{21} & (-1)^k T m_{22} \end{pmatrix}.$$

Нулевое решение соответствующее, $\psi=0$, очевидно:

$$\Lambda_1^{(0)} = 1; \quad \Lambda_2^{(0)} = (-1)^k T,$$

$$\mathbf{D}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку производная $m_{21}^{(1)} = m_{12}^{(1)}$ оказывается в нашей задаче чисто мнимой, состояние поляризации в рассматриваемом сечении будет в первом приближении эллиптическим с нулевым азимутом.

Используя (7.45), найдем эллиптичности для правой и левой волн

$$\overset{\rightarrow}{\epsilon}_A = \frac{\psi \sin \alpha \cos \alpha}{1 - (-1)^k T}, \quad \overset{\leftarrow}{\epsilon}_A = \frac{\psi \sin \alpha \cos \alpha}{1 - (-1)^k T} (-1)^k T.$$

Суммарная эллиптичность определяет фазочастотную невязанность встречных волн, если в сечении A располагается фарадеевский вращатель с малым углом поворота. Таким образом, чувствительность резонатора к внешнему магнитному полю пропорциональна величине

$$\epsilon_A = \overset{\rightarrow}{\epsilon}_A + \overset{\leftarrow}{\epsilon}_A = \frac{1 + (-1)^k T}{1 - (-1)^k T} \psi \sin \alpha \cos \alpha.$$

Полученное соотношение показывает, что частотная невязанность встречных волн, возникшая из-за наличия возмущения типа линейной фазовой пластинки и магнитного поля, зависит от азимута осей возмущения, числа зеркал резонатора и меры амплитудной анизотропии исходного резонатора. Невязанность максимальна при $\alpha=45^\circ$ и пропадает при $\alpha=0$ или $\alpha=90^\circ$. В трехзеркальном резонаторе указанная невязанность меньше, чем в соответствующих четырехзеркальном. Зависимость от величины T задается выражением $(1+T)/(1-T)$ для четырехзеркального резонатора и обратным соотношением для трехзеркального. Уменьшение амплитудной анизотропии резонатора ведет к возрастанию чувствительности четырехзеркального резонатора и, наоборот, к уменьшению чувствительности трехзеркального резонатора.

Рассмотрим теперь случай, когда невозмущенный резонатор изотропен ($\Lambda_1^{(0)} = \Lambda_2^{(0)}$). В этом случае возмущение резонатора снимает вырождение и определяет собственные поляризации. Для изотропного резонатора собственным вектором может быть произвольная линейная комбинация любых двух ортогональных векторов Джонса. Если $\Gamma_i^{(0)} = a_1 \mathbf{F}_1 + a_2 \mathbf{F}_2$, где \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 — произвольные ортогональные векторы невозмущенного оператора $\hat{M}^{(0)}$, то, например, умножая скалярно обе части (7.38а) на \mathbf{F}_1 или \mathbf{F}_2 , получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_1) a_1 + (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1) a_2 = \Lambda_i^{(1)} a_1, \\ (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) a_1 + (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_2) a_2 = \Lambda_i^{(1)} a_2. \end{cases} \quad (7.46)$$

Таким образом, поправки первого порядка к собственным числам $\Lambda_i^{(1)}$ оказываются, в свою очередь, собственными значениями некоторой матрицы

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_1) & (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1) \\ (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2) & (\widehat{M}^{(1)} \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_2) \end{pmatrix}. \quad (7.47)$$

Здесь, как и прежде, оператор возмущения $\widehat{M}^{(1)}$ определяется формулой (7.35), а круглые скобки обозначают скалярное умножение. Поправки первого порядка к собственным числам находятся как

$$\Lambda_i^{(1)} = 1/2 \left[\text{sp} \widehat{H} \pm \sqrt{(\text{sp} \widehat{H})^2 - 4 \det \widehat{H}} \right]. \quad (7.48)$$

Параметры a_1 и a_2 , определяющие каждый из собственных векторов возмущенного резонатора, находятся из уравнений (7.46) и условия нормировки.

Поскольку выбор ортогональной пары \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 для изотропного резонатора произволен, удобно взять $\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что при таком выборе $\widehat{H} = \widehat{M}^{(1)}$ и

$$\Lambda_i^{(1)} = 1/2 \left[\text{sp} \widehat{M}^{(1)} \pm \sqrt{(\text{sp} \widehat{M}^{(1)})^2 - 4 \det \widehat{M}^{(1)}} \right]. \quad (7.49)$$

Из уравнений (7.31) легко найти

$$\frac{a_2}{a_1} = \Gamma_i = \frac{\Lambda_i^{(1)} - m_{11}^{(1)}}{m_{12}^{(1)}}. \quad (7.50)$$

Формулы (7.49) и (7.50) позволяют оценить невырожденные собственные числа и найти собственные состояния поляризации возмущенного резонатора в том случае, когда соответствующий невозмущенный резонатор изотропен.

Глава 8

СВОЙСТВА РАЗЪЮСТИРОВАННЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Выше рассматривались идеально съюстированные резонаторы. На практике, однако, всегда возможна разъюстировка элементов, образующих резонатор. При инженерном подходе к изучению оптических резонаторов необходимо учитывать возможные изменения характеристик собственных типов колебаний в результате разъюстировок.

8.1. СМЕЩЕНИЯ ОСИ ДВУХЗЕРКАЛЬНОГО РЕЗОНАТОРА ПРИ РАЗЬЮСТИРОВКАХ

Для определения и характеристики степени разъюстировки введем понятие геометрооптической оси (или просто оси) резонатора как линии, вдоль которой распространяется луч, самосопрягающийся после каждого обхода резонатора [77, 78, 113, 114, 134]. Ось резонатора соответствует экстремальному оптическому пути при распространении луча между образующими зеркалами. Эта линия — прямая в двухзеркальном резонаторе, ломаная — в многозеркальном. В кольцевом резонаторе осевая линия образует замкнутый многоугольник. Нетрудно заметить, что такая линия существует и единственна почти для любой конфигурации резонатора, как устойчивого, так и неустойчивого. Исключением являются плоский и концентрический резонаторы.

В идеально съюстированном резонаторе ось проходит через оптические центры всех диафрагм. При разъюстировке либо ось резонатора смещается, либо сдвигаются диафрагмы; во всяком случае ось уже не проходит через все центры диафрагм. Чем дальше отклоняется ось от линии центров диафрагмы, тем больше степень разъюстировки резонатора и соответствующие искажения собственных типов колебаний. Знание закономерностей деформации осевой линии позволяет оптимизировать конструкцию резонатора, определить в первом приближении возмущенные характеристики резонатора и, наконец, подготовить рациональный координатный базис для волнового рассмотрения задачи.

Рассмотрим, как смещается ось произвольного двухзеркального резонатора при разъюстировке образующих

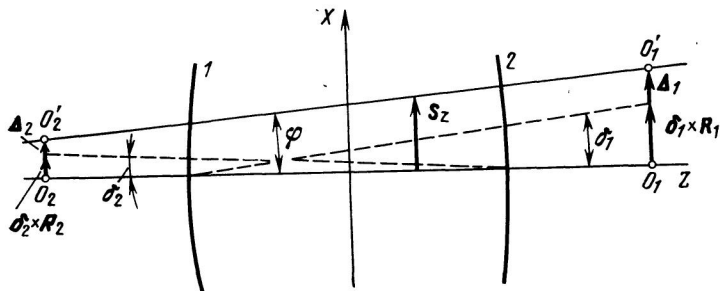


Рис. 8.1. Смещение оси двухзеркального отражателя при его разъюстировке

отражателей (рис. 8.1). Из возможных движений отражателей остановимся на линейном, смещении Δ_i поперек оси и развороте δ_i в меридиональной плоскости δ_i . Измененное положение зеркала характеризуем вектором, определяющим смещение его центра кривизны $S_{01} = \Delta_i + +R_i \times \delta_i$. В результате разъюстировки ось резонатора займет положение, характеризуемое вектором, определяющим смещение следа оси в произвольном поперечном сечении $z - S_z$.

Учитывая, что ось двухзеркального резонатора всегда проходит через центры кривизны зеркал, запишем

$$S_z = \sigma_1(z) S_{01} + \sigma_2(z) S_{02}, \quad (8.1a)$$

где

$$\sigma_1(z) = \frac{R_2 - L/2 + z}{R_1 + R_2 - L}; \quad (8.1б)$$

$$\sigma_2(z) = \frac{R_1 - L/2 - z}{R_1 + R_2 - L}. \quad (8.1в)$$

Здесь продольная координата z отсчитывается от середины резонатора в направлении от зеркала 1 к зеркалу 2 (рис. 8.1).

Выражения (8.1) определяют возмущенное положение оптической оси разъюстированных устойчивого и неустойчивого резонаторов. На практике интересуются угловыми уходами оси. Определим возмущенное положение оси двумя углами φ и ψ , которые образуют проекции возмущенной оси резонатора на плоскости XOZ и YOZ с невозмущенной осью Z . Тогда, очевидно,

$$\varphi = (S_{01}^{(x)} - S_{02}^{(x)}) / (R_1 + R_2 - L), \quad (8.2a)$$

$$\psi = (S_{01}^{(y)} - S_{02}^{(y)}) / (R_1 + R_2 - L). \quad (8.2б)$$

Для оценки возрастания дифракционных потерь вследствие разъюстировки существенно смещение следа оси на апертуре образующих зеркал. Это смещение задается векторами:

$$S_1 = \sigma_1(-L/2) S_{01} + \sigma_2(-L/2) S_{02} - \Delta_1, \quad (8.3)$$

$$S_2 = \sigma_1(+L/2) S_{01} + \sigma_2(+L/2) S_{02} - \Delta_2.$$

8.2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Изучение свойств разъюстированных резонаторов в рамках квазиоптического приближения возможно на базе рассмотрения интегральных уравнений, аналогичных приводимым в гл. 3 и 5*). Возникающие при этом дополнительные сложности можно проследить на примере простейшего двухзеркального линейного резонатора. Легко заметить, что в общем случае разъюстировки, когда поперечно смещены диафрагмы, произвольно смещены и развернуты образующие отражатели, симметрия задачи существенно нарушается. Это обстоятельство, естественно, сильно усложняет как аналитическое, так и численное решения.

В работах, посвященных исследованию разъюстированных резонаторов [81, 95], указанное затруднение устраняется тем, что в них рассматривается резонатор с прямоугольной симметрией сечения и учитываются только такие разъюстирующие перемещения, которые происходят в плоскости, содержащей одну из осей симметрии сечения (в этом случае векторные величины, характеризующие смещение оси, можно заменить скалярными). Кроме того, обычно рассматривают симметричные резонаторы. Для такой весьма упрощенной модели оказывается возможным численное решение задачи.

Воспользуемся координатным базисом съюстированного резонатора (ось Z на рис. 8.2). Тогда смещение диафрагмы повлечет асимметричное изменение пределов интегрирования. Смещение и разворот зеркал приведут к изменению ядра интегрального уравнения (появятся дополнительные фазовые множители). Обратимся к одномерному уравнению для разъюстированного полосового резонатора. Составим исходное интегральное уравнение по аналогии с материалом гл. 3. Поля на зеркалах резонатора связаны следующей парой «зацепляющихся» интегральных уравнений:

$$E_2(x_2) = e^{-ikL} \gamma_{21} \int_{-a_1 + \Delta_1}^{+a_1 + \Delta_1} K(x_1, x_2) E_1(x_1) dx_1, \quad (8.4a)$$

*) Возможны и другие методы рассмотрения разъюстированных резонаторов. В частности, плодотворным оказывается метод матриц-рассеяния [35] и теории возмущений [92, 94, 116].

$$E_1(x) = e^{-ikL} \gamma_{12} \int_{-a_2+\Delta_2}^{+a_2+\Delta_2} K(x_1, x_2) E_2(x_2) dx_2.$$

Ядро этих уравнений для упомянутой модели двумерно-го разъюстированного резонатора записывается следующим образом:

$$K(x_1, x_2) = \exp \left\{ (-ik/2L) (g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 - 2x_1 x_2) + \right. \\ \left. + (-ik) \left[\left(\frac{\Delta_1}{R_1} + \delta_1 \right) x_1 + \left(\frac{\Delta_2}{R_2} + \delta_2 \right) x_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\Delta_1^2}{2R_1} + \frac{\Delta_2^2}{2R_2} + \delta_1 \Delta_1 + \delta_2 \Delta_2 \right) \right] \right\}. \quad (8.46)$$

Использованные здесь обозначения пояснены на рис. 8.2.

Сравнивая систему (8.4) с аналогичной системой уравнений, составленной для съюстированного резонатора ($\Delta_{1,2}=0$, $\delta_{1,2}=0$), нетрудно заметить, что выбранная модель разъюстировки соответствует новым интегральным уравнениям, в которых изменены пределы интегрирования, введены постоянный и функциональный фазовые множители в ядре.

Заметим, что переход к новому координатному базису, в котором продольная ось совмещена с геометрической осью разъюстированного резонатора (ось Z' на рис. 8.2), рационализирует волновую задачу, сводя изменения в исходном уравнении лишь к изменению пределов интегрирования и появлению постоянного фазового множителя в ядре. В этом случае система «зацепляющихся» интегральных уравнений записывается следующим образом:

$$E_2(x_2) = \gamma_{21} e^{-ikL} \int_{-a_1-(S_1-\Delta_1)}^{+a_1-(S_1-\Delta_1)} K'(x_1, x_2) E_1(x_1) dx_1, \quad (8.5a)$$

$$E_1(x_1) = \gamma_{12} e^{-ikL} \int_{-a_2-(S_2-\Delta_2)}^{+a_2-(S_2-\Delta_2)} K'(x_1, x_2) E_2(x_2) dx_2,$$

$$K'(x_1, x_2) = \exp \left\{ (-ik/2L) (g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 - 2x_1 x_2) - \right. \\ \left. - ik \left[\frac{(S_1 - \Delta_1)^2}{2R_1} + \frac{(S_2 - \Delta_2)^2}{2R_2} \right] \right\}. \quad (8.56)$$

Здесь также использованы обозначения рис. 8.2.

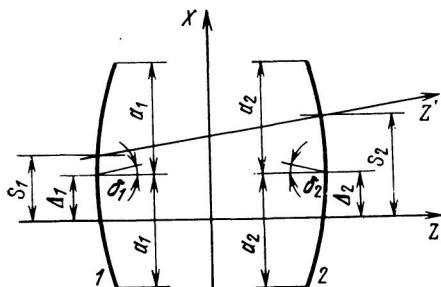


Рис. 8.2. К составлению исходных уравнений (8.4) и (8.5)

Постоянный фазовый множитель в выражениях (8.5) можно отнести к собственному значению уравнения. Тогда наличие разъюстировки не изменит ядро интегральных уравнений. Следовательно, при больших апертурах резонатора действие разъюстировки сведется к смещению поля вслед за осью резонатора.

8.3. ИЗМЕНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК СОБСТВЕННЫХ ВОЛН. ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА

Рассмотрим, как изменяются характеристики симметричного резонатора при его разъюстировке. Как показывают численные решения уравнений (8.4), следствия разъюстировки определяются относительным смещением оси резонатора из центра апертурной диафрагмы $(S-\Delta)/a=\varepsilon$.

Распределение поля моды радиусом w при малой разъюстировке $(S-\Delta) \ll (a-w)$ и большом числе Френеля $N \gg 1$ деформируется таким образом, что, сохраняя относительный характер распределения, поле данной моды смещается вслед за смещением геометрической оси резонатора (кривая 2 на рис. 8.3). При больших разъюстировках наряду со смещением оси появляется асимметрия в распределении поля. Смещение и асимметрия растут с увеличением разъюстировки. Качественный характер искажений поля основной моды устойчивого резонатора приведен на рис. 8.3: Практически важен факт следования оси пучка за осью резонатора. Экспериментальная проверка этого явления проведена [79] для газового лазера при одновременной

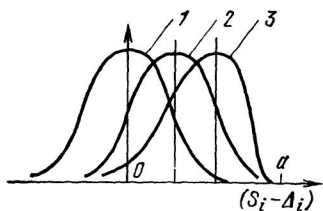


Рис. 8.3. Деформация распределения поля основной моды при разъюстировке резонатора:

- 1) $(S_i - \Delta_i) = 0$;
- 2) $(S_i - \Delta_i) \ll (a_i - w_i)$;
- 3) $(S_i - \Delta_i) \approx (a_i - w_i)$

угловой разъюстировке обоих зеркал полусферического резонатора. Результаты расчета и эксперимента позволяют считать, что при малой разъюстировке, пока ось резонатора далека от кромки диафрагмы, деформация распределения поля сводится к его смещению вслед за осью резонатора.

Дальнейшая разъюстировка ведет к асимметрии распределения поля собственной волны (кривая 3 на рис. 8.3). Оценку асимметричного распределения

можно проводить, разлагая его в ряд по модам съюстированного резонатора и пользуясь методами теории возмущений [92, 115—117].

Энергетические потери. Разъюстировка резонатора ведет к изменению энергетических потерь. Характер этого изменения существенно различен для устойчивых и неустойчивых конфигураций. Разъюстировка устойчивого резонатора ведет к монотонному возрастанию дифракционных потерь с увеличением смещения оси резонатора (ϵ). Общий характер изменения зависимости коэффициента потерь от параметра Френеля показан на рис. 8.4, а [81]. Начиная с некоторой величины параметра Френеля (тем меньшей, чем больше ϵ), дополнительные потери вследствие разъюстировки становятся заметными.

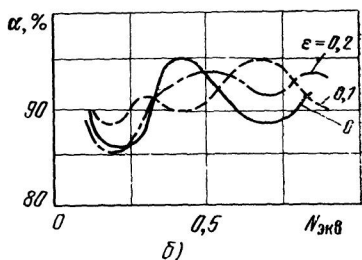
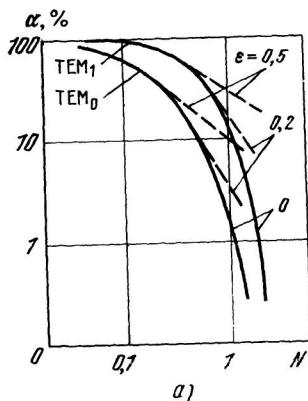


Рис. 8.4. Изменение дифракционных потерь при разъюстировке устойчивого (а) и неустойчивого (б) резонаторов

С ростом величины ϵ наблюдается выравнивание дифракционных потерь различных волн. Это вырождение собственных волн особенно заметно для устойчивых конфигураций, близких к плоской.

Разъюстировка неустойчивого резонатора ведет к немонотонному изменению потерь как функции относительного смещения оси. На рис. 8.4,б приведены рассчитанные зависимости $\alpha(N_{\text{экв}})$ при различных значениях ϵ для основной моды [81].

Знание смещения оси резонатора при его разъюстировке позволяет оценить величину возросших дифракционных потерь. Мы видели выше, что при малом смещении оси ($S - \Delta \ll a$) данный разъюстированный резонатор эквивалентен некоторому съюстированному с асимметричной апертурой (рис. 8.2). Такой резонатор можно характеризовать двумя параметрами Френеля

$$N' = \frac{[a - (S - \Delta)]^2}{\lambda L} = N \left(1 - \frac{S - \Delta}{a}\right)^2, \quad (8.6a)$$

$$N'' = \frac{[a + (S - \Delta)]^2}{\lambda L} = N \left(1 + \frac{S - \Delta}{a}\right)^2.$$

Здесь a — размер апертуры; S — смещение следа оси в сечении апертуры; Δ — смещение апертуры. Можно показать [81], что коэффициент дифракционных потерь разъюстированного полосового резонатора определяется следующим приближенным выражением:

$$\alpha(N, g, S, \Delta) = 1/2 [\alpha(N', g) + \alpha(N'', g)], \quad (8.6b)$$

где g — параметр конфигурации.

Это выражение дает точность лучше 10%, если выполняется условие

$$\frac{S}{a} \leq 1 - \left(\frac{m+1}{4NV\sqrt{1-g^2}}\right)^{1/2}, \quad (8.6b)$$

где m — поперечный индекс моды.

Другой упрощенный метод расчета дифракционных потерь применим для более широкого диапазона разъюстировок. Метод основан на том, что дифракционные потери устойчивого резонатора для данного типа колебаний независимо от величины разъюстировки, числа Френеля и конфигурации резонатора приближенно определяются параметром [94]

$$V = \frac{w}{a - (S - \Delta)}, \quad (8.7)$$

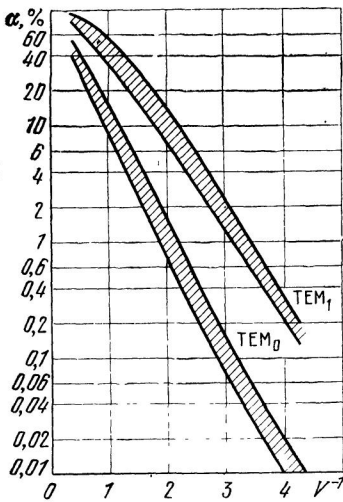


Рис. 8.5. Зависимость $\alpha(V)$

где ω — размер пятна основной моды, рассчитанный в гауссовом приближении в плоскости диафрагмы. Как показывают численные оценки, использование параметра V возможно при не слишком малом числе Френеля ($N > 1$) и $g < 0,95$. На рис. 8.5 построены зоны, в которых располагаются зависимости $\alpha(V)$ для различных мод симметричного резонатора. Видно, что зависимости $\alpha(V)$ для одной волны незначительно различаются, особенно в практически важной области $V > 0,5$, где потери велики.

В инженерной практике для оценки критической

разъюстировки иногда используют так называемое условие Синклера [80]: генерация срывается, если ось резонатора подходит к кромке диафрагмы на величину, меньшую размера пятна основной моды. Этот способ оценки критической разъюстировки (при котором, кстати говоря, $V=1$) в значительной степени произволен, так как не учитывает усиление в активной среде.

Приближение оси резонатора к кромке диафрагмы сопровождается резким возрастанием дифракционных эффектов. При $[a - (S - \Delta)] < \omega$ использованные выше приближения неприменимы. Когда ось резонатора касается ограничивающей кромки или даже выходит за апертуру резонатора, обратная связь и формирование собственных волн осуществляются за счет дифракционной или рассеянной составляющей отражения. Показательной в этом смысле является угловая разъюстировка зеркал плоскопараллельного резонатора. Численным расчетам такого случая посвящен

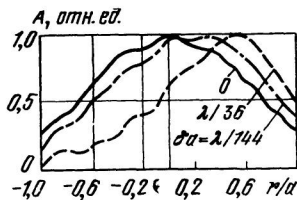


Рис. 8.6. Распределение амплитуды поля основной моды на зеркалах разъюстированного плоского резонатора

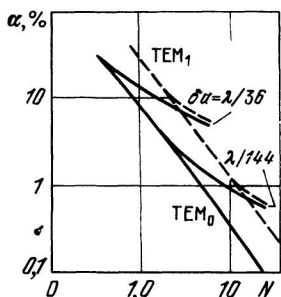


Рис. 8.7. Дифракционные потери разъюстированного плоского резонатора

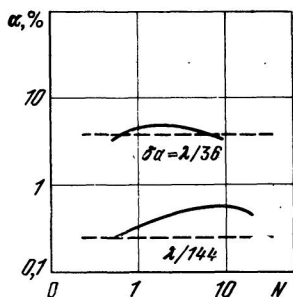


Рис. 8.8. Сравнение численного расчета дифракционных потерь (— [22]) с методом матриц рассеяния (--- [35]).

ряд работ [22, 35, 81, 116]; причем предполагалось, что оба полосовых зеркала наклонены на одинаковый малый угол δ . Несмотря на то, что понятие оси резонатора здесь теряет смысл, собственные типы колебаний существуют.

Поперечное распределение поля при разъюстировке асимметрично и смещено в сторону тех краев зеркал, которые располагаются на большем расстоянии друг от друга (рис. 8.6). Смещение и асимметрия растут с увеличением угловой разъюстировки.

Дополнительные потери (рис. 8.7) начинают сказываться при разъюстировках $\delta \geq (ka)^{-1}$. С увеличением параметра Френеля и угла разъюстировки дополнительные потери возрастают. Результаты численного расчета сравнивались с приближенной формулой, полученной с помощью матрицы рассеяния [35]:

$$\alpha_{\text{доп}} = \frac{4}{3} \pi^2 \left(\frac{2a\delta}{\lambda} \right)^2. \quad (8.8)$$

Оба метода расчета дают одинаковые потери для основной моды при $N=0,5$. Для $N>0,5$ численный метод дает несколько большие значения дополнительных потерь (рис. 8.8). Выражение (8.8) может использоваться как асимптотическая оценка дополнительных потерь для основной моды в случае, когда реализуется чисто дифракционная обратная связь.

8.4. МЕТОД «ОСЕВОГО КОНТУРА» ДЛЯ МНОГОЗЕРКАЛЬНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Выше мы видели, что многие аспекты теории разъюстированных резонаторов могут быть выяснены в первом приближении в рамках геометрикооптических представлений с помощью понятия оси резонатора. В связи с этим представляет интерес рассмотреть метод расчета положения оси произвольного многозеркального разъюстированного резонатора [77, 78, 113, 114]. Назовем осевым контуром данного резонатора замкнутую линию, вдоль которой распространяется луч, самоспрягающийся при каждом обходе резонатора. Понятие осевого контура приложимо как к линейным, так и к кольцевым резонаторам (рис. 8.9). Только в линейном резонаторе осевой контур охватывает нулевую площадь, а в кольцевом — конечную. В резонаторе, образованном более чем тремя отражателями, осевой контур может быть не плоским, хотя на практике более распространены резонаторы с плоским контуром. Почти для всего множества возможных конфигураций резонаторов осевой контур существует и является единственным. Исключение составляют отдельные конфигурации (например, резонатор, образованный плоскими зеркалами), не имеющие большого практического значения.

В идеально съюстированном резонаторе осевой контур проходит через оптические центры всех элементов, образующих данный резонатор. Назовем такой осевой контур расчетным. При разъюстировке резонатора осевым оказывается иной искаженный замкнутый контур,

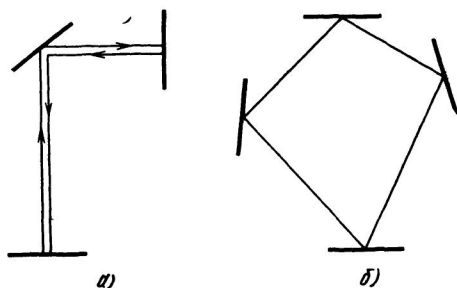


Рис. 8.9. К введению понятия «осевой контур» для линейного (а) и кольцевого (б) резонаторов

в общем случае не проходящий через оптические центры образующих элементов.

Зададим произвольный луч, распространяющийся в резонаторе следующим образом (рис. 8.10). Примем некоторое направление обхода расчетного осевого контура за положительное. Через произвольную точку i расчетного контура проведем поперечное сечение и «привяжем» к этому сечению правую тройку декартовых координат так, чтобы ось Z_i была ориентирована вдоль положительного направления контура. Оси X_i, Y_i лежат в поперечном сечении; причем обычно ось X_i располагается в плоскости расчетного контура (если он плоский), а ось Y_i — ортогонально.

Тогда произвольный луч в сечении i однозначно определяется четырехмерным лучевым вектором $\mathbf{A}_i(x_i, \varphi_i, y_i, \psi_i)$; x_i и y_i — проекция следа луча в рассматриваемом поперечном сечении $X_i Y_i$, а φ_i и ψ_i — проекция единичного вектора направления луча на оси X_i и Y_i соответственно. Поскольку здесь рассматриваются параксиальные лучи, то φ_i и ψ_i оказываются просто углами, которые данный луч образует с меридиональными плоскостями $Y_i Z_i$ и $X_i Z_i$ соответственно.

Зная лучевой вектор в сечении i , можно определить такой же вектор в другом сечении j путем линейного преобразования

$$\mathbf{A}_j = \widehat{M}_{ij} \mathbf{A}_i, \quad (8.9)$$

где \widehat{M}_{ij} — лучевая матрица 4×4 , определяемая геометрико-оптическими свойствами промежутка $i - j$. Заметим, что при плоском осевом контуре операцию с четырехмерным лучевым вектором можно заменить двумя независимыми преобразованиями двумерных векторов $\mathbf{A}_{ix}(x_i, \varphi_i)$ и $\mathbf{A}_{iy}(y_i, \psi_i)$. В этом случае используются лучевые матрицы 2×2 , как это сделано в гл. 2.

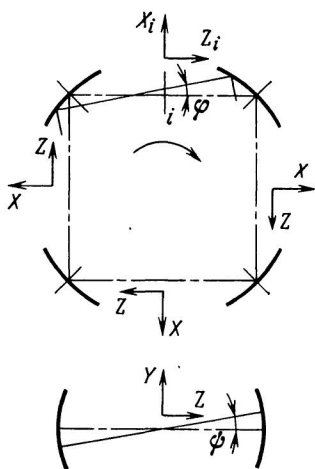


Рис. 8.10. К выбору координат луча в методе осевого контура

Из (8.9) следует, что осевой луч преобразуется в осевой же при любом операторе \widehat{M}_{ij} , что естественно, если промежуток $i-j$ съюстирован. Если до сечения j располагается разъюстированный элемент, то в линейном приближении можно записать

$$A_j = \widehat{M}_{ij} A_i + B_j, \quad (8.10)$$

где $B_j(\Delta x_j, \Delta \varphi_j, \Delta y_j, \Delta \psi_j)$ — вектор ошибки. Вектор ошибки имеет простой физический смысл — это лучевой вектор на выходе из сечения j при условии, что входной луч является осевым. Нетрудно видеть, что преобразование вектора B_j также описывается с помощью аппарата лучевых матриц. Таким образом, ошибку системы в целом B_k можно найти, зная ошибки отдельных ее частей:

$$B_k = \sum_i \widehat{M}_{jk} B_j. \quad (8.11)$$

Вектор ошибки B_j в сечении j можно определить экспериментально, исходя из его физического смысла, или теоретически через m -мерный вектор смещений D_j . Пусть рассматриваемый оптический элемент резонатора имеет m степеней свободы для разъюстирующих подвижек. В их число могут входить не только пространственные смещения, но и изменение показателя преломления и т. п. Все возможные разъюстирующие возмущения образуют вектор D_j . Закон преобразования D_j в B_j удобно вводить в виде матрицы \widehat{N}_j размером $m \times 4$:

$$B_j = \widehat{N}_j D_j. \quad (8.12)$$

В качестве примера рассмотрим формирование вектора ошибки при наклонном падении луча на сферическое зеркало (рис. 8.11). Лучевой вектор и вектор ошибки определим в системе координат XYZ . Ось Z направлена по ходу луча, ось X располагается в плоскости падения и направлена наружу контура, а ось Y ей перпендикулярна. Зададим положение зеркала в указанной на рисунке декартовой системе ξ, η, ζ . Пусть угол падения осевого луча ϑ . Если радиус кривизны отражающей поверхности R , то экстремальные значения фокусных расстояний таковы: $f_x = 1/2 R \cos \vartheta$, $f_y = 1/2 R \sec \vartheta$. Поскольку зеркало имеет шесть степеней свободы, то

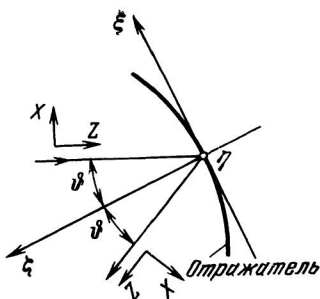


Рис. 8.11. К введению системы координат ξ, η, ζ для определения смещений и поворотов отражателя

вектор смещений \mathbf{D} оказывается в данном случае шести-мерным. Обозначая Δ линейное смещение зеркала вдоль какой-либо оси, а δ — поворот зеркала вокруг оси с соответствующим индексом, находим следующий закон преобразования $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta \varphi \\ \Delta y \\ \Delta \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \sin \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{1}{f_x}\right) \cos \vartheta & 0 & -\left(\frac{1}{f_x}\right) \sin \vartheta & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f_y} & 0 & 2 \cos \vartheta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \xi \\ \Delta \eta \\ \Delta \zeta \\ \delta_\xi \\ \delta_\eta \\ \delta_\zeta \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Заметим, что поворот зеркала вокруг оси ζ не дает ошибок и ни одно смещение не вызывает ошибку по оси Y .

Зная векторы ошибок для всех разъюстированных элементов резонатора, можно найти возмущение осевого контура в произвольном поперечном сечении i . В самом

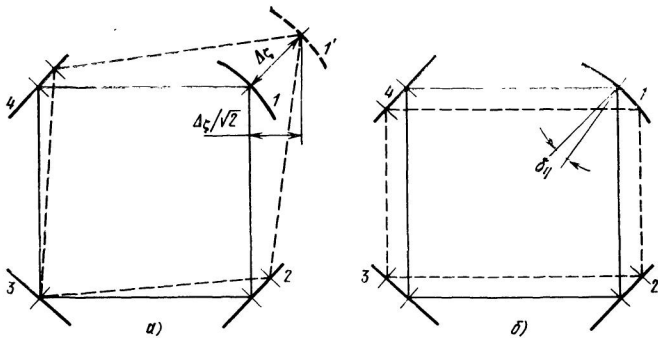


Рис. 8.12. Примеры деформации осевого контура кольцевого резонатора:

a — смещение сферического зеркала по оси, *б* — разворот сферического зеркала вокруг оси

деле, учитывая самосопряжение осевого луча, запишем следующее уравнение:

$$\mathbf{A}_i = \widehat{M}_{ii} \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i. \quad (8.14)$$

Здесь \widehat{M}_{ii} — лучевая матрица, соответствующая полному однократному обходу по контуру; \mathbf{B}_i — вектор ошибки всей системы, приведенный к сечению i , т. е.

$$\mathbf{B}_i = \sum_j \widehat{M}_{ji} \mathbf{B}_j. \quad (8.15)$$

Решение уравнения (8.14) есть

$$\mathbf{A}_i = (\widehat{I} - \widehat{M}_{ii})^{-1} \mathbf{B}_i, \quad (8.16)$$

где \widehat{I} — единичная матрица, определяющая искаженный контур в рассматриваемом сечении i . Для определения возмущения осевого контура в другом сечении можно воспользоваться соотношением

$$\mathbf{A}_j = \widehat{M}_{ij} \mathbf{A}_i + \sum_{k=i}^{k=j} \widehat{M}_{kj} \mathbf{B}_k. \quad (8.17)$$

Решение (8.14) существует, если $\det(\widehat{I} - \widehat{M}) \neq 0$. Если $\det(\widehat{I} - \widehat{M})$ мал, то резонатор оказывается очень чувствительным к разбустировке и линейное приближение неприменимо.

Для иллюстрации изложенного метода расчета возмущенного осевого контура рассмотрим простейший пример (рис. 8.12). Пусть кольцевой резонатор, расчетный осевой контур которого образует квадрат ($\theta=45^\circ$) со стороной l , составлен из одного сферического (радиус R_1) и трех плоских зеркал. Полагаем, что резонатор не содержит иных оптических элементов, кроме зеркал. Допустим далее, что в рассматриваемом резонаторе разъюстируется только одно сферическое зеркало (индекс 1), причем все разъюстировки происходят в плоскости осевого контура. Тогда можно рассматривать плоскую задачу и пользоваться двумерными лучевыми векторами и лучевыми матрицами 2×2 . Используем системы координат, введенные на рис. 8.10, 8.11. Будем рассчитывать возмущение осевого контура в сечении, расположенном непосредственно за сферическим зеркалом. В этом случае

$$\widehat{M}_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4l \\ -1/f_x & 1 - 4l/f_x \end{pmatrix},$$

$$\widehat{I} - \widehat{M}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -4l \\ 1/f_x & 4l/f_x \end{pmatrix},$$

$$\det(\widehat{I} - \widehat{M}_{ii}) = 4l/f_x \neq 0,$$

$$(\widehat{I} - \widehat{M}_{ii})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & f_x \\ -1/4l & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала возмущение осевого контура при смещении зеркала по своей нормали (Δ_τ). Тогда из геометрии задачи или из выражения (8.13) легко найти вектор ошибки

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \Delta_\tau \sqrt{2} \\ -\Delta_\tau/f_x \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

А для лучевого вектора возмущенного контура получим

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & f_x \\ 1/4l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_\tau \sqrt{2} \\ -\Delta_\tau/f_x \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_\tau \sqrt{2} \\ -\Delta_\tau \sqrt{2}/4l \end{pmatrix}.$$

Рассматриваемый пример деформации осевого контура иллюстрируется рис. 8.12, *a*. Наибольшее линейное смещение происходит на сферическом зеркале ($\Delta_\tau/\sqrt{2}$).

На плоском зеркале, противоположном сферическому, контур не деформируется. Наклон оси одинаков по величине $(\Delta_r \sqrt{2}/4l)$ во всех плечах резонатора.

Рассмотрим возмущение осевого контура при развороте δ_η сферического зеркала вокруг оси η , ортогональной плоскости контура. В этом случае из геометрии задачи или из выражения (8.13) следует

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta \varphi_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\delta_\eta \end{pmatrix}.$$

Лучевой вектор возмущенного осевого контура получим в виде

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & f_x \\ -1/4l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\delta_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\delta_\eta f_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Этот случай деформации осевого контура показан на рис. 8.12,б. Угловые развороты оси здесь отсутствуют, а линейные смещения во всех плечах резонатора равны по величине $(2\delta_\eta f_x)$, но противоположны по знаку в соседних плечах. Заметим, что в этом случае деформация осевого контура пропорциональна радиусу кривизны сферического зеркала.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТОД ЛУЧЕВЫХ МАТРИЦ

Метод лучевых матриц, или матриц распространения, с успехом используется в прикладной геометрической оптике. Привлечение матричного исчисления позволяет более компактно и в общем виде решать задачи расчета сложных оптических систем. Наиболее общее изложение метода содержится в книге Герцберга [9]. В технику оптических резонаторов метод лучевых матриц введен, по-видимому, Бертолотти [15] и развит в работах Когельника [18—20]. Доказано [11], что этот метод в рамках гауссовской геометрической оптики не противоречит более строгому рассмотрению, основанному на использовании принципа Гюйгенса. Современное изложение метода лучевых матриц содержится в книге Джеррарда и Берча [104].

Любая оптическая система преобразует луч пространства предметов в соответственный луч пространства изображений. Рассмотрим закономерности преобразования параксиального луча идеальной оптической системой. Пусть наша система задана положением своей оси Z главных плоскостей H_1 и H_2 и фокусов F_1 и F_2 (рис. П.А.1). Координаты исходного и преобразованного луча зададим следующим образом. Укажем две произвольные плоскости L_1 и L_2 , перпендикулярные оси Z ; одну — в пространстве предметов, другую — в пространстве изображений. Эти плоскости (назовем их входной и выходной), вообще говоря, не являются соответственными. Пусть расстояние от входной плоскости до первой главной плоскости H_1 будет равно z_{L1} , а от выходной плоскости до второй главной плоскости H_2

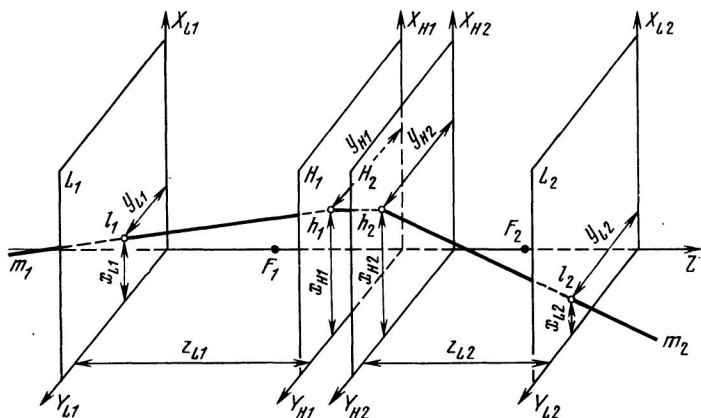


Рис. П.А.1. Произвольная оптическая система

скости H_2 равно z_{L2} . Произвольный луч окажется определенным в каждом из пространств однозначно, если задать декартовы координаты x и y точки его пересечения с входной или выходной плоскостью и углы φ и ψ , которые составляют его проекции на координатные меридиональные плоскости XZ и YZ с осью оптической системы.

Итак, для данной оптической системы при оговоренном положении плоскостей L оба луча (в первом и втором пространствах) однозначно определены, если задана четверка координат x_{L1} , y_{L1} , φ_1 , ψ_1 для исходного луча и x_{L2} , y_{L2} , φ_2 , ψ_2 для преобразованного луча. Оптическая система осуществляет преобразование одного координатного столбца в другой:

$$\begin{pmatrix} x_{L1} \\ y_{L1} \\ \varphi_1 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{L2} \\ y_{L2} \\ \varphi_2 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.1})$$

В рамках гауссовой оптики, если ось оптической системы располагается в одной плоскости, можно рассматривать преобразование меридиональных проекций луча независимо, операция (П.А.1) распадается на две независимых:

$$\begin{pmatrix} x_{L1} \\ \varphi_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{L2} \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{L1} \\ \psi_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_{L2} \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.2})$$

Очевидно, что для установления общих закономерностей достаточно рассмотреть одно из этих преобразований.

Обратимся к меридиональной плоскости XZ (рис. П.А.2). Пусть x_{L1} и φ_1 — координаты проекции исходного луча. Координаты точки l_2^* , которая является сопряженной с точкой l_1 , нетрудно найти, используя геометрические построения рис. П.А.2:

$$x_2^* = \frac{-x_{L1}f_1}{z_{H1} - f_1}, \quad z_2^* = \frac{z_{H1}f_2}{z_{H1} - f_1}, \quad (\text{П.А.3})$$

где f_1 и f_2 — соответственно переднее и заднее фокусные расстояния рассматриваемой оптической системы. Координата точки пересечения луча с главными плоскостями также известна:

$$x_{H1} = x_{H2} = x_{L1} + \varphi_1 z_{H1}. \quad (\text{П.А.4})$$

Используя соотношения (П.А.3), нетрудно на основании рассмотрения рис. П.А.2 получить координаты преобразованного луча

$$\varphi_2 = \frac{x_{H2} - x_2^*}{z_2^*} = \left(-\frac{1}{f_2}\right) x_{L1} + \left(\frac{f_1}{f_2} - \frac{z_{H1}}{f_2}\right) \varphi_1, \quad (\text{П.А.5})$$

$$\begin{aligned} x_{L2} = x_{H2} + \varphi_2 z_{H2} = & \left(1 - \frac{z_{H2}}{f_2}\right) x_{L1} + \\ & + \left(z_{H1} + z_{H2} \frac{f_1}{f_2} - \frac{z_{H1} z_{H2}}{f_2}\right) \varphi_1. \end{aligned}$$

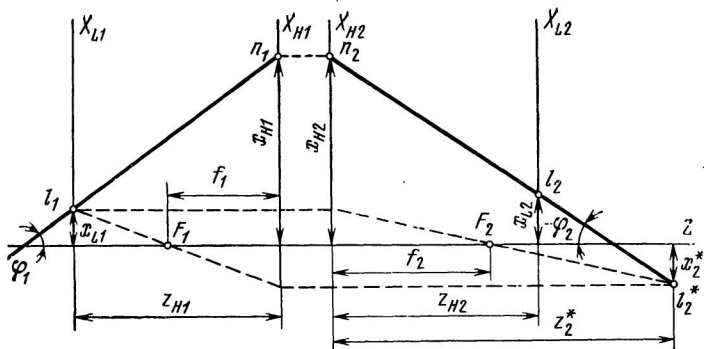


Рис. П.А.2. Меридиональное сечение произвольной оптической системы

Видно, что преобразование координат параксиального луча в приближении гауссовой оптики оказывается линейным:

$$x_{L2} = Ax_{L1} + B\varphi_1, \quad \varphi_2 = Cx_{L1} + D\varphi_1. \quad (\text{П.А.6})$$

Коэффициенты преобразования зависят только от параметров оптической системы и положения рассматриваемых плоскостей:

$$A = 1 - z_{H2}/f_2, \quad B = z_{H1} + (z_{H2}f_1/f_2) - (z_{H1}z_{H2}/f_2), \\ C = -1/f_2, \quad D = (f_1/f_2) - (z_{H1}/f_2). \quad (\text{П.А.7})$$

Эти коэффициенты можно рассматривать как некую матрицу, произведение которой на столбец координат исходного луча дает столбец координат преобразованного луча:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.8})$$

Здесь и далее вместо x_{L1} , x_{L2} линейные координаты луча обозначаются x_1 , x_2 .

Такая форма записи и расчета координат луча оказывается очень удобной для анализа свойств оптических систем вообще и оптических резонаторов в частности. Матрицу, составленную из коэффициентов линейного преобразования координат, называют *лучевой матрицей* (\hat{M}).

Нетрудно заметить, что определитель лучевой матрицы не зависит от свойств оптической системы, а определяется соотношением оптической плотности первого и второго пространств. В самом деле, вычислив определитель лучевой матрицы, получим

$$\det \hat{M} = AD - BC = f_1/f_2. \quad (\text{П.А.9})$$

Отношение фокусных расстояний системы, как следует из теоремы Лагранжа — Гельмгольца [9], равно отношению показателей преломления крайних сред системы, т. е.

$$f_1/f_2 = n_1/n_2, \quad (\text{П.А.10})$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления среды пространства предметов и пространства изображений соответственно. Таким образом, в общем случае имеет место соотношение

$$\det \widehat{M} = AD - BC = n_1/n_2. \quad (\text{П.А.11})$$

В частном, но распространенном случае, когда обе крайние среды оптически одинаковы (например, воздух),

$$\det \widehat{M} = AD - BC = 1. \quad (\text{П.А.12})$$

Используя соотношения (П.А.7) и (П.А.12), выразим фокусное расстояние и положение главных плоскостей оптической системы через элементы A , B , C и D лучевой матрицы:

$$f_1 = f_2 = -1/C, \quad z_{H1} = (D-1)/C, \quad z_{H2} = (A-1)/C. \quad (\text{П.А.13})$$

Мы рассмотрели преобразование одной проекции луча. Аналогичные соотношения могут быть получены и для другой проекции. В астигматичных системах лучевые матрицы для разных проекций одинаковы: $\widehat{M}_x = \widehat{M}_y$. Астигматичные оптические системы могут характеризоваться разными фокусными расстояниями в различных меридиональных сечениях. Для таких систем $\widehat{M}_x \neq \widehat{M}_y$. Однако соотношение (П.А.11), очевидно, не зависит от свойств самой системы и поэтому выполняется для любого меридионального сечения.

При операциях с лучевыми матрицами нужно уметь вычислять их для произвольной идеальной оптической системы при заданном расположении входной и выходной плоскостей. Если рассматриваемая оптическая система задана положением своих главных плоскостей и фокальными расстояниями, то система определяющих соотношений (П.А.7) может быть использована для вычисления элементов лучевой матрицы.

В общем случае, когда указанные параметры оптической системы неизвестны, можно воспользоваться так называемым «методом двух пробных лучей». Суть метода заключается в том, что выбираются два произвольных луча, проходящих через рассматриваемую оптическую систему. Пусть координаты следов выбранных лучей на входной плоскости системы будут x'_1 , φ'_1 и x''_1 , φ''_1 (рис. П.А.3). Проследив ход лучей в системе, можно любым известным способом

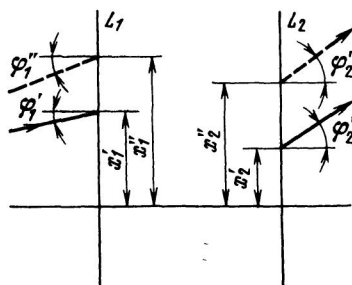


Рис. П.А.3. К методу двух пробных лучей

вычислить координаты, соответствующие выходной плоскости: x'_2 , φ'_2 и x''_2 , φ''_2 . Знание координат лучей позволяет составить систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x'_2 &= Ax'_1 + B\varphi'_1, \\ \varphi'_2 &= Cx'_1 + B\varphi'_1, \\ x''_2 &= Ax''_1 + B\varphi''_1, \\ \varphi''_2 &= Cx''_1 + D\varphi''_1. \end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему относительно элементов лучевой матрицы, получим

$$A = \frac{x'_2\varphi''_1 - x''_2\varphi'_1}{x'_1\varphi''_1 - x''_1\varphi'_1}, \quad B = \frac{x'_1x'_2 - x'_2x''_1}{x'_1\varphi''_1 - x''_1\varphi'_1}, \quad (\text{П.А.14})$$

$$C = \frac{\varphi'_2\varphi''_1 - \varphi''_1\varphi'_2}{x'_1\varphi''_1 - x''_1\varphi'_1}, \quad D = \frac{x'_1\varphi''_2 - x''_1\varphi'_2}{x'_1\varphi''_1 - x''_1\varphi'_1}.$$

Выбрав разумно пробные лучи, можно существенно упростить задачу. В самом деле, если, скажем, выбрать первый луч так, чтобы он пересекал входную плоскость параллельно оптической оси, а второй — так, чтобы он входил в систему в точке пересечения входной плоскости с осью, то, положив $\varphi'_1 = 0$ и $x''_1 = 0$, получим

$$\begin{aligned} A &= x'_2/x'_1, \quad B = x''_2/\varphi''_1, \\ C &= \varphi'_2/x'_1, \quad D = \varphi''_2/\varphi''_1. \end{aligned} \quad (\text{П.А.15})$$

Пользуясь этим методом, нетрудно вычислить лучевые матрицы для простейших оптических элементов. Оптически однородной среде толщиной d при расположении входной и выходной плоскостей внутри среды соответствует матрица

$$\widehat{m}_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.16})$$

Для бесконечно тонкой линзы получим

$$\widehat{m}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.А.17})$$

где f — заднее фокусное расстояние линзы.

Преломление парааксиального пучка нецентрированной сферической поверхностью раздела двух сред с различными показателями преломления не может быть описано с помощью одной матрицы (астигматизм наклонных пучков). Можно выделить два главных сечения пучка: меридиональное, содержащее ось пучка и нормаль к преломляющей поверхности в точке пересечения осью, и сагиттальное, содержащее ось пучка и перпендикулярное меридиональному сечению (рис. П.А.4). Преломление в каждой плоскости соответ-

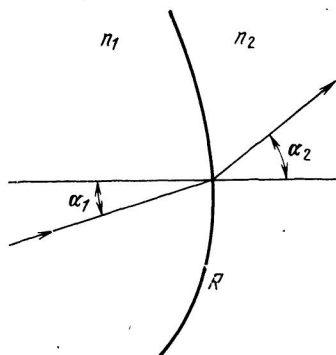


Рис. П.А.4. Преломление на сферической поверхности

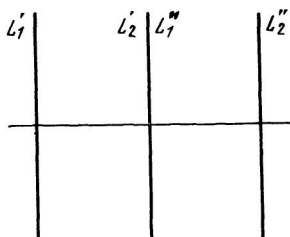


Рис. П.А.5. Последовательность двух оптических систем

вует своей лучевой матрице. Для меридионального сечения нетрудно найти следующие элементы матрицы:

$$A = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}, \quad B = 0,$$

$$C = \frac{1 - \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2}}{R \cos \alpha_1}, \quad D = \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2}. \quad (\text{П.А.18})$$

Здесь n_i и α_i — показатель преломления и угол между нормалью к поверхности и осью пучка для i -й среды; R — радиус кривизны преломляющей грани, причем положительный знак соответствует случаю, когда выпуклость грани обращена во вторую среду (рис. П.А.4). Матрица, соответствующая сагиттальному сечению, отличается только элементом

$$C = \frac{1 - \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2}}{R \sec \alpha_1}. \quad (\text{П.А.19})$$

Для произвольного сечения пучка (проходящего через его ось), составляющего угол ψ с меридиональным сечением оптической системы, элемент C лучевой матрицы определяется соотношением [9]

$$C = \left(1 - \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2}\right) \frac{1}{R} \left(\frac{\cos^2 \psi}{\cos \alpha_1} + \frac{\sin^2 \psi}{\sec \alpha_1}\right). \quad (\text{П.А.20})$$

Отражение парааксиального пучка от нецентрированной сферической поверхности также описывается матрицей, элемент C которой зависит от рассматриваемого сечения пучка:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = \frac{-2}{R} \left(\frac{\cos^2 \psi}{\cos \alpha_1} + \frac{\sin^2 \psi}{\sec \alpha_1}\right), \quad D = 1, \quad (\text{П.А.21})$$

Здесь α_1 — угол между осью пучка и нормалью к отражающей поверхности в точке падения; ψ — угол, составляемый рассматриваемым сечением пучка с меридиональным сечением отражающей поверхности.

Зависимость $S(\psi)$ определяет (как в случае преломления, так и в случае отражения) астигматизм наклонных пучков. Когда система становится центрированной ($\alpha_1=0$), эта зависимость исчезает. В этом практически важном случае мы получаем для преломления лучевую матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) & \left(\frac{n_1}{n_2}\right) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.А.22})$$

а для отражения — в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.23})$$

Астигматизм рассматриваемых оптических структур пропадает также при переходе от сферической поверхности (преломления или отражения) к плоской. Устремив радиус кривизны грани к бесконечности, получим из (П.А.18) и (П.А.19) матрицы, соответствующие преломлению и отражению параксиального пучка плоской наклонной поверхностью:

$$\begin{pmatrix} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} & 0 \\ 0 & \frac{n_1 \cos \alpha_1}{n_2 \cos \alpha_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{П.А.24})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.25})$$

Рассмотрим теперь вычисление матрицы составной оптической системы. Представим себе две оптические системы, расположенные так, что выходная плоскость первой совпадает с входной плоскостью второй (рис. П.А.5). Пусть лучевая матрица первой системы будет

$$\widehat{m}' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

а второй системы

$$\widehat{m}'' = \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}.$$

Тогда для первой системы имеем

$$x'_2 = a'x'_1 + b'\varphi'_1, \quad \varphi'_2 = c'x'_1 + d'\varphi'_1,$$

а для второй

$$x''_2 = a''x''_1 + b''\varphi''_1, \quad \varphi''_2 = c''x''_1 + d''\varphi''_1,$$

Обе оптические системы можно рассматривать как одну составную. Входной плоскостью составной системы будет входная плоскость первой, а выходной плоскостью — выходная плоскость второй оптической системы. Полагая $x_1 = x'_1$, $\varphi_1 = \varphi'_1$ и $x_2 = x''_2$, $\varphi_2 = \varphi''_2$, а также учитывая, что $x'_2 = x''_1$ и $\varphi'_2 = \varphi''_1$ запишем $x'_2 = a'x_1 + b'\varphi_1$, $\varphi'_2 = c'x_1 + d'\varphi_1$, $x_2 = a''x'_2 + b''\varphi'_2$, $\varphi_2 = c''x'_2 + d''\varphi'_2$. Исключив x'_2 и φ'_2 , найдем

$$\begin{aligned} x_2 &= (a'a'' + b'b'c')x_1 + (a'b'' + b''d')\varphi_1, \\ \varphi_2 &= (c'a'' + d''c')x_1 + (d''d' + c''b')\varphi_1. \end{aligned} \quad (\text{П.А.26})$$

Таким образом, видим, что составная оптическая система также может характеризоваться лучевой матрицей, которую обозначим

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что матрица составной системы равна произведению матриц составляющих оптических систем, причем порядок перемножения обратен ходу луча. Это видно из сравнения коэффициентов в выражениях (П.А.26) с элементами матрицы — произведения $m_2 \cdot m_1$. Полученный результат можем немедленно распространить на произвольное число составляющих оптических систем и утверждать, что если оптическая система состоит из произвольного числа n подсистем, лучевые матрицы которых (в порядке прохождения луча) $\widehat{m}_1, \widehat{m}_2, \widehat{m}_3, \dots, \widehat{m}_n$, то лучевая матрица такой системы может быть вычислена как произведение *)

$$\widehat{M} = \widehat{m}_n \cdot \widehat{m}_{n-1} \cdot \dots \cdot \widehat{m}_2 \cdot \widehat{m}_1 = \prod_{i=0}^{n-1} \widehat{m}_{n-i}. \quad (\text{П.А.27})$$

В качестве подсистем могут подразумеваться отдельные оптические элементы, преломляющие или отражающие поверхности.

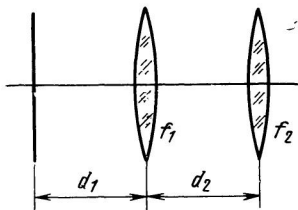
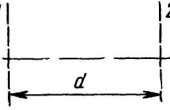
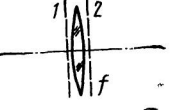
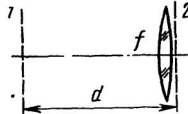
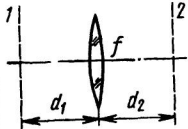
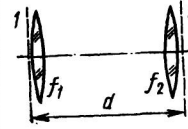
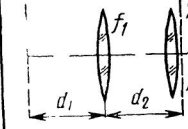


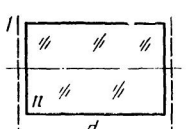
Рис. П.А.6. К примеру вычисления лучевой матрицы

Полученный результат позволяет, используя лучевые матрицы элементов оптических систем, выведенные выше, вычислять матрицы произвольных оптических систем. Например, лучевая матрица для нормального прохождения плоскопараллельной пластинки с показателем преломления n , толщиной d может быть вычислена как произведение трех матриц:

$$\widehat{M} = \widehat{m}_3 \cdot \widehat{m}_2 \cdot \widehat{m}_1,$$

*) Этот вывод становится очевидным, если понимать лучевую матрицу как некий оператор координат луча,

Оптическая схема	Лучевая матрица
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f^{-1} & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -f^{-1} & (1-df^{-1}) \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} (1-d_2f^{-1}) & d_1+d_2-d_1d_2f^{-1} \\ -f^{-1} & (1-d_1f^{-1}) \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} (1-df_1^{-1}) & d \\ (-f_1^{-1}-f_2^{-1}+df_1^{-1}f_2^{-1}) & (1-df_2^{-1}) \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} (1-d_2f_1^{-1}) & (d_1+d_2-d_1d_2f_1^{-1}) \\ (-f_1^{-1}-f_2^{-1}+d_2f_1^{-1}f_2^{-1}) & (1-d_1f_1^{-1}-d_1f_2^{-1}-d_2f_2^{-1}+d_1d_2f_1^{-1}f_2^{-1}) \end{pmatrix}$

Оптическая схема	Лучевая матрица
	$\begin{pmatrix} 1 & dn^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

где \hat{m}_1 — матрица грани воздух — среда; \hat{m}_2 — матрица оптически однородной среды; \hat{m}_3 — матрица грани среда — воздух. Из вышеприведенных данных следует

$$\hat{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}, \quad \hat{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \hat{m}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим результирующую матрицу в виде

$$\hat{M} = \hat{m}_3 \cdot \hat{m}_2 \cdot \hat{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.А.28})$$

В качестве второго примера рассмотрим вычисление лучевой матрицы оптической системы, изображенной на рис. П.А.6. Нетрудно видеть, что матрица системы определяется произведением

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (\text{П.А.29})$$

где

$$A = 1 - (d_2/f_1); \quad B = d_1 + d_2 - (d_1 d_2/f_1);$$

$$C = -(1/f_1) - (1/f_2) + (d_2/f_1 f_2);$$

$$D = 1 - (d_1/f_2) - (d_1/f_1) - (d_2/f_2) + (d_1 d_2/f_1 f_2).$$

При $d_1 = d_2$ такая оптическая система эквивалентна периоду двухзеркального резонатора.

В табл. П.А.1 приведены лучевые матрицы некоторых простейших центрированных оптических систем.

Работа произвольного сложного резонатора в рамках геометрической оптики определяется циклическим прохождением излучения через все оптические элементы, составляющие рассматриваемый резонатор. Заменяя каждый оптический элемент эквивалентной линзой, можно сопоставить с резонатором некоторую эквивалентную бесконечную периодическую последовательность линз. Для астигматичных резонаторов разным меридиональным плоскостям могут соответствовать различные эквивалентные линзовые структуры [59].

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Многие выводы теории оптических резонаторов получены методом решения интегральных уравнений, вытекающих из скалярной теории дифракции. Интегральным уравнением называют уравнение, содержащее неизвестную функцию $f(x)$ под знаком интеграла. Конечно, уравнение может содержать и другие члены под интегралом и вне его. Пусть $F(x)$ и $K(x, y)$ — известные функции. Будем рассматривать только два типа интегральных уравнений

$$F(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad (\text{П.Б.1})$$

$$f(x) = \gamma \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad (\text{П.Б.2})$$

где γ — число (обычно комплексное).

Известная функция $K(x, y)$ под знаком интеграла — ядро интегрального уравнения — должна быть определена в области $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$. Функции $F(x)$ и $f(x)$ должны быть определены в интервале $a \leq x \leq b$. Интегральное уравнение является линейным, если неизвестная функция входит в уравнение в первой степени. Оба рассматриваемых типа уравнений являются линейными интегральными уравнениями. Если оба предела интегрирования постоянны, то уравнение называется *уравнением Фредгольма*. Уравнение, в котором неизвестная функция присутствует только под интегралом, называется *интегральным уравнением первого рода*; примером такого уравнения является (П.Б.1). *Интегральное уравнение второго рода* содержит неизвестную функцию не только под интегралом, но и вне его; (П.Б.2) — пример уравнения второго рода. Если уравнение не содержит члена без неизвестной функции, оно является *однородным*. Если уравнение содержит член без неизвестной функции, это *неоднородное уравнение*. Так (П.Б.2) — пример однородного уравнения Фредгольма второго рода.

Примером уравнения первого рода является интегральное уравнение Фурье

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \exp(-ixy) dy. \quad (\text{П.Б.3})$$

В этом уравнении выражение $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ixy)$ — ядро.

В теории оптических резонаторов большую роль играет уравнение типа (П.Б.2), которое мы и рассматриваем в дальнейшем. Уравнение имеет непрерывные, ненулевые решения для дискретных значений γ , которые называются собственными значениями однородного интегрального уравнения или ядра $K(x, y)$. Соответствующие решения называются собственными функциями интегрального уравнения

или ядра для данного собственного значения γ . Строгое доказательство существования собственных значений и собственных функций некоторых уравнений с ядрами, характерными для теории оптических резонаторов, приведено в [11].

Собственные функции дают распределение поля на зеркалах для каждого из возможных типов колебаний. Соответствующее данному типу колебаний комплексное собственное значение определяет коэффициент затухания моды в результате дифракционных потерь за один проход волны в резонаторе (модуль собственного значения), а также частоту генерации (аргумент собственного значения).

Ядра, которые фигурируют в теории оптических резонаторов, симметричны, но не эрмитовы, т. е.

$$K(x, y) = K(y, x), K(x, y) \neq K^*(y, x). \quad (\text{П.Б.4})$$

Интегральные уравнения второго рода с симметричными ядрами могут быть решены с использованием метода Шмидта и Гильберта. Уравнения второго рода можно также решить с помощью подходящей аппроксимации [11]. Метод дает $f(x)$ в виде разложения по γ , коэффициенты которого являются функциями x . Если результирующий ряд быстро сходится, то метод имеет практическое значение и аналогичен итерационному процессу, использованному в работах Фокса и Ли [24, 26].

Собственные функции однородного интегрального уравнения с симметричным ядром ортогональны. Это означает, что

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = 0 \text{ при } n \neq m, \quad (\text{П.Б.5})$$

где

$$f_m(x) = \gamma_m \int_a^b K(x, y) f_m(y) dy; \quad (\text{П.Б.6})$$

$$f_n(x) = \gamma_n \int_a^b K(x, y) f_n(y) dy. \quad (\text{П.Б.7})$$

Чтобы доказать это, положим, что $\gamma_m \neq \gamma_n$, и, умножив (П.Б.6) на $\gamma_n f_n(x)$, а (П.Б.7) на $\gamma_m f_m(x)$, вычтем полученные равенства и затем проинтегрируем разность по x :

$$\begin{aligned} (\gamma_m - \gamma_n) \int_a^b f_n(x) f_m(x) dx &= \gamma_n \gamma_m \int_a^b \int_a^b [K(x, y) f_n(y) f_m(x) - \\ &\quad - K(x, y) f_m(y) f_n(x)] dy dx. \end{aligned} \quad (\text{П.Б.8})$$

Правая часть этого равенства есть нуль, что нетрудно увидеть, если заменить переменные интегрирования во втором члене подынтегрального выражения и учесть, что $K(x, y) = K(y, x)$. Так как $\gamma_m \neq \gamma_n$, то ортогональность собственных функций доказана.

Для анализа характеристик оптических резонаторов полезно учитывать свойства симметрии рассматриваемых уравнений. Свойства симметрии регламентируют изменения собственных функций и собственных значений при определенных преобразованиях ядра уравнения. Перечислим некоторые свойства симметрии, используемые в гл. 3.

1. Если меняется знак ядра интегрального уравнения, то это приводит, как нетрудно убедиться простой подстановкой, к изменению знака собственных значений, а собственные функции не меняются.

2. Если ядро уравнения меняется на комплексно-сопряженное, то, используя свойство комплексных функций

$$[F_1(x) \times F_2(x)]^* \equiv F_1^*(x) \times F_2^*(x),$$

можно показать, что в этом случае собственные функции и собственные значения переходят в комплексно-сопряженные, т. е. если $K(x, x') \rightarrow K^*(x, x')$, то $f(x) \rightarrow f^*(x)$ и $\gamma \rightarrow \gamma^*$.

3. Комбинируя оба указанных свойства симметрии, нетрудно получить третье свойство, относящееся к такой трансформации ядра интегрального уравнения: $K(x, x') \rightarrow -K^*(x, x')$. В этом случае $f(x) \rightarrow f^*(x)$ и $\gamma \rightarrow (-\gamma^*)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ kd В ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КИРХГОФА (3.2)

Параметр kd в интеграле Кирхгофа определяет фазовый набег при прохождении волны внутри резонатора. Знание разложения этой величины в ряд Маклорена полезно для выявления приближенных решений исходных интегральных уравнений. Найдем это разложение для резонатора, состоящего из двух идеальных съюстированных сферических зеркал. Для решения возникающих на практике задач достаточно ограничиться членами четвертого порядка.

Как известно [9], разложение в ряд координатного эйконала для произвольной центрированной оптической системы содержит следующие переменные:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad t^2 = 2(x_1 x_2 + y_1 y_2) \quad *). \quad (\text{П.В.1})$$

В общем случае такой системы разложение имеет вид

$$d = L + \frac{1}{2} \xi_1 r_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2 r_2^2 + \frac{1}{2} \xi_0 t^2 + \frac{1}{4} \xi_{11} r_1^4 + \\ + \frac{1}{4} \xi_{22} r_2^4 + \frac{1}{2} \xi_{12} r_1^2 r_2^2 + \frac{1}{4} \xi_{00} t^4 + \frac{1}{2} \xi_{10} r_1^2 t^2 + \frac{1}{2} \xi_{20} r_2^2 t^2.$$

(П.В.2)

*) Отметим, что t определяет угол φ между меридиональными плоскостями, проходящими через начальную и конечную точки ($t^2 = = 2r_1 r_2 \cos \varphi$).

Вычислим величину d , пользуясь соотношением

$$d^2 = (z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (z_2 - z_1)^2 + r_1^2 + r_2^2 - t^2. \quad (\text{П.В.3})$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= R_1 - \sqrt{R_1^2 - r_1^2} = \frac{r_1^2}{2R_1} + \frac{r_1^4}{8R_1^3}, \\ z_2 &= L - R_2 + \sqrt{R_2^2 - r_2^2} = L - \frac{r_2^2}{2R_2} - \frac{r_2^4}{8R_2^3}, \\ z_2 - z_1 &= L - \frac{r_1^2}{2R_1} - \frac{r_2^2}{2R_2} - \frac{r_1^4}{8R_1^3} - \frac{r_2^4}{8R_2^3}, \end{aligned} \quad (\text{П.В.4})$$

$$\begin{aligned} (z_2 - z_1)^2 &= L^2 - \frac{L}{R_1} r_1^2 - \frac{L}{R_2} r_2^2 + \frac{1}{4R_1^2} \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) r_1^4 + \\ &+ \frac{1}{4R_2^2} \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) r_2^4 + \frac{r_1^2 r_2^2}{2R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Подставляя (П.В.4) в (П.В.3), получаем

$$\begin{aligned} d^2 &= L^2 + \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) r_1^2 + \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) r_2^2 - t^2 + \\ &+ \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \frac{r_1^4}{4R_1^2} + \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \frac{r_2^4}{4R_2^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{2R_1 R_2}. \end{aligned} \quad (\text{П.В.5})$$

Отсюда, пользуясь биномиальным разложением

$$[1 + \delta]^{1/2} = 1 + \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{8} + \dots$$

и вводя параметры конфигурации $g_i = 1 - L/R_i$, находим

$$\begin{aligned} d &= L + \frac{1}{2L} (g_1 r_1^2 + g_2 r_2^2 - t^2) + \frac{1}{8L^3} [g_1 (1 - 3g_1 + g_1^2) r_1^4 + \\ &+ g_2 (1 - 3g_2 + g_2^2) r_2^4 + 2(1 - g_1 - g_2) r_1^2 r_2^2 - t^4 + \\ &+ 2g_1 r_1^2 t^2 + 2g_2 r_2^2 t^2]. \end{aligned} \quad (\text{П.В.6})$$

Сравнивая (П.В.6) и (П.В.2), получаем коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{g_1}{L}, \quad \xi_2 = \frac{g_2}{L}, \quad \xi_0 = -\frac{1}{L}, \quad \xi_{11} = \frac{g_1 (1 - 3g_1 + g_1^2)}{2L^3}, \\ \xi_{22} &= \frac{g_2 (1 - 3g_2 + g_2^2)}{2L^3}, \\ \xi_{12} &= \frac{1 - g_1 - g_2}{2L^3}, \quad \xi_{00} = \frac{-1}{2L^3}, \end{aligned} \quad (\text{П.В.7})$$

$$\xi_{10} = \frac{g_1}{2L^3}, \quad \xi_{20} = \frac{g_2}{2L^3}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

КОМПЛЕКСНЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ

В гл. 3 показано, что собственными модами устойчивого однородно заполненного резонатора, образованного сферическими зеркалами, являются так называемые гауссовы пучки^{*}). Для прямоугольной симметрии сечения гауссов пучок характеризуется следующим пространственным распределением поля (4.12):

$$E_{mn}(x, y, z) = C_{mn} T_{mn}(z) H_m(x\sqrt{2}/w) \times \\ \times H_n(y\sqrt{2}/w) \exp\{-ik[z + (x^2 + y^2)/2q]\}. \quad (\text{П.Г.1})$$

Здесь множитель $T_{mn}(z) = (\omega_0/\omega_z) \exp[i(m+n+1) \arctg(2z/kw_0^2)]$ определяет дополнительный по отношению к плоской волне амплитудный осевой коэффициент пропускания части пространства, расположенной между исходной плоскостью ($z=0$) и текущим сечением пучка z . Комплексный параметр q , задающий масштаб поперечного амплитудно-фазового распределения, введен в § 4.1:

$$q^{-1} = \rho - i\omega, \quad (\text{П.Г.2})$$

где ρ — кривизна волнового фронта; $\omega = 2/kw^2$.

Характер распределения (П.Г.1) сохраняется и в тех случаях, когда в формировании пучка участвуют линзоподобные оптические элементы (гл. 5) или среда с поперечной фазовой неоднородностью (гл. 6). Однако, если в образовании пучка участвуют оптические элементы с поперечной амплитудной неоднородностью, характер распределения изменяется. Рассмотрим только два таких элемента: локальный фильтр, амплитудный коэффициент пропускания которого задан выражением $\exp[-k(x^2 + y^2)/2f]$, и протяженную среду, комплексный показатель преломления которой определен формулой (6.2), где n_0 и σ — комплексные величины [при условии $|\sigma|(x^2 + y^2) \ll |n_0|$]. Первый из этих элементов (так называемая гауссова диафрагма) может быть описан лучевой матрицей для тонкой линзы (П.А.17) с мнимой оптической силой $\varphi = i/f$. Второй элемент — среда с поперечной неоднородностью — описывается лучевой матрицей (4.43) или (6.4). Лучевые матрицы таких элементов оказываются комплексными.

Анализ волнового уравнения (4.39а) [6,61] дает следующее выражение для пространственного распределения поля собственных волн резонатора, содержащего указанные амплитудно-неоднородные элементы:

$$E_{mi}(x, y, z) = C_{mi} T_{mi}(z) H_m(x\sqrt{2}/w'_z) \times \\ \times H_i(y\sqrt{2}/w'_z) \exp\{-ik[z + (x^2 + y^2)/2q]\}. \quad (\text{П.Г.3})$$

Здесь в отличие от (П.Г.1) аргумент полиномов Эрмита оказывается комплексным, так как w'_z — комплексная величина. Такие пучки называют комплексными гауссовыми пучками; они являются

^{*}) Это справедливо, естественно, при не слишком сильном диафрагмировании сечения резонатора и при небольшой абберации образующих поверхностей. Исследования, проведенные для основной моды, показали, что отношение размера диафрагмы к размеру пучка в сечении диафрагмы должно быть больше 2, а волновая абберация не должна превышать $\lambda/4$,

обобщением вещественных гауссовых пучков, описанных в гл. 4. Если вещественный гауссов пучок в любом сечении определяется одним параметром q , то для комплексного пучка требуется два независимых параметра: q и ω' . Распределение (П.Г.3) существенно отличается от (П.Г.1) и при $N_{\text{э.кв}} \gg 1$ применимо к неустойчивым резонаторам.

Для расчета преобразования комплексных гауссовых пучков оптической системой удобно представить величину q^{-1} в виде суперпозиции комплексных компонентов:

$$q^{-1} = \rho' - i\omega'. \quad (\text{П.Г.4})$$

При этом реальные кривизна и размер пятна основной моды определяются так:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{Re } \rho' + \text{Im } \omega', \\ \omega &= [k(\text{Re } \omega' - \text{Im } \rho')/2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{П.Г.5})$$

Для компонентов ρ' , ω' применимы соотношения, вытекающие из закона $ABCD$ (§ 4.4). Подставив (П.Г.4) в (4.18), можно легко получить

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{(A + B\rho'_1)(C + D\rho'_1) + B D \omega'_1}{(A + B\rho'_1)^2 + (B\omega'_1)^2}; \\ \omega_2 &= \frac{\omega'_1}{(A + B\rho'_1)^2 + (B\omega'_1)^2}; \end{aligned} \quad (\text{П.Г.6})$$

$$T_{mn} = \frac{\exp\{i(m+n+1) \arctg [B\omega'_1 / (A + B\rho'_1)]\}}{\sqrt{(A + B\rho'_1)^2 + (B\omega'_1)^2}},$$

где элементы матрицы A , B , C , D могут быть комплексными.

Расчет собственных волн резонатора, содержащего амплитудно-неоднородные элементы, удобно проводить с помощью метода лучевых матриц (§ 5.3). Выбирая расчетное сечение на левой границе симметричного периода (для линейного резонатора такое расчетное сечение соответствует отражающей поверхности левого концевого отражателя), получаем из (П.Г.6).

$$\rho' = 0, \quad \omega' = \sqrt{|C|/|B|} e^{i\chi}, \quad (\text{П.Г.7})$$

где $\chi = (\arg C - \arg B)/2$. Дополнительный по отношению к плоской волне фазовый набег и коэффициент потерь для циклического прохода волны определяются величиной T_{mn} :

$$\Phi_{mn} = \arg T_{mn} = (m+n+1) \text{Re} (\arctg \sqrt{A^{-2} - 1}), \quad (\text{П.Г.8})$$

$$\alpha_{mn} = 1 - |T_{mn}|^2 = 1 - \exp[-2(m+n+1) \text{Im} (\arctg \sqrt{A^{-2} - 1})].$$

Формулы (П.Г.7) и (П.Г.8) справедливы как для устойчивых, так и для неустойчивых резонаторов. Традиционное понятие устойчивости, основанное на анализе распространения лучей (см. гл. 2), здесь, теряет смысл. Критерием устойчивости может служить уменьшение амплитуды основной моды при удалении от оси, т. е. условие: $\omega > 0$.

Для встречных волн в любом сечении можно найти $\vec{\rho}' = -\overleftarrow{\rho}'$, $\vec{\omega}' = \overleftarrow{\omega}'$. Эти соотношения с учетом (П.Г.5) характеризуют пространственную невзаимность встречных волн,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики: Пер. с англ./ Под ред. Г. П. Мотулевич. — М.: Наука, 1973.—855 с.
2. **Вайнштейн Л. А.** Открытые резонаторы и открытые волноводы. — М.: Сов. радио, 1966.—475 с.
3. **Волновые** и флуктуационные процессы в лазерах./ С. Г. Зейгер, Ю. Л. Климонтович, П. С. Ланда и др.; Под ред. Ю. Л. Климонтовича. — М.: Наука, 1974.—416 с.
4. **Галутва Г. В., Рязанцев А. И.** Селекция типов колебаний и стабилизация частоты оптических квантовых генераторов. — М.: Связь, 1972.—72 с.
5. **Троицкий Ю. В.** Одночастотная генерация в газовых лазерах. — Новосибирск: Наука, 1975.—159 с.
6. **Маркузе Д.** Оптические волноводы: Пер. с англ./ Под ред. В. В. Шевченко.—М.: Мир, 1974.—457 с.
7. **Дитчберн Р.** Физическая оптика: Пер. с англ./ Под ред. И. А. Яковлева. — М.: Наука, 1965.—631 с.
8. **Справочник по лазерам в 2-х т./** Под ред. А. М. Прохорова.— М.: Сов. радио, 1978. Т. 2—400 с.
9. **Герцбергер М.** Современная геометрическая оптика: Пер. с англ./ Под ред. Ю. Д. Гальперина. — М.: ИЛ, 1962.—487 с.
10. **Ландсберг Г. С.** Оптика. — М.: Наука, 1976.—928 с.
11. **Мэйтлэнд А., Данн М.** Введение в физику лазеров: Пер. с англ./ Под ред. С. И. Анисимова. — М.: Наука, 1978.—400 с.
12. **Аллен А., Джонс Д.** Основы физики газовых лазеров: Пер. с англ./ Под ред. Е. А. Верного. — М.: Наука, 1970.—207 с.
13. **Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н.** Основы теории колебаний. — М.: Наука, 1978.—392 с.
14. **Пейн Г.** Физика колебаний и волн: Пер. с англ./ Под ред. Г. В. Скродского. — М.: Мир, 1979.—389 с.
15. **Bertolotti M.** Matrix representation of geometrical properties of laser cavities. — Nuovo Cimento, 1964, v. 32, p. 1242—1257.
16. **Pierce J. R.** Theory of design of electron beams. — New York: Van Nostrand, 1954,—222 p.
17. **Ramsay I. A., Degnan J. J.** A ray analysis of optical resonators formed by two spherical mirrors. — Appl. Opt., 1970, v. 9, № 2, p. 385—398.
18. **Gordon J. P., Kogelnik H.** Equivalence relation among spherical mirror optical resonators. — Bell Syst. Techn. J., 1964, v. 43, № 6, p. 2873—2886.
19. **Kogelnik H.** Imaging of optical modes resonators with internal lenses. — Bell Syst. Techn. J., 1965, v. 44, № 3, p. 455—493.
20. **Kogelnik H., Li T.** Laser beams and resonators. — Appl. Opt., 1966, v. 5, № 10, p. 1550—1567.
21. **Boyd G. D., Kogelnik H.** Generalized confocal resonator theory. — Bell Syst. Techn. J., 1962, v. 41, № 5, p. 1347—1369.

22. **Фокс А., Ли Т.** Виды колебаний в интерферометре квантово-механического генератора с искривленными и наклоненными зеркалами. — ТИИЭР, 1963, т. 51, № 1, с. 116—125.
23. **Бойцов В. Ф.** Двухзеркальный астигматический резонатор в приближении геометрической оптики. — Физика газовых лазеров. — Л.: ЛГУ, 1969, с. 41—54.
24. **Фокс А., Ли Т.** Резонансные типы колебаний в интерферометре квантового генератора. — В кн.: Лазеры: Пер. с англ./ Под ред. М. Е. Жаботинского и Т. А. Шмаонова. — М.: ИЛ, 1963, с. 325—362.
25. **Бойд Дж., Гордон Дж.** Конфокальный резонатор со многими типами колебаний для квантовых генераторов миллиметрового и оптического диапазонов. — В кн.: Лазеры: Пер. с англ./ Под ред. М. Е. Жаботинского и Т. А. Шмаонова. — М.: ИЛ, 1963, с. 363—381.
26. **Li T.** Diffraction loss and selection of modes in maser resonators with circular mirrors. — Bell Syst. Techn. J., 1965, v. 44, № 5, p. 917—932.
27. **Шрайфер В., Гамо Н.** Применение разложения Шмидта к анализу колебаний в оптическом резонаторе. — В кн.: Квазиоптика: Пер. с англ. и нем./ Под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко. — М.: Мир, 1966, с. 226—244.
28. **Хэртли Дж.** Гиперсфероидальные функции и оптические резонаторы с круглыми зеркалами. — В кн.: Квазиоптика: Пер. с англ./ Под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко. — М.: Мир, 1966, с. 245—254.
29. **Slepian D., Pollak H. O.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty I. — Bell Syst. Techn. J., 1961, v. 40, № 1, p. 43—63.
30. **Slepian D.** Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty IV. — Bell Syst. Techn. J., 1964, v. 43, № 6, p. 3009—3057.
31. **Flammer C.** Spheroidal wave function. — Palo Alto: Stanford univers. press., 1957.—220 p.
32. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции: Формулы, графики, таблицы. Пер. с нем./ Под ред. Л. И. Седова. — М.: Наука, 1968.—344 с.
33. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.—1100 с.
34. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Квантовая механика: Нерелятивистская теория. — М.: Физматгиз, 1963.—704 с.
35. **Котик Дж., Ньюстейн М.** Теория квантовых генераторов с резонаторами Фабри-Перо. — В кн.: Лазеры: Пер. с англ./ Под ред. М. Е. Жаботинского и Т. А. Шмаонова. — М.: ИЛ, 1963, с. 385—407.
36. **Lonngren K. E., Beyer J. B.** An extension to the high loss region of the solution of the confocal Fabry—Perot resonator integral equation. — IEEE, 1965, v. MTT-13, № 2, p. 243—244.
37. **Lonngren K. E., Beyer J. B.** Comparison of focused and parallel-plane Fabry—Perot resonators at small Fresnel numbers. — Appl. Opt., 1965, v. 4, № 9, p. 1206—1207.
38. **Varone S. R.** Resonances of Fabry—Perot laser. — J. Appl. Phys., 1963, v. 34, № 4, p. 831—843.

39. **Barone S. R., Newstein M. C. Fabry**—Perot resonances at small Fresnel numbers. — *Appl. Opt.*, 1964, v. 3, № 10, p. 1194—1195.
- 40.) **Булдырев В. С., Фрадкин Э. Е.** Интегральные уравнения открытых резонаторов. — *Оптика и спектроскопия*, 1964, т. 17, № 4, с. 583—596.
41. **Фрадкин Э. Е.** Открытые несимметричные сферические резонаторы для лазера. — *Оптика и спектроскопия*, 1966, т. 20, № 2, с. 316—323.
42. **Сигмэн А. Е.** Неустойчивые резонаторы и их применение в лазерах. — *ТИИЭР*, 1965, т. 53, № 3, с. 318—329.
43. **Streifer W.** Unstable optical resonators and waveguides. — *IEEE J.*, 1968, v. QE-4, № 4, p. 229—230.
44. **Bergstein L.** Modes of stable and unstable optical resonators. — *Appl. Opt.*, 1968, v. 7, № 3, p. 495—504.
45. **Siegman A. E., Miller H. Y.** Unstable optical resonator calculations. — *Appl. Opt.*, 1970, v. 9, № 12 p. 2729—2736.
46. **Sanderson R. L., Streifer W.** Unstable laser resonator modes. — *Appl. Opt.*, 1969, v. 8, № 10, p. 2129—2136.
47. **Ананьев Ю. А.** Угловое расхождение излучения твердотельных лазеров. — *УФН*, 1971, т. 103, № 4, с. 705—738.
48. **Ананьев Ю. А.** Неустойчивые резонаторы и их применения. — В кн.: *Квантовая электроника*/ Под ред. Н. Г. Басова, 1971, № 6, с. 3—34.
49. **Шерстобитов В. Е., Винокуров Г. Н.** Свойства неустойчивых резонаторов с большим эквивалентным числом Френеля. — В кн.: *Квантовая электроника*/ Под ред. Н. Г. Басова, 1972, № 3, с. 36—43.
50. **Когельник Х.** Коэффициенты связи и коэффициенты преобразования волн в оптических системах. — В кн.: *Квазиоптика*: Пер. с англ. и нем./ Под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко. — М.: Мир, 1966, с. 210—225.
51. **Collins S. A., Davis D. T. M.** Modes in a triangular optical resonator. — *Appl. Opt.*, 1964, v. 3, № 11, p. 1314—1315.
52. **Collins S. A.** Analysis of optical resonators involving focusing elements. — *Appl. Opt.*, 1964, v. 3, № 11, p. 1263—1275.
53. **Rigrod W.** The optical ring resonator. — *Bell Syst. Techn., J.*, 1965, v. 44, № 5, p. 907—916.
- 54.) **Попов М. М., Попова Т. М.** О дифракционных потерях открытых резонаторов. — *Оптика и спектроскопия*, 1975, т. 39, № 4, с. 719—723.
- 55.) **Попов М. М., Попова Т. М.** О дифракционных потерях открытых резонаторов. — *Оптика и спектроскопия*, 1975, т. 39, № 6, с. 1157—1159.
56. **Кузнецова Т. И.** О собственных решениях волнового уравнения для неоднородного слоя. — *ЖТФ*, 1964, т. 34, № 3, с. 419—425.
57. **Кузнецова Т. И.** О влиянии неоднородности диэлектрической проницаемости на свойства собственных колебаний в резонаторах. — *ЖТФ*, 1966, т. 36, № 1, с. 58—66.
58. **Нестеренко Т. М., Хапалюк А. П.** Стационарная генерация в активных средах с неоднородностью типа тонкой линзы. *ЖПС*, 1973, т. 18, № 2, с. 210—218.

59. **Marcatili E. A. Jr.** Modes in a sequence of thick astigmatic lenslike focusers. — *Bell Syst. Techn. J.*, 1964, v. 43, № 6, p. 2887—2903.
60. **Casperson L. W., Jariv A.** The gaussian mode in optical resonators with a radial gain profile. — *Appl. Phys. Lett.*, 1968, v. 12, № 10, p. 355—357.
61. **Коваленко Е. С.** Моды произвольного порядка в неоднородных резонаторах ОКГ. — В кн.: *Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова*, 1976, т. 3, № 2, с. 433—438.
62. **Ernst G. J., Witteman W. J.** Mode structure of active resonators. — *IEEE J.*, 1973, v. QE-9, № 9, p. 911—918.
63. **Bhatnagar R., Bhawalkar D.** Measurement of focal length of the pumpinduced lenses in laser media. — *IEEE J.*, 1972, v. QE-8, № 6, p. 497—499.
64. **Славянов С. Ю.** К теории открытых резонаторов. — *ЖЭТФ*, 1973, т. 64, № 3, с. 785—795.
65. **De Lang H.** Eigenstates of polarization of lasers. — *Philips Res. Rep.*, 1964, v. 19, № 5, p. 429—440.
66. **De Lang H.** Polarization properties of optical resonators passive and active. — *Philips Res. Rep.*, 1967, Suppl, № 8, p. 1—76.
67. **Шерклифф У.** Поляризованный свет: Получение и использование; Пер. с англ./ Под ред. Н. Д. Жевандрова. — М.: Мир, 1965.—264 с.
68. **О'Нейл Э.** Введение в статистическую оптику: Пер. с англ./ Под ред. П. Ф. Паршина. — М.: Мир, 1966.—254 с.
69. **Горшков М. М.** Эллипсометрия. — М.: Сов. радио, 1974.—200 с.
70. **Черненький В. И.** Анизотропный оптический резонатор бегущей волны.—В кн.: *Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова*, 1971, № 5, с. 53—59.
71. **Леднева Г. П.** Поляризационные и частотные характеристики сложных анизотропных резонаторов. — Минск: Ин-т Физики АН БССР, 1975.—(Препринт № 80).
72. **Иванов Э. И., Чайка М. П.** Анизотропный элемент в резонаторе. — *Физика газовых лазеров.* — Л.: ЛГУ, 1969, с. 20—32.
73. **Рыбаков Б. В., Скулаченко С. С., Хромых А. М., Юдин И. И.** Поляризационные характеристики излучения кольцевого ОКГ с циркулярно анизотропным резонатором. — *Оптика и спектроскопия*, 1969, т. 27, № 1, с. 113—118.
74. **Васильев В. П., Рубанов В. С.** Анализ возможностей разделения поляризаций встречных волн в кольцевом квантовом генераторе. *ЖПС*, 1969, т. 10, № 6, с. 920—923.
75. **Молчанов В. Я., Скромный Г. В.** Матричный метод вычисления собственных состояний поляризации анизотропных оптических резонаторов. — В кн.: *Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова*, 1971, № 4, с. 3—26.
76. **Кожевников Н. М.** Применение метода возмущений к поляризационному анализу анизотропных резонаторов. — *ЖТФ*, 1973, т. 43, № 4, с. 878—881.
77. **Ищенко Е. Ф.** Анализ деформации осевого контура оптического резонатора. — *ЖПС*, 1969, т. II, № 3, с. 456—463.
78. **Ищенко Е. Ф., Решетин Е. Ф.** Метод осевого контура в изучении характеристик разъюстированных оптических резонаторов. — *Труды МЭИ*, 1975, вып. 222, с. 99—102.

79. Остапченко Е. П., Седов Г. С., Сморгачева С. А., Степанов А. Ф. О смещении оси квантовых генераторов при разбюстировке зеркал резонатора.—Электронная техника. Сер. 3. Газоразрядные приборы, 1971, вып. 3(23), с. 22—28.
80. Ищенко Е. Ф., Климов Ю. М. Оптические квантовые генераторы.—М.: Сов. радио, 1968.—472 с.
81. Sanderson R., Streifer W. Laser resonators with tilted reflectors.—Appl. Opt., 1969, v. 8, № 11, p. 2241—2250.
82. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Наука, 1967.—575 с.
83. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике: Пер. с англ./ Пер. под ред. М. К. Размахнина и З. П. Яковлева.—М.: Сов. радио, 1971.—256 с.
84. Быков В. П. Лучевая теория открытых резонаторов и открытых волноводов, колебания в которых ограничены каустическими поверхностями.—Радиотехника и электроника, 1976, т. 11, № 3, с. 477—487.
85. Булдырев В. С., Попов М. М. Применение лучевого метода для вычисления собственных частот многозеркальных резонаторов.—Оптика и спектроскопия, 1966, т. 20, № 5, с. 905—908.
86. Авербах В. С., Власов С. Н., Таланов В. И. Методы селекции типов колебаний в открытых квазиоптических системах.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1967, т. 10, № 9—10, с. 1333—1357.
87. Ищенко Е. Ф. Применение лучевой матрицы для анализа резонатора с поперечной оптической неоднородностью.—Труды МЭИ, 1971, вып. 94, с. 60—67.
88. Ищенко Е. Ф., Рамазанова Г. С. Невзаимность встречных волн в кольцевом резонаторе, содержащем среду с квадратичной поперечной неоднородностью.—Труды МЭИ, 1978, вып. 350, с. 45—49.
89. Прохоров А. М. О молекулярном усилителе и генераторе на субмиллиметровых волнах.—ЖЭТФ, 1958, т. 34, № 6, с. 1658—1659.
90. Барчуков А. И., Прохоров А. М. Экспериментальное исследование дисковых резонаторов в миллиметровом диапазоне длин волн.—Радиотехника и электроника, 1959, т. 4, № 12, с. 2094—2095.
91. Shawlow A., Townes Ch. Infrared and optical masers.—Phys. Rev., 1958, v. 112, № 6, p. 1940, 1949.
92. Виткин Э. И. Метод возмущений для расчета открытых резонаторов. ЖПС, 1967, т. 7, № 2, с. 187—192.
93. Курятов В. Н., Фрадкин Э. Е. Влияние конфигурации резонатора на мощность лазера.—Оптика и спектроскопия, 1966, т. 20, № 2, с. 324—326.
94. Виткин Э. И. Расчет потерь на прохождение в разбюстированном открытом резонаторе. ЖПС, 1967, т. 7, № 3, с. 421—423.
95. Бергер Н. К., Дерюгин И. А., Лукьянов Ю. Н., Студенкин Ю. Е. Открытый разбюстированный резонатор со сферическими зеркалами.—Оптика и спектроскопия, 1977, т. 43, № 2, с. 306—310.
96. Абрамов В. Я., Леонтьев В. Г., Седов Г. С., Сморгачева С. А. Исследование распределения интенсивности по сечению луча в одномодовом ОКГ.—ЖПС, 1974, т. 21, № 3, с. 540—542.

97. Moore G. T., Mc Carthy R. J. Laser with unstable resonators in the geometrical optic limit.—J.O.S.A., 1977, v. 67, № 2, p. 221—227.
98. Балашов И. Ф., Беренберг В. А. Нестационарные типы колебаний открытого резонатора.—В кн.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова, 1975, т. 2, № 2, с. 281—286.
99. Carter W. H. Stable and unstable cylindrical laser resonator theory in an angular spectrum representation.—J. Opt. Soc. Am., 1974, v. 64, № 8, p. 1100—1106.
100. ГОСТ 15130—69. Стекло кварцевое оптическое.
101. ГОСТ 3514—67. Стекло оптическое бесцветное.
102. ГОСТ 13659—68. Стекло оптическое бесцветное. Физико-химические свойства. Параметры.
103. Березина Е. Е. Фотопругие постоянные оптических стекол.—Оптико-механическая промышленность, 1970, № 2, с. 38—39.
104. Джерард А., Берч Дж. М. Введение в матричную оптику: Пер. с англ./ Под ред. В. В. Коробкина.—М.: Мир, 1978.—335 с.
105. Афонников Н. А. Одновременная генерация мод устойчивого и неустойчивого резонаторов в аргоновом ионном лазере.—Труды МЭИ, 1976, вып. 281, с. 113—115.
106. Кушнир В. Р., Шокин А. А. Частотное вырождение мод в непрерывном твердотельном лазере с плоскосферическим резонатором.—В кн.: Квантовая электроника./ Под ред. Н. Г. Басова, 1978, т. 5, № 6, с. 1244—1247.
107. Foster J. D., Osterink L. M. Thermal effects in a Nd: YAG laser.—J. Appl. Phys., 1970, v. 41, № 9, p. 3656—3663.
108. Винокуров Г. Н., Мак А. А., Митькин В. М. Генерация тангенциально поляризованных мод высшего порядка в оптическом диапазоне.—В кн.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова, 1974, т. 1, № 8, с. 1890—1892.
109. Кушнир В. Р. О стабильности каустики в плоскосферических резонаторах с внутренней линзой.—В кн.: Квантовая электроника/ Под ред. Н. Г. Басова, 1978, т. 5, № 6, с. 1248—1256.
110. Chester R. V., Maydan D. Convex-concave resonators for TEM₀₀ operation of solid-state ion lasers.—J. Appl. Phys., 1972, v. 43, № 5, p. 2254—2257.
111. Steffen J., Lortscher J.-P., Herziger G. Fundamental mode radiation with solid-state lasers.—IEEE J., 1972, v. QE-8, № 2, p. 239—245.
112. Ищенко Е. Ф., Рамазанова Г. С. Чувствительность собственных типов колебаний к поперечной неоднородности оптического резонатора.—ЖПС, 1977, т. 27, № 3, с. 534—538.
113. Ищенко Е. Ф., Решетин Е. Ф. Чувствительность к разъюстировке кольцевого оптического резонатора с фокусирующим элементом. Оптика и спектроскопия, 1979, т. 46, № 2, с. 366—375.
114. Ищенко Е. Ф., Решетин Е. Ф. Анализ чувствительности оптических резонаторов к разъюстировке методом осевого контура.—ЖПС; 1979, т. 30, № 3, с. 440—445.
115. Любимов В. В. О получении предельно узкой направленности излучения оптических квантовых генераторов. Оптика и спектроскопия, 1966, т. 21, № 2, с. 224—227.
116. Ананьев Ю. А., Любимов В. В., Орлова И. Б. Деформация мод в открытых резонаторах с плоскими зеркалами.—ЖТФ, 1969, т. 39, № 10, с. 1872—1880.

117. **Любимов В. В., Орлова И. Б.** Приближенный расчет колебаний в резонаторах с вогнутыми зеркалами. — *Оптика и спектроскопия*, 1970, т. 39, № 3, с. 581—586.
118. **Landau H. J.** Loss in unstable resonators. — *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, v. 66, № 6, p. 525—529.
119. **Maunders E. A., McAllister G. L., Steier W. H.** Experiments on improved unstable mode profile by aperture shaping. — *IEEE J.*, 1974, v. QE-10, № 10, p. 821—822.
120. **Cochran J. A., Hinds E. W.** Eigensystems associated with complex symmetric kernels of laser theory. — *SIAM J.*, 1974, v. AM-26, № 4, p. 776—786.
121. **Siegman A. E.** A canonical formulation for analysing multielement unstable resonators. — *IEEE J.*, 1976, v. QE-12, № 1, p. 35—40.
122. **Shin H., Scully M. O., Avitonis P. V., Louisell W. H.** Multimode approach to the physics of unstable laser resonators. — *Phys. Rev. A: Gen. Phys.*, 1975, v. 11, № 2, p. 630—647.
123. **Конвисар П. Г., Михайлов В. Ю., Рустамов С. Р.** Возмущение резонатора тепловой линзой элементов, помещенных в резонатор. — В кн.: *Квантовая электроника* / Под ред. Н. Г. Басова, 1976, т. 3, № 1, с. 174—177.
124. **Czechowicz R., Purewicz Z.** Niestabilny rezonator optyczny wypelniony osrodkiem soczewkujacym. — *Bul WAT J. Dabrowskiego*, 1976, v. 26, № 2, p. 39—48.
125. **Louisell W. H.** From Maxwell to optical resonators. — *Laser Induc. and X-ray Laser Stud.*, Reading, Mass. e. a., 1976, p. 369—485.
126. **Casperson L. W.** Beam modes in complex lenslike media and resonators. — *J. Opt. Soc. Am.*, 1976, v. 66, № 12, p. 1373—1379.
127. **Santana C., Felsen L. B.** Effects of medium and gain inhomogeneities in unstable optical resonators. — *Appl. Opt.*, 1977, v. 16, № 4, p. 1058—1066.
128. **Тер-Погосян А. С.** О влиянии активной среды на моды резонатора ОКГ. — *Труды ЛИТМО*, 1975, вып. 79, с. 3—13.
129. **Ganiel U., Silberberg Y.** Stability of optical resonators with an active medium. — *Appl. Opt.*, 1975, v. 14, № 2, p. 306—309.
130. **Леднева Г. М., Чекалинская Ю. И.** Поляризационно-частотные характеристики сложных кольцевых анизотропных резонаторов с одним и двумя зеркалами связи. — *ЖПС*, 1977, т. 27, № 1, с. 46—52.
131. **Yamauchi N.** Resonant modes in ring laser resonator and their deformations by misarrangements. — *Trans. Inst. Electron and Commun. Eng. Jap.*, 1974, v. 57, № 11, p. 403—410.
132. **Junghans J., Keller M., Weber H.** Laser resonators with polarizing elements. Eigenstates and eigenvalues of polarization. — *Appl. Opt.*, 1974, v. 13, № 12, p. 2793—2798.
133. **Гончаренко А. М.** Гауссовы пучки света. — Минск: Наука и техника, 1977.—142 с.
134. **Бойцов В. Ф.** Осевой контур и устойчивость кольцевого резонатора с произвольно расположенной средой. — *Вестник ЛГУ*, 1978, № 10, с. 36—44.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие характеристики открытых оптических резонаторов	
1.1. Функции и устройство открытых оптических резонаторов	5
1.2. Типы колебаний оптического резонатора	10
1.3. Потери энергии в резонаторе	15
1.4. Затухание колебаний. Добротность	21
Глава 2. Лучевая оптика идеального двухзеркального резонатора	
2.1. Конфигурация двухзеркальных резонаторов. G -плоскость	25
2.2. Ход луча в резонаторе. Эквивалентная последовательность линз. Условие устойчивости	27
2.3. Лучевые семейства, каустики и волновые поверхности устойчивого резонатора	31
2.4. Лучевая оптика неустойчивых резонаторов	35
Глава 3. Двухзеркальные резонаторы (волновое приближение)	
3.1. Вывод основных уравнений. Задачи волнового рассмотрения	42
3.2. Подобие двухзеркальных резонаторов	50
3.3. Симметричный конфокальный резонатор	56
3.4. Плоскопараллельный резонатор	66
3.5. Устойчивый резонатор произвольной конфигурации	73
3.6. Неустойчивые резонаторы	85
3.7. Согласование поля устойчивого резонатора с активной средой	90
Глава 4. Оптика гауссовых пучков	
4.1. Распространение гауссова пучка в однородном пространстве	92
4.2. Преобразование гауссова пучка тонкой линзой	97
4.3. Лучевые диаграммы	98
4.4. Преобразование гауссова пучка произвольной оптической системой	100
4.5. Согласование гауссова пучка с пассивным резонатором	103
4.6. Преобразование гауссова пучка в несогласованной пассивной резонаторной системе	107
4.7. Гауссов пучок в среде с поперечной оптической неоднородностью	110
Глава 5. Сложные однополостные резонаторы	
5.1. Содержание приближения Когельника—Коллинза	115
5.2. Метод С. Коллинза	120

5.3. Использование метода лучевых матриц для вычисления характеристик сложного резонатора	126
5.4. Дифракционные потери в сложном резонаторе	131
Глава 6. Резонаторы, заполненные поперечно-неоднородной средой	
6.1. Некоторые оптические свойства среды с квадратичной поперечной неоднородностью	135
6.2. Резонатор с линзоподобным элементом	136
6.3. Пространственные характеристики собственных типов колебаний	139
Глава 7. Поляризационные характеристики анизотропных резонаторов	
7.1. Некоторые методы описания состояния поляризации	142
7.2. Матрицы Джонса. Виды оптических анизотропных элементов	144
7.3. Расчет собственных состояний поляризации однополостного резонатора	150
7.4. Расчет малых искажений собственных поляризаций	159
Глава 8. Свойства разъюстированных резонаторов	
8.1. Смещения оси двухзеркального резонатора при разъюстировках	167
8.2. Исходные уравнения квазиоптического приближения	169
8.3. Изменение характеристик собственных волн. Приближенная оценка	171
8.4. Метод «осевого контура» для многозеркальных резонаторов	176
Приложение А. Метод лучевых матриц	183
Приложение Б. Интегральные уравнения Фредгольма	193
Приложение В. Разложение величины kd в интегральном преобразовании Кирхгофа (3.2)	195
Приложение Г. Комплексные гауссовы пучки	197
Список литературы	199

Ищенко Е. Ф.

И98 Открытые оптические резонаторы: Некоторые вопросы теории и расчета. — М.: Сов. радио, 1980. — 208 с., ил.

1 р. 40 к.

Излагается теория однополосных открытых оптических резонаторов. Большое внимание уделено прикладным методам расчета пространственных, частотных и поляризационных характеристик собственных типов колебаний, а также дифракционных потерь.

Книга предназначена для научных работников и инженеров, специализирующихся в разработке и применении приборов квантовой электроники.

И $\frac{30407-045}{046(01)-80}$ 43—80 2402040000

ББК 22.34
6Ф0.3

Евгений Федорович Ищенко

**ОТКРЫТЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАТОРЫ
НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И РАСЧЕТА**

Научный редактор **В. Р. Кушнир**
Редактор **Л. В. Голованова**
Художественный редактор **Н. А. Игнатьев**
Технический редактор **Т. Н. Зыкина**
Художник **Е. А. Сумнительный**
Корректор **З. Г. Галушкина**

ИБ № 645

Сдано в набор 21.01.80	Подписано в печать 11.04.80	T-08427
Формат 84×108 ¹ / ₃₂	Бумага шаберного мелования	Гарнитура литер.
Печать высокая	Объем 10,92 усл. п. л.	11,09 уч.-изд. л.
Тираж 4000 экз.	Зак. 709	Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Советское радио», Москва, Главпочтамт, а/я 693
Московская типография № 10 «Союзполиграфпрома» Государственного
Комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной тор-
говли. Москва, М-114, Шлюзовая наб., 10