

НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ
КВАНТОВОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

Перевод

А. М. БРОДСКОГО

Под редакцией

Д. Д. ИВАНЕНКО

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО

ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1954

АННОТАЦИЯ

Сборник „Новейшее развитие квантовой электродинамики“ содержит переводы систематически подобранных статей ряда иностранных физиков по вопросам современной квантовой теории поля. В статьях подробно излагаются математический аппарат и основные соотношения квантовой электродинамики, а также мезодинамики и даются многочисленные применения к теории элементарных частиц, сдвигу уровней атомных электронов, проблеме собственной энергии и т. д.

Сборнику предпослана обстоятельная вступительная статья редактора перевода проф. Д. Иваненко, в которой дан обзор современных проблем квантовой электродинамики в связи со статьями, помещенными в сборнике.

Книга рассчитана в первую очередь на физиков теоретиков и экспериментаторов, занимающихся элементарными частицами, вместе с тем книга представляет интерес и для более широкого круга физиков и математиков — научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, интересующихся современными проблемами физики в области строения вещества.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

1. Вводные замечания

Предлагаемый вниманию читателей сборник, посвященный новейшему развитию квантовой электродинамики и теории поля, тесно связан со сборником „Сдвиг уровней атомных электронов“ [1]¹⁾ и, сохраняя свою независимость, в известной мере является его продолжением. В обоих случаях речь идет о новейшем развитии квантовой теории поля, главным образом квантовой электродинамики, т. е. релятивистской квантовой механики взаимодействующих друг с другом электронов, позитронов и электромагнитного поля. Это развитие получило за последние 5 лет значительный толчок в связи с двумя важнейшими экспериментами. Во-первых, проделанные радиоспектроскопическим методом весьма точные измерения тонкой структуры бальмеровских линий водорода (Лэмб, 1947), которые с окончательной достоверностью доказали наличие отклонения, хотя и незначительного (порядка расщепления сверхтонкой структуры), в положении термов от предсказанного теорией Дирака. При этом речь идет о сдвиге вверх уровней $2^2S_{1/2}$ в атомах водорода, замеченного оптическим методом еще в 1934 г., а также аналогичных смещениях уровней дейтерия и менее значительном сдвиге уровней $2^2P_{1/2}$.

Согласно теории Дирака, уровни $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ должны были бы совпадать. На самом же деле уровень $2^2S_{1/2}$ оказывается сдвинутым вверх по отношению к уровню $2^2P_{1/2}$ примерно на 1058 мггц^2 , или $0,033 \text{ см}^{-1}$, т. е. на $1/10$ дублетного расщепления: $2^2P_{3/2} - 2^2P_{1/2}$, соответствующего $0,365 \text{ см}^{-1}$ или длине волны $2,74 \text{ см}$. В дальнейшем под сдвигом мы будем подразумевать относительное смещение уровней ($2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$).

Во вступительной статье к сборнику [1] была уже изложена довольно длинная поучительная история открытия смещения уровней тонкой структуры спектра водорода оптическим и радиоспектроскопическим путем, связанная по временам с различными сомнениями в наличии сдвига, который, как выяснилось, в основном обусловлен „вакуумными“ эффектами.

Позднейшие измерения привели к следующему значению лэмбовского сдвига уровней: $\Delta E_L = (2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}) = 1057,77 \text{ мггц}$ для водорода и $1059,00 \text{ мггц}$ для дейтерия (см. [2]).

Вторым фундаментальным экспериментальным фактом, значительно содействовавшим новейшему развитию квантовой теории поля, открытым в 1947 г. также радиоспектроскопическим путем в лаборатории Раби, явилось обнаружение у электрона некоторого, сравнительно незначительного дополнительного собственного магнитного момента, сверх предсказываемого обычной теорией Дирака спинового момента, равного борновскому магнетону. Впервые дополнительный магнетизм был открыт при исследовании сверхтонкой структуры спектра основных состояний водорода и дейтерия. Новейшие измерения этого „аномального“ (с точки зрения привычки, укоренившейся со времени установления наличия спинового момента в 1925 г. и его теоретического объяснения в 1928 г.) магнитного момента электрона, который, как мы увидим позднее, лучше называть

¹⁾ Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы в конце статьи.

²⁾ 1 мегагерц = 1 млн. циклов в сек. (Mc/sec); в ряде статей сборника авторы пишут просто Mc, хотя подразумевают Mc/sec. При переводе мы всюду пользовались обозначением мггц.

„вакуумным“, привели к значению, находящемуся в прекрасном согласии с теоретическим подсчетом, проделанным ныне уже до четвертого порядка в заряде [3]

$$\mu_v = \mu_0 \cdot 1,001145 \pm 0,000012; \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2mc}$$

В дальнейшем выяснилось, что физические причины, приводящие к сдвигу энергетических уровней атомных электронов и добавочному магнитному моменту электрона по существу являются теми же самыми.

Действительно (см. [1]), а также книгу А. Соколова и Д. Иваненко [4] физическая причина этих явлений заключается в своеобразном взаимодействии электрона с „вакуумом“ электромагнитного и электронно-позитронного поля или с вакуумными флуктуациями этих полей.

Иначе говоря, наиболее точный квантово-релятивистский подсчет взаимодействия электрона с электромагнитным полем и полем пар электронов-позитронов должен учитывать разнообразие тонкие обстоятельства, связанные с трактовкой „резервуара“ или „фона“ виртуальных, реально еще не излученных пар частиц и фотонов, в частности поляризацию вакуума и вакуумные флуктуации. Эти обстоятельства, игнорировавшиеся или недостаточно учитывавшиеся в прежних более грубых расчетах, и позволили дать объяснение как сдвигу уровней, так и „сдвигу“ магнитного момента электронов. Важно подчеркнуть, что это объяснение удалось дать в рамках существующей релятивистской квантовой теории не выходя за ее рамки, хотя и существенно используя многие ее стороны, оставшиеся ранее в тени, и смело делая новые, можно сказать, крайние выводы из релятивистской квантовой механики, включающей теорию вакуума. Подобный новый фундаментальный успех релятивистской квантовой механики был открыт далеко не очевиден, так как могло оказаться, что объяснение вновь открытых явлений потребует какого-либо существенного видоизменения существующей теории, например перехода к нелокализованным взаимодействиям, либо будет связано с выяснением недостаточно еще изученной структуры элементарных частиц.

Несмотря на незначительность обоих новых эффектов и отсутствие каких-либо наглядных фотографий, видимых излучений и т. п., их исследование оказалось тесно связанным с такими, наиболее принципиальными проблемами теории элементарных частиц, как вопрос о природе их массы и, в частности о выделении доли полевой массы, обусловленной связью частиц с полями, с некоторой основной, так сказать, „затравочной“ (ранее обозначавшейся как „механическая“) массы. К этому же кругу проблем относится вопрос о выделении доли „полевого“ заряда и, наконец, вопрос о трактовке вакуума (бывшее „пустоты“ и, отчасти, бывшего „эфира“). Наиболее принципиальные успехи связаны главным образом с теорией вакуума, и новейшая его трактовка наиболее существенно отличается от прежней. Развитие „теории вакуума“, как можно коротко охарактеризовать интересующую нас часть теории поля, привело не только к ряду физических идей, но и к значительному обогащению формализма новыми эффективными методами расчета различных процессов при учете вакуума, оказавшимися во многих случаях весьма наглядными, а также новыми приемами трактовки расходящихся выражений, по настоящее время являющихся бичом теории поля.

По всей видимости, значение открытия „лэмбовского“ сдвига и дополнительного магнетизма вместе с последующей разработкой теории вакуума для развития квантовой электродинамики и физики элементарных частиц примерно сравнимо с огромной ролью, которую сыграло для атомной физики открытие эффекта Зеемана более полвека назад, в 1896 г. Любопытной является такая тесная аналогия в истории обоих открытий в смысле немедленного их объяснения теоретиками, Лоренцом в одном и Бете — Швингером в другом случае.

Наряду с квантовой электродинамикой ряд важных следствий из новейшей теории вакуума был сделан также в теории мезонного поля, находящейся

начальной стадии развития. Аналогичным образом следует, повидимому, развить также теорию гравитационного поля, в вакуумной трактовке которого сделаны в настоящее время лишь предварительные шаги. Кроме того, как выяснилось в последнее время, квантовая электродинамика позволяет получить важные результаты в релятивистской квантовой теории двух тел, например теории атома водорода или атома позитрония. Существенно также подчеркнуть то обстоятельство, что произведенное уточнение положения энергетических уровней атомных электронов за счет учета вакуумных электромагнитных взаимодействий, позволяет отделить небольшую часть в лэмбовском сдвиге, обязанную неэлектромагнитной части взаимодействия электрона с ядром, в частности, обусловленную силами, возникающими благодаря диссоциации нуклеонов, а также обязанную размазанности заряда нуклеонов по ядру и т. д. Таким образом, учет этих незначительных поправок может помочь выяснению структуры ядер и взаимодействия частиц. В целом мы имеем сейчас до некоторой степени завершенный первый этап новейшей квантовой теории поля, приведший ко многим важным результатам, изложению которых в работах зарубежных авторов и посвящен данный сборник¹⁾.

В настоящей вступительной статье мы хотим главным образом дать сравнение различных методов, а также привести указания на опубликованные работы советских авторов в данной области; небольшое дополнение посвящено каталогу наиболее употребительных сингулярных функций.

2. Основные формы представлений квантовой электродинамики

Перейдем теперь к различным формулировкам квантовой электродинамики. Подчеркнем, что речь идет при этом о различиях в формализмах, представляющих каждый раз те или иные выгоды, например, в одном случае в виде большей близости к обычным методам подсчета, в другом случае в смысле сплошной релятивистской записи, в третьем случае в единообразной трактовке электронов и позитронов и т. д. Окончательные же результаты расчетов различных эффектов, в том числе непосредственно связанных с учетом вакуума, оказываются при использовании определенных вычислительных приемов одинаковыми во всех рассматриваемых методах. Однако следует подчеркнуть, что при подсчете вакуумных эффектов ряд новых методов, развитых Томонага, Фейнманом, Дайсоном, Швингером и др., оказался, вообще говоря, более выгодным по сравнению с прежним формализмом. Последовательное применение старых методов для подсчета вакуумных эффектов также должно было бы привести к цели, однако, по всей видимости, применение новых методов более целесообразно, именно в теории вакуума, примерно в такой же степени как использование четырехмерной релятивистской записи уравнений Максвелла для рассмотрения различных вопросов теории быстро движущихся тел. Остановимся сначала на основных уравнениях квантовой электродинамики в том или ином представлении (гейзенберговском, шредингеровском, томонага-швингеровском). Во главу угла теории ставится вариационный принцип

$$\delta \int \mathcal{L}(dx) = 0 \quad (dx) = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

где лагранжиан \mathcal{L} (плотность лагранжевой функции) можно задать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi}(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + \kappa_0 \right] \psi(x) - \\ & - \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi}'(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + \kappa_0 \right] \psi'(x), \end{aligned}$$

¹⁾ Относительно литературы по этому вопросу обращаем внимание читателей наряду со статьями настоящего сборника и работами, цитированными в них и во вступительной статье, на сборники „Проблемы современной физики“, в частности, вып. 11, ИЛ, 1951.

где $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_4 = \gamma_4^T \psi^+$ означает спинор, сопряженный с ψ ; ψ^+ эрмитово-сопряжено с ψ ; спиноры $\psi' = C\bar{\psi}$ и $\bar{\psi}' = C^{-1}\psi$ являются зарядно-сопряженными к ψ и $\bar{\psi}$ соответственно; унитарная матрица C удовлетворяет условию

$$C\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu C.$$

При этом волновая функция электромагнитного поля, представленная вектор потенциалом A_μ , и волновые функции электронно-позитронного поля $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$, $\psi'(x)$ и $\bar{\psi}'(x)$ являются операторами, действующими на функцию состояния Φ являющуюся вектором в гильбертовом пространстве. Тем самым, теория формулируется в так называемом гейзенберговском представлении.

Лагранжиан \mathcal{L} удовлетворяет всем требуемым условиям инвариантности 1) функция \mathcal{L} — лоренц-инвариантна; 2) \mathcal{L} — калибровочно-инвариантна: при совместном преобразовании

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu}; \quad \psi \rightarrow e^{-i(e/\hbar c) \Lambda} \psi,$$

если $\square^2 \Lambda = 0$, то \mathcal{L} не изменяется; 3) \mathcal{L} — инверсно-инвариантна, т. е. инвариантна по отношению к инверсии всех 4-х координат (пространственных и временной). При этом следует подчеркнуть инвариантность \mathcal{L} по отношению к изменению знака времени, которая недостаточно учитывалась в предыдущих формулировках теории.

Инвариантность по отношению к изменению знака времени связана с зарядной инвариантностью лагранжиана, которая является очевидной, ввиду неизменности \mathcal{L} при замене $\psi \rightarrow \psi'$ и $e \rightarrow -e$ (см. [124]). Развиваемая подобным зарядно-симметричным образом теория (см. статью II настоящего сборника), рассматривающая электроны и позитроны эквивалентным образом, представляет ряд расчетных и физических преимуществ по сравнению с прежними формулировками, в которых электроны трактовались как частицы, а позитроны как дырки в состояниях электронов отрицательных энергий. В этой связи отметим также, что при совместной трактовке электронно-позитронного поля устраняется ряд расходимостей получающихся при раздельном вычислении интегралов по электронной и позитронной частям поля.

Вообще единая трактовка не только электронно-позитронного поля, но также и электромагнитного поля без разделения его на части, соответствующие испусканию и поглощению фотонов, и, кроме того, представляющее известные выгоды при подсчете вакуумных эффектов совместное рассмотрение продольной, поперечной и скалярной частей поля являются характерными для ряда вариантов новейшего формализма квантовой электродинамики.

Как показывает история физической науки, тенденция к единой трактовке различных видов вещества, а также требование установления инвариантности уравнений по отношению ко все более широким группам преобразований, являются, вообще говоря, прогрессивными.

Варьирование лагранжевой функции приводит к уравнениям движения для операторов полей, включающих члены взаимодействия:

$$\left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + \kappa_0 \right] \psi(x) = 0,$$

$$\square^2 A_\mu(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x) \quad \text{и т. д.},$$

где $j_\mu(x)$ — ток, получающийся из лагранжевой функции в зарядно-симметричной записи

$$j_\mu(x) = \frac{iec}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x)] = \frac{iec}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \psi(x)]$$

(квадратные скобки здесь и в дальнейшем обозначают коммутатор $[A, B] \equiv \equiv AB - BA$). Следует отметить, что это выражение для тока не требует учета „фона“, как это было необходимо в теории дырок.

К уравнениям движения следует добавить дополнительное условие для вектора состояния Φ : $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \Phi = 0$, заменяющее собой более широкое условие Лоренца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Затем, получив при помощи лагранжиана обычным образом „импульсы“, канонически-сопряженные с „координатами“ поля ψ_μ , A_μ , строим канонические, трехмерные перестановочные соотношения, связывающие значения операторов в одни и те же моменты времени:

$$\left[A_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

$$\{ \psi_\alpha(\mathbf{r}, t), (\psi(\mathbf{r}', t) \gamma_4)_\beta \} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{и т. д.}$$

(фигурные скобки здесь и в дальнейшем обозначают антикоммутатор ($\{AB\} \equiv AB + BA$)).

Из лагранжиана обычным образом могут быть получены также операторы тензоров плотности энергии $T_{\alpha\beta}$, момента количества движения поля и другие операторы, характеризующие систему. Средние значения операторов получаются по формуле $\bar{A} = (\Phi, A\Phi)$, где круглая скобка обозначает скалярное произведение.

Следует обратить внимание на то, что вектор состояния Φ в гейзенберговском представлении постоянен, в противоположность операторам поля ψ и A , зависящим от времени. Тем самым взаимодействие частиц и поля описывается изменением операторов. Поэтому уравнение Шредингеровского типа (уравнение движения для Φ) приобретает в данном представлении тривиальный вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Ввиду постоянства вектора состояния Φ , он зачастую явно в подобном формализме вообще не фигурирует.

Изложенная схема основных соотношений в принципе позволяет получить решение любой задачи квантовой электродинамики. Однако прежде всего необходимо иметь значения коммутаторов поля не только в совпадающие, но и в различные моменты времени, для чего нужно решить уравнения Дирака и Максвелла с членами взаимодействия, что, как известно, удается строго сделать лишь в очень ограниченном числе случаев.

Вообще, некоторым недостатком данного формализма является то обстоятельство, что при формулировке квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении исходные перестановочные соотношения задаются не в четырехмерном виде, а в некоторой специальной лоренцовой системе отсчета. Хотя вся теория, как можно показать, является ковариантной, т. е. лоренц-инвариантной, отсутствие явной ковариантности в исходных положениях представляет известные неудобства, значение которых, впрочем, было одно время, в частности в первые годы развития новейшей теории вакуума (1946—1951 гг.), сильно преувеличено.

Недостаточная разработанность приближенных методов решения уравнений поля и отсутствие инвариантности в трехмерных правилах перестановки привели к тому, что формализм гейзенберговского представления квантовой электродинамики, являющийся исторически первым методом квантовой теории поля

был временно оставлен, несмотря на его очевидную принципиальную простоту. Для придания явной ковариантности гейзенберговскому представлению было предложено заменить выполнимость перестановочных соотношений в данный момент времени условием их выполнения для пространственно-подобных расхождений, когда $(x - x')^2 > 0$. Тогда, если x лежит на пространственно-подобной гиперповерхности σ ,

$$\int_{\sigma} \{ \psi_{\alpha}(x), (\bar{\psi}(x') \gamma_{\lambda})_{\beta} \} d\sigma'_{\lambda} = \frac{1}{i} \delta_{\alpha\beta},$$

$$\int_{\sigma} \left[A_{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x'_{\lambda}} A_{\nu}(x') \right] d\sigma'_{\lambda} = \frac{\hbar c}{i} \delta_{\mu\nu}.$$

Полный заряд и 4-импульс приобретают вид

$$Q = \frac{1}{c} \int_{\sigma} d\sigma_{\lambda} j_{\lambda}(x),$$

$$P_{\mu} = \frac{1}{i} \int_{\sigma} d\sigma_{\lambda} T_{\lambda\mu}(x).$$

Однако этот метод оказался громоздким, и с его помощью не было получено каких-либо новых конкретных результатов, хотя идея введения пространственно-подобных гиперповерхностей была широко применена в другом formalizme, так называемом представлении взаимодействия.

Ввиду указанных обстоятельств для решения проблем квантовой электродинамики было предложено, притом еще до развития новой теории вакуума использовать шредингеровское представление, являющееся обобщением трактовок квантовой механики частиц. Уравнение движения для функции состояния в шредингеровском представлении имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial F}{\partial t} = HF,$$

где H — полный гамильтониан, включающий член взаимодействия наряду с гамильтонианами свободных полей. Это уравнение для F имеет в точности форму обычного нерелятивистского шредингеровского уравнения для ψ -функции в конфигурационном пространстве. В шредингеровском представлении эволюция системы со временем описывается изменяющимся вектором состояния F , тогда как операторы остаются постоянными. Как известно, в квантовой механике частиц (не в теории поля!) оказалось, вообще говоря, более удобным применять именно шредингеровское, а не гейзенберговское представление и операторные уравнения типа $p = -(\partial H / \partial q)$ и т. д. Оба formalizma связаны в квантовой механике простым образом, поскольку каждому оператору в гейзенберговском представлении можно сопоставить соответствующую матрицу в шредингеровском представлении

$$A_{mn} = \int \psi_m^* A \psi_n d\tau = \int \psi_m^*(\mathbf{r}) A \psi_n(\mathbf{r}) d\tau e^{-i(\hbar)(E_n - E_m)t}.$$

Однако шредингеровское представление, несмотря на его наглядность и ряд других преимуществ, в особенности простоту получения приближенных решений, оказывается обладает значительными неудобствами в теории поля и, в частности, в квантовой электродинамике. Это связано, прежде всего, с отсутствием инвариантности, притом в двух отношениях. Во-первых, время здесь явно выделено по сравнению с другими координатами; во-вторых, гамильтониан состоит из двух членов

$$H = \int \mathcal{H}_0 d\tau + \int \mathcal{H} d\tau,$$

где \mathcal{H}_0 — сумма плотностей энергии свободных электронно-позитронного и электромагнитного полей (44-компонент тензоров энергии), а \mathcal{H} — плотность энергии взаимодействия, совпадающая со взятым с обратным знаком лагранжианом взаимодействия и являющаяся инвариантом $\mathcal{H} = -\mathcal{G}' = V$. Сложение указанных двух разнородных величин представляет одну из наименее удовлетворительных сторон шредингеровского представления.

Для устранения недостатков гейзенберговского и шредингеровского представлений было предложено перейти к новому, в некотором смысле смешанному представлению Томонага, или представлению взаимодействия, развивавшемуся усиленно в 1946—1949 гг. (см. статьи I и II настоящего сборника). В представлении взаимодействия вектор состояния зависит от времени (как в шредингеровском представлении), но его изменение определяется лишь взаимодействием полей и частиц (лагранжианом взаимодействия); операторы A_μ , ψ в свою очередь зависят от времени, но как операторы свободных полей в гейзенберговском представлении.

В квантовой электродинамике переход от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия, а также к другим представлениям задается не меняющим средних значений каноническим преобразованием

$$\Phi \rightarrow U\Phi = \Psi$$

(операторы поля преобразуются по закону $A \rightarrow UAU^{-1}$), где U — унитарный оператор, подчиняющийся уравнению

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = VU.$$

Отсюда, в силу постоянства Φ , следует уравнение движения для вектора состояния Ψ в представлении взаимодействия

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = V\Psi.$$

Для наглядности следует подчеркнуть соответствие этого уравнения теории поля с уравнением для коэффициентов разложения ψ -функции по функциям невозмущенной задачи и нерелятивистской квантовой механике частиц. Как известно, полагая $\psi = \sum c_k(t) \psi_k(x)$, где $\psi_k(x) = \psi_k^0(\mathbf{r}) e^{-i(E_k/\hbar)t}$ (символически, $\psi = c\psi_0$), мы получим без всяких пренебрежений вместо шредингеровского уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad H = \mathcal{H}_0 + V$$

уравнение

$$i\hbar \frac{\partial c_k}{\partial t} = \sum_l V_{kl} c_l,$$

или, символически,

$$i\hbar \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = V\mathbf{c},$$

где

$$V_{kl} = \int \psi_k^* V \psi_l d\tau e^{-i(t/\hbar)(E_k - E_l)}.$$

Подобное уравнение для дираковских коэффициентов c_k в нерелятивистской квантовой механике является аналогом уравнения движения в представлении взаимодействия и приходится лишь удивляться тому, что представление Томонага было применено в квантовой электродинамике столь поздно.

При указанном выше каноническом преобразовании уравнения движения для операторов поля переходят в уравнения свободных полей. Аналогичным образом производится переход от гейзенберговского к шредингеровскому пред-

ставлению, при этом только в уравнение движения вместо V следует подставлять полный гамильтониан \mathcal{H} . Следует заметить, что подобное каноническое преобразование при помощи унитарного оператора U может служить примером ряда широко применявшихся преобразований (см. Швингер, статья II) с целью переброски тех или иных членов из уравнений движения для операторов поля в уравнение движения типа Шредингера для вектора состояния или наоборот.

Переход к томонага-швингеровскому представлению, возможный как со стороны гейзенберговского, так и со стороны шредингеровского представлений, явным образом устраняет трудность с неинвариантным гамильтонианом в уравнении для вектора состояния, имеющуюся в шредингеровском представлении. Устранение второй трудности, присущей всем вариантам квантовой электродинамики, основывающимся на гамильтоновом формализме, и связанной с особым значением, которое играет время в перестановочных соотношениях и в уравнении движения для вектора состояния, было достигнуто Томонага посредством введения обобщенного формализма, в котором вместо времени (нормаль к плоскости $t = \text{const}$) используются нормали к пространственно-подобным гиперповерхностям σ в четырехмерном пространстве. В частности, неинвариантное условие $t = \text{const}$, используемое, например, в трехмерных правилах перестановки, заменяется на инвариантное условие $\sigma = \text{const}$; действительно, известно, что при лорентцовых преобразованиях пространственно-подобные гиперповерхности переходят друг в друга, образуя группу¹⁾.

При использовании подобного сверхмноговременногo формализма вместо уравнения движения шредингеровского типа для вектора состояния в представлении взаимодействия получается полностью инвариантное уравнение Томонага

$$i\hbar \frac{\delta \Psi(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = V(x) \Psi(\sigma)$$

[здесь $V(x)$ инвариантный эрмитов оператор, характеризующий взаимодействие и имеющий размерность плотности энергии]. Точно так же можно обобщить трехмерные правила перестановки, заменяя соотношения между переменными на гиперповерхности $t = \text{const}$ правилами перестановки для операторов поля в точках, лежащих на произвольной пространственно-подобной гиперповерхности.

Выражая теперь решения для операторов, подчиняющихся в представлении взаимодействия уравнениям свободных полей, через граничные условия на пространственно-подобной гиперповерхности при помощи соответствующих сингулярных функций, в частности, для уравнения Дирака в виде

$$\psi = \int_{\sigma} S(x - x') \gamma_{\mu} \psi(x') d\sigma'_{\mu},$$

где $S(x - x')$ — запаздывающая функция Грина (гриниан) уравнения Дирака, и подставляя это выражение для ψ и аналогичное выражение для A_{μ} в трехмерные перестановочные соотношения, получим искомые четырехмерные перестановочные соотношения, совпадающие по виду с формулами для свободных полей в гейзенберговском представлении

$$\begin{aligned} [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x - x'), \\ \{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x - x') \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Для мезонного псевдоскалярного или скалярного поля имеем

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\hbar c \Delta(x - x').$$

(Относительно анализа дополнительного условия Лоренца отсылаем читателя к статьям II и VII настоящего сборника.)

¹⁾ См. также обзоры [5].

Таким образом, мы нашли все основные соотношения квантовой электродинамики (уравнение движения для вектора состояния и правила перестановки) в представлении взаимодействия, которые позволяют в принципе решать очень многие задачи. Большинство работ по квантовой теории поля в 1947—1951 гг. было выполнено в этом представлении.

Отсылая за деталями оперирования с используемыми гиперповерхностями σ к статьям I и II настоящего сборника и к статье Дайсона, перевод которой дан в сборнике [1], ограничимся в этом пункте двумя замечаниями.

Во-первых, введение σ и использование аппарата функционального анализа является дальнейшим обобщением многовременного формализма Дирака—Фока—Подольского, в котором каждой частице сопоставляется свое время t , а все электромагнитное поле имеет общее время t_1 . Введение σ означает в известной мере переход к сверхмноговременному формализму, в котором каждой точке пространства соответствует свое время.

Во-вторых, следует подчеркнуть, что так же, как и в случае многовременного формализма, использование сверхмноговременного формализма в представлении взаимодействия не привело к каким-либо значительным усовершенствованиям в теории, и его роль, казавшаяся одно время преувеличенно важной, сейчас в значительной мере свелась к вспомогательной службе при доказательстве возможности записи гамильтонова формализма без выделения времени. Уравнения же квантовой теории поля в представлении взаимодействия при решении конкретных задач записываются чаще всего с помощью обычного времени.

Отметим еще, что в противоположность сделанному Томонага ограничению пространственно-подобными σ , оказавшемуся довольно плодотворным в период развития формализма представления взаимодействия, Вейсс, Дирак и др. (см., например, [6]) предлагали использовать в теории поля аппарат функционального анализа с произвольными гиперповерхностями. Несмотря на то, что таким путем удалось осуществить обобщение на сверхмноговременной формализм, переход к соответствующим перестановочным соотношениям давал аналог перестановочных соотношений четырехмерного типа, т. е. требовал решения уравнений движения для операторов поля с членами взаимодействия. Таким образом, вновь возникала одна из трудностей гейзенберговского представления, заключающаяся в необходимости решения уравнений движения, притом в данном случае в излишне усложненном виде. В то же время при ограничении пространственно-подобными σ по существу достаточно иметь получающиеся без особого труда решения уравнений для свободных полей.

Относительно формализма представления взаимодействия в литературе был высказан ряд критических замечаний. Хотя этот формализм Томонага—Швингера позволил впервые вычислить вакуумную добавку к магнитному моменту с относительной точностью до α и произвести ряд других важных расчетов, однако его известная громоздкость и некоторые другие недостатки, на которых мы сейчас остановимся, затрудняли его использование. Эквивалентный представлению Томонага, но более простой и наглядный формализм Фейнмана (см. ниже) пролил свет на многие вопросы квантовой теории поля, но также не дал возможности быстро продвинуться вперед на пути вычисления поправок высшего порядка.

Поэтому разумный смысл приобрел возврат к гейзенберговскому представлению с попыткой преодоления в рамках самого формализма отмеченных выше его недостатков, оказавшихся к тому же при ближайшем рассмотрении не столь серьезными.

Целесообразность возврата к гейзенберговскому представлению диктуется также невозможностью простой трактовки в представлении взаимодействия квантовой мезодинамики. Действительно, оказывается, что не только операторы мезонного поля, но и результаты приближенных вычислений, будут в данном случае зависеть от формы поверхности σ и от направления нормали к σ , что физически очевидно лишено смысла. В числе недостатков представления взаи-

модействия следует отметить также фактическую необходимость применять во всех задачах метод последовательных приближений при отсутствии общего доказательства сходимости получающихся рядов, а также неудобства его применения для связанных состояний. Отметим, наконец, что, производя каноническое преобразование от исходного гейзенберговского представления к представлению Томонага, мы не можем быть уверены в том, что при этом не проявятся так называемые „патологические“ свойства неограниченных операторов (см., например [7]), которые исказят характер решений и без того пораженных язвами расходимостей. В той же связи следует отметить, что приближенные расчеты в представлении взаимодействия приводили к выражениям, не являющимся калибровочно-инвариантными. Устранения подобных лишнего физического смысла членов удавалось достигнуть лишь при помощи специальных приемов регуляризации; в частности, получить требуемую исчезающую массу фотона оказалось возможным лишь при введении регуляризации Паули — Вилларса.

Следует отметить, что желательность возврата к гейзенберговскому представлению в те годы (1946—1951 гг.), когда большинство расчетов производилось при помощи представления взаимодействия или метода Фейнмана, была впервые отмечена в статьях Янга и Фельдмана [8], а также Кэллена [9].

В близкой связи с содержанием работы Кэллена находятся исследования А. Д. Галавина [10], который, работая в гейзенберговском представлении, независимо получил уравнения, также дающие возможность определить вакуумные поправки в квантовой электродинамике по методу последовательных приближений.

Как уже указывалось выше, в гейзенберговском представлении мы можем подчитать интересующие нас эффекты и в том числе вакуумные поправки в ряде конкретных задач, если сумеем найти точное, или по крайней мере приближенное, решение дираковских уравнений в заданном электромагнитном поле. В этой связи обратимся к новому варианту гейзенберговского представления, к которому вернулся Швингер. Непосредственно за работами Швингера (статья II, части I, II, III), посвященными решению ряда основных вакуумных проблем в представлении взаимодействия, можно поставить его статью „Теория квантованных полей“ (статья II, часть IV), в которой производится с новой точки зрения детальный анализ перестановочных соотношений и дается новая общая формулировка квантовой электродинамики локализованных полей; при этом делается ударение на функции преобразования, описывающей эволюцию системы во времени и связывающей величины, заданные на различных пространственно-подобных поверхностях. Эта работа содержит также важный анализ инвариантности по отношению к инверсии времени, который приводит к новому выводу теоремы Паули о спине и статистике.

В дальнейшем развивая идеи данной работы, Швингер с сотрудниками пришел к специальному варианту гейзенберговского представления, в основе которого лежат гринианы, и с его помощью рассчитали ряд важных эффектов.

Вторая серия работ Швингера и его сотрудников, представляющая немалый интерес как в принципиальном смысле последовательной новейшей трактовки гейзенберговского представления, так и в отношении разработки эффективных методов расчета высших приближений в теории лэмбовского сдвига, тонкой структуры, вакуумного магнитного момента и других явлений, начинается со статьи Швингера „О калибровочной инвариантности и поляризации вакуума“ (1951 г.) (см. статью VIII настоящего сборника). Характерным является также использование не только лорентцовских и инверсно-инвариантных, но также и явно калибровочно-инвариантных величин, в результате чего устраняются трудности, связанные с массой фотона и, кроме того, применение собственного времени в качестве основного параметра.

Наряду с гейзенберговским, шредингеровским и томонаговским представлениями, Дайсон разработал некоторое более общее „промежуточное“ представление операторов, по отношению к которому гейзенберговские операторы

являются частным случаем [11]. В промежуточном представлении изменения в состоянии системы, происходящие в области малых частот, описываются изменением вектора состояния как в представлении взаимодействия, тогда как в области высоких частот имеют место изменения со временем операторов поля, как в гейзенберговском представлении. При этом используются с самого начала средние по времени от операторов по некоторым конечным пространственно-временным областям. Промежуточное представление оказывается удобным для изолирования бесконечностей и проведения перенормировки заряда.

Отметим сейчас некоторые идеи квантовой теории поля, связанные с работами Штюкельберга. Штюкельберг и его сотрудники опубликовали в последние годы ряд статей [12], в которых параллельно с другими авторами анализировалась и развивалась теория S -матрицы рассеяния и устанавливалась ковариантная форма теории поля, по существу весьма близкая к формализму представления взаимодействия. Во главу угла теории здесь ставится, однако, не дифференциальное уравнение типа Томонага, а соответствующее интегральное уравнение вида

$$\Psi[\tau''] = S[\tau'', \tau'] \Psi(\tau'), \quad S^+ \cdot S = 1,$$

где унитарный оператор S описывает изменение функционала Ψ при переходе от одной пространственно-подобной гиперповерхности (τ'), определяющей момент времени, к другой (τ''). Кроме требования релятивистской инвариантности S , которая должна быть скаляром, и ее унитарности, связанной с вероятностным характером волновой функции, во главу угла в теории ставится также особым образом сформулированное условие причинности. Последнее сводится к использованию в качестве величины, характеризующей взаимодействие в квантовой теории поля, определенной сингулярной „причинной“ (каузальной) функции D_c , обобщающей запаздывающую гриновскую функцию классической теории волнового даламберовского уравнения (и в дальнейшем к применению соответственного обобщения в теории электрона). Впоследствии D_c обозначалось через D_F (Фейнман — Дайсон) или Δ_+ (Швингер). Оказывается (см. приложение о сингулярных функциях, п. IV), нужно положить

$$D_c(x) = D_s(x) + \frac{i}{2} D_1(x) = D_{\text{ret}}^+(x) + D_{\text{av}}^-(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D^+(x) + \theta^-(x^4) D^-(x)].$$

Действительно, вполне аналогично рассуждениям классической электродинамики, при помощи D_c учитывается не только запаздывающее воздействие со стороны событий, имевших место в прошлом, но также граничное условие в будущем, посредством опережающих потенциалов. D_c содержит в будущем ($x_4 > 0$) только волны с положительными частотами и в прошлом лишь волны с отрицательными частотами, что соответствует переносу взаимодействия посредством квантов положительной энергии. Следует, однако, подчеркнуть, что интересные во многих принципиальных пунктах работы группы Штюкельберга не привели к каким-либо конкретным результатам, повидимому, ввиду отсутствия контакта с экспериментом, и несколько отошли поэтому на второй план.

Заметим еще, что вопросы теории вакуума можно рассматривать, пользуясь методом функционалов Фока, с успехом применявшимся ранее в некоторых проблемах квантовой электродинамики [13, 14]. При помощи метода функционалов можно построить теорию S -матрицы, а также получить приближенные выражения с точностью до второго порядка для оператора вакуумных поправок и полевой электромагнитной энергии электрона [15]. Совпадение результатов, полученных методом функционалов с известными выводами Фейнмана — Швингера и др., не вызывает удивления, поскольку ранее была доказана эквивалентность этого метода с формализмом обычной квантовой электродинамики. Как было подчеркнуто Ю. В. Новожиловым [15], метод функционалов позволяет избежать применения многовременного формализма и вторичного квантования для электронов.

3. Решение уравнений квантовой электродинамики

а) Методы решений в представлении Томонага и Гейзенберга. Поясним сейчас коротко основные методы решений уравнений квантовой электродинамики, отсылая за всеми подробностями к статьям настоящего сборника и дальнейшей литературе. Для решения уравнения Томонага следует положить

$$\Psi(\sigma) = U(\sigma) \Psi(-\infty),$$

выражая тем самым значение вектора состояния на произвольной пространственно-подобной гиперповерхности σ через его значение в бесконечном прошлом.

Заметим, что оператор столкновения $U(+\infty)$ совпадает с S -матрицей рассеяния Гейзенберга. Уравнение, которому удовлетворяет унитарный оператор $U(\sigma)$:

$$i\hbar c \frac{\delta U(\sigma)}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}(x) U(\sigma)$$

вместе с начальным условием

$$U(-\infty) = 1,$$

можно заменить интегральным уравнением

$$U(\sigma) = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \mathcal{H}(x') U(\sigma') d\omega',$$

или, в симметричной относительно прошлого и будущего форме

$$U(\sigma) = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') U(\sigma') \frac{1 + \varepsilon(\sigma, \sigma')}{2} d\omega'.$$

Здесь инвариантный знаковый временной символ $\varepsilon(\sigma, \sigma') = \pm 1$ (в зависимости от того, предшествует ли σ поверхности σ' или наоборот).

Решение интегрального уравнения удобно представить в следующей итерированной форме, соответствующей методу последовательных приближений и заключающейся в подстановке в правую часть уравнения приближенных значений U , начиная с $U_0 = U(-\infty) = 1$:

$$U_1(\sigma) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') \frac{1 + \varepsilon(\sigma, \sigma')}{2} d\omega',$$

$$U_2(\sigma) = 1 + \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') \frac{1 + \varepsilon(\sigma, \sigma')}{2} \left[1 + \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x'') \frac{1 + \varepsilon(\sigma', \sigma'')}{2} d\omega''\right] d\omega'.$$

Используя оператор порядка (или упорядочения во времени) P , член n -го приближения в $U(\infty) \equiv S$ можно написать [в виде следующей фундаментальной, часто применяемой, формулы:

$$S_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathcal{H}(x') \mathcal{H}(x'') \dots \mathcal{H}(x^{(n)})) d\omega' d\omega'' \dots d\omega^{(n)}.$$

Важно отметить, что матрица рассеяния $S = U(\infty)$, определенная выше в представлении взаимодействия Томонага—Швингера, в точности совпадает с тем оператором в гейзенберговском представлении, который преобразует в решениях уравнений движения падающие волны в рассеянные. Действительно, падающие волны (ψ^{in}, A^{in}) , являющиеся в гейзенберговском представлении свободными при $t = -\infty$, так же, как и расходящиеся волны $(\psi^{out}, A^{out}, t = +\infty)$, удов-

летворяют в случае рассеяния одним и тем же перестановочным соотношениям для свободных полей:

$$\begin{aligned} \{ \psi_{\alpha}^{in}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{in}(x') \} &= -iS_{\alpha\beta}(x-x'), \\ [A_{\nu}^{in}(x), A_{\lambda}^{in}(x')] &= i\hbar c \delta_{\nu\lambda} D(x-x'), \\ \{ \psi_{\alpha}^{out}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{out}(x') \} &= -iS_{\alpha\beta}(x-x') \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Следовательно, операторы ψ^{in} , A^{in} и ψ^{out} , A^{out} являются унитарно-эквивалентными, т. е. могут быть получены друг из друга с помощью некоторого унитарного оператора S

$$\begin{aligned} \psi^{out}(x) &= S^{-1} \psi^{in}(x) S, \\ A_{\nu}^{out}(x) &= S^{-1} A_{\nu}^{in}(x) S \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Как было отмечено Янгом и Фельдманом [8] и Кэлленом [9], унитарный оператор S совпадает также с S -матрицей Гейзенберга, подобно оператору столкновений Швингера $U(\infty)$. Только что указанный результат, подчеркнув фундаментальную роль S -матрицы рассеяния, вместе с тем, со своей стороны, показал, что представление взаимодействия, наиболее широко использовавшееся раньше (1946—1951 гг.), не является единственной последовательной трактовкой современной квантовой электродинамики. С другой стороны, решение уравнений движения в гейзенберговском представлении можно искать в виде рядов по постоянной связи [9]:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^{(0)} + e\psi^{(1)} + \dots, \\ A_{\nu} &= A_{\nu}^{(0)} + eA_{\nu}^{(1)} + \dots, \end{aligned}$$

где операторы $\psi^{(0)}$ и $A_{\nu}^{(0)}$ подчиняются уравнениям свободных полей. При подстановке указанных рядов в уравнения движения для операторов поля получаются следующие рекуррентные соотношения для последовательных членов разложения:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + x_0 \right) \psi^{(n+1)}(x) &= \frac{i}{2} \sum_{m=0}^n \{ A_{\nu}^{(m)}(x), \gamma_{\nu} \psi^{(n-m)}(x) \}, \\ \square A_{\mu}^{(n+1)}(x) &= -\frac{i\hbar c}{2} \sum_{m=0}^n [\bar{\psi}^{(m)}(x), \gamma_{\mu} \psi^{(n-m)}(x)]. \end{aligned}$$

В частности, для членов первого приближения отсюда получим

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= -i \int \bar{S}(x-x') \gamma A^{(0)}(x') \psi^{(0)}(x') (dx'), \\ A_{\mu}^{(1)}(x) &= \frac{i\hbar c}{2} \int \bar{D}(x-x') [\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x')] (dx'), \end{aligned}$$

где член $[\bar{\psi}^{(0)}(x'), \gamma_{\mu} \psi^{(0)}(x')]$ соответствует нулевому приближению оператора тока, а $\bar{S}(x-x')$ и $\bar{D}(x-x')$ — гринианы уравнения Дирака и соответственно уравнения Даламбера.

Члену n -го порядка можно также придать характерный вид повторных коммутаторов (см. статью II):

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x) &= i^n \int_{-\infty}^{x_0} dx' \dots \int_{-\infty}^{x_0^{(n-1)}} dx^{(n)} [\mathcal{E}(x^{(n)}), [\dots [\mathcal{E}(x') \psi^{(0)}(x)] \dots]], \\ A_{\mu}^{(n)}(x) &= i^n \int_{-\infty}^{x_0} dx' \dots \int_{-\infty}^{x_0^{(n-1)}} dx^{(n)} [\mathcal{E}(x^{(n)}), [\dots [\mathcal{E}(x'), A_{\mu}^{(0)}(x)] \dots]]. \end{aligned}$$

При помощи этих формул сравнительно нетрудно установить {полную эквивалентность окончательных результатов решения уравнений квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия. В швингеровском новом варианте гейзенберговского представления также были развиты эффективные методы теории возмущений.

Поясным теперь коротко некоторые стороны вычисления матричного элемента члена n -го приближения матрицы рассеяния $\langle S_n \rangle$ для какого-либо процесса, где S_n было найдено в виде

$$S_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar c} \right)^n \int P \left(\mathcal{H}(x_1) \dots \mathcal{H}(x_n) \right) (dx_1) \dots (dx_n),$$

причем в квантовой электродинамике плотность энергии взаимодействия

$$H(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x).$$

При развитии новейшей квантовой электродинамики приходится иметь дело с различными сложными эффектами, которые можно интерпретировать как испускание и поглощение виртуальных частиц (фотонов, электронов-позитронов) в промежуточных состояниях. При вычислении матричного элемента члены с коммутаторами и антикоммутаторами виртуальных частиц будут давать средние по вакууму соответствующих выражений. Их вычисление для электромагнитного и электронно-позитронного поля привело к следующим фундаментальным выражениям:

$$\langle \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \rangle_0 = (\Phi_0, \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \Phi_0) = \hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x - x'),$$

$$\langle [\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x')] \rangle_0 = (\Phi_0, [\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x')] \Phi_0) = -S_{\beta\gamma}^{(1)}(x - x') \quad (\Phi_0 \text{ — вакуумный вектор состояния}).$$

При вычислении этих выражений использовано следующее определение вакуума электромагнитного поля (см. статью II):

$$A_{\mu\perp}^{(+)}(x) \Phi_0 = 0$$

$(A_{\mu\perp}^{(+)}(x) \text{ — положительно-частотная часть поперечной компоненты вектор-потенциала } A_\mu)$, которое, наглядно говоря, соответствует невозможности уничтожения частиц в вакуумном состоянии, поскольку последнее соответствует отсутствию реальных поперечных фотонов. В дальнейшем оказалось более целесообразным применить новое определение вакуума:

$$A_\mu^{(+)}(x) \Phi_0 = 0,$$

где $A_\mu^{(+)}(x)$ положительно-частотная составляющая полного вектор-потенциала без разделения на поперечную и продольную компоненты. Наиболее последовательное определение вакуума электромагнитного поля было дано в работе Гупта [16], обратившего должное внимание на учет условия Лоренца. В самом деле из более раннего предварительного анализа Швингера (см. статью II часть II) вытекала возможность наличия в вакууме бесконечного числа пар фотонов, соответствующих продольной части векторного потенциала и скалярному потенциалу, энергии которых, впрочем, взаимно компенсировались. Для полного последовательного устранения возможности наличия каких бы то ни было фотонов в вакууме Гупта [16] предложил ввести indefinite метрику в гильбертовом пространстве векторов состояния.

Аналогичным образом вакуум спинорного поля определяется условиями

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) \Phi_0 &= 0; & \bar{\psi}^{(+)}(x) \Phi_0 &= 0; \\ \psi'^{(+)}(x) \Phi_0 &= 0, \end{aligned}$$

что соответствует невозможности уничтожения реальных электронов и позитронов в вакууме (здесь $\psi^{(+)}(x)$ обозначает положительно-частотную часть оператора $\psi(x)$).

Возвращаясь к вычислению члена матричного элемента S_n , отметим, что остающиеся сверх вакуумных значений операторы свободных полей заменяются в случае, например, задачи рассеяния на плоские волны или соответственно на внешние поля.

б) Метод упорядочения. К эквивалентным результатам приводит метод вычисления матричных элементов отдельных членов S -матрицы, предложенный Урье и Киндом [17] и разработанный Виком (см. статью VII). Идея данного метода, весьма тесно примыкающего к излагаемому ниже формализму Фейнмана—Дайсона и в известной мере оказавшегося его истолкованием, заключается в установлении ряда относительно простых правил для упорядочивания членов S -матрицы, путем перестановки множителей в отдельных ее членах S_n с целью облегчения физической интерпретации и последующего вычисления матричного элемента.

Действительно, целесообразно представить матричный элемент в форме, в которой все операторы уничтожения реальных, присутствующих в конце процесса частиц („свободные“ операторы по терминологии Дайсона) стояли бы справа от операторов порождения, причем последние находились бы непосредственно рядом с предыдущими. Операторы виртуальных частиц следует скомбинировать в пары, соответствующие их последовательному порождению и уничтожению.

Возможность подобного упорядочивания связана с тем, что операторы различных фотонов, а также электронов-позитронов и фотонов между собой коммутируют, а операторы различных электронов-позитронов антикоммутируют. В результате подобных перестановок получаем в конце концов в каком-либо члене матрицы S_n наряду с операторами порождения реальных частиц, стоящими слева от операторов поглощения, также коммутаторы и антикоммутаторы операторов виртуальных частиц. Наряду с хронологическим P -произведением Дайсона вводится еще два других типа упорядоченных произведений T и N . Произведение хронологического типа, обозначаемое через T , определяется как P -произведение с добавочным знаковым множителем $\delta = \pm 1$ в зависимости от четности перестановки электронно-позитронных операторов, например,

$$T(\psi(x), \bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & \text{если } x_0 > y_0, \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x), & \text{если } x_0 < y_0, \end{cases}$$

в отличие от

$$P(\psi(x), \bar{\psi}(y)) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y) & \text{при } x_0 > y_0, \\ \bar{\psi}(y)\psi(x) & \text{при } x_0 < y_0. \end{cases}$$

Таким образом, в случае спинорных операторов A и B

$$T(A(x)B(y)) = A(x)B(y) \frac{1 + \epsilon(x, y)}{2} - B(y)A(x) \frac{1 - \epsilon(x, y)}{2}.$$

Нормальное, или N -произведение множителей $U, V \dots Z$ определяется как специальным образом упорядоченное произведение, в котором операторы порождения электронов, позитронов и фотонов стоят слева, а операторы уничтожения стоят справа и все произведение умножается на множитель δ_p , определенный выше. Например ¹⁾,

$$\begin{aligned} N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= N(u(x)\bar{u}(y)) + N(u(x)v(y)) + N(\bar{v}(x)\bar{u}(y)) + N(\bar{v}(x), v(y)) = \\ &= -\bar{u}(y)u(x) + u(x)v(y) + \bar{v}(x)\bar{u}(y) + \bar{v}(x)v(y). \end{aligned}$$

¹⁾ Мы отступаем здесь вместе с А. И. Ахизером от наименования нормального произведения как S -произведения и от обозначения его двумя точками, например $:\psi(x)\psi(y): = -:\psi(y)\psi(x):$ ввиду очевидного неудобства записи с двоеточием и большой нагрузки, которую и без того несет буква S .

При этом спинорные операторы представляются в виде операторов порождения и уничтожения, например

$$\psi(x) = u(x) + \bar{v}(x) \quad (u = \psi(+); \quad v = \bar{\psi}(+)),$$

где $u(x)$ уничтожает электроны и т. д.

Аналогично для вектор-потенциала электромагнитного поля $A_\mu(x)$ полагаем

$$A_\mu(x) = a_\mu(x) + a_\mu^+(x),$$

где $a_\mu(x)$ уничтожает фотоны и т. д.

Способ получения нормального произведения станет ясным, если вспомнить, что

$$u(x)\bar{u}(y) = \{u(x), \bar{u}(y)\} - \bar{u}(y)u(x),$$

где антикоммутирует является c -числом, а не оператором.

Заметим, что

$$N(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y) \quad \text{и} \quad N(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) = \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y).$$

Любопытно отметить, что оператор дираковского тока в представлении взаимодействия можно записать в виде нормального произведения

$$j_\mu(x) = iecN(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)).$$

Подобное представление j_μ эквивалентно записи тока в зарядно симметричной форме, которая была указана выше $j_\mu = \frac{iec}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\psi(x)]$.

Как легко видеть $N(\bar{\psi}(x)\psi(y)) = -N(\psi(y)\bar{\psi}(x))$; иначе говоря, оба члена тока в швингеровской записи имеют одинаковые N -произведения, но обратные по знаку и равные по абсолютной величине средние вакуумные значения.

Существенное для данного формализма соотношение заключается в формуле, связывающей хронологическое произведение с нормальным произведением. Например, для случая двух множителей

$$T(uv) = N(uv) + \underline{uv},$$

где соединительным значком снизу обозначено „свертывание“ (контракция, связь) двух операторных множителей; свертывания *различных* полей равны согласно определению нулю:

$$\underline{\psi A} = 0.$$

Аналогично имеем

$$\underline{\psi(x)\psi(y)} = \underline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0.$$

Важную роль играют значения следующих свертываний, являющихся c -числами:

$$\begin{aligned} \underline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= \{u(x), \bar{u}(y)\} = \sum_{r>} \psi_r(x)\bar{\psi}_r(y) && \text{при } x_0 > y_0, \\ &= -\{\bar{v}(x), v(y)\} = -\sum_{r<} \psi_r(x)\bar{\psi}_r(y) && \text{при } x_0 < y_0, \end{aligned}$$

где в первом случае суммирование распространяется по волновым функциям состояний положительной, во втором — отрицательной энергии. Тем самым мы вновь приходим со стороны рассматриваемого сейчас формализма упорядоченных произведений к сингулярным причинным функциям, играющим фундаментальную роль в новейшей квантовой электродинамике:

$$\begin{aligned} \underline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} &= \frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^F, \\ \underline{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} &= -\frac{1}{2} S_{\alpha\beta}^F, \\ \underline{A_\mu(x)A_\nu(y)} &= \frac{1}{2} \hbar c \delta_{\mu\nu} D_F(x-y). \end{aligned}$$

Напомним, что среднее по вакууму значение хронологического упорядоченного коммутатора для вектор-потенциала электромагнитного поля равно, согласно Дайсону,

$$\langle P [A_\mu(x), A_\nu(y)] \rangle_0 = \frac{1}{2} \hbar c \delta_{\mu\nu} D_F(x-y),$$

$$\langle P [\bar{\Psi}_\alpha(x), \psi_\beta(y)] \rangle_0 = \frac{1 + \varepsilon(x, y)}{2} S_{\alpha\beta}^F(x-y).$$

Краткие сведения о функциях D_F и S_F и др. даны в конце настоящей статьи (приложение о сингулярных функциях, стр. LII).

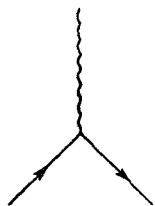
Развитый подобным образом формализм может быть непосредственно применен к вычислению матричного элемента члена какого-либо порядка в S -матрице, в которой хронологическое произведение может быть сведено к нормальным произведениям и свертываниям (контракциям). При этом наглядным образом свертывания соответствуют поглощению и испусканию одних и тех же частиц, т. е. заменяют поглощение и испускание виртуальных частиц в других формулировках.

в) Графическая интерпретация Фейнмана. Перейдем теперь к фейнман-дайсоновской интерпретации матричных элементов S_n . В то время как Швингер и Штюкельберг проводят вычисления матричных элементов, сводя непосредственно вакуумные члены к причинным функциям, а Урьё—Кунд—Вик делают ударение на алгебраических правилах, Фейнман и за ним Дайсон применяют более наглядную графическую интерпретацию при помощи диаграмм или графиков, получившую широкое применение в литературе последних лет. Последнее обстоятельство связано в известной мере с тем, что статьи Фейнмана написаны в наглядном, апеллирующем к интуиции стиле, хотя, конечно, метод диаграмм по существу совершенно эквивалентен предыдущим. Дайсон довольно удачно привел в систему фейнмановские результаты в виде нескольких правил расчета матричных элементов, которые непосредственно вытекают также из формализма упорядочивания Вика. Следует отметить, что увлечение диаграммами Фейнмана привело к известным преувеличениям и распространению представления, что диаграммы являются не вспомогательной иллюстрацией, но связаны с сущностью физического процесса. Наглядным опровержением подобного взгляда, против которого возражал, в частности, также Кэллен, служат работы группы Швингера, в которых вовсе не применяются какие-либо диаграммы, как и труды других авторов (А. Соколов, Вайскопф и др.), приходящих к эквивалентным результатам. Несомненно, однако, что в трудных проблемах теории поля, в особенности связанных с проблемами вакуума, диаграммы играют полезную роль.

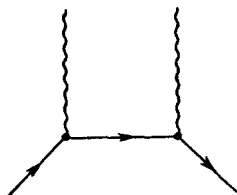
Поясним коротко сущность сопоставления матричному элементу диаграммы, которая конструируется из n вершин (для члена S_n), а также фотонных и электронных линий, исходящих из этих вершин. В вершинах x_i происходит взаимодействие электронов с фотонами, либо с внешними полями. Электронно-позитронные линии будем обозначать обычной, сплошной линией, отмечая притом их направление („направленные“ линии). Фотоны будем обозначать волнистыми линиями. В дальнейшем можно будет обозначить мезоны штриховыми черточками, нуклоны ломаными линиями, гравитоны точечным пунктиром и т. д. Отдельные множители $\bar{\psi}$, ψ , $A(x)$, соответствующие электронам-позитронам либо фотонам, реально испускаемым в конце процесса, либо реально поглощенным, будут изображаться линиями со свободными концами, причем линия $\psi(x)$ будет направлена во внутрь диаграммы, а линия $\bar{\psi}(x)$ — во вне. С каждой точкой x_i будет связан член взаимодействия $\mathcal{H}_i = -ieA_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Свертывание между величинами $A(x)$ и $A(y)$ заменяется фотонной линией между точками x и y . Свертыванию же между $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(y)$ будет соответствовать на диаграмме обычная линия, направленная от x к y . В статьях Фейнмана, Дайсона, Мэтьюса и Салама и др., приведенных в настоящем сборнике, даны многочисленные диаграммы,

иллюстрирующие различные процессы, а также рассмотрена их классификация по характеру встречающихся в них вершин и линий, имеющая важный физический смысл в связи с тем, что между диаграммами и различными членами S -матрицы устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Мы ограничимся сейчас несколькими простейшими примерами.

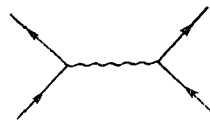
Все квантово-электродинамические эффекты первого порядка изображаются диаграммой одного и того же типа (фиг. 1) (которая описывает, например, рассеяние электрона-позитрона во внешнем поле, изображаемом фотонной линией, или испускание фотона электроном и т. д.).



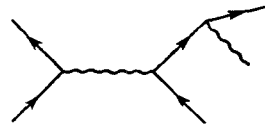
Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Следует подчеркнуть, что при построении подобных диаграмм речь идет о графическом изображении в топологическом смысле. Поэтому и для процессов второго, третьего и т. д. порядков следует рисовать лишь топологически неэквивалентные графики. Для иллюстрации приведем графики некоторых процессов второго порядка. Рассеяние фотона на электроне (комpton-эффект) соответствует графику фиг. 2.

График того же типа иллюстрирует ряд других процессов, например, образование пары электрон-позитрон двумя фотонами, или образование пары фотоном во внешнем поле, а также обратные процессы превращения пары в два фотона, либо в один фотон во внешнем поле и др.

Взаимодействие электронов (позитронов) через фотон в низшем порядке описывается диаграммой, приведенной на фиг. 3, к анализу которой мы еще вернемся.

На фиг. 4 приведена одна из диаграмм тормозного испускания фотона электроном в поле другой частицы, являющегося типичным эффектом третьего порядка.

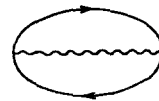
Для дальнейшего существенны процессы, связанные с вакуумом, которые иллюстрируются диаграммами, содержащими в той или иной форме замкнутые петли. Взаимодействие электрона с нулевыми колебаниями (флуктуациями) фотонов, иначе говоря с вакуумом электромагнитного поля, иллюстрируется в низшем порядке диаграммой фиг. 5. Эта диаграмма изображает возникновение собственной полевой электромагнитной энергии электрона (эффект самодействия). Аналогичным образом конструируется диаграмма собственной энергии фотона (также



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

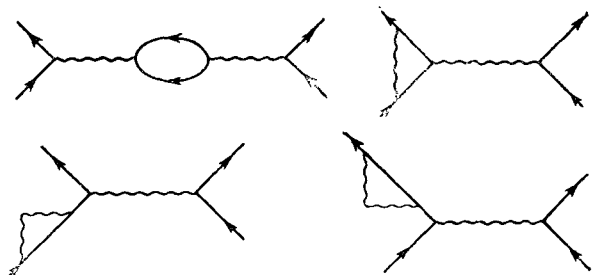
эффект самодействия), иллюстрирующая взаимодействие фотона с электронно-позитронным вакуумом (фиг. 6).

Собственная энергия вакуума, соответствующая переходам вакуум-вакуум, связанная с виртуальным рождением и уничтожением частиц, не участвующих в других стадиях процесса, изображается диаграммой фиг. 7.

Заметим, что переход вакуум-вакуум второго порядка, изображенный изолированным графиком, не связанным с другими частями диаграммы, является,

очевидно, ненаблюдаемым, если не считать влияния, оказываемого этим переходом на реальные переходы через посредство принципа Паули.

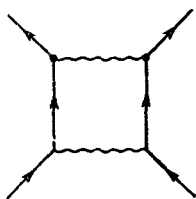
Очевидно собственно-энергетические части, связанные, как ясно из предыдущего, с другими частями той или иной диаграммы, описывающей какой-либо процесс двумя фотонными или двумя электронными линиями, будут входить как целое во все процессы высшего порядка. Например, учет частей самодействия в приведенной выше диаграмме, отвечающей взаимодействию двух электронов, даст, в частности, диаграммы, приведенные на фиг. 8, которые соответствуют подсчету взаимодействия в четвертом порядке.



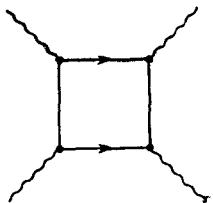
Фиг. 8.

Заметим, что если присоединить сюда диаграммы, соответствующие включению частей самодействия в линии второго электрона, а также диаграммы, описывающие взаимодействие частиц через два фотона (фиг. 9), то мы получим все поправки четвертого порядка к (меллеровскому) взаимодействию.

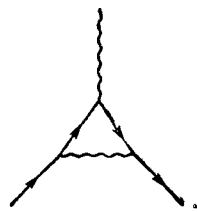
В связи с дальнейшими рассуждениями на фиг. 10 приведена еще диаграмма важного процесса четвертого порядка: рассеяние света на свете через виртуальное порождение пары электрон-позитрон и последующую аннигиляцию этой же пары (другие аналогичные графики получаются перестановкой вершин).



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Очевидно, возможно составить стандартный набор диаграмм для всех процессов первого, второго, третьего и т. д. порядков, однако с увеличением порядка их число быстро растет, что ведет к потере основного их достоинства, заключающегося в наглядности.

В случае обычной линейной электродинамики из каждой вершины, как непосредственно явствует из вида энергии взаимодействия и лагранжиана свободных полей, могут исходить лишь две электронные линии и одна фотонная, либо только две электронные линии. Однако в нелинейной теории, например, в нелинейной мезодинамике, рассматриваемой коротко ниже, когда в лагранжиан входят множители типа $\varphi^3 \dots \varphi^4 \dots \varphi^n$, из каждой вершины может, очевидно, выходить 3, 4...n линий.

Аналогичным образом следует, притом всеми возможными способами, выделить, или включить, части самодействия в диаграммах рассеяния, комптон-эффекта и всех других эффектов при рассмотрении процессов в высших приближениях. Удобство графического изображения процессов состоит, в частности, в возможности простого выделения и отождествления отдельных частей матричных элементов.

Наряду с частями самодействия существенную роль играют так называемые „вершинные“ (vertex) части, представляющие собой некоторую совокупность вершин и внутренних линий, связь которых с остальным графиком происходит

через две электронные и одну фотонную линии. Вершинная часть может, например, получиться при замене диаграммы процесса первого порядка (фиг. 1) диаграммой типа фиг. 11.

Иначе говоря, вместо, например, простого рассеяния электрона во внешнем поле имеет место рассеяние, связанное с испусканием и поглощением виртуального вакуумного фотона. В частности, поскольку движение в атоме можно рассматривать как совокупность повторных рассеяний, только что приведенная диаграмма иллюстрирует основную долю лэмбовского сдвига энергетических уровней, обязанного взаимодействию электрона с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, а также возникновение неспинного дополнительного вакуумного момента электрона. Здесь и в дальнейшем мы употребляем везде термин „вакуумные“ поправки вместо „радиационные поправки“, к сожалению, распространенного в литературе, но менее отвечающего сути дела.

До сих пор мы исходили из различных членов матричных элементов и изображали их графически. Обратное, если каким-либо образом сконструировать диаграмму, соответствующую рассматриваемому процессу, то, двигаясь вдоль ее линий, возможно построить величину матричного элемента, причем, как всегда, удобно произвести разложение всех величин в интегралы Фурье, перейдя к импульсному представлению. При этом следует применять следующие основные правила, кодифицированные Дайсоном (статья V):

1) каждой вершине x_i сопоставляется член энергии взаимодействия

$$\mathcal{H}_i = -ieA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

или же, в случае отсутствия фотонной линии, с целью перенормировки, обсуждаемой ниже, член

$$\delta mc^2\bar{\psi}(x)\psi(x);$$

2) каждой внутренней электронной линии, идущей от x и y , сопоставляется электронная спинорная каузальная функция

$$\frac{1}{2}S_{\beta\alpha}^F(x-y);$$

3) аналогично каждой внутренней фотонной линии (операторы $A_\mu(x)$ и $A_\nu(y)$) сопоставляется фотонная каузальная функция даламберовского уравнения

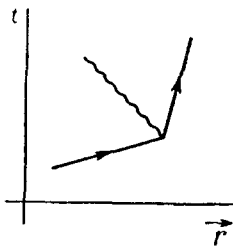
$$\frac{1}{2}\hbar c\delta_{\mu\nu}D_F(x-y);$$

4) свободные спинорные операторы устанавливаются в порядке $\bar{\psi}\psi$.

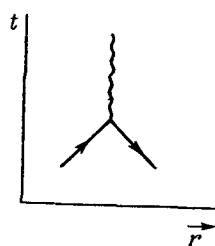
4. Замечания о методах Фейнмана

Остановимся сейчас коротко на некоторых сторонах формализма Фейнмана, изложенного им в ряде работ, посвященных квантовой механике и теории поля и опубликованных параллельно со статьями Томонага и Швингера, с одной, и статьями Штюкельберга, с другой стороны. Формализм Фейнмана, как было показано Дайсоном, эквивалентен использованию S -матрицы и приводит, по существу, к тем же результатам, что и метод Томонага, а также методы Кэллена, Галанина и Швингера, основанные на гейзенберговском представлении. Одна из специфических сторон работ Фейнмана связана с систематической трактовкой позитрона как электрона, движущегося назад во времени, в развитии замечания Дирака; эта возможность была также отмечена Г. А. Зисманом [18]. Одни и те же линии на диаграммах (в координатах: время — пространство) изображают как электроны, так и позитроны в зависимости от направления по отношению к оси времени. При подобной трактовке весь формализм строится на базе одноэлектронной теории Дирака, хотя и оказывается в результате эквивалентным обычной вторично-квантовой теории электронов-позитронов и представлению о дырках. Суть дела связана, очевидно, с тем, что теория электро-

нов-позитронов должна быть сформулирована в зарядно-симметричной форме, являющейся следствием условия инверсной инвариантности по времени. Например, топологически одна и та же диаграмма описывает либо рассеяние электрона (фиг. 12), либо аннигиляцию пары (фиг. 13) (см. статью III). Подобный пространственно-временной подход к описанию течения событий характерен для работ Фейнмана, который опирается на лагранжеву, а не на гамильтонову формулировку теории. Как известно из классической механики, уравнения Гамильтона позволяют следить за эволюцией системы во времени, тогда как лагранжев формализм характеризует картину процесса вдоль траектории в целом. В данной связи обратим внимание читателей, в частности, на классическую



Фиг. 12.



Фиг. 13.

(неквантовую, но релятивистскую) теорию электрона Дирака—Соколова, где по существу также применялся лагранжев метод [19]. Точно так же формализм S -матрицы является аналогом лагранжевого метода. Фейнмановская формулировка нерелятивистской квантовой механики (см. Дирак [17]) также отличается по виду как от матричного, так и от шредингеровского волнового представления, хотя оказывается, конечно, им эквивалентной. Амплитуда вероятности ассоциируется не с положением частицы в данный момент времени, но со всем ее движением. Вместо формулы классической теории

$$P_{ac} = \sum_b P_{ab} P_{bc},$$

выражающей вероятность того, что если измерение A дало результат a , то измерение C даст результат c , через соответствующие вероятности P_{ab} и P_{bc} , теперь имеет место соотношение для комплексных амплитуд вероятности

$$\varphi_{ac} = \sum \varphi_{ab} \varphi_{bc},$$

причем $P_{ac} = |\varphi_{ac}|^2$. Подобная формула для φ_{ac} , очевидно, характерна для квантовых волновых представлений о движении. Обобщением на последовательность точек $\dots x_i, x_{i+1}$, определяющих траекторию, в конце концов оказывается выражение

$$\varphi(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum S(\dots x_{i+1}, x_i) \right] \dots \frac{dx_{i+1}}{A} \frac{dx_i}{A}$$

(где множители $1/A$ связаны с изменением нормировки), которое можно представить в виде интеграла от волновых функций

$$\varphi(R', R'') = \int \chi^*(x, t) \psi(x, t) dx,$$

где S есть функция действия. При этом $\psi(x, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(x_{k+1}, x_k) \right] \psi(x_k, t) \frac{dx_k}{A},$$

дающему закон эволюции ψ во времени и являющемуся выражением принципа Гюйгенса для де-Бройлевских волн, и которое в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ заменяется дифференциальным уравнением Шредингера. Обратно, шредингеровское уравнение вида

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H} \psi$$

имеет решение

$$\psi(x, t + \epsilon) = \exp \left(-it \frac{\mathcal{H}}{\hbar} \right) \Psi(x, t)$$

в случае \mathcal{H} , не зависящего от времени.

Рассмотрение Фейнмана [20] заканчивается соображениями о формулировке запаздывающего взаимодействия частиц, при которой величины электромагнитного поля, переносящего взаимодействия, оказываются исключенными. Следует, однако, подчеркнуть, что попытка Фейнмана полностью исключить электромагнитное поле как вид материи [21], естественно, не могла привести к успеху и была впоследствии дезавуирована самим автором (см. [4], часть II, § 3).

Две статьи Фейнмана, впервые публикуемые в полном переводе в настоящем сборнике (статьи III и IV), в известной мере опираются на то, что изложены идеи и значительно развивают их в применении к квантовой электродинамике. В статье III рассматривается движение электронов и позитронов во внешнем поле; статья IV посвящена взаимодействию частиц через поле. Обе работы, которые вместе с комментариями и обобщениями, сделанными Дайсоном, приобрели в современной зарубежной литературе, пожалуй, наибольшую популярность из всех трудов по новейшей теории поля, характеризуются, во-первых, дальнейшим развитием лагранжева метода, связанного, в частности, с систематическим применением интегрального уравнения вместо дифференциального для ψ -функции и в связи с этим широким использованием гринианов, во-вторых, с упомянутой трактовкой позитрона как электрона, движущегося попятно во времени, и, в-третьих, упомянутой выше графической интерпретацией. Статьи эти содержат ряд ценных примечаний к вычислениям. В качестве примера интуитивных рассуждений Фейнмана рассмотрим коротко уравнение, описывающее взаимодействие между двумя электронами в результате обмена фотоном. Если волновая функция в четырехмерной точке z определяется уравнением

$$\psi(z) = \int K(z, I) \psi(I) d^3x,$$

и разложение гриниана в слабом поле имеет вид

$$K(2, I) = K_0(2, I) + K^{(1)}(2, I) + K^{(2)}(2, I) + \dots$$

(K_0 — гриниан свободной частицы), то можно показать, что

$$K^{(1)}(2, I) = -i \int K_0(2, z) U(z) K_0(z, I) d\tau_z,$$

где U — энергия взаимодействия.

Если речь идет о переходе (1—3) первой частицы и переходе (2—4) второй частицы, а поле является кулоновским и взаимодействие длится в малом интервале времени Δt , то поправка первого порядка дается выражением

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int \int K_{0a}(3, 5) K_{0b}(4, 6) r_{56}^{-1} K_{0a}(5, I) K_{0b}(6, 2) d\tau$$

(a и b — индексы обеих частиц; $d\tau = d^3x_5 d^3x_6 \Delta t$). Учет взаимодействия в течение всего процесса приводит к интегрированию по t ; кроме того, учет запаздывающего действия при поглощении частицей b фотона, испущенного частицей a , приносит множитель

$$r_{56}^{-1} \delta(ct_{56} - r_{56}).$$

Учет векторных частей взаимодействия вводит фактор $[1 - (\bar{v}_5 \bar{v}_6 / c^2)]$, равный в дираковском случае $(1 - \bar{\alpha}_a \bar{\alpha}_b)$. Окончательно, ограничиваясь фотонами положительной энергии, т. е. заменяя δ на δ_+ , получим для поправки первого порядка выражение

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int \int K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) \gamma_{a\mu} \gamma_{b\nu} \delta_+ (s_{56}^2) K_{+a}(5, I) \times \\ \times K_{+b}(6, 2) d\tau_5 d\tau_6 \quad (d\tau = d^3x dt),$$

где гриниан $K_+(2, I)$, определяемый равенством

$$K_+(2, I) = \pm \sum_{E_n \geq 0} \varphi_n(2) \bar{\varphi}_n(I) e^{-iE_n(t_2 - t_1)} \quad \text{для } t_2 \geq t_1$$

(верхний знак для $t_2 > t_1$), является решением дираковского уравнения

$$(i\nabla_2 - m)K_+(2, 1) = i\delta(2, 1).$$

Функция K_+ совпадает с причинной функцией D_c Штюкельберга с точностью до коэффициента $1/2$.

Для лучшей ориентации в литературе перечислим коротко другие работы Фейнмана. Две статьи 1948 г. [22] посвящены специальным инвариантным методам регуляризации бесконечных интегралов в теории собственной энергии в классической и квантовой электродинамике, основанным на введении „размазанных“ функций вместо δ -функций либо в выражении функции действия (в классической теории), либо в интеграл по частотам (в квантовой теории). Таким путем достигается обрывание слишком быстрого роста интеграла при высоких частотах. Замена $\delta(s_{ab}^2)$ на функцию, отличающуюся от нее в малой окрестности светового конуса $s = 0$, эквивалентна введению малой массы покоя для фотона. Отметим, что в дальнейшем включение массы фотона, полагаемой в окончательном результате равной нулю, неоднократно применялось для устранения расходимости при малых частотах (инфракрасная катастрофа), связанной, однако, не с фундаментальной расходимостью при высоких частотах, а лишь с некорректным применением теории возмущений в этой области.

В последующей работе [23], примыкающий к изложенной выше статье по нерелятивистской квантовой механике, Фейнман более подробно останавливается на лагранжевой форме квантовой электродинамики. Центральной задачей является установление взаимодействия частиц, путем исключения из их уравнений движения переменных электромагнитного поля, представленного в виде набора осцилляторов. Таким путем вновь получают главные результаты двух основных работ, переведенных в настоящем сборнике.

Следующая по порядку публикации статья Фейнмана [24] посвящена разработке особого операторного исчисления, долженствующего облегчить расчеты квантовой электродинамики. Впрочем, до сих пор этот метод не получил распространения и мы сочли нецелесообразным включать в сборник упомянутые только что статьи. Отметим лишь, что для облегчения трудностей вычислений, связанных с некоммутативностью операторов, предлагается снабжать операторы индексами, установив правило, что оператор с высшим индексом действует позднее. Тогда порядок не будет зависеть от положения в записи и с операторами можно действовать как с коммутирующими числами вплоть до конца вычислений. При помощи этого метода получают вновь результаты двух основных работ Фейнмана.

5. Поляризация вакуума и перенормировка заряда

Возвращаемся к выражению S -матрицы вместе с иллюстрирующими ее диаграммами. Как бы ни были поучительны новые точки зрения на трактовку тех или иных обычных, относительно простых эффектов (эффект Комптона, рассеяние электронов на заряде и т. д.), подсчитанных ранее более привычными способами, и как бы ни были удобны новые методы расчета и графики для рассмотрения подобных процессов в одном лишь первом исчезающем приближении, вряд ли стоило бы для этих целей развивать какой-либо новый довольно сложный формализм. Иное положение вещей имеет место при подсчете тех же эффектов в высших приближениях, когда с необходимостью на каждый эффект начинают накладываться вакуумные поправки, например части собственной энергии электронов, связанные с порождением и уничтожением виртуальных фотонов, или члены, обязанные поляризации вакуума и т. д. Части самодействия (собственно энергетические части) матричных элементов, или соответственных диаграмм, ведут, очевидно, к бесконечностям; расходящимися оказываются также и некоторые другие члены. Хотя возможность получения конечных выражений для членов самодействия лежит пока что вне рамок современной теории, однако

именно в трактовке бесконечностей новейшая квантовая теория поля сделала важный шаг вперед. Речь идет при этом, во-первых, о классификации бесконечностей, во-вторых, об их изоляции, связанной с перенормировкой („ренормировкой“) констант, и, в-третьих, о выдвигании новых приемов инвариантной регуляризации, которая выходит, впрочем, за рамки, так сказать, официальной теории. Для трактовки бесконечностей, в частности, графические иллюстрации оказываются в самом деле весьма полезными, так как можно, например, довольно наглядно изобразить влияние учета собственной энергии на подсчет меллеровского рассеяния частиц в четвертом приближении путем простого добавления графиков самодействия к отдельным частям прежней диаграммы, представлявшей процесс во втором приближении. Очевидно, части самодействия можно и должно как целое включать в электронные линии любых процессов, точно так же, как и в фотонные линии. Наконец, каждую вершину можно заменить вершинной частью, также имеющей смысл собственной энергии, но во внешнем поле. Выделение частей самодействия вместе с вершинными частями, которые также ведут к расходимостям, весьма удобно, так как все они приводят в матричных элементах к определенным множителям, которые можно заранее вычислить.

Весьма существенно, что все бесконечности квантовой электродинамики исчерпываются тремя типами расходимостей: собственная энергия электрона, фотонная собственная энергия¹⁾ и собственная энергия электрона во внешнем поле. Действительно, встречающаяся в теории расходимость перехода: вакуум-вакуум, который может иметь место наряду с каким-либо другим процессом, связана с ненаблюдаемым эффектом. Кроме того, как выяснилось в дальнейшем, вопреки первоначальным подсчетам, рассеяние света на свете, как и следовало ожидать на основании калибровочной инвариантности, не ведет к новым расходимостям. Изоляция бесконечностей всех трех типов производится путем „перенормировки“ заряда и массы. Как показывают подсчеты, указанные расходимости приводят в конце концов только к бесконечным добавкам к массе и заряду, означающим доли (бесконечные) полевой электромагнитной энергии (или массы) и полевого заряда электрона (позитрона). За неимением лучшего, можно произвести ренормировку, т. е. считать эти полевые добавки вместе с основными „загравочными“ частями массы и основными „загравочными“ частями заряда (природа которых, кстати сказать, пока что совершенно неясна), уже включенными в эмпирически наблюдаемые величины массы и соответственно заряда. Основные „загравочные“ части массы и заряда соответствуют, очевидно, массе и заряду абстрактного „голового“ электрона (или позитрона), изолированного от взаимодействия с какими-либо другими частицами и полями и вместе с тем от вакуума. В дальнейшем возможно, применяя те или иные специальные приемы, регуляризовать указанные полевые добавки к массе и заряду, получив вместо них конечные выражения, что удобно для многих расчетов, но представляется все же произвольным выходом за рамки теории. К включению же полевых бесконечных долей собственной массы и заряда в наблюдаемые величины m и e следует отнестись со всей серьезностью, поскольку после подобного перетолкования или перенормировки теория становится свободной от бесконечностей, что заранее являлось далеко не очевидным. Формализм ренормировки станет ясным при рассмотрении двух основных проблем теории: поляризации вакуума и собственной энергии электрона.

Как было впервые указано Дираком [25], внешнее электромагнитное поле, даже не вызывающее реального порождения электронов-позитронов, все же производит, говоря грубо наглядно, своеобразную „деформацию“, или перераспределение зарядов электронно-позитронного вакуума. Индуцированная в вакууме

¹⁾ Фотонная собственная энергия, точнее, собственно энергетические части, в случае электромагнитного поля по существу связаны с поляризацией вакуума. Собственная же энергия отдельного фотона равна нулю, как и следует из калибровочной инвариантности

плотность заряда — тока накладывается на первоначальную, вызывавшую внешнее поле, что приводит в конце концов к некоторой компенсации исходного заряда — тока. Это явление получило название поляризации вакуума. Укажем сразу, что световая волна вакуума не поляризуется, что связано с отсутствием собственной энергии у фотона, в противоположность случаю электронов, мезонов и других частиц („частиц“, в узком смысле) в согласии с калибровочной инвариантностью величин электромагнитного поля. Поляризация вакуума подсчитывалась различными способами как путем прежних методов, так и в представлении взаимодействия (см. статью II).

Наметим сейчас ход расчетов в швингеровском варианте гейзенберговского представления. Основная задача заключается в подсчете среднего по электронно-позитронному вакууму от плотности тока в присутствии внешнего поля, характеризуемого потенциалом A_μ . Иходя из выражения тока в зарядно-симметричной форме (обозначения по статье II, части II и III)

$$j_\mu = -\frac{e}{2} (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)]$$

нетрудно показать, что среднее по вакууму тока равно

$$\langle j_\mu(x) \rangle_0 = ie \operatorname{tr} (\gamma_\mu G(x, x'))_{x' \rightarrow x},$$

где $G(x, x')$ — гриниан уравнения Дирака во внешнем поле. Этот гриниан был точно вычислен в случае постоянного поля и поля плоской волны, а также определен в общем случае по теории возмущений. Интересующее нас среднее вакуумное значение тока связано с точностью до постоянной с вакуумным добавком к лагранжиану электромагнитного поля соотношением

$$\mathcal{L}_{\text{вао}} = \langle j_\mu(x) \rangle_0 A_\mu.$$

В результате для вакуумного тока получается

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle_0 = & -\frac{2\alpha}{3\pi} \lim_{P \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{P_0 + P}{x} - 1 \right) J_\mu(x) - \\ & - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{x^2} \square^2 \int (F_1(x-x') - \frac{1}{3} F_2(x-x')) J_\mu(x') d\omega', \end{aligned}$$

где

$$F_n(x) = \int_0^1 v^{2n} dv \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) \frac{e^{ikx}}{1 + \frac{k^2}{4x^2} (1-v^2)},$$

$$P_0 = \sqrt{P^2 + x^2}$$

и J_μ — вектор тока, порождающего внешнее электромагнитное поле, равный

$$J_\mu(x) = -c \square A_\mu(x).$$

Первая часть вакуумного заряда — тока пропорциональна внешнему току в данной точке; бесконечный логарифмический множитель представляет собой поправочный коэффициент, изменяющий величину внешнего тока. Этот член можно считать добавком ко всякому внешнему току, а постоянный, хотя и расходящийся (!) множитель можно рассматривать включенным в ренормированные, т. е. эмпирически наблюдаемые величины заряда (e) и напряженности поля (E, H). Обозначая через e_0 основной „затравочный“ заряд и через

$$\mathcal{F}_0 = \frac{1}{2} (H_0^2 - E_0^2) \quad \text{и} \quad \mathcal{G}_0 = E_0 H_0$$

соответственные инварианты (точнее скаляр и псевдоскаляр) поля, можно записать

$$(F + iG) = (1 + Ce_0^2)(F_0 + iG_0),$$

$$e^2 = \frac{1}{1 + Ce_0^2} e_0^2,$$

$$C = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s).$$

Интеграл C логарифмически расходится при $s = 0$.

Если считать регуляризованное C величиной порядка единицы, то отсюда видно, что вследствие поляризации заряд по абсолютному значению уменьшается на величину полевого заряда, равную по порядку $\alpha e_0 \approx (1/137)e$; $e \approx e_0(1 - \alpha)$. С другой стороны, вторая, конечная, часть вакуумного тока представляет собой физически наблюдаемый результат поляризации вакуума, проявляющийся, например, в лэмбовском сдвиге и других эффектах. В случае постоянного или медленно меняющегося внешнего поля для конечной части вакуумного тока получается выражение

$$\langle j_\mu(x) \rangle'_0 = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{1}{\chi_0^2} \square^2 J_\mu(x) - \frac{\alpha}{140\pi} \left(\frac{1}{\chi_0^2} \square^2 \right)^2 J_\mu(x) + \dots,$$

первый член которого был получен Дираком [25, 26] и анализировался далее Гейзенбергом, Юлигом и др. ([27—28], см. также [29] и [4], часть I, § 45). Комбинируя максвелловский лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\mathcal{F} = \frac{1}{2}(E^2 - H^2)$$

с вакуумной добавкой, ведущей к нелинейным уравнениям электродинамики, получим после указанной ренормировки конечный, калибровочно-инвариантный результат, первые члены которого были получены Эйлером и Вайскопфом (см. сборник [1])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(E^2 - H^2) + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} [(E^2 - H^2)^2 + 7(EH)^2] + \dots$$

Важно заметить, что конечная часть плотности вакуумного заряда — тока зависит по существу лишь от внешнего тока на пространственных расстояниях порядка комптоновской длины $\Delta r = \hbar/mc$ и соответственно малых временных расстояниях $\Delta t = \hbar/mc^2$.

Следует подчеркнуть, что анализ поляризации вакуума представлял, пожалуй, наибольшие трудности при анализе принципиальных вакуумных эффектов в новейшей квантовой электродинамике. Любопытно, например, что анализ этой проблемы во II и III частях статьи II, как отметил Вентцель [30], являлся недостаточно корректным. Недостаточно обоснованное отбрасывание Швингером неопределенных выражений на основании требования их калибровочной инвариантности вызвало появление особого более корректного способа регуляризации с помощью вспомогательных масс (см. статью Паули и Вилларса в сборнике [1]), при помощи которого удается получить определенные выражения, обладающие требующейся калибровочной инвариантностью, не приходя ни к каким внутренним противоречиям. Рассуждения Фейнмана и Дайсона по этому вопросу также не могли привести к окончательным удовлетворительным результатам без использования специальных способов регуляризации.

Обратим теперь внимание на новую трактовку перенормировки заряда, предложенную Гупта [32]. Суть дела заключается в том, что с самого начала применяются лишь ренормированные величины электромагнитного поля и заряда. Поэтому вместо обычного лагранжиана системы электромагнитного поля и электронов

$$\mathcal{L}^* = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^* F_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\mu} \right)^2 + \mathcal{L}_D + ie A_\mu^* \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \delta mc^2 \bar{\psi} \psi,$$

где звездочкой отмечены не ренормированные величины поля, входящие в уравнения гейзенберговского представления, за основу берется следующая форма

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} \right)^2 + \mathcal{L}_D,$$

$$\mathcal{L}_1 = ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \delta mc^2 \psi^* \psi + \frac{1}{4} f F_{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$f = 1 - \theta^{-2}, \quad \theta = \frac{e^*}{e}.$$

Здесь $A_\mu, F_{\mu\nu}$ означают ренормированные, реально наблюдаемые величины потенциалов и поля, связанные с неренормированными соотношениями $F_{\mu\nu} = \theta F_{\mu\nu}^*$, а e — перенормированный заряд.

Различие \mathcal{L}^* и \mathcal{L} приводит к ряду особенностей при расчетах.

Подобное явное выделение „контрчлена“ (с фактором f) для перенормировки заряда и фотонной части собственной энергии стало возможным благодаря доказанному в исследовании Ворда [33] равенству коэффициентов ренормировки Дайсона: $Z_1 = Z_2$ (см. ниже), что привело к точной компенсации частей перенормировки заряда, вызванных электронной частью собственной энергии и вершинными частями. Таким образом, формализм Гулта, в котором ренормировка заряда производится автоматически и который с самого начала использует ренормированный заряд, является более последовательным и удобным, чем первоначальный метод Дайсона, в котором лишь ренормировка массы производилась автоматически благодаря явному введению „контрчлена“ ($\delta mc^2 \psi^* \psi$), а эффекты, связанные с перенормировкой заряда, трактовались более сложным образом при помощи бесконечных коэффициентов Z_1, Z_2 и Z_3 . Применяя указанные соображения, Дайсону удается доказать более последовательным образом отсутствие расходимостей в каждом отдельном члене S -матрицы в перенормированной теории (см. также близкий формализм Кэллена [31]).

Однако вместе с тем следует подчеркнуть, что вопрос о сходимости всего ряда членов S_n далеко еще не решается всеми предыдущими соображениями. Напротив, имеются веские, но не окончательные соображения в пользу того, что весь ряд членов порядка e^2, \dots, e^n будет все же расходиться [34].

6. Полевая энергия электрона и перенормировка массы

Перейдем теперь ко второй фундаментальной проблеме теории вакуума — вопросу о собственной энергии частиц, в данном случае полевой электромагнитной энергии электрона, обусловленной его взаимодействием с электромагнитным полем, точнее говоря, с вакуумными флуктуациями последнего. Эта проблема была впервые полно рассмотрена прежними методами квантовой электродинамики в работах Вайскопфа, который подчеркнул, что учет добавочных обстоятельств, связанных с электронно-позитронным вакуумом (принцип Паули и др.), приводит к тому, что собственная электромагнитная масса электрона оказывается расходящейся лишь логарифмически, а не квадратично, что имело место при трактовке одного электрона, связанного лишь с электромагнитным полем, но искусственным образом оторванного от электронно-позитронного вакуума (см. [1]).

В новейшей квантовой электродинамике, наиболее последовательно учитывающей вакуумные эффекты, собственная масса электрона рассчитывалась как при помощи формализма томонаговского представления (см. статью II), так и при помощи формализма гейзенберговского представления (см. статьи IX, X). Наряду с этим вопрос о собственной энергии электрона был проанализирован также при помощи фейнмановской графической интерпретации (см. статью Дайсона в сборнике [1] и его статью V в настоящем сборнике).

Остановимся сперва коротко на подсчете электромагнитной массы в формализме представления взаимодействия. Уравнение Томонага

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) \Psi[\sigma],$$

или эквивалентное ему интегральное уравнение

$$\Psi[\sigma] = \Psi_0 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} j_\mu(x') A_\mu(x') \Psi[\sigma'] d\omega' \quad (\Psi[\sigma] \rightarrow \Psi_0 \text{ при } \sigma \rightarrow \infty),$$

имеет решение

$$\Psi[\sigma] \approx \left(1 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} j_\mu(x') A_\mu(x') d\omega'\right) \Psi,$$

или, с точностью до членов первого порядка,

$$\Psi[\sigma] \approx (1 - iS[\sigma]) \Psi,$$

где

$$S[\sigma] = -\frac{1}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} j_\mu(x') A_\mu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega'.$$

Для исключения членов, описывающих эффекты первого порядка, которые нас сейчас не интересуют, прделывается каноническое преобразование

$$\Psi[\sigma] \rightarrow e^{-iS[\sigma]} \Psi[\sigma],$$

в результате которого для нового вектора состояния получается

$$[i\hbar c \frac{\delta \Psi}{\delta \sigma(x)}] = \{ \mathcal{H}_{0,0} + \mathcal{H}_{1,0}(x) + \mathcal{H}_{2,0}(x) + \mathcal{H}_{1,1}(x) \} \Psi[\sigma].$$

Эффект самодействия свободного электрона, обязанный его связи с вакуумом электромагнитного поля, при отсутствии реальных фотонов описывается членом $\mathcal{H}_{1,0}(x)$, который оказывается равным

$$\mathcal{H}_{1,0} = \delta m c^2 \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \psi(x)]_1,$$

где индекс 1 справа означает разность между оператором и его вакуумным значением. Дальнейший анализ показывает, что полевой добавок к массе электрона равен

$$\delta m = m_{\text{vac}} = m_0 \frac{3\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\gamma \omega_0} + \frac{5}{6} \right] \quad (\omega_0 \rightarrow 0; \gamma = 1,781).$$

Таким образом, полевая масса δm оказывается расходящейся величиной (хотя и в слабой логарифмической степени) благодаря интеграции по импульсам виртуальных фотонов, переносящих взаимодействие электронов самих с собой. Существенный пункт теории заключается в доказательстве возможности переноса члена с вакуумной добавкой δm из уравнения движения для вектора состояния в дираковское уравнение движения для оператора поля путем некоторого канонического преобразования. Действительно, полагая

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma] \Psi[\sigma],$$

где $U[\sigma]$ подчиняется уравнению

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = H_{1,0}(x) U[\sigma],$$

получим новый оператор поля

$$\psi' = U^{-1} \psi U,$$

где ψ' подчиняется уравнению Дирака

$$\gamma_{\mu} \frac{\partial \psi'}{\partial x^{\mu}} + (\kappa_0 + \delta \kappa_0) \psi' = 0;$$

здесь $\delta \kappa_0 = \delta m_0 c / \hbar$. Таким образом, мы приходим к основной идее перенормировки массы (аналогичной перенормировке заряда, рассмотренной выше), связанной с предположением о возможности включить полевую электромагнитную долю собственной массы δm , наряду с некоторой исходной „заправочной“ массой m_0 в реальную „эмпирически наблюдаемую“ массу: $m = m_0 + \delta m_0$. При этом, повторяем, речь идет еще, конечно, никак не об устранении трудности с бесконечной полевой электромагнитной массой, но лишь о доказательстве того важного обстоятельства, что бесконечная величина δm может быть изолирована и не будет после перенормировки мешать вычислению реальных эффектов. Таким образом, современная теория полевой массы как и полевого заряда, несмотря на некоторый прогресс, связанный с идеей перенормировки, является далеко не совершенной и, по крайней мере, требующей включения каких-то приемов регуляризации (т. е. приведения к конечному виду), либо с более технической целью устранения бесконечностей в промежуточных вычислениях впредь до проведения перенормировки, либо, в конце концов, с высокой принципиальной целью построения будущей теории, не содержащей вовсе бесконечных полевых добавок к массе и заряду.

Поясним теперь коротко, как производится то же самое выделение бесконечностей и их устранение при помощи перенормировки на языке формализма Фейнмана-Дайсона, который, в случае проблемы собственной массы, дает наглядную иллюстрацию только что изложенного результата представления взаимодействия. Во-первых для перенормировки массы, связанной с эффективным (и, вместе с тем, фиктивным!) исключением полевой энергии, производится, как уже отмечалось, явное выделение поправочного контрчлена в основном выражении энергии взаимодействия \mathcal{H}_{int} . В результате полный гамильтониан записывается в виде

$$\begin{aligned} H(x) &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}; \quad \mathcal{H}_0 = [\mathcal{H}_0(x) + \delta m c^2 \psi^*(x) \beta \psi(x)], \\ \mathcal{H}_{\text{int}} &= [\mathcal{H}_1(x) - \delta m c^2 \psi^*(x) \beta \psi(x)], \\ \mathcal{H}_1 &= -\frac{1}{c} j_{\mu} A_{\mu} \end{aligned}$$

(в обозначениях Дайсона). Следовательно, в качестве члена взаимодействия в уравнении Томонага следует взять теперь выражение из второй скобки, включающее дополнительный контрчлен с коэффициентом δm . Иначе говоря, поскольку в уравнения движения свободных операторов поля входит полная, ренормированная масса, то из энергии взаимодействия следует вычесть соответствующий контрчлен. Поскольку к бесконечностям приводят лишь графики самодействия электрона, либо самодействия фотонного поля, или вершинные части, соответствующие модифицированному самодействию электрона во внешнем поле (лэмбовского типа), то, включая указанные бесконечные части всеми возможными способами в линии и вершины, получим в результате (см. статью V), что, например, для каждой *внутренней электронной* линии Фурье-коэффициент каузального спинорного гриниана $S_F(p)$ следует заменить на

$$S'_F(p^t) = S_F(p^t) + S_F(p^t) \sum(p^t) S_F(p^t),$$

где $\sum(p^t)$ означает сумму операторов $\sum(W, p^t)$ по всем частям графика W , ведущим к собственной энергии электрона. В случае одной вершины

$$\sum(W, t') = -2\pi i \frac{\delta m c}{\hbar} \quad (\text{в координатной записи}),$$

где t' есть 4-импульс.

Аналогичным образом после включения всех частей самодействия производится замена $D_F(p^i)$, а также волновых функций $\psi(x)$ и $A_\mu(k)$.

Наконец, для каждой вершины γ_μ заменяется на

$$\Gamma_\mu(t^1, t^2) = \gamma_\mu + \Delta_\mu(t^1, t^2),$$

где $\Delta_\mu(t^1, t^2)$ означает сумму от $\Delta(V, t^1, t^2)$ по всем вершинным собственно энергетическим частям. Иначе говоря, новый оператор тока Γ_μ учитывает вакуумные поправки, в противоположность оператору γ_μ , описывающему ток „свободного“ электрона.

Отсылая за подробностями к статьям V и XI, укажем, что после выделения бесконечных частей для „истинных“ операторов Γ_μ , S'_F , D'_F , отличающихся лишь численными (хотя и бесконечными!) коэффициентами Z_i от ренормированных $\Gamma_{\mu 1}$, S'_{F1} , D'_{F1} , в которых отброшены бесконечности, получается

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1),$$

$$S'_F = Z_2 S'_{F1}(e_1),$$

$$D'_F = Z_3 D'_{F1}(e_1);$$

при этом все величины предполагаются определенными до некоторого конечного порядка в разложении по параметру связи или заряду (дабы избежать вопроса о сходимости подобных рядов).

В дальнейшем было показано, что $Z_1 = Z_2$. После того как все расходимости изолированы в двух коэффициентах: 1) $Z_1 \equiv Z_2$ и 2) Z_3 одновременно должно иметь следующее соотношение для электромагнитной массы:

$$\delta\kappa_0 = \frac{1}{2\pi i} Z_2^{-1} A(e_1).$$

Фундаментальный результат подобного довольно громоздкого анализа заключается в выводе, что бесконечные коэффициенты Z в матричном элементе какого-либо процесса входят лишь в виде произведения

$$(Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2})^n \equiv Z_3^{n/2},$$

что как раз соответствует замене n -й степени заряда e^n на $e_1^n = Z_3^{n/2} e^n$ в любом конечном порядке n (e_1 — эмпирически наблюдаемый конечный заряд электрона). Тем самым произведена перенормировка заряда одновременно с перенормировкой массы. Однако методы перенормировки обеих величин были различными, что не оправдывается сущностью проблемы. Более последовательной, как отмечалось выше, явилась трактовка перенормировки заряда в работе Гупта (к которой присоединился затем и Дайсон), связанная с перенормировкой заряда и напряженностей поля также при помощи выделения контрчлена в исходном лагранжиане, аналогично случаю с массой.

Ввиду важности вопроса о полевой массе электрона, остановимся еще на подсчете ее значения по новому методу Швингера, использующему не томоновское, но гейзенберговское представление. При помощи этого метода был произведен также ряд подсчетов в теории лэмбовского сдвига, сверхтонкой структуры, магнитного момента электрона и др. (см. статьи VIII, IX и X)¹⁾. Основой данного формализма является построение теории при помощи гриниана полного дираковского уравнения с учетом поля $G(x, x')$, а не гриниана свободного уравнения, как раньше, причем характерным является представление этой гриновской функции в виде интеграла по собственному времени.

¹⁾ Развитие данного метода в электродинамике и мезодинамике см. в работе Эдвардса (статья XIV).

Для подсчета полевой массы (а также вакуумного магнитного момента электрона, лэмбовского сдвига и т. д.) на базе идеи перенормировки конструируется оператор массы, включаемый вместо члена с массой в дираковское уравнение, которое (в обозначениях статьи VIII) приобретает вид

$$\gamma_{\mu}(-i\partial_{\mu} - eA_{\mu}(x))\psi(x) + \int (dx') M(x, x')\psi(x') = 0,$$

где с точностью до второго порядка по e

$$M(x, x') = m_0\delta(x - x') + ie^2\gamma_{\mu} \cdot G(x, x')\gamma_{\mu}D_+(x - x')$$

(D_+ — каузальный гриниан фотонного поля).

Применим теперь метод возмущений, заменяя ψ под интегралом при операторе массы на невозмущенную волновую функцию, являющуюся решением дираковского уравнения, в котором вместо оператора M стоит обычный член с „затраваочной“ массой m_0 электрона, отключенного от всех полей. В результате при отсутствии внешнего поля для массы *свободного* электрона, равной сумме затраваочной (бывшая „механическая“ масса) и полевой масс, получается

$$m = m_0 + m_{\text{vac}},$$

где

$$m_{\text{vac}} = \left(\frac{3\alpha}{4\pi}\right) m_0 \left[\int_0^{\infty} ds s^{-1} \exp(-m^2s) + \frac{5}{6} \right].$$

В связи с дискуссией о собственной электромагнитной энергии электрона, а также собственной мезонной и собственной гравитационной энергии (см. ниже) следует отметить вклад в собственную энергию, вносимую связью электрона с полями других типов. Например, распад μ -мезона на электрон и две нейтральные частицы ведет к появлению добавочной собственной энергии электрона, расходящейся по предварительным расчетам быстрее, чем в электромагнитном случае (см. [35]). После рассмотрения полевой массы и полевого заряда, являющихся двумя основными проблемами теории поля и вакуума, обратимся к некоторым конкретным эффектам, прежде всего к дополнительному магнитному моменту электрона.

Для вычисления дополнительного вакуумного магнитного момента электрона $\delta\mu_{\text{vac}}$, как и в других случаях, можно применить либо один из прежних методов квантовой электродинамики (см., например, [4], ч. I), либо метод представления взаимодействия, или эквивалентный ему метод Фейнмана — Дайсона; можно, наконец, применить новый швингеровский вариант гейзенберговского представления. Экспериментальное открытие $\delta\mu_{\text{vac}}$ электрона связано с исследованиями сверхтонкой структуры в водороде и дейтерии методом магнитного резонанса (см. статьи Нэйфа, Нельсона, Раби в сборнике [1]), поправки к которой были правильно феноменологически интерпретированы Брейтом (см. сборник [1]), как указание на наличие дополнительного электронного магнетизма. В дальнейшем более точные эксперименты полностью подтвердили расчет вакуумного момента, проделанный с точностью до α^2 .

Особенно просто выглядит подсчет вакуумного магнетизма электрона при использовании массового оператора M (см. статью II). Используя выражение гриновской функции дираковского уравнения во внешнем слабом постоянном поле и применяя для вычисления оператора массы теорию возмущений, вместо члена с массой в уравнении Дирака получаем выражение

$$m = m_0 + m_{\text{vac}} - \delta\mu_{\text{vac}} \frac{1}{2} \sigma F,$$

где

$$\delta\mu_{\text{vac}} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{e\hbar}{2mc} = \frac{\alpha}{2\pi} \mu_0$$

Более точные расчеты привели к значению

$$\delta\mu_{\text{вао}} \approx \left(\frac{\alpha}{2\pi} - 2,973 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right) \mu_0 = 0,001145 \mu_0.$$

В то же время последние измерения [36] также привели к значению

$$\delta\mu_{\text{вао}} = 0,001145 \mu_0 \pm 0,000013$$

в прекрасном согласии с теорией. Несомненно, открытие и теоретическое истолкование дополнительного магнетизма электрона (или измененного гиромагнитного отношения) следует считать одним из фундаментальных успехов физики элементарных частиц и новейшей теории вакуума в последние годы.

Наряду с последовательной квантовой релятивистской трактовкой были сделаны попытки дать феноменологическую трактовку вакуума; конечно, при этом речь может идти только лишь о некоторой вспомогательной модели, которая может явиться удобным средством для предварительной ориентации в сложных физических проблемах и громоздких расчетах. Основная идея подобной интерпретации становится ясной, если мы вспомним, что вакуумные эффекты индуцируют нелинейные добавки, например к максвелловской линейной электродинамике. Таким образом, принципиально представляется возможным учесть вакуум при помощи некоторых результирующих уравнений электродинамики, описывающих распространение электромагнитных волн не в пустоте, а в среде, вводя (комплексную) диэлектрическую и магнитную проницаемости, зависящие в свою очередь от поля [31]. Тем самым мы приходим к нелинейной электродинамике. Подобную теорию пытались построить Борн и Инфельд, однако подбирая лагранжиан произвольно, например в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{b^2} - \frac{(EH)^2}{b^4}} \right)$$

($b = e/r_0^2$, где r_0 играет роль радиуса электрона).

Однако в данном случае речь идет не о подборе произвольного лагранжиана, а об интерпретации нелинейного лагранжиана и соотношений, полученных из теории вакуума [37].

Близкую феноменологическую интерпретацию вакуума пытался дать Бельинфанте [38], применяя для свободного поля (в „пустоте“) соотношения типа электромагнитных уравнений в среде (см. также [39]). При этом Бельинфанте подбирает значения констант, задающих собственные моменты так, чтобы получить правильное значение для лэмбовского сдвига, что, конечно, может определить эти величины лишь по порядку, поскольку лэмбовский сдвиг определяется в известной мере, как мы указывали, также рядом неэлектромагнитных причин, связанных с атомным ядром.

В другом варианте феноменологической классической теории вакуума [40] (см. также [41, 42]) в основу кладутся диэлектрическая и магнитная проницаемости вида

$$\epsilon = \mu = \frac{r + r_0}{r^2} \left(r_0 \approx \frac{e^2}{mc^2} \right).$$

Ряд простых ориентировочных прикидок позволяет и в этом случае получить качественное объяснение не только лэмбовского сдвига, но также дополнительного магнетизма электрона.

7. Лэмбовский сдвиг

Перейдем теперь к рассмотрению лэмбовского сдвига, явившегося фундаментальным открытием, притом давшим наиболее сильный толчок для развития новейшей теории поля и вакуума. Дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования лэмбовского сдвига явились одним из самых актуаль-

ных участков фронта во всей теории элементарных частиц и в квантовой теории поля (примерно по 1952 г.). Исследования лэмбовского сдвига, проводящиеся с весьма большой точностью, позволяют не только подтвердить весьма тонкие вакуумные эффекты, но также в последнее время дают возможность перейти к уточнению различных поправок, связанных с неэлектромагнитным взаимодействием электронов с ядрами и элементарными частицами. Напомним, что речь идет об относительном сдвиге энергетических уровней электрона $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$ в атомах водорода или дейтерия на величину $0,033^{-1}$ см, т. е. около 1058—1059 мзгц. Как известно, согласно теории тонкой структуры, полученной на основе дираковского уравнения, эти два уровня должны были совпадать. Действительно из приближенной формулы, являющейся разложением полного выражения для энергии уровня с достаточной для нас точностью, имеем

$$\frac{E_{nj}}{\hbar} = -\frac{R}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + (1/2)} - \frac{3}{4} \right) \right].$$

Следовательно, при $j = 1/2$ (S -состояние) и $j = 1 - (1/2)$ (P -состояние) получаем в данном приближении одни и те же значения для энергии E_{nj} . Первые указания на наличие расхождения с теорией в виде сдвига рассматриваемых уровней были получены оптическим путем еще в тридцатых годах. Однако недостаточно убедительные эксперименты и отсутствие какой-либо теоретической интерпретации не позволили обратить должное внимание на открытие нового явления [1]. Впервые сдвиг интересующих нас уровней, обязанный главным образом сдвигу уровня $2S_{1/2}$ вверх, был окончательно доказан в 1947 г. опытами Лэмба в сотрудничестве с Ризерфордом, сделанными радиоспектроскопическим методом. Новейшие измерения Лэмба с сотрудниками (43) привели к следующему значению сдвига:

$$\delta E_L^H = 2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2} = 1057,77 \pm 0,10 \text{ мзгц (для водорода),}$$

$$\delta E_L^D = 1059,00 \pm 0,10 \text{ мзгц (для дейтерия).}$$

Остановимся сейчас несколько подробнее на теории лэмбовского сдвига уровней $2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{1/2}$. Наглядная его интерпретация заключается в том, что электрон взаимодействует не только с внешним электромагнитным полем, но также с флуктуационными нулевыми вакуумными колебаниями, которые сообщают электрону дополнительную энергию. Исходя из уравнения $m\ddot{x}^2 = eE_0e^{i\nu t}$, получим для свободного электрона

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \overline{\dot{x}^2} = \frac{m}{2} \frac{e^2 E_0^2}{m^2 \nu^2} = \frac{e^2 \hbar}{\pi m c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} \nu d\nu.$$

При учете электронно-позитронного вакуума получается

$$E'_{\text{kin}} \approx \frac{e^2}{\pi \hbar c} m c^2 \ln \frac{f \hbar \nu_{\text{max}}}{m c^2} \quad (f \text{ — численный коэффициент})$$

$$\overline{\dot{x}^2} = \frac{2e^2 \hbar}{\pi m^2 c^3} \ln \frac{f m c^2}{\hbar \nu_0}$$

(см. статью Вайскопфа в сборнике [1]). Для электрона в атоме потенциальная энергия взаимодействия с ядром окажется несколько измененной благодаря тому, что электрон уже подвержен действию вакуумных колебаний, что и приводит к сдвигу уровней δE

$$\delta V = V(r+x) - V(r) = \text{grad } Vx + \frac{1}{2} \Delta V \frac{x^2}{3} + \dots$$

$$\delta E = \frac{1}{6} \int \Delta V \overline{x^2} |\psi_n|^2 d\tau = \frac{2\pi}{3} Z e^2 |\psi_n(0)|^2 \overline{x^2}.$$

Подобный полуклассический подсчет Вельтона позволил дать правильную структуру искомого результата и порядок его величины.

Заметим, кстати, что, развивая полуклассическую интерпретацию взаимодействия электрона с вакуумными колебаниями, предложенную Вельтоном, разумно дополнить уравнение движения электрона членом радиационного трения. Тогда можно показать, что, исходя из уравнения

$$m\ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{x} = eE_0 e^{i\omega t},$$

где E_0 — амплитуда вакуумных нулевых колебаний, мы приходим к конечному значению не только среднего квадрата смещения

$$\sqrt{\overline{x^2}} \approx \sqrt{\frac{e^2}{\hbar c}} \sqrt{\frac{\hbar}{mc}},$$

но также к конечному значению для средней кинетической энергии, которая будет играть роль полевой электромагнитной энергии электрона

$$E_{\text{kin}} \approx mc^2 \left(\frac{2\pi e^2}{\hbar c} \right) \approx \frac{1}{137} mc^2.$$

При этом в качестве нижнего предела интеграции следует взять некоторое ν_0 , отражающее наличие связи, и применить добавочное обрезание высоких частот при помощи множителя $\exp(-mc^2/\hbar c)^2$, согласно результатам Вайскопфа. Аналогичный результат можно получить, исходя из формул для броуновского движения электрона в поле реального равновесного электромагнитного излучения и перенося затем полученные формулы на вакуум путем сопоставления

$$\frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/kT} - 1} \rightarrow \frac{\hbar\nu}{2}$$

или путем замены реальной температуры на некоторую эффективную $kT \rightarrow mc^2$.

Интересно отметить некоторую аналогию между сдвигом уровней, обязанным вакуумной поправке (главным образом вакуума электромагнитного поля) к энергии электрона при его движении во внешнем поле и поправкой к самому внешнему полю или заряду — току, вызванной поляризацией вакуума (электронов-позитронов).

В связи с различными уточнениями теории сдвига отметим, что аналогично подсчету лэмбовского сдвига С. В. Тябликов рассмотрел дополнительную энергию и дополнительную размазанность в координате, возникающие благодаря взаимодействию электронов не только с кулоновским полем, но также с полем равновесного электромагнитного излучения при данной температуре [44].

Весьма поучительно при подсчете теоретического значения лэмбовского сдвига δE_L (относительно сдвига уровней $2^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$) в водороде выписать шаг за шагом отдельные поправки. Остановимся сперва на электромагнитных вакуумных поправках, дающих основной вклад в лэмбовский сдвиг, но еще не исчерпывающих полностью его значения.

Первый еще нерелятивистский подсчет Бете (1947) заключался в вычислении выражения полевой части энергии электрона, обязанной взаимодействию с поперечным полем с отбрасыванием той же энергии для свободного электрона, которая предполагается включенной в ренормированную массу

$$W^v = \left(-\frac{2c^2}{3\pi\hbar c^3} \int_0^K k dk \sum_n |V_{nm}|^2 \frac{1}{E_n - E_m - k} \right) - \left(\frac{2e^2}{2\pi\hbar c^3} \int k dk \frac{v^2}{k} \right), \quad K \approx mc^2,$$

1. Этот подсчет Бете, в котором учитывалось взаимодействие лишь с флуктуациями вакуума электромагнитного поля, привел к выражению для сдвига в S -состоянии, которое уже объясняло основную часть эффекта

$$\delta E = \frac{8Z^4}{3\pi} \frac{\alpha^3}{n^3} R \ln \frac{mc^2}{k_0}$$

(Z — заряд ядра, k_0 — средняя энергия возбуждения, оказывающаяся равной 16,646 R , R — ридбергова постоянная для ядра бесконечной массы). Отсюда для $2S$ -уровня, подставив для логарифма значение 7,63, $n = 2$, Бете нашел, пренебрегая сдвигом P -уровня, $\delta E_L^0 = 1040$ $мггц$, в удовлетворительном согласии с опытом (см. статью Бете в сборнике [1]).

Применяя для электрона релятивистскую трактовку, учитывая влияние вакуумного магнитного момента электрона и влияние электронно-позитронного вакуума, т. е. поляризацию вакуума, получаем [48—52] для сдвига nS -уровня с точностью до α^3 выражение (1949)

$$\delta E_{nS} = \frac{8Z^4}{n^3} \frac{\alpha^3}{3\pi} R \left(\ln \frac{mc^2}{k_0(n, 0)} - \ln 2 + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right),$$

а для сдвига $2P_{1/2}$ -уровня формулу

$$\delta E_{nP} = \frac{8Z^4\alpha^3}{n^3 3\pi} R \left(\ln \frac{R}{k_0(n, l)} - \frac{3}{8} \right).$$

Здесь член с коэффициентом $1/5$ учитывает поляризацию вакуума и дает вклад в сдвиг, равный $-27,13$ $мггц$ (член Юлинга). Доля вакуумного магнитного момента электрона в лэмбовском сдвиге с точностью до α^3 равна $+67,82$ $мггц$. Средняя энергия возбуждения для $2S$ -уровня оказалась равной

$$k_0(2, 0) = (16,646 \pm 0,007) R,$$

а для $2P$ -уровня

$$k_0(2, 1) = (0,9704 \pm 0,0002) R.$$

Для постоянной тонкой структуры α принимается лучшее современное значение [40]

$$\frac{1}{\alpha} = 137,0364.$$

Отсюда для лэмбовского сдвига уровней ($\delta E_L = \delta E_{2S} - \delta E_{2P}$) в водороде или дейтерии получаем ($Z = 1$, $n = 2$) в довольно хорошем согласии с опытом

$$\delta E_L^1 = \delta E_{S-P} = \frac{\alpha^3 R}{3\pi} \left\{ \left[\ln \frac{mc^2}{k_0(2, 0)} - \ln 2 + \frac{5}{6} \right] - \frac{1}{5} - \left[\ln \frac{R}{k_0(2, 1)} - \frac{3}{8} \right] \right\} = 1052,14 \text{ мггц.}$$

Дальнейшее уточнение теории связано прежде всего с проведением всех подсчетов с точностью до α^4 .

Учет членов относительного порядка $Z\alpha$, т. е. членов $Z^5\alpha^4$, связанных, в частности, с повторным действием кулонова потенциала, дает вклад в лэмбовский сдвиг величины

$$\frac{8Z^4\alpha^3 R}{n^3 3\pi} \left(3\pi Z\alpha \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right),$$

к которому добавляется доля, вносимая поляризацией вакуума в следующем приближении:

$$+ \frac{8Z^4 R \alpha^3}{n^3 3\pi} \cdot \frac{5}{64} \pi Z\alpha.$$

В итоге эти поправки высшего порядка дадут в лэмбовский сдвиг в водороде следующий вклад ($n = 2$, $Z = 1$):

$$\frac{\alpha^3 R}{3\pi} \left[3\pi \alpha \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{192} \right) \right] = +7,14 \text{ мггц}$$

(см. статью X, а также [41]).

Учет следующего приближения по α (два виртуальных фотона) дает, во-первых, через поправку четвертого порядка в e к вакуумному магнитному моменту

вклад в сдвиг, равный $-0,94$ мггц (см. [54, 55]). Во-вторых, поправка четвертого порядка по α в поляризации вакуума привносит в сдвиг долю $-0,24$ мггц (см. [56]).

В-третьих, от остальных поправок порядка α^4 имеется вклад в сдвиг, равный $0,24$ мггц . Эти члены высшего порядка приводят к вкладу $+6,20$ мггц (с ошибкой $\pm 0,12 - 22\varepsilon$, где ε — ошибка в значении $1/\alpha$).

До начала 1953 г. не было опубликовано поправок высшего приближения, т. е. порядка α^3 , $Z\alpha^2$, $Z^2\alpha^2$ и т. д., по отношению к основному сдвигу (порядок $Z^4\alpha^3!$), несмотря на очевидную желательность учета подобных уточнений. Таким образом, вакуумная электромагнитная часть лэмбовского сдвига оказывается при учете всех указанных членов равной на основе лучших современных подсчетов

$$\delta E_{\text{вр эл. маг.}} = 1058,34 \text{ мггц.}$$

Хорошее согласие с экспериментальным значением сдвига в водороде (1057,77) подтверждает истолкование лэмбовского сдвига как обязанного в основном вакуумным электромагнитным эффектам.

2. Однако возможности современной теории этим еще далеко не исчерпываются, независимо от подсчета высших приближений по α и $Z\alpha$, так как сейчас представляется возможность учесть принципиально новую поправку, связанную с учетом движения ядра, которое уже можно не предполагать обладающим бесконечной массой.

Как мы отмечали, в этом направлении в последнее время достигнут значительный успех в связи с установлением общего вида релятивистского уравнения для системы двух тел.

Подсчет поправок к тонкой структуре в водороде порядка $\alpha(m/M)$ по отношению к основному члену привел в случае водорода к значениям

$$+0,379 \text{ мггц (для } 2S_{1/2} \text{ терма),}$$

$$-0,017 \text{ мггц (для } 2P_{1/2} \text{ терма),}$$

т. е. к дополнительной доле $+0,396$ мггц в лэмбовском сдвиге. Для дейтерия поправка этого типа будет вдвое меньше. Кроме того, следует учесть влияние конечной массы ядра на величину сдвига, вычисленного прежде в приближении бесконечной массы ядра. Недавние подсчеты Сальпетера [57] привели к значению поправки

$$\frac{m}{M} (-3S - 2L),$$

где $3S$ — основной сдвиг, L — лэмбовская константа, часто встречающаяся в теории данного эффекта, равная $(\alpha^3 R/3\pi)c = 135,6431$ мггц .

В итоге получают следующие поправки к лэмбовскому сдвигу на конечное значение массы ядер:

$$\Delta E_M^H = -1,175 \text{ мггц (для водорода),}$$

$$\Delta E_M^D = -0,588 \text{ мггц (для дейтерия).}$$

3. Третьим направлением, по которому развивается теория лэмбовского сдвига, является учет различных неэлектромагнитных поправок. Сюда относится прежде всего учет структуры ядра, связанный с размазанностью заряда и магнетизма ядра по объему в случае атома дейтерия. Необходимо также учесть дополнительное притяжение электрона к нейтрону в случае сдвига уровня в атоме дейтерия и дополнительное отталкивание, модифицирующее кулоновское притяжение в случае водорода. Тем самым теория лэмбовского сдвига в водороде и дейтерии непосредственно связывается с теорией изотопического смещения в легких атомах, как было подчеркнуто в работе [125]. Кроме того, как ясно видно, прецизионное исследование лэмбовского сдвига позволяет не только делать выводы

о вакуумных эффектах, влиянии содвижения и структуре легких ядер, но замечательным образом может также дать важные сведения относительно взаимодействия элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов) и распределении заряда и магнетизма по их „объему“.

Не останавливаясь сколько-нибудь подробно на этих интересных, но еще мало изученных вопросах, выходящих при том за рамки квантовой электродинамики и электромагнитного вакуума, которым в основном посвящен данный сборник, укажем все же коротко на результаты анализа этих вопросов. Отказываясь от приближения точечного заряда ядра, влияние распределения заряда по объему дейтерона следует произвести либо по методу возмущений, либо по методу уточненных функций. Для последней цели, задавшись каким-либо наиболее разумным приближением и еще не известному окончательно закону ядерных сил, следует рассчитать волновые функции протона в дейтероне. После этого решается квантомеханическая задача движения электрона в двух областях: 1) внутренней, в которой действует только что найденное поле, определяемое движением протона, и 2) внешней, в которой действует кулоновское поле точечного заряда (см. [4], часть II, § 7).

Оба решения сшиваются обычным образом. Менее точный, но достаточный для данной задачи результат получится при использовании обычных волновых функций электрона, вычисленных для точечного ядра; тогда сдвиг уровня, обусловленный размазанности заряда, как всегда в теории изотопического смещения, определится по теории возмущений формулой

$$\Delta E = \int |\psi|^2 U d\tau,$$

где энергия возмущения U , равная разности между (Ze^2/r) и энергией взаимодействия со стороны распределенного заряда, вычисляется при помощи волновой функции дейтерона (например, в предположении прямоугольного потенциального ядра для сил протон-нейтрон), средний радиус которого оказывается при этом равным

$$\bar{R}^2 = \frac{1}{2} d^2 \left(1 + \frac{\rho}{d} \right),$$

где параметры теории дейтерона $d = 4,314 \cdot 10^{-13}$ см, $\rho = 1,71 \cdot 10^{-13}$ см (см. статью X).

В результате от размазанности заряда в дейтероне получается поправка, равная $+0,733$ мзгц. Остается, наконец, учесть наименее ясные обстоятельства, связанные с какими-то эффективными размерами самих протонов и нейтронов, их собственными магнитными моментами и дополнительными смешанными электронно-мезонными силами, возникающими благодаря виртуальной диссоциации нуклеонов на нуклоны и π -мезоны: $n \rightleftharpoons p + \pi_-$; и $p \rightleftharpoons n + \pi_+$. Эта диссоциация приводит к возникновению незначительного притяжения между электроном и нейтроном [59] (см. также в книге [4], часть II, § 7) и незначительного отталкивания между электроном и протоном. Силы притяжения между электроном и нейтроном, которые непосредственно обнаруживаются при рассеянии нейтронов на электронах, а также сказываются в стационарных состояниях на изотопическом смещении, можно охарактеризовать потенциальной ямой с радиусом, равным классическому радиусу электрона, и глубиной порядка $V \approx 4100 \pm 1000$ эв, или соответственной константой связи $b = 10^{-46}$ эрг/см³, в законе взаимодействия электрон-нейтрон, записанного феноменологически в виде $U = b |\chi|^2$, где χ — волновая функция нуклеона. Учитывая эти значения, получим для разности лэмбовских сдвигов в водороде и дейтерии поправку порядка $0,06 \pm 0,03$ мзгц.

К тому же вопросу можно подойти с другой стороны. Учет „аномального“ магнитного момента протона ($+2,79 e\hbar/2\pi Mc$) приводит не только к спиновым поправкам в сверхтонкой структуре, но, как показал Фолди [60], вызывает

появление добавочного небольшого потенциала взаимодействия, не зависящего от направления спина,

$$U(r) = 4\pi\mu_p \frac{e^2}{4M_p^2} \delta(r).$$

Это дает поправку в лэмбовском сдвиге в водороде

$$+0,025 \text{ мзгц (для } 2S\text{-состояния)}.$$

Аналогичная поправка в дейтерии будет ввиду разных знаков μ_p и μ_n ничтожной.

Складывая только что указанные поправки, которые можно назвать неэлектромагнитными, с найденными выше вакуумными поправками, а также поправкам на результаты релятивистской трактовки двух тел, получим наилучшее в рамках современной теории значение лэмбовского сдвига:

$$\delta E_L^H = 1057,19 \text{ мзгц (для водорода),}$$

$$\delta E_L^D = 1058,49 \text{ мзгц (для дейтерия)}$$

в весьма хорошем согласии с экспериментальными значениями.

Теоретическое значение разности ($\delta E_L^D - \delta E_L^H$) равно 1,296 мзгц по сравнению с экспериментальной величиной ($1,23 \pm 0,15$) мзгц.

8. Различные вакуумные эффекты

После рассмотрения двух важнейших конкретных результатов новейшей квантовой электродинамики: теории лэмбовского сдвига и дополнительного магнитного момента электрона, подтвержденных опытом и явившихся прямым доказательством наличия поляризации вакуума, вакуумных флуктуаций и других вакуумных эффектов, отметим, что вакуумные („радиационные“) поправки будут сказываться на всех электромагнитных, а также мезонных и других явлениях в той или иной, вообще говоря, крайне незначительной степени. В этой связи были проделаны кропотливые расчеты весьма большого числа явлений с учетом вакуума, которые привели к результатам, еще не подтвержденным опытом, ввиду малости поправок и отсутствия достаточно точных экспериментов: отметим здесь, например, поправки в теории рассеяния электронов на заряде к формуле Резерфорда — Мотта (см. статьи II, IV, а также [61]), поправки к формуле Клейна — Нишины [62], поправки к теории формы и ширине спектральных линий [63].

Обратим теперь внимание на то, что квантовая электродинамика предсказывает ряд интересных нелинейных эффектов, которые, очевидно, следуют из наличия нелинейных добавок к лагранжиану, полученных благодаря учету вакуума. К этим эффектам прежде всего относится рассеяние света на свете, эффективное сечение которого имеет максимум в области частот, несколько превышающих критическую частоту порождения реальных пар $\nu_{\max} \sim \frac{2mc^2}{\hbar}$, и при малых частотах убывает как ν^6 для неполяризованного излучения

$$\sigma_{\Pi} = \frac{\alpha^4}{4\pi\chi_0^2} \frac{139}{90^2} \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^6 (3 + \cos^2 \varphi)$$

(см. [64, 65]).

Для высоких частот теория дает результат

$$\sigma_{\Pi} \approx \frac{\alpha^4}{\pi^2\chi_0^2} \frac{\ln\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4}{\left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^4}$$

(см. [66]).

Иначе говоря, два фотона могут виртуально породить пару электрон-позитрон, которая снова превращается в два фотона:

$$\gamma + \gamma' \rightarrow e_- + e_+ \rightarrow \gamma'' + \gamma'''$$

(см. [68, 69]).

Наряду с этим нелинейная электродинамика приводит к рассеянию света на кулоновском электростатическом поле, например, атомных ядер (Дельбрюк [67]). Теоретические подсчеты привели для дельбрюковского рассеяния вперед, в случае малых энергий, к следующему значению эффективного сечения

$$\frac{d\sigma(\omega, 0)}{d\Omega} = \left(\frac{73}{72}\right)^2 \left(\frac{1}{32}\right)^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 Z^4 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^6.$$

Для случая рассеяния на малые углы при больших энергиях новейшие подсчеты Бете и Рорлиха [70] подтвердили и обобщили результаты Ахиезера и Померанчука [71]. В качестве примера укажем, что при энергии фотона 350 Мев и угле $\theta = 0,01^\circ$ эффективное сечение дельбрюковского рассеяния в уране будет равно $3000 \text{ барн/стерадиан}$, тогда как в этом случае для комптон-эффекта $\sigma = 7 \text{ барн/стерадиан}$, причем вероятность когерентного рэлеевского рассеяния оказывается весьма мала; поэтому рассеяние γ -лучей на малые углы при весьма высоких энергиях должно быть главным образом когерентным, но нелинейным дельбрюковским. До сих пор еще нет экспериментального подтверждения наличия обоих нелинейных эффектов, хотя имеются предварительные сведения о наблюдении нелинейного рассеяния Г. Вильсоном (см. [69]).

Обратим теперь внимание на то, что теория сверхтонкой структуры, в частности основного состояния водорода, также должна быть уточнена на базе новейшей квантовой электродинамики. В дальнейшем аналогичная теория развивается для дейтерия и позитрония. Обычная формула Ферми, дающая значение расщепления уровней, соответствующая параллельным и антипараллельным спинам электрона и ядра, имеет вид

$$\delta\nu = \frac{4}{3} \frac{\mu\mu'}{\hbar} |\psi(0)|^2 \frac{2I+1}{I} = \frac{16}{3} \mu\mu' |\psi(0)|^2 \quad \left(\text{для протона } I = \frac{1}{2}\right)$$

(см. [4], часть I, § 48).

Релятивистская поправка Брейта добавляет множитель $\left(1 + \frac{3}{2}(Z\alpha)^2\right)$,

а вновь вычисленные электромагнитные вакуумные поправки, учитывающие также новое значение магнитного момента электрона с точностью до α^2 и поляризацию вакуума, привносят фактор

$$\left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} Z\alpha^2 (5 - 2 \ln 2) - 2,98 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right\}$$

(см. [72—74]).

Кроме того, формула сверхтонкой структуры уточняется поправкой со стороны новейшей релятивистской квантовой теории двух тел [47].

Поправка на учет содвижения ядра не ограничивается множителем $[1 + (m/M)]^{-3}$ (см. статью Бете и Лонгмайра в [1]), но включает в себя новые члены порядка $\alpha(m/M)$, обязанные, в частности, обмену двумя фотонами между протоном и электроном [74а]. Различные уточнения в теории сверхтонкой структуры приобретают особый интерес в связи с прецизионным измерением отношения сверхтонкого расщепления в водороде и дейтерии

$$\frac{\delta\nu_H}{\delta\nu_D} = 4,3786484 \pm 0,0000020 = \left(\frac{\delta\nu_H}{\delta\nu_D}\right)_0 (1 - \Delta),$$

где $(\delta\nu_H/\delta\nu_D)_0$ — значение по фермиевской формуле; при этом $\Delta_{\text{exp}} = (1,702 \pm 0,008) \cdot 10^{-4}$, тогда как подсчеты Сальпетера — Ньюкомба дали значение, отличающееся на $\Delta = (0,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-4}$ (см. также [75, 76]).

В теории сверхтонкой структуры аналогично теории лэмбовского сдвига следует, очевидно, учесть также разнообразные неэлектромагнитные поправки, связанные с размазанностью заряда в дейтероне, и влияние конечности радиуса ядра на значение $|\psi(0)|^2$ (см. [4], часть II, § 7). Таким образом, новейшая теория сверхтонкой структуры после отделения вакуумных ныне гарантированных эффектов, со своей стороны сможет пролить свет на вопросы строения ядер и взаимодействия элементарных частиц (см. [4], часть II, § 7).

9. Релятивизация проблемы двух тел

Перейдем теперь к краткой характеристике новейшей трактовки проблемы двух тел. Весьма важный шаг в релятивистской квантовой теории был сделан недавно в ряде работ путем установления релятивистского уравнения для двух тел, образующих связанную систему типа атома водорода, позитрония или дейтерона (см. XII, XIII, а также [77, 78]). Суть дела можно коротко пояснить следующим образом. Пусть две спинорные дираковские частицы (фермионы) с массами m_1 и m_2 взаимодействуют друг с другом посредством электромагнитного или мезонного поля (бозонов). Волновая функция двух частиц $\psi(x_{\mu a}, x_{\mu b}) \equiv \psi(1, 2)$ будет иметь 16 спинорных компонент. Тем самым в данном случае применяется многовременной формализм, в котором для каждой частицы вводится отдельное время. Основное интегро-дифференциальное уравнение системы будет иметь следующий вид:

$$(i\nabla_3^a - m_a)(i\nabla_4^b - m_b)\psi(3, 4) = i \int \int d\tau_5 d\tau_6 \bar{G}(3, 4; 5, 6)\psi(5, 6),$$

где $\nabla_3^a = \gamma_\mu^a \frac{\partial}{\partial x_\mu^a}$ дираковский оператор, а двухчастичный гриниан $G(3, 4; 5, 6)$

характеризует инвариантным образом взаимодействие двух частиц. Это уравнение, выведенное Сальпетером и Бете на базе фейнмановского метода, может быть более строго получено из общих положений квантовой теории поля [79]. Следует подчеркнуть, что $\bar{G}(3, 4; 5, 6)$ не устанавливается в замкнутом виде, но представляется в форме бесконечного степенного ряда по постоянной связи. Новое уравнение обобщает дираковское уравнение для одной частицы во внешнем поле. Если константу связи можно считать малой, то уравнение приобретает вид

$$(i\nabla_1^a - m_a)(i\nabla_2^b - m_b)\psi(1, 2) = iG(1, 2)\psi(1, 2),$$

поскольку $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ можно заменить первым членом его разложения, т. е. одночастичным гринианом:

$$G^1(1, 2; 3, 4) = G(1, 2) \delta^{(4)}(1, 3) \delta^{(4)}(2, 4).$$

Для случая обмена лишь одним фотоном имеем

$$G(1, 2) = e^2 \gamma_\mu^a \gamma_\mu^b \delta_+(s_{12}^2),$$

где s_{12} — инвариантное расстояние между частицами. В частности, применение этого приближения к проблеме дейтерона в основном состоянии приводит в конце концов к уравнению

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}K^a + p^a - M\right)\left(\frac{1}{2}K^b - p^b - M\right)\psi(p_\mu) = \\ = -g^2(4\pi^3 i)^{-1} \int d^4k [k^2 - \mu^2]^{-1} \psi(p_\mu + k_\mu), \end{aligned}$$

записанному в пространстве относительных импульсов p_μ при использовании релятивистского обобщения юкавского потенциала; M и μ обозначают массу нуклона и мезона. Через g^2 обозначена мезонная константа тонкой структуры ($g^2/\hbar c$) (в так называемых протиестественных единицах, когда $\hbar = c = 1$).

Если перейти к большим компонентам функций и пренебречь членом относительной энергии, что эквивалентно замене запаздывающего взаимодействия

мгновенным взаимодействием, то мы приходим к обычному нерелятивистскому уравнению Шредингера в пространстве импульсов для двух нуклонов, взаимодействующих посредством статистического центрального юкавского потенциала.

Новое релятивистское уравнение для двух частиц находит важное применение в теории атома водорода и водородоподобных атомов, а также атома позитрония (см. статью XIII, а также [80]). Можно показать, что в случае более корректной трактовки даже только „мгновенной“ незапаздывающей части взаимодействия получается уравнение, хотя и сходное с брейтовским, но все же не эквивалентное ему. В то время как уравнение Брейта в случае кулоновского потенциала можно записать в виде

$$[E - H_a(\vec{p}) - H_b(\vec{p})] \varphi(\vec{p}) = - \frac{e^2}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \varphi(\vec{p} + \vec{k}),$$

более точное трехмерное уравнение в случае мгновенного взаимодействия должно иметь вид

$$[E - H_a(\vec{p}) - H_b(\vec{p})] \varphi(\vec{p}) = \{ \Delta_+^a(\vec{p}) \Delta_+^b(\vec{p}) - \Delta_-^a(\vec{p}) \Delta_-^b(\vec{p}) \} \times \\ \times \int d^3k G(\vec{p}) \varphi(\vec{p} + \vec{k}), \quad (13)$$

где добавочный множитель содержит операторы проектирования Казимира,

$$\Delta_{\pm}^a(p) = \frac{E_a(p) \pm H_a(p)}{2E_a(p)} \text{ и т. п.; } E_a(p) = (m_a^2 + p^2)^{1/2}$$

В нерелятивистском пределе, когда обе частицы находятся в состояниях положительной энергии, точное трехмерное уравнение совпадает с брейтовским. Любопытно, что даже в случае ограничения мгновенным взаимодействием уравнение Брейта было бы справедливо лишь для фиктивной одноэлектронной теории и оказывается неверным в реальном случае теории дырок. Дело в том, что в более точной теории следует учитывать промежуточные состояния, в которых одна или обе взаимодействующие частицы находятся в состояниях отрицательной энергии. Новое релятивистское уравнение для двух частиц впервые позволило найти поправки порядка $\alpha(m/M)$ к тонкой структуре водорода. Тем самым возникла возможность уточнения теории лэмбовского сдвига.

Для 2S-состояния получается поправка

$$\Delta E = + \frac{\alpha^3 R}{3\pi} \left(\frac{m}{M} \right) \left\{ 2 \left[\ln \frac{\alpha^{-1}}{8,32} + \frac{11}{6} \right] - \frac{3}{2} \left[\ln(\alpha^{-1}) - \frac{7}{4} - 0,41 \right] \right\} = + 0,379 \text{ мггц.}$$

Аналогично для 2p-состояния получается поправка

$$\Delta E = - 0,017 \text{ мггц.}$$

Для водородоподобных атомов поправки будут расти примерно как Z^5/A по сравнению с водородом¹⁾.

Аналогичные соображения можно применить в теории позитрония. Напомним, что эта весьма любопытная, предсказанная несколько лет назад атомоподобная система, состоящая из электрона и позитрона, вращающихся вокруг общего центра тяжести, была экспериментально обнаружена в 1951 г. [81]. Существенно, что позитроний может находиться либо в ортосостоянии со спином единица, либо в парасостоянии со спином нуль. Ортопозитроний, обладающий средним временем жизни

$$\tau = \frac{9}{2} \frac{\pi}{(\pi^2 - 9)} \frac{1}{ck_0 a^6} \approx 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ сек.,}$$

превращается в три фотона, тогда как парапозитроний, для которого $\tau = (2/ck_0 a^5) \sim \sim 1,25 \cdot 10^{-10}$ сек., аннигилирует с испусканием двух фотонов (см. [4], часть I, § 40). Эксперименты не только подтвердили наличие двухфотонной и трехфотонной аннигиляции, но также обнаружили сверхтонкую структуру в энергетических

¹⁾ Заметим еще, что дальнейшее исследование привело также к поправке, зависящей от конечности массы ядра, в основной вакуумной доле лэмбовского сдвига.

уровнях позитрония, обязанную спиновому взаимодействию. Прежние расчеты, основанные на учете обычного спинового взаимодействия частиц, а также специфического обменного взаимодействия электрона и позитрона, связанного с их виртуальной аннигиляцией, позволили вычислить разницу в положении уровней $1s$ и $2s$ позитрония с точностью до $\alpha^2 R$ (см. [82, 83], а также [4]). Наибольший вклад в величину расщепления возникает от взаимодействия, связанного с виртуальной аннигиляцией частиц.

При этих расчетах учитывались поправки, вытекающие из брейтовского взаимодействия (аналог которого в теории водорода вносит определенную долю в сверхтонкую структуру), а также учитывалось влияние виртуальной аннигиляции частиц. В дальнейшем были учтены поправки следующего порядка тех же типов, а также новая поправка из точного уравнения для системы двух тел [84]. Если учесть все члены взаимодействия, связанные с испусканием или поглощением двух фотонов, то с точностью до $\alpha^3 R$ для разности значений энергии в синглетном и триплетном состояниях получим значение

$$\begin{aligned} \Delta W_{ts} &= \left(\frac{2\pi\alpha}{m^2} \right) |\varphi_0(0)|^2 \left\{ \frac{7}{3} - \left(\frac{32}{9} + 2 \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 R_{\infty} \left\{ \frac{7}{3} - \left(\frac{32}{9} + 2 \ln 2 \right) \frac{\alpha}{\pi} \right\} = 2,0337 \cdot 10^6 \text{ мГц}, \end{aligned}$$

при этом синглетное состояние будет лежать ниже триплетного. В то же время эксперименты приводят к значению

$$\Delta W_{ts} = (2,035 \pm 0,003) 10^6 \text{ мГц}$$

в хорошем согласии с теорией [82, 83].

Интересно подчеркнуть, что с результатами релятивизированной подобным образом трактовки двух тел совпадают выводы так называемого неадиабатического метода, в котором рассмотрение взаимодействия и уравнений движения не отрываются друг от друга [126]. В последнее время оба метода были применены к анализу системы мезон-нуклеон [127].

10. Квантовая мезодинамика

До сих пор речь шла о квантовой электродинамике и теории вакуума электромагнитного поля и поля электронов-позитронов. Очевидно, однако, что аналогичное положение вещей должно иметь место для полей всех других частиц: нуклеонов, мезонов всех типов, а также гравитационного поля и т. д., хотя квантовая мезодинамика находится еще на первом этапе развития, но она уже получила убедительное экспериментальное подтверждение в случае трактовки распада π_0 -мезонов. В новейшей квантовой мезодинамике выяснены некоторые интересные обстоятельства, которым посвящена статья XI (см. также [85—90]).

Существенно с самого начала подчеркнуть, что мезодинамика развивается, вообще говоря, для случая слабой связи; однако, как известно, связь нуклеонов с псевдоскалярными мезонами, играющими главную роль в ядерном поле, отнюдь не является слабой (поскольку соответствующая константа тонкой структуры $g/\hbar c \approx 1$), так что применение теории к этому случаю носит предварительный характер. С другой стороны, трактовка электромагнитных эффектов в мезодинамике может быть развита обычным образом.

В то время как, согласно теореме Дайсона, все бесконечности в квантовой электродинамике связаны с полевой массой или полевым зарядом электронов-позитронов и могут быть изолированы и в известной мере устранены путем перенормировки массы и заряда, в случае мезонных полей, взаимодействующих с нуклеонами, лишь в случае скалярной связи для скалярных мезонов и псевдоскалярной связи для псевдоскалярных мезонов типы расходимостей будут, вообще говоря, иметь вид, аналогичный расходимостям электродинамики. При этом для заряженных скалярных и заряженных или нейтральных псевдоскалярных мезонов

бесконечности, соответствующие графикам с одной или тремя внешними мезонными линиями, исключаются в силу законов сохранения заряда и четности. Однако даже в этих случаях имеют место также добавочные расходимости, связанные с рассеянием мезонов на мезонах, для исключения которых требуется выделение дополнительного контрчлена перенормировки в лагранжиане типа $\delta\lambda\varphi^4$. Это обстоятельство подчеркивает необходимость существенного учета нелинейностей в мезонной теории, введенных ранее Родичевым и Иваненко (см. [4], часть II, § 3). Аналогично этому в теории скалярных нейтральных мезонов со слабой связью приходится выделить помимо $\delta\lambda\varphi^4$ контрчлен $\delta\lambda\varphi^3$. Кроме того, ренормируемой подобно электродинамике оказывается теория нейтральных векторных мезонов с векторной связью (уравнения Прока), а также некоторые специальные смеси мезонных полей. Для всех остальных видов мезонных полей (например, полей ρ -мезонов фермионного типа) и т. д. имеется бесконечное число классов расходимостей, которые не могут быть устранены при помощи конечного числа перенормировок. См. также интересные исследования S -матрицы в мезонной теории, произведенные Ху Нингом [91].

Отметим, что подобно заряду e , перенормировке подлежит также мезонный квазизаряд g нуклеонов, входящий, например, в их энергию взаимодействия с полем псевдоскалярных нейтральных мезонов:

$$H_i = ig\bar{\chi}(x)\gamma_5\chi(x)\varphi(x),$$

где χ — функции нуклеонов, φ — мезонов.

Обратим теперь внимание на исследование нелинейного уравнения мезонного поля,

$$(\square - x_0^2 - \lambda\varphi^2)\varphi = 0.$$

С феноменологической точки зрения нелинейный добавок φ^3 можно считать обязанным наличию квазидиэлектрической проницаемости ϵ , индуцируемой нуклеонным вакуумом. Для доказательства необходимости включения в мезонную теорию члена φ^4 и определения нелинейной константы самодействия λ мезонного поля можно использовать подсчет поляризации вакуума нуклеонов-антинуклеонов (масса M), вызванный, например, медленно меняющимся нейтральным псевдоскалярным полем [88]. Тогда, применяя, например, метод Швингера для подсчета в гейзенберговском представлении нелинейных членов в лагранжиане, получим для нелинейного добавка к лагранжиану медленно меняющегося мезонного псевдоскалярного поля

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{k_0^2}{8\pi^2\hbar c} \left(\frac{1}{k_0^2 s_0} + \ln \frac{1}{\gamma k_0^2 s_0} + 1 \right) \varphi^2 - \lambda\varphi^4 + O(\varphi^6), \quad \left(\gamma = 1,780, k_0 = \frac{\hbar}{Mc} \right),$$

где $O(\varphi^6)$ — конечные члены со степенями φ выше четвертой.

Величину, стоящую в скобках в первом члене, можно рассматривать как бесконечный ренормируемый добавок к члену с основной „затравочной“ массой $\frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2$; второй член является существенно новым, связанным с взаимодействием мезонов друг с другом и ведущим к нелинейным уравнениям поля. Таким образом, для нелинейной константы самодействия получаем

$$\lambda = \frac{g^4}{(\hbar c)^3} a,$$

где

$$a = (2\pi)^{-2} \ln \frac{1}{\gamma k_0^2 s_0},$$

причем, в случае регуляризуемой теории, конечная величина s_0 играет роль минимального собственного времени.

Любопытно отметить, что общую структуру и порядок нелинейной константы λ можно очень просто получить, рассматривая в качестве источника

мезонного поля нуклеоны с распределением, заданным по приближенной статистической модели Томаса — Ферми, когда в ультрарелятивистском случае плотность нуклеонов прямо пропорциональна φ^3 [92]. Кроме того, нелинейную константу λ можно определить, рассматривая, например, рассеяние мезонов на мезонах или процесс превращения двух мезонов в пару нуклеон — антинуклеон с последующей ее аннигиляцией снова в два мезона, вполне аналогично рассеянию света на свете. Всестороннее исследование нелинейного мезонного уравнения имеет, очевидно, особый интерес ввиду того, что взаимодействия между нуклеонами передаются через мезонное поле. Оказывается, что учет нелинейных добавок уменьшает энергию взаимодействия на близких расстояниях (см. [4], часть II, § 3, а также [93, 128]). Заметим также, что нелинейности в мезонном поле приводят к возможности кратного порождения мезонов в едином акте, например при столкновении сверхбыстрых нуклеонов друг с другом, в примерном согласии с результатами недавних интересных экспериментов Шейна и др. [94] (см. также [95, 96] и [4], часть II, § 6).

Отметим, что к области квантовой мезодинамики относится также трактовка спонтанного распада π_0 -мезона на два γ -фотона, осуществляемая благодаря виртуальному порождению в промежуточном состоянии пары нуклеон-антинуклеон и последующей ее аннигиляции в два γ -фотона:

$$\pi_0 \rightarrow (n + \bar{n}) \rightarrow \gamma\gamma.$$

Как известно, согласие теории с экспериментом служит в этом случае сильным аргументом в пользу псевдоскалярного характера π_0 -мезонов, обладающих спином 0.

Любопытным примером влияния поляризации вакуума является случай недавно обнаруженных на опыте (см., например, [98]) мезо-атомов (мезо-водород, мезо-кислород и т. д.), в которых вместо одного или нескольких электронов вокруг ядер вращаются π -мезоны; в этом случае сдвиг энергетических термов, обусловленный поляризацией вакуума, заведомо будет значительным ввиду близости мезонов к ядру. Например, в близком случае μ -мезо-атомов следует ожидать поляризационного сдвига, по величине превышающего расщепление тонкой структуры [97].

Наконец, к области квантовой мезодинамики относятся эффекты, связанные с виртуальной диссоциацией нуклеонов на нуклеоны, плюс π -мезоны:

$$p \rightleftharpoons n + \pi_+, \quad n \rightleftharpoons p + \pi_-,$$

которые ведут к возникновению „аномальных“ (диссоциативных) магнитных моментов нуклеонов, а также дают начало, с одной стороны, силам притяжения электрон-нейтрон, проявляющимся при рассеянии мезонов и в изотопическом смещении, и, с другой стороны, приводят к ослаблению кулонова притяжения между протоном и электроном. К сожалению, до сих пор не удалось, проводя расчет даже в четвертом приближении, объяснить количественно значение магнитных моментов протона и нейтрона благодаря их связи с полем нейтральных и заряженных псевдоскалярных мезонов (см. [79]). За подробностями трактовки этих проблем, выходящих за рамки сборника, отсылаем к литературе [4, 99].

С диссоциацией нуклеонов мы сталкиваемся также и в интересующем нас вопросе лэмбовского сдвига, небольшая часть которого оказывается обязанной не вакуумным электромагнитным причинам, но обусловлена только что указанным дополнительным взаимодействием электрона с нуклеонами в водороде и дейтероне.

11. Квантовая теория гравитации

Как известно, основы квантовой теории слабого гравитационного поля, описываемого волновыми функциями $h_{\mu\nu}$, где метрический тензор $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$ ($g_{\mu\nu}^0$ -галилеевы значения), можно развить совершенно так же, как это делается в квантовой электродинамике или мезодинамике. С другой стороны, квантовая

теория общего поля тяготения, подчиняющегося нелинейным уравнениям, находится еще в зачаточном состоянии.

Многие наиболее существенные отличия станут ясными, если учесть, что гравитационное поле имеет квадрупольный характер, а гравитоны, лишенные, подобно фотонам, массы покоя, обладают спином 2 (см. [4, 100]).

Наряду с квантовым выводом закона Ньютона и выражения для излучения гравитационных волн, повидимому наиболее важным следствием квантовой теории тяготения, развитой до сих пор, является заключение о возможности взаимного превращения электронов-позитронов и других частиц в гравитацию и обратно, согласно нашей гипотезе (см. [4], ч. II, § 5 и [129]).

Возникает вопрос о распространении на гравитационное поле современной теории вакуума, на котором мы остановимся совсем коротко, главным образом ввиду его недостаточной разработанности. Нелинейные уравнения гравитационного поля можно записать (см. [101—103]) в следующем простом виде:

$$g_0^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \sqrt{-g} g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Theta^{\mu\nu},$$

где тензор энергии вещества и гравитационного поля имеет вид:

$$\Theta^{\mu\nu} = g_0^{\mu\lambda} \sqrt{-g} (T_\lambda^\nu + t_\lambda^\nu) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \sqrt{-g} (t^{\mu\nu,\beta} + t^{\beta\mu,\nu} + t^{\beta\nu,\mu}),$$

при использовании дополнительного неинвариантного координатного условия

$$\frac{\partial \sqrt{-g} g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0,$$

переходящего для слабого поля в условие Гильберта — Лоренца (см. [4], часть II, § 5). Псевдотензор энергии гравитационного поля t_ν^μ определяется по общему правилу как „импульс“, сопряженный „координате“ $g_{\mu\nu}$, через лагранжиан гравитационного поля

$$t_\nu^\mu = \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} / \partial x^\mu)} \frac{\partial \sqrt{-g} g^{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} - \delta_\nu^\mu \sqrt{-g} \mathcal{L}.$$

В дальнейшем удобно разложить лагранжиан и все другие величины, характеризующие поле, в ряды, исходя из нулевого псевдоевклидова приближения. Нелинейные члены в энергии гравитационного поля можно считать связанными с взаимодействием гравитонов друг с другом; эти члены должны привести в частности к рассеянию гравитонов на гравитонах, аналогично положению вещей с членом $\lambda\varphi^4$ в мезодинамике.

Как и в квантовой теории других полей, в теории гравитации с учетом вакуума речь идет прежде всего о двух основных проблемах: 1) гравитационной энергии фотона, электрона и других частиц и 2) о поляризации вакуума электронов-позитронов, мезонов и т. д. благодаря их взаимодействию с гравитационным полем и отмеченной выше возможности виртуального порождения пар частиц в этом поле. В дальнейшем все расчеты подразумеваются сделанными для слабого поля.

Для вычисления гравитационной энергии фотона, электрона и т. д. можно применить представление взаимодействия и метод Дайсона. Для этой цели, наряду с известными выражениями для энергии взаимодействия электромагнитного и гравитационного полей или электронов с гравитационным полем и т. д. следует использовать следующие значения средних по вакууму хронологически упорядоченных билинейных выражений:

$$\langle P(h_{\mu\nu}(x), h_{\lambda\rho}(x')) \rangle_0 = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho}) \times D'_{\mathcal{F}}(x - x'),$$

где $D'_{\mathcal{F}}$ — регуляризованная в отношении инфракрасной расходимости (путем добавления массы покоя гравитона) каузальная функция Штюкельберга —

Фейнмана для даламберовского уравнения

$$D'_F = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int (dk') (k'^2 + p^2)^{-1} \exp \{ik' (x - x')\},$$

(см. [104]).

В результате для собственной энергии фотона получаем равное нулю выражение, как и следовало ожидать ввиду калибровочной инвариантности, а для собственной полевой гравитационной энергии электрона — квадратично расходящееся выражение, что также можно было предвидеть на основании квадрупольного характера гравитационного поля.

Укажем теперь коротко результат подсчета поляризации вакуума скалярных частиц, по порядку совпадающий со случаем вакуума электронов-позитронов [129]. Здесь наиболее целесообразно использовать гейзенберговское представление и метод гриниана (см. статью II, часть III). Добавок к функции действия гравитационного поля, обязанный поляризации вакуума некоторых частиц, подчиняющихся уравнению, которое в каком-либо поле, в данном случае гравитационном, обладает гринианом \mathcal{G} , приобретает вид

$$W_{\text{vac}} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\ln \mathcal{G}).$$

Применяя эту теорему, получим в конце концов для добавка к действию „свободного“ гравитационного поля W_0 расходящиеся члены вида

$$W_{\text{vac}} = W_0 \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-s} + \square W_0 \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{-s} \dots$$

с бесконечными коэффициентами, один из которых можно изолировать путем перенормировки гравитационного заряда, т. е. массы частиц плюс конечные члены, содержащие, как и в электродинамике, высшие производные. Кроме того, в следующем приближении, аналогично случаю квантовой электродинамики (см. статью Вайскопфа из сборника [1], а также статью II, часть III настоящего сборника) появятся нелинейные по $\hbar_{\text{пл}}$ члены. Итак, весьма любопытным образом мы приходим к необходимости нелинейной теории гравитации со стороны квантовой механики, независимо от аргументов в пользу установления нелинейных уравнений поля в общей теории относительности (см. [4], часть II, § 5).

12. Регуляризация

Представители тех или иных направлений новейшей квантовой электродинамики применяли для устранения расходимостей в промежуточных расчетах различные приемы регуляризации, во многом, впрочем, сходные друг с другом. Фейнман применял в классической электродинамике вместо δ -функции некоторую сглаженную функцию, отличающуюся от $\delta(s^2)$ лишь в малой окрестности светового конуса и предложил аналогично этому ввести в квантовой электродинамике размазанную инвариантную функцию. Соответственным образом изменяются перестановочные функции и гринианы. Можно показать, что данный прием регуляризации эквивалентен переходу к уравнениям с высшими производными¹⁾.

Отметим, что исторически необходимость более тщательной разработки приемов регуляризации возникла после указания Вентцеля на неоднозначность значений собственной массы фотона, получавшихся в новейшей квантовой электродинамике (нуль, либо бесконечность, либо конечная величина при различных способах оперирования с расходимостями), тогда как калибровочно-инвариантная теория требует исчезающей массы фотона.

¹⁾ См. [105], [1] и [4], часть I, § 44, часть II, § 3.

Наиболее широкую популярность приобрела регуляризация Паули—Вилларса, явившаяся развитием работ Райского и Штюкельберга и весьма близкая к регуляризации Фейнмана [106—108].

Суть дела заключается в том, что в интегралах, встречающихся в теории, которым можно придать форму

$$I = \int f(x, K) \frac{d^3x}{K} \equiv I(k_0) = 2 \int d^3k \int_0^{\infty} f(x, \eta) \delta(\eta^2 - k^2 - k_0^2) d\eta$$

($\frac{k_0 \hbar}{c} = m$ — масса электрона), δ -функция заменяется следующим образом:

$$\delta(\eta^2 - k^2 - k_0^2) \rightarrow \delta(\eta^2 - k^2 - k_0^2) + \sum_i c_i \delta(\eta^2 - k^2 - k_{0i}^2);$$

тогда $I_R \equiv I(k_0) + \sum_i c_i I(k_{0i})$. Коэффициенты c_i (индекс R = Reg отмечает регуляризованное, т. е. конечное выражение) и вспомогательные массы $m_i = (\hbar/c_i) k_{0i}$ оказывается возможным подобрать так, чтобы устранить неинвариантные члены [возникающие, например, при вакуумных подсчетах (см. [4], часть I, § 44)], логарифмически расходящийся член сделать конечным и устранить инвариантным образом расходимость гринианов (Δ и Δ_1). Для этого необходимо положить прежде всего

$$c_0 + \sum c_i = 0 \quad (c_0 = 1),$$

$$k_0^2 + \sum c_i k_{0i}^2 = 0$$

и в конце расчетов устремить все вспомогательные массы к бесконечности, для чего разумно ввести условия

$$\sum \frac{c_i}{k_{0i}^2} = 0.$$

Тогда, например, $\Delta^{(1)}$ заменится на регуляризованный гриниан

$$\Delta_R^{(1)} = \sum_i c_i \Delta^{(1)}(m_i)$$

и т. д.

В результате, например, для регуляризованной собственной энергии фотона получается требуемое значение, равное нулю.

Близкая по идее регуляризация, применяемая Дайсоном (см. статью V), заключается в разложении расходящегося выражения в ряд по степени волновых чисел и последующем отбрасывании расходящихся членов, которые связаны с начальными членами разложения.

Обратим еще внимание на регуляризацию, примененную Швингером (см. статью II, часть III) и заключающуюся во введении нижнего предела s_0 при интеграции по параметру собственного времени. Тогда выражения, расходящиеся при $s_0 = 0$, приобретают конечное значение. Величина s_0 полагается равной нулю лишь в конце вычислений. Подобная регуляризация также связана с использованием вспомогательных масс. Действительно, если придать величине s_0 смысл минимального времени $s_0 = \hbar/mc^2$, то условие $s_0 \rightarrow 0$ будет соответствовать $m \rightarrow \infty$. Подчеркнем в заключение, что все перечисленные новейшие приемы регуляризации имеют „формалистический“, искусственный характер. Придание же „реалистического“ смысла новым массам, минимальным длинам и т. д. неизбежно существенно выводит нас за рамки современной теории. Не исключено, что в рассмотренных методах уже брезжат какие-то разумные возможности выхода за рамки теории, например в виде инвариантного введения минимального собственного времени, включения инвариантных обрезывающих факторов, или применения спектра вспомогательных масс, которое соответствует стремлению построения полной теории всех связанных друг с другом элементарных частиц, а не теории фиктивной изолированной одной частицы, рассмотрение которой

отдельно от всех остальных полей неизбежно приводит к трудностям в виде расходимостей.

Во всех бесконечных интегралах теории речь идет о расходимости при высоких частотах, или малых расстояниях. Расходимости же при малых частотах (инфракрасная катастрофа) связаны с недостаточно корректным применением теории возмущений и не носят принципиального характера (см. [4], часть I, § 44, д, и статьи III—V настоящего сборника). Для устранения последней вводится, например, фиктивная конечная масса фотона, которая затем обращается в нуль. В нашу задачу не входит сейчас сколько-нибудь подробный анализ попыток выхода за рамки современной теории. Мы остановимся в этой связи лишь на некоторых недавних работах.

Для устранения бесконечностей Штюкельберг предложил в квантовой теории поля вместо разрывной хевисайдовской функции, определяющей момент времени или пространственно-подобную гиперповерхность

$$g(\tau) = \begin{cases} 1 & (\tau > 0) \\ 0 & (\tau < 0), \end{cases}$$

ввести в рассмотрение сглаженную функцию $g(x) = f(\tau - x\epsilon)$, такую, что $f(\tau)$ быстро убывает при $\tau \rightarrow \pm\infty$ и практически отлично от нуля только в некоторой малой области $|\tau| \lesssim \Delta t$. Это обстоятельство будет обеспечивать приближенную локализуемость теории [109, 11].

Идеи Штюкельберга о введении сглаженной функции были развиты недавно Боголюбовым в серии работ, посвященных основным уравнениям теории поля [110]. Прежде всего отмечается, что интегральное соотношение Штюкельберга для определения волнового вектора состояния через матрицу рассеяния

$$\Phi(q_2) = S(q_2 - q_1) \Phi(q_1)$$

неправильно, так как $S(q_1 - q_2)S(q_2 - q_3) \neq S(q_1 - q_3)$. (В этой связи обратим внимание на аналогичное возражение Фирца (см. статью VI) против попытки построения регуляризованной теории Гейзенберга). Взамен этого Боголюбов предлагает положить в основу теории уравнение в вариациях

$$i\hbar \delta \Phi(g) = \int Q(x) \delta g(x) dx \Phi(g),$$

которое для разрывных функций типа

$$g_T(x) = \begin{cases} 1 & x < \sigma \\ 0 & x > \sigma \end{cases}$$

(где σ — временно-подобные гиперповерхности) эквивалентно уравнению Томонага; эрмитов оператор Q обобщает обычный гамильтониан. Существенной стороной развиваемой подобным образом теории, в которой указывается ряд правил, позволяющих установить общую структуру Q_n , является отсутствие в ней расходимостей. Хотя уравнение Боголюбова в пределе переходит в уравнение Томонага и тем самым примыкает к классу более привычных теорий, все же, очевидно, требуются дальнейшие дополнительные исследования этой новой интересной теории, связанные, например, с выяснением физического смысла функции размывания $g(\sigma)$ и членов Q_n , тем более необходимые, что точная форма $g(\sigma)$ оказывается несущественной, повидимому, в связи с несколько формальным введением этой функции.

Отказ от задания величины строго на некоторой пространственно-подобной поверхности приводит к кругу идей теории нелокализуемых величин, которая неоднократно обсуждалась в последнее время (см. [111—115, 130, 131], а также [4], часть II, § 3).

В связи с обсуждением вопроса о расходимостях и их регуляризации следует, очевидно, вновь вернуться к обсуждению самих основ современной теории.

Анализ принципов теории был недавно проделан в работах Боголюбова и его сотрудников [116, 117]. Подчеркивается, что основные положения можно резюмировать в следующих пунктах:

1. Полная релятивистская инвариантность.
2. Корпускулярный аспект поля.
3. Гамильтонова форма уравнений движения.
4. Полная точечная локализуемость, находящая свое выражение в существовании плотности энергии.

На конкретном случае скалярных полей, взятых в произвольном числе и взаимодействующих любым образом, показывается, что невозможно одновременно удовлетворить условиям инвариантности и полной локализуемости, за исключением не имеющего глубокого физического интереса случая совершенно свободных не взаимодействующих друг с другом полей. При этом утверждается справедливость данного вывода также для нелинейной теории и для обобщений с высшими производными. К аналогичному результату пришел Снайдер (см. [118, 119]) в случае квантовой электродинамики.

Тем самым мы вновь возвращаемся к вопросу о наличии бесконечностей в современной теории, неустранимых какими-либо обычными методами. Весьма правдоподобно, что суть трудностей заключается в невозможности точного определения поля в данной точке, или, как отмечают авторы, в необходимости обобщить понятие самих координат, ввиду наличия указанных нами ранее „индивидуальных“ ошибок в координатах и времени, вытекающих с необходимостью из релятивистской квантовой механики (см. [112], а также [4], часть II, § 3).

Любопытную попытку хотя бы частично обойти применение метода возмущений сделал совсем недавно Эдвардс [34] (статья XIV) на базе швингеровского варианта гейзенберговского представления. В основу кладутся уравнения для гринианов электронного и фотонного полей, записанные в символической форме:

$$[\gamma(p - eA) + M] G = 1, \quad [k^2 + P] D = 1,$$

где оператор массы $M = m + ie^2\gamma G\Gamma D$, оператор поляризации $P = -ie^2\gamma G\Gamma D$, оператор тока $\Gamma = -\frac{\delta}{\delta eA} G^{-1} = -\frac{\delta}{\delta eA} [\gamma(p - eA) + M]$. Оператор тока является обобщением обычного выражения, не учитывающего вакуумных поправок:

$$\Gamma = \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} (\gamma G\Gamma D)$$

($\frac{\delta}{\delta eA}$ — знак функциональной производной).

Так как гриниан G в свою очередь есть функция Γ , то для Γ получается нелинейное интегральное уравнение

$$\Gamma = \gamma + ie^2\gamma G\Gamma G\Gamma D - ie^2\gamma G \frac{\delta}{\delta eA} (\Gamma D),$$

причем в нулевом приближении для „свободного“ электрона $\Gamma_0 = \gamma$; теперь вместо подстановки в правую часть значения Γ для свободной частицы, как следовало бы ожидать по методу возмущений, одно из Γ сохраняется в данной форме, что приводит к линейному уравнению, которое после ренормировки приобретает вид

$$\Gamma' = Z^{-1}\gamma - ie^2\gamma G_1'\Gamma'G_1'D_1' + \text{члены порядка } e^4.$$

Анализ частного решения этого уравнения приводит к выводу, что в то время как задавая форму дайсоновского фактора перенормировки в виде $Z^{-1} = 1 + \sum \alpha_n Z_n$, мы получали для Z_n бесконечное значение, сейчас, когда за исходный пункт берется не „свободный“ электрон ($Z' = 1$), а ударение делается на влиянии фотонного поля, фактор Z'^{-1} неожиданно оказывается равным нулю.

Аналогичный метод применяется далее к мезодинамике.

Отсылая за дальнейшими подробностями к цитированной литературе, мы перечислим в заключение ряд наиболее подробно обсуждаемых гипотез

в направлении выхода за рамки нынешней теории. К ним относятся прежде всего гипотезы, связанные с минимальной длиной, а именно: 1) гипотеза квантованного, в каком-то смысле дискретного, пространства — времени, 2) гипотеза максимального импульса, 3) гипотеза нелокализации полей, 4) гипотеза взаимной инвариантности. Эти гипотезы, имеющие много общего между собой, связаны в известной мере понятием индивидуальных ошибок. Первейшей целью этих гипотез является устранение расходимостей.

Гипотезы другого класса стремятся прежде всего построить теорию всех или многих известных элементарных частиц, установив ту или иную связь между ними. Сюда относятся: 5) гипотеза слияния, примыкающая к исследованиям высших спиновых состояний, 6) гипотеза необходимости перехода к уравнениям с высшими производными, 7) гипотезы о сложных мезонах. К этому же классу следует отнести 8) гипотезу о взаимной превращаемости гравитационного поля и частиц, вытекающую, повидимому, из современной теории поля, но еще не доказанную со всей строгостью. Несколько в стороне стоят 9) пятимерные обобщения, хотя и связанные в ряде отношений с иными попытками выхода за рамки теории.

Значительное число общих пунктов во многих только что указанных гипотезах позволяет предполагать наличие в них близких к истине пунктов, дальнейшее развитие которых приведет науку к теории элементарных частиц и полей, свободной от расходимостей, объясняющей значения их масс и констант связи зарядов и моментов и образующих единую закономерную систему.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ

Как известно, разнообразные сингулярные функции типа δ -функции различных перестановочных функций и гриновских функций (гринианов) уравнений поля играют существенную роль в теории при определении решений однородных или неоднородных уравнений (с наличием источника) и квантовых перестановочных соотношений. Для удобства приводим обзор ряда важных сингулярных функций, взяв за основу наиболее часто применяемые ныне обозначения Швингера и отмечая для сравнения другие обозначения. Подробности выводов можно найти в статье Дирака [121], в статье Ривье [122], где применены обозначения Штюкельберга, в статье Кэллена [9], в книге Паули [123], а также в нашей книге (Д. Иваненко и А. Соколов [19], в особенности § 20), где дана как общая теория δ -функции, так и систематическое применение установленной ранее теоремы о связи гриниана с δ -функцией.

I. ДИРАКОВСКАЯ δ -ФУНКЦИЯ; РАЗРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ θ ; ЗНАКОВАЯ ФУНКЦИЯ ϵ ; ОПЕРАТОР УПОРЯДОЧЕНИЯ P

Прежде всего дадим перечень основных формул с δ -функцией и знаковыми функциями, которые часто служат вспомогательным материалом при построении других сингулярных функций.

В одномерном случае Фурье разложение δ -функции имеет вид

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ikx} dk$$

и в четырехмерном случае —

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(k_a x^a)} (dk)^4, \quad (dk)^4 \equiv (dk) = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3.$$

Если разбить δ -функцию на две части

$$\delta_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm ikx} dk,$$

то

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta_+(x) + \delta_-(x), \\ \delta_{\pm}(x) &= \frac{1}{2} \left(\delta(x) \mp \frac{1}{i\pi x} \right). \end{aligned}$$

Дайсон применяет иное обозначение:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i x}.$$

Наконец отметим, что δ -функция является производной от функции Хевисайда $\theta^+(x)$:

$$\delta(x) = \frac{\partial}{\partial x} \theta^+(x), \quad \text{где } \theta^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 1, \\ 0 & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Вводя $\theta^-(x) = \theta^+(-x)$, имеем

$$\theta^+(x) + \theta^-(x) = 1.$$

Теперь определяем знаковую функцию

$$\varepsilon(x) = \theta^+(x) - \theta^-(x) = \frac{|x|}{x}, \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 1, \\ -1 & \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\theta^+(x) = \frac{1 + \varepsilon(x)}{2}, \quad \theta^-(x) = \frac{1 - \varepsilon(x)}{2}.$$

Инвариантной формой является запись

$$\varepsilon(x) = -\frac{\varepsilon_{\mu} x_{\mu}}{|\varepsilon_{\mu} x_{\mu}|} = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\varepsilon x_{\mu} \tau) \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} +1 & \text{при } x_0 > 0, \\ -1 & \text{при } x_0 < 0, \end{cases}$$

где ε_{μ} — произвольный временно-подобный вектор, P — главное значение интеграла, $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_4}{i} > 0$.

При помощи ε можно сконструировать „хронологизирующий“ (короче хронологический) оператор Дайсона P , производящий упорядочивание во времени (оператор хронологического порядка); как нетрудно убедиться

$$\begin{aligned} P(A(t)A(t_0)) &\equiv (AB)_+ = \frac{1 + \varepsilon(t-t_0)}{2} AB + \\ &+ \frac{1 - \varepsilon(t-t_0)}{2} BA = \begin{cases} AB & \text{при } t_0 < t \text{ (} t_0 \text{ раньше } t), \\ BA & \text{при } t_0 > t \text{ (} t_0 \text{ позже } t). \end{cases} \end{aligned}$$

II. РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО КЛЕЙНОВСКОГО УРАВНЕНИЯ

Перейдем к инвариантным решениям клейновского уравнения, лежащего в основе релятивистской квантовой механики и квантовой теории поля. Основную роль играют два независимых решения однородного уравнения

$$(\square - k_0^2)\Delta = 0, \quad (\square - k_0^2)\Delta^{(1)} = 0,$$

исследованные впервые Дираком и Паули и обозначавшиеся ими ранее через D, D_1 , а сейчас чаще всего записываемые по Швингеру как $\Delta, \Delta^{(1)}$ (функции Штюкель-

берга — Ривье D^0, D^1), причем

$$D \equiv -\Delta \equiv D^0, \\ D_1 \equiv \Delta^{(1)} \equiv D^1.$$

Четырехмерные разложения Фурье имеют вид:

$$\Delta = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \exp(ik_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + k_0^2) \varepsilon(k) (dk)^4, \\ \Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(ik_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + k_0^2) (dk).$$

В записи Кэллена

$$\Delta = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int dp e^{ipx} \delta(p^2 + m^2) \varepsilon(p), \\ \Delta' = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dp e^{ipx} \delta(p^2 + m^2),$$

где $\int dp e^{ipx} \delta(p^2 + m^2)$ означает

$$\int \int \int \int dp_1 dp_2 dp_3 dp_0 \frac{e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 - p_0 x_0)}}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 + m^2}, \quad (x_0 = ct).$$

В записи Штюкельберга — Ривье

$$D^0(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int (dp)^4 e^{i(p,x)} \varepsilon(p^4) \delta((p, p) + x^2), \\ D^1(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dp)^4 e^{i(p,x)} \delta((p, p) + x^2).$$

В виде однократных интегралов имеем

$$\Delta(\lambda) = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{2\pi^2} \int_0^\infty \cos\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) d\alpha, \\ \Delta^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \sin\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) d\alpha; \\ \lambda = -x_\mu^2.$$

Интегрируя по аргументу α , получаем

$$\Delta(x) = \Delta(\lambda) = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{2\pi} \delta(\lambda) + \frac{\varepsilon(\lambda)}{4\pi} k_0^2 \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} = \\ = -\frac{\varepsilon(\lambda)}{2\pi} \delta(\lambda) + \varepsilon(\lambda) \frac{x_0^2}{4\pi} \begin{cases} \frac{J_1(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} & \text{при } \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0, \end{cases} \\ \Delta^{(1)}(\lambda) = \frac{x_0^2}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} = \begin{cases} \frac{x_0^2}{4\pi} \frac{N_1(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} & \text{при } \lambda > 0 \quad (c^2 T^2 > R^2), \\ \frac{x_0^2}{2\pi^2} \frac{K_1(x_0 (-\lambda)^{1/2})}{x_0 (-\lambda)^{1/2}} & \text{при } \lambda < 0 \quad (c^2 T^2 < R^2). \end{cases}$$

Следовательно, Δ исчезает для пространственно-подобных интервалов ($\lambda = -x_\mu^2 > 0$) и терпит разрыв на световом конусе (при $\lambda = 0$); $\Delta^{(1)}$ нигде исчезает и обращается в бесконечность при $\lambda = 0$.

Очевидно, $(\partial\Delta/\partial t)_{t=0} = \delta(r)$; $\Delta(-x) = -\Delta(x)$, $\Delta^{(1)}(-x) = \Delta^{(1)}(x)$. Благодаря этим свойствам паулевское D или функция Δ определяют четырехмер-

перестановочные соотношения для волновых функций скалярного поля, например

$$[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t')] = \frac{\hbar}{i} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t').$$

В трехмерном представлении имеем

$$\Delta = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \frac{\sin cT\sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}}(d\mathbf{k}),$$

$$\Delta^{(1)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} \frac{\cos cT\sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}}(d\mathbf{k}).$$

В квантовой теории поля целесообразно ввести разделение сингулярных функций на части, соответствующие положительным и отрицательным частотам, иначе говоря, в соответствующих разложениях Фурье вести интеграции по областям: $-k_\lambda \varepsilon_\lambda \geq 0$, если ε_λ — временно-подобный вектор с $\varepsilon_0 > 0$. Например, в обозначениях Паули — Штюкельберга — Ривье это разделение представится так:

$$D^0 = \frac{i}{2} (D^+ - D^-), \quad D^1 = \frac{1}{2} (D^+ + D^-),$$

или в виде трех- и четырехмерных разложений:

$$D^+ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(kx)} \frac{(dk)^3}{k^4},$$

$$D^- = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(kx)} \frac{(dk)^3}{k^4}, \quad k^4 = +\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + x^2}$$

$$D^\pm = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} \int (dp)^4 e^{i(p, x)} \theta_\pm(p^4) \delta((p, p) + x^2);$$

в обозначениях Швингера

$$\Delta = \Delta^{(+)} + \Delta^{(-)}, \quad \Delta^{(1)} = i(\Delta^{(+)} - \Delta^{(-)}),$$

$$\Delta^{(+)} = \frac{1}{2} [\Delta - i\Delta^{(1)}], \quad \Delta^{(-)} = \frac{1}{2} [\Delta + i\Delta^{(1)}].$$

Очевидно, $\Delta^{(+)}$ и $\Delta^{(-)}$ также удовлетворяют однородному клейновскому уравнению.

III. РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО КЛЕЙНОВСКОГО УРАВНЕНИЯ

Перейдем теперь к неоднородному уравнению Клейна (с источником в правой части)

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right) \Phi = -4\pi\rho.$$

Для получения его решения в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \rho(\mathbf{r}', t') (d\mathbf{r}') dt'$$

необходимо найти гриниан (точнее говоря, его сингулярную часть), определяемый уравнением $(\square - k_0^2) \bar{\Delta}(x) = -\delta(x)$ (см. [16]).

Как было показано нами ранее (см. [16] § 20), существует следующее фундаментальное соотношение, связывающее гриниан клейновского уравнения с D -функцией:

$$G_1 = \frac{c}{2} \frac{T}{|T|} D,$$

или, в обозначениях Швингера,

$$\overline{\Delta(x)} = -\frac{1}{2} \Delta(x) \varepsilon(x) = \frac{1}{2} \Delta(x) \frac{\varepsilon_\mu x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|};$$

в обозначениях Штюкельберга — Ривье:

$$D^s(x) = \frac{1}{2} \varepsilon(t) D^0(x) \quad (s \text{ — от symmetrique}),$$

$$D^s(-x) = D^s(x).$$

Отсюда имеем

$$\overline{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{\exp(ik_\mu x_\mu)}{k_\lambda^2 + x_0^2} (dk) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\lambda\alpha + i\frac{x_0^2}{4\alpha}) d\alpha = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) -$$

$$-\frac{x_0^2}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(x_0\lambda^{1/2})}{x_0\lambda^{1/2}}, \quad \text{где } \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(x_0\lambda^{1/2})}{x_0\lambda^{1/2}} \begin{cases} J_1(x_0\lambda^{1/2}) & \text{при } \lambda > 0, \\ 0 & \text{при } \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\overline{\Delta}(x) = \overline{\Delta}(-x)$$

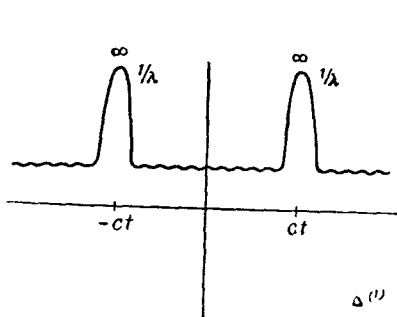
(P — главное значение).

Имеем также в обозначениях Штюкельберга следующее соотношение:

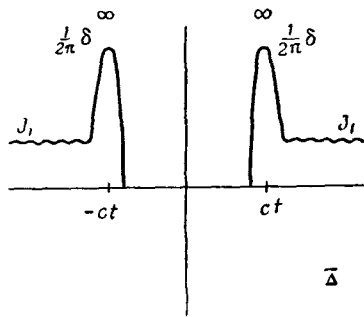
$$D^S(x) = \frac{1}{4\pi} \left[\delta(T^2) - \frac{1}{2} \theta^+(T^2) \frac{x}{T} J_1(xT) \right],$$

где $T^2 = c^2t^2 - r^2$.

Следует отметить, что в выражении гриниана как интеграла по параметру α последний играет роль собственного времени. Мы получим важные виды решений



Фиг. 14.



Фиг. 15.

клейновского уравнения, соответствующие запаздывающим (ret) и опережающим (av) потенциалам, прибавляя и отнимая от гриниана $\overline{\Delta}$ половину сингулярной функции Δ .

Отсюда

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{2} (\Delta_R + \Delta_A), \quad \Delta = \Delta_A - \Delta_R.$$

Те же соотношения в обозначениях Штюкельберга — Ривье имеют вид

$$D^{\text{ret}}(x) = D^S(x) + \frac{1}{2} D^0(x) = \theta^+(t) D^0(x);$$

$$D^{\text{av}}(x) = D^S(x) - \frac{1}{2} D^0(x) = -\theta^-(t) D^0(x);$$

в обозначениях книги „Классическая теория поля“ [19]

$$G_{\text{av}}^{\text{ret}} = G_1 \pm \frac{c}{2} D.$$

Очевидно, запаздывающие и опережающие части гриниана в свою очередь удовлетворяют неоднородному уравнению Клейна

$$(\square - m^2) \Delta_R(x) = (\square - m^2) \Delta_A(x) = -\delta(x).$$

Таким образом,

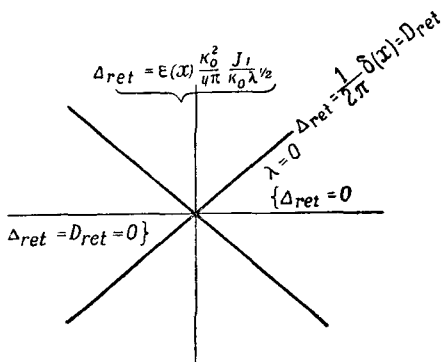
$$\text{при } x_0 > 0: \quad \Delta_A(x) = 0, \quad \Delta_R = -\Delta, \quad \bar{\Delta} = -\frac{1}{2}\Delta,$$

$$\text{при } x_0 < 0: \quad \Delta_R(x) = 0, \quad \Delta_A = \Delta, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{2}\Delta.$$

В четырехмерном представлении Фурье имеем (обозначения Ривье)

$$D^{\text{ret}} = \pm \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^2} \int (dp)^4 e^{i(p, x)} \varepsilon(p^4) \delta_{\pm}[\varepsilon(p^4) ((p, p) + x_0^2)].$$

Представляет еще интерес рассмотреть графически поведение различных сингулярных функций в плоскости x, t .



Фиг. 16.

Функции $\bar{\Delta}, \Delta^{(1)}$ на световом конусе обращаются в бесконечность, причем поведение $\bar{\Delta}$ характеризуется δ -функцией, а $\Delta^{(1)}$ обращается в бесконечность как $1/\lambda$ (см. фиг. 14 и 15).

Далее, например, для Δ^{ret} имеем фиг. 16.

IV. КАУЗАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Весьма важную роль в новейшей квантовой теории поля играют „причинные“ (каузальные) сингулярные функции Штюкельберга — Фейнмана, определяющие запаздывающее взаимодействие, а также среднее по вакууму от упорядоченных произведений между волновыми функциями. В обозначениях Штюкельберга каузальная функция определяется выражениями

$$|D^c(x) = D^s(x) + \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D^+(x) + \theta^-(x^4) D^-(x)].$$

Наряду с ней вводится „антикаузальная“ функция

$$D^a(x) = D^s(x) - \frac{i}{2} D^1(x) = \frac{i}{2} [\theta^+(x^4) D^-(x) + \theta^-(x^4) D^+(x)],$$

$$D^a(-x) = D^a(x), \quad (D^c(x))^+ = D^a(x).$$

Четырехмерные разложения Фурье для D^c и D имеют вид

$$D^c = \pm \frac{i}{(2\pi)^3} \int (dp)^4 e^{i(p, x)} \delta_{\mp}((p, p) + x_0^2);$$

трехмерное разложение для D^c гласит:

$$D^c = \frac{\pi i}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{k}r)} \frac{e^{-icK|t|}}{K} (dk)^3.$$

При $t_2 > t_1$ разложение $D^c(x_2 - x_1)$ содержит лишь положительные частоты, при $t_2 < t_1$ — лишь отрицательные частоты ($e^{i|\nu|t}$ соответствует положительной частоте).

Существенно, что D^c представляет собой инвариантное обобщение функции, выражающей запаздывающее действие, так как D^c учитывает не только запаздывающее действие, по отношению к будущему, но также опережающее действие по отношению к прошлому. Для каузальной функции в несколько измененных обозначениях Фирца имеем

$$D_c = D_{\text{ret}}^+ + D_{\text{av}}^-, \quad D_s = \frac{1}{2}(D_{\text{ret}}^+ + D_{\text{av}}^+ + D_{\text{ret}}^- + D_{\text{av}}^-),$$

$$D_0 = D_{\text{ret}}^+ - D_{\text{av}}^+ + D_{\text{ret}}^- - D_{\text{av}}^-, \quad D_1 = \frac{1}{i}(D_{\text{ret}}^+ - D_{\text{av}}^+ - D_{\text{ret}}^- + D_{\text{av}}^-);$$

так как из $\square f = -\delta_{\pm}(x)$, где $\delta_{\pm} = (1/2\pi) \delta(\mathbf{r}) \int_0^{\infty} e^{\pm i\nu t} d\nu$, получаем решения

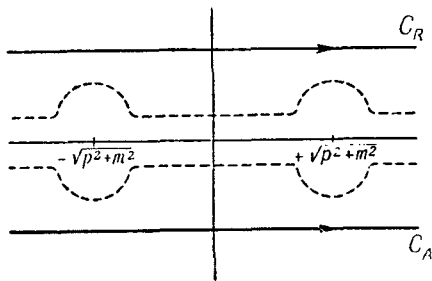
в виде запаздывающих и опережающих потенциалов

$$D_{\text{ret}}^{\pm} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \delta_{\pm}(t)_{\text{ret}}, \quad \text{где} \quad \delta_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\pm i\nu t} d\nu.$$

Для каузальной функции (обозначаемой Дайсоном как Δ_F) имеет место представление в виде интеграла по параметру, аналогичное представлениям функций Δ , $\Delta^{(1)}$

$$\Delta_F(x) = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^{\infty} e^{i\nu x^2 - (i\nu^2)/4\nu} d\nu.$$

В обозначениях Швингера функции, по существу совпадающие с каузальной и антикаузальной, обозначаются через Δ_+ , Δ_- .



Фиг. 17.

$$\Delta_{\pm} = \bar{\Delta} \pm \frac{i}{2} \Delta^{(1)};$$

при этом

$$\Delta_+ \equiv D^c, \quad \Delta_F = -2i\Delta_+.$$

В записи Теллунга

$$D_c = D^{(1)} - 2i\bar{D} = \Delta^{(1)} - 2i\bar{\Delta}.$$

Очевидно,

$$(\square - k_0^2) \Delta_F(x) = -\frac{2}{i} \delta(x).$$

Укажем теперь на представление сингулярных функций в виде контурных интегралов. Для вычисления интегралов, рассматриваемых ниже, с полюсами в точках $\pm \sqrt{p^2 + m^2}$ на действительной оси, контуры интегрирования берутся с соответствующими различными обходами полюсов: для каузальной и антикаузальной функций с обходом с разных сторон, а для опережающей (av) и запаздывающей (ret) функций с односторонним обходом, как указано на фиг. 17 (пунктирная линия). Кроме этого, интегрирование можно производить, как это делал, например, Кэллен, по сдвинутым соответственным образом контурам (сплошная линия). Таким образом, в его обозначениях

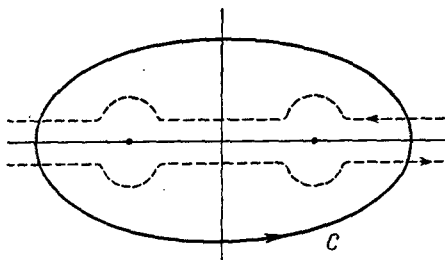
$$\Delta_R = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_R} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} dp,$$

$$\Delta_A = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_A} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} dp.$$

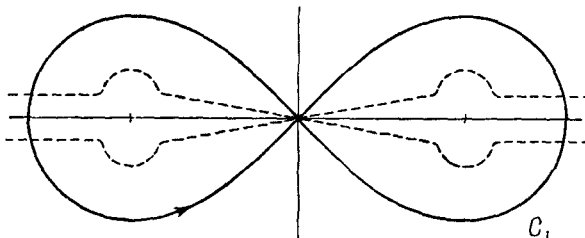
Иначе говоря, полюса в точках $\pm \sqrt{p^2 + m^2}$ наглядно представляют влияющие опережающего (или запаздывающего) действия.

Для функций Δ , $\Delta^{(1)}$ имеем (см. фиг. 18 и 19) следующие представления:

$$\Delta = \frac{1}{(2\pi)^4} \oint_C \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} dp, \quad \Delta^{(1)} = \frac{1}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \oint_{C_1} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} dp.$$



Фиг. 18.



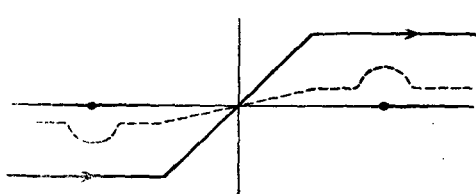
Фиг. 19.

Наконец, для каузальной функции (в записи Кэллена)

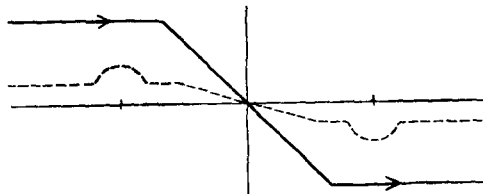
$$\Delta_F = \frac{2}{i} \frac{1}{(2\pi)^4} \oint \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} dp$$

имеем контур, приведенный на фиг. 20, тогда как для антикаузальной функции Δ_- — контур на фиг. 21.

Другой способ интегрирования (см. статьи III, IV и V) состоит в смещении полюсов в сторону от действительной оси путем замены m на $m \pm i\varepsilon$ (при



Фиг. 20.



Фиг. 21.

последующем стремлении $\varepsilon \rightarrow 0$). При этом для каузальной и антикаузальной функций надо в одном полюсе соответственно отнять или прибавить $\varepsilon \rightarrow 0$.

Перестановочные соотношения для волновых функций скалярного или псевдоскалярного нейтрального (мезонного) поля, определяемые через сингулярные функции, имеют вид (в записи Теллунга)

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i\hbar c \Delta(x - x').$$

Среднее по вакууму от упорядоченного произведения определяется выражением

$$\langle P(\varphi(x), \varphi(x')) \rangle_0 = \frac{\hbar c}{2} D_c(x - x').$$

V. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛНОВОГО ДАЛАМБЕРОВСКОГО УРАВНЕНИЯ

Наряду с перечисленными выше перестановочными, гриновскими и каузальными функциями уравнения Клейна в теории играют роль аналогичные сингулярные функции уравнения Даламбера, являющегося частным случаем уравнения Клейна при исчезающей массе покоя $k_0 = 0$ или $m = 0$, которые по Швингеру обозначаются через D с соответствующими индексами (обратно прежним обозначениям Иордана — Паули как функций Δ). Сингулярные функции D , D_F

и т. д. определяют перестановочные соотношения потенциалов электромагнитного поля, перенос взаимодействия через фотоны и т. д. Таким образом, имеем теперь (в обозначениях Швингера)

$$\square D^+ = \square D^- = \square D = \square D^{(1)} = 0,$$

$$D^+ + D^- = D, \quad D^+ = \frac{1}{2}(D - iD^{(1)}); \quad D^- = \frac{1}{2}(D + iD^{(1)}),$$

$$\bar{D} = -\frac{1}{2}\varepsilon(x)D(x) = \frac{1}{4\pi}\delta(\lambda) = \frac{1}{4\pi}\delta(x_\mu^2), \quad D^{(1)}(-x) = D^{(1)}(x).$$

Представим положительно- и отрицательно-частотные части функции D : D^+ , D^- и функцию $D^{(1)}$ в виде контурных интегралов (см. статью II):

$$D^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} D(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

$$D^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} D(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

$$D^{(1)} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} D(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau},$$

где контур C^+ простирается от $-\infty$ до $+\infty$, обходя особенность $\tau=0$ снизу, а в контуре C^- обход особенности совершается сверху; комбинация обоих контуров дает замкнутый контур с обходом особенности в начале (см. контур для Δ -функций). Для сингулярных функций даламберовского уравнения имеем следующие четырехмерные представления (в обозначениях Швингера):

$$\bar{D}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) \frac{e^{ikx}}{k^2}$$

$$D^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dk) e^{ikx} \delta(k^2) = \frac{1}{2\pi^2 x_\mu^2}$$

(подразумевается главное значение интеграла);

для каузальной и антикаузальной даламберовских функций имеем

$$D_\pm(x) = \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int e^{ikx} \delta_\mp(k^2) (dk), \quad \text{или} \quad D_\pm(x) = \bar{D}(x) \pm \frac{i}{2} D^{(1)}(x)$$

$$D_\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} \left(\frac{1}{k^2} \pm \pi i \delta(k^2) \right) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} \frac{1}{k^2 \mp i\varepsilon}; \quad (\varepsilon \rightarrow \pm 0).$$

В обозначениях Дайсона каузальная функция имеет вид

$$D_F = -\frac{i}{2\pi^2} \int_0^\infty e^{i\alpha x^2} d\alpha = \frac{1}{4\pi^3} \int e^{-ip_\mu^2 \alpha} \delta_+(p^2) dp,$$

$$D_F = D^{(1)} + iD_\varepsilon(x).$$

Ввиду аналитического характера $f(a)$ при действительном b

$$\int f(a) \delta_+(a - b) da = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(a)}{a - b} da$$

(где интеграл справа берется при обходе b снизу, что позволяет записать интегралы с δ_+ -функцией в виде интегралов от рациональной функции импульсов). Для Фурье-коэффициентов имеем (Дайсон)

$$D_F(p^4) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(p^4)^2}.$$

Четырехмерные перестановочные соотношения для электромагнитных потенциалов имеют вид

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x - x');$$

среднее по вакууму от антикоммутатора потенциалов определяется соотношением

$$\langle \{ A_\mu(x), A_\nu(x) \} \rangle_0 = \hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x - y);$$

среднее по вакууму упорядоченного произведения и свертывание потенциалов определяется формулами

$$\langle P(A_\mu(x), A_\nu(y)) \rangle_0 = \frac{1}{2} \hbar c \delta_{\mu\nu} D_F(x - y) \text{ (Фейнман),}$$

$$\langle T(A_\mu(x), A_\nu(y)) \rangle_0 = -i\hbar c \delta_{\mu\nu} D_+(x - y) \text{ (Швингер).}$$

VI. СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ ДИРАКОВСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аналогичным образом конструируются перестановочные гриновские и каузальные сингулярные функции спинорного дираковского уравнения, обозначаемые в настоящее время чаще всего буквой S (спинорные) с соответствующим индексом и образуемые путем действия дираковского оператора ("диракиан") на соответствующие функции клейновского случая. Например (в обозначениях Швингера),

$$S^{(1)}(x) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \alpha_0 \right) \Delta^{(1)}(x) \text{ и т. д.,}$$

или (в несколько иной записи Кэллена)

$$S(x) = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \Delta(x), \quad \bar{S}(x) = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} - m \right) \bar{\Delta}(x)$$

$$S = S^{(+)} + S^{(-)}.$$

Учитывая значения $\bar{\Delta}$, $\Delta^{(1)}$ (далее везде швингеровские обозначения), имеем

$$\bar{S}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \frac{1}{k^2 + x^2},$$

$$S^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \delta(k^2 + x^2).$$

Так как $S_\pm = \bar{S} \pm \frac{i}{2} S^{(1)}$, то для каузальной и антикаузальной дираковских функций получим

$$S_\pm = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \left(\frac{1}{k^2 + x^2} \pm \pi i \delta(k^2 + x^2) \right),$$

или

$$S_\pm = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \frac{1}{k^2 + x^2 \mp i\epsilon} \text{ (подразумевается } \epsilon \rightarrow +0).$$

Наконец, имеем эквивалентное представление

$$S_\pm = \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \delta_\mp(k^2 + x^2).$$

В обозначениях Дайсона четырехмерное разложение Фурье каузальной функции дираковского случая (электроны) имеет вид

$$S_F = 2iS_+(S_+ - \text{Швингер}, S_F - \text{Дайсон}),$$

$$S_F(x) = \frac{1}{4\pi^3} \int e^{-ip_\mu x_\mu} [ip_\mu \gamma_\mu - k_0] \delta_+(p^2 + k_0^2) dp,$$

$$S_F(p^4) = \frac{(ip_\mu^4 \gamma_\mu - k_0)}{2\pi i [(p^4)^2 + k_0^2]}.$$

Каузальная функция

$$S_F = 2K_+ \quad (S_F - \text{Дайсон}, K_+ - \text{Фейнман}).$$

Фейнман выбирает тот гриниан дираковского уравнения $K_+(2, I)$

$$(i\nabla_2 - m)K_+(2, I) = i\delta(2, I),$$

который при $t_2 > t_1$ равен сумме по состояниям только положительной энергии

$$\sum_n \varphi_n(x_2) \bar{\varphi}_n(x_1) e^{-tE_n(t_2 - t_1)},$$

а при $t_2 < t_1$ равен той же сумме с обратным знаком, причем взятой по состояниям отрицательной энергии. При этом

$$K_+(2, I) = i(i\nabla_2 + m)I_+(2, I),$$

где

$$I_+(2, I) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (p^2 - m^2)^{-1} \exp(-ipx_{21}) (dp)^4 = -\frac{\delta(s^2)}{8\pi} + \frac{m}{4\pi s} H_1^{(2)}(ms).$$

Гриниан дираковского уравнения в случае отсутствия внешнего поля можно представить, аналогично клейновскому гриниану $\bar{\Delta}$, в виде интеграла по собственному времени

$$\bar{S}(x', x'') \equiv G(x', x'') = \frac{\delta(x' - x'')}{\gamma(-i\partial + m)} = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{ds}{s^2} \exp(-im^2s) \times \\ \times \left(-\gamma \frac{x' - x''}{2s} + m \right) \exp\left(\frac{i(x' - x'')^2}{4s}\right)$$

(см. статью VIII).

Гриниан спинорного дираковского уравнения во внешнем поле, как обычно, определяется уравнением

$$[\gamma(-i\partial - eA(x))m] G(x, x') = \delta(x - x'),$$

или, символически,

$$(\gamma\Pi + m)G = 1.$$

Существенно, что гриниан непосредственно связывается с вакуумным средним значением тока

$$\langle j_\mu(x) \rangle_0 = ie \text{Sp } \gamma_\mu G(x, x')|_{x' \rightarrow x}$$

(где след берется по спинорным индексам и подразумевается среднее, полученное при стремлении x' к x со стороны прошлого и будущего). Дираковский гриниан G можно также выразить через вакуумное значение P — упорядоченного произведения спинорных волновых функций.

Перестановочные соотношения для спинорных функций, удовлетворяющих дираковскому уравнению (для электрона), имеют вид

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x - x').$$

Вакуумное среднее определяется соотношением

$$\langle [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] \rangle_0 = -S_{\alpha\beta}^{(1)}(x - x').$$

Вакуумные средние от упорядоченных произведений имеют вид

$$\langle P(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(x')) \rangle_0 = -\frac{1}{2} \varepsilon(x - x') S_{\alpha\beta}(x - x') \quad (\text{Теллунг}), \\ \equiv \frac{1}{2} \eta(x, x') S_{F\beta\alpha}(x - x') \quad (\text{Дайсон}),$$

($\eta = -1$, если $\sigma(x)$ раньше и $\eta = +1$, если $\sigma(x)$ позднее $\sigma(y)$ во времени).
Иначе говоря, для величины свертывания имеем

$$\langle T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) \rangle_0 = iS_{+\alpha\beta}(x - x').$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Самое широкое применение сингулярных функций весьма характерно для современного формализма релятивистской квантовой теории поля. Фундаментальная важность перечисленных сингулярных функций связана со следующими обстоятельствами.

Во-первых, с помощью гринианов получаются решения уравнений с источниками, роль которых могут играть члены низшего приближения теории возмущения.

Во-вторых, те или иные функции D , Δ , S определяют квантовые перестановочные соотношения операторов электромагнитного, скалярного (мезонного), спинорного и других полей.

В-третьих, средние значения различных величин, взятых по вакуумному состоянию также выражаются через те или иные функции Δ , D , S .

В-четвертых, каузальные функции непосредственно определяют взаимодействие частиц.

В-пятых, наконец, многие попытки выхода за рамки современной теории поля непосредственно связаны с обобщением тех или иных сингулярных функций в виде замены их на различные несингулярные функции или на регуляризованные тем или иным путем функции D_R , Δ_R , S_R .

Д. Иваненко

ЛИТЕРАТУРА

1. Сдвиг уровней атомных электронов, Сборник статей под редакцией и со вступительной статьей Д. Иваненко, ИЛ, 1950.
2. Lamb, Triebwasser, Dayhoff, Phys. Rev., **89**, 98 (1953).
3. Koenig, Prodeli, Kusch, Phys. Rev., **88**, 191 (1952).
4. Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, М. — Л., 1952.
5. Ваушапп, Acta Physica Austriaca, **5**, 544; **6**, 53 (1952).
6. Dirac, Phys. Rev., **73**, 1092 (1948).
7. Ахиезер Н. И., Глазман М., Теория линейных операторов, М. — Л., 1950, а также Dyson, Phys. Rev., **85**, 631 (1952).
8. Yang, Feldman, Phys. Rev., **79**, 972 (1950).
9. Källen, Ark. f. Fis., **2**, 187, 371 (1951).
10. Галанин А. Д., ЖЭТФ, **19**, 521 (1949).
11. Dyson, Phys. Rev., **82**, 498; **83**, 608 (1951); Proc. Roy. Soc., **A207**, 395 (1951).
12. Stückelberg, Rivier, Phys. Rev., **74**, 2 (1948); Helv. Phys. Acta, **23**, 315 (1950); Rivier, Helv. Phys. Acta, **22**, 265 (1948).
13. Фок В. А., Sow. Phys., **6**, 425 (1934).
14. Dirac, Principles of Quantum Mechanics, 3^d ed., London, 1951.
15. Новожилов Ю. В., ЖЭТФ, **22**, 264 (1952); ДАН СССР, **83**, 207 (1952); Диссертация ЛГУ, 1952.
16. Gupta, Proc. Phys. Soc., **A63**, 681 (1950); **64**, 851 (1951).
17. Houriet, Kind, Helv. Phys. Acta, **22**, 319 (1949).
18. Зисман Г. А., ЖЭТФ, **10**, 1163 (1940).
19. Соколов А., Иваненко Д., Классическая теория поля, 2-е издание, М. — Л., 1951.
20. Dirac, Rev. Mod. Phys., **17**, 195 (1945); Feynman, Rev. Mod. Phys., **20**, 367, 948, (1948).
21. Wheeler, Feynman, Rev. Mod. Phys., **17**, 157 (1945).
22. Feynman, Phys. Rev., **74**, 939, 1430 (1948).

23. Feupman, Phys. Rev., **80**, 440 (1950).
24. Feupman, Phys. Rev., **84**, 108 (1951).
25. Dirac, статья в сборнике „Атомное ядро“, Л.—М., 1934.
26. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 150 (1934).
27. Heisenberg, Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934).
28. Uehling, Phys. Rev., **48**, 55 (1935).
29. Иваненко Д., Соколов А., Труды Сибирского физ.-техн. ин-та в Томске, **5**, 32 (1937).
30. Wentzel, Phys. Rev., **74**, 1070 (1948).
31. Källén, Helv. Phys. Acta, **25**, 417 (1952).
32. Gupta, Proc. Phys. Soc. **A64**, 426 (1951).
33. Ward, Phys. Rev., **78**, 182 (1950).
34. Edwards, Phys. Rev., **90**, 284 (1953).
35. Силлин В. П., ЖЭТФ, **21**, 462 (1951).
36. Koenig, Prodel, Kusch, Phys. Rev., **83**, 687 (1951).
37. Weisskopf, Kgl. Danske Vid. Seisk. Math-Phys. Medd., **14**, No 5, 1 (1936).
38. Belinfante, Phys. Rev., **84**, 949 (1951).
39. Григорьев В. И., Вестник МГУ, № 3, 29 (1951).
40. Bagge, Zs. f. Phys., **130**, 650 (1951).
41. Román Pal, Nature, **38**, 506 (1951).
42. Román Pal, Acta Physica (Hungarica), **3**, fs. 1 (1953).
43. Lamb, Triebwasser, Dayhoff, Phys. Rev., **89**, 98 (1953).
44. Тябликов С. В., ЖЭТФ, **21**, 16 (1951).
45. Karplus, Klein, Phys. Rev., **85**, 972 (1952).
46. Kroll, Pollock, Phys. Rev., **86**, 876 (1952).
47. Salpeter, Newcomb, Phys. Rev., **87**, 150 (1952).
48. Kroll, Lamb, Phys. Rev., **75**, 388 (1949).
49. Feupman, Phys. Rev., **74**, 1430 (1948) и исправление Phys. Rev., **76**, 769 (1949).
50. Schwinger, Phys. Rev., **76**, 750 (1949).
51. Bethe, Brown, Stehn, Phys. Rev., **77**, 370 (1950).
52. Абрикосов А. А. и Халатников И. М., ЖЭТФ, **21**, 69 (1951).
53. Baranger, Phys. Rev., **84**, 866 (1951).
54. Karplus, Kroll, Phys. Rev., **78**, 536 (1950).
55. Versohn, Weneger, Kroll, **86**, 596 (1952).
56. Baranger, Dyson, Salpeter, Phys. Rev., **88**, 680 (1952).
57. Salpeter, Phys. Rev., **89**, 92 (1953).
58. Lamb, Retherford, Phys. Rev., **86**, 1014 (1952).
59. Иваненко Д., ЖЭТФ, **11**, 198 (1941).
60. Foldy, Phys. Rev., **83**, 688 (1951).
61. Абрикосов А. А., Халатников И. М., ЖЭТФ, **21**, 429 (1951).
62. Schaffroth, Helv. Phys. Acta, **22**, 502 (1949); **23**, No 5, 542 (1950).
63. Arnons, Bleuler, Helv. Phys. Acta, **25**, 583 (1952).
64. Euler, Ann. der Phys., **26**, 398 (1936).
65. Karplus, Neuman M., Phys. Rev., **80**, 380 (1950); **83**, 776 (1951).
66. Ахизер А. И., Sow. Phys., **11**, 263 (1937).
67. Delbrück, Zs. f. Phys., **84**, 144 (1933).
68. Kemmer, Helv. Phys. Acta, **10**, 112 (1935); Kemmer, Ludwig, Helv. Phys. Acta **10**, 182 (1937).
69. Rohrlich, Glückstein, Phys. Rev., **86**, 1 (1952).
70. Bethe, Rohrlich, Phys. Rev., **86**, 10 (1952).
71. Ахизер А. И., Померанчук И. Я., Sow. Phys., **11**, 478 (1937).
72. Karplus, Klein, Phys. Rev., **85**, 972 (1952).
73. Kroll, Pollock, Phys. Rev., **84**, 594 (1951); **86**, 876 (1952).
74. Karplus, Klein, Schwinger, Phys. Rev., **84**, 597 (1951).
- 74a. Salpeter, Phys. Rev., **87**, 328 (1952).
75. Low, Phys. Rev., **77**, 767 (1950).

76. Low, Salpeter, Phys. Rev., **83**, 478 (1951).
77. Geil-Малл, Low, Phys. Rev., **84**, 350 (1951).
78. Галанин А. Д., ЖЭТФ, **23**, 488 (1952).
79. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951).
80. Karplus, Klein, Phys. Rev., **87**, 848 (1952).
81. Deutsch et al., Phys. Rev., **82**, 455; **84**, 60; **85**, 1047 (1951), **87**, 212 (1952).
82. Пиреппе, Arch. Sci. phys. et. nat., **28**, 233 (1946); **29**, 121, 207, 265 (1947).
83. Берестецкий В. Б., ЖЭТФ, **11**, 1130 (1949).
84. Karplus, Klein, Phys. Rev., **87**, 848 (1952).
85. Matthews, Phil. Mag., **41** (1950).
86. Salam, Phys. Rev., **82**, 217 (1951).
87. Ward, Phys. Rev., **84**, 890 (1951).
88. Malenka, Phys. Rev., **85**, 687 (1952).
89. Theilung, Helv. Phys. Acta, **25**, 307 (1952).
90. Rohrich, Phys. Rev., **80**, 666 (1950).
91. Hu Ning, Chinese Journ. Phys., **8**, 40 (1951); Acta Physica Sinica, **9**, No 1, 42 (1953).
92. Иваненко Д., Курдгеландзе Д. Ф., Ларин С. И., ДАН СССР, **88**, 245 (1953).
93. Schiff, Phys. Rev., **84**, 10 (1951); **86**, 856 (1952).
94. Schein, Lord, Fainberg, Phys. Rev., **80**, 970 (1950).
95. Иваненко Д., Лебедев В. В., ДАН СССР, **80**, 357 (1951).
96. Glauber, Phys. Rev., **84**, 395 (1951).
97. Померанчук И. Я. и Галанин А. Д., ДАН СССР, **86**, 251 (1952).
98. Samas, Guire, Platt, Sehulte, Phys. Rev., **88**, 134 (1952); Marshak, Meson Physics, New York, 1952.
99. Ферми Э., Элементарные частицы, ИЛ, 1952; Ферми Э., Лекции по атомной физике, ИЛ, 1951.
100. Соколов А. А., Вестник МГУ, № 9, 5 (1952).
101. De Donder, La gravifique einsteinienne, Paris, 1921.
102. Параретроу, Proc. Roy. Irish. Ac. **A52**, 11 (19).
103. Фок В. А., Journ. Phys. (СССР) **1**, 81 (1939).
104. Gupta, Proc. Phys. Soc., **A65**, 608 (1952).
105. Иваненко Д., Григорьев В. И., ЖЭТФ, **21**, 563 (1951).
106. Rayski G., Acta Phys. Polonica, **9**, 129 (1948).
107. Rayski G., Rzewuski J., Helv. Phys. Acta, **23**, 287 (1950).
108. Rivier, Helv. Phys. Acta, **22**, 265 (1949).
109. Stuckelberg, Phys. Rev., **81**, 130 (1950).
110. Боголюбов Н. Н., ДАН СССР, **81**, № 5, № 6 (1951); **82**, № 2 (1952).
111. Марков М. А., ЖЭТФ, **21**, 11 (1951).
112. Scherzer, Ann. der Phys., **16**, 750 (1946).
113. Yukawa, Phys. Rev., **77**, 219 (1950).
114. Rzewuski J., Nuovo Cimento, **10**, No 1, 1; No 2, 1 (1953).
115. Rayski G., Acta Physica Polonica, **11**, 25 (1951).
116. Боголюбов Н. Н., Бонч-Бруевич В. Л., Медведев Б. В., ДАН СССР, **74**, 581 (1950).
117. Бонч-Бруевич В. Л., Медведев Б. В., ЖЭТФ, **22**, 434 (1952).
118. Snyder, Phys. Rev., **78**, 98 (1950).
119. Snow, Snyder, Phys. Rev., **80**, 987 (1950).
120. Иваненко Д., Zs. f. Phys., **72**, 621 (1931).
121. Dirac, Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 150 (1938).
122. Rivier, Helv. Phys. Acta, **22**, No 3, 316 (1949).
123. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.
124. Pais, Jost, Phys. Rev., **87**, 871 (1952).
125. Иваненко Д., Колесников Н., ДАН СССР, **91**, № 4 (1953).
126. Тамм И. Е., Journ. Phys. (СССР), **9**, 449 (1945); Dancoff, Phys. Rev., **78**, 382 (1950); Levy, Phys. Rev., **88**, 72, 725 (1952); Dyson, Phys. Rev., **90**, 994 (1953); Cini, Nuovo Cimento, **10**, 526 (1953); Klein, Phys. Rev., **90**, 1101 (1953).

127. Силли В. В., Файнберг В. Я., Усп. физ. наук, **50**, № 3, 325 (1953); Karplus, Kivelson, Martin, Phys. Rev., **90**, 1072 (1953); Deser, Martin, Phys. Rev., **90**, 1075 (1953); Fubini, Nuovo Cimento, **10**, 564 (1953); Проблемы современной физики, сборники переводов и обзоров, № 4 (Мезоны и тяжелые частицы), ИЛ, 1953.
128. Иваненко Д., Бродский А., ДАН СССР, **84**, 683 (1952).
129. Иваненко Д., Бродский А., ДАН СССР, **94**, № 4 (1953).
130. Pauli, Nuovo Cimento, **10**, 648 (1953); Chretien, Peierls, Nuovo Cimento, **10**, 668 (1953).
131. Yukawa, Phys. Rev., **91**, 415 (1953).

I. РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

С. ТОМОНАГА

S. Tomonaga, Progress of Theoretical Physics, I. № 2, 27 (1946).

1. Формализм обычной квантовой теории волновых полей

Недавно опубликован общий обзор Юкавы [1] об основах квантовой теории волновых полей. В этой работе он указал, что существующий формализм квантовой теории полей все еще не является полностью релятивистским.

Пусть $\varphi(xyz)$ — величина, определяющая поле, и пусть $\lambda(xyz)$ означает канонически-сопряженную к ней величину. Тогда квантовая теория требует выполнения перестановочных соотношений вида¹⁾

$$\left. \begin{aligned} [\varphi(xyzt), \varphi(x'y'z't)] &= [\lambda(xyzt), \lambda(x'y'z't)] = 0 \\ [\varphi(xyzt), \lambda(x'y'z't)] &= i\hbar \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z'), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а эти соотношения имеют совершенно нерелятивистскую форму.

Именно, в соотношения (1) входят величины, относящиеся к различным точкам (xyz) и $(x'y'z')$, но к одному и тому же моменту времени t . Однако понятие „один и тот же момент времени в различных точках“ имеет определенный смысл только, если задать некоторую определенную лорентцову систему отсчета. Это понятие не является релятивистским инвариантным понятием.

Далее, уравнение Шредингера для вектора ψ , представляющего состояние системы, имеет вид

$$\left(\bar{H} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0, \quad (2)$$

где \bar{H} — оператор полной энергии поля, выражаемый в форме пространственного интеграла некоторой функции от φ и λ . Поскольку мы принимаем здесь шредингеровское представление, φ и λ являются операторами, не зависящими от времени. Вектор состояния является в этом представлении функцией времени t , и его зависимость от t определяется уравнением (2).

Дифференциальное уравнение (2) является нерелятивистским. В этом уравнении временная переменная t имеет совершенно особое значение по сравнению с пространственными координатами x , y и z . Это тесно связано с тем обстоятельством, что понятие об амплитуде вероятности не пригодно в релятивистской теории.

Как хорошо известно, вектор ψ , рассматриваемый как амплитуда вероятности, имеет следующий физический смысл. Пусть используется представление, в котором переменная поля $\varphi(x, y, z)$ диагональна; обозначим вектор ψ в этом представлении через $\psi[\varphi'(xyz)]$ ²⁾. Тогда величина $\psi[\varphi'(xyz)]$ называется амплитудой вероятности, а квадрат ее модуля

$$W[\varphi'(xyz)] = |\psi[\varphi'(xyz)]|^2 \quad (3)$$

¹⁾ Символ перестановки: $[A, B] = AB - BA$. Мы предполагаем, что поле подчиняется статистике Бозе. Наше рассмотрение применимо также в случае статистики Ферми. — *Прим. авт.*

²⁾ Мы используем квадратные скобки для обозначения функционала. Таким образом, символ $\psi[\varphi'(xyz)]$ означает, что ψ является функционалом от функции $\varphi'(xyz)$. Когда используются круглые скобки, в частности, $\psi(\varphi'(xyz))$, то ψ считается обычной функцией от функции $\varphi'(xyz)$. Например, плотность энергии в таких обозначениях записывается в виде $H(\varphi(xyz), \lambda(xyz))$ и является, следовательно, функцией от x , y и z , в то

дает относительную вероятность того, что переменная $\varphi(xyz)$ имеет частный функциональный вид $\varphi'(xyz)$ в момент времени t . Иными словами, возьмем плоскость¹⁾, параллельную плоскости xyz и пересекающую временную ось в точке t . Тогда вероятность того, что поле имеет частную функциональную форму $\varphi'(xyz)$ на этой плоскости определяется выражением (3).

Очевидно, что плоскость, параллельная плоскости xyz , играет в этом случае важную роль. Однако подобная плоскость определена только относительно некоторой избранной системы отсчета. Таким образом, амплитуда вероятности не представляет собой в пространственно-временном мире релятивистски инвариантного понятия.

2. Четырехмерная форма перестановочных соотношений

Как было указано выше, законы квантовой теории волновых полей обычно выражаются в виде математических соотношений между величинами, обладающими смыслом только в некоторой частной лоренцевой системе отсчета. Однако поскольку доказано, что само содержание теории является релятивистски инвариантным, то должно быть, очевидно, возможным построение теории на основе представлений, имеющих релятивистский смысл. В связи с этим Юкава вместе с Дираком [2] поставили задачу обобщить понятие амплитуды вероятности так, чтобы это понятие стало пригодным для релятивистской теории. Мы в дальнейшем покажем, что подобное обобщение теории действительно возможно. Хотя наши результаты и не имеют столь общего характера, как это предполагалось Дираком и Юкавой, они все же являются настолько общими, насколько это требуется теорией относительности.

Предположим для простоты, что имеется только два взаимодействующих друг с другом поля. Случай большего числа полей может рассматриваться аналогичным образом. Пусть φ_1 и φ_2 означают величины, определяющие взятые поля, и пусть канонически-сопряженными к ним величинами являются соответственно λ_1 и λ_2 . Тогда между этими величинами должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} [\varphi_r(xyzt), \varphi_s(x'y'z't)] &= 0, \\ [\lambda_r(xyzt), \lambda_s(x'y'z't)] &= 0, \quad r, s = 1, 2 \\ [\varphi_r(xyzt), \lambda_s(x'y'z't)] &= i\hbar\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta_{rs}. \end{aligned} \quad (4)$$

Вектор ψ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$\left(\bar{H}_1 + \bar{H}_2 + \bar{H}_{12} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0. \quad (5)$$

В этом уравнении \bar{H}_1 и \bar{H}_2 обозначают соответственно энергию первого и второго поля. Величина \bar{H}_1 представляет собой пространственный интеграл от функции переменных φ_1 и λ_1 , а \bar{H}_2 — пространственный интеграл от функции переменных φ_2 и λ_2 . Далее, величина \bar{H}_{12} , представляющая энергию взаимодействия полей, задается в виде пространственного интеграла от функций как переменных φ_1 , λ_1 , так и переменных φ_2 и λ_2 . Мы предполагаем: 1) подинтегральное выражение в \bar{H}_{12} , т. е. плотность энергии взаимодействия является скалярной величиной; 2) плотности энергий в двух различных точках (но в один и тот же момент времени) коммутируют друг с другом. Эти два положения следуют вообще из предположения, что член взаимодействия в лагранжиане не содержит производных по времени от φ_1 и φ_2 .

время как полная энергия $H = \int H[\varphi(xyz), \lambda(xyz)] dv$ представляет собой функционал от $\varphi(xyz)$ и $\lambda(xyz)$ и записывается как $\bar{H}[\varphi(xyz), \lambda(xyz)]$. — Прим. авт.

¹⁾ Мы называем трехмерное многообразие в четырехмерном мире (пространстве — времени) просто словом „поверхность“. — Прим. авт.

Если плотность энергии обозначить через H_{12} , то выполняется равенство

$$\bar{H}_{12} = \int H_{12} dx dy dz. \quad (6)$$

Поскольку мы используем здесь шредингеровское представление, все величины ϑ и λ в H_1 , H_2 и H_{12} являются операторами, не зависящими от времени.

Пока мы только излагали хорошо известные факты. Теперь сделаем первый шаг в сторону приведения теории к релятивистскому виду, взяв унитарный оператор

$$U = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\bar{H}_1 + \bar{H}_2) t \right\} \quad (7)$$

и выполнив следующее унитарное преобразование операторов ϑ и λ , а также соответствующее преобразование вектора состояния ψ :

$$\begin{aligned} V_r &= U \vartheta_r U^{-1}, \quad \Delta = U \lambda_r U^{-1} \\ \Psi &= U \psi \quad (r = 1, 2) \end{aligned} \quad (8)$$

Как было сказано выше, операторы ϑ и λ в формуле (5) не зависят от времени. Однако в получившиеся из этих операторов с помощью преобразования (8) величины V и Δ через посредство оператора U входит время t . Таким образом, величины V и Δ зависят от времени, причем имеют место уравнения

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{V}_r &= V_r \bar{H}_r - \bar{H}_r V_r, \\ i\hbar \dot{\Delta}_r &= \Delta_r \bar{H}_r - \bar{H}_r \Delta_r, \end{aligned} \quad (r = 1, 2) \quad (9)$$

Эти уравнения обязательно будут ковариантными по отношению к преобразованиям Лоренца, поскольку они совпадают с уравнениями для свободных полей.

Далее, используя решения этих „вакуумных уравнений“, т. е. уравнений, которым должны подчиняться свободные поля, а также перестановочные соотношения (4), получаем соотношения

$$\begin{aligned} [V_r(xyzt), V_s(x'y'z't')] &= A_{rs}(x-x', y-y', z-z', t-t'), \\ [\Delta_r(xyzt), \Delta_s(x'y'z't')] &= B_{rs}(x-x', y-y', z-z', t-t'), \\ [V_r(xyzt), \Delta_s(x'y'z't')] &= C_{rs}(x-x', y-y', z-z', t-t'), \end{aligned} \quad (10)$$

где функции A_{rs} , B_{rs} и C_{rs} представляют собой линейные комбинации так называемой четырехмерной δ -функции и ее производных [3]. Эти четырехмерные δ -функции обозначаются обычно через $D_r(xyzt)$, $r = 1, 2$ и определяются равенствами

$$D_r(xyzt) = \frac{1}{16\pi^3} \int \int \int \left\{ \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z + ck_r t)}}{ik_r} - \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - ck_r t)}}{ik_r} \right\} dk_x dk_y dk_z, \quad (11)$$

где

$$k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + x_r^2}, \quad (12)$$

причем x_r является постоянной, характеризующей поле r . Можно без труда проверить, что данные функции являются релятивистски инвариантными¹⁾.

¹⁾ Предположим, что в (k_x, k_y, k_z, k) -пространстве задана поверхность уравнением $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + x_r^2$. Данная поверхность имеет в этом пространстве инвариант-

Поскольку в отличие от (4) соотношения (10) являются перестановочными соотношениями между переменными поля, взятыми в двух различных мировых точках $(xyzt)$ и $(x'y'z't')$, то в этих соотношениях более не используется понятие одновременности. Таким образом, соотношения (10) являются в достаточной мере релятивистскими и не требуют при своем использовании выбора специальной системы отсчета.

Отметим здесь следующее свойство функции $D(xyzt)$. Когда мировая точка $(xyzt)$ лежит вне светового конуса с вершиной в начале координат, функция $D(xyzt)$ тождественно равна нулю. Из формулы (13) непосредственно следует, что если мировая точка $(x'y'z't')$ лежит вне светового конуса, вершина которого находится в мировой точке $(xyzt)$, то стоящие справа выражения в соотношениях (10) всегда равны нулю. Иными словами, если каждая из двух мировых точек P и P' лежит вне светового конуса с началом в другой точке, то переменные поля в точке P и переменные поля в точке P' коммутируют друг с другом.

3. Обобщение уравнения Шредингера

Рассмотрим теперь вектор Ψ , получающийся из ψ посредством унитарного преобразования U . Из формул (5), (7) и (8) видно, что этот вектор, рассматриваемый как функция времени t , подчиняется уравнению

$$\left\{ \int H_{12}(V_1(xyzt), \Delta_1(xyzt), V_2(xyzt), \Delta_2(xyzt)) dx dy dz + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi = 0. \quad (14)$$

Очевидно, что время t играет в этом уравнении роль, отличную от роли координат x , y и z ; таким образом, в данном случае также особое значение имеет некоторая плоскость, параллельная плоскости xuz . Мы должны каким-либо образом устранить данный недостаток теории.

Этого можно достигнуть способом, аналогичным способу, с помощью которого Дирак построил так называемый многовременной формализм квантовой механики. Напомним данную теорию Дирака.

Уравнение Шредингера для системы N заряженных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем, имеет вид

$$\left\{ \bar{H}_{el} + \sum_{n=1}^N H_n(q_n, p_n, a(q_n)) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \psi = 0. \quad (15)$$

Здесь \bar{H}_{el} — энергия электромагнитного поля, а H_n — энергия n -й частицы. В величину H_n , кроме кинетической энергии n -й частицы, входит также энергия ее взаимодействия с полем через потенциалы $a(q_n)$, где q_n — координата частицы. Символ p_n в формуле (15) означает, как обычно, импульс n -й частицы.

Рассмотрим теперь унитарный оператор

$$u = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \bar{H}_{el} t \right\} \quad (16)$$

и произведем унитарное преобразование оператора a

$$\mathcal{A} = u a u^{-1} \quad (17)$$

ный смысл, поскольку величина $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k^2$ инвариантна при преобразованиях Лорентца. Поверхностный элемент рассматриваемой поверхности определяется выражением

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial k_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial k_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial k_z}\right)^2 - 1} dk_x dk_y dk_z = x \frac{dk_x dk_y dk_z}{k}. \quad (18)$$

Из вариантности элемента dS следует инвариантность величины $dk_x dk_y dk_z/k$ и, тем самым, инвариантность функций, определенных равенствами (11). — *Прим. авт.*

и соответствующее преобразование ψ

$$\Phi = u\psi. \quad (18)$$

При этом очевидно, что Φ удовлетворяет уравнению

$$\left\{ \sum_n H_n(q_n, p_n, \mathfrak{A}(q_n, t)) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Phi = 0. \quad (19)$$

В отличие от a , который не зависит от времени (шредингеровское представление), в \mathfrak{A} через оператор u входит время t . Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы написали t в аргументе \mathfrak{A} . Можно доказать, что \mathfrak{A} удовлетворяет уравнениям Максвелла в вакууме (строго говоря, для уравнения $\text{div } \mathfrak{E} = 0$ необходимо специальное рассмотрение).

Уравнение (19) является исходным пунктом теории многовременного формализма. Затем в этой теории вместо функции $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_N t_N)$, содержащей одну временную переменную, вводится функция $\Phi(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N)$, содержащая столько же временных переменных $t_1, t_2, t_3, \dots, t_N$, сколько имеется частиц, и предполагается, что последняя функция одновременно удовлетворяет следующим N уравнениям ¹⁾:

$$\left\{ H_n(q_n, p_n, \mathfrak{A}(q_n t_n)) + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t_n} \right\} \Phi(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

Введенная функция $\Phi(t_1, t_2, \dots, t_N)$, являющаяся основной величиной в теории многовременного формализма, связана с обычной амплитудой вероятности $\Phi(t)$ соотношением

$$\Phi(t) = \Phi(t, t, t, \dots, t). \quad (21)$$

Уравнения (20) могут быть одновременно разрешены тогда, и только тогда, когда выполнены N^2 условий

$$(H_n H_{n'} - H_{n'} H_n) \Phi(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N) = 0 \quad (22)$$

для всех пар n и n' . Можно доказать, что если мировая точка $(q_n t_n)$ лежит вне светового конуса с вершиной в точке $(q_{n'} t_{n'})$, то имеет место равенство $H_n H_{n'} - H_{n'} H_n = 0$. Вследствие этого функция, удовлетворяющая уравнениям (20), может существовать только в той области, где одновременно выполняются условия

$$(q_n - q_{n'})^2 - c^2(t_n - t_{n'})^2 \geq 0 \quad (23)$$

для всех значений n и n' .

Согласно Блоху [5], в том случае, когда аргументы функции $\Phi(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N)$ изменяются внутри области, заданной условиями (23), этой функции можно придать следующий физический смысл. Величина

$$W(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N) = |\Phi(q_1 t_1, q_2 t_2, \dots, q_N t_N)|^2 \quad (24)$$

дает относительную вероятность того, что при измерении координаты первой частицы в момент времени t_1 будет найдено значение q_1 , при измерении координаты второй частицы в момент времени t_2 будет найдено значение q_2, \dots , при измерении координаты положения N -й частицы в момент времени t_N будет найдено значение q_N .

Мы изложили основные особенности многовременного формализма квантовой механики. Вернемся теперь к нашей основной теме. Если сравнить уравнение (14) и уравнение (19) теории многовременного формализма, то сразу бросается в глаза, что между этими уравнениями имеется далеко идущее сходство. В уравнении (19)

¹⁾ Мы предполагаем, что используется представление, в котором координаты q_1, q_2, \dots, q_N диагональны, так что вектор Φ представляется в виде функции от этих координат. — *Прим. авт.*

стоит индекс n , обозначающий частицу, в то время как в уравнении (14) входят переменные x , y и z , обозначающие положение в пространстве. Далее, величина Φ является функцией N независимых переменных q_1, q_2, \dots, q_N , причем переменная q_n определяет положение n -й частицы; в то же время величина Φ является функционалом от бесконечного множества „независимых переменных“ $v_1(xyz)$ и $v_2(xyz)$, причем здесь переменные $v_1(xyz)$ и $v_2(xyz)$ определяют поля в точке (xyz) . Вместо суммы $\sum_n H_n$, стоящей в уравнении (19),

в уравнение (14) входит интеграл $\int H_{12} dx dy dz$. Таким образом, индекс n уравнения (19), принимающий значения $1, 2, 3 \dots N$, соответствует переменным x , y и z , принимающим непрерывно все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Указанное соответствие наводит на мысль ввести бесконечное множество временных переменных t_{xyz} , которые можно назвать местным временем¹), относящимся к каждому положению (xyz) в пространстве, подобно тому как были введены N временных переменных t_1, t_2, \dots, t_N для каждой отдельной частицы. Единственное отличие состоит в том, что в нашем случае получается бесконечное множество временных переменных, в то время как в обычном многовременном формализме их было только N .

Вместо перехода от функции с одной временной переменной к функции с N временными переменными мы должны теперь рассмотреть переход от функции $\Psi(t)$ к функционалу $\Psi[t_{xyz}]$ от бесконечного множества временных переменных t_{xyz} .

Будем теперь рассматривать t_{xyz} как функцию от (xyz) и возьмем вариацию от этой функции ε_{xyz} , отличающуюся от нуля только в малой области V_0 в окрестности точки $(x_0 y_0 z_0)$. Определим частную производную от функционала $\Psi[t_{xyz}]$ по переменной $t_{x_0 y_0 z_0}$ следующим образом:

$$\frac{\delta \Psi}{\delta t_{x_0 y_0 z_0}} = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ V_0 \rightarrow 0}} \frac{\Psi[t_{xyz} + \varepsilon_{xyz}] - \Psi[t_{xyz}]}{\int \int \int \varepsilon_{xyz} dx dy dz}. \quad (25)$$

Обобщим теперь уравнение (14) и рассмотрим в качестве основных уравнений теории бесконечное множество справедливых одновременно уравнений

$$\left\{ H_{12}(x, y, z, t) + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta t_{xyz}} \right\} \Psi = 0, \quad (26)$$

соответствующих N уравнениям (20). В уравнении (26) ради простоты мы написали $H_{12}(x, y, z, t)$ вместо $H_{12}(V_1(xyz, t), V_2(xyz, t), \dots)$.

Вообще, когда имеется функция $F(V, \Delta)$ от V и Δ , мы будем писать вместо $F(V(xyz, t_{xyz}), \Delta(xyz, t_{xyz}))$ просто $F(x, y, z, t)$ или даже $F(P)$, где P означает мировую точку с координатами (xyz, t) . Таким образом, под записью $F(P')$ подразумевается $F(x' y' z', t')$ или, более точно, $F(V(x' y' z', t_{x' y' z'}), \Delta(x' y' z', t_{x' y' z'}))$.

Примем теперь уравнение (26) в качестве исходного положения теории. Когда в оператор H_{12} подставлены величины $V_1(P)$, $V_2(P)$, $\Delta_1(P)$ и $\Delta_2(P)$, выполняются перестановочные соотношения (10). Входящая в них функция $D(xyz t)$ обладает свойством (13). Вследствие этого мы получаем, что если точка P лежит на конечном расстоянии от точки P' вне светового конуса с вершиной в P' , то имеет место соотношение

$$H_{12}(P) H_{12}(P') - H_{12}(P') H_{12}(P) = 0. \quad (27)$$

Далее, согласно предположению 2, приведенному на стр. 2, соотношение (27) сохраняется также и тогда, когда точки P и P' стремятся друг к другу по

¹ Подобный термин был введен в аналогичном случае Штюкельбергом [6]. — *Прим. авт.*

пространственно-подобному направлению. Следовательно, система уравнений (26) интегрируема тогда, когда поверхность, определяемая уравнением $t = t_{xyz}$ (t_{xyz} считается функцией от x , y и z), является пространственно-подобной.

Таким образом, функционал от варьируемой поверхности в пространственно-временном мире определяется функциональными дифференциальными уравнениями в частных производных (26). По аналогии с соотношением (21) многовременной теории функционал $\Psi [t_{xyz}]$ сводится к обычной функции $\Psi (t)$, когда пространственно-подобная поверхность сводится к плоскости, параллельной плоскости xuz .

Переменная поверхность $t = t_{xyz}$ может быть любого (пространственно-подобного) вида в пространственно-временном мире, и для определения подобной поверхности нет необходимости избирать какую-либо специальную лорентцовую систему отсчета. Поэтому функционал $\Psi [t_{xyz}]$ является релятивистски инвариантным понятием. При этом не является необходимым допущение из релятивистских соображений в качестве поверхностей $t = t_{xyz}$ также и временно-подобных поверхностей, как этого требуют Дирак и Юкава. Таким образом, мы предполагаем, что введенный выше функционал $\Psi [t_{xyz}]$ является уже достаточным обобщением обычного вектора Ψ , и считаем, что этим функционалом описывается квантовое состояние¹⁾ полей.

Пусть C обозначает поверхность, определяемую уравнением $t = t_{xyz}$. Тогда Ψ является функционалом от поверхности C . Мы выразим это обстоятельство записью: $\Psi [C]$. Возьмем на поверхности C точку P с координатами (xuz, t) и рассмотрим поверхность C' , совпадающую с C всюду, кроме малой окрестности точки P . Обозначим объем, лежащий между поверхностями C и C' , через $d\omega_p$. Тогда мы можем записать выражение (25) в виде

$$\frac{\delta \Psi [C]}{\delta C_p} = \lim_{c' \rightarrow c} \frac{\Psi [C'] - \Psi [C]}{d\omega_p} \quad (28)$$

и уравнение (26) в виде

$$\left\{ H_{12}(P) + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta C_p} \right\} \Psi [C] = 0. \quad (29)$$

Данное уравнение (29) имеет полностью инвариантный вид. Во-первых, согласно нашему предположению 1 (стр. 2), величина H_{12} является скаляром; во-вторых, перестановочные соотношения между операторами $V(P)$ и $\Delta(P)$, содержащимися в H_{12} , имеют четырехмерную форму (10) и, наконец, дифференцирование $\delta/\delta C_p$, определенное формулой (28), не зависит от выбора системы отсчета.

Из формулы (29) непосредственно следует, что функционал $\Psi [C']$ получается из $\Psi [C]$ посредством следующего инфинитезимального преобразования:

$$\Psi [C'] = \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} H_{12}(P) d\omega_p \right\} \Psi [C]. \quad (30)$$

Если поверхности C_1 и C_2 в пространственно-временном мире находятся на конечном расстоянии, то для получения функционала $\Psi [C_2]$ из $\Psi [C_1]$ достаточно применить последовательно ряд инфинитезимальных преобразований. Таким образом,

$$\Psi [C_2] = \prod_{C_1}^{C_2} \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} H_{12}(P) d\omega_p \right\} \Psi [C_1]. \quad (31)$$

Смысл этого соотношения состоит в следующем. Разделим четырехмерную область, заключенную между поверхностями C_1 и C_2 , на малые четырехмерные элементы $d\omega_p$ (необходимо, чтобы каждый четырехмерный элемент был окружен двумя пространственно-подобными поверхностями). Рассмотрим для каждого четырехмерного элемента бесконечное преобразование $1 - \frac{i}{\hbar} H_{12}(P) d\omega_p$.

¹⁾ Термин „состояние“ используется здесь в релятивистском пространственно-временном смысле. См. книгу Дирака, Квантовая механика, § 6 (второе издание). — *Прим. авт.*

Возьмем, далее, произведение таких преобразований, причем порядок множителей пусть соответствует переходу от поверхности C_1 к C_2 . Это произведение преобразует функционал $\Psi[C_1]$ в $\Psi[C_2]$.

Как поверхность C_1 , так и поверхность C_2 должны быть при этом пространственно-подобными, однако в остальных отношениях они совершенно произвольны. Так, поверхность C_2 не обязательно должна быть расположена позднее C_1 ; поверхности C_1 и C_2 могут даже пересекаться друг с другом.

Соотношения вида (31) были ранее введены Гейзенбергом [7]. Их можно рассматривать как интегральную форму уравнений Шредингера.

4. Обобщенная амплитуда вероятности

Нам нужно теперь найти физический смысл функционала $\Psi[C]$. Для этого можно применить соображения, аналогичные развитым Блохом в обычной многовременной теории. Кроме появления бесконечного числа временных переменных, наш случай отличается от случая Блоха еще тем, что в отличие от унитарного оператора (16) обычной многовременной теории, коммутирующего с координатами q_1, q_2, \dots, q_N , оператор U не коммутирует с переменными поля $\psi_1(xyz)$ и $\psi_2(xyz)$. Учитывая это различие и рассматривая непрерывное множество, например, с помощью приема Гейзенберга и Паули [8] как предел счетного множества, соображения Блоха можно перенести в данную теорию без каких-либо дополнительных изменений. Мы приведем здесь только получающиеся при этом результаты.

Пусть поля находятся в состоянии, описываемом вектором $\Psi[C]$. Предположим, что мы производим измерения функции $f(\psi_1, \psi_2, \lambda_1, \lambda_2)$ в каждой точке поверхности C_1 в пространственно-временном мире. Пусть P_1 обозначает переменную точку на поверхности C_1 , тогда если величины $f(P_1)$ при двух каких-либо „значениях“ P_1 коммутируют, то измерения функции f в этих двух точках не влияют друг на друга. Первое наше заключение состоит в том, что в подобном случае среднее значение $f(P_1)$ задается выражением

$$\overline{f(P_1)} = ((\Psi[C_1], f(P_1)\Psi[C_1])), \quad (32)$$

где $f(P_1)$ означает, согласно условию на стр. 6, величину $f(V_1(P_1), \dots)$, а двойные скобки $((A, B))$ означают скалярное произведение двух векторов A и B . В случае непрерывного множества степеней свободы это скалярное произведение невозможно представить в виде интеграла от произведения двух функций. Чтобы это можно было сделать, нужно заменить непрерывное множество по крайней мере счетным множеством.

Пусть вообще $F[f(P_1)]$ — функционал от независимой функции $f(P_1)$ точки P_1 . Тогда среднее значение величины F дается выражением

$$\overline{F[f(P_1)]} = ((\Psi[C_1], F[f(P_1)]\Psi[C_1])). \quad (33)$$

Представляет физический интерес случай, когда функционал F является оператором проектирования $M[\psi'_1(P_1), \psi'_2(P_1); V_1(P_1), V_2(P_1)]$, относящимся к „собственным значениям“ $\psi'_1(P_1), \psi'_2(P_1)$ операторов $V_1(P_1), V_2(P_1)$. Тогда среднее значение

$$\begin{aligned} \overline{M[\psi'_1(P_1), \psi'_2(P_1); V_1(P_1), V_2(P_1)]} = \\ = ((\Psi[C_1], M[\psi'_1(P_1), \psi'_2(P_1); V_1(P_1), V_2(P_1)]\Psi[C_1])) \quad (34) \end{aligned}$$

дает вероятность того, что поля 1 и 2 имеют на поверхности C_1 функциональный вид $\psi'_1(P_1)$ и соответственно $\psi'_2(P_1)$. Поскольку предполагается, что поверхность C_1 пространственно-подобна, измерение на ней функционала M является возможным (возможность измерения величин $V_1(P_1)$ и $V_2(P_1)$ во всех точках поверхности C_1 означает возможность измерения M).

До сих пор мы никак не определяли представление оператора $\Psi[C]$. Выберем теперь специальное представление, в котором оператор $V_1(P_1)$ является диагональным одновременно во всех точках поверхности C_1 . Выбор такого представления, в котором операторы $V_1(P_1)$ и $V_2(P_1)$ диагональны на всей поверхности C_1 , всегда возможен, если поверхность C_1 пространственно-подобна. В этом представлении $\Psi[C_1]$ представляется функционалом $\Psi[V'_1(P_1), V'_2(P_1); C_1]$ от собственных значений $v'_1(P_1)$ и $v'_2(P_1)$ операторов $V_1(P_1)$ и $V_2(P_1)$. Оператор проектирования M имеет в этом представлении диагональную форму, так что выражение (34) преобразуется к следующему простому виду:

$$\begin{aligned} W[v'_1(P_1), v'_2(P_1)] &= M[v'_1(P_1), v'_2(P_1); V_1(P_1), V_2(P_1)] = \\ &= |\Psi[v'_1(P_1), v'_2(P_1); C_1]|^2. \end{aligned} \quad (35)$$

В этом смысле мы можем назвать функционал $\Psi[v'_1(P_1), v'_2(P_1); C_1]$ „обобщенной амплитудой вероятности“.

5. Обобщенный функционал преобразования

Как было отмечено выше, величины $\Psi[C_1]$ и $\Psi[C_2]$ связаны соотношением (31), где C_1 и C_2 — две пространственно-подобные поверхности в четырехмерном мире. Отсюда видно, что оператор преобразования

$$T[C_2; C_1] = \prod_{C_1}^C \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_{12} d\omega\right) \quad (36)$$

играет важную роль. Очевидно также, что этот оператор имеет пространственно-временной смысл.

Подобно тому как в частном представлении вектора Ψ амплитуда вероятности имеет определенное физическое значение, имеется специальное представление, в котором определенное физическое значение имеет оператор преобразования $T[C_2; C_1]$.

Именно, возьмем такое смешанное представление оператора $T[C_2; C_1]$, чтобы его строки соответствовали представлению, в котором операторы $V_1(P_1)$ и $V_2(P_2)$ во всех точках поверхности C_1 становятся диагональными, а столбцы соответствовали представлению, в котором операторы $V_1(P_2)$ и $V_2(P_2)$ диагональны во всех точках поверхности C_2 . Обозначим это представление посредством ¹⁾

$$[v''_1(P_2), v''_2(P_2) | T[C_2; C_1] | v'_1(P_1), v'_2(P_1)] \quad (37)$$

или просто

$$[v''_1(P_2), v''_2(P_2) | v'_1(P_1), v'_2(P_1)]. \quad (38)$$

Если рассмотреть теперь выражение (35), то становится ясным, что мы можем придать матричным элементам в данном представлении следующий смысл. Пусть измеряются значения переменных поля V_1 и V_2 во всех точках поверхности C_2 , причем известно, что эти переменные во всех точках на поверхности C_1 имеют значения $v'_1(P_1)$ и $v'_2(P_1)$. Тогда величина

$$W[v''_1(P_2), v''_2(P_2); v'_1(P_1), v'_2(P_1)] = |[v''_1(P_2), v''_2(P_2) | v'_1(P_1), v'_2(P_1)]|^2 \quad (39)$$

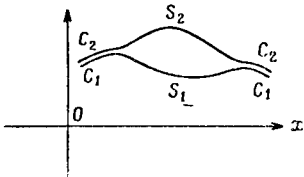
дает вероятность того, что при подобном измерении получатся значения $v''_1(P_2)$ и $v''_2(P_2)$. При этом мы предполагаем, что поверхность C_2 расположена позднее, чем поверхность C_1 .

¹⁾ Поскольку матричные элементы являются здесь функционалами от $v(P)$, мы используем при записи квадратные скобки. — *Прим. авт.*

Соответственно приведенной физической интерпретации мы можем считать матричный элемент (37) или (38), рассматриваемый как функционал от $\psi_1''(P_2)$, $\psi_2''(P_2)$ и $\psi_1'(P_1)$, $\psi_2'(P_1)$, обобщением обычной функции преобразования $(q_{t_2}' | q_{t_1}')$.

В частном случае может оказаться, что только участки S_1 и S_2 поверхности C_1 и соответственно C_2 отличаются друг от друга, а остальные части этих поверхностей совпадают (фиг. 1).

В таком случае матричные элементы оператора $T[C_2; C_1]$ зависят только от переменных поля на участках S_1 и S_2 поверхностей C_1 и C_2 . При этом для вычисления $T[C_2; C_1]$ достаточно распространить произведение (36) только по замкнутой области, окруженной поверхностями S_1 и S_2 так, что



Фиг. 1.

$$T[S_2; S_1] = \prod_{S_1}^{S_2} \left(1 - \frac{i}{\hbar} H_{12} d\omega \right). \quad (40)$$

Матричные элементы оператора T в смешанном представлении являются функционалами от функций $\psi_1'(P_1)$, $\psi_2'(P_2)$ и $\psi_1''(P_2)$, $\psi_2''(P_2)$, где P_1 обозначает пере-

менную точку участка S_1 , а P_2 — переменную точку участка S_2 . Данная матрица не зависит от величин поля в остальных участках поверхностей C_1 и C_2 .

Матричный элемент оператора $T[S_2; S_1]$, рассматриваемый как функционал от $\psi_1'(P_1)$, $\psi_2'(P_1)$ и $\psi_1''(P_2)$, $\psi_2''(P_2)$, обладает свойствами обобщенного функционала преобразования Дирака. Однако при нашем определении обобщенного функционала преобразования мы наложим условие, что поверхности S_1 и S_2 пространственно-подобны, в то время как Дирак требует, чтобы этот функционал был определен также и для временно-подобных поверхностей. Как упоминалось выше, последнее обобщение, требуемое Дираком, не следует с необходимостью из теории относительности.

Следует отметить, что физическую интерпретацию величины $[\psi_1''(P_2)$, $\psi_2''(P_2) | \psi_1'(P_1)$, $\psi_2'(P_1)]$ можно сохранить также и тогда, когда не предполагается, что поверхность C_2 расположена позднее поверхности C_1 . Именно, если поверхность C_1 расположена позднее поверхности C_2 , то величине W можно придать следующий физический смысл. Пусть измеряются величины поля V_1 и V_2 во всех точках поверхности C_2 , причем с достоверностью известно, что эти величины имели бы значения $\psi_1'(P_1)$ и $\psi_2'(P_1)$ во всех точках поверхности C_1 , если бы на эти поля до поверхности C_2 не оказывалось бы никакого внешнего воздействия, кроме измерения на поверхности C_2 . Тогда величина W дает вероятность того, что при подобном измерении будут найдены значения $\psi_1''(P_2)$ и $\psi_2''(P_2)$.

6. Заключительные замечания

Нами, таким образом, показано, что квантовой теории волновых полей действительно можно придать вид, в котором явным образом обнаруживается инвариантность теории по отношению к преобразованиям Лоренца. Причина неудовлетворительности обычного формализма квантовой теории волновых полей вызвана тем, что его построение слишком сходно с построением нерелятивистской квантовой механики. При применении обычного формализма квантовой теории полей разделяется на две разграниченные части: в одной определяются кинематические соотношения между различными величинами в один и тот же момент времени, а в другой определяются причинные соотношения между величинами в различные моменты времени. Так, перестановочные соотношения (1) принадлежат к первой из указанных частей, а уравнение Шредингера (2) — ко второй.

Как указывалось ранее, подобный способ разделения теории на две части является нерелятивистским, поскольку при этом важную роль играет понятие „один и тот же момент времени“.

В нашем формализме теория также разделяется на две части, но это разделение производится в другом смысле. Первая часть определяет законы поведения свободных полей, а вторая — отклонения от этих законов, вызванные взаимодействием. Подобное разделение теории может быть произведено релятивистским образом.

Хотя теория и принимает при этом более удовлетворительный вид, в нее не вводится по существу чего-либо нового. Следовательно, в ней сохраняются известные трудности, вызванные расходимостями. Действительно, основное уравнение (29) допускает только решения с особенностями, как это сразу видно из того, что неустраиваемая бесконечность, связанная с нулевыми амплитудами полей, сохраняется в операторе $H_{12}(P)$. Таким образом, для устранения указанных фундаментальных трудностей требуется более глубокое видоизменение теории.

Подобное видоизменение может быть, повидимому, осуществлено посредством пересмотра понятия взаимодействия, поскольку до тех пор, пока мы имеем дело со свободными полями, трудности, связанные с расходимостями, не возникают. Такое видоизменение привело бы к тому, что при разделении теории на две части, одна из которых относилась бы к свободным полям, а другая — к взаимодействию, возникает некоторая неопределенность. Это связано, повидимому, с тем обстоятельством, что если формулировать квантовую теорию полей релятивистски удовлетворительным образом, то способ подобного разделения оказывается сам по себе существенным элементом теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yukawa H., Kagaku **12**, 251, 282, 322 (1944).
2. Dirac P. A. M., Sow. Phys., **3**, 64 (1933).
3. Pauli W., So'vey Berichte (1939).
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. London, **136**, 453 (1932).
5. Bloch F., Sow. Phys., **5**, 301 (1943).
6. Stueckelberg E., Helv. Phys. Acta, **11**, 225, § 5 (1928).
7. Heisenberg W., Zs. Phys., **110**, 251 (1938).
8. Heisenberg W., Pauli W., Zs. Phys., **56**, 1 (1929).

II. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Ю. ШВИНГЕР

J. Schwinger, Phys. Rev., 74, № 10, 1439 (1948); 75, № 4, 651 (1949);
76, № 6, 790 (1949); 82, № 6, 914 (1951)

ЧАСТЬ I

КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Попытки преодоления трудностей квантовой электродинамики, вызванных расходимостями, за счет отказа от существенных сторон теории оказывались каждый раз безуспешными. Отсутствие сходимости действительно указывает на то, что в случае ультррелятивистских энергий необходим пересмотр представлений электродинамики; однако какое-либо значительное изменение теории для не слишком высоких релятивистских энергий является недопустимым.

Расходимости, как следствие виртуальных переходов с участием частиц с неограниченно большой энергией, проявляются прежде всего при рассмотрении поляризации вакуума и собственной энергии электрона. Эти эффекты выражают по существу взаимодействие электромагнитного поля и поля частиц с вакуумными флуктуациями этих же полей. Основным результатом подобного взаимодействия является изменение, хотя и из бесконечно большой множитель, постоянных, определяющих свойства отдельных полей и характер их взаимной связи. Естественно возникает вопрос: все ли расходимости сводятся к подобным неаблюдаемым множителям перенормировки? Конкретнее говоря: может ли квантовая электродинамика дать однозначное объяснение недавно наблюдаемым отклонениям от теории электрона Дирака без введения каких-либо существенно новых представлений? Данная статья, являющаяся первой из серии работ, относящихся к поставленному выше вопросу, посвящена формулировке полностью ковариантной электродинамики. Требование явной ковариантности по отношению к преобразованию Лорентца и калибровочному преобразованию крайне существенно для теории, содержащей расходимости, так как использование при расчетах частных систем отсчета и специальных калибровок электромагнитных потенциалов может привести к потере ковариантности благодаря произволу, который часто сопутствует вычислениям с бесконечностями.

В первом разделе статьи указывается, что обычным каноническим перестановочным соотношениям, которые не обладают требующейся ковариантностью, так как они относятся к переменным поля, взятым в одно и то же время, но в различных точках пространства, может быть придан ковариантный вид посредством замены четырехмерной поверхности $t = \text{const}$ на некоторую пространственно-подобную поверхность. Эта последняя поверхность такова, что никакие из двух ее точек не могут быть связаны световым сигналом. Подобным способом строится формулировка квантовой электродинамики в гейзенберговском представлении, являющаяся, как очевидно, полностью ковариантной. Однако эта формулировка не совсем пригодна для практического рассмотрения проблем электродинамики, так как в случае ее использования правила коммутации переменных поля, относящихся к точкам, разделенным временно-подобным интервалом, могут быть сконструированы лишь путем решения уравнений движения. Эта ситуация может быть противопоставлена положению, возникающему в случае шредингеровского представления, когда все операторы относятся к одному и тому же моменту времени, обеспечивая тем самым резкое разграничение динамических и кинематических аспектов задачи. Формулировка, сохраняющая очевидную ковариантность гейзенберговского представления и к тому же дающая преимущества, сходные с преимуществами шредингеровского представления, может основываться лишь на разграничении свойств невзаимодействующих полей и эффектов, обязанных их взаимодействию. Во втором разделе строится каноническое преобразование, переводящее уравнения поля в гейзенберговском представлении в уравнения свободных полей; таким образом, связь между полями представляется теперь посредством переменного вектора состояния. После этого не представляет никаких затруднений переопределить правила перестановки переменных поля, относящихся к произвольным точкам пространства — времени. Подобным образом получается явно ковариантная и практически удобная форма квантовой электродинамики, выраженная в смешанном гейзенберговско-шредингеровском представлении, которое названо представлением взаимодействия. Третий раздел посвящен обсуждению ковариантных способов исключения продольного поля, причем обычное разделение продольных и поперечных полей заменяется соответствующим ковариантным определением. В четвертом разделе рассматриваются процессы столкновения с помощью инвариантного унитарного оператора столкновения, полностью определяющего все изменения состояния системы в результате взаимодействия. Показано, что этот оператор столкновения просто связан с эрмитовым оператором взаимодействия, для которого формулируется вариационный принцип.

Введение

Предсказания квантовой электродинамики относительно эффектов высшего порядка теории возмущений давно уже не внушают доверия в связи с расходимостью получающихся результатов. Было сделано несколько попыток [1] производного устранения нежелательных, по общему мнению, следствий теории; подобные методы оказались бесплодными либо вследствие того, что они не приводили к достижению поставленной цели, либо вследствие отсутствия внутренней последовательности. Бесспорный успех квантовой электродинамики в истолковании эффектов, относящихся к низшим приближениям теории возмущений, показывает ее принципиальную пригодность для частиц с умеренно релятивистскими энергиями. Нежелательные аспекты проявляются лишь в виртуальных процессах с участием частиц с ультрарелятивистскими энергиями. Двумя фундаментальными явлениями подобного типа являются поляризация вакуума и собственная энергия электрона.

Под „поляризацией вакуума“ подразумевается то изменение свойств электромагнитного поля, которое вызывается его взаимодействием с флуктуациями заряда в вакууме. На языке теории возмущений рассматриваемое явление означает образование в вакууме заряда и тока вследствие виртуального порождения и уничтожения электронно-позитронных пар в электромагнитном поле. Если электромагнитное поле является полем светового кванта, то эффекты поляризации вакуума эквивалентны приписыванию фотону некоторой собственной массы. Прежние вычисления приводили к необрацающимся в нуль и расходящимся выражениям для соответствующей массы светового кванта. Однако данная величина должна равняться нулю в калибровочно-инвариантной теории. Появление противоречащих этому утверждению результатов можно приписать скорее неправильному применению теории, чем каким-либо ее существенным внутренним недостаткам. Если электромагнитное поле является полем заданных токов, то получается логарифмически расходящаяся составляющая тока вакуумной поляризации, которая оказывается всюду пропорциональной заданным токам. Данный расходящийся результат выражает, согласно существующим представлениям, возможность порождения, электронно-позитронных пар с неограниченно большой энергией, т. е. выражает положение, которое, по видимому, будет изменено в более удовлетворительной теории. Итак, физическое значение расходимости, вызванной явлением поляризации вакуума, сводится к появлению некоторого множителя, изменяющего величину всех зарядов, или, иначе говоря, сводится к единообразной перенормировке, не приводящей ни к каким поддающимся наблюдению следствиям, кроме противоречия с эмпирически установленной конечностью заряда.

Взаимодействие вакуумных флуктуаций электромагнитного поля с электроном, или, более точно, с электронно-позитронным полем, изменяет свойства этого поля и приводит к возникновению собственной энергии у электрона. Механизм рассматриваемого явления обычно описывается как виртуальное испускание и поглощение световых квантов электроном, рассматриваемым в остальных отношениях свободным, хотя не менее важным эффектом является частичное подавление, благодаря принципу Паули, взаимно связанных вакуумных флуктуаций электромагнитного поля и поля частиц. В лорентц-инвариантной теории влияние собственной энергии свободного электрона может выражаться только в прибавлении электромагнитной массы к собственной механической массе. Вычисления, проделанные для покоящегося электрона [3], привели к логарифмически расходящейся электромагнитной собственной массе. Эта расходимость следует из возможности испускания световых квантов с неограниченно большой энергией. Именно здесь, как и в соответствующем пункте проблемы поляризации вакуума, будут внесены изменения более удовлетворительной теорией. Однако электромагнитная масса вызывает лишь перенормировку массы электрона; эта перенормировка не

приводит к каким-либо экспериментальным следствиям, если не считать противоречия с эмпирической конечностью массы.

Очевидно, оба указанных явления совершенно аналогичны и что по существу они описывают взаимодействие каждого из полей с вакуумными флуктуациями другого поля. Эффект таких флуктуационных взаимодействий состоит всего лишь в изменении основных констант e и m , причем последние величины умножаются на логарифмически расходящиеся множители. Однако можно утверждать, что в будущей модифицированной теории, благодаря запрещению порождения частиц с энергиями, значительно превышающими mc^2 , эти множители будут только незначительно отличаться от единицы, так что будет пригодна теория возмущений вследствие малости константы связи поля частиц и электромагнитного поля:

$$\frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Теперь можно поставить следующий основной вопрос: все ли существенные расходимости современной теории ограничиваются множителями перенормировки массы и заряда? Приведет ли рассмотрение взаимодействий, более сложных чем указанные простые эффекты вакуумных флуктуаций, к появлению новых расходимостей или же все остальные явления связаны только с умеренно релятивистскими энергиями и благодаря этому сравнительно нечувствительны к тем изменениям в области высоких энергий, которые, очевидно, будут введены в будущей более правильной теории? Данная серия работ представляет собой попытку дать по крайней мере частичный ответ на поставленный выше вопрос, который приобрел непосредственное значение в связи с недавним окончательным доказательством того, что электромагнитные свойства электрона не полностью описываются волновым уравнением Дирака. При измерениях тонкой структуры водорода, дейтерия [4] и ионизированного гелия [5] были обнаружены сдвиги энергетических уровней, означающие существование слабого, короткодействующего отталкивающего взаимодействия между электроном и протоном. Исследования сверхтонкой структуры водорода и дейтерия [6], а также определения значений g электрона в различных состояниях галлия и натрия [7] показали, что электрон обладает небольшим дополнительным спиновым магнитным моментом.

Сразу же после завершения эксперимента Лэмба — Ризерфорда было признано, что наиболее вероятное объяснение следует искать в связи с электродинамическими эффектами высших порядков¹⁾ и что радиационные поправки к свойствам связанного электрона не сводятся к перенормировке заряда и массы. Предварительный нерелятивистский подсчет подтвердил эту точку зрения [8]. Однако для доказательства того, что радиационные поправки могут одновременно объяснить два с первого взгляда не связанных друг с другом отклонения от теории электрока Дирака, требуется полностью релятивистская трактовка [9]. Рассмотрение этой проблемы как раз и является нашей основной целью.

Чтобы выделить лорентц-инвариантным и калибровочно-инвариантным способом расходимости квантовой электродинамики, необходимо использовать такую формулировку теории, которая сохраняла бы указанную инвариантность на всех этапах вычислений. Использование в процессе вычисления частных систем отсчета или частных калибровок может привести к потере инвариантности из-за неоднозначностей, могущих возникнуть в теории, содержащей расходимости. Первая часть посвящена развитию соответствующей инвариантной формулировки. Во второй части мы рассмотрим задачу о собственной энергии электрона и фотона в связи с поляризацией вакуума. В третьей части разбирается главная проблема — определение радиационных поправок к свойствам электрона и производится сравнение с экспериментом.

¹⁾ Дискуссия на конференции по основаниям квантовой механики, Шельтер-Айленд, июнь 1947 г. — *Прим. авт.*

1. Ковариантное рассмотрение в гейзенберговском представлении

В этом разделе используется следующий способ записи: греческие индексы принимают значения, пробегающие от 1 до 4; по индексам, встречающимся дважды, следует производить суммирование. Координаты точки в четырехмерном пространстве обозначены через $x_\mu = (\mathbf{r}, ict)$. Используется также и действительная временная координата $x_0 = (1/i)t = ct$. В частности, четырехмерный элемент объема определяется как $d\omega = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$. Символ $A_\mu(x) = (\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), i\varphi(\mathbf{r}, t))$ представляет четырехмерный вектор-потенциал электромагнитного поля, в то время как $\psi_\alpha(x)$ означает четырехкомпонентный дираковский спинор. Индекс компоненты спинора часто будет опускаться; так, если через A и A^T обозначены соответственно четырехмерные прямая и транспонированная матрицы, то величина $A\psi = \psi A^T$ представляет собой четырехкомпонентный спинор, α -компонентой которого является $A_{\alpha\beta}\psi_\beta = \psi_\beta A_{\beta\alpha}^T$. Скалярное произведение двух спиноров χ и ψ будет аналогичным образом обозначаться через $\chi\psi = \chi_\alpha\psi_\alpha$. Обозначение γ_μ используется для четырех эрмитовых матриц, подчиняющихся условию антикоммутиации

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{1.1}$$

Сопряженный спинор $\bar{\psi}_\alpha(x)$ определяется соотношением

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma_4 = \gamma_4^T \psi^\dagger(x), \tag{1.2}$$

где $\psi^\dagger(x)$ — спинор, эрмитово-сопряженный к $\psi_\alpha(x)$. Так называемый зарядно-сопряженный спинор $\psi'_\alpha(x)$ и сопряженный к нему спинор $\bar{\psi}'_\alpha(x)$ определяются равенствами

$$\psi'(x) = C\bar{\psi}(x), \quad \bar{\psi}'(x) = C^{-1}\psi(x). \tag{1.3}$$

Здесь C такая матрица, что

$$\gamma_\mu^T = \gamma_\mu^* = -C^{-1}\gamma_\mu C; \tag{1.4}$$

кроме того, матрица C кососимметрична

$$C^T = -C \tag{1.5}$$

и унитарна

$$C + C = 1. \tag{1.6}$$

В последнем соотношении матрица $C^+ = C^{T*}$ представляет собой эрмитово-сопряженную к C матрицу. В том частном представлении, в котором все элементы γ_4 мнимы, в то время как все элементы остальных матриц вещественны, условием, налагаемым на C , можно удовлетворить, положив $C = -\gamma_4$. При таком выборе представления $\psi'(x) = \psi(x)$, так что спинор, зарядно-сопряженный с ψ , и спинор, эрмитово-сопряженный с ψ , совпадают. Наконец,

$$x_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}, \tag{1.7}$$

где m_0 — механическая собственная масса электрона.

Уравнения движения связанных полей, электромагнитного и электронно-позитронного, могут быть выведены из вариационного принципа

$$\delta \int \mathcal{L} d\omega = 0, \tag{1.8}$$

где лагранжева плотность \mathcal{L} равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi}(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + x_0 \right] \psi(x) - \\ & - \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi}'(x) \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + x_0 \right] \psi'(x). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Выражение для лагранжевой плотности (1.9) составлено таким образом, что оно инвариантно по отношению к преобразованию Лорентца, калибровочному преобразованию и зарядному сопряжению. Доказательство инвариантности по отношению к преобразованиям Лорентца получается обычным образом и может быть здесь опущено. Калибровочная инвариантность, т. е. инвариантность по отношению к одновременным преобразованиям

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu}, \\ \psi(x) &\rightarrow \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c} \Lambda(x)\right] \psi(x), \\ \psi'(x) &\rightarrow \exp\left[\frac{ie}{\hbar c} \Lambda(x)\right] \psi'(x), \end{aligned} \quad (1.10)$$

определяемым скалярной функцией от координат $\Lambda(x)$, также выполнялась бы в общем случае, если бы не член в лагранжевой плотности, относящийся к свободному электромагнитному полю. Из-за него при подобном преобразовании к \mathcal{L} добавляются слагаемые

$$-\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\left(A_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right] + \left(A_\nu + \frac{1}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\mu^2},$$

первое из которых не влияет на уравнения движения. Таким образом, калибровочная инвариантность сохраняется лишь тогда, когда функция преобразования Λ подчиняется условию

$$\frac{\partial^2 \Lambda(x)}{\partial x_\mu^2} = \square^2 \Lambda(x) = 0. \quad (1.11)$$

Инвариантность по отношению к зарядному сопряжению выражает полную симметрию между положительным и отрицательным зарядами. Перестановка $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ и одновременная замена e на $-e$ не приводят, как легко видеть, к изменению лагранжевой плотности.

Для вывода уравнений движения поля частиц необходимо выразить лагранжеву плотность либо только через $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$, либо, наоборот, только через $\psi'(x)$ и $\bar{\psi}'(x)$. В силу формул (1,3)—(1,5) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' &= \psi C^{-1T} \gamma_\mu C \bar{\psi} = \psi \gamma_\mu^T \bar{\psi} \\ \bar{\psi}' \psi' &= \psi C^{-1T} C \bar{\psi} = -\psi \bar{\psi}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

следовательно, третий член (1.9) может быть переписан в виде

$$-\frac{\hbar c}{2} \psi(x) \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) - x_0 \right] \bar{\psi}(x).$$

В результате варьирования, отбросив члены, имеющие вид дивергенции, получаем

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \delta A_\mu \left[\square^2 A_\mu + \frac{1}{c} j_\mu \right] + \frac{1}{2} \left[\square^2 A_\mu + \frac{1}{c} j_\mu \right] \delta A_\mu - \\ &- \frac{\hbar c}{2} \delta \bar{\psi} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) + x_0 \right] \psi + \frac{\hbar c}{2} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) + x_0 \right] \psi \delta \bar{\psi} - \\ &- \frac{\hbar c}{2} \delta \psi \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) - x_0 \right] \bar{\psi} + \frac{\hbar c}{2} \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) - x_0 \right] \bar{\psi} \delta \psi = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где величина

$$j_\mu(x) = \frac{iec}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x)] \quad (1.14)$$

представляет собой четырехмерный вектор заряда и тока $j_\mu = (j, icp)$. В соответствии с перестановочными соотношениями, накладываемыми на переменные

поля, отсюда следует

$$\square^2 A_\mu(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x) \quad (1.15)$$

и

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + \alpha_0 \right] \psi(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) - \alpha_0 \right] \bar{\psi}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Уравнения Дирака для поля частиц может быть придана также зарядно-сопряженная форма

$$\begin{aligned} \left[\gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) + \alpha_0 \right] \psi'(x) &= 0, \\ \left[\gamma_\mu^T \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu(x) \right) - \alpha_0 \right] \bar{\psi}'(x) &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

К уравнениям движения нужно добавить дополнительное условие и перестановочные соотношения. Дополнительное условие

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \Phi = 0 \quad (1.18)$$

накладывает ограничение на допустимые состояния системы, характеризуемой в разбираемом гейзенберговском представлении не зависящим от времени вектором Φ . Совместность (1.18) с уравнениями движения является следствием уравнения сохранения заряда

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (1.19)$$

Обычные уравнения Максвелла для напряженностей поля (а не потенциалов)

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \quad (1.20)$$

выступают как получающиеся из предыдущих новые добавочные условия

$$\left[\frac{\partial F_{\mu\nu}(x)}{\partial x_\mu} + \frac{1}{c} j_\nu(x) \right] \Phi = 0. \quad (1.21)$$

Перестановочные соотношения в обычной канонической форме имеют вид

$$\left[A_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(\mathbf{r}', t) \right] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.22a)$$

$$\{ \psi_\alpha(\mathbf{r}, t), (\bar{\psi}(\mathbf{r}', t) \gamma_4)_\beta \} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad (1.22b)$$

здесь прямые и фигурные скобки означают соответственно коммутацию и антикоммутацию

$$[A, B] = AB - BA, \quad \{A, B\} = AB + BA. \quad (1.23)$$

Мы выписали скобки, не равные нулю; значение следующих скобок равно нулю:

$$\begin{aligned} [A_\mu(\mathbf{r}, t), A_\nu(\mathbf{r}', t)], \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} A_\mu(\mathbf{r}, t), \frac{\partial}{\partial t} A_\nu(\mathbf{r}', t) \right], \\ \{ \psi_\alpha(\mathbf{r}, t), \psi_\beta(\mathbf{r}', t) \}, \quad \{ \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t), \bar{\psi}_\beta(\mathbf{r}', t) \}, \end{aligned}$$

также, конечно, равны нулю скобки

$$[A_\mu(\mathbf{r}, t), \psi_\alpha(\mathbf{r}', t)] \text{ и т. п.}$$

Следует отметить, что перестановочные соотношения для поля частиц инвариантны по отношению к зарядному сопряжению. Действительно,

$$\begin{aligned} \{ \psi'_\alpha(\mathbf{r}, t), (\bar{\psi}'(\mathbf{r}', t) \gamma_4)_\beta \} &= \{ (C \gamma_4^T \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \gamma_4)_\alpha, (\psi(\mathbf{r}', t) C^{-1} \gamma_4)_\beta \} = \\ &= (\gamma_4 C)_{\alpha\gamma} \{ \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) \gamma_4)_\gamma (\psi(\mathbf{r}', t) \gamma_4)_\beta \} (C^{-1} \gamma_4)_{\beta\delta} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Следующее замечание касается совместности дополнительного условия и перестановочных соотношений. Так как условие (1.18) относится к произвольной точке x , то мы получили бы новые дополнительные условия путем коммутации, если бы не выполнялось равенство

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'_\nu} \right] = 0 \quad (1.25)$$

для любых x и x' . Канонические перестановочные соотношения как раз имеют такую форму, что (1.25) имеет место. Нужно лишь учесть, что коммутатор, рассматриваемый как функция x , подчиняется волновому уравнению; отсюда следует правильность (1.25) при том условии, что коммутатор и его производная по времени равны нулю при $t = t'$. Справедливость указанного положения проверяется без труда.

Физические величины, характеризующие распределение энергии и импульса в поле, объединяются в канонический тензор энергии — импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} \right)^2 \right] + \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} + \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi}' \gamma_\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x_\nu}, \quad (1.26)$$

который удовлетворяет уравнению сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.27)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} T_{\mu\nu} = -\frac{1}{c} j_\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{ie}{2} \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' \right] \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (1.28)$$

Канонический тензор может быть заменен симметричным тензором энергии — импульса

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} + F_{\nu\lambda} F_{\mu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{2} F_{\lambda\sigma}^2 \right] + \frac{\hbar c}{2} \left[\bar{\psi}' \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi' + \bar{\psi} \gamma_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\nu \right) \psi + \bar{\psi}' \gamma_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) \psi' \right]. \quad (1.29)$$

Однако только среднее значение $\Theta_{\mu\nu}$

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle = \langle \Phi, \Theta_{\mu\nu} \Phi \rangle \quad (1.30)$$

удовлетворяет уравнению сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle \Theta_{\mu\nu} \rangle = 0 \quad (1.31)$$

вследствие тождества

$$\langle \Theta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{1}{2} [A_\nu F_{\lambda\mu} + F_{\lambda\mu} A_\nu] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right] - \frac{i\hbar c}{4} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{1}{2} [\bar{\psi} \sigma_{\mu\lambda} \gamma_\nu \psi + \bar{\psi}' \sigma_{\mu\lambda} \gamma_\nu \psi'] \right\rangle, \quad (1.32)$$

поскольку при выводе этого уравнения используется дополнительное условие Лоренца. В тождестве (1.32) $\sigma_{\mu\lambda}$ представляет матричный спиновый тензор Дирака:

$$\sigma_{\mu\lambda} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\lambda - \gamma_\lambda \gamma_\mu). \quad (1.33)$$

Симметричный тензор энергии — импульса является, очевидно, инвариантным по отношению к калибровочному преобразованию и по отношению к зарядному

сопряжению. Следует также отметить простую формулу

$$\Theta_{\mu\nu} = -m_0 c^2 \frac{1}{2} (\bar{\psi}\psi + \bar{\psi}'\psi'). \quad (1.34)$$

Интегралы по трехмерному объему

$$P_\mu = -\frac{i}{c} \int T_{4\mu} d\sigma \quad (1.35)$$

составляют не зависящий от времени четырехмерный вектор, который объединяет количество движения и энергию, являющиеся интегралами уравнений движения $P_\mu = (\mathbf{P}, iW/c)$. Как непосредственно видно из тождества (1.32), среднее значение P_μ может быть вычислено также и из тензора напряжений $\Theta_{\mu\nu}$:

$$\langle P_\mu \rangle = -\frac{i}{c} \int \langle \Theta_{4\mu} \rangle d\sigma. \quad (1.36)$$

Операторы P_μ образуют инфинитезимальное представление группы смещений координат. В частности, из перестановочных соотношений вытекает

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [A_\mu(x), P_\nu] &= \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}, \\ \frac{i}{\hbar} [\psi_\alpha(x), P_\nu] &= \frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x_\nu}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Вообще, если $F(x)$ — произвольная функция переменных поля в точке x , не зависящая явно от координат, то

$$\frac{i}{\hbar} [F(x), P_\nu] = \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu}. \quad (1.38)$$

Указанные свойства операторов P_μ можно использовать для нового доказательства того, что данные операторы являются константами движения и что канонические перестановочные соотношения совместны с уравнениями движения. Аналогичным образом можно ввести другие константы движения — операторы, составляющие момент количества движения. Эти величины образуют инфинитезимальное представление группы Лорентца, и с их помощью можно показать ковариантность канонической схемы квантования. Однако именно в этом пункте мы должны отклониться от обычного способа изложения, описанного здесь в самых общих чертах.

Уравнения движения и дополнительное условие имеют явно ковариантный вид; однако канонические перестановочные соотношения этой важной особенностью не обладают, поскольку при их формулировке используется частная лорентцовская система отсчета. Перестановочные соотношения относятся к переменным поля, взятым в двух точках на некоторой четырехмерной поверхности $t = \text{const}$. Мы достигнем желаемой ковариантности за счет замены подобных поверхностей пространственно-подобной поверхностью, представляющей собой инвариантное понятие; никакие две точки не могут быть связаны световым сигналом. Иными словами, координаты двух точек этой поверхности x_μ и x'_μ подчиняются условию

$$(x_\mu - x'_\mu)^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - c^2(t - t')^2 > 0, \quad (1.39)$$

которое, как легко видеть, не вводит какой-либо частной системы отсчета. Поверхности типа $t = \text{const}$ образуют специальный нековариантный класс плоских пространственно-подобных поверхностей. Обычные перестановочные соотношения являются по существу выражением кинематической независимости переменных поля в различных точках пространства в заданный момент времени. Очевидно, что инвариантное описание этого общего свойства должно включать переменные поля, взятые в двух таких пространственно-временных точках, которые не могут быть связаны световым сигналом, т. е. в точках, лежащих на

пространственно-подобной поверхности. Попытаемся в соответствии со сказанным придать перестановочным соотношениям явно ковариантную форму.

Наиболее простую основу для обобщения соотношения (1.22а) представляют два положения, следующих из (1.22а) и выражающих свойства функции $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:

$$\left[A_{\mu}(\mathbf{r}, t), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{\nu}(\mathbf{r}', t) \right] = 0, \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}', \quad (1.40a)$$

$$\int \left[A_{\mu}(\mathbf{r}, t), \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A_{\nu}(\mathbf{r}', t) \right] d\mathbf{v}' = i\hbar c \delta_{\mu\nu}; \quad (1.40b)$$

при этом интегрирование распространено по некоторому трехмерному объему, включающему точку \mathbf{r} . Соответствующим обобщением соотношения (1.40а), так же как и других равных нулю коммутаторов для величин электромагнитного поля, является просто

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = 0, \quad (x_{\mu} - x'_{\mu})^2 > 0, \quad (1.41)$$

что означает коммутацию переменных поля, относящихся к двум различным точкам пространственно-подобной поверхности. Для обобщения соотношения (1.40б) удобно ввести представляющий собой четырехмерный вектор дифференциальный элемент поверхности

$$d\tau_{\mu} = \left(dx_2 dx_3 dx_0, dx_1 dx_3 dx_0, dx_1 dx_2 dx_0, \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{i} \right). \quad (1.42)$$

Вектор $d\tau_{\mu}$, совпадающий по направлению, как это следует из определения, с нормалью к пространственно-подобной поверхности, должен быть временно-подобным, так что $d\tau_{\mu}^2 < 0$. Следует отметить, что наши определения элемента объема и элемента поверхности обладают тем свойством, что объем, получающийся при смещении δx_{μ} элемента поверхности $d\tau_{\mu}$, равен $d\omega = d\tau_{\mu} \delta x_{\mu}$. Из рассмотрения обозначений $d\mathbf{v}' = i d\tau'_{\lambda}$, $\partial A_{\nu}(\mathbf{r}', t) / \partial ct = i \partial A_{\nu}(x') / \partial x'_{\lambda}$ становится очевидным, что соответствующим ковариантным обобщением (1.40б) является соотношение

$$\int_{\sigma} \left[A_{\mu}(x), \frac{\partial}{\partial x'_{\lambda}} A_{\nu}(x') \right] d\tau'_{\lambda} = \frac{\hbar c}{i} \delta_{\mu\nu}, \quad (1.43)$$

где интегрирование распространено по некоторой произвольной части пространственно-подобной поверхности σ , включающей точку x .

Для доказательства непротиворечивости как этих, так и приведенных в дальнейшем ковариантных перестановочных соотношений нужно показать, что значения, приписываемые подобным поверхностным интегралам, не меняются при варьировании пространственно-подобной поверхности σ , проходящей через точку x ; следует также показать совместность перестановочных соотношений в случае произвольных перемещений точки x по фиксированной поверхности. Обсуждение последнего условия, связанное с детальным рассмотрением уравнений движения, будет произведено в соответствующем месте в дальнейшем. Проверка первого условия облегчается введением понятия функциональной производной. Величина, стоящая с левой стороны соотношения (1.43), содержит переменные поля во всех точках поверхности σ , являясь, таким образом, функционалом от пространственно-подобной поверхности, σ , который мы обозначим через $F[\sigma]$. Мы можем сравнивать указанный функционал с функционалом $F[\sigma']$ от соседней пространственно-подобной поверхности σ' , которая отличается от σ только в окрестности точки x . Если заключенный между введенными поверхностями объем $\delta\omega$ можно устремить к нулю, то мы получим определение функциональной производной от $F[\sigma]$ в точке x , положив

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\delta\omega \rightarrow 0} \frac{F[\sigma'] - F[\sigma]}{\delta\omega}. \quad (1.44)$$

Использованное обозначение подчеркивает, что мы рассматриваем вариацию F , вызванную деформацией поверхности σ в точке x . Специальный класс функ-

ционалов, примером которых является (1.43), имеет вид поверхностных интегралов от функции точки:

$$F[\sigma] = \int_{\sigma} F_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda}. \quad (1.45)$$

Функциональная производная для таких функционалов выражается особенно просто, так как, согласно теореме Гаусса,

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \lim_{\delta \omega \rightarrow 0} \left(\int_{\sigma'} - \int_{\sigma} \right) F_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda} = \frac{\partial F_{\lambda}(x)}{\partial x_{\lambda}}. \quad (1.46)$$

Теперь мы можем установить изменение интеграла (1.43), вызванное деформацией поверхности σ в точке $x' \neq x$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \int_{\sigma} \left[A_{\mu}(x), \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}''} A_{\nu}(x'') \right] d\sigma_{\lambda}'' &= \\ &= [A_{\mu}(x), \square'^2 A_{\nu}(x')] = -\frac{1}{c} [A_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] = 0. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Последнее равенство является следствием ковариантного выражения кинематической независимости величин, относящихся к двум различным полям:

$$[A_{\mu}(x), \psi_{\alpha}(x')] = [A_{\mu}(x), \bar{\psi}_{\alpha}(x')] = 0, \quad (x_{\mu} - x'_{\mu})^2 > 0. \quad (1.48)$$

Соответствующими обобщениями перестановочных соотношений для поля частиц являются соотношения

$$\{\psi_{\alpha}(x), \psi_{\beta}(x')\} = \{\bar{\psi}_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = \{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = 0, \quad (x_{\mu} - x'_{\mu})^2 > 0 \quad (1.49)$$

и

$$i \int_{\sigma} \{\psi_{\alpha}(x), (\bar{\psi}(x') \gamma_{\lambda})_{\beta}\} d\sigma'_{\lambda} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (1.50)$$

Другой вид последнего соотношения, а именно

$$i \int_{\sigma} \{(\gamma_{\lambda} \psi(x'))_{\alpha}, \bar{\psi}_{\beta}(x)\} d\sigma'_{\lambda} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.51)$$

может быть получен, если в формуле (1.50) перейти к эрмитово-сопряженным величинам. Для доказательства независимости значений поверхностных интегралов (1.50) и (1.51) от выбора поверхности, проходящей через точку x , рассмотрим, например,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \int_{\sigma} \{(\gamma_{\lambda} \psi(x''))_{\alpha}, \bar{\psi}_{\beta}(x)\} d\sigma_{\lambda}'' &= \left\{ \left(\gamma_{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}'} \psi(x') \right)_{\alpha}, \bar{\psi}_{\beta}(x) \right\} = \\ &= \frac{ie}{\hbar c} \{(\gamma_{\lambda} A_{\lambda}(x') \psi(x'))_{\alpha}, \bar{\psi}_{\beta}(x)\} - \kappa_0 \{\psi_{\alpha}(x'), \bar{\psi}_{\beta}(x)\} = 0; \end{aligned} \quad (1.52)$$

последнее равенство имеет место, поскольку все подобные антикоммутаторы обращаются в нуль для двух различных точек пространственно-подобной поверхности. Можно показать, что и в этом случае перестановочные соотношения сохраняют свою силу также для зарядно-сопряженных полей. Именно, в силу (1.50)

$$\begin{aligned} i \int_{\sigma} \{(\gamma_{\lambda} \psi'(x'))_{\alpha}, \bar{\psi}'_{\beta}(x)\} d\sigma'_{\lambda} &= i \int_{\sigma} \{(\bar{\psi}(x') \gamma_{\lambda} C)_{\alpha}, (C^{-1} \psi(x)_{\beta})\} d\sigma'_{\lambda} = \\ &= C_{\beta\gamma}^{-1} i \int_{\sigma} \{\psi_{\gamma}(x), (\bar{\psi}(x') \gamma_{\lambda})_{\delta}\} d\sigma'_{\lambda} C_{\delta\alpha} = (C^{-1} C)_{\beta\alpha} = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

При выводе формулы (1.53) было использовано соотношение

$$(\gamma_{\lambda} C)^T = \gamma_{\lambda} C, \quad (1.54)$$

которое является следствием свойств матрицы C .

Явно ковариантным определением четырехмерного вектора энергии — импульса, заменяющим определение (1.35), является выражение

$$P_\mu = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\lambda T_{\lambda\mu}(x), \quad (1.55)$$

где интегрирование распространено по всей избранной пространственно-подобной поверхности. Ковариантным выражением законов сохранения является теперь утверждение, что величина P_μ не зависит от поверхности σ . Именно,

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} P_\mu c = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} T_{\lambda\mu}(x) = 0. \quad (1.56)$$

Закон сохранения полного заряда

$$Q = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\mu j_\mu(x)$$

выражается аналогичным образом:

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} Qc = \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(x) = 0. \quad (1.57)$$

Полезно удостовериться в том, что перестановочные соотношения, позволяющие интерпретировать P_μ как оператор сдвига, следуют из развитых ковариантных перестановочных соотношений. Для этой цели потребуется следующая лемма:

$$\int_\sigma \left[d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} F(x) - d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} F(x) \right] = 0. \quad (1.58)$$

Доказательство леммы вытекает из того, что поверхностный интеграл не зависит от выбора σ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \int_\sigma \left[d\sigma'_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} F(x') - d\sigma'_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} F(x') \right] &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F(x) = 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

и из того, что для специальной поверхности $t = \text{const}$ не равны тождественно нулю лишь те компоненты выражения (1.58), у которых, например, $\mu = 4$, $\nu = k = 1, 2, 3$. Однако для замкнутой системы имеет место равенство

$$i \int d\sigma_4 \frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = \int d\sigma \frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = 0. \quad (1.60)$$

Чтобы выразить оператор P_μ только через ψ и $\bar{\psi}$, используем то обстоятельство, что, согласно формуле (1.12),

$$\bar{\psi}' \gamma_\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x_\nu} = \psi \gamma_\mu^T \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} = \psi \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\nu} \gamma_\mu, \quad (1.61)$$

благодаря чему

$$\int_\sigma d\sigma_\mu \bar{\psi}' \gamma_\mu \frac{\partial \psi'}{\partial x_\nu} = - \int_\sigma d\sigma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu + \int_\sigma d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\psi \bar{\psi} \gamma_\mu). \quad (1.62)$$

Из леммы (1.58) и уравнения сохранения заряда, далее, следует

$$\int_\sigma d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\psi \bar{\psi} \gamma_\mu) = \int_\sigma d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\psi \bar{\psi} \gamma_\mu) = 0. \quad (1.63)$$

Таким образом, оператор P_μ может быть записан в виде

$$\begin{aligned} P_\nu = \frac{1}{2c} \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\hbar}{2} \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \right], \end{aligned} \quad (1.64)$$

откуда следует, что

$$\frac{i}{\hbar} [\psi_\alpha(x), P_\nu] = i \int_\sigma d\sigma'_\lambda \{ \psi_\alpha(x), (\bar{\psi}(x') \gamma_\mu)_\beta \} \frac{\partial \psi_\beta(x')}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial \psi_\alpha(x)}{\partial x_\nu} \quad (1.65)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} [A_\mu(x), P_\nu] &= \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma d\sigma'_\lambda \left[A_\mu(x), \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\lambda} \right] \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\nu} + \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma (d\sigma'_\lambda [A_\mu(x), \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\lambda}] - \\ &- d\sigma'_\nu [A_\mu(x), \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\lambda}]) \frac{\partial A_\sigma(x')}{\partial x'_\lambda} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

При последнем выводе, кроме свойств коммутаторов, была использована также лемма (1.58).

Теперь можно показать, что ковариантные перестановочные соотношения совместны с уравнениями движения. Исследуем изменение значений коммутаторов и антикоммутаторов переменных двух полей, связанных с двумя точками пространственно-подобной поверхности, вызванное жестким смещением этой поверхности. Иными словами, нам нужно вычислить

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} [F(x), G(x - \xi)] \text{ и } \frac{\partial}{\partial x_\nu} \{F(x), G(x - \xi)\},$$

где ξ_μ — пространственно-подобный вектор, а F и G — некоторые переменные поля. Легко показать, используя элементарные тождества, что если F и G подчиняются уравнению движения (1.38), то этому уравнению подчиняются также и скобки

$$[F(x), G(x - \xi)] \text{ и } \{F(x), G(x - \xi)\}.$$

Таким образом, представление подобных скобок в виде зависящих от ξ величин, пропорциональных единичному оператору, является непротиворечивым, поскольку как производные от этих скобок по x_ν , так и их коммутатор с P_ν равны нулю.

Развивая выше формулировка квантовой механики является во всех отношениях явно ковариантной. Однако эта формулировка не совсем удобна для практического рассмотрения вопросов электродинамики. При ее применении часто приходится оценивать коммутаторы переменных поля, относящихся к точкам, разделенным временно-подобным интервалом. Для составления подобных коммутаторов нужно решать уравнения движения при граничных условиях, заданных на пространственно-подобной поверхности. Такое смешение кинематических и динамических сторон задачи затрудняет систематическое рассмотрение проблем электродинамики. Наоборот, в шредингеровском представлении все операторы не зависят от времени, а изменение системы во времени представляется переменным вектором состояния; однако подобный метод не является ковариантным. Попытаемся найти формулировку, позволяющую сохранить очевидную ковариантность гейзенберговского представления и обладающую в то же время преимуществами шредингеровского представления, которое дает возможность резко разграничить кинематические и динамические аспекты. Желаемое разграничение нужно искать в отделении основных свойств невзаимодействующих полей от изменений в этих свойствах, вызванных связью между полями. Для свободных полей проведение указанной выше программы и составление перестановочных соотношений для переменных поля в любых пространственно-временных точках не представляет никаких затруднений. Чтобы использовать это преимущество, нужно найти каноническое преобразование, переводящее уравнения движения для величин поля в гейзенберговском представлении в уравнения невзаимодействующих полей, и, следовательно, перейти к описанию связи между полями посредством переменного вектора состояния. Мы выполним подобное преобразование в следующем разделе и тем самым получим явно-

ковариантную и практически удобную форму квантовой электродинамики, выраженную в смешанном гейзенберговско-шредингеровском представлении, которое может быть названо представлением взаимодействия¹⁾.

2. Представление взаимодействия

Чтобы изменить уравнения движения намеченным выше образом, введем унитарный оператор $U[\sigma]$, зависящий от пространственно-подобной поверхности σ , и построим вектор состояния в представлении взаимодействия

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma]\Phi, \quad (2.1)$$

который, в отличие от постоянного вектора состояния в гейзенберговском представлении, зависит от σ . Среднее значение некоторой переменной поля $F(x)$ примет в этом случае следующий вид (в этом разделе операторы в гейзенберговском представлении будут обозначаться жирными буквами):

$$\langle \Phi, \underline{F}(x) \Phi \rangle = \langle \Psi[\sigma], \underline{U}[\sigma] F(x) U^{-1}[\sigma] \Psi[\sigma] \rangle = \langle \Psi[\sigma], F(x) \Psi[\sigma] \rangle. \quad (2.2)$$

Здесь введен оператор \underline{U} в представлении взаимодействия $F(x)$, равный по определению

$$F(x) = U[\sigma] F(x) U^{-1}[\sigma], \quad (2.3)$$

где σ , как легко понять, есть пространственно-подобная поверхность, проходящая через точку x . Чтобы значение $F(x)$ определялось только точкой x и не зависело от выбора σ , оператор $U[\sigma]$ должен еще удовлетворять дополнительному условию

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x')} F(x) &= \frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x')} F(x) U^{-1}[\sigma] - U[\sigma] F(x) U^{-1}[\sigma] \frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x')} U^{-1}[\sigma] = \\ &= \left[\frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x')} U^{-1}[\sigma], F(x) \right] = 0, \quad (x_\mu - x'_\mu)^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Это условие будет выполняться, если

$$\frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x')} U^{-1}[\sigma]$$

является инвариантной функцией операторов поля в точке x' , поскольку перестановочные свойства на поверхности σ не изменятся при унитарном преобразовании. Если, далее, оператор $U[\sigma]$ должен оставаться при движении унитарным, то необходимо, чтобы величина

$$i \frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x)} U^{-1}[\sigma]$$

была эрмитовым оператором. Следовательно, положив

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta\sigma(x)} = \mathcal{H}(x) U[\sigma], \quad (2.5)$$

мы получим ковариантное уравнение движения для $U[\sigma]$, где $\mathcal{H}(x)$ — эрмитов оператор, являющийся инвариантной функцией величин поля в точке x и обладающий размерностью плотности энергии. Уравнение движения для вектора $\Psi[\sigma]$ будет соответственно иметь вид

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial\sigma(x)} = \mathcal{H}(x) \Psi[\sigma]. \quad (2.6)$$

Мы вывели условия, которые должны удовлетворяться при каждом каноническом преобразовании. Теперь покажем, что необходимое нам специальное пре-

¹⁾ Представление взаимодействия может рассматриваться как полевое обобщение многовременного формализма; с этой точки зрения указанное представление уже обсуждалось Томонага [10]. Релятивистские квантовые теории недавно также обсуждались в работе Дирака [11]. — *Прим. авт.*

образование мы получим, если в качестве $\mathcal{H}(x)$ возьмем с отрицательным знаком член лагранжевой плотности, определяющий связь между полями, т. е. если положим

$$\mathcal{H}(x) = -\left(\frac{1}{c}\right) j_\mu(x) A_\mu(x). \quad (2.7)$$

Для построения уравнений движения в представлении взаимодействия особенно существенно, что градиент каждой величины поля можно представить в виде функциональной производной с помощью следующего очевидного обобщения теоремы Гаусса:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} = \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int_\sigma F(x') d\sigma'_\nu = \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} U[\sigma] \int_\sigma F(x') d\sigma'_\nu U^{-1}[\sigma]. \quad (2.8)$$

Функциональная производная в последнем выражении действует как на поверхность интегрирования, так и на оператор $U[\sigma]$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} &= U[\sigma] \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} U^{-1}[\sigma] + \int_\sigma \left[\frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} U^{-1}[\sigma], F(x') \right] d\sigma'_\nu = \\ &= U[\sigma] \frac{\partial F(x)}{\partial x_\nu} U^{-1}[\sigma] - \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma [\mathcal{H}(x), F(x')] d\sigma'_\nu. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если мы положим $F(x) = A_\mu(x)$, то из ковариантных перестановочных соотношений на пространственно-подобной поверхности сразу получим

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} = U[\sigma] \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} U^{-1}[\sigma], \quad (2.10)$$

как это, в действительности, и необходимо для того, чтобы перестановочные соотношения для электромагнитного поля при рассматриваемом каноническом преобразовании сохраняли свой вид. При $F(x) = \partial A_\mu(x) / \partial x_\nu$ получим

$$\begin{aligned} \square^2 A_\mu(x) &= U[\sigma] \square^2 A_\mu(x) U^{-1}[\sigma] + \frac{1}{c} j_\lambda(x) \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma \left[A_\lambda(x), \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\nu} \right] d\sigma'_\nu = \\ &= -\frac{1}{c} U[\sigma] j_\mu(x) U^{-1}[\sigma] + \frac{1}{c} j_\mu(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

т. е. уравнения движения для электромагнитного поля совпадают в представлении взаимодействия с уравнениями движения для свободного поля. Кроме того, сохраняет свой вид и дополнительное условие

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \Psi[\sigma] = 0, \quad (2.12)$$

если только точка x лежит на поверхности σ . Наконец, если $F(x) = \gamma_\nu \psi(x)$, то

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + x_0 \right) \psi(x) &= U[\sigma] \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + x_0 \right) \psi U^{-1}[\sigma] + \\ &+ \frac{1}{c} A_\mu(x) \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma [j_\mu(x), \gamma_\nu \psi(x')] d\sigma'_\nu. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Но, согласно (1.12) и (1.14),

$$j_\mu(x) = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \psi(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu] \quad (2.14)$$

и

$$[j_\mu(x), \gamma_\nu \psi(x')] = -ie c \{ \gamma_\nu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \} (\gamma_\mu \psi(x))_\alpha, \quad (2.15)$$

так что

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + x_0 \right) \psi(x) &= \frac{ie}{\hbar c} \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x) - i \int_\sigma \{ \gamma_\nu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \} \times \\ &\times d\sigma'_\nu \left(\frac{ie}{\hbar c} \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x) \right)_\alpha = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

т. е. уравнения движения поля частиц в представлении взаимодействия также совпадают с уравнениями движения свободного поля. Тем самым полностью подтверждается правильность нашего выбора $\mathcal{H}(x)$ в виде (2.7).

Теперь мы можем продолжить построение общих законов коммутации в новом представлении, используя уравнения движения. Подобное построение облегчается введением двух инвариантных функций координат $D(x)$ и $\Delta(x)$, которые относятся соответственно к электромагнитному полю и к полю частиц. Эти величины определяются следующим ковариантным образом:

$$\square^2 D(x) = 0; \quad D(x) = 0, \quad x_\mu^2 > 0, \\ \int_\sigma \frac{\partial D(x)}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 1, \quad (2.17)$$

$$(\square^2 - x_0^2) \Delta(x) = 0; \quad \Delta(x) = 0, \quad x_\mu^2 > 0, \\ \int_\sigma \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = 1. \quad (2.18)$$

Поверхностные интегралы распространены здесь по пространственно-подобной поверхности, проходящей через начало координат. Как легко проверить, приписывание поверхностным интегралам постоянного значения вне зависимости от выбора σ не противоречит остальным уравнениям. Определение явного вида этих и родственных им функций будет произведено в части II; пока же нам достаточно использовать те свойства введенных функций, которые непосредственно следуют из определений. Легко, в частности, вывести, что функции D и Δ — четные функции координат

$$D(-x) = -D(x), \quad \Delta(-x) = -\Delta(x). \quad (2.19)$$

Отметим, что

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int_\sigma \left[\Delta(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(x-x'') - \Delta(x-x'') \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(x-x') \right] d\sigma_\mu = \\ = \Delta(x-x') (\square^2 - x_0^2) \Delta(x-x'') - \Delta(x-x'') (\square^2 - x_0^2) \Delta(x-x') = 0. \quad (2.20)$$

Последнее равенство указывает на то, что данный поверхностный интеграл не зависит от σ . Выбрав пространственно-подобную поверхность σ так, чтобы эта поверхность содержала x' и x'' , из формулы (2.20) получим

$$\Delta(x'' - x') = -\Delta(x' - x''), \quad (2.21)$$

что подтверждает правильность второго из утверждений (2.19). Доказательство для функции $D(x)$ совершенно идентично.

При помощи этих инвариантных функций решения уравнений движения выражаются через граничные значения, заданные на некоторой пространственно-подобной поверхности. Электромагнитные потенциалы определяются однозначно, если известны значения $A_\mu(x)$ и его нормальной производной на поверхности σ . Указанная зависимость выполняется следующим образом:

$$A_\mu(x) = \int_\sigma \left[D(x-x') \frac{\partial}{\partial x'_\nu} A_\mu(x') - A_\nu(x') \frac{\partial}{\partial x'_\nu} D(x-x') \right] d\sigma'_\nu. \quad (2.22)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что подобно выражению (2.20) правая сторона равенства (2.22) не зависит от поверхности σ , за которую, в частности, может быть выбрана проходящая через точку x пространственно-подобная поверхность, причем значение поверхностного интеграла становится равным

$$\int_\sigma A_\nu(x') \frac{\partial}{\partial x'_\nu} D(x'-x) d\sigma'_\nu = A_\mu(x).$$

Соответствующее решение граничной задачи для уравнения Дирака первого порядка дается выражением

$$\psi(x) = \int_{\sigma} S(x-x') \gamma_{\mu} \psi(x') d\sigma'_{\mu}, \quad (2.23)$$

где

$$S(x) = \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - x_0 \right) \Delta(x). \quad (2.24)$$

Следуя принятому методу, покажем, что левая сторона (2.23) также не зависит от поверхности σ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \int S(x-x') \gamma_{\mu} \psi(x') d\sigma'_{\mu} &= \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} (S(x-x') \gamma_{\mu} \psi(x')) = \\ &= S(x-x') \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} + x_0 \right) \psi(x') - \left(\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} S(x-x') \gamma_{\mu} + x_0 S(x-x') \right) \psi(x') = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

так как

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} + x_0 \right) S(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} S(x) \gamma_{\mu} + x_0 S(x) = (\square^2 - x_0^2) \Delta(x) = 0. \quad (2.26)$$

Далее, в случае поверхности σ , проходящей через точку x , вычисление с помощью леммы (1.58) дает

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \Delta(x-x') \psi(x') d\sigma'_{\mu} &= \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \Delta(x'-x) \psi(x') d\sigma'_{\mu} + \\ &+ \frac{i}{2} \sigma_{\nu\mu} \int_{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x'_{\nu}} \Delta(x'-x) d\sigma'_{\mu} - \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \Delta(x'-x) d\sigma'_{\nu} \right] \psi(x') = \psi(x); \end{aligned}$$

сопряженное уравнение

$$\bar{\psi}(x) = \int_{\sigma} d\sigma'_{\mu} \bar{\psi}(x') \gamma_{\mu} S(x'-x) \quad (2.27)$$

может быть получено непосредственно, либо выведено из (2.23).

Составление общих перестановочных соотношений становится теперь совершенно тривиальным. Например, для нахождения значения $[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]$ достаточно выразить оператор $A_{\mu}(x)$ через переменные поля на пространственно-подобной поверхности, проходящей через точку x' , и использовать известные перестановочные соотношения на этой поверхности. Следовательно,

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = - \int_{\sigma} D(x-x'') \left[A_{\nu}(x''), \frac{\partial}{\partial x''_{\lambda}} A_{\mu}(x'') \right] d\sigma''_{\lambda},$$

откуда

$$[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x-x'). \quad (2.28)$$

Аналогичным образом получаем

$$\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = \int_{\sigma} S_{\alpha\beta}(x-x'') \{(\gamma_{\mu} \psi(x''))_{\gamma}, \bar{\psi}_{\beta}(x'')\} d\sigma''_{\mu},$$

так что

$$\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-x') = \frac{1}{i} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - x_0 \right)_{\alpha\beta} \Delta(x-x'). \quad (2.29)$$

Все остальные антикоммутирующие коммутаторы поля частиц равны нулю. Очевидно, что перестановочные соотношения для поля частиц инвариантны по отношению к зарядному сопряжению.

Перейдем, наконец, к обобщению дополнительного условия (2.12). Это обобщение состоит в устранении того ограничения, что точка x расположена на

поверхности σ . Из (2.22) следует, что для произвольной точки x выполняется равенство

$$\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \Psi[\sigma] = \int_\sigma D(x-x'') \frac{\partial}{\partial x''_\nu} \left(\frac{\partial A_\mu(x'')}{\partial x''_\mu} \right) d\sigma''_\nu \Psi[\sigma]. \quad (2.30)$$

Однако, согласно формуле (2.9), если в ней положить $F = \partial A_\mu(x'')/\partial x''_\mu$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x''_\nu} \left(\frac{\partial A_\mu(x'')}{\partial x''_\mu} \right) \Psi[\sigma] &= U[\sigma] \frac{\partial}{\partial x''_\nu} \left(\frac{\partial A_\mu(x'')}{\partial x''_\mu} \right) \Phi - \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma \left[\mathcal{H}(x''), \frac{\partial A_\mu(x'')}{\partial x''_\mu} \right] d\sigma''_\nu \Psi[\sigma] = \\ &= \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma \left[A_\lambda(x''), \frac{\partial A_\mu(x'')}{\partial x''_\mu} \right] d\sigma''_\nu \frac{1}{c} j_\lambda(x'') \Psi[\sigma] = \\ &= \frac{i}{\hbar c} \int_\sigma \left[A_\mu(x'), \frac{\partial A_\lambda(x'')}{\partial x''_\mu} \right] d\sigma''_\nu \frac{1}{c} j_\lambda(x'') \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

При последнем преобразовании мы использовали лемму (1.58), а также то обстоятельство, что коммутаторы электромагнитного поля зависят только от разности координат рассматриваемых двух точек. Подставив результат (2.31) в формулу (2.30) и выполнив интегрирование по x'' , получим без труда соотношение

$$\left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} - \int_\sigma D(x-x') \frac{1}{c} j_\mu(x') d\sigma'_\mu \right] \Psi[\sigma] = 0, \quad (2.32)$$

которое и является дополнительным условием в случае представления взаимодействия. Хотя непротиворечивость данного дополнительного условия гарантируется соответствующим свойством этого условия в гейзенберговском представлении, представляет интерес также непосредственная проверка. Поскольку при подобной проверке потребуется знание перестановочных свойств четырехмерного вектора тока, приведем сначала краткий вывод соответствующих теорем.

Из выражения (2.14) для тока $j_\mu(x)$ и из (2.29) легко получить соотношение

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = ie^2 c^2 [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x') - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x)]. \quad (2.33)$$

Само собой разумеется, что все компоненты j_μ , относящиеся к двум различным точкам пространственно-подобной поверхности, коммутируют друг с другом. Особенно важно, однако, что временно-подобная компонента j_μ коммутирует со всеми компонентами тока, взятыми в той же точке. Мы докажем это, показав, что имеет место равенство

$$\int_\sigma [j_\mu(x), j_\nu(x')] d\sigma'_\nu = \frac{1}{c} [j_\mu(x), Q] = 0, \quad (2.34)$$

где σ — произвольная пространственно-подобная поверхность, которая, в частности, может проходить через точку x . Правильность последнего утверждения непосредственно следует из формул (2.23) и (2.27), поскольку

$$\int_\sigma [j_\mu(x), j_\nu(x')] d\sigma'_\nu = ie^2 c^2 [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)] = 0. \quad (2.35)$$

В действительности, соотношение (2.34) является выражением закона сохранения заряда, так как, согласно формуле (2.9) с $F = j_\nu(x)$,

$$\frac{\partial j_\nu(x)}{\partial x_\nu} = \frac{i}{\hbar c} \frac{1}{c} \int_\sigma [j_\mu(x), j_\nu(x')] d\sigma'_\mu A_\mu(x) = \frac{i}{\hbar c} [j_\mu(x), Q] A_\mu(x). \quad (2.36)$$

Для подтверждения пригодности использования условия (2.32) в качестве обобщенного дополнительного условия нужно показать, что оно совместимо с уравнениями движения для поля, уравнением движения для $\Psi[\sigma]$ и перестановочными соотношениями. Иными словами, мы должны показать, что оператор

$$\Omega[x, \sigma] = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} - \int_{\sigma} D(x-x') \frac{1}{c} j_\mu(x') d\sigma'_\mu \quad (2.37)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\square^2 \Omega[x, \sigma] = 0, \quad (2.38a)$$

$$i\hbar c \frac{\delta \Omega[x, \sigma]}{\delta \sigma(x')} + [\Omega[x, \sigma], \mathcal{H}(x')] = 0, \quad (2.38б)$$

$$[\Omega[x, \sigma], \Omega[x', \sigma]] = 0. \quad (2.38в)$$

Правильность формулы (2.38) очевидна. Относительно (2.38б) заметим, что

$$i\hbar c \frac{\delta \Omega[x, \sigma]}{\delta \sigma(x')} = i\hbar \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu} j_\mu(x'),$$

в то время как благодаря только что установленному свойству тока $j_\mu(x)$

$$[\Omega[x, \sigma], \mathcal{H}(x')] = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, A_\nu(x') \right] j_\nu(x') = -i\hbar \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu} j_\mu(x').$$

Наконец, вследствие того же самого свойства $j_\mu(x)$ имеет место равенство

$$[\Omega[x, \sigma], \Omega[x', \sigma]] = \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'_\nu} \right] = -i\hbar c \square^2 D(x-x') = 0.$$

Калибровочная инвариантность в новом представлении несколько отличается от калибровочной инвариантности в гейзенберговском представлении, поскольку в новом представлении уравнения поля частиц не содержат переменных электромагнитного поля.

При калибровочном преобразовании

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu},$$

где $\Lambda(x)$ — скалярная функция координат, удовлетворяющая уравнению

$$\square^2 \Lambda(x) = 0;$$

дополнительное условие, перестановочные соотношения и уравнения движения поля останутся неизменными, но уравнение движения для вектора $\Psi[\sigma]$ перейдет, если учесть сохранение заряда, в уравнение

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma} = \left\{ \mathcal{H}(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{c} j_\mu^-(x) \Lambda(x) \right) \right\} \Psi[\sigma]. \quad (2.39)$$

Покажем теперь, что некоторым каноническим преобразованием данному уравнению можно придать исходный вид и тем самым докажем калибровочную инвариантность наших уравнений. Действительно, этой цели удовлетворяет преобразование

$$\Psi[\sigma] \rightarrow e^{-iG[\sigma]} \Psi[\sigma], \quad (2.40)$$

где

$$G[\sigma] = \frac{1}{\hbar c} \int \frac{1}{c} j_\mu(x) \Lambda(x) d\sigma_\mu. \quad (2.41)$$

Вследствие коммутационных свойств j_μ на пространственно-подобной поверхности, уравнение движения для нового вектора состояния будет иметь вид

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} - i\hbar c e^{iG[\sigma]} \frac{\delta e^{-iG[\sigma]}}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = \left\{ \mathcal{H}(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{c} j_\mu(x) \Lambda(x) \right) \right\} \Psi[\sigma]. \quad (2.42)$$

Мы можем, далее, использовать разложение

$$e^{iG} \frac{\delta e^{-iG}}{\delta \sigma(x)} = -i \frac{\delta G}{\delta \sigma(x)} + \frac{1}{2!} \left[G, \frac{\delta G}{\delta \sigma(x)} \right] + \frac{i}{3!} \left[G, \left[G, \frac{\delta G}{\delta \sigma(x)} \right] \right] + \dots \quad (2.43)$$

для доказательства равенства

$$i\hbar c e^{iG} \frac{\delta e^{-iG}}{\delta \sigma(x)} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{c} j_\mu(x) \Lambda(x) \right) + \frac{i}{2c} [G, j_\mu(x)] \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu} + \dots = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{c} j_\mu(x) \Lambda(x) \right),$$

поскольку вследствие коммутации вектора j_μ с временно-подобной компонентой j_μ на поверхности σ не обращается в нуль только первый член данного ряда. Таким образом, мы показали пригодность в рассматриваемом случае преобразования (2.40).

При каноническом преобразовании к представлению взаимодействия изменяется вид составляющих вектора энергии — импульса, а также их значение как операторов смещения. В гейзенберговском представлении функциональная производная некоторого оператора имеет непосредственный смысл при вычислении функциональной производной от среднего значения данного оператора

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\Phi, F[\sigma] \Phi) = \left(\Phi, \frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} \Phi \right). \quad (2.44)$$

В отличие от этого в представлении взаимодействия изменение среднего значения частично обуславливается изменением вектора $\Psi[\sigma]$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\Psi[\sigma], F[\sigma] \Psi[\sigma]) &= \left(\Psi[\sigma], \frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] \right) + \\ &+ \frac{i}{\hbar c} (\Psi[\sigma], [\mathcal{H}(x), F[\sigma]] \Psi[\sigma]). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Соответственно этому, естественно определять полную функциональную производную некоторого оператора выражением

$$\frac{\Delta F[\sigma]}{\Delta \sigma(x)} = \frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} + \frac{i}{\hbar c} [\mathcal{H}(x), F[\sigma]] = U[\sigma] \frac{\partial F[\sigma]}{\partial \sigma(x)} U^{-1}[\sigma], \quad (2.46)$$

складывающимся из частной функциональной производной, выражающей явную зависимость от координат, и из кинематического изменения. Согласно данному определению,

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} (\Psi[\sigma], F[\sigma] \Psi[\sigma]) = \left(\Psi[\sigma], \frac{\Delta F[\sigma]}{\Delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] \right). \quad (2.47)$$

Если функционал имеет вид

$$F_\mu[\sigma] = \int_\sigma F(x) d\sigma_\mu,$$

то

$$\frac{\Delta F_\mu[\sigma]}{\Delta \sigma(x)} = \frac{dF(x)}{dx_\mu},$$

где

$$\frac{dF(x)}{dx_\mu} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu} + \frac{i}{\hbar c} \left[\mathcal{H}(x), \int_\sigma F(x') d\sigma'_\mu \right]$$

означает полную производную по координате. Ясно, что теорема сохранения (1.56) и уравнение движения (1.58) должны быть записаны в представлении взаимодействия следующим образом:

$$\frac{\Delta P_\mu[\sigma]}{\Delta \sigma(x)} = \frac{\delta P_\mu[\sigma]}{\delta \sigma(x)} + \frac{i}{\hbar c} [\mathcal{H}(x), P_\mu[\sigma]] = 0 \quad (2.48)$$

и

$$\frac{i}{\hbar} [F(x), P_\mu[\sigma]] = \frac{dF(x)}{dx_\mu} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu} + \frac{i}{\hbar c} \left[\mathcal{H}(x), \int_\sigma F(x') d\sigma'_\mu \right]. \quad (2.49)$$

Далее, значение частной производной $\partial F(x)/\partial x_\mu$ совпадает со значением производной при отсутствии взаимодействия и может, следовательно, вычисляться с помощью 4-вектора энергии — импульса свободных полей $P_\mu^{(0)}$ согласно равенству

$$\frac{i}{\hbar} [F(x), P_\mu^{(0)}] = \frac{\partial F(x)}{\partial x_\mu}. \quad (2.50)$$

Следовательно, имеет место равенство

$$[F(x), P_\mu[\sigma] - P_\mu^{(0)}] = \frac{1}{c} \int_{\sigma} [\mathcal{H}(x), F(x')] d\sigma'_\mu = -\frac{1}{c} \int_{\sigma} [F(x), \mathcal{H}(x')] d\sigma'_\mu; \quad (2.51)$$

здесь мы учли, что в поверхностный интеграл существенно входит только точка $x' = x$. Можно вывести соотношение

$$P_\mu[\sigma] = P_\mu^{(0)} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \mathcal{H}(x) d\sigma_\mu, \quad (2.52)$$

которое действительно согласуется с теоремой сохранения (2.48), так как

$$\frac{\Delta P_\mu[\sigma]}{\Delta \sigma(x)} = \frac{\delta P_\mu^{(0)}}{\delta \sigma(x)} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu} - \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}(x), P_\mu^{(0)}] \right) = 0. \quad (2.53)$$

Соотношение (2.52) может быть подтверждено прямым вычислением. Для соответствующей записи гейзенберговского оператора (1.64) требуется введение полных производных dA_λ/dx , и $d\psi/dx$, из которых только последняя отличается от производной по входящей явно координате. Далее, оператор $P_\nu^{(0)}$ формально идентичен с оператором (1.64), но выражается через операторы в представлении взаимодействия и их частные производные. Следовательно, имеет место равенство

$$P_\nu[\sigma] = P_\nu^{(0)} + \frac{i}{2c} \int_{\sigma} d\sigma_\mu [\bar{\psi}(x), [\mathcal{H}(x), \gamma_\mu \psi(x')]] d\sigma'_\nu. \quad (2.54)$$

Однако

$$[\mathcal{H}(x), \gamma_\mu \psi(x')] = -\frac{1}{c} [j_\lambda(x), \gamma_\mu \psi(x')] A_\lambda(x) = ie \{ \gamma_\mu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \} (\gamma_\lambda \psi(x))_\alpha A_\lambda(x), \quad (2.55)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} P_\nu[\sigma] &= P_\nu^{(0)} + \frac{ie}{2c} \int_{\sigma} d\sigma_\mu i \{ \gamma_\mu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \} \times [\bar{\psi}(x), (\gamma_\lambda \psi(x))_\alpha] A_\lambda(x) d\sigma'_\nu = \\ &= P_\nu^{(0)} + \frac{ie}{2c} \int_{\sigma} [\bar{\psi}(x) \gamma_\lambda \psi(x) - \gamma_\lambda \psi(x) \bar{\psi}(x)] A_\lambda(x) d\sigma_\nu = P_\nu^{(0)} + \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} j_\lambda(x) A_\lambda(x) d\sigma_\nu. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Равенство (2.56) совпадает с равенством (2.52).

3. Ковариантное исключение продольного поля

Назначением обобщенного условия Лорентца является исключение из электромагнитного поля световых квантов со спином, равным нулю, которые обладают рядом свойств, не имеющих физического смысла. Действительно, можно исключить скалярный потенциал и продольную часть векторного потенциала и оставить для полного описания световых волн только поперечный векторный потенциал. Недостатком подобного обычного метода является отсутствие ковариантности. В гасящем разделе мы дадим свободный от этого недостатка способ исключения продольного поля. Мы покажем, что электромагнитный вектор $A_\mu(x)$ можно заметить двумя скалярными полями $\Lambda(x)$ и $\Lambda'(x)$ и некоторым векторным полем $\hat{A}_\mu(x)$ частного вида таким образом, что в дополнительное условие будут входить только скалярные поля, в то время как уравнение движения для

вектора $\Psi[\sigma]$ будет содержать лишь $\mathcal{C}_\mu(x)$ — единственную, имеющую физическое значение часть поля. Подобное разложение удобно произвести с помощью произвольного временно-подобного единичного вектора n_μ ; $n_\mu^2 = -1$. Общепринятый метод разделения соответствует при этом частному выбору значения $n_\mu = (0, 0, 0, i)$.

Разложим вектор $A_\mu(x)$ на градиент скалярного оператора $\Delta(x)$, направленный во временном направлении, определяемом n_μ , на градиент скалярного оператора $\Delta'(x)$, направленный в пространственном направлении, перпендикулярном к n_μ , и на вектор $\mathcal{C}_\mu(x)$, у которого расходимость и проекция на n_μ равны нулю. Символически это разложение можно представить в виде

$$A_\mu(x) = n_\nu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Delta(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\nu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \Delta'(x) + \mathcal{C}_\mu(x), \quad (3.1)$$

где

$$n_\mu \mathcal{C}_\mu(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{C}_\mu(x) = 0. \quad (3.2)$$

Нашей первой задачей является построение перестановочных соотношений для введенных выше трех полей и в частности доказательство того, что эти поля кинематически независимы. Из определения следует, что

$$n_\mu A_\mu(x) = -n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(x) \quad (3.3)$$

и

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\nu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) A_\mu(x) = - \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)^2 \Delta'(x); \quad (3.4)$$

при выводе последнего равенства использовались уравнения поля

$$\square^2 \Delta = \square^2 \Delta' = \square^2 \mathcal{C}_\mu = 0. \quad (3.5)$$

Из правил перестановки для $A_\mu(x)$ следует

$$\left[n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(x), n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Delta(x') \right] = -i\hbar c D(x - x') \quad (3.6)$$

и

$$\left[\left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^2 \Delta'(x), \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right)^2 \Delta'(x') \right] = -i\hbar c \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^2 D(x - x'). \quad (3.7)$$

Последние выражения могут быть упрощены, если ввести нечетную функцию координат $\mathcal{D}(x)$, определенную посредством уравнений

$$\begin{aligned} \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^2 \mathcal{D}(x) &= D(x), \\ \square^2 \mathcal{D}(x) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Так, соотношения (3.6) и (3.7) равносильны соотношениям

$$\begin{aligned} [\Delta(x), \Delta(x')] &= i\hbar c \mathcal{D}(x - x'), \\ [\Delta'(x), \Delta'(x')] &= -i\hbar c \mathcal{D}(x - x'). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Перестановочное соотношение

$$[\Delta(x), \Delta'(x')] = 0 \quad (3.10)$$

согласуется с получающимся из формул (3.3) и (3.4) результатом, а именно с тем, что

$$\left[n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Delta(x), \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right)^2 \Delta'(x') \right] = i\hbar c n_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x'_\mu} + n_\nu n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \right) D(x - x') = 0. \quad (3.11)$$

При учете коммутативности величин Λ и Λ' из перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} & [A_\mu(x) + n_\mu n_\nu A_\nu(x), n_\lambda A_\lambda(x')] = 0, \\ & \left[A_\nu(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \Lambda'(x), \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial}{\partial x'_\nu} + n_\nu n_\sigma \frac{\partial}{\partial x'_\sigma} \right) A_\nu(x') \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

следует

$$[\Lambda(x), \mathfrak{A}_\mu(x')] = [\Lambda', \mathfrak{A}_\mu(x')] = 0. \quad (3.13)$$

Наконец, из формулы (3.1) получаем соотношение

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x-x') + i\hbar c n_\mu n_\nu \left(n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right)^2 \mathcal{D}(x-x') - \\ & - i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x'_\nu} + n_\nu n_\sigma \frac{\partial}{\partial x'_\sigma} \right) \mathcal{D}(x-x') \end{aligned} \quad (3.14)$$

или

$$\begin{aligned} & [\mathfrak{A}_\mu(x), \mathfrak{A}_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x-x') - \\ & - i\hbar c \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x'_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}(x-x'). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Следует отметить, что данные правила перестановки совместимы с условиями (3.2), накладываемыми на вектор $\mathfrak{A}_\mu(x)$.

Дополнительное условие Лоренца включает только скалярные поля, а именно, их комбинацию $\Lambda(x) - \Lambda'(x)$, так как

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu(x) = \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right)^2 (\Lambda(x) - \Lambda'(x)). \quad (3.16)$$

Уравнение (2.32) равносильно теперь уравнению

$$\left(\Lambda(x) - \Lambda'(x) - \int_{\sigma} \mathcal{D}(x-x') \frac{1}{c} j_\nu(x') d\sigma'_\nu \right) \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.17)$$

Уравнение движения для вектора $\Psi[\sigma]$ принимает вид

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = & \left\{ -\frac{1}{c} j_\mu(x) \mathfrak{A}_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{c} j_\nu(x) \Lambda'(x) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Lambda(x) - \Lambda'(x)) \right\} \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Следует ожидать, что удачное калибровочное преобразование позволит исключить величину $\Lambda'(x)$, оставив в качестве основных переменных электромагнитного поля величины $\Lambda(x) - \Lambda'(x)$ и $\mathfrak{A}_\mu(x)$. Соответственно этому произведем преобразование [ср. формулы (2.40) и (2.41)]

$$\Psi[\sigma] \rightarrow e^{-iG'[\sigma]} \Psi[\sigma], \quad (3.19)$$

где

$$G'[\sigma] = \frac{1}{\hbar c} \int_{\sigma} \frac{1}{c} j_\nu(x) \Lambda'(x) d\sigma_\nu. \quad (3.20)$$

Уравнение движения и дополнительное условие теперь имеют вид

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} + i\hbar c e^{iG'[\sigma]} \frac{\delta e^{-iG'[\sigma]}}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = & e^{iG'[\sigma]} \left\{ -\frac{1}{c} j_\mu(x) \mathfrak{A}_\mu(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1}{c} j_\nu(x) \Lambda'(x) \right) - \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Lambda(x) - \Lambda'(x)) \right\} e^{-iG'[\sigma]} \Psi[\sigma] \end{aligned} \quad (3.21)$$

и, соответственно,

$$\left(\Lambda(x) - e^{iG'[\sigma]} \Lambda'(x) e^{-iG'[\sigma]} - \int_{\sigma} \mathcal{D}(x-x') \frac{1}{c} j_\nu(x') d\sigma'_\nu \right) \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.22)$$

Рассматриваемое преобразование отличается от предыдущего калибровочного преобразования тем, что величина $\Lambda'(x)$ является оператором, подчиняющимся перестановочным соотношениям (3.9). Для выяснения появляющихся из-за этого изменений найдем сначала значение

$$e^{iG'[\sigma]} \Lambda'(x) e^{-iG'[\sigma]} = \Lambda'(x) + i[G'[\sigma], \Lambda'(x)] - \frac{1}{2!} [G'[\sigma], [G'[\sigma], \Lambda'(x)]] + \dots \quad (3.23)$$

Имеет место соотношение

$$\begin{aligned} i[G'[\sigma], \Lambda'(x)] &= -\frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma} [\Lambda'(x), \Lambda'(x')] \frac{1}{c} j_{\mu}(x') d\sigma'_{\mu} = \\ &= -\int_{\sigma} \mathcal{D}(x-x') \frac{1}{c} j_{\mu}(x') d\sigma'_{\mu}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

и, следовательно, не равны нулю только первые два члена ряда (3.23)

$$e^{iG'[\sigma]} \Lambda'(x) e^{-iG'[\sigma]} = \Lambda'(x) - \int_{\sigma} \mathcal{D}(x-x') \frac{1}{c} j_{\mu}(x') d\sigma'_{\mu}. \quad (3.25)$$

Таким образом, дополнительное условие принимает следующий простой вид:

$$(\Lambda(x) - \Lambda'(x)) \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.26)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} e^{iG'[\sigma]} \left(\frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x_{\mu}} + n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x_{\nu}} \right) e^{-iG'[\sigma]} &= \frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x_{\mu}} + n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x_{\nu}} - \\ &- \int_{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \right) \mathcal{D}(x-x') \frac{1}{c} j_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda} \end{aligned} \quad (3.27)$$

и

$$i\hbar c e^{iG'[\sigma]} \frac{\delta e^{-iG'[\sigma]}}{\delta \sigma(x)} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{1}{c} j_{\mu}(x) \Lambda'(x) \right) - \frac{1}{2} \int_{\sigma} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\mu}} \frac{1}{c} j_{\mu}(x) \frac{1}{c} j_{\nu}(x') d\sigma'_{\nu}. \quad (3.28)$$

Уравнение движения для вектора $\Psi[\sigma]$ теперь имеет вид

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left\{ -\frac{1}{c} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) - \int_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\mu}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\nu}} \right) \frac{1}{c} j_{\mu}(x) \frac{1}{c} j_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda} - \frac{1}{c} n_{\mu} j_{\mu}(x) n_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\Lambda(x) - \Lambda'(x)) \right\} \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

При помощи дополнительного условия (3.26) это уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left\{ -\frac{1}{c} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) - \int_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\mu}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\nu}} \right) \frac{1}{c} j_{\mu}(x) \frac{1}{c} j_{\lambda}(x') d\sigma'_{\lambda} \right\} \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Нам, таким образом, удалось построить уравнение движения для $\Psi[\sigma]$, уже не содержащее тех переменных электромагнитного поля, которые входят в дополнительное условие. Получающиеся при этом дополнительные члены являются, очевидно, ковариантным обобщением кулоновского взаимодействия между зарядами.

Для более отчетливого доказательства приведенного положения вместо произвольной пространственно-подобной поверхности σ следует взять плоскую по-

верхность с нормалью n_μ ; в этом случае можно утверждать, что выполняются равенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \mathcal{D}(x - x') &= 0, \\ n_\mu (x_\mu - x'_\mu) &= 0, \end{aligned} \quad (3.31)$$

что позволяет придать уравнению (3.30) следующий более простой вид:

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left\{ -\frac{1}{c} j_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x) - \frac{1}{2} \int_{\sigma} n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x - x')}{\partial x_\nu} \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right\} \Psi[\sigma]. \quad (3.32)$$

Для доказательства правильности (3.31) достаточно проверка этого соотношения в какой-либо частной системе координат. Всегда можно построить такую систему отсчета, чтобы в ней нормаль к некоторой пространственно-подобной плоскости была направлена вдоль временной оси; иными словами, в этой системе отсчета $n_\mu = (0, 0, 0, i)$; равенства (3.31) тогда означают, что пространственные производные от функции $\mathcal{D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ при $t = t'$ равны нулю. Это условие будет выполняться, если выполняется равенство $\mathcal{D}(\mathbf{r}, 0) = 0$ для всех значений \mathbf{r} , т. е. если $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ есть четная функция t . Далее, в данной системе координат (3.8) принимает вид

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = \nabla^2 \mathcal{D}(\mathbf{r}, t) = D(\mathbf{r}, t), \quad (3.33)$$

так что, поскольку по формуле (2.17) $D(\mathbf{r}, t)$ — четная функция координат, требуемое свойство функции $\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)$ можно считать доказанным. Наконец, отметим, что в избранной частной системе координат имеет место равенство

$$\begin{aligned} n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{D}(x - x') &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0), \\ n_\mu (x_\mu - x'_\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

и, согласно определению (2.17), равенство

$$\nabla^2 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} D(\mathbf{r}, 0) = -\delta(\mathbf{r}). \quad (3.35)$$

Из (3.35) следует

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}(\mathbf{r}, 0) = \frac{1}{4\pi r}; \quad (3.36)$$

ковариантным выражением последнего соотношения является формула

$$\begin{aligned} n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{D}(x - x') &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{[(x_\mu - x'_\mu)^2]^{3/2}}, \\ n_\mu (x_\mu - x'_\mu) &= 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Четырехмерный вектор энергии — импульса изменится при унитарном преобразовании (3.19) следующим образом:

$$P_\nu[\sigma] \rightarrow e^{iG'[\sigma]} P_\nu[\sigma] e^{-iG'[\sigma]}. \quad (3.38)$$

Указываем без доказательства следующие преобразования, используемые при нахождении нового значения оператора $P_\nu[\sigma]$:

$$\begin{aligned} e^{iG'[\sigma]} A_\mu(x) e^{-iG'[\sigma]} &= A_\mu(x) + \int_{\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \mathcal{D}(x - x') \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda, \\ e^{iG'[\sigma]} \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_\mu \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \right] e^{-iG'[\sigma]} &= \\ = \frac{1}{2} \int_{\sigma} d\sigma_\mu \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \right] + \frac{1}{\hbar c} \int_{\sigma} \left[d\sigma_\nu \frac{1}{c} j_\lambda \frac{\partial \Lambda'}{\partial x'_\lambda} - d\sigma_\lambda \frac{1}{c} j_\nu \frac{\partial \Lambda'}{\partial x_\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

В силу дополнительного условия (3.26) можно написать

$$A_\mu(x) \Psi[\sigma] = \left(\bar{A}_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda'(x)}{\partial x_\mu} \right) \Psi[\sigma] \quad (3.40)$$

Отсюда непосредственно получается

$$\begin{aligned} P_\nu[\sigma] = & \frac{1}{2c} \int d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\sigma} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{\hbar}{2} \int d\sigma_\mu \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \right] + \frac{1}{c} \int d\sigma_\mu \left[\frac{1}{c} j_\mu(x) \bar{A}_\mu(x) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \int d\sigma'_\nu n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x'_\nu} - \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right]. \quad (3.41) \end{aligned}$$

Соотношение (3.41) может рассматриваться не как следствие дополнительного условия, а как операторное равенство, если условиться, что оператор $\Lambda - \Lambda'$ не должен больше появляться в теории.

В заключение настоящего раздела заметим, что производные от \bar{A}_λ в формуле (3.41) можно заменить на напряженности поля

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{A}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \bar{A}_\mu, \quad (3.42)$$

в результате чего получается

$$\begin{aligned} P_\nu[\sigma] = & \frac{1}{2c} \int d\sigma \left[\mathfrak{F}_{\mu\lambda} \mathfrak{F}_{\nu\lambda} + \mathfrak{F}_{\nu\lambda} \mathfrak{F}_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \mathfrak{F}_{\lambda\sigma}^2 \right] + \frac{\hbar}{2} \int d\sigma_\mu \left[\bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \bar{\psi} \gamma_\mu \right] + \\ & + \frac{1}{c} \int d\sigma_\mu \left[\frac{1}{c} j_\mu(x) \bar{A}_\mu(x) + \frac{1}{2} \int d\sigma'_\nu n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x'_\nu} - \frac{1}{c} n_\mu j_\mu(x) \frac{1}{c} j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right]. \quad (3.43) \end{aligned}$$

Для подтверждения этого достаточно указать, что [ср. (1.32)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\sigma} \right)^2 = & \mathfrak{F}_{\mu\lambda} \mathfrak{F}_{\nu\lambda} + \mathfrak{F}_{\nu\lambda} \mathfrak{F}_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \mathfrak{F}_{\lambda\sigma}^2 + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\bar{A}_\nu \mathfrak{F}_{\mu\lambda} + \mathfrak{F}_{\mu\lambda} \bar{A}_\nu) + \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \bar{A}_\sigma}{\partial x_\lambda}. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Из леммы (1.58) и антисимметрии тензора $\mathfrak{F}_{\mu\lambda}$ непосредственно следует

$$\int d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\bar{A}_\nu \mathfrak{F}_{\mu\lambda} + \mathfrak{F}_{\mu\lambda} \bar{A}_\nu) = 0;$$

учитывая, что дивергенция \bar{A}_μ равна нулю, из леммы (1.58) получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} & \int d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \bar{A}_\sigma}{\partial x_\lambda} \right] = \\ = & \frac{1}{2} \int d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left[\bar{A}_\mu \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\lambda}{\partial x_\nu} \bar{A}_\mu + \bar{A}_\lambda \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial x_\nu} \bar{A}_\lambda \right] - \\ & - \int d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\bar{A}_\lambda \bar{A}_\sigma) = \frac{1}{2} \int d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} (\bar{A}_\mu \bar{A}_\lambda + \bar{A}_\lambda \bar{A}_\mu) - \\ & - \int d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (\bar{A}_\lambda \bar{A}_\sigma) = 0. \quad (3.45) \end{aligned}$$

4. Инвариантный оператор столкновения

В то время как взаимодействие полей с их вакуумными флуктуациями удобно рассматривать как видоизменение свойств свободных полей, появление остальных типов взаимодействий обычно лучше всего связывать с переходами между состояниями свободных полей. Мы закончим эту часть кратким рассмотрением ковариантного способа описания подобных переходов. Изменения состояния отдельных полей, вызванные их взаимодействием, описываются уравнением движения (2.6) для вектора состояния $\Psi[\sigma]$. Для описания столкновений между частицами, соответствующими квантованным полям, достаточно ответить на следующий вопрос: задан вектор состояния на поверхности σ_1 , каков будет вектор состояния на поверхности σ_2 в пределе, когда поверхности σ_1 и σ_2 отодвигаются в бесконечно прошлое и соответственно в бесконечное будущее? В данном пределе не требуется точного описания этих двух поверхностей и мы их просто будем обозначать символами $-\infty$ и $+\infty$. Для получения вектора состояния на некоторой поверхности σ из вектора состояния на исходной поверхности σ_1 будет применяться унитарный оператор

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma, \sigma_1] \Psi[\sigma_1], \quad (4.1)$$

который следует определить из уравнения движения

$$i\hbar c \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} U[\sigma, \sigma_1] = \mathcal{H}(x) U[\sigma, \sigma_1] \quad (4.2)$$

и начального условия

$$U[\sigma_1, \sigma_1] = 1. \quad (4.3)$$

Функциональное дифференциальное уравнение (4.2) удобно заменить функциональным интегральным уравнением, включающим начальное условие (4.3),

$$U[\sigma, \sigma_1] = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_1}^{\sigma} \mathcal{H}(x') U[\sigma', \sigma_1] d\omega'; \quad (4.4)$$

здесь интеграл распространен по объему между поверхностями σ_1 и σ_2 . В частности,

$$U[\sigma_2, \sigma_1] = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \mathcal{H}(x) U[\sigma, \sigma_1] d\omega. \quad (4.5)$$

В предельном случае поверхностей $\pm\infty$ это интегральное уравнение превратится в

$$U[\sigma, -\infty] = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' \quad (4.6)$$

и

$$S = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x) U(\sigma, -\infty) d\omega. \quad (4.7)$$

Здесь оператор

$$S = U[\infty, -\infty], \quad (4.8)$$

который мы назовем оператором столкновения, определяет полное, вызванное взаимодействием, изменение в состоянии системы

$$\Psi[\infty] = S\Psi[-\infty]. \quad (4.9)$$

Среднее значение некоторой физической величины F в конечном состоянии теперь может быть вычислено при заданном начальном состоянии

$$\langle \Psi[\infty], F\Psi[\infty] \rangle = \langle \Psi[-\infty], S^{-1}FS\Psi[-\infty] \rangle. \quad (4.10)$$

Из последнего соотношения можно получить вероятности различных переходов.

Задача определения унитарного оператора столкновения может быть сведена к задаче определения некоторого эрмитового оператора K , который мы назовем оператором взаимодействия. При этом мы будем следовать методу классической электродинамики, в котором вместо одних запаздывающих потенциалов используется сумма и разность опережающих и запаздывающих потенциалов. Интегральное уравнение (4.6) может быть переписано в виде

$$U[\sigma, -\infty] + \frac{i}{2\hbar c} \left[\int_{-\infty}^{\sigma} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' - \int_{\sigma}^{\infty} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' \right] = \\ = 1 - \frac{i}{2\hbar c} \left[\int_{-\infty}^{\sigma} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' + \int_{\sigma}^{\infty} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' \right] \quad (4.11)$$

или в виде

$$U[\sigma, -\infty] + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' = \\ = 1 - \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega', \quad (4.12)$$

где $\varepsilon[\sigma, \sigma'] = 1$, если поверхность σ' предшествует поверхности σ , и $\varepsilon[\sigma, \sigma'] = -1$ в противном случае. Удобно ввести функционал $V[\sigma]$, определяемый равенством

$$U[\sigma, -\infty] = V[\sigma] \left(1 - \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') U[\sigma', -\infty] d\omega' \right) = V[\sigma] \frac{1}{2} (1 + S), \quad (4.13)$$

так что

$$V[\sigma] + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega' = 1. \quad (4.14)$$

Вычисляя оператор S по формулам (4.7) и (4.13), находим

$$i \frac{S-1}{S+1} = \frac{1}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x) V[\sigma] d\omega = K, \quad (4.15)$$

или

$$S = \frac{1-iK}{1+iK}. \quad (4.16)$$

Хотя эрмитовость оператора K непосредственно следует из унитарности оператора S , все же поучительно привести также непосредственное доказательство. Интегральному уравнению (4.14) для оператора $V[\sigma]$ соответствует эрмитово-сопряженное уравнение

$$V^+[\sigma] + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' V^+[\sigma'] \mathcal{H}(x') \varepsilon[\sigma', \sigma] = 1; \quad (4.17)$$

здесь мы использовали очевидное соотношение

$$\varepsilon[\sigma, \sigma'] = -\varepsilon[\sigma', \sigma] \quad (4.18)$$

и эрмитовость оператора $\mathcal{H}(x)$. Теперь умножим уравнение (4.14) слева на $V^+[\sigma] \mathcal{H}(x)$, а уравнение (4.17) справа на $\mathcal{H}(x) V[\sigma]$ и проинтегрируем оба

соотношения по x по всему четырехмерному пространству. Сравнение получающихся формул дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) V[\sigma] d\omega + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega d\omega' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x) V[\sigma] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) d\omega \end{aligned} \quad (4.19)$$

или

$$K = K^+ \quad (4.20)$$

Следует отметить важное свойство стационарности оператора взаимодействия K . Записав соотношение (4.19) в виде

$$\begin{aligned} 2\hbar c \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) V[\sigma] d\omega + i \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega d\omega' = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) d\omega K^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega', \end{aligned} \quad (4.21)$$

мы получим формулу для оператора K , которая однородна по $V[\sigma]$ и $V^+[\sigma]$ и стационарна по отношению к малым вариациям $V[\sigma]$ и $V^+[\sigma]$. Произведя подобную вариацию, получим

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) d\omega K^{-1} \delta K K^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x) V[\sigma] d\omega = \\ = 2\hbar c \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta V^+[\sigma] \mathcal{H}(x) \left[V^+[\sigma] + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\hbar c} K^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') V[\sigma] d\omega' \right] + 2\hbar c \int_{-\infty}^{\infty} \left[V^+[\sigma] + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma'] \mathcal{H}(x') \varepsilon[\sigma', \sigma] d\omega' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} V^+[\sigma'] \mathcal{H}(x') d\omega' K^{-1} \right] \mathcal{H}(x) \delta V[\sigma] d\omega. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Очевидно, если оператор $V[\sigma]$ удовлетворяет уравнениям (4.14) и (4.15), а также эрмитово-сопряженным уравнениям для $V^+[\sigma]$, то $\delta K = 0$. Наоборот, если значение K стационарно при произвольных вариациях, то величины в скобках в правой части (4.22) должны равняться нулю. Легко видеть, что функционал

$$V'[\sigma] = V[\sigma] \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x') V[\sigma'] d\omega' \right)^{-1} 2\hbar c K \quad (4.23)$$

подчиняется уравнениям (4.14) и (4.15), в то время как $V'^+[\sigma]$ подчиняется соответствующим эрмитово-сопряженным уравнениям. Подобный тип вариационного принципа, широко использовавшийся при рассмотрении задач рассеяния [12], будет детально рассмотрен в соответствующем месте.

В заключение заметим, что из представления S в виде интеграла, распространенного по всему четырехмерному пространству, следует независимость S от смещения координатной системы и тем самым коммутация S с оператором $P_\mu^{(0)}$ [ср. формулу (2.56)]

$$[S, P_\mu^{(0)}] = 0; \quad (4.24)$$

это обстоятельство является выражением закона сохранения энергии — импульса для процессов столкновения, так как согласно (4.10) среднее значение $P_\mu^{(0)}$ не изменяется в течение столкновения при произвольном начальном состоянии.

ЧАСТЬ II

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА И СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

Развитая в части I ковариантная формулировка квантовой электродинамики применяется здесь для рассмотрения двух основных проблем — поляризации вакуума и собственной энергии электрона и фотона.

В первом разделе вакуум свободного электромагнитного поля и вакуум свободного поля частиц определяются ковариантным образом как состояние, в котором собственное значение каждой временной компоненты четырехмерного вектора энергии — импульса имеет абсолютный минимум. Отмечается, что это определение должно быть совместимым с тем требованием, чтобы средние вакуумные значения некоторой физической величины в различных системах координат не только были связаны ковариантным образом друг с другом, но и совпадали, поскольку влияние вакуума не зависит от системы координат. Для построения соответствующего способа описания вакуумного вектора состояния вводится ковариантное разложение операторов поля на компоненты с положительной и отрицательной частотой, а также разбираются свойства взаимодействующих полей. Показывается, что при действии на вектор состояния электромагнитного вакуума положительночастотной частью разложения поперечного четырехмерного потенциала получается нуль, в то время как вектор состояния вакуума частиц дает нуль при действии на него положительно-частотной частью разложения самого дираковского спинора, так и зрядно сопряженного спинора. Определенные таким образом свойства вакуумного вектора состояния используются при подсчете вакуумных средних значений некоторых квадратичных по полю величин, в частности, тензоров энергии — импульса свободных электромагнитного поля и поля частиц, а также четырехмерного вектора тока. Доказывается, что электромагнитный тензор энергии — импульса и вектора тока должны обращаться в вакууме в нуль, в то время как тензор энергии — импульса поля частиц обращается в вакууме в нуль только при добавлении некоторой величины, пропорциональной единичному тензору.

Во втором разделе рассматривается возбуждение тока в вакууме при наличии внешнего электромагнитного поля. Предполагается, что внешнее поле не приводит к образованию реальных электронно-позитронных пар; это означает, что разбираются только явления виртуального порождения пар. Данное ограничение вводится посредством использования условия, что установление и последующее выключение внешнего поля не должно вызывать изменений в состоянии поля частиц. В общем виде доказывается, что ток, возбужденный в заданной точке пространства — времени, определяется внешним током в окрестности рассматриваемой точки и не зависит от электромагнитных потенциалов. Этот калибровочно-инвариантный результат показывает, что распространяющаяся на большом расстоянии от своего источника световая волна не вызывает тока в вакууме и, следовательно, не подвергается никаким воздействиям при своем прохождении через пространство. Отсюда следует отсутствие собственной энергии у светового кванта. Возбуждаемый в какой-либо точке ток распадается на две части: логарифмически расходящуюся часть, пропорциональную внешнему току в рассматриваемой точке и связанную с ненаблюдаемой перенормировкой заряда, и некоторую сложную конечную часть, обладающую физическим смыслом. Последняя величина соответствует результатам предыдущих исследований.

В третьем разделе рассматривается изменение свойств поля частиц, возникающее вследствие взаимодействия с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Анализ производится двумя различными способами; в первом случае используется полный электромагнитный потенциал с дополнительным условием Лоренца, во втором случае в рассмотрении используется поперечная часть потенциала и исключаются переменные, входящие в дополнительное условие. Отмечается, что связь между полями не приводит к каким-либо реальным процессам в эффектах первого порядка. Соответственно этому для вектора состояния строится новое уравнение движения, в которое входит вместо члена взаимодействия первого порядка порождаемое этим членом взаимодействие второго порядка. Последнее уравнение описывает самодействие отдельных частиц и световых квантов, взаимодействие различных частиц, а также связь между частицами и световыми квантами, обуславливающую эффекты, подобные комптоновскому рассеянию и двухфотонной аннигиляции. Из сравнения двух приведенных методов делается вывод, что при решении задач с виртуальными световыми квантами раздельное рассмотрение продольного и поперечного полей является излишним усложнением. Доказывается, что собственная энергия светового кванта равна нулю, в то время как собственная энергия частицы имеет предсказанный заранее вид и приводит к изменению массы покоя. В согласии с предыдущими вычислениями собственная энергия частицы логарифмически расходится. Для доказательства правильности отождествления собственной энергии с изменением собственной массы показывается, что удаление члена с собственной энергией из уравнения движения вектора состояния приводит к согласующемуся с указанным отождествлением изменению уравнений движения поля частиц. Наконец, дается подтверждение того, что изменения энергии и импульса, вызванные самодействием, полностью сводятся к добавлению электромагнит-

ной собственной массы к механической собственной массе, т. е. полностью сводятся к ненаблюдаемой перенормировке массы.

В приложении приводится построение различных инвариантных функций для электромагнитного поля и поля частиц.

Первая часть настоящей работы ¹⁾ была посвящена формулировке квантовой электродинамики, обладающей следующими основными особенностями — явной ковариантностью по отношению к преобразованиям Лоренца и наличием естественного разграничения между свойствами свободных полей и эффектами, вызываемыми взаимодействием полей. В настоящей части мы рассмотрим простейшие примеры вызываемых взаимодействием эффектов — явление поляризации вакуума и собственные энергии фотона и электрона, появляющиеся вследствие связи между полем частиц и электромагнитным полем и их вакуумными флуктуациями. Прежде всего необходимо дать ковариантное определение вакуума свободных полей.

1. Определение вакуума

Для определения вакуума электромагнитного поля удобно ввести два вспомогательных векторных поля, подчиняющихся тому же дифференциальному уравнению, что и потенциал $A_\mu(x)$:

$$A_\mu^{(+)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} A_\mu(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.1a)$$

и

$$A_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} A_\mu(x + \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}; \quad (1.1b)$$

здесь интегрирование по контуру C_+ производится от $-\infty$ до $+\infty$ с обходом снизу особенности при $\tau = 0$. При этом предполагается, что выполнено следующее ковариантное условие: $\varepsilon_\mu^2 < 0$, т. е. вектор ε_μ является временно-подобным вектором и $\varepsilon_0 = \frac{1}{i} \cdot \varepsilon_4 > 0$. Поля $A_\mu^{(+)}(x)$ и $A_\mu^{(-)}(x)$ не будут тогда зависеть от частного выбора вектора ε_μ . Простую связь между тремя полями A_μ , $A_\mu^{(+)}$ и $A_\mu^{(-)}$ легко получить, переписав соотношение (1.1b) в виде

$$A_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} A_\mu(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (1.2)$$

где контур C_- проходит от $+\infty$ до $-\infty$, обходя особенность при $\tau = 0$ сверху. Сумма контуров C_+ и C_- является, очевидно, замкнутым контуром, внутри которого расположена особенность при $\tau = 0$; следовательно,

$$A_\mu^{(+)}(x) + A_\mu^{(-)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint A_\mu(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} = A_\mu(x). \quad (1.3)$$

Выбрав C_+ и C_- в виде контуров, совпадающих с действительной осью всюду кроме окрестности начала координат, и обходящих это начало полукругом бесконечно малого радиуса, получим из формул (1.1a) и (1.2)

$$\begin{aligned} A_\mu^{(+)}(x) &= \frac{1}{2} [A_\mu(x) - iA_\mu^{(1)}(x)], \\ A_\mu^{(-)}(x) &= \frac{1}{2} [A_\mu(x) + iA_\mu^{(1)}(x)], \end{aligned} \quad (1.4)$$

¹⁾ В дальнейшем ссылки на эту часть будут обозначаться через I; ссылки на приводимые там уравнения будут иметь, например, вид (I. 2. 3). — *Прим. авт.*

где

$$A_{\mu}^{(1)}(x) = i[A_{\mu}^{(+)}(x) - A_{\mu}^{(-)}(x)] = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\mu}(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}; \quad (1.5)$$

символ P означает, что берется главное значение интеграла. Следует указать, что величины $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ и $A_0^{(1)} = (1/i)A_4^{(1)}$ в связи с эрмитовостью соответствующих компонент $A_{\mu}(x)$ являются эрмитовыми операторами. Соответственно этому $A_{\mu}^{(-)}$ представляет собой оператор, эрмитово-сопряженный с $A_{\mu}^{(+)}$, где $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Значение введенных полей легче всего истолковать с помощью разложения Фурье для $A_{\mu}(x)$:

$$A_{\mu}(x) = \int A_{\mu}(k) \delta(k_{\lambda}^2) \exp(ik_{\lambda}x_{\mu})(dk), \quad (1.6)$$

где $(dk) = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$ — элемент четырехмерного объема в пространстве волновых чисел, или k -пространстве. Дельта-функция $\delta(k_{\lambda}^2)$ гарантирует выполнение волнового уравнения (1.2.11) при произвольных амплитудах Фурье $A_{\mu}(k)$. Согласно определениям (1.1a) и (1.1б),

$$A_{\mu}^{(+)}(x) = \int A_{\mu}(k) \delta(k_{\lambda}^2) \exp(ik_{\lambda}x_{\mu}) dk \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \exp(-ik_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (1.7)$$

$$A_{\mu}^{(-)}(x) = \int A_{\mu}(k) \delta(k_{\lambda}^2) \exp(ik_{\lambda}x_{\mu}) dk \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \exp(ik_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Однако имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \exp(-ik_{\lambda}\varepsilon_{\lambda}\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} 1, & -k_{\lambda}\varepsilon_{\lambda} > 0, \\ 0, & -k_{\lambda}\varepsilon_{\lambda} < 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

откуда следует

$$A_{\mu}^{(+)}(x) = \int_{-k_{\lambda}\varepsilon_{\lambda} > 0} A_{\mu}(k) \delta(k_{\lambda}^2) \exp(ik_{\lambda}x_{\mu}) dk \quad (1.9)$$

и

$$A_{\mu}^{(-)}(x) = \int_{-k_{\lambda}\varepsilon_{\lambda} < 0} A_{\mu}(k) \delta(k_{\lambda}^2) \exp(ik_{\lambda}x_{\mu}) dk. \quad (1.10)$$

Две области в пространстве волновых чисел, отличающиеся знаком величины $-k_{\mu}\varepsilon_{\mu}$, действительно не зависят от выбора вектора ε_{μ} при условии, что ε_{μ} является временно-подобным вектором с заданным знаком ε_0 . В самом деле, достаточно учесть, что

$$-k_{\mu}\varepsilon_{\mu} = k_0\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\mathbf{k}\varepsilon}{k_0\varepsilon_0}\right) \quad (1.11)$$

и

$$\left| \frac{\mathbf{k}\varepsilon}{k_0\varepsilon_0} \right| < \frac{|\mathbf{k}|}{k_0} \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon_0|} < 1. \quad (1.12)$$

В последнем неравенстве предполагается, что ε_{μ} — временно-подобный вектор и что k_{μ} — либо изотропный, либо временно-подобный вектор. Соответственно этому знак $-k_{\mu}\varepsilon_{\mu}$ определяется знаком величины $k_0\varepsilon_0$ и, если ε_0 считать положительным, что является инвариантным условием, то знак $-k_{\mu}\varepsilon_{\mu}$ совпадает с алгебраическим знаком k_0 . Теперь очевидно, что если потенциал $A_{\mu}(x)$ представляет собой произвольную суперпозицию плоских волн

$$\exp(ik_{\mu}x_{\mu}) = \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - k_0x_0)],$$

то функции $A_\mu^{(+)}(x)$ и $A_\mu^{(-)}(x)$ состоят из частей $A_\mu(x)$, относящихся соответственно к положительным и отрицательным частотам, при этом данное разделение является инвариантным. Функция $A_\mu^{(1)}(x)$ содержит как относящиеся к положительным частотам, так и относящиеся к отрицательным частотам составляющие $A_\mu(x)$, только первая из них умножается на i , а вторая — на $-i$.

Можно без труда составить перестановочные соотношения вспомогательных полей с полем $A_\mu(x)$. Согласно определениям и соотношению (1, 2.28), имеют место соотношения

$$\begin{aligned} [A_\mu^{(+)}(x), A_\nu(x')] &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(+)}(x-x'), \\ [A_\mu^{(-)}(x), A_\nu(x')] &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(-)}(x-x'), \\ [A_\mu^{(1)}(x), A_\nu(x')] &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x-x'). \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} D^{(+)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} D(x-\varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \\ D^{(-)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} D(x-\varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \\ D^{(1)}(x) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-\varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Для введенных D -функций выполняются, очевидно, соотношения, аналогичные соотношениям (1.3) и (1.4):

$$\begin{aligned} D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x) &= D(x), \\ D^{(+)}(x) &= \frac{1}{2} [D(x) - iD^{(1)}(x)], \\ D^{(-)}(x) &= \frac{1}{2} [D(x) + iD^{(1)}(x)]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Кроме того, функция $D^{(1)}(x)$, подобно $D(x)$, действительна, а функция $D^{(-)}(x)$ комплексно сопряжена с $D^{(+)}(x)$. Далее, из нечетности функций $D(x)$ следует, что $D^{(1)}(x)$ является четной функцией координат:

$$D^{(1)}(-x) = D^{(1)}(x), \quad (1.16)$$

поскольку

$$D^{(-)}(x) = -D^{(+)}(-x). \quad (1.17)$$

Наконец, очевидно, выполняются дифференциальные уравнения

$$\square^2 D^{(+)}(x) = \square^2 D^{(-)}(x) = \square^2 D^{(1)}(x) = 0. \quad (1.18)$$

Важнейшие из перестановочных свойств дополнительных полей заключаются в том, что они удовлетворяют соотношениям

$$[A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] = [A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(-)}(x')] = 0, \quad (1.19)$$

что можно проверить прямым вычислением

$$\begin{aligned} [A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_+} D(x-x'-\varepsilon(\tau-\tau')) \frac{d\tau}{\tau} \frac{d\tau'}{\tau'} = \\ &= i\hbar c \delta_{\mu\nu} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha e^{i\alpha\lambda} D(x-x'-\varepsilon\lambda) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} e^{i\alpha\tau} \frac{d\tau}{\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} e^{-i\alpha\tau'} \frac{d\tau'}{\tau'} = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Основными этапами такого вычисления являются представление $D(x-\varepsilon\tau)$ как функции τ в виде интеграла Фурье и использование того обстоятельства

[см. формулу (1.8)], что два получающихся контурных интеграла одновременно отличаются от нуля только в изолированной точке $\alpha = 0$. Можно, с другой стороны, отметить, что неравенство приведенного коммутатора нулю привело бы к противоречию между условием, что величина $A_\mu^{(+)}(x)$ содержит только положительные частоты, и тем физическим требованием, что коммутатор должен зависеть только от интервала между двумя точками x_μ и x'_μ . Соответствующее доказательство для величины $A_\mu^{(-)}$ совершенно аналогично. Перестановочные соотношения между величинами $A_\mu^{(+)}(x)$ и $A_\nu^{(-)}(x')$ могут быть также непосредственно найдены аналогичным (1.20) образом, однако для их получения достаточно сравнения формул (1.19) и (1.13), откуда следует

$$[A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(-)}(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(+)}(x - x') \quad (1.21)$$

или

$$[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(-)}(x - x'). \quad (1.22)$$

Нужно также отметить, что благодаря тождеству

$$\begin{aligned} [A_\mu^{(1)}(x), A_\nu^{(1)}(x')] - [A_\mu(x), A_\nu(x')] = \\ = -2[A_\mu^{(+)}(x), A_\nu^{(+)}(x')] - 2[A_\mu^{(-)}(x), A_\nu^{(-)}(x')] \end{aligned} \quad (1.23)$$

из перестановочных соотношений (1.19) вытекает

$$[A_\mu^{(1)}(x), A_\nu^{(1)}(x')] = [A_\mu(x), A_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D(x - x'). \quad (1.24)$$

Полностью аналогичным способом можно определить соответствующие сингулярные функции для $\mathcal{A}_\mu(x)$, $\Delta(x)$ и $\Lambda'(x)$. Не останавливаясь на этих тривиальных рассуждениях, приводим только определения

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^{(+)}(x) &= \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\mu(x) - i\mathcal{A}_\mu^{(1)}(x)], \\ \mathcal{A}_\mu^{(-)}(x) &= \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\mu(x) + i\mathcal{A}_\mu^{(1)}(x)] \end{aligned} \quad (1.25)$$

и перестановочные соотношения

$$[\mathcal{A}_\mu^{(+)}(x), \mathcal{A}_\nu^{(+)}(x')] = [\mathcal{A}_\mu^{(-)}(x), \mathcal{A}_\nu^{(-)}(x')] = 0, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}_\mu^{(+)}(x), \mathcal{A}_\nu(x')] = i\hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(+)}(x - x') - \\ &- i\hbar c \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right] D^{(+)}(x - x'). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Мы будем рассматривать вакуум свободного электромагнитного поля как такое состояние, в котором собственное значение энергии или, точнее, любая временно-подобная компонента четырехмерного вектора энергии — импульса имеет абсолютный минимум. Данное определение должно также согласоваться с тем очевидным условием, что усредненные по вакууму значения физических величин в различных системах координат должны не только получаться друг из друга ковариантным образом, но и совпадать, так как свойства вакуума не зависят от системы отсчета. Для использования приведенного определения вакуума, применим формулу (I.1.38) к положительно-частотной составляющей вектора $\mathcal{A}_\mu(x)$, соответствующего физической существенной части электромагнитного поля:

$$\mathcal{A}_\mu^{(+)}(x) P_\nu - P_\nu \mathcal{A}_\mu^{(+)}(x) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu^{(+)}(x). \quad (1.28)$$

При переходе к отдельным компонентам Фурье $\mathcal{A}_\mu^{(+)}(x)$ последнее соотношение приобретает вид

$$\mathcal{A}_\mu^{(+)}(k) P_\nu - P_\nu \mathcal{A}_\mu^{(+)}(k) = \hbar k_\nu \mathcal{A}_\mu^{(+)}(k) \quad (1.29)$$

и переходит, далее, при умножении на временно-подобный единичный вектор ε , с компонентной $\varepsilon_0 > 0$ в соотношение

$$\alpha_\mu^{(+)}(k) W - W \alpha_\mu^{(+)}(k) = \hbar \omega \alpha_\mu^{(+)}(k). \quad (1.30)$$

Здесь величины

$$W = -\varepsilon_\nu P_\nu, \quad \omega = -\varepsilon_\nu k_\nu \quad (1.31)$$

являются инвариантными выражениями энергии и частоты в произвольной координатной системе, задаваемой вектором ε . Мы можем теперь подействовать обеими сторонами равенства (1.30) на вектор состояния Ψ_0 , представляющий вакуум электромагнитного поля; при этом получится равенство

$$W [\alpha_\mu^{(+)}(k) \Psi_0] = (W_0 - \hbar \omega) [\alpha_\mu^{(+)}(k) \Psi_0], \quad (1.32)$$

где W_0 — собственное значение оператора W для состояния, описываемого Ψ_0 . Из этого результата вытекает, что состоянию, описываемому функцией $\alpha_\mu^{(+)}(k) \Psi_0$, соответствует собственное значение W , равное $W_0 - \hbar \omega$. Поскольку из определения $\alpha_\mu^{(+)}(k)$ следует, что величина ω положительна, мы, таким образом, получаем состояние с энергией, меньшей чем энергия вакуума. Это противоречие может быть разрешено только, если выполняется условие

$$\alpha_\mu^{(+)}(k) \Psi_0 = 0. \quad (1.33)$$

Условие (1.33) может служить определением вектора Ψ_0 . Так как это условие выполняется для всех значений k , то можно написать

$$\alpha_\mu^{(+)}(x) \Psi_0 = 0. \quad (1.34)$$

Соотношение (1.34) является непротиворечивым в связи с коммутационными свойствами величины $\alpha_\mu^{(+)}$.

Полученное определение вакуума можно использовать для нахождения средних вакуумных значений выражений, квадратичных в переменных поля; основной из величин последнего рода является величина

$$\{\alpha_\mu(x), \alpha_\nu(x')\} = \alpha_\mu(x) \alpha_\nu(x') + \alpha_\nu(x') \alpha_\mu(x).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \{\alpha_\mu(x), \alpha_\nu(x')\} &= (2\alpha_\mu^{(-)}(x) - i\alpha_\mu^{(1)}(x)) \alpha_\nu(x') + \\ &+ \alpha_\nu(x') (2\alpha_\mu^{(+)}(x) + i\alpha_\mu^{(1)}(x)) = -i[\alpha_\mu^{(1)}(x), \alpha_\nu(x')] + \\ &+ 2(\alpha_\mu^{(-)}(x) \alpha_\nu(x') + \alpha_\nu(x') \alpha_\mu^{(+)}(x)); \end{aligned} \quad (1.35)$$

здесь первое слагаемое является известным коммутатором, а среднее по вакууму значение второго слагаемого равно нулю. Таким образом, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \langle \alpha_\mu^{(-)}(x) \alpha_\nu(x') + \alpha_\nu(x') \alpha_\mu^{(+)}(x) \rangle_0 &= \\ &= \langle \Psi_0 (\alpha_\mu^{(-)}(x), \alpha_\nu(x') + \alpha_\nu(x') \alpha_\mu^{(+)}(x)) \Psi_0 \rangle = \\ &= \pm \langle \alpha_\mu^{(+)}(x) \Psi_0, \alpha_\nu(x') \Psi_0 \rangle + \langle \Psi_0, \alpha_\nu(x') \alpha_\mu^{(+)}(x) \Psi_0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь учтено, что с точностью до знака при $\mu = 4$ величина $\alpha_\mu^{(+)}$ эрмитово сопряжена с $\alpha_\mu^{(-)}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle \{\alpha_\mu(x), \alpha_\nu(x')\} \rangle_0 &= \hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x - x') - \\ &- \hbar c \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right] \mathcal{D}^{(1)}(x - x'). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Исходя из этого результата, можно вычислить

$$\begin{aligned} \langle \{\mathcal{F}_{\mu\lambda}(x), \mathcal{F}_{\nu\sigma}(x')\} \rangle_0 &= \hbar c \left(\delta_{\lambda\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \right. \\ &\left. - \delta_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} \right) D^{(1)}(x - x'), \end{aligned} \quad (1.38)$$

откуда в двух частных случаях получаются соотношения

$$\begin{aligned} \langle \{\mathcal{F}_{\mu\lambda}(x), \mathcal{F}_{\nu\lambda}(x')\} \rangle_0 &= -\hbar c \left(2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \delta_{\mu\nu} \square^2 \right) D^{(1)}(x-x') = \\ &= -2\hbar c \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} D^{(1)}(x-x') \end{aligned} \quad (1.39)$$

и

$$\langle \{\mathcal{F}_{\lambda\sigma}(x), \mathcal{F}_{\lambda\sigma}(x')\} \rangle_0 = -2\hbar c \square^2 D'(x-x') = 0. \quad (1.40)$$

В качестве простого примера использования полученных результатов можно рассмотреть вычисление вакуумных средних значений механических величин, составляющих электромагнитный тензор энергии—импульса

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \{\mathcal{F}_{\mu\lambda}(x), \mathcal{F}_{\nu\lambda}(x)\} - \frac{1}{8} \delta_{\mu\nu} \{\mathcal{F}_{\lambda\sigma}(x), \mathcal{F}_{\lambda\sigma}(x)\}, \quad (1.41)$$

след которого равен нулю:

$$\Theta_{\mu\mu} = 0. \quad (1.42)$$

Очевидно, имеет место равенство

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0 = -\hbar c \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} D^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0}. \quad (1.43)$$

Последнее выражение является неопределенным вследствие особенности у функции $D^{(1)}(\xi)$ при $\xi_\mu^2 \rightarrow 0$. Однако вид соотношения (1.43) может быть получен из совершенно общих условий. Так как $D^{(1)}(\xi)$ является функцией только от ξ_μ^2 , то получающийся указанным образом тензор должен быть пропорционален $\delta_{\mu\nu}$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} D^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0} = K \delta_{\mu\nu}. \quad (1.44)$$

Положив $\mu = \nu$ и произведя суммирование, находим

$$4K = [\square^2 D^{(1)}(\xi)]_{\xi=0} = 0, \quad (1.45)$$

откуда

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0 = 0. \quad (1.46)$$

В самом деле, это значение является единственным результатом, совместимым с тем условием, что свойства вакуума не должны зависеть от системы отсчета. Значения, приписываемые симметрическому тензору $\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0$, могут совпадать во всех системах координат только, если этот тензор пропорционален $\delta_{\mu\nu}$. Если, кроме того, выполняется соотношение (1.42), то этот тензор должен равняться нулю. Итак, неравное нулю значение электромагнитной вакуумной флуктуационной энергии несовместимо с требованиями теории относительности.

Определение вакуума поля частиц производится с соответствующими видоизменениями по тому же методу, что и в случае электромагнитного поля. Спиноры

$$\psi^{(+)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \psi(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.47)$$

и

$$\psi^{(-)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \psi(x + \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.48)$$

являются частями спинора $\psi(x)$, соответствующими положительным и отрицательным частотам (или энергиям). Они могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(x) &= \frac{1}{2} [\psi(x) - i\psi^{(1)}(x)], \\ \psi^{(-)}(x) &= \frac{1}{2} [\psi(x) + i\psi^{(1)}(x)], \end{aligned} \quad (1.49)$$

где

$$\psi^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (1.50)$$

Аналогичным образом можно поступить с сопряженным спинором $\bar{\psi}(x)$. В частности, из соотношения

$$\bar{\psi}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.51)$$

очевидно, что

$$\bar{\psi}^{(1)}(x) = \overline{\psi^{(1)}}(x). \quad (1.52)$$

Отсюда, в свою очередь, вытекают соотношения

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) = \overline{\psi^{(-)}}(x), \quad \bar{\psi}^{(-)}(x) = \overline{\psi^{(+)}}(x), \quad (1.53)$$

заменяющие более простое условие вещественности, выполняющееся для функций, связанных с электромагнитным потенциалом. Разложение зарядно-сопряженных спиноров получается непосредственно из определений (1.1.3). Так,

$$\psi^{(+)} = C\bar{\psi}^{(+)} = C\bar{\psi}^{(-)}, \quad \psi^{(-)} = C\bar{\psi}^{(-)} = C\bar{\psi}^{(+)} \quad (1.54)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'^{(+)} &= \overline{\psi'^{(-)}} = C^{-1}\psi^{(+)}, \\ \bar{\psi}'^{(-)} &= \overline{\psi'^{(+)}} = C^{-1}\psi^{(-)}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Перестановочные соотношения между полем ψ и другими связанными с ним полями получаются без затруднений. В частности, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \{\psi_{\alpha}^{(1)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(1)}(x')\} &= -\{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(1)}(x')\} = \\ &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{(1)}(x - x') = \frac{1}{i} \left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - x_0 \right)_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}(x - x'), \end{aligned} \quad (1.56)$$

где величина

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} \quad (1.57)$$

является четной функцией от x , подчиняющейся дифференциальному уравнению

$$(\square^2 - x_0^2) \Delta^{(1)}(x) = 0. \quad (1.58)$$

Явное построение этой и остальных введенных функций выполнено в приложении. Основные аргументы, использованные при выводе формулы (1.19), пригодны также для доказательства того, что

$$\begin{aligned} \{\psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(x')\} &= \{\psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x')\} = 0, \\ \{\psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x')\} &= \{\psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(x')\} = 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} \{\psi_{\alpha}^{(+)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(+)}(x')\} &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x'), \\ \{\psi_{\alpha}^{(-)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(-)}(x')\} &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{(-)}(x - x'). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Можно также, используя аналогию с формулой (1.23), показать, что имеет место равенство

$$\{\psi_{\alpha}^{(1)}(x), \bar{\psi}_{\beta}^{(1)}(x')\} = \{\psi_{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (1.61)$$

Все подобные перестановочные соотношения инвариантны по отношению к зарядному сопряжению. Так, например,

$$\begin{aligned} \{\psi'_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}'_\beta(x')\} &= \{(C\bar{\psi}^{(+)}(x))_\alpha, (C^{-1}\psi(x'))_\beta\} = -C_{\alpha\gamma} \{\psi_\gamma(x'), \bar{\psi}'_\gamma(x)\} C_{\beta\delta}^{-1} = \\ &= \frac{1}{i} \left(C\gamma_\mu^T C^{-1} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} - x_0 \right)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x' - x) = \frac{1}{i} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - x_0 \right)_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x - x') = \\ &= \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x'). \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из определения вакуума поля частиц как состояния с минимальной энергией можно получить в полной аналогии с процедурой, примененной в случае электромагнитного поля, следующее уравнение для определения вектора состояния вакуума Ψ_0 :

$$\psi^{(+)}(x) \Psi_0 = 0 \quad (1.63)$$

и

$$\bar{\psi}^{(+)}(x) \Psi_0 = \bar{\psi}^{(-)}(x) \Psi_0 = 0. \quad (1.64)$$

Последнему уравнению может быть придан вид зарядно-сопряженного к (1.63) уравнения:

$$\psi'^{(+)}(x) \Psi_0 = 0. \quad (1.65)$$

Для определения вакуумного среднего значения типичного билинейного выражения

$$\langle \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \rangle = \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x)$$

запишем его в виде

$$\begin{aligned} \langle \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \rangle &= (2\psi_\alpha^{(-)}(x) - i\psi_\alpha^{(+)}(x)) \bar{\psi}_\beta(x') - \bar{\psi}_\beta(x') (2\psi_\alpha^{(+)}(x) + i\psi_\alpha^{(-)}(x)) = \\ &= -i \langle \psi_\alpha^{(+)}(x), \bar{\psi}_\beta(x') \rangle + 2 \langle \psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha^{(+)}(x) \rangle. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Так как эрмитово-сопряженный и сопряженный спиноры связаны линейной зависимостью, то среднее вакуумное значение второго слагаемого равно нулю:

$$\begin{aligned} (\Psi_0, (\psi_\alpha^{(-)}(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha^{(+)}(x)) \Psi_0) &= \\ &= (\psi_\alpha^{(-)}(x) \Psi_0, \bar{\psi}_\beta(x') \Psi_0) - (\Psi_0, \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha^{(+)}(x) \Psi_0) = 0. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Следовательно,

$$\langle \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \rangle_0 = \langle \psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x') \rangle_0 = -S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x'). \quad (1.68)$$

Полученный результат можно использовать для нахождения средних значений четырехмерного вектора тока

$$j_\mu = -\frac{iec}{2} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)] (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} = -\frac{iec}{2} [\psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x)] (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} \quad (1.69)$$

и симметричного тензора энергии — импульса поля частиц [см. (1.1.29)]

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= -\frac{\hbar c}{4} \left[(\gamma_\mu)_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \left[\psi_\alpha \left(x + \frac{1}{2} \xi \right), \bar{\psi}_\beta \left(x - \frac{1}{2} \xi \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\gamma_\nu)_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \left[\psi_\alpha \left(x + \frac{1}{2} \xi \right), \bar{\psi}_\beta \left(x - \frac{1}{2} \xi \right) \right] \right]_{\xi=0}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

след которого равен [см. (1.1.34)]

$$\Theta_{\mu\mu} = m_0 c^2 \frac{1}{2} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\alpha(x)]. \quad (1.71)$$

Складывая два эквивалентных зарядно-сопряженных выражения для вектора тока, получаем, согласно формуле (1.68),

$$\langle j_\mu \rangle_0 = -\frac{iec}{4} (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} (\langle \psi'_\alpha(x), \bar{\psi}'_\beta(x) \rangle_0 - \langle \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x) \rangle_0) = 0. \quad (1.72)$$

Последнее соотношение является выражением зарядной симметрии теории. С другой стороны, прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} \langle j \rangle_0 &= -\frac{iec}{2} \langle \Psi_\alpha(x), \bar{\Psi}_\beta(x) \rangle_0 (\gamma_\mu)_{\beta\alpha} = \\ &= \frac{iec}{2} \text{tr} S^{(1)}(\xi) \gamma_\mu |_{\xi=0} = 2iec \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \Delta^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0} = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

так как $\Delta^{(1)}(\xi)$ — четная функция. В формуле (1.73) символ tr обозначает след, или сумму диагональных элементов матриц Дирака. При этом были использованы следующие соотношения:

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\delta_{\mu\nu}, \quad \text{tr} \gamma_\mu = 0, \quad (1.74)$$

доказательство которых просто получается из коммутационных свойств матриц γ_μ и элементарных теорем о следах матриц. Так,

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = \text{tr} \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) = 4\delta_{\mu\nu}$$

и

$$\text{tr} \gamma_\mu = \text{tr} \frac{1}{2} \gamma_\mu (\gamma_5 \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_5) = \text{tr} \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu) \gamma_5 = 0.$$

В последнем соотношении матрица $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$ образует пятую матрицу, дополняющую набор антикоммутирующих друг с другом матриц Дирака (I. 1.1).

Среднее вакуумное значение тензора энергии — импульса равняется

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0 = \frac{\hbar c}{4} \left[\text{tr} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} + \gamma_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \right) S^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0} = 2\hbar c \left[\frac{\partial}{\partial \xi_\mu} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \Delta^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0}. \quad (1.75)$$

След тензора $\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0$ может быть вычислен непосредственно, исходя из выражения (1.71):

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0 = -m_0 c^2 \frac{1}{2} \left[\text{tr} S^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0} = 2\hbar c x_0^2 \left[\Delta^{(1)}(\xi) \right]_{\xi=0}. \quad (1.76)$$

Этот результат следует также из выражения (1.75). Согласно общим соображениям, изложенным при рассмотрении электромагнитного тензора энергии — импульса, величина $\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0$ должна быть пропорциональна $\delta_{\mu\nu}$:

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle_0 = K \delta_{\mu\nu}, \quad (1.77)$$

причем здесь

$$K = \frac{1}{4} \langle \Theta_{\mu\mu} \rangle_0 = \frac{1}{2} \hbar c x_0^2 \Delta^{(1)}(0). \quad (1.78)$$

В отличие от случая электромагнитного поля, след тензора энергии — импульса в данном случае не только не равен нулю, но имеет расходящееся значение. Однако можно изменить определение тензора энергии — импульса и добавить к этому тензору некоторую пропорциональную $\delta_{\mu\nu}$ величину, подобранную таким образом, чтобы среднее по вакууму значение $\Theta_{\mu\nu}$ стало равным нулю.

2. Поляризация вакуума¹⁾

Рассмотрим прежде всего проблему возбуждения электромагнитным полем тока в вакууме поля частиц, т. е. поляризацию вакуума. Предположим, что находившееся сначала в состоянии вакуума поле частиц возмущается из-за установления внешнего электромагнитного поля, описываемого потенциалом $A_\mu(x)$.

1) Приведенное здесь рассмотрение поляризации вакуума не является полностью удовлетворительным с формальной точки зрения. Более последовательное изложение данной проблемы приведено в статье VIII настоящего сборника (см. также статью Паули и Вилларса в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950. — *Прим. ред.*

Удобно положить, что потенциал равен нулю как до установления поля, так и после его выключения; тем самым ограничивается группа калибровочных преобразований внешнего электромагнитного поля. В соответствии с этим функция $\Lambda(x)$, определяющая калибровочное преобразование, должна перед установлением поля равняться постоянной, величину которой без введения каких-либо дополнительных ограничений можно приравнять нулю. Мы можем теперь охарактеризовать начальное состояние вакуума поля частиц посредством одного вектора состояния Ψ_0 без какой-либо неоднозначности, связанной с калибровочными преобразованиями. Изменение вектора состояния, вызванное внешним полем, описывается уравнением

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) \Psi[\sigma]. \quad (2.1)$$

Следуя программе, намеченной в разделе 4 части I, заменяем уравнение (2.1) функциональным интегральным уравнением

$$\Psi[\sigma] = \Psi_0 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} j_\mu(x') A_\mu(x') \Psi[\sigma'] d\omega', \quad (2.2)$$

которое включает начальные условия

$$\Psi[\sigma] \rightarrow \Psi_0, \quad \sigma \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

и которое можно решать с помощью последовательных приближений. Мы ограничимся первым приближением, считая возмущение вакуума малым:

$$\Psi[\sigma] = \left(1 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} j_\mu(x') A_\mu(x') d\omega'\right) \Psi_0 = U[\sigma, -\infty] \Psi_0. \quad (2.4)$$

Оператор $U[\sigma, -\infty]$ является в используемом приближении унитарным. Среднее значение тока $j_\mu(x)$ при воздействии внешнего электромагнитного поля равно

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= \langle \Psi[\sigma], j_\mu(x) \Psi[\sigma] \rangle = \langle \Psi_0, U^{-1}[\sigma, -\infty] j_\mu(x) U[\sigma, -\infty] \Psi_0 \rangle = \\ &= \langle U^{-1}[\sigma, -\infty] j_\mu(x) U[\sigma, -\infty] \rangle_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

С принятой точностью имеет место соотношение

$$U^{-1}[\sigma, -\infty] j_\mu(x) U[\sigma, -\infty] = j_\mu(x) + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} [j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\nu(x') d\omega', \quad (2.6)$$

откуда

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 A_\nu(x') d\omega'. \quad (2.7)$$

Следует прежде всего проверить калибровочную инвариантность этого выражения. Необходимо, чтобы при отсутствии реального электромагнитного поля в вакууме не индуцировалось тока; иными словами, из равенства $A_\mu(x) = -\partial\Lambda(x)/\partial x_\mu$ должно следовать $\langle j_\mu(x) \rangle = 0$. Подставляя $A_\mu(x) = -\frac{\partial\Lambda(x)}{\partial x_\mu}$ в формулу (2.7), находим

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= -\frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \{ \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \Lambda(x') \} = \\ &= -\frac{i}{\hbar c^2} \int_{\sigma} d\sigma'_\nu \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \Lambda(x') = -\frac{i}{\hbar^2 c} \Delta(x) \int_{\sigma} \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 d\sigma'_\nu = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

так что поставленное условие действительно выполняется. В ходе вычислений мы использовали перестановочность любых двух компонент тока, относящихся к различным точкам пространственно-подобной поверхности, а также перестановочность J_μ с временно-подобной компонентой тока j_μ в одной и той же точке, выясненную в части I [см. формулу (I.2.34)]. Кроме того, было использовано то разобранное ранее условие, что функция Δ равна нулю в отдаленном прошлом.

Для определения вакуумного среднего значения коммутатора, входящего в соотношение (2.7), запишем [см. (I.2.33)]

$$[j_\mu(x), j_\nu(x')] = \frac{ie^2c^2}{2} \{ [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] (\gamma_\nu S(x' - x) \gamma_\mu)_{\beta\alpha} - [\psi_\alpha(x'), \bar{\psi}_\beta(x)] (\gamma_\mu S(x - x') \gamma_\nu)_{\beta\alpha} \}, \quad (2.9)$$

откуда следует равенство

$$\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 = \frac{ie^2c^2}{2} \text{tr} [S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu S(x - x') \gamma_\nu - S^{(1)}(x - x') \gamma_\nu S(x' - x) \gamma_\mu]. \quad (2.10)$$

Для нахождения величины входящего в это выражение следа используем то обстоятельство, что след произведения трех (или, в общем случае, нечетного числа) матриц γ равен нулю:

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, имеет место равенство

$$\text{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = \text{tr} \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda (\gamma_5 \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_5) = \text{tr} \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) \gamma_5 = 0,$$

так как матрица γ_5 антикоммутирует со всеми компонентами γ_μ . Отсюда, учитывая четность функции $\Delta^{(1)}$ и нечетность функции Δ , получаем

$$\begin{aligned} \text{tr} [S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu S(x - x') \gamma_\nu - S^{(1)}(x - x') \gamma_\nu S(x' - x) \gamma_\mu] = \\ = - \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \Delta(x - x')}{\partial x_\nu} \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu) + \\ + \gamma_0^2 \Delta^{(1)}(x - x') \Delta(x - x') \text{tr} (\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Далее, имеет место равенство

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} \gamma_\lambda \gamma_5 + 2\delta_{\nu\sigma} \gamma_\lambda \gamma_\mu - 2\delta_{\mu\nu} \gamma_\lambda \gamma_\sigma, \quad (2.13)$$

так что

$$\text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu) = 8 (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\nu} + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\lambda\mu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\sigma}), \quad (2.14)$$

и мы окончательно получаем для вакуумного среднего значения рассматриваемого коммутатора выражение

$$\begin{aligned} \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 = -4ie^2c^2 \left[\frac{\partial \Delta(x - x')}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_\nu} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Delta(x - x')}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \Delta(x - x')}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_\lambda} + \right. \right. \\ \left. \left. + \gamma_0^2 \Delta(x - x') \Delta^{(1)}(x - x') \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С целью упрощения последующего исследования предположим, что рассматриваемое электромагнитное поле не приводит к реальному порождению пар в вакууме; таким образом, будет разбираться только явление виртуального порождения пар. Накладываемое тем самым ограничивающее условие может быть получено из формулы (2.4). Конечное состояние поля частиц, получающееся в результате последовательного наложения и выключения электромагнитного поля в вакууме, задается выражением

$$\Psi[\infty] = \left(1 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} j_\mu(x') A_\mu(x') d\omega' \right) \Psi_0; \quad (2.16)$$

если не произошло реального порождения пар, то функционал $\Psi[\infty]$ должен просто равняться Ψ_0 . Отсюда вытекает, что равенство

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} j_{\mu}(x) A_{\mu}(x) d\omega \right] \Psi_0 = 0 \quad (2.17)$$

является условием отсутствия реального порождения пар. Согласно рассмотрению, приведенному в разделе 4 части I, равенство (2.17) действительно имеет место, если при взаимодействии электромагнитного поля и флуктуационного тока, являющегося причиной порождения пар в вакууме, не могут одновременно быть выполнены законы сохранения энергии и импульса. Чтобы использовать принятое ограничение, перепишем равенство (2.7) в виде

$$\langle j_{\mu}(x) \rangle = \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] \rangle_0 \frac{1}{2} (1 + \varepsilon(x - x')) A_{\nu}(x') d\omega', \quad (2.18)$$

где $\varepsilon(x)$ полагается равным $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно значение x_0 ; это определение по существу инвариантно, поскольку в выражение (2.18) входят только временно-подобные интервалы $x_{\mu} - x'_{\mu}$. Условие (2.17) позволяет теперь заменить выражение (2.18) на выражение

$$\langle j_{\mu}(x) \rangle = \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] \rangle_0 \varepsilon(x - x') A_{\nu}(x') d\omega'. \quad (2.19)$$

Преимущество подобной формы записи связано с соотношением

$$\begin{aligned} \langle [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] \rangle_0 \varepsilon(x - x') = & 8ie^2 c^2 \left[\frac{\partial \bar{\Delta}(x - x')}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_{\nu}} + \right. \\ & + \frac{\partial \bar{\Delta}(x - x')}{\partial x_{\nu}} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_{\mu}} - \delta_{\mu\nu} \left(- \frac{\partial \bar{\Delta}(x - x')}{\partial x_{\lambda}} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x - x')}{\partial x_{\lambda}} + \right. \\ & \left. \left. + z_0^2 \bar{\Delta}(x - x') \Delta^{(1)}(x - x') \right) \right], \quad (2.20) \end{aligned}$$

где функция

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2} \Delta(x) \varepsilon(x), \quad (2.21)$$

подобно $\Delta'(x)$, является функцией только от $\lambda = -x_{\mu}^2$. В соотношении (2.20) учтено, что

$$\Delta(x) \left(\frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x_{\mu}} \right) = 0. \quad (2.22)$$

Последнее равенство следует из того, что величина $\varepsilon(x)$ изменяется только при переходе через пространственно-подобную поверхность, проходящую через начало координат, на которой значение $\Delta(x)$ равно нулю.

Покажем теперь, что имеет место равенство¹⁾

$$\langle [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] \rangle_0 \varepsilon(x - x') = 8ie^2 c^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} G(\lambda) - \delta_{\mu\nu} \square^2 G(\lambda) \right], \quad (2.23)$$

где функция $G(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$2 \frac{\partial \bar{\Delta}(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{\partial \Delta^{(1)}(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial^2 G(\lambda)}{\partial \lambda^2} \quad (2.24)$$

¹⁾ Конкретный подсчет выражения для тока поляризации, а также выражения для собственной энергии электрона (см. ниже) более естественным и простым способом, чем это делается в настоящей статье, изложен в приложении к части III настоящей работы. — *Прим. ред.*

и $\lambda = -(x_\mu - x'_\mu)^2$. Функция $G(\lambda)$ становится однозначно определенной при введении того условия, что она должна обращаться в нуль на бесконечности. Отметим прежде всего, что

$$\frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\mu} = 4x_\mu x_\nu \frac{\partial^2 G(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} G(\lambda) + 2\delta_{\mu\nu} \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda}, \quad (2.25)$$

так что имеет место соотношение

$$\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \varepsilon(x - x') = 8ie^2 c^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} G(\lambda) - \delta_{\mu\nu} H(\lambda) \right], \quad (2.26)$$

где

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= \frac{1}{2} \square^2 G(\lambda) + 2 \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda} + x_0^2 \bar{\Delta}(\lambda) \Delta^{(1)}(\lambda) = \\ &= -2\lambda \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} - 2 \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda} + x_0^2 \bar{\Delta}(\lambda) \Delta^{(1)}(\lambda). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Равенство

$$H(\lambda) = \square^2 G(\lambda) \quad (2.28)$$

может быть доказано с помощью теоремы

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} (\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \varepsilon(x - x')) = 0. \quad (2.29)$$

В самом деле, дифференцирование соотношения (2.26) в этом случае дает

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_\nu} [\square^2 G(\lambda) - H(\lambda)], \quad (2.30)$$

откуда следует равенство (2.28). Для доказательства теоремы (2.29) отметим, что левая сторона (2.29) сводится к выражению

$$\langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \frac{\partial \varepsilon(x - x')}{\partial x_\mu}.$$

Правильность теоремы (2.29) становится теперь очевидной, так как $\frac{\partial \varepsilon(x - x')}{\partial x_\mu}$

есть временно-подобный вектор, не равный нулю, только в том случае, если точки x и x' лежат на пространственно-подобной поверхности, а временно-подобная компонента тока коммутирует с j_ν во всех точках пространственно-подобной поверхности.

Подстановка соотношения (2.23) в формулу (2.19) для индуцированного тока после интегрирования по частям и использования того обстоятельства, что потенциал внешнего поля обращается в нуль в бесконечно отдаленном прошлом и будущем, дает

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= 4 \frac{e^2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) \left(\square'^2 A_\mu(x') - \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \frac{\partial A_\nu(x')}{\partial x'_\nu} \right) d\omega' = \\ &= -4 \frac{e^2}{h} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) \frac{\partial}{\partial x'_\nu} F_{\mu\nu}(x') d\omega' = -4 \frac{e^2}{hc} \int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda) J_\mu(x') d\omega', \end{aligned} \quad (2.31)$$

где $J_\mu(x)$ — внешний ток, вызванный электромагнитным полем. При подобной форме записи становится очевидной калибровочная инвариантность теории. Индуцированный ток зависит не от электромагнитных потенциалов, а от напряженностей поля. Однако полученный результат не ограничивается высказанным утверждением; из выражения (2.31) также следует, что индуцированный ток в заданной пространственно-временной точке полностью определяется внешним током в окрестности этой точки. Отсюда вытекает то важное следствие, что световая волна, распространяющаяся на бесконечном расстоянии от своего источника, не вызывает тока в вакууме и поэтому не возмущается при движении

в пространстве. Как это мы подчеркнем еще в дальнейшем, у световых квантов в отличие от электронов собственная энергия равна нулю.

Нашей последней задачей является явное построение функции $G(\lambda)$. Вводя интегральное представление функций [см. формулы (П. 15) и (П. 33)]

$$\bar{\Delta}(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\alpha + i\frac{\gamma_0^2}{4\alpha}\right) d\alpha$$

и

$$\Delta^{(1)}(\lambda) = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda\beta + i\frac{\gamma_0^2}{4\beta}\right) \frac{\beta}{|\beta|} d\beta$$

в формулу (2.24), получаем

$$\frac{\partial^2 G(\lambda)}{\partial \lambda^2} = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\lambda(\alpha + \beta) + \frac{i\gamma_0^2}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\right] \alpha\beta \frac{\beta}{|\beta|} d\alpha d\beta,$$

откуда получается выражение для $G(\lambda)$:

$$G(\lambda) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\lambda(\alpha + \beta) + \frac{i\gamma_0^2}{4}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\right] \times \\ \times \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|}\right) d\alpha d\beta, \quad (2.33)$$

причем выполнена симметризация по α и β . Удобно ввести новые переменные v и w , определенные посредством соотношений

$$\alpha = \frac{\gamma_0^2}{2w} \frac{1}{1-v}, \quad \beta = \frac{\gamma_0^2}{2w} \frac{1}{1+v}, \quad (2.34)$$

после чего получаем

$$G(\lambda) = \frac{2i}{(4\pi)^4} \gamma_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(iw + i\frac{\gamma_0^2\lambda}{w(1-v^2)}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{1+v}{|1+v|} + \frac{1-v}{|1-v|}\right) \frac{dv}{1-v^2} \frac{dw}{w^3} = \\ = \frac{2i}{(4\pi)^4} \gamma_0^4 \int_{-1}^1 \frac{dv}{1-v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w^3} \exp\left(iw + i\frac{\gamma_0^2\lambda}{w(1-v^2)}\right). \quad (2.35)$$

При помощи соотношения

$$\int (dk) \exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)) \exp\left(i\frac{k_\mu^2}{4\gamma_0^2} w(1-v^2)\right) = i(4\pi)^2 \gamma_0^4 \frac{\exp\left(i\frac{\gamma_0^2\lambda}{w(1-v^2)}\right)}{w|w|(1-v^2)^2} \quad (2.36)$$

преобразуем далее выражение (2.35) к виду

$$G(\lambda) = \frac{8}{(4\pi)^6} \int (dk) \exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)) \times \\ \times \int_0^1 (1-v^2) dv \int_0^\infty \frac{dw}{w} \cos\left(1 + \frac{k_\mu^2}{4\gamma_0^2}(1-v^2)\right) w. \quad (2.37)$$

После выполненного преобразования можно использовать соотношение, получающееся в результате интегрирования по частям,

$$\int_0^1 d\left(v - \frac{v^3}{3}\right) \int_0^\infty \frac{dw}{w} \cos\left(1 + \frac{k_\mu^2}{4\gamma_0^2}(1-v^2)\right) w = \\ = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{\cos w}{w} dw - \frac{k_\mu^2}{2\gamma_0^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) v^2 dv \int_0^\infty dw \sin\left(1 + \frac{k_\mu^2}{4\gamma_0^2}(1-v^2)\right) w. \quad (2.38)$$

Первый интеграл по ω логарифмически расходится при $\omega = 0$. Приняв нижний предел равным ω_0 , мы получаем для интеграла (2.38) значение

$$\frac{2}{3} \ln \frac{1}{\gamma \omega_0} - \frac{k_\mu^2}{2\tau_0^2} P \int_0^1 \frac{1 - \frac{v^2}{3}}{1 + \frac{k_\mu^2}{4\tau_0^2} (1 - v^2)} v^2 dv,$$

где $\gamma = 1,781$. Подстановка этого результата в выражение (2.37) дает

$$G(\lambda) = \frac{1}{48\pi^2} \ln \frac{1}{\gamma \omega_0} \delta(x - x') + \frac{4}{(4\pi)^6} \frac{1}{\tau_0^2} \square^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) v^2 dv P \times \\ \times \int (dk) \frac{\exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu))}{1 + \frac{k_\mu^2}{4\tau_0^2} (1 - v^2)}, \quad (2.39)$$

причем следует учесть, что действие оператора \square^2 на функцию $\exp(ik_\mu x_\mu)$ эквивалентно умножению этой функции на $-k_\mu^2$ и что

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(ik_\mu x_\mu) (dk) = \delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (2.40)$$

Содержащийся во втором слагаемом в выражении (2.39) интеграл Фурье связан с входящим в функцию $\bar{\Delta}(x)$ [см. формулу (II. 10)] интегралом

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{\exp(ik_\mu x_\mu)}{k_\mu^2 + \tau_0^2} (dk). \quad (2.41)$$

Действительно, имеет место равенство

$$\frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{\exp(ik_\mu x_\mu)}{1 + \frac{k_\mu^2}{4\tau_0^2} (1 - v^2)} (dk) = \frac{16\tau_0^2}{(1 - v^2)^2} \bar{\Delta}\left(\frac{2}{(1 - v^2)^{1/2}} x\right), \quad (2.42)$$

так что

$$G(\lambda) = \frac{1}{48\pi^2} \ln \frac{1}{\gamma \omega_0} \delta(x - x') + \frac{1}{4\pi^2} \square^2 \times \\ \times \int_0^1 \bar{\Delta}\left(\frac{2}{(1 - v^2)^{1/2}} (x - x')\right) \frac{1 - \frac{1}{3} v^2}{(1 - v^2)^2} v^2 dv. \quad (2.43)$$

После подстановки функции $G(\lambda)$ в виде (2.43) для индуцированного тока получается выражение

$$\langle j_\mu(x) \rangle = -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{1}{\gamma \omega_0} J_\mu(x) - \\ - \frac{4}{\pi} \alpha \int d\omega' \square^2 \int_0^1 \bar{\Delta}\left(\frac{2}{(1 - v^2)^{1/2}} (x - x')\right) \frac{1 - \frac{1}{3} v^2}{(1 - v^2)^2} v^2 dv J_\mu(x'), \quad (2.44)$$

где $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Таким образом, индуцированный в некоторой точке ток разделяется на две составляющие. Первая из них логарифмически расходится и пропорциональна внешнему току в рассматриваемой точке. Вторая, конечная, составляющая определяется внешним током в окрестности этой точки. Первая составляющая индуцированного тока вызывает изменение величины внешнего тока на постоянный множитель, т. е. приводит, согласно части I, к ненаблюдаемой перенормировке заряда. Физическим значением обладает, следовательно, вторая часть выражения (2.44).

Второй части выражения (2.44) можно придать другую форму¹⁾:

$$\langle j_{\mu}(x) \rangle = -\frac{4}{\pi} \alpha \int d\omega' \int_0^1 \bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} (x-x') \right) \frac{1-\frac{1}{3}v^2}{(1-v^2)^2} v^2 dv \square'^2 J_{\mu}(x'). \quad (2.45)$$

Если внешний ток изменяется достаточно медленно, причем характеристической единицей длины является величина $1/\kappa_0 = \hbar/m_0c$, то выражение (2.45) можно разложить в ряд по возрастающим степеням оператора \square^2 , действующим на $J_{\mu}(x)$. Для этого достаточно последовательно исключать $\bar{\Delta}$ с помощью соотношения

$$\bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} x \right) = \frac{(1-v^2)^2}{16\kappa_0^2} \delta(x) + \frac{1-v^2}{4\kappa_0^2} \square^2 \bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} x \right). \quad (2.46)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu}(x) \rangle &= -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{1}{\kappa_0^2} \square^2 J_{\mu}(x) - \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\kappa_0^2} \int d\omega' \times \\ &\times \int_0^1 \bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} (x-x') \right) \frac{1-\frac{1}{3}v^2}{1-v^2} v^2 dv \square'^2 \square'^2 J_{\mu}(x') = \\ &= -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{1}{\kappa_0^2} \square^2 J_{\mu}(x) - \frac{\alpha}{140\pi} \left(\frac{1}{\kappa_0^2} \square^2 \right)^2 J_{\mu}(x) - \dots \quad (2.47) \end{aligned}$$

Если, однако, первого члена ряда²⁾ недостаточно, то, как правило, использовать этот ряд неудобно и следует вернуться к интегральному выражению.

Важным частным случаем является случай не зависящих от времени внешних зарядов и токов. Тогда выражение (2.45) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu}(x) \rangle &= -\frac{4}{\pi} \alpha \int d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \times \\ &\times \int_0^1 \bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} (\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} (x_0-x'_0) \right) \frac{1-\frac{1}{3}v^2}{(1-v^2)^2} v^2 dv \nabla'^2 J_{\mu}(\mathbf{r}'), \quad (2.48) \end{aligned}$$

причем $d\tau'$ означает здесь элемент трехмерного объема. Далее, функция

$$G(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\Delta}(\mathbf{r}, x_0) dx_0 \quad (2.49)$$

будет подчиняться дифференциальному уравнению

$$(\nabla^2 - \kappa_0^2) G(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}) \quad (2.50)$$

и, следовательно, будет представлять собой трехмерную функцию Грина

$$G(\mathbf{r}) = \frac{e^{-\kappa_0 r}}{4\pi r}. \quad (2.51)$$

Соответственно этому получаем³⁾

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu}(x) \rangle &= -\frac{\alpha}{4\pi^2} \int d\tau' \int_0^1 \frac{\exp \left(\frac{2x_0}{(1-v^2)^{1/2}} |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \times \\ &\times \frac{1-\frac{1}{3}v^2}{1-v^2} v^2 dv \nabla'^2 J_{\mu}(\mathbf{r}') = -\frac{\alpha}{6\pi^2} \int K(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \nabla'^2 J_{\mu}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (2.52) \end{aligned}$$

1) Формула, эквивалентная формуле (2.45), была выведена Сербером [13]. — *Прим. авт.*

2) При первоначальном обсуждении поляризации вакуума ограничивались только этим членом [14, 15]. — *Прим. авт.*

3) Эквивалентный результат был получен Юлингом [16]. — *Прим. авт.*

где

$$K(r) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-2x_0 \xi}}{r} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right) \frac{(\xi^2 - 1)^{1/2}}{\xi^2} d\xi. \quad (2.53)$$

Мы ограничимся тем, что приведем асимптотические выражения для функции $K(r)$ (эта функция строго выражается через функции Ханкеля мнимого аргумента $K_0(2x_0 r)$ и аналогичные функции [17]):

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{r} \left(\ln \frac{1}{\gamma x_0 r} - \frac{5}{6} \right), \quad x_0 r \ll 1, \\ K(r) &= \frac{3\pi^{1/2}}{8r} \frac{e^{-2x_0 r}}{(x_0 r)^{3/2}}, \quad x_0 r \gg 1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

3. Собственная энергия электрона

Вторым вопросом, подлежащим рассмотрению, является изменение свойств поля частиц, вызванное его взаимодействием с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Связь между данными полями может быть описана двумя эквивалентными способами: можно использовать либо полный четырехмерный электромагнитный вектор-потенциал совместно с дополнительным условием Лоренца

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) \Psi[\sigma], \quad (3.1a)$$

$$\left(\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta x_\mu} - \int_{\sigma} D(x-x') \frac{1}{c} j_\mu(x') d\sigma'_\mu \right) \Psi[\sigma] = 0, \quad (3.1b)$$

либо поперечную часть четырехмерного вектора-потенциала, причем в последнем случае не требуется явного введения дополнительного условия

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left[-\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\nu} \right) j_\mu(x) j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \right] \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При рассмотрении обоих приведенных уравнений движения для вектора $\Psi[\sigma]$ мы будем пользоваться теорией возмущений, основывающейся на слабости связи между двумя данными полями, соответствующей малости постоянной тонкой структуры $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c) = 1/137$. Физическим величинам будет соответственно приписываться различный порядок в зависимости от того, в какой степени в них входит e или, точнее, $\alpha^{1/2}$.

В нулевом порядке взаимодействие между полями отсутствует и вектор состояния $\Psi[\sigma]$ является константой. Связь первого порядка между двумя полями соответствует испусканию или поглощению светового кванта либо свободным электроном, либо в процессе порождения или уничтожения пары. Существенно, что все эти процессы являются виртуальными; действительно, вследствие невозможности одновременного выполнения в этих случаях законов сохранения импульса и энергии ни свободный электрон не может испустить или поглотить светового кванта, ни световой квант не может породить пары, ни пара не может аннигилировать с испусканием одного светового кванта. Таким образом, эффекты взаимодействия первого порядка не имеют прямого физического значения; они проявляются лишь через посредство эффектов второго порядка в таких процессах, как виртуальное испускание и последующее поглощение светового кванта полем частиц. Именно благодаря этим процессам возникает взаимодействие между частицами и появляется собственная энергия у отдельной частицы. В данной связи мы попытаемся построить такое уравнение движения для $\Psi[\sigma]$,

в котором член взаимодействия первого порядка будет замещен членом взаимодействия второго порядка.

Для выполнения поставленной задачи нужно определить с точностью до первого порядка решение уравнения движения для $\Psi[\sigma]$. Как и в рассмотренном выше случае поляризации вакуума искомое решение, например, уравнения (3.2), дается выражением

$$\Psi[\sigma] \approx \left(1 + \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} j_{\mu}(x') \mathcal{A}_{\mu}(x') d\omega'\right) \Psi, \quad (3.3)$$

где Ψ — вектор состояния при отсутствии взаимодействия. Хотя избранное решение соответствует граничным условиям при $\sigma \rightarrow -\infty$, вследствие отсутствия реальных эффектов первого порядка, что выражается посредством соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) d\omega = 0, \quad (3.4)$$

однако выражение (3.3) может быть переписано в форме

$$\Psi[\sigma] \approx (1 - iS[\sigma]) \Psi, \quad (3.5)$$

$$S[\sigma] = -\frac{1}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} j_{\mu}(x') \mathcal{A}_{\mu}(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega',$$

в которой равноправно входят будущее и прошедшее.

Оператор $1 - iS[\sigma]$ унитарен только с точностью до первого порядка. Для того чтобы унитарность сохранялась и во втором порядке, нужно взять расширенный оператор

$$1 - iS[\sigma] - \frac{1}{2}(S[\sigma])^2, \quad (3.6)$$

который в свою очередь может быть заменен любым строго унитарным оператором, совпадающим с оператором (3.6) с желаемой степенью приближения. Простейшим из обладающих указанными свойствами операторов является $e^{-iS[\sigma]}$. Соответственно этому производим преобразование вектора состояния

$$\Psi[\sigma] \rightarrow e^{-iS[\sigma]} \Psi[\sigma], \quad (3.7)$$

после которого новый вектор состояния изменяется лишь вследствие взаимодействий второго порядка. Новым уравнением движения, заменяющим (3.2), является уравнение

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial \sigma(x)} + i\hbar c e^{iS[\sigma]} \frac{\partial e^{-iS[\sigma]}}{\partial \sigma(x)} \Psi[\sigma] = \left[-e^{iS[\sigma]} \frac{1}{c} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) e^{-iS[\sigma]} - \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\mu}} + n_{\mu} n_{\nu} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_{\nu}} \right) j_{\mu}(x) j_{\lambda}(x') d\sigma' \right] \Psi[\sigma]. \quad (3.8)$$

Здесь отброшены поправки к обобщенному кулоновскому члену, поскольку требуется сохранить только члены второго порядка. Нам необходимо теперь определить с используемой точностью значения выражений

$$e^{iS[\sigma]} \frac{\partial e^{-iS[\sigma]}}{\partial \sigma(x)} = -i \frac{\partial S[\sigma]}{\partial \sigma(x)} + \frac{1}{2} \left[S[\sigma], \frac{\partial S[\sigma]}{\partial \sigma(x)} \right] + \dots \quad (3.9)$$

$$e^{iS[\sigma]} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) e^{-iS[\sigma]} = j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x) + i[S[\sigma], j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x)] + \dots \quad (3.10)$$

Согласно определению (3.5), оператор $S[\sigma]$ удовлетворяет уравнению движения

$$\hbar c \frac{\partial S[\sigma]}{\partial \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_{\mu}(x) \mathcal{A}_{\mu}(x), \quad (3.11)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} i\hbar c e^{iS[\sigma]} \frac{\delta e^{-iS[\sigma]}}{\delta \sigma(x)} + e^{iS[\sigma]} \frac{1}{c} j_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x) e^{-iS[\sigma]} &= \frac{i}{2} \left[S[\sigma] \frac{1}{c} j_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x) \right] = \\ &= \frac{i}{4\hbar c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left[j_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x), j_\nu(x') \mathcal{A}_\nu(x') \right] \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega', \quad (3.12) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left[-\frac{i}{4\hbar c^3} \int_{\sigma} [j_\mu(x) \mathcal{A}_\mu(x), j_\nu(x') \mathcal{A}_\nu(x')] \times \right. \\ &\times \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' - \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial \mathcal{D}(x-x')}{\partial x_\nu} \right) j_\mu(x) j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda \left. \right] \Psi[\sigma]. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Такие же операции могут быть применены к уравнению (3.1а); в частности, функционал $S[\sigma]$, входящий в преобразование (3.7), имеет ту же форму, что и (3.5), только $\mathcal{A}_\mu(x)$ заменяется при этом на $A_\mu(x)$. В результате подобного преобразования, очевидно, получится следующее уравнение движения для вектора $\Psi[\sigma]$:

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left[-\frac{i}{4\hbar c^3} \int [j_\mu(x) A_\mu(x), j_\nu(x') A_\nu(x')] \varepsilon(x-x') d\omega' \right] \Psi[\sigma]. \quad (3.14)$$

Кроме того, мы должны еще учесть дополнительное условие (3.1б), которое принимает вид

$$\left[e^{iS[\sigma]} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} e^{-iS[\sigma]} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} D(x-x') e^{iS[\sigma]} j_\mu(x') e^{-iS[\sigma]} d\sigma'_\mu \right] \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.15)$$

Для упрощения выражения

$$e^{iS[\sigma]} \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} e^{-iS[\sigma]} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} + i \left[S[\sigma], \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right] - \frac{1}{2} \left[S[\sigma], \left[S[\sigma], \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right] \right] + \dots$$

учтем, что

$$\begin{aligned} i \left[S[\sigma], \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} \right] &= \frac{i}{2\hbar c^2} \int \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}, A_\nu(x') \right] j_\nu(x') \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ &= \frac{1}{2c} \int \frac{\partial}{\partial x'_\nu} (D(x-x') j_\nu(x')) \varepsilon(x-x') d\omega' = \frac{1}{c} \int_{\sigma} D(x-x') j_\nu(x') d\sigma'_\nu. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Тем самым член первого порядка исключается из дополнительного условия, которое теперь гласит

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} - \frac{i}{4\hbar c^3} \int_{\sigma} d\sigma'_\mu \int d\omega'' D(x-x') \times \right. \\ \left. \times [j_\mu(x'), j_\nu(x'')] A_\nu(x'') \varepsilon[\sigma, \sigma''] \right] \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Коммутатор, входящий в уравнение (3.14), может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned} [j_\mu(x) A_\mu(x), j_\nu(x') A_\nu(x')] &= \frac{1}{2} [A_\mu(x), A_\nu(x')] \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} + \\ &+ \frac{1}{2} [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} = \frac{i\hbar c}{2} \delta_{\mu\nu} D(x-x') \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} + \\ &+ \frac{1}{2} [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{A_\mu(x), A_\nu(x')\}. \quad (3.18) \end{aligned}$$

После этого преобразования уравнение движения принимает следующий вид:

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial \sigma(x)} = \left[-\frac{1}{4c^2} \int \{j_\mu(x), j_\nu(x')\} \bar{D}(x-x') d\omega' - \right. \\ \left. - \frac{i}{8\hbar c^3} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')] \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \varepsilon(x-x') d\omega' \right] \Psi[\sigma]. \quad (3.19)$$

Каждому из двух членов правой части уравнения (3.19) можно дать простую интерпретацию, рассматривая их как члены самодействия одного из двух полей через посредство другого поля. Отметим сначала, что оператором, заменяющим $A^\mu(x)$ после преобразования вектора состояния, является оператор

$$e^{iS[\sigma]} A_\mu(x) e^{-iS[\sigma]} = A_\mu(x) + i[S[\sigma], A_\mu(x)] + \dots = \\ = A_\mu(x) + \frac{1}{c} \int \bar{D}(x-x') j_\mu(x') d\omega' + \dots \quad (3.20)$$

Появляющийся в этом случае дополнительный член

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{c} \int \bar{D}(x-x') j_\mu(x') d\omega' \quad (3.21)$$

представляет электромагнитное поле, индуцированное током вследствие наличия связи первого порядка. Этот потенциал удовлетворяет соотношениям

$$\square^2 \delta A_\mu(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x), \\ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta A_\mu(x) = 0 \quad (3.22)$$

и является просто суммой опережающего и запаздывающего потенциалов, связанных классическим образом с плотностью токов $j_\mu(x)$. Аналогично имеет место соотношение

$$e^{iS[\sigma]} j_\mu(x) e^{-iS[\sigma]} = j_\mu(x) + i[S[\sigma], j_\mu(x)] + \dots = j_\mu(x) + \delta j_\mu(x), \quad (3.23)$$

где величина

$$\delta j_\mu(x) = \frac{i}{2\hbar c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\nu(x') \varepsilon(x-x') d\omega' \quad (3.24)$$

есть ток, индуцированный электромагнитным полем. В предыдущем разделе рассматривалось среднее вакуумное значение именно этого тока. Мы теперь видим, что уравнение (3.19) может быть переписано в виде

$$i\hbar c \frac{\partial \Psi[\sigma]}{\partial \sigma(x)} = \left[-\frac{1}{4c} \{j_\mu(x), \delta A_\mu(x)\} - \frac{1}{4c} \{\delta j_\mu(x), A_\mu(x)\} \right] \Psi[\sigma], \quad (3.25)$$

где два члена, очевидно, выражают взаимодействие тока с порождаемым этим током электромагнитным полем и взаимодействие электромагнитного поля с током, индуцированным полем. Появление второго множителя $1/2$ (первый связан с симметризацией произведения) всегда является характерным для величины самодействия.

Уравнению движения (3.13) может быть дана аналогичная интерпретация за исключением того, что в данном случае взаимодействие между током и полем, порождаемым этим током, разделяется на две части, связанные соответственно с поперечным и продольным потенциалом. Однако такое более сложное представление поля отличается от (3.21) только калибровочным преобразованием.

Поперечный потенциал, индуцированный током, равен

$$\delta \mathcal{A}_\mu(x) = \frac{i}{2\hbar c^2} \int [\mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x')] j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' = \\ = \frac{1}{c} \int \bar{D}(x-x') j_\mu(x') d\omega' + \frac{1}{2c} \int \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \right. \right. \\ \left. \left. + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right] \mathcal{D}(x-x') j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega'. \quad (3.26)$$

Далее, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right] \mathcal{D}(x-x') j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' = \\ & = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\mu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}(x-x') j_\nu(x') \right] \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' = \\ & = -\int \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \mathcal{D}(x-x') j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda, \quad (3.27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}(x-x') j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' = \\ & = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{1}{2} \int n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}(x-x') n_\nu j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' \right] + \\ & + \frac{1}{2} \int n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}(x-x') j_\nu(x') n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega'. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Вследствие того, что градиент от $\varepsilon[\sigma, \sigma']$ является временно-подобным вектором, выполняется соотношение

$$n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \varepsilon[\sigma, \sigma'] = n_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \varepsilon[\sigma, \sigma'].$$

Соответственно этому второе слагаемое правой стороны (3.28) принимает вид

$$-\int n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{D}(x-x') j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_\mu(x) = \delta A_\mu(x) - \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right) \mathcal{D}(x-x') j_\lambda(x') d\sigma'_\lambda + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{1}{2} \int n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}(x-x') n_\nu j_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' \right]. \quad (3.29) \end{aligned}$$

В приближении, сохраняющем только величины второго порядка, слагаемое, имеющее вид градиента, может быть исключено посредством соответствующего калибровочного преобразования. Второе слагаемое из выражения для $\delta \mathcal{A}_\mu(x)$ сокращается с выражением, соответствующим кулоновскому взаимодействию, и мы получаем вместо (3.13) более простое уравнение

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left[-\frac{1}{4c} \{j_\mu(x), \delta A_\mu(x)\} - \frac{1}{4c} \{\delta j_\mu(x), \mathcal{A}_\mu(x)\} \right] \Psi[\sigma]. \quad (3.30)$$

Здесь величина $\delta j_\mu(x)$ определяется формулой (3.24) при замене $A_\mu(x)$ на $\mathcal{A}_\mu(x)$. Из приведенного рассмотрения становится очевидным, что в случае исследования процессов с виртуальными световыми квантами разделение поля на продольную и поперечную части является излишним усложнением.

Ток, индуцированный электромагнитным полем, разделяется, как и следовало ожидать, на две части. Первая из них

$$(\delta j_\mu(x))_0 = \frac{i}{2\hbar c^2} \int \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \mathcal{A}_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' \quad (3.31)$$

не исчезает даже при отсутствии каких-либо заряженных частиц. Вторая часть индуцированного тока

$$(\delta j_\mu(x))_1 = \frac{i}{2\hbar c^2} \int \{ [j_\mu(x), j_\nu(x')] - \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \} \mathcal{A}_\nu(x') \varepsilon[\sigma, \sigma'] d\omega' \quad (3.32)$$

специфическим образом связана с наличием частиц. Если бы ток, индуцированный в вакууме, отличался от нуля, то в уравнение (3.30) входил бы член, определяющий изменение свойств электромагнитного поля при отсутствии заряженных

частиц¹⁾. В действительности подобное явление, соответствующее собственной энергии световых квантов, не должно иметь место, поскольку, как мы показали в предыдущем разделе, световая волна не индуцирует тока в вакууме. Отметим, однако, что, в то время как

$$\square^2 \mathcal{A}_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu(x)}{\partial x_\nu} \right) = 0,$$

что и требуется для соответствующего доказательства, в случае потенциалов $A_\mu(x)$ необходимо дополнительное исследование, поскольку при рассмотрении $\partial A_\mu(x)/\partial x_\mu$ используется добавочное условие. Имеем

$$\begin{aligned} \{(\delta j_\mu(x))_0, A_\mu(x)\} \Psi[\sigma] &= \frac{i}{2\hbar c^2} \int \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 [A_\mu(x), A_\nu(x')] + \\ &+ A_\nu(x') A_\mu(x) \varepsilon(x-x') d\omega' \Psi[\sigma] = \frac{i}{\hbar c^2} A_\mu(x) \int \langle [j_\mu(x), j_\nu(x')] \rangle_0 \times \\ &\times A_\nu(x') \varepsilon(x-x') d\omega' \Psi[\sigma] + \\ &+ \frac{1}{2c} \int \langle [j_\mu(x), j_\mu(x')] \rangle_0 \varepsilon(x-x') D(x-x') d\omega' \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

В первом члене правой стороны равенства (3.33) оператор $\partial A_\nu(x')/\partial x'_\nu$ действует непосредственно на $\Psi[\sigma]$, благодаря чему можно прямо использовать дополнительное условие (3.17), в силу которого этот член обращается в нуль, поскольку мы пренебрегаем величинами четвертого порядка. Второй член (3.33) также обращается в нуль, так как величина $\langle [j_\mu(x), j_\mu(x')] \rangle_0 \varepsilon(x-x')$ есть четная, а $D(x-x')$ — нечетная функции $x-x'$. Следовательно, действительно имеет место равенство

$$\{(\delta j_\mu(x))_0, A_\mu(x)\} \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.34)$$

Взаимодействие электромагнитного поля с индуцированным этим полем током

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\} &= -\frac{i}{8\hbar c^3} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ &\times \{ \mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x') \} \varepsilon(x-x') d\omega' \end{aligned} \quad (3.35)$$

удобно разделить на два слагаемых, первое из которых

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\}_0 &= -\frac{i}{8\hbar c^3} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ &\times \langle \{ \mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x') \} \rangle_0 \varepsilon(x-x') d\omega' \end{aligned} \quad (3.36)$$

связано с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, а второе

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\}_1 &= -\frac{i}{8\hbar c^3} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ &\times \{ \mathcal{A}_\mu(x), \mathcal{A}_\nu(x') \}_1 \varepsilon(x-x') d\omega' \end{aligned} \quad (3.37)$$

не равно нулю только в присутствии реальных световых квантов. В приведенных формулах индекс 1 означает разность между записанной величиной и ее средним вакуумным значением. Вторая часть взаимодействия [формула (3.37)] описывает реальную связь между веществом и излучением, проявляющуюся в таких процессах как рассеяние светового кванта электроном или двухфотонная аннигиляция электронно-позитронной пары. Первое слагаемое [формула (3.36)], содержащее только динамические переменные поля частиц, является частью собственной энергии электрона.

¹⁾ Подобный член, имеющий логарифмически расходящееся значение, был получен Гейзенбергом [15]. — *Прим. авт.*

Аналогичным образом может быть разделено на части выражение

$$-\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\} = -\frac{i}{8\hbar c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ \times \{A_\mu(x), A_\nu(x')\} \varepsilon(x-x') d\omega'. \quad (3.38)$$

Однако в этом случае требуется некоторое дополнительное исследование самого определения вакуума для поля, описываемого полным потенциалом $A_\mu(x)$. Очевидно, не имеет смысла говорить о вакуумных состояниях продольных полей, поскольку эти поля полностью исключаются дополнительным условием Лоренца. Однако все же допустимо использовать и в данном случае некоторое подходящее определение вакуума, позволяющее объединить рассмотрение продольных и поперечных полей. При этом нужно только помнить, что возможное последующее исключение продольного поля лишает избранное определение какого-либо физического значения. Согласно сказанному, определение вакуума (1.34) может быть обобщено на продольные поля посредством введения условий ¹⁾

$$\Delta^{(+)}(x) \Psi_0 = 0, \quad \Lambda'^{(+)}(x) \Psi_0 = 0. \quad (3.39)$$

Отсюда получается естественное определение вакуума

$$A_\mu^{(+)}(x) \Psi_0 = 0 \quad (3.40)$$

для того случая, когда в рассмотрении используется полный вектор-потенциал. Средние значения квадратичных форм подсчитываются теперь так же, как раньше:

$$\langle A_\mu(x) A_\nu(x') + A_\nu(x') A_\mu(x) \rangle_0 = -i [A_\mu^{(1)}(x), A_\nu(x')] = \hbar c \delta_{\mu\nu} D^{(1)}(x-x'). \quad (3.41)$$

В частности, имеет место соотношение

$$-\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 = -\frac{i}{8c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ \times \varepsilon(x-x') D^{(1)}(x-x') d\omega'. \quad (3.42)$$

Чтобы окончательно убедиться в том, что принятие определения вакуума в виде (3.40) не связано с введением каких-либо дополнительных физических условий, покажем эквивалентность с точностью до калибровочных преобразований двух выражений (3.36) и (3.42). Имеют место равенства

$$-\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 = -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 + \frac{i}{8c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + \left(n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \varepsilon(x-x') d\omega', \quad (3.43)$$

и

$$\frac{1}{2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} + n_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ = -\frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \left\{ [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \right\} \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ = -\int \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + n_\mu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}^{(1)}(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 d\sigma'_\nu = 0;$$

в то же время

$$\frac{1}{2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \left(n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{1}{2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 n_\nu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \varepsilon(x-x') d\omega' \right], \quad (3.44)$$

¹⁾ Для наиболее последовательного определения вакуума без разделения электромагнитного поля на поперечную, продольную и скалярную части приходится дополнительно изменить определение матричного элемента оператора. [См. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **63A**, 681 (1950).] — *Прим. ред.*

так как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}^{(1)}(x-x') n_\nu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ & = \frac{1}{2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}^{(1)}(x-x') n_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\nu} \varepsilon(x-x') d\omega' = \\ & = - \int n_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}^{(1)}(x-x') n_\mu [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 d\sigma'_\nu = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\}_0 &= -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{i}{8c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 n_\lambda n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{D}^{(1)}(x-x') \varepsilon(x-x') d\omega' \right], \end{aligned} \quad (3.46)$$

подтверждающее правильность высказанного утверждения об эквивалентности выражений (3.36) и (3.42).

Таким образом, исключение членов первого порядка из уравнений (3.1) и (3.2) приводит к следующим уравнениям движения для новых векторов состояния:

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left[-\frac{1}{4c} \{j_\mu(x), \delta A_\mu(x)\} - \right. \\ &\left. -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 - \frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_1 \right] \Psi[\sigma], \end{aligned} \quad (3.47a)$$

$$\left[\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta x_\mu} - \frac{1}{2c} \int D(x-x') (\delta j_\mu(x'))_1 d\sigma'_\mu \right] \Psi[\sigma] = 0, \quad (3.47b)$$

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \left[-\frac{1}{4c} \{j_\mu(x), \delta A_\mu(x)\} - \right. \\ &\left. -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\}_0 - \frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\}_1 \right] \Psi[\sigma]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Члены, соответствующие взаимодействию с полем частиц, входят в (3.47a) после прямых естественных вычислений, в то время как для получения тех же величин в уравнении (3.48) приходится использовать довольно сложные приемы в связи с необходимостью объединить в конечном результате взаимодействия с продольным и поперечным полями. С другой стороны, при применении уравнения (3.47a) следует еще дополнительно производить исключение продольных полей, в то время как при описании процессов излучения с помощью уравнения (3.48) не требуется выполнения добавочных операций. Чтобы дать совершенно законченную картину использования рассмотренных двух способов учета процессов второго порядка, произведем исключение из (3.47a) продольного поля. Тем самым мы, наконец, закончим доказательство, которое подразумевалось в уравнении (3.2) и в получающемся из (3.2) уравнении (3.48).

Отметим сначала, что выполняется следующее соотношение:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x)\} &= -\frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \mathcal{A}_\mu(x)\} - \\ -\frac{1}{4c} n_\mu \{(\delta j_\mu(x))_1, n_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\Delta(x) - \Delta'(x))\} &+ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{1}{4c} \{(\delta j_\mu(x))_1, \Delta'(x)\}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Последний член правой части (3.49) может быть исключен с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} \Psi[\sigma] &\rightarrow e^{-iG'[\sigma]} \Psi[\sigma], \\ G'[\sigma] &= \frac{1}{4\hbar c^2} \int \{(\delta j_\mu(x))_1, \Delta'(x)\} d\sigma_\mu, \end{aligned} \quad (3.50)$$

подобно тому как было произведено исключение аналогичного члена в части I [см. (I. 3.19) и (I. 3.20)]. Однако в противоположность (I. 3.19) и (I. 3.20) в данном случае исключение указанного члена можно произвести в связи с различием коммутационных свойств $\delta j_\mu(x)$ и $j_\mu(x)$ только с точностью до второго порядка. Подобное приближение достаточно для наших вычислений. С точностью до второго порядка новое дополнительное условие можно теперь записать в виде

$$\left[\Delta(x) - \Lambda'(x) + i[G'[\sigma], (\Delta(x) - \Lambda'(x))] - \frac{1}{2c} \int_{\sigma} \mathcal{D}(x-x') (\delta j_\mu(x'))_1 d\sigma'_\mu \right] \Psi[\sigma] = 0. \quad (3.51)$$

К счастью, $\delta j_\perp(x)$ коммутирует с $\Delta(x) - \Lambda'(x)$, благодаря чему новое дополнительное условие сводится просто к соотношению

$$[\Delta(x) - \Lambda'(x)] \Psi[\sigma] = 0, \quad (3.52)$$

которое совпадает с формулой (I. 3.26). Для проверки приведенного перестановочного соотношения учтем, что

$$\delta j_\mu(x) = \frac{i}{2hc^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')] \varepsilon(x-x') \times \left\{ \mathcal{Q}_\nu(x') + n_\nu n_\lambda \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} (\Lambda(x') - \Lambda'(x')) \right\}. \quad (3.53)$$

Как легко показать, величина рассматриваемого коммутатора не зависит от неучтенного слагаемого с $\partial \Lambda'(x') / \partial x'_\nu$. Обратив, далее, внимание на то, что коммутатор с $\Delta(x) - \Lambda'(x)$ в различных точках равен нулю, получаем искомый результат. Из нового дополнительного условия (3.52) следует, что второй член правой стороны равенства (3.49) не будет входить в уравнение движения для вектора состояния. Кроме того, при учете дополнительного условия выражение для тока, индуцированного $A_\mu(x)$ (3.53), сводится к выражению для тока, индуцированного $\mathcal{Q}_\mu(x)$. Тем самым мы показали, что при исключении продольных полей уравнение (3.47а) переходит в (3.48).

Взаимодействие поля частиц с самим собой состоит из связи различных частиц между собой и самодействия отдельных частиц. Нашей следующей задачей будет разделение членов взаимодействия частиц на две указанные части. В основе подобного разложения на слагаемые, которые можно назвать однокластичными и двухчастичными, лежит интерпретация описывающих поле частиц спиноров как операторов порождения и уничтожения. Из операторного перестановочного соотношения

$$[\psi(x), Q] = ie \int_{\sigma} \{ \psi(x), (\bar{\psi}(x') \gamma_{\mu\alpha}) \psi'_\alpha(x') d\sigma'_\mu = e\psi(x) \quad (3.54)$$

следует, что для собственного состояния полного заряда, описываемого функцией $\Psi(Q')$, имеет место соотношение

$$Q\psi(x)\Psi(Q') = (Q' - e)\psi(x)\Psi(Q'). \quad (3.55)$$

Отсюда очевидно, что $\psi(x)$ действует как оператор уменьшения полного заряда системы на величину e . Следовательно, действие этого оператора приводит либо к исчезновению частицы с зарядом $+e$, либо к порождению частицы с зарядом $-e$. Подобным же образом, оператор $\bar{\psi}(x)$ или $\psi(x)$ вызывает либо порождение частицы с зарядом $+e$, либо исчезновение частицы с зарядом $-e$. Величины типа $\bar{\psi}\psi$ приводят, следовательно, к эффектам, подобным уничтожению частицы в одном состоянии и порождению аналогичной частицы в другом состоянии, что может также рассматриваться как переход частицы из одного состояния в другое. Такие величины могут быть названы однокластичными операторами,

хотя, строго говоря, подобный термин следовало бы применять к разности величин типа $\bar{\psi}\psi$ и их средних вакуумных значений. Более сложные операторы вида $\bar{\psi}\bar{\psi}\bar{\psi}\psi$ вызывают различные эффекты, в том числе уничтожение двух частиц и порождение двух других частиц в различных состояниях, что следует рассматривать как переход пары частиц из одной совокупности двух состояний в другую. Подобные эффекты с двумя частицами нужно отличать от процессов, в которых одна частица переходит из одного состояния в другое, в то время как вторая частица сначала порождается, а затем исчезает. Такие переходы, связанные с флуктуацией вакуума, неотличимы при наблюдении от упомянутых выше простых переходов отдельной частицы. Операторы $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, конечно, вызывают еще такие явления в вакууме, когда оба перехода представляют собой вакуумные флуктуации. Подобным отделением возможных переходов, являющихся вакуумными флуктуациями, операторы $\bar{\psi}\bar{\psi}\psi\psi$, а также более общие выражения могут быть разложены на составляющие, относящиеся к определенному числу частиц. Разложим указанным образом оператор

$$\{j_\mu(x), j_\nu(x')\} = -e^2 c^2 \left\{ \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu, \psi(x)] \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x') \gamma_\nu, \psi(x')] \right\}. \quad (3.56)$$

Для нахождения вакуумного среднего значения этого оператора достаточно заметить все входящие в него билинейные произведения $\bar{\psi}\psi$ и $\psi\bar{\psi}$ на их вакуумные средние значения. Поскольку, однако, вакуумные средние значения $\gamma_\mu(x)$ и $j_\nu(x')$ равны нулю, следует учитывать лишь произведения типа $\bar{\psi}(x)\psi(x')$, $\bar{\psi}(x')\psi(x)$, $\psi(x)\bar{\psi}(x')$ и $\psi(x')\bar{\psi}(x)$. Рассмотрим подробнее одно из слагаемых

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x') \psi_\delta(x'). \quad (3.57)$$

Оператор $\psi_\delta(x')$, действуя на вектор вакуумного состояния, приводит к образованию частицы с зарядом $-e$ (например, электрона). Действие оператора $\bar{\psi}_\gamma(x')$ может вызвать немедленное уничтожение этой частицы, но по изложенным выше причинам такой член здесь исключается. Таким образом, существенным результатом действия $\bar{\psi}_\gamma(x')$ будет порождение частицы с зарядом $+e$ (позитрона). Для того чтобы сохранилось вакуумное состояние, оставшиеся два оператора должны уничтожить порожденные электрон и позитрон. Следовательно, оператор $\psi_\beta(x)$ будет уничтожать частицу, порожденную $\bar{\psi}_\gamma(x')$, благодаря чему $\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x')$ можно здесь прямо заменить на среднее значение по вакууму этой величины. Наконец, оператор $\bar{\psi}_\alpha(x)$ должен уничтожить электрон, порожденный $\psi_\delta(x')$, что также позволяет заменить произведение $\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\delta(x')$ на его среднее вакуумное значение. Несмотря на то, что между $\psi_\alpha(x)$ и $\psi_\beta(x)$ расположены два других оператора, оператор $\bar{\psi}_\alpha(x)$ можно передвинуть в положение, соседнее с $\psi_\beta(x)$, поскольку оператор $\bar{\psi}_\alpha(x)$ антикоммутирует как с $\psi_\beta(x)$, так и с $\bar{\psi}_\gamma(x')$; последнее, действительно, имеет место, так как оператор $\psi_\alpha(x)$ и операторное произведение $\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x')$ действуют на различные частицы. Отсюда вытекает, что вакуумное среднее значение величины (3.57) равно

$$\text{Но} \quad (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x') \psi_\delta(x') \rangle_0. \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x') \rangle_0 &= \frac{1}{2} \{ \psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x') \} + \frac{1}{2} \langle [\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x')] \rangle_0 = \\ &= -\frac{i}{2} S_{\beta\gamma}(x-x') - \frac{1}{2} S_{\beta\gamma}^{(1)}(x-x') = -iS_{\beta\gamma}^{(+)}(x-x') \end{aligned} \quad (3.59)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\delta(x') \rangle_0 &= -iS_{\delta\alpha}(x'-x) - \langle \psi_\delta(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \rangle_0 = \\ &= -iS_{\delta\alpha}(x'-x) + iS_{\delta\alpha}^{(+)}(x'-x) = -iS_{\delta\alpha}^{(-)}(x'-x). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Следовательно, выражение (3.58) равно

$$-\text{tr} [\gamma_\mu S^{(+)}(x-x') \gamma_\nu S^{(-)}(x'-x)]. \quad (3.61)$$

С помощью подобных же вычислений находим

$$\begin{aligned} \{j_\mu(x), j_\nu(x')\}_0 &= e^2 c^2 \text{tr} [\gamma_\mu S^{(+)}(x-x') \gamma_\nu S^{(-)}(x'-x) + \\ &+ \gamma_\mu S^{(-)}(x-x') \gamma_\nu S^{(+)}(x'-x)] = \\ &= \frac{e^2 c^2}{2} \text{tr} [\gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu S(x'-x) + \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x)]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Применяя для определения значения входящего сюда следа метод, использованный при выводе формулы (2.15), получаем

$$\begin{aligned} \{j_\mu(x), j_\nu(x')\}_0 &= 2e^2 c^2 \left\{ 2 \frac{\partial \Delta(x-x')}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta(x-x')}{\partial x_\nu} - \right. \\ &- \delta_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial \Delta(x-x')}{\partial x_\lambda} \right)^2 + x_0^2 (\Delta(x-x'))^2 \right] - 2 \frac{\partial \Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\mu} \frac{\partial \Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\nu} + \\ &\left. + \delta_{\mu\nu} \left[\left(\frac{\partial \Delta^{(1)}(x-x')}{\partial x_\lambda} \right)^2 + x_0^2 (\Delta^{(1)}(x-x'))^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Этому выражению в свою очередь может быть придан аналогичный с (2.23) вид:

$$\{j_\mu(x), j_\nu(x')\}_0 = 4e^2 c^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} \square^2 \right) (\bar{L}(\lambda) - L^{(1)}(\lambda)), \quad (3.64)$$

где

$$\begin{aligned} 4 \left(\frac{\partial \bar{L}(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 &= \frac{\partial^2 L(\lambda)}{\partial \lambda^2}, \\ \left(\frac{\partial \Delta^{(1)}(\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 &= \frac{\partial^2 L^{(1)}(\lambda)}{\partial \lambda^2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

В частности,

$$\{j_\mu(x), j_\mu(x')\}_0 = -12e^2 c^2 \square^2 (\bar{L}(\lambda) - L^{(1)}(\lambda)). \quad (3.66)$$

Для получения составляющей одночастичного оператора (3.56) мы выделим ту часть этого оператора, которая индуцирует переходы, например позитрона, из одного состояния в другое, не вызывая при этом никаких дополнительных наблюдаемых изменений поля частиц. Мы можем снова рассмотреть типичный член вида (3.57). Оператор $\psi_\beta(x')$ либо уничтожает имеющийся позитрон, либо порождает электрон. Если произошло уничтожение первоначального позитрона, то второй оператор $\bar{\psi}_\gamma(x')$ может только вызвать порождение нового позитрона, вообще говоря, в другом состоянии. Третий оператор может либо уничтожить этот вновь порожденный позитрон, либо породить электрон. В первом случае множитель $\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x')$ будет давать при усреднении вакуумное среднее значение этой величины. Если же осуществляется вторая возможность, то оператор $\bar{\psi}_\alpha(x)$ должен уничтожать порожденный электрон, чтобы в итоге действительно имел место только переход одной частицы. При этом множитель $\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x)$ превратится при усреднении в вакуумное среднее значение этой величины, равное одному из слагаемых вакуумного среднего значения $j_\mu(x)$. Очевидно, в полном выражении этот член сократится с членом, пропорциональным другому слагаемому вакуумного среднего значения $j_\mu(x)$. Таким образом, если исходный позитрон уничтожался первым оператором, то следует учитывать только дальнейшие события, состоящие из флуктуаций вакуума и последующего порождения позитрона в конечном состоянии. Если, с другой стороны, в первом процессе произошло порождение электрона, то во второй стадии нужно учесть лишь порождение позитрона, находящегося в конечном состоянии; по указанным выше основаниям случай немедленного уничтожения электрона можно не учитывать. Третий оператор $\psi_\beta(x)$ может теперь лишь уничтожить первоначальный

позитрон; затем $\bar{\psi}_\alpha(x)$ уничтожает электрон. Разобранные две совокупности переходов тождественны с переходами, индуцируемыми оператором

$$(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \{ [\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\delta(x')]_1 \langle \psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x') \rangle_0 + \\ + [\psi_\beta(x) \bar{\psi}_\gamma(x')]_1 \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\delta(x') \rangle_0 \}, \quad (3.67)$$

который действительно является однокластичной составляющей оператора (3.57), поскольку его среднее вакуумное значение равно нулю.

После приведенных рассуждений легко получить выражение однокластичной составляющей оператора (3.56) при наличии одной частицы

$$\{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_1 = -\frac{e^2 c^2}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\gamma_\nu)_{\gamma\delta} \{ [\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\delta(x')]_1 \times \\ \times \langle [\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x')] \rangle_0 + [\psi_\beta(x), \bar{\psi}_\gamma(x')]_1 \langle [\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\delta(x')] \rangle_0 \} = \\ = \frac{e^2 c^2}{2} \{ [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu \psi(x')]_1 + [\bar{\psi}(x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \psi(x)]_1 \}; \quad (3.68)$$

в частности, для специально интересующего нас случая находим

$$\{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_1 = \frac{e^2 c^2}{2} \{ [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu \psi(x')]_1 + \\ + [\bar{\psi}(x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \psi(x)]_1 \}. \quad (3.69)$$

Очевидно, двухчастичная составляющая оператора (3.56) равна просто

$$\{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_2 = \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \} - \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_1 - \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_0; \quad (3.70)$$

в дальнейших упрощениях этого выражения нет необходимости.

Теперь уравнение движения для вектора состояния с членами взаимодействия второго порядка можно записать более подробно в следующем виде:

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \{ \mathcal{H}_{0,0} + \mathcal{H}_{1,0}(x) + \mathcal{H}_{2,0}(x) + \mathcal{H}_{1,1}(x) \} \Psi[\sigma], \quad (3.71)$$

где

$$\mathcal{H}_{0,0} = -\frac{1}{4c} \{ j_\mu(x), \delta A_\mu(x) \}_0 = -\frac{1}{4c^2} \int \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_0 \bar{D}(x-x') d\omega', \quad (3.72)$$

$$\mathcal{H}_{1,0}(x) = -\frac{1}{4c} \{ j_\mu(x), \delta A_\mu(x) \}_1 - \frac{1}{4c} \{ (\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x) \}_0 = \\ = -\frac{1}{4c^2} \int \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_1 \bar{D}(x-x') d\omega' - \\ - \frac{i}{8c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \varepsilon(x-x') D^{(1)}(x-x') d\omega', \quad (3.73)$$

$$\mathcal{H}_{2,0}(x) = -\frac{1}{4c} \{ j_\mu(x), \delta A_\mu(x) \}_2 = -\frac{1}{4c^2} \int \{ j_\mu(x), j_\nu(x') \}_2 \bar{D}(x-x') d\omega', \quad (3.74)$$

$$\mathcal{H}_{1,1}(x) = -\frac{1}{4c} \{ (\delta j_\mu(x))_1, A_\mu(x) \}_1 = \\ = -\frac{i}{8\hbar c^2} \int [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 \varepsilon(x-x') \{ A_\mu(x), A_\nu(x') \}_1 d\omega'. \quad (3.75)$$

Индексы у скобок обозначают здесь число частиц и число световых квантов, участвующих в переходах, описываемых соответствующими выражениями. Изменение свойств вакуума, вызванное взаимодействием между веществом и излучением, определяется величиной

$$\mathcal{H}_{0,0} = 3e^2 \int \square^2 (\bar{L}(\lambda) - L^{(1)}(\lambda)) \bar{D}(x-x') d\omega' = -3e^2 (\bar{L}(0) - L^{(1)}(0)), \quad (3.76)$$

не представляющей, однако, никакого интереса с физической точки зрения. Рассмотрим, наконец, выражение, описывающее изменение свойств отдельных частиц:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}l_{1,0}(x) = & -\frac{e^2}{8} \int \{ [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\mu \psi(x')]_1 \bar{D}(x-x') + \\ & + [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \gamma_\mu \psi(x')]_1 D^{(1)}(x-x') + \\ & + [\bar{\psi}(x') \gamma_\mu S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu, \psi(x)]_1 \bar{D}(x-x') + \\ & + [\bar{\psi}(x') \gamma_\mu \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu, \psi(x)]_1 D^{(1)}(x-x') \} d\omega' = \\ & = \frac{1}{4} [\bar{\psi}(x), \varphi(x)]_1 + \frac{1}{4} [\bar{\varphi}(x), \psi(x)], \end{aligned} \quad (3.77)$$

где

$$\varphi(x) = -\frac{e^2}{2} \int \gamma_\mu [\bar{D}(x-x') S^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \bar{S}(x-x')] \gamma_\mu \psi(x') d\omega'. \quad (3.78)$$

Мы докажем, что величина $\varphi(x)$ пропорциональна $\psi(x)$:

$$\varphi(x) = \delta m c^2 \psi(x), \quad (3.79)$$

так что

$$\mathcal{E}l_{1,0}(x) = \delta m c^2 \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \psi(x)]_1 = \delta m c^2 \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \psi(x) + \bar{\psi}'(x) \psi'(x)]_1. \quad (3.80)$$

Очевидно, в этом случае δm представляет собой электромагнитную массу электрона.

Используя тождество

$$\gamma_\mu \left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} - x_0 \right) \gamma_\mu = -2 \left(\gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x_\lambda} + 2x_0 \right), \quad (3.81)$$

функцию $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x) = e^2 \int \left\{ \gamma_\lambda \left[\bar{D}(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \Delta^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \bar{\Delta}(x-x') \right] + \right. \\ \left. + 2x_0 [\bar{D}(x-x') \Delta^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \bar{\Delta}(x-x')] \right\} \psi(x') d\omega'. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Определим теперь функцию $P(\lambda)$ от $\lambda = -(x_\mu - x'_\mu)^2$ с помощью равенства

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} = \bar{D}(\lambda) \frac{\partial \Delta^{(1)}(\lambda)}{\partial \lambda} + D^{(1)}(\lambda) \frac{\partial \bar{\Delta}(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.83)$$

Преимущество, даваемое введением этой функции, состоит в том, что соотношение

$$\bar{D}(x) \frac{\partial \Delta^{(1)}(x)}{\partial x_\mu} + D^{(1)}(x) \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu} = -2x_\mu \frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial P(\lambda)}{\partial x_\mu} \quad (3.84)$$

позволяет записать первый член (3.82) в более простом виде:

$$e^2 \int \gamma_\mu \frac{\partial P(\lambda)}{\partial x_\mu} \psi(x') d\omega' = e^2 \int P(\lambda) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \psi(x') d\omega' = -e^2 x_0 \int P(\lambda) \psi(x') d\omega'. \quad (3.85)$$

Отсюда следует

$$\varphi(x) = e^2 x_0 \int Q(\lambda) \psi(x') d\omega', \quad (3.86)$$

где

$$Q(\lambda) = 2 [D^{(1)}(\lambda) \Delta^{(1)}(\lambda) + D^{(1)}(\lambda) \bar{\Delta}(\lambda)] - P(\lambda). \quad (3.87)$$

Нахождение явного вида функций $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ аналогично отысканию $G(\lambda)$ (см. раздел 2). Прежде всего заметим, что

$$\frac{\partial P(\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(i\lambda(\alpha + \beta) + i\frac{x_0^2}{4\alpha}) \alpha \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right) d\alpha d\beta$$

и

$$P(\lambda) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \exp(i\lambda(\alpha + \beta) + i\frac{x_0^2}{4\alpha}) \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right) d\alpha d\beta. \quad (3.88)$$

Следовательно,

$$Q(\lambda) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \exp(i\lambda(\alpha + \beta) + i\frac{x_0^2}{4\alpha}) \left(2 - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} + \frac{\beta}{|\beta|} \right) d\alpha d\beta. \quad (3.89)$$

При переходе к переменным v и w , определяемым равенствами (2.24), соотношение (3.89) принимает вид

$$Q = \frac{i}{4(2\pi)^4} x_0^4 \int_{-1}^1 \frac{3-v}{(1-v^2)^2} dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w^3} \exp \left[iw \frac{1-v}{2} + i \frac{\lambda x_0^2}{w(1-v^2)} \right]. \quad (3.90)$$

При учете (2.36) последнее выражение в свою очередь превращается в следующее:

$$Q = \frac{1}{16(2\pi)^6} \int (dk) \exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)) \int_{-1}^1 (3-v) dv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{|w|} \times \\ \times \exp \left(i \left[\frac{1-v}{2} + \frac{k_\mu^2}{4x_0^2} (1-v^2) \right] w \right). \quad (3.91)$$

Отметим, далее, что $\psi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(\square^2 - x_0^2) \psi(x) = 0. \quad (3.92)$$

Отсюда следует, что разложение $\psi(x)$ по плоским волнам $e^{ik_\mu x_\mu}$ содержит только такие волновые векторы k_μ , которые подчиняются условию

$$k_\mu^2 = -x_0^2. \quad (3.93)$$

Следовательно, при определении значения интеграла

$$\int Q(\lambda) \psi(x') d\omega',$$

где функция $Q(\lambda)$ представлена интегралом Фурье

$$Q(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)) F(k_\mu^2) (dk), \quad (3.94)$$

в подинтегральном выражении аргумент k_μ^2 в функции $F(k_\mu^2)$ может быть заменен на $-x_0^2$. Таким образом,

$$\int Q(\lambda) \psi(x') d\omega' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) \int d\omega' \exp(ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)) F(-x_0^2) \psi(x') = F(-x_0^2) \psi(x). \quad (3.95)$$

Последний результат подтверждает высказанное утверждение о том, что функция $\varphi(x)$ пропорциональна $\psi(x)$ и дает величину коэффициента пропорциональности

$$\delta mc^2 = \frac{\alpha}{8\pi} m_0 c^2 \int_{-1}^1 (3-v) dv \int_0^{\infty} \frac{dw}{w} \cos \left(\frac{1-v}{2} \right)^2 w. \quad (3.96)$$

Интегрирование в (3.96) удобно выполнить по частям следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\delta m}{m_0} &= \frac{\alpha}{16\pi} \int_{-1}^1 d[(v-5)(1-v)] \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \cos\left(\frac{1-v}{2}\right)^2 \omega = \\ &= \frac{\alpha}{8\pi} \left[6 \int_0^\infty \frac{\cos \omega}{\omega} d\omega + \int_{-1}^1 (5-v) \left(\frac{1-v}{2}\right)^2 dv \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^\infty \sin\left(\frac{1-v}{2}\right)^2 \omega d\omega \right] = \frac{3\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\gamma\omega_0} + \frac{5}{6} \right]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Тем самым мы получаем для электромагнитной массы электрона или позитрона логарифмически расходящееся значение. Другой способ нахождения этой величины, позволяющий провести сравнение с предыдущими работами [18], заключается в непосредственной подстановке в формулу (3.82) функций $D(x)$, $\Delta(x)$, $D^{(1)}(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$, представленных в виде интегралов Фурье. Электромагнитная масса выражается тогда в виде интеграла по импульсам виртуальных квантов. Окончательно в этом случае получается

$$\frac{\delta m}{m_0} = \frac{3\alpha}{2\pi} \left[\ln \frac{K + K_0}{x_0} - \frac{1}{6} \right]_{K=\infty}, \quad (3.98)$$

где $K_0 = (K^2 + x_0^2)^{1/2}$. Очевидно, $1/\omega_0 \approx (K/x_0)^2$.

Для подтверждения правильности отождествления величины δm с электромагнитной массой мы должны показать, что член $\mathcal{H}_{1,0}(x)$ можно исключить из уравнения (3.71) при одновременной замене в уравнениях движения поля частиц массы m на $m_0 + \delta m$. Тем самым мы докажем общий характер обеих составляющих действительной массы электрона. Произведем соответственно сказанному преобразование вектора состояния:

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma] \Psi[\sigma], \quad (3.99)$$

где $U[\sigma]$ выбрано так, чтобы компенсировать изменение $\Psi[\sigma]$, связанное с $\mathcal{H}_{1,0}(x)$. Поэтому уравнение движения для $U[\sigma]$ будет иметь вид

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma} = \mathcal{H}_{1,0}(x) U[\sigma]. \quad (3.100)$$

Таким образом, для описания эффектов собственной энергии мы возвращаемся к гейзенберговскому представлению. Преобразование (3.99) вызывает одновременное изменение операторов поля частиц

$$\psi(x) = U^{-1}[\sigma] \psi(x) U[\sigma]; \quad (3.101)$$

при этом новые операторы и новый вектор состояния обозначаются жирными буквами. Для построения уравнения движения для $\psi(x)$ нужно использовать соотношение, аналогичное (1.2.9). Поскольку в этом случае представление взаимодействия и гейзенберговское представление меняются ролями, мы получаем

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} = U^{-1}[\sigma] \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_\mu} U[\sigma] - \frac{i}{\hbar c} \int \psi(x'), \mathbf{H}_{1,0}(x) d\sigma'_\mu, \quad (3.102)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + x_0 \right) \psi(x) &= -\frac{i}{\hbar c} \int \gamma_\mu \psi(x'), \mathbf{H}_{1,0}(x) d\sigma'_\mu = \\ &= -\frac{\delta mc}{\hbar} i \int \gamma_\mu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) d\sigma'_\mu \psi_\alpha(x) = -\delta x \psi(x), \end{aligned} \quad (3.103)$$

где

$$\delta x = \frac{\delta mc}{h}. \quad (3.104)$$

В итоге мы получаем желаемый результат:

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \kappa \right) \psi(x) = 0, \quad (3.105)$$

причем

$$\kappa = \frac{mc}{h}, \quad m = m_0 + \delta m. \quad (3.106)$$

Функциональная производная вектора состояния по σ , получающаяся при исключении членов $\mathcal{H}_{1,0}(x)$ и $\mathcal{H}_{0,0}$ (что можно сделать, не изменяя предыдущих рассуждений), определяется с точностью до второго порядка уравнением движения

$$i\hbar \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \{H_{2,0}(x) + H_{1,1}(x)\} \Psi[\sigma]. \quad (3.107)$$

Это уравнение описывает взаимодействие второго порядка между частицей и световым квантом или другой частицей.

Нашей последней задачей является рассмотрение новых выражений для энергии и импульса, которые получаются после выполнения последовательности преобразований, приводящих к уравнению (3.107). При этом мы вновь подтвердим полное слияние механической и электромагнитной массы электрона. Отметим сначала, что соображения, которые привели нас к выражению для вектора энергии — импульса в представлении взаимодействия (1. 2.52)

$$P_{\mu}[\sigma] = P_{\mu}^{(0)} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} \mathcal{H}(x) d\sigma_{\mu}, \quad (3.108a)$$

$$\mathcal{H}(x) = -\frac{1}{c} j_{\mu}(x) A_{\mu}(x), \quad (3.108b)$$

носят весьма общий характер. Если производится преобразование вектора состояния при другом значении $\mathcal{H}(x)$, то для нового вектора энергии — импульса должно сохраняться подобное же выражение. Мы подтвердим это в данном случае прямым вычислением. Оператор энергии — импульса, соответствующий вектору состояния, получающемуся после преобразования (3.7), равен с точностью до второго порядка

$$\begin{aligned} P_{\mu}[\sigma] &= e^{iS[\sigma]} \left[P_{\mu}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} j_{\nu}(x) A_{\nu}(x) d\sigma_{\mu} \right] e^{-iS[\sigma]} = \\ &= P_{\mu}^{(0)} + i[S[\sigma], P_{\mu}^{(0)}] - \frac{1}{2} [S[\sigma], [S[\sigma], P_{\mu}^{(0)}]] + \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} j_{\nu}(x) A_{\nu}(x) d\sigma_{\mu} + i \left[S[\sigma], \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} j_{\nu}(x) A_{\nu}(x) d\sigma_{\mu} \right]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Из интерпретации величин $P_{\mu}^{(0)}$ как операторов смещений свободных полей для случая функционала $S[\sigma]$ следует

$$\frac{i}{\hbar} [S[\sigma], P_{\mu}^{(0)}] = \int_{\sigma} \frac{\delta S[\sigma]}{\delta \sigma(x)} d\sigma_{\mu}, \quad (3.110)$$

откуда

$$i[S[\sigma], P_{\mu}^{(0)}] + \frac{1}{c^2} \int_{\sigma} j_{\nu}(x) A_{\nu}(x) d\sigma_{\mu} = 0, \quad (3.111)$$

$$P_{\mu}[\sigma] = P_{\mu}^{(0)} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \frac{i}{2} [j_{\nu}(x) A_{\nu}(x), S[\sigma]]. \quad (3.112)$$

Соотношение (3.112) действительно имеет вид (3.108а) со значением $\mathcal{H}(x)$, взятым из формулы (3.14). Теперь не представляет затруднений перейти к выражению для вектора энергии — импульса

$$P_\mu[\sigma] = P_\mu^{(0)} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} [\mathcal{H}_{0,0} + \mathcal{H}_{1,0}(x) + \mathcal{H}_{2,0}(x) + \mathcal{H}_{1,1}(x)] d\sigma_\mu, \quad (3.113)$$

соответствующему уравнению для вектора состояния (3.71). Последним преобразованием, которое следует учесть, является преобразование (3.99). После этого четырехмерный вектор энергии — импульса принимает следующий вид:

$$P_\mu[\sigma] = U^{-1}[\sigma] P_\mu^{(0)} U[\sigma] - \frac{1}{c} \int_{\sigma} [\mathcal{H}_{0,0} + \mathbf{H}_{1,0}(x) + \mathbf{H}_{2,0}(x) + \mathbf{H}_{1,1}(x)] d\sigma_\mu. \quad (3.114)$$

Далее, согласно формулам (1. 1.64) и (3.102), имеет место равенство

$$U^{-1}[\sigma] P_\mu^{(0)} U[\sigma] = P_\mu^{(0)} + \frac{i}{2c} \int_{\sigma} d\sigma_\mu [\bar{\psi}(x), [\gamma_\mu \psi(x'), \mathbf{H}_{1,0}(x)]]_1 d\sigma'_\nu, \quad (3.115)$$

где индекс 1 означает, что величины $P_\mu^{(0)}$ или $\mathbf{P}_\mu^{(0)}$ составлены так, чтобы их среднее значение по вакууму равнялось нулю. После преобразования второго слагаемого правой стороны равенства (3.115)

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{\sigma} d\sigma_\mu i \{ \gamma_\mu \psi(x'), \bar{\psi}_\alpha(x) \} \delta mc^2 \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \psi_\alpha(x)]_1 d\sigma'_\nu &= \\ &= \frac{1}{c} \int_{\sigma} \delta mc^2 \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \psi(x)] d\sigma_\nu = \frac{1}{c} \int_{\sigma} \mathbf{H}_{1,0}(x) d\sigma_\nu \end{aligned}$$

получим

$$P_\mu[\sigma] = P_\mu^{(0)} - \frac{1}{c} \int_{\sigma} [\mathbf{H}_{2,0}(x) + \mathbf{H}_{1,1}(x)] d\sigma_\mu. \quad (3.116)$$

В соответствии с тем, что к тензору энергии — импульса системы можно прибавлять величины, пропорциональные $\delta_{\mu\nu}$, в последнем выражении исключен вакуумный член $\mathcal{H}_{0,0}$. Этот результат вновь показывает, что изменения энергии и импульса отдельной частицы, вызванные эффектами самодействия, полностью сводятся к добавлению электромагнитной собственной массы δm к механической собственной массе m_0 , т. е. сводятся к ненаблюдаемой перенормировке массы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При изложении квантовой электродинамики был введен ряд сингулярных функций, связанных с электромагнитным полем и полем частиц, а именно, $D(x)$, $D^{(1)}(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^{(1)}(x)$. Мы произведем теперь построение явных выражений для этих функций. Начнем с инвариантной функции $\Delta(x)$, относящейся к полю частиц [функция $D(x)$ получается из $\Delta(x)$ при $x_0 = 0$]. Ее анализ облегчается рассмотрением связанной с ней функции

$$\bar{\Delta}(x) = -\frac{1}{2} \Delta(x) \varepsilon(x) = \frac{1}{2} \Delta(x) \frac{\varepsilon_\mu x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|}, \quad (\text{П.1})$$

где величина $\varepsilon(x)$ равна $+1$ или -1 в зависимости от того, положительно или отрицательно значение x_0 . Этот определяющий знак множитель по существу инвариантен, поскольку выражение (П.1) фактически используется только для временно-подобных векторов x_μ . Указанное положение подтверждается инвариантным представлением $\varepsilon(x)$:

$$\varepsilon(x) = -\frac{\varepsilon_\mu x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|}, \quad (\text{П.2})$$

где ϵ_μ — произвольный временно-подобный вектор и $\epsilon_0 > 0$. Следует прежде всего отметить, что

$$(\square^2 - \epsilon_0^2) \bar{\Delta}(x) = 0, \quad x_\mu \neq 0, \quad (\text{П.3})$$

поскольку область, в которой одновременно изменяется знак $\epsilon(x)$ и не равна нулю функция $\Delta(x)$, ограничивается временно-подобной окрестностью начала координат. Для определения значения левой стороны (П.3) в начале координат рассмотрим

$$\lim_{\delta\omega} \int_{\delta\omega} d\omega (\square^2 - \epsilon_0^2) \bar{\Delta}(x) = \lim \left[\int_{\sigma_+} d\sigma_\mu \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu} - \int_{\sigma_-} d\sigma_\mu \frac{\partial \bar{\Delta}(x)}{\partial x_\mu} \right], \quad (\text{П.4})$$

где интегрирование по $\delta\omega$ распространено от пространственно-подобной поверхности σ_+ до пространственно-подобной поверхности σ_- , первая из которых лежит по отношению к началу координат в будущем, а вторая — в прошедшем. Обе эти поверхности устремляются в пределе к пространственно-подобной поверхности σ , проходящей через начало координат. Таким образом,

$$\lim_{\delta\omega} \int_{\delta\omega} d\omega (\square^2 - \epsilon_0^2) \bar{\Delta}(x) = - \int_{\sigma} \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x_\mu} d\sigma_\mu = -1. \quad (\text{П.5})$$

Из формулы (П.5) следует

$$(\square^2 - \epsilon_0^2) \bar{\Delta}(x) = -\delta(x), \quad (\text{П.6})$$

где $\delta(x)$ — четырехмерная δ -функция,

$$\delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3). \quad (\text{П.7})$$

Отсюда очевидно, что функция $\bar{\Delta}(x)$ играет роль четырехмерной функции Грина. Взяв интегральное представление δ -функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(ik_\mu x_\mu) (dk), \quad (\text{П.8})$$

где

$$(dk) = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3, \quad (\text{П.9})$$

получим следующее частное решение уравнения (П.6):

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{\exp(ik_\mu x_\mu)}{k_\lambda^2 + \epsilon_0^2} (dk). \quad (\text{П.10})$$

Данное решение, как будет показано, соответствует значению функции $\Delta(x)$, удовлетворяющему условиям (I. 2.18), посредством которых эта функция была определена.

Использование интегрального представления

$$P \frac{1}{\tau} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i a \tau} \frac{a}{|a|} da \quad (\text{П.11})$$

с подстановкой $\tau = k_\lambda^2 + \epsilon_0^2$ позволяет выполнить в выражении (П.10) интегрирование по k -пространству, причем получается

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &= -\frac{i}{2(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|} da \int (dk) \exp(ia k_\mu^2 + ik_\mu x_\mu) \exp(ia \epsilon_0^2) = \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \exp\left(-i \frac{x_\mu^2}{4a} + ia \epsilon_0^2\right); \quad (\text{П.12}) \end{aligned}$$

здесь была применена формула

$$\int (dk) \exp(ia k_{\mu}^2 + i k_{\mu} x_{\mu}) = \int (dk) \exp(ia k_{\mu}^2) \exp\left(-i \frac{x_{\mu}^2}{4a}\right) = i \frac{\pi^2}{a|a|} \exp\left(-i \frac{x_{\mu}^2}{4a}\right). \quad (\text{П.13})$$

Если ввести новую переменную

$$\alpha = \frac{1}{4a}, \quad (\text{П.14})$$

то формула (П.12) принимает вид

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda\alpha + i \frac{x_0^2}{4a}) d\alpha, \quad (\text{П.15})$$

где

$$\lambda = -x_{\mu}^2. \quad (\text{П.16})$$

Формула (П.15) эквивалентна формуле

$$\bar{\Delta}(x) = \bar{\Delta}(\lambda) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \cos\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4a}\right) d\alpha = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} \sin\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4a}\right) d\alpha. \quad (\text{П.17})$$

Для выполнения интегрирования в последнем интеграле введем новую переменную θ , определяемую равенством

$$\alpha = \frac{x_0}{2|\lambda|^{1/2}} e^{\theta}. \quad (\text{П.18})$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} \sin\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4a}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\frac{x_0}{2} \frac{|\lambda|^{1/2}}{|\lambda|} \left(e^{\theta} \pm e^{-\theta}\right)\right] d\theta = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x_0 \lambda^{1/2} \operatorname{ch} \theta) d\theta = \pi J_0(x_0 \lambda^{1/2}), & \lambda > 0, \\ - \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x_0 (-\lambda)^{1/2} \operatorname{sh} \theta) d\theta = 0, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{П.19})$$

Получающиеся прерывные величины можно объединить в одном выражении

$$\int_0^{\infty} \sin\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4a}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} = \pi \operatorname{Re} H_0^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2}) \quad (\text{П.20})$$

при условии, что значение $\lambda^{1/2}$ при отрицательном λ считается равным $i|\lambda|^{1/2}$. Окончательно получаем

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) - \frac{x_0^2}{8\pi} \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}}, \quad (\text{П.21})$$

где

$$\operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} = \begin{cases} \frac{J_1(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}}, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{П.22})$$

Появление δ -функции от λ связано с наличием разрыва в значении интеграла (П.20) при $\lambda = 0$. Ясно, что функция $\bar{\Delta}(x)$, а, следовательно, также и $\Delta(x)$ обращаются в нуль при $x_{\mu}^2 > 0$, как это и должно быть согласно определению функции $\Delta(x)$. Положив $x_0 = 0$, получаем

$$\bar{D}(x) = -\frac{1}{2} D(x) \varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \delta(x_{\mu}^2), \quad (\text{П.23})$$

что, как очевидно, согласуется со свойствами распространения электромагнитных процессов.

Интегральное представление самой функции $\Delta(x)$ может быть построено с помощью обращения преобразования Фурье для выражения (П.11):

$$\frac{a}{|a|} = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\tau} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (\text{П. 24})$$

откуда имеем

$$\varepsilon(x) = -\frac{\varepsilon_\mu x_\mu}{|\varepsilon_\mu x_\mu|} = \frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\varepsilon_\mu x_\mu \tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (\text{П. 25})$$

Используя первое из выражений для $\bar{\Delta}(x)$ в формуле (П. 12), имеем

$$\Delta(x) = -\frac{2}{(2\pi)^5} \int (dk) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|} da P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \exp(i(k_\mu + \varepsilon_\mu \tau)x_\mu) \exp(ia(k_\mu^2 + x_0^2)), \quad (\text{П. 26})$$

откуда после преобразования $k_\mu \rightarrow k_\mu - \varepsilon_\mu \tau$ получаем

$$\Delta(x) = -\frac{2}{(2\pi)^5} \int (dk) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{|a|} da P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \exp(-2ia\varepsilon_\mu k_\mu \tau) \exp(ia\varepsilon_\mu^2 \tau^2) \times \\ \times \exp(ik_\mu x_\mu) \exp(ia(k_\mu^2 + x_0^2)). \quad (\text{П. 27})$$

Теперь можно показать, что выражение (П. 27) не зависит от выбора ε_μ , если только ε_μ является временно-подобным вектором и $\varepsilon_0 > 0$. Эти условия могут выполняться и в том случае, когда $-\varepsilon_\mu^2$ есть сколь угодно малое положительное число. Следовательно, при определении значения (П. 27) допустимо усгредить $\varepsilon_\mu^2 \rightarrow 0$, что с учетом формулы

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2ia\varepsilon_\mu k_\mu \tau) \frac{d\tau}{\tau} = -\pi i \frac{a}{|a|} \frac{\varepsilon_\mu k_\mu}{|\varepsilon_\mu k_\mu|} = \pi i \frac{a}{|a|} \varepsilon(k) \quad (\text{П. 28})$$

дает для $\Delta(x)$ выражение

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^4} \int (dk) \int_{-\infty}^{\infty} da \exp(ia(k_\mu^2 + x_0^2)) \exp(ik_\mu x_\mu) \varepsilon(k) = \\ = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int \exp(ik_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + x_0^2) \varepsilon(k) (dk). \quad (\text{П. 29})$$

Отсюда становится очевидным, что полученная функция $\Delta(x)$ удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению:

$$(\square^2 - x_0^2) \Delta(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \exp(ik_\mu x_\mu) (k_\mu^2 + x_0^2) \delta(k_\mu^2 + x_0^2) \varepsilon(k) (dk) = 0, \quad (\text{П. 30})$$

так как $x\delta(x) = 0$. Тем самым мы завершили доказательство правильности высказанного утверждения о том, что интегральное представление $\bar{\Delta}(x)$ (П. 10) дает искомое решение, поскольку показана выполнимость всех трех условий, которыми определялась функция $\Delta(x)$; при этом интегральное условие, согласно (П. 5), эквивалентно дифференциальному уравнению, определяющему $\bar{\Delta}(x)$.

Интегральное представление $\Delta^{(1)}(x)$ может быть непосредственно получено из интегрального представления $\Delta(x)$. Согласно определению (1.57) и формуле (П. 29), имеет место равенство

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(x - \varepsilon\tau) \frac{d\tau}{\tau} = -\frac{i}{\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dk) \varepsilon(k) P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau} \times \\ \times \exp(-ik_\mu \varepsilon_\mu \tau) \exp(ik_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + x_0^2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(ik_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + x_0^2) (dk), \quad (\text{П. 31})$$

которое можно также вывести менее формальным образом при помощи разложения $\Delta(x)$ на части, соответствующие положительным и отрицательным k_0 . Чтобы определить $\Delta^{(1)}(x)$ аналогичным $\bar{\Delta}(x)$ образом, используем интегральное представление

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\tau} da \quad (\text{П. 32})$$

с $\tau = k_\mu^2 + x_0^2$ и выполним интегрирование по k . При этом получаем

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} da \int (dk) \exp(iak_\mu^2 + ik_\mu x_\mu) \exp(iax_0^2) = \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \frac{x_\mu^2}{4a} + ia x_0^2) \frac{a}{|a|} \frac{da}{a^2} = \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(i\lambda a + i \frac{x_0^2}{4a}\right) \frac{a}{|a|} da. \end{aligned} \quad (\text{П. 33})$$

Дальнейшие преобразования выражения (П. 33) дают

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(x) = \Delta^{(1)}(\lambda) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \sin\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^{\infty} \cos\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П. 34})$$

Далее, используя снова подстановку (П. 18), находим

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x_0 \lambda^{1/2} \text{ch } \theta) d\theta = -\pi N_0(x_0 \lambda^{1/2}), & \lambda > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x_0 (-\lambda)^{1/2} \text{sh } \theta) d\theta = 2K_0(x_0 (-\lambda)^{1/2}), & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{П. 35})$$

Полученные результаты можно записать при помощи одной формулы:

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\lambda\alpha + \frac{x_0^2}{4\alpha}\right) \frac{d\alpha}{\alpha} = -\pi \text{Im } H_0^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2}). \quad (\text{П. 36})$$

В отличие от случая (П. 19) здесь не имеет места разрыв в значении интеграла при $\lambda = 0$. Следовательно,

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{x_0^2}{4\pi} \text{Im} \frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} = \begin{cases} \frac{x_0^2}{4\pi} \frac{N_1(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}}, & \lambda > 0, \\ \frac{x_0^2}{2\pi^2} \frac{K_1(x_0 (-\lambda)^{1/2})}{x_0 (-\lambda)^{1/2}}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{П. 37})$$

Особенность в $\Delta^{(1)}(x)$ при $\lambda = 0$ можно выделить, записав $\Delta^{(1)}(x)$ в виде

$$\Delta^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi^2 \lambda} + \frac{x_0^2}{4\pi} \text{Im} \left[\frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} + \frac{2i}{\pi} \frac{1}{x_0^2 \lambda} \right], \quad (\text{П. 38})$$

так как

$$\text{Im} \left[\frac{H_1^{(1)}(x_0 \lambda^{1/2})}{x_0 \lambda^{1/2}} + \frac{2i}{\pi} \frac{1}{x_0^2 \lambda} \right] \approx \frac{1}{\pi} \left[\ln \frac{\gamma x_0 |\lambda|^{1/2}}{2} - \frac{1}{2} \right], \quad x_0 |\lambda|^{1/2} \ll 1, \quad (\text{П. 39})$$

где $\gamma = 1,781$. При $x_0 \rightarrow 0$ получаем

$$D^{(1)}(x) = -\frac{1}{2\pi^2 \lambda} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{x_\mu^2}. \quad (\text{П. 40})$$

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОНА — РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ФОРМУЛАМ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрение поляризации вакуума в предыдущих частях ограничивалось случаем поля заданного внешнего тока. Мы рассмотрим теперь индуцирование тока в вакууме электроном, являющимся динамическим объектом, неотличимым от частиц, связанных с полем флуктуаций. Дополнительный ток, возникающий в результате указанного явления, приводит к изменениям электромагнитных свойств электрона, проявляющимися при его рассеянии кулоновским полем и в сдвиге энергетических уровней. В данной части вычисляются поправки второго порядка к оператору тока и рассматривается случай рассеяния. Поправка к оператору тока, полученная в результате канонического преобразования, представляющего собой по существу перенормировку массы электрона, разлагается в степенной ряд, в котором отбрасываются члены выше второго порядка. Подобным образом находится изменение второго порядка оператора тока, носящее тот же характер, что и рассмотренный ранее ток поляризации вакуума, за исключением составляющей, имеющей вид дипольного тока. Последняя составляющая приводит к увеличению в $\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$ раз спинового магнитного момента электрона. Единственным недостатком поправки второго порядка к оператору тока является содержащаяся в ней логарифмическая расходимость, обязанная инфракрасной катастрофе. Отмечается, что в присутствии внешнего электромагнитного поля поправка первого порядка к току вводит компенсирующую бесконечность. Таким образом, поправки второго порядка к электромагнитным свойствам частицы не могут быть полностью истолкованы без учета характера ее поведения во внешнем поле. Соответственно этому мы рассматриваем во втором разделе взаимодействие трех систем: поля частиц, электромагнитного поля и заданного тока. Показывается, что в этом случае состояние систем может быть описано с помощью потенциала внешнего поля и связанного с ним оператора тока, измененного взаимодействием с вакуумом электромагнитного поля.

Рассматривается конкретный случай рассеяния электрона внешним полем, которое трактуется как малое возмущение. Оказывается удобным вычислять сначала полную вероятность, а затем определять сечения для отдельных событий. Поправка к сечению для упругого рассеяния определяется поправкой второго порядка к оператору тока, в то время как рассеяние с излучением одиночного кванта связано с поправкой к току первого порядка. Конечной целью вычислений является дифференциальное сечение для рассеяния в заданном направлении с заданной максимальной потерей энергии, не содержащее никаких расходимостей. Подробное вычисление проводится в двух случаях: для почти упругого рассеяния электрона, при котором излучается только небольшая доля кинетической энергии, и для рассеяния медленно движущегося электрона с произвольной потерей энергии. В приложении излагается новый способ рассмотрения поляризации вакуума внешним полем. Исследуются условия, накладываемые на индуцируемый ток требованиями сохранения заряда и калибровочной инвариантности. Оказывается, что для выполнения этих формальных условий необходимо обращение в нуль интеграла, который не является абсолютно сходящимся, но равен нулю в силу симметрии подынтегрального выражения. Подстановка этого равного нулю интеграла используется далее для преобразования выражения для индуцированного тока, после которого прямое вычисление дает конечный калибровочно-инвариантный результат. Индуцированный ток содержит член, пропорциональный внешнему току с логарифмически расходящимся множителем пропорциональности, что означает индуцирование в вакууме не равного нулю полного заряда, пропорционального внешнему заряду. Кажущееся противоречие с законом сохранения заряда объясняется тем, что компенсирующий заряд появляется на бесконечности. Наконец, вычисляется выражение для электромагнитной массы электрона с помощью методов, развитых в настоящей части.

В предыдущих частях была развита ковариантная формулировка квантовой электродинамики; развитые представления были использованы при рассмотрении двух простейших явлений, связанных с вакуумными флуктуациями. Во-первых, была рассмотрена поляризация вакуума, которая выражает изменение свойств электромагнитного поля, вызванное взаимодействием этого поля с вакуумными флуктуациями поля частиц. Во-вторых, была рассмотрена проблема электромагнитной массы электрона, включающая задачу нахождения вызванных наличием вакуумных флуктуаций электромагнитного поля поправок к механическим свойствам поля частиц, сопоставляемого одной частице. В обоих случаях было найдено, что все расходимости, появляющиеся из-за неполноты теории, входят в множители ненаблюдаемой перенормировки заряда и массы.

Предыдущее рассмотрение поляризации вакуума ограничивалось случаем заданного распределения токов, не зависящего от динамических реакций электронно-позитронного поля. Мы перейдем теперь к более сложному случаю, когда исходный ток вызван электроном или позитроном — объектом, являющимся динамической системой, и неотличимым от частиц, которые вызывают вакуумные флуктуации. Получающееся изменение электромагнитных свойств упомянутых частиц во внешнем поле можно сравнивать с экспериментально найденными отклонениями от теории Дирака, которые были кратко рассмотрены в части I. В настоящей части мы построим оператор тока, учитывая с точностью до второго порядка изменения, вызываемые вакуумными флуктуациями электромагнитного поля. Этот оператор применяется затем при подсчете радиационных поправок к формулам рассеяния электрона кулоновским полем ¹⁾.

1. Поправки второго порядка к оператору тока

Найдем поправки второго порядка к оператору тока, появляющиеся из-за наличия связи между полем частицы и электромагнитным полем. Эта связь описывается уравнениями

$$\begin{aligned} i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \mathcal{H}(x) \Psi[\sigma], \\ \mathcal{H}(x) &= -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Один из эффектов, вызываемых указанной связью, состоит в появлении у электрона электромагнитной массы, входящей в оператор собственной энергии $\mathcal{H}_{1,0}(x)$. Чтобы в дальнейшем можно было сопоставить электрону экспериментально наблюдаемую массу, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = (\mathcal{H}_{1,0}(x) + \mathcal{H}'(x)) \Psi[\sigma], \tag{1.2}$$

где

$$\mathcal{H}'(x) = \mathcal{H}(x) - \mathcal{H}_{1,0}(x). \tag{1.3}$$

Каноническим преобразованием

$$\begin{aligned} \Psi[\sigma] &\rightarrow W[\sigma] \Psi[\sigma], \\ i\hbar c \frac{\delta W[\sigma]}{\delta \sigma(x)} &= \mathcal{H}_{1,0}(x) W[\sigma] \end{aligned} \tag{1.4}$$

уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = W^{-1}[\sigma] \mathcal{H}'(x) W[\sigma] \Psi[\sigma], \tag{1.5}$$

причем оператор, представляющий ток, одновременно переходит в оператор $W^{-1}[\sigma] j_\mu(x) W[\sigma]$. Далее, как мы показали в части II, спинор $W^{-1}[\sigma] \psi(x) W[\sigma]$ подчиняется уравнению Дирака для частицы с массой $m = m_0 + \delta m$, равной экспериментально наблюдаемой массе электрона. Соответственно этому, среднее значение оператора тока можно вычислять по формуле

$$\langle j_\mu(x) \rangle = (\Psi[\sigma], j_\mu(x) \Psi[\sigma]), \tag{1.6}$$

считая, что

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}'(x) \Psi[\sigma], \tag{1.7}$$

и подразумевая, что всюду подставлена экспериментально наблюдаемая масса электрона.

¹⁾ Краткая сводка полученных нами при этом результатов была уже опубликована ранее [19]. — *Прим. авт.*

Если решение уравнения (1.7) берется в форме

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma] \Psi_0, \quad (1.8)$$

то среднее значение оператора тока имеет вид

$$\langle j_\mu(x) \rangle = (\Psi_0, U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma] \Psi_0) = (\Psi_0, j_\mu(x) \Psi_0); \quad (1.9)$$

последняя запись соответствует описанию эффекта связи между полями с помощью введения измененного оператора тока

$$j_\mu(x) = U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma]. \quad (1.10)$$

Унитарный оператор $U[\sigma]$ подчиняется уравнению движения

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}(x) U[\sigma], \quad (1.11)$$

к которому может быть добавлено граничное условие

$$U[-\infty] = 1 \quad (1.12)$$

в соответствии с предположением, что связь между двумя полями адиабатически устанавливается в отдаленном прошлом.

Теперь можно найти значение оператора $j_\mu(x)$, если учесть, что

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= j_\mu(x) + \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \frac{\delta}{\delta \sigma'(x')} (U^{-1}[\sigma'] j_\mu(x) U[\sigma']) = \\ &= j_\mu(x) - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' U^{-1}[\sigma'] [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] \cdot U[\sigma']. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Основываясь на равенстве

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' U^{-1}[\sigma'] [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] U[\sigma'] &= \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] + \\ &+ \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \int_{-\infty}^{\sigma'} d\omega'' \frac{\delta}{\delta \sigma''(x'')} (U^{-1}[\sigma''] [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] U[\sigma'']) \end{aligned} \quad (1.14)$$

и многократно применяя использованный при выводе (1.13) прием, получаем компоненты нового оператора тока $j_\mu(x)$ в виде бесконечных рядов:

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= j_\mu(x) + \left(-\frac{i}{\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] + \\ &+ \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \int_{-\infty}^{\sigma'} d\omega'' [[j_\mu(x), \mathcal{H}(x')], \mathcal{H}(x'')] + \dots \end{aligned} \quad (1.15)$$

Эквивалентное, но более симметричное относительно прошлого и будущего выражение для $j_\mu(x)$ получается при учете соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \frac{\delta}{\delta \sigma'(x')} (U^{-1}[\sigma'] j_\mu(x) U[\sigma']) &= \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \frac{\delta}{\delta \sigma'(x')} \times \\ &\times (U^{-1}[\sigma'] j_\mu(x) U[\sigma']) + \int_{\sigma}^{\infty} d\omega' \frac{\delta}{\delta \sigma'(x')} (U^{-1}[\sigma'] j_\mu(x) U[\sigma']) = \\ &= (j_\mu(x) - j_\mu(x)) + (j_\mu(x) - U^{-1}[\infty] j_\mu(x) U[\infty]) \end{aligned} \quad (1.16)$$

или следующего из него соотношения

$$\mathbf{j}_\mu(x) = \frac{1}{2} (j_\mu(x) + S^{-1}j_\mu(x)S) + \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] U^{-1}[\sigma'] [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] U[\sigma'], \quad (1.17)$$

где

$$S = U(\infty), \quad U[-\infty] = 1 \quad (1.18)$$

есть оператор столкновений, описывающий реальные переходы, которые изменяют состояние системы. Последовательно применяя использованный выше вычислительный прием, окончательно получаем для измененного оператора тока выражение

$$\mathbf{j}_\mu(x) = \frac{1}{2} (k_\mu(x) + S^{-1}k_\mu(x)S), \quad (1.19)$$

где

$$k_\mu(x) = j_\mu(x) + \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] [j_\mu(x), \mathcal{H}(x')] + \\ + \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] [[j_\mu(x), \mathcal{H}(x'), \mathcal{H}(x'')] + \dots \quad (1.20)$$

При подсчете поправок второго порядка дальнейшие члены приведенного ряда в рассмотрение не входят.

Оператор столкновений S может быть построен аналогичным образом. Имено,

$$S - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} U[\sigma] = -\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{H}(x) U[\sigma], \quad (1.21)$$

$$U[\sigma] - \frac{1}{2}(S + 1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \frac{\delta}{\delta\sigma'(x')} U[\sigma'] = \\ = -\frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x') U[\sigma'], \quad (1.22)$$

откуда следует

$$S - 1 = \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{H}(x)(S + 1) + 2\left(-\frac{i}{2\hbar c}\right)^2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x) \mathcal{H}(x') U[\sigma']. \quad (1.23)$$

Продолжая подобные выкладки, получаем

$$\frac{S-1}{S+1} = \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{H}(x) + \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \mathcal{H}(x) \mathcal{H}(x') + \dots \quad (1.24)$$

Для получения желаемой степени приближения достаточно ограничиться только выписанными членами ряда. В связи с отсутствием реальных эффектов первого порядка, что выражается равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(x) d\omega = 0, \quad (1.25)$$

основными членами в выражении (1.24) будут члены второго порядка:

$$\frac{S-1}{S+1} = -\frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[-\frac{i}{4\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x-x') [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] d\omega' - \mathcal{H}_{1,0}(x) \right]. \quad (1.26)$$

Согласно формулам (II.3.14) и (II.3.17), имеет место равенство (вакуумный член $\mathcal{H}_{0,0}$ несущественен)

$$-\frac{i}{4\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x-x') [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] d\omega' = \mathcal{H}_{1,0}(x) + \mathcal{H}_{2,0}(x) + \mathcal{H}_{1,1}(x), \quad (1.27)$$

откуда следует уравнение

$$\frac{S-1}{S+1} = -\frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}_{2,0}(x) + \mathcal{H}_{1,1}(x)] d\omega, \quad (1.28)$$

описывающее такие реальные процессы, в которых участвуют либо две частицы, либо одна частица и световый квант. Поскольку нас интересуют только эффекты второго порядка для одиночной частицы в отсутствие световых квантов, то реальные процессы указанного типа можно отбросить, так что оператор S в данном случае фактически равен единице. Из этого следует, что оператор тока изменяется только из-за виртуальных процессов и является полностью симметричным по отношению к прошлому и будущему. С желаемой степенью приближения получаем

$$\begin{aligned} j_{\mu}(x) = j_{\mu}(x) &- \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] [j_{\mu}(x), \mathcal{H}(x')] + \\ &+ \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] [j_{\mu}(x), \mathcal{H}_{1,0}(x')] + \\ &+ \left(-\frac{i}{2\hbar c}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] [[j_{\mu}(x), \mathcal{H}(x')], \mathcal{H}(x'')]. \quad (1.29) \end{aligned}$$

Теперь поправку к оператору тока можно записать следующим образом:

$$j_{\mu}(x) - j_{\mu}(x) = \delta j_{\mu}^{(1)}(x) + \delta j_{\mu}^{(2)}(x), \quad (1.30)$$

где величины

$$\delta j_{\mu}^{(1)}(x) = \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] A_{\nu}(x'). \quad (1.31)$$

и

$$\begin{aligned} (\delta j_{\mu}^{(2)}(x))_{1,0} &= -\frac{1}{4\hbar^2 c^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] \times \\ &\times [[j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')] A_{\nu}(x'), j_{\lambda}(x'') A_{\lambda}(x'')]_{1,0} + \\ &+ \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') [j_{\mu}(x), \mathcal{H}_{1,0}(x')]_{1,0} \quad (1.32) \end{aligned}$$

являются соответственно поправками первого и второго порядков; индексы у скобок в выражении для поправки второго порядка показывают, что рассматриваются только эффекты второго порядка, в которых участвует одна

частица и не участвуют световые кванты. Чтобы преобразовать выражение (1.32) к более простому виду, используем равенство

$$\begin{aligned} & \{[j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\nu(x'), j_\lambda(x'') A_\lambda(x'')\}_{1,0} = \\ & = \frac{1}{2} [A_\nu(x'), A_\lambda(x'')] \{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\lambda(x'')]_{1,1} + \\ & + \frac{1}{2} \{A_\nu(x'), A_\lambda(x'')\}_0 [j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\lambda(x'')]_{1,1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} (\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0} & = \frac{i}{4\hbar c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon(x-x') \bar{D}(x'-x'') \{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]_{1,1} - \\ & - \frac{1}{8\hbar c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma', \sigma''] D^{(1)}(x'-x'') [j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]_{1,1} + \\ & + \frac{i}{2\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') [j_\mu(x), \mathcal{H}_{1,0}(x')]_{1,1}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

поскольку имеют место соотношения

$$-\frac{1}{2} \varepsilon(x'-x'') [A_\nu(x'), A_\lambda(x'')] = i\hbar c \delta_{\nu\lambda} \bar{D}(x'-x''), \quad (1.35)$$

$$\{A_\nu(x'), A_\lambda(x'')\}_0 = \hbar c \delta_{\nu\lambda} D^{(1)}(x'-x''). \quad (1.36)$$

Значение двойного коммутатора в выражении (1.34) находится без труда:

$$\begin{aligned} & \{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]\}_{1,0} = -e^3 c^3 [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x') - \\ & - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x), \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \psi(x'')]_{1,0} = \\ & = i e^3 c^3 (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu S(x'-x'') \gamma_\nu \psi(x'') + \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu S(x''-x') \times \\ & \times \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu S(x-x'') \gamma_\nu \psi(x'') - \\ & - \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu S(x''-x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x')). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Соответствующая одной частице часть выражения $\{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]\}$ может быть получена по способу, использованному в части II. Нужно только учитывать, что вакуумное среднее значение величины $[j_\mu(x), j_\nu(x')]$ не равно нулю. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & \{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]\}_{1,0} = 2[j_\mu(x), j_\nu(x')]_0 j_\nu(x'') = \\ & = -e^3 c^3 \{(\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x') - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x))_{1,1}, (\bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \psi(x''))_{1,1}\} = \\ & = -e^3 c^3 (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \{ \psi(x'), \bar{\psi}(x'') \}_0 \gamma_\nu \psi(x'') - \\ & - \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \{ \psi(x''), \bar{\psi}(x') \}_0 \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x) - \\ & - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \{ \psi(x), \bar{\psi}(x'') \}_0 \gamma_\nu \psi(x'') + \\ & + \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu \{ \psi(x''), \bar{\psi}(x) \}_0 \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x'))_{1,1} \end{aligned} \quad (1.38)$$

и

$$\begin{aligned} & \{[j_\mu(x), j_\nu(x'), j_\nu(x'')]\}_{1,1} = 2[j_\mu(x), j_\nu(x')]_0 j_\nu(x'') + \\ & + e^3 c^3 (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu S^{(1)}(x'-x'') \gamma_\nu \psi(x'') - \\ & - \bar{\psi}(x'') \gamma_\nu S^{(1)}(x''-x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu \psi(x) - \\ & - \bar{\psi}(x') \gamma_\nu S(x'-x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x'') \gamma_\nu \psi(x'') + \bar{\psi}(x'') \times \\ & \times \gamma_\nu S^{(1)}(x''-x) \gamma_\mu S(x-x') \gamma_\nu \psi(x'))_{1,1}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Подставив значения величин (1.37) и (1.39) в выражение (1.34), для поправки второго порядка находим

$$\begin{aligned}
 (\delta j_{\mu}^{(2)}(x))_{1,0} = & \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' \varepsilon(x-x') [j_{\mu}(x), j_{\nu}(x')]_0 \bar{D}(x'-x'') j_{\nu}(x'') - \\
 & - \frac{ie^3}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \bar{S}(x'-x) \gamma_{\mu} S^{(1)}(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x'') + \\
 & + \bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} S^{(1)}(x'-x) \gamma_{\mu} \bar{S}(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x''))_1 \bar{D}(x'-x'') - \\
 & - \frac{ie^3}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \bar{S}(x'-x) \gamma_{\mu} \bar{S}(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x''))_1 D^{(1)}(x'-x'') + \\
 & + \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \bar{S}(x-x') \varphi(x') + \bar{\varphi}(x') \bar{S}(x'-x) \gamma_{\mu} \psi(x))_1 - \\
 & - \frac{e}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} [\psi(x), \mathcal{H}_{1,0}(x')] + [\bar{\psi}(x), \mathcal{H}_{1,0}(x')] \gamma_{\mu} \psi(x))_1, \quad (1.40)
 \end{aligned}$$

где [см. (II.3.78)]

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) = & -\frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \gamma_{\nu} (\bar{D}(x-x') S^{(1)}(x-x') + \\
 & + D^{(1)}(x-x') \bar{S}(x-x')) \gamma_{\nu} \psi(x') = \delta mc^2 \psi(x). \quad (1.41)
 \end{aligned}$$

Третий член выражения (1.40) получается из

$$\begin{aligned}
 \frac{ie^3}{8\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\varepsilon[\sigma, \sigma'] - \varepsilon[\sigma, \sigma'']) \varepsilon[\sigma', \sigma''] \times \\
 \times (\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} S(x'-x) \gamma_{\mu} S(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x''))_1 D^{(1)}(x'-x'') \quad (1.42)
 \end{aligned}$$

при помощи тождества

$$(\varepsilon[\sigma, \sigma'] - \varepsilon[\sigma, \sigma'']) \varepsilon[\sigma', \sigma''] = \varepsilon[\sigma, \sigma'] \varepsilon[\sigma, \sigma''] - 1 \quad (1.43)$$

в силу равенства нулю величины

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} S(x'-x) \gamma_{\mu} S(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x''))_1 D^{(1)}(x'-x'') = \\
 = -\frac{1}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \{\psi(x'), \bar{\psi}(x)\} \gamma_{\mu} \times \\
 \times \{\psi(x), \bar{\psi}(x'')\} \gamma_{\lambda} \psi(x''))_1 \{A_{\nu}(x'), A_{\lambda}(x'')\}_0. \quad (1.44)
 \end{aligned}$$

Последнее утверждение является непосредственным следствием равенства (1.25), выражающего отсутствие реальных переходов первого порядка.

Подстановка [см. (II.3.77)]

$$\mathcal{H}_{1,0}(x) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}(x) \varphi(x) + \bar{\varphi}(x) \psi(x))_1 \quad (1.45)$$

в выражение (1.40) позволяет заменить два последних члена этого выражения на

$$\frac{ie}{2\hbar} (\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \chi(x) + \bar{\chi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x))_1, \quad (1.46)$$

где

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \left[\bar{S}(x-x') \varphi(x') + \frac{i}{2} \varepsilon(x-x') \{\psi(x), \bar{\varphi}(x')\} \psi(x') \right]. \quad (1.47)$$

Следует прежде всего заметить, что подинтегральное выражение в (1.47) в силу соотношения $\varphi(x) = \delta mc^2 \psi(x)$ равно нулю, поскольку

$$\frac{i}{2} \varepsilon(x - x') \{ \psi(x), \bar{\varphi}(x') \} \psi(x') = -\bar{S}(x - x') \delta mc^2 \psi(x'). \quad (1.48)$$

С другой стороны, интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{S}(x - x') \psi(x') \quad (1.49)$$

являются расходящимися, так как функции $\psi(x')$ и $\bar{S}(x - x')$ подчиняются соответственно однородному и неоднородному уравнениям с одним и тем же дифференциальным оператором. Последний интеграл удобно представлять как предельное значение конечной величины, получаемое, если видоизменить уравнение, которому подчиняется $\psi(x)$, подставив в качестве параметра массы вместо x величину $x + \delta x$, а затем произвести предельный переход $\delta x \rightarrow 0$. Другими словами, из дифференциального уравнения

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} + x + \delta x \right) \psi(x') = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \bar{S}(x - x') \gamma_{\mu} - \lambda \bar{S}(x - x') = \delta(x - x') \quad (1.50)$$

следует

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} [\bar{S}(x - x') \gamma_{\mu} \psi(x')] + \delta x \bar{S}(x - x') \psi(x') = \delta(x - x') \psi(x), \quad (1.51)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{S}(x - x') \psi(x') = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \psi(x). \quad (1.52)$$

Можно показать, что если спинор, линейной функцией которого является $\chi(x)$ (1.47), подчиняется уравнению Дирака с массой $x + \delta x$, то $\chi(x)$ при $\delta x \rightarrow 0$ принимает не равное нулю значение. Действительно, согласно соотношениям (1.48) и (1.52),

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{S}(x - x') (\varphi(x') - \delta mc^2 \psi(x')) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} (\varphi(x) - \delta mc^2 \psi(x)) \end{aligned} \quad (1.53)$$

или

$$\begin{aligned} \chi(x) &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \left[-\frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \gamma_{\nu} (\bar{D}(x - x') S^{(1)}(x - x') + \right. \\ &\quad \left. D^{(1)}(x - x') \bar{S}(x - x')) \gamma_{\nu} \psi(x') - \delta mc^2 \psi(x) \right]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Удобное представление решения уравнения Дирака $\psi_{x+\delta x}(x')$ с измененным параметром массы через спинор $\psi_x(x')$, являющийся решением уравнения с первоначальным значением массы, дается выражением

$$\psi_{x+\delta x}(x') = \psi_x(x') + \frac{\delta x}{z} (x'_{\lambda} - x_{\lambda}) \frac{\partial}{\partial x'_{\lambda}} \psi_x(x') \quad (1.55)$$

в силу соотношения

$$\left(\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} + x \right) \psi_{x+\delta x}(x') = \frac{\delta x}{z} \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} \psi_x(x') = -\delta x \psi_x(x'), \quad (1.56)$$

которое показывает правильность выражения (1.55) с точностью до первого порядка по δx . Последнее выражение составлено так, чтобы имело место равенство $\psi_{x+\delta x}(x) = \psi_x(x)$. Таким образом,

$$\chi(x) = \frac{e^2}{2x} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \gamma_v (\bar{D}(x-x') S^{(1)}(x-x') + \\ + D^{(1)}(x-x') \bar{S}(x-x')) \gamma_v(x_\lambda - x'_\lambda) \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} \psi(x'). \quad (1.57)$$

Получающееся в итоге выражение для поправки второго порядка к оператору тока равно

$$(\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0} = \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')]_{1,0} \delta A_\nu(x') - \\ - \frac{ie^3}{2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') K_\mu(x' - x, x - x'') \psi(x''))_1, \quad (1.58)$$

где

$$\delta A_\mu(x) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \bar{D}(x-x') j_\mu(x'), \quad (1.59)$$

$$K_\mu(x' - x, x - x'') = K_\mu^{(1)}(x' - x, x - x'') + K_\mu^{(2)}(x' - x, x - x''); \quad (1.60)$$

здесь

$$K_\mu^{(1)}(\xi, \eta) = \gamma_v (\bar{S}(\xi) \gamma_\mu S^{(1)}(\eta) \bar{D}(\xi + \eta) + S^{(1)}(\xi) \gamma_\mu \bar{S}(\eta) \bar{D}(\xi + \eta) + \\ + \bar{S}(\xi) \gamma_\mu \bar{S}(\eta) D^{(1)}(\xi + \eta)) \gamma_v, \quad (1.61)$$

$$K_\mu^{(2)}(\xi, \eta) = -\gamma_\mu \delta(\xi) \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial \gamma_\lambda} \eta_\lambda \gamma_v (\bar{D}(\eta) S^{(1)}(\eta) + D^{(1)}(\eta) \bar{S}(\eta)) \gamma_v - \\ - \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \xi_\lambda \gamma_v (\bar{D}(\xi) S^{(1)}(\xi) + D^{(1)}(\xi) \bar{S}(\xi)) \gamma_v \delta(\eta) \gamma_\mu. \quad (1.62)$$

Эквивалентное выражение для функций $K_\mu^{(1)}(\xi, \eta)$ и $K_\mu^{(2)}(\xi, \eta)$ может быть дано через функции

$$S_\pm(x) = \bar{S}(x) \pm \frac{i}{2} S^{(1)}(x), \\ D_\pm(x) = \bar{D}(x) \pm \frac{i}{2} D^{(1)}(x), \quad (1.63)$$

а именно

$$K_\mu^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{i} \gamma_v (S_+(\xi) \gamma_\mu S_+(\eta) D_+(\xi + \eta) - S_-(\xi) \gamma_\mu S_-(\eta) D_-(\xi + \eta)) \gamma_v, \quad (1.64)$$

$$K_\mu^{(2)}(\xi, \eta) = -\gamma_\mu \delta(\xi) \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial \eta_\lambda} \eta_\lambda \frac{1}{i} \gamma_v (D_+(\eta) S_+(\eta) - D_-(\eta) S_-(\eta)) \gamma_v - \\ - \frac{1}{2x} \frac{\partial}{\partial \xi_\lambda} \xi_\lambda \frac{1}{i} \gamma_v (D_+(\xi) S_+(\xi) - D_-(\xi) S_-(\xi)) \gamma_v \delta(\eta) \gamma_\mu. \quad (1.65)$$

В соответствии с рассмотрением части II первый член выражения (1.58) представляет собой ток, который индуцируется электромагнитным полем, вызываемым внешним током. Вторая часть выражения (1.58) описывает заслуживающий особого внимания дополнительный эффект, проявляющийся, когда ток связан не с внешней системой, а с полем частиц.

Для нахождения значения $K_{\mu}(x' - x, x - x'')$ будем подставлять разложения входящих сюда функций в интеграл Фурье [см. (II. П. 10) и (II. П. 31)]:

$$\begin{aligned} \bar{S}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \frac{1}{k^2 + x^2}, \\ S^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \delta(k^2 + x^2), \\ \bar{D}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} \frac{1}{k^2}, \\ D^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int (dk) e^{ikx} \delta(k^2), \end{aligned} \quad (1.66)$$

(всюду подразумевается, что берется главное значение $1/(k^2 + x^2)$ и $1/k^2$). При этом использовано сокращенное обозначение ab для скалярного произведения двух четырехмерных векторов $a_{\mu} b_{\mu}$. Функции (1.63) имеют следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} S_{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \left(\frac{1}{k^2 + x^2} \pm \pi i \delta(k^2 + x^2) \right), \\ D_{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} \left(\frac{1}{k^2} \pm \pi i \delta(k^2) \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Приведенные выражения могут быть записаны более компактно, если учесть, что имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\xi \mp i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \varepsilon^2} \pm i \frac{\varepsilon}{\xi^2 + \varepsilon^2} \right) = P \frac{1}{\xi} \pm \pi i \delta(\xi), \quad (1.68)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} S_{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} (i\gamma k - x) \frac{1}{k^2 + x^2 \mp i\varepsilon}, \\ D_{\pm}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) e^{ikx} \frac{1}{k^2 \mp i\varepsilon}, \end{aligned} \quad (1.69)$$

причем подразумевается, что справа берется предел при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Выражение для $K_{\mu}^{(1)}$, получающееся из формулы (1.61), имеет вид

$$\begin{aligned} K_{\mu}^{(1)}(x' - x, x - x'') &= \frac{1}{(2\pi)^{11}} \int (dk)(dk')(dk'') e^{i(k+k')(x'-x)} e^{i(k+k'')(x-x'')} \times \\ &\times \gamma_{\nu}(i\gamma k' - x) \gamma_{\mu}(i\gamma k'' - x) \gamma_{\nu} \left[\frac{\delta(k'^2 + x^2)}{(k''^2 + x)k^2} + \frac{\delta(k''^2 + x^2)}{(k'^2 + x^2)k^2} + \frac{\delta(k^2)}{(k'^2 + x^2)(k''^2 + x^2)} \right]. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Величины k'_{μ} и k''_{μ} удобно замснить величинами

$$p'_{\mu} = k_{\mu} + k'_{\mu}, \quad p''_{\mu} = k_{\mu} + k''_{\mu}, \quad (1.71)$$

непосредственно входящими в интеграл Фурье. Так как функция $K_{\mu}^{(1)}(x' - x, x - x'')$ умножается затем на $\bar{\psi}(x')$, $\psi(x'')$ и интегрируется по x' и x'' , то существенны только те значения p'_{μ} и p''_{μ} , которые удовлетворяют соотношениям

$$p'^2 + x^2 = p''^2 + x^2 = 0. \quad (1.72)$$

В результате подобной замены получаем

$$\begin{aligned} K_{\mu}^{(1)}(x' - x, x - x'') &= \frac{1}{(2\pi)^{11}} \int (dk)(dp')(dp'') e^{ip'(x'-x)} \times \\ &\times e^{ip''(x-x'')} \gamma_{\nu}(i\gamma(p' - k) - x) \gamma_{\mu}(i\gamma(p'' - k) - x) \gamma_{\nu} \times \\ &\times \left[\frac{\delta(k^2 - 2kp')}{(2kp' - 2kp'')(2kp')} + \frac{\delta(k' - 2kp'')}{(2kp'' - 2kp')(2kp'')} + \frac{\delta(k^2)}{(2kp')(2kp'')} \right]. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Последний множитель в выражении (1.73) может быть преобразован, если переписать его в виде

$$\frac{1}{2k(p' - p'')} \left[\frac{1}{2kp'} (\delta(k^2 - 2kp') - \delta(k^2)) - \frac{1}{2kp''} (\delta(k^2 - 2kp'') - \delta(k^2)) \right] \quad (1.74)$$

и учесть, что

$$\frac{1}{2kp} (\delta(k^2 - 2kp) - \delta(k^2)) = - \int_0^1 du \delta'(k^2 - 2kpu). \quad (1.75)$$

Из соотношения (1.75) вытекает, что выражение (1.74) равно

$$- \frac{1}{2k(p' - p'')} \int_0^1 du [\delta'(k^2 - 2kp'u) - \delta'(k^2 - 2kp''u)]. \quad (1.76)$$

Последнему выражению в свою очередь может быть придан более компактный вид:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_0^1 u du \delta''(k^2 - k(p' + p'' + (p' - p'')v)u). \quad (1.77)$$

Таким образом, получаем

$$K_{\mu}^{(1)}(x' - x, x - x'') = \frac{1}{2(2\pi)^{11}} \int_{-1}^1 dv \int_0^1 u du \int (dk)(dp')(dp'') e^{ip'(x' - x)} \times \\ \times e^{ip''(x - x'')} \gamma_{\nu}(i\gamma(p' - k) - \kappa) \gamma_{\mu}(i\gamma(p'' - k) - \kappa) \gamma_{\nu} \delta''(k^2 - k(p' + p'' + \\ + (p' - p'')v)u). \quad (1.78)$$

Если использовать для $K_{\mu}^{(1)}$ выражение (1.64), то множители, стоящие в выражениях (1.70) и (1.73) в скобках, заменяются величиной

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{k'^2 + x^2 - i\epsilon} \frac{1}{k''^2 + x^2 - i\epsilon} \frac{1}{k' - i\epsilon} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{1}{k^2 - 2kp' - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - 2kp'' - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - i\epsilon}. \quad (1.79)$$

Но

$$\frac{1}{k^2 - 2kp' - i\epsilon} \frac{1}{k^2 - 2kp'' - i\epsilon} \frac{1}{k - i\epsilon} = \\ = \frac{1}{2k(p' - p'')} \left[\frac{1}{2kp'} \left(\frac{1}{k^2 - 2kp' - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right) - \frac{1}{2kp''} \left(\frac{1}{k^2 - 2kp'' - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \right) \right], \quad (1.80)$$

ак что, выделив в последнем равенстве мнимые части и разделив их на π , мы опять возвращаемся к выражению (1.74). Вторая часть K_{μ} [выражение (1.62)] также легко может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$K_{\mu}^{(2)}(x' - x, x - x'') = \frac{1}{(2\pi)^{11}} \int (dk)(dp')(dp'') e^{ip'(x' - x)} e^{ip''(x - x'')} \times \\ \times \left[\frac{1}{2k} p'_{\lambda} \frac{\partial}{\partial p'_{\lambda}} \gamma_{\nu}(i\gamma(p' - k) - \kappa) \gamma_{\nu} \left(\frac{\delta((k - p')^2 + x^2)}{k^2} + \frac{\delta(k^2)}{(k - p')^2 + x^2} \right) \gamma_{\mu} + \right. \\ \left. + \gamma_{\mu} \frac{1}{2k} p''_{\lambda} \frac{\partial}{\partial p''_{\lambda}} \gamma_{\nu}(i\gamma(p'' - k) - \kappa) \gamma_{\nu} \left(\frac{\delta((k - p'')^2 + x^2)}{k^2} + \frac{\delta(k^2)}{(k - p'')^2 + x^2} \right) \right]. \quad (1.81)$$

Для нахождения значения производных по p'_{λ} и p''_{λ} отметим, что имеет место равенство

$$p_{\lambda} \frac{\partial}{\partial p_{\lambda}} (i\gamma(p - k) + \kappa)(i\gamma(p - k) - \kappa) f((p - k)^2 + x^2) = 0, \quad (1.82)$$

где функция $f(x)$ равна $\delta(x)$ или $1/x$. Дифференцируя и умножая левую часть равенства на $i\gamma(p-k) - x$, получаем

$$p_\lambda \frac{\partial}{\partial p_\lambda} (i\gamma(p-k) - x) f((p-k)^2 + x^2) = \\ = (i\gamma(p-k) - x) i\gamma p (i\gamma(p-k) - x) \frac{f(k^2 - 2kp)}{k^2 - 2kp}. \quad (1.83)$$

Таким образом,

$$p_\lambda \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \gamma_\nu (i\gamma(p-k) - x) \gamma_\nu \left(\frac{\delta((p-k)^2 + x^2)}{k^2} + \frac{\delta(k^2)}{(p-k)^2 + x^2} \right) = \\ = -\gamma_\nu (i\gamma(p-k) - x) i\gamma p (i\gamma(p-k) - x) \gamma_\nu \left(\frac{\delta'(k^2 - 2kp)}{k^2} - \frac{\delta(k^2)}{(2kp)^2} \right) \quad (1.84)$$

в силу свойства δ -функции

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x}. \quad (1.85)$$

Далее, согласно (1.75),

$$\frac{\delta'(k^2 - 2kp)}{k^2} - \frac{\delta(k^2)}{(2kp)^2} = -\frac{\partial}{\partial(2kp)} \left(\frac{\delta(k^2 - 2kp)}{k^2} - \frac{\delta(k^2)}{2kp} \right) = -\int_0^1 u du \delta''(k^2 - 2kpu). \quad (1.86)$$

Таким образом, выражение (1.81) принимает вид

$$K_\mu^{(2)}(x' - x, x - x'') = \frac{1}{(2\pi)^{11}} \int_0^1 u du \int (dk) (dp') (dp'') e^{ip'(x' - x)} e^{ip''(x - x'')} \times \\ \times \left[\delta''(k^2 - 2kp'u) \frac{1}{2x} \gamma_\nu (i\gamma(p' - k) - x) i\gamma p' (i\gamma(p' - k) - x) \gamma_\nu \gamma_\mu + \right. \\ \left. + \gamma_\mu \frac{1}{2x} \gamma_\nu (i\gamma(p' - k) - x) i\gamma p'' (i\gamma(p'' - k) - x) \gamma_\nu \delta''(k^2 - 2kp''u) \right]. \quad (1.87)$$

Преобразование

$$k_\mu \rightarrow k_\mu + (p'_\mu + p''_\mu + (p'_\mu - p''_\mu)v) \frac{u}{2} \quad (1.88)$$

приводит теперь входящую в выражение (1.78) δ -функцию к виду

$$\delta''(k^2 + \lambda^2 u^2), \quad (1.89)$$

где

$$\lambda^2 = x^2 \left(1 + \frac{(p' - p'')^2}{4x^2} (1 - v^2) \right), \quad (1.90)$$

поскольку

$$\left(\frac{p' + p''}{2} \right)^2 + \left(\frac{p' - p''}{2} \right)^2 + x^2 = 0, \quad (p' + p'')(p' - p'') = 0. \quad (1.91)$$

После указанного преобразования содержащий дираковские матрицы множитель в выражении (1.78) принимает вид

$$\gamma_\nu \left(i\gamma \left(p' - \frac{p' + p''}{2} u - \frac{p' - p''}{2} uv \right) - x \right) \gamma_\nu \times \\ \times \left(i\gamma \left(p'' - \frac{p' + p''}{2} u - \frac{p' - p''}{2} uv \right) - x \right) \gamma_\nu - \gamma_\mu k^\nu. \quad (1.92)$$

Для получения этого результата мы использовали симметрию δ -функции (1.89) относительно интегрирования по k и отбросили члены, линейные по k_λ , заменив $k_\lambda k_\nu$ на $\frac{1}{4} \delta_{\lambda\nu} k^2$; мы использовали также следующее свойство матриц Дирака:

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda = -2\gamma_\mu. \quad (1.93)$$

Множитель (1.92) можно еще упростить, опустив члены, линейные по v , которые исчезают после интегрирования, и переставив оставшиеся члены так, чтобы получилось выражение

$$\begin{aligned}
 & 4x^2\gamma_\mu \left(1 - u - \frac{1}{2}u^2\right) - \gamma_\mu k^2 + 2x(u - u^2) \sigma_{\mu\nu} (p'_\nu - p''_\nu) + \\
 & + 2(p' - p'')^2 \gamma_\mu \left(1 - u + \frac{1-v^2}{4}u^2\right) + i(1 - u^2v^2) (p'_\mu - p''_\mu) ((i\gamma p' + x) - \\
 & - (i\gamma p'' + x)) - 2(1 - u) \left[(i\gamma p' + x) \left(x(1 + u) \gamma_\mu + ip'_\mu + i\frac{1-u}{2}(p'_\mu + p''_\mu)\right) - \right. \\
 & \left. - (i\gamma p' + x) \gamma_\mu (i\gamma p'' + x) + \left(x(1 + u) \gamma_\mu + ip'_\mu + i\frac{1-u}{2}(p'_\mu + p''_\mu)\right) (i\gamma p'' + x) \right].
 \end{aligned} \tag{1.94}$$

Действие стоящего справа множителя $i\gamma p'' + x$ эквивалентно действию оператора $- \gamma_\lambda \frac{\partial}{\partial x'_\lambda} + x$ на $K_\mu(x' - x, x - x'')$. Последний оператор при интегрировании по частям при действии на функцию $\psi(x'')$ дает нуль. Аналогичным образом, стоящий слева множитель $i\gamma p' + x$ дает нуль при действии на функцию $\bar{\psi}(x')$. Таким образом, в силу уравнения Дирака имеем

$$\begin{aligned}
 K_\mu^{(1)}(x' - x, x - x'') &= \frac{1}{(2\pi)^{11}} \int_{-1}^1 dv \int_0^1 u du \int (dk) (dp') (dp'') e^{ip'(x'-x)} \times \\
 & \times e^{ip''(x-x'')} \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2) \left[2x^2 \gamma_\mu \left(1 - u - \frac{1}{2}u^2\right) - \frac{1}{2} \gamma_\mu k^2 + \right. \\
 & \left. + x(u - u^2) \sigma_{\mu\nu} (p'_\nu - p''_\nu) + (p' - p'')^2 \gamma_\mu \left(1 - u + \frac{1-v^2}{4}u^2\right) \right].
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

К двум членам выражения (1.87) могут быть применены аналогичные с преобразованием (1.88) преобразования $k_\mu \rightarrow k_\mu + p'_\mu u$ и $k_\mu \rightarrow k_\mu + p''_\mu u$. При этом обе δ -функции заменяются на $\delta''(k^2 + x^2 u^2)$, а множители, содержащие матрицы Дирака, могут быть преобразованы к более простому виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2x} \gamma_\nu (i\gamma(p - k) - x) i\gamma p (i\gamma(p - k) - x) \gamma_\nu &\rightarrow -2x^2 \left(1 - u - \frac{1}{2}u^2\right) + \\
 & + \frac{1}{2} k^2 - \left(2x^2 \left(1 - u + \frac{1}{2}u^2\right) + \frac{1}{2} k^2\right) \frac{1}{x} (i\gamma p + x);
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

здесь p нужно заменить в случае первого члена выражения (1.87) на p' , а в случае второго члена — на p'' . Следовательно, из выполнимости уравнения Дирака вытекает

$$\begin{aligned}
 K_\mu^{(2)}(x' - x, x - x'') &= -\frac{2}{(2\pi)^{11}} \int_0^1 u du \int (dk) (dp') (dp'') e^{ip'(x'-x)} e^{ip''(x-x'')} \times \\
 & \times \delta''(k^2 + x^2 u^2) \left[2x^2 \gamma_\mu \left(1 - u - \frac{1}{2}u^2\right) - \frac{1}{2} \gamma_\mu k^2 \right].
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

Для объединения членов $K_\mu^{(1)}$ и $K_\mu^{(2)}$ достаточно проинтегрировать по частям по v два первых слагаемых в подынтегральном выражении (1.95), учитывая при этом, что

$$\int_{-1}^1 dv \delta''(k^2 + \lambda^2 v^2) = 2\delta''(k^2 + x^2 u^2) - \int_{-1}^1 dv v \frac{\partial}{\partial v} \delta''(k^2 + \lambda^2 v^2). \tag{1.98}$$

Входящие после интегрирования по частям вне знака интеграла слагаемые сокращаются с $K_{\mu}^{(2)}$. Если выполнить явное дифференцирование по v для второго слагаемого (1.95), то получится интеграл по k :

$$\int (dk) k^2 \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2) = \frac{1}{2} \int (dk) k_{\nu} \frac{\partial}{\partial k_{\nu}} \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2) = -2 \int (dk) \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2). \quad (1.99)$$

Следовательно,

$$K_{\mu}(x' - x, x - x'') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-1}^1 dv \int_0^1 u du \int (dk) (dp') (dp'') e^{ip'(x' - x)} e^{ip''(x - x'')} \times \\ \times \left[(p' - p'')^2 \gamma_{\mu} \left(1 - u + \frac{1+v^2}{4} u^2 \right) + x(u - u^2) \sigma_{\mu\nu} (p'_{\nu} - p''_{\nu}) - \right. \\ \left. - 2x^2 \gamma_{\mu} \left(1 - u - \frac{1}{2} u^2 \right) v \frac{\partial}{\partial v} \right] \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2). \quad (1.100)$$

Теперь может быть выполнено интегрирование по k . Соответственно интегральному представлению

$$\delta(k^2 + \lambda^2 u^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(k^2 + \lambda^2 u^2)}, \quad (1.101)$$

получаем

$$\int (dk) \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 d\omega e^{i\omega \lambda^2 u^2} \int (dk) e^{i\omega k^2} = \\ = -\frac{\pi i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{|\omega|} e^{i\omega \lambda^2 u^2} = \frac{\pi}{\lambda^2 u^2}. \quad (1.102)$$

Отметим, что теперь нам нужно найти значение интегралов по u вида

$$\int_0^1 u^{n+1} du \int (dk) \delta''(k^2 + \lambda^2 u^2) = \frac{\pi}{\lambda^2} \int_0^1 u^{n-1} du, \quad (1.103)$$

где n может принимать значения 0, 1 и 2. В случае $n = 0$ такой интеграл логарифмически расходится.

Чтобы выяснить характер этой расходимости, переставим операции, приведшие к интегралу (1.103), для получения вместо интеграла (1.103) расходящегося интеграла по k , более просто поддающегося истолкованию. При $n = 0$ вместо (1.103) получим интеграл

$$\frac{1}{2\lambda^2} \int (dk) \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u} \delta'(k^2 + \lambda^2 u^2) = \frac{1}{2\lambda^2} \int (dk) [\delta'(k^2 + \lambda^2) + \delta'(k^2)]. \quad (1.104)$$

Этот инвариантный интеграл можно переписать в трехмерных обозначениях следующим образом:

$$\frac{1}{2\lambda^2} \int (d\mathbf{k}) d k_0 \frac{1}{2k_0} \frac{\partial}{\partial k_0} [\delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2) - \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - \lambda^2)] = \\ = \frac{1}{4\lambda^2} \int (d\mathbf{k}) d k_0 \frac{1}{k_0^2} [\delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2) - \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - \lambda^2)], \quad (1.105)$$

причем входящие сюда δ -функции представляют соотношение между энергией и импульсом у светового кванта и у частицы с массой $\hbar\lambda/c$. Выполнив интегрирование по k_0 в (1.105), получаем выражение

$$\frac{1}{4\lambda^2} \int (d\mathbf{k}) \left[\frac{1}{|\mathbf{k}|^3} - \frac{1}{(k^2 + \lambda^2)^{3/2}} \right] = \frac{\pi}{\lambda^2} \left[\int_0^{\infty} dk \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k^2 + \lambda^2)^{1/2}} \right) + 1 \right]. \quad (1.106)$$

При подобной форме записи интеграла очевидно, что расходимость связана с квантами нулевой частоты, т. е. эта расходимость представляет собой „инфракрасную катастрофу“. Как мы покажем позднее, такая расходимость является кажущейся; она устраняется при соответствующем учете эффектов, связанных с $\delta j_{\mu}^{(1)}(x)$, т. е. с поправкой первого порядка к оператору тока. Расходящийся интеграл (1.106) можно выразить через минимальное инвариантное волновое число светового кванта k_{\min} посредством приравнивания его выражению

$$\frac{\pi}{\lambda^2} \left(\ln \frac{\lambda}{2k_{\min}} + 1 \right). \quad (1.107)$$

Таким образом, после интегрирования по k и u для функции $K_{\mu}(x' - x, x - x'')$ получаем выражение

$$\begin{aligned} K_{\mu}(x' - x, x - x'') &= \frac{1}{2\pi^{10}} \int_0^1 dv \int (dp') (dp'') \exp \left[i \frac{p' + p''}{2} (x' - x'') \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[i (p'' - p') \left(x - \frac{x' + x''}{2} \right) \right] \left[\frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \gamma_{\mu} \frac{1 + v^2}{2} \left(\ln \frac{x}{2k_{\min}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 1 + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{(p' - p'')^2}{4x^2} (1 - v^2) \right) \right) - \frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \gamma_{\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2x} \sigma_{\mu\nu} (p'_{\nu} - p''_{\nu}) \right] \frac{1}{1 + \left(\frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \right) (1 - v^2)}. \quad (1.108) \end{aligned}$$

При этом для определения значения третьего слагаемого выражения (1.100) мы использовали равенство

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \right) (1 - v^2)} = 1 - \frac{\left(\frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \right) (1 - v^2)}{1 + \left(\frac{(p' - p'')^2}{4x^2} \right) (1 - v^2)}; \quad (1.109)$$

в члене, получающемся от первого слагаемого правой части равенства (1.109), выполнено дифференцирование по v .

Отметим теперь, что в подынтегральное выражение (1.108) входит только величина $p'_{\lambda} - p''_{\lambda}$. Благодаря этому удобно ввести новые переменные

$$P_{\lambda} = \frac{p'_{\lambda} + p''_{\lambda}}{2}, \quad p_{\lambda} = p''_{\lambda} - p'_{\lambda}, \quad (1.110)$$

после чего может быть сразу выполнено интегрирование по P ; в результате этого интегрирования получится дельта-функция $\delta(x' - x'')$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} K_{\mu}(x' - x, x - x'') &= -\frac{1}{8\pi^2} \gamma_{\mu} \delta(x' - x'') \frac{1}{x^2} \square^2 \left[\ln \frac{x}{2k_{\min}} (F_0(x - x') + F_1(x - x')) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} F_0(x - x') + F_1(x - x') + \frac{1}{2} G(x - x') \right] + \frac{i}{8\pi^2} \delta(x' - x'') \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} F_0(x - x'), \quad (1.111) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^1 dv v^{2n} \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dp) \frac{e^{ipx}}{1 + \left(\frac{p^2}{4k^2} \right) (1 - v^2)} = \\ &= 16 x^2 \int_0^1 dv \frac{v^{2n}}{(1 - v^2)^2} \bar{\Delta} \left(\frac{2}{(1 - v^2)^{1/2}} x \right), \quad (1.112) \end{aligned}$$

$$G(x) = \int_0^1 dv (1+v^2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dp) e^{ipx} \frac{\ln\left(1 + \frac{p^2}{4x^2} (1-v^2)\right)}{1 + \frac{p^2}{4x^2} (1-v^2)} =$$

$$= 8 \square^2 \int_0^1 dv \frac{1+v^2}{1-v^2} \int_0^1 \frac{u du}{1-u^2} \left[\frac{1}{u^2} \bar{\Delta}\left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2} u} x\right) - \bar{\Delta}\left(\frac{2}{(1-v^2)^{1/2}} x\right) \right]. \quad (1.113)$$

$$-\frac{ie^3}{2\hbar} \int d\omega' d\omega'' (\bar{\psi}(x') K_\mu(x'-x, x-x'') \psi(x''))_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{x}{2k_{\text{min}}} \frac{1}{x^2} \square^2 \int [F_0(x-x') +$$

$$+ F_1(x-x')] j_\mu(x') d\omega' + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{x^2} \square^2 \int \left[\frac{1}{2} F_0(x-x') + F_1(x-x') + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} G(x-x') \right] j_\mu(x') d\omega' + \frac{\alpha}{2\pi} c \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int F_0(x-x') m_{\mu\nu}(x') d\omega', \quad (1.114)$$

где

$$m_{\mu\nu}(x) = \frac{e}{2x} (\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x))_1 = \frac{e}{2x} \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \psi(x) - \bar{\psi}'(x) \sigma_{\mu\nu} \psi'(x)]. \quad (1.115)$$

Записанный в таких же обозначениях первый член выражения (1.58) имеет вид [см. (II. 2.44)]

$$\frac{i}{2\hbar c^2} \int d\omega' \varepsilon(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')]_0 \delta A_\nu(x') =$$

$$= -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{x^2} \square^2 \int [F_1(x-x') - \frac{1}{3} F_2(x-x')] j_\mu(x') d\omega', \quad (1.116)$$

причем мы опустили член перенормировки заряда, предполагая, что значение e соответствующим образом изменено. Повторный вывод этого выражения с помощью методов, родственных методам, описанным выше, приведен в приложении. Очевидно, что новая составляющая, соответствующая одночастичному оператору тока, задаваемая выражением (1.114), имеет, если не учитывать последнего члена этого выражения, ту же самую природу, что и рассмотренный ранее эффект, описываемый выражением (1.116). Последний член выражения (1.114) дает добавку к вектору тока вида

$$c \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_\nu \delta m_{\mu\nu}(x), \quad (1.117)$$

где

$$\delta m_{\mu\nu}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \int F_0(x-x') m_{\mu\nu}(x') d\omega'. \quad (1.118)$$

Составляющую вектора тока подобного типа можно интерпретировать как дипольный ток, определяемый антисимметричным дипольным тензором $\delta m_{\mu\nu}$, который объединяет плотность электрического и магнитного моментов. Тензор $m_{\mu\nu}$ представляет собой характерный тензор теории Дирака, в которой собственные дипольные моменты пропорциональны антисимметричному спиновому тензору $\sigma_{\mu\nu}$, с множителем пропорциональности, равным магнетону Бора

$$\mu_0 = \frac{e}{2x} = \frac{eh}{2mc}. \quad (1.119)$$

Согласно выражению (1.118), поправка к величине дипольного тензора в некоторой точке зависит от среднего значения $m_{\mu\nu}$ в окрестности этой точки. Если все величины мало изменяются на расстояниях порядка \hbar/mc и за времена порядка \hbar/mc^2 , то можно аналогично (II. 2.47) построить разложение в ряд по возрастающим степеням оператора \square^2 . Для этой цели достаточно разложить в ряд знаменатель в первом из выражений (1.112); при этом получается

$$F_n(x) = \frac{1}{2n+1} \delta(x) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \frac{1}{2x^2} \square^2 \delta(x) + \dots \quad (1.120)$$

Итак,

$$\delta m_{\mu\nu}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[m_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{6x^2} \square^2 m_{\mu\nu}(x) + \dots \right], \quad (1.121)$$

так что при условиях, позволяющих пренебречь всеми членами этого ряда, кроме первого, электрон будет вести себя так, как если бы он обладал дополнительным спиновым магнитным моментом ¹⁾

$$\delta_\mu = \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right) \mu_0. \quad (1.122)$$

Окончательным выражением для поправки второго порядка к одночастичному оператору тока является

$$\begin{aligned} (\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0} = & \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{x}{2k_{\min}} \frac{1}{x^2} \square^2 \int [F_0(x-x') + F_1(x-x')] j_\mu(x') d\omega' + \\ & + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{x^2} \square^2 \int \left[\frac{1}{2} F_0(x-x') + \frac{1}{3} F_2(x-x') + \frac{1}{2} G(x-x') \right] j_\mu(x') d\omega' + c \frac{\partial}{\partial x_\nu} \delta m_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (1.123)$$

При условиях медленного изменения $\left(\frac{1}{x^2} \square^2 j_\mu, m_{\mu\nu} \ll j_\mu, m_{\mu\nu} \right)$ это выражение сводится к виду

$$(\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0} = \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{x}{2k_{\min}} + \frac{17}{40} \right) \frac{1}{x^2} \square^2 j_\mu(x) + \frac{\alpha}{2\pi} c \frac{\partial}{\partial x_\nu} m_{\mu\nu}(x) \quad (1.124)$$

в силу разложения (1.120) и аналогичного разложения для $G(x)$:

$$G(x) = -\frac{1}{5x^2} \square^2 \delta(x) + \dots \quad (1.125)$$

Отметим, что полный заряд, соответствующий $(\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0}$, равен нулю, в согласии с очевидным условием сохранения заряда и тем формальным свойством, что оператор полного заряда коммутирует со всеми операторами, относящимися к одной частице. Кажущееся противоречие между приведенными двумя положениями и наличием члена перенормировки заряда разобрано в приложении, где показано, что компенсирующий заряд порождается на бесконечности.

В нашем результате (1.123) содержится только логарифмическая расходимость, вызванная квантами с нулевой частотой. Однако следует отметить, что величина $(\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0}$ не полностью описывает рассматриваемые радиационные поправки. Для измерения поправок к току необходимо накладывать внешнее поле. Такое поле будет индуцировать испускание квантов, описываемое выражением $\delta j_\mu^{(1)}(x)$, с которыми связаны, в частности, эффекты, компенсирующие расходимости при низких частотах. Очевидно, что вследствие „инфракрасной катастрофы“ поправки второго порядка к свойствам частицы не могут быть полностью установлены без учета того, каким образом эти свойства определяются во внешнем поле. Поэтому мы обратимся к рассмотрению поведения отдельной частицы во внешнем поле с учетом изменений, вызванных вакуумными флуктуациями электромагнитного поля.

2. Радиационные поправки к формулам для рассеяния электронов

Рассмотрим теперь взаимодействие трех систем: поля частиц, электромагнитного поля и заданных токов. Последние могут быть связаны либо с нуклеонами, либо с макроскопическими объектами; в обоих случаях обратные действия на токи дают пренебрежимо малые эффекты. Этот случай описывается уравнениями,

¹⁾ Этот результат был сообщен в январе 1948 г. на заседании американского физического общества. Формула была приведена с опечаткой в заметке [9]. Эта опечатка была, к сожалению, перенесена Розенфельдом в его книгу [20] — *Прим. авт.*

имеющими в представлении взаимодействия вид

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi [\sigma]}{\delta \sigma (x)} = \left[-\frac{1}{c} (j_\mu (x) + J_\mu (x)) A_\mu (x) \right] \Psi [\sigma], \quad (2.1a)$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu (x')}{\partial x'_\mu} - \frac{1}{c} \int_\sigma D(x' - x) (j_\mu (x) + J_\mu (x)) d\tau_\mu \right] \Psi [\sigma] = 0, \quad (2.1b)$$

где через $j_\mu (x)$ и $J_\mu (x)$ обозначены векторы тока, связанные соответственно с полем частиц и внешней системой. Оба тока взаимодействуют с электромагнитным полем, характеризуемым величинами $A_\mu (x)$. Другой возможный способ описания основан на выделении внешнего электромагнитного поля, действующего на ток, связанный с полем частиц; при этом используются уравнения

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi [\sigma]}{\delta \sigma (x)} = \left[-\frac{1}{c} j_\mu (x) (A_\mu (x) + A_\mu^{(e)} (x)) \right] \Psi [\sigma], \quad (2.2a)$$

$$\left[\frac{\partial A_\mu (x')}{\partial x'_\mu} - \frac{1}{c} \int_\sigma D(x' - x) j_\mu (x) d\tau_\mu \right] \Psi [\sigma] = 0, \quad (2.2b)$$

где

$$\square^2 A_\mu^{(e)} (x) = -\frac{1}{c} J_\mu (x), \quad \frac{\partial A_\mu^{(e)} (x)}{\partial x_\mu} = 0. \quad (2.3)$$

Для установления эквивалентности двух указанных способов описания достаточно показать, что уравнения (2.2) получаются из уравнений (2.1) посредством канонического преобразования

$$\Psi [\sigma] \rightarrow e^{-iJ[\sigma]} \Psi [\sigma], \quad (2.4)$$

где функционал $J(\sigma)$ определяется уравнением

$$\hbar c \frac{\delta J[\sigma]}{\delta \sigma (x)} = -\frac{1}{c} J_\mu (x) A_\mu [x]. \quad (2.5)$$

Явным образом функционал $J[\sigma]$ выражается в виде

$$J[\sigma] = -\frac{1}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} J_\mu (x') A_\mu (x') d\omega', \quad (2.6)$$

при этом выбор нижнего предела интегрирования соответствует использованию запаздывающих потенциалов в случае электромагнитного поля, порождаемого заданными токами. Уравнение движения для нового вектора состояния имеет вид

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi [\sigma]}{\delta \sigma (x)} + i\hbar c e^{iJ[\sigma]} \frac{\delta e^{-iJ[\sigma]}}{\delta \sigma (x)} \Psi [\sigma] = \left[-\frac{1}{c} (j_\mu (x) + J_\mu (x)) e^{iJ[\sigma]} A_\mu (x) e^{-iJ[\sigma]} \right] \Psi [\sigma] \quad (2.7)$$

Далее,

$$\begin{aligned} e^{iJ[\sigma]} A_\mu (x) e^{-iJ[\sigma]} &= A_\mu (x) + i [J[\sigma], A_\mu (x)] - \frac{1}{2} [J[\sigma], [J[\sigma], A_\mu (x)]] + \dots = \\ &= A_\mu (x) - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} D(x - x') J_\mu (x') d\omega' = A_\mu (x) + A_\mu^{(e)} (x); \end{aligned} \quad (2.8)$$

приведенный ряд ограничивается двумя членами, поскольку компоненты тока $J_\mu (x)$ коммутируют друг с другом, согласно заданным свойствам этого тока. Легко видеть, что потенциал

$$A_\mu^{(e)} (x) = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} D(x - x') J_\mu (x') d\omega'. \quad (2.9)$$

подчиняется уравнениям (2.3). Действительно,

$$\square^2 A_\mu^{(e)}(x) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu} J_\mu(x') d\omega' = -\frac{1}{c} \int_{\sigma}^{\sigma} d\sigma'_\nu \frac{\partial D(x-x')}{\partial x'_\nu} J_\mu(x') = -\frac{1}{c} J_\mu(x), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial A_\mu^{(e)}(x)}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega' \frac{\partial}{\partial x'_\mu} (D(x-x') J_\mu(x')) = 0. \quad (2.11)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} i\hbar c e^{iJ[\sigma]} \frac{\delta e^{-iJ[\sigma]}}{\delta \sigma(x)} &= \hbar c \frac{\delta J[\sigma]}{\delta \sigma(x)} + \frac{i\hbar c}{2} \left[J[\sigma], \frac{\delta J[\sigma]}{\delta \sigma(x)} \right] + \dots = \\ &= -\frac{1}{c} J_\mu(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2c} J_\mu(x) A_\mu^{(e)}(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

так что преобразованное уравнение движения принимает вид

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \left[-\frac{1}{c} J_\mu(x) (A_\mu(x) + A_\mu^{(e)}(x)) - \frac{1}{2c} J_\mu(x) A_\mu^{(e)}(x) \right] \Psi[\sigma]; \quad (2.13)$$

это уравнение эквивалентно уравнению (2.2а), поскольку член $-\frac{1}{2c} J_\mu(x) A_\mu^{(e)}(x)$, описывающий самодействие заданных токов, не влияет на динамическое поведение системы и может быть опущен.

Дополнительное условие (2.16) аналогичным образом преобразуется в условие

$$\left[e^{iJ[\sigma]} \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} e^{-iJ[\sigma]} - \frac{1}{c} \int_{\sigma}^{\sigma} D(x'-x) (j_\mu(x) + J_\mu(x)) d\sigma_\mu \right] \Psi[\sigma] = 0, \quad (2.14)$$

причем

$$\begin{aligned} e^{iJ[\sigma]} \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} e^{-iJ[\sigma]} &= \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} + i \left[J[\sigma], \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \right] = \\ &= \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\partial D(x'-x'')}{\partial x'_\mu} J_\mu(x'') d\omega''. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\partial D(x'-x'')}{\partial x'_\mu} J_\mu(x'') d\omega'' &= \\ = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial x'_\mu} (D(x'-x'') J_\mu(x'')) d\omega'' &= \frac{1}{c} \int_{\sigma}^{\sigma} D(x'-x) J_\mu(x) d\sigma_\mu, \end{aligned} \quad (2.16)$$

из (2.14) и (2.15) сразу следует условие (2.2б).

Уравнениям (2.2) можно придать форму, позволяющую непосредственно применить результаты предыдущего раздела. Преобразование перенормировки массы

$$\Psi[\sigma] \rightarrow W[\sigma] \Psi[\sigma], \quad i\hbar c \frac{\delta W[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}_{1,0}(x) W[\sigma] \quad (2.17)$$

переводит уравнение (2.2а) в уравнение

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = [\mathcal{H}(x) + \mathcal{H}^{(e)}(x)] \Psi[\sigma], \quad (2.18)$$

где [см. (1.3)]

$$\mathcal{H}(x) = \mathcal{H}(x) - \mathcal{H}_{1,0}(x), \quad (2.19)$$

$$\mathcal{H}^{(e)}(x) = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu^{(e)}(x); \quad (2.20)$$

при этом в уравнение Дирака для $\psi(x)$ входит экспериментальная масса. Дальнейшее преобразование

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma] \Phi[\sigma], \quad (2.21)$$

где $U[\sigma]$ определяется уравнением

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathcal{H}(x) U[\sigma], \quad U[-\infty] = 1, \quad (2.22)$$

является аналогом преобразования (1.8). После этого преобразования вектор состояния $\Phi(\sigma)$ в присутствии внешнего поля будет изменяться согласно уравнению

$$i\hbar c \frac{\delta \Phi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = U^{-1}[\sigma] \mathcal{H}^{(e)}(x) U[\sigma] \Phi[\sigma] = -\frac{1}{c} \mathbf{j}_\mu(x) A_\mu^{(e)}(x) \Phi[\sigma], \quad (2.23)$$

соответствующему связи с оператором тока $\mathbf{j}_\mu(x)$. Этот оператор включает изменения, вызванные вакуумом электромагнитного поля. Дополнительное условие (2.2б) после указанных преобразований принимает вид

$$\left[U^{-1}[\sigma] \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} U[\sigma] - \frac{1}{c} \int_{\sigma} D(x' - x) \mathbf{j}_\mu(x) d\sigma_x \right] \Phi[\sigma] = 0. \quad (2.24)$$

Поскольку, однако, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} U^{-1}[\sigma] \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} U[\sigma] - \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} &= \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega'' \frac{\delta}{\delta \sigma''(x'')} \left(U^{-1}[\sigma''] \frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} U[\sigma''] \right) = \\ &= \frac{i}{\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega'' U^{-1}[\sigma''] \left[\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu}, A_\nu(x'') \right] j_\nu(x'') U[\sigma''] = \\ &= \frac{i}{c} \int_{-\infty}^{\sigma} d\omega'' \frac{\partial}{\partial x''_\mu} (D(x' - x'') \mathbf{j}_\mu(x'')) = \frac{1}{c} \int_{\sigma} D(x' - x) \mathbf{j}_\mu(x) d\sigma_x, \end{aligned} \quad (2.25)$$

то соответствующее уравнению (2.23) дополнительное условие просто сводится к следующему

$$\frac{\partial A_\mu(x')}{\partial x'_\mu} \Phi[\sigma] = 0. \quad (2.26)$$

В качестве первого применения уравнения (2.23) разберем рассеяние электрона, вызванное его взаимодействием с внешним полем, рассматривая это поле как малое возмущение¹⁾. Мы ограничимся случаем поля, не зависящего от времени; такое поле, в частности, можно отождествить с кулоновским полем покоящегося ядра.

Решение уравнения (2.23) может быть взято в форме

$$\Phi[\sigma] = R[\sigma] \Phi_1, \quad (2.27)$$

причем

$$i\hbar c \frac{\delta R[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = \mathbf{H}(x) R[\sigma] \quad (2.28)$$

и

$$R[\sigma] \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow -\infty. \quad (2.29)$$

Вектор состояния Φ , характеризует систему в начальном состоянии, в котором имеется один электрон с определенной энергией и определенным импульсом и нет световых квантов. Отнесенная к единице времени полная вероятность того, что произошел процесс рассеяния, может быть получена посредством определе-

¹⁾ Радиационные поправки к формулам рассеяния рассматривались многими авторами. То обстоятельство, что после перенормировки заряда и массы эти поправки имеют конечную величину, было независимо отмечено Коба и Томонага [21], Льюисом [22] и Швингером [9]. См. также работу Фейнмана [23]. — *Прим. авт.*

ния скорости уменьшения со временем вероятности нахождения системы в начальном состоянии. Эта скорость равна

$$\omega = -c \int dv \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} |(\Phi_1, \Phi[\sigma])|^2 = -c \int dv \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} |(\Phi_1, R[\sigma] \Phi_1)|^2, \quad (2.30)$$

причем интегрирование распространено по поверхности $t = \text{const}$, а dv означает трехмерный элемент объема. Далее, имеет место соотношение

$$i\hbar c \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} |(\Phi_1, R[\sigma] \Phi_1)|^2 = (\Phi_1, R^{-1}[\sigma] \Phi_1)(\Phi_1, \mathbf{H}(x) R[\sigma] \Phi_1) - \\ - (\Phi_1, R[\sigma] \Phi_1)(\Phi_1, R^{-1}[\sigma] \mathbf{H}(x) \Phi_1). \quad (2.31)$$

В связи с тем, что мы трактуем $\mathbf{H}(x)$ как малое возмущение, можно написать

$$R[\sigma] = 1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \mathbf{H}(x') d\omega', \quad R^{-1}[\sigma] = 1 + \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \mathbf{H}(x') d\omega'. \quad (2.32)$$

Удобно ввести новый оператор

$$\mathbf{H}'(x) = \mathbf{H}(x) - (\Phi_1, \mathbf{H}(x) \Phi_1), \quad (2.33)$$

диагональные матричные элементы которого для начального состояния равны нулю. Тогда

$$R[\sigma] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} (1 | \mathbf{H}(x') | 1) d\omega'\right] \left(1 - \frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\sigma} \mathbf{H}'(x') d\omega'\right). \quad (2.34)$$

Фазовый множитель, очевидно, не изменяет соотношения (2.31) и может быть опущен. Таким образом, соотношение (2.31) не изменяется при замене $\mathbf{H}(x)$ на $\mathbf{H}'(x)$. Следовательно, с точностью до первого порядка теории возмущений получаем

$$-\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} |(\Phi_1, R[\sigma] \Phi_1)|^2 = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left(1 | \mathbf{H}'(x) \int_{-\infty}^{\sigma} \mathbf{H}'(x') d\omega' + \int_{-\infty}^{\sigma} \mathbf{H}'(x') d\omega' \mathbf{H}'(x) | 1\right) \quad (2.35)$$

и

$$\omega = \frac{1}{\hbar^2 c} \int dv d\omega' \left(1 | \mathbf{H}'(x) \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{H}'(x') dx'_0 + \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{H}'(x') dx'_0 \mathbf{H}'(x) | 1\right). \quad (2.36)$$

Учтем теперь, что диагональные матричные элементы для состояния с определенной энергией должны быть инвариантными по отношению к смещениям времени, вследствие чего можно записать

$$\int dv d\omega' \left(1 | \int_{-\infty}^{x_0} \mathbf{H}'(x') dx'_0 \mathbf{H}'(x) | 1\right) = \int dv d\omega' \left(1 | \mathbf{H}'(x) \int_{x_0}^{\infty} \mathbf{H}'(x') dx'_0 | 1\right), \quad (2.37)$$

$$\omega = \frac{1}{\hbar^2 c} \int dv d\omega' \left(1 | \mathbf{H}'(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}'(x') dx'_0 | 1\right). \quad (2.38)$$

Полученный результат полностью эквивалентен более привычной формуле теории возмущений, в которой скорость перехода из начального состояния выражается в виде суммы скоростей переходов во всевозможные конечные состояния равной энергии. Закон сохранения энергии, проявляется здесь при интегрировании по времени, а суммирование по всем состояниям, кроме первоначального, обеспечивается посредством исключения из $\mathbf{H}(x)$ диагональных матричных элементов. Наша исходная формула при подсчетах скоростей переходов для

рассеяния частиц не зависящим от времени полем будет, таким образом, иметь вид

$$\omega = \frac{1}{\hbar^2 c^3} \int d\nu d\nu' A_\mu^{(e)}(\mathbf{r}) A_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') \left(1 | \mathbf{j}_\mu(x) \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_\nu(x') dx'_0 | 1 \right). \quad (2.39)$$

Мы не отметили явно, что из $\mathbf{j}_\mu(x)$ должны быть исключены диагональные матричные элементы, поскольку вместо этого достаточно исключить в окончательном результате те переходы, при которых не происходит изменения состояния.

В первом разделе нами было показано, что с точностью до второго порядка по e имеет место равенство

$$\mathbf{j}_\mu(x) = j_\mu(x) + \delta j_\mu^{(1)}(x) + \delta j_\mu^{(2)}(x), \quad (2.40)$$

где

$$\begin{aligned} \delta j_\mu^{(1)}(x) &= \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')]_1 A_\nu(x') d\omega' = \\ &= \frac{ie^2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \gamma_\nu \psi(x') + \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu \psi(x)]_1 A_\nu(x') d\omega' \end{aligned} \quad (2.41)$$

и

$$(\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0} = iec \int_{-\infty}^{\infty} [\bar{\psi}(x') \Gamma_\mu(x-x') \psi(x')]_1 d\omega'; \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu(x) &= \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\mu \lg \frac{z}{2k_{\min} z^2} \square^2 (F_0(x) + F_1(x)) + \\ &+ \frac{\alpha}{4\pi} \gamma_\mu \frac{1}{z^2} \square^2 \left(\frac{1}{2} F_0(x) + \frac{1}{3} F_2(x) + \frac{1}{2} G(x) \right) - i \frac{\alpha}{4\pi} \sigma_{\mu\nu} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_0(x). \end{aligned} \quad (2.43)$$

При подсчетах поправок второго порядка к формулам для сечений рассеяния внешним полем достаточно учитывать только приведенную часть величины $\delta j_\mu^{(2)}(x)$, относящуюся к одной частице при отсутствии световых квантов, поскольку только эта часть $\delta j_\mu^{(2)}(x)$ связана с $j_\mu(x)$.

Теперь полную скорость перехода из начального состояния можно записать в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_1, \quad (2.44)$$

где величина

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\hbar^2 c^3} \int d\nu d\nu' A_\mu^{(e)}(\mathbf{r}) A_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') \left(1 | (j_\mu(x) + \right. \\ &\left. + (\delta j_\mu^{(2)}(x))_{1,0}) \int_{-\infty}^{\infty} (j_\nu(x') + (\delta j_\nu^{(2)}(x'))_{1,0}) dx'_0 | 1 \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

относится к рассеянию без излучения, в то время как величина

$$\omega_1 = \frac{1}{\hbar^2 c^3} \int d\nu d\nu' A_\mu^{(e)}(\mathbf{r}) A_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') \left(1 | \delta j_\mu^{(1)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta j_\nu^{(1)}(x') dx'_0 | 1 \right) \quad (2.46)$$

учитывает рассеяние, сопровождающееся испусканием одного кванта.

Чтобы проиллюстрировать способ использования приведенных формул, рассмотрим вычисление интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 | j_\mu(x) j_\nu(x') | 1) dx'_0. \quad (2.47)$$

Его можно переписать в виде

$$-e^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 | \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) \bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \psi(x') | 1) dx'_0, \quad (2.48)$$

причем подразумевается, что опущены процессы, при которых операторы $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x')\psi(x')$ не вызывают изменения состояния. Оператор $\psi(x')$ может либо уничтожить имевшийся первоначально электрон (при этом оператор $\bar{\psi}(x')\psi(x')$ вызывает переход электрона в какое-то конечное состояние), либо породить позитрон; в последнем случае оператор $\bar{\psi}(x')\psi(x')$ вызывает порождение пары. Однако второй из указанных процессов несовместим с законом сохранения энергии, проявляющимся при интегрировании по времени, и поэтому может быть отброшен. Следовательно, может иметь место только уничтожение оператором $\psi(x')$ первоначального электрона, так что $\psi(x')\Phi_1$ пропорционален вектору вакуумного состояния. Такие же выводы можно сделать относительно $\bar{\psi}^+(x)\Phi_1 = \gamma_4 \psi(x)\Phi_1$. Таким образом, для определения значения (2.48) требуется только найти вакуумное среднее значение оператора $\bar{\psi}(x)\psi(x')$. Кроме того, поскольку вначале возбуждено только одно состояние поля частиц, описываемое волновой функцией ue^{ipx} , мы приходим к результату

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (1 | j_{\mu}(x) j_{\nu}(x') | 1) dx'_0 = \\ = \frac{e^2 c^2}{(2\pi)^2} \int (dq) \delta(q_0 - p_0) \delta(q^2 + x^2) \bar{u} \gamma_{\mu} (i\gamma q - x) \gamma_{\nu} u e^{i(p-q)(x'-x)}; \end{aligned} \quad (2.49)$$

здесь использовано соотношение

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(x') \rangle_0 = -i S_{\alpha\beta}^{(+)}(x - x') = \\ = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{q_0 > 0} (dq) \delta(q^2 + x^2) (i\gamma q - x)_{\alpha\beta} e^{iq(x-x')}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Прежде чем производить преобразование выражения (2.49) к более простому виду, рассмотрим аналогичные задачи вычисления величин

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 | j_{\mu}(x) (\delta j_{\nu}^{(2)}(x'))_{1,0} | 1) dx'_0 \quad (2.51a)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 | (\delta j_{\mu}^{(1)}(x))_{1,0} j_{\nu}(x') | 1) dx'_0, \quad (2.51b)$$

входящих в поправки к формулам для рассеяния без излучения. Выражение (2.51a) можно записать в виде

$$-e^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \int d\omega'' (1 | \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \psi(x) \bar{\psi}(x'') \Gamma_{\nu}(x' - x'') \psi(x'') | 1). \quad (2.52)$$

Согласно соображениям, изложенным при рассмотрении выражения (2.47), выражение (2.52) эквивалентно

$$\begin{aligned} -e^2 c^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \int d\omega'' \bar{u} \gamma_{\mu} \langle \psi(x) \bar{\psi}(x'') \rangle_0 \Gamma_{\nu}(x' - x'') u e^{i p(x'' - x)} = \\ = \frac{e^2 c^2}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 \int_{q_0 > 0} d\omega'' \int (dq) \delta(q^2 + x^2) \bar{u} \gamma_{\mu} (i\gamma q - x) \Gamma_{\nu}(x' - x'') u e^{i(p-q)(x'' - x)}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Подставив разложение Фурье функции $\Gamma_\nu(x)$

$$\Gamma_\nu(p-q) = \int e^{-i(p-q)x} \Gamma_\nu(x) d\omega, \quad (2.54)$$

получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} (1 | j_\mu(x) (\delta j_\nu^{(2)}(x'))_{1,0} | 1) dx'_0 = \\ & = \frac{e^2 c^2}{(2\pi)^2} \int (dq) \delta(q_0 - p_0) \delta(q^2 + \kappa^2) \bar{u} \gamma_\mu (i\gamma q - \kappa) \Gamma_\nu(p-q) u e^{i(p-q)(r'-r)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Объединив выражения (2.49), (2.55) и аналогичным образом преобразованное выражение (2.51б), находим

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{e^2}{\hbar^2 c} \int dq_0 (dq) \delta(q_0 - p_0) \delta(q^2 + \kappa^2) \int e^{-i(p-q)r} A_\mu^{(e)}(\mathbf{r}) d\sigma \times \\ & \times \int e^{i(p-q)r'} A_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') d\sigma' \bar{u} (\gamma_\mu + \Gamma_\mu(q-p)) (i\gamma q - \kappa) (\gamma_\nu + \Gamma_\nu(p-q)) u. \end{aligned} \quad (2.56)$$

После интегрирования по q_0 и $|\mathbf{q}|$ мы получаем величину ω_0 , выраженную в виде интеграла по всем направлениям вектора \mathbf{q} , кроме исходного

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2}{\hbar^2 c} \int d\Omega |\mathbf{p}| \int e^{-i(p-q)r} A_\mu^{(e)}(\mathbf{r}) d\sigma \int e^{i(p-q)r'} A_\nu^{(e)}(\mathbf{r}') d\sigma' \bar{u} (\gamma_\mu + \\ & + \Gamma_\mu(q-p)) (i\gamma q - \kappa) (\gamma_\nu + \Gamma_\nu(p-q)) u. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Это выражение следует интерпретировать как скорость перехода из начального состояния, представленную в виде вероятности отклонения за единицу времени в произвольный элемент телесного угла. Дальнейшее упрощение данного выражения может быть произведено посредством усреднения по двум спиновым состояниям, в которых может находиться электрон. Для этой цели нам нужно найти среднее значение $u_\alpha \bar{u}_\beta$ по двум состояниям поляризации, соответствующим заданной энергии и импульсу. Из значения антикоммутатора

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\} = \frac{1}{i} S_{\alpha\beta}(x-x') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int (dp) \delta(p^2 + \kappa) \varepsilon(p) (i\gamma p - \kappa)_{\alpha\beta} e^{ip(x-x')}, \quad (2.58)$$

в который входят с равным весом все состояния частицы, можно вывести, что для состояния с волновым вектором p_μ имеет место равенство

$$\langle u_\alpha \bar{u}_\beta \rangle = A (i\gamma p - \kappa)_{\alpha\beta}. \quad (2.59)$$

Постоянную A для наших целей удобно выразить через среднее значение вектора тока частиц в начальном состоянии:

$$\mathbf{S}^{(inc)} = (1 | ic (\bar{\psi}(x) \boldsymbol{\gamma} \psi(x))_1 | 1) = ic \bar{u} \boldsymbol{\gamma} u; \quad (2.60)$$

при усреднении

$$\mathbf{S}^{(inc)} = ic \gamma_{3\alpha} u_\alpha \bar{u}_\beta \rightarrow ic A \text{Tr} \boldsymbol{\gamma} (i\gamma p - \kappa) = -4cA \mathbf{p}, \quad (2.61)$$

так что

$$\langle u_\alpha \bar{u}_\beta \rangle = -\frac{1}{4c} \frac{|\mathbf{S}^{(inc)}|}{|\mathbf{p}|} (i\gamma p - \kappa)_{\alpha\beta}. \quad (2.62)$$

Отсюда получается следующее выражение для полной скорости перехода из начального состояния:

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{1}{8\pi^2} \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} |\mathbf{S}^{(inc)}| \int d\Omega \left| \int e^{i(p-q)r} \frac{Z e}{4\pi r} d\sigma \right|^2 \frac{1}{4} \text{Tr} [(i\gamma p - \kappa) \times \\ & \times (\gamma_4 + \Gamma_4(q-p)) (i\gamma q - \kappa) (\gamma_4 - \Gamma_4(p-q))], \end{aligned} \quad (2.63)$$

причем непосредственно подставлен кулоновский потенциал покоящегося ядра. Отсюда следует, что дифференциальное сечение для рассеяния на угол θ в единицу телесного угла равно

$$\frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} = 2 \left[\frac{Z\alpha}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \right]^2 \frac{1}{4} \text{tr} [(i\gamma p - z)(\gamma_4 + \Gamma_4(q-p))(i\gamma q - z)(\gamma_4 + \Gamma_4(p-q))]. \quad (2.64)$$

Преобразование Фурье функции Γ_4 удобно записать в форме

$$\Gamma_4(p-q) = -\frac{\alpha}{4\pi} \gamma_4 \left[4\lambda^2 A(\lambda) + \frac{i}{z} \gamma(\mathbf{p}-\mathbf{q}) F_0(\lambda) \right], \quad (2.65)$$

где

$$A(\lambda) = \ln \frac{z}{2k_{\min}} (F_0(\lambda) + F_1(\lambda)) + \frac{1}{2} (F_0(\lambda) + \frac{2}{3} F_2(\lambda) + G(\lambda)); \quad (2.66)$$

$$\lambda = \frac{|\mathbf{p}-\mathbf{q}|}{2z} = \frac{|\mathbf{p}|}{z} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.67)$$

$$F_0(\lambda) = \int_0^1 \frac{dv}{1 + \lambda^2(1-v^2)} = \frac{\ln((1+\lambda^2)^{1/2} + \lambda)}{(1+\lambda^2)^{1/2}\lambda}, \quad (2.68a)$$

$$F_1(\lambda) = \int_0^1 \frac{v^2 dv}{1 + \lambda^2(1-v^2)} = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) F_0(\lambda) - \frac{1}{\lambda^2}, \quad (2.68b)$$

$$F_2(\lambda) = \int_0^1 \frac{v^4 dv}{1 + \lambda^2(1-v^2)} = \left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) F_1(\lambda) - \frac{1}{3\lambda^2}. \quad (2.68b)$$

Имеющее более сложный вид преобразование Фурье функции $G(\lambda)$ для дальнейшего не потребуется. Входящий в выражение (2.64) след дираковских матриц подсчитывается без труда:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{tr} [(i\gamma p - z)(\gamma_4 + \Gamma_4(q-p))(i\gamma q - z)(\gamma_4 + \Gamma_4(p-q))] = \\ = 2(p_0^2 - z^2\lambda^2) \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \lambda^2 A(\lambda)\right) - \frac{2\alpha}{\pi} z^2 \lambda^2 F_0(\lambda); \end{aligned} \quad (2.69)$$

отсюда следует, что

$$\frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2|\mathbf{p}|^2} \text{cosec}^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \lambda^2 A(\lambda) - \frac{\alpha}{\pi} \frac{z^2}{p_0^2 - z^2\lambda^2} \lambda^2 F_0(\lambda)\right], \quad (2.70)$$

при этом величина $\beta = |\mathbf{p}|/p_0$ равна отношению скорости частицы к скорости света c .

Для определения скорости переходов, сопровождающихся излучением, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} (1|\delta j_{\mu}^{(1)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta j_{\nu}^{(1)}(x') dx'_0|1) = -\frac{e^4}{\hbar^2} \int d\omega'' d\omega''' (1|\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \bar{S}(x-x'') \gamma_{\nu} \psi(x'') + \\ + \bar{\psi}(x'') \gamma_{\lambda} \bar{S}(x''-x) \gamma_{\mu} \psi(x)|1 \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 [\bar{\psi}(x') \gamma_{\nu} \bar{S}(x'-x''') \gamma_{\sigma} \psi(x''') + \\ + \bar{\psi}(x''') \gamma_{\sigma} \bar{S}(x'''-x') \gamma_{\nu} \psi(x')]|1) A_{\lambda}(x'') A_{\sigma}(x'''). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Поскольку вектор Φ_1 определяет состояние без световых квантов, для величин электромагнитного поля требуется взять только вакуумное среднее значение:

$$\langle A_{\lambda}(x'') A_{\sigma}(x''') \rangle_0 = i\hbar c \delta_{\lambda\sigma} D^{(+)}(x''-x''') = \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \delta_{\lambda\sigma} \int_{k_i > 0} (dk) \delta(k^2) e^{ik(x''-x''')}. \quad (2.72)$$

Операторы поля частиц рассматриваются здесь аналогично тому, как и в предыдущем случае, причем получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \left(1 \left| \delta j_{\mu}^{(1)}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \delta j_{\mu}^{(1)}(x') dx'_0 \right| 1\right) &= \frac{e^4}{\hbar^2} \frac{\hbar c}{(2\pi)^6} \int_{q_0, k_0 > 0} (dq) \delta(q^2 + z^2) (dk) \delta(k^2) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx'_0 e^{i(p-q-k)(x'-k)} \bar{u}(\gamma_{\mu} \bar{S}(q+k) \gamma_{\lambda} + \gamma_{\lambda} \bar{S}(p-k) \gamma_{\mu}) \times \\ &\times (i\gamma q - z) (\gamma_{\nu} \bar{S}(p-k) \gamma_{\lambda} + \gamma_{\lambda} \bar{S}(q+k) \gamma_{\nu}) u. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Здесь величины

$$\bar{S}(q+k) = \int e^{-i(q+k)x} \bar{S}(x) d\omega = \frac{i\gamma(q+k) - z}{2qk} \quad (2.74)$$

и

$$\bar{S}(p-k) = -\frac{i\gamma(p-k) - z}{2pk} \quad (2.75)$$

являются обращениями Фурье функции $S(x)$. Интегрирование по x'_0 вводит условие сохранения энергии

$$p_0 = q_0 + k_0, \quad (2.76)$$

которое, очевидно, является законом сохранения энергии для процессов испускания световых квантов.

Далее, можно выполнить интегрирование по q_0 и по амплитуде величины q , после чего получается выражение для ω_1 в виде интеграла по всем направлениям рассеяния электрона и всем световым квантам, удовлетворяющим закону сохранения энергии. Выполнив усреднение по всевозможным поляризациям начального электрона и взяв частный случай кулоновского поля ядра, находим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\alpha}{\pi^2} |S^{(inc)}| \int_{k_0 > 0} d\Omega (dk) \delta(k^2) \frac{|q|}{|\mathbf{p}|} \left[\frac{Z\alpha}{(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{k})^2} \right]^2 \frac{1}{4} \text{tr} \times \\ &\times \left[(i\gamma p - z) \left(\gamma_4 \frac{i\gamma(q+k) - z}{2qk} \gamma_{\lambda} - \gamma_{\lambda} \frac{i\gamma(p-k) - z}{2pk} \gamma_4 \right) (i\gamma q - z) \times \right. \\ &\left. \times \left(\gamma_4 \frac{i\gamma(p-k) - z}{2pk} \gamma_{\lambda} - \gamma_{\lambda} \frac{i\gamma(q+k) - z}{2qk} \gamma_4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Теперь находим, что дифференциальное сечение рассеяния с излучением на угол θ при потере энергии, не превышающей величину ΔE , равно

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1(\theta, \Delta E)}{d\Omega} &= \frac{\alpha}{\pi^2} \int_{k_0=0}^{k_0=K} (dk) \delta(k^2) \frac{|q|}{|\mathbf{p}|} \left[\frac{Z\alpha}{(\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{k})^2} \right]^2 \frac{1}{4} \text{tr} \left[(i\gamma p - z) \left(\gamma_4 \left(\frac{q_{\lambda}}{qk} - \frac{p_{\lambda}}{pk} \right) + \right. \right. \\ &\left. \left. + \gamma_4 \frac{\gamma k}{2qk} \gamma_{\lambda} + \gamma_{\lambda} \frac{\gamma k}{2pk} \gamma_4 \right) (i\gamma q - z) \left(\gamma_4 \left(\frac{q_{\lambda}}{qk} - \frac{p_{\lambda}}{pk} \right) + \gamma_{\lambda} \frac{\gamma k}{2qk} \gamma_4 + \gamma_4 \frac{\gamma k}{2pk} \gamma_{\lambda} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.78)$$

где

$$K = \frac{\Delta E}{\hbar c}. \quad (2.79)$$

Рассмотрим сначала простой случай, когда реакция испускаемого излучения на электрон пренебрежимо мала. Иными словами, мы рассмотрим почти полностью упругое рассеяние, при котором излучается лишь небольшая доля кинетической энергии электрона. При этом условии, которое можно выразить посредством неравенства $\Delta E \ll W = E - mc^2$, выражение (2.79) сводится к виду

$$\frac{d\sigma_1(\theta, \Delta E)}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2|\mathbf{p}|^3} \text{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{k_0=0}^{k_0=K} (dk) \delta(k^2) \left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk} \right)^2. \quad (2.80)$$

Далее, имеем

$$\left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk}\right)^2 = \frac{(p-q)^2}{(pk)(qk)} + \kappa^2 \left(\frac{2}{(pk)(qk)} - \frac{1}{(pk)^2} - \frac{1}{(qk)^2} \right), \quad (2.81)$$

$$\frac{1}{(pk)(qk)} = \frac{1}{(q-p)k} \left(\frac{1}{qk} - \frac{1}{pk} \right) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dv}{\left[\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k \right]^2}. \quad (2.82)$$

Отсюда с помощью интегрирования по частям получается

$$\frac{2}{(pk)(qk)} - \frac{1}{(pk)^2} - \frac{1}{(qk)^2} = - \int_{-1}^1 dv v \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{\left[\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k \right]^2}. \quad (2.83)$$

Следовательно,

$$\int (dk) \delta(k^2) \left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk} \right)^2 = \kappa^2 \int_{-1}^1 dv \left(\frac{(p-q)^2}{2\kappa^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \int (dk) \frac{\delta(k^2)}{\left[\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k \right]^2}. \quad (2.84)$$

Интеграл по k в последнем выражении можно записать в виде

$$\begin{aligned} & - \int (dk) \frac{\delta(k^2)}{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right)^2} \left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) \lambda \frac{\partial}{\partial k_\lambda} \frac{1}{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k} = \\ & = \frac{1}{\kappa^2} \frac{1}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4\kappa^2} \right] (1-v^2)} \left[\int (dk) \frac{\partial}{\partial k_\lambda} \left[\delta(k^2) \frac{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) \lambda}{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k} \right] - \right. \\ & \quad \left. - 2 \int (dk) \delta'(k^2) \right]. \quad (2.85) \end{aligned}$$

Поскольку, однако, имеет место равенство

$$- 2 \int (dk) \delta'(k^2) = \int \frac{(dk)}{k_0} \frac{\partial}{\partial k_0} \delta(k^2) = \int (dk) \frac{\partial}{\partial k_0} \left(\frac{\delta(k^2)}{k_0} \right) + \int \frac{(dk)}{k_0^2} \delta(k^2), \quad (2.86)$$

то

$$\begin{aligned} & \int (dk) \delta(k^2) \left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk} \right)^2 = \int_{-1}^1 dv \left(\frac{(p-q)^2}{2\kappa^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{1}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4\kappa^2} \right] (1-v^2)} \times \\ & \quad \times \left[\int \frac{(dk)}{k_0^2} \delta(k^2) + \int (dk) \frac{\partial}{\partial k_0} \left\{ \delta(k^2) \left[\frac{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right)_0}{\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k} + \frac{1}{k_0} \right] \right\} \right]; \quad (2.87) \end{aligned}$$

здесь мы отбросили члены, которые явным образом дают равные нулю слагающие после интегрирования по области $0 < k_0 < K$.

Первый из стоящих в скобках в (2.87) интегралов в трехмерных обозначениях имеет вид

$$\int \frac{(dk) dk_0}{k_0^2} \delta(k^2 - k_0^2) = 2\pi \int_{k_{\min}}^k \frac{dk_0}{k_0} = 2\pi \ln \frac{K}{k_{\min}}, \quad (2.88)$$

причем мы вновь ввели инвариантное минимальное волновое число для световых квантов с целью охарактеризовать логарифмическую расходимость, вызван-

ную „инфракрасной катастрофой“. Аналогичное выражение для второго стоящего в скобках в формуле (2.87) интеграла имеет вид

$$\int (dk) \delta(k^2 - K^2) \left[\frac{1}{K} - \frac{p_0}{p_0 K - \left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} v \right) k} \right] =$$

$$= 2\pi \left[1 - \frac{1}{2} \frac{p_0}{\left(p^2 - \left[\frac{(p-q)^2}{4} \right] (1-v^2) \right)^{1/2}} \ln \frac{p_0 + \left(p^2 - \left[\frac{(p-q)^2}{4} \right] (1-v^2) \right)^{1/2}}{p_0 - \left(p^2 - \left[\frac{(p-q)^2}{4} \right] (1-v^2) \right)^{1/2}} \right]. \quad (2.89)$$

Таким образом,

$$\int_{k_0=0}^{k_0=K} (dk) \delta(k^2) \left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk} \right)^2 = 4\pi \int_0^1 dv \left(\frac{(p-q)^2}{2x^2} - v \frac{\partial}{\partial v} \right) \frac{1}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4x^2} \right] (1-v^2)} \times$$

$$\times \left[\ln \frac{K}{k_{\min}} + 1 - \frac{1}{2\beta\xi} \ln \frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi} \right], \quad (2.90)$$

где

$$\xi = \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} (1-v^2) \right)^{1/2}. \quad (2.91)$$

Используя теперь тождество

$$\frac{1 - \frac{1}{2\beta\xi} \ln \left(\frac{1+\beta\xi}{1-\beta\xi} \right)}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4x^2} \right] (1-v^2)} = \frac{1}{2} \frac{\ln \left(1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4x^2} \right] (1-v^2) \right)}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4x^2} \right] (1-v^2)}$$

$$- \frac{\ln \left(\frac{2p_0}{x} \right) - 1}{1 + \left[\frac{(p-q)^2}{4x^2} \right] (1-v^2)} + \frac{x^2}{p_0^2} \frac{1}{2\beta\xi} \left[\frac{\ln \frac{1-\beta\xi}{2}}{1+\beta\xi} - \frac{\ln \frac{1+\beta\xi}{2}}{1-\beta\xi} \right], \quad (2.92)$$

мы можем придать выражению (2.90) форму

$$\int_{k_0=0}^{k_0=K} (dk) \delta(k^2) \left(\frac{p}{pk} - \frac{q}{qk} \right)^2 = 4\pi \frac{p^2}{x^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \times$$

$$\times \left[\left(\ln \frac{K}{k_{\min}} - \ln \frac{2p_0}{x} + 1 \right) (F_0 + F_1) + F_1 + \frac{1}{2} G + H \right], \quad (2.93)$$

где

$$H = \left(1 + \frac{1}{2\lambda^2} \right) \frac{x^2}{p_0^2} \int_0^1 \frac{dv}{\beta\xi} \left[\frac{\ln \frac{1-\beta\xi}{2}}{1+\beta\xi} - \frac{\ln \frac{1+\beta\xi}{2}}{1-\beta\xi} \right] - \frac{1}{2\lambda^2} \frac{x^2}{p_0^2} \frac{1}{\beta} \left[\frac{\ln \frac{1-\beta}{2}}{1+\beta} - \frac{\ln \frac{1+\beta}{2}}{1-\beta} \right]. \quad (2.94)$$

Функция H при малых скоростях стремится в пределе к постоянной

$$H = \frac{4}{3} (\ln 2 - 1) - \frac{1}{9}, \quad \beta \ll 1. \quad (2.95)$$

В случае высоких энергий функция H приближенно определяется формулой

$$H = -\frac{x^2}{p_0^2} f(\theta), \quad \frac{p_0}{x} \gg 1, \quad (2.96)$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \int_{\cos \frac{\theta}{2}}^1 \left[\frac{\ln \frac{1+\xi}{2}}{1-\xi} - \frac{\ln \frac{1-\xi}{2}}{1+\xi} \right] \frac{d\xi}{\left(\xi^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)^{1/2}}. \quad (2.97)$$

Последний интеграл может быть взят аналитически при $\theta = \pi$, а именно,

$$f(\pi) = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2.98)$$

Однако для остальных углов приходится прибегать к численному интегрированию. Достаточно хорошее приближение, имеющее правильный асимптотический вид при малых углах, дается формулой

$$f(\theta) \sim \left(\frac{2}{\cos \frac{\theta}{2} (1 + \cos \frac{\theta}{2})^3} \right)^{1/2} \left[\ln \frac{1}{2(1 - \cos \frac{\theta}{2})} + \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{2} + 1 \right]. \quad (2.99)$$

Эта формула является довольно точной даже в случае $\theta = \pi/2$, когда значение, получаемое по (2.99), лишь на 8,6% превышает результат численного интегрирования, равный

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,167. \quad (2.100)$$

Полное дифференциальное сечение рассеяния на угол θ с потерей энергии, не превышающей ΔE , равно

$$\frac{d\sigma(\theta, \Delta E)}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} + \frac{d\sigma_1(\theta, \Delta E)}{d\Omega} = \left(\frac{Z\alpha}{2|p|\beta} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \times \\ \times \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (1 - \delta(\theta, \Delta E)), \quad (2.101)$$

где величина $\delta(\theta, \Delta E)$ является искомым частичным уменьшением сечения, вызванным радиационными эффектами. Для почти упругого рассеяния, объединяя формулы (2.70) и (2.80), получаем

$$\delta(\theta, \Delta E \ll W) = \frac{2\alpha}{\pi} \beta^2 \frac{p_0^2}{x^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\left(\ln \frac{E}{\Delta E} - 1 \right) (F_0 + F_1) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F_0 - F_1 + \frac{1}{3} F_2 - H + \frac{1}{2} \frac{x^2 p_0^2}{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} F_0 \right]. \quad (2.102)$$

Следует отметить, что „инфракрасная катастрофа“, характеризующаяся появлением k_{\min} , в данном выражении не сказывается. Однако в принципе можно рассматривать предел $\Delta E \rightarrow 0$, при котором величина δ логарифмически расходится. Как хорошо известно, эта трудность вызвана пренебрежением теми процессами, в которых участвует более чем один квант низкой частоты [24]. В действительности сечение упругого рассеяния при $\Delta E \rightarrow 0$ должно обращаться в нуль, т. е. явление рассеяния всегда сопровождается испусканием квантов. Это обстоятельство описывают посредством замены множителя $1 - \delta$, выражающего радиационную поправку, на величину $c^{-\delta}$, обладающую правильным поведением в пределе при $\Delta E \rightarrow 0$. Члены высших порядков в разложении величины $e^{-\delta}$ соответствуют эффектам процессов высших порядков, при которых происходит кратное испускание мягких квантов. Однако для практических целей подобное уточнение не является необходимым. Точность, с которой может быть измерена в настоящее время энергия частицы, такова, что предел $\Delta E \rightarrow 0$ не может быть реализован, благодаря чему δ в нынешних условиях всегда оказывается малым по сравнению с единицей.

Для медленно движущейся частицы имеем

$$\delta(\theta, \Delta E \ll W) = \frac{8\alpha}{3\pi} \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\ln \frac{mc^2}{2\Delta E} + \frac{19}{30} \right], \quad \beta \ll 1; \quad (2.103)$$

здесь использована предельная форма функции H (2.95) и предельная форма функции F_n :

$$F_n = \frac{1}{2n+1}, \quad \lambda \ll 1. \quad (2.104)$$

Таким образом, радиационная поправка линейно зависит от кинетической энергии частицы. С другой стороны, в ультррелятивистской области выполняется соотношение

$$\delta(\theta, \Delta E \ll W) = \frac{4\alpha}{\pi} \left[\left(\ln \frac{E}{\Delta E} - \frac{13}{12} \right) \left(\ln \frac{2p_0}{K} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{17}{72} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} f(\theta) \right], \quad \frac{p_0}{x} \sin \frac{\theta}{2} \gg 1, \quad (2.105)$$

так что в этом случае имеет место логарифмическая зависимость от энергии частицы. Асимптотическое выражение (2.105) остается достаточно пригодным и для сравнительно умеренных энергий. Так, при $\theta = \pi/2$, $\Delta E = 10$ *кэв* и $W = 3,1$ *Мэв*, чему соответствует $\frac{p_0}{x} \sin \frac{\theta}{2} = 5$, значение δ , подсчитанное с помощью соотношения (2.105), отличается от правильного значения

$$\delta = 8,6 \cdot 10^{-2} \quad (2.106)$$

только на доли процента. Из этого численного результата видно, что радиационные поправки к сечениям рассеяния могут быть довольно значительными. При выбранных частных условиях значительное увеличение ΔE (но при сохранении условия $\Delta E \ll W$) не приводит к сколько-нибудь существенному уменьшению δ . Так, при $\Delta E = 40$ *кэв* $\delta = 6,3 \cdot 10^{-2}$, в то время как при $\Delta E = 80$ *кэв* $\delta = 5,1 \cdot 10^{-2}$. Относительно зависимости величины δ от энергии заметим, что при заданной точности определения энергии ΔE значение δ линейно зависит от логарифма энергии. Так, при $\Delta E/E = 0,04/3,6 = 1,1 \cdot 10^{-2}$ увеличение полной энергии в четыре раза вызывает увеличение δ на $4,4 \cdot 10^{-2}$, так что $\delta = 11 \cdot 10^{-2}$ при $W = 14$ *Мэв* и $\delta = 15 \cdot 10^{-2}$ при $W = 57$ *Мэв*.

Асимптотическая формула (2.105) не описывает полностью зависимости величины δ при релятивистских энергиях от углов, так как необходимое для справедливости этой формулы условие $\frac{p_0}{x} \sin \frac{\theta}{2} \gg 1$ не может быть выполнено при малых θ . Действительно, величина δ пропорциональна $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ при углах, удовлетворяющих условию $\frac{p_0}{x} \sin \frac{\theta}{2} \ll 1$. Формула (2.105) все же может быть использована в широкой области изменения углов даже при умеренных энергиях. Так, при $W = 3,1$ *Мэв*, $\Delta E = 40$ *кэв* и $\theta = \pi/4$, чему соответствует $\frac{p_0}{x} \sin \frac{\theta}{2} = 2,7$; значение δ , полученное из формулы (2.105), только на 20% превышает правильное значение $\delta = 4,2 \cdot 10^{-2}$. Зависимость величины δ от углов наиболее легко можно было бы использовать для экспериментальной проверки данных теоретических предсказаний, касающихся радиационных поправок к электромагнитным свойствам релятивистского электрона.

Мы подробно рассмотрели только почти упругое рассеяние электрона, при котором радиационные поправки в основном связаны с виртуальными процессами. Если нужно подсчитать дифференциальное сечение для рассеяния с произвольным значением наибольшей допустимой потери энергии ΔE , то для этого достаточно добавить к сечению почти упругого рассеяния, при котором максимальная потеря энергии $\Delta E'$ много меньше W ($\Delta E' \ll W$), сечение для рассеяния с испусканием светового кванта с энергией, лежащей в области от $\Delta E'$ до ΔE . Последнему процессу соответствует известное сечение тормозного излучения, которое, конечно, согласуется с (2.79).

Подсчитаем для иллюстрации дифференциальное сечение для рассеяния медленно движущегося электрона при любой конечной энергии. Дифференциальное сечение, отнесенное к единице телесного угла, для рассеяния электрона на угол θ испусканием светового кванта с энергией, заключенной в области от $\Delta E'$ до W , равно

$$\frac{\alpha}{\pi^2} \int_{\Delta E'/\hbar c}^{W/\hbar c} \frac{dk_0}{k_0} \int d\omega \frac{|\mathbf{q}|}{|\mathbf{p}|} \left[\frac{Z\alpha}{(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2} \right]^2 [(\mathbf{p}-\mathbf{q})^2 - (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{p}-\mathbf{q}))^2], \quad (2.107)$$

в согласии с предельным нерелятивистским видом соотношения (2.78). Здесь $d\omega$ обозначает элемент телесного угла, соответствующего направлению единичного вектора $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$, а

$$|\mathbf{q}| = (\mathbf{p}^2 - 2xk_0)^{1/2}. \quad (2.108)$$

После интегрирования по всем направлениям испускания светового кванта и введения новой переменной интегрирования $x = |\mathbf{q}|/|\mathbf{p}|$ выражение (2.107) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{8\alpha}{3\pi} \left(\frac{Z\alpha}{|\mathbf{p}|} \right)^2 \int_0^{(1-\Delta E'/W)^{1/2}} \frac{x}{1+x^2-2x\cos\theta} \frac{2x dx}{1-x^2} = \\ & = \left(\frac{Z\alpha}{2|\mathbf{p}|\beta} \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 \frac{8\alpha}{3\pi} \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\ln \frac{W}{\Delta E'} - \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2-2x\cos\theta} \frac{2x dx}{1+x} \right]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Таким образом, слагающая величины δ , относящаяся к испусканию квантов с энергией от $\Delta E'$ до W , равна

$$-\frac{8\alpha}{3\pi} \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\ln \frac{4W}{\Delta E'} - (\pi - \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.110)$$

Добавив эту величину к значению $\delta(\theta, \Delta E')$, которое дается формулой (2.103), мы получаем искомый результат:

$$\delta(\theta, W) = \frac{8\alpha}{3\pi} \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \left[\ln \frac{1}{4\beta^2} + \frac{19}{30} + (\pi - \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{\cos \theta}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \ln \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2} \right], \quad \beta \ll 1. \quad (2.111)$$

В заключение можно отметить, что соответствующее мезонно-нуклеарное явление — радиационные поправки к рассеянию нуклеонов на нуклеонах, вызванные испусканием виртуальных мезонов, будут приводить к сравнительно более значительным эффектам из-за наличия в данном случае более сильной связи. Вполне возможно, что именно этим обусловлено расхождение между наблюдаемым значением нейтрон-протонного сечения рассеяния для нейтронов больших энергий и большими по величине теоретическими значениями, получающимися при различных предположениях о виде взаимодействия¹⁾.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы дадим сначала новое рассмотрение поляризации вакуума внешним полем, используя методы, развитые в предыдущей части.

Требуется подсчитать среднее значение величины

$$\langle j_\mu(x) \rangle = (\Psi[\sigma], j_\mu(x) \Psi[\sigma]), \quad (\text{П. 1})$$

где $\Psi[\sigma]$ подчиняется уравнению

$$i\hbar c \frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) \Psi[\sigma]; \quad (\text{П. 2})$$

¹⁾ Обзор результатов приведен в книге Розенфельда [20], стр. 450 и 454.—Прим. авт.

$A_\mu(x)$ — потенциал поля заданных токов. Подобной постановке вопроса можно дать следующее физическое истолкование. В отдаленном прошлом поле частиц не взаимодействовало с внешним электромагнитным полем и вектор состояния являлся вектором состояния вакуума

$$\Psi[-\infty] = \Psi_0. \quad (\text{П. 3})$$

Предполагается, что такое взаимодействие накладывается адиабатически, причем внешнее поле не вызывает порождения реальных пар. Из последнего ограничения вытекает, что вектором конечного состояния поля частиц, получающимся после адиабатического выключения взаимодействия, также будет Ψ_0 . Следовательно,

$$\Psi[\infty] - \Psi[-\infty] = (S - 1)\Psi_0 = 0, \quad (\text{П. 4})$$

Решение уравнения (П. 2) можно строить в виде

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma]\Psi_0, \quad (\text{П. 5})$$

где функционал $U[\sigma]$ определяется уравнением

$$i\hbar c \frac{\delta U[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = -\frac{1}{c} j_\mu(x) A_\mu(x) U[\sigma] \quad (\text{П. 6})$$

и

$$U[\infty] = S, \quad U[-\infty] = 1. \quad (\text{П. 7})$$

Индукцированный в вакууме ток теперь можно записать в виде

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \langle U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma] \rangle_0. \quad (\text{П. 8})$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] \frac{\delta}{\delta \sigma'(x')} U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma'] &= \\ &= U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma] - \frac{1}{2} (j_\mu(x) + S^{-1} j_\mu(x) S). \end{aligned} \quad (\text{П. 9})$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} U^{-1}[\sigma] j_\mu(x) U[\sigma] &= \frac{1}{2} (j_\mu(x) + S^{-1} j_\mu(x) S) + \\ &+ \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon[\sigma, \sigma'] U^{-1}[\sigma'] [j_\mu(x), j_\nu(x')] U[\sigma'] A_\nu(x'). \end{aligned} \quad (\text{П. 10})$$

Положив с правой стороны соотношения (П. 10) функционал $U[\sigma']$ равным единице, мы получим выражение для первого приближения, пригодного при малом возмущении вакуума. Таким образом, учитывая (П. 4), имеем

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \frac{i}{2\hbar c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \varepsilon(x-x') [j_\mu(x), j_\nu(x')]_0 A_\nu(x') \quad (\text{П. 11})$$

благодаря отсутствию тока в невозмущенном вакууме. Перепишем для удобства эту формулу в виде

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \frac{4e^2}{\hbar} \int G_{\mu\nu}(x-x') A_\nu(x') d\omega', \quad (\text{П. 12})$$

где, согласно формуле (П. 2.10),

$$G_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{8} \text{tr} [S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \gamma_\nu + \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu]. \quad (\text{П. 13})$$

Подстановка Фурье разложений функций $S^{(1)}$ и \bar{S} и нахождение значения следа [см. формулу (П. 3.10)]

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{tr} [(-i\gamma k' + x) \gamma_\mu (i\gamma k'' + x) \gamma_\nu + (-i\gamma k'' + x) \gamma_\mu (i\gamma k' + x) \gamma_\nu] &= \\ &= k'_\mu k''_\nu + k'_\nu k''_\mu - \delta_{\mu\nu} (k' k'' - x^2) \end{aligned} \quad (\text{П. 14})$$

дают следующее выражение для $G_{\mu\nu}(x)$:

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^7} \int (dk') (dk'') e^{i(k'+k'')x} \frac{\delta(k''^2 + x^2)}{k'^2 + x^2} \times \\ \times [k'_\mu k''_\nu + k'_\nu k''_\mu - \delta_{\mu\nu}(k'k'' - x^2)]. \quad (\text{П. 15})$$

Почувствительно исследовать ограничения, которые накладываются на $G_{\mu\nu}(x)$ двумя связанными друг с другом условиями сохранения заряда и калибровочной инвариантности. Согласно первому из них, очевидно, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (\text{П. 16})$$

Условие калибровочной инвариантности состоит здесь в том, что индуцированный ток не должен изменяться при преобразовании

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial \Lambda(x)}{\partial x_\mu}, \quad (\text{П. 17})$$

т. е. должно выполняться равенство

$$\int G_{\mu\nu}(x-x') \frac{\partial \Lambda(x')}{\partial x'_\nu} d\omega' = \int \frac{\partial}{\partial x_\nu} G_{\mu\nu}(x-x') \cdot \Lambda(x') d\omega' = 0, \quad (\text{П. 18})$$

в котором опущенный член равен нулю вследствие адиабатического выключения связи в отдаленном прошлом и будущем. Ясно, что условие (П. 18) удовлетворяется при выполнении условия (П. 16), так как

$$G_{\mu\nu}(x) = G_{\nu\mu}(x). \quad (\text{П. 19})$$

Вычислив по формуле (П. 15) $\partial G_{\mu\nu}(x)/\partial x_\mu$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} G_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{(2\pi)^7} \int (dk') (dk'') e^{i(k'+k'')x} k'_\nu \delta(k''^2 + x^2) = \\ = \frac{i}{(2\pi)^7} \int (dk) e^{ikx} \int (dk'') k''_\nu \delta(k''^2 + x^2), \quad (\text{П. 20})$$

где

$$k_\mu = k'_\mu + k''_\mu. \quad (\text{П. 21})$$

Выражение (П. 20) действительно равно нулю, если

$$\int (dk'') k''_\nu \delta(k''^2 + x^2) = 0. \quad (\text{П. 22})$$

Этот интеграл сильно расходится; однако равенство нулю может все же быть однозначно получено с помощью какого-либо предельного процесса, в котором δ -функция заменяется на соответствующую несингулярную функцию. В этом смысле условия сохранения заряда и калибровочной инвариантности являются выполненными. Отметим, что этот же интеграл получается при определении значения тока в невозмущенном вакууме [см. формулу (II, 1.73)],

$$\langle J_\mu(x) \rangle_0 = \frac{iec}{2} \text{tr} \gamma_\mu S^{(1)}(0) = \frac{2ec}{(2\pi)^3} \int (dk'') k''_\mu \delta(k''^2 + x^2), \quad (\text{П. 23})$$

которое также должно равняться нулю.

Вернемся к вычислению $G_{\mu\nu}(x)$. Используем для преобразования выражения (П. 15) тождество

$$k'k'' - x^2 = 2 \frac{(kk')(kk'')}{k^2} - (k'^2 + x^2) \frac{kk''}{k^2} - (k''^2 + x^2) \frac{kk'}{k^2}. \quad (\text{П. 24})$$

Третий член последнего выражения можно отбросить, так как после интегрирования величин с множителем $(k''^2 + x^2) \delta(k''^2 + x^2)$ получается нуль. Второй член соответствует в выражении для $G_{\mu\nu}(x)$ слагаемому виду

$$\int (dk) (dk'') e^{ikx} \frac{kk''}{k^2} \delta(k''^2 + x^2), \quad (\text{П. 25})$$

которое также равно нулю в силу условия (П. 22). Таким образом,

$$G_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^7} \int (dk') (dk'') e^{ikx} \left(\frac{\delta(k'^2 + x^2)}{k'^2 + x^2} + \frac{\delta(k''^2 + x^2)}{k''^2 + x^2} \right) \times \\ \times \left(\frac{k'_\mu k''_\nu + k'_\nu k''_\mu}{2} - \delta_{\mu\nu} \frac{(kk'')(kk'')}{k^2} \right). \quad (\text{П. 26})$$

Содержащий δ -функции множитель можно привести к более простой форме следующим образом:

$$\frac{\delta(k'^2 + x^2)}{k'^2 + x^2} + \frac{\delta(k''^2 + x^2)}{k''^2 + x^2} = \frac{1}{k'^2 - k''^2} (\delta(k'^2 + x^2) - \delta(k''^2 + x^2)) = \\ = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \delta' \left(\frac{k'^2 + k'^2}{2} + \frac{k'^2 - k''^2}{2} v + x^2 \right). \quad (\text{П. 27})$$

После введения новых переменных k_μ и p_μ , определенных равенствами

$$k'_\mu = \frac{1}{2} k_\mu + \left(p_\mu - \frac{v}{2} k_\mu \right), \\ k''_\mu = \frac{1}{2} k_\mu - \left(p_\mu - \frac{v}{2} k_\mu \right), \quad (\text{П. 28})$$

функция $G_{\mu\nu}(x)$ примет вид

$$G_{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{8(2\pi)^7} \int_{-1}^1 dv (1 - v^2) \int (dk) (dp) e^{ikx} \times \\ \times (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2) \delta' \left(p^2 + x^2 + \frac{k^2}{4} (1 - v^2) \right), \quad (\text{П. 29})$$

причем в силу того, что δ -функция зависит только от p^2 , опущены члены, линейные по p_μ , и вместо $p_\mu p_\nu$, подставлено $\frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} p^2$. Тем самым показано, что

$$G_{\mu\nu}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \delta_{\mu\nu} \square^2 \right) G(x), \quad (\text{П. 30})$$

где

$$G(x) = \frac{1}{8(2\pi)^7} \int_{-1}^1 dv (1 - v^2) \int (dk) (dp) e^{ikx} \delta' \left(p^2 + x^2 + \frac{k^2}{4} (1 - v^2) \right). \quad (\text{П. 31})$$

Расходящуюся и конечную части функции $G(x)$ можно разделить посредством интегрирования по частям интеграла по v :

$$G(x) = \frac{1}{6(2\pi)^3} \int (dp) \delta' (p^2 + x^2) \delta(x) - \square^2 \frac{1}{8(2\pi)^7} \times \\ \times \int_0^1 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{3} \right) dv \int (dk) e^{ikx} \int (dp) \delta'' \left(p^2 + x^2 + \frac{k^2}{4} (1 - v^2) \right). \quad (\text{П. 32})$$

Инвариантный, логарифмически расходящийся интеграл, входящий в первый член выражения (П. 32), можно записать с помощью трехмерных обозначений в виде

$$\int (dp) \delta' (p^2 + x^2) = - \int (dp) dp_0 \frac{1}{2p_0} \frac{\partial}{\partial p_0} \delta (p_0^2 - \mathbf{p}^2 - x^2) = \\ = -\frac{1}{2} \int \frac{(dp)}{(p^2 + x^2)^{3/2}} = -2\pi \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{P_0 + P}{x} - 1 \right), \quad (\text{П. 33})$$

где

$$P_0 = (P^2 + x^2)^{1/2}. \quad (\text{П. 34})$$

Второй, сходящийся, интеграл из выражения (П. 32) получается из (П. 33) дифференцированием по x^2 с последующей заменой этой величины на $x^2 + \frac{k^2}{4} \times \times (1 - v^2)$. Далее, получим

$$\int (dp) \delta'' \left(p^2 + x^2 + \frac{k^2}{4} (1 - v^2) \right) = \frac{\pi}{x^2 + \frac{k^2}{4} (1 - v^2)}. \quad (\text{П. 35})$$

В силу полученных результатов функцию $G(x)$ можно выразить следующим образом:

$$G(x) = -\frac{1}{24\pi^2} \lim_{P \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{P_0 + P}{x} - 1 \right) \delta(x) - \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{x^2} \square^2 \left(F_1(x) - \frac{1}{3} F_2(x) \right), \quad (\text{П. 36})$$

где

$$F_n(x) = \int_0^1 v^{2n} dv \frac{1}{(2\pi)^4} \int (dk) \frac{e^{ikx}}{1 + \frac{k^2}{4x^2} (1 - v^2)}. \quad (\text{П. 37})$$

Наконец, мы можем подставить выражение (П. 30) в формулу (П. 12), после чего с помощью интегрирования по частям получим

$$\langle j_\mu(x) \rangle = 16\pi\alpha \int G(x - x') J_\nu(x') d\omega', \quad (\text{П. 38})$$

где $J_\mu(x)$ — вектор тока, порожденного внешним электромагнитным полем. Подстановка выражения для $G(x)$ (П. 36) приводит к выражению

$$\langle j_\mu(x) \rangle = -\frac{2\alpha}{3\pi} \lim_{P \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{P_0 + P}{x} - 1 \right) J_\mu(x) - \frac{\alpha}{4\pi x^2} \square^2 \int \left(F_1(x - x') - \frac{1}{3} F_2(x - x') \right) J_\mu(x') d\omega', \quad (\text{П. 39})$$

первый член которого дает логарифмически расходящуюся часть перенормировки заряда.

Следует отметить, что наличие члена перенормировки заряда с первого взгляда противоречит сохранению заряда, поскольку в связи с этим членом в вакууме индуцируется не равный нулю полный заряд. В действительности же формальное определение полного индуцированного заряда будет давать значение, равное нулю:

$$\frac{1}{c} \int \langle j_\mu(x) \rangle d\sigma_\mu = \frac{i}{2\hbar c^2} \int \epsilon(x - x') \left[\frac{1}{c} \int j_\mu(x) d\sigma_\mu, j_\nu(x') \right]_0 A_\nu(x') d\omega' = 0, \quad (\text{П. 40})$$

так как оператор полного заряда коммутирует с вектором тока в каждой точке. Выражение для $\langle j_\mu(x) \rangle$ вида

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{4e^2}{\hbar} \int G(x - x') F_{\mu\nu}(x') d\omega', \quad (\text{П. 41})$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu \quad (\text{П. 42})$$

формально совместимо с данным результатом, так как

$$\frac{1}{c} \int \langle j_\mu(x) \rangle d\sigma_\mu = \frac{2e^2}{\hbar} \int \left(d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} - d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) \int G(x - x') F_{\mu\nu}(x') d\omega' = 0 \quad (\text{П. 43})$$

в силу тессеры

$$\int \left(d\sigma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} F(x) - d\sigma_\nu \frac{\partial}{\partial x_\mu} F(x) \right) = 0. \quad (\text{П. 44})$$

Однако очевидно, что указанные формальные манипуляции оправданы только в том случае, если подинтегральное выражение в (П. 44) достаточно быстро убывает в пространственно-подобных направлениях, что не имеет места в случае напряженностей поля, порождаемого распределением зарядов, не равных в сумме нулю.

Данную трудность можно обойти, если рассматривать истинное электромагнитное поле как предел пространственно ограниченного поля, для которого полный индуцированный заряд равен нулю. Это удобно сделать, приписав световому кванту конечную массу, которая впоследствии полагается равной нулю. Запишем соответственно этому потенциалы поля, порождаемого зарядами, распределенными заданным образом, в виде

$$A_\mu(x) = \frac{1}{c} \int \bar{D}(x-x') J_\mu(x') d\omega', \quad \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0, \quad (\text{П. 45})$$

где

$$\bar{D}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ikx}}{k^2 + \epsilon^2} (dk). \quad (\text{П. 46})$$

Индукцированный ток теперь может быть представлен в форме

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle &= -\frac{4e^2}{\hbar c} \int G(x-x') \square'^2 \bar{D}(x'-x'') J_\mu(x'') d\omega' d\omega'' = \\ &= \frac{4e^2}{\hbar c} \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik\xi} G(k) k^2 \bar{D}(k) J_\mu(x-\xi) (dk) (d\xi); \end{aligned} \quad (\text{П. 47})$$

во второе из этих выражений входят обращения Фурье функций $G(x)$ и $\bar{D}(x)$:

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{1}{(4\pi)^3} \int_{-1}^1 dv (1-v^2) \int (dp) \delta'(p^2 + x^2 + \frac{k^2}{4}(1-v^2)), \\ \bar{D}(k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 + \epsilon^2}. \end{aligned} \quad (\text{П. 48})$$

Полный индуцированный заряд теперь может быть выражен через полный внешний заряд

$$Q = \frac{1}{c} \int J_\mu(x-\xi) d\sigma_\mu, \quad (\text{П. 49})$$

который не зависит от ξ , а именно,

$$\frac{1}{c} \int \langle j_\mu(x) \rangle d\sigma_\mu = \frac{4e^2}{\hbar c} Q \int G(k) k^2 \bar{D}(k) \delta(k) (dk) = \frac{4e^2}{\hbar c} Q \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{k^2}{k^2 + \epsilon^2} G(k) \right)_{k_\mu=0}. \quad (\text{П. 50})$$

Если положить ϵ равным нулю до нахождения значения обращения Фурье при $k_\mu = 0$, то мы получим вычисленный ранее не равный нулю индуцированный заряд

$$\delta Q = \frac{4e^2}{\hbar c} Q [G(k)]_{k_\mu=0} = \frac{\alpha}{3\pi^2} Q \int (dp) \delta'(p^2 + x^2). \quad (\text{П. 51})$$

С другой стороны, если предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$ выполнить в конце вычисления, то мы, очевидно, получим $\delta Q = 0$.

Смысл указанного предельного процесса лучше всего пояснить замечанием, что при этом в первом члене выражения (П. 39) $J_\mu(x)$ заменяется на

$$J_\mu(x) - \epsilon^2 c A_\mu(x), \quad (\text{П. 52})$$

поскольку потенциалы (П. 45) подчиняются дифференциальному уравнению

$$(\square^2 - \epsilon^2) A_\mu(x) = -\frac{1}{c} J_\mu(x). \quad (\text{П. 53})$$

Далее, величина (П. 52) всюду переходит в $J_\mu(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Полный заряд, подсчитанный с использованием выражения (П. 52), равен нулю. Это можно

проиллюстрировать на плотности заряда, связанной, согласно (П. 52), с точечным зарядом в начале координат, т. е. с

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e \left(\delta(\mathbf{r}) - \varepsilon^2 \frac{e^{-\varepsilon r}}{4\pi r} \right). \quad (\text{П. 54})$$

Из сказанного можно заключить, что в процессе поляризации вакуума к исходным зарядам добавляется не равный нулю и даже расходящийся по величине заряд; компенсирующий заряд порождается на бесконечности.

Применим в заключение развитые в настоящей части вычислительные методы для нахождения инвариантного выражения электромагнитной массы

$$\delta mc^2 \psi(x) = -\frac{e^2}{2} \int \gamma_\mu [\overline{D}(x-x') S^{(1)}(x-x') + D^{(1)}(x-x') \overline{S}(x-x')] \gamma_\mu \psi(x') d\omega'. \quad (\text{П. 55})$$

Подстановка вместо входящих в подинтегральное выражение функций их представления Фурье дает

$$\delta mc^2 \psi(x) = -\frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^7} \int (dk)(dk') e^{i(k+k')(x-x')} \times \\ \times \gamma_\mu (i\gamma k' - x) \gamma_\mu \left(\frac{\delta(k'^2 + x^2)}{k^2} + \frac{\delta(k^2)}{k'^2 + x^2} \right) \psi(x') d\omega'. \quad (\text{П. 56})$$

Последнее выражение преобразуется к виду

$$-\frac{e^2}{2} \frac{1}{(2\pi)^7} \int (dk)(dp) e^{ip(x-x')} \gamma_\mu (i\gamma(p-k) - x) \gamma_\mu \times \\ \times \left(\frac{\delta(k^2 - 2pk)}{2pk} - \frac{\delta(k^2)}{2pk} \right) \psi(x') d\omega', \quad (\text{П. 57})$$

если ввести величину

$$p_\mu = k_\mu + k'_\mu, \quad (\text{П. 58})$$

которая фактически удовлетворяет условию

$$p^2 + x^2 = 0 \quad (\text{П. 59})$$

вследствие подчинения функции $\psi(x')$ волновому уравнению. Далее, имеют место равенства

$$\frac{1}{2pk} [\delta(k^2 - 2pk) - \delta(k^2)] = - \int_0^1 \delta'(k^2 - 2pku) du \quad (\text{П. 60})$$

и

$$\gamma_\mu (i\gamma(p-k) - x) \gamma_\mu = -2(i\gamma(p-k) + 2x), \quad (\text{П. 61})$$

откуда

$$\delta mc^2 \psi(x) = \frac{e^2}{(2\pi)^7} \int (dk)(dp) \int_0^1 du e^{ip(x-x')} (i\gamma k - x) \delta'(k^2 - 2pku) \psi(x') d\omega'; \quad (\text{П. 62})$$

здесь мы использовали также то обстоятельство, что действие оператора $i\gamma p + x$ на $\psi(x')$ эквивалентно в данном случае действию оператора $\gamma_\mu (\partial/\partial x'_\mu) + x$ и, следовательно, дает нуль. Преобразование

$$k_\mu \rightarrow k_\mu + p_\mu \quad (\text{П. 63})$$

приводит теперь к выражению

$$\delta mc^2 \psi(x) = \frac{e^2}{(2\pi)^7} \int (dk)(dp) \int_0^1 du e^{ip(x-x')} (i\gamma pu - x) \delta'(k^2 + x^2 u^2) \psi(x') d\omega' = \\ = -\frac{e^2}{(2\pi)^8} x \int_0^1 du \int (dk)(1+u) \delta'(k^2 + x^2 u^2) \psi(x). \quad (\text{П. 64})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\delta m}{m} = & -\frac{\alpha}{2\pi^2} \int_0^1 (1+u) du \int (dk) \delta'(k^2 + x^2 u^2) = -\frac{3\alpha}{4\pi^2} \int (dk) \delta'(k^2 + x^2) + \\ & + \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_0^1 (2u^2 + u^3) du k^2 \int (dk) \delta''(k^2 + x^2 u^2), \end{aligned} \quad (\text{П. 65})$$

откуда, согласно (П. 33) и (П. 35), получаем

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{3\alpha}{2\pi} \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{K_0 + K}{x} - \frac{1}{6} \right). \quad (\text{П. 66})$$

ЧАСТЬ IV

ТЕОРИЯ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ¹⁾

Обычное обоснование квантовой динамики, основанное на принципе соответствия, заменено здесь особым квантово-механическим принципом, из которого могут быть выведены уравнения движения и перестановочные соотношения. Теория развивается с помощью модели локализованных полей. Вначале дан краткий обзор общего квантово-механического формализма операторов и собственных векторов, причем ударение сделано на дифференциальной характеристике представителей и функций преобразования с помощью бесконечно малых унитарных преобразований. Фундаментальный динамический принцип устанавливается как вариационный принцип для преобразующей функции, связывающей собственные векторы, отвечающие различным пространственно-подобным поверхностям, и описывающей развитие системы во времени. Оператор, порождающий бесконечно малое преобразование, есть вариация операторного интеграла действия — пространственно-временного интеграла от инвариантной операторной лагранжевой функции. Инвариантность лагранжевой функции обеспечивает инвариантность формы динамического принципа при координатных преобразованиях, за исключением таких преобразований, которые включают обращение положительного направления времени, когда необходимо особое рассмотрение.

В разделе 3 показывается, что требование инвариантности относительно инверсии времени накладывает такое ограничение на операторные свойства поля, которое оказывается эквивалентным связи между спином и статистикой частиц. Для данной динамической системы изменение преобразующей функции происходит только от изменения собственных векторов, связанных с двумя поверхностями, причем это изменение преобразующей функции производится оператором, сконструированным из величин поля, соответствующих данным поверхностям. Это приводит к операторному принципу стационарного действия, из которого получаются уравнения движения. Перестановочные соотношения получаются при помощи производящего оператора, связанного с данной поверхностью. В частности, канонические перестановочные соотношения получаются для таких величин поля, которые не ограничены уравнениями связи. Поверхностный производящий оператор приводит к обобщенному уравнению Шредингера для представителей произвольного состояния. Кратко рассматривается вариация интеграла действия, которая соответствует изменению в самой динамической системе. Описывается метод конструирования преобразующей функции в форме, пригодной для поля с целым спином, причем метод включает решение уравнения Гамильтона—Якоби для упорядоченных операторов. В разделе 3 отмечена особая природа инверсии времени, причем указано, что заряд и вектор энергии-импульса ведут себя при инверсии времени соответственно как псевдоскаляр и псевдовектор. Это, между прочим, показывает, что положительные и отрицательные заряды должны входить симметрично в полностью ковариантной теории. Различие между псевдовектором энергии-импульса и истинным вектором перемещения указывает на то, что инверсия времени не может быть описана в рамках унитарных преобразований. Это обстоятельство находит фундаментальное отражение в основном динамическом принципе. Важно отметить, что часть лагранжевой функции для поля с полуцелым спином ведет себя как псевдоскаляр в отношении инверсии времени. Найдено, что неунитарное преобразование, необходимое для представления инверсии времени, выражается в замене вектора состояния дуальным или комплексно-сопряженным вектором и одновременной инверсией всех операторов. Фундаментальный динамический принцип будет тогда

¹⁾ Данная статья, опубликованная в 1951 г. и помещенная здесь как часть IV большой работы Швингера по квантовой электродинамике, является первой частью его другой работы, вторая и третья части которой опубликованы лишь в 1953 г. (Phys. Rev., 91, 713, 728) и не вошли в настоящий сборник. Статья переведена М. Марианашвили. — *Прим. ред.*

инвариантным при инверсии времени, если обращение порядка всех операторов в лагранжевой функции оставляет неизменной часть, соответствующую полю с целым спином, и меняет знак у части, соответствующей полю с полуцелым спином. Это требование включает в себя по существу коммутативность или антикоммутативность соответственно компонент с целым и полуцелым спином, что выражает связь между спином и статистикой.

1. Введение

Несмотря на широкое развитие общих представлений и техники расчетов квантовой теории поля, количественные успехи были достигнуты только в ограниченной области квантовой электродинамики. Более того, существование как скрытых, так и явных расхождений подчеркивает то обстоятельство, что современная квантовая теория является в некотором отношении неполной. Однако нашей задачей является сейчас не решение этой основной проблемы, а такое представление общей квантовой теории поля, которое объединяло бы в себе несколько, независимо друг от друга развитых методов и могло бы послужить формализмом, в рамках которого можно было бы развить фундаментальные новые физические идеи.

Квантовая механика включает две различные совокупности гипотез: общую математическую схему линейных операторов и векторов состояния с соответствующей вероятностной интерпретацией и перестановочными соотношениями и уравнения движения для данной динамической системы. Развиваемая нами в дальнейшем точка зрения, заключается в замене ряда обычных допущений, основанных на классической гамильтоновой динамике и принципе соответствия, одним единственным динамическим принципом¹⁾. Мы считаем, однако, полезным дать сначала краткое обозрение некоторых сторон математического формализма, который в дальнейшем будет часто применяться для построения нашей теории.

Одновременные собственные векторы $\Psi(\alpha')$ некоторой полной совокупности коммутирующих эрмитовых операторов дают описание произвольного состояния с помощью представителя

$$(\alpha' |) = (\Psi(\alpha'), \Psi), \quad (1.1)$$

который интерпретируется как амплитуда вероятности. Два таких представления, отвечающие различным полным совокупностям коммутирующих операторов, связаны соотношением

$$(\alpha' |) = \int (\alpha' | \beta') d\beta' (\beta' |), \quad (1.2)$$

где $\int d\beta'$ означает интегрирование и суммирование по всем собственным значениям β' и

$$(\alpha' | \beta') = (\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')) \quad (1.3)$$

есть функция преобразования. В качестве частного примера выражения (1.2) имеем

$$(\alpha' | \gamma') = \int (\alpha' | \beta') d\beta' (\beta' | \gamma'), \quad (1.4)$$

т. е. мультипликативный закон составления функций преобразования. Совокупность коммутирующих эрмитовых операторов

$$\bar{\alpha} = U\alpha U^{-1}, \quad (1.5)$$

которая получается из α с помощью произвольного унитарного оператора U , обладает тем свойством, что ее собственные значения тождественны с собственными значениями α , а ее собственные векторы даются соотношениями

$$\Psi(\bar{\alpha}') = U\Psi(\alpha'), \quad (1.6)$$

¹⁾ Хотя наше внимание сосредоточено здесь на динамике поля, очевидно, что аналогичную схему можно развить и для квантовой механики частиц. — *Прим. авт.*

где $\bar{\alpha}'$ и α' — одна и та же совокупность собственных значений. Обратно, две системы операторов, обладающие одинаковыми собственными значениями, будут связаны унитарным преобразованием. Отметим, что функция преобразования ($\bar{\alpha}' | \alpha''$) рассматривается как матрица U^{-1} в совокупности начальных собственных векторов

$$(\bar{\alpha}' | \alpha'') = (U\Psi(\alpha'), \Psi(\alpha'')) = (\Psi(\alpha'), U^+\Psi(\alpha'')) = (\alpha' | U^{-1} | \alpha''). \quad (1.7)$$

Унитарный оператор

$$U = 1 - \frac{i}{\hbar} F, \quad U^{-1} = 1 + \frac{i}{\hbar} F, \quad (1.8)$$

в котором F есть бесконечно малый эрмитов оператор, индуцирует бесконечно малое преобразование в коммутирующей совокупности операторов

$$\bar{\alpha} = U\alpha U^{-1} = \alpha - \delta\alpha, \quad (1.9)$$

где

$$i\hbar\delta\alpha = \alpha F - F\alpha = [\alpha, F]. \quad (1.10)$$

Если система такова, что возможно получить оператор $\delta\alpha$, который коммутирует с полной совокупностью α , то мы можем рассматривать $\delta\alpha$ как произвольное бесконечно малое число и $\Psi(\bar{\alpha}')$ считать собственным вектором α с собственным значением $\alpha' + \delta\alpha$. Ясно, что это соответствует специальному случаю, когда α имеет непрерывный спектр собственных значений.

Понятие бесконечно малого унитарного преобразования может быть использовано для дифференциальной характеристики представителя состояния или функции преобразования. Изменение представителя (α'), когда коммутирующая совокупность операторов меняется с помощью унитарного преобразования, порожденного бесконечно малым эрмитовым оператором F , дается соотношением

$$\delta(\alpha' |) = ((\alpha - \delta\alpha)' |) - (\alpha' |) = (\delta\Psi(\alpha'), \Psi), \quad (1.11)$$

где

$$\delta\Psi(\alpha') = U\Psi(\alpha') - \Psi(\alpha') = -\frac{i}{\hbar} F\Psi(\alpha'). \quad (1.12)$$

Следовательно,

$$\delta(\alpha' |) = \frac{i}{\hbar} (\Psi(\alpha'), F\Psi) = \frac{i}{\hbar} (\alpha' | F |) \quad (1.13)$$

или

$$\frac{\hbar}{i} \delta(\alpha' |) = \int (\alpha' | F | \alpha'') d\alpha''(\alpha''), \quad (1.14)$$

что является дифференциальным уравнением для представителя (α'). Аналогичным образом мы можем охарактеризовать функцию преобразования ($\alpha' | \beta'$) с помощью изменения двух коммутирующих систем операторов α и β в $\alpha - \delta\alpha$ и $\beta - \delta\beta$, индуцированных двумя бесконечно малыми производящими операторами F_α и F_β . Итак,

$$\delta(\alpha' | \beta') = (\delta\Psi(\alpha'), \Psi(\beta')) + (\Psi(\alpha'), \delta\Psi(\beta')) = \frac{i}{\hbar} (\alpha' | (F_\alpha - F_\beta) | \beta') \quad (1.15)$$

или

$$\frac{\hbar}{i} \delta(\alpha' | \beta') = \int (\alpha' | F_\alpha | \alpha'') d\alpha''(\alpha'') - \int (\alpha' | \beta'') d\beta''(\beta'' | F_\beta | \beta'). \quad (1.16)$$

2. Квантовая динамика локализуемых полей

Локализуемое поле есть динамическая система, характеризующаяся одной или несколькими операторными функциями $\varphi^\alpha(x)$ пространственно-временных координат. В этом утверждении содержится допущение, что операторы x_μ , представляющие измерение положения, коммутируют между собой:

$$[x, x_\mu] = 0 \quad (2.1)$$

и, кроме того, коммутируют с операторами поля:

$$[x_\mu, \varphi^a] = 0, \quad (2.2)$$

так что

$$(x | \varphi^a | x') = \delta(x - x') \varphi^a(x). \quad (2.3)$$

Трудности современных полевых теорий могут быть поставлены в связь с неясной гипотезой локализуемости. Однако наше рассмотрение теории поля будет ограничено именно такими полями, причем остается вне рассмотрения вопрос о том, возможно ли включить другие поля в эту теорию.

Проблема построения полной совокупности коммутирующих операторов, т. е. одновременно измеряемых физических величин, необходимо требует знания характерных свойств полей. Тем не менее на основе общего принципа, связанного с релятивистскими требованиями, мы должны ожидать, что такие коммутирующие операторы будут образованы из переменных поля в физически независимых пространственно-временных точках, т. е. в точках, которые не могут быть соединены даже световым сигналом. Непрерывная совокупность таких точек образует пространственно-подобную поверхность, которая является геометрическим понятием, не зависящим от координатной системы. Следовательно, базисные векторы системы $\Psi(\zeta', \sigma)$ должны быть заданы с помощью пространственно-подобной поверхности σ и собственных значений ζ' полной совокупности коммутирующих операторов, сконструированных из волновых функций поля, связанных с этой поверхностью. Изменению представления будет соответствовать, вообще говоря, введение другой совокупности коммутирующих операторов на другой пространственно-подобной поверхности. Особенно важным является преобразование $\zeta_2 \sigma_2 \rightarrow \zeta_1, \sigma_1$, в котором ζ_1 и ζ_2 являются подобно сконструированными совокупностями операторов, обладающими одинаковым спектром собственных значений и, следовательно, связанными унитарным преобразованием

$$\zeta_1 = U_{12} \zeta_2 U_{12}^{-1}, \quad \Psi(\zeta'_1, \sigma_1) = U_{12} \Psi(\zeta'_2, \sigma_2), \quad \zeta'_1 = \zeta''_2, \quad (2.4)$$

так что [см. (1.7)]

$$(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) = (\zeta'_2, \sigma_2 | U_{12}^{-1} | \zeta''_2, \sigma_2). \quad (2.5)$$

Ясно, что описание развития системы во времени будет получено путем отыскания соотношения между собственными векторами, связанными с различными пространственно-подобными поверхностями, или, другими словами, нахождением функции преобразования (2.5). Соответственно этому мы должны ожидать, что квантово-динамические законы найдут свое естественное выражение с помощью функций преобразования; ниже мы найдем соответствующие дифференциальные формулировки.

Оператор U_{12}^{-1} описывает развитие системы от σ_2 к σ_1 и включает не только детальную динамическую характеристику системы в этой пространственно-временной области, но также и выбор коммутирующих операторов ζ_1 и ζ_2 на поверхности σ_1 и σ_2 . Любое бесконечно малое изменение величин, от которых зависит функция преобразования, вызывает соответствующее изменение U_{12}^{-1}

$$\delta(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) = (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta U_{12}^{-1} | \zeta''_2, \sigma_2). \quad (2.6)$$

Далее заключаем, что следствием унитарности U_{12} является эрмитовость оператора $iU_{12} \delta U_{12}^{-1}$. Соответственно этому напомним

$$\delta U_{12}^{-1} = \frac{i}{\hbar} U_{12}^{-1} \delta W_{12}, \quad (2.7)$$

где δW_{12} — бесконечно малый эрмитов оператор. Таким образом,

$$\delta(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) = \frac{i}{\hbar} (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta W_{12} | \zeta''_2, \sigma_2). \quad (2.8)$$

Закон композиции преобразующих функций [см. (1.4)]

$$(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_3, \sigma_3) = \int (\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) d\zeta'' (\zeta''_2, \sigma_2 | \zeta''_3, \sigma_3) \quad (2.9)$$

накладывает ограничение на δW — производящий оператор бесконечно малого преобразования. Таким образом,

$$\begin{aligned} (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta W_{13} | \zeta''_3, \sigma_3) &= \int (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta W_{12} | \zeta''_2, \sigma_2) d\zeta'' (\zeta''_2, \sigma_2 | \zeta''_3, \sigma_3) + \\ &+ \int (\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) d\zeta'' (\zeta''_2, \sigma_2 | \delta W_{23} | \zeta''_3, \sigma_3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

или

$$\delta W_{13} = \delta W_{12} + \delta W_{23}, \quad (2.11)$$

т. е. бесконечно малый производящий оператор удовлетворяет аддитивному закону композиции. Наше основное допущение состоит в том, что δW_{12} получается вариацией величин, входящих в эрмитов оператор W_{12} , который должен иметь вид

$$W_{12} = \frac{1}{c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \mathcal{L} [x] \quad (2.12)$$

в соответствии с требованиями аддитивности (2.11). Индивидуальная система описывается установлением \mathcal{L} в виде инвариантной эрмитовой функции волновых функций поля и их производных по координатам:

$$\mathcal{L} [x] = \mathcal{L} (\varphi^\alpha (x |, \varphi_\mu^\alpha (x)), \varphi_\mu^\alpha (x) = \partial_\mu \varphi^\alpha (x). \quad (2.13)$$

В соответствии с их классическими аналогами, мы назовем W и \mathcal{L} соответственно операторами интеграла действия и лагранжевой функции. Инвариантность лагранжевой функции, а следовательно, и интеграла действия гарантирует, что наш фундаментальный динамический принцип

$$\begin{aligned} \delta (\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) &= \frac{i}{\hbar} (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta W_{12} | \zeta''_2, \sigma_2) = \\ &= \frac{i}{\hbar c} (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \mathcal{L} | \zeta''_2, \sigma_2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

не меняет свой вид при изменении координатной системы. При этом, однако, должно быть сделано исключение для такого координатного преобразования, которое включает в себя обращение положительного направления времени; оно требует специального рассмотрения. Мы в дальнейшем увидим, что требование инвариантности при инверсии времени накладывает общее ограничение на перестановочные свойства полей, которое оказывается просто связью между спином и статистикой элементарных частиц.

Если параметры системы не меняются, вариация функции преобразования в (2.14) происходит только от бесконечно малого изменения ζ_1, σ_1 и ζ_2, σ_2 . Такое преобразование может быть охарактеризовано бесконечно малыми производящими операторами $F(\sigma_1)$ и $F(\sigma_2)$, которые действуют на собственные векторы $\Psi(\zeta'_1, \sigma_1)$ и $\Psi(\zeta''_2, \sigma_2)$ и, следовательно, выражены через операторы, отвечающие соответственно поверхностям σ_1 и σ_2 . С помощью (1.15) мы получим для таких вариаций

$$\delta W_{12} = F(\sigma_1) - F(\sigma_2). \quad (2.15)$$

Это есть операторный принцип стационарного действия, так как он утверждает, что оператор интеграла действия не меняется при бесконечно малой вариации полевых величин внутри области, ограниченной поверхностями σ_1 и σ_2 , и зависит

только от операторов, связанных с граничными поверхностями. Уравнения движения содержатся в этом принципе ¹⁾).

Вычисление δW_{12} включает суммирование независимых эффектов изменения $\delta_0 \varphi^\alpha(x)$ волновых функций в каждой точке и изменения области интегрирования вследствие перемещения δx_μ точек граничной поверхности. Таким образом,

$$\delta W_{12} = \frac{1}{c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \delta_0 \mathcal{L} + \frac{1}{c} \left(\int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} \right) d\sigma_\mu \delta x_\mu \mathcal{L}, \quad (2.16)$$

где

$$\delta_0 \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta_0 \varphi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^\alpha} \partial_\mu \delta_0 \varphi^\alpha = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^\alpha} \right] \delta_0 \varphi^\alpha + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^\alpha} \delta_0 \varphi^\alpha \right]. \quad (2.17)$$

Это выражение для $\delta_0 \mathcal{L}$ надо понимать символически, так как порядок операторов в \mathcal{L} не должен меняться при проведении вариации. Соответственно этому для получения следствия из требования стационарности интеграла действия надо приврать во внимание перестановочные свойства $\delta_0 \varphi^\alpha$. Для простоты мы введем явное допущение, что перестановочные соотношения $\delta_0 \varphi^\alpha$ и структура лагранжевой функции должны быть связаны так, чтобы члены, отличающиеся друг от друга только положением $\delta_0 \varphi^\alpha$, вносили одинаковые доли в выражение вариации. Тогда мы можем вывести уравнения движения

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha}. \quad (2.18)$$

Из найденного вида δW_{12} мы получим бесконечно малый производящий оператор $F(\sigma)$, который действует на собственные векторы, связанные с поверхностью σ :

$$F(\sigma) = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\mu^\alpha} \delta_0 \varphi^\alpha + \mathcal{L} \delta x_\mu \right]. \quad (2.19)$$

Общая вариация $\delta \varphi^\alpha(x)$ составлена аддитивно из вариации $\delta_0 \varphi^\alpha(x)$ в точке x и изменения $\varphi^\alpha(x)$, произведенного переходом от точки x на σ к точке $x + \delta x$ на $\sigma + \delta \sigma$. При последнем вычислении мы должны будем учесть, что хотя полевые компоненты $\varphi^\alpha(x)$ и заданы с помощью некоторой фиксированной координатной системы, их гораздо удобнее отнести к локальной системе, определяемой поверхностью σ в точке x . Мы будем рассматривать только такие движения, которые соответствуют локальному „жесткому“ перемещению поверхности σ . Это ограничение, выражаемое соотношением

$$\partial_\mu \delta x_\nu = -\partial_\nu \delta x_\mu, \quad (2.20)$$

будет условием того, что бесконечно малый пространственный вектор на σ переходит в вектор равной длины на $\sigma + \delta \sigma$. Смещение, вызывающее изменение $\varphi^\alpha(x)$, может быть получено изменением в координатной системе, которое в окрестности x сводится к эквивалентному координатному преобразованию. Итак, при бесконечно малом координатном преобразовании

$$x'_\mu - x_\mu = -\delta x_\mu, \quad (2.21)$$

где

$$\delta x_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon_{\mu\nu} x_\nu, \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} = \partial_\mu \delta x_\nu, \quad (2.22)$$

волновые функции поля подвергаются линейному преобразованию

$$\varphi^{\alpha'}(x') - \varphi^\alpha(x) = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^\beta(x). \quad (2.23)$$

¹⁾ Следует учитывать, что в дальнейшем лагранжева функция простых систем обычно рассматривается лишь до членов, квадратичных относительно компонент отдельных полей. — *Прим. авт.*

Следовательно,

$$\varphi^{\alpha'}(x) - \varphi^{\alpha}(x) = \partial_x \varphi^{\alpha}(x) \delta x_{\mu} + \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\nu} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta}(x) \quad (2.24)$$

и

$$\delta \varphi^{\alpha}(x) = \delta_0 \varphi^{\alpha}(x) + \varphi_{\mu}^{\alpha}(x) \delta x_{\mu} + \frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \partial_{\mu} \delta x_{\nu} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta}(x). \quad (2.25)$$

В результате введения полной вариации бесконечно малый производящий оператор $F(\sigma)$ примет вид

$$F(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \left[\Pi_{\mu}^{\alpha} \delta \varphi^{\alpha} + \frac{1}{c} \mathcal{L} \delta x_{\mu} - \Pi_{\mu}^{\alpha} \varphi_{\nu}^{\alpha} \delta x_{\nu} - \frac{i}{2\hbar} \Pi_{\mu}^{\alpha} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta} \partial_{\lambda} \delta x_{\nu} \right], \quad (2.26)$$

где

$$c \Pi_{\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_{\mu}^{\alpha}}. \quad (2.27)$$

Для упрощения последнего члена в (2.26) определим

$$f_{\mu\lambda\nu} = -f_{\lambda\mu\nu} = \frac{i}{2\hbar} [\Pi_{\mu}^{\alpha} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta} + \Pi_{\nu}^{\alpha} S_{\lambda\mu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta} + \Pi_{\lambda}^{\alpha} S_{\nu\mu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta}]; \quad (2.28)$$

тогда получим

$$\frac{i}{2\hbar} \Pi_{\mu}^{\alpha} S_{\lambda\nu}^{\alpha\beta} \varphi^{\beta} \partial_{\lambda} \delta x_{\nu} = f_{\mu\lambda\nu} \partial_{\lambda} \delta x_{\nu} + \partial_{\lambda} (f_{\mu\lambda\nu} \delta x_{\nu}) + \partial_{\lambda} f_{\lambda\mu\nu} \delta x_{\nu}, \quad (2.29)$$

так как два последних члена $f_{\mu\lambda\nu}$ симметричны относительно λ и ν и, следовательно, ввиду (2.20) не вносят доли в (2.29). Далее, так как $f_{\mu\lambda\nu} = -f_{\lambda\mu\nu}$, то

$$\int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \partial_{\lambda} (f_{\mu\lambda\nu} \delta x_{\nu}) = 0, \quad (2.30)$$

предполагая, что $f_{\mu\lambda\nu} \delta x_{\nu}$ достаточно быстро стремится к нулю в бесконечно удаленных точках¹⁾. Итак, окончательно

$$F(\sigma) = \int_{\sigma} d\sigma_{\mu} \left[\Pi_{\mu}^{\alpha} \delta \varphi^{\alpha} + \frac{1}{c} T_{\mu\nu} \delta x_{\nu} \right], \quad (2.31)$$

где

$$\frac{1}{c} T_{\mu\nu} = \frac{1}{c} \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \Pi_{\mu}^{\alpha} \varphi_{\nu}^{\alpha} - \partial_{\lambda} f_{\lambda\mu\nu} \quad (2.32)$$

есть оператор тензора натяжений. Как мы докажем, этот тензор обладает свойством симметрии:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}, \quad (2.33)$$

выражающим закон сохранения момента количества движения.

Законы сохранения связаны с вариациями, которые оставляют инвариантным интеграл действия, так как уравнение

$$\delta W_{12} = F(\sigma_1) - F(\sigma_2) = 0 \quad (2.34)$$

включает в себя постоянство соответствующего производящего оператора. Механические законы сохранения для изолированной системы получаются из рассмотрения „жесткого“ перемещения всего поля, или, что эквивалентно, координатной системы, причем это перемещение описывается бесконечно малым перемещением и поворотом поверхностей σ_1 и σ_2 :

$$\delta x_{\mu} = \epsilon_{\mu} - \epsilon_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}. \quad (2.35)$$

¹⁾ Все такие характеристики пространственно-замкнутой системы с помощью операторов, стремящихся к нулю в бесконечности, надо понимать как ограничение состояниями, для которых матричные элементы операторов обладают такими свойствами. — *Прим. авт.*

в комбинации с вариацией поля $\delta\varphi^\alpha = 0$. Производящий оператор перемещения дается тогда формулой

$$F_{\delta x}(\sigma) = \varepsilon_\mu P_\mu(\sigma) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu\nu}(\sigma), \quad (2.36)$$

где

$$P_\nu(\sigma) = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\mu T_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$J_{\mu\nu}(\sigma) = \frac{1}{c} \int d\sigma_\lambda M_{\lambda\mu\nu}, \quad (2.38)$$

$$M_{\lambda\mu\nu} = x_\mu T_{\lambda\nu} - x_\nu T_{\lambda\mu}.$$

Следовательно, имеем соотношения

$$P_\nu(\sigma_1) - P_\nu(\sigma_2) = 0, \quad (2.39)$$

$$J_{\mu\nu}(\sigma_1) - J_{\mu\nu}(\sigma_2) = 0, \quad (2.40)$$

которые представляют собой, соответственно, законы сохранения вектора энергии — импульса и тензора момента количества движения. Так как поверхности σ_1 и σ_2 произвольны, мы получаем соответствующие дифференциальные законы сохранения

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.41)$$

и

$$\partial_\lambda M_{\lambda\mu\nu} = 0, \quad (2.42)$$

которые совместно приводят к симметрии тензора натяжений

$$\partial_\lambda M_{\lambda\mu\nu} = T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = 0. \quad (2.43)$$

Закон сохранения заряда можно получить из требования инвариантности эрмитовой лагранжевой функции относительно преобразования фазы, т. е. умножения взаимно сопряженных эрмитовых пар полевых компонент на $\exp(\pm i\gamma)$. Мы рассмотрим бесконечно малое фазовое преобразование и, для удобства, напомним

$$\gamma = \frac{e}{\hbar c} \delta\lambda. \quad (2.44)$$

Таким образом, мы постулируем инвариантность \mathcal{L} относительно бесконечно малого преобразования

$$\delta\varphi^\alpha = -\frac{ie}{\hbar c} \varepsilon^\alpha \delta\lambda \varphi^\alpha, \quad (2.45)$$

где ε^α характеризует волновые функции поля и может принимать значения 0 или ± 1 . Соответствующий производящий оператор есть

$$F_{\delta\lambda}(\sigma) = -\frac{ie}{\hbar c} \int_\sigma d\sigma_\mu \Pi_\mu^\alpha \varepsilon^\alpha \varphi^\alpha \delta\lambda = \frac{1}{c} Q(\sigma) \delta\lambda, \quad (2.46)$$

где

$$Q(\sigma) = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\mu j_\mu, \quad (2.47)$$

$$j_\mu = -\frac{iec}{\hbar} \Pi_\mu^\alpha \varepsilon^\alpha \varphi^\alpha. \quad (2.48)$$

Выведенное соотношение

$$Q(\sigma_1) - Q(\sigma_2) = 0 \quad (2.49)$$

есть закон сохранения полного заряда системы.

Важно отметить неоднозначность лагранжевой функции, которая связана с данными уравнениями движения. Так, две лагранжевые функции, связанные соотношением

$$\overline{\mathcal{L}}(\varphi^\alpha, \varphi_\mu^\alpha) = \mathcal{L}(\varphi^\alpha, \varphi_\mu^\alpha) + c \partial_\nu f_\nu(\varphi^\alpha, \varphi_\mu^\alpha), \quad (2.50)$$

приводят к операторам интеграла действия, отличающимся поверхностным интегралом

$$\overline{W}_{12} = W_{12} + \left(\int_{\sigma_1} - \int_{\sigma_2} \right) d\sigma_\nu f_\nu. \quad (2.51)$$

Следовательно, принцип стационарного действия для \overline{W}_{12} автоматически выполняется в силу уравнений движения, получаемых из W_{12} и

$$\delta \overline{W}_{12} = \overline{F}(\sigma_1) - \overline{F}(\sigma_2), \quad (2.52)$$

где

$$\overline{F} = F + \delta w, \quad w = \int d\sigma_\nu f_\nu. \quad (2.53)$$

Итак, добавление к лагранжевой функции дивергенции произвольного вектора не меняет уравнения движения, но модифицирует производящий оператор, связанный с данной поверхностью. Эта неоднозначность лагранжевой функции точно соответствует возможности подвергнуть коммутирующую совокупность операторов на σ произвольному унитарному преобразованию.

Мы проверим высказанное утверждение, специализируя общую теорию преобразования в виде унитарных преобразований на данной поверхности.

Введем новую систему коммутирующих операторов $\overline{\zeta}$ на σ , которая получается из ζ унитарным преобразованием

$$\Psi(\overline{\zeta}', \sigma) = \mathcal{U} \Psi(\zeta', \sigma), \quad (2.54)$$

где \mathcal{U} характеризуется бесконечно малым эрмитовым производящим оператором δw :

$$\delta \mathcal{U}^{-1} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{U}^{-1} \delta w. \quad (2.55)$$

Следовательно, аналогично (2.8) имеем

$$\delta(\overline{\zeta}', \sigma | \zeta'', \sigma) = \frac{i}{\hbar} (\overline{\zeta}', \sigma | \delta w | \zeta'', \sigma), \quad (2.56)$$

$$\delta w = \overline{F} - F, \quad (2.57)$$

где \overline{F} и F — операторы, производящие бесконечно малые преобразования $\overline{\zeta}$ и ζ соответственно. Но эти уравнения имеют точно вид (2.53); обратно, используя частную форму w , мы можем получить из (2.56) дифференциальные уравнения для преобразующей функции, которая определяет новое представление.

Перестановочные соотношения нашей теории неявно учтены в трактовке F как бесконечно малого производящего оператора. Мы рассмотрим сперва такие преобразования, которые не меняют поверхности σ , так что $\delta x_\nu = 0$. Удобно написать

$$d\sigma_\mu = n_\mu d\sigma, \quad (2.58)$$

где n_μ — единичный временно-подобный вектор и $d\sigma$ — численная мера элемента поверхности. Чтобы избежать в дальнейшем сложных геометрических рассуждений, несущественных для нашего вопроса, мы ограничимся плоской поверхностью, так что n_μ будет постоянным на σ . Отметим, что в этом случае производные по координатам можно разложить на компоненты, нормальную и касательную к σ :

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= n_\mu \partial_n + \partial_{t_\mu}, \\ \partial_n &= -n_\mu \partial_\mu \quad \partial_{t_\mu} = (\delta_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) \partial_\nu, \end{aligned} \quad (2.59)$$

и уравнения движения принимают вид

$$\partial_n \Pi^\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^\alpha} - \partial_{t_\mu} \Pi_\mu^\alpha. \quad (2.60)$$

Мы здесь ввели обозначение

$$\Pi^\alpha = n_\mu \Pi_\mu^\alpha \quad (2.61)$$

для величины, которая более точно должна быть записана в виде $\Pi^\alpha(x, \sigma)$. Производящий оператор будет теперь иметь вид

$$F_{\delta\varphi} = \int d\sigma \Pi^\alpha \delta\varphi^\alpha. \quad (2.62)$$

Другая важная форма, связанная с другой системой базисных векторов, получается из (2.53) с

$$f_\nu = -\Pi^\alpha \varphi^\alpha, \quad (2.63)$$

Имеем

$$\delta \int d\sigma_\nu f_\nu = -\delta \int d\sigma \Pi^\alpha \varphi^\alpha = -\int d\sigma (\Pi^\alpha \delta\varphi^\alpha + \delta \Pi^\alpha \varphi^\alpha), \quad (2.64)$$

так что

$$\bar{F} = F_{\delta\Pi} = -\int d\sigma \delta \Pi^\alpha \varphi^\alpha. \quad (2.65)$$

Напомним снова, что эти операторные выражения носят символический характер в том смысле, что действительные положения, которые занимают $\delta\varphi^\alpha$ и $\delta\Pi^\alpha$, зависят от структуры лагранжевой функции.

Для выяснения истинного смысла $F_{\delta\varphi}$ и $F_{\delta\Pi}$ необходимо указать, что некоторые из Π^α могут быть тождественно равны нулю. Это выражает возможность того, что производные некоторых φ^α по временно-подобному направлению могут не входить в лагранжеву функцию. Соответственно этому мы разделим величины φ^α и Π^α на две группы: φ^A и Π^A , называемые каноническими переменными, и φ^A и Π^A , называемые переменными связей, причем вторая группа характеризуется условием:

$$\Pi^A \equiv 0. \quad (2.66)$$

Выбранное для φ^A название обусловлено тем, что для этих величин уравнения движения (2.60) вырождаются в уравнения связей

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} = \partial_{t_\mu} \Pi_\mu^A, \quad (2.67)$$

т. е. в соотношения между переменными на σ .

Сущность этих соотношений можно сделать более очевидной, используя требование, чтобы уравнение (2.60) было независимо от координатной системы. В дальнейшем мы покажем, что подразумеваемое ограничение структуры \mathcal{L} выражается соотношением

$$n_\mu \Pi_\nu^A - n_\nu \Pi_\mu^A = \frac{i}{\hbar} \Pi^\alpha S_{\mu\nu}^{\alpha A}. \quad (2.68)$$

Из этого соотношения умножением на n_ν получим

$$\Pi_\mu^A = \frac{i}{\hbar} \Pi^\alpha S_{\nu\nu}^{\alpha A} n_\nu, \quad (2.69)$$

что дает возможность написать уравнения связи в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^A} = \frac{i}{\hbar} \partial_\mu \Pi^\alpha S_{\mu\nu}^{\alpha A} n_\nu. \quad (2.70)$$

Теперь мы примем, что можно явно выразить левую часть (2.70) через φ^A , что дает явную форму переменных связей в виде функций канонических переменных.

Это исключает системы, для которых φ^A по существу неопределенны, вследствие калибровочной инвариантности. Случай таких систем будет рассмотрен впоследствии на примере электромагнитного поля.

Из приведенного рассмотрения и из структуры производящих операторов, очевидно, следует

$$\begin{aligned} F_{\delta\varphi} &= \int d\sigma \Pi^a \delta\varphi^a, \\ F_{\delta\Pi} &= - \int d\sigma \delta\Pi^a \varphi^a, \end{aligned} \quad (2.71)$$

так как на σ динамически независимы только канонические переменные. Соответственно $F_{\delta\varphi}$ интерпретируется как оператор, производящий бесконечно малое преобразование коммутирующей совокупности операторов ζ на σ , что вызывает изменение φ^a на $\varphi^a - \delta\varphi^a$. Аналогично, $F_{\delta\Pi}$ рассматривается как оператор, производящий бесконечно малое преобразование совокупности ζ , при котором Π^a заменяется на $\Pi^a - \delta\Pi^a$. Итак, φ^a и Π^a являются частным примером системы независимых полевых координат; наиболее общая возможность содержится в преобразовании (2.53). С каждой совокупностью операторов связана сопряженная совокупность, входящая в F , поскольку Π^a является сопряженным к φ^a , а $-\varphi^a$ — к Π^a .

Исследуем теперь изменение матрицы G (произвольной функции полевых переменных на σ), которое вызвано бесконечно малым преобразованием, произведенным, например, с помощью $F_{\delta\varphi}$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta(\zeta', \sigma | G | \zeta'', \sigma) &= (\Psi(\zeta', \sigma), G \delta\Psi(\zeta'', \sigma)) + (\delta\Psi(\zeta', \sigma), G \Psi(\zeta'', \sigma)) = \\ &= - \frac{i}{\hbar} (\zeta', \sigma | [G, F_{\delta\varphi}] | \zeta'', \sigma). \end{aligned} \quad (2.72)$$

С другой стороны,

$$\delta(\zeta', \sigma | G | \zeta'', \sigma) = (\zeta', \sigma | \delta_\varphi G | \zeta'', \sigma), \quad (2.73)$$

где $\delta_\varphi G$ означает изменение G , произведенное увеличением φ^a на $\delta\varphi^a$. Это выражает просто тот факт, что замена φ^a на $\varphi^a - \delta\varphi^a$ как в G , так и в ζ не меняет соотношения между ними, и, следовательно, матрица остается неизменной. Отсюда мы выводим перестановочные соотношения

$$[G, F_{\delta\varphi}] = i\hbar \delta_\varphi G, \quad (2.74)$$

вместе с очевидным обобщением для переменных поля; в частности,

$$[G, F_{\delta\Pi}] = i\hbar \delta_\Pi G. \quad (2.75)$$

Особенно важными являются результаты, получаемые из (2.74) и (2.75) для $G = \varphi^a$ и Π^a :

$$\begin{aligned} \left[\varphi^a(x), \int_\sigma d\sigma' \Pi^b(x') \delta\varphi^b(x') \right] &= i\hbar \delta\varphi^a(x), \\ \left[\Pi^a(x), \int_\sigma d\sigma' \Pi^b(x') \delta\varphi^b(x') \right] &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

и

$$\begin{aligned} \left[\int_\sigma d\sigma' \delta\Pi^b(x') \varphi^b(x'), \Pi^a(x) \right] &= i\hbar \delta\Pi^a(x), \\ \left[\int_\sigma d\sigma' \delta\Pi^b(x') \varphi^b(x'), \varphi^a(x) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

в которых мы учли динамическую независимость φ^a и Π^a . Для получения в явном виде перестановочных соотношений между φ^a и Π^a мы должны знать операторные свойства $\delta\varphi^a$ и $\delta\Pi^a$. Требование инвариантности формализма в отношении инверсии времени дает возможность установить эти свойства. В разделе 3

будет показано, что $\delta\varphi^b(x')$ и $\delta\Pi^b(x')$ коммутируют со всеми величинами $\varphi^a(x)$, $\Pi^a(x)$ на σ , за исключением случая, когда как a , так и b означают компоненты полей, обладающих полуцелым спином. В этом последнем случае они антикоммутируют. Соответственно этому перестановочные соотношения (2.76) и (2.77) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\sigma' [\varphi^a(x), \Pi^b(x')]_{\pm} \delta\varphi^b(x') &= i\hbar\varphi^a(x), \\ \int_{\sigma} d\sigma' [\Pi^a(x), \Pi^b(x')]_{\pm} \delta\varphi^b(x') &= 0, \\ \int_{\sigma} d\sigma' \delta\Pi^b(x') [\varphi^b(x'), \Pi^a(x)]_{\pm} &= i\hbar\delta\Pi^a(x), \\ \int_{\sigma} d\sigma' \delta\Pi^b(x') [\varphi^b(x'), \varphi^a(x)]_{\pm} &= 0, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где

$$[A, B]_- = AB - BA, \quad (2.79)$$

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (2.80)$$

Так как $\delta\varphi^a$ и $\delta\Pi^a$ совершенно произвольны, мы получаем основные перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\varphi^a(x), \Pi^b(x')]_{\pm} &= i\hbar\delta_{ab}\delta_{\sigma}(x-x'), \\ [\varphi^a(x), \varphi^b(x')]_{\pm} &= [\Pi^a(x), \Pi^b(x')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Здесь $\delta_{\sigma}(x-x')$ означает трехмерную δ -функцию, определяемую формулой

$$\int_{\sigma} d\sigma' \delta_{\sigma}(x-x')f(x') = f(x), \quad (2.82)$$

где $f(x)$ — произвольная функция. Перестановочные соотношения для φ^A могут быть теперь получены из их явных выражений через канонические переменные. Так, согласно (2.70),

$$\frac{1}{c} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A(x)}, \varphi^a(x') \right]_{\pm} = \partial_{\mu} \delta_{\sigma}(x-x') S_{\mu\nu}^{aA} n_{\nu}, \quad (2.83)$$

и

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^A(x)}, \Pi^a(x') \right]_{\pm} = 0. \quad (2.84)$$

Требование, чтобы для компонент поля с целым спином использовался коммутатор, а для компонент поля с полуцелым спином — антикоммутатор, дает нам связь между спином и статистикой частиц. Следует заметить, что перестановочные свойства системы Бозе-Эйнштейна, т. е. поля с целым спином, могут быть представлены дифференциальным оператором. Согласно (1.13), подходящий представитель произвольного состояния удовлетворяет уравнению

$$\delta(\zeta', \sigma) = \frac{i}{\hbar} (\zeta', \sigma | F_{i\varphi} |) = \frac{i}{\hbar} (\zeta', \sigma | \int_{\sigma} d\sigma' \Pi^a \delta\varphi^a |), \quad (2.85)$$

в котором σ не меняется. Характерным свойством поля с целым спином является то, что $\delta\varphi^a$ коммутирует со всеми динамическими переменными и поэтому может рассматриваться как число. Ясно, что представление, входящее в (2.85), определено непрерывными собственными значениями $\varphi^a(x)$ во всех точках σ . С помощью формулы

$$\delta(\varphi', \sigma) = \int d\sigma' \delta\varphi^{a'}(x) \frac{\delta}{\delta\varphi^{a'}(x)} (\varphi', \sigma) \quad (2.86)$$

мы получим

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi^a(x)} (\varphi', \sigma) = (\varphi', \sigma | \Pi^a(x)) \quad (2.87)$$

и аналогично

$$i\hbar \frac{\delta}{\delta \varphi^a(x)} (\Pi', \sigma) = (\Pi', \sigma | \varphi^a(x)). \quad (2.88)$$

Дальнейшие применения общих перестановочных соотношений (2.74) получаются, если последовательно положить $G = P_\nu$, $J_{\mu\nu}$ и Q . Согласно (2.30), последний член в (2.32) не вносит какой-либо доли в P_ν , так что

$$P_\nu = - \int d\sigma \Pi^a \partial_\nu \varphi^a + \frac{1}{c} \int d\sigma_\nu \mathcal{L}. \quad (2.89)$$

При вычислении δP встречаем выражение

$$\frac{1}{c} \int d\sigma_\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \int d\sigma_\nu \partial_\mu (\Pi_\mu^\alpha \delta \varphi^a) = \int d\sigma_\mu \partial_\nu (\Pi_\mu^\alpha \delta \varphi^a) = \int d\sigma \partial_\nu (\Pi^\alpha \delta \varphi^a), \quad (2.90)$$

откуда

$$\delta P_\nu = \int d\sigma (\partial_\nu \Pi^a \delta \varphi^a - \delta \Pi^a \partial_\nu \varphi^a). \quad (2.91)$$

Преобразование выражения (2.90) включает использование формулы (2.17), упрощенной с помощью уравнения движения, и допущения, что система пространственно замкнута. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} [\varphi^a(x), P_\nu] &= \frac{\hbar}{i} \partial_\nu \varphi^a(x), \\ [\Pi^a(x), P_\nu] &= \frac{\hbar}{i} \partial_\nu \Pi^a(x), \end{aligned} \quad (2.92)$$

в силу коммутации P_ν с $\delta \varphi^a$ и $\delta \Pi^a$ (что является следствием факта, что компоненты поля с полужелым спином должны входить попарно в вектор P_ν). Между прочим, коммутатор $[F^{(1)}, F^{(2)}]$, который был вычислен с помощью рассмотрения действия на $F^{(2)}$ преобразования, произведенного оператором $F^{(1)}$, может быть также рассмотрен с обратной точки зрения. Таким образом, соотношения (2.92) представляют величину P_ν как производящую перемещение.

Тензор момента количества движения $J_{\mu\nu}$ легко привести к виду, аналогичному (2.89):

$$J_{\mu\nu} = - \int d\sigma \Pi^a \left[(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \varphi^a + \frac{i}{\hbar} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^\beta \right] + \frac{1}{c} \int (d\sigma_\nu x_\mu \mathcal{L} - d\sigma_\mu x_\nu \mathcal{L}). \quad (2.93)$$

Доля, вносимая в $\delta J_{\mu\nu}$ вторым членом, вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{c} \int (d\sigma_\nu x_\mu \mathcal{L} - d\sigma_\mu x_\nu \mathcal{L}) &= \int [d\sigma_\nu x_\mu \partial_\lambda (\Pi_\lambda^\alpha \delta \varphi^a) - d\sigma_\mu x_\nu \partial_\lambda (\Pi_\lambda^\alpha \delta \varphi^a)] = \\ &= \int d\sigma_\lambda (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) (\Pi_\lambda^\alpha \delta \varphi^a) + \int (d\sigma_\mu \Pi_\nu^\alpha - d\sigma_\nu \Pi_\mu^\alpha) \delta \varphi^a = \\ &= \int d\sigma [(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) (\Pi^\alpha \delta \varphi^a) + (n_\mu \Pi_\nu^\alpha - n_\nu \Pi_\mu^\alpha) \delta \varphi^a]; \end{aligned} \quad (2.94)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \delta J_{\mu\nu} &= - \int d\sigma \delta \Pi^a \left[(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \varphi^a + \frac{i}{\hbar} S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^\beta + \right. \\ &\quad \left. + \int d\sigma \left[(x_\mu \partial_\nu - \partial_\mu x_\nu) \Pi^a - \frac{i}{\hbar} \Pi^b S_{\mu\nu}^{\delta a} + n_\mu \Pi_\nu^a - n_\nu \Pi_\mu^a \right] \delta \varphi^a. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Итак, мы получили перестановочные соотношения

$$\begin{aligned} [\varphi^a, J_{\mu\nu}] &= \left(x_\mu \frac{\hbar}{i} \partial_\nu - x_\nu \frac{\hbar}{i} \partial_\mu \right) \varphi^a + S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varphi^\beta, \\ [\Pi^a, J_{\mu\nu}] &= \left(x_\mu \frac{\hbar}{i} \partial_\nu - x_\nu \frac{\hbar}{i} \partial_\mu \right) \Pi^a - \Pi^b S_{\mu\nu}^{ba} + \frac{\hbar}{i} (n_\mu \Pi_\nu^a - n_\nu \Pi_\mu^a), \\ 0 &= -\Pi^a S_{\mu\nu}^{aA} + \frac{\hbar}{i} (n_\mu \Pi_\nu^A - n_\nu \Pi_\mu^A), \end{aligned} \quad (2.96)$$

которые характеризуют тензор $J_{\mu\nu}$ как оператор поворота и иллюстрируют образование $J_{\mu\nu}$ как суперпозицию орбитального и спинового моментов. Третье из соотношений (2.96), утверждающее, что тождество $\Pi^A \equiv 0$ есть свойство, не зависящее от координатной системы, уже было использовано в (2.68).

Согласно (2.47) и (2.48), оператор заряда имеет вид

$$Q = -\frac{ie}{\hbar} \int d\sigma \Pi^a \varepsilon^a \varphi^a. \quad (2.97)$$

Следовательно,

$$\delta Q = -\frac{ie}{\hbar} \int d\sigma (\delta \Pi^a \varepsilon^a \varphi^a + \Pi^a \varepsilon^a \delta \varphi^a), \quad (2.98)$$

откуда получим перестановочные соотношения

$$[\varphi^a, Q] = e \varepsilon^a \varphi^a, \quad [\Pi^a, Q] = -e \varepsilon^a \Pi^a. \quad (2.99)$$

Эти соотношения указывают на значение e как элементарного заряда и характеризуют Q как оператор, производящий фазовое преобразование. Отметим, что вывод соотношений (2.99), исходя из последней точки зрения, не ограничен каноническими переменными, хотя это обстоятельство и не дает ничего нового.

Общий бесконечно малый оператор (2.31) описывает преобразование от совокупности коммутирующих операторов ζ на σ к $\zeta - \delta\zeta$ на $\sigma + \delta\sigma$ по формуле

$$\Psi((\zeta - \delta\zeta)', \sigma + \delta\sigma) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} F \right] \Psi(\zeta', \sigma). \quad (2.100)$$

Оператор F составлен аддитивно из двух частей:

$$F = F_{\delta\varphi} + F_{\delta x}, \quad (2.101)$$

где $F_{\delta\varphi}$ индуцирует изменение $\delta\varphi^a$ в коммутирующей совокупности операторов, определенной относительно локальной координатной системе, заданной с помощью фиксированной σ :

$$\Psi((\zeta - \delta\zeta)', \sigma) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} F_{\delta\varphi} \right] \Psi(\zeta', \sigma), \quad (2.102)$$

тогда как

$$F_{\delta x} = \frac{1}{c} \int d\sigma_\mu T_{\mu\nu} \delta x_\nu, \quad (2.103)$$

производит изменение в самой σ , описываемое с помощью δx_ν , для фиксированной совокупности коммутирующих операторов, определенных относительно σ :

$$\Psi(\zeta', \sigma + \delta\sigma) = \left[1 - \frac{i}{\hbar} F_{\delta x} \right] \Psi(\zeta', \sigma). \quad (2.104)$$

Согласно нашему ограничению плоскими поверхностями, мы рассмотрим только „жесткое“ перемещение σ , для которого производящий оператор всегда задан формулой (2.36).

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение представителя произвольного состояния, произведенное „жестким“ перемещением, получается из соотношения

$$\delta_x(\zeta', \sigma) = (\delta_x \Psi(\zeta', \sigma), \Psi) = \frac{i}{\hbar} (\zeta', \sigma | F_{\delta x}). \quad (2.105)$$

С помощью формулы

$$\delta_x (\zeta', \sigma |) = \varepsilon_\mu \delta_\mu (\zeta', \sigma |) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} (\zeta', \sigma |) \quad (2.106)$$

мы получим обобщенные уравнения Шредингера ¹⁾ для чистого перемещения

$$\frac{\hbar}{i} \delta_\mu (\zeta', \sigma |) = (\zeta', \sigma | P_\mu (\sigma) |) = \int (\zeta', \sigma | P_\mu (\sigma) | \zeta'', \sigma) d^3 \zeta'' (\zeta'', \sigma |) \quad (2.107)$$

и поворота

$$\frac{\hbar}{i} \delta_{\mu\nu} (\zeta', \sigma |) = (\zeta', \sigma | J_{\mu\nu} (\sigma) |) = \int (\zeta', \sigma | J_{\mu\nu} (\sigma) | \zeta'', \sigma) d^3 \zeta'' (\zeta'', \sigma |). \quad (2.108)$$

Оператор $G(\sigma)$, который сконструирован из переменных поля на σ , имеет матрицу $(\zeta', \sigma | G(\sigma) | \zeta'', \sigma)$, не зависящую от σ , так как соотношение между $G(\sigma)$ и ζ на σ не меняется при изменении поверхности. Компоненты $P_\mu(\sigma)$, отнесенные к осям, связанным с σ , имеют именно такую природу; следовательно, матрица $P_\mu(\sigma)$ в (2.107) включает ориентацию координатной системы относительно σ , но в остальном не зависит от σ . Перестановочные соотношения между P_μ , $J_{\mu\nu}$ и $G(\sigma)$ получаются из этого свойства матрицы $G(\sigma)$. Таким образом, имеем

$$0 = \delta_x G(\sigma) - \frac{i}{\hbar} [G(\sigma), F_{\delta x}], \quad (2.109)$$

откуда

$$[G(\sigma), P_\mu] = \frac{\hbar}{i} \delta_\mu G(\sigma), \quad (2.110)$$

$$[G(\sigma), J_{\mu\nu}] = \frac{\hbar}{i} \delta_{\mu\nu} G(\sigma). \quad (2.111)$$

В качестве первой иллюстрации этих перестановочных соотношений выберем $G(\sigma) = \varphi^\alpha(x)$. Согласно (2.25), имеем

$$[\varphi^\alpha(x), P_\mu] = \frac{\hbar}{i} \partial_\mu \varphi^\alpha(x), \quad (2.112)$$

$$[\varphi^\alpha(x), J_{\mu\nu}] = \left(x_\mu \frac{\hbar}{i} \partial_\nu - x_\nu \frac{\hbar}{i} \partial_\mu \right) \varphi^\alpha(x) + S^{\alpha\beta} \varphi^\beta(x), \quad (2.113)$$

что находится в согласии с (2.92) и (2.96), но без ограничения последнего соотношения компонентами φ^α .

Особенно простой пример получится при $G(\sigma) = Q$, где Q — полный заряд. Так как этот оператор не зависит от σ , имеем соотношения

$$[Q, P_\mu] = [Q, J_{\mu\nu}] = 0, \quad (2.114)$$

которые, наоборот, утверждают, что P_μ и $J_{\mu\nu}$ не изменяются при фазовых преобразованиях. Эффект перемещения σ на величину $G(\sigma) = P_\lambda e_\lambda(\sigma)$, где $e_\lambda(\sigma)$ — произвольный вектор, жестко связанный с σ , полностью получается из поворота вектора $e_\lambda(\sigma)$

$$\delta_x (P_\lambda e_\lambda(\sigma)) = -\varepsilon_{\mu\nu} P_\mu e_\nu(\sigma). \quad (2.115)$$

Следовательно, имеем

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2.116)$$

$$[P_\lambda, J_{\mu\nu}] = i\hbar (\delta_{\nu\lambda} P_\mu - \delta_{\mu\lambda} P_\nu). \quad (2.117)$$

¹⁾ Отметим, что эти уравнения Шредингера были получены из гейзенберговского представления, в котором вектор произвольного состояния фиксирован (см. [25], раздел 32). — *Прим. авт.*

Приведем еще один, последний пример, выбрав $G(\sigma) = J_{\lambda x} e_{\lambda}^{(1)}(\sigma) e_x^{(2)}(\sigma)$, где как $e_{\lambda}^{(1)}(\sigma)$, так и $e_x^{(2)}(\sigma)$ являются произвольными векторами, жестко связанными с σ . Этот пример, вообще говоря, есть обобщение рассмотренных типов операторов, так как

$$J_{\lambda x} e_{\lambda}^{(1)} e_x^{(2)} = \frac{1}{c} \int d\sigma_{\mu} [x_{\lambda} e_{\lambda}^{(1)} T_{\mu x} e_x^{(2)} - x_x e_x^{(2)} T_{\mu \lambda} e_{\lambda}^{(1)}] \quad (2.118)$$

включает пространственно-временные координаты в дополнение к переменным поля. Необходимая модификация соотношения (2.109) имеет вид

$$\delta_x G(\sigma) = \frac{i}{\hbar} [G(\sigma), F_{\delta x}] + \partial_x G(\sigma), \quad (2.119)$$

где $\partial_x G(\sigma)$ означает изменение $G(\sigma)$, связанное с явным присутствием пространственно-временных координат. В примере, выраженном формулой (2.118), $\partial_x G(\sigma)$ возникает из-за чистого перемещения σ (но не поворота):

$$\partial_x (J_{\lambda x} e_{\lambda}^{(1)} e_x^{(2)}) = (\varepsilon_{\lambda} P_x - \varepsilon_x P_{\lambda}) e_{\lambda}^{(1)} e_x^{(2)}. \quad (2.120)$$

Комбинируя это с

$$\delta_x (J_{\lambda x} e_{\lambda}^{(1)} e_x^{(2)}) = -\varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu x} e_{\nu}^{(1)} e_x^{(2)} - \varepsilon_{\mu\nu} J_{\lambda\mu} e_{\lambda}^{(1)} e_{\nu}^{(2)}, \quad (2.121)$$

мы опять получим соотношение (2.117) и

$$[J_{\lambda x}, J_{\mu\nu}] = i\hbar (\delta_{\lambda\nu} J_{\mu x} + \delta_{\lambda\mu} J_{x\nu} + \delta_{x\nu} J_{\lambda\mu} + \delta_{x\mu} J_{\nu\lambda}). \quad (2.122)$$

Следует отметить, как пример общего метода построения представления перестановочных свойств операторов, что равенства

$$[[\varphi^{\alpha}, J_{\lambda x}] J_{\mu\nu}] - [[\varphi^{\alpha}, J_{\mu\nu}], J_{\lambda x}] = [\varphi^{\alpha}, [J_{\lambda x}, J_{\mu\nu}]] \quad (2.123)$$

приводят к аналогичным перестановочным соотношениям для представителей орбитального и спинового моментов в (2.113).

В качестве последнего замечания, относящегося к перестановочным соотношениям, отметим, что коммутаторы производящих операторов приобретают значение в связи с условиями интегрируемости для бесконечно малых преобразований, произведенных этими операторами [26]. Если $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ являются двумя такими операторами, производящими бесконечно малые преобразования, то

$$\delta^{(1)} \Psi(\zeta', \sigma) = \Psi((\zeta - \delta^{(1)} \zeta)', \sigma + \delta^{(1)} \sigma) - \Psi(\zeta', \sigma) = -\frac{i}{\hbar} F^{(1)} \Psi(\zeta', \sigma), \quad (2.124)$$

$$\delta^{(2)} \Psi(\zeta', \sigma) = \Psi((\zeta - \delta^{(2)} \zeta)', \sigma + \delta^{(2)} \sigma) - \Psi(\zeta', \sigma) = -\frac{i}{\hbar} F^{(2)} \Psi(\zeta', \sigma).$$

Далее, разность между результатами, получаемыми двумя способами, которыми можно последовательно произвести эти преобразования, можно рассматривать как эффект третьего относительного преобразования

$$\begin{aligned} (\delta^{(1)} \delta^{(2)} - \delta^{(2)} \delta^{(1)}) \Psi(\zeta', \sigma) &= \Psi((\zeta + (\delta^{(1)} \delta^{(2)} - \delta^{(2)} \delta^{(1)}) \zeta)', \\ \sigma + (\delta^{(1)} \delta^{(2)} - \delta^{(2)} \delta^{(1)}) \sigma) - \Psi(\zeta', \sigma) &= -\frac{i}{\hbar} F^{(12)} \Psi(\zeta', \sigma). \end{aligned} \quad (2.125)$$

Следовательно,

$$[F^{(1)}, F^{(2)}] = i\hbar F^{(12)} \quad (2.126)$$

есть необходимое условие интегрируемости уравнения (2.124). Простой пример такого рассмотрения дается „жестким“ перемещением

$$\begin{aligned} \delta^{(1,2)} x_{\mu} &= \varepsilon_{\mu}^{(1,2)} - \varepsilon_{\mu\nu}^{(1,2)} x_{\nu}, \\ F_{\delta x}^{(1,2)} &= \varepsilon_{\mu}^{(1,2)} P_{\mu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^{(1,2)} J_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.127)$$

так как

$$\begin{aligned}
 (\delta^{(1)}\delta^{(2)} - \delta^{(2)}\delta^{(1)})x_\mu &= -\varepsilon_{\mu\nu}^{(1)}\varepsilon_\nu^{(2)} + \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}\varepsilon_\nu^{(1)} - \\
 &\quad - (-\varepsilon_{\mu\lambda}^{(1)}\varepsilon_{\lambda\nu}^{(2)} + \varepsilon_{\mu\lambda}^{(2)}\varepsilon_{\lambda\nu}^{(1)})x_\nu = \varepsilon_{\lambda\nu}^{(12)} - \varepsilon_{\lambda\nu}^{(21)}x_\nu, \quad (2.128)
 \end{aligned}$$

есть другое „жесткое“ перемещение. Вытекающие отсюда соотношения даются как раз соотношениями (2.116), (2.117) и (2.122).

В нашем рассмотрении вариационного принципа (2.14) мы имели дело со свойствами данной динамической системы. Однако этот принцип применим и для вариаций, при которых меняется сама система, что соответствует изменению структуры функции Лагранжа. Для вариации подобного типа имеем

$$\delta(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) = \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta \mathcal{L}[x] | \zeta''_2, \sigma_2) \quad (2.129)$$

или

$$\begin{aligned}
 \delta(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) &= \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \int (\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta^a, \sigma) \times \\
 &\quad \times d\zeta^a(\zeta^a, \sigma | \delta \mathcal{L}[x] | \zeta^b, \sigma) d\zeta^b(\zeta^b, \sigma | \zeta''_2, \sigma_2), \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

где поверхность σ содержит точку x . Если последовательно произвести две вариации такого типа, то получим

$$\begin{aligned}
 \delta^{(2)}\delta^{(1)}(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) &= \\
 &= \frac{i}{\hbar c} \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \left[\int \delta^{(2)}(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta^a, \sigma) d\zeta^a(\zeta^a, \sigma | \delta^{(1)}\mathcal{L}[x] | \zeta''_2, \sigma_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \int (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta^{(1)}\mathcal{L}[x] | \zeta^b, \sigma) d\zeta^b\delta^{(2)}(\zeta^b, \sigma | \zeta''_2, \sigma_2) \right] = \\
 &= \left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \left[\int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta^{(2)}\mathcal{L}[x'] \delta^{(1)}\mathcal{L}[x] | \zeta''_2, \sigma_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') (\zeta'_1, \sigma_1 | \delta^{(1)}\mathcal{L}[x] \delta^{(2)}\mathcal{L}[x'] | \zeta''_2, \sigma_2) \right]. \quad (2.131)
 \end{aligned}$$

Введем здесь специальное обозначение для хронологически упорядоченных операторов

$$(A(x), B(x'))_+ = \begin{cases} A(x)B(x'), & (x_0 > x'_0) \\ B(x')A(x), & (x'_0 > x_0), \end{cases} \quad (2.132)$$

которое является инвариантным понятием, если предположить, что входящие сюда операторы коммутируют, когда $x - x'$ есть пространственно-подобный интервал, и что положительное направление времени сохраняется. Тогда уравнение (2.131) можно записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned}
 \delta^{(1)}\delta^{(2)}(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) &= \delta^{(2)}\delta^{(1)}(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2) = \\
 &= \left(\frac{i}{\hbar c}\right)^2 \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx) \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} (dx') (\zeta'_1, \sigma_1 | (\delta^{(1)}\mathcal{L}[x] \delta^{(2)}\mathcal{L}[x'])_+ | \zeta''_2, \sigma_2). \quad (2.133)
 \end{aligned}$$

Этот результат мы будем часто использовать в последующем.

Мы закончим этот раздел указанием (имея в виду поля Бозе — Эйнштейна) метода построения функции преобразования $(\zeta'_1, \sigma_1 | \zeta''_2, \sigma_2)$, являющегося аналогом классической теории Гамильтона — Якоби механики поля. Действительное движение системы неявно включено в форму, предполагаемую для вариации интеграла действия

$$\delta W_{12} = \left[\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \Pi^a \delta \varphi^a + \varepsilon_\mu P_\mu(\sigma) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} J_{\mu\nu}(\sigma) \right]_{\sigma_1}^{\sigma_2}, \quad (2.134)$$

в котором мы попрежнему ограничиваемся плоской пространственно-подобной поверхностью. Из (2.134) следует, что W_{12} может быть выражена как функция σ_1 и σ_2 , а также величин φ^a на этих поверхностях; подобным же образом могут быть выражены Π^a , P_μ и $J_{\mu\nu}$, связанные с каждой из поверхностей. С помощью перестановочных соотношений между φ^a на σ_1 и φ^a на σ_2 можно операторы в (2.134) расположить так, что φ^a на σ_1 будет везде стоять левее, чем φ^a на σ_2 . Упорядоченное таким образом дифференциальное выражение обозначим через $\mathcal{W}(\varphi_1, \sigma_1; \varphi_2, \sigma_2)$; отсюда получим дифференциальные уравнения, связывающие различные упорядоченные операторы:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \varphi^a(x_1)} \mathcal{W} &= \Pi^a(x_1), & \frac{\delta}{\delta \varphi^a(x_2)} \mathcal{W} &= -\Pi^a(x_2), \\ \delta_\mu^{(1)} \mathcal{W} &= P_\mu(\sigma_1), & \delta_\mu^{(2)} \mathcal{W} &= -P_\mu(\sigma_2), \\ \delta_{\mu\nu}^{(1)} \mathcal{W} &= J_{\mu\nu}(\sigma_1), & \delta_{\mu\nu}^{(2)} \mathcal{W} &= -J_{\mu\nu}(\sigma_2), \end{aligned} \quad (2.135)$$

где x_1 и x_2 являются произвольными точками на σ_1 и σ_2 соответственно. В связи с перестановочными соотношениями (2.81) этот оператор Гамильтона — Якоби может служить для определения упорядоченного оператора $\mathcal{W}(\varphi_1, \sigma_1; \varphi_2, \sigma_2)$ с точностью до аддитивной постоянной. Важно отметить, что $\mathcal{W} \neq W_{12}$ и что, конечно, оператор \mathcal{W} не является эрмитовым¹⁾. Это есть следствие неперестави-

1) Элементарный пример свободной частицы в одном измерении иллюстрирует это обстоятельство. Уравнения Гамильтона — Якоби, примененные при построении $\mathcal{W}(x(t_1), x(t_2), t)$, где $t = t_1 - t_2$, дают:

$$\frac{\partial}{\partial x(t_1)} \mathcal{W} = -\frac{\partial}{\partial x(t_2)} \mathcal{W} = p \quad -\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W} = \frac{p^2}{2m}.$$

Согласно решению уравнений движения, имеем

$$\begin{aligned} x(t_1) - x(t_2) &= \frac{t}{m} p \\ [x(t_1), x(t_2)] &= -\frac{i\hbar t}{m}, \end{aligned}$$

откуда

$$-\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W} = \frac{m}{2t^2} (x(t_1) - x(t_2))^2 = \frac{m}{2t^2} [x^2(t_1) - 2x(t_1)x(t_2) + x^2(t_2)] - \frac{i\hbar}{2t}.$$

Решение операторных уравнений Гамильтона — Якоби имеет вид

$$\mathcal{W} = \frac{m}{2t} [x^2(t_1) - 2x(t_1)x(t_2) + x^2(t_2)] + \frac{1}{2} i\hbar \ln(A t);$$

это решение следует сравнить с эрмитовым интегралом действия

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v^2 t = \frac{m}{2t} (x(t_1) - x(t_2))^2 = \frac{m}{2t} [x^2(t_1) - 2x(t_1)x(t_2) + x^2(t_2)] - \frac{1}{2} i\hbar.$$

В данном случае, аналогом уравнения (2.138) будет уравнение

$$(x', t_1 | x'', t_2) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}(x', x'', t) \right] = (A t)^{-1/2} \exp \left[\frac{i m}{2\hbar t} (x' - x'')^2 \right],$$

где постоянная A определяется как

$$A = 2\pi i\hbar/m$$

из аналога уравнения (2.139)

$$\lim_{t \rightarrow 0} (x', t_1 | x'', t_2) = \delta(x' - x'').$$

мости φ^a на σ_1 и φ^a на σ_2 , обусловленной локализацией этих поверхностей. Так, если оператор \mathcal{W}_{12} сначала упорядочен, а потом проварьирован, результат будет отличаться от того, что получится из упорядочения $\delta\mathcal{W}_{12}$. Вернемся теперь к дифференциальным свойствам функции преобразования, характеризуемой собственными значениями φ^a на σ_1 и σ_2 :

$$\delta(\varphi', \sigma_1 | \varphi'', \sigma_2) = \frac{i}{\hbar} (\varphi', \sigma_1 | \delta\mathcal{W}(\varphi_1, \sigma_1; \varphi_2, \sigma_2) | \varphi'', \sigma_2). \quad (2.136)$$

Заметим, что ввиду упорядочения в $\delta\mathcal{W}$ операторы φ^a на σ_1 и σ_2 действуют непосредственно на соответствующие им собственные векторы, так что можно заменить соответствующими собственными значениями

$$\delta(\varphi', \sigma_1 | \varphi'', \sigma_2) = \frac{i}{\hbar} \delta\mathcal{W}(\varphi', \sigma_1; \varphi'', \sigma_2)(\varphi', \sigma_1 | \varphi'', \sigma_2). \quad (2.137)$$

Функция преобразования принимает тогда вид¹⁾

$$(\varphi', \sigma_1 | \varphi'', \sigma_2) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}(\varphi', \sigma_1; \varphi'', \sigma_2) \right], \quad (2.138)$$

где постоянная интегрирования (которая аддитивно содержится в \mathcal{W}), может быть определена из условия

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \sigma_2} (\varphi', \sigma_1 | \varphi'', \sigma_2) = \delta(\varphi' - \varphi''). \quad (2.139)$$

3. Инверсия времени

Общее физическое требование инвариантности относительно преобразований координат применимо не только к чистому перемещению и повороту координатной системы, но и к отражению координатных осей. Среди последних преобразований инверсия времени занимает особое положение. Его особая природа проявляется в свойствах преобразования некоторых глобальных физических величин. Так, среднее значение вектора энергии—импульса

$$\langle P_\nu \rangle = \frac{1}{c} \int_\sigma d\sigma_\mu \langle T_{\mu\nu} \rangle \quad (3.1)$$

есть в действительности псевдовектор по отношению к инверсии времени. Если плоская поверхность σ будет выбрана перпендикулярно к оси времени, то компоненты $\langle P_\nu \rangle$ получатся в виде трехмерных интегралов по объему:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c} \int d\sigma \langle T_{00} \rangle, \\ \langle P_k \rangle &= \frac{1}{c} \int d\sigma \langle T_{0k} \rangle \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и инверсия времени $x_0 \rightarrow -x_0, x_k \rightarrow x_k$ приводит к тому, что $\langle P_0 \rangle \rightarrow \langle P_0 \rangle, \langle P_k \rangle \rightarrow -\langle P_k \rangle$, согласно свойствам преобразования тензоров. Этот результат отличается знаком от собственного векторного преобразования. В частности, энергия не меняет знака при инверсии времени. В более общем виде это свойство компонент $\langle P_\nu \rangle$ получается из псевдовекторного характера $d\sigma_\mu$, выражающего псевдоскалярную природу элемента четырехмерного объема по отношению

1) Экспоненциальная форма уравнения (2.138) используется обычно для установления соответствия с классической формой Гамильтона—Якоби механики частиц. Дирак использовал эту форму для исследования унитарных преобразований; в частности, он отметил, что уравнение Гамильтона—Якоби является точным как соотношение между упорядоченными операторами (см. [25], конец раздела 32). В фейнмановском варианте квантовой механики [27] экспоненциальная форма использована для бесконечно малых интервалов времени, причем действительная часть \mathcal{W} определяется как классический интеграл действия.
—Прим. авт.

к инверсии времени. Аналогично, среднее значение заряда

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{c} \int d\sigma_\mu \langle j_\mu \rangle = \frac{1}{c} \int d\sigma \langle j_0 \rangle \quad (3.3)$$

ведет себя как псевдоскаляр при инверсии времени. Поэтому это преобразование переставляет положительные и отрицательные заряды, и оба знака должны входить симметрично в ковариантной теории. Действительно, в некоторых случаях требование зарядной симметрии может быть применено вместо более жесткого требования инвариантности относительно инверсии времени.

Замечательная особенность указанных свойств заключается в том, что инверсия времени не может быть включена в общую схему унитарных преобразований. Так, обращаясь к уравнению Шредингера для чистого перемещения (2.107) или аналогичному операторному уравнению (2.110), мы встречаемся с противоречием между свойствами преобразования собственного оператора δ_μ и псевдовектора P_μ . Эта трудность еще более усугубляется в нашем основном вариационном принципе (2.14). Поскольку \mathcal{L} ведет себя как скаляр \mathcal{L} , а (dx) как псевдоскаляр, инверсия оси времени вносит знак минус в правую часть этого уравнения. Однако важно отметить, что мы не можем сохранить скалярную природу \mathcal{L} для той части лагранжевой функции, которая описывает поле с полуцелым спином. Ясно, что эта часть \mathcal{L} ведет себя как псевдоскаляр в отношении инверсии времени¹⁾.

Если бы мы рассматривали только такое поле с полуцелым спином, то основной динамический принцип сохранил бы структуру при инверсии времени, но при этом нарушились бы общие свойства преобразования всех физических величин; при инверсии времени заряд останется неизменным, а энергия изменит знак. Последняя трудность указывает просто на то, что при включении части, относящейся к полю с полуцелым спином, различные части \mathcal{L} преобразуются различно, что опять указывает на общий недостаток уравнения (2.14), не разрешающего инверсию времени свести к унитарному преобразованию.

С целью исследования расширенного класса преобразований, который требуется для включения инверсии времени, введем некоторые новые обозначения. Ска-

1) Основной инвариант поля со спином $1/2$ есть $\bar{\psi}\psi = \psi^+ \gamma_0 \psi$. Преобразование $\psi' = R\psi$, представляющее собой инверсию времени, может быть рассматриваемо как эквивалент вращения на угол π в плоскости (45); $R = \exp \left[i\pi \frac{1}{2} \sigma_{45} \right] = i\sigma_{45}$. Соответственно этому

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^+ R^{-1} \gamma_0 R \psi = -\bar{\psi}\psi,$$

что указывает на псевдоскалярный характер лагранжевой функции поля со спином $1/2$ в отношении инверсии времени. Соответствующее поведение полей с другим спином может быть получено из учета того обстоятельства, что спинор ранга n содержит поля со спинами $\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n-1, \dots$. Основной инвариант и оператор инверсии времени для тензора ранга n имеют вид

$$\bar{\psi}\psi = \psi^+ \prod_{k=1}^n \gamma_0^{(k)} \psi$$

и

$$R = \exp \left[i\pi \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_{45}^{(k)} \right] = \prod_{k=1}^n i\sigma_{45}^{(k)}.$$

Следовательно,

$$\bar{\psi}'\psi' = \psi^+ R^{-1} \prod_{k=1}^n \gamma_0^{(k)} \psi = (-1)^n \bar{\psi}\psi,$$

что указывает на псевдоскалярную природу лагранжевой функции для полей с полуцелым спином. — *Прим. авт.*

лярное произведение двух векторов Ψ_a и Ψ_b будем писать в виде

$$(a | b) = \Psi_a^* \Psi_b = \Psi_b \Psi_a^*, \quad (3.4)$$

причем эта величина рассматривается как инвариантная комбинация вектора Ψ_b с дуальным, комплексно-сопряженным вектором Ψ_a^* . Мы допустим, что операторы действуют как слева, так и справа векторов Ψ и Ψ^* . Так, связанный с A , транспонированный оператор A^T , определяется следующим образом¹⁾:

$$A\Psi = \Psi A^T, \quad \Psi^* A = A^T \Psi^* \quad (3.5)$$

или

$$(a | A | b) = \Psi_a^* A \Psi_b = \Psi_b A^T \Psi_a^*. \quad (3.6)$$

Определим также ассоциированный с A комплексно-сопряженный оператор

$$(A\Psi)^* = A^* \Psi^*. \quad (3.7)$$

Связь с эрмитово сопряженным оператором A^+ получается из определения последнего:

$$(A\Psi)^* = \Psi^* A^+, \quad (3.8)$$

а именно,

$$A^+ = A^{*T}. \quad (3.9)$$

В обычной квантовой механике рассматриваются преобразования только внутри пространства векторов Ψ и контраградиентные преобразования внутри дуального пространства векторов Ψ^* . Мы будем рассматривать теперь преобразования, переставляющие оба пространства, именно

$$\Psi_a \rightarrow \Psi_{\bar{a}} = \Psi_a^*. \quad (3.10)$$

Преобразование (3.10) приводит к следующему:

$$(a | b) = \Psi_a^* \Psi_b = \Psi_{\bar{a}} \Psi_b^* = (\bar{b} | \bar{a}) \quad (3.11)$$

и

$$(a | A | b) = \Psi_a^* A \Psi_b = \Psi_{\bar{a}} A \Psi_b^* = (\bar{b} | A^T | \bar{a}). \quad (3.12)$$

В более общем виде, если

$$\Psi_a^* = R \Psi_a, \quad (3.13)$$

где R — унитарный оператор, то имеем

$$(a | b) = (\bar{b} | \bar{a}), \quad (a | A | b) = (\bar{b} | \bar{A} | \bar{a}) \quad (3.14)$$

$$\bar{A} = (R A R^{-1})^T. \quad (3.15)$$

Далее,

$$\overline{A\bar{B}} = (R A B R^{-1})^T = (R B R^{-1})^T (R A R^{-1})^T = \bar{B} \bar{A} \quad (3.16)$$

и, следовательно,

$$(a | [A, B] | b) = -(\bar{b} | [\bar{A}, \bar{B}] | \bar{a}) \quad (3.17)$$

Мы как раз получаем здесь изменение знака, которое и требуется для сохранения структуры уравнений, подобных (2.110), при инверсии времени.

Выясним теперь, возможно ли удовлетворить требованию инвариантности при отражении времени с помощью преобразований типа (3.13). Если мы произведем преобразование координат

$$\bar{x}_0 = -x_0, \quad \bar{x}_k = x_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

¹⁾ Отметим, что из этого определения следует и обычное свойство транспонирования $A\bar{B} = A(\Psi B)^T = \Psi B^T A^T$. — *Прим. авт.*

одновременно с преобразованием собственных векторов

$$\Psi^*(\bar{\zeta}', \sigma) = R\Psi(\zeta', \sigma), \quad (3.19)$$

то основной динамический принцип примет вид

$$\delta(\bar{\zeta}_2'', \sigma_2 | \bar{\zeta}_1', \sigma_1) = \frac{i}{\hbar c} \left(\bar{\zeta}_2'', \sigma_2 | \delta \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (d\bar{x}) \bar{\mathcal{L}} | \bar{\zeta}_1', \sigma_1 \right), \quad (3.20)$$

где

$$\bar{\mathcal{L}} = (R\mathcal{L}R^{-1})^T = \mathcal{L}^T((R\varphi^\sigma R^{-1})^T, \pm \bar{\partial}_\mu (R\varphi^\sigma R^{-1})^T). \quad (3.21)$$

В последней формуле знак \pm указывает на эффект координатного преобразования (3.18) на компоненты градиентного вектора, тогда как обозначение $\mathcal{L}^T(\)$ символизирует обращение порядка всех множителей, произведенное операцией транспозиции. Оператор R надо выбрать так, чтобы произведенное им линейное преобразование

$$R\varphi^\sigma R^{-1} = R^{\alpha\beta}\varphi^\beta \quad (3.22)$$

компенсировало эффект преобразования градиентного вектора. Итак, имеем

$$\bar{\mathcal{L}} = (\pm) \mathcal{L}^T(\varphi^{\alpha T}, \bar{\partial}_\mu \varphi^{\alpha T}), \quad (3.23)$$

где знак (\pm) указывает на тот факт, что структура лагранжевой функции для полей с полуцелым спином может быть сохранена только ценой изменения знака. Мы теперь видим, что если

$$\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\varphi^{\alpha T}, \bar{\partial}_\mu \varphi^{\alpha T}), \quad (3.24)$$

то форма нашего основного динамического уравнения сохраняется при инверсии времени, так как выражение (3.20) отличается от (2.14) только заменой φ^α на $\varphi^{\alpha T}$ (подходящую переменную поля) и перестановкой σ_1 и σ_2 , что просто отражает инверсию временного направления, в котором прослеживается динамическое развитие системы.

Итак, инвариантность относительно инверсии времени требует, чтобы обращение порядка всех множителей в лагранжевой функции оставляло скалярный член неизменным и меняло знак у псевдоскалярного члена. Это, конечно, может быть выполнено с помощью явной симметризации и антисимметризации различных членов в \mathcal{L} . Когда так упорядоченная лагранжева функция будет применена в принципе стационарного действия, вариации $\delta_0\varphi^\alpha$ будут также расположены симметричным и антисимметричным образом. Мы должны теперь напомнить, что уравнения движения (2.18), которые явно не зависят от перестановочных свойств поля, были получены постулированием равенства таких членов в $\delta_0\mathcal{L}$, которые в основном различаются только положением $\delta_0\varphi^\alpha$. Так как подобные члены входят с одними и теми же знаками в скалярную часть \mathcal{L} и с противоположными знаками в псевдоскалярную часть, мы выводим отсюда соответственно наличие коммутативности и антикоммутативности между $\delta_0\varphi^\alpha$ и другими операторами в отдельном члене $\delta_0\mathcal{L}$.

Полученные таким образом сведения относительно перестановочных свойств ограничены операторами в общей пространственно-временной точке, так как этим свойством обладают члены в \mathcal{L} . Перестановочные соотношения между полевыми величинами, локализованными в различных точках пространственно-подобной поверхности, получаются из общего требования совместности физических величин, разделенных пространственно-подобным интервалом. Волновые функции полей с целым спином и билинейные комбинации волновых функций полей с полуцелым спином являются теми основными физическими величинами, к которым применяется это требование совместности. Рассматривая общие возможности связи между различными полями, мы можем, из этих двух выражений, обладающих требуемой релятивистской инвариантностью, вывести следствие, что вариации $\delta\varphi^b(x')$, а следовательно, и сопряженные вариации $\delta\Pi^b(x')$ коммути-

руют или антикоммутируют с $\varphi^a(x)$ и $\Pi^a(x)$ для всех x и x' на данной σ , причем антикоммутативность имеет место тогда, когда a и b относятся к компонентам полей с полуцелым спином. Легко проверить совместимость этого утверждения с общими перестановочными соотношениями, которые могут быть выведены из него. Производя независимые вариации канонических переменных в (2.81), получим

$$\begin{aligned} [\varphi^a(x), \delta\varphi^b(x')]_{\pm} &= [\Pi^a(x), \delta\varphi^b(x')]_{\pm} = 0, \\ [\varphi^a(x), \delta\Pi^b(x')]_{\pm} &= [\Pi^a(x), \delta\Pi^b(x')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Эти соотношения справедливы для всех x и x' на σ . Кроме того, согласно соотношению (2.81), все физические величины коммутируют в различных точках на σ .

Итак, мы приходим к выводу, что связь между спином и статистикой частиц неявно включена в требование инвариантности относительно преобразований координат¹⁾.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 150 (1934); Heisenberg W., Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934); Heitler W., Peng H. W., Proc. Cambr. Phil. Soc., **38**, 296 (1942).
2. Serber R., Phys. Rev., **49**, 545 (1936); Bethe H. A., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **70**, 451 (1946).
3. Weisskopf V., Phys. Rev., **56**, 72 (1939).
4. Lamb W. E., Jr., Retherford R. C., Phys. Rev., **72**, 241 (1947).
5. Mack J. E., Austern N., Phys. Rev., **72**, 972 (1947).
6. Nafe J. E., Nelson E. B., Rabi I. I., Phys. Rev., **71**, 914 (1947); Nagle D. E., Julian R. S., Zacharias J. R., Phys. Rev., **72**, 971 (1947).
7. Kusch P., Foley H. M., Phys. Rev., **72**, 1256 (1947); Foley H. M., Kusch P., Phys. Rev., **73**, 412 (1948).
8. Bethe H. A., Phys. Rev., **72**, 339 (1947).
9. Schwinger J., Phys. Rev., **73**, 415 (1948).
10. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., **1**, 27 (1946). [См. статью I настоящего сборника.]
11. Dirac P. A. M., Phys. Rev., **73**, 1092 (1948).
12. Schwinger J., Phys. Rev., **72**, 742 (1947) и неопубликованные записи лекций.
13. Serber R., Phys. Rev., **48**, 49 (1935).
14. Dirac P. A. M., 7-e Conseil Solvay, 203 (1934).
15. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **90**, 209 (1934).
16. Uehling E. A., Phys. Rev., **48**, 55 (1935).
17. Pauli W., Rose M. E., Phys. Rev., **49**, 462 (1936).
18. Weisskopf V., Zs. f. Phys., **89**, 27 (1934); **90**, 817 (1934), Phys. Rev., **56**, 72 (1939).
19. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 898 (1949).
20. Rosenfeld L. Nuclear Forces, New York, 1949.
21. Koba Z., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **3**, 290 (1948).
22. Lewis H. W., Phys. Rev., **73**, 173 (1948).
23. Feynman R. P., Phys. Rev., **74**, 1430 (1948).
24. Bloch F., Nordstreck A., Phys. Rev., **52**, 54 (1937).
25. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3 ed., Oxford, 1947.
26. Weyl H., The Theory of Group and Quantum Mechanics, New York, 1931.
27. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
28. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940). [См. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, И. Л., 1947 (Дополнение).]
29. Pauli W., Belfante F. J., Physica, **7**, 177 (1940).
30. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). [См. статью III настоящего сборника]

1) Рассмотрение связи между спином и статистикой, проведенное Паули [28], в некотором смысле имеет негативный характер, хотя и основано на физических требованиях, аналогичных нашим. Так, Паули отмечает, что квантование поля с полуцелым спином, согласно Бозе — Эйнштейну, приводит к энергии, не имеющей нижней границы, и что квантование по Ферми — Дираку поля с целым спином приводит к алгебраическому противоречию с перестановочностью операторов физических величин, локализованных в точках с пространственно-подобным интервалом. Другой примененный постулат, касающийся зарядной симметрии [29], достаточен для определения характера перестановочных соотношений ряда простых систем. Как мы отмечали, этот постулат является следствием инвариантности относительно инверсии времени. Замечания Фейнмана [30] относительно поляризации вакуума и статистики являются иллюстрацией к требованию зарядной симметрии, так как при этом устанавливается наличие противоречия, когда зарядно-симметричная трактовка вакуума применяется к бозе-эйнштейновскому полю со спином $1/2$, или к ферми-дираковскому полю со спином 0. — *Прим. авт.*

III. ТЕОРИЯ ПОЗИТРОНОВ

Р. ФЕЙНМАН

R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, № 6, 749 (1949)

Рассматривается задача о поведении позитронов и электронов в заданном внешнем поле при пренебрежении их взаимодействием, причем вместо теории дырок используется теория, основанная на новой интерпретации решений уравнения Дирака. Полное решение задачи оказывается возможным выразить через граничные условия, налагаемые на волновую функцию. Из этого решения автоматически вытекают все случаи виртуального (и действительного) порождения и уничтожения пар, а также обычные процессы рассеяния, причем получаются правильные относительные знаки различных членов.

„Состояния с отрицательной энергией“ входят в данное решение таким образом, что их можно истолковывать (согласно Штюксельбергу) как волны в четырехмерном пространстве, движущиеся попятно по времени под действием внешнего потенциала. Практически такие волны соответствуют позитрону, который движется в сторону возрастания потенциала и аннигилирует с электроном. Частица, движущаяся в сторону возрастания времени (электрон), может быть рассеяна внешним полем либо вперед по времени (обычное рассеяние), либо назад (аннигиляция пары). Если частица движется попятно по времени (позитрон), то она может быть рассеяна либо назад по времени (рассеяние позитрона), либо вперед (порождение пары). Для указанных частиц анализируется амплитуда перехода из начального в конечное состояние в любом порядке по внешнему потенциалу; при этом принимается, что частица испытывает последовательность подобных рассеяний.

Амплитуда для процесса, в котором участвует много электронов и позитронов, является произведением амплитуд перехода для отдельных частиц. Принцип Паули требует, чтобы для подобных сложных процессов брались антисимметрические по отношению к перестановке частиц комбинации амплитуд. Последовательное столкновение становится возможным только при помощи принципа Паули, который не требуется учитывать в промежуточных состояниях. При этом для зарядов, не взаимодействующих друг с другом, не возникает никаких связанных с вакуумом проблем; тем не менее указанные проблемы разбираются в связи с рассмотренным в дальнейшем квантовой электродинамике.

Результаты выражаются также в импульсном представлении. В приложении доказывается эквивалентность используемого метода и вторично квантовой теории дырок.

1. Введение

Настоящая работа является первой из серии статей, посвященных решению проблем квантовой электродинамики. В основу будет положено непосредственное использование не самих дифференциальных уравнений Гамильтона, а их решений. Здесь мы рассмотрим движение электронов и позитронов в заданном внешнем поле. Во второй статье будет обсуждаться взаимодействие этих частиц, т. е. квантовая электродинамика.

Задача движения зарядов в заданном поле обычно разбирается с помощью вторичного квантования электронного поля и использования теории дырок. Мы покажем, что эту задачу можно рассматривать иначе — посредством подходящего выбора и соответствующей интерпретации решений уравнения Дирака; при этом новый способ в принципе не более сложен, чем метод Шредингера рассмотрения одной или нескольких частиц. С обычной точки зрения на электронное поле введение различных операторов порождения и уничтожения становится необходимым вследствие несохранения числа частиц, т. е. вследствие возможности порождения и уничтожения пар. С другой стороны, величина заряда сохраняется, и это наводит на мысль, что результаты удастся упростить, если мы будем следить не за частицами, а за зарядом.

В приближении, даваемом классической релятивистской теорией, порождение электронной пары (электрон A , позитрон B) может быть представлено двумя мировыми линиями, которые начинаются в точке порождения I . Мировая линия позитрона будет продолжаться, пока не произойдет его аннигиляция с другим электроном C в мировой точке 2 . Таким образом, в отрезке времени (t_1, t_2) имеются три мировые линии, а до момента t_1 и после момента t_2 — только по одной. Однако мировые линии C , B и A составляют вместе одну непрерывную мировую линию с „позитронной частью“ B , направленной попятно по времени. Если следить за зарядом, а не за частицами, то эту непрерывную мировую линию нужно рассматривать в целом, а не разбивать на части. Здесь дело обстоит так же, как в том случае, когда летящий низко над дорогой пилот видит некоторое время вместо одной дороги три, хотя на самом деле имеется только двойной поворот одной и той же дороги.

Подобная общая четырехмерная точка зрения приводит к значительному упрощению многих проблем. При этом можно одновременно учитывать процессы, которые пришлось бы, действуя обычным образом, рассматривать по отдельности. Например, при рассмотрении рассеяния электрона во внешнем поле автоматически учитываются эффекты виртуального порождения пар. То же уравнение Дирака, которое описывает отклонение мировой линии во внешнем поле, может описать (и столь же простым образом) отклонение, происходящее в случае поля, достаточно сильного для изменения направления временной составляющей мировой линии, что соответствует аннигиляции пары. В квантовой механике направления мировых линий заменяются направлением распространения волн.

Подобный подход радикально отличается от гамильтоновского метода, в котором будущее является непрерывным развитием прошедшего. В нашем методе мы сразу представляем всю последовательную пространственно-временную историю процесса. В случае рассеяния подобная общая трактовка сложных процессов аналогична методу S -матрицы Гейзенберга. Временной порядок событий в течение рассеяния, который детально определяется дифференциальными уравнениями Гамильтона, не является существенным. Связь указанных двух точек зрения будет значительно подробнее разобрана во введении ко второй статье, в которой рассматриваются более сложные виды взаимодействий.

Наши выводы основываются на том положении, что в нерелятивистской квантовой механике амплитуда для заданного процесса может рассматриваться как сумма амплитуд для каждой допустимой пространственно-временной траектории [1]. В связи с тем обстоятельством, что в классической физике позитроны можно считать электронами, движущимися вдоль мировой линии попятно по времени (см. примечание 2 на стр. 146), ранее нами была сделана попытка отбросить в релятивистском случае ограничение, что траектории должны быть направлены всегда в одну сторону по времени. Затем было обнаружено, что получающиеся результаты могут быть значительно проще истолкованы с более привычной физической точки зрения, относящейся к рассеянию волн. Подобная трактовка используется в настоящей статье. После физического истолкования уравнений было найдено доказательство эквивалентности данного метода и теории вторичного квантования¹⁾.

Мы сначала рассмотрим соотношение между дифференциальными уравнениями Гамильтона и их решениями, беря в качестве примера уравнение Шредингера. Аналогичным образом мы разберем затем уравнение Дирака и покажем, как можно интерпретировать решения, относящиеся к позитронам. Последовательная интерпретация, видимому, не была бы возможной, если бы электроны не подчинялись принципу Паули. (Заряженные частицы, подчиняющиеся уравнениям Клейна — Гордона, могут описываться аналогичным образом, при этом, однако, для сохранения

¹⁾ Эквивалентность всего метода (включая фотонные взаимодействия) с методом Швингера и Томонага была показана Дайсоном [2]. — *Прим. авт*

последовательности метода требуется подчинение бозевской статистике¹⁾.) Далее мы приводим представление через импульсные переменные, которое удобно для подсчетов матричных элементов. В приложении дано доказательство эквивалентности данного метода и вторично квантованной теории дырок.

2. Рассмотрение уравнения Шредингера с помощью функции Грина

Сначала мы кратко рассмотрим связь между нерелятивистским волновым уравнением и его решениями. Затем полученные положения будут распространены на релятивистские частицы, подчиняющиеся уравнению Дирака. Наконец в следующей статье будут рассматриваться уже взаимодействующие релятивистские частицы, т. е. квантовая электродинамика.

Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (1)$$

описывает изменение волновой функции ψ за бесконечно малое время Δt как результат действия оператора $\exp(-iH\Delta t)$. Таким образом, можно ответить на вопрос, какова волновая функция при $t_2 > t_1$, если известна волновая функция $\psi(x_1, t_1)$ в точке x_1 в момент t_1 . Можно во всех случаях написать

$$\psi(x_2, t_2) = \int K(x_2, t_2; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) d^3x_1, \quad (2)$$

где K — функция Грина для линейного уравнения (1). (Мы ограничиваемся одной частицей с координатой x , но приведенные уравнения являются, очевидно, более общими.) Если H — не зависящий от времени оператор, обладающий собственными значениями E_n и собственными функциями φ_n , так что функция $\psi(x_1, t_1)$ может быть разложена в ряд $\sum_n C_n \varphi_n(x)$, то имеет место равенство

$$\psi(x, t_2) = \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) C_n \varphi_n(x).$$

Так как

$$C_n = \int \varphi_n^*(x_1) \psi(x_1, t_1) d^3x_1,$$

для $t_2 > t_1$ в данном случае получаем

$$K(2, 1) = \sum_n \varphi_n(x_2) \varphi_n^*(x_1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) \quad (3)$$

(вместо координат x_1, t_1 написана цифра 1, а вместо x_2, t_2 написана цифра 2). Впоследствии выяснится, что при $t_2 < t_1$ удобно положить функцию Грина $K(2, 1)$ равной нулю. [Формула (2) не будет при этом справедлива при $t_2 < t_1$]. Легко показать, что функция K в общем случае может быть тогда определена, как то решение уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t_2} - H_2\right) K(2, 1) = i\delta(2, 1), \quad (4)$$

которое равно нулю для $t_2 < t_1$; здесь $\delta(2, 1) = \delta(t_2 - t_1) \delta(x_2 - x_1) \delta(y_2 - y_1) \times \delta(z_2 - z_1)$, а индекс 2 у оператора H_2 означает, что данный оператор действует на переменные 2 в функции $K(2, 1)$. Если оператор H зависит от времени, то уравнения (2) и (4) остаются справедливыми, хотя функция Грина K определяется при этом более сложным выражением, чем (3)²⁾.

¹⁾ Это является частным проявлением общей связи между спином и статистикой, указанной Паули [3]. — *Прим. авт.*

²⁾ Для нерелятивистской свободной частицы, когда $\varphi_n = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x})$ и $E_n = \mathbf{p}^2/2m$, соотношение (3) дает, как известно,

$$K_0(2, 1) = \int \exp\left[-i(\mathbf{p}\mathbf{x}_1 - \mathbf{p}\mathbf{x}_2) - \frac{i}{2m} \mathbf{p}^2(t_2 - t_1)\right] d^3\mathbf{p} (2\pi)^{-3} = \\ = (2\pi i m^{-1}(t_2 - t_1))^{-3/2} \exp\left(\frac{1}{2} i m (x_2 - x_1)^2 (t_2 - t_1)^{-1}\right)$$

при $t_2 > t_1$ и $K_0 = 0$ при $t_2 < t_1$. — *Прим. авт.*

Величину $K(2, 1)$ можно назвать полной амплитудой перехода в точку x_2, t_2 из точки x_1, t_1 . Она получается сложением амплитуд $\exp iS$ для каждой пространственно-временной траектории между данными точками; здесь S — действие вдоль траектории [1]. Амплитуда нахождения частицы в состоянии $\chi(x_2, t_2)$ в момент t_2 , если эта частица находилась в момент t_1 в состоянии $\psi(x_1, t_1)$, равна

$$\int \chi^*(2) K(2, 1) \psi(1) d^3x_1 d^3x_2. \quad (5)$$

Квантово-механическая система описывается заданием функции K так же полно, как и заданием гамильтониана H , из которого эта функция K может быть получена. В некоторых случаях для описания системы использование функции K является более простым и наглядным. Мы предполагаем рассмотреть квантовую электродинамику именно с этой точки зрения.

Чтобы ближе познакомиться с функцией K и соответствующими методами, рассмотрим простую задачу теорий возмущений. Пусть имеется частица в слабом поле с потенциалом $U(x, t)$, зависящим от пространственных координат и времени. Подсчитаем $K(2, 1)$ в случае, когда потенциал U отличается от нуля только для значений t , лежащих между t_1 и t_2 . Разложим для этого функцию K в ряд по возрастающим степеням U :

$$K(2, 1) = K_0(2, 1) + K^{(1)}(2, 1) + K^{(2)}(2, 1) + \dots \quad (6)$$

Функция $K(2, 1)$, имеющая нулевой порядок по U , совпадает с функцией $K_0(2, 1)$ для свободной частицы. Для исследования поправки первого порядка $K^{(1)}(2, 1)$ рассмотрим сначала тот случай, когда U отличается от нуля только на бесконечно малом временном интервале Δt_3 между моментами времени t_3 и $t_3 + \Delta t_3$ ($t_1 < t_3 < t_2$). Тогда, если $\psi(1)$ — волновая функция в точке x_1, t_1 , то волновая функция в точке x_3, t_3 будет равна

$$\psi(3) = \int K_0(3, 1) \psi(1) d^3x_1, \quad (7)$$

поскольку в интервале между t_1 и t_3 частица свободна. Для узкого интервала Δt_3 берем решение уравнения (1) в виде

$$\psi(x, t_3 + \Delta t_3) = \exp(-iH \Delta t_3) \psi(x, t_3) = (1 - iH_0 \Delta t_3 - iU \Delta t_3) \psi(x, t_3).$$

Здесь мы положили $H = H_0 + U$, причем H_0 — гамильтониан свободной частицы. Таким образом, выражение $\psi(x, t_3 + \Delta t_3)$ отличается от значения, которое эта функция имела бы при потенциале, равном нулю, а именно, от $(1 - iH_0 \Delta t_3) \psi(x, t_3)$, на дополнительный член

$$\Delta \psi = -iU(x_3, t_3) \psi(x_3, t_3) \Delta t_3, \quad (8)$$

который мы будем называть амплитудой рассеяния. Волновая функция в точке 2 задается выражением

$$\psi(x_2, t_2) = \int K_0(x_2, t_2; x_3, t_3 + \Delta t_3) \psi(x_3, t_3 + \Delta t_3) d^3x_3,$$

так как после момента $t_3 + \Delta t_3$ частица снова свободна. Следовательно, вызванное внешним полем изменение волновой функции в точке 2 равно [подставляем выражение (7) в (8) и затем (8) в выражение для $\psi(x_2, t_2)$]

$$\Delta \psi(2) = -i \int K_0(2, 3) U(3) K_0(3, 1) \psi(1) d^3x_1 d^3x_3 \Delta t_3.$$

В случае, когда потенциал действует продолжительное время, изменение волновой функции в точке 2 можно рассматривать как суммарный эффект от каждого интервала Δt_3 , так что в этом случае нужно произвести интегрирование не только по x_3 , но и по t_3 . По определению (2) функции K , мы, следовательно, получим

$$K^{(1)}(2, 1) = -i \int K_0(2, 3) U(3) K_0(3, 1) d\tau_3, \quad (9)$$

где интеграл теперь может быть распространен по всему пространству и времени $d\tau_3 = d^3x_3 dt$. Влияние потенциала $U(3)$ при значениях t_3 , лежащих вне интервала (t_1, t_2) , автоматически исключается, поскольку по определению $K_0(2, 1) = 0$ для $t_2 < t_1$.

Мы можем истолковать результат, выражаемый формулами (6) и (9), следующим образом. Представим себе, что частица, движущаяся от точки к точке так, как если бы она была свободной, рассеивается полем с потенциалом U . Таким образом, полная амплитуда попадания в точку 2 из точки 1 может рассматриваться как сумма амплитуд, соответствующих различным альтернативным



а) первый порядок, ур. (9) б) второй порядок, ур. (10)

Фиг. 1. Уравнение Шредингера (и аналогично уравнение Дирака) можно трактовать как описание того обстоятельства, что плоские волны последовательно рассеиваются внешним полем.

Случай а иллюстрирует положение, возникающее при рассеянии первого порядка. Ядро $K_0(2, 3)$ является амплитудой свободной частицы, переходящей из точки 3 в 2. Заштрихованная область указывает на присутствие поля с потенциалом A , который вызывает рассеяние в точке 3 с амплитудой $-iA(3)$, рассчитанной на $1 \text{ см}^3 \cdot \text{сек}$ [уравнение (9)].

Случай б иллюстрирует процесс второго порядка [уравнение (10)], когда волна, рассеянная в точке 3, вновь рассеивается в точке 4. В одноэлектронной теории Дирака ядро $K_0(4, 3)$ представляло бы электроны как с положительными, так и с отрицательными энергиями, движущиеся от точки 3 к точке 4. Этого можно избежать за счет выбора другого рассеивающего ядра $K_+(4, 3)$ (см. фиг. 2).

точки 4 в четырехмерном пространстве [амплитуда $K_0(4, 3)$], вновь рассеивается [амплитуда $-iU(4)$] и, наконец, переходит в точку 2 [амплитуда $K_0(2, 4)$]. Суммируя по всем возможным положениям и временам для точек 3 и 4, находим, что составляющая второго порядка полной амплитуды $K^{(2)}(2, 1)$ равна

$$(-i)^2 \iint K_0(2, 4) U(4) K_0(4, 3) U(3) K_0(3, 1) d\tau_3 d\tau_4. \quad (10)$$

Этот результат можно непосредственно получить из формулы (1), аналогично тому как было получено выражение (9). Подобным же образом можно, очевидно, выписать любой из членов разложения (6) ¹⁾.

¹⁾ При этом мы просто решаем методом последовательных приближений интегральное уравнение [следующее непосредственно из уравнения (1) при $H = H_0 + U$ и уравнения (4) при $H = H_0$]

$$\psi(2) = -i \int K_0(2, 3) U(3) \psi(3) d\tau_3 + \int K_0(2, 1) \psi(1) d^3x_1,$$

где первый интеграл распространен по всему пространству и всем временам t_3 , большим чем t_1 ; кроме того, $t_2 > t_1$. — Прим. авт.

3. Рассмотрение уравнения Дирака

Применим теперь развитый в предыдущем разделе метод к уравнению Дирака. Для этого, очевидно, достаточно рассматривать в предыдущих уравнениях H как дираковский гамильтониан и считать ψ величиной с индексом, пробегаящим четыре значения (для каждой частицы). Тогда ядро K_0 , которое можно попрежнему определять посредством выражений (3) или (4), будет 4×4 -матрицей, действующей на начальную волновую функцию и дающей при этом конечную волновую функцию. Величина $U(3)$ в (10) может быть заменена на величину $A_4(3) - \alpha A(3)$, где через A_4 и A обозначены соответственно скалярный и векторный потенциалы, умноженные на заряд электрона, а α — матрицы Дирака.

Используем в дальнейшем рассмотрении следующие релятивистские обозначения. Четырехмерный вектор вида x, t мы будем изображать символом x_μ , где $\mu = 1, 2, 3, 4$ и координата $x_4 = t$ действительна. Так, векторным и скалярным потенциалом (умноженным на e) A и A_4 будет A_μ . Четыре матрицы α и β можно считать преобразующимися как четырехмерный вектор γ_μ (наши γ_μ отличаются от соответствующих величин у Паули на множитель i для $\mu = 1, 2, 3$). Мы подразумеваем суммирование по одинаковым индексам $a_\mu b_\mu = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a \cdot b$. В частности, если a_μ — некоторый четырехмерный вектор (но не матрица), то мы записываем $a = a_\mu \gamma_\mu$, так что a является матрицей, соответствующей вектору (символ a часто будет использоваться вместо a_μ для обозначения вектора). Матрицы γ_μ удовлетворяют условиям $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$, где $\delta_{44} = +1$, $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1$, а все остальные $\delta_{\mu\nu}$ равны нулю; вследствие наших обозначений $\delta_{\mu\nu} a_\nu = a_\mu$, $\delta_{\mu\mu} = 4$. Заметим, что $ab + ba = 2a \cdot b$ и что величина $a^2 = a_\mu a_\mu = aa$ является обычным числом. Символ $\partial/\partial x_\mu$ будет обозначать $\partial/\partial t$ при $\mu = 4$ и $-\partial/\partial x$, $-\partial/\partial y$, $-\partial/\partial z$ при $\mu = 1, 2, 3$. Положим $\hat{\nabla} = \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \beta \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \nabla$. В дальнейшем мы будем для удобства считать, что в выражении (3) функция φ_n^* заменена на сопряженную функцию $\bar{\varphi}_n = \varphi_n^* \beta$.

Таким образом, уравнение Дирака для частицы с массой m во внешнем поле $A = A_\mu \gamma_\mu$ имеет вид

$$(i\hat{\nabla} - m)\psi = A\psi, \tag{11}$$

а уравнение (4), определяющее движение свободной частицы, примет вид

$$(i\nabla_2 - m)K_+(2, 1) = i\delta(2, 1), \tag{12}$$

где индекс 2 у оператора ∇_2 означает, что дифференцирование производится по координатам $x_{2\mu}$, обозначенным в функциях $K_+(2, 1)$ и $\delta(2, 1)$ цифрой 2.

Функция $K_+(2, 1)$ определена для случая отсутствия внешнего поля. Если имеется внешнее поле с потенциалом A , то можно определить аналогичную функцию, которую мы обозначим через $K_+^{(A)}(2, 1)$. Функция $K_+^{(A)}(2, 1)$ будет отличаться от $K_+(2, 1)$ в первом порядке на поправку, которая по аналогии с (9) равна

$$K_+^{(1)}(2, 1) = -i \int K_+(2, 3) \hat{A}(3) K_+(3, 1) d\tau_3. \tag{13}$$

Эта поправка соответствует амплитуде перехода частицы без воздействия поля из точки 1 в точку 3, рассеянию в точке 3 [матрица $A(3)$ заменяет теперь $U(3)$] и последующему свободному переходу в точку 2. Поправка второго порядка по аналогии с (10) равна

$$K_+^{(2)}(2, 1) = - \iint K_+(2, 4) A(4) K_+(4, 3) A(3) K_+(3, 1) d\tau_4 d\tau_3 \tag{14}$$

и т. д. Вообще, функция $K_+^{(A)}$ удовлетворяет уравнению

$$(i\nabla_2 - A(2) - m)K_+^{(A)}(2, 1) = i\delta(2, 1), \tag{15}$$

а последовательные члены (13), (14) и т. д. дают разложение в степенной ряд решения интегрального уравнения

$$K_+^{(A)}(2, 1) = K_+(2, 1) - i \int K_+(2, 3) A(3) K_+^{(A)}(3, 1) d\tau_3. \quad (16)$$

Теперь, казалось бы, следовало выбрать частное решение уравнения (12) в виде $K_+ = K_0$, где функция $K_0(2, 1)$ равна нулю при $t_2 < t_1$, при $t_2 > t_1$ определяется выражением (3), в котором вместо φ_n и E_n подставлены соответственно собственные функции и собственные значения энергии для частицы, подчиняющейся уравнению Дирака, а φ_n^* заменено на $\bar{\varphi}_n$.

Однако получающиеся при подобном выборе ¹⁾ формулы страдают тем недостатком, что они применимы лишь для одноэлектронной теории Дирака и не годятся для дырочной теории позитрона. Рассмотрим, например, электрон после рассеяния внешним полем, действующим в малой области 3 четырехмерного пространства (фиг. 1, а). Одноэлектронная теория утверждает [согласно выражению (3) при $K_+ = K_0$], что амплитуда рассеяния в другой точке 2 будет всегда изменяться при возрастании времени как с положительной, так и с отрицательной энергией, т. е. как с положительной, так и с отрицательной скоростью изменения фазы. Волн, рассеянных в сторону времен, предшествующих времени рассеяния, нет. Именно таковы свойства функции $K_0(2, 3)$.

С другой стороны, согласно позитронной теории, электрон после рассеяния не может занимать состояний с отрицательной энергией. Таким образом, выбор $K_+ = K_0$ является неудовлетворительным. Имеются, однако, еще другие решения уравнения (12). Мы выберем одно из них, определив $K_+(2, 1)$ так, чтобы $K_+(2, 1)$ при $t_2 > t_1$ было суммой вида (3) только по состояниям с положительной энергией. Это новое решение должно удовлетворять уравнению (12) при всех временах для того, чтобы представление было полным. Отсюда следует, что разность между новым и старым решением должна удовлетворять однородному уравнению Дирака. Из определения ясно, что данная разность $K_0 - K_+$ является суммой вида (3) по всем состояниям с отрицательной энергией до тех пор, пока $t_2 > t_1$. Поскольку, однако, рассматриваемая разность должна быть решением однородного уравнения Дирака во всем времени, то она должна представляться той же самой суммой по состояниям с отрицательной энергией и при $t_2 < t_1$. Так как в этом случае $K_0 = 0$, то, следовательно, наше новое ядро $K_+(2, 1)$ при $t_2 < t_1$ является взятой со знаком минус суммой вида (3) по всем состояниям с отрицательной энергией. Итак,

$$\begin{aligned} K_+(2, 1) &= \sum_{\text{пол. } E_n} \varphi_n(2) \bar{\varphi}_n(1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) && \text{для } t_2 > t_1, \\ K_+(2, 1) &= - \sum_{\text{отр. } E_n} \varphi_n(2) \bar{\varphi}_n(1) \exp(-iE_n(t_2 - t_1)) && \text{для } t_2 < t_1. \end{aligned} \quad (17)$$

При подобном выборе K_+ наши уравнения, например (13) и (14), будут давать результаты, эквивалентные результатам теории дырок.

В частности, правильность до второго порядка выражения (14) для описания перехода в точку 2 электрона, находившегося первоначально в точке 1, можно проверить следующим образом (фиг. 2).

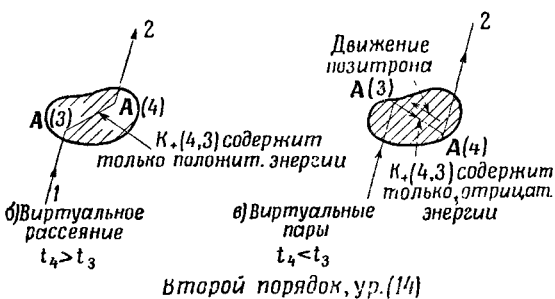
Возьмем тот случай, когда $t_2 > t_1$ и внешнее поле не равно нулю лишь на интервале $t_2 - t_1$, так что как момент t_3 , так и момент t_4 лежат между временами t_1 и t_2 . Предположим сначала, что $t_4 > t_3$ (фиг. 2, б). Тогда (поскольку $t_3 > t_1$) электрон, находящийся по предположению сначала в состоянии с положительной энергией, переходит в этом состоянии [$K_+(3, 1)$] в точку 3, где он

¹⁾ Вопрос о выборе того или иного вида K является по существу вопросом о выборе одной из функций Грина уравнения Дирака (см. вступительную статью). Подробное рассмотрение вопроса о правильном выборе гриниана квантованных уравнений поля приводится в статье VII настоящего сборника. — *Прим. ред.*

претерпевает рассеяние [A(3)]. Далее, данный электрон движется к точке 4, причем он должен вести себя как электрон в состоянии с положительной энергией. Этот результат правильно описывается выражением (14), так как $K_+(4, 3)$ содержит в своем разложении только компоненты с положительной энергией, так как $t_4 > t_3$. После рассеяния в точке 4 электрон движется к точке 2, находясь обязательно вновь в состоянии с положительной энергией, так как $t_2 > t_4$.

В позитронной теории возможность виртуального порождения пары приводит к дополнительному слагаемому для рассеяния (фиг. 2, в). Пара может быть порождена внешним полем A(4) в точке 4, причем электрон этой пары является как раз тем электроном, который впоследствии обнаруживается в точке 2. Позитрон (или, лучше сказать, дырка) движется к точке 3, где он аннигилирует вместе с электроном, попавшим в точку 3 из точки 1.

Указанная возможность уже предусмотрена в выражении (14) той частью подынтегрального выражения, для которого $t_4 < t_3$; ее исследование позволит нам дать интерпретацию $K_+(4, 3)$ при $t_4 < t_3$. Величина $K_+(2, 4)$ описывает электрон, движущийся после порождения пары из точки 4 в точку 2. Аналогично величина $K_+(3, 1)$ описывает электрон, движущийся из точки 1 в точку 3. Величина $K_+(4, 3)$ должна, таким образом, представлять распространение позитрона, или дырки, из точки 4 в точку 3. Что дело обстоит именно так, не вызывает никаких сомнений. То обстоятельство, что в теории дырок позитрон движется, как электрон с отрицательной энергией, отражается здесь в том, что значение $K_+(4, 3)$ при $t_4 < t_3$ равно



Фиг. 2. Уравнение Дирака имеет решением $K_+(2, 1)$, если считать, что рассеянные внешним полем волны могут двигаться попятно во времени [случай а; уравнение (13)]. Случай б (виртуальное рассеяние; $t_4 > t_3$) и случай в (виртуальные пары) иллюстрируют процессы второго порядка [уравнение (14)], причем в случае в имеется возможность (виртуального) порождения в точке 4 пары с аннигиляцией в точке 3 позитрона, движущегося из точки 4 по направлению к точке 3. Этот процесс можно описать подобно обычному рассеянию (случай б), за исключением того, что электрон движется попятно во времени при переходе из точки 3 в точку 4. Волны, рассеянные из точки 3 в точку 2' (случай а), описывают возможность перехода позитрона в точку 3 из точки 2' и аннигиляции электрона, исходящего из точки 1. Подобная трактовка эквивалентна теории дырок, причем движущиеся попятно во времени электроны обнаруживаются как позитроны.

взятой со знаком минус сумме компонент, отвечающих только отрицательным энергиям. В теории дырок действительная энергия подобных промежуточных состояний является, конечно, положительной. Это остается верным и здесь, так как в фазах $\exp(-iE_n(t_4 - t_3))$, входящих по определению (17) в $K_+(4, 3)$, являются отрицательными и значение E_n и значение разности $t_4 - t_3$. Поэтому подобные составные части ядра $K_+(4, 3)$ изменяются с изменением t_3 как $\exp(-i|E_n|(t_3 - t_4))$, т. е. так, как они изменялись бы, если бы энергия промежуточного состояния равнялась $|E_n|$. То, что при подсчете $K(4, 3)$ вся сумма берется с отрицательным знаком, связано с изменением знака амплитуды в теории дырок соответственно принципу Паули и соответственно тому, что электрон, попадающий в точку 2,

возник в результате обмена с электроном м фона ¹⁾. Подобным образом правильно описываются все включающие виртуальные пары процессы как рассматриваемого, так и высших порядков.

Выражения, подобные (14), могут попрежнему сопоставляться с переходом электрона из точки 1 в точку 3 [$K_+(3, 1)$], рассеянием его в точке 3 [$A(3)$], последующим переходом в точку 4 [$K_+(4, 3)$], новым рассеянием [$A(4)$] и, наконец, попаданием в точку 2. Однако при этом рассеяния могут происходить как в направлении будущего, так и в направлении прошлого, причем электрон, распространяющийся попятно по времени, считается позитроном.

Это наводит на мысль, что компоненты с отрицательной энергией, образовавшиеся при рассеянии внешним полем, должны рассматриваться как волны, распространяющиеся из точки рассеяния в направлении прошлого, и что подобные волны представляют распространение позитрона, аннигилирующего затем с электроном под действием внешнего поля ²⁾.

Подобная интерпретация дает правильное описание событий также и в случае действительного порождения пары (см. фиг. 3). Так, если, в частности, в выражении (13) $t_1 < t_3 < t_2$, то это выражение дает амплитуду того, что при находившемся ранее в точке 1 в момент t_1 электроне будет иметься лишь один (рассеянный в точке 3) электрон, расположенный в точке 2. С другой стороны, если t_2 меньше t_3 , например, если $t_2 = t_1 < t_3$, то это же выражение дает амплитуду аннигиляции в точке 3 пары, электрона, в точке 1 и позитрона в точке 2, после чего не останется ни одной частицы. Аналогично, если значение t_2 и t_1 больше t_3 , то мы получаем (со знаком минус) амплитуду нахождения одиночной пары, электрона в точке 2 и позитрона в 1, порожденной полем $A(3)$ из вакуума. При $t_1 > t_3 > t_2$ выражение (13) описывает рассеяние позитрона. Все эти амплитуды отнесены к амплитуде того, что вакуум будет оставаться вакуумом, которая принята за единицу. (Этот вопрос более полно будет рассмотрен ниже.)

Можно без труда вывести формулу, аналогичную формуле (2) ³⁾. Именно,

$$\psi(2) = \int K_+(2, 1) N(I) \psi(I) d^3V_1, \quad (18)$$

при этом d^3V_1 обозначает элемент объема замкнутой трехмерной поверхности пространственно-временной области, окружающей точку 2, а величина $N(I)$ равна $N_\mu(I) \gamma_\mu$, где $N_\mu(I)$ — направленная внутрь единичная нормаль к поверхности в точке 1.

¹⁾ Часто отмечается, что одноэлектронная теория дает, очевидно, такие же матричные элементы для подобного процесса, как и теория дырок. Проблема заключается в пахждении интерпретации, приводящей к правильным результатам и в других случаях; например, при рассмотрении задачи о собственной энергии. — *Прим. аст.*

²⁾ Идея о том, что позитроны могут быть представлены как электроны с собственным временем, направленным противоположно истинному времени, обсуждалась автором и некоторыми другими, в особенности Штюкельбергом [4, 5]. То обстоятельство, что в классической теории действие (собственное время) непрерывно возрастает вдоль траектории, отражается в квантовой механике в том, что фаза, которая равна $|E_2| |t_2 - t_1|$, всегда возрастает при переходе частицы от одной точки рассеяния к другой. — *Прим. аст.*

³⁾ Умножив уравнение (12) справа на $(-iV_1 - m)$ и заметив, что $V_1 \delta(2, 1) = -V_2 \delta(2, 1)$, мы получим, что $K_+(2, 1)$ удовлетворяет также уравнению $K_+(2, 1) (-iV_1 - m) = i\delta(2, 1)$, где оператор V_1 действует на координаты точки 1 в $K_+(2, 1)$, но написан после этой функции для сохранения правильного порядка γ -матриц. Умножим это уравнение на $\psi(1)$, а уравнение (11) (при $A=0$) умножим на $K_+(2, 1)$; получившиеся выражения вычтем друг из друга и проинтегрируем результат по некоторой области пространства — времени. Интеграл, стоящий с левой стороны получившегося уравнения, может быть преобразован в интеграл по поверхности пространственно-временной области. Правая сторона уравнения равна $\psi(2)$, если точка 2 лежит внутри взятой области; в противном случае она равна нулю. (Тот случай, когда трехмерная поверхность содержит световую линию нулевой длины и не имеет, следовательно, однозначной единичной нормали, не требует особого рассмотрения, так как можно добиться настолько большого удаления подобных точек от точки 2, что их вклад в подинтегральное выражение будет исчезающе малым.) — *Прим. аст.*

Таким образом, волновая функция $\psi(2)$ определена (в данном случае для свободной частицы) везде внутри четырехмерной области, если заданы значения функции на поверхности этой области.

Рассмотрим для интерпретации полученного положения тот случай, когда трехмерная поверхность состоит в основном из всего пространства в некоторый момент $t=0$, предшествующий времени t_2 , и из всего пространства при $T > t_2$. Дополнение указанных поверхностей до замкнутой поверхности можно считать расположенным настолько далеко от точки x_2 , что взятая по нему часть интеграла (18) не будет сказываться на значении $\psi(x_2)$, так как ядро $K_+(2, 1)$ экспоненциально убывает в пространственно-подобных направлениях. Поскольку направленная внутрь нормаль N будет в этом случае (при $\gamma_4 = \beta$) равна β или $-\beta$, то

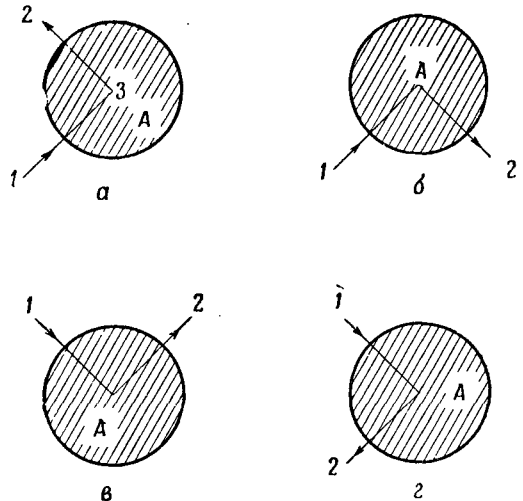
$$\psi(2) = \int K_+(2, 1) \beta \psi(1) d^3 x_1 - \int K_+(2, 1') \beta \psi(1') d^3 x_{1'}; \quad (19)$$

при этом $t_1 = 0$ и $t_1' = T$. Первый интеграл не равен нулю лишь для обладающих положительной энергией (электрон) компонент $\psi(1)$, а второй интеграл, наоборот, не равен нулю лишь для обладающих отрицательной энергией (позитрон) компонент $\psi(1')$. Следовательно, амплитуда нахождения заряда в точке 2 зависит как от амплитуды нахождения электрона в предшествующем по времени измерении, так и от амплитуды нахождения позитрона после измерения. Это можно считать выражением того обстоятельства, что даже в задаче с одним зарядом амплитуда порождения заряда в точке 2 не определяется, когда известны лишь амплитуды нахождения электрона (или позитрона) в предшествующие моменты времени. Возможно, что вначале нет вообще ни одного электрона, но в процессе измерения (или под действием другого внешнего поля) происходит порождение пары. В подобном случае амплитуда нахождения заряда определяется амплитудой нахождения позитрона в будущем.

Мы можем теперь получить для амплитуд перехода выражения, подобные (5). Зададим, например, вопрос: какова амплитуда нахождения электрона в момент $t=T$ в состоянии с волновой функцией $g(x)$, соответствующей положительной энергии, если в момент $t=0$ электрон находится в состоянии с волновой функцией $f(x)$, также соответствующей положительной энергии? Амплитуда нахождения электрона где-либо после момента $t=0$ определяется выражением (19) с заменой там $\psi(1)$ на $f(x)$, причем второй интеграл равен нулю. Следовательно, для амплитуды перехода в состояние $g(x)$ получаем аналогично (5) выражение ($t_2 = T, t_1 = 0$):

$$\int \bar{g}(x_2) \beta K_+(2, 1) \beta f(x_1) d^3 x_1 d^3 x_2, \quad (20)$$

так как $g^* = \bar{g}$.



Фиг. 3. Одна и та же формула описывает ряд различных процессов в зависимости от соотношения временных переменных t_2 и t_1 . Так, величина $P_v |K_+^{(A)}(2, 1)|^2$ есть вероятность того, что: а — некоторый электрон, исходящий из точки 1, будет рассеян в точку 2, причем в вакууме не будет образовываться пар; б — произойдет аннигиляция электрона, движущегося из точки 2, и позитрона, движущегося из точки 1, и после этого не останется частиц; в — произойдет порождение одной пары из вакуума; г — позитрон, движущийся из точки 2, рассеивается в точку 1. (Ядро $K_+^{(A)}(2, 1)$ включает эффекты рассеяния всех порядков; P_v — постоянная нормировки.)

Если действие внешнего поля имеет место где-либо на отрезке времени между 0 и T , то ядро K_+ заменяется на $K_+^{(A)}$. В таком случае эффект первого порядка в амплитуде перехода, согласно (13), равен

$$-i \int \bar{g}(x_2) \beta K_+(2, 3) A(3) K_+(3, 1) \beta f(x_1) d^3 x_1 d^3 x_2 d\tau_3. \quad (21)$$

Подобные выражения могут быть упрощены и входящие в них интегралы по трехмерной поверхности, неудобные для релятивистских вычислений, могут быть устранены следующим образом. Вместо определения состояния посредством волновой функции $f(x)$, взятой в некоторый заданный момент времени $t_1 = 0$, определим состояние с помощью функции $f(I)$ от четырех переменных x_1, t_1 , являющейся решением уравнения для свободной частицы при всех t_1 и равняющейся $f(x_1)$ при $t_1 = 0$. Конечное состояние определяется аналогичным образом с помощью функции $g(2)$, определенной во всем четырехмерном пространстве. Теперь наши поверхностные интегралы могут быть преобразованы, в связи с тем что

$$\int K_+(3, 1) \beta f(x_1) d^3 x_1 = f(3) \quad \text{и} \quad \int \bar{g}(x_2) \beta d^3 x_2 K_+(2, 3) = \bar{g}(3).$$

Для эффекта первого порядка получаем выражение

$$-i \int \bar{g}(3) A(3) f(3) d\tau_3, \quad (22)$$

причем интеграл распространен теперь по всему пространству — времени. Амплитуда перехода второго порядка, согласно (14), равна

$$- \int \int \bar{g}(2) A(2) K_+(2, 1) A(1) f(1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (23)$$

(частица, попавшая в точку 1 с амплитудой $f(1)$, рассеивается [$A(1)$], движется к точке 2 [$K_+(2, 1)$], вновь рассеивается [$A(2)$], после этого ставится вопрос об отыскании амплитуды нахождения частицы в состоянии $g(2)$). Если функция $g(2)$ соответствует состоянию с отрицательной энергией, то это означает, что решается проблема аннигиляции электрона с волновой функцией $f(1)$ и позитрона с волновой функцией $g(2)$ и т. п.

До сих пор делалось упоминание о процессах рассеяния, однако очевидно, что аналогично можно рассматривать также и задачу движения в постоянном внешнем поле с потенциалом V , в частности задачу о водородном атоме. Если последнюю задачу рассматривать сначала как задачу рассеяния, то можно поставить вопрос об амплитуде $\varphi_k(I)$ того, что имевший первоначально свободную волновую функцию электрон был рассеян k раз полем с потенциалом V либо вперед, либо назад по времени и оказался в точке I . Тогда амплитуда после добавочного рассеяния будет равна

$$\varphi_{k+1}(2) = -i \int K_+(2, 1) V(1) \varphi_k(1) d\tau_1. \quad (24)$$

Выражение для полной амплитуды

$$\psi(I) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(I)$$

попадания в точку I либо непосредственно, либо после любого числа рассеяний получается суммированием выражения (24) по всем k от 0 до ∞ . Очевидно,

$$\psi(2) = \varphi_0(2) - i \int K_+(2, 1) V(1) \psi(1) d\tau_1. \quad (25)$$

Рассматривая проблему как задачу устойчивых состояний, мы можем получить, в частности, то начальное условие для φ_0 (или, точнее, для ψ), которое приводит к периодическому движению для ψ . Это большей частью практически делается,

конечно, посредством решения уравнения Дирака

$$(i\nabla - m)\psi(I) = V(I)\psi(I), \quad (26)$$

вытекающего из (25), при учете уравнения (12) после действия на (25) с обеих сторон оператором $(i\nabla_2 - m)$, благодаря чему исключается φ_0 . Приведенный пример наглядно иллюстрирует взаимосвязь между различными точками зрения.

Во многих задачах полный потенциал $A + V$ можно расщепить на две части, а именно, на независящую от времени часть V и на часть A , рассматриваемую как возмущение. Если величина $K_+^{(V)}$ определена так же, как и величина $K_+^{(A)}$ в формуле (16) с заменой там потенциала A на V , то выражения, подобные (23), остаются пригодными при замене K_+ на $K_+^{(V)}$, при этом волновые функции свободных частиц $f(I)$ и $g(2)$ заменяются решениями (во всем четырехмерном пространстве) уравнения Дирака (26) с потенциалом V .

4. Случай нескольких зарядов

Теперь мы рассмотрим случай, когда имеется два (или более) различных заряда, кроме пар, которые они могут образовывать в виртуальных состояниях. В последующей статье мы будем рассматривать взаимодействие между подобными зарядами. Здесь же мы предположим, что взаимодействия нет. В этом случае поведение каждой частицы не зависит от других частиц. Мы можем ожидать, что если имеются две частицы a и b , то амплитуда перехода частицы a из точки x_1 при $t = t_1$ в точку x_3 при $t = t_3$ и частицы b из точки x_2 при $t = t_2$ в точку x_4 при $t = t_4$ равна произведению

$$K(3, 4; 1, 2) = K_{+a}(3, 1) K_{+b}(4, 2).$$

Индексы a, b обозначают, что матрицы в K_+ действуют на четырехкомпонентный дираковский спинор, относящийся либо к частице a , либо соответственно к частице b (индекс у волновой функции принимает теперь 16 значений). В случае наличия внешнего поля величины K_{+a} и K_{+b} переходят в $K_{+a}^{(A)}$ и $K_{+b}^{(A)}$, где ядро $K_{+a}^{(A)}$ определяется и подсчитывается так же как и для отдельной частицы. Величины K_{+a} и K_{+b} коммутируют друг с другом. В последующем индексы a и b могут быть опущены, так как указания пространственно-временных переменных в ядрах достаточно для определения того, на что эти ядра действуют.

Учтем теперь, что рассматриваемые частицы одинаковы и подчиняются принципу Паули, который лишь требует, чтобы для получения истинной амплитуды попадания зарядов в точку 3 и 4 подсчитывали разность $K(3, 4; 1, 2) - K(4, 3; 1, 2)$. (Имеется еще нормировочное условие, состоящее в том, что когда интегрирование включает, например, точки 3 и 4, то интеграл нужно делить на 2, так как электроны тождественны.) Данное выражение справедливо также и для позитронов (см. фиг. 4). Например, амплитуда того, что электрон и позитрон, находившиеся первоначально в точках x_1 и соответственно x_4 (пусть $t_1 = t_4$), найдутся впоследствии в точках x_3 и x_2 ($t_2 = t_3 > t_1$), дается аналогичным выражением

$$K_+^{(A)}(3, 1) K_+^{(A)}(4, 2) - K_+^{(A)}(4, 1) K_+^{(A)}(3, 2). \quad (27)$$

Первый член представляет амплитуду того, что электрон переходит из точки 1 в точку 3, а позитрон — из точки 4 в точку 2 (фиг. 4, b), в то время как второй член представляет амплитуду того, что пара в точках 1 и 4 аннигилирует, а внешнее поле снова порождает пару. Обобщение на большее число частиц не вызывает затруднений. В этом случае каждая частица приносит дополнительный множитель $K_+^{(A)}$ и каждый раз берется антисимметрическая комбинация величин K .

В промежуточных состояниях принцип Паули учитывать не требуется. В качестве примера рассмотрим вновь выражение (14) при $t_2 > t_1$ и примем, что $t_4 < t_3$, так что описывается та ситуация (см. фиг. 2, a), когда в точке 4

порождается пара, электрон которой движется в точку 2, а позитрон — в точку 3, где он аннигилирует с электроном, прибывшим из точки 1. Может быть выдвинуто возражение, что в том случае, когда электрон, порожденный в точке 4, оказывается в том же самом состоянии, что и электрон, движущийся из точки 1; получается противоречие с принципом Паули, и значит подобный процесс не

нужно включать в выражение (14). Однако мы сейчас покажем, что при учете принципа Паули потребуются ввести еще и другие изменения, которые в совокупности вновь приводят к старому выражению.

Мы подсчитываем относительные амплитуды при условии, что вакуум в момент t_1 будет оставаться вакуумом в момент t_2 .

Нам важно знать изменение амплитуды вакуума, вызванное присутствием в точке 1 электрона. Единственным процессом, который можно в этом случае представить себе происходящим в вакууме, является порождение пары в точке 4 и последующая аннигиляция той же самой пары в точке 3. (Подобный процесс мы будем называть замкнутой петлей.) Если, однако, имеется реальный электрон в определенном состоянии 1, то следует исключить те пары в вакууме, у которых порождаемый электрон находится тоже в состоянии 1. Поэтому мы должны вычесть из нашей относительной амплитуды член, соответствующий таким процессам. Указанный член как раз равен взятому с обратным знаком члену, который, как мы утверждали, не должен включаться в выражение (14). Таким образом, действительно, можно полностью не учитывать в промежуточных состояниях принцип Паули.

Все полученные нами амплитуды — относительные, их квадраты дают относительную вероятность различных событий. Для получения абсолютных вероятностей относительные вероятности нужно умножить на P_0 — вероятность того, что если частиц не было в начале, то их не будет и в конце. Величину P_0 можно вычислить, введя

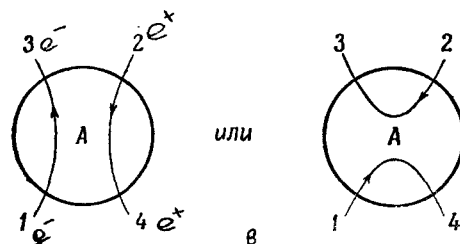
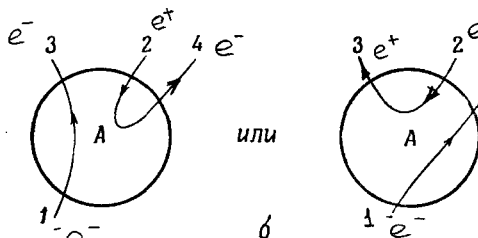
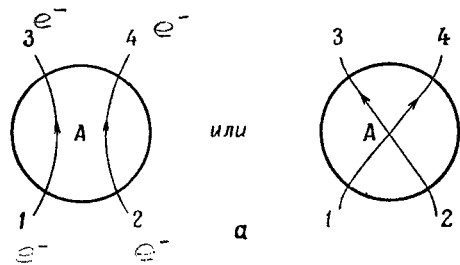
Фиг. 4. Ряд задач, включающих два различных заряда (помимо возможных виртуальных пар).

Величина

$$P_0 |K_+^{(A)}(3, 1)K_+^{(A)}(4, 2) - K_+^{(A)}(4, 1)K_+^{(A)}(3, 2)|^2$$

является вероятностью того, что a — электроны из точек 1 и 2 рассеиваются в точки 3 и 4 и не образуется никаких пар; b — электрон выходит из точки 1, образуется пара и в итоге имеются позитрон в точке 2 и электроны в точках 3 и 4; c — пара, находившаяся в точках 1 и 4, обнаруживается в точках 3 и 2 и т. д. Принцип Паули требует, чтобы вычитались амплитуды процессов, получающиеся друг из друга в результате перестановки двух электронов.

такую нормировку относительных вероятностей, чтобы сумма вероятностей всех взаимоисключающих возможностей равнялась единице. [В частности, если в начале имеется вакуум, то можно подсчитать относительную вероятность (равную единице) того, что вакуум остается вакуумом, вероятности порождения одной пары, двух пар и т. д. Сумма получающихся величин равна P_0^{-1} .] Приведенная к подобной форме теория является замкнутой и не включающей никаких расхождений. Истинные процессы совершенно не зависят от того, что происходит в вакууме.



Однако если учесть, как будет сделано в последующей статье взаимодействие между зарядами, то положение перестанет быть столь простым. В этом случае появляется возможность электромагнитного взаимодействия виртуальных электронов вакуума и реальных электронов. По этой причине в следующем разделе разбираются процессы, происходящие в вакууме; кроме того, там рассматривается независимый метод получения величины P_v .

5. Вакуумные проблемы

Другим путем получения абсолютных амплитуд является умножение всех относительных амплитуд на C_v — амплитуду перехода вакуума в вакуум, иными словами — на абсолютную амплитуду того, что частиц нет ни в начале, ни в конце. Можно положить $C_v = 1$, если в рассматриваемом интервале не действует внешнее поле, в остальных случаях величина C_v подсчитывается указанным ниже образом. Эта величина не равна тогда единице, так как, например, может быть порождена пара, которая в конечном счете вновь аннигилирует. Траектории частиц подобных пар будут на пространственно-временных диаграммах иметь вид замкнутых петель. Сумму амплитуд, получающихся от всех подобных замкнутых петель, мы обозначим через L . В первом приближении величина L выражается в виде

$$L^{(1)} = -\frac{1}{2} \int \int \text{tr} [K_+(2, 1) A(1) \times K_+(1, 2) A(2)] d\tau_1 d\tau_2. \quad (28)$$

(Действительно, электрон и позитрон пары, которая может быть порождена, например, в точке 1, могут оба перейти в точку 2 и там аннигилировать.) След Sp берется потому, что нам нужна сумма по всем возможным спинам у пары. Появление множителя $1/2$ вызвано тем, что одна и та же петля может начинаться и в точке 1 и в точке 2, а минус является следствием того, что здесь входят два множителя — iA . Следующим членом разложения L будет ¹⁾

$$L^{(2)} = +\frac{i}{3} \int \int \int \text{tr} [K_+(2, 1) A(1) K_+(1, 3) A(3) K_+(3, 2) A(2)] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

и т. д. Сумма всех подобных членов равна L^2).

Кроме появления рассмотренных одиночных петель возможно также порождение и последующая аннигиляция двух независимых пар. Эти пары могут образовывать в вакууме по две замкнутых петли, и появляющийся вследствие этого член в искомой амплитуде равен квадрату члена, появляющегося вследствие

¹⁾ В действительности этот член равен нулю, как это видно из следующего рассуждения. В каждом следе знак всех γ -матриц можно изменить на обратный. Изменение знака у γ в $K_+(2, 1)$ переводит эту величину в величину, транспонированную к $K_+(1, 2)$, так что порядок множителей и переменных становится обратным. Так как интеграл берется по всем значениям τ_1 , τ_2 и τ_3 , то при подобной перестановке общий результат не изменяется и мы получаем, что $L^{(2)} = (-1)^3 L^{(2)}$ вследствие изменения знака у A . Таким образом, значение следа равно нулю. Петли при нечетном числе величин A дают нуль. Физически это вызвано тем, что каждую петлю электрон может обойти в двух направлениях, и мы должны складывать амплитуды обеих возможностей. Но при изменении направления движения электрона он начинает вести себя, как частица с положительным зарядом, так что изменяется знак у каждого A и сумма амплитуд становится равной нулю, если число входящих взаимодействий нечетно. Данная теорема принадлежит Фарри [6]. — *Прим. авт.*

²⁾ Получение замкнутого выражения для L представляет затруднения из-за множителя $1/n$ в n -м члене. Однако легко получить приращение ΔL , вызванное малым изменением потенциала ΔA . В этом случае множитель $1/n$ сокращается вследствие добавления изменения ΔA к каждому из n потенциалов. Результат, получающийся после суммирования по n , равен [при учете соотношений (13), (14) и уравнения (16)]

$$\Delta L = -i \int \text{tr} [(K_+^{(A)}(1, 1) - K_+(1, 1)) \Delta A(1)] d\tau_1. \quad (29)$$

Член с $K_+(1, 1)$ дает после интегрирования нуль. — *Прим. авт.*

одиночных петель, деленному на два (последнее необходимо, так как иначе каждая пара петель учитывалась бы дважды; при этом попрежнему справедливо пренебрежение в промежуточных состояниях принципом Паули). Полная вакуум-вакуумная амплитуда будет равна

$$C_v = 1 - L + \frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{6} + \dots = \exp(-L), \quad (30)$$

причем отдельные слагаемые соответствуют последовательно отсутствию петель, наличию одной петли, двух петель и т. д. То обстоятельство, что одиночные петли дают слагаемое $-L$, является следствием принципа Паули. Рассмотрим, например, такой случай, когда порождаются две пары частиц. Обе эти пары впоследствии уничтожаются, так что мы получаем две петли. В некоторый заданный момент может произойти обмен электронами, причем получится имеющая форму восьмерки фигура, относящаяся уже к одиночным петлям. Поскольку составляющие амплитуды, отличающиеся перестановкой электронов, входят с различными знаками, то ряд (30) должен быть знакопеременным. (Аналогичным образом, благодаря принципу Паули, амплитудой для порожденных пар является не величина $-K_+$, а величина $+K_+$.) Симметрическая статистика привела бы к выражению

$$C_v = 1 + L + \frac{L^2}{2} + \dots = \exp(+L).$$

Величина L содержит бесконечную мнимую часть (вследствие $L^{(1)}$; члены высших порядков конечны). Мы обсудим это обстоятельство в связи с поляризацией вакуума в следующей статье. Оно не влияет на постоянную нормировки, так как вероятность того, что вакуум остается вакуумом, дается, согласно (30), выражением

$$P_v = |C_v|^2 = \exp(-2\text{Re } L),$$

где $\text{Re } L$ — вещественная часть L . Данное значение P_v совпадает с значением, получающимся при нормировке относительных вероятностей. Вследствие уравнения Дирака и свойств K_+ действительная часть L оказывается положительной, так что величина P_v меньше единицы. Статистика Бозе приводит к значению $C_v = \exp(+L)$ и, следовательно, к значению P_v , большему чем единица, что, очевидно, бессмысленно, если сохранить за этой величиной придаваемое ей здесь значение. Несомненно, что при нашем выборе вида ядра K_+ требуется выполнение принципа Паули.

Заряды, подчиняющиеся уравнению Клейна — Гордона, также могут рассматриваться с помощью метода, использованного здесь для электронов Дирака. Вопрос о том, как это сделать, будет более детально рассмотрен в последующей статье. Для уравнения Клейна — Гордона вещественная часть L оказывается отрицательной, так что в этом случае становится, очевидно, необходимым использование статистики Бозе [3].

6. Импульсное представление

В ряде задач практическое определение матричных элементов часто упрощается, если использовать в качестве переменных не пространственные и временную координаты, а энергию и импульс. Дело в том, что хотя сама функция $K_+(2, I)$ имеет довольно сложный вид, ее представление Фурье, как мы покажем, является очень простым; последняя величина равняется $(i/4\pi^2) (\mathbf{p} - m)^{-1}$, так что

$$K_+(2, I) = \frac{i}{4\pi^2} \int (\mathbf{p} - m)^{-1} \exp(-ipx_{21}) d^4p, \quad (31)$$

где $px_{21} = px_2 - px_1 = p_\mu x_{2\mu} - p_\mu x_{1\mu}$, $\mathbf{p} = p_\mu \gamma_\mu$ и d^4p означает элемент интегрирования $(2\pi)^{-2} dp_1 dp_2 dp_3 dp_4$, а интеграл взят по всем значениям p . Правиль-

ность выражения (31) непосредственно следует из уравнения (12), так как представлением оператора $i\nabla - m$ в пространстве энергетических (p_4) и импульсных переменных (p_1, p_2, p_3) является величина $\mathbf{p} - m$, а представлением Фурье для функции $\delta(2, I)$ является постоянная. Матрицу $(\mathbf{p} - m)^{-1}$ можно приравнять матрице $(\mathbf{p} + m) \times (\mathbf{p}^2 - m^2)^{-1}$, так как $\mathbf{p}^2 - m^2 = (\mathbf{p} - m)(\mathbf{p} + m)$ является обычным числом и не содержит матриц γ . Таким образом, можно при желании написать

$$K_+(2, I) = i(i\nabla_2 + m)I_+(2, I),$$

где

$$I_+(2, I) = (2\pi)^{-2} \int (\mathbf{p}^2 - m^2)^{-1} \exp(-ipx_{21}) d^4p \quad (32)$$

есть уже не матричный оператор, а функция, удовлетворяющая уравнению

$$\square_{\frac{1}{2}}^2 I_+(2, I) - m^2 I_+(2, I) = \delta(2, I); \quad (33)$$

здесь

$$-\square_{\frac{1}{2}}^2 = (\nabla_2)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_{2\mu}}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_{2\mu}}\right).$$

Интегралы (31) и (32) определены еще не полностью, так как подинтегральные выражения имеют полюсы, когда $\mathbf{p}^2 - m^2 = 0$. Мы можем определить следующий способ оценки этих полюсов, состоящий в том, что к массе m добавляется бесконечно малая отрицательная мнимая часть. Именно, величина m *заменивается на $m - i\delta$ и берется предел при δ , стремящемся к нулю*. Правильность указанного положения можно подтвердить, представив себе, что мы вычисляем значение K_+ , интегрируя сначала по p_4 . Если мы положим $E =$

$= +[(m^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{1/2}]$, то интегралы по p_4 примут вид $\int \exp(-ip_4(t_2 - t_1)) \times \times dp_4 (p_4^2 - E^2)^{-1}$ с полюсами у подинтегрального выражения при $p_4 = +E$ и $p_4 = -E$. Замена m на $m - i\delta$ приводит к появлению у величины E малой мнимой отрицательной части; первый полюс оказывается при этом ниже, а второй — выше действительной оси. Если теперь $t_2 > t_1$, то можно взять замкнутый контур, состоящий из действительной оси и лежащего ниже действительной оси полукруга с единственным находящимся внутри контура полюсом $p_4 = +E$, дающим вычет $-(2E)^{-1} \exp(-iE(t_2 - t_1))$. Если $t_2 - t_1 < 0$, то должен использоваться полукруг, лежащий выше действительной оси, и брать вычет в полюсе $p_4 = -E$. Получающаяся при применении подобного метода функция в каждом случае ведет себя так, как это требуется определением (17).

При использовании других подстановок получаются другие решения уравнения (12). В частности, если считать, что величина p_4 в множителе $(\mathbf{p}^2 - m^2)^{-1}$ имеет положительную мнимую слагающую, то K_+ заменяется на K_0 — дираковское одноэлектронное ядро, равное нулю при $t_2 < t_1$. В явном виде ¹⁾ $(\mathbf{x}, t = x_{21\mu})$

$$I_+(\mathbf{x}, t) = -(4\pi)^{-1} \delta(s^2) + \left(\frac{m}{8\pi s}\right) \tilde{H}_1^{(2)}(ms), \quad (34)$$

где $s = (t^2 - \mathbf{x}^2)^{1/2}$ при $t^2 > \mathbf{x}^2$ и $s = -i(x^2 - t^2)^{1/2}$ при $t^2 < \mathbf{x}^2$, $H_1^{(2)}$ — функция Ханкеля и $\delta(s^2)$ — дельта-функция Дирака от переменной s^2 . Функция I_+ асимптотически ведет себя как $\exp(-ims)$, убывая в пространственно-подобных направлениях экспоненциально к нулю ²⁾.

¹⁾ Функция $I_+(\mathbf{x}, t)$ равна $(2i)^{-1} (D_1(\mathbf{x}, t) - iD(\mathbf{x}, t))$, где D_1 и D — функции, определенные Паули [7]. — *Прим. авт.*

²⁾ Если величина $-i\delta$ сохраняется при m в функции I_+ , то последняя становится равной нулю при бесконечно больших положительных и отрицательных t . Это может быть использовано при общих рассуждениях, поскольку становится возможным пренебречь усложняющими особенностями, вызванными учетом бесконечно удаленных поверхностей. — *Прим. авт.*

С помощью указанных преобразований легко вывести матричные элементы, подобные (22) и (23). Волновой функцией свободного электрона с импульсом \mathbf{p}_1 является функция $u_1 \exp(-i\mathbf{p}_1 x)$, где u_1 — постоянный спинор, удовлетворяющий уравнению Дирака $\mathbf{p}_1 u_1 = m u_1$, так что $\mathbf{p}_1^2 = m^2$. Матричным элементом (22) перехода из состояния \mathbf{p}_1 , u_1 в состояние, характеризующееся импульсом \mathbf{p}_2 и спинором u_2 , является величина $-4\pi^2 i (\bar{u}_2 \mathbf{a}(q) u_1)$, причем мы считаем потенциал A разложенным в интеграл Фурье

$$A(I) = \int \mathbf{a}(q) \exp(-iq \cdot x_1) d^4q$$

и выбираем компоненту импульса, равную $q = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

Члену второго порядка (23) соответствует матричный элемент перехода из u_1 в u_2

$$-4\pi^2 i \int (\mathbf{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - q)) (\mathbf{p}_1 + q - m)^{-1} \mathbf{a}(q) d^4q, \quad (35)$$

так как в этом случае электрон с импульсом \mathbf{p}_1 может изменить импульс на величину q под действием потенциала $\mathbf{a}(q)$ и двигаться далее с импульсом $\mathbf{p}_1 + q$ [множитель $(\mathbf{p}_1 + q - m)^{-1}$] до нового рассеяния потенциалом $\mathbf{a}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - q)$ с изменением импульса на величину $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - q$, причем в конце концов остается импульс \mathbf{p}_2 . Поскольку все значения q допустимы, по q производится интегрирование.

Те же самые матрицы непосредственно применимы в случае задач с позитроном, так как если временная компонента, например, у \mathbf{p}_1 отрицательна, то данное состояние представляет позитрон с четырехмерным импульсом $-\mathbf{p}_1$; если при этом \mathbf{p}_2 соответствует электрону, т. е. имеет положительную временную компоненту, то мы имеем дело с порождением пары и т. д.

Вероятность некоторого события, матричный элемент которого равен $(\bar{u}_2 M u_1)$, пропорциональна квадрату модуля этого элемента. Квадрат модуля матричного элемента можно записать в виде $(\bar{u}_1 \bar{M} u_2)(\bar{u}_2 M u_1)$, где \bar{M} получается из M заменой порядка операторов на обратный и заменой входящих явно множителей i на $-i$ (\bar{M} , умноженное на β , является комплексно-сопряженной транспонированной относительно βM матрицей). Во многих задачах нас не интересует спин в конечном состоянии. В подобных случаях можно суммировать вероятности по двум функциям, соответствующим двум спиновым направлениям. Это еще не полный набор спиновых функций, поскольку оператор \mathbf{p}_2 имеет еще одно собственное значение $-m$. Чтобы иметь возможность суммировать по всем состояниям, мы можем вставить оператор проектирования $(2m)^{-1}(\mathbf{p}_2 + m)$, получая тем самым значение $(2m^{-1})(\bar{u}_1 \bar{M} (\mathbf{p}_2 + m) M u_1)$ для вероятности перехода из состояния \mathbf{p}_1 , u_1 в состояние \mathbf{p}_2 с произвольным спином. Если начальное состояние неполяризовано, мы можем просуммировать также и по его спинам, при этом получится выражение

$$(2m)^{-2} \text{tr}[(\mathbf{p}_1 + m) \bar{M} (\mathbf{p}_2 + m) M], \quad (36)$$

дающее удвоенную вероятность того, что электрон с произвольным спином и с импульсом \mathbf{p}_1 перейдет в состояние с импульсом \mathbf{p}_2 . Те же выражения пригодны и для позитронов, если только ввести значение \mathbf{p}' с отрицательными энергиями и использовать приведенную выше интерпретацию временных соотношений. [Мы используем нормировку $(\bar{u}u) = 1$ вместо обычной нормировки $(\bar{u}\beta u) = (u^*u) = 1$. В нашем масштабе $(\bar{u}\beta u) =$ энергия/ m , так что вероятности должны быть изменены на соответствующие множители.]

Автор должен поблагодарить большое число лиц, и в особенности Бете и Дайсона, за плодотворное обсуждение содержания статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а) Связь с теорией вторичного квантования. Здесь мы покажем эквивалентность приведенной теории и дырочной теории позитронов [2]. Согласно теории вторичного квантования электронного поля в заданном внешнем поле¹⁾, состояние электронного поля в некоторое время представляется волновой функцией χ , удовлетворяющей уравнению

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi,$$

где

$$H = \int \Psi^*(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\nabla - \mathbf{A}) + A_4 + m\beta) \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x},$$

а $\Psi(\mathbf{x})$ — оператор аннигиляции электрона в точке \mathbf{x} , в то время как $\Psi^*(\mathbf{x})$ — соответствующий оператор порождения. Мы рассмотрим тот случай, когда при $t = 0$ имеется ряд электронов в состояниях, представляемых обычными спинорными функциями $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots$, которые считаются ортогональными, а также ряд позитронов. Последние описываются как дырки в фоне отрицательных уровней, причем электроны, которые должны были бы заполнять эти дырки, имели бы волновые функции $p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots$. Возникает вопрос: какова амплитуда того, что в момент времени T электроны будут находиться в состояниях $g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots$, а дырки — в состояниях $q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots$? Если векторами, представляющими начальное и конечное состояния, являются в данном случае векторы χ_i и соответственно χ_f , то нам нужно подсчитать матричный элемент

$$R = \left(\chi_f^* \exp \left(-i \int_0^T H dt \right) \chi_i \right) = (\chi_f^* S \chi_i). \quad (37)$$

Мы предположим, что внешнее поле действует только на временном интервале между 0 и T , так что в эти моменты можно определить вакуум. Пусть вектор χ_0 соответствует вакууму (все состояния с отрицательной энергией заняты, а все состояния с положительной энергией свободны). Тогда амплитуда того, что при $t = T$ будет сохраняться вакуум, если вакуум имелся при $t = 0$, равна

$$C_v = (\chi_0^* S \chi_0), \quad (38)$$

при этом S означает $\exp \left(-i \int_0^T H dt \right)$. Нам нужно найти значение R и показать, что оно пропорционально C_v , причем множитель пропорциональности содержит функции $K_+^{(A)}$ таким же образом, как и соответствующие величины, рассмотренные в предыдущих разделах.

Выразим для этого сначала χ_i через χ_0 . Оператор

$$\Phi^* = \int \Psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (39)$$

является оператором порождения электрона с волновой функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Аналогично оператор $\Phi = \int \varphi^*(\mathbf{x}) \cdot \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$ соответствует уничтожению электрона с волновой функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Следовательно, в начальном состоянии волновая функция χ_i равна $\chi_i = F_1^* F_2^* \dots P_1 P_2 \dots \chi_0$, а в конечном состоянии волновая функция равна $G_1 G_2^* \dots Q_1 Q_2 \dots \chi_0$, где F_i, G_i, P_i, Q_i — операторы, определенные подобно Φ в формуле (39) с заменой φ соответственно на f_i, g_i, p_i, q_i , так как начальное состояние получается из вакуума порождением электронов

¹⁾ См., например, [8], гл. V. — Прим. авт.

в состояниях f_1, f_2, \dots и уничтожением электронов в состояниях P_1, P_2, \dots . Таким образом, нам нужно найти выражение

$$R = (\chi_0^* \dots Q_2^* Q_1^* \dots G_2 G_1 S F_1^* F_2^* \dots P_1 P_2 \dots \chi_0). \quad (40)$$

Для упрощения этого выражения нам нужно найти перестановочные соотношения между операторами Φ^* и S . С этой целью возьмем величину $\exp\left(-i \int_0^t H dt'\right) \Phi^* \exp\left(+i \int_0^t H dt'\right)$ и, выразив ее через $\Psi^*(\mathbf{x})$, положим, что она равняется $\int \Psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}$ [определение $\varphi(\mathbf{x}, t)$]. Из предыдущего, если положить, что

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \exp\left(+i \int_0^t H dt'\right) \Psi(\mathbf{x}) \exp\left(-i \int_0^t H dt'\right),$$

следует

$$\int \Psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int \Psi^*(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}. \quad (41)$$

Как известно, оператор $\Psi(\mathbf{x}, t)$ подчиняется уравнению Дирака [для доказательства достаточно продифференцировать $\Psi(\mathbf{x}, t)$ по t и применить перестановочные соотношения между H и Ψ]

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = (\alpha(-i\nabla - \mathbf{A}) + A_4 + m\beta) \Psi(\mathbf{x}, t). \quad (42)$$

Отсюда получается, что $\varphi(\mathbf{x}, t)$ также должно удовлетворять уравнению Дирака [для доказательства дифференцируем (41) по t , используем уравнение (42) и интегрируем по частям].

Таким образом, если $\varphi(\mathbf{x}, T)$ есть решение уравнения Дирака в момент T , совпадающее с функцией $\varphi(\mathbf{x})$ при $t=0$, и если положить $\Phi^* = \int \Psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$ и $\Phi'^* = \int \Psi^*(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}, T) d^3\mathbf{x}$, то $\Phi'^* = S\Phi^*S^{-1}$ или

$$S\Phi^* = \Phi'^*S. \quad (43)$$

Теперь можно на простом примере проиллюстрировать доказательства. Пусть и в начале и в конце имеется только один электрон. Ищем значение

$$r = (\chi_0^* G S F^* \chi_0). \quad (44)$$

Мы можем попытаться переставить операторы F^* и S , используя соотношение (43); именно $SF^* = F'^*S$, где функция f' , входящая в оператор $F'^* = \int \Psi^*(\mathbf{x}) f'(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$, является волновой функцией в момент T , переходящей в функцию $f(\mathbf{x})$ при $t=0$. Итак,

$$r = (\chi_0^* G F'^* S \chi_0) = \int g^*(\mathbf{x}) f'(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} C_v - (\chi_0^* F'^* G S \chi_0); \quad (45)$$

второе равенство следует из определения C_v (38) и общего перестановочного соотношения

$$G F^* + F^* G = \int g^*(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x},$$

получающегося при учете свойств оператора $\Psi(\mathbf{x})$. Далее, величина $\chi_0^* F'^*$ во втором слагаемом в (45) является комплексно-сопряженной к величине $F' \chi_0$. Следовательно, если функция f' содержала только компоненты с положительной энергией, величина $F' \chi_0$ обратилась бы в нуль, и мы свели бы r к величине, пропорциональной C_v . Однако величина F' содержит компоненты с отрицательной энергией, порожденные потенциалом \mathbf{A} , и данный метод должен быть несколько изменен.

Перед тем как переставлять F^* с оператором S , прибавим к F^* другой оператор F''^* , соответствующий функции $f''(x)$, содержащей только компоненты с отрицательной энергией и выбранной так, чтобы получающаяся после перестановки функция $f'(x)$ содержала только компоненты с положительной энергией. Иными словами, мы полагаем

$$S(F_+^* + F_-''^*) = F_+''^*; \quad (46)$$

при этом индексы „+“ и „-“ служат для указания знака энергии у компонент оператора. Соотношение (46) можно использовать в виде

$$SF_+^* = F_+''^*S - SF_-''^*. \quad (47)$$

В разбираемой задаче с одним электроном величина r после подстановки (47) распадается на два слагаемых

$$r = (\chi_0^*GF_+''^*S\chi_0) - (\chi_0^*GSF_-''^*\chi_0).$$

Первое из них сводится, согласно предыдущему, к величине

$$r = \int g^*(x)f'_+(x)d^3x \cdot C_v,$$

так как значение $F_+\chi_0$ теперь равно нулю; в то же время второе слагаемое равно нулю вследствие того, что оператор порождения $F_-''^*$ при действии на вакуум, где все состояния с отрицательной энергией заняты, дает нуль. Именно в этом и заключается основная идея доказательства.

Поставленная в соотношении (46) проблема состоит в следующем: задана функция $f_+(x)$ при $t=0$, требуется найти величину $f_-''(x)$, соответствующую отрицательным энергиям, которую нужно добавить к функции $f(x)$ для того, чтобы получающееся в результате решение уравнения Дирака $f'_+(x)$ при $t=T$ имело только компоненты с положительной энергией. Эта проблема является краевой задачей, при которой используется ядро $K_+^{(A)}$. Нам известны компоненты с положительной энергией в начальный момент (f_+) и компоненты с отрицательной энергией в конечный момент (равные нулю). Используя формулу (19), получаем, что в данном случае для компонент с положительной энергией в конечный момент имеет место соотношение

$$f'_+(x_2) = \int K_+^{(A)}(2, 1) \beta f_+(x_1) d^3x_1, \quad (48)$$

где $t_2 = T$, $t_1 = 0$. Аналогично для компонент с отрицательной энергией в начальный момент выполняется соотношение

$$f_-''(x_2) = \int K_+^{(A)}(2, 1) \beta f_+(x_1) d^3x_1 - f_+(x_2), \quad (49)$$

где значение t_2 стремится сверху к нулю и $t_1 = 0$. Величина $f_+(x_2)$ вычитается здесь для того, чтобы в $f_-''(x_2)$ оставались только те волны, которые возвращаются после рассеяния внешним полем, и не входили приходящие без рассеяния волны, соответствующие слагающей $K_+(2, 1)$ ядра $K_+^{(A)}(2, 1)$, при $t_2 \rightarrow 0$. Мы можем, следовательно, написать

$$f_-''(x_2) = \int [K_+^{(A)}(2, 1) - K_+(2, 1)] \beta f_+(x_1) d^3x_1. \quad (50)$$

Отсюда для задачи с одним электроном получается из (48), что

$$r = \int g^*(x)f'_+(x)d^3xC_v = C_v \int g^*(x_2)K_+^{(A)}(2, 1) \beta f_+(x_1) d^3x_1 d^3x_2,$$

как этого и следовало ожидать, если исходить из результатов предыдущих разделов [т. е. из формулы (20) при замене там K_+ на $K_+^{(A)}$].

Данное доказательство легко распространить на общий случай величины R (40), который можно анализировать по индукции. Сначала с помощью соотношения, подобного (47), F_1^* заменяется на $F_1'^*$ и $F_1''^*$, причем получаются два члена

$$R = (\chi_0^* \dots Q_2^* Q_1^* \dots G_2 G_1 F_{1+}'^* S F_2^* \dots P_1 P_2 \dots \chi_0) - \\ - (\chi_0^* \dots Q_2^* Q_1^* \dots G_2 G_1 S F_{1-}''^* F_2^* \dots P_1 P_2 \dots \chi_0).$$

В первом члене после этого переставляются операторы $F_{1+}'^*$ и G_1 , при этом образуется дополнительный член, состоящий из величины $\int g_1^*(x) f_{1+}'(x) d^3x$, умноженной на выражение, которое имеет вид R , но содержит на один электрон меньше в начальном и конечном состояниях. Затем оператор $F_{1+}'^*$ переставляется с G_2 , причем опять получается дополнительный член, состоящий из величины $\int g_2^*(x) f_{1+}'(x) d^3x$, умноженной на выражение вида R , и т. д. до тех пор, пока оператор $F_{1+}'^*$ не окажется рядом с Q_1^* . Затем $F_{1+}'^*$ сдвигается до положения соседнего с χ_0 ($F_{1+}'^*$ антикоммутирует с F_2^*); последнее выражение равно нулю. Во втором члене аналогичным образом сдвигается оператор $F_{1-}''^*$, который антикоммутирует с F_2^* , и т. д. При перестановке оператора $F_{1-}''^*$ с P_1 получается дополнительный член вида R (с меньшим количеством частиц), умноженный на $\int p_1^*(x) f_{1-}''(x) d^3x$, или, что, согласно (49), то же самое, на

$$\int p_1^*(x_2) K_+^{(A)}(2,1) \beta f_1(x_1) d^3x_1 d^3x_2$$

при $t_2 = t_1 = 0$ [дополнительный член с $f_1(x_2)$ в (49) дает здесь нуль, так как функция $f_1(x_2)$ ортогональна к $p_1(x_2)$]. Получающееся выражение описывает аннигиляцию пары, электрона f_1 и позитрона p_1 , как и следовало ожидать, если исходить из результатов предыдущих разделов. Подобным образом $F_-''^*$ последовательно сдвигается до положения, соседнего с функцией χ_0 , при действии на которую оператор $F_-''^*$ дает нуль. После выполнения этих операций величина R сводится к более простым величинам, содержащим на два оператора меньше чем R , умноженным на множители, которые имеют согласующийся с предыдущим изложением вид и входят с правильными чередующимися знаками, требующимися принципом Паули. Получившиеся величины опять могут быть сведены к более простым и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны все операторы F^* , после чего аналогичные операции производятся с операторами Q^* . Последние сдвигаются относительно S в противоположном направлении так, что получается оператор, относящийся в момент $t=0$ только к отрицательным энергиям; при этом используются соотношения, подобные (46)—(49). В итоге получается ожидавшаяся величина, умноженная на C_v (при предположении, что полный заряд один и тот же в начальном и в конечном состояниях).

Указанным образом записывается решение общей задачи движения электронов в заданном внешнем поле. Множитель C_v получается в результате нормировки. Однако в случае фотонных полей желательно иметь явное выражение для C_v через потенциалы внешнего поля. Это выражение дается формулами (30) и (29) и можно без труда показать, что оно также согласуется с теорией вторичного квантования.

б) Анализ проблемы вакуума. Вычислим C_v из теории вторичного квантования методом индукции, т. е. рассматривая последовательно задачи, значение потенциала в которых от задачи к задаче все более и более приближается к нужному нам значению. Предположим, что известно C_v для задачи, подобной той, которую нам желательно рассмотреть, причем в этих обеих задачах значения потенциала на временном интервале между некоторым t_0 и T совпадают, а на интер-

вале между $t=0$ и $t=T$ в задаче с известным значением C_v потенциал равен нулю. Обозначим указанное значение C_v через $C_v(t_0)$, соответствующий гамильтониан через H_{t_0} и сумму составляющих $C_v(t_0)$ от всех одиночных петель через $L(t_0)$. Тогда при $t_0=T$ потенциал для всех моментов времени будет равен нулю, пары не могут образовываться, $L(T)=0$ и $C_v(T)=1$. При $t_0=0$ у нас будет тогда уже полная задача, так что $C_v(0)$ есть то же самое, что и C_v , определяемое по (38).

В общем случае имеем

$$C_v(t_0) = \left(\chi_0^* \exp \left(-i \int_0^T H_{t_0} dt \right) \chi_0 \right) = \left(\chi_0^* \exp \left(-i \int_{t_0}^T H_{t_0} dt \right) \chi_0 \right),$$

так как H_{t_0} совпадает с постоянным вакуумным гамильтонианом H_T при $t < t_0$, а χ_0 является собственной функцией этого вакуумного гамильтониана с собственным значением (энергией вакуума), которое можно положить равным нулю.

Значение $C_v(t_0 - \Delta t_0)$ относится к гамильтониану $H_{t_0 - \Delta t_0}$, который отличается от H_{t_0} на малом интервале Δt_0 . С точностью до первого порядка по Δt_0 имеем

$$C_v(t_0 - \Delta t_0) = \left(\chi_0^* \exp \left(-i \int_{t_0 - \Delta t_0}^T H_{t_0 - \Delta t_0} dt \right) \chi_0 \right) = \\ = \left(\chi_0^* \exp \left(-i \int_{t_0}^T H_{t_0} dt \right) \left[1 - i \Delta t_0 \int \Psi^*(\mathbf{x}) (-\alpha \mathbf{A}(\mathbf{x}, t_0) + A_4(\mathbf{x}, t_0)) \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \right] \chi_0 \right);$$

отсюда для производной от C_v получаем выражение

$$-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = -i \left(\chi_0^* \exp \left(-i \int_{t_0}^T H_{t_0} dt \right) \int \Psi^*(\mathbf{x}) \beta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t_0) \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \chi_0 \right), \quad (51)$$

которое сводится к величине, пропорциональной $C_v(t_0)$, при помощи метода, аналогичного методу, использованному при преобразовании R . Представим оператор Ψ в виде суммы двух операторов Ψ_+ и Ψ_- , первый из которых действует на состояния с положительной энергией, а второй — на состояния с отрицательной энергией. Оператор Ψ при действии на χ_0 дает нуль, так что в плотности тока остается в этом случае только два слагаемых: $\Psi_+^* \beta \mathbf{A} \Psi_-$ и $\Psi_-^* \beta \mathbf{A} \Psi_-$. Последний член, т. е. $\Psi_-^* \beta \mathbf{A} \Psi_-$, равняется значению $\beta \mathbf{A}$, усредненному по всем состояниям с отрицательной энергией (оператор $\Psi_- \beta \mathbf{A} \Psi_-^*$ при действии на χ_0 дает нуль), и соответствует усредненному по вакууму току электронов фона. Член, соответствующий этому току, должен быть, как обычно, вычтен из исходного гамильтониана.

Оставшееся слагаемое $\Psi_+^* \beta \mathbf{A} \Psi_-$, или, что эквивалентно, $\Psi_+^* \beta \mathbf{A} \Psi$, можно представить в виде $\Psi^*(\mathbf{x}) \mathbf{f}_+(\mathbf{x})$, где $\mathbf{f}_+(\mathbf{x})$ обозначает обладающую положительной энергией компоненту величины $\beta \mathbf{A} \Psi(\mathbf{x})$. Далее, получившийся оператор $\Psi^*(\mathbf{x}) \mathbf{f}_+(\mathbf{x})$, или, более точно, его составляющая $\Psi^*(\mathbf{x})$, может быть переставлен

с оператором $\exp \left(-i \int_{t_0}^T H dt \right)$, полностью аналогичным соотношению (47) образом.

(Другой вывод этого результата получается при учете того, что оператор $\Psi(\mathbf{x}, t)$, подчиняющийся уравнению Дирака, удовлетворяет также соответствующему линейному интегральному уравнению.) Таким образом, соотношению (51), согласно

(48), (50), можно придать вид

$$\begin{aligned}
 -\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = & -i\left(\chi_0^* \int \int \Psi^*(\mathbf{x}_2) K_+^{(A)}(2,1) \exp\left(-i \int_{t_0}^T H dt\right) \times \right. \\
 & \times A(1) \Psi(\mathbf{x}_1) d^3x_1 d^3x_2 \chi_0) + i\left(\chi_0^* \exp\left(-i \int_{t_0}^T H dt\right) \times \right. \\
 & \left. \times \int \int \Psi^*(\mathbf{x}_2) [K_+^{(A)}(2,1) - K_+(2,1)] A(1) \Psi(\mathbf{x}_1) d^3x_1 d^3x_2 \chi_0\right),
 \end{aligned}$$

где в первом слагаемом $t_2 = T$, а во втором $t_2 \rightarrow t_0 = t_1$. В ядре $K_+^{(A)}$ значок сверху соответствует той части потенциала A , которая относится к временам, большим t_0 . Первое слагаемое обращается в нуль, так как оно включает [вследствие наличия $K_+^{(A)}(2,1)$] только обладающие положительной энергией компоненты оператора Ψ^* , которые при действии на χ_0^* дают нуль. Во втором слагаемом остаются только компоненты оператора $\Psi^*(\mathbf{x}_2)$, соответствующие отрицательной энергии. Так как оператор $\Psi^*(\mathbf{x}_2)$ при действии на χ_0 дает нуль, то после перестановки $\Psi^*(\mathbf{x}_2)$ и $\Psi(\mathbf{x}_2)$ из обычных коммутационных соотношений для Ψ^* и Ψ следует

$$-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = +i \int \text{tr} [(K_+^{(A)}(1,1) - K_+(1,1)) A(1)] d^3x_1 C_v(t_0). \quad (52)$$

Множитель перед $C_v(t_0)$ в формуле (52), умноженный на $-\Delta t_0$, равен, согласно (29), разности $L(t_0 - \Delta t_0) - L(t_0)$, поскольку эта разность связана с изменением потенциала $\Delta A = A$, имеющим место в течение короткого интервала времени Δt_0 . Отсюда следует

$$-\frac{dC_v(t_0)}{dt_0} = + \left(\frac{dL(t_0)}{dt_0} \right) C_v(t_0).$$

Интегрирование этого уравнения от $t_0 = T$ до $t_0 = 0$ подтверждает правильность формулы (30).

Исходя из теории вторичного квантования электромагнитного поля и используя совершенно аналогичный способ доказательства, можно получить также вывод уравнений квантовой электродинамики, применяемых в следующей статье. Как очевидно, теория Паули — Вайскопфа уравнения Клейна — Гордона тоже может анализироваться по существу таким же методом, как и метод, использованный здесь для электронов Дирака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
2. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486 (1949). [См. перевод в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950.]
3. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940). [См. перевод: Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.]
4. Stückelberg E. C. C., Helv. Phys. Acta, **15**, 23 (1942).
5. Feynman R. P., Phys. Rev., **74**, 939 (1948).
6. Furry W. H., Phys. Rev., **51**, 125 (1937).
7. Pauli W., Rev. Mod. Phys., **13**, 203 (1941). [См. перевод: Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.]
8. Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Leipzig, 1943. [См. перевод: Венцель Г., Введение в квантовую теорию волновых полей, М., 1947.]

IV. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ТРАКТОВКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Р. ФЕЙНМАН

R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, 769 (1949)

Содержание настоящей статьи можно разделить на две части. Во-первых, показывается, что можно значительно упростить способ записи матричных элементов для сложных электродинамических процессов. При этом для матричных элементов устанавливается физическое истолкование, с помощью которого их можно сразу записывать для каждой частной задачи. Однако получающиеся значения матричных элементов, устанавливаемые в рамках новой интерпретации обычной электродинамики, оказываются для сложных процессов расходящимися. Во-вторых, в статье электродинамика модифицируется за счет изменения взаимодействия электронов на близких расстояниях. Все матричные элементы становятся после этого конечными, кроме связанных с поляризацией вакуума. Конечные результаты для последних матричных элементов получаются по способу, предложенному Паули и Бете. Единственными следствиями указанной модификации являются изменения массы и заряда электронов. Подобные изменения не могут быть непосредственно наблюдаемы. Наблюдаемые эффекты не зависят от конкретного характера модификации (кроме крайне высоких энергий). В случае таких эффектов можно брать предел при стремлении области изменения взаимодействия к нулю. Полученные выводы согласуются с результатами Швингера. Подобным образом получается полный однозначный и не содержащий, повидимому, внутренних противоречий метод расчета для всех процессов с участием электронов и фотонов.

Упрощения в записи различных выражений достигаются в результате использования общей пространственно-временной точки зрения при изучении решений уравнений электродинамики. Рассматривается связь подобного подхода с более привычной гамильтоновской точкой зрения. Предлагаемые в статье видоизменения взаимодействия было бы очень трудно выполнить, если остаться на гамильтоновской точке зрения.

Указанные методы пригодны также для зарядов, подчиняющихся уравнению Клейна — Гордона, и могут быть использованы в случае различных мезонных теорий ядерных сил. В работе приводятся соответствующие примеры. Хотя для всех мезонных теорий модификация, подобная производимой в электродинамике, и приводит к исключению бесконечностей из матричных элементов, однако положение о том, что непосредственно наблюдаемые эффекты не зависят от детального характера модификации, в ряде случаев теряет силу.

Конкретное вычисление интегралов, входящих в матричные элементы, облегчается в простейших случаях при использовании методов, описанных в приложении.

Настоящую статью следует рассматривать как прямое продолжение предшествующей работы [1], в которой было проведено исследование движения электронов при пренебрежении взаимодействием, причем рассмотрение основывалось на непосредственном использовании не самих дифференциальных уравнений Гамильтона, а их решения. Здесь тот же самый способ применяется при введении взаимодействия; при этом получается простой метод решения задач квантовой электродинамики.

В большинстве конкретных подсчетов квантовой электродинамики решение обычно выражается через матричные элементы. Искомая матрица разлагается в ряд по степеням $e^2/\hbar c$, причем возрастание степени $e^2/\hbar c$ соответствует увеличению числа виртуальных квантов, учитываемых при выводе данного члена ряда. Оказывается, что в случае сложных процессов можно добиться значительного упрощения записи указанных матричных элементов. Кроме того, каждому члену разложения по степеням $e^2/\hbar c$ может быть дано истолкование, аналогичное использованному в статье [1] пространственно-временному истолкованию процессов различных порядков. Задачей последующего изложения является описание намеченного метода. Мы обсудим также способы трактовки тех матричных элементов, в которые входят расходящиеся интегралы.

Получающееся у нас упрощение формул вызвано главным образом тем обстоятельством, что мы отказались от принятого в предыдущих методах излишнего разделения процессов, которые физически тесно связаны. Например, в соответствии с тем, что при обмене квантом между двумя электронами электрон, испускающий квант, и электрон, поглощающий квант, могут поменяться ролями, в выражение, описывающее этот процесс, входит два члена. Однако при рассмотрении виртуальных состояний временные соотношения совершенно несущественны. Требуется сохранять лишь порядок операторов. Кроме того, как было показано в статье [1], процессы, связанные с образованием виртуальных пар, можно объединить с процессами, в которых участвуют только электроны с положительной энергией. Можно также объединить эффекты, вызываемые поперечными и продольными волнами. Проводившееся ранее разделение основывается на соображениях, являющихся нерелятивистскими (это отражалось в том обстоятельстве, что в промежуточных состояниях выполнялся закон сохранения импульса, но не выполнялся закон сохранения энергии). После объединения и упрощения отдельных членов становится очевидной релятивистская инвариантность получающихся результатов.

Сначала мы рассмотрим зависящее от пространственных и временной координат решение уравнения Шредингера для частиц с мгновенным взаимодействием. Получающиеся результаты можно непосредственно обобщить на случай запаздывающего взаимодействия релятивистских электронов; подобным образом выражаются законы квантовой электродинамики. Далее, мы показываем, как можно прямо получать матричные элементы для любого процесса. Будет, в частности, написано выражение для собственной энергии.

До сих пор шла речь только об обычной электродинамике в новой формулировке, так что выражение для собственной энергии оказывается расходящимся. В последующем изложении производится некоторое видоизменение выражения взаимодействия¹⁾ между зарядами и показывается, что в таком случае собственная энергия становится конечной величиной и соответствует добавке к массе электрона. После изменения массы электрона на эту добавку для всех остальных реальных процессов получают конечные выражения, не чувствительные к параметру обрезания взаимодействия²⁾.

Предлагаемое изменение теории, к сожалению, не является полностью удовлетворительным, так как оно приводит к ряду трудностей, связанных с законом сохранения энергии. Все же это изменение является, по видимому, пригодным для определения матричных элементов для всех реальных процессов в рассматриваемом здесь пределе, когда параметр обрезания стремится к нулю. Сходный метод, предложенный Паули и Бете, может быть применен к проблеме поляризации вакуума, причем имеет место перенормировка заряда. Однако и в этом случае применяемые для получения сходимости правила не имеют строгого физического обоснования.

После перенормировки заряда и массы для всех реальных процессов можно устремить параметр обрезания к нулю. Получающиеся при этом результаты эквивалентны результатам Швингера³⁾, который в явном виде не использовал множителей сходимости. Метод Швингера состоит в установлении членов, соответствующих изменениям заряда и массы, и устранении их из выражений для реальных процессов еще до выполнения вычислений. Преимуществом такого подхода является то, что непосредственно видна строгая независимость результатов от частного выбора способа обрезания. С другой стороны, при исследовании ряда свойств, входящих в теорию интегралов, Швингером используются

¹⁾ Обсуждение подобного изменения в классической теории см. в работе Фейнмана [2]. — *Прим. авт.*

²⁾ Краткое описание методов и сводка получающихся результатов даны в статье Фейнмана [3]. — *Прим. авт.*

³⁾ См. статьи Швингера [4]. Доказательство указанной эквивалентности дано Дайсоном [5]. — *Прим. авт.*

формальные свойства инвариантных перестановочных функций. Но одним из свойств этих функций является расходимость рассматриваемых интегралов, и не ясно, насколько доказательства теряют вследствие этого свою силу. Практическое преимущество настоящего метода состоит в более простом разрешении вопроса о неоднозначностях; именно, производится непосредственное вычисление интегралов, имеющих в другом случае расходящееся значение. Однако пока нельзя считать окончательно решенным, что множители сходимости не нарушают физической согласованности теории. Хотя оба метода приводят в пределе к согласующимся результатам, однако ни один из них не является, очевидно, полностью удовлетворительным с теоретической точки зрения. Все же можно, повидимому, считать, что мы теперь имеем в квантовой электродинамике практически пригодный, полный и определенный метод расчета физических процессов с точностью до любого порядка.

Сама по себе предлагаемая теория является полной, поскольку с ее помощью мы можем записать решение любой физической задачи. Однако с более общей точки зрения она несовершенна в двух отношениях. Во-первых, хотя можно написать каждый член разложения по возрастающим степеням $e^2/\hbar c$, все же желательно найти способ получения конечных выражений, включающих сразу все степени $e^2/\hbar c$. Во-вторых, хотя физически очевидно, что получающиеся результаты совпадают с результатами, следующими из обычной электродинамики, необходимо провести также и математическое доказательство данного положения, чего здесь не сделано. Оба эти пробела будут восполнены в следующей статье (см. также работу Дайсона [5]).

Возникновение данной теории можно кратко описать следующим образом. Обычная электродинамика была выражена через посредство лагранжева формализма квантовой механики, описанного в статье [6]¹⁾. Уравнение движения осцилляторов поля удалось проинтегрировать (см. [6], § 13), причем получающийся результат выражал запаздывающее взаимодействие. После этого стало возможным видоизменить взаимодействие, содержащее δ -функцию, совершенно аналогично соответствующему классическому случаю, описанному в статье [2]. Полученную теорию еще нельзя было считать законченной, поскольку лагранжев формализм детально был разработан только для частиц, подчиняющихся нерелятивистскому уравнению Шредингера. Поэтому данный формализм затем был обобщен на случай уравнения Дирака и явления порождения пар. Это было сделано просто посредством введения новой интерпретации теории дырок [1]. Наконец, получающиеся выражения были разложены для конкретных подсчетов в ряды по степеням $e^2/\hbar c$. При этом выяснилось, что каждый член указанных рядов имеет простую физическую интерпретацию. Поскольку оказалось, что полученные результаты легче истолковать, чем ведущие к ним рассуждения, то было решено сначала опубликовать эти результаты сами по себе без вывода. Значительное время пришлось затратить на то, чтобы сделать предыдущую и настоящую статьи настолько законченными и настолько физически правдоподобными, насколько это возможно без ссылок на лагранжев метод, так как он не является достаточно привычным. Такое описание метода без его прямого вывода, очевидно, недостаточно для того, чтобы можно было отбросить все сомнения в его правильности. Тем не менее, чтобы сохранить простоту описания простых соотношений, мы приведем изложение упомянутого прямого вывода в другой статье.

В настоящей статье также кратко рассматривается применение предлагаемых методов к различным мезонным теориям. Приводятся формулы, относящиеся к заряженным частицам нулевого спина, движение которых подчиняется уравнению Клейна — Гордона. В приложении дается способ вычисления интегралов, входящих в матричные элементы для простых процессов.

¹⁾ Применения к электродинамике подробно описаны в работе [7]. — *Прим. авт.*

Используемый здесь способ рассмотрения взаимодействия зарядов отличается от более привычного подхода, принятого в теории поля. Кроме того, обычный гамильтонов формализм квантовой механики отличается от используемой здесь общей пространственно-временной точки зрения. Поэтому раздел 1 посвящен сравнению различных способов рассмотрения.

1. Сравнение с гамильтоновым методом

Электродинамику можно рассматривать двумя эквивалентными способами, которые взаимно дополняют друг друга. Одним из них является описание поведения поля (уравнения Максвелла). Другим способом является описание прямого (но запаздывающего во времени) взаимодействия на расстоянии между зарядами (решения Льенарда и Вихерта). С последней точки зрения свет следует рассматривать как взаимодействие зарядов источника света и зарядов, поглощающих этот свет. Подобный подход неудобен, потому что одни и те же эффекты вызывают совершенно различные источники. При полевой точке зрения общая проблема разделяется на две более простые задачи: порождение света и поглощение света. С другой стороны, эта полевая точка зрения менее удобна при рассмотрении близких столкновений частиц (или их действия друг на друга), так как в этом случае трудно разделить источник и поглотитель света. Здесь происходит взаимный обмен квантами. Поля при этом настолько сильно зависят от движения частиц, что оказывается более выгодным не разделять проблему на две отдельные задачи, а рассматривать сразу весь процесс как непосредственное взаимодействие. Грубо говоря, полевой подход более удобен при рассмотрении задач, в которых участвуют реальные кванты, в то время как при рассмотрении задач, в которых участвуют виртуальные кванты, предпочтительнее использовать представление о взаимодействии. В этой статье мы будем особенно выделять способы решения, основанные на представлении о прямом взаимодействии, так как, во-первых, эти способы являются менее привычными и, во-вторых, важнейшие стороны задач, которые нам предстоит рассматривать, связаны с эффектами, включающими виртуальные кванты.

Гамильтонов метод мало пригоден для описания непосредственного действия зарядов друг на друга на расстоянии, поскольку это действие является запаздывающим. В методе Гамильтона будущее представляет собой развитие настоящего. Иными словами, если в данный момент известен полный набор величин, то значение этих величин в последующие моменты времени может быть вычислено. Однако если между частицами имеет место запаздывающее взаимодействие, знания движения частиц только в настоящий момент недостаточно для предсказания будущего. Следует также знать, каково было движение частиц в прошлом, поскольку это прошлое может оказать влияние на движение частиц в будущем. В гамильтоновской электродинамике этого, очевидно, достигают, потребовав, чтобы для определения будущего поведения частиц, кроме их настоящего движения, была задана также совокупность новых переменных (координат осцилляторов поля), которые „сохраняют память“ о прежнем движении данных частиц. Использование гамильтониана вынуждает, таким образом, заменить представление о непосредственном взаимодействии на полевую точку зрения.

Во многих задачах, в частности при рассмотрении близких столкновений частиц, нам безразлично, какова точная временная последовательность событий. Можно иначе сказать, что нас не интересует, какое положение имеет место в каждый момент времени во время столкновения. Знать последовательность событий нужно только в тех случаях, когда процесс протекает продолжительное время и когда мы можем без труда получить сведения о том, что происходит в этот промежуточный период. В случае столкновений значительно проще трактовать весь процесс как одно целое¹⁾. Формула Меллера для

¹⁾ С точки зрения теории S-матрицы Гейзенберга. — *Прим. авт.*

взаимодействия двух электронов не намного сложнее нерелятивистской формулы Резерфорда; тем не менее математический аппарат, используемый для получения первой формулы из квантовой электродинамики, несравненно более сложен, чем метод получения второй формулы, основывающийся на уравнении Шредингера с членом взаимодействия e^2/r_{12} . Это различие вызвано лишь тем, что в то время как в последнем случае действие передается мгновенно и поэтому гамильтоновский метод не требует введения дополнительных переменных, в релятивистском случае действие является запаздывающим и метод Гамильтона становится очень громоздким.

В последующем мы будем рассматривать не дифференциальные (по времени) уравнения, а лишь их решения. При этом оказывается, что в связи с принятой общей пространственно-временной точкой зрения легче истолковать запаздывающие, чем мгновенные действия.

К тому же надо добавить, что релятивистская инвариантность получаемых выводов будет непосредственно очевидной. Уравнения в гамильтоновой форме определяют будущее по заданному мгновенному настоящему. Однако для наблюдателей, движущихся относительно друг друга, мгновенное настоящее оказывается различным, так как оно в каждом случае соответствует различным трехмерным сечениям пространства — времени. Следовательно, для различных наблюдателей различны временные соотношения между событиями, и поэтому уравнения Гамильтона описывают один и тот же процесс каждому наблюдателю различным образом. Однако подобные различия не переносятся на решения, которые сохраняют свой вид в любой пространственно-временной системе координат. Таким образом, слияние теории относительности и квантовой механики можно произвести наиболее естественно, если отказаться от метода Гамильтона.

Приведенные положения мы поясним в следующем разделе при изучении решений уравнения Шредингера для нерелятивистских частиц, связанных мгновенным кулоновским взаимодействием [формула (2)]. Видоизменив эти решения так, чтобы учитывались эффекты запаздывания и релятивистские свойства электронов, мы получим выражение законов квантовой электродинамики [формула (4)].

2. Взаимодействие между зарядами

Рассмотрим взаимодействие между двумя частицами, используя тот же метод и те же обозначения, что и в статье [1]. Изучим сначала нерелятивистский случай, описываемый уравнением Шредингера (см. [1], уравнение (1)). Волновая функция в заданный момент времени есть функция $\psi(x_a, x_b, t)$ от координат x_a и x_b обеих частиц. Обозначим теперь через $K(x_a, x_b, t; x'_a, x'_b, t')$ амплитуду того, что частица a , находящаяся в точке x'_a в момент t' , перейдет в точку x_a в момент t , в то время как частица b , находящаяся в точке x'_b в момент t' , перейдет в точку x_b в момент t . Если частицы свободны и не взаимодействуют, то

$$K(x_a, x_b, t; x'_a, x'_b, t') = K_{0a}(x_a, t; x'_a, t') K_{0b}(x_b, t; x'_b, t'),$$

где K_{0a} — функция K_0 для свободной частицы. В этом случае мы можем, очевидно, ввести аналогичную величину, в которой, однако, времена t и t' не должны быть обязательно одинаковыми для частиц a и b ; иначе говоря, величину

$$K_0(3, 4; 1, 2) = K_{0a}(3, 1) K_{0b}(4, 2) \quad (1)$$

можно считать амплитудой того, что частица a переходит из точки x_1 при $t = t_1$ в точку x_3 при $t = t_3$ и что частица b переходит из точки x_2 при $t = t_2$ в точку x_4 при $t = t_4$.

В случае взаимодействия между частицами величину $K(3, 4; 1, 2)$ можно строго определить, только если данное взаимодействие исчезает в моменты

времени между t_1 и t_2 и между t_3 и t_4 . В реальных физических системах это не имеет места. Однако введение подобной величины оказывается настолько выгодным, что мы будем попрежнему ее использовать, предполагая, что взаимодействием в моменты времени между t_1 и t_2 и между t_3 и t_4 можно пренебречь. В практических задачах это равносильно выбору настолько длинных временных интервалов $t_3 - t_1$ и $t_4 - t_2$, что эффекты взаимодействия вблизи конечных точек этих интервалов оказывались сравнительно незначительными. В частности, в задачах рассеяния вполне может иметь место такое положение, при котором частицы в начале и в конце разделены настолько, что взаимодействие между ними в эти моменты времени пренебрежимо мало. К тому же, значения энергии можно измерять по средней скорости изменения фазы за столь большие временные интервалы, что погрешностями в начальный и конечный моменты этих интервалов можно вполне пренебречь. Ввиду того, что каждая физическая проблема может рассматриваться как задача рассеяния, введение указанного приближения не приводит к какому-либо значительному сужению области применимости теории. Без данного ограничения релятивистское изучение взаимодействующих частиц оказывается довольно затруднительным, так как необходимое в этом случае условие $t_1 = t_3$ и $x_1 \neq x_3$, соответствующее абсолютной одновременности обитий, происходящих в различных точках пространства, не может быть определено инвариантным образом. Достаточно снять введенное ограничение как вновь придется по существу вернуться к сложной структуре старой квантовой электродинамики.

Мы стремимся сделать запаздывающее взаимодействие основой всей электродинамики. Результаты этого запаздывающего взаимодействия выражаются особенно просто, если можно приближенно сохранить смысл величины $K(3, 4; 1, 2)$.

Чтобы понять, как это можно сделать, представим себе сначала, что имеет место только простое взаимодействие, представляемое кулоновским потенциалом e^2/r , где r — расстояние между частицами. Если это взаимодействие осуществляется только короткое время между t_0 и $t_0 + \Delta t_0$, то используя очевидное обобщение на случай двух частиц вывода, приведшего к равенству (9) в статье [1], легко получить поправку первого порядка к $K(3, 4; 1, 2)$:

$$K'(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int \int K_{0a}(3, 5) K_{0b}(4, 6) r_{56}^{-1} K_{0a}(5, 1) K_{0b}(6, 2) d^3x_5 d^3x_6 \Delta t_0,$$

где $t_5 = t_6 = t_0$. Если же рассматриваемое кулоновское взаимодействие осуществляется все время (так что величину K формально можно строго определить только при $t_4 = t_3$ и $t_1 = t_2$), то для получения эффекта первого порядка приведенное выражение нужно проинтегрировать по t_0 . Интегрирование по t_0 можно заменить на два интегрирования по t_5 и t_6 , если ввести в качестве множителя дельта-функцию $\delta(t_5 - t_6)$. Таким образом, вызванный взаимодействием эффект первого порядка дается выражением

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int \int K_{0a}(3, 5) K_{0b}(4, 6) r_{56}^{-1} \times \\ \times \delta(t_{56}) K_{0a}(5, 1) K_{0b}(6, 2) d\tau_5 d\tau_6, \quad (2)$$

где $t_{56} = t_5 - t_6$ и $d\tau = d^3x dt$.

Из классической электродинамики, однако, известно, что кулоновское взаимодействие на самом деле не является мгновенным, а запаздывает на время r_{56} , если принять скорость света равной единице. Это наводит на мысль, что для описания запаздывания при действии частицы a на частицу b достаточно заменить множитель $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ в формуле (2) на выражение вида $r_{56}^{-1} \delta(t_{56} - r_{56})$.

Простой переход от выражения $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ к $r_{56}^{-1} \delta(t_{56} - r_{56})$ будет не совсем правильным¹⁾, так как если считать, что взаимодействие связано с фотонами,

¹⁾ Подобная замена приводит к теории, которая в классическом пределе описывает взаимодействие посредством полусуммы опаздывающих и опережающих потенциалов. Классически это эквивалентно одним эффектам запаздывания в замкнутом сосуде, вопро-

то эти фотоны должны обладать только положительной энергией, в то время как разложение Фурье функции $\delta(t_{56} - r_{56})$ содержит частоты обоих знаков. Вместо этого для описания запаздывающего действия частицы a на частицу b нужно использовать функцию $\delta_+(t_{56} - r_{56})$, где

$$\delta_+(x) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{d\omega}{\pi} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\pi i)^{-1}}{x - i\epsilon} = \delta(x) + (\pi i x)^{-1}. \quad (3)$$

Непосредственно в интеграл следует подставить полусумму величин $r_{56}^{-1} \delta_+(t_{56} - r_{56})$ и $r_{56}^{-1} \delta_+(-t_{56} - r_{56})$. Второе выражение соответствует случаю, когда $t_5 < t_6$ и частица a испускает квант, а частица b данный квант поглощает. Так как

$$(2r)^{-1} (\delta_+(t-r) + \delta_+(-t-r)) = \delta_+(t^2 - r^2),$$

то это означает, что множитель $r_{56}^{-1} \delta(t_{56})$ заменяется при учете запаздывания на $\delta_+(s_{56}^2)$, где $s_{56}^2 = t_{56}^2 - r_{56}^2$ — релятивистски инвариантный квадрат интервала между точками 5 и 6. Поскольку в классической электродинамике, кроме кулоновского взаимодействия, существует еще взаимодействие, зависящее от векторного потенциала, то при полном учете всех членов взаимодействия в интеграл (2) следует подставить выражение $(1 - (\mathbf{v}_5 \mathbf{v}_6)) \delta_+(s_{56}^2)$ или, в релятивистском случае,

$$(1 - \alpha_a \alpha_b) \delta_+(s_{56}^2) - \beta_a \beta_b \gamma_{a\mu} \gamma_{b\mu} \delta_+(s_{56}^2).$$

Таким образом, для электронов, подчиняющихся уравнению Дирака, мы получаем

$$K^{(1)}(3, 4; 1, 2) = -ie^2 \int \int K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) \gamma_{a\mu} \gamma_{b\mu} \times \\ \times \delta_+(s_{56}^2) K_{+a}(5, 1) K_{+b}(6, 2) d\tau_5 d\tau_6, \quad (4)$$

где $\gamma_{a\mu}$ и $\gamma_{b\mu}$ — матрицы Дирака, действующие на спиноры, относящиеся соответственно к частицам a и b (множители β_a и β_b включены, согласно формуле (17) статьи [1], в K_{+a} и K_{+b}).

Соотношение (4) мы положим в основу электродинамики. Оно соответствует обмену одним квантом между двумя электронами и поэтому имеет первый порядок по e^2 . Это соотношение будет для нас служить образцом, исходя из которого мы выпишем члены, описывающие обмен двумя или более квантами между двумя электронами, а также самодействие одного электрона. Релятивистская инвариантность соотношения (4), следующего из обычной электродинамики, непосредственно очевидна. Поскольку в этом соотношении производится суммирование по μ , в него входят релятивистски симметричным образом одно-временно эффекты продольного и поперечного полей.

Дадим теперь соотношению (4) интерпретацию, которая укажет нам способ перехода к членам высшего порядка. Данное выражение можно истолковать (см. фиг. 1) как поправку первого порядка к амплитуде перехода частицы a из точки 1 в точку 3 и частицы b из точки 2 в точку 4, вызванную возможностью обмена квантом между этими частицами. Так, частица a может перейти в точку 5 [амплитуда $K_+(5, 1)$], испустить квант (продольный, поперечный или скалярный, $\gamma_{a\mu}$) и затем перейти в точку 3 ($K_+(3, 5)$). Тем временем частица b переходит в точку 6 ($K_+(6, 2)$), поглощает квант ($\gamma_{b\mu}$) и затем переходит в точку 4 ($K_+(4, 6)$). Квант в это время переходит из точки 5 в точку 6 с амплитудой $\delta_+(s_{56}^2)$. Мы должны суммировать по всем возможным поляризациям

испускающем наружу света (см., например, [2, 8]). В квантовой механике имеются аналогичные теоремы, но мы не будем их здесь обсуждать, так как это увело бы нас далеко в сторону. — *Прим. авт.*

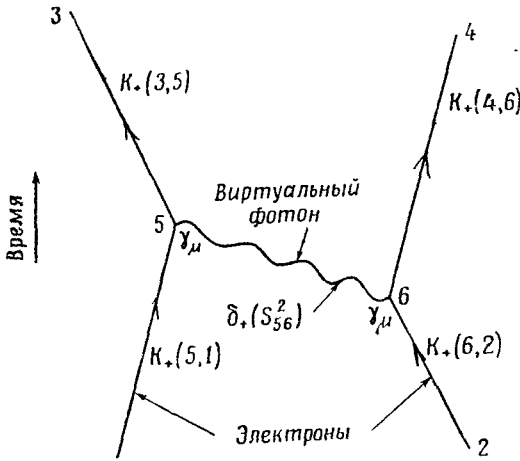
кванта μ , а также по всем возможным координатам и моментам времени точки испускания 5 и точки поглощения 6. В случае, когда $t_5 > t_6$, лучше сказать, что испускание происходит в точке 6, а поглощение — в точке 5; на это, однако, можно не обращать специально внимания, поскольку формула (4) автоматически учитывает все возможности.

Поправочные члены высшего порядка по e^2 , а также члены, относящиеся к большему числу электронов (взаимодействие электронов самих с собой или попарно), можно выписать, основываясь на аналогичных соображениях; это будет проиллюстрировано в дальнейшем. В последующей статье все эти члены будут также выведены из обычной квантовой электродинамики.

Основывающееся на соотношении (4) вычисление матричного элемента перехода между состояниями свободного электрона с положительными энергиями приводит, если принять во внимание принцип Паули, к меллеровскому рассеянию двух электронов.

Учет принципа Паули в случае взаимодействующих частиц производится точно так же, как и в случае невзаимодействующих частиц (см. [1]). Так, например, при наличии двух зарядов для получения полной амплитуды перехода за-

Фиг. 1. Основное взаимодействие, описываемое выражением (4). Обмен одним квантом между двумя электронами.



рядов в точки 3 и 4 достаточно вычислить разность $K(3, 4; 1, 2) - K(4, 3; 1, 2)$. В промежуточных состояниях учитывать принцип Паули не нужно. Как будет видно, из данной формулировки непосредственно следуют рассмотренные Баба интерференционные эффекты при рассеянии электронов на позитронах. При применении формул к позитронам эти формулы следует интерпретировать рассмотренным в статье [1] образом.

Так как нас главным образом интересуют процессы с виртуальными квантами, то мы не будем приводить здесь детального анализа процессов, в которых в начальном или конечном состоянии имеются реальные кванты, и ограничимся только формулировкой используемых в этом случае положений¹⁾. Как и следовало

1) Хотя кванты, входящие в выражения, которые выводятся по аналогии с соотношением (4), и считаются виртуальными, подобное ограничение по существу не обязательно. Один из способов получения из формулы (4) правил, пригодных для реальных квантов, следует из того, что в замкнутой системе все кванты могут рассматриваться как виртуальные (поскольку у этих квантов имеются известные источники и в конце концов они будут поглощены), так что в такой системе приведенный метод эквивалентен обычному и является полным. В частности, могут быть выведены соотношения между коэффициентами Эйнштейна A и B . Более удобный прямой вывод выражений для случая наличия реальных квантов будет дан в последующей статье. Укажем в данной связи лишь то, что формуле (4) может быть придан вид, соответствующий описанию действия на частицу a поля с потенциалом $A_\mu(5) = e^2 \int K_+(4, 6) \delta_+(S_{56}^2) \gamma_\mu K_+(6, 2) d\tau_6$. Это поле соответствует уравнению Максвелла $-\square^2 A_\mu = 4\pi j_\mu$, причем ток $j_\mu(6) = e^2 K_+(4, 6) \times \gamma_\mu K_+(6, 2)$ переносится частицей b при ее переходе из точки 2 в точку 4. Именно, вместо (4) можно написать

$$K^{(1)}(3, 1) = i \int K_+(3, 5) A(5) K_+(5, 1) d\tau_5.$$

Это удастся сделать вследствие того, что функция δ_+ подчиняется уравнению

$$-\square^2 \delta_+(S_{21}^2) = 4\pi \delta(2, 1). \tag{5}$$

ожидать, в результате анализа получается, что в случае реальных квантов можно действовать таким же образом, как и в случае виртуальных процессов при условии такой нормировки всех величин, чтобы они соответствовали одному кванту. Так, например, амплитуда того, что электрон в момент перехода из точки 1 в точку 2 поглощает квант, которому соответствует надлежащим образом нормированный вектор-потенциал $c_\mu \exp(-ikx) = C_\mu(x)$, равна как раз выражению (13) статьи [1] для рассеяния внешним полем, если заменить там $A(3)$ на $C(3)$. Взаимодействие электрона с каждым квантом имеет место только однажды (либо в момент испускания, либо в момент поглощения), и члены, подобные выражению (14) статьи [1], появляются только тогда, когда в процессе участвует более чем один квант. В промежуточных состояниях во всех случаях можно не учитывать, что кванты подчиняются статистике Бозе. Влияние статистики сводится лишь к изменению весов начального и конечного состояний. Пусть, например, среди квантов в начальном состоянии имеется n одинаковых, тогда вес данного состояния будет отличаться на множитель $1/n!$ от веса, получающегося, если считать эти n квантов различными. Для конечного состояния имеет место аналогичное положение.

3. Проблема собственной энергии

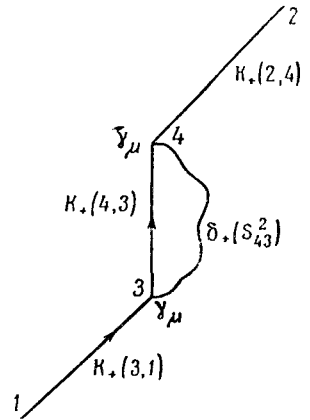
Исходя из члена, который описывает взаимодействие двух зарядов, нам нужно получить аналогичные члены, представляющие взаимодействие заряда с самим собой. При определенных условиях два различных электрона могут, очевидно, рассматриваться, согласно статье [1], как один электрон (а именно, в том случае, когда один из электронов порождается, в паре с позитроном, который в последующем аннигилирует с другим электроном). Следовательно, взаимодействие между такими электронами должно соответствовать возможности действия одного электрона на самого себя¹⁾.

Учет подобного самодействия существенен при рассмотрении проблемы собственной энергии. Рассмотрим самодействие электрона с точностью до первого порядка по e^2 в области, где нет никаких внешних сил. Разность между амплитудой $K(2, 1)$ перехода отдельной частицы из точки 1 в точку 2 и величиной $K_+(2, 1)$ с точностью до первого порядка по e^2 равна

$$K^{(1)}(2, 1) = -ie^2 \int \int K_+(2, 4) \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu \times \\ \times K_+(3, 1) d\tau_3 d\tau_4 \delta_+(s_{43}^2). \quad (6)$$

Появление этой разности (6) связано с тем, что электрон (см. фиг. 2) вместо того, чтобы прямо перейти из точки 1 в точку 2, может перейти сначала в точку 3 ($K_+(3, 1)$), испустить квант (γ_μ), перейти, далее, в точку 4 ($K_+(4, 3)$), поглотить испущенный квант (γ_μ) и лишь затем перейти в точку 2 ($K_+(2, 4)$). Квант при этом переходит из точки 3 в точку 4 ($\delta_+(s_{43}^2)$).

Указанные соображения и определение собственной энергии свободного электрона связаны следующим образом. Предположим, что в начальный момент t_1 имеется один электрон в состоянии $f(I)$, которое, как мы будем считать, соответствует решению уравнения Дирака для свободной частицы с положительной



Фиг. 2. Самодействие электрона [формула (6)].

¹⁾ Из данных рассуждений следует, что предложенная Уиллером и Фейнманом [8] концепция об отсутствии самодействия у электрона вряд ли окажется плодотворной в квантовой электродинамике. — *Прим. авт.*

энергией. Через продолжительный промежуток времени $t_2 - t_1$ возмущение изменят вид волновой функции, которую после этого можно будет рассматривать как суперпозицию решений, соответствующих свободным частицам [в действительности в эту суперпозицию будет входить только $f(I)$]. Амплитуда того, что данная частица перейдет в состояние $g(2)$, была вычислена в статье [1] [см. формулу (21)]. В соответствии с этим вычислением при $g=f$ получаем диагональный матричный элемент

$$\int \int \bar{f}(2) \beta K^{(1)}(2, 1) \beta f(I) d^3x_1 d^3x_2. \quad (7)$$

Временной интервал $T = t_2 - t_1$, а также пространственный объем V , по которому производится интегрирование, должны быть взяты очень большими, поскольку данные выражения являются лишь приближенными (ср. соображения, приведенные ранее в случае двух взаимодействующих зарядов¹⁾). Это обстоятельство связано, в частности, с тем, что здесь неправильно учитываются кванты, которые испускаются непосредственно до момента t_2 , а поглотиться должны были бы после t_2 .

Если подставить явный вид функции $K^{(1)}(2, 1)$ из формулы (6) в (7), то поверхностные интегралы можно преобразовать подобно тому, как это было сделано в статье [1] при выводе формулы (22). При этом получится выражение

$$-ie^2 \int \int \bar{f}(4) \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu f(3) \delta_+(s_{43}^2) d\tau_3 d\tau_4. \quad (8)$$

Приравняв $f(I)$ плоской волне $u \exp(-ipx_1)$, где p_μ — энергия (p_4) и импульс электрона ($p^2 = m^2$), а u — не зависящая от времени величина, состоящая из четырех компонент, вместо (8) получим

$$-ie^2 \int \int (\bar{u} \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu u) \exp(ip(x_4 - x_3)) \delta_+(s_{43}^2) d\tau_3 d\tau_4,$$

причем интегралы распространены по объему V к временному интервалу T . Поскольку функция $K_+(4, 3)$ зависит только от разности $x_{43\mu}$ координат точек 4 и 3, то интегрирование по τ_4 дает результат, который не зависит всюду (за исключением границ области) от координат точки 3. В связи с этим интегрирование по τ_3 приближенно сводится к умножению на VT . Пропорциональность V имеет место потому, что волновые функции были нормированы на единицу объема. При нормировке волновых функций на объем V окончательное выражение будет пропорционально только величине T . Этого и следовало ожидать, так как, если эффект эквивалентен изменению энергии на величину ΔE , то амплитуда перехода в состояние f в момент t_2 изменяется на множитель $\exp(-i\Delta E(t_2 - t_1))$ или, с точностью до первого порядка, на $-i(\Delta E)T$. Таким образом, получаем

$$\Delta E = e^2 \int (\bar{u} \gamma_\mu K_+(4, 3) \gamma_\mu u) \exp(ipx_{43}) \delta_+(s_{43}^2) d\tau_4, \quad (9)$$

где интегрирование распространено по всему пространственно-временному объему $d\tau_4$. Данному выражению можно придать более простой вид. При истолковании выражения (9) мы молчаливо предполагали, что волновые функции нормированы так, что $(u^*u) = (\bar{u}\gamma_4 u) = 1$. Поэтому, чтобы сделать выражение (9) независимым от выбора нормировки, можно заменить в (9) стоящее слева ΔE на величину $(\Delta E)(\bar{u}\gamma_4 u)$ или, так как $(\bar{u}\gamma_4 u) = \frac{E}{m}(\bar{u}u)$ и $m \Delta t = E \Delta E$, на $\Delta t(\bar{u}u)$, где Δt — эквивалентное изменение массы электрона. В таком виде инвариантность выражения (9) является очевидной.

¹⁾ Этот вопрос рассмотрен в [6, 7], где отмечается, что представлению о волновой функции нельзя придать строгого смысла при наличии запаздывающих взаимодействий. — *Прим. авт.*

Аналогичным образом можно получить выражение для сдвига уровня энергии электрона в водородном атоме. Для этого достаточно всего лишь заменить в формуле (8) ядро K_+ на ядро $K_+^{(V)}$ — для электрона в поле ($V = \beta e^2/r$) атома, а вместо f взять волновую функцию (пространственно-временную) в атоме водорода. Получающееся значение ΔE не будет, вообще говоря, вещественным. Мнимая часть ΔE оказывается всегда отрицательной и, следовательно, соответствует экспоненциально убывающему с ростом времени множителю в $\exp(-i\Delta E T)$. Это связано с нашей постановкой задачи; именно, мы считаем, что в начале и в момент T имеется один атом и нет фотонов. Следовательно, если атом может излучать, то амплитуда перехода должна с увеличением времени T убывать. Вычисление мнимой части ΔE действительно приводит к правильному значению для величины излучения в отдельных состояниях атома. Для основного состояния и для свободного электрона излучение равно нулю.

В нерелятивистской области выражение для ΔE может быть выведено подобно тому, как это было сделано Бете [9]. В релятивистской области (интервал между точками 3 и 4 меньше комптоновской длины волны) ядро $K_+^{(V)}$, входящее в (8), может быть заменено с точностью до первого порядка по V на сумму $K_+ + K_+^{(1)}(2, 1)$ (где второе слагаемое определяется выражением (13) статьи [1]). Задача в этом случае становится во многих отношениях аналогичной рассматриваемой ниже задаче рассеяния без излучения.

4. Рассмотрение в импульсном пространстве

Нахождение значения выражения (9), а также оценка других более сложных выражений, появляющихся в рассматриваемых задачах, значительно упрощаются при использовании в качестве независимых переменных не пространственных и временной координат, а энергии и импульса. Для перехода к новым переменным нам потребуется обращение Фурье для функции $\delta_+(s_{21}^2)$, которое имеет вид

$$-\delta_+(s_{21}^2) = \pi^{-1} \int \exp(-ikx_{21}) k^{-2} d^4k. \quad (10)$$

Формула (10) может быть получена из формул (3) и (6) или из соотношения (32) статьи [1], в котором величина $I_+(2, 1)$ при $m^2 = 0$ совпадает с $\delta_+(s_{21}^2)$, как это следует из формулы (34) статьи [1]. При этом k^{-2} означает $(k \cdot k)^{-1}$, или, более точно, предел при $\delta \rightarrow 0$ от выражения $(k \cdot k + i\delta)^{-1}$, а d^4k означает $(2\pi)^{-2} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$. Если считать, что кванты являются частицами с массой, равной нулю, то можно установить общее правило для устранения всех полюсов; именно с этой целью необходимо к массам частиц и квантов добавлять бесконечно малую отрицательную мнимую часть.

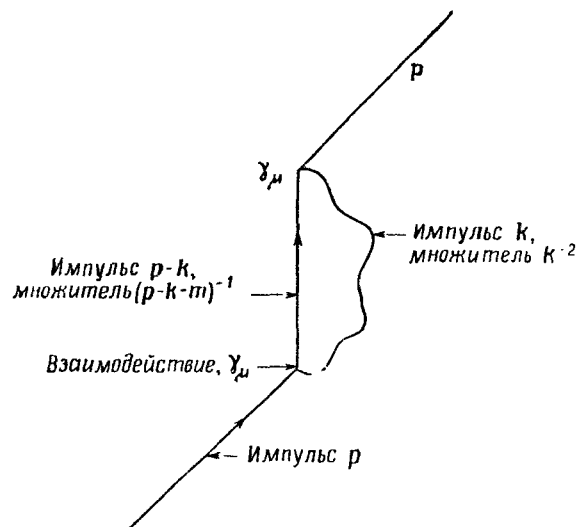
Основываясь на этих результатах, мы получаем, что собственная энергия (9) представляет собой матричный элемент (между \bar{u} и u) матрицы

$$\left(\frac{e^2}{\pi i}\right) \int \gamma_\mu (\not{p} - \not{k} - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4k; \quad (11)$$

при этом использовано преобразование Фурье (формула (31) статьи [1]) для функции K_+ . Подобная формула для собственной энергии удобнее выражения (9).

Выражение (11) можно истолковать (фиг. 3), представив себе, что оно описывает возможность того, что электрон с импульсом p испускает (γ_μ) квант с импульсом k , движется далее с импульсом $p - k$, пока не произойдет следующее событие [множитель $(\not{p} - \not{k} - m)^{-1}$], заключающееся в поглощении кванта (второе γ_μ). Амплитуда распространения квантов равна k^{-2} , причем на каждый виртуальный квант приходится множитель $e^2/\pi i$. Интегрирование (11) соответствует учету всех имеющихся возможностей. Причина, по которой

распространение электрона с импульсом p описывается множителем $1/(p-m)$, связана с тем, что этот оператор является обратным к оператору уравнения Дирака, которое мы, таким образом, просто решаем. Аналогично распространение света определяется величиной $1/k^2$, так как эта величина является оператором, обратным оператору волнового уравнения Даламбера для света. Первая матрица представляет ток, порождающий поле, описываемое векторным потенциалом, вторая матрица γ_μ является оператором скорости, на которую умножается в уравнении Дирака указанный векторный потенциал при действии внешнего поля на электрон.



Фиг. 3. Самодействие электрона [формула (11), импульсное пространство].

С помощью аналогичных соображений в импульсном пространстве можно решать также и другие задачи. Рассмотрим например рассеяние внешним полем с потенциалом $A = A_\mu \gamma_\mu$, зависящим от координат и времени как $a \exp(-iqx)$. Электрон, находившийся сначала в состоянии с импульсом $p_1 = p_{1\mu} \gamma_\mu$, переходит после рассеяния в состояние с импульсом p_2 , где $p_2 = p_1 + q$. Решение с точностью до нулевого порядка будет в этом случае да-

$$\frac{e^2}{\pi i} \int \gamma_\mu (p_2 - k - m)^{-1} a (p_1 - k - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4 k. \quad (12)$$

Поскольку сначала¹⁾ испускается квант γ_μ с импульсом k , причем электрон приобретает импульс $p_1 - k$, то появляется множитель $(p_1 - k - m)^{-1}$; затем электрон рассеивается внешним полем (матрица a) и приобретает при этом дополнительный импульс q , после чего он распространяется [множитель $(p_2 - k - m)^{-1}$] с новым импульсом до момента поглощения испущенного ранее кванта (γ_μ). Квант распространяется от точки испускания до точки поглощения (k^{-2}), при этом мы интегрируем по всем возможным квантам ($d^4 k$) и суммируем по всем поляризациям μ . Выполнив интегрирование по k_4 , можно показать, что получившийся результат полностью совпадает с выражениями (16) и (17) статьи [3] для того же процесса, причем входящие в последние выражения различные члены соответствуют вычетам полюсов подинтегрального выражения (12).

С другой стороны, если квант испускается и вновь поглощается до того, как произойдет рассеяние, то получается (см. фиг. 4, б)

$$\frac{e^2}{\pi i} \int a (p_1 - m)^{-1} \gamma_\mu (p_1 - k - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4 k. \quad (13)$$

¹⁾ Понятия „сначала“, „затем“ и т. п. относятся здесь не к порядку по истинному времени, а к последовательности событий вдоль траектории электрона, т. е., более точно, к порядку расположения матриц в соответствующих выражениях. — *Прим. авт.*

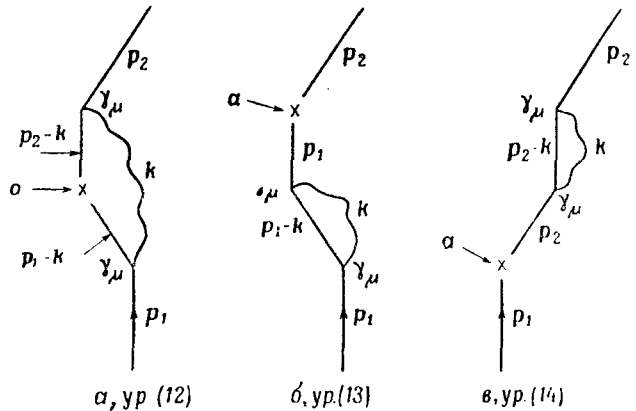
В случае, если и испускание и поглощение имеют место после рассеяния (см. фиг. 4, в), получается

$$\frac{e^2}{\pi i} \int \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 - m)^{-1} \mathbf{a} k^{-2} d^4 k. \quad (14)$$

Подробное рассмотрение этих двух членов будет приведено ниже.

Нам удалось получить простые выражения для матричных элементов, соответствующих виртуальным процессам. Переход к процессам, в которых в началь-

ный и конечный моменты имеется определенное количество реальных квантов, не представляет (при правильной нормировке) никаких затруднений. Рассмотрим, например, эффект Комптона (фиг. 5, а). В этом случае электрон, находившийся в состоянии с импульсом \mathbf{p}_1 , поглощает квант с импульсом \mathbf{q}_1 и вектором поляризации $\mathbf{e}_{1\mu}$ (так что взаимодействие определяется выражением $\mathbf{e}_{1\mu} \gamma_\mu = \mathbf{e}_1$) и затем переходит в конечное состояние с импульсом \mathbf{p}_2 , испуская другой квант с импульсом $-\mathbf{q}_2$ и поляризацией \mathbf{e}_2 . Матрицей для такого процесса будет матрица



Ф и г. 4. Радиационные поправки к рассеянию (импульсное пространство).

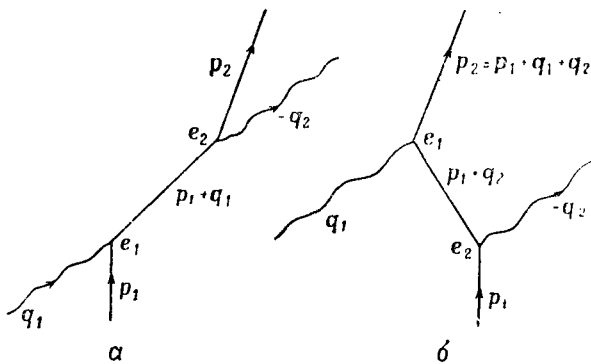
а — уравнение (12), б — уравнение (13), в — уравнение (14).

$$\mathbf{e}_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - m)^{-1} \mathbf{e}_1.$$

Полной матрицей для эффекта Комптона будет матрица

$$\mathbf{e}_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - m)^{-1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2 - m)^{-1} \mathbf{e}_2; \quad (15)$$

появление второго слагаемого вызвано тем, что испускание второго кванта \mathbf{e}_2



Ф и г. 5. Комптоновское рассеяние [формула (15)].

может предшествовать поглощению первого кванта \mathbf{e}_1 (фиг. 5, б). Для получения формулы Клейна — Нишины нужно взять матричный элемент матрицы (15), соответствующий переходу между начальным и конечным электронными состояниями ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2$). Этой же матрицей описывается двухфотонная аннигиляция и ряд других сходных процессов, причем позитронными состояниями являются

состояния, соответствующие отрицательной временной компоненте у вектора p . Кванты при этом испускаются или поглощаются в зависимости от того, положительной или отрицательной является временная компонента вектора q .

5. Сходимость выражений, описывающих процессы с виртуальными квантами

Как было отмечено, наш способ записи различных выражений представляет собой просто новую формулировку обычной квантовой электродинамики. В связи с этим многие из приведенных выражений оказываются, как и раньше, лишены смысла. Так, например, выражения для собственной энергии (9) или (11) приводят после вычислений к расходящемуся результату. Очевидно, появление этой расходимости связано с совпадением точек сингулярности ядра K_+ ($4, 3$) и функции $\delta_+(s_{43}^2)$. Только в этом пункте оказывается действительно необходимым выйти за рамки обычной электродинамики; все остальные предложенные нами изменения сводятся лишь к переходу к более простой записи.

Попытаемся видоизменить квантовую электродинамику подобно тому, как это было сделано в случае классической электродинамики в статье [2], в которой функция $\delta(s_{12}^2)$, входящая в выражение для взаимодействия, заменялась на $f(s_{12}^2)$, где $f(x)$ — некоторая функция, отличная от нуля и принимающая большие значения только на узком интервале изменения x .

Соответствующее видоизменение квантовой теории состоит, очевидно, в замене функции $\delta_+(s^2)$, входящей в выражение для квантовомеханического взаимодействия, на новую функцию $f_+(s^2)$. Можно постулировать, что если разложение Фурье классического выражения $f(s_{12}^2)$ является интегралом по всем k от выражения $F(k^2) \exp(-ikx_{12}) d^4k$, то разложение Фурье функции $f_+(s^2)$ будет интегралом от этого же выражения, взятым только по положительным значениям частот k_4 при $t_2 > t_1$ и только по отрицательным значениям частот k_4 при $t_2 < t_1$. При этом связь между функциями f и f_+ окажется аналогичной связи между $\delta(s^2)$ и $\delta_+(s^2)$. Функцию $f(s^2) = f(x, x)$ можно записать в виде¹⁾

$$f(x, x) = (2\pi)^{-2} \int_{k_4=0}^{\infty} \int \sin(k_4 |x_4|) \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}) dk_4 d^3 \mathbf{K} g(k, k),$$

где $g(k, k)$ — величина, равная умноженной на k_4^{-1} плотности осцилляторов и могущая быть представленной при положительных k_4 в виде (см. формулу (16) статьи [2])

$$g(k^2) = \int_0^{\infty} (\delta(k^2) - \delta(k^2 - \lambda^2)) G(\lambda) d\lambda,$$

причем $\int_0^{\infty} G(\lambda) d\lambda = 1$ и значения λ , входящие в G , велики по сравнению с m .

Это означает, что амплитуда для распространения кванта с импульсом k равна теперь не k^{-2} , а

$$-F_+(k^2) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} (k^{-2} - (k^2 - \lambda^2)^{-1}) G(\lambda) d\lambda.$$

Таким образом, если положить $F_+(k^2) = -\pi^{-1} k^{-2} C(k^2)$, то функция $f_+(s_{12}^2)$ определяется равенством

$$-f_+(s_{12}^2) = \pi^{-1} \int \exp(-ikx_{12}) k^{-2} C(k^2) d^4k. \quad (16)$$

¹⁾ В статье [2] это соотношение приведено с ошибкой [формула, предшествующая формуле (16)]. — *Прим. авт.*

В каждый интеграл по всем промежуточным состояниям с виртуальными квантами, содержащий в подинтегральном выражении множитель d^4k/k^2 , будет теперь добавочно входить множитель сходимости $C(k^2)$, равный

$$C(k^2) = \int_0^\infty -\lambda^2 (k - \lambda^2)^{-1} G(\lambda) d\lambda. \quad (17)$$

При подсчете этого интеграла в полюсах подинтегрального выражения величину k^2 следует заменять на $k^2 - i\delta$ и затем переходить к пределу $\delta \rightarrow 0$. Другими словами, принимается, что величина λ^2 имеет бесконечно малую отрицательную мнимую составляющую.

Функция $f_+(s_{12}^2)$ может еще претерпевать скачок на световом конусе. Подобный скачок не влияет на электрон Дирака. Однако если частицы подчиняются уравнению Клейна — Гордона, то в выражение для взаимодействия входит градиент потенциала, благодаря чему в этом выражении в случае скачкообразных функций f вновь появляется δ -функция. Требование отсутствия скачков на световом конусе у функции f означает, что величина $k^2 C(k^2)$ должна стремиться к нулю, когда k^2 стремится к бесконечности. Это равносильно тому, что должно выполняться равенство

$$\int_0^\infty \lambda^2 G(\lambda) d\lambda = 0. \quad (18)$$

Данное равенство будет также использовано при обсуждении сходимости интегралов, получающихся при рассмотрении поляризации вакуума.

Матрица собственной энергии будет теперь представляться выражением

$$\frac{e^2}{\pi i} \int \gamma_\mu (\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4k C(k^2), \quad (19)$$

которое сходится, поскольку $C(k^2)$ убывает по крайней мере как $1/k^2$. Примем теперь для удобства, что величина $C(k^2)$ равна просто $-\lambda^2/(k^2 - \lambda^2)$, подразумевая, что окончательный результат будет „усредняться“ по значениям λ с весом $G(\lambda) d\lambda$. Поскольку для всех процессов импульс кванта входит в подинтегральные выражения самое меньшее в одном множителе вида $(\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1}$, представляющем распространение электрона при наличии в его поле кванта, то следует ожидать, что все интегралы по виртуальным состояниям будут при введении подобных множителей сходимости давать конечный результат. Таким образом, для всех процессов будут получаться определенные конечные выражения (исключение составляют рассматриваемые ниже процессы с замкнутыми петлями, в которых расходящимися являются интегралы не по импульсам квантов, а по импульсам электронов).

Интеграл (19) при $C(k^2) = -\lambda^2(k^2 - \lambda^2)^{-1}$ и при учете того, что $p^2 = m^2$ и $\lambda \gg m$, с точностью до слагаемых порядка m/λ равен (см. приложение, раздел А)

$$\frac{e^2}{2\pi} \left[4m \left(\ln \frac{\lambda}{m} + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{p} \left(\ln \frac{\lambda}{m} + \frac{5}{4} \right) \right]. \quad (20)$$

Отсюда для электрона в состоянии с импульсом \mathbf{p} , подчиняющегося уравнению $\mathbf{p}u = mu$, получается следующее изменение массы (см. формулу (9) статьи [3]):

$$\Delta m = m \frac{e}{2\pi} \left(3 \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} \right). \quad (21)$$

6. Радиационные поправки к формулам рассеяния

Теперь мы можем завершить рассмотрение радиационных поправок к формулам для рассеяния. Введем множитель сходимости $C(k^2)$ в соответствующие интегралы, чтобы они стали сходящимися при больших k . Интеграл (12)

расходится также на нижнем пределе в связи с „инфракрасной катастрофой“. По этой причине мы будем производить вычисление интеграла, предполагая (как это было разобрано в статье [3]), что фотоны обладают малой массой $\lambda_{\min} \ll m \ll \lambda$. Выражение (12) преобразуется тогда в интеграл

$$\frac{e^2}{\pi i} \int \gamma_\mu (p_2 - k - m)^{-1} \alpha (p_1 - k - m)^{-1} \gamma (k^2 - \lambda_{\min}^2)^{-1} d^4 k C(k^2 - \lambda_{\min}^2),$$

интегрирование которого (см. приложение, раздел Б) приводит к значению (опущен множитель $e^2/2\pi$)

$$\left[2 \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - 1 \right) \left(1 - \frac{2\theta}{\operatorname{tg} 2\theta} \right) + \theta \operatorname{tg} \theta + \frac{4}{\operatorname{tg} 2\theta} \int_0^\theta \alpha \operatorname{tg} \alpha d\alpha \right] \alpha + \frac{1}{4m} (qa - aq) \frac{2\theta}{\sin 2\theta} + ra; \quad (22)$$

здесь $(q^2)^{1/2} = 2m \sin \theta$; предполагается, что матричный элемент берется между состояниями с импульсами p_1 и $p_2 = p_1 + q$; кроме того, отброшены члены порядка λ_{\min}/m , m/λ и q^2/λ^2 . Единственным членом в формуле (22), зависящим от множителя сходимости, является слагаемое ra , где

$$r = \ln \left(\frac{\lambda}{m} \right) + \frac{9}{4} - 2 \ln \left(\frac{m}{\lambda_{\min}} \right). \quad (23)$$

Вскоре мы увидим, что другие интегралы (13) и (14), входящие в полное выражение, дают после интегрирования члены, которые сокращаются со слагаемым ra . Остающиеся слагаемые при малых q преобразуются к виду

$$\frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{1}{2m} (qa - aq) + \frac{4q^2}{3m^2} \alpha \left(\ln \frac{m}{\lambda_{\min}} - \frac{3}{8} \right) \right), \quad (24)$$

откуда следует изменение магнитного момента и сдвиг энергетического уровня, как это было более подробно разобрано в статье [3] ¹⁾.

Теперь мы должны рассмотреть выражения (13) и (14). Интеграл по k в выражении (13) может быть [после введения множителя $C(k^2)$] взят, так как он сводится к интегралу (19) для собственной энергии, причем полученный после интегрирования оператор должен действовать на функцию начального состояния u_1 , подчиняющуюся уравнению $p_1 u_1 = m u_1$. Именно множитель, стоящий после множителя $\alpha (p_1 - m)^{-1}$, оказывается равным как раз Δm . Однако если попытаться раскрыть оператор $1/(p_1 - m) = (p_1 + m)/(p_1^2 - m^2)$, то получится бесконечность, поскольку $p_1^2 = m^2$. Этого же следует ожидать из качественных физических соображений, так как квант может быть испущен и поглощен в любой момент, предшествующий рассеянию. Подобный процесс приводит к изменению массы электрона в состоянии 1 и, следовательно, к изменению энергии на ΔE , а также к изменению амплитуды с точностью до первого порядка по ΔE на величину $-i \Delta E t$. Здесь t — время протекания данного процесса — будет бесконечным. Таким образом, основное влияние члена (13) будет компенсироваться эффектом изменения массы Δm .

¹⁾ На ошибочность выражения (19) статьи [3] автору повторно указывали в частной беседе Вайскопф и Френч в связи с тем, что вычисления, проводившиеся ими независимо и завершённые в начале 1948 г., привели к другому результату. Френч затем показал, что предшествующее выражению (19) выражение для рассеяния без излучения (формулы (18) или (24) статьи [3]) является правильным и что ошибка заключается в неправильном сшивании с нерелятивистским результатом Бете. Как показал Френч, вместо использованного автором соотношения $\ln 2k_{\max} - 1 = \ln \lambda_{\min}$ следует взять соотношение $\ln 2k_{\max} - \frac{5}{6} = \ln \lambda_{\min}$. Это сводится к добавлению слагаемого $-1/6$ к логарифму в выражении (19) статьи [3], после чего результат будет совпадать с соответствующими результатами Френча и Вайскопфа [10], а также Кролля и Лэмба [11]. Автор считает себя ответственным за значительную задержку в опубликовании результата Френча, связанную с указанной ошибкой. — *Прим. авт.*

Возникшая ситуация может быть проанализирована следующим образом. Предположим, что электрон, рассеиваемый полем с потенциалом a , не был свободным все предшествующее рассеянию время, а претерпел в некоторый момент в далеком прошлом рассеяние внешним полем с потенциалом b . Если ограничиться рассмотрением эффекта, вызываемым добавкой Δm , и эффекта виртуального излучения одного кванта между двумя указанными рассеяниями, то каждый из таких эффектов будет хотя и большим, но конечным, и разность между ними будет также конечной. Распространение из точки рассеяния полем с потенциалом b в точку рассеяния полем с потенциалом a представляется матрицей

$$a(p' - m)^{-1}b, \quad (25)$$

причем в некоторых случаях, в зависимости от деталей процесса, нужно взять интеграл по p' . (Если время между рассеяниями велико, то энергия определяется в очень узких пределах и значение p' очень близко к m^2 .)

Сравним влияние, которое оказывает на матрицу (25) эффект виртуальных квантов и изменение массы Δm . В первом случае получается выражение

$$\frac{e^2}{\pi i} \int a(p' - m)^{-1} \gamma_{\mu} (p' - k - m)^{-1} \gamma_{\mu} (p' - m)^{-1} b k^2 d^4 k C(k^2), \quad (26)$$

а во втором случае — выражение

$$a(p' - m)^{-1} \Delta m (p' - m)^{-1} b; \quad (27)$$

нас интересует разность этих двух выражений (26) и (27). Простой метод нахождения указанной разности состоит в выполнении интегрирования по k в (26) и в последующем вычитании из получившегося результата выражения (27), в котором подставлено значение Δm из (21). Получающаяся разность пропорциональна невозмущенной амплитуде (25) с множителем пропорциональности $-r(p'^2)$ и может быть представлена в виде

$$-r(p'^2) a(p' - m)^{-1} b. \quad (28)$$

Этот результат равносильен [с точностью до величин того же порядка, что и величина (28)] замене потенциалов a и b в выражении (25) на $(1 - \frac{1}{2} r(p'^2))a$ и $(1 - \frac{1}{2} r(p'^2))b$ соответственно. В пределе при $p'^2 \rightarrow m^2$ чистому эффекту рассеяния соответствует тогда выражение $-\frac{1}{2} ra$, где множитель r , являющийся пределом от $r(p'^2)$ при $p'^2 \rightarrow m^2$, точно равен (в предположении, что с инфракрасной стороны выполнено обрезание) множителю r , входящему в формулу (23). Слагаемое равной величины $-\frac{1}{2} ra$ входит еще из-за виртуальных переходов после рассеяния, описываемых интегралом (14); таким образом, в поле зрения выражения все члены, содержащие ra , сокращаются.

Тот факт, что величина ra равна значению выражения (12) при $q^2 = 0$, можно также подтвердить без помощи прямого подсчета следующим образом. Обозначим через p вектор с длиной m , совпадающий по направлению с p' , так что если $p'^2 = m(1 + \varepsilon)^2$, то $p' = (1 + \varepsilon)p$. Пусть величина ε очень мала и имеет порядок T^{-1} , где T — время между рассеянием полем с потенциалом a и полем с потенциалом b . Так как $(p' - m)^{-1} = (p' + m)/(p'^2 - m^2) \approx (p + m)/2m^2\varepsilon$, то выражение (25) имеет порядок ε^{-1} , или T . Вычислим поправки к этому

выражению только того же порядка ε^{-1} в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Член (27) можно приближенно ¹⁾ записать, используя выражение (19) для Δm , в виде

$$\frac{e^2}{\pi i} \int a (\mathbf{p}' - m)^{-1} \gamma_\mu (\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu (\mathbf{p}' - m)^{-1} b \mathbf{k}^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2).$$

Суммарный результат двух эффектов будет, следовательно, приближенно ²⁾ описываться выражением

$$-\frac{e^2}{\pi i} \int a (\mathbf{p}' - m)^{-1} \gamma_\mu (\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1} \varepsilon \mathbf{p} (\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu (\mathbf{p}' - m)^{-1} b \mathbf{k}^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2).$$

Получившийся член имеет желаемый порядок $1/\varepsilon$ [поскольку $(\mathbf{p}' - m)^{-1} \approx (\mathbf{p} + m)(2m^2\varepsilon)^{-1}$]. Сравнение с формулой (28) приводит к следующему выражению для r :

$$\frac{p_1 + m}{2m} \int \gamma_\mu (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} (\mathbf{p}_1 m^{-1}) (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu \mathbf{k}^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2). \quad (29)$$

Величина входящего сюда интеграла может быть сразу получена; так как она совпадает со значением интеграла (12), если в последнем положить $\mathbf{q} = 0$, причем a заменится здесь на \mathbf{p}_1/m . Таким образом, интеграл равен $r(\mathbf{p}_1/m)$, что при действии на состояние u_1 совпадает просто с r , так как $\mathbf{p}_1 u_1 = m u_1$. По этой же причине множитель $(\mathbf{p}_1 + m)/2m$ в формуле (29) можно заменить на единицу, так что в итоге вместо выражения (29) остается величина r , определяемая равенством (23) ³⁾.

При решении более сложных задач со свободным электроном в начальном состоянии члены подобного типа появляются вследствие эффектов виртуального испускания и поглощения, происходящих до других процессов. Эти члены, следовательно, содержат опять тот же множитель r , и поэтому вместо того, чтобы в каждом отдельном случае заново подсчитывать подобные перенормированные интегралы, можно прямо пользоваться выражением (23).

В рассмотренной задаче нахождения радиационных поправок к формуле рассеяния окончательный результат оказывается не чувствительным к выбору способа обрезания. Очевидно, это означает, что посредством простой перестановки членов до интегрирования можно избежать необходимости применения множителей сходимости (см., например, работу Льюиса [12]).

Данная задача решалась здесь указанным образом только для того, чтобы проиллюстрировать способ применения множителей сходимости. Даже в подоб-

¹⁾ Данное выражение не является точным, так как использованная подстановка [вместо Δm интеграл (19)] справедлива только в том случае, если оператор \mathbf{p} действует на функции таких состояний u , в которых \mathbf{p} можно заменить на m , т. е. $\mathbf{p}u = mu$. Ошибка здесь имеет порядок величины $a(\mathbf{p}' - m)^{-1}(\mathbf{p} - m)(\mathbf{p}' - m)^{-1}b$, т. е. порядок

$$a((1 + \varepsilon)\mathbf{p} + m)(\mathbf{p} - m)((1 + \varepsilon)\mathbf{p} + m)b(2\varepsilon + \varepsilon^2)^{-2}m^{-4}.$$

Поскольку, однако, $p^2 = m^2$, так что имеет место $\mathbf{p}(\mathbf{p} - m) = -m(\mathbf{p} - m) = (\mathbf{p} - m)\mathbf{p}$, то ошибка оказывается приближенно равной $a(\mathbf{p} - m)b/4m^2$, причем порядок ее величины не первой степени по $1/\varepsilon$, а меньше, так что в пределе ею можно пренебречь. — Прим. авт.

²⁾ Мы применили с точностью до первого порядка соотношение (пригодное для любых операторов A и B)

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} - \dots$$

для разложения разности операторов $(\mathbf{p}' - \mathbf{k} - m)^{-1}$ и $(\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1}$ (при этом $A = \mathbf{p} - \mathbf{k} - m$, $B = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \varepsilon\mathbf{p}$). — Прим. авт.

³⁾ Члены перенормировки, получившиеся в статье [3] [уравнения (14) и (15)], не дают при простом переходе к обозначениям настоящей статьи удвоенного выражения (29), а приводят к выражению, получающемуся из (29) при замене там множителя $(\mathbf{p}_1 m^{-1})$ на $m\gamma_4/E_1$, где $E_1 = p_{1\mu}$ при $\mu = 4$. После интегрирования в этом случае получится $ra((\mathbf{p}_1 + m)/2m)(m\gamma_4/E_1)$ или $ra - ra(m\gamma_4/E_1)(\mathbf{p}_1 - m)/2m$ (так как $\mathbf{p}_1\gamma_4 + \gamma_4\mathbf{p}_1 = 2E_1$), что равно ra , поскольку $\mathbf{p}_1 u_1 = m u_1$. — Прим. авт.

ном случае, когда введение таких множителей не является по существу необходимым, их применение все же может несколько облегчить решение задачи, поскольку становится возможным переставлять в выражениях члены, каждый из которых в отдельности расходится.

Необходимость замены функции δ_+ именно на функцию f_+ , определяемую равенствами (16) и (17), не следует с однозначностью из аналогии с классическим случаем. В классическом пределе можно без труда дать интерпретацию только вещественной части функции δ_+ (т. е. как раз функции δ). Возникает вопрос, на что должна заменяться при переходе к классическому пределу мнимая часть функции δ_+ , т. е. $1/(\pi i s)^2$. Сделанный здесь выбор [при определении распределения полюсов в подинтегральном выражении в (17)] произволен и, скорее всего, даже неправилен. Так, если подсчитать радиационное трение в атоме, взяв мнимую часть выражения (8), то результат будет зависеть, хотя и не очень сильно, от вида функции f_+ . С другой стороны, испускаемое излучение на большом расстоянии от источника не зависит от этой функции. Полная энергия, поглощаемая удаленными системами, оказывается, следовательно, по своей величине не равной энергии, теряемой источником. Мы, таким образом, приходим к положению, аналогичному положению, возникающему в классической теории, если там оставить в полной функции f только те части, которые соответствуют запаздывающему взаимодействию (см. приложение в статье [2]). Вообще, желательно иметь более глубокое разъяснение описанного обстоятельства, чем ссылка на аналогию с классическим случаем, рассмотренным в статье [2]. В настоящее время этот вопрос нами разбирается.

Из предыдущего следует, что сделанная здесь попытка нахождения внутренне непротиворечивого видоизменения квантовой электродинамики удалась не полностью (см. также рассмотренный ниже вопрос о замкнутых петлях). В свою очередь, может оказаться, что какой-либо выбор вида функции f_+ , который гарантирует сохранение энергии, не позволит одновременно сделать конечным интеграл, входящий в величину собственной энергии. Опубликование данной статьи до завершения анализа вопроса о правильном выборе функции f_+ вызвано стремлением сделать общедоступным метод упрощения расчетов квантовой электродинамики. Можно попытаться встать на ту точку зрения, что, поскольку указанная трудность с энергией отпадает в пределе при $\lambda \rightarrow \infty$, для получения правильных физических результатов следует после перенормировки массы устремлять λ к бесконечности. Я не проверял математическую обоснованность подобной процедуры, но маловероятно, что данное предположение приведет к удовлетворительным результатам. (Вообще, весьма сомнительно, что удастся найти удовлетворительный вид функции f_+ .)

7. Проблема поляризации вакуума

При анализе радиационных поправок к формулам для рассеяния нами не были рассмотрены члены одного из типов. Рассмотрим в данной связи следующий процесс. Пусть внешнее поле, потенциал которого, как мы можем считать, имеет вид $a_\mu \exp(-iqx)$, порождает пару электронов с импульсами p_a и $-p_b$ (см. фиг. 6). Пусть затем эта пара вновь аннигилирует с испусканием кванта с импульсом $q = p_b - p_a$. Пусть, далее, первоначальный электрон переходит при рассеянии на данном кванте из состояния 1 в состояние 2. Матричный элемент для такого процесса (при добавлении процессов, получающихся перестановкой порядка указанных событий во времени) равен

$$-\frac{e^2}{\pi i} (\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1) \int \text{tr}[(p_a + q - m)^{-1} \gamma_\nu (p_a - m)^{-1} \gamma_\mu] d^4 p_a q^{-2} C(q^2) a_\nu. \quad (30)$$

Вид выражения (30) определяется тем, что в процессе внешнее поле порождает пару с амплитудой, пропорциональной $a_\nu \gamma_\nu$; порожденные электроны распространяются с импульсами p_a и $-(p_a + q)$ до аннигиляции, при которой порождается

квант (множитель γ_μ), распространяющийся [множитель $q^{-2}C(q^2)$] до поглощения другим электроном (матричный элемент от γ_μ , взятый между состояниями 1 и 2 исходного электрона: $\bar{u}_2\gamma_\mu u_1$). Все импульсы p_α и все спиновые состояния виртуальных электронов являются допустимыми, в связи с чем берется след (суммирование по спиновым состояниям) и выполняется интегрирование по d^4p_α .

Можно также представить себе, что движение пары электрон — позитрон по замкнутой траектории, имеющей вид петли, вызывает ток

$$4\pi j_\mu = J_{\mu\nu} a_\nu, \quad (31)$$

который является источником квантов, действующих на другой электрон. Величина

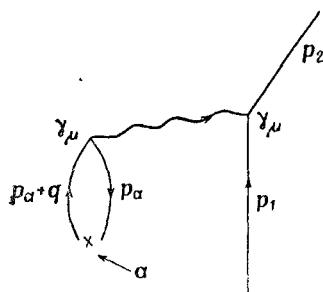
$$J_{\mu\nu} = -\frac{e^2}{\pi i} \int \text{tr}[(p + q - m)^{-1} \gamma_\nu (p - m)^{-1} \gamma_\mu] d^4p \quad (32)$$

играет основную роль при рассмотрении проблемы поляризации вакуума.

Сразу видно, что выражение для $J_{\mu\nu}$ является сильно расходящимся. Замена функции δ на функцию f изменяет амплитуду, с которой ток j_μ действует на рассеиваемый электрон, но никоим образом не делает интеграл (32) и связанные с ним эффекты конечными.

Один из способов устранения подобных трудностей сразу бросается в глаза. Согласно одной из точек зрения, рассматриваются все те пути, по которым заданный электрон может перейти из одной пространственно-временной области в другую, т. е. может попасть из источника электронов в измерительные приборы. С этой точки зрения имеющие вид петли замкнутые траектории, которые приводят к выражению (32), являются неестественными. Можно предположить, что имеют смысл только те пути, которые начинаются из некоторого источника и которые непрерывно (возможно, с многократным изменением направления) доходят до места обнаружения электрона. Замкнутые петли в данном случае исключаются.

Фиг. 6. Влияние поляризации вакуума на рассеяние [формула (30)].



Мы уже нашли, что это можно сделать при движении электрона в заданном внешнем поле.

Однако против указанного предположения можно выдвинуть определенные возражения. Наличие замкнутой петель является следствием обычной теории дырок. Наличие петель необходимо, между прочим, для сохранения значений вероятностей различных событий. Вероятность того, что внешнее поле не порождает пар, не равна единице, причем это отклонение от единицы связано с наличием мнимой части у величины $J_{\mu\nu}$. Кроме того, при исключении замкнутых петель однажды порожденная пара электронов не может сама по себе снова аннигилировать, так что должно отсутствовать рассеяние света на свете и т. п. Хотя экспериментального доказательства существования подобных явлений нет, все же, повидимому, они указывают на необходимость замкнутых петель. Возможно, конечно, что положение с сохранением вероятности и тому подобные результаты будут получаться в случае взаимодействующих частиц столь же просто, как и в случае частиц в заданном внешнем поле. Однако отсутствие доказательства приведенного предположения говорит как раз о том, что трудности с поляризацией вакуума нельзя обойти каким-либо простым образом¹⁾.

¹⁾ Было бы крайне интересно определить величину лэмбовского сдвига настолько точно, чтобы можно было проверить, действительно ли имеет место значение, равное 20 мггц, которое следует из теории при предположении о действительном существовании поляризации вакуума. — *Прим. авт.* (В настоящее время такие измерения выполнены. См. в данной связи статью XI настоящего сборника и вступительную статью. — *Прим. ред.*)

Другой способ устранения указанных трудностей состоит в принятии рассмотренного в статье [3] предположения о том, что использовавшаяся до сих пор функция $K_+(2, 1)$ является неправильной и что ее нужно заменить на модифицированную функцию K'_+ , не имеющую особенностей на световом конусе. После подобной замены в *каждый* интеграл по электронным импульсам войдет множитель сходимости $C(p^2 - m^2)^1$. Подынтегральное выражение в формуле (32) будет при этом умножаться на $C(p^2 - m^2)C((p+q)^2 - m^2)$, поскольку исходный интеграл, из которого получено выражение (32), содержал в подынтегральном выражении множитель $\delta(p_a - p_b + q) d^4 p_a d^4 p_b$. Новый интеграл будет сходиться. Однако получающийся результат оказывается неудовлетворительным²⁾.

Следует ожидать, что ток (31) удовлетворяет закону сохранения, т. е. $q_\mu j_\mu = 0$, или $q_\mu J_{\mu\nu} = 0$. Следует также ожидать, что ток отсутствует, если потенциал a_ν имеет вид градиента, т. е. если величина a_ν равна величине q_ν , умноженной на постоянную. Поскольку величина $J_{\mu\nu}$ симметрична, следующее отсюда условие $J_{\mu\nu} q_\nu = 0$ эквивалентно условию $q_\mu J_{\mu\nu} = 0$. Однако после интегрирования выражения (32) с введением множителей сходимостей указанного вида выясняется, что приведенное условие в этом случае не удовлетворяется. Заменяя ядро K на другое ядро K' , не подчиняющееся уравнению Дирака, мы теряем калибровочную инвариантность и вместе с ней выполнимость закона сохранения заряда и общую непротиворечивость теории.

Лучше всего можно показать прямым подсчетом величины $J_{\mu\nu} q_\nu$, исходя из выражения (23). Величина, стоящая под знаком Sp, принимает в этом случае вид $(p+q-m)^{-1} q (p-m)^{-1} \gamma_\mu$; это выражение можно записать в виде разности двух членов: $(p-m)^{-1} \gamma_\mu - (p+q-m)^{-1} \gamma_\mu$. Каждый из этих двух членов дает после интегрирования по $d^4 p$ без введения множителя сходимости один и тот же результат, так как первый член переходит во второй при сдвиге начала отсчета p (при замене p на $p' = p+q$). Этот результат, однако, не сохраняется при введении множителей сходимостей, так как данные множители при замене p на $p+q$ изменяют свой вид.

Способ изменения интеграла (32), позволяющий получить сходящееся значение без потери калибровочной инвариантности, был найден Бете и Паули³⁾. Появление множителя сходимости для света может рассматриваться как результат наложения эффектов квантов различных масс (некоторые из последних отрицательны). Аналогичным образом, если мы принимаем, что множитель $C(p^2 - m^2)$ равен $-\lambda^2(p^2 - m^2 - \lambda^2)^{-1}$, так что $(p^2 - m^2)^{-1} C(p^2 - m^2) = (p^2 - m^2)^{-1} - (\lambda^2 + m^2)^{-1}$, то мы тем самым берем разность результатов для электрона с массой m и электрона с массой $(\lambda^2 + m^2)^{1/2}$. Однако мы берем эту разность для каждого распространения электрона в промежуток между его взаимодействиями с фотонами. В отличие от этого Бете и Паули принимают, что однажды порожденный с определенной массой электрон должен сохранять одну и ту же величину массы при всех взаимодействиях с внешним полем до того, как он достигнет положения, в котором его траектория замыкается в петлю. Таким образом, если обозначить интеграл (32), взятый по некоторой конечной области значений импульса p через $J_{\mu\nu}(m^2)$, а аналогичную величину,

¹⁾ Подобный прием позволяет также сделать конечными интегралы, входящие в выражение для собственной энергии и в выражение для рассеяния без излучения, даже без замены функции δ_+ на f_+ (см. статью [3]), а следовательно, и без введения множителя $C(k^2)$ для квантов. — *Прим. авт.*

²⁾ В дополнение к членам, приведенным ниже [выражение (33)], в этом случае при $C(k^2) = -\lambda^2(k^2 - \lambda^2)^{-1}$ получается еще член $1/4(\lambda^3 - 2\mu^2 + 1/3q^2)\delta_{\mu\nu}$, нарушающий калибровочную инвариантность (в перенормировке заряда к величине логарифма добавляется значение $-7/6$). — *Прим. авт.*

³⁾ Излагаемый прием получения регуляризованных калибровочно-инвариантных результатов в случае эффектов поляризации вакуума подробно описан в статье Паули и Вилларса, перевод которой помещен в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950. См. также статью IX настоящего сборника. — *Прим. ред.*

соответствующую замену массы m на $(m^2 + \lambda^2)^{1/2}$, обозначить через $J_{\mu\nu}(m^2 + \lambda^2)$, то следует вычислять разность

$$J_{\mu\nu}^P = \int_0^\infty [J_{\mu\nu}(m^2) - J_{\mu\nu}(m^2 + \lambda^2)] G(\lambda) d\lambda, \quad (32')$$

причем функция $G(\lambda)$ удовлетворяет условиям $\int_0^\infty G(\lambda) d\lambda = 1$ и $\int_0^\infty G(\lambda) \lambda^2 d\lambda = 0$.

После этого в выражении для $J_{\mu\nu}^P$ конечную область интегрирования по p можно заменить на всю область значений p , так как интеграл теперь сходится. При использовании подобного способа после интегрирования по d^4p получается (см. приложение В) интеграл по $d\lambda$ с весом $G(\lambda)$ от выражения

$$J_{\mu\nu}^P = -\frac{e^2}{\pi} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \left(-\frac{1}{3} \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \left[\frac{4m^2 + 2q^2}{3q^2} \left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) - \frac{1}{9} \right] \right), \quad (33)$$

где $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$.

Калибровочная инвариантность этого выражения является очевидной, поскольку $q_\mu (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) = 0$. В случае потенциала a_ν , дивергенция которого (как это всегда будет иметь место) равна нулю, величина $(q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) a_\nu$ равна $-q^2 a_\mu$, т. е. просто равна результату действия оператора Даламбера на потенциал, что в свою очередь равно величине тока, вызываемого полем с данным потенциалом a_ν . Член $-\frac{1}{3} \left(\ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu}) \right)$ соответствует, следовательно, току, пропорциональному по величине тому току, который индуцирует поле. Результат введения этого члена равносильен изменению величины заряда, т. е. появлению разницы $\Delta(e^2)$ между значением e^2 и экспериментально наблюдаемым зарядом $e^2 + \Delta(e^2)$. Эта разница аналогична разнице между величиной m и наблюдаемой массой. Величина $\Delta(e^2)$ логарифмически зависит от границы обрезания: $\Delta(e^2)/e^2 = -(2e^2/3\pi) \ln(\lambda/m)$. После выполнения подобной перенормировки заряда все эффекты перестают зависеть от формы обрезания.

В выражении (33) после перенормировки заряда остается только последний член, определяющий обычным образом эффект поляризации вакуума [13]. Для свободных квантов ($q^2 = 0$) этот эффект оказывается равным нулю. При малых q^2 последний член выражения (33) ведет себя как $^{2/15} q^2$, благодаря чему в выражении для эффекта Лэмба к логарифму добавляется величина $-1/6$. При $q^2 > (2m)^2$ этот член становится комплексным, причем его мнимая часть представляет уменьшение амплитуды. Такое уменьшение обусловлено уменьшением со временем вероятности того, что поле, могущее породить пары ($(q^2)^{1/2} > 2m$), не породило пары. [Для получения требующегося аналитического продолжения представим, что m содержит малую отрицательную мнимую часть, так что величина $[1 - (q^2/4m^2)]^{1/2}$ переходит в $-i[(q^2/4m^2) - 1]^{1/2}$, когда величина q^2 возрастает от значений, меньших $4m^2$, до значений, больших $4m^2$. При этом $\theta = (\pi/2) + iu$, где $\operatorname{sh} u = +[(q^2/4m^2) - 1]^{1/2}$ и $-1/\operatorname{tg} \theta = i \operatorname{th} u = +i(q^2 - 4m^2)^{1/2} (q^2)^{-1/2}$.]

Наличие замкнутых петель, соответствующих большему числу квантов или взаимодействиям более чем с двумя полями, не вызывает никаких затруднений; эффекты от петель с нечетным числом взаимодействий вообще равны нулю (см. примечание в статье [1]). В случае четырех или более потенциалов взаимодействия получающиеся интегралы оказываются, как известно, сходящимися даже без введения множителей сходимости. Аналогичное положение имеет место для собственной энергии. После преодоления трудностей, связанных с одиночными петлями, не появляется никаких добавочных расходимостей, обусловленных более сложными процессами¹⁾.

¹⁾ Имяются петли, совершенно не связанные с какими-либо взаимодействиями с внешним полем. В частности, возможно, что виртуально порождена пара вместе с фото-

8. Продольные волны

В обычной трактовке квантовой электродинамики продольные и поперечные волны рассматриваются раздельно. При этом при рассмотрении поперечных волн уравнение $(\partial A_\mu / \partial x_\mu) \Psi = 0$ вводится как некоторое добавочное условие. В настоящей формулировке квантовой электродинамики введение подобных специальных условий не является необходимым, так как мы имеем дело с решениями уравнения $-\square^2 A_\mu = 4\pi j_\mu$, причем входящий в него ток j_μ подчиняется закону сохранения $\partial j_\mu / \partial x_\mu = 0$. Это означает, что по меньшей мере имеет место равенство $\square^2 (\partial A_\mu / \partial x_\mu) = 0$; в действительности же наше решение удовлетворяет также соотношению $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$.

Для доказательства правильности последнего утверждения рассмотрим амплитуду испускания (реального или виртуального) фотона и покажем, что расходимость этой амплитуды равна нулю. В амплитуду для испускания фотонов, поляризованных в направлении μ , входят матричные элементы матрицы γ_μ . Таким образом, нам достаточно показать, что обращаются в нуль соответствующие матричные элементы $q_\mu \gamma_\mu = q$. Так, например, эффекту первого порядка соответствует матричный элемент q , взятый между двумя состояниями p_1 и $p_2 = p_1 + q$. Однако поскольку $q = p_2 - p_1$ и $(u_2 p_1 u_1) = m(u_2 u_1) = (u_2 p_2 u_1)$, то этот матричный элемент равен нулю, что доказывает правильность нашего утверждения в данном частном случае. Подобное положение имеет место также и в более сложных случаях [в основном, в силу приведенного ниже соотношения (34)] (например, положим $e_2 = q_2$ в матрице (15) для комптон-эффекта).

Приведем теперь общее доказательство. Пусть величины a_i (i принимает значения от 1 до N) представляют набор плоских волн, соответствующих возмущающим полям и несущим импульсы q_i (в частности, некоторые из них могут быть испущены или поглощены в виде одинаковых или различных квантов). Рассмотрим матрицу переходов из состояния с импульсом p_0 в состояние с импульсом p_N следующего вида: $a_N \prod_{i=1}^{N-1} (p_i - m)^{-1} a_i$, где $p_i = p_{i-1} + q_i$ (множители пишутся в произведении слева направо в порядке убывания i). В общем случае матричный элемент является линейной комбинацией подобных выражений. Рассмотрим затем матрицу переходов между состояниями p_0 и $p_N + q$ в том случае, когда, кроме полей с потенциалами a_i , действует также другое внешнее поле с потенциалом $a \exp(-iqx)$, где $a = q$. Пусть действие этого поля предшествует действию остальных полей, тогда для соответствующей матрицы получается выражение $a_N \prod (p_i + q - m)^{-1} a_i (p_0 + q - m)^{-1} q$, которому можно придать вид $+ a_N \prod (p_i + q - m)^{-1} a_i$, так как $(p_0 + q - m)^{-1} q$ эквивалентна $(p_0 + q - m)^{-1} (p_0 + q - m)$ в связи с тем, что действие оператора p_0 на функцию начального состояния равносильно умножению этой функции на m . Аналогичным образом, если поле с потенциалом a действует после всех остальных полей, то получается матрица $q (p_N - m)^{-1} a_N \prod (p_i - m)^{-1} a_i$, которая эквивалентна $- a_N \prod (p_i - m)^{-1} a_i$, поскольку при действии оператора $p_N + q - m$ на функцию конечного состояния получается нуль. Кроме того, это поле может действовать между полями с потенциалами a_k и a_{k+1} при любом k . В этом случае получаем

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_N \prod_{i=k+1}^{N-1} (p_i + q - m)^{-1} a_i (p_k + q - m)^{-1} q (p_k - m)^{-1} a_k \prod_{j=1}^{k-1} (p_j - m)^{-1} a_j.$$

ном. Затем эта пара аннигилирует поглощая данный фотон. Подобные петли не учитываются по той причине, что они не связаны с взаимодействием с какими-либо объектами и поэтому являются полностью ненаблюдаемыми. Все косвенные эффекты, которые могут быть вызваны такими петлями, в силу принципа Паули, были уже учтены заранее. — *Прим. авт.*

Но

$$(p_k + q - m)^{-1} q (p_k - m)^{-1} = (p_k - m)^{-1} - (p_k + q - m)^{-1}, \quad (34)$$

так что входящая в предыдущее выражение сумма разбивается на разность двух сумм, первая из которых переходит во вторую при замене k на $k - 1$. Таким образом, остаются только следующие крайние члены:

$$a_N \prod_{i=1}^{N-1} (p_i - m)^{-1} a_i - a_N \prod_{i=1}^{N-1} (p_i + q - m)^{-1} a_i.$$

Эти члены сокращаются в сумме с двумя предыдущими, так что окончательный результат равен нулю. Следовательно, каждая испускаемая волна будет удовлетворять условию $\partial A_\mu / \partial x_\mu = 0$. Подобным образом продольные волны (т. е. волны, у которых $A_\mu = \partial \varphi / \partial x_\mu$, или $a = q$) не могут поглощаться и не вызывают никаких эффектов, так как для них матричные элементы для испускания и для поглощения одинаковы. (Сказанное выше равносильно тому положению, что потенциал вида $A_\mu = \partial \varphi / \partial x_\mu$ не влияет на электрон Дирака, поскольку после преобразования $\psi' = \exp(-i\varphi) \psi$ подобный потенциал обращается в нуль. Правильность этого утверждения легко подтвердить также в координатном представлении, используя интегрирование по частям.)

Из предыдущего вытекает то практически важное следствие, что при подсчете вероятностей переходов для неполяризованного света можно брать сумму квадратов матриц по всем четырем направлениям, а не только по двум направлениям вектора поляризации. Пусть матричный элемент для некоторого процесса со светом, поляризованным в направлении e_μ , равен $e_\mu M_\mu$. Если волновым вектором света является вектор q_μ , то, согласно приведенным выше соображениям, имеет место равенство $q_\mu M_\mu = 0$. Для неполяризованного света, распространяющегося в направлении z , обычно подсчитывается величина $M_x^2 + M_y^2$. Однако вместо этого можно также брать сумму $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 - M_t^2$, так как из условия для $q_\mu M_\mu$ получается, что $M_t = M_z$, поскольку для свободных квантов $q_t = q_z$. Это показывает, что понятие о неполяризованном свете является релятивистски инвариантным. Отсюда также вытекает способ упрощения подсчетов вероятностей переходов для неполяризованного света.

Как было показано, взаимодействие виртуальных квантов определяется членами вида $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu k^{-2} d^4 k$. Реальные процессы соответствуют полюсам в формулах для виртуальных процессов. Полюсы имеются, когда $k^2 = 0$; с первого взгляда может показаться, что в сумму по всем четырем значениям индекса μ величин $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$ входит при этом четыре различных поляризации. Однако после сказанного выше ясно, что в данном случае фактически учитываются только два направления, перпендикулярных к k .

Обычный способ исключения продольных и скалярных виртуальных фотонов (определяющих мгновенное кулоновское взаимодействие) может быть, конечно, применен также и в данном случае (хотя этот способ не является особенно удобным).

Члены, описывающие виртуальные переходы, имеют вид $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu k^{-2} d^4 k$, где точки обозначают некоторые матрицы. Зная значения μ , время t , направление вектора K , составляющего трехмерную часть четырехмерного вектора k , и два перпендикулярных направления 1 и 2. Выражения, соответствующие этим двум направлениям 1 и 2, при исключении продольных полей изменять не требуется, поскольку они описывают поперечные кванты. Остается только найти значение разности $(\gamma_t \dots \gamma_t) - (\gamma_K \dots \gamma_K)$. Так как имеет место равенство $k = k_i \gamma_t - K \gamma_K$, где $K = (KK)^{1/2}$, и поскольку мы ранее показали, что при замене

в членах, описывающих виртуальные переходы, матриц γ_μ на k получается выражение, равное нулю, то $K\gamma_K$ можно заменить на $k_4\gamma_4$ ¹⁾.

Следовательно, можно написать

$$(\gamma_t \dots \gamma_t) - (\gamma_K \dots \gamma_K) = ((K^2 - k_4^2)/K^2)(\gamma_t \dots \gamma_t),$$

а после умножения на $k^{-2}d^4k = d^4k(k_4^2 - K^2)^{-1}$ окончательно получается выражение $-(\gamma_t \dots \gamma_t)(d^4k K^2)$. Величина γ_t как раз соответствует скалярным волнам, т. е. полю, порождаемому зарядами. То обстоятельство, что величина $1/K^2$ не зависит от k_4 , означает возможность провести интегрирование сначала по k_4 ; это приводит к мгновенности данного взаимодействия. Ясно также, что остающийся после указанного интегрирования в подинтегральном выражении множитель dK/K^2 представляет собой кулоновский потенциал $1/r$ в импульсном пространстве.

9. Уравнение Клейна — Гордона

Рассмотренные методы могут быть без труда обобщены на случай частиц, обладающих равным нулю спином и подчиняющихся уравнению Клейна — Гордона²⁾

$$\square^2\psi - m^2\psi = i\frac{\partial(A_\mu\psi)}{\partial x_\mu} + iA_\mu\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} - A_\mu A_\mu\psi. \quad (35)$$

Основным ядром является теперь величина $I_+(2, 1)$, определяемая формулой (32) статьи [1]. В случае свободной частицы волновая функция $\psi(2)$ удовлетворяет уравнению $+\square^2\psi - m^2\psi = 0$. В точке 2 внутри некоторой пространственно-временной области функция $\psi(2)$ определяется, как это легко показать, используя обычный метод доказательства теоремы Грина, посредством равенства

$$\psi(2) = \int \left[\psi(1) \frac{\partial I_+(2, 1)}{\partial x_{1\mu}} - \frac{\partial\psi}{\partial x_{1\mu}} I_+(2, 1) \right] N_\mu(1) d^3V_1,$$

¹⁾ Несколько более тщательного рассмотрения требует случай, когда и первая и последняя матрицы γ_μ действуют на одну и ту же частицу. Положим $\chi = k_4\gamma_4 + K\gamma_K$ и рассмотрим выражение $(k \dots \chi) + (\chi \dots k)$. Подобное выражение получается, когда некоторая система, находящаяся во внешнем поле, которое обладает потенциалом χ и импульсом $-k$, возмущается другим внешним полем, обладающим потенциалом χ и импульсом $+k$ (то обстоятельство, что импульсы в промежуточных множителях во втором слагаемом $\chi \dots k$ входят с обратным знаком, несущественно, поскольку впоследствии проводится интегрирование по всем k). Следовательно, согласно указанному выше, все рассматриваемое выражение обращается в нуль, а так как $(k \dots \chi) + (\chi \dots k) = k_4^2(\gamma_t \dots \gamma_t) - K^2(\gamma_K \dots \gamma_K)$, то можно заключить, что $(\gamma_K \dots \gamma_K) = k_4^2 K^{-2}(\gamma_t \dots \gamma_t)$. — *Прим. авт.*

²⁾ Разбираемые в данном разделе уравнения выводятся из формулировки уравнения Клейна — Гордона, приведенной в разделе 14 статьи [5]. Функция ψ имеет при этом только одну компоненту и не является спинором. Другой формальный способ получения уравнений, пригодных для спина, равного нулю, а также для спина, равного единице, связан, повидимому, с использованием матриц Кеммера — Дuffина β_μ , удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\sigma + \beta_\sigma\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\sigma + \delta_{\sigma\nu}\beta_\mu.$$

Если считать, что величина a равна не $a_\mu\gamma_\mu$, но $a_\mu\beta_\mu$, то все уравнения для данных частиц оказываются формально тождественными с уравнениями для частиц со спином $1/2$; при этом только величину $(p - m)^{-1}$ нельзя более интерпретировать как $(p + m)(p^2 - m^2)$, так как p^2 более не равно числу pp . Однако величина p^3 остается равной $(pp)p$, так что вместо $(p - m)^{-1}$ можно писать $(mp + m^2 + p^2 - pp)(pp - m^2)^{-1}m^{-1}$. Отсюда получается, что в координатном пространстве в случае частиц со спином, равным нулю и единице, функцию $K_+(2, 1)$ нужно брать равной $K_+(2, 1) = [(i\nabla_2 + m) - m^{-1} \times \times (\nabla_2^2 + \square_2^2)] I_+(2, 1)$, где $\nabla_2 = \beta_\mu \partial/\partial x_{2\mu}$. Все это следует из того обстоятельства, что компоненты волновых функций ψ (5 компонент для спина, равного 0, и 10 компонент для спина, равного 1) удовлетворяют уравнению $(i\nabla - m)\psi = A\psi$, которое формально совпадает с уравнением Дирака. См. в связи с этим статью В. Паули [14]. — *Прим. авт.*

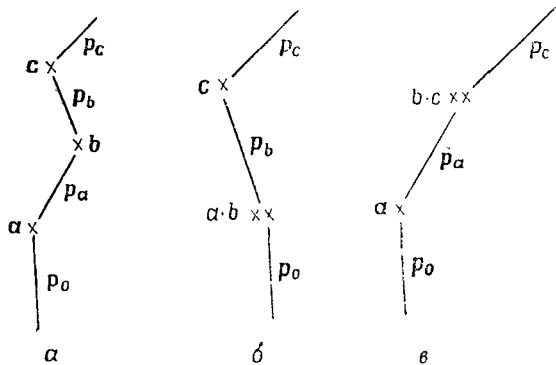
причем интеграл берется по всей трехмерной гиперповерхности, ограничивающей данную область (N_μ — вектор нормали к этой гиперповерхности).

Если функция ψ в подинтегральном выражении соответствует точке, предшествующей по времени точке 2, то в интеграл входят только компоненты ψ с положительными частотами, а если функция ψ соответствует точке, следующей за точкой 2, то в интеграл входят только компоненты ψ с отрицательными частотами. Компоненты с положительными и отрицательными частотами могут интерпретироваться как электроны и соответственно как позитроны полностью аналогично тому, как это делается в случае уравнения Дирака.

Можно считать, что выражение, стоящее с правой стороны уравнения (35), является источником новых волн, причем последовательность выписанных членов представляет матричные элементы процессов возрастающего порядка. Новые особенности появляются при этом только из-за члена $A_\mu A_\mu$, благодаря которому возможно одновременное взаимодействие с двумя квантами. Предположим, например, что три кванта или три потенциала $a_\mu \exp(-iq_a x)$, $b_\mu \exp(-iq_b x)$ и $c_\mu \exp(-iq_c x)$ действуют на частицу в таком порядке, что частица, обладавшая первоначально импульсом $p_{0\mu}$, обладает последовательно импульсами $p_a = p_0 + q_a$, $p_b = p_a + q_b$ и в конце приобретает импульс $p_c = p_b + q_c$. Матричный элемент будет при этом суммой трех слагаемых (соответствующие три возможности проиллюстрированы на фиг. 7) ($p^2 = p_\mu p_\mu$):

$$(p_c c + p_b c)(p_b^2 - m^2)^{-1}(p_b b + p_a b)(p_a^2 - m^2)^{-1}(p_a a + p_0 a) - \\ - (p_c c + p_b c)(p_b^2 - m^2)^{-1}(ba) - (cb)(p_a^2 - m^2)^{-1}(p_a a + p_0 a). \quad (36)$$

Первое из этих слагаемых относится к тому случаю, когда влияние каждого из трех полей вызывается двумя членами



Фиг. 7. Частица Клейна—Гордона под действием трех полей [формула (36)].

Связь с электромагнитным полем описывается здесь, например, выражением $p_0 a + p_a a$. При этом появляется также новая возможность (б) одновременного взаимодействия с двумя квантами, описываемая выражением ab . Множитель, представляющий распространение частицы с импульсом p_μ , равен теперь $(p^2 - m^2)$.

в правой стороне уравнения (35) разрешает процессы нового типа, в которых одновременно либо испускаются, либо поглощаются два кванта, или же один квант испускается, а другой поглощается. При принятом порядке действия потенциалов таких слагаемых, в которые входил бы оператор ac , быть не может. Однако в практических задачах, кроме членов, подобных (36), учитываются также члены с измененным порядком действия квантов a , b и c . В эти члены будет входить также и оператор ac .

$id(A_\mu \psi) / \partial x_\mu + iA_\mu (\partial \psi / \partial x_\mu)$. Действие входящих сюда операторов градиента заменяется в импульсном представлении на действие операторов импульса (до действия оператора A_μ во втором члене и после действия оператора A_μ в первом члене). Второе слагаемое в выражении (36) относится к возможности одновременного действия полей a_μ и b_μ , соответствующего члену $A_\mu A_\mu$. Общий импульс, связанный с полями a_μ и b_μ , равен $q_{b\mu} + q_{a\mu}$, так что после действия оператора ba импульс частицы принимает значение $p_0 + q_a + q_b$, т. е. p_b . Последнее слагаемое в (36) относится к сходному с предыдущим случаю, когда одновременно действуют поля c_μ и b_μ . Таким образом, наличие слагаемого $A_\mu A_\mu$

В качестве другого примера рассмотрим собственную энергию частицы с импульсом p_μ , равную

$$\frac{e^2}{2\pi i m} \int [(2p - k)_\mu ((p - k)^2 - m^2)^{-1} (2p - k)_\mu - \delta_{\mu\mu}] d^4 k k^{-2} C(k^2),$$

причем величина $\delta_{\mu\mu} = 4$ получается вследствие наличия члена $A_\mu A_\mu$ и представляет возможность одновременного испускания и поглощения одного и того же виртуального кванта. Входящий в это выражение интеграл квадратично расходуется, если отбросить множитель $C(k^2)$, и окажется расходящимся, если взять $C(k^2) = -\lambda^2/(k^2 - \lambda^2)$. Поскольку в выражение для взаимодействия входят градиенты потенциала, здесь необходимо использовать более сильный множитель сходимости; в частности, можно взять $C(k^2)$ в форме $\lambda^4/(k^2 - \lambda^2)^2$ или, вообще, в виде (17) при условии, что $\int_0^\infty G(\lambda) \lambda^2 d\lambda = 0$. В последнем случае собственная

энергия принимает конечное значение; однако это значение квадратично зависит от параметра обрезания λ и не является достаточно малым по сравнению с величиной собственной массы m . Радиационные поправки к формулам для рассеяния оказываются не зависящими от вида обрезания после перенормировки массы так же, как и в случае уравнения Дирака.

При наличии нескольких частиц для того, чтобы была учтена статистика Бозе, достаточно использовать правило, что если два процесса приводят к одному и тому же состоянию, но с переставленными двумя электронами, то их амплитуды следует складывать (а не вычитать, как в случае статистики Ферми). Доказательство эквивалентности данного метода и основанного на вторичном квантовании способа рассмотрения Паули и Вайскопфа совершенно аналогично соответствующему доказательству для случая электронов Дирака, приведенному в приложении в статье [1]. При применении статистики Бозе знак составляющей выражения для поляризации вакуума, получающейся вследствие наличия замкнутых петель, оказывается противоположным знаку, получающемуся в случае статистики Ферми (см. статью [1]). Имеем ($p_b = p_a + q$):

$$J_{\mu\nu} = \frac{e^2}{2\pi i m} \int [(p_{b\mu} + p_{a\mu})(p_{b\nu} + p_{a\nu})(p_a^2 - m^2)^{-1} \times \\ \times (p_b^2 - m^2)^{-1} - \delta_{\mu\nu}(p_a^2 - m^2)^{-1} - \delta_{\mu\nu}(p_b^2 - m^2)^{-1}] d^4 p_a,$$

откуда

$$J_{\mu\nu}^P = \frac{e^2}{\pi} (q_\mu q_\nu - \delta_{\mu\nu} q^2) \left[\frac{1}{6} \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + \frac{1}{9} - \frac{4m^2 - q^2}{3q^2} \left(1 - \frac{\theta}{\text{tg } \theta} \right) \right]$$

[обозначения здесь те же, что и в формуле (33)]. Появление положительной мнимой составляющей у величины $J_{\mu\nu}$ при $(q^2)^{1/2} > 2m$ соответствует, так же как и раньше, вызванному возможностью порождения пар уменьшению вероятности того, что конечное состояние будет вакуумом. Статистика Ферми давала бы в этом случае увеличение вероятности.

10. Применения к мезонным теориям¹⁾

Теориям, развитым для описания мезонов и взаимодействия между нуклонами, легко может быть придан вид, соответствующий используемому здесь способу рассмотрения. С точностью до низшего порядка по взаимодействию можно без труда выполнить вычисления в любой из этих теорий; однако ни в одном

¹⁾ Со времени появления данной статьи Фейнмана вопрос о распространении формализма на мезодинамику исследовался довольно интенсивно. Рассмотрение возникающих при этом проблем и изложение наиболее важных результатов приведены в статье XI настоящего сборника и во вступительной статье. — *Прим. ред.*

из случаев не удается получить согласия с экспериментом. Скорее всего, все имеющиеся варианты являются в данном случае количественно неудовлетворительными. В связи с этим мы ограничимся лишь кратким описанием методов, которые могут быть использованы.

Предположим, как обычно, что нуклеоны подчиняются уравнению Дирака; тогда множитель, представляющий распространение нуклеона с импульсом p , равен $(p - M)^{-1}$, где M — масса нуклеона (отсюда следует возможность порождения нуклеонных пар). Примем, далее, что нуклеоны взаимодействуют с мезонами, причем вид этого взаимодействия различен в каждой из мезонных теорий.

Рассмотрим сначала случай нейтральных мезонов; наиболее близкой к электродинамике является тогда теория векторных мезонов с векторной связью. В этом случае множителем, представляющим испускание или поглощение мезона, является $g\gamma_\mu$, если данный мезон „поляризован“ в направлении μ . Коэффициент g , который называют „мезонным зарядом“, заменяет здесь электрический заряд e . Амплитуда распространения мезона с импульсом q в промежуточных состояниях равна $(q^2 - \mu^2)^{-1}$ (в отличие от света, где эта величина равна q^{-2}), причем μ означает массу мезона. Получающиеся в теории интегралы становятся так же, как и в электродинамике, сходящимися при введении множителя сходимости $C(q^2 - \mu^2)$. Случай скалярных мезонов со скалярной связью отличается от приведенного случая только заменой в выражениях для испускания и поглощения матрицы γ_μ на 1. При этом нет различных направлений поляризации μ , по которым следовало бы суммировать. В случае псевдоскалярных мезонов с псевдоскалярной связью матрица γ_μ заменяется на $\gamma_5 = i\gamma_x\gamma_y\gamma_z\gamma_t$. В частности, в последнем варианте теории матрица собственной энергии нуклеона с импульсом p равна

$$\frac{g^2}{\pi i} \int \gamma_5 (p - k - M)^{-1} \gamma_5 d^4k (k^2 - \mu^2)^{-1} C(k^2 - \mu^2).$$

Остальные виды мезонных теорий получаются при замене матрицы γ_μ на другие выражения [можно, например, заменить γ_μ на $\frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$ с последующим суммированием по всем μ и всем ν для виртуальных процессов]. Случай скалярных мезонов с векторной связью получается при замене матрицы γ_μ на $\mu^{-1}q$, где величина q равна разности конечною и начального импульсов нуклеона, т. е. равна либо импульсу поглощенного мезона, либо импульсу испущенного мезона, взятому с обратным знаком. Как хорошо известно, данная теория нейтральных мезонов приводит при описании любых процессов к равным нулю выражениям. Это было фактически нами доказано при рассмотрении продольных волн в электродинамике. Случай псевдоскалярных мезонов с псевдовекторной связью соответствует замене матрицы γ_μ на $\mu^{-1}\gamma_5q$, а случай векторных мезонов с тензорной связью соответствует использованию вместо γ_μ матрицы $(2\mu)^{-1}(\gamma_\mu q - q\gamma_\mu)$. Введение дополнительных градиентов в выражения для связи вызывает опасность появления расхождений более высокого порядка при описании реальных процессов. Так, например, введение матрицы γ_5q приводит к логарифмически расходящемуся выражению для взаимодействия между нейтроном и электроном [15]. Хотя подобные расхождимости и могут быть устранены посредством применения соответствующих множителей сходимости, получающиеся при этом результаты оказываются очень сильно зависящими от использованного метода обрезания и от величины λ . Для процессов низшего порядка псевдовекторное взаимодействие $\mu^{-1}\gamma_5q$ эквивалентно псевдоскалярному взаимодействию $2M\mu^{-1}\gamma_5$, поскольку если u_1 — волновая функция нуклеона с импульсом p , а u_2 — волновая функция нуклеона с импульсом $p_2 = p_1 + q$, то имеет место равенство

$$(\bar{u}_2\gamma_5qu_1) = (\bar{u}_2\gamma_5(p_2 - p_1)u_1) = -(\bar{u}_2p_2\gamma_5u_1) - (\bar{u}_2\gamma_5p_1u_1) = -2M(\bar{u}_2\gamma_5u_1),$$

так как γ_5 антикоммутирует с p_2 и так как действие оператора p_2 на функцию u_2 и действие оператора p_1 на функцию u_1 эквивалентно умножению этих

функций на M . Отсюда следует, что псевдоскалярное взаимодействие в нерелятивистском пределе крайне слабо (так, например, среднее значение оператора γ_5 для свободного нуклона равно нулю); однако, так как величина $\gamma_5^2 = 1$ не является малой, члены взаимодействия второго порядка оказываются в случае псевдоскалярной связи более существенными, чем члены взаимодействия первого порядка. Таким образом, константа псевдоскалярной связи должна выбираться так, чтобы привести к правильным значениям ядерных сил при учете основных процессов второго порядка [16]. Эквивалентность псевдоскалярной и псевдовекторной связи имеет место только для процессов первого порядка и теряется в случае процессов высших порядков, соответствующих наиболее значительным эффектам, вызываемым псевдоскалярной связью. Таким образом, эти два выбора вида связи в большинстве практических задач будут приводить к совершенно различным результатам.

Результаты, получающиеся при подсчете вызванных рождением виртуальных мезонов поправок к формулам для рассеяния нуклона нейтральным векторным мезонным полем (γ_μ), оказываются, аналогично соответствующим результатам электродинамики, сходящимися без введения обрезания и зависят только от градиентов мезонного потенциала. В случае скалярных (1) или псевдоскалярных (γ_5) нейтральных мезонов соответствующие результаты логарифмически расходятся, так что приходится применить обрезание. Однако составляющие выражения для рассеяния, зависящие от обрезания, оказываются при этом прямо пропорциональными мезонному потенциалу и, следовательно, исключаются при перенормировке мезонного заряда g . После такой перенормировки результаты зависят только от градиентов мезонного потенциала и являются по существу не зависящими от вида обрезания. Кроме этого, нужно учитывать перенормировку мезонного заряда, вызванную возможностью порождения мезоном виртуальных нуклонных пар (по аналогии с поляризацией вакуума в электродинамике). В случае скалярных и псевдоскалярных мезонов имеется еще некоторое отличие от электродинамики, состоящее в том, что поляризация приводит также к появлению составляющей в индуцированном токе, пропорциональной мезонному потенциалу и приводящей тем самым к дополнительной перенормировке массы мезона, величина которой квадратично зависит от обрезания.

Рассмотрим теперь заряженные мезоны в отсутствие электромагнитного поля. При этом можно ввести обычным образом операторы изотопического спина [в частности, для этого нужно заменить, например, матрицу γ_5 на $\tau_i \gamma_5$ и затем просуммировать по значениям $i = 1, 2$, причем $\tau_1 = \tau_+ + \tau_-$ и $\tau_2 = i(\tau_+ - \tau_-)$, где τ_+ — оператор, переводящий нейтрон в протон (при действии τ_+ на протон получается нуль), а τ_- — оператор, переводящий протон в нейтрон]. В конкретных задачах при помощи диаграмм, соответствующих матричным элементам, можно также просто различать, является ли частица протоном или нейтроном. В этом случае ряд определенных процессов не может осуществляться. Так, например, при рассеянии отрицательного мезона (переход из состояния с импульсом q_1 в состояние с импульсом q_2) нейтроном сначала должен быть испущен (имеется в виду не порядок событий по времени, а порядок расположения операторов) мезон с импульсом q_2 , так как нейтрон не может поглотить отрицательный мезон до тех пор, пока он не превратится в протон. Таким образом, если проводить сравнение с формулой Клейна — Нишины (15), то при рассеянии отрицательных мезонов нейтронами нужно брать только член, аналогичный второму члену выражения (15) (см. фиг. 5, б), в то время как при рассеянии положительных мезонов нейтронами нужно учитывать только член, аналогичный первому члену указанного выражения (см. фиг. 5, а).

Источник мезонов заданного заряда не является неограниченным. Так, нейтрон, способный испускать отрицательные мезоны, теряет эту способность после превращения в протон. Приведенное при рассмотрении продольных электромагнитных волн доказательство того, что действие оператора q приводит к выражениям, равным нулю, оказывается теперь непригодным. Вследствие этого в случае векторных мезонов с векторным взаимодействием (γ_μ) не

будет выполняться условие равенства нулю дивергенции потенциала. Если нужно устранить реальное испускание мезонов с дивергенцией мезонного потенциала, не равной нулю, то в случае испускания в выражение взаимодействия следует подставлять¹⁾ матрицу $\gamma_\mu - \mu^{-2}q_\mu q$, оставляя попрежнему в случае поглощения матрицу γ_μ . (Поправочный член $\mu^{-2}q_\mu q$ равен нулю в случае нейтральных мезонов.) Отсутствие симметрии между испусканием и поглощением является при этом только кажущимся, так как очевидно, что подобное введение $\mu^{-2}q_\mu q$ равносильно вычитанию из старых выражений $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$ члена $\mu^{-2}q \dots q$. Иными словами, если опустить член $-\mu^{-2}q_\mu q$, то теория будет объединять мезоны со спином единица и мезоны со спином нуль. Мезоны со спином нуль, связанные с нуклеонами векторной связью q , устраняются посредством вычитания члена $\mu^{-2}q \dots q$.

Два добавочных градиента, входящих в выражение $q \dots q$, еще более усложняют проблему сходимости интегралов (так, например, соответствующее обмену двумя заряженными векторными мезонами выражение для взаимодействия между двумя протонами оказывается квадратично зависящим от обрезания, если при его подсчете не использовать каких-либо особых приемов). Это в известной мере побуждает выбрать выражение $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$ и согласиться с выбором смеси мезонов спина нуль и мезонов спина единица. Однако оказывается, что при таком выборе обычный формализм приводит к отрицательным энергиям у компонент с нулевым спином. Данное обстоятельство показывает одно из преимуществ метода вторичного квантования мезонных полей перед настоящей теорией. Подобные ошибки в знаке вызываются здесь, очевидно, тем, что мы можем записывать пригодные в виду выражения, которые тем не менее приводят к абсурдным результатам. Использование псевдовекторных мезонов с псевдовекторной связью соответствует введению в выражение взаимодействия матрицы $\gamma_5(\gamma_\mu - \mu^{-2}q_\mu q)$ для поглощения и матрицы $\gamma_5\gamma_\mu$ для испускания как в случае заряженных, так и в случае нейтральных мезонов.

В присутствии электромагнитного поля всякий раз, когда нуклеон является протоном, он взаимодействует с этим полем таким же образом, как и электрон. Скалярный или псевдоскалярный мезон взаимодействует с электромагнитным полем как частица, подчиняющаяся уравнению Клейна—Гордона. При подсчетах здесь существенно использовать метод вычисления Бете и Паули, т. е. использовать предположение, что виртуальные мезоны обладают одной и той же

¹⁾ Потенциал векторного мезонного поля φ_μ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} \right) - \mu^2 \varphi_\mu = -4\pi s_\mu,$$

где источник векторных мезонов s_μ представляет собой матричный элемент γ_μ между состояниями нейтрона и протона. Взяв дивергенцию $\partial/\partial x_\mu$ от обеих сторон этого уравнения, получаем $\partial \varphi_\nu / \partial x_\nu = 4\pi \mu^{-2} (\partial s_\nu / \partial x_\nu)$. Таким образом, взятое уравнение может быть переписано в форме

$$\square^2 \varphi_\mu - \mu^2 \varphi_\mu = -4\pi \left(s_\mu + \mu^{-2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} \right) \right).$$

В импульсном представлении правая сторона получившегося уравнения принимает вид $\gamma - \mu^{-2}q_\mu q_\nu \gamma_\nu$, левая — вид $(q^2 - \mu^2)^{-1}$, а член взаимодействия $s_\mu \varphi_\mu$ в лагранжиане дает для случая поглощения γ_μ .

Продолжая приведенные рассуждения, можно показать, что частицы со спином единица представляются четырехмерным вектором u_μ (который для свободной частицы с импульсом q удовлетворяет условию $qu = 0$). Переход виртуальных частиц с импульсом q из состояния ν в состояние μ представляется при этом умножением на четырехрядную матрицу (или тензор) $P_{\mu\nu} = (\delta_{\mu\nu} - \mu^{-2}q_\mu q_\nu) (q^2 - \mu^2)^{-1}$. Взаимодействию первого порядка (из уравнения Прока) с электромагнитным полем, обладающим потенциалом $a \exp(-ikx)$, соответствует умножение на матрицу $E_{\mu\nu} = (q_2 a + q_1 a) \delta_{\mu\nu} - q_{2\nu} a_\mu - q_{1\mu} a_\nu$, где через q_1 и $q_2 = q_1 + k$ обозначены импульсы частиц до и после взаимодействия. Наконец, два потенциала a и b могут действовать одновременно, чему соответствует матрица $E'_{\mu\nu} = -(ab) \delta_{\mu\nu} + b_\mu a_\nu$. — *Прим. авт.*

„массой“ в течение всех актов своего взаимодействия с электромагнитным полем. При этом следует также брать разность между выражением для взаимодействия с массой μ и выражением для массы $(\mu^2 + \lambda^2)^{1/2}$ и интегрировать эту разность по всем значениям λ с весом $G(\lambda)$. Если не брать для каждого распространения мезона между двумя взаимодействиями с электронами один и тот же множитель сходимости, не будет сохраняться калибровочная инвариантность. Если выражение для взаимодействия включает градиент, например, в виде члена с $\gamma_5 \mathbf{q}$, где \mathbf{q} — разность между начальным и конечным импульсом нуклеона, то из импульса протона следует вычитать вектор—потенциал A . Таким образом, появляется дополнительная связь $\pm \gamma_5 A$ (знак плюс берется в случае перехода протона в нейтрон, знак минус — в случае перехода нейтрона в протон), представляющая возможность одновременного испускания (или поглощения) нуклеоном мезона и фотона.

Испускание положительных виртуальных мезонов и поглощение отрицательных виртуальных мезонов описывается одним и тем же членом, причем знак заряда определяется как и в случае электронов и позитронов временным соотношением событий.

Подобным образом могут быть без труда выполнены вычисления с точностью до первого порядка по квадрату постоянной связи для таких эффектов, как взаимодействие нуклеонов, рассеяние мезонов на нуклеонах, порождение мезонов при столкновениях нуклеонов и γ -лучей, нуклеарные магнитные моменты, расстояния нейтронов на электронах и т. д. Однако ни в одном из случаев, когда может быть проведено сравнение вычислений с опытом, это сравнение не привело к удовлетворительным результатам. Повидимому, все указанные формулировки являются ошибочными. Приведенное заключение нельзя все же считать окончательным, поскольку вычисления проводились лишь с точностью до первого порядка по $g^2/\hbar c$, и поэтому эти вычисления могут оказаться недействительными, если $g^2/\hbar c$ велико.

Автор обязан проф. Бете за данное им разъяснение метода получения конечных и калибровочно-инвариантных результатов при рассмотрении поляризации вакуума. Автор также благодарен проф. Бете за его критические замечания и за многочисленные дискуссии, имевшие место во время выполнения настоящей работы. Автор должен также поблагодарить проф. Эшкина, внимательно прочитавшего работу в рукописи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В данном приложении будет проиллюстрирован метод, с помощью которого можно непосредственно вычислять простейшие интегралы, встречающиеся в задачах электродинамики. Интегралы, появляющиеся при описании более сложных процессов, приводят к довольно громоздким функциям; описываемый метод облегчает изучение соотношений между подобными интегралами и позволяет сводить их к более простым интегралам.

В качестве типичного примера рассмотрим интеграл (12), получающийся при рассмотрении задачи рассеяния без излучения с точностью до первого порядка:

$$\int \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - m)^{-1} a(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu \mathbf{k}^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2), \quad (1a)$$

где $C(\mathbf{k}^2)$ принимается, как обычно, равным $-\lambda^2 (\mathbf{k}^2 - \lambda^2)^{-1}$; символ $d^4 k$ означает $(2\pi)^{-2} dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$. Представив множитель $(\mathbf{p} - \mathbf{k} - m)^{-1}$ в виде $(\mathbf{p} - \mathbf{k} + m)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 - m^2)^{-1}$, получаем вместо интеграла (1a) интеграл

$$\int \gamma_\mu (\mathbf{p}^2 - \mathbf{k} + m) a(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} + m) \gamma_\nu \mathbf{k}^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2) \times \\ \times ((\mathbf{p}_1 - \mathbf{k})^2 - m^2)^{-1} ((\mathbf{p}_2 - \mathbf{k})^2 - m^2)^{-1}. \quad (2a)$$

Входящее сюда матричное выражение можно преобразовать к более простому виду. Оказывается, что это преобразование выгоднее проводить не до, а после интегрирования. Из равенства $AB = 2AB - BA$, где $AB = A_\mu B_\mu$ — число, коммутирующее с любыми матрицами, следует равенство $\gamma_\mu A = -A\gamma_\mu + 2A_\mu$, из которого получается соотношение

$$\gamma_\mu AR\gamma_\mu = -A\gamma_\mu R\gamma_\mu + 2RA; \quad (3a)$$

здесь R обозначает какое-либо выражение, а матрица A соответствует вектору. Соотношение (3a) позволяет по индукции сводить к более простым выражениям выражения вида $\gamma_\mu \dots \gamma_\mu$. Будут использованы следующие частные случаи этого соотношения:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\mu &= 4, \\ \gamma_\mu A \gamma_\mu &= -2A, \\ \gamma_\mu AB \gamma_\mu &= 2(AB + BA) = 4AB, \\ \gamma_\mu ABC \gamma_\mu &= -2CBA, \end{aligned} \quad (4a)$$

где A, B, C — любые матрицы, соответствующие вектору (т. е. линейные комбинации четырех матриц γ_μ).

Для вычисления интеграла (2a) представим его в виде суммы из трех слагаемых ($k = k_\sigma \gamma_\sigma$):

$$\begin{aligned} \gamma_\mu (p_2 + m) a (p_1 + m) \gamma_\mu J_1 - [\gamma_\mu \gamma_\sigma a (p_1 + m) \gamma_\mu + \\ + \gamma_\mu (p_2 + m) a \gamma_\sigma \gamma_\mu] J_2 + \gamma_\mu \gamma_\sigma a \gamma_\tau \gamma_\mu J_3, \end{aligned} \quad (5a)$$

где

$$J_{(1; 2; 3)} = \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) k^{-2} d^4 k C(k^2) ((p_2 - k)^2 - m^2)^{-1} ((p_1 - k)^2 - m^2)^{-1}. \quad (6a)$$

Принятое здесь обозначение соответствует тому, что в интеграле J_1 скобка $(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)$ заменяется на 1, в интеграле J_2 — на k_σ , а в интеграле J_3 — на $k_\sigma k_\tau$.

В случае более сложных процессов первого порядка в интегралы входит большее число множителей вида $((p_3 - k)^2 - m^2)^{-1}$ и в связи с этим возрастает число величин типа $k_\sigma k_\tau k_\nu$, в введенных выше символических скобках. Процессам высшего порядка, с участием двух или более виртуальных квантов, соответствуют аналогичные интегралы, в которых только вместо k может стоять $k + k'$ и интегрирование ведется уже по $k^{-2} d^4 k C(k^2) k'^{-2} d^4 k' C(k'^2)$. Подобные интегралы также могут быть преобразованы с помощью методов, аналогичных примененным в случае процессов первого порядка.

Множители $(p - k)^2 - m^2$ можно записать в виде

$$(p - k)^2 - m^2 = k^2 - 2pk - \Delta, \quad (7a)$$

где $\Delta = m^2 - p^2$, $\Delta_1 = m_1^2 - p_1^2$ и т. п.; подобным образом мы можем рассмотреть общий случай, соответствующий различным значениям m . Хотя в нашей частной задаче (6a) $p_1^2 = m^2$ и, следовательно, $\Delta_1 = 0$, мы все же будем стремиться сохранять общность выкладок.

Возьмем теперь множитель $C(k^2)/k^2$ в виде $-\lambda^2 (k^2 - \lambda^2)^{-1} k^{-2}$; тогда этот множитель можно записать в следующей форме:

$$-\frac{\lambda^2}{(k^2 - \lambda^2) k^2} = k^{-2} C(k^2) = -\int_0^{\lambda^2} dL (k^2 - L)^{-2}. \quad (8a)$$

Таким образом, мы можем заменять множитель $k^{-2} C(k^2)$ на множитель $(k^2 - L)^{-2}$ с последующим интегрированием рассматриваемых выражений по L от нуля до λ^2 . Во многих практических задачах величину λ^2 можно считать очень большой по сравнению с m^2 или p^2 . В случае, если исходный интеграл сходится без введе-

ния множителей сходимости, правильность приведенного утверждения является очевидной, поскольку интеграл по L сходится, даже если распространить интегрирование до бесконечности. Если для интеграла имеет место „инфракрасная катастрофа“, то можно просто предположить, что кванты обладают некоторой малой массой λ_{\min} , и интегрировать не от нуля до λ^2 , а от λ_{\min}^2 до λ^2 .

Таким образом, мы должны рассмотреть интегралы вида

$$\int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) d^4k (k^2 - L)^{-2} (k^2 - 2p_1 k - \Delta_1)^{-1} (k^2 - 2p_2 k - \Delta_2)^{-1}, \quad (9a)$$

где символ $(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)$ означает в различных случаях либо 1, либо k_σ , либо $k_\sigma k_\tau$. В более сложных задачах входит большее число множителей $(k^2 - 2p_i k - \Delta_i)^{-1}$, а также появляются такие же множители в других степенях [величину $(k^2 - L)^{-2}$ можно рассматривать как частный случай подобных множителей с $p_i = 0$ и $\Delta_i = L$]. Полюсы при этом во всех случаях определяются посредством предположения, что величины L и Δ имеют бесконечно малые отрицательные мнимые части.

Будем вести рассмотрение, переходя по индукции от более простых интегралов к более сложным. Начнем с простейшего сходящегося интеграла

$$\int d^4k (k^2 - L)^{-3}$$

и покажем, что имеет место равенство

$$\int d^4k (k^2 - L)^{-3} = (8iL)^{-1}. \quad (10a)$$

Данный интеграл равен $\int (2\pi)^{-2} dk_4 d^3K (k_4^2 - KK - L)^{-3}$, где K обозначает вектор с модулем $K = (KK)^{1/2}$ и компонентами k_1, k_2, k_3 . При интегрировании по k_4 появляются два полюса третьего порядка при $k_4 = \pm (K^2 + L)^{1/2}$ и $k_4 = - (K^2 + L)^{1/2}$. Если положить, в согласии с нашими определениями, что у L имеется малая отрицательная мнимая часть, то ниже вещественной оси оказывается только первый полюс. Контур интегрирования рассматриваемого интеграла может быть замкнут без изменения значения этого интеграла проходящим ниже вещественной оси полукругом бесконечно большого радиуса, поскольку вклад от полукруга в пределе исчезает. Получающийся замкнутый контур обходит полюс в точке $k_4 = \pm (K^2 + L)^{1/2}$, так что значение интеграла по k_4 равно вычету в этом полюсе, умноженному на $-2\pi i$. Положив величину k_4 равной $k_4 = (K^2 + L)^{1/2} + \epsilon$ и разложив выражение $(k_4^2 - K^2 - L)^{-3} = \epsilon^{-3} (\epsilon + 2(K^2 + L)^{1/2})^{-3}$ по степеням ϵ , получаем, что вычет, являющийся коэффициентом в члене с ϵ^{-1} , равен $6(2(K^2 + L)^{1/2})^{-5}$. Таким образом, наш интеграл равен

$$-\left(\frac{3i}{32\pi}\right) \int_0^\infty 4\pi K^2 dK (K^2 + L)^{-5/2} = \frac{3}{8i} \frac{1}{3L},$$

откуда следует равенство (10a).

Из симметрии k -пространства далее следует, что $\int k_\sigma d^4k (k^2 - L)^{-3} = 0$. Полученные результаты можно записать в виде

$$8i \int (1; k_\sigma) d^4k (k^2 - L)^{-3} = (1; 0) L^{-1}, \quad (11a)$$

при этом из скобок $(1; k_\sigma)$ и $(1; 0)$ нужно брать соответственно первые или вторые символы.

Положив в формуле (11a) $k = k' - p$ и обозначив $L - p^2$ через Δ , находим

$$8i \int (1; k_\sigma) d^4k (k^2 - 2pk - \Delta)^{-3} = (1; p_\sigma) (p^2 + \Delta)^{-1}. \quad (12a)$$

После дифференцирования обеих сторон равенства (12а) по Δ или по p_τ сразу получается соотношение

$$24i \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) d^4k (k^2 - 2pk - \Delta)^{-4} = \\ = - \left(1; p_\sigma; p_\sigma p_\tau - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (p^2 + \Delta) \right) (p^2 + \Delta)^{-2}. \quad (13a)$$

Дальнейшее дифференцирование позволяет получить значения интегралов, содержащих большее число множителей k в числителе и включающих высшие степени $(k^2 - 2pk - \Delta)$ в знаменателе подинтегрального выражения.

Рассмотренные до сих пор интегралы содержали только один множитель в знаменателе подинтегрального выражения. Для перехода к случаю наличия двух множителей учтем тождество

$$a^{-1}b^{-1} = \int_0^1 dx (ax + b(1-x))^{-2} \quad (14a)$$

(использованное в одной из работ Швингера при исследовании гауссовских интегралов). Это тождество позволяет выразить интегралы с двумя множителями в знаменателе подинтегрального выражения через интегралы с одним множителем в знаменателе подинтегрального выражения. В случае высших степеней a и b мы будем использовать тождества, подобные тождеству

$$a^{-2}b^{-1} = \int_0^1 2x dx (ax + b(1-x))^{-3}, \quad (15a)$$

получающиеся из тождества (14а) последовательным дифференцированием по a или по b .

Для преобразования интегралов вида

$$8i \int (1; k_\sigma) d^4k (k^2 - 2p_1k - \Delta_1)^{-2} (k^2 - 2p_2k - \Delta_2)^{-1} \quad (16a)$$

запишем, используя формулу (15а), тождество

$$(k^2 - 2p_1x - \Delta_1)^{-2} (k^2 - 2p_2k - \Delta_2)^{-1} = \int_0^1 2x dx (k^2 - 2p_xk - \Delta_x)^{-3},$$

где

$$p_x = xp_1 + (1-x)p_2 \quad \text{и} \quad \Delta_x = x\Delta_1 + (1-x)\Delta_2 \quad (17a)$$

(отметим, что Δ_x не равно $m^2 - p_x^2$). Таким образом, интеграл (16а) равен интегралу $8i \int_0^1 2x dx \int (1; k_\sigma) d^4k (k^2 - 2p_xk - \Delta_x)^{-3}$, который можно оценить с помощью (12а); именно, получаем, что интеграл (16а) равен

$$\int_0^1 (1; p_{x\sigma}) 2x dx (p_x^2 + \Delta_x)^{-1}, \quad (18a)$$

где величины p_x и Δ_x определяются формулой (17а). Интеграл (18а) является элементарным интегралом от отношения двух полиномов, причем полином, стоящий в знаменателе, есть полином второй степени по x . Несмотря на это получающееся без труда после окончательного интегрирования общее выражение представляет собой довольно сложную комбинацию корней и логарифмов.

Значение других интегралов также может быть получено с помощью дифференцирования по параметру. В частности, дифференцирование (16а) или (18а) по параметрам Δ_2 или $p_{2\tau}$ дает соотношение

$$8i \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) d^4k (k^2 - 2p_1k - \Delta_1)^{-2} (k^2 - 2p_2k - \Delta_2)^{-2} = \\ = - \int_0^1 \left(1; p_{\sigma\sigma}; p_{\sigma\sigma} p_{\sigma\tau} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (p_x^2 + \Delta_x) \right) 2x(1-x) dx (p_x^2 + \Delta_x)^{-2}, \quad (19a)$$

с правой стороны которого опять стоят элементарные интегралы.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда второй множитель подинтегрального выражения равен $(k^2 - L)^{-2}$, а в первом множителе положено $p_1 = p$ и $\Delta_1 = \Delta$; тогда $p_x = xp$ и $\Delta_x = x\Delta + (1-x)L$. При этом получается

$$8i \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) d^4k (k^2 - L)^{-2} (k^2 - 2pk - \Delta)^{-2} = \\ = - \int_0^1 \left(1; xp_\sigma; x^2 p_\sigma p_\tau - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (x^2 p^2 + \Delta_x) \right) 2x(1-x) dx (x^2 p^2 + \Delta_x)^{-2}. \quad (20a)$$

Получившиеся интегралы с тремя множителями в подинтегральном выражении могут быть с помощью тождества (14а) сведены к интегралам, содержащим в подинтегральном выражении два множителя, т. е. могут быть сведены к интегралам с двумя параметрами (см., например, приведенное ниже исследование для случая радиационных поправок к формулам рассеяния).

Предлагаемый в данной статье метод вычислений прост при применении к процессам низшего порядка. С возрастанием порядка рассматриваемых процессов резко возрастает количество различных усложнений, так что данный метод в его настоящей форме в таких случаях становится практически неприменимым.

А. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ

Интеграл собственной энергии (19) имеет вид

$$\frac{e^2}{\pi i} \int \gamma_\mu (p - k - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4k C(k^2); \quad (19)$$

при его рассмотрении [в случае использования равенства (8а)] требуется выполнить интегрирование по L от 0 до λ^2 выражения

$$\int \gamma_\mu (p - k + m) \gamma_\mu d^4k (k^2 - L)^{-2} (k^2 - 2pk)^{-1},$$

так как имеет место равенство $(p - k)^2 - m^2 = k^2 - 2pk$, поскольку $p^2 = m^2$. Последнее выражение имеет вид интеграла (16а) с $\Delta_1 = L$, $p_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $p_2 = p$; из (18а) в этом случае вытекает [так как $p_x = (1-x)p$, $\Delta_x = xL$]

$$8i \int (1; k_\sigma) d^4k (k^2 - L)^{-2} (k^2 - 2pk)^{-1} = \int_0^1 (1; (1-x)p_\sigma) 2x dx ((1-x)^2 m^2 + xL)^{-1}.$$

Выполнив интегрирование по L [см. формулу (8)], находим

$$8i \int (1; k_\sigma) d^4k k^{-2} C(k^2) (k^2 - 2pk)^{-1} = \int_0^1 (1; (1-x)p_\sigma) 2 dx \ln \frac{x\lambda^2 + (1-x)^2 m^2}{(1-x)^2 m^2}.$$

Предположив теперь, что $\lambda^2 \gg m^2$, пренебрежем в аргументе логарифма членом $(1-x)^2 m^2$ по сравнению с членом $x\lambda^2$; при подобном пренебрежении

этот аргумент становится равным $(\lambda^2/m^2)[x/(1-x)^2]$. Далее, поскольку

$$\int_0^1 dx \ln(x(1-x)^{-2}) = 1 \text{ и } \int_0^1 (1-x) dx \ln(x(1-x)^{-2}) = -\frac{1}{4}, \text{ находим}$$

$$8i \int (1; k_\sigma) k^{-2} C(k^2) d^4k (k^2 - 2pk)^{-1} = \left(2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 2; p_\sigma \left(\ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right) \right).$$

Подстановка этого результата в интеграл (19) после замены множителя $(p-k-m)^{-1}$ на $(p-k+m)(k^2-2pk)^{-1}$ дает

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{8\pi} \gamma_\mu \left[(p+m) \left(2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 2 \right) - p \left(\ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{1}{2} \right) \right] \gamma_\mu = \\ = \frac{e^2}{8\pi} \left[8m \left(\ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 1 \right) - p \left(2 \ln \frac{\lambda^2}{m^2} + 5 \right) \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

при этом для исключения матриц γ_μ использовались соотношения (4а). Последнее выражение согласуется с приведенным в тексте выражением (20) и дает после замены p на m значение собственной энергии (21).

Б. ПОПРАВКИ К ФОРМУЛАМ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ

Для определения члена (12), входящего в выражение для рассеяния без излучения, после приведения матричного знаменателя к рациональному виду и использования равенств $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ требуется, как мы видели, рассмотреть интегралы (9а). Подинтегральное выражение такого интеграла содержит в знаменателе три множителя, которые мы учтем в два этапа. Объединим сначала с помощью тождества (14а) множители $(k^2 - 2p_1k)$ и $(k^2 - 2p_2k)$, введя параметр y следующим образом,

$$(k^2 - 2p_1k)^{-1} (k^2 - 2p_2k)^{-1} = \int_0^1 dy (k^2 - 2p_yk)^{-2},$$

где

$$p_y = yp_1 + (1-y)p_2. \quad (21a)$$

Теперь нам, следовательно, нужно найти значения интегралов

$$8i \int (1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau) d^4k (k^2 - L)^{-2} (k^2 - 2p_yk)^{-2}, \quad (22a)$$

а затем проинтегрировать эти значения по y от 0 до 1. Интегралы (22а) сразу получаются из интегралов (20а), если положить в них $p = p_y$, $\Delta = 0$; именно,

$$\begin{aligned} \text{интеграл (22a)} = - \int_0^1 \int_0^1 (1; xp_{y\sigma}; x^2 p_{y\sigma} p_{y\tau} - \\ - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} (x^2 p_y^2 + (1-x)L)) 2x(1-x) dx (x^2 p_y^2 + L(1-x))^{-2} dy. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к интегрированию по L , как это требуется согласно (8а). Первый элемент (1) из скобки $(1; k_\sigma; k_\sigma k_\tau)$ не приводит ни к каким трудностям при больших L ; однако при L , равном нулю, в подинтегральном выражении остается величина $x^{-2} p_y^{-2}$, вызывающая расходимость интеграла по x , когда x стремится к нулю. Для анализа такой „инфракрасной катастрофы“ нижний предел в интеграле по L заменяется на λ_{\min}^2 ; при этом для последнего члена должен быть сохранен верхний предел, равный λ^2 . При предположении $\lambda_{\min}^2 \ll p_y^2 \ll \lambda^2$ интегрирование остающихся интегралов по x проводится, как и

в случае собственной энергии, тривиальным образом. В результате получим

$$-8i \int (\mathbf{k}^2 - \lambda_{\min}^2)^{-1} d^4 k C(\mathbf{k}^2 - \lambda_{\min}^2) (\mathbf{k}^2 - 2p_1 k)^{-1} \times \\ \times (\mathbf{k}^2 - 2p_2 k)^{-1} = \int_0^1 p_y^{-2} dy \ln \frac{p_y^2}{\lambda_{\min}^2}, \quad (23a)$$

$$-8i \int k_\sigma k^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2) (\mathbf{k}^2 - 2p_1 k)^{-1} (\mathbf{k}^2 - 2p_2 k)^{-1} = 2 \int_0^1 p_{y\sigma} p_y^{-2} dy, \quad (24a)$$

$$-8i \int k_\sigma k_\tau k^{-2} d^4 k C(\mathbf{k}^2) (\mathbf{k}^2 - 2p_1 k)^{-1} (\mathbf{k}^2 - 2p_2 k)^{-1} = \\ = \int_0^1 p_{y\sigma} p_{y\tau} p_y^{-2} dy - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} \int_0^1 dy \ln \lambda^2 p_y^{-2} + \frac{1}{4} \delta_{\sigma\tau}. \quad (25a)$$

Интегрирование по y дает

$$\int_0^1 p_y^{-2} dy \ln (p_y^2 \lambda_{\min}^{-2}) = 4 (m^2 \sin 2\theta)^{-1} \left[\theta \ln (m \lambda_{\min}^{-1}) - \int_0^\theta \alpha \operatorname{tg} \alpha d\alpha \right], \quad (26a)$$

$$\int_0^1 p_{y\sigma} p_y^{-2} dy = \theta (m^2 \sin 2\theta)^{-1} (p_{1\sigma} + p_{2\sigma}), \quad (27a)$$

$$\int_0^1 p_{y\sigma} p_{y\tau} p_y^{-2} dy = \theta (2m^2 \sin 2\theta)^{-1} (p_{1\sigma} + p_{1\tau})(p_{2\sigma} + p_{2\tau}) + q^{-2} q_\sigma q_\tau (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta), \quad (28a)$$

$$\int_0^1 dy \ln (\lambda^2 p_y^{-2}) = \ln \left(\frac{\lambda^2}{m^2} \right) + 2(1 - \theta \operatorname{ctg} \theta). \quad (29a)$$

Указанное интегрирование по y выполнялось следующим образом. В связи с тем, что имеет место равенство $p_2 = p_1 + q$, где q —импульс поля, из равенств $p_2^2 = p_1^2 = m^2$ вытекает, что $2p_1 q = -q^2$, так что $p_y^2 = m^2 - q^2 y(1-y)$, поскольку $p_y = p_1 + q(1-y)$. Оказывается также удобным произвести подстановку $2y-1 = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \theta$, где θ определяется равенством $4m^2 \sin^2 \theta = q^2$, поскольку в этом случае $p_y^2 = m^2 (\sec^2 \alpha / \sec^2 \theta)$ и $p_y^{-2} dy = (m^2 \sin 2\theta)^{-1} d\alpha$, причем α изменяется от $-\theta$ до $+\theta$. После подстановки полученных результатов в исходную формулу для рассеяния (2a) получается выражение (22), причем при преобразованиях многократно используется то обстоятельство, что действие оператора p_1 на функцию начального состояния и аналогично действие оператора p_2 на функцию конечного состояния эквивалентно умножению этих функций на m . [Для упрощения выражения

$$\gamma_\mu p_2 a p_1 \gamma_\mu = -2p_1 a p_2 = -2(p_2 - q) a (p_1 + q) = -2(m - q) a (m + q)$$

члены вида $q a q = -q^2 a + 2(aq)q$ могут быть заменены на $-q^2 a$, поскольку матричный элемент для $q = p_2 - p_1 = m - m$ равен нулю.]

В случае члена перенормировки нужно взять соответствующие интегралы при специальном выборе $q = 0$.

В. ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

При рассмотрении поляризации вакуума требуется вычислить значения $J_{\mu\nu}$ (32), и (32'), т. е. в данном случае—значение интеграла

$$J_{\mu\nu}(m^2) = -\frac{e^2}{\pi i} \int \operatorname{tr} \left[\gamma_\mu \left(p - \frac{1}{2} q + m \right) \gamma_\nu \left(p + \frac{1}{2} q + m \right) \right] d^4 p \times \\ \times \left(\left(p - \frac{1}{2} q \right)^2 - m^2 \right)^{-1} \left(\left(p + \frac{1}{2} q \right)^2 - m^2 \right)^{-1}, \quad (32)$$

где мы заменили величину p на $p - 1/2 q$ с целью некоторого упрощения подсчета. Поясним метод вычисления на примере интеграла

$$I(m^2) = \int p_\sigma p_\tau d^4 p \left(\left(p - \frac{1}{2} q \right)^2 - m^2 \right)^{-1} \left(\left(p + \frac{1}{2} q \right)^2 - m^2 \right)^{-1}.$$

Множители в знаменателе $p^2 - pq - m^2 + \frac{1}{4} q^2$ и $p^2 + pq - m^2 + \frac{1}{4} q^2$ объединяются, как обычно, с помощью тождества (8а), причем для симметризации производится подстановка $x = \frac{1}{2}(1 + \eta)$, $(1 - x) = \frac{1}{2}(1 - \eta)$ и интегрирование производится по η от -1 до $+1$.

$$I(m^2) = \int_{-1}^{+1} p_\sigma p_\tau d^4 p \left(p^2 - \eta pq - m^2 + \frac{1}{4} q^2 \right)^{-2} \frac{d\eta}{2}. \quad (30a)$$

Значение полученного интеграла по p не может быть найдено при помощи наших формул, так как он сильно расходится. Однако, как это было указано в разделе 7 [см. формулу (32)], нам нужно не значение $I(m^2)$, а значение интеграла

$$\int_0^\infty [I(m^2) - I(m^2 + \lambda^2)] G(\lambda) d\lambda. \text{ Мы можем вычислить разность } I(m^2) - I(m^2 + \lambda^2),$$

подсчитав сначала производную $I'(m^2 + L)$ от I по m^2 при значении аргумента, равном $m^2 + L$, и затем проинтегрировав эту производную по L от нуля до λ^2 . Продифференцировав (30а) по m^2 , находим

$$I'(m^2 + L) = \int_{-1}^{+1} p_\sigma p_\tau d^4 p \left(p^2 - \eta pq - m^2 - L + \frac{1}{4} q^2 \right)^{-3} d\eta.$$

Этот интеграл также расходится, но мы можем продифференцировать его снова, причем получается уже сходящийся интеграл

$$\begin{aligned} I''(m^2 + L) &= 3 \int_{-1}^{+1} p_\sigma p_\tau d^4 p \left(p^2 - \eta pq - m^2 - L + \frac{1}{4} q^2 \right)^{-4} d\eta = \\ &= -(8i)^{-1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{4} \eta^2 q_\sigma q_\tau D^{-2} - \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} D^{-1} \right) d\eta \end{aligned} \quad (31a)$$

(здесь $D = \frac{1}{4}(\eta^2 - 1)q^2 + m^2 + L$), значение которого находится из формулы (13а), если положить там $p = \frac{1}{2} \eta q$ и $\Delta = m^2 + L - \frac{1}{4} q^2$. Далее, для получения I' мы можем взять неопределенный интеграл от I'' по L и выбрать любую подходящую произвольную постоянную интегрирования. Это связано с тем, что наличие добавочной постоянной C в производной I' приводит к появлению в выражении $I(m^2) - I(m^2 + \lambda^2)$ добавочного члена $-C\lambda^2$, обращаемого в нуль после умножения на $G(\lambda)d\lambda$ и интегрирования по λ , так как $\int_0^\infty \alpha^2 G(\alpha) d\alpha = 0$. Отсюда следует, что появление логарифма после интегрирования по L выражения (31а) не вызывает в действительности каких-либо трудностей. Мы можем положить

$$I'(m^2 + L) = (8i)^{-1} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{4} \eta^2 q_\sigma q_\tau D^{-1} + \frac{1}{2} \delta_{\sigma\tau} \ln D \right] d\eta + C\delta_{\sigma\tau},$$

после чего второе интегрирование по L и последующее интегрирование по η не составляют труда. В итоге получается следующий результат:

$$\begin{aligned}
 & -8i \int p_\tau p_\tau d^4 p \left(\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} = \\
 & = (q_\sigma q_\tau - \delta_{\sigma\tau} q^2) \left[\frac{1}{9} - \frac{4m^2 - q^2}{3q^2} \left(1 - \frac{\theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) + \frac{1}{6} \ln \frac{\lambda^2}{m^2} \right] \times \\
 & \quad \times \delta_{\sigma\tau} [(\lambda^2 + m^2) \ln(\lambda^2 m^{-2} + 1) - C' \lambda^2], \quad (32a)
 \end{aligned}$$

причем мы предположили $\lambda^2 \gg m^2$ и объединили ряд не зависящих от λ^2 (но, вообще говоря, зависящих от q^2) членов в произвольную постоянную C' . Кроме того, было положено $q^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$.

Совершенно сходным образом может быть взят интеграл в случае, когда в числителе стоит величина m^2 . При этом, конечно, также оказывается необходимым дифференцировать по m^2 и подсчитывать I' и I'' . После выполнения указанных операций получается следующий результат:

$$\begin{aligned}
 & -8i \int m^2 d^4 p \left(\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} = \\
 & = 4m^2 (1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) - \frac{q^2}{3} + 2(\lambda^2 + m^2) \ln(\lambda^2 m^{-2} + 1) - C'' \lambda^2, \quad (33a)
 \end{aligned}$$

где C'' — еще одна несущественная постоянная. Для окончательного решения задачи требуется теперь взять интеграл

$$\begin{aligned}
 & -8i \int (1; p_\sigma) d^4 p \left(\left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} \left(\left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q} \right)^2 - m^2 \right)^{-1} = \\
 & = (1, 0) (4(1 - \theta \operatorname{ctg} \theta) + 2 \ln(\lambda^2 m^{-2})). \quad (34a)
 \end{aligned}$$

Умноженное на m^2 значение интеграла (34a) отличается, очевидно, от значения (33a), поскольку выражения, стоящие здесь с правой стороны равенства, фактически равны не интегралам, стоящим слева, а разности между указанными интегралами и интегралами, получающимися из них при замене m^2 на $m^2 + \lambda^2$.

Объединив полученные результаты в выражение (32), отбросив постоянные C' и C'' и подсчитав след, мы приходим к выражению (33). Следы подсчитываются в этом случае обычным образом, причем учитывается, что след любого произведения нечетного числа матриц γ равен нулю и что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ для любых матриц A и B . Имеет также место равенство $\operatorname{tr}(1) = 4$, так что

$$\frac{1}{4} \operatorname{tr}[(\mathbf{p}_1 + m_1)(\mathbf{p}_2 - m_2)] = p_1 p_2 + m_1 m_2, \quad (35a)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \operatorname{tr}[(\mathbf{p}_1 + m_1)(\mathbf{p}_2 - m_2)(\mathbf{p}_3 + m_3)(\mathbf{p}_4 - m_4)] = (p_1 p_2 - m_1 m_2)(p_3 p_4 - m_3 m_4) - \\
 & - (p_1 p_3 - m_1 m_3)(p_2 p_4 - m_2 m_4) + (p_1 p_4 - m_1 m_4)(p_2 p_3 - m_2 m_3); \quad (36a)
 \end{aligned}$$

при этом \mathbf{p}_i и m_i могут быть соответственно любым четырехмерным вектором и любой постоянной.

Представляет интерес, что в данном случае сами по себе исключаются члены вида $\lambda^2 \ln \lambda^2$, так что перенормировка заряда зависит от λ^2 только логарифмически. Подобное положение не имеет места в случае мезонных теорий. Электродинамика представляет собой любопытное исключение по относительной слабости появляющихся в ней расходимостей.

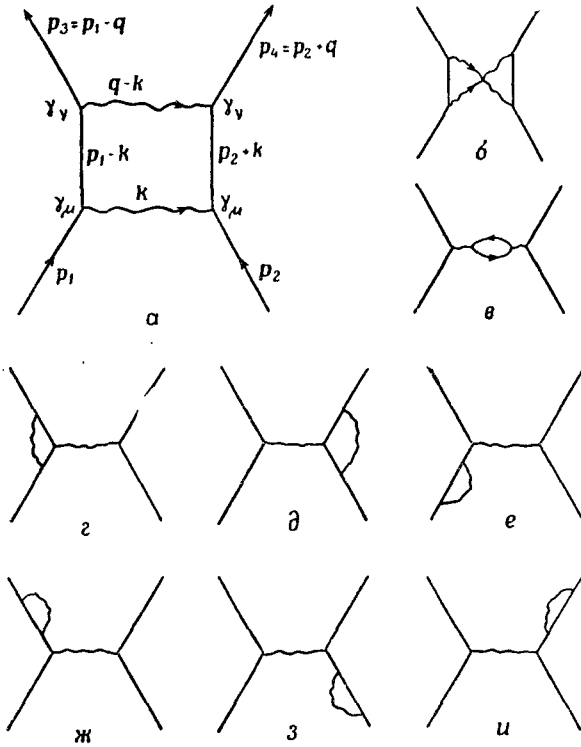
Г. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ

Матричные элементы для более сложных задач могут быть получены так же, как и в простейших случаях. Мы проиллюстрируем метод на примерах получения поправок высшего порядка к формулам для меллеровского рассеяния и к формулам для комптоновского рассеяния и на примере получения поправок высшего порядка к выражению для взаимодействия между нейтроном и электромагнитным полем.

Рассмотрим в случае меллеровского рассеяния два электрона, один из которых находится в состоянии u_1 с импульсом p_1 , а другой — в состоянии u_2 с импульсом p_2 . Пусть впоследствии они обнаруживаются в состояниях u_3 с импульсом p_3 и соответственно u_4 с импульсом p_4 . Это может иметь место благодаря (первый порядок по $e^2/\hbar c$) возможности обмена квантом с импульсом $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$ между данными двумя электронами [см. соотношение (4) и фиг. 1]. Матричный элемент для такого процесса пропорционален [согласно переводу (4) в импульсное пространство] выражению

$$(\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_1) q^{-2}. \quad (37a)$$

Рассмотрим поправки к выражению (37a) в следующем приближении по $e^2/\hbar c$. [Имеется также возможность того, что электрон, находившийся сначала в состоянии 2, переходит в состояние 3, а электрон, находившийся в состоянии 1, переходит в состояние 4 благодаря обмену квантом с импульсом $p_3 - p_2$. Амплитуду подобного процесса $(\bar{u}_4 \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_3 \gamma_\mu u_2) \times (p_3 - p_2)^{-2}$ следует, соответственно принципу Паули, вычесть из выражения (37a). Аналогичное положение имеет место во всех порядках, так что достаточно подробно вычислить только поправочный член к выражению (37a) и затем вычесть из него аналогичный член, в котором переставлены состояния 3 и 4.]



Фиг. 8. Взаимодействие между двумя электронами с точностью до $e^2/\hbar^2 c^2$.

В вычислениях складываются составляющие, соответствующие каждой из диаграмм, включающей два виртуальных кванта.

Одна из причин, вызывающих появление поправок к (37a), связана с возможностью обмена двумя квантами, подобно тому как это проиллюстрировано на фиг. 8, а. Полный матричный элемент для всех обменов подобного типа равен

$$\frac{e^2}{\pi i} \int (\bar{u}_3 \gamma_\nu (p_1 - k - m)^{-1} \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\nu (p_2 + k - m)^{-1} \gamma_\mu u_2) k^{-2} (q - k)^{-2} d^4 k, \quad (38a)$$

как это следует из фиг. 8, а и из общего правила, что электрону с импульсом p между взаимодействиями γ_μ соответствует амплитуда $(p - m)^{-1}$, а кванту с импульсом k — амплитуда k^{-2} . Интегрируя по $d^4 k$ и суммируя по μ и ν , мы учитываем все различные возможности обмена типа, изображенного на фиг. 8, а. Если поглощение γ_μ кванта с импульсом k электроном 2 происходит после (по времени) поглощения γ_ν кванта с импульсом $q - k$, то это соответствует появлению позитронного виртуального состояния с импульсом $p_2 + k$, так что выражение (38a) разлагается на более чем тридцать членов при применении обычного метода анализа.

Благодаря интегрированию в выражении (38a) мы учитываем все возможные изменения описываемого фиг. 8, а процесса, которые сохраняют порядок событий вдоль траекторий. Однако при этом мы не включаем возможностей, описываемых фиг. 8, б. Соответствующая составляющая амплитуды, как легко проверить

с помощью диаграммы, равна

$$\frac{e^2}{\pi i} \int (\bar{u}_3 \gamma_\nu (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\mu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 + \mathbf{q} - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu u_2) \times \\ \times k^{-2} (q - k)^{-2} d^4 k. \quad (39a)$$

Вообще следует просуммировать составляющие от всех возможных путей протекания данного события. Это означает, что следует взять с равным весом сумму интегралов, соответствующих всем топологически различным диаграммам.

К составляющим рассматриваемого порядка приводит также возможность, описываемая фиг. 8, з, которой соответствует член

$$\frac{e^2}{\pi i} \int (\bar{u}_3 \gamma_\nu (\mathbf{p}_3 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\mu (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\nu u_1) (\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) k^{-2} q^{-2} d^4 k.$$

Входящий сюда интеграл по \mathbf{k} точно совпадает с получающимся при рассмотрении радиационных поправок к формулам для рассеяния интегралом (12), значение которого было нами найдено. Данный член объединяется с членами перенормировки, получающимися вследствие эффектов, вызываемых изменением массы, и членами, отвечающими фиг. 8, е и 8, ж. Фиг. 8, д, 8, з и 8, и анализируются аналогичным образом.

Наконец член, соответствующий фиг. 8, в, связан, очевидно, с поляризацией вакуума, так что после выполнения в этом члене интегрирования получается величина, пропорциональная $(\bar{u}_4 \gamma_\mu u_2) (\bar{u}_3 \gamma_\nu u_1) J_{\mu\nu} q^{-4}$. После перенормировки заряда слагаемое с $\ln(\lambda/m)$ в выражении для $J_{\mu\nu}$ (33) исключается, и рассматриваемый член перестает зависеть от обрезания.

Единственными новыми интегралами, которые нам требуется вычислить, являются сходящиеся интегралы (38а) и (39а). Эти интегралы могут быть преобразованы посредством приведения знаменателя подинтегрального выражения к рациональному виду и объединения стоящих в нем множителей с помощью тождества (14а). Например, в подинтегральное выражение (38а) входят множители $(k^2 - 2p_1 k)^{-1} (k^2 + 2p_2 k)^{-1} k^{-2} (q^2 + k^2 - 2qk)^{-2}$. Первую пару множителей можно объединить соответственно тождеству (14а) с введением параметра x . Вторую пару множителей можно объединить с помощью тождества, получающегося после дифференцирования тождества (15а) по b ; входящий при этом параметр обозначим через y . В результате в подинтегральном выражении получается множитель $(k^2 - 2p_x k)^{-2} (k^2 + yq^2 - 2yqk)^{-4}$, так что интегралы по $d^4 k$ могут быть теперь взяты с помощью методов, описанных ранее в настоящем приложении. Дальнейшее интегрирование по параметрам x и y является технически очень сложным и детально выполнено не было.

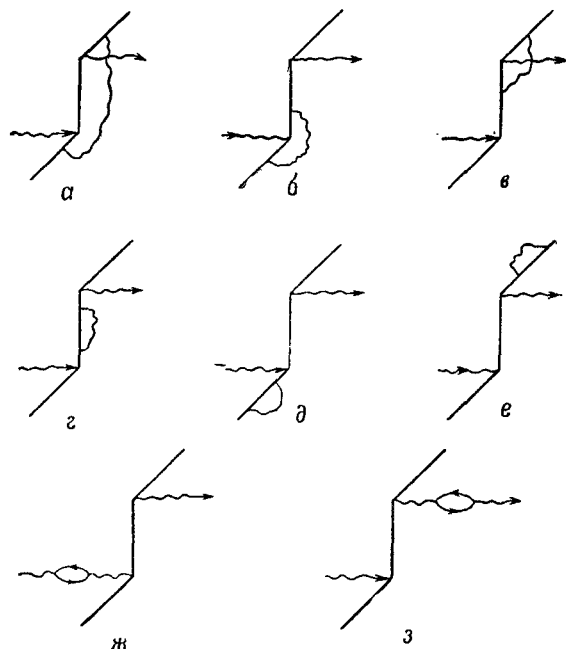
В случае рассмотрения заряженных мезонов количество членов в выражении амплитуды часто значительно уменьшается. Так, например, при рассмотрении взаимодействия между протонами, вызванного обменом двумя мезонами, следует учитывать только член, аналогичный члену, описываемому фиг. 8, б. В частности, член, соответствующий фиг. 8, а, отпадает, потому что если первый протон испустил положительный мезон, то второй протон не сможет прямо поглотить этот мезон, так как положительные мезоны поглощаются только нейтронами.

В качестве второго примера рассмотрим радиационные поправки к формуле для комптоновского рассеяния. Как следует из рассмотрения выражения (15) или фиг. 5, подобное рассеяние описывается двумя членами, так что мы можем рассматривать по отдельности поправки к каждому из этих членов. Фиг. 9 иллюстрирует типы членов, возникающих благодаря поправкам к члену фиг. 5, а. Если обозначить через \mathbf{k} импульс виртуального кванта, то фиг. 9, а будет соответствовать члену

$$\int \gamma_\mu (\mathbf{p}_2 - \mathbf{k} - m)^{-1} \mathbf{e}_2 (\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \mathbf{e}_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{k} - m)^{-1} \gamma_\mu k^{-2} d^4 k,$$

интеграл в котором сходится без обрезания и может быть сведен к простым интегралам с помощью методов, описанных в настоящем приложении.

Остальные члены определяются сравнительно просто. Члены, соответствующие фиг. 9, б и 9, в, тесно связаны с выражениями для радиационных поправок



Ф и г. 9. Радиационные поправки к члену выражения для комптоновского рассеяния, соответствующему фиг. 5, а.

Фиг. 9, ж и з, равны нулю, так как поляризация вакуума не влияет на свободные световые кванты; $q_1^2 = 0$, $q_2^2 = 0$. Окончательное объединенное выражение не зависит от параметра обрезания λ .

В получающемся результате имеет место „инфракрасная катастрофа“. Если произвести обрезание на нижнем пределе, то эффект, пропорциональный $\ln(m/\lambda_{\min})$, определяется величиной

$$\frac{e^2}{\pi} \ln \frac{m}{\lambda_{\min}} (1 - 2b \operatorname{ctg} 2\theta), \quad (40a)$$

умноженной на неисправленную амплитуду, причем $(p_2 - p_1)^2 = 4m^2 \sin^2 \theta$.

Данное выражение совпадает с радиационной поправкой к рассеянию с отклонением $p_2 - p_1$. Подобный метод физически очевиден, так как кванты, соответствующие длинным волнам, не должны влиять на промежуточные состояния, существующие короткое время. Инфракрасные эффекты вызываются [17] конечным временем установления поля, при переходе от асимптотически убывающего кулоновского поля, соответствующего электрону с импульсом p_1 перед столкновением, к полю, соответствующему движущемуся в новом направлении электрону с импульсом p_2 после столкновения.

Окончательное выражение для поправки является очень сложным и включает трансцендентные интегралы.

В качестве последнего примера рассмотрим взаимодействие нейтрона с электромагнитным полем, обязанное тому обстоятельству, что нейтрон может испускать виртуальный отрицательный мезон. Выберем, в частности, случай псевдоскалярных мезонов с псевдовекторной связью. Изменение амплитуды, вызванное действием электромагнитного поля с потенциалом $A = a \exp(-iqx)$, определяет рассеяние нейтронов этим полем. В пределе при малых q рассеяние будет определяться выражением $aq - qa$, которое представляет взаимодействие с полем частицы, обладающей магнитным моментом. Взаимодействие первого порядка между электроном и нейтроном определяется с помощью таких же вычислений,

как и при рассмотрении обмена квантом между электроном и нуклоном. В последнем случае a_μ равно q^{-2} , умноженному на матричный элемент γ_μ между функциями начального и конечного состояния электрона, импульсы в которых отличаются друг от друга на q .

Рассматриваемый эффект может произойти вследствие возможности того, что нейтрон с импульсом p_1 , испустив отрицательный мезон, превратится в протон, который взаимодействует с полем и затем вновь поглощает мезон (фиг. 10, а). Матричный элемент для такого процесса имеет вид ($p_2 = p_1 + q$)

$$\int (\gamma_5 \mathbf{k})(p_2 - \mathbf{k} - M)^{-1} a(p_1 - \mathbf{k} - M)^{-1} (\gamma_5 \mathbf{k})(\mathbf{k}^2 - \mu^2)^{-1} d^4 k. \quad (41a)$$

С другой стороны, возможно, что с полем взаимодействуют мезоны. Примем, что это взаимодействие происходит аналогично взаимодействию со скалярным полем, подчиняющимся уравнению Клейна — Гордона (35) (фиг. 10, б):

$$- \int (\gamma_5 \mathbf{k}_2)(p_1 - \mathbf{k}_1 - M)^{-1} (\gamma_5 \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}_2^2 - \mu^2)^{-1} (k_2 a + k_1 a)(\mathbf{k}_1^2 - \mu^2)^{-1} d^4 k_1, \quad (42a)$$

где мы положили $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + q$. Изменение знака вызвано тем, что виртуальные мезоны отрицательны. Наконец, имеются два члена в амплитуде, появляющиеся вследствие наличия части $\gamma_5 a$ в псевдовекторной связи (фиг. 10, в и 10, а):

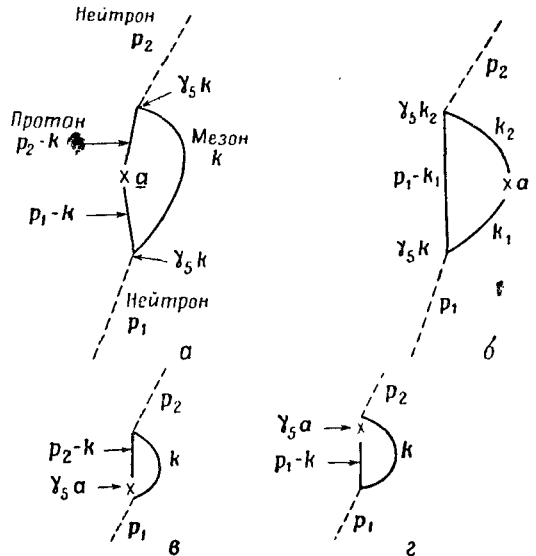
$$\int (\gamma_5 \mathbf{k})(p_2 - \mathbf{k} - M)^{-1} \times (\gamma_5 a)(\mathbf{k}^2 - \mu^2)^{-1} d^4 k, \quad (43a)$$

$$\int (\gamma_5 a)(p_1 - \mathbf{k} - M)^{-1} \times (\gamma_5 \mathbf{k})(\mathbf{k}^2 - \mu^2)^{-1} d^4 k. \quad (44a)$$

Значение каждого из этих интегралов может быть получено при помощи рассмотренного способа использования множителей сходимости. При разложении общего результата по степеням q первый член, не зависящий от обрезания, дает магнитный момент нейтрона, а следующий член, логарифмически зависящий от параметра обрезания, дает амплитуду рассеяния медленных электронов на нейтронах.

Приведенные выражения могут быть объединены и преобразованы

к несколько более простому виду еще до выполнения интегрирования. Подобное преобразование делает в известной мере более простым интегрирование, а также выясняет связь со случаем псевдоскалярных сил. Так, например, в выражении (41а) второй из множителей $\gamma_5 \mathbf{k}$ может быть записан в виде $\gamma_5 (\mathbf{k} - p_1 + M)$, поскольку при действии на функцию начального состояния нейтрона $p_1 = M$. Последнее выражение равно сумме двух слагаемых: $(p_1 - \mathbf{k} - M) \gamma_5 + 2M \gamma_5$, поскольку γ_5 антикоммутирует с p_1 и \mathbf{k} . Первое из этих слагаемых при подстановке в (41а) дает член, сокращающийся с членом (43а). Аналогичным образом первый множитель $\gamma_5 \mathbf{k}$ в выражении (41а) может быть записан в виде суммы $-2M \gamma_5 - \gamma_5 (p_2 - \mathbf{k} - M)$, после подстановки которой в выражение (41а) один



Фиг. 10. Согласно мезонной теории, нейтрон испустив сначала виртуальный заряженный мезон, взаимодействует с электромагнитным потенциалом a . Данная диаграмма иллюстрирует случай псевдоскалярных мезонов с псевдовекторной связью (приложение, раздел Г).

из получающих членов не содержит более в подинтегральном выражении множителя $(p_0 - k - M)^{-1}$ и может быть объединен с аналогичным членом из (44а). Подобным способом заменяются также множители $\gamma_5 k_1$ и $\gamma_5 k_2$ в члене (42а). В окончательном выражении остаются члены вида (41а) и (42а), в которых только вместо множителя $\gamma_5 k$ стоит соответствующий псевдоскалярной связи множитель $2M\gamma_5$ и нет членов вида (43а) и (44а); кроме того, в окончательном выражении проявляется член, представляющий различие между псевдовекторной и псевдоскалярной связью. Этот последний член в отличие от остальных членов, соответствующих псевдоскалярной связи и не чувствительных к обрезанию, логарифмически зависит от параметра обрезания. Наличие данного члена влияет на электронно-нейтронное взаимодействие; однако магнитный момент протона от него не зависит.

Взаимодействие протона с электромагнитным полем можно проанализировать аналогичным образом. При этом на электромагнитные свойства протона виртуальные мезоны влияют даже в том случае, когда они нейтральны. Дело здесь обстоит так же, как и при рассмотрении обусловленных виртуальными фотонами радиационных поправок к формулам рассеяния электронов. Сумма магнитных моментов нейтрона и протона в случае заряженных мезонов равна моменту протона, получающемуся в предположении, что мезоны нейтральны. Действительно, как легко видеть из сравнения соответствующих диаграмм, для любых q матрица рассеяния для протонов в случае нейтральных мезонов равна с точностью до первого порядка относительно электромагнитного потенциала сумме матриц рассеяния для нейтрона и протона, получающихся если считать мезоны заряженными. Это положение сохраняет силу при любом выборе различных комбинаций связи нуклеонов с мезонным полем (при пренебрежении разностью масс нейтрона и протона).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейнман R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). [См. статью III настоящего сборника.]
2. Фейнман R. P., Phys. Rev., **74**, 939 (1948).
3. Фейнман R. P., Phys. Rev., **74**, 1430 (1948).
4. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948); Phys. Rev., **75**, 651 (1949). [См. статью II, настоящего сборника.]
5. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486 (1949). [См. перевод в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950.]
6. Фейнман R. P., Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
7. Groenewold H. J., Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings, **LII**, 3 (226), 1949.
8. Wheeler J. A., Фейнман R. P., Rev. Mod. Phys., **17**, 157 (1945).
9. Bethe H. A., Phys. Rev., **72**, 339 (1947). [См. перевод статьи в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, И. Л. 1950.]
10. French J. B., Welsskopf V. F., Phys. Rev., **75**, 1240 (1949).
11. Kroll N. H., Lamb W. E., Phys. Rev., **75**, 388 (1949).
12. Lewis H. W., Phys. Rev., **73**, 173 (1948).
13. Uehling E. A., Phys. Rev., **48**, 55 (1935); Serber P., Phys. Rev., **48**, 45 (1935).
14. Pauli W., Rev. Mod. Phys., **13**, 203 (1940). [См. перевод: Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947.]
15. Slotnick M., Heitler W., Phys. Rev., **75**, 1645 (1949).
16. Bethe H. A., Bull. Am. Phys. Soc., **24**, 3, 73 (1949).
17. Bloch F., Nordstreck A., Phys. Rev., **52**, 54 (1937).

V. S-МАТРИЦА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Ф. ДАЙСОН

F. J. Dyson, Phys. Rev., 75, № 11, 1736 (1949).

На основе ковариантной формулировки квантовой электродинамики, предложенной Томонага, Швингером и Фейнманом, производится общее рассмотрение задач рассеяния с участием электронов, позитронов и фотонов. Процессы рассеяния с порождением или уничтожением данных частиц полностью описываются S -матрицей Гейзенберга. Показано, что элементы этой матрицы могут быть вычислены с помощью последовательного применения теории возмущений с точностью до любого порядка постоянной точкой структуры. Даны подробные правила выполнения подобного вычисления и доказано, что расходимости, связанные с радиационными поправками высшего порядка, могут быть устранены из S -матрицы посредством использования представления о перенормировке массы и заряда.

В статье не рассматривается случай связанных состояний¹⁾ и не дано доказательство сходимости результатов при стремлении порядка приближения теории возмущений к бесконечности.

1. Введение

В предыдущей статье [1]²⁾ теория излучения Томонага [2] и Швингера [3] была применена для подробного исследования проблемы радиационных поправок в случае движения одиночного электрона в заданном внешнем поле. Было показано, что правила вычисления поправок подобного рода тождественны с правилами, полученными Фейнманом [4] в его теории излучения. В задаче с одним электроном радиационные поправки полностью описываются оператором H_T ([1], формула (20)), который выступает как „эффективный потенциал“ после того, как посредством контактного преобразования исключено взаимодействие электрона со своим собственным полем. Различие между теориями Швингера и Фейнмана заключается здесь только в частном выборе представления, в котором вычисляются матричные элементы оператора H_T ([1], раздел 5).

В настоящей статье рассматривается соотношение между теориями Швингера и Фейнмана без ограничения случаям задач с одним электроном. При этих более общих условиях указанные теории скорее дополняют друг друга, чем являются тождественными. Метод Фейнмана представляет собой по существу совокупность правил для вычисления элементов S -матрицы Гейзенберга, соответствующих некоторому физическому процессу; этот метод может быть непосредственно применен при рассмотрении любых процессов рассеяния³⁾. Предложенный Швингером метод определения радиационных поправок основан на выде-

1) Способ распространения формализма на задачи о связанных состояниях был рассмотрен впервые в статье Зальпетера и Бете, помещенной в настоящем сборнике, а также в работе Гель-Мана и Лоу [Gell-Mann, L. A. W., Phys. Rev., 84, 350 (1951)]. Метод релятивистского рассмотрения задач о связанных состояниях приводится также в работах Швингера [Proc. Nat. Acad. Sci., 37, 452, 455 (1951)] и Галанина [ЖЭТФ, 23, № 5, 488 (1952)]. — Прим. ред.

2) Имеющая более частный характер и содержащая ряд неточностей статья [1] помещена в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950. — Прим. ред.

3) Идея об использовании обычной электродинамики в качестве исходного пункта при явном вычислении S -матрицы развивалась ранее Штюкельбергом [5]. Штюкельберг предвосхитил некоторые положения теории Фейнмана и, в частности, использование функ-

лении этих поправок как дополнительных членов в уравнении Шредингера для системы частиц и является особенно удобным в случае задач, относящихся к связанным состояниям. Несмотря на принципиальное различие оба метода при практическом применении связаны с вычислениями сходных выражений; более того, теория, лежащая в основе этих вычислений, оказывается во всех случаях одной и той же. Систематизированные приемы Фейнмана, истолкованию которых посвящена вторая половина статьи [1] и большая часть настоящей статьи, являются, следовательно, пригодными для определения значения не только S -матрицы, но и большинства операторов, входящих в теорию Швингера.

Первостепенная роль, которую играет в данной статье S -матрица, обязана практическому удобству ее использования в качестве связующего звена между способом вычислений Фейнмана и гамильтоновским формализмом квантовой электродинамики. Это практическое удобство сохраняется вне зависимости от того, считать ли в согласии с Гейзенбергом, что S -матрица может заменить гамильтониан, или нет. Остается пока невыясненным вопрос, следует ли автоматически из конечности S -матрицы конечность всех наблюдаемых электродинамических величин, таких, как уровни энергии связанных состояний, вероятности оптических переходов и т. д. Утвердительный ответ на этот вопрос не является ни в какой мере необходимым для подтверждения аргументов, изложенных в настоящей статье. Даже если из конечности S -матрицы сама по себе не следует необходимость конечности остальных наблюдаемых величин, все же вероятно, что все эти величины будут конечными; для подтверждения указанного положения необходимо повторить приведенный в данной статье анализ, более придерживаясь исходной теории Швингера, чем это оказалось здесь возможным. Нет никаких оснований приписывать S -матрице более фундаментальное значение, чем другим наблюдаемым величинам, как это предполагал сделать Гейзенберг¹⁾. В последнем разделе статьи сделана попытка синтеза гамильтоновского и гейзенберговского методов.

2. Теория Фейнмана как теория S -матрицы

S -матрица первоначально была определена Гейзенбергом через стационарные решения задачи рассеяния. Типичное стационарное решение представляется не зависящей от времени волновой функцией Ψ' , у которой имеется часть, описывающая падающие волны и имеющая асимптотический вид Ψ'_1 , а также часть, описывающая рассеиваемые волны и имеющая асимптотический вид Ψ'_2 . При этом S -матрица является оператором преобразования S , обладающим тем свойством, что имеет место равенство

$$\Psi'_2 = S\Psi'_1 \quad (1)$$

для каждого стационарного состояния Ψ' .

В разделе 3 статьи [1] был определен оператор $U(\infty)$ и было установлено, что этот оператор тождественен с S -матрицей. Поскольку оператор $U(\infty)$ был определен для зависящих от времени волновых функций, при подобном отождествлении требуется некоторая осторожность. Действительно, уравнение

$$\Psi_2 = U(\infty)\Psi_1 \quad (2)$$

сохраняет силу, когда функции Ψ_1 и Ψ_2 являются асимптотическими выражениями для относящихся к падающим и рассеянным волнам частей волновой функции

ции D_F (в обозначениях Штюкельберга D^C) для представления запаздывающих, т. е. причинно-обусловленных электромагнитных взаимодействий. Обзор более ранней части этой работы приведен в [6]. Использование черенормировки массы в задачах рассеяния предложено впервые Льюисом [7]. — *Прим. авт.*

¹⁾ Более подробная критика представлений Гейзенберга дана в статье VI настоящего сборника (см. также А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, М., 1952, стр. 609). — *Прим. ред.*

Ψ в Ψ -представлении статьи [1] („представление взаимодействия“ по Швингеру [3]). Далее, не зависящая от времени волновая функция Ψ' выражается через зависящую от времени в шредингеровском представлении волновую функцию, как

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}Et\right]\Psi',$$

где величина E равна полной энергии состояния; в представлении взаимодействия этой функции соответствует волновая функция

$$\Psi = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}t(H_0 - E)\right]\Psi', \quad (3)$$

где H_0 — полный гамильтониан свободных частиц. Однако обе рассматриваемые асимптотические части функции Ψ' представляют свободно двигающиеся частицы с полной энергией E и являются, следовательно, собственными функциями оператора H_0 для собственного значения, равного E . Отсюда в силу (3) вытекает, что асимптотические части Ψ_1 и Ψ_2 функции Ψ являются в действительности не зависящими от времени и равными соответственно Ψ'_1 и Ψ'_2 . Таким образом, соотношения (1) и (2) тождественны, и оператор $U(\infty)$ действительно совпадает с S -матрицей. Кроме того, оператор $U(\infty)$ в данном случае также совпадает с „инвариантным оператором столкновения“, введенным Швингером [3].

Оператор $U(\infty)$ раскладывается в ряд по аналогии с формулой (32) статьи [1] следующим образом:

$$U(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar c}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n P(H_1(x_1), \dots, H_1(x_n)). \quad (4)$$

Здесь символ P имеет тот же смысл, что и в разделе 5 статьи [1], и

$$H_1(x) = H^I(x) + H^e(x) \quad (5)$$

является суммой энергии взаимодействия электронного поля с фотонным полем и потенциала внешнего поля. Теория излучения Фейнмана дает набор правил вычисления матричных элементов выражения (4) между состояниями с любым числом падающих и рассеянных частиц. Таким образом, правила Фейнмана непосредственно относятся только к величинам, входящим в выражение (4). Поэтому теорию Фейнмана правильно охарактеризовать как теорию S -матрицы.

Один из частных способов исследования оператора $U(\infty)$ состоит в использовании соотношения (5) для разложения выражения (4) в ряд по возрастающим степеням H^e . Подстановка (5) в выражение (4) дает

$$U(\infty) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar c}\right)^{m+n} \frac{1}{m!n!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{m+n} P(H^e(x_1), \dots, H^e(x_m) \times \\ \times H^I(x_{m+1}), \dots, H^I(x_{m+n})). \quad (6)$$

В полученном двойном ряде член нулевого порядка по H^e равен значению $S(\infty)$, приведенному в формуле (32) статьи [1]. Член первого порядка равен

$$U_1 = -\frac{i}{\hbar c} \int_{-\infty}^{\infty} H_F(x) dx, \quad (7)$$

причем значение H_F определяется формулой (31) статьи [1]. Очевидно, что величина $S(\infty)$ является S -матрицей, описывающей рассеяние электронов и фотонов друг на друге в отсутствие внешнего поля, а величина U_1 представляет собой S -матрицу, описывающую дополнительное рассеяние, которое вызывается внешним полем в первом борновском приближении; введение члена высшего порядка из ряда (6) соответствует использованию второго или более высокого

борновского приближения. Играющий в статье [1] важную роль оператор H_F никак не связывался там с борновским приближением; однако этот оператор вводился в указанной статье в известной мере неестественным образом и лишь соотношение (7) разъясняет его физический смысл. В действительности оператор H_F можно определить тем условием, что величина

$$-\frac{i}{\hbar}(\delta t)(\delta\omega)H_F(x)$$

должна равняться добавке к S -матрице, получающейся вследствие действия внешнего потенциала с напряженностью H^e за короткий интервал времени δt в малом объеме $\delta\omega$ в окрестности пространственно-временной точки x .

Остающаяся часть настоящего раздела посвящена формулировке правил Фейнмана для определения значения U_{∞} . Доказательства при этом не приводятся, поскольку данные правила являются тривиальным обобщением указанных в статье [1] правил для определения матричных элементов величины H_F в случае одноэлектронных переходов.

При определении значения $U(\infty)$ мы не будем как-либо разграничивать части электромагнитного поля, соответствующие внешнему полю и излучению; это физически оправдано, поскольку выделение „внешнего“ поля является в данном случае в известной мере условным. Энергия взаимодействия, входящая в выражение (4), будет тогда равна

$$H_1(x) = -ieA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) - \delta mc^2\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (8)$$

где потенциал A_μ соответствует полному электромагнитному полю, а член с множителем δm введен, чтобы учесть то обстоятельство, что в представлении взаимодействия берется полная масса электрона, включающая его „электромагнитную“ массу δm (см. раздел 4 статьи [1]). Первый этап определения $U(\infty)$ заключается в подстановке выражения (8) в выражение (4) и в подробной записи операторов $\bar{\psi}_\alpha$ и ψ_β , приведенных в (8) в виде матриц. После подобной подстановки выражение (4) примет вид

$$U(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n, \quad (9)$$

где оператор J_n является n -кратным интегралом, подинтегральное выражение которого является полиномом относительно операторов $\bar{\psi}_\alpha$, ψ_β и A_μ .

В общем случае матричный элемент оператора J_n получается, если считать, что часть операторов $\bar{\psi}_\alpha$, ψ_β и A_μ вызывает уничтожение имеющихся в начальном состоянии частиц, часть операторов порождает частицы в конечном состоянии, а остальные сгруппированы в пары, вызывающие последовательное порождение и уничтожение частиц в промежуточных состояниях. Операторы, которые не объединяются в пары и способны к реальному порождению или уничтожению частиц, называются „свободными“; тип матричного элемента оператора J_n определяется заданием числа входящих в него свободных операторов и числа операторов, объединяемых в пары. Как описано более подробно в разделе 7 статьи [1], каждый тип матричных элементов оператора J_n однозначно представляется „диаграммой“ G с n вершинами (обозначенными x_1, \dots, x_n) и всевозможными линиями, оканчивающимися в этих вершинах.

Соотношение между типом матричного элемента оператора J_n и его диаграммой G следующее. Каждой ассоциированной паре операторов ($\bar{\psi}(x)$, $\psi(y)$) сопоставляется на диаграмме направленная электронная линия, соединяющая точки x и y . Каждой ассоциированной паре операторов ($A(x)$, $A(x)$) сопоставляется ненаправленная фотонная линия, соединяющая вершины x и y . Каждому свободному оператору $\bar{\psi}(x)$ соответствует направленная линия, идущая из вершины к краю диаграммы, а каждому свободному оператору $\psi(x)$ — линия,

идущая от края к вершине. Каждому свободному оператору $A(x)$ соответствует ненаправленная линия, идущая из вершины x к краю диаграммы. Наконец, для любого определенного матричного элемента оператора J_n характерно, что в каждой вершине x_i действует либо часть оператора $H_1(x_i)$, включающая $A_\mu(x_i)$, либо часть, содержащая множитель δm ; в зависимости от этого в каждой вершине x_i диаграммы G либо только кончается одна электронная линия и начинается другая электронная линия, либо еще начинается одна фотонная линия. Линии, начинающиеся и кончающиеся в одной и той же точке, запрещены.

На каждой диаграмме G электронные линии образуют конечное число m незамкнутых ломаных линий, начало и конец которых лежит на краю диаграммы, и, кроме того, возможно, l замкнутых многоугольников. В соответствующий тип матричных элементов оператора J_n входят m свободных операторов $\bar{\psi}$ и m свободных операторов ψ ; два конечных отрезка каждой незамкнутой ломаной линии относятся к двум свободным операторам (один к $\bar{\psi}$, а другой к ψ), которые мы будем называть „свободной парой“. Матричные элементы J_n вычисляются теперь при помощи оператора $J(G)$, который определен для каждой диаграммы G с n вершинами и получается из J_n после следующих пяти операций.

Во-первых, в каждой вершине x_i оператор $H_1(x_i)$ следует заменить либо на первый, либо на второй член правой стороны соотношения (8), в зависимости от того, исходит из этой точки x_i фотонная линия или нет. Во-вторых, соответственно числу электронных линий, соединяющих точки x и y диаграммы G , соответствующее число пар операторов $\bar{\psi}_\alpha(x)$ и $\psi_\beta(y)$ в J_n вне зависимости от их положения следует заменить функцией

$$\frac{1}{2} S_{F\beta\alpha}(x-y), \quad (10)$$

определенной формулами (44) и (45) статьи [1]. В-третьих, если имеется фотонная линия, соединяющая на диаграмме G вершины x и y , то два оператора, входящие в J_n , вне зависимости от их положения следует заменить функцией

$$\frac{1}{2} \hbar c \delta_{\mu\nu} D_F(x-y), \quad (11)$$

определенной формулой (11) статьи [1]. В-четвертых, все свободные операторы в J_n следует оставить без изменения, причем не нужно считаться с порядком, устанавливаемым P -операторами; порядок свободных операторов $\bar{\psi}$ и ψ следует изменить так, чтобы члены каждой свободной пары входили в порядке $\bar{\psi}\psi$; порядок свободных пар относительно друг друга и порядок всех свободных операторов A_μ остается произвольным. В-пятых, все выражение следует умножить на

$$(-1)^{n-l-m}. \quad (12)$$

Правила Фейнмана для нахождения оператора $U(\infty)$ по существу содержатся в приведенном выше определении операторов $J(G)$. Каждому значению n соответствует конечное число диаграмм G и каждый допустимый матричный элемент $U(\infty)$ получается при подстановке в выражение (9) вместо J_n суммы всех соответствующих операторов $J(G)$. Необходимо только еще определить, как следует записывать матричный элемент какого-либо оператора $J(G)$, соответствующий заданному рассеянию.

Матричные элементы $J(G)$ для определенного процесса могут быть получены, вообще говоря, посредством замены каждого свободного оператора в $J(G)$ на волновую функцию той частицы, которая по предположению порождается или уничтожается. Точнее говоря, каждый свободный оператор $\bar{\psi}$ может либо порождать электрон в конечном состоянии, либо уничтожать позитрон в начальном состоянии; наоборот, оператор ψ либо уничтожает электрон, либо порождает позитрон. Таким образом, в случае переходов из состояния, в котором

имеется A электронов и B позитронов, в состоянии, в котором имеется C электронов и D позитронов, в матричные элементы входят только операторы $J(G)$, содержащие $(A + D) = (B + C)$ свободных пар. В каждом таком операторе $J(G)$ следует последовательно заменить $(A + D)$ свободных операторов ψ на всевозможные комбинации волновых функций имевшихся в начале A электронов и образовавшихся в конце D позитронов и аналогично заменить $(B + C)$ свободных операторов $\bar{\psi}$ на комбинации волновых функций исходных позитронов и образующихся электронов; результаты всех подобных подстановок следует сложить со знаком плюс или минус, учитывая, что полная волновая функция системы должна быть антисимметрична относительно волновых функций отдельных частиц. В случае свободных операторов A_μ следует поступить несколько иначе, поскольку каждый такой оператор отвечает либо порождению фотона в конечном состоянии, либо уничтожению фотона в исходном состоянии, или же просто представляет собой потенциал внешнего поля. Следовательно, в случае переходов из состояния, в котором имеется A фотонов, в состояние с B фотонами в матричный элемент будет входить каждый оператор $J(G)$ с не менее чем $(A + B)$ свободными операторами A_μ . Если число свободных операторов A_μ в $J(G)$ равно $(A + B + C)$, то эти операторы следует последовательно заменить на все возможные комбинации $(A + B)$ соответствующим образом нормированных потенциалов, относящихся к начальным и конечным фотонным состояниям, и на потенциал внешнего поля, умноженный на C ; результаты этих подстановок следует сложить, учитывая симметрию полной волновой функции относительно отдельных фотонных состояний.

Практически редко встречаются задачи рассеяния с участием более чем двух одинаковых частиц. Замена свободных операторов в $J(G)$ на волновые функции может быть обычно выполнена при вычислениях, так что определение матричных элементов $U(\infty)$ является по существу завершенным как только выписаны операторы $J(G)$.

Приведенные правила вычисления оператора $U(\infty)$ соответствуют положению, имевшему место до выполнения каких-либо операций, смысл которых состоит в выделении и устранении различных расходящихся частей получающихся выражений. В частности, в выражения входят составляющие от всех диаграмм G и в том числе от тех диаграмм, которые описывают только эффекты собственной энергии. По этой причине сформулированные правила внешне отличны от приведенных в разделе 9 статьи [1] правил для одноэлектронной задачи, которые соответствуют положению, возникающему после того, как устранен ряд расходимостей. Очевидно, что указанные здесь правила не являются полными до тех пор, пока к ним не добавлены положения, устраняющие из теории все бесконечные величины; в разделах 5—8 настоящей статьи будет показано, каким образом формальная структура S -матрицы позволяет, повидимому, выполнить подобное полное устранение бесконечностей.

Другое существенное ограничение теории с S -матрицей вызывается использованием разложения (4). Все рассматриваемые в данной статье величины разлагаются в ряд подобным образом, причем предполагается, что не только взаимодействие с излучением, но и внешнее поле настолько мало, что его можно считать возмущением. Как хорошо известно, разложение по степеням потенциала внешнего поля не дает удовлетворительного приближения ни в задачах о связанных состояниях, ни в задачах рассеяния при малых энергиях. В частности, когда в задаче рассеяния имеется возможность того, что одна из исходных частиц переходит в связанное состояние, то процесс захвата не представляется оператором $U(\infty)$, поскольку начальными и конечными состояниями, соответствующими этому оператору, могут быть только свободные состояния. Разложение в ряд по степеням потенциалов внешнего поля оказывается непригодным, когда возможны процессы захвата. Поэтому следует подчеркнуть, что использованная в этой статье теория возмущений применима только к ограниченному классу проблем и что в остальных случаях следует использовать теорию Швингера в ее первоначальной форме.

3. S-матрица в импульсном пространстве

Как для практического решения частных задач, так и для общего теоретического рассмотрения S-матрицу $U(\infty)$ удобно выразить через импульсные переменные. С этой целью достаточно рассмотреть обозначенное нами буквой M выражение, являющееся типичным примером членов, из которых построены все матричные элементы оператора $U(\infty)$. Пусть фиксировано некоторое целое число n и некоторая диаграмма G с n вершинами, а также построен по способу, указанному в предыдущем разделе, оператор $J(G)$; M определяется как величина, получающаяся при замене каждого свободного оператора в $J(G)$ на какую-либо одну волновую функцию свободной частицы. Точнее говоря, вместо каждого свободного оператора $\psi(x)$ в $J(G)$ следует подставить функцию

$$\psi(k) e^{ik_\mu x_\mu}, \tag{13}$$

где k_μ — некоторый постоянный четырехмерный вектор, представляющий либо энергию и импульс электрона, либо взятую со знаком минус энергию и импульс позитрона, и $\psi(k)$ — постоянный спинор. Вместо каждого свободного оператора $\bar{\psi}(x)$ следует подставить функцию

$$\bar{\psi}(k') e^{-ik'_\mu x_\mu}, \tag{14}$$

где $\bar{\psi}(k')$ — также постоянный спинор. Вместо каждого свободного оператора $A_\mu(x)$ подставляется выражение

$$A_\mu(k'') e^{ik''_\mu x_\mu}, \tag{15}$$

где $A_\mu(k'')$ — постоянный четырехмерный вектор, являющийся в одном случае вектором поляризации кванта, вектор энергии — импульса которого равен либо k''_μ , либо $-k''_\mu$, а в другом случае компонентой разложения Фурье потенциала внешнего поля, соответствующей некоторому волновому числу и частоте, которые определяются четырехмерным вектором k'' . Потенциал внешнего поля можно считать разложенным на компоненты Фурье вида (15) без какой-либо потери общности. После подстановки в $J(G)$ функций (13)—(15) получающееся выражение M будет иметь вид n -кратного интеграла по всему пространству — времени; кроме того, это выражение будет параметрически зависеть от E постоянных четырехмерных векторов в импульсном пространстве, где E равно числу свободных операторов в $J(G)$.

Диаграмма G будет содержать E внешних линий, т. е. таких линий, один из концов которых совпадает с вершиной диаграммы, а другой лежит на границе диаграммы. Каждой из этих внешних линий соответствует один постоянный четырехмерный вектор, который можно обозначить символом k^i_μ ($i = 1, \dots, E$), и один входящий в M постоянный спинор или вектор поляризации, т. е. либо $\psi(k^i)$, либо $\bar{\psi}(k^i)$, либо $A_\mu(k^i)$.

Предположим, что диаграмма G содержит F внутренних линий, т. е. таких линий, и начало и конец которых совпадает с вершинами диаграммы. Каждой из таких линий соответствует в M одна из функций D_F или S_F , определяемых формулами (11) и (10). Эти функции были выражены Фейнманом в виде простых четырехмерных интегралов Фурье:

$$D_F(x) = \frac{1}{4\pi^3} \int e^{-ip_\mu x_\mu} \delta_+(p^2) dp, \tag{16}$$

$$S_F(x) = \frac{1}{4\pi^3} \int e^{-ip_\mu x_\mu} [+ ip_\mu \gamma_\mu - x_0 | \delta_+(p^2 + x_0^2) dp, \tag{17}$$

где x_0 — величина, обратная комптоновской длине волны электрона,

$$p^2 = p_\mu p_\mu = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2, \tag{18}$$

а функция δ_+ определяется соотношением

$$\delta_+(a) = \frac{1}{2} \delta(a) + \frac{1}{2\pi i a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-iaz} dz. \quad (19)$$

Подстановка выражений (16) и (17) в M придает этой величине вид F -кратного интеграла по импульсному пространству. В M войдет столько же четырехкратных интегралов с четырехмерными векторами в качестве переменных интегрирования, которые мы обозначим p_μ^i ($i = 1, \dots, F$), сколько имеется на диаграмме G внутренних линий. После подобной подстановки пространственно-временные переменные x_1, \dots, x_n будут входить в M только посредством экспоненциальных множителей, так что по этим переменным может быть выполнено интегрирование. В результате интегрирования по x_j получается выражение

$$(2\pi)^{4\delta} \delta(q_j), \quad (20)$$

где символ δ обозначает обычную четырехмерную дельта-функцию Дирака, q_j представляет собой четырехмерный вектор, получающийся при алгебраическом сложении векторов k^i и p^i , соответствующих линиям, сходящимся к точке x_j . Наличие множителя (20) в подынтегральном выражении величины M выражает сохранение энергии и импульса в процессе взаимодействия, который имеет место в точке x_j . Таким образом, мы окончательно выразили M через импульсные переменные. Подводя итоги, укажем, что M имеет теперь вид F -кратного интеграла с четырехмерными векторами p_μ^i в импульсном пространстве в качестве переменных. В подынтегральное выражение, кроме численных множителей, входят:

1) постоянные спиноры, или векторы поляризации, т. е. либо $\psi(k^i)$, либо $\bar{\psi}(k^i)$, либо $A_\mu(k^i)$, отвечающие каждой внешней линии на диаграмме G ;

2) множители

$$D_F(p^i) = \delta_+((p^i)^2), \quad (21)$$

отвечающие каждой внутренней фотонной линии на диаграмме G ;

3) множители

$$S_F(p^i) = [+ ip_\mu^i \gamma_\mu - x_0] \delta_+((p^i)^2 + x_0^2), \quad (22)$$

отвечающие каждой внутренней электронной линии на диаграмме G ;

4) множители

$$\delta(q_j), \quad (23)$$

отвечающие каждой вершине на диаграмме G ;

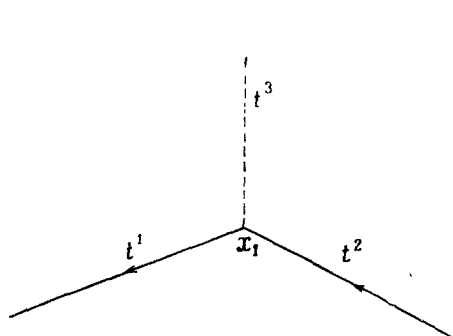
5) операторы γ_μ из формулы (8), отвечающие каждой вершине на диаграмме G , где имеется фотонная линия.

Важнейшая особенность приведенного рассмотрения состоит в том, что все составные части величины M теперь сопоставлены определенным линиям и вершинам диаграммы G . Поэтому можно связывать однозначным образом „добавление“ или „исключение“ определенных групп множителей из величины M с изменением диаграммы G , состоящем в добавлении или исключении из этой диаграммы определенных вершин и линий. В качестве примера подобного метода анализа мы кратко рассмотрим применение формализма S -матрицы к случаю „лэмбовского сдвига“ и связанных с этим сдвигом явлений.

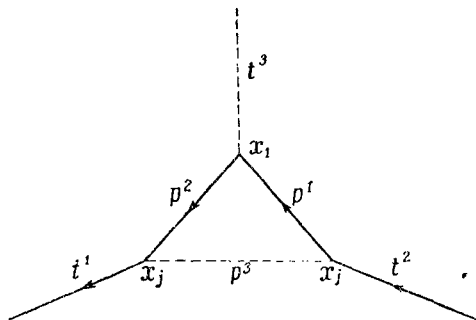
Предположим, что диаграмма G определенной степени сложности содержит вершину x_1 , в которой встречаются две электронные линии и одна фотонная линия. Эти три линии могут быть либо внутренними, либо внешними; соответствующими им четырехмерными векторами могут быть либо p^i , либо k^i ; эти четырехмерные векторы обозначаются символами l^1, l^2, l^3 (см. фиг. 1). Вершине x_1 в величине M будет соответствовать множитель

$$-ie\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta(l^1 - l^2 - l^3), \quad (24)$$

ричем два спинорных индекса матрицы γ_μ используются здесь при матричном множении множителя (24) справа и слева на матрицы, которые соответствуют величине M двум электронным линиям, сходящимся к вершине x_1 . Предположим теперь, что G' есть диаграмма, тождественная всюду с G , за исключением бласти вблизи вершины x_1 , где добавлены две новые вершины и три новые линии (см. фиг. 2). С этими тремя новыми линиями, каждая из которых является



Ф и г. 1.



Ф и г. 2.

внутренней, связаны три четырехмерных переменных вектора p^1, p^2, p^3 , входящих в качестве переменных интегрирования в выражение M' , образуемое при помощи диаграммы G' , подобно тому как выражение M образуется при помощи диаграммы G . Можно доказать, что в силу формул (21)—(23) величина M' получается из выражения M простой заменой в M множителя (24) на выражение

$$-\frac{ie^3}{\hbar c} (2\pi)^3 \int \int \int dp^1 dp^2 dp^3 \delta(t^1 - p^2 + p^3) \delta(p^2 - p^1 - t^3) \delta(p^1 - p^3 - t^2) \times \\ \times \gamma_\lambda (+ip_\rho^2 \gamma_\rho - x_0) \gamma_\mu (+ip_\sigma^1 \gamma_\sigma - x_0) \gamma_\lambda \delta_+((p^2)^2 + x_0^2) \delta_+((p^1)^2 + x_0^2) \delta_+((p^3)^2). \quad (25)$$

Факториальные коэффициенты из выражения (4) полностью сокращаются в связи с тем обстоятельством, что две новые вершины диаграммы G' могут быть $(n+1)(n+2)$ способами (n — число вершин диаграммы G) обозначены посредством x_i, x_j . В выражении (25) две из четырехмерных δ -функций могут быть сразу исключены посредством интегрирования по p^1 и p^2 , в то время как третья из них сводится к δ -функции, входящей в (24). Таким образом, величина M' может быть получена из M заменой в множителе (24) оператора γ_μ на оператор

$$L_\mu = L_\mu(t^1, t^2) = 2\alpha \int dp [\gamma_\lambda (+i(p_\rho + t_\rho^1) \gamma_\rho - x_0) \gamma_\mu (+i(p_\sigma + t_\sigma^2) \gamma_\sigma - x_0) \gamma_\lambda] \times \\ \times \delta_+((p + t^1)^2 + x_0^2) \delta_+((p + t^2)^2 + x_0^2) \delta_+(p^2). \quad (26)$$

Здесь α — постоянная тонкой структуры, равная в единицах Хевисайда $e^2/4\pi\hbar c$. Методом, развитым Фейнманом, оператор L_μ может быть без особого труда найден в виде явной функции четырехмерных векторов t^1 и t^2 .

В том частном случае, когда фиг. 1 представляет всю диаграмму G , величина M является матричным элементом для рассеяния одиночного электрона внешним полем. Фиг. 2 представляет тогда также всю диаграмму G' , а M' является радиационной поправкой второго порядка к выражению, описывающему рассеяние электрона внешним полем. В этом случае оператор L_μ определяет лэмбовский сдвиг и связанные с этим сдвигом явления. Однако приведенное рассмотрение применимо с тем же успехом и к выражению M , входящему где-либо среди матричных элементов оператора $U(\infty)$ и представляющему любой физический процесс с участием электронов, позитронов и фотонов. Вместе с выражением M в оператор $U(\infty)$ всегда будет входить член M' , предста-

включающий радиационные поправки второго порядка для того же процесса; по одному члену M' возникнет от каждой точки из C , в которой кончается фотонная линия, при этом величина M' во всех случаях получается из выражения M заменой в M оператора γ_μ на оператор L_μ . Далее, при независимой подстановке оператора L_μ вместо γ_μ в случае двух или более точек диаграммы G будет получаться ряд радиационных поправок высшего порядка к выражению M .

„Вершинной частью“ некоторой диаграммы будет называться связная часть диаграммы, которая состоит только из вершин и внутренних линий, соединяющихся двумя электронными линиями и одной фотонной линией с остальной частью диаграммы. Центральный треугольник на фиг. 2 является примером такой вершинной части. Иными словами, вершинной частью диаграммы является такая ее часть, замена которой на одиночную вершину фиг. 1 дает результат, имеющий физический смысл. Далее, аргументы, при помощи которых было показано, что замена фиг. 1 на фиг. 2 эквивалентна замене γ_μ на оператор L_μ , могут быть также использованы в случае замены вершины фиг. 1 на более сложную вершинную часть. Если G — некоторая диаграмма с вершиной x_1 , подобной изображенной на фиг. 1, а диаграмма G' получается из диаграммы G заменой x_1 на какую-нибудь вершинную часть V и если M и M' — элементы оператора $U(\infty)$, связанные соответственно с G и G' , то величина M' может быть получена из величины M заменой в последней оператора γ_μ на оператор

$$\Delta_\mu = \Delta_\mu(V, t^1, t^2), \quad (27)$$

зависящий только от части V и четырехмерных векторов t^1 и t^2 и не зависящий от G .

Резюмируя, можно отметить, что была показана возможность расчета с помощью формализма S -матрицы всевозможных радиационных процессов высшего порядка при использовании операторов в импульсном пространстве. Подобные операторы связаны с радиационными поправками к основному взаимодействию между электронно-позитронным и фотонным полем и могут быть использованы, после того как они один раз вычислены, в различных частных задачах электродинамики.

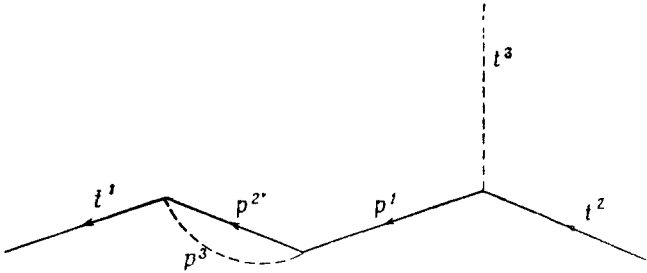
4. Дальнейшее преобразование S -матрицы

В разделе 7 статьи [1] было показано, что в случае рассматриваемых там одноэлектронных процессов необходимо учитывать только связные диаграммы. В общем случае построения S -матрицы это положение более не имеет места; несвязные диаграммы соответствуют матричным элементам оператора $U(\infty)$, представляющим два или более одновременных процесса столкновения в отдельных группах частиц; подобные процессы реально осуществляются. Несвязную диаграмму допустимо отбросить лишь тогда, когда одна из ее связных компонент не содержит никаких внешних линий; подобные компоненты без внешних линий вызывает только появление дополнительного постоянного фазового множителя в матричных элементах оператора $U(\infty)$ и поэтому лишены физического значения.

С другой стороны, приведенная в разделе 7 статьи [1] трактовка диаграмм с „частями, соответствующими собственной энергии“, полностью применима без каких-либо изменений в общем случае формализма S -матрицы. „Соответствующей собственной энергии частью“ диаграммы является связная часть, состоящая только из вершин и внутренних линий, которую можно вставить в середину одиночной линии диаграммы G так, чтобы получилась имеющая смысл диаграмма G' . На фиг. 3 показан пример подобной подстановки в одну из линий фиг. 1. Пусть M и M' — выражения, полученные описанным в предыдущем разделе способом из диаграмм G и G' , части которых изображены на фиг. 1 и 3. Предположим для определенности, что линия, обозначенная t^1 , является внутренней линией диаграммы G , тогда, согласно формуле (22), ей будет соответство-

вать множитель $S_F(t^1)$ в выражении M . При помощи соображений, аналогичных соображениям, приведенным в связи с формулой (26), можно показать, что величина M' может быть получена из величины M заменой в последней величине множителя $S_F(t^1)$ на

$$S_F(t^1)N(t^1)S_F(t^1) = S_F(t^1)2\alpha \int dp [\gamma_\lambda (+i\gamma_\rho(p_\rho + t^1_\rho) - x_0) \gamma_\lambda] \times \\ \times \delta_+((p + t^1)^2 + x_0^2) \delta_+(p^2) S_F(t). \quad (28)$$



Фиг. 3.

Подобным же образом, если диаграмма G' получена из G посредством подстановки в линию t^1 какой-либо части собственной энергии W , то величина M' получается из M заменой множителя $S_F(t^1)$ на

$$S_F(t^1)\Sigma(W, t^1)S_F(t^1), \quad (29)$$

где Σ — оператор, зависящий только от W и t^1 и не зависящий от G . Если бы линия t^1 была бы внешней линией диаграммы G , то величина M' получалась бы из M посредством замены множителя $\bar{\psi}(t^1)$ на

$$\bar{\psi}(t^1)\Sigma(W, t^1)S_F(t^1). \quad (30)$$

В частном случае W может состоять из одной точки; тогда в этой точке действует содержащий δm член выражения (8) и оператор Σ сводится к постоянной

$$\Sigma(W, t^1) = -2\pi i \left(\frac{\delta mc}{\hbar} \right) = -2\pi i \delta x_0. \quad (31)$$

Оператор $N(t^1)$ в формуле (28) описывает вклады второго порядка в собственную энергию электрона и в так называемое явление „поляризации вакуума второго рода“, рассмотренное в разделе 8 статьи [1]. Предполагается, что слабое, связанное с собственной энергией, сокращается с выражением (31); постоянная δx_0 является степенным рядом по α , причем для сокращения относящейся к собственной энергии части выражения (28) достаточно линейного члена; члены высшего порядка компенсируют эффекты собственной энергии у операторов $\Sigma(W, t^1)$ высшего порядка. Формализм S -матрицы разъясняет то важное обстоятельство, что поскольку операторы $\Sigma(W, t^1)$ являются универсальными операторами, не зависящими от диаграммы G , эффекты собственной энергии электрона будут всегда компенсироваться постоянной δx_0 вне зависимости от конкретной физической ситуации, при которой эти эффекты имеют место.

Если соответствующая собственной энергии часть W' вставляется в фотонную линию диаграммы G , например в линию, обозначенную на фиг. 1 через t^3 , то вызванное этим изменение величины M может быть вновь представлено посредством функции $\Pi(W', t^3)$, не зависящей от G . В частности, если линия t^3

на диаграмме G является внутренней, то величина M' получается из M в результате замены множителя $D_F(t^3)$ на

$$D_F(t^3) \Pi(W', t^3) D_F(t^3). \quad (32)$$

Если линия t^3 внешняя, то множитель $A_\mu(t^3)$ заменяется на

$$A_\mu(t^3) \Pi(W', t^3) D_F(t^3). \quad (33)$$

Кроме членов вида (33), в M войдут члены вида

$$A_\nu(t^3) t_\nu^\beta t_\mu^\alpha \Pi'(W', t^3) D_F(t^3); \quad (34)$$

однако в силу калибровочного условия, которому подчиняются потенциалы A_μ , последние члены равны нулю. Аналогичные члены с множителем $t_\nu^\beta t_\mu^\alpha$ будут также входить вместе с выражением (32); можно показать, что в этом случае такие дополнительные члены обращаются в нуль вследствие уравнения сохранения заряда, которое выполняется для электронно-позитронного поля. Функции $\Pi(W', t^3)$ представляют собственную энергию фотона и явление „поляризации вакуума первого рода“, описанное в разделе 8 статьи [1]. Согласно Швингеру, нет необходимости явно вычитать из функций $\Pi(W', t^3)$ части, относящиеся к расходящейся фотонной собственной энергии, поскольку доказывається, что данные части равны нулю в силу калибровочной инвариантности электродинамики.

В разделе 7 статьи [1] было показано, каким образом можно последовательно исключать из всех диаграмм части, относящиеся к собственной энергии, причем влияние этих частей представлялось соответствующим изменением функций D_F и S_F . Анализ проводился в конфигурационном пространстве и ограничивался случаем одноэлектронных задач. Мы распространим теперь этот метод на общий случай формализма S -матрицы, ведя рассмотрение в импульсном пространстве; при этом будут исключаться не только части диаграмм, относящиеся к собственной энергии, но и определенные в предыдущем разделе „вершинные части“.

Каждая диаграмма G имеет однозначно определяемый „остов“, получающийся в результате исключения из диаграммы G всех частей, относящихся к собственной энергии, а также всех вершинных частей. Диаграмма, совпадающая со своим остовом, называется „неприводимой“, все ее вершины принадлежат к типу, представленному на фиг. 1. Из каждой неприводимой диаграммы G_0 можно построить диаграммы G , остовом которых будет G_0 , подстановкой различных частей в любые линии и вместо любых вершин диаграммы G_0 ; такие диаграммы G составляют определенный класс Γ . Здесь придется ввести термин „собственно вершинная часть“, обозначающий такую вершинную часть, которая не распадается в свою очередь на две части, соединенные одиночной линией. Вершинную часть, не являющуюся собственной, можно не учитывать, поскольку ее всегда можно разбить на собственно вершинную часть и на одну или несколько частей, соответствующих собственной энергии. Все входящие в класс Γ диаграммы получатся, таким образом, подстановкой некоторых или всех вершин диаграммы G_0 собственно вершинных частей и подстановкой в некоторые или во все линии частей, относящихся к собственной энергии, если каждая из подстановок производится независимо во всех возможных комбинациях.

Предположим, что величина M является составной частью матричного элемента оператора $U(\infty)$, получающейся из диаграммы G_0 описанным в разделе 3 образом. Тогда каждая диаграмма G класса Γ будет давать дополнительную составляющую того же матричного элемента оператора $U(\infty)$; обозначим сумму всех таких составляющих, включая M , через M_S . Вследствие рассуждений, которые привели к выражениям (27), (29) и (32), а также вследствие статистической независимости подстановок у различных вершин и в различных линиях диаграммы G_0 , сумма M_S получается из величины M следующим образом. Каж-

дый соответствующий внутренней электронной линии диаграммы G_0 множитель $S_F(p^i)$ в M заменяется на выражение

$$S'_F(p^i) = S_F(p^i) + S_F(p^i) \Sigma(p^i) S_F(p^i), \quad (35)$$

где величина $\Sigma(p^i)$ представляет собой сумму величин $\Sigma(W, p^i)$, распространенную по всем соответствующим собственной энергии электронов частям W . Каждый соответствующий внутренней фотонной линии множитель $D_F(p^i)$ заменяется на выражение

$$D'_F(p^i) = D_F(p^i) + D_F(p^i) \Pi(p^i) D_F(p^i), \quad (36)$$

где величина $\Pi(p^i)$ представляет собой сумму величин $\Pi(W', p^i)$, распространенную по всем соответствующим собственной энергии фотонов частям W' . Относящиеся к внешним линиям множители $\psi(k^i)$, $\bar{\psi}(k^i)$ и $A_\mu(k^i)$ заменяются соответственно на

$$\begin{aligned} \psi'(k^i) &= S_F(k^i) \Sigma(k^i) \psi(k^i) + \psi(k^i), \\ \bar{\psi}'(k^i) &= \bar{\psi}(k^i) \Sigma(k^i) S_F(k^i) + \bar{\psi}(k^i), \\ A'_\mu(k^i) &= A_\mu(k^i) \Pi(k^i) D_F(k^i) + A_\mu(k^i). \end{aligned} \quad (37)$$

Каждый оператор γ_μ , соответствующий вершине диаграммы G_0 , в которой сходятся несущие импульс частицы, как показано на фиг. 1, заменяется на выражение

$$\Gamma_\mu(t^1, t^2) = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(t^1, t^2), \quad (38)$$

где величина $\Lambda_\mu(t^1, t^2)$ является суммой величин $\Lambda_\mu(V, t^1, t^2)$, распространенной по всем собственным вершинным частям V . Для правильного подсчета матричных элементов оператора $U(\infty)$ после подстановки выражений (35)—(38) достаточно учитывать только те составляющие матричных элементов, которые соответствуют неприводимым диаграммам.

Для вычисления операторов Λ_μ , Σ и Π необходимо в явном виде выписать соответствующие интегралы по импульсному пространству; примерами таких интегралов являются выражения (26) и (28) для некоторой относящейся к собственной энергии части W и для собственно вершинной части V . При рассмотрении эффектов выше второго порядка части W и V часто оказываются приводимыми, а также содержат части, относящиеся к собственной энергии, и вершинные части. В этом случае также удобно опустить подобные приводимые части V и W и учесть вызываемые ими эффекты посредством подстановки выражений (35)—(38) в интегралы, соответствующие неприводимым V и W . При этом, вообще говоря, получаются не явные формулы для Λ_μ , Σ и Π , а интегральные уравнения. Например, получается соотношение

$$\Lambda_\mu = \alpha I_\mu(\Lambda, \Sigma, \Pi), \quad (39)$$

где I_μ — интеграл, в который явным образом входят величины Λ_μ , Σ и Π . К счастью, наличие с правой стороны уравнения (39) множителя α дает возможность без труда решать такие уравнения методом последовательных приближений, при этом при подстановке в интегралы выражений для Λ_μ , Σ и Π , правильных с точностью до величин порядка α^{n-1} , получаются выражения, правильные с точностью до величин порядка α^n .

Функции D'_F и S'_F формул (36) и (35) являются обращениями Фурье для соответствующих функций статьи [1]. Приведенная в разделе 8 статьи [1] интерпретация этих функций может быть очевидным образом распространена также на оператор Γ_μ . Поскольку величина $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ является четырехмерным вектором электронного тока без радиационных поправок, то величину $\bar{\psi} \Gamma_\mu \psi$ можно интерпретировать как переносимый электроном „эффективный ток“, получаю-

щийся при учете эффектов обменного взаимодействия между данным электроном и окружающим электронно-позитронным полем.

Теорема Фарри [8] позволяет еще более уменьшить число таких диаграмм, которые фактически необходимо учитывать при построении оператора $U(\infty)$. Как показано Фейнманом, эта теорема изящным образом вытекает из его теории. „Замкнутой петлей“ на некоторой диаграмме G называется составленный из электронных линий замкнутый многоугольник, на вершинах которого начинается p фотонных линий; петля называется четной или нечетной в зависимости от четности p . Если диаграмма G содержит замкнутую петлю, то будет иметься другая диаграмма \bar{G} , которую также нужно учитывать при построении оператора $U(\infty)$ и которая получается из диаграммы G при изменении направления электронных линий, составляющих петлю, на противоположное. Если теперь величины M и \bar{M} являются составляющими, соответствующими диаграммам G и \bar{G} , то \bar{M} получается из M при перемене местами электронных и позитронных состояний в каждом из взаимодействий, относящихся к вершинам петли; подобная операция называется „зарядным сопряжением“. Швингер показал, что его теория инвариантна по отношению к зарядному сопряжению, если только при этом одновременно изменять знак перед постоянной e (данное положение эквивалентно известному свойству зарядной симметрии в теории дырок Дирака). Из формулы (8) очевидно, что постоянная e входит в величину M от каждой замкнутой p -петли в степени p , равной числу вершин петли, в которых начинаются фотонные линии; остальным вершинам петли в выражении M соответствуют только постоянные множители δm , являющиеся четной функцией от e . Следовательно, в силу принципа зарядной симметрии имеет место равенство

$$\bar{M} = (-1)^p M. \quad (40)$$

При нечетном p из равенства (40) вытекает теорема Фарри: все составляющие оператора $U(\infty)$, соответствующие диаграммам с одной или более нечетной замкнутой петлей, тождественно равны нулю.

„Нечетной частью“ диаграммы называется каждая состоящая только из вершин и внутренних линий часть, которая связана с остальной диаграммой нечетным числом фотонных линий и к вершинам которой не подходит ни одной электронной линии, принадлежащей остальным частям диаграммы. Простейшим возможным типом нечетной части является одиночная нечетная замкнутая петля. Легко также видеть, что каждая нечетная часть должна включать по крайней мере одну нечетную замкнутую петлю. Таким образом, теорема Фарри позволяет не учитывать при вычислении оператора $U(\infty)$ все диаграммы с нечетными частями.

5. Исследование расходимостей S -матрицы

Определяемая формулой (19) функция δ_+ обладает тем свойством, что если $f(a)$ — некоторая аналитическая в окрестности вещественной точки b функция, то выполняется соотношение

$$\int f(a) \delta_+(a-b) da = \frac{1}{2\pi i} \int f(a) \frac{1}{a-b} da, \quad (41)$$

где стоящий слева интеграл распространен по включающему точку b отрезку вещественной оси, а интеграл, стоящий справа, распространен по этому же отрезку за исключением малого участка пути интегрирования, который обходит точку b в расположенной под действительной осью части комплексной плоскости. В матричные элементы оператора $U(\infty)$ входят интегралы вида

$$\int dp F(p) \delta_+(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - f_0^2 + c^2), \quad (42)$$

распространенные по всем вещественным значениям переменных p_1, p_2, p_3, p_0 . В силу соотношения (41) интегралам (42) можно придать форму

$$\frac{1}{2\pi i} \int dp \frac{F(p)}{(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 + c^2)}, \quad (43)$$

причем предполагается, что интегрирование производится здесь по всем вещественным значениям переменных p_1, p_2, p_3 , а по переменной p_0 интегрирование ведется по вещественной оси с двумя малыми отклонениями в комплексную плоскость: одним над точкой $+(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + c^2)^{1/2}$ и другим под точкой $-(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + c^2)^{1/2}$. Приравнивание выражений (42) и (43) является безусловно правильным в том случае, когда функция $F(p)$ является аналитической при критических значениях переменной p_0 . Практически приходится иметь дело с интегралами типа (42), в которых сама функция $F(p)$ содержит функции δ_+ [см., например, формулы (26) и (28)]; в этом случае является оправданной замена каждой функции δ_+ на величину, обратную к ее аргументу, с независимым обходом при интегрировании по переменной p_0 каждого полюса подинтегрального выражения при условии, что никакие два полюса не совпадают друг с другом. Таким образом, каждая составная часть величины M из оператора $U(\infty)$ при использовании вместо (21) и (22) величин

$$D_F(p^i) = \frac{1}{2\pi i (p^i)^2}, \quad (44)$$

$$S_F(p^i) = \frac{(ip_\mu^i v_\mu - \kappa_0)}{2\pi i ((p^i)^2 + \kappa_0^2)} \quad (45)$$

может быть записана в виде интеграла от рациональной алгебраической функции импульсных переменных. Подобное представление функций D_F и S_F в виде рациональных функций в импульсном пространстве было предложено и широко использовалось Фейнманом.

В выражении M могут содержаться расхожимости трех различных родов, а именно: 1) особенности, вызванные совпадением двух или более полюсов в подинтегральном выражении; 2) расхожимости при малых импульсах, вызванные присутствием множителя (44) в подинтегральном выражении; 3) расхожимости при больших импульсах, связанные с недостаточно быстрым убыванием всего подинтегрального выражения на бесконечности.

Особенности первого типа в настоящей статье разбираться не будут. Подобные особенности возникают, например, в том случае, когда процесс рассеяния с участием многих частиц может быть при специальных значениях импульсов частиц разбит на два независимых процесса, в которых участвуют различные группы частиц. Повидимому, все особенности такого типа имеют подобный простой физический смысл; такие расхожимости уже давно известны в форме знаменателей нулевой энергии в обычной теории возмущений и никогда не вызвали каких-либо серьезных затруднений.

Расхожимости второго типа, представляющие собой так называемую „инфракрасную катастрофу“, как известно, обусловлены непригодностью разложения в ряд по степеням α для правильного описания излучения мягких квантов. Подобные расхожимости можно было бы, повидимому, исключить из теории посредством использования метода Блоха—Нордсика [9], но мы этого здесь делать не будем. Практически указанную трудность можно обойти, применяя в соответствующих случаях вместо функций (44) функцию

$$D_F(p^i) = \frac{1}{2\pi i ((p^i)^2 + \kappa_0^2)}, \quad (46)$$

где λ — некоторый не равный нулю импульс, меньший чем импульс любого кванта, имеющего значение для рассматриваемого частного процесса ¹⁾.

Главным препятствием для построения последовательной квантовой электродинамики всегда были расходимости третьего типа; исключение таких расходимостей является как раз целью настоящей теории. В последующем все внимание будет обращено на расходимости третьего типа; при употреблении слова „сходящийся“ всегда будет подразумеваться оговорка: „не считая особенностей первого и второго типов“.

Расходящееся выражение M называется примитивным в том случае, если при фиксированном значении одного из четырехмерных векторов импульса в подинтегральном выражении интегрирование по всем остальным переменным дает сходящееся значение. Соответственно этому примитивной расходящейся диаграммой называется такая соответствующая расходящемуся выражению M связанная диаграмма G , которая после замены одной внутренней линии на две внешние линии превращается в диаграмму, соответствующую сходящемуся выражению M . Для анализа расходимостей теории достаточно учесть примитивные расходящиеся диаграммы G и соответствующие им выражения M и исследовать их свойства.

Пусть G — примитивная расходящаяся диаграмма с n вершинами, E внешними и F внутренними линиями. Соответствующее выражение M будет интегралом по F переменным p^i от произведения F множителей вида (44) и (45) и n множителей вида (23). Поскольку диаграмма G является связанной, входящие в подинтегральное выражение в M δ -функции (23) позволяют выразить $(n-1)$ из переменных p^i через остальные $(F-n+1)$ переменных p^i и постоянные k^i , причем в подинтегральном выражении останется одна δ -функция, содержащая только постоянные k^i и выражающая закон сохранения энергии и импульса для всей системы. Примером такого интегрирования по δ -функциям является вывод выражения (26) из выражения (25). После выполнения указанной операции остальные интегралы в выражении M могут быть взяты в следующем порядке: четвертые компоненты $(F-n+1)$ независимых переменных p^i записываются в виде

$$p_4^i = ip_0^i = i\alpha\pi_0^i \quad (47)$$

и сначала выполняется интегрирование по α ; затем производится интегрирование по $3(F-n+1)$ независимым переменным p_1^i, p_2^i, p_3^i и по $(F-n)$ отношениям π_0^i . Величина M имеет при этом вид

$$M = \int dp_1^i dp_2^i dp_3^i d\pi_0^i \int_{-\infty}^{\infty} R\alpha^{F-n} d\alpha, \quad (48)$$

где R — рациональная функция от α , знаменатель которой представляет собой произведение F множителей вида

$$(p_1^i)^2 + (p_2^i)^2 + (p_3^i)^2 + \mu^2 - (\alpha\pi_0^i + c^i)^2. \quad (49)$$

Постоянные π_0^i и c^i определяются здесь из условия

$$p_4^j = ip_0^j = i(\alpha\pi_0^j + c^j), \quad j = 1, 2, \dots, F. \quad (50)$$

Таким образом, постоянные c^i , соответствующие $(F-n+1)$ независимым переменным p^i , равны в силу формулы (47) нулю, а остальные c^i являются линейными комбинациями постоянных k^i ; $(n-1)$ из величин π_0^i являются линейными ком-

1) Введение величины λ для устранения инфракрасных расходимостей должно производиться с известной осторожностью. Швингер показал, что долго существовавшее несоответствие между двумя различными расчетами лэмбовского сдвига вызвано неосторожным употреблением в одном из них величины λ . — *Прим. авт.* (Оригинальный метод исключения трудностей, связанных с „инфракрасной катастрофой“, используется в статье XI настоящего сборника. — *Прим. ред.*)

бинациями независимых величин π_0^i , определенных формулой (47). В соответствии с формулой (43) мы принимаем, что переменные интегрирования в выражении (48) являются вещественными за исключением переменной α , интегрирование по которой нужно проводить вдоль контура C , отклоняющегося от вещественной оси в каждом из $2F$ полюсов функции R . При этом в общем случае должно выполняться правило, что контур C отклоняется вверх от вещественной оси при $\alpha > 0$ и вниз от вещественной оси при $\alpha < 0$; обратное положение будет иметь место только в некоторых полюсах, соответствующих таким знаменателям (49), для которых имеет место условие

$$(p_1^i)^2 + (p_2^i)^2 + (p_3^i)^2 + \mu^2 \leq (c^i)^2. \quad (51)$$

Подобные полюсы будут называться „переставленными“. Интеграл по α всегда является абсолютно сходящимся. Поэтому при повороте контура C против часовой стрелки до совпадения с мнимой осью значение M не изменится, если не учитывать вычетов в переставленных полюсах.

Величина M сложным образом зависит от параметров k^i , описывающих приходящие и уходящие частицы; эта зависимость резко изменяется, как только одна из постоянных c^i принимает критическое значение, начиная с которого соотношение (51) становится разрешимым при некоторых значениях p_1^i, p_2^i, p_3^i и образуется новый переставленный полюс. Данное обстоятельство легко истолковать, если учесть, что переставленные полюсы появляются тогда, когда возникает возможность, чтобы одна из учитываемых выражением M виртуальных частиц действительно испускалась в виде реальной частицы. Следует ожидать, что поведение выражения M должно изменяться, когда описываемый этим выражением процесс начинает конкурировать с другими реальными процессами. Характерной чертой обычной теории возмущений является то, что если процесс A проходит через промежуточное состояние I , которое непрерывно изменяется в известных пределах, включающих состояние II , являющееся конечным состоянием конкурирующего процесса, то матричный элемент для процесса A содержит интеграл по состоянию I с особенностью в точке, соответствующей состоянию II . В обычной теории возмущений всегда бралось главное значение в смысле Коши данного несобственного интеграла, который не приносил каких-либо реальных расходимостей в матричный элемент. В излагаемой в настоящей статье теории переставленные полюсы вызывают появление аналогичных несобственных интегралов; эти интегралы подходят под определение особенностей первого типа и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Если фиксировать значения переменных p_1^i, p_2^i, p_3^i , удовлетворяющие соотношению (51), то значение величины p_4^i в данном переставленном полюсе будет определяться формулой (50). Соответствующая переставленному полюсу составляющая выражения M равна с точностью до постоянного множителя величине, получающейся, если фиксировать в исходном интеграле M четырехмерный вектор p^i ; поскольку M является примитивным расходящимся выражением, эта составляющая будет сходящейся. Полная составляющая величина M от i -го переставленного полюса будет интегралом от указанной величины, распространенным по конечной сфере и поэтому конечным. Строго говоря, в данном случае необходимо не только сходимостъ выражения, но и равномерная сходимостъ в конечной области; как будет, однако, видно в дальнейшем, сходящиеся интегралы в настоящей теории являются сходящимися для больших импульсов вследствие резкого роста знаменателей в подинтегральных выражениях, а получающаяся подобным образом сходимостъ всегда является равномерной в конечной области.

Таким образом, выражение M равно с точностью до конечных слагающих интегралу M' , получающемуся при замене α на $i\alpha$ в выражениях (48) и (49). С другой стороны, выражение M' получается из первоначального интеграла M при подстановке вместо каждой переменной p_0^i величины

$$ip_4^i + (1 - i)c^i \quad (52)$$

с последующим истолкованием $4(F - n + 1)$ независимых переменных p_μ^i , $\mu = 1, 2, 3, 4$, как обычных вещественных переменных. В интеграле M' знаменатели в подинтегральном выражении имеют вид

$$(p_1^i)^2 + (p_2^i)^2 + (p_3^i)^2 + \mu^2 + (p_4^i - (1 + i)c^i)^2 \quad (53)$$

и растут равномерно для больших значений p_μ^i . Сходимость M' может быть теперь установлена просто посредством подсчета степеней p_μ^i в знаменателе и числителе подинтегрального выражения. Поскольку известно, что выражение M' сходится, когда один из переменных векторов p^i фиксирован и интегрирование проводится только по остальным переменным, то для сходимости всего выражения M' достаточно, чтобы выполнялось условие

$$K = 2F - F_e - 4[F - n + 1] \geq 1. \quad (54)$$

Здесь число $2F$ есть степень полинома в знаменателе подинтегрального выражения, а F_e — степень полинома в числителе, равная, согласно формулам (44) и (45), числу внутренних электронных линий на диаграмме G . Пусть число внешних электронных и фотонных линий на диаграмме G равно соответственно E_e и E_p и пусть число таких вершин на этой диаграмме, из которых не выходят фотонные линии, равно n_s . Тогда из структуры диаграммы G следуют равенства

$$2F = 3n - n_s - E_e - E_p,$$

$$F_e = n - \frac{1}{2} E_e,$$

так что условие сходимости (54) можно переписать также в виде

$$K = \frac{3}{2} E_e + E_p + n_s - 4 \geq 1. \quad (55)$$

Отсюда вытекает тот важный вывод, что возможны только такие примитивные расходящиеся диаграммы, у которых $E_e = 2$, $E_p = 0, 1$ или $E_e = 0$, $E_p = 1, 2, 3, 4$. Далее, случаи $E_e = 0$, $E_p = 1, 3$ отпадают, поскольку им соответствуют диаграммы с нечетными частями, которые, как доказано в разделе 4, можно здесь отбросить. Следует отметить, что, согласно ходу рассуждений, „если числа E_e и E_p не имеют определенных малых значений, то интеграл M является сходящимся на бесконечности“; теперь не остается никаких возражений против сделанной в формуле (48) перестановки порядка интегрирования в выражении для M , так как такую перестановку требуется фактически делать только тогда, когда выражение M абсолютно сходится.

Все возможные примитивные расходящиеся диаграммы, найденные выше, имеют известный физикам характер. Случай $E_e = 2$, $E_p = 0$ соответствует эффектам собственной энергии одиночного электрона, случай $E_e = 0$, $E_p = 2$ — эффектам собственной энергии одиночного фотона, случай $E_e = 2$, $E_p = 1$ — рассеянию одиночного электрона электромагнитным полем, случай $E_e = 0$, $E_p = 4$ — „рассеянию света на свете“. Далее, из формулы (55) вытекает, что расходимость в третьем и четвертом случаях будет не выше логарифмической, в первом случае — не выше линейной и во втором случае — не выше квадратичной. Таким образом, оказывается, что насколько бы ни продвинулось дальнейшее исследование в квантовой электродинамике взаимодействий многих частиц и явлений высших порядков, все равно не появится существенно новых типов расходимостей. Данный результат дает сильное подтверждение в пользу правильности той точки зрения, что „вычитательный формализм“ типа, использованного Швингером и Фейнманом, достаточен для превращения квантовой электродинамики в последовательную теорию.

6. Выделение расходимостей в S-матрице

Прежде всего будет показано, что „рассеяние света на свете“ в действительности не привносит в теорию каких-либо расходимостей. Примитивная, возможно расходящаяся, величина M в случае $E_e = 0$, $E_p = 4$ будет иметь вид

$$\delta(k^1 + k^2 + k^3 + k^4) A_\lambda(k^1) A_\mu(k^2) A_\nu(k^3) A_\rho(k^4) I_{\lambda\mu\nu\rho}, \quad (56)$$

где $I_{\lambda\mu\nu\rho}$ — не более чем логарифмически расходящийся интеграл типа

$$\int R_{\lambda\mu\nu\rho}(k^1, k^2, k^3, k^4, p^i) dp^i, \quad (57)$$

а R — некоторая определенная рациональная функция постоянных k^i и переменных p^i . В любой физической проблеме, когда, например, величины $A(k)$ представляют собой потенциалы, соответствующие некоторым падающим и рассеянным фотонам, в операторе $U(\infty)$ появляются матричные элементы, являющиеся суммой выражения (57) и 23 подобных выражений, которые получаются из (56) при всевозможных перестановках индексов в величине $I_{\lambda\mu\nu\rho}$. Поэтому можно сразу считать, что функция $R_{\lambda\mu\nu\rho}$ симметризована, т. е. что взята сумма по всем возможным перестановкам индексов у $R_{\lambda\mu\nu\rho}$; тогда выражение (56) будет суммой составляющих, соответствующих 24 или меньшему числу (в зависимости от имеющейся степени симметрии) диаграммам G .

Если в формуле (57) вычесть из функции R , стоящей под знаком интеграла, значение R при $k^1 = k^2 = k^3 = k^4 = 0$, т. е. $R(0)$, то в подинтегральном выражении при больших $|p_\mu^i|$ появится дополнительный множитель $|p_\mu^i|^{-1}$ и интеграл станет абсолютно сходящимся на бесконечности. Следовательно,

$$I_{\lambda\mu\nu\rho} = I_{\lambda\mu\nu\rho}(0) + J_{\lambda\mu\nu\rho}, \quad (58)$$

где $I(0)$ — интеграл, могущий быть расходящимся и не зависящий от k^i , а J — сходящийся интеграл, обращающийся в нуль, когда все k^i равны нулю. Для удобства физического истолкования полученного результата перейдем в формуле (56) обратно к пространственно-временным переменным, при этом получится формула

$$M = \int I_{\lambda\mu\nu\rho}(0) A_\lambda(x) A_\mu(x) A_\nu(x) A_\rho(x) dx + N, \quad (59)$$

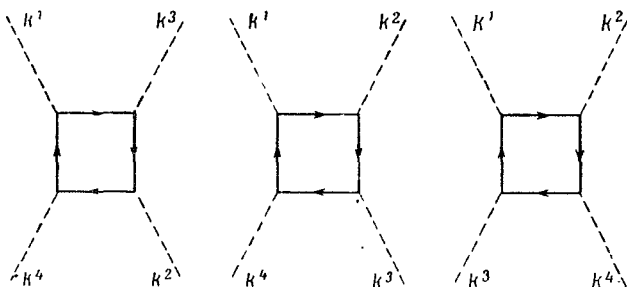
где N — сходящееся выражение, содержащее производные от $A(x)$ по пространственным и временной координатам. Первый член в формуле (59) физически неприемлем; он не является калибровочно-инвариантным и вызывает, например, рассеяние света на электрическом поле, зависящем от абсолютной величины скалярного потенциала, что не имеет физического смысла. Вследствие этого величина $I(0)$ должна тождественно равняться нулю, так что все выражение (56) является сходящимся.

То обстоятельство, что рассеяние света на свете в первом исчезающем приближении конечно, выяснено уже давно¹. Это было также подтверждено Фейнманом путем прямого вычисления с использованием предложенной им теории, описанной в настоящей статье. Диаграммы, соответствующие низшему исчезающему порядку для подобного рассеяния, изображены на фиг. 4. Оказывается, что расходящиеся части соответствующих этим диаграммам величин M сокращаются друг с другом при сложении или, что то же самое, при симметризации функции $R_{\lambda\mu\nu\rho}$. Отсутствие расходимостей при рассеянии света на свете связано, вероятно, во всех случаях с аналогичными сокращениями, и доказательство этого

¹ См. [10] и [11]. В ранних вычислениях рассеяния света на свете применялась гейзенберговская электродинамика, в которой ряд расходимостей исключался с самого начала посредством специального приема с использованием недиагональных элементов матрицы плотности Дирака. С другой стороны, в вычислениях Фейнмана конечный результат получается без каких-либо вычитательных операций. — *Прим. авт.*

с помощью вычислений не должно быть сложным; тем самым можно устранить необходимость обращения к условию калибровочной инвариантности.

Три остальных типа примитивных расходящихся выражений M являются в действительности расходящимися. Однако эти выражения являются как раз теми



Ф и г. 4.

выражениями, которые были рассмотрены в разделах 3 и 4, причем было показано, что они полностью описываются операторами Δ_μ , Σ , Π . Более подробно, при $E_e = 2$, $E_p = 0$ выражение M примет форму

$$\bar{\psi}(k^1) \Sigma(W, k^1) \psi(k^1), \quad (60)$$

где W — некоторая соответствующая электронной собственной энергии часть диаграммы. При $E_e = 0$, $E_p = 2$ выражение M будет иметь вид

$$A_\mu(k^1) \Pi(W', k^1) A_\mu(k^1), \quad (61)$$

где W' — некоторая соответствующая фотонной собственной энергии часть диаграммы. При $E_e = 2$, $E_p = 1$ выражение M примет вид

$$\bar{\psi}(k^1) \Delta_\mu(V, k^1, k^2) \psi(k^2) A_\mu(k^1 - k^2), \quad (62)$$

где V — некоторая вершинная часть. Следовательно, если удастся найти какие-либо средства для выделения и устранения расходящихся частей операторов Δ_μ , Σ , Π , то определенные в разделе 4 „неприводимые“ диаграммы не приведут к появлению в теории новых особых расходимостей, так что указанные в разделе 4 правила будут давать метод построения S -матрицы, свободной от расходимостей.

При рассмотрении в разделе 4 операторов Δ_μ , Σ , Π было выяснено, что вершинные и относящиеся к собственной энергии части диаграмм удобно подразделить на сводимые и несводимые. Несводимая относящаяся к собственной энергии часть диаграммы W должна не только не содержать в качестве составных частей вершинных или относящихся к собственной энергии частей, но и быть „собственной“, т. е. также не должна состоять из двух отдельных участков, соединенных только одной линией. В разделе 4 было показано, что для устранения излишних усложнений оператор Δ_μ следует определить как сумму, распространенную только по собственным вершинным частям V . В силу тех же аргументов, чтобы формулы (35)–(37) были правильными, существенно определить операторы Σ и Π как суммы, распространенные как по собственным, так и по несобственным частям, относящимся к собственной энергии. Однако можно определить S'_F и D'_F только через собственные части, относящиеся к собственной энергии, за счет замены явных определений (35) и (36) на неявные. Пусть величина $\Sigma^*(p^i)$ является суммой операторов $\Sigma(W, p^i)$, распространенной по всем собственным частям W , относящимся к электронной собственной энергии, и пусть величина $\Pi^*(p^i)$ определена аналогичным образом. Каждая часть W является собственной или же состоит из собственной части W , соединенной одиночной электронной линией с другой собственной или несобственной частью, относящейся

к собственной энергии. Таким образом, на основании формулы (35) величину S'_F можно выразить двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} S'_F(p^i) &= S_F(p^i) + S_F(p^i) \Sigma^*(p^i) S'_F(p^i), \\ S'_F(p^i) &= S_F(p^i) + S'_F(p^i) \Sigma^*(p^i) S_F(p^i). \end{aligned} \quad (63)$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} D'_F(p^i) &= D_F(p^i) + D_F(p^i) \Pi^*(p^i) D'_F(p^i), \\ D'_F(p^i) &= D_F(p^i) + D'_F(p^i) \Pi^*(p^i) D_F(p^i). \end{aligned} \quad (64)$$

Операторы Σ^* и Π^* в некоторых случаях удобно использовать вместо Σ и Π .

Рассмотрим составляющую $\Sigma(W, t^i)$ оператора Σ^* , соответствующую части W , относящейся к электронной собственной энергии. Предположим, что часть W является неприводимой и не будем пока учитывать эффектов возможных подстановок в часть W частей, относящихся к собственной энергии, и вершинных частей. Предположим также, что часть W не состоит из одной только вершины, соответствующая которой составляющая дается формулой (31). Тогда часть W имеет четное число $2l$ вершин, в каждой из которых кончается фотонная линия, и величина $\Sigma(W, t^i)$ будет иметь форму

$$e^{2l} \int R(t^i, p^i) dp^i, \quad (65)$$

где R определенная рациональная функция от t^i и p^i , а интеграл расходится не более чем линейно. Подынтегральное выражение в формуле (65) можно записать в виде

$$R(t^i, p^i) = R(0, p^i) + t^i_\mu \left(\frac{\partial R}{\partial t^i_\mu} (0, p^i) \right) + R_c(t^i, p^i), \quad (66)$$

причем при больших значениях $|p^i|$ последний член R_c будет стремиться к нулю быстрее, чем R , а именно, как $|p^i|^{-2} R$. Поэтому в полной аналогии с формулой (58) можно написать

$$\Sigma(W, t^i) = e^{2l} [A + B_\mu t^i_\mu + \Sigma_c(W, t^i)]; \quad (67)$$

здесь A и B_μ — постоянные расходящиеся операторы, а $\Sigma_c(W, t^i)$ — ковариантный и абсолютно сходящийся интеграл. Из соображений ковариантности следует, что величина $\Sigma_c(W, t^i)$ должна иметь форму

$$R_1((t^i)^2) + R_2((t^i)^2) t^i_\mu \gamma_\mu, \quad (68)$$

где R_1 и R_2 — некоторые функции от $(t^i)^2$; по той же причине величина B_μ должна иметь форму $B \gamma_\mu$, где B — некоторый определенный расходящийся интеграл. Если t^i есть четырехмерный вектор энергии — импульса свободного электрона, то

$$(t^i)^2 = -x_0^2, \quad t^i_\mu \gamma_\mu = ix_0. \quad (69)$$

Удобно записать $\Sigma_c(W, t^i)$ в виде

$$\Sigma_c(W, t^i) = A' + B' (t^i_\mu \gamma_\mu - ix_0) + (t^i_\mu \gamma_\mu - ix_0) S(W, t^i) \quad (70)$$

[величина $S(W, t^i)$ равна нулю, если t^i удовлетворяет соотношениям (69)] и включить первые два слагаемых в постоянные A и B из формулы (67); подобное выделение величины $S(W, t^i)$ является однозначным, поскольку все слагаемые в выражении (70) конечны. Таким образом, вместо (67) получается аналогичное соотношение, где

$$\Sigma_c(W, t^i) = (t^i_\mu \gamma_\mu - ix_0) S(W, t^i). \quad (71)$$

Суммируя выражение (67) по всем неприводимым частям W и используя (31), получаем для оператора Σ^* выражение

$$\Sigma^*(t^1) = A - 2\pi i \delta x_0 + B(t_\mu^1 \gamma_\mu - ix_0) + (t_\mu^1 \gamma_\mu - ix_0) S_c(t^1). \quad (72)$$

Следовательно, согласно формулам (63) и (45),

$$S'_F(t^1) = (A - 2\pi i \delta x_0) S_F(t^1) S'_F(t^1) + \\ + \frac{1}{2\pi} B S'_F(t^1) + S_F(t^1) + \frac{1}{2\pi} S_c(t^1) S'_F(t^1). \quad (73)$$

В выражениях (72) и (73) величины A и B представляют собой бесконечные постоянные, а S_c является свободным от расходимостей оператором, который обращается в нуль, когда выполняются соотношения (69); величины A , B и S_c являются степенными рядами по e , начинающимися с члена, в который входит e^2 . Однако в формулах (72) и (73) эффекты поправок высшего порядка к самому оператору $\Sigma(W, t^1)$ еще не учтены.

Аналогичное выделение расходящихся частей может быть выполнено в случае величины $\Pi(W', t^1)$, где W' — неприводимая, относящаяся к фотонной собственной энергии часть. Интеграл (65) может в этом случае расходиться квадратично, так что вместо формулы (66) необходимо использовать

$$R(t^1, p^i) = R(0, p^i) + t_\mu^1 \left(\frac{\partial R}{\partial t_\mu^1}(0, p^i) \right) + \frac{1}{2} t_\mu^1 t_\nu^1 \left(\frac{\partial^2 R}{\partial t_\mu^1 \partial t_\nu^1}(0, p^i) \right) + R_c(t^1, p^i)$$

и вместо (67) получится

$$\Pi(W', t^1) = e^{2i} [A + B_\mu t_\mu^1 + C_{\mu\nu} t_\mu^1 t_\nu^1 + \Pi_c(W', t^1)]. \quad (74)$$

Величины A , B_μ , $C_{\mu\nu}$ являются постоянными числами (а не дираковскими операторами); поэтому из условия ковариантности следует, что $B_\mu = 0$, $C_{\mu\nu} = C \delta_{\mu\nu}$. Величина $\Pi_c(W', t^1)$ выражается в виде абсолютно сходящегося интеграла; она должна быть инвариантной функцией от $(t^1)^2$ вида

$$\Pi_c(W', t^1) = (t^1)^2 D(W', t^1), \quad (75)$$

где функция $D(W', t^1)$ обращается в нуль для значений t^1 , удовлетворяющих соотношению

$$(t^1)^2 = 0, \quad (76)$$

заменяющему здесь соотношение (69). Суммирование выражения (74) по всем неприводимым частям W' дает

$$\Pi^*(t^1) = A' + C(t^1)^2 + (t^1)^2 D_c(t^1); \quad (77)$$

следовательно, согласно формулам (64) и (44),

$$D'_F(t^1) = A' D'_F(t^1) D'_F(t^1) + \frac{1}{2\pi i} C D'_F(t^1) + D'_F(t^1) + \frac{1}{2\pi i} D_c(t^1) D'_F(t^1). \quad (78)$$

Входящая в формулы (77) и (78) величина D_c обращается в нуль для значений t^1 , удовлетворяющих соотношению (76), и не содержит расходимостей.

Постоянная A' в формуле (77) представляет собой квадратично расходящуюся фотонную собственную энергию. Ей соответствуют в операторе $U(\infty)$ матричные элементы вида

$$M = A' \int A_\mu(x) A_\mu(x) dx, \quad (79)$$

которые не являются калибровочно-инвариантными и должны быть исключены из теории. Это можно сделать подобно тому, как был исключен первый член правой стороны равенства (59), приняв, что величина A' равна нулю. Данное

положение было подтверждено Швингером [3] посредством прямых вычислений с точностью до составляющих низшего порядка величины A'^1 .

Выделение расходящихся частей оператора Δ_μ также производится по способу, намеченному для оператора Σ^* . Поскольку интеграл, соответствующий здесь интегралу (65), расходится только логарифмически, то в выражение (66) не нужно вводить члена с производными, и аналогом формулы (67) в данном случае будет формула

$$\Delta_\mu(V, t^1, t^2) = e^{2l} [L_\mu + \Delta_{\mu c}(V, t^1, t^2)], \quad (80)$$

где L_μ — постоянный расходящийся оператор, а величина $\Delta_{\mu c}$ сходится и при $t^1 = t^2 = 0$ равна нулю. В формуле (80) оператор L_μ обязательно должен иметь вид $L\gamma_\mu$. Если $t^1 = t^2$ и величина t^1 удовлетворяет условию (69), то оператор $\Delta_{\mu c}$ будет пропорционален γ_μ и может быть в этом случае включен в член $L\gamma_\mu$. Поэтому можно считать, что величина $\Delta_{\mu c}$ обращается в нуль, не при $t^1 = t^2 = 0$, а когда $t^1 = t^2$ и величины t^1, t^2 удовлетворяют условию (69). Физический смысл этого заключается в том, что соответствующая оператору $\Delta_{\mu c}$ составляющая энергии одиночного электрона в случае постоянного внешнего потенциала равна теперь нулю, так что весь измеряемый статический заряд электрона включен в член $L\gamma_\mu$. Суммируя выражение (80) по всем неприводимым вершинным частям V и используя формулу (38), получаем

$$\Delta_\mu(t^1, t^2) = L\gamma_\mu + \Delta_{\mu c}(t^1, t^2), \quad (81)$$

$$\Gamma_\mu(t^1, t^2) = (1 + L)\gamma_\mu + \Delta_{\mu c}(t^1, t^2). \quad (82)$$

В выражениях (81) и (82) также еще не учтены эффекты поправок высшего порядка относительно $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$. Формально соотношение (82) отличается от формул (73) и (78) тем, что оно содержит неизвестный оператор Γ_μ лишь с одной стороны равенства.

7. Устранение расходимостей из S-матрицы

Наша последняя задача при обсуждении формул (73), (78) и (82) заключается в том, чтобы показать, как можно выделить расходящиеся части из операторов Γ_μ, S'_F, D'_F за счет включения в них поправок к самим этим операторам, вызванных радиационными членами, которые в свою очередь описываются этими же операторами. Иными словами, нам нужно учесть радиационные поправки к радиационным поправкам, перенормировку перенормированных членов и т. д. до бесконечности. Данная задача не столь громоздка, как это может показаться.

Отметим сначала, что операторы Δ_μ, Σ^* и Π^* определяются интегральными уравнениями вида (39), которые будут называться в дальнейшем просто интегральными уравнениями. Более подробно рассмотрим составляющую $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ оператора Δ_μ , представляемую формулой (80) и соответствующую вершинной части V с $(2l + 1)$ вершинами, l фотонными линиями и $2l$ электронными линиями. Данная составляющая задается в виде интеграла, аналогичного интегралу (65), при этом подинтегральное выражение представляет собой произведение $2l + 1$ операторов γ_μ, l функций D_F и $2l$ операторов S_F . Точное значение $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ получается при замене указанных множителей соответственно на Γ_μ, D'_F, S'_F так, как это описано в разделе 4. Предположим теперь, что величина S'_F в подинтегральном выражении представляется, например, с точностью до порядка e^{2n} , в виде суммы оператора S^F и конечного числа конечных произведений S^F на абсолютно сходящиеся операторы $S(\overline{W}, t^1)$, подобные оператору, входящему в формулу (71); аналогично пусть функция D'_F представлена в виде суммы, в которую в качестве слагаемых входит функция D_F и конечное число конечных

¹⁾ Вентцелем [12] были выдвинуты возражения против предложенной Швингером трактовки вопроса о фотонной собственной энергии. — *Прим. авт.*

произведений D_F на функции $D(\overline{W}', t^1)$, входящие в формулу (75), и пусть оператор Γ_μ представлен в виде суммы, в которую в качестве слагаемых входят матрицы γ_μ и конечное число операторов $\Delta_{\mu,c}(\overline{V}, t^1, t^2)$ из формулы (80). Тогда интеграл $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ будет определен с точностью до порядка e^{2n+2l} ; поскольку операторы $S(\overline{W}, t^1)$, $D(\overline{W}', t^1)$ и $\Delta_{\mu,c}(\overline{V}, t^1, t^2)$ всегда имеют достаточное число множителей в знаменателе для обеспечения сходимости, то теория раздела 5 может быть применена для доказательства того, что данный интеграл $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ будет расходиться не более чем логарифмически. Поэтому опять может быть выделена новая величина $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ в форме (80). Суммой таких величин $\Delta_\mu(V, t^1, t^2)$ будет выражение $\Delta_\mu(t^1, t^2)$ вида (81), причем постоянная L и сходящийся оператор $\Delta_{\mu,c}$ определяются с точностью до порядка e^{2n+2} . Таким образом, формула (82) дает для величины Γ_μ новое выражение с точностью до порядка e^{2n+2} .

Из вышеизложенного следует общий метод выделения конечной части из составляющей оператора Γ_μ , соответствующей сводимой вершинной части V_R . Во-первых, часть V_R разбивается на несводимую вершинную часть V и различные вставленные части \overline{W} , \overline{W}' , \overline{V} ; соответствующая части V_R составляющая Γ_μ представляет собой интеграл $M(V_R)$, который является расходящимся не только в целом, но расходится также, если вести интегрирование только по переменным, относящимся к одной из вставленных частей \overline{W} , \overline{W}' , \overline{V} , и фиксировать остальные переменные. Расходимости следует устранять из интеграла $M(V_R)$ последовательно, начиная с расходимостей, связанных с вставленными частями, и кончая расходимостью, связанной с частью V . Подобное последовательное устранение расходимостей является полностью определенным, поскольку каждые две вставленные в V части либо совершенно не перекрываются друг с другом, либо расположены так, что одна из них полностью содержится в другой.

При подсчете составляющих операторов Σ^* и Π^* , соответствующих приводимым относящимся к собственной энергии частям, появляются дополнительные осложнения. В действительности, имеется только одна несводимая часть, относящаяся к фотонной собственной энергии, а именно, часть, которая обозначена



Фиг. 5.

на фиг. 5 буквой W' . Имеется также, если не считать относящейся к собственной энергии части, состоящей из одной точки, только одна неприводимая относящаяся к электронной собственной энергии часть; эта часть обозначена на фиг. 5 буквой W . Все остальные относящиеся к собственной энергии части могут быть получены посредством различных подстановок в части W и W' . Однако все неприводимые относящиеся к собственной энергии части исчерпываются уже в результате подстановок вершинных частей не у обеих, а только у одной вершины диаграмм W , W' ; подстановка у обеих вершин привела бы к тому, что одни и те же диаграммы учитывались бы несколько раз. Составляющая $M(W_R)$ оператора Σ^* , относящаяся к приводимой части W_R , будет в общем случае представлять собой интеграл, который будет содержать независимые расходимости, соответствующие каждому из способов, которым часть W_R может быть построена посредством подстановок вершинных частей вместо одной или обеих вершин W . Данное усложнение вызвано тем, что в том (и только в том) частном случае, когда две вершинные части входят в относящуюся к собственной энергии часть и содержат по одной граничной вершине этой последней части, возможно, что две вершинные части перекрывают частично друг друга, но ни одна из них не содержится полностью в другой.

Конечную часть величины $M(W_R)$ следует выделять следующим образом. Часть W_R однозначным образом получается из W посредством подстановок некоторой вершинной части \bar{V}_a у вершины a и частей собственной энергии \bar{W}_a и \bar{W}'_a в две линии диаграммы W . Вычтем сначала из $M(W_R)$ все расходимости, связанные с частями \bar{V}_a , \bar{W}_a и \bar{W}'_a ; обозначим выражение, остающееся после такого вычитания, через $M'(W_R)$. Рассмотрим затем часть W_R , считая, что она получена из W посредством подстановок некоторой вершинной части \bar{V}_b у вершины b и частей собственной энергии \bar{W}_b и \bar{W}'_b в две линии части W . Интеграл $M'(W_R)$ будет еще содержать расходимости, соответствующие части \bar{V}_b (частям \bar{W}_b и \bar{W}'_b уже не будет соответствовать никаких расходимостей); эти расходимости следует вычесть, после чего получится выражение $M''(W_R)$. Конечная часть $M''(W_R)$ может быть окончательно выделена посредством применения ко всему интегралу метода, описанного в разделе 6; в результате для $M''(W_R)$ получается выражение вида (17), причем величина Σ_c определяется формулой (71), следовательно, конечная часть $M(W_R)$ является полностью определенной величиной и представляет собой оператор вида (71).

Поведение составляющих высшего порядка операторов Σ^* и Π^* является теперь качественно ясным; можно дать точные правила вычисления этих операторов с помощью индуктивной схемы, аналогичной схеме, приведенной выше для случая Δ_μ . Не считая постоянного члена ($-2\pi i \delta x_0$), Σ^* совпадает с составляющей, соответствующей части W на фиг. 5; составляющая $\Sigma(W, t^1)$ представляется интегралом вида (65) с $l=1$. Подинтегральное выражение в формуле (65) представляет собой, согласно предыдущему, произведение двух операторов γ_μ , одного оператора D_F и одного оператора S_F . Для получения точного значения $\Sigma(W, t^1)$ в этой формуле следует заменить оператор D_F на D'_F , оператор S_F на S'_F и только один из множителей γ_μ , например γ_μ , соответствующий вершине a диаграммы W , на Γ_μ . Предположим, что оператор S'_F в подинтегральном выражении представлен с точностью до порядка e^{2n} в виде суммы, слагаемыми которой являются оператор S_F и конечное число конечных произведений S_F на операторы $S(\bar{W}, t^1)$, подобные тем операторам, которые входят в формулу (71). Предположим также, что величины D'_F и Γ_μ выражаются аналогичным образом. Тогда величина $\Sigma(W, t^1)$ будет определена с точностью до порядка e^{2n+2} и будет представлять собой сумму интегралов, подобных интегралу $M'(W_R)$ предыдущего абзаца, содержащему, кроме расходимостей, соответствующих диаграмме W в целом, расходимости, соответствующие вершинным частям, вставленным у вершины b диаграммы W . Если отбросить все эти расходимости, то получится конечное выражение $\Sigma_c(W, t^1)$, подстановка которого вместо Σ^* в формулу (63) дает также конечное и определенное с точностью до e^{2n+2} выражение для S'_F .

В описанном выше способе исходят из заданных выражений для S'_F , D'_F и Γ_μ , представленных с точностью до порядка e^{2n} в виде сумм, слагаемыми которых являются соответственно оператор S_F и конечное число произведений S_F на $S(\bar{W}, t^1)$, оператор D_F и конечное число произведений D_F на $D(\bar{W}', t^1)$, γ_μ и конечное число выражений $\Delta_{\mu c}(\bar{V}, t^1, t^2)$. Из этих трех заданных выражений получаются новые выражения для S'_F , D'_F , Γ_μ , в которые входят новые сходящиеся операторы $S(W, t^1)$, $D(W', t^1)$ и $\Delta_{\mu c}(V, t^1, t^2)$, определенные с точностью до порядка e^{2n+2} ; в расходящиеся члены, которые выделяются из новых выражений и отбрасываются, входят расходящиеся коэффициенты A, B, C, L , подобные коэффициентам, входящим в формулы (73), (78) и (82), но определенные с точностью до порядка e^{2n+2} . После того как отброшены все расходящиеся члены, новое выражение для Γ_μ (82) представляет собой сумму, слагаемыми которой являются γ_μ и конечное число величин $\Delta_{\mu c}(V, t^1, t^2)$, новое

выражение для S'_F (73) представляет собой сумму, слагаемыми которой являются величина S_F и конечное число произведений S_F на $S(W, t^1)$, и, наконец, новое выражение для D'_F (78) представляет собой сумму, слагаемыми которой являются величина D_F и конечное число произведений D_F на $D(W't^1)$. Новые выражения Γ_μ , S'_F и D'_F можно опять подставить в интегралы вида (65), при этом получится третий набор выражений для операторов Γ_μ , S'_F и D'_F , определяемых уже с точностью до порядка e^{2n+4} , причем вновь могут быть выделены конечные и бесконечные части. Подобным образом можно методом последовательных приближений вычислить конечные части операторов Γ_μ , S'_F и D'_F , опуская на каждом этапе вычисления перед подстановкой в интегральное уравнение расходящиеся члены и беря в качестве нулевого приближения величины γ_μ , S_F и D_F . После подобных подстановок конечные части Γ_μ , S'_F и D'_F будут определены с точностью до порядка e^{2n} .

В заключение необходимо оправдать отбрасывание расходящихся членов. Мы это сделаем, показав, что „истинные“ величины Γ_μ , S'_F , D'_F , получающиеся без отбрасывания расходящихся членов, совпадают с соответствующими величинами, получающимися после отбрасывания расходящихся членов, с точностью до численных множителей, которые в свою очередь могут быть исключены из теории при последовательном применении идей перенормировки заряда и массы. Пусть $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$, $D'_{F1}(e)$ — операторы, полученные последовательными подстановками с отбрасыванием расходящихся членов; эти операторы будут представлять собой степенные ряды по e с конечными операторными коэффициентами (чтобы не возник вопрос о сходимости данных рядов, будем предполагать, что все величины определяются только с точностью до некоторого конечного порядка e^{2N}); мы покажем, что в этом случае истинные операторы Γ_μ , S'_F и D'_F будут иметь вид

$$\Gamma_\mu = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu 1}(e_1), \quad (83)$$

$$S'_F = Z_2 S'_{F1}(e_1), \quad (84)$$

$$D'_F = Z_3 D'_{F1}(e_1), \quad (85)$$

где Z_1 , Z_2 , Z_3 — постоянные, которые надлежит определить, а величина e_1 задается равенством

$$e_1 = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e. \quad (86)$$

Эта величина e_1 окажется „истинным“ зарядом электрона.

Нам достаточно доказать, что при подстановке выражений (83)—(85) в интегральные уравнения, определяющие операторы Γ_μ , S'_F , D'_F , эти уравнения удовлетворяются, если постоянные Z_1 , Z_2 , Z_3 и δx_0 выбраны соответствующим образом.

Относительно операторов $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$, $D'_{F1}(e)$ известно, что при их подстановке в интегральные уравнения последние удовлетворяются, если в них дополнительно включить определенные расходящиеся члены. Эти дополнительные расходящиеся члены состоят отчасти из слагаемых, которые содержат величины A , B , C , L , входившие в формулы (73), (78), и отчасти из слагаемых, появляющихся (только в случае операторов S'_F и D'_F) из-за особенностей поведения вершин b и b' на фиг. 5. Такие слагаемые, связанные с вершинами b и b' , были рассмотрены ранее; их можно назвать для сокращения b -расходимостями. Первоначально, конечно, расходимости, соответствующие в Σ^* вершинным частям, вставленным у двух концов a и b диаграммы W , входили симметричным образом; асимметрия была привнесена нами в результате включения расходимостей, связанных с вершиной a , в коэффициент Z_1^{-1} формулы (83), в то время, как для точки b оператор γ_μ не заменялся на Γ_μ и расходимости, связанные с вершиной b , учитывались другим образом. Таким образом, следует ожидать, что

влияние b -расходимостей подобно влиянию a -расходимостей сведется только к умножению всех составляющих оператора Σ^* на постоянную Z_1^{-1} . Аналогично мы предполагаем, что наличие расходимостей, связанных с точкой b' , вызывает умножение величины Π^* на постоянную Z_1^{-1} . С помощью подробного доказательства, которое слишком сложно и поэтому здесь не приводится, можно строго подтвердить правильность высказанных предположений. (Интересующемуся читателю рекомендуется выяснить самому, рассмотрев составляющие оператора Σ^* , соответствующие различным относящимся к собственной энергии частям, почему конечные члены определенного порядка всегда входят в члены высшего порядка, умноженными на одни и те же расходящиеся коэффициенты.) Таким образом, полными выражениями, получающимися при подстановке $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$ и $D'_{F1}(e)$ в интегральные уравнения, определяющие операторы Δ_{μ} , Σ^* и Π^* , будут

$$\Delta_{\mu 1}(e) = \Delta_{\mu c}(e) + L(e) \gamma_{\mu}, \tag{87}$$

$$S_F \Sigma_1^*(e) = -2\pi i \delta x_0 S_F + Z_1^{-1} \left(A(e) S_F + \frac{1}{2\pi} B(e) + \frac{1}{2\pi} S_c(e) \right), \tag{88}$$

$$D_F \Pi_1^*(e) = Z_1^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} C(e) + \frac{1}{2\pi i} D_c(e) \right). \tag{89}$$

Здесь величины $A(e)$, $B(e)$, $C(e)$, $L(e)$ представляют собой полностью определенные степенные ряды по e с коэффициентами, расходящимися не сильнее, чем степень логарифма. Если отбросить расходящиеся члены, то конечные операторы $\Delta_{\mu c}(e)$, $S_c(e)$ и $D_c(e)$ вновь приведут нас к величинам $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$ и $D'_{F1}(e)$, которые были сначала подставлены; таким образом, согласно формулам (38), (63) и (64),

$$\Gamma_{\mu 1}(e) = \gamma_{\mu} + \Delta_{\mu c}(e), \tag{87'}$$

$$S'_{F1}(e) = S_F + \frac{1}{2\pi} S_c(e) S'_{F1}(e), \tag{88'}$$

$$D'_{F1}(e) = D_F + \frac{1}{2\pi i} D_c(e) D'_{F1}(e). \tag{89'}$$

Формулы (87)—(89) и (87')—(89') описывают, каким образом величины $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$ и $D'_{F1}(e)$ удовлетворяют при подстановке интегральным уравнениям при добавлении расходящихся членов. Из изложенного легко вывести, что операторы (83)—(85) также будут удовлетворять при подстановке тем же уравнениям.

Рассмотрим, например, результат подстановки выражений (83)—(85) в член $\Sigma(W, t^1)$, определяемый формулой (65) при $l=1$. Подинтегральное выражение в (65) представляет собой произведение, в которое входит один множитель Γ_{μ} , один множитель γ_{μ} , один множитель S'_F и один множитель D'_F . Таким образом, в результате рассматриваемой подстановки получится

$$Z_1^{-1} Z_2 Z_3 \Sigma_0(W), \tag{90}$$

где $\Sigma_0(W)$ — выражение, получающееся из (65) при подстановке операторов $\Gamma_{\mu 1}(e_1)$, $S'_{F1}(e_1)$, $D'_{F1}(e_1)$, не умноженных на постоянные Z . Далее, произведение множителей, стоящих в выражении (95) перед $\Sigma_0(W)$, и множителя e^2 из выражения (65) равно

$$Z_1 Z_2^{-1} e_1^2,$$

причем остальные входящие в $\Sigma_0(W)$ величины (кроме выделенного множителя e^2 явно зависят не от величины e , а от e_1 . Таким образом, выражение (90) равно выражению

$$Z_1 Z_2^{-1} \Sigma_1(W, e_1),$$

где $\Sigma_1(W, e)$ — величина, получающаяся в результате подстановки операторов $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$, $D'_{F1}(e)$ в $\Sigma(W, t^1)$. Таким образом, величина $\Sigma^*(t^1)$, получающаяся при подстановке выражений (83)—(85) в выражение (65), совпадает с величиной, получающейся при подстановке в последнее выражение операторов $\Gamma_{\mu 1}(e)$, $S'_{F1}(e)$ и $D'_{F1}(e)$ с последующей заменой e на e_1 и умножением всего выражения (кроме постоянного члена с δx_0) на $Z_1 Z_2^{-1}$. Более точно, можно, используя формулу (88), сказать, что величина Σ^* , получающаяся при подстановке выражений (83)—(85), равна

$$S_F \Sigma^* = -2\pi i \delta x_0 S_F + Z_2^{-1} \left(A(e_1) S_F + \frac{1}{2\pi} B(e_1) + \frac{1}{2\pi} S_c(e_1) \right). \quad (91)$$

Затем оператор S'_F , получающийся при подстановке выражений (83)—(85) в интегральное уравнение, задается формулой (91) и соотношением

$$S'_F = S_F + S_F \Sigma^* S'_F. \quad (92)$$

Теперь легко проверить, используя формулу (88), что выражение S'_F , определяемое формулами (91) и (92), будет совпадать с выражением (84) при условии, что

$$Z_2 = 1 + \frac{1}{2\pi} B(e_1), \quad (93)$$

$$\delta x_0 = \frac{1}{2\pi i} Z_2^{-1} A(e_1). \quad (94)$$

Аналогичным образом оказывается, что выражение D'_F , получающееся при подстановке выражений (83)—(85) в интегральные уравнения, может быть связано с выражением для $\Pi_1^*(e)$ (89). Данное выражение D'_F будет совпадать с выражением (85) при условии

$$Z_3 = 1 + \frac{1}{2\pi i} C(e_1). \quad (95)$$

Наконец можно показать, что выражение Γ_μ , получающееся при подстановке выражений (83)—(85), будет равно

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + Z_1^{-1} \Delta_{\mu 1}(e_1),$$

причем величина $\Delta_{\mu 1}(e)$ берется из формулы (87). Используя формулу (87'), получаем, что это выражение Γ_μ будет совпадать с выражением (83) при условии

$$Z_1 = 1 - L(e_1). \quad (96)$$

Следовательно, установлено, что если постоянные Z_1 , Z_2 , Z_3 и δx_0 определены формулами (96), (93), (95) и (94), то формулы (83)—(85) дают правильные выражения для операторов Γ_μ , S'_F , D'_F , причем учитываются все эффекты радиационных поправок, привносимых этими операторами как в самих себя, так и друг в друга. Использование точных выражений (83)—(85) позволяет значительно проще разделить расходящиеся и конечные части указанных операторов, чем использование приближенных выражений (73), (78), (82).

Рассмотрим теперь результат, получающийся при использовании точных значений операторов (83)—(85), для подсчета составляющей M оператора $U(\infty)$; при этом составляющая M строится из определенной неприводимой диаграммы G_0 по правилам раздела 4. Пусть, например, диаграмма G_0 будет иметь F_e внутренних и E_e внешних электронных линий, F_p внутренних и E_p внешних фотонных линий и

$$n = F_e + \frac{1}{2} E_e = 2F_p + E_p \quad (97)$$

вершин. В выражении M будет тогда $\frac{1}{2} E_e$ множителей $\psi'(k^i)$, $\frac{1}{2} E_e$ множителей $\bar{\psi}'(k^i)$ и E_p множителей $A'_\mu(k^i)$, определяемых соотношениями (37). В $\psi'(k^i)$

величина k^t является четырехмерным вектором энергии — импульса электрона, подчиняющимся условиям (69), а величина $S_c(k^t)$ в формуле (73) равна нулю на каждом этапе последовательного определения оператора $S'_{F1}(e)$. Следовательно, из формул (84), (35) и (37) в свою очередь получается

$$\begin{aligned} S'_F(k^t) &= Z_2 S_F(k^t), \quad \Sigma(k^t) = 2\pi(Z_2 - 1)(k_\mu^t \gamma_\mu - ix_0), \\ \psi'(k^t) &= \psi(k^t) + 2\pi(Z_2 - 1) S_F(k^t) (k_\mu^t \gamma_\mu - ix_0) \psi(k^t). \end{aligned} \quad (98)$$

Выражения (98) являются *неопределенными*, так как оператор $(k_\mu^t \gamma_\mu - ix_0)$ при действии на $\psi(k^t)$ дает нуль, а действуя на $S_F(k^t)$ дает постоянную $1/2\pi$. Таким образом, в зависимости от порядка, в котором определяются множители, выражение (98) будет давать для $\psi'(k^t)$ либо значение $\psi(k^t)$, либо значение $Z_2 \psi(k^t)$. Аналогично величина $\bar{\psi}'(k^t)$ остается неопределенной и равной либо $\bar{\psi}(k^t)$, либо $Z_2 \bar{\psi}(k^t)$; исключая пока тот случай, когда величины $A_\mu(k^t)$ представляют компоненты Фурье разложения потенциала внешнего поля, находим, что величина A'_μ также получается неопределенной и равной либо $A_\mu(k^t)$, либо $Z_3 A_\mu(k^t)$. В каждом из этих случаев из соображений ковариантности следует, что величины $\psi'(k^t)$, $\bar{\psi}'(k^t)$ и $A'_\mu(k^t)$ должны быть пропорциональны соответственно $\psi(k^t)$, $\bar{\psi}(k^t)$ и $A_\mu(k^t)$. Таким образом, неопределенным остается только постоянный множитель пропорциональности, на который умножается все выражение M .

Матричные элементы оператора $U(\infty)$ в этом случае не могут быть в какой-либо мере неопределенными, поскольку данный оператор по условию является унитарным. Неопределенность в действительности заключается только в нормировке электронных и фотонных волновых функций $\psi(k^t)$, $\bar{\psi}(k^t)$ и $A_\mu(k^t)$, которые можно считать либо не считать измененными вследствие взаимодействия данных частиц с окружающими их вакуумными полями. Можно показать, что если волновые функции везде нормированы обычным образом, то кажущаяся неопределенность устраняется и следует положить

$$\begin{aligned} \psi'(k^t) &= Z_2^{1/2} \psi(k^t), \\ \bar{\psi}'(k^t) &= Z_2^{1/2} \bar{\psi}(k^t), \\ A'_\mu(k^t) &= Z_3^{1/2} A_\mu(k^t). \end{aligned} \quad (99)$$

Как будет выяснено, формула (99) определяет геометрический смысл двузначности, получающейся из соотношений (98).

Если величины $A_\mu(k^t)$ представляют собой компоненты Фурье потенциала внешнего поля, то, вообще говоря, $(k^t)^2 \neq 0$ и величины $A'_\mu(k^t)$ не являются неопределенными, а задаются с помощью формул (37) и (85) в виде

$$A'_\mu(k^t) = 2\pi i Z_3 D'_{F1}(e_1)(k^t)^2 A_\mu(k^t). \quad (100)$$

Однако единицы, в которых измеряется потенциал внешнего поля, определяются в связи с динамическими эффектами действия этого поля на известные заряды; эти динамические эффекты описываются как раз теми матричными элементами оператора $U(\infty)$, в которые входит выражение (100). Следовательно, множитель Z_3 в выражении (100) не имеет физического значения и изменится, если измерять A_μ в практических единицах. Правильное значение постоянного множителя, получающегося в случае использования практических единиц, равно $Z_3^{1/2}$; это следует из того, что фотонные потенциалы A_μ в формуле (99) были нормированы к практическим единицам, и из того, что выражение (100) должно сводиться к выражению (99) при $(k^t)^2 \rightarrow 0$, если потенциалы внешнего поля и фотонного поля измерены в одних и тех же единицах. Таким образом, правильной формулой для

величин A'_μ , включающей как случай потенциалов внешнего поля, так и случай потенциалов фотонного поля, будет

$$A'_\mu(k^i) = 2\pi i Z_3^{1/2} D'_{F1}(e_1)(k^i)^2 A_\mu(k^i) \quad (k^i)^2 \neq 0, \quad (101)$$

$$A'_\mu(k^i) = Z_3^{1/2} A_\mu(k^i) \quad (k^i)^2 = 0.$$

В выражение M , кроме множителей типа (99) и (101), будет входить F_e множителей S'_F , F_p множителей D'_F и n множителей Γ_μ . Следовательно, на основании (97) получается, что постоянные Z войдут в выражение M только через посредство постоянного множителя

$$Z_1^{-n} Z_2^n Z_3^{(1/2)n}.$$

Согласно формуле (86), этот множитель в точности превращает множитель e^n , остающийся в выражении M от первоначального взаимодействия (8), в множитель e_1^n . Таким образом, как величина e , так и множители Z будут входить в выражение M только в виде их комбинации e_1 через операторы $\Gamma_{\mu 1}(e_1)$, $S'_{F1}(e_1)$, $D'_{F1}(e_1)$ и через множитель e_1^n . Если отождествить теперь e_1 с конечной наблюдаемой величиной электронного заряда, то в выражении M не останется никаких расходящихся величин. Поскольку выражение M представляет собой самый общий случай составляющей оператора $U(\infty)$, то тем самым достигнуто исключение расходимостей из S -матрицы.

Едва ли нужно специально обращать внимание на то, что в ходе рассуждений в настоящем разделе многократно производились различные операции с бесконечными величинами. Подобные манипуляции имеют лишь формальный смысл и могут быть оправданы лишь *a posteriori* в связи с тем обстоятельством, что они в конечном счете приводят к ясному разграничению конечных и бесконечных выражений. Подобное оправдание *a posteriori* вызывающих сомнение операций представляет собой неизбежную особенность каждой теории, которая стремится получить имеющий смысл результат, исходя из не полностью последовательных предположений.

В заключение мы сделаем два отдельных замечания. Во-первых, равенство $Z_1 = Z_2$ выполняется, повидимому, тождественно (нами это было показано только с точностью до порядка e^2). Если это предположение является правильным, то все эффекты перенормировки заряда вызываются только множителем Z_3 и все рассуждения настоящей статьи могут быть в известной мере упрощены. Во-вторых, формулы (88') и (89'), определяющие основные операторы S'_{F1} и D'_{F1} , могут быть разрешены относительно этих операторов; при этом получается

$$S'_{F1}(e) = \left[1 - \frac{1}{2\pi} S_c(e) \right]^{-1} S_F, \quad (88'')$$

$$D'_{F1}(e) = \left[1 - \frac{1}{2\pi i} D_c(e) \right]^{-1} D_F. \quad (89'')$$

В электродинамике величины S_c и D_c представляют собой малые радиационные поправки, так что разложение выражений (88'') и (89'') в ряд всегда является оправданным и удобным. Однако при применении методов настоящей статьи к мезонным полям с большой константой связи, подобные выражения желательно не разлагать; таким образом можно надеяться частично устранить ограничения, накладываемые на теорию вследствие использования приближения, которое основывается на малости константы связи.

8. Сводка результатов

Полученные в предыдущих разделах результаты делятся на две группы. С одной стороны, указана совокупность правил, с помощью которых может быть вычислен элемент S -матрицы, соответствующий любому заданному процессу рас-

сеяния, причем ничего не говорится о входящих в теорию расходимостях. С другой стороны, произведено подробное описание расходящихся выражений и дана интерпретация этих выражений как множителей перенормировки заряда и массы.

Первую группу результатов можно подытожить следующим образом. Пусть задана конкретная задача рассеяния с определенными начальным и конечным состояниями; тогда соответствующий матричный элемент оператора $U(\infty)$ будет суммой составляющих, связанных с различными диаграммами G так, как это описано в разделе 2. Каждая определенная составляющая M , соответствующая некоторой диаграмме G , записывается в виде интеграла по импульсным переменным, согласно правилам раздела 3; при этом подинтегральное выражение представляет собой произведение множителей $\psi(k^i)$, $\bar{\psi}(k^i)$, $A_\mu(k^i)$, $S_F(p^i)$, $D_F(p^i)$, $\delta(q^i)$ и γ_μ , каждый из которых соответствует определенным образом линиям и вершинам диаграммы G . Согласно разделу 4, учитываются только составляющие M , относящиеся к неприводимым диаграммам G ; влияние приводимых диаграмм учитывается посредством замены в выражениях M множителей ψ , $\bar{\psi}$, A_μ , S_F , D_F , γ_μ на соответствующие величины (37), (35), (36), (38). Затем в разделе 7 показывается, что подобная замена эквивалентна замене в выражениях каждого множителя S_F на величину $S'_{F1}(e)$, каждого множителя D_F на величину $D'_{F1}(e)$, каждого множителя γ_μ на величину $\Gamma_{\mu 1}(e)$, каждого множителя A_μ , если он представляет потенциал внешнего поля, на величину

$$A_{\mu 1}(k^i) = 2\pi i D'_{F1}(e)(k^i)^2 A_\mu(k^i); \quad (102)$$

множители ψ , $\bar{\psi}$, A_μ , представляющие волновые функции частиц, при этом остаются без изменения, а величина e в том случае, когда она входит в выражение M , заменяется на e_1 . Определение M завершается нахождением операторов $S'_{F1}(e)$, $D'_{F1}(e)$ и $\Gamma_{\mu 1}(e)$; именно с вычислением этих операторов связаны главные трудности теории. Метод нахождения указанных операторов, описанный в первой части раздела 7, состоит из последовательных подстановок и интегрирований; подсчитываемые подобным образом операторы не содержат расходимостей, поскольку расходящиеся части на каждом этапе вычислений отбрасываются после отделения от конечных частей по способу, примененному в разделе 6.

С помощью приведенных выше правил каждая составляющая M оператора $U(\infty)$ определяется в виде свободного от расходимостей выражения, зависящего от наблюдаемой массы m и наблюдаемого заряда e_1 электрона, причем обоим этим величинам приписываются их эмпирические значения. Расходящиеся части входят в теории в ненаблюдаемые постоянные δm и e и поэтому не влияют на вычисление $U(\infty)$. Известная неоднозначность может появиться на том этапе определения составляющих M , когда при вычислении операторов $S'_{F1}(e)$, $D'_{F1}(e)$ и $\Gamma_{\mu 1}(e)$ по методу раздела 6 выделяются конечные части $S(W, t^1)$, $D(W', t^1)$ и $\Delta_{\mu c}(V, t^1, t^2)$ из выражений (67), (74) и (80). Однако даже и в этом случае правила раздела 6 указывают однозначный способ выделения конечных частей; остается только сомнительным, нельзя ли подобрать другой столь же обоснованный способ такого выделения. В частности, можно выделять конечные части из величины $\Sigma(W', t^1)$, согласно формуле (67), и не использовать дополнительно формулы (70) для выделения конечной части величины $S(W', t^1)$, которая обращается в нуль при выполнении условий (69). В действительности легко установить, что применение подобного нового способа не приводит к изменению значения составляющей и лишь делает определение этого значения более сложным; при этом получается выражение для M , в котором одна (бесконечная) часть, соответствующая перенормировке заряда и массы, включается в постоянные δm и e , в то время как другая конечная часть, соответствующая перенормировке заряда и массы, сохраняется явным образом в формулах. Именно в исключении последних конечных эффектов перенормировки и состоит смысл выделения величин

$S(W, t^1)$ и $\Delta_{\mu c}(V, t^1, t^2)$. Поэтому можно сделать заключение, что правила вычисления оператора $U(\infty)$ не только не включают расходястей, но и являются однозначными.

Как известно каждому, кто знаком с историей лэмбовского сдвига [13], к утверждению о том, что некоторое частное правило вычислений является однозначным, требуется подходить с особой осторожностью. Приведенные в настоящей статье правила являются однозначными в том смысле, что с их помощью каждая величина представляется в виде абсолютно сходящегося на бесконечности интеграла в импульсном пространстве; такой интеграл всегда имеет полностью определенное значение. Однако данные правила перестали бы быть однозначными, если допустить расщепление подинтегральных выражений на отдельные слагаемые и раздельное интегрирование этих слагаемых с последующим сложением получающихся результатов; неоднозначности появляются тогда, когда какой-либо частный интеграл сходится не абсолютно. Расщепление интегралов на условно сходящиеся части кажется неестественным в контексте данной статьи, однако такое расщепление получается само по себе при использовании теории возмущений в случае раздельного рассмотрения электронных и позитронных состояний. Абсолютная сходимость интегралов в настоящей теории тесно связана с тем обстоятельством, что в теории нигде не разделяются электронная и позитронная части электронно-позитронного поля; алгебраически это выражается в том, что квадратичный знаменатель в выражении (45) нигде не разделяется на составляющие. Следовательно, отсутствие неоднозначностей в правилах вычисления оператора $U(\infty)$ достигнуто за счет введения в теорию по существу новой физической гипотезы, а именно, представления о том, что электронно-позитронное поле выступает всегда не как комбинация двух раздельных полей, а как единое целое. Аналогичная гипотеза принята для случая электромагнитного поля; именно принято, что это поле также действует как единое целое, а не как сумма двух частей, относящихся соответственно к испусканию и поглощению фотонов.

В заключение нужно отметить, что указанное в настоящей статье доказательство конечности и однозначности оператора $U(\infty)$ никоим образом не претендует на полноту и строгость. Крайне желательно, чтобы приведенные общие соображения были возможно скорее приложены к явному вычислению по крайней мере одного радиационного эффекта четвертого порядка с целью получить уверенность в том, что в этом порядке не возникает никаких неожиданных трудностей.

Вторая группа результатов данной теории заключается в определении постоянных δm и e посредством формул (94) и (86). Хотя оба этих равенства, строго говоря, не имеют смысла, так как содержат с обеих сторон расходямости, все же можно считать удовлетворительным, что они определяют не поддающиеся наблюдению постоянные δm и e как степенные ряды по наблюдаемой постоянной e_1 , а не наоборот. Таким образом, в принципе не возникает возражений против отождествления величины e_1 с наблюдаемым зарядом электрона и против записи

$$\frac{e_1^2}{4\pi\hbar c} = \alpha = \frac{1}{137} \quad (103)$$

Входящие в выражение (8) постоянные будут, следовательно, согласно формулам (94) и (86), равны

$$\delta m = m(A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \dots), \quad (104)$$

$$e = e_1(1 + B_1\alpha + B_2\alpha^2 + \dots), \quad (105)$$

причем A_i и B_i представляют собой логарифмически расходящиеся численные коэффициенты, не зависящие от m и e_1 .

9. Обсуждение дальнейших перспектив

Наиболее поразительной особенностью теории S -матрицы, изложенной в настоящей статье, является ее успех в устранении трудностей. Исходя из методов Томонага, Швингера и Фейнмана и не используя никаких новых идей или приемов, мы приходим к S -матрице, в которую автоматически, как бы по договоренности, не входят известные расходимости. Подобные автоматическое исчезновение расходимостей представляет собой эмпирический факт, значение которого следует должным образом оценить при рассмотрении будущих перспектив электродинамики. Парадоксальным образом конечности S -матрицы противостоит то обстоятельство, что вся теория построена на основе гамильтонова формализма с выражением для взаимодействия (8), которое является бесконечным и поэтому лишенным физического смысла.

Рассуждения данной статьи носят в значительной мере математический характер и ограничиваются рассмотрением следствий некоторого математического формализма. Чтобы попытаться оценить значение этих рассуждений для будущего, нужно перейти от языка математики к языку физики. Следует предварительно предположить, что математический формализм отражает нечто существующее в природе и затем выяснить до какой степени парадоксальные результаты формализма можно примирить с данным предположением. В соответствии с указанной программой можно истолковывать различие между содержащим расходимости гамильтоновым формализмом и формализмом с конечной S -матрицей как различие между двумя картинами мира, рассматриваемого двумя наблюдателями, которые имеют в своем распоряжении различные измерительные приборы. Первую картину, представляющую собой набор квантованных полей с локализованными взаимодействиями, видит воображаемый наблюдатель, аппараты которого не имеют атомной структуры и точность измерений которого ограничивается только существованием фундаментальных постоянных c и \hbar . Такой наблюдатель будет называться в последующем „идеальным“. Вторую картину, представляющую собой набор наблюдаемых величин (по терминологии Гейзенберга), видит реальный наблюдатель, аппараты которого состоят из атомов и элементарных частиц и точность измерений которого ограничивается не только постоянными c и \hbar , но также такими постоянными, как α и m . Реальный наблюдатель выполняет спектроскопические наблюдения и производит эксперименты, включающие бомбардировку атомных систем различными типами взаимодействующих субатомных снарядов, однако он, насколько нам сейчас известно, никак не может измерить напряженностей отдельного поля, не возмущенного в результате взаимодействия этого поля с другим полем. Идеальный наблюдатель, используя свои аппараты так, как это было описано при анализе гамильтонова формализма Бором и Розенфельдом [14], [15], производит, наоборот, измерения как раз последнего рода, и именно в связи с такими измерениями интерпретируются перестановочные соотношения для полей. Выражение для взаимодействия (8) будет, повидимому, всегда оставаться не наблюдаемым для реального наблюдателя, который способен определять положение частиц только с ограниченной точностью и который должен всегда получать конечные результаты при своих измерениях. Наоборот, считается, что идеальный наблюдатель, используя свои не имеющие атомистического характера аппараты, положение которых в пространстве и времени известно с бесконечной точностью, способен отделить одиночное поле от его взаимодействий с другими полями и измерить величину взаимодействия (8). По аналогии с соотношением неопределенности Гейзенберга можно, повидимому, считать, что получение идеальным наблюдателем бесконечных значений при измерениях является как раз следствием допущения бесконечно точного задания положения.

Если приведенный выше анализ правилен, то расходимости электродинамики связываются непосредственно с тем обстоятельством, что гамильтонов формализм основывается на идеализованном понятии измеримости. Парадоксальные следствия, получающиеся в нынешней теории, не состоят в простом сосуществовании

конечной S -матрицы с бесконечным выражением для взаимодействия. Устанавливаемая эмпирически связь между бесконечными выражениями и выражениями, которые являются ненаблюдаемыми для реального наблюдателя, становится физически понятным и приемлемым результатом теории. Парадокс заключается в действительности в том, что в настоящей статье при выводе конечных выражений приходится исходить из бесконечных выражений. Соответственно этому следует ожидать, что будущая теория будет представлять собой не столько изменение настоящей теории в сторону замены всех бесконечных величин на конечные, сколько такую перестановку отдельных частей теории, после которой конечные величины станут первичными, а бесконечные — вторичными.

Следует ожидать, что в будущем станет возможной последовательная формулировка электродинамики, свободная от расходимостей и включающая только физические константы m и e_1 , причем из этой формулировки можно будет вывести для соответствующим образом идеализованных условий гамильтонов формализм с взаимодействием (8), содержащим бесконечные коэффициенты δm и e . Гамильтонов формализм должен выступать как предельная форма описания мира, рассматриваемого наблюдателем определенного типа; при этом данный предел достигается тогда, когда допустимая для наблюдателя точность измерений стремится к бесконечности.

Сущность будущей теории не является подходящим предметом для теоретических гаданий. Будущая теория будет построена, во-первых, на основе будущих экспериментов и, во-вторых, в результате разъяснения связи между электромагнитными и мезонными и ядерными явлениями. Предыдущие замечания приведены только для того, чтобы указать, что теперь более не нужно считать, как это казалось в прошлом, обязательным, что будущая теория откажется от ряда существенных положений современной электродинамики. Современная электродинамика наверное не является полной, но ее нельзя считать безусловно неправильной.

В заключение автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность проф. Фейнману за многие из идей, на которых основывается настоящая статья, и проф. Оппенгеймеру за ценные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486 (1949).
2. Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **1**, 27 (1946) (см. статью I настоящего сборника); Koba Z., Tati, Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **2**, 101 (1947); **2**, 198 (1947); Kanesawa S., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **3**, 1 (1948); **3**, 101 (1948); Tomonaga S., Phys. Rev., **74**, 224 (1948); Ito S., Koba Z., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **3**, 276 (1948); Koba Z., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **3**, 290 (1948).
3. Schwinger J., Phys. Rev., **73**, 416 (1948); **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949). (См. статью II настоящего сборника.)
4. Feynman R. P., Phys. Rev., **74**, 1430 (1948).
5. Stueckelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, **14**, 51 (1941); **17**, 3 (1944); **18**, 195 (1945); **19**, 242 (1946); Nature, **153**, 143 (1944); Phys. Soc. Cambridge Conference Report, 199 (1947); Stueckelberg E. C. G., Rivier D., Phys. Rev., **74**, 218 (1948).
6. Wentzel G., Rev. Mod. Phys., **19**, 1 (1947).
7. Lewis H. W., Phys. Rev., **73**, 173 (1948).
8. Furry W. H., Phys. Rev., **51**, 125 (1937).
9. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., **52**, 54 (1937).
10. Euler H., Kockel B., Naturwiss., **23**, 246 (1935).
11. Euler H., Ann. d. Phys., **26**, 398 (1936).
12. Wentzel G., Phys. Rev., **74**, 1070 (1948).
13. Bethe H. A., Report to Solvay Conference, Brussels (1948).
14. Bohr N., Rosenfeld L., Kgl. Dansk. Vid. Sels. Math.-Phys. Medd., **12**, No 8 (1933)
15. Pais A., Developments in the Theory of the Electron, Princeton, 1948.

VI. О ЗНАЧЕНИИ КАУЗАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ D_c В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

М. ФИРЦ

M. Fierz, *Helv. Phys. Acta*, **23**, 731 (1950)

Введение

Как было показано Штюкельбергом (см. [1]) и Фейнманом [2, 3], в теории квантованных полей важную роль играет особая функция, обозначенная Штюкельбергом D_c . В частности, в электродинамике эта функция выражает распространение запаздывающего взаимодействия между электронами.

Упомянутые авторы с помощью наглядных рассуждений дали данной функции простое истолкование. Штюкельберг прежде всего подчеркивает, что она представляет только такое действие, которое переносится полем с положительной энергией. Поскольку тем самым правильно описывается причинный порядок событий, функция D_c была названа Штюкельбергом „каузальной D -функцией“.

Рассуждения обоих авторов очень сходны и в основном правильны. Однако в отдельных деталях они не являются достаточно четкими. Это вызвано главным образом тем, что в указанных работах не учитывается дополнительность энергетических и временных соотношений.

Как у Штюкельберга, так и у Фейнмана функция $D_c(x_2 - x_1)$ характеризуется тем, что при $t_2 > t_1$ она может быть выражена функцией, содержащей только положительные частоты, в то время как при $t_2 < t_1$ ее выражение содержит только отрицательные частоты. В данной связи возникает впечатление, что якобы допустимо задать знак изменения энергии частицы при процессе, происходящем в некоторый заданный момент времени $t_2 = t_1$, что, конечно, невозможно. Подобный способ рассмотрения приведет к кажущемуся введению взаимодействий, распространяющихся со скоростью, превышающей скорость света.

Функция $D_c(x)$ может быть записана в виде

$$D_c(x) = D_s(x) + \frac{i}{2} D_1(x),$$

где $D_s(x)$ — симметричная функция Грина волнового уравнения, а $D_1(x)$ — симметричное решение однородного волнового уравнения. Функция $D_1(x)$ не обращается при пространственно-подобных x в нуль, что соответствует упомянутым взаимодействиям, распространяющимся со скоростью, большей скорости света. Следует, однако, принять во внимание, что момент времени, в который происходит квантовый переход, не может быть, вообще говоря, точно установлен. Если учесть это обстоятельство, то функцию D_c можно истолковать в смысле Штюкельберга и Фейнмана, не приходя к каким-либо физически бессмысленным выводам.

В настоящей статье будет дана, как нам кажется, правильная трактовка функции D_c .

Физическое истолкование D_c оказывается особенно полезным при обсуждении матрицы рассеяния, получающейся в общей теории, не могущей быть сформулированной с помощью функции Гамильтона.

Мы рассмотрим подробнее предложенную недавно Гейзенбергом [4] теорию, не содержащую расходимостей. В этой теории в определенных матричных элементах матрицы рассеяния вместо функции D_c ставится функция D_s . Из интерпретации D_c становится ясным, что благодаря этому в теории Гейзенберга взаимодействие частично переносится квантами с отрицательной энергией.

1. Чтобы избежать излишних усложнений, ограничимся обсуждением электромагнитного взаимодействия между электронами. Легко, однако, видеть, что такое ограничение не является существенным. В частности, безразлично, какой статистике, Ферми или Бозе, подчиняются частицы, переносящие взаимодействие.

Рассмотрим матричный элемент, соответствующий меллеровскому взаимодействию:

$$\text{const} \int (dx)^4 \int (dy)^4 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) D_c(x-y) \bar{\psi}(y) \gamma_\mu \psi(y). \quad (1.1)$$

Чтобы переходы, описываемые оператором (1.1), не ограничивались законом сохранения импульса, примем, что электроны движутся во внешнем поле, которое должно обязательно учитываться.

Представим функцию $D_c(x)$ в (1.1) следующим образом. Возьмем решение неоднородного уравнения¹⁾

$$\square f(x) = -\delta_\pm(x), \quad (1.2)$$

где

$$\delta_\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mathbf{r}) \int_0^\infty e^{\pm i\nu t} d\nu = \delta(\mathbf{r}) \frac{1}{2} \left(\delta(t) \pm \frac{i}{\pi t} \right).$$

Уравнение (1.2) может быть проинтегрировано с помощью опережающих или запаздывающих потенциалов. Обозначим эти решения соответственно через

$$D_{\text{ret}}^\pm = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} [\delta_\pm(t)]_{\text{ret}} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \delta_\pm(t \pm |\mathbf{r}|). \quad (1.3)$$

Здесь

$$\delta_\pm(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{\pm i\nu t} d\nu.$$

Тогда имеет место равенство

$$D_c = D_{\text{ret}}^+ + D_{\text{av}}^-. \quad (1.4)$$

Для полноты изложения приведем выражения остальных D -функций через D_{av}^\pm

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{2} (D_{\text{ret}}^+ + D_{\text{av}}^+ + D_{\text{ret}}^- + D_{\text{av}}^-), \\ D_0 &= D_{\text{ret}}^+ - D_{\text{av}}^+ + D_{\text{ret}}^- - D_{\text{av}}^-, \\ D_1 &= \frac{1}{i} (D_{\text{ret}}^+ - D_{\text{av}}^+ - D_{\text{ret}}^- + D_{\text{av}}^-). \end{aligned} \quad (1.4a)$$

Представление (1.4) для D_c отличается от обычно применяемого в литературе. Это представление оказывается все же целесообразным, поскольку в квантовой теории поля, вне зависимости от спина и статистики квантов поля, положительные и отрицательные частоты сопоставляются определенным образом операторам испускания или поглощения в зависимости от того, положительна или отрицательна соответствующая частота (частота $e^{\pm i\nu t}$ считается положительной).

Отсюда следует, что компоненты Фурье операторов $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ относятся к переходам, при которых энергия увеличивается или уменьшается в зависимости от того, являются ли соответствующие частоты положительными или отрицательными.

Рассмотрим теперь оператор

$$\int_{V_x} (dx)^4 \int_{V_y} (dy)^4 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) D_c(x-y) \bar{\psi}(y) \gamma_\mu \psi(y), \quad (1.5)$$

¹⁾ Здесь x обозначает четырехмерный вектор (x, y, z, t) , а \mathbf{r} — пространственный вектор (x, y, z) . — Прим. авт.

где V_x и V_y — определенные конечные четырехмерные области, по которым производится интегрирование. Оператор (1.1) может рассматриваться как сумма операторов вида (1.5).

Выражение (1.5) описывает электромагнитное действие электронного перехода в области V_x на электронный переход в области V_y .

Если временная протяженность области V_x достаточно велика, то можно установить знак изменения энергии, связанного с переходом в данной области. Если, например, энергия убывает, то этому физически соответствует испускание светового кванта. Данный квант затем поглощается в области V_y . Согласно изложенному, следует ожидать, что в подобном случае соответствующий матричный элемент (1.5) лишь тогда не равен нулю, когда область V_y лежит позднее области V_x . Поскольку области V_x и V_y имеют определенную временную протяженность, сказанное следует понимать так, что в области V_x должны иметься точки, которые могут быть связаны с точками в области V_y направленным в будущее световым лучом. Действие V_x на V_y должно, таким образом, описываться запаздывающим потенциалом. Если же, наоборот, увеличивается энергия в области V_x , то действие V_x на V_y должно описываться опережающим потенциалом или, иначе говоря, должно учитываться запаздывающее действие V_y на V_x . Такая связь между знаком изменения энергии при электронных переходах и временным порядком этих переходов характерна для теории, в которой взаимодействие переносится полями с положительной энергией.

Представление D_c (1.4) показывает, что оператор (1.5) обладает описанными свойствами.

Рассмотрим, например, случай, когда в области V_x происходит переход, при котором энергия электронов уменьшается в среднем на $\hbar\nu_0$. Пусть область V_x лежит вокруг точки $t=0$ и имеет протяженность, равную по порядку величины T . Подставим соответственно этому в (1.5) вместо $\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ функцию

$$\rho_\mu(\mathbf{x}) e^{-i\nu_0 t - (t^2/T^2)}, \quad (1.6)$$

причем при интегрировании по $(dx)^4$ можно будет интегрировать по всем моментам времени.

Так как изменение энергии в рассматриваемом процессе должно быть отрицательным, выражение (1.6) не должно содержать положительных частот. Это будет иметь место с большой точностью тогда, когда

$$\nu_0 T \gg 1. \quad (1.7)$$

Тогда само изменение энергии будет полностью определенным. Если выполнить интегрирование по t , то отличный от нуля результат будет давать только составляющая D_{ret}^+ функции D_c , причем получится

$$\int_{v_x} (dx)^3 \int_{V_y} (dy)^4 \rho_\mu(\mathbf{x}) \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} e^{i\nu_0(t_y - |\mathbf{r}|)} e^{-|\mathbf{r}|^2/T^2} \bar{\psi}(\mathbf{y}) \gamma_\mu \psi(\mathbf{y}). \quad (1.8)$$

Здесь $|\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, а v_x обозначает элемент трехмерного объема.

Множитель $e^{-(t_y - |\mathbf{r}|)^2/T^2}$ описывает „причинную“ связь. Он лишь тогда заметно отличается от нуля, когда $t_y \approx |\mathbf{r}|$ в интервале $\pm T$, что соответствует продолжительности процесса в v_x .

Если область V_y действительно располагается позднее V_x , то должно выполняться неравенство $t_y > T$. Тогда $|\mathbf{r}| \nu_0 \gg 1$, и рассмотрение ведется в волновой зоне относительно происшедшего в области v_x перехода. В этой зоне поле, порожденное электронами из V_y , может рассматриваться как свободное световое поле. Столкновение взаимодействия с помощью представления об испускании и последующем поглощении световых квантов будет поэтому в данном случае совершенно оправданным. Одновременно с явным введением световых квантов в теорию становится также возможным выполнение закона сохранения энергии для процессов испускания и поглощения по отдельности.

Если в матрицу рассеяния вместо D_c входит другая функция Грина, также составленная из D_{av}^+ и D_{ret}^- , то закон сохранения энергии в отдельных процессах может быть выполнен лишь при введении квантов с отрицательной энергией. Если же отказаться от введения подобных квантов, то представление об энергии ограничивается намного больше, чем это уже имеет место в квантовой теории из-за дополнительности энергии и времени.

Таким образом, использованный Штюкельбергом постулат причинности равносильно требованию, чтобы возможности описания энергетического протекания процесса ограничивались только дополнительностью энергии и времени и чтобы взаимодействие переносилось квантами положительной энергии.

2. Гейзенбергом [4] недавно была предложена теория поля, не содержащая расходимостей. Однако эта теория не является „причиной“ в описанном выше смысле. Это можно легко установить на основе наших рассуждений.

Сначала кратко изложим основания теории Гейзенберга в несколько упрощенном виде.

Рассмотрим достаточно большое число спинорных полей ψ_k , которым сопоставлены массы χ_k . Эти поля квантуются обычным образом. Энергия поля должна задаваться просто в виде суммы энергий отдельных полей. Чтобы связать эти поля, будем действовать следующим образом. Составим сначала

$$\Psi = \sum_k C_k \psi_k; \quad \bar{\Psi} = \sum_k C_k \bar{\psi}_k. \quad (2.1)$$

Величины Ψ и $\bar{\Psi}$ не будут сопряженными в обычном смысле, так как коэффициенты C_k должны быть частично мнимыми. Вследствие перестановочных соотношений для ψ_k имеет место равенство

$$\{\bar{\Psi}(x), \Psi(y)\} = \frac{1}{i} \sum_k C_k^2 S_k(x-y) = S_0^R(x-y). \quad (2.2)$$

Здесь $S_k(x)$ — соответствующая D_0 спинорная функция, относящаяся к массе χ_k . Величины C_k^2 подбираются так, чтобы функция $S_0^R(x)$ была регулярной. Для этого необходимо, чтобы среди C_k^2 были как положительные, так и отрицательные величины.

Введем теперь неэрмитову матрицу

$$H(x) = A(\bar{\Psi}(x), \Psi(x))(\Psi(x), \Psi(x)) \quad (2.3)$$

и с ее помощью построим неунитарную матрицу

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int (dx_1)^4 \dots \int (dx_n)^4 P[H(x_1) \dots H(x_n)]. \quad (2.4)$$

Здесь P — введенный Дайсоном оператор, устанавливающий хронологический порядок множителя $H(x_k)$ в (2.4). Заведомо регулярная вследствие предположения о C_k^2 матрица T не может, однако, интерпретироваться как матрица рассеяния, поскольку $H(x)$ неэрмитов и не может поэтому соответствовать функции Гамильтона.

Строим теперь унитарную матрицу

$$S = T(T^*T)^{-1/2} = (TT^*)^{-1/2}T, \quad (2.5)$$

которую Гейзенберг истолковывает как матрицу рассеяния¹⁾ (если $H(x)$ эрмитова, то $T=S$).

В T сохраняется хронологический порядок множителей $H(x)$, так что в данном случае в матричный элемент входит „причинная“ функция $S_c(x)$, соответ-

¹⁾ Тождественность обоих выражений (2.5) для S показана Гейзенбергом в еще не опубликованной работе, о которой автор узнал от проф. Паули [5]. — *Прим. авт.*

ствующая D_c . В отличие от этого в S хронологический порядок множителей нарушен, так что теперь вместо $S_0(x)$ входит другая функция Грина.

Если разложить S по A , то члены второго приближения, содержащие $\sim A^2$, будут иметь вид

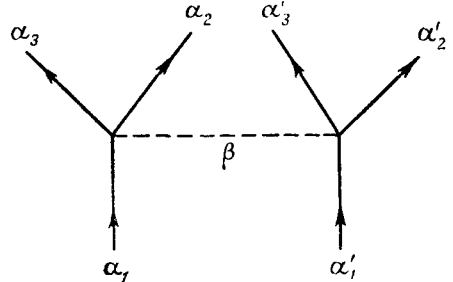
$$S_{(2)} = -\frac{A^2}{2} \int (dx_1)^4 \int (dx_2)^4 P[\mathfrak{H}(x_1), \mathfrak{H}(x_2)] + \\ + \frac{A^2}{2} \int (dx_1)^4 \int (dx_2)^4 \varepsilon(x_1 - x_2) (\mathfrak{I}(x_1), \mathfrak{I}(x_2)). \quad (2.6)$$

Здесь \mathfrak{H} и \mathfrak{I} — вещественная и мнимая части H :

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2}(H + H^*); \quad \mathfrak{I} = \frac{1}{2i}(H - H^*); \quad (2.7)$$

$\varepsilon(x)$ равно $+1$ или -1 в зависимости от того, больше или меньше нуля $t = x_4$.

Для рассмотрения выражения (2.6) введем следующее обозначение: назовем частицы, которым соответствует величина $C_k^2 > 0$, α -частицами, а частицы, которым соответствует $C_k^2 < 0$, β -частицами. Тогда \mathfrak{H} описывает процессы, в которых взаимодействует четное число α - и β -частиц, а \mathfrak{I} описывает процессы, в которых взаимодействует нечетное число частиц. Очевидно, второй член в выражении (2.6) является наиболее существенным. В нем содержатся матричные элементы, которые могут быть охарактеризованы диаграммой, изображенной на фиг. 1. Эти матричные элементы имеют вид



Фиг. 1.

$$\text{const} \int (dx)^4 \int (dx')^4 \psi_{\alpha_2}^+(x') \psi_{\alpha_3}^+(x') \psi_{\alpha_2}^+(x) \psi_{\alpha_3}^+(x) \varepsilon(x - x') \times \\ \times S_{\beta}(x - x') \psi_{\alpha_1}^-(x) \psi_{\alpha_1}^-(x'). \quad (2.8)$$

Здесь ψ^+ — операторы порождения и уничтожения α -частиц; $S_{\beta}(x - x')$ означает функцию, относящуюся к соответствующим β -частицам. Она может быть представлена в смысле (1.4) и (1.4а) следующим образом:

$$\varepsilon(x) S_{\beta}(x) = \frac{1}{2} (S_{\text{ret}}^+ + S_{\text{av}}^+ + S_{\text{ret}}^- + S_{\text{av}}^-). \quad (2.9)$$

Согласно истолкованию раздела 1, функции S_{ret}^- , S_{av}^+ сопоставляются действиям, переносимым квантами с отрицательной энергией.

В действительности у матрицы рассеяния нет матричных элементов, которым соответствовало бы наличие таких квантов в конечном состоянии. Кванты с отрицательной энергией в конце концов всегда поглощаются. Однако это поглощение может наступить лишь через довольно значительное время, так что таким квантом с отрицательной энергией следовало бы все же приписывать физическую реальность.

Во всяком случае, теория Гейзенберга отличается от обычной гамильтоновской теории не только тогда, как это утверждал Гейзенберг на стр. 258 своей работы, когда частицы подходят на расстояния, меньшие „универсальной длины“. В этой теории частицы, даже разделенные сколь угодно большим временно-подобным интервалом, оказывают друг на друга действия, которые можно истолковать только с помощью представления о квантах с отрицательной энергией. В связи с этим предлагаемый Гейзенбергом путь решения проблемы

расходимостей в теории квантованных полей представляется неудовлетворительным. Причина недостаточности современной теории поля заключается скорее всего в том, что в основу кладутся свободные поля, которые лишь в дальнейшем связываются друг с другом посредством добавления взаимодействия. Подобный образ действий является неудовлетворительным как с логической, так и с физической точки зрения. Он, однако, сохраняется без изменений в теории Гейзенберга.

В заключение следует указать, что теория рассмотренного выше типа может строиться не только для частиц спина $1/2$.

Кроме поля Ψ (2.1), можно ввести еще векторное поле

$$\Phi_\mu = \sum_l b_l \varphi_\mu^{(l)}; \quad \bar{\Phi}_\mu = \sum_l b_l \bar{\varphi}_\mu^{(l)},$$

причем опять величины b_l^2 выбираются определенным образом. С помощью связи

$$H = B(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi) \Phi_\mu$$

можно построить, подобно Гейзенбергу, регулярную матрицу T и из нее получить матрицу рассеяния S . Если попрежнему назвать поля, которым соответствуют отрицательные значения c_l^2 и b_l^2 , β -полями, то в пределе при массах β -квантов, стремящихся к бесконечности, получится регуляризованная теория типа электродинамики.

Добавление автора

1. Я имел возможность обсудить в Принстоне с проф. Гейзенбергом возражения, выдвинутые против его теории. При этом выяснилось следующее. В моем рассмотрении неявно предполагается, что матрица $S(t)$, описывающая состояние в момент t , будучи задана в момент $t=0$, обладает групповым свойством $S(t)S(t') = S(t+t')$. Гейзенберг надеялся, что его матрицы $S(t) = T(t)(T^*(t)T(t))^{-1/2}$ образуют по крайней мере приближенно группу, когда величины t и t' велики по сравнению с минимальным временем τ . Однако наши соображения показывают, что это не имеет места при сколь-угодно больших t и t' . Матрицы $S(t)$ будут, однако, образовывать группу лишь при явном введении в теорию квантов с отрицательной энергией.

2. Иост обратил мое внимание на то, что теория „типа электродинамики“, которая была указана в конце данной работы, не является калибровочно-инвариантной, поскольку ток $(\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)$ не удовлетворяет никакому уравнению сохранения. Таким образом, предложение Гейзенберга не может быть использовано и как вспомогательное средство для регуляризации теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. См. Rivier D., *Helv. Phys. Acta*, **22**, 265 (1949). Там же приведена остальная литература.
2. Feynman R. P., *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949). [См. статью III настоящего сборника.]
3. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **75**, 486, 1736 (1949). [См. перевод в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950.]
4. Heisenberg W., *Zs. f. Naturforsch.*, **5a**, 251 (1950).
5. Heisenberg W., *Zs. f. Naturforsch.*, **5a**, 367 (1950).

VI . ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ СТОЛКНОВЕНИЙ

Д. ВИК

G. C. Wick, Phys. Rev., 80, № 2, 268 (1950)

Указывается упрощение дайсоновского способа сведения S -матрицы Гейзенберга к сумме членов, сопоставленных графикам. Вводятся удобные обозначения и доказывается теорема, позволяющая трактовать проблему сведения достаточно просто и притом аналогичным образом для различных типов полей.

1. Введение

В настоящее время фейнмановский метод вычисления вероятностей перехода [1] используется настолько часто, что желательно, чтобы сущность данного метода была в достаточной степени разъяснена широкому кругу лиц. Важный шаг в этом направлении был сделан Дайсоном [2], который дал прямое обоснование метода Фейнмана, исходя из простого выражения для S -матрицы. Однако педагогическое значение доказательства Дайсона, как нам кажется, в известной мере обесценивается вследствие наличия в нем пропусков и ряда неясностей; кроме того, некоторые алгебраические выкладки Дайсона являются более сложными, чем это на самом деле необходимо. Задача настоящей заметки состоит в изложении прямого и простого обоснования способа вычислений Фейнмана. Все особенности данного метода мы продемонстрируем на достаточно общем примере электронно-позитронного поля, взаимодействующего с квантованным электромагнитным полем.

Пусть $\psi(x)$ — оператор дираковского поля в пространственно-временной точке x , спинор ψ^+ является эрмитово-сопряженным с ψ , сопряженный спинор $\bar{\psi}$ равен $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$ и $A_\mu(x)$ обозначает μ -ю компоненту электромагнитного потенциала. S -матрица для системы может быть записана в виде

$$S = 1 + S_1 + S_2 + \dots, \quad (1)$$

где S_n — член n -го порядка по заряду электрона; он представляется в форме кратного интеграла от произведения множителей $\psi, \bar{\psi}, A$ [см. формулу (18)]. Перейдем теперь, следуя Фейнману, к задаче сведения S_n к сумме членов. В связи с этим отметим, что поля ψ и A представляют собой линейные комбинации операторов порождения и уничтожения. В частности, $\psi(x) = \sum_r a_r \psi_r(x)$, где $\psi_r(x)$ — нормированные функции состояний свободной дираковской частицы, а a_r — операторы уничтожения (порождения), если r обозначает состояние положительной (отрицательной) энергии. Объединяя все состояния с положительной энергией в член $u(x)$ и все состояния отрицательной энергии в член $\bar{v}(x)$, мы можем записать

$$\psi(x) = u(x) + \bar{v}(x), \quad \bar{\psi}(x) = \bar{u}(x) + v(x), \quad (2)$$

где оператор $u(\bar{u})$ уничтожает (порождает) электроны, а оператор $v(\bar{v})$ уничтожает (порождает) позитроны¹⁾.

¹⁾ Мы положили $\bar{u} = u^\dagger \beta$, $v = \bar{v}^\dagger \beta$ или $\bar{v} = \beta v^\dagger$; отсутствие симметрии в определении \bar{u} и \bar{v} не приводит в данном случае к каким-либо затруднениям. — *Прим. авт.*

Аналогично мы можем написать

$$A_{\mu}(x) = a_{\mu}(x) + a_{\mu}^{+}(x), \quad (2')$$

где оператор $a_{\mu}(a_{\mu}^{+})$ уничтожает (порождает) фотоны¹⁾.

Подставив приведенные выражения в произведение операторов полей, мы можем разложить любое такое произведение на сумму произведений, в которых каждый множитель будет оператором порождения или уничтожения.

Следуя идее Урье и Кинда [3], мы затем переставим в полученных произведениях множители так, чтобы все операторы порождения стояли слева от операторов уничтожения; например, положим

$$u(x)\bar{v}(y) = -\bar{v}(y)u(x), \quad u(x)\bar{u}(y) = \{u(x), \bar{u}(y)\} - \bar{u}(y)u(x),$$

где антикоммутатор $\{u, \bar{u}\} = u\bar{u} + \bar{u}u$ является c -числом. Подобным образом можно преобразовать произведение операторов порождения и уничтожения в „упорядоченное“ произведение тех же множителей плюс дополнительные члены, в которых некоторые пары множителей заменены на их коммутаторы или антикоммутаторы, в то время как остальные множители „упорядочены“ в указанном выше смысле. Преимущество подобной записи состоит в том, что, когда мы берем матричный элемент от упорядоченного произведения, между начальным и конечным состоянием все операторы уничтожения должны уничтожать частицы, фактически присутствующие в начале, а все операторы порождения должны порождать частицы, фактически присутствующие в конце. Виртуальные процессы порождения и последующего уничтожения при помощи обычной теории возмущений описываются коммутаторами и антикоммутаторами. Главная проблема, которую нужно решить для выполнения указанной программы, заключается в выработке алгебраической техники, т. е. в подборе удобных обозначений для простого описания процессов перестановок и для компактной записи получающихся результатов. Это достигается, как мы полагаем, с помощью приведенных ниже теорем 1 и 2.

2. Алгебраический анализ

Каждый из „простых“ множителей в произведении операторов $\psi(x), \bar{\psi}(y), u(x), \bar{u}(y), \dots, A(x), a(y), \bar{a}(z)$ будет обозначаться также прописной буквой, например U, V, W, \dots .

В случае (не рассмотренном Урье и Киндом) антикоммутирующих полей перестановка в произведениях приводит к изменению знака, например, как это имело место в простом случае, рассмотренном выше. Мы будем называть N -произведением²⁾ „упорядоченное“ произведение с измененным соответствующим образом знаком. Введенный символ будет подчиняться следующим правилам.

Правило А. Дистрибутивный закон

$$N(U \dots V\psi(x)W \dots Z) = N(U \dots Vu(x)W \dots Z) + N(U \dots V\bar{v}(x)W \dots Z).$$

N -произведение может быть разложено на сумму N -произведений, содержащих только операторы порождения и уничтожения.

Правило Б. N -произведение последнего типа определяется равенством

$$N(UV \dots Z) = \delta_P XY \dots W, \quad (3)$$

где обычное произведение с правой стороны равенства включает множители U, V, \dots , упорядоченные в указанном выше смысле (операторы порождения — слева,

1) Оператор a_{μ}^{+} эрмитово-сопряжен с a_{μ} (или $-a_{\mu}$, если $\mu = 4$). Относительно трактовки продольных фотонов см. раздел 4. — *Прим. авт.*

2) Здесь изменено неудачное обозначение автора, употреблявшего термин S -произведение и ставившего с обеих сторон соответствующих упорядоченных произведений двоеточия. — *Прим. ред.*

уничтожения — справа) и где знаковый символ δ_P равен ± 1 в зависимости от четности перестановки при упорядочивании одних только электронно-позитронных множителей.

Множитель δ_P учитывает упомянутые выше изменения знака. Операторы порождения (соответственно уничтожения) можно переставлять между собой, не меняя правой стороны равенства (3).

Пример N -произведения:

$$\begin{aligned} N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= N(u(x)\bar{u}(y)) + N(u(x)v(y)) + N(\bar{v}(x)\bar{u}(y)) + N(\bar{v}(x)v(y)) = \\ &= -\bar{u}(y)u(x) + u(x)v(y) + \bar{v}(x)\bar{u}(y) + \bar{v}(x)v(y). \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, имеет место равенство

$$N(\psi(x)\bar{\psi}(y)) + N(\bar{\psi}(y)\psi(x)) = 0, \quad (5)$$

в то время как антикоммутирует

$$\psi(x)\bar{\psi}(y) + \bar{\psi}(y)\psi(x) \equiv \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}$$

не равен, вообще говоря, нулю.

Отметим также, что

$$N(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y), \quad N(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)) = \bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y).$$

Читатель может сам без труда получить следующий результат.

Правило В. Множители под знаком N -произведения могут переставляться так, „как если бы“ антикоммутируют $\{\psi, \bar{\psi}\} \dots$ и коммутируют $[A, A]$ и т. п. были равны нулю.

Дираковский ток можно записать в виде N -произведения

$$s_\mu = i\varepsilon N(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) = i\varepsilon \sum_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} N(\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta), \quad (6)$$

где ε — заряд электрона и $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ — матрицы Дирака. Запись тока в виде N -произведения эквивалентна обычному правилу исключения бесконечного заряда отрицательного фона.

Другой важный вид упорядочения содержится в хронологическом произведении, или T -произведении, в котором время растет справа налево.

Этот символ может использоваться, конечно, только если каждый из множителей U, V, \dots в произведении отнесен к определенному времени.

Правило Г. T -произведение определяется посредством

$$T(UV \dots Z) = \delta_P XY \dots, \quad (7)$$

где справа множители U, V, \dots переставлены в хронологическом порядке. Наше T -произведение отличается от дайсоновского P -произведения наличием знакового множителя δ_P . Это упрощает в дальнейшем определение свертывания [см. формулу (8)].

Пример:

$$\begin{aligned} T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= \psi(x)\bar{\psi}(y), \quad \text{если } x_0 > y_0; \\ T(\psi(x)\bar{\psi}(y)) &= -\bar{\psi}(y)\psi(x), \quad \text{если } x_0 < y_0. \end{aligned} \quad (7')$$

Имеем

$$T(\psi(x)\psi(y)) = \psi(x)\psi(y) \quad \text{и т. д.}$$

Правило В'. T -произведение подчиняется правилу, полностью аналогичному правилу В.

Дальнейшее обобщение T -произведения производится ниже в связи с выражением (8) для S -матрицы. Если два или более „простых“ множителя в произведении относятся к одному и тому же времени, то T -символ не определяет их порядка. Однако в рассматриваемом случае оказывается, что либо порядок

является несущественным (различные поля), либо он задается N -правилом подобно (6). Символ вида

$$T(UVN(WXY) \dots Z) \quad (7'')$$

будет, например, обозначать, что множители W, X, Y (относящиеся к одному моменту времени) выступают, взятые в виде N -произведения, в роли одного из множителей хронологического T -произведения. Такой символ можно назвать смешанным T -произведением.

Обратимся теперь к основной проблеме представления T -произведения из выражения (18) к виду суммы N -произведений. Используем с этой целью обозначение Урье и Кинда символа „свертывания“, или „контракции“, представляющего коммутатор или антикоммутатор, возникающий при перестановке двух множителей. Свертывание будет обозначаться соединением обоих множителей черточкой снизу. Так, в простейшем случае

$$T(UV) = \underline{UV} + N(UV). \quad (8)$$

Заметим, что определение Урье и Кинда использовалось для сведения обычного произведения к упорядоченному. В отличие от этого определение (8) относится непосредственно к интересующей нас редукции T -произведения и устраняет сложные преобразования, необходимые в противном случае для получения простых формул Фейнмана. Результат свертывания различных полей, например ψ и A , равен нулю. Также имеют место равенства

$$\underline{\psi(x)\psi(y)} = \underline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \underline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= \{u(x), \bar{u}(y)\} = \sum_{r>} \psi_r(x) \bar{\psi}_r(y), \quad \text{если } x_0 > y_0; \\ \underline{\bar{\psi}(x)\psi(y)} &= -\{\bar{v}(x), v(y)\} = -\sum_{r<} \bar{\psi}_r(x) \psi_r(y), \quad \text{если } x_0 < y_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где знак $r >$ ($r <$) означает, что сумма берется только по состояниям положительной (отрицательной) энергии. Правая сторона в равенстве (10) является, очевидно, тем „таинственным“ ядром, которое по-разному обозначается в разных работах (K_+ у Фейнмана [1], $\frac{1}{2} S_F$ у Дайсона [2] и т. д.).

Мы опустим в K_+ знак плюс и будем вместо этого явно выписывать спинорные индексы. Отметим главные формулы:

$$\underline{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)} = K_{\alpha\beta}(x-y), \quad (11a)$$

$$\underline{\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(y)} = -\underline{\psi_\beta(y)\bar{\psi}_\alpha(x)} = -K_{\beta\alpha}(y-x), \quad (11b)$$

$$\underline{A_\mu(x)A_\nu(y)} = \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} D_F(x-y), \quad (11в)$$

где D_F определен, в частности, Дайсоном [2].

Условимся еще относительно символов. Нам нужно разъяснить смысл N -произведения с одним или большим числом свертываний. Чтобы различать в произведении различные свертывания, мы будем соединять соответствующие множители различными черточками снизу. Если символ свертывания относится к двум соседним множителям, то его значение, задаваемое по (11), можно рассматривать как c -число; остающиеся множители образуют собственно N -произведение. Свертывание двух не стоящих рядом множителей определяется следующим образом.

Правило В". Множители под знаком N -произведения с одним или более свертыванием (включая свернутые множители), подчиняются правилу¹⁾, аналогичному правилу В. Например, если все U, V, \dots являются антикоммутирующими полями, то

$$N(\underbrace{UVW}_{\text{свертывание}}XYZ) = -(\underline{UY})(\underline{WX})N(VZ), \quad (12)$$

$$N(\underbrace{TUVW}_{\text{свертывание}}XYZ) = +(\underline{UY})(\underline{WZ})N(TVX). \quad (13)$$

Перейдем теперь к доказательству основных теорем. Покажем сначала, что если $N(UV \dots XY)$ является N -произведением и Z множителем, соответствующим моменту времени, предшествующему каждому из времен, для которых заданы U, V, \dots, Y , то

$$N(UV \dots XY)Z = N(UV \dots \underline{XYZ}) + \\ + N(\underline{UV} \dots XYZ) + \dots + N(\underline{UV \dots XY}Z) + N(UV \dots XYZ). \quad (14)$$

Очевидно, что достаточно доказать соотношение (14) для случая, когда каждый одиночный множитель является оператором порождения или уничтожения, а Z представляет собой оператор порождения (случай, когда Z представляет собой оператор уничтожения, является тривиальным). В силу правил В, соотношение (14) остается справедливым при перестановке $UV \dots XY$, и мы можем всегда выбрать порядок так, чтобы U, V, \dots, X, Y с самого начала образовывали N -произведение. Докажем теперь справедливость соотношения (14) при предположении, что все множители U, V, \dots, X, Y являются операторами уничтожения; кроме этого, слева может быть добавлено любое число операторов порождения. Доказательство производится по индукции. Во-первых, соотношение (14) справедливо для одного множителя

$$YZ = T(YZ) = \underline{YZ} + N(YZ).$$

Предположим теперь, что соотношение (14) выполняется для n множителей, и сверх того умножим его слева на оператор уничтожения T :

$$TN(UV \dots XY)Z = TN(UV \dots \underline{XYZ}) + \dots + TN(UV \dots XYZ).$$

Поскольку $U, V \dots Y$ — операторы уничтожения, то символ N , стоящий между T и концом соответствующего выражения, может быть сдвинут относительно T влево во всех слагаемых, кроме последнего. Далее,

$$N(UV \dots XYZ) = \delta_P ZUV \dots XY,$$

где δ_P определено обычным образом. Поскольку (считая, что T „позднее“ Z)

$$TZ = T(TZ) = \underline{TZ} + N(TZ) = \underline{TZ} + \delta_Q ZT$$

(Q — четность перестановки электронно-позитронных операторов при переходе от TZ к ZT), для последнего члена без труда получается равенство

$$TN(UV \dots XYZ) = \delta_P TZ(UV \dots Y) = \\ = \delta_P(\underline{TZUV} \dots Y + \delta_Q ZTU \dots Y) = N(\underline{TUV} \dots YZ) + \delta_P \delta_Q ZTU \dots Y.$$

Далее, $\delta_P \delta_Q = \delta_R$, где R соответствует перестановке, переводящей $ZTU \dots Y$ в $TU \dots YZ$, так что последнее слагаемое равно $N(TU \dots YZ)$. Тем самым доказательство для $(n + 1)$ множителей завершено.

¹⁾ Непротиворечивость данного правила обеспечивается в силу соотношения (116). Можно, кроме того, проверить, что любые две перестановки, не разъединяющие свернутые множители, будут давать один и тот же результат. — *Прим. авт.*

Мы можем, далее, обобщить соотношение (14). Если свернуть в нем U и V во всех слагаемых, то это соотношение останется справедливым, поскольку свернутое произведение \underline{UV} является просто множителем, добавляемым слева. Аналогичным образом можно произвести несколько подобных свертываний. Затем можно переставить порядок множителей соответственно правилам В, так что соотношение (14) сохраняет силу, если в выражении (14) предусматривается любое (по одно и то же в каждом из слагаемых) число свертываний.

Теорема 1. T -произведение можно представить в виду суммы N -произведений следующим образом:

$$T(UV \dots XYZ) = N(UV \dots XYZ) + N(\underline{UV}W \dots YZ) + \\ + N(\underline{UVW} \dots XYZ) + \dots + \dots + N(\underline{UVW} \dots \underline{XYZ}), \quad (15)$$

где члены справа представляют собой сумму всех возможных свертываний. В действительности можно опустить члены с свертываниями, равными тождественно нулю, подобные $\underline{\psi\psi}$, $\underline{\psi A}$ и т. д.

Соотношение (8) является, очевидно, простейшим частным случаем (15). В общем случае доказательство производится без труда по индукции. Пусть равенство (15) имеет место для n множителей. Умножим его справа на множитель Ω , предшествующий по времени всем остальным множителям

$$T(UV \dots Z) \Omega = N(UV \dots XYZ) \Omega + N(\underline{UV}W \dots XYZ) \Omega + \dots;$$

применим в каждом слагаемом справа формулу (14) и используем то обстоятельство, что

$$T(U \dots Z) \Omega = T(UV \dots Z \Omega).$$

Подобным образом теорема доказывается для $(n+1)$ множителей. Ограничение, накладываемое специальным выбором времени для Ω , может быть устранено посредством перестановки порядка множителей с помощью правил В.

Теорема 2. Смешанное T -произведение типа (7'') может быть разложено по формуле, аналогичной (15), только без свертываний между N -упорядоченными множителями [в частности, в случае (7'') без \underline{WX} , \underline{WXY} , \underline{XY}].

Читатель сможет сам получить общее доказательство, ориентируясь на приводимое исследование частного случая (7''). Мы можем, как обычно, предположить, что каждый множитель W , X , Y является либо оператором порождения, либо оператором уничтожения. Будем, далее, рассматривать (7'') как предел выражения

$$T(UVWXY \dots Z),$$

в котором время, соответствующее операторам порождения из числа W , X , Y , лежит позднее (на бесконечно малую величину) времени, соответствующему операторам уничтожения. Далее, можно применить формулу (15). При этом члены со свертываниями, которые следует опустить согласно теореме (2), действительно равны нулю, что подтверждает теорему 2.

3. Физические применения

Несколько утомительные детали, подробно изложенные выше с целью ясности, не затемняют, как нам кажется, того обстоятельства, что весь метод в целом является весьма простым и даже в известной степени тривиальным. Тем не менее он позволяет свободно оперировать с довольно сложными выражениями.

Введем для удобства сокращенные обозначения

$$A = -i\gamma_\mu A_\mu, \text{ т. е. } A_{\alpha\beta} = -i(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} A_\mu \quad (16)$$

и

$$\bar{\psi} A \psi(x) \text{ для } \sum_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(x) A_{\alpha\beta}(x) \psi_\beta(x). \quad (17)$$

Как показал Дайсон, член n -го порядка S_n в выражении (1) может быть записан в виде кратного интеграла по n координатам x, y, \dots, z в пространстве—времени¹⁾

$$S_n = \left[\frac{(-i\epsilon)^n}{n!} \right] \int T(N(\bar{\psi} A \psi(x)) N(\bar{\psi} A \psi(y)) \dots N(\bar{\psi} A \psi(z)) (dx) (dy) \dots (dz), \quad (18)$$

где $(dx) = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0$ и т. д. Указанный интеграл содержит смешанное T -произведение, которое может быть разложено с помощью теоремы 2. Дальнейший анализ проводится в основном так же, как и в разделе 7 статьи Дайсона [2], причем дайсоновские „ассоциированные пары“ взаимно уничтожающихся множителей заменяются на видоизмененные „свертывания“ Урбе и Кишда, определенные выше. Появляется, однако, ряд дополнительных упрощений. Благодаря правилам В мы можем трактовать N -произведения (15) настолько просто, что не получается никакого преимущества от сведения метода к набору механических рецептов. Поэтому дадим сейчас не рецепты, а лишь несколько указаний лучшего выполнения вычислений в каждом отдельном случае.

Предположим, что выражение (18) разложено, согласно теоремам 1 и 2, на сумму членов, каждый из которых является интегралом от N -произведения с некоторым числом свертываний. В частности, в S_3 входит член

$$\left[\frac{(-i\epsilon)^3}{3!} \right] \int N(\bar{\psi} A \psi(x) \bar{\psi} A \psi(y) \bar{\psi} A \psi(z)) (dx) (dy) (dz). \quad (19)$$

Если переставить сочетания $\bar{\psi} A \psi$ (используя для соответствующего переноса свертываний правило В'') и затем, изменив обозначения переменных x, y, z , восстановить их старый порядок в произведении, то получится, вообще говоря, другой возможный член разложения S_3 . Число подобных „эквивалентных“ членов в случае (19) равно $3!$, так что можно просто опустить множитель $3!$ в знаменателе. Однако в общем случае $n!$ перестановок $\bar{\psi} A \psi$ -групп не приводят к $n!$ различным членам²⁾, поскольку заданный набор свертываний может не измениться в силу допустимости подгруппы g перестановок (автоморфизм набора перестановок), причем g одинаково для двух „эквивалентных“ наборов³⁾. Следовательно, в этом случае число различных эквивалентных членов заданного вида будет равно $n!/g$ и соответствующей им составляющей в S_n будет

$$\left[\frac{(-i\epsilon)^n}{g} \right] \cdot \int N\text{-произведение } (dx) \dots (dz); \quad (20)$$

при этом берется какое-либо одно из эквивалентных N -произведений со свертыванием.

„Диаграмма“ теперь выступает просто как краткий способ записи N -произведения, интересующего нас типа. Действительно, как только обозначены вершины x, y, \dots, z , то тем самым подразумевается, что каждой точке

¹⁾ Мы используем единицы с $\hbar = 1, c = 1$. — *Прим. авт.*

²⁾ Ср. аналогичное рассмотрение в работе [3], где, однако, выражение „эквивалентный набор“ имеет несколько отличный смысл. Соображения [3] воспроизводятся здесь для удобства читателей в измененном виде. — *Прим. авт.*

³⁾ Если P -автоморфизм набора s (можно записать $Ps = s$) и T переводит s в эквивалентный набор s' ($s' = Ts$), то $s' = Ts = TP s = TPT^{-1} s'$ и, следовательно, TPT^{-1} будет автоморфизмом для s' . Тем самым устанавливается однозначное соответствие обычного типа между автоморфизмами для различных наборов. — *Прим. авт.*

сопоставляется множитель $N(\bar{\psi}A\psi)$. Если, например, имеется свертывание между операторами $A(x)$ и $A(y)$, то проводится пунктирная (фотонная) линия от x к y . Если же свертываются операторы $\bar{\psi}(x)$ и $\psi(y)$, то проводится направленная сплошная линия от x к y . Свободные множители ψ , $\bar{\psi}$, A могут быть аналогичным образом представлены с помощью линий, не кончающихся в вершинах, а именно с помощью линий, направленных „внутри“ диаграммы (множитель ψ), направленных „наружу из“ диаграммы (множитель $\bar{\psi}$) и ненаправленных пунктирных линий (множитель A). Например, выражение (19) представляется диаграммой, в которой направленная линия входит в диаграмму, проходит последовательно через вершины x , y и z и затем выходит из диаграммы; пунктирная линия соединяет точки y и z .

На данном этапе вычислений возникает вопрос о знаке. Действительно, знаки входят в свертывания (11а) и (11б), множители $\delta_P(3)$ и т. п. Можно, не запоминая никаких рецептов, свести появляющиеся в связи с этим усложнения к минимуму, если записать группы $\bar{\psi}A\psi$ в удачном порядке (это не сказывается на окончательном результате). Именно, если незамкнутая ломаная линия проходит через точки $1, 2, 3, \dots, m$, то эти точки следует записывать в том же порядке, как в N -произведении:

$$N(\underbrace{\bar{\psi}A\psi(m)}_{\dots} \dots \underbrace{\bar{\psi}A\psi(3)}_{\dots} \underbrace{\bar{\psi}A\psi(2)}_{\dots} \underbrace{\bar{\psi}A\psi(1)}_{\dots}).$$

Все свертывания будут тогда производиться между сопряженными множителями типа (11а) без знака минус. Если точки $1, \dots, m$ образуют замкнутую петлю, то добавится свертывание между $\bar{\psi}(m)$ и $\psi(1)$. В этом случае следует перенести $\bar{\psi}(m)$ в положение справа от $\psi(1)$, причем $\bar{\psi}(m)$ будет переставляться с нечетным числом операторов ψ и $\bar{\psi}$. В результате получится дополнительный множитель — $K(1, m)$ с одним минусом. В конечном итоге войдет по одному множителю (-1) от каждой петли¹⁾.

Что касается свободных множителей ψ , $\bar{\psi}$, то в представляющих интерес случаях их имеется два или, самое большее, четыре. Все вопросы, связанные со знаком, легко решаются (после того, как установлено, какую из частей — u или \bar{v} от ψ , \bar{u} или v от $\bar{\psi}$ — следует брать) с помощью простых правил В.

4. Продольные волны

В электродинамике продольные волны требуют всегда особого рассмотрения. В нашем случае нужно отметить, во-первых, что относящуюся к уничтожению часть a_μ следует понимать в том смысле, что это есть часть оператора с зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$ ($\omega > 0$). В случае a_4 подобное определение в действительности соответствует порождению временно-подобных фотонов; тем не менее, поскольку подобные фотоны обладают отрицательными энергиями, член уничтожения оказывается выбранным совершенно правильно. Во всяком случае такой выбор приводит к (11в).

Другой более важный пункт связан со следующим. В рассмотрении Дайсона имеется неоднозначность в определении вакуумного среднего значения $A_\mu(x) \times A_\nu(y)$, и необходимо доказательство того, что данная неоднозначность является несущественной. Это было сделано недавно Дайсоном [4].

Хотя в нашем случае в определении свертывания $A_\mu(x) A_\nu(y)$ нет никакой неоднозначности, связанной с указанным вопросом, данная проблема проявляется, как и следовало ожидать, в другом пункте. Рассмотрим, например, переход, описываемый диаграммой, включающей определенное свертывание A_μ и A_ν .

¹⁾ Соответственно множителю $(-1)^l$ в формуле Дайсона (51) в работе [2]. Множитель $(-1)^n$ появляется вследствие различия между нашим ядром K и дайсоповским ядром S . — *Прим. авт.*

С первого взгляда можно, казалось бы, получить составляющую для того же самого перехода также из другого члена S -матрицы, содержащего обратное N -произведение A_μ и A_ν . Это в действительности не должно иметь места; трудность возникает вследствие наличия неопределенного числа продольных и временно-подобных фотонов как в начальном, так и в конечном состояниях. Следовало бы поэтому доказать, что последние дополнительные члены фактически дают нуль. Нам, однако, стало известно, что этот вопрос подробно разбирается в недавно опубликованной статье Костера и Яуха [4]¹⁾, к которой мы и отсылаем читателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феупшан R. P., Phys. Rev., **76**, No 6 (1949). [См. статью IV настоящего сборника.]
2. Дюзон F., Phys. Rev., **75**, No 11 (1949). [См. статью V настоящего сборника.]
3. Houriet A., Kind A., Helv. Phys. Acta, **22**, 319 (1949).
4. Дюзон F., Phys. Rev., **77**, 421 (1950).
5. Coester, Jauch, Phys. Rev., **78**, 149 (1950).

1) В этой работе используется близкий к нашему метод Урве и Кинда. — *Прим. авт.*

VIII. О КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ И ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Ю. ШВИНГЕР

J. Schwinger, Phys. Rev., 82, № 5, 664 (1951)

Настоящая статья основывается на том простом замечании, что получение калибровочно-инвариантных результатов из формально калибровочно-инвариантной теории обеспечивается использованием таких способов решений, в которые входят только калибровочно-инвариантные величины. Мы иллюстрируем приведенное утверждение на примере проблемы поляризации вакуума внешним электромагнитным полем. Вакуумный ток заряженного дираковского поля, который может быть выражен через гриновскую функцию данного поля, вызывает появление добавки в интеграле действия для электромагнитного поля. Далее, эти величины удастся связать с динамическими свойствами некоторой „частицы“, пространственно-временные координаты которой зависят от параметра собственного времени. Записанные при помощи собственного времени уравнения движения содержат только напряженности электромагнитного поля и представляют собой калибровочно-инвариантную основу рассмотрения всей проблемы. Строгие решения данных уравнений могут быть получены в случае постоянного поля и в случае поля плоской волны. Перенормировка напряженностей поля и заряда, примененная в модифицированной лагранжевой функции для постоянного поля, дает конечный калибровочно-инвариантный результат, означающий нелинейный характер электромагнитного поля в вакууме. В работе приводится также лагранжева функция, соответствующая заряженному полю нулевого спина. После аналогичной перенормировки напряженностей поля модифицированные физические величины, описывающие плоскую волну в вакууме, в точности сводятся к соответствующим величинам максвелловского поля; таким образом, для одиночной плоской волны произвольной напряженности и спектрального состава не имеют места никакие нелинейные явления. Результаты, полученные для постоянного (т. е. для медленно меняющегося) поля, применяются для рассмотрения двухфотонного распада нейтрального мезона нулевого спина, связанного поляризации протонного вакуума. Мы получаем приближенные калибровочно-инвариантные выражения для эффективного взаимодействия между мезоном и электромагнитным полем, причем природа ядерной связи может быть скалярной, псевдоскалярной и псевдовекторной. Непосредственное установление эквивалентности между псевдоскалярным и псевдовекторным взаимодействиями становится возможным при правильном определении входящих в вычисления предельных процессов. В случае произвольно меняющихся полей могут быть применены методы теории возмущений для уравнений движения (согласно рассмотрению в приложении А) или же использовано разложение по степеням вектор-потенциала. Последний метод автоматически дает калибровочно-инвариантные результаты при условии, что интегрирование по собственному времени откладывается на конец вычислений. Это характеризует важнейшую особенность метода, заключающуюся в том, что все расходимости сводятся только к расходимостям в интегралах по собственному времени, которые не зависят от системы координат и калибровки. Обсуждается соотношение между методом собственного времени и приемом „инвариантной регуляризации“. Кроме того, из мнимой части интеграла действия электромагнитного поля выводится вероятность реального порождения пар. Наконец, в качестве применения гриновской функции для постоянного поля строится оператор массы электрона в слабом однородном внешнем поле и выводится дополнительный спиновый магнитный момент, равный $\{1 + (\alpha/2\pi)\}$ магнетонам, причем используется метод теории возмущений, в котором роль энергии играет собственная масса.

I. Введение

Характерным свойством квантовой электродинамики является релятивистская и калибровочная инвариантность. Тем не менее конкретные подсчеты, выполняемые обычными методами, могут приводить к результатам, противоречащим указанным условиям инвариантности; причиной этого являются содержащиеся в существующей теории расходимости. Подобные затруднения, касающиеся релятивистской инвариантности, были устранены посредством применения фор-

мулировки теории, явно инвариантной по отношению к преобразованиям координат, и посредством сохранения этой явной инвариантности в течение всего хода вычислений. Сохранение калибровочной инвариантности считалось, повидимому, более сложной задачей. Однако очевидно, что обе проблемы полностью аналогичны и что трудности с калибровочной инвариантностью естественным образом отпадут, если применить метод решения, основанный на использовании только калибровочно-инвариантных величин.

Высказанное утверждение мы поясним на примере рассмотрения с помощью калибровочно-инвариантного метода ряда аспектов проблемы поляризации вакуума заданным электромагнитным полем. Вычисление тока, связанного с вакуумом поля заряженных частиц, включает построение функции Грина для поля частиц в заданном электромагнитном поле. Подобный вакуумный ток может быть представлен в виде вариации некоторого интеграла действия относительно вектор-потенциала; это действие фактически добавляется к действию максвелловского поля при описании поведения электромагнитного поля в вакууме. Мы свяжем указанные проблемы с задачей решения уравнений движения частицы, содержащих в качестве параметра собственное время. Калибровочная инвариантность нашего рассмотрения будет обеспечиваться использованием с самого начала уравнений движения, содержащих только напряженности электромагнитного поля.

Явные решения получаются в двух случаях: случай постоянного поля и случай поля, распространяющегося со скоростью света в виде плоской волны¹⁾. Для постоянных (т. е. медленно меняющихся) полей перенормировка напряженности поля и величины заряда приводит к измененной функции Лагранжа, отличающейся от функции Лагранжа максвелловского поля на слагаемое, которое означает наличие нелинейности в поведении электромагнитного поля. Получающийся результат полностью согласуется с выводами, сделанными ранее с иной точки зрения с помощью других методов [2]. Преобразованные физические величины, характеризующие плоскую волну в вакууме, сводятся вновь к выражениям для максвелловского поля с перенормированными напряженностями. В случае слабых произвольно меняющихся полей для решения уравнений движения могут быть применены методы теории возмущений. Этот вопрос будет рассмотрен в приложении А.

Получающиеся выводы могут быть использованы в целом ряде проблем, в которых встречаются трудности с калибровочной инвариантностью [3], как, например, в случае распада нейтрального мезона на фотоны. Без каких-либо дополнительных сложных расчетов мы получим приближенное калибровочно-инвариантное выражение для взаимодействия нейтрального мезона пулевого спина с двумя фотонами, причем входящее в промежуточные вычисления ядерное взаимодействие может быть либо скалярным, либо псевдоскалярным или псевдовекторным.

Удобство примененного в настоящей статье метода вычислений с собственным временем заключается, кроме возможности получения строгих решений в нескольких частных случаях, еще в изоляции расходимостей, которые входят только в интегралы по собственному времени — параметру, не связанному с системой координат и калибровкой. В самом деле, мы покажем, что обычный метод теории возмущений, состоящий в разложении в степенные ряды по вектор-потенциалу, дает калибровочно-инвариантные результаты, если только отложить на конец интегрирование по собственному времени. Прием „инвариантной регуляризации“ Паули и Вилларса [4] представляет собой частный случай метода собственного времени, при котором используются интегралы по сопряженной величине — квадрату собственной массы со специальным весом.

¹⁾ Возможность точного решения уравнения Дирака в поле плоской волны была показана Волковым [1]. — *Прим. авт.*

Наконец, в приложении Б мы используем функцию Грина электрона в слабом однородном внешнем поле для вычисления составляющей второго порядка электромагнитной массы, что позволит получить простой вывод поправки второго порядка к магнитному моменту электрона.

2. Общая теория

Уравнения поля, перестановочные соотношения и вектор тока для дираковского поля имеют вид¹⁾

$$\gamma_\mu (-i\partial_\mu - eA_\mu(x))\psi(x) + m\psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

$$(i\partial_\mu - eA_\mu(x))\bar{\psi}(x)\gamma_\mu + m\bar{\psi}(x) = 0,$$

$$\{\psi(\mathbf{x}, x_0), \bar{\psi}(\mathbf{x}', x_0)\} = \gamma_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.2)$$

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2} e [\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)], \quad (2.3)$$

где

$$\frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -\delta_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

и

$$\gamma_0 = -i\gamma_4, \quad \gamma_0^2 = 1. \quad (2.5)$$

Структура оператора тока

$$j_\mu(x) = -e(\gamma_\mu)_{\beta\alpha} \frac{1}{2} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)], \quad (2.6)$$

получающаяся в результате явной симметризации по знаку заряда, является также симметричной по времени, что можно подтвердить с помощью введения хронологизирующих операторов. Так, в обозначениях

$$(A(x_0)B(x'_0))_+ = \begin{cases} A(x_0)B(x'_0), & x_0 > x'_0, \\ B(x'_0)A(x_0), & x_0 < x'_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

и

$$\varepsilon(x-x') = \begin{cases} 1, & x_0 > x'_0 \\ -1, & x_0 < x'_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

мы имеем

$$(\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))_+ \varepsilon(x-x') = \begin{cases} \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'), & x_0 > x'_0, \\ -\bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x), & x_0 < x'_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{1}{2} [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x)] = (\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x'))_+ \varepsilon(x-x')|_{x' \rightarrow x} \quad (2.10)$$

при условии, что справа берется среднее арифметическое двух выражений, получающихся при стремлении x' к x со стороны будущего и соответственно со стороны прошлого. Нас в данном случае интересует среднее значение $j_\mu(x)$ в вакууме дираковского поля

$$\langle j_\mu(x) \rangle = ie \operatorname{tr} \gamma_\mu G(x, x')|_{x' \rightarrow x}, \quad (2.11)$$

где

$$G(x, x') = i \langle (\psi(x)\bar{\psi}(x'))_+ \rangle \varepsilon(x-x'), \quad (2.12)$$

а знак tr обозначает диагональную сумму по спинорным индексам.

¹⁾ Мы используем единицы, в которых $\hbar = c = 1$. Отметим также, что $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ и матрицы $\gamma_0 \gamma_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) являются эрмитовыми. — *Прим. авт.*

Функция $G(x, x')$ удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению, которое получается, если учесть, что

$$[\gamma(-i\partial - eA(x)) + m] G(x, x') = \langle \gamma_0 \{ \psi(x), \bar{\psi}(x') \} \rangle \delta(x_0 - x'_0). \quad (2.13)$$

Здесь правая часть выражает скачкообразное изменение при переходе от $x'_0 = 0$ к $x'_0 \neq 0$. Поэтому, согласно (2.2), получаем

$$[\gamma(-i\partial - eA(x)) + m] G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (2.14)$$

Следовательно, функция $G(x, x')$ представляет собой функцию Грина для дираковского поля. Мы не будем сейчас обсуждать, какой конкретно из функций Грина, задаваемых соответствующими граничными условиями, является наша функция, поскольку не возникает никакой неоднозначности, если в вакууме не происходит, как это мы принимаем, действительного порождения пар.

Функцию $G(x, x')$ удобно рассматривать как матричный элемент оператора G , в котором состояния нумеруются пространственно-временными координатами и опущенными в данной записи спинорными индексами

$$G(x, x') = (x | G | x'). \quad (2.15)$$

Исходные дифференциальные уравнения для гриновской функции рассматриваются при этом как матричный элемент операторного уравнения

$$(\gamma\Pi + m) G = 1, \quad (2.16)$$

где оператор

$$\Pi_\mu = p_\mu - eA_\mu \quad (2.17)$$

характеризуется следующими свойствами:

$$[x_\mu, \Pi_\nu] = i\delta_{\mu\nu}, \quad [\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ie F_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

причем

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \quad (2.19)$$

является антисимметричным тензором напряженности поля. С помощью развитого формализма легко показать, что вектор тока в вакууме

$$\langle j_\mu(x) \rangle = ie \operatorname{tr} \gamma_\mu (x | G | x) \quad (2.20)$$

получается варьированием интеграла действия по $A_\mu(x)$. Для этого выразим

$$\delta W^{(1)} =: \int (dx) \delta A_\mu(x) \langle j_\mu(x) \rangle = ie \operatorname{tr} \gamma \delta A G \quad (2.21)$$

в виде полного дифференциала относительно $\delta A_\mu(x)$, обращаемого в нуль на бесконечности. В другом варианте записи $\delta W^{(1)}$ через δA_μ обозначен оператор с матричными элементами

$$(x | \delta A_\mu | x') = \delta(x - x') \delta A_\mu(x), \quad (2.22)$$

а символ tr обозначает полное диагональное суммирование как по спинорным индексам, так и по непрерывным пространственно-временным координатам. Далее,

$$-e\gamma\delta A = \delta(\gamma\Pi + m) \quad (2.23)$$

и

$$G = \frac{1}{\gamma\Pi + m} = i \int_0^\infty ds \exp\{-i(\gamma\Pi + m)s\}, \quad (2.24)$$

так что

$$ie \operatorname{tr} \gamma \delta A G = \delta \left[i \int_0^\infty ds s^{-1} \operatorname{tr} \exp\{-i(\gamma\Pi + m)s\} \right], \quad (2.25)$$

поскольку след обладает следующим основным свойством:

$$\text{tr } AB = \text{tr } BA. \quad (2.26)$$

Таким образом, с точностью до аддитивной постоянной мы получаем для $W^{(1)}$ выражение

$$W^{(1)} = i \int_0^{\infty} ds s^{-1} e^{-ims} \text{tr} \exp \{ -i\gamma \Pi s \} = \int (dx) \mathcal{L}^{(1)}(x). \quad (2.27)$$

Здесь лагранжева функция $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = i \int_0^{\infty} ds s^{-1} e^{-ims} \text{tr} (x | \exp \{ -i\gamma \Pi s \} | x). \quad (2.28)$$

Другое представление для G , которое будет использоваться в вычислениях, находится из записи

$$G = (-\gamma \Pi + m) [m^2 - (\gamma \Pi)^2]^{-1} = [m^2 - (\gamma \Pi)^2]^{-1} (-\gamma \Pi + m), \quad (2.29)$$

из которой следует

$$\begin{aligned} G &= (-\gamma \Pi + m) i \int_0^{\infty} ds \exp [-i(m^2 - (\gamma \Pi)^2) s] = \\ &= i \int_0^{\infty} ds \exp [-i(m^2 - (\gamma \Pi)^2) s] (-\gamma \Pi + m). \end{aligned} \quad (2.30)$$

В силу обращения в нуль следа нечетного числа γ -матриц [причем здесь опять учтено основное свойство следа (26)] имеем

$$\begin{aligned} ie \text{tr } \gamma \delta A G &= -\text{tr } \delta (\gamma \Pi) \gamma \Pi \int_0^{\infty} ds \exp [-i(m^2 - (\gamma \Pi)^2) s] = \\ &= -\delta \left[\frac{1}{2} i \int_0^{\infty} ds s^{-1} \exp [-i(m^2 - (\gamma \Pi)^2) s] \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Итак, для $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)}(x) &= \frac{1}{2} i \int_0^{\infty} ds s^{-1} \exp (-im^2 s) \text{tr} (x | U(s) | x), \\ U(s) &= \exp (-i\mathcal{H}s), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\mathcal{H} = -(\gamma \Pi)^2 = \Pi_{\mu}^2 - \frac{1}{2} e_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

и

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} i [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]. \quad (2.34)$$

Отсюда видно, что построение $G(x, x')$ и $\mathcal{L}^{(1)}(x)$ сводится к определению

$$(x' | U(s) | x'') = (x(s)' | x(0)''). \quad (2.35)$$

Последняя запись обозначает, что $U(s)$ можно рассматривать как оператор, описывающий изменение во „времени“ s системы с „гамильтонианом“ \mathcal{H} , причем матричный элемент $U(s)$ является функцией преобразования из состояния, в котором $x_{\mu}(s=0)$ имеет значение x'_{μ} , в состояние, в котором $x_{\mu}(s)$ имеет значение x'_{μ} . Таким образом, мы пришли к динамической задаче, в которой простран-

ственно-временные координаты „частицы“ зависят от параметра собственного времени, причем эта зависимость задается уравнениями движения

$$\begin{aligned} \frac{dx_\mu}{ds} &= -i[x_\mu, \mathcal{H}] = 2\Pi_\mu, \\ \frac{\partial\Pi_\mu}{\partial s} &= -i[\Pi_\mu, \mathcal{H}] = e(F_{\mu\nu}\Pi_\nu + \Pi_\nu F_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda\nu}\left(\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}\right) = 2eF_{\mu\nu}\Pi_\nu - \\ &- ie\left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right) + \frac{1}{2}e\sigma_{\lambda\nu}\left(\frac{\partial F_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu}\right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Функция преобразования определяется дифференциальными уравнениями¹⁾

$$i\partial_s(x(s)' | x(0)'') = (x(s)' | \mathcal{H} | x(0)''), \quad (2.37)$$

$$(-i\partial'_\mu - eA_\mu(x'))(x(s)' | x(0)'') = (x(s)' | \Pi_\mu(s) | x(0)''), \quad (2.38)$$

$$(i\partial''_\mu - eA_\mu(x''))(x(s)' | x(0)'') = (x(s)' | \Pi_\mu(0) | x(0)'') \quad (2.39)$$

и граничным условием

$$(x(s)' | x(0)'')|_{s \rightarrow 0} = \delta(x' - x''). \quad (2.40)$$

Мы проиллюстрируем теперь метод, который будет использоваться в последующих разделах, на простейшем примере $F_{\mu\nu} = 0$. В этом случае уравнения движения принимают вид

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = 0, \quad \frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \quad (2.41)$$

откуда

$$\Pi_\mu(s) = \Pi_\mu(0) \quad (2.42)$$

и

$$\frac{(x_\mu(s) - x_\mu(0))}{s} = 2\Pi_\mu(0). \quad (2.43)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \Pi^2 &= \frac{1}{4}s^{-2}(x(s) - x(0))^2 = \frac{1}{4}s^{-2}[x^2(s) - 2x(s)x(0) + x^2(0)] + \\ &+ \frac{1}{4}s^{-2}[x(s), x(0)] = \frac{1}{4}s^{-2}[x^2(s) - 2x(s)x(0) + x^2(0)] - 2is^{-1}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

так как

$$[x_\mu(s), x_\nu(0)] = [x_\mu(0) + 2s\Pi_\mu(0), x_\nu(0)] = -2is\delta_{\mu\nu}. \quad (2.45)$$

Переставив операторы координат так, чтобы $x(s)$ всюду стояло слева от $x(0)$, мы получаем возможность сразу определить матричный элемент оператора \mathcal{H} в уравнении (2.37), принимаящем теперь вид

$$i\partial_s(x(s)' | x(0)'') = \left[\frac{1}{4}s^{-2}(x' - x'')^2 - 2is^{-1} \right] (x(s)' | x(0)''), \quad (2.46)$$

решением которого является

$$(x(s)' | x(0)'') = C(x', x'')s^{-2} \exp\left[\frac{i\frac{1}{4}(x' - x'')^2}{s} \right]. \quad (2.47)$$

Для определения функции $C(x', x'')$ используем равенство

$$(x(s)' | \Pi_\mu(s) | x(0)'') = (x(s)' | \Pi_\mu(0) | x(0)'') = \frac{(x'_\mu - x''_\mu)}{2s} (x(s)' | x(0)''), \quad (2.48)$$

¹⁾ Волновое уравнение с собственным временем для квадратированного дираковского оператора рассматривалось Фоком [5] (см. также Намбу [6]). — Прим. авт.

откуда с учетом (2.38) и (2.39) имеем

$$(-i\partial'_\mu - eA_\mu(x')) C(x', x'') = (i\partial''_\mu - eA_\mu(x'')) C(x', x'') = 0, \quad (2.49)$$

т. е.

$$C(x', x'') = C\Phi(x', x''), \quad (2.50)$$

$$\Phi(x', x'') = \exp\left[ie \int_{x''}^{x'} dx_\mu A_\mu(x)\right].$$

Криволинейный интеграл в формуле (2.50) не зависит от пути интегрирования, поскольку $F_{\mu\nu} = 0$. Наконец, постоянная C фиксируется граничным условием (2.49). Очевидно, что выражение (2.47) принимает характер δ -функции, когда s стремится к нулю, в случае если

$$Cs^{-2} \int (dx) \exp\left(i\frac{1}{4} \frac{x^2}{s}\right) = 1. \quad (2.51)$$

Следовательно,

$$C = -i(4\pi)^{-2} \quad (2.52)$$

и

$$(x(s)' | x(0)'') = -i(4\pi)^{-2} \Phi(x', x'') s^{-2} \exp\left[\frac{i}{4} \frac{(x' - x'')^2}{s}\right]. \quad (2.53)$$

Получающаяся функция Грина имеет вид

$$G(x', x'') = i \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) (x(s)' | (-\gamma\Pi^{-1} - m) | x(0)'') =$$

$$= (4\pi)^{-2} \Phi(x', x'') \int_0^\infty ds s^{-2} \exp(-im^2s) \left(-\gamma \frac{(x' - x'')}{2s} + m\right) \exp\left[\frac{i}{4} \frac{(x' - x'')^2}{s}\right]. \quad (2.54)$$

Эквивалентный, но более привычный метод состоит в использовании представления, в котором состояния определяются собственными значениями Π_μ . Имеем

$$(\Pi(s)' | \Pi(0)'') = (\Pi(0)' | U(s) | \Pi(0)'') = \delta(\Pi' - \Pi'') \exp(-i\Pi'^2 s), \quad (2.55)$$

при этом $(x(s)' | \Pi(s)')$, определяющееся уравнением

$$(-i\partial'_\mu - eA_\mu(x')) (x(s)' | \Pi(s)') = \Pi'_\mu (x(s)' | \Pi(s)') \quad (2.56)$$

и нормировочным условием

$$\int (\Pi(s)' | x(s)') (dx') (x(s)' | \Pi(s)'') = \delta(\Pi' - \Pi''), \quad (2.57)$$

имеет вид

$$(x(s)' | \Pi(s)') = (2\pi)^{-2} \exp\left[ie \int_0^{x'} dx A\right] \exp(ix'\Pi'). \quad (2.58)$$

Следовательно,

$$(x(s)' | x(0)'') = \int (x(s)' | \Pi(s)') (d\Pi') (\Pi(s)' | \Pi(0)'') (d\Pi'') (\Pi(0)'' | x(0)'') =$$

$$= (2\pi)^{-4} \Phi(x', x'') \int (d\Pi') \exp[i(x' - x'')\Pi' - i\Pi'^2 s] \quad (2.59)$$

и

$$G(x', x'') = i(2\pi)^{-4} \Phi(x', x'') \int_0^\infty ds \int (d\Pi') \exp[i(x' - x'')\Pi'] \times$$

$$\times (-\gamma\Pi' + m) \exp[-i(\Pi'^2 + m^2)s]. \quad (2.60)$$

Последнее выражение сводится к (2.53) и (2.54) после интегрирования по Π' .

3. Постоянные поля

Уравнения движения (2.36) дают в этом случае

$$\frac{dx_{\mu}}{ds} = 2\Pi_{\mu}, \quad \frac{d\Pi_{\mu}}{ds} = 2eF_{\mu\nu}\Pi_{\nu} \quad (3.1)$$

или в матричной записи

$$\frac{dx}{ds} = 2\Pi, \quad \frac{d\Pi}{ds} = 2eF\Pi. \quad (3.2)$$

Символическим решением этих уравнений является

$$\begin{aligned} \Pi(s) &= e^{2eFs}\Pi(0), \\ x(s) - x(0) &= \left[\frac{e^{2eFs} - 1}{eF} \right] \Pi(0), \end{aligned} \quad (3.3)$$

откуда

$$\Pi(0) = eF(e^{2eFs} - 1)^{-1}(x(s) - x(0)) = \frac{1}{2}eFe^{-eFs} \operatorname{sh}^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)) \quad (3.4)$$

и

$$\Pi(s) = \frac{1}{2}eFe^{eFs} \operatorname{sh}^{-1}(eFs)(x(s) - x(0)) = (x(s) - x(0)) \frac{1}{2}eFe^{-eFs} \operatorname{sh}^{-1}(eFs). \quad (3.5)$$

В последнем выражении учитывается то обстоятельство, что

$$\vec{F} = -F \quad (F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}). \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} \mathcal{H} + \frac{1}{2}e\mathcal{F} &= \Pi^2(s) = (x(s) - x(0))K(x(s) - x(0)), \\ K &= \frac{1}{4}e^2F^2 \operatorname{sh}^{-2}(eFs). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя следующее перестановочное соотношение

$$[x(s), x(0)] = [x(0) + (eF)^{-1}(e^{2eFs} - 1)\Pi(0), x(0)] = i(eF)^{-1}(e^{2eFs} - 1), \quad (3.8)$$

получаем из (3.7)

$$\mathcal{H} + \frac{1}{2}e\mathcal{F} = x(s)Kx(s) - 2x(s)Kx(0) + x(0)Kx(0) - \frac{1}{2}i \operatorname{tr} eF \operatorname{cth}(eFs), \quad (3.9)$$

где tr , как и раньше, обозначает диагональное суммирование; при этом использовано также равенство

$$\operatorname{tr}(F) = 0, \quad (3.10)$$

вытекающее из формулы (3.6). Получающееся в результате дифференциальное уравнение (2.37)

$$i\partial_s(x(s)' | x(0)'') = \left[-\frac{1}{2}e\mathcal{F} + (x' - x'')K(x' - x'') - \frac{1}{2}i \operatorname{tr} eF \operatorname{cth}(eFs) \right] (x'(s) | x(0)'') \quad (3.11)$$

имеет решение

$$\begin{aligned} (x(s)' | x(0)'') &= C(x', x'') e^{-L(s)} s^{-2} \times \\ &\times \exp \left[\frac{1}{4}i(x' - x'')eF \operatorname{cth}(eFs)(x' - x'') \right] \exp \left(\frac{1}{2}e\mathcal{F}s \right), \\ L(s) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln [(eFs)^{-1} \operatorname{sh}(eFs)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для определения $C(x', x'')$ используем вытекающие из формул

$$(x(s)' | \Pi(s) | x(0)'') = \frac{1}{2} [eF \operatorname{cth}(eFs) + eF] (x' - x'') (x(s)' | x(0)'') \quad (3.13)$$

и

$$(x(s)' | \Pi(0) | x(0)'') = \frac{1}{2} [eF \operatorname{cth}(eFs) - eF] (x' - x'') (x(s)' | x(0)'') \quad (3.14)$$

при подстановке (3.12) дифференциальные уравнения

$$\left[-i\partial'_\mu - eA_\mu(x') - \frac{1}{2} eF_{\mu\nu}(x' - x'') \right] C(x', x'') = 0, \quad (3.15)$$

$$\left[i\partial''_\mu - eA_\mu(x'') - \frac{1}{2} eF_{\mu\nu}(x' - x'') \right] C(x', x'') = 0. \quad (3.16)$$

Решение уравнения (3.15) имеет вид

$$C(x', x'') = C(x'') \exp \left[ie \int_{x''}^{x'} dx \left(A(x) + \frac{1}{2} F(x - x'') \right) \right]. \quad (3.17)$$

Входящий здесь интеграл не зависит от пути интегрирования, поскольку вихрь $A_\mu(x) + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x - x'')$, равен нулю. Взяв в качестве пути интегрирования прямую линию, соединяющую x' и x'' , мы можем в силу (3.6) написать решение (3.15) и (3.16) в виде

$$C(x', x'') = C\Phi(x', x''),$$

$$\Phi(x', x'') = \exp \left[ie \int_{x''}^{x'} dx A(x) \right], \quad (3.18)$$

где C — постоянная, равная

$$C = -i(4\pi)^{-2}, \quad (3.19)$$

поскольку предельное выражение $(x(s)' | x(0)'')$ при $s \rightarrow 0$ не зависит от внешнего поля.

В итоге имеем

$$(x'(s) | x(0)'') = -i(4\pi)^{-2} \Phi(x', x'') e^{-L(s)s^{-2}} \times$$

$$\times \exp \left[i \frac{1}{4} (x' - x'') eF \operatorname{cth}(eFs) (x' - x'') \right] \exp \left[i \frac{1}{2} e\sigma F s \right]. \quad (3.20)$$

При этом для функции Грина из формулы (2.30) получаются два эквивалентных выражения:

$$G(x', x'') = i \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) [-\gamma'_\mu (x(s)' | \Pi_\mu(s) | x(0)'') + m (x(s)' | x(0)'')], \quad (3.21)$$

$$G(x', x'') = i \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) [-(x(s)' | \Pi_\mu(0) | x(0)'') \gamma'_\mu + m (x(s)' | x(0)'')],$$

для нахождения явного вида которых нужно подставить сюда (3.13), (3.14) и (3.20).

Вычисление лагранжевой функции дает в этом случае

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = \frac{1}{2} i \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-im^2s) \operatorname{tr} (x(s)' | x(0)'')|_{x', x'' \rightarrow x} =$$

$$= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-im^2s) e^{-I(s)} \operatorname{tr} \exp \left(i \frac{1}{2} e\sigma F s \right). \quad (3.22)$$

Мы можем представить последнюю величину в явно вещественном виде, деформировав путь интегрирования, что по существу равносильно замене $s \rightarrow -is$,

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2 s) e^{-l(s)} \operatorname{tr} \exp\left(\frac{1}{2} e\sigma F s\right), \quad (3.23)$$

$$l(s) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln [(eFs)^{-1} \sin(eFs)].$$

Мы могли бы, конечно, с самого начала использовать интегральное представление

$$[m^2 - (\gamma\Pi)^2]^{-1} = \int_0^\infty ds \exp[-(m^2 - (\gamma\Pi)^2)s], \quad (3.24)$$

которое имеет место вследствие исключения реального порождения пар. Это, однако, затруднило бы истолкование, основывающееся на введении собственного времени.

Для нахождения входящего в (3.23) следа используем следующее свойство дираковских матриц:

$$\frac{1}{2} \{\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\lambda\kappa}\} = \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda} + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\gamma_5, \quad (3.25)$$

где

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad \gamma_5^2 = -1; \quad (3.26)$$

при этом величина $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}$ равна 1 или -1 , если $(\mu\nu\lambda\kappa)$ представляет собой четную или соответственно нечетную перестановку из (1 2 3 4), и равна нулю в остальных случаях. Используя дуальный тензор напряженности поля

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}, \quad (3.27)$$

мы можем написать

$$\left(\frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}\right)^2 = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} \gamma_5 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*. \quad (3.28)$$

В последнее выражение входят составленные из напряженностей поля основные скаляр

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (3.29)$$

и псевдоскаляр

$$\mathcal{G} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (3.30)$$

Из

$$\left(\frac{1}{2} \sigma F\right)^2 = 2(\mathcal{F} + \gamma_5 \mathcal{G}) \quad (3.31)$$

и равенства $\gamma_5^2 = -1$ вытекает, что $\frac{1}{2} \sigma F$ имеет следующие четыре собственных значения:

$$\left(\frac{1}{2} \sigma F\right)' = \pm (2(\mathcal{F} \pm i\mathcal{G}))^{1/2}. \quad (3.32)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tr} \exp\left(\frac{1}{2} e\sigma F s\right) = 4 \operatorname{Re} \operatorname{ch} es (2(\mathcal{F} + i\mathcal{G}))^{1/2} \equiv 4 \operatorname{Re} \operatorname{ch} es X. \quad (3.33)$$

Здесь знак Re означает, что берется вещественная часть соответствующего выражения. Отметим, между прочим, что

$$X^2 = (\mathbf{H} + i\mathbf{E})^2. \quad (3.34)$$

Чтобы построить $\exp(-l(s))$, нужно знать собственные значения матрицы $F=(F_{\mu\nu})$. Для их получения можно использовать легко проверяемые соотношения

$$F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}^* = -\delta_{\mu\nu} \mathfrak{G} \quad (3.35)$$

и

$$F_{\mu\lambda}^*F_{\lambda\nu}^* - F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu} = 2\delta_{\mu\nu}\mathfrak{F}. \quad (3.36)$$

Из уравнения собственных значений

$$F_{\mu\nu}\psi_\nu = F'\psi_\mu \quad (3.37)$$

и из получающегося из него при помощи (3.35) уравнения

$$F_{\mu\nu}^*\psi_\nu = -\frac{1}{F'} \mathfrak{G}\psi_\mu \quad (3.38)$$

вытекают соотношения

$$F_{\mu\lambda}F_{\lambda\nu}\psi_\nu = (F')^2\psi_\mu, \quad F_{\mu\lambda}^*F_{\lambda\nu}^*\psi_\nu = \frac{1}{(F')^2} \mathfrak{G}^2\psi_\mu. \quad (3.39)$$

Тождество (3.36) дает теперь для собственных значений i уравнение

$$(F')^4 + 2\mathfrak{F}(F')^2 - \mathfrak{G}^2 = 0 \quad (3.40)$$

с решением $\pm F^{(1)}$, $\pm F^{(2)}$, где

$$\begin{aligned} F^{(1)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} [(\mathfrak{F} + i\mathfrak{G})^{1/2} + (\mathfrak{F} - i\mathfrak{G})^{1/2}], \\ F^{(2)} &= \frac{i}{\sqrt{2}} [(\mathfrak{F} + i\mathfrak{G})^{1/2} - (\mathfrak{F} - i\mathfrak{G})^{1/2}]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Подставив найденные собственные значения, получаем

$$e^{-l(s)} = \frac{(es)^2 F^{(1)} F^{(2)}}{\sin(eF^{(1)}s) \sin(eF^{(2)}s)} = \frac{2(es)^2 F^{(1)} F^{(2)}}{\cos es(F^{(1)} - F^{(2)}) - \cos es(F^{(1)} + F^{(2)})} \quad (3.42)$$

или

$$e^{-l(s)} = \frac{(es)^2 \mathfrak{G}}{\text{Im ch } esX}; \quad (3.43)$$

здесь Im означает мнимую часть соответствующей величины.

Окончательно для $\mathcal{L}^{(1)}$ получаем выражение

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-2} \exp(-m^2s) \left[(es)^2 \mathfrak{G} \frac{\text{Re ch } esX}{\text{Im ch } esX} - 1 \right]; \quad (3.44)$$

при этом мы добавили аддитивную постоянную, необходимую для того, чтобы в отсутствие поля $\mathcal{L}^{(1)}$ обращалось в нуль. Первым членом разложения $\mathcal{L}^{(1)}$ для слабого поля будет

$$\mathcal{L}^{(1)} \approx -\frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2s) \mathfrak{F}. \quad (3.45)$$

Выделив этот член и добавив лагранжиану функцию максвелловского поля

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\mathfrak{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2), \quad (3.46)$$

мы получаем для полной лагранжиановой функции выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2s) \right] \mathfrak{F} - \\ & - \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2s) \left[(es)^2 \frac{\text{Re ch } esX}{\text{Im ch } esX} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathfrak{F} \right]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Логарифмически расходящийся множитель, на который умножается лагранжева функция максвелловского поля, может быть включен в изменение масштаба всех полей и в соответствующее изменение величины заряда, т. е. в перенормировку заряда. Если обозначить использовавшиеся до сих пор величины индексом нуль и ввести новые единицы напряженности поля и величины заряда по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{F} + i\mathcal{G} &= (1 + Ce_0^2)(\mathcal{F}_0 + i\mathcal{G}_0), \\ e^2 &= \frac{e_0^2}{(1 + Ce_0^2)}; \quad C = \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2s), \end{aligned} \quad (3.48)$$

то получим конечный калибровочно-инвариантный результат:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2s) \left[(es)^2 \mathcal{G} \frac{\operatorname{Re} \operatorname{ch} esX}{\operatorname{Im} \operatorname{ch} esX} - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + \frac{2\alpha^2}{45} \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2] + \dots \end{aligned} \quad (3.49)$$

В последнем выражении мы вернулись к обычным рациональным единицам, причём $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$.

Отметим, что добавок к лагранжевой функции, соответствующий заряженным частицам спина нуль, получается из выражения (3.23), если исключить отсюда след дираковских матриц и умножить все выражение на (-2) . Таким образом,

$$\mathcal{L}_{\text{спин } 0}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-\mu^2s) \left[\frac{(es)^2 \mathcal{G}}{\operatorname{Im} \operatorname{ch} esX} - 1 \right]. \quad (3.50)$$

Здесь μ обозначает массу бесспиновой частицы; при этом нами была добавлена так же, как и в случае (3.44), аддитивная постоянная. Выделив явно первый член разложения для слабого поля, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)} &= -\frac{e^2}{48\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-\mu^2s) \mathcal{F} + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-\mu^2s) \left[\frac{(es)^2 \mathcal{G}}{\operatorname{Im} \operatorname{ch} esX} - 1 + \frac{1}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Если учесть наличие заряженных частиц со спином 0 и со спином $1/2$, то для лагранжевой функции получается выражение

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} + \mathcal{L}_0^{(1)} + \mathcal{L}_{1/2}^{(1)}; \quad (3.52)$$

перенормировка вида (3.48) с

$$C = C_0 + C_{1/2} = \frac{1}{48\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-\mu^2s) + \frac{1}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2s) \quad (3.53)$$

даёт в этом случае

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\mathcal{F} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2s) \left[(es)^2 \mathcal{G} \left(\frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \right) - 1 - \frac{2}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2s) \left[(es)^2 \mathcal{G} \left(\frac{1}{\operatorname{Im}} \right) - 1 + \frac{1}{3} (es)^2 \mathcal{F} \right] = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) + \\ &+ \frac{2\alpha^2}{45} \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} [(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + 7(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2] + \frac{\alpha^2}{90} \frac{(\hbar/\mu c)^3}{\mu c^2} \left[\frac{7}{4} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)^2 + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Физические величины, характеризующие поле, объединяются тензором энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\lambda}} \right) F_{\nu\lambda} = \\ = - \left(F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{4} F_{\lambda\lambda}^2 \right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} + \delta_{\mu\nu} \left(\mathcal{L} - \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}} - \mathcal{G} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} \right). \quad (3.55)$$

Максвелловский тензор

$$T_{\mu\nu}^{(M)} = F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \frac{1}{4} F_{\lambda\lambda}^2 \quad (3.56)$$

получается из соотношения $\mathcal{L} = -\mathcal{F}$, т. е. из приближения к выражению (3.49) в случае слабого поля. Следующие члены в разложении \mathcal{L} дают

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(M)} \left(1 - \frac{16}{45} \alpha^2 \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} \mathcal{F} \right) - \delta_{\mu\nu} \frac{2}{45} \alpha^2 \frac{(\hbar/mc)^3}{mc^2} (4\mathcal{F}^2 + 7\mathcal{G}^2) \dots \quad (3.57)$$

4. Поля плоских волн

Плоские волны, распространяющиеся со скоростью света, характеризуются тензором напряженности поля

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} F(\xi), \quad (\xi) = n_\mu x_\mu, \quad (4.1)$$

где n_μ — изотропный вектор,

$$n_\mu^2 = 0, \quad (4.2)$$

а $F(\xi)$ — произвольная функция. Постоянный тензор $f_{\mu\nu}$ и дуальный к нему тензор $f_{\mu\nu}^*$ подчиняются условиям

$$n_\mu f_{\mu\nu} = 0, \quad n_\mu f_{\mu\nu}^* = 0, \quad (4.3)$$

из которых вытекают соотношения

$$f_{\mu\lambda} f_{\lambda\nu}^* = 0, \quad f_{\mu\lambda} f_{\lambda\nu} = f_{\mu\lambda}^* f_{\lambda\nu}^* = -n_\mu n_\nu. \quad (4.4)$$

Последнее из этих соотношений также включает условие, касающееся масштаба $f_{\mu\nu}$.

Уравнения движения с собственным временем в подобном внешнем поле

$$\frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \\ \frac{d\Pi_\mu}{ds} = 2eF(\xi) f_{\mu\nu} \Pi_\nu + n_\mu eF'(\xi) \frac{1}{2} \sigma_{\lambda\nu} f_{\mu\nu} \quad (4.5)$$

допускают несколько первых интегралов. Так,

$$\frac{d(n_\mu \Pi_\mu(s))}{ds} = 0 \quad (4.6)$$

и

$$\frac{d(f_{\mu\nu}^* \Pi_\nu(s))}{ds} = 0. \quad (4.7)$$

Кроме того,

$$\frac{d(f_{\mu\nu} \Pi_\nu(s))}{ds} = -n_\mu eF(\xi) \frac{d\xi}{ds}, \quad (4.8)$$

поскольку

$$\frac{d\xi}{ds} = 2n\Pi \quad (4.9)$$

и, следовательно,

$$\frac{d(f_{\mu\nu} \Pi_\nu + n_\mu eA(\xi))}{ds} = 0, \quad (4.10)$$

где

$$\frac{dA(\xi)}{d\xi} = F(\xi). \quad (4.11)$$

При получении уравнения (4.10) нужно учесть, что $d\xi/ds$ коммутирует с ξ в силу равенства

$$[\xi, n\Pi] = [n_\mu x_\mu, n_\nu \Pi_\nu] = i n_\mu^2 = 0. \quad (4.12)$$

Поскольку $n\Pi$ является постоянной движения, уравнение (4.9) может быть проинтегрировано, причем получается

$$\frac{\xi(s) - \xi(0)}{s} = 2n\Pi, \quad (4.13)$$

$$[\xi(s), \xi(0)] = 2s [n\Pi, \xi(0)] = 0. \quad (4.14)$$

Постоянный вектор, входящий после интегрирования уравнения (4.10),

$$f_{\mu\nu}\Pi_\nu + n_\mu eA(\xi) = C_\mu \quad (4.15)$$

обладает следующими очевидными свойствами:

$$n_\mu C_\mu = 0, \quad f_{\mu\nu}^* C_\nu = 0, \quad f_{\mu\nu} C_\nu = -n_\mu n\Pi, \quad C_\mu^2 = (n\Pi)^2. \quad (4.16)$$

Исключение $f_{\mu\nu}\Pi_\nu$ с помощью (4.15) из уравнений движения дает

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = \frac{d}{d\xi} \left[2C_\mu eA(\xi) - n_\mu e^2 A^2(\xi) + n_\mu eF(\xi) \frac{1}{2} \mathcal{F} \right], \quad (4.17)$$

откуда следует

$$\Pi_\mu = \frac{1}{2} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{1}{2n\Pi} \left[2C_\mu eA(\xi) - n_\mu e^2 A^2(\xi) + n_\mu eF(\xi) \frac{1}{2} \mathcal{F} \right] + D_\mu, \quad (4.18)$$

где D_μ — постоянная интегрирования. Отметим, между прочим, равенство

$$f_{\mu\nu}^* \Pi_\nu = f_{\mu\nu}^* D_\nu, \quad (4.19)$$

из которого видно, что $f_{\mu\nu}^* \Pi_\nu$ не зависит от s в согласии с уравнением (4.7). Интегрируя (4.18) по s , находим

$$x_\mu(s) - x_\mu(0) = \frac{1}{2(n\Pi)^2} \int_{\xi(0)}^{\xi(s)} d\xi \left[2C_\mu eA(\xi) - n_\mu e^2 A^2(\xi) + n_\mu eF(\xi) \frac{1}{2} \mathcal{F} \right] + 2D_\mu s. \quad (4.20)$$

После подстановки постоянной D_μ из (4.20) выражение (4.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(s) = & \frac{x_\mu(s) - x_\mu(0)}{2s} + \frac{s}{\xi(s) - \xi(0)} \left[2C_\mu eA(\xi(s)) - n_\mu e^2 A^2(\xi(s)) + \right. \\ & \left. + n_\mu eF(\xi(s)) \frac{1}{2} \mathcal{F} \right] - \frac{s}{(\xi(s) - \xi(0))^2} \int_{\xi(0)}^{\xi(s)} d\xi \times \\ & \times \left[2C_\mu eA(\xi) - n_\mu e^2 A^2(\xi) + n_\mu eF(\xi) \frac{1}{2} \mathcal{F} \right]. \quad (4.21) \end{aligned}$$

Мы можем, наконец, определить C_μ следующим образом:

$$C_\mu = f_{\mu\nu} \Pi_\nu + n_\mu eA = \frac{f_{\mu\nu} (x_\nu(s) - x_\nu(0))}{2s} + \frac{n_\mu}{\xi(s) - \xi(0)} \int_{\xi(0)}^{\xi(s)} d\xi eA(\xi). \quad (4.22)$$

Построение функции преобразования зависит от перестановочных свойств рассматриваемых операторов. Эти перестановочные свойства сильно упрощаются в избранном частном случае внешнего поля. Примером этого является установленная ранее перестановочность $\xi_1(s)$ и $\xi(0)$. Определим теперь $[x_\mu(0), x_\mu(s)]$

с помощью соотношения (4.21), которое позволяет выразить $x_\mu(0)$ через $x_\mu(s)$, $\Pi_\mu(s)$, $\xi(s)$ и $\xi(0)$. Поскольку

$$[\xi(0), x_\mu(s)] = [\xi(s) - 2sn\Pi, x_\mu(s)] = 2isn_\mu \quad (4.23)$$

и поскольку $n_\mu C_\mu = n_\mu^2 = 0$, просто получаем

$$[x_\mu(s), x_\mu(0)] = [-2s\Pi_\mu(s), x_\mu(s)] = 8is. \quad (4.24)$$

Используя значения полученных коммутаторов (все остальные перестановки равны нулю), \mathcal{H} можно придать вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{4} s^{-2} (x_\mu^2(s) - 2x_\mu(s)x_\mu(0) + x_\mu^2(0)) - 2is^{-1} + \\ & + \frac{1}{\xi(s) - \xi(0)} \int_{\xi(0)}^{\xi(s)} d\xi \left[e^2 A^2(\xi) - eF(\xi) \frac{1}{2} \sigma f \right] - \frac{1}{(\xi(s) - \xi(0))^2} \left[\int_{\xi(0)}^{\xi(s)} d\xi eA(\xi) \right]^2, \end{aligned} \quad (4.25)$$

из которого видно, что к $A(\xi)$ можно добавлять произвольную постоянную в согласии с соответствующей неоднозначностью, следующей из уравнения (4.11).

Решением дифференциального уравнения (2.37) будет

$$\begin{aligned} (x(s)' | x(0)'') = & C(x', x'') s^{-2} \exp \left[\frac{i}{4} \frac{(x' - x'')^2}{s} \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{is}{\xi' - \xi''} \int_{\xi''}^{\xi'} d\xi \left[e^2 A^2 - eF \frac{1}{2} \sigma f \right] \right] \exp \left[is \left(\frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi''}^{\xi'} d\xi eA \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

где

$$\xi' = n_\mu x'_\mu, \quad \xi'' = n_\mu x''_\mu. \quad (4.27)$$

Функция $C(x', x'')$ определяется дифференциальными уравнениями (2.38) и (2.39) совместно с (4.26). Именно,

$$\begin{aligned} \left[-i\partial'_\mu - eA_\mu(x') - f_{\mu\nu}(x' - x'')_\nu \frac{1}{\xi' - \xi''} (eA(\xi') - \right. \\ \left. - \frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi''}^{\xi'} d\xi eA(\xi)) \right] C(x', x'') = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Решение этого уравнения получается в виде криволинейного интеграла, не зависящего от пути интегрирования. Взяв опять в качестве пути интегрирования прямую линию, находим сразу в силу антисимметрии $f_{\mu\nu}$

$$C(x', x'') = C \exp \left[ie \int_{x''}^{x'} dx_\nu A_\nu(x) \right] = C\Phi(x', x''). \quad (4.29)$$

Очевидно,

$$C = -i(4\pi)^{-2}. \quad (4.30)$$

При рассмотрении явления поляризации вакуума существенно поведение функции преобразования только при $x'_\mu \approx x''_\mu$. В случае $\xi' \approx \xi''$, согласно соотношениям (4.1) и (4.4),

$$\frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi''}^{\xi'} d\xi A^2(\xi) - \left[\frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi''}^{\xi'} d\xi A(\xi) \right]^2 \approx \frac{1}{12} (\xi' - \xi'')^2 F^2 \left[\frac{1}{2} (\xi' + \xi'') \right], \quad (4.31)$$

$$(\xi' - \xi'')^2 F^2 = (x' - x'')_\mu n_\mu F^2 n_\nu (x' - x'')_\nu = -(x' - x'')_\mu F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} (x' - x'')_\nu. \quad (4.32)$$

Следовательно, при $x'_\mu \approx x''_\mu$

$$(x(s)' | x(0)'') \approx -i(4\pi)^{-2} \Phi(x', x'') s^{-2} \times \\ \times \exp \left[i \frac{1}{4} s^{-1} (x' - x'')_\mu \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3} (es)^2 F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} \right) (x' - x'')_\nu \right] \exp \left(\frac{1}{2} i e \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} s \right). \quad (4.33)$$

Это выражение совпадает с выражением функции преобразования для случая постоянного поля благодаря упрощениям, вносимым частным характером рассматриваемого тензор поля, для которого

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{G} = 0. \quad (4.34)$$

Даже не проводя дальнейших вычислений, мы можем заключить, что физические величины, характеризующие поле плоских волн, т. е. компоненты тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, будут по форме тождественны с соответствующими величинами для постоянного поля, подчиняющегося условиям (4.34). Обращаясь к выражению (3.57), мы видим, что для плоской волны тензор $T_{\mu\nu}$ имеет такой же вид, как и для максвелловского поля:

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} = n_\mu n_\nu F^2(\xi). \quad (4.35)$$

Таким образом, для плоской волны произвольной напряженности и спектрального состава не имеют места никакие нелинейные вакуумные явления.

5. γ -распад нейтральных мезонов

В этом разделе мы применим результаты метода, основанного на введении собственного времени для вычисления возникающей вследствие поляризации протонного вакуума эффективной связи между нейтральными мезонами нулевого спина и электромагнитным полем. Подобное взаимодействие проявляется в самопроизвольном распаде нейтрального мезона на два фотона.

Лагранжева функция для бесспинового нейтрального мезонного поля в случае скалярного взаимодействия с протонно-антипротонным полем задается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} [(\partial_\mu \varphi)^2 - \mu^2 \varphi^2] - g\varphi \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \psi]. \quad (5.1)$$

Для нахождения приближенного выражения результирующей связи между полем нейтральных мезонов и электромагнитным полем заменим величину $1/2 [\bar{\psi}, \psi]$ на ее среднее вакуумное значение в присутствии однородного электромагнитного поля. Использование подобного поля для представления фотонов, испускаемых при самопроизвольном распаде нейтральных мезонов, приводит лишь к незначительной ошибке, измеряемой квадратом отношения массы мезона к массе протона $(\mu M)^2 \approx 1/40$. В то же время, пренебрегая влиянием мезонного поля на протонный вакуум, мы получаем только низшее приближение теории возмущений. Согласно (2.30) и (2.31), имеем

$$\left\langle \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \psi(x)] \right\rangle = i \operatorname{tr} G(x, x) = \\ = -M \int_0^\infty ds \exp(-iM^2 s) \operatorname{tr} (x | U(s) | x) = -\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}(x)}{\partial M}. \quad (5.2)$$

Таким образом, член в эффективной лагранжевой функции, соответствующий связи между нейтральным мезоном и электромагнитным полем, имеет вид

$$\mathcal{L}'(x) = g\varphi(x) \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}(x)}{\partial M}, \quad (5.3)$$

что, очевидно, также непосредственно следует из уравнения движения протонного поля

$$[\gamma(-i\partial - eA) + M + g\varphi]\psi = 0, \quad (5.4)$$

если использовать приближение, в котором $\varphi(x)$ рассматривается как слабое медленно меняющееся заданное поле. Если ограничиться только главным членом разложения $\mathcal{L}^{(1)}$ для случая слабого поля [выражение (3.45)], то приближенно будет иметь место равенство

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial M} \approx \left(\frac{e^2}{6\pi^2}\right) M \int_0^\infty ds \exp(-M^2s) \mathcal{F} = \frac{2\alpha}{3\pi} \frac{1}{M} \mathcal{F}. \quad (5.5)$$

Следовательно, член эффективной связи представляется выражением

$$\mathcal{L}' = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{g}{M} \varphi (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad (5.6)$$

описывающим распад покоящегося мезона на два параллельно поляризованных фотона, причем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha^2}{144\pi^3} \frac{g^2}{\hbar c} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \frac{\mu c^2}{\hbar} \quad (5.7)$$

(τ — среднее время жизни).

При псевдоскалярном взаимодействии между бесспиновым нейтральным мезонным полем и протонным полем член связи в лагранжевой функции имеет вид

$$g\varphi(x) \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_5 \psi(x)]. \quad (5.8)$$

В нашем случае (5.8) можно заменить на

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x) &= g\varphi(x) \left\langle \frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma_5 \psi(x)] \right\rangle = ig\varphi(x) \text{tr} \gamma_5 G(x, x) = \\ &= -g\varphi(x) M \int_0^\infty ds \exp(-iM^2s) \text{tr} \gamma_5 (x | U(s) | x). \end{aligned} \quad (5.9)$$

С помощью функции преобразования (3.20), заменив $-is$ на s , получаем

$$\mathcal{L}' = -g\varphi M (4\pi)^{-2} \int_0^\infty ds s^{-2} \exp(-M^2s) e^{-i(s)} \text{tr} \gamma_5 \exp\left(\frac{1}{2} e\mathcal{F}s\right). \quad (5.10)$$

Далее, учитывая собственные значения $\frac{1}{2} e\mathcal{F}$ [см. (3.31)], находим

$$\text{tr} \gamma_5 \exp\left(\frac{1}{2} e\mathcal{F}s\right) = -4 \text{Im} \text{ch} esX. \quad (5.11)$$

Теперь в силу (3.43) без каких-либо добавочных приближений получаем

$$\mathcal{L}' = g\varphi \frac{e^2}{4\pi^2} M \int_0^\infty ds \exp(-M^2s) \mathcal{G} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{g}{M} \varphi \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \quad (5.12)$$

Этот эффективный член связи определяет распад покоящегося мезона на два перпендикулярно поляризованных фотона, причем

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha^2}{64\pi^3} \frac{g^2}{\hbar c} \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \frac{\mu c^2}{\hbar}. \quad (5.13)$$

Член псевдовекторного взаимодействия

$$-\frac{g}{2M} \partial_\mu \varphi(x) \frac{1}{2i} [\bar{\psi}(x), \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)] \quad (5.14)$$

в рассматриваемом случае формально эквивалентен во взятом приближении члену (5.8). Это подтверждается интегрированием по частям с использованием

уравнения Дирака (2.1). Тем не менее подтвердить данную эквивалентность, сравнивая результаты фактических вычислений, оказалось затруднительным [3, 7]. Подобные расхождения между формальными и явными подсчетами вызываются, по видимому, недостаточным учетом предельных процессов, содержащихся в формализме. Мы покажем, что при достаточной тщательности вычислений можно действительно подтвердить соответствующую эквивалентность между псевдовекторной и псевдоскалярной связями.

Эффективное псевдовекторное взаимодействие между мезонным и электромагнитным полями задается лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x) &= \frac{g}{2M} \partial_\mu \varphi(x) \left\langle \frac{1}{2i} [\bar{\psi}(x), \gamma_5 \gamma_\mu \psi(x)] \right\rangle = \\ &= \frac{g}{2M} \partial_\mu \varphi(x) \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x, x) \rightarrow - \left(\frac{g}{2M} \right) \varphi(x) \partial_\mu [\operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x, x)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Последнее выражение получается в результате интегрирования по частям. Отметим теперь, что входящая сюда производная имеет следующий смысл:

$$\begin{aligned} \partial_\mu [\operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x, x)] &= \lim_{x', x'' \rightarrow x} [(\partial'_\mu - ieA_\mu(x')) + \\ &+ (\partial''_\mu + ieA_\mu(x''))] \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x', x''). \end{aligned} \quad (5.16)$$

При этом структура правой стороны равенства диктуется тем условием, что должны использоваться только калибровочно-инвариантные величины. Мы покажем теперь, что из (5.16) просто получается выражение для псевдоскалярной связи (5.12).

Соответственно (3.21)

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x', x'') &= -i \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \int_0^\infty ds \exp(-iM^2s) (x(s)' | \Pi_\nu(s) | x(0)'') = \\ &= -i \operatorname{tr} \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu \int_0^\infty ds \exp(-iM^2s) (x(s)' | \Pi_\nu(0) | x(0)''). \end{aligned} \quad (5.17)$$

В результате усреднения приведенных двух эквивалентных выражений получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x', x'') &= i \operatorname{tr} \gamma_5 \int_0^\infty ds \exp(-iM^2s) \left(x(s)' \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) - \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right) - \\ &- \operatorname{tr} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \int_0^\infty ds \exp(-iM^2s) \left(x(s)' \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) + \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Мы ограничимся оценкой (5.18) в приближении слабого поля. Из (3.4), (3.5) и (3.20) при учете (3.25) и (3.27) вытекает, что главный член в этом приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \gamma_5 \gamma_\mu G(x', x'') &= - \frac{e}{64\pi^2} \operatorname{tr} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \sigma_{\lambda\kappa} (x' - x'')_\nu F_{\lambda\kappa} \Phi(x', x'') \times \\ &\times \int_0^\infty ds s^{-2} \exp(-iM^2s) \exp \left[\frac{i \frac{1}{4} (x' - x'')^2}{s} \right] = \frac{e}{8\pi^2} F_{\mu\nu}^* (x' - x'')_\nu \Phi(x', x'') \times \\ &\times \int_0^\infty ds s^{-2} \exp(-iM^2s) \exp \left[\frac{i \frac{1}{4} (x' - x'')^2}{s} \right]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Поскольку нас интересует поведение данной величины только в случае $x' \approx x''$, мы можем воспользоваться этим условием при нахождении интеграла по собственному времени. При $x' \approx x''$

$$\int_0^{\infty} ds s^{-2} \exp(-iM^2s) \exp\left[\frac{i\frac{1}{4}(x'-x'')^2}{s}\right] \approx \int_0^{\infty} ds s^{-2} \exp\left[\frac{i\frac{1}{4}(x'-x'')^2}{s}\right] = \\ = \int_0^{\infty} d(s^{-1}) \exp\left[\frac{i\frac{1}{4}(x'-x'')^2}{s}\right] = \frac{4i}{(x'-x'')^2}. \quad (5.20)$$

Следовательно,

$$\text{tr } \gamma_5 \gamma_\mu G(x', x'') \approx \frac{ie}{2\pi^2} \Phi(x', x'') F_{\mu\nu}^*(x'-x'')_\nu (x'-x'')^{-2}. \quad (5.21)$$

Для определения искомой величины (5.16) используем то обстоятельство, что согласно (3.15) и (3.16) имеет место равенство

$$[(\partial'_\mu - ieA_\mu(x')) + (\partial''_\mu + ieA_\mu(x''))] \times \Phi(x', x'') F_{\mu\nu}^*(x'-x'')_\nu (x'-x'')^{-2} = \\ = ie\Phi(x', x'') F_{\mu\nu}^*(x'-x'')_\nu F_{\mu\lambda}(x'-x'')_\lambda (x'-x'')^{-2}. \quad (5.22)$$

Однако согласно (3.35)

$$F_{\mu\nu}^*(x'-x'')_\nu F_{\mu\lambda}(x'-x'')_\lambda = \mathcal{G}(x'-x'')^2 \quad (5.23)$$

и

$$\partial_\nu [\text{tr } \gamma_5 \gamma_\mu G(x, x)] = -\frac{i^2}{2\pi^2} \mathcal{G} \lim_{x' \rightarrow x''} \Phi(x', x'') = -\frac{2\alpha}{\pi} \mathcal{G}. \quad (5.24)$$

Следовательно, из (5.15) получаем

$$\mathcal{L}' = \frac{\alpha}{\pi} \frac{g}{M} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \quad (5.25)$$

в полном согласии с (5.12).

6. Теория возмущений

Рассмотрим теперь приближенное определение

$$W^{(1)} = i\frac{1}{2} \int_0^{\infty} ds s^{-1} \exp(-im^2s) \text{tr } U(s) \quad (6.1)$$

посредством разложения по степеням eA_μ и $eF_{\mu\nu}$. С этой целью запишем \mathcal{H} в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (6.2)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = p^2 \quad (6.3)$$

и

$$\mathcal{H}_1 = -e(pA + Ap) - \frac{1}{2} e\sigma F + e^2 A^2. \quad (6.4)$$

Для нахождения разложения $\text{tr } U(s)$ по степеням \mathcal{H}_1 используем то обстоятельство, что $U(s)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$i\partial_s U(s) = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1) U(s). \quad (6.5)$$

Оператор

$$V(s) = U_0^{-1}(s) U(s), \quad (6.6)$$

где

$$U_0(s) = \exp(-i\mathcal{H}_0 s), \quad (6.7)$$

определяется уравнением

$$i\partial_s V(s) = U_0^{-1}(s) \mathcal{H}_1 U_0(s) V(s) \quad (6.8)$$

и условием

$$V(0) = 1. \quad (6.9)$$

Формулы (6.8) и (6.9) можно заменить интегральным уравнением

$$V(s) = 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') V(s') \quad (6.10)$$

и строить решение с помощью итераций

$$\begin{aligned} V(s) = & 1 - i \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') + \\ & + (-i)^2 \int_0^s ds' U_0^{-1}(s') \mathcal{H}_1 U_0(s') \int_0^{s'} ds'' U_0^{-1}(s'') \mathcal{H}_1 U_0(s'') + \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

Вводя новые переменные интегрирования, согласно формулам

$$s' = su_1, \quad s'' = s'u_2, \dots, \quad (6.12)$$

получаем разложение

$$\begin{aligned} U(s) = \exp(-i\mathcal{H}s) = & U_0(s) + (-is) \int_0^1 du_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1 s) + \dots + \\ & + (-is)^n \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \dots \int_0^1 du_n U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1(1-u_1)s) \dots \times \\ & \times U_0(u_1 \dots u_{n-1}(1-u_n)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1 \dots u_n s) + \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

Вместо того чтобы прямо брать след этого выражения, что связано с излишними осложнениями, мы возьмем соотношение

$$\text{tr } U(s) - \text{tr } U_0(s) = -is \int_0^1 d\lambda \text{tr} [\mathcal{H}_1 \exp(-i(\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1)s)] \quad (6.14)$$

и подставим туда вместо $\exp[-i(\mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}_1)s]$ разложение (6.13). Подобным образом получаем

$$\begin{aligned} \text{tr } U(s) = & \text{tr } U_0(s) + (-is) \text{tr} [\mathcal{H}_1 U_0(s)] + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_0^1 du_1 \times \\ & \times \text{tr} [\mathcal{H}_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 U_0(u_1 s)] + \dots + \frac{(-is)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 u_1^{n-1} du_1 \dots \int_0^1 du_n \times \\ & \times \text{tr} [\mathcal{H}_1 U_0((1-u_1)s) \mathcal{H}_1 \dots \mathcal{H}_1 U_0(u_1 \dots u_n s)] + \dots \end{aligned} \quad (6.15)$$

Оставим только первые не исчезающие зависящие от поля члены данного разложения; тогда

$$\begin{aligned} W^{(1)} = & \frac{1}{2} i e^2 \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-im^2 s) \left\{ -is \operatorname{tr} [A^2 \exp(-ip^2 s)] + \right. \\ & + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \operatorname{tr} \left[(pA + Ap) \exp\left(-ip^2 \frac{1}{2}(1-v)s\right) \times \right. \\ & \quad \times (pA + Ap) \exp\left(-ip^2 \frac{1}{2}(1+v)s\right) \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} \sigma F \exp\left(-ip^2 \frac{1}{2}(1-v)s\right) \times \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{1}{2} \sigma F \exp\left(-ip^2 \frac{1}{2}(1+v)s\right) \right] \right\}. \quad (6.16) \end{aligned}$$

Ради удобства вычислений переменная u_1 заменена здесь на $\frac{1}{2}(1+v)$. Следы, входящие в выражение (6.16), просто берутся в импульсном представлении. В матричные элементы переменных поля, зависящих от координат, входят только разности импульсов

$$\left(p + \frac{1}{2}k \mid A_\mu \mid p - \frac{1}{2}k\right) = (2\pi)^{-4} \int (dx) e^{-ikx} A_\mu(x) \equiv (2\pi)^{-2} A_\mu(k) \quad (6.17)$$

и

$$(p \mid A_\mu^2 \mid p) = (2\pi)^{-4} \int (dx) A_\mu^2(x) = (2\pi)^{-4} \int (dk) A_\mu(-k) A_\mu(k). \quad (6.18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W^{(1)} = & \frac{2ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-im^2 s) \left\{ -is \int (dk) A_\mu(-k) A_\mu(k) \int (dp) \exp(-ip^2 s) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (dk) \int (dp) 2p_\mu A_\mu(-k) \times \\ & \times \exp\left[-i\left(p + \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1-v)s\right] 2p_\nu A_\nu(k) \exp\left[-i\left(p - \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1+v)s\right] + \\ & + \frac{1}{2} (-is)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (dk) \int (dp) \frac{1}{4} \operatorname{tr} \frac{1}{2} \sigma F(-k) \times \\ & \left. \times \exp\left[-i\left(p + \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1-v)s\right] \frac{1}{2} \sigma F(k) \exp\left[-i\left(p - \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1+v)s\right] \right\}. \quad (6.19) \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы берутся без труда:

$$\int (dp) \exp(-ip^2 s) = -i\pi^2 s^{-2}, \quad (6.20)$$

$$\int (dp) \exp\left[-i\left(p^2 + \frac{k^2}{4}\right)s + ipkvs\right] = -i\pi^2 s^{-2} \exp\left[-i\frac{k^2}{4}(1-v^2)s\right] \quad (6.21)$$

и

$$\begin{aligned} & \int (dp) p_\mu p_\nu \exp\left[-i\left(p^2 + \frac{k^2}{4}\right)s + ipkvs\right] = \\ & = -\exp\left(-i\frac{1}{4}k^2 s\right) (vs)^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial k_\mu}\right) \left(\frac{\partial}{\partial k_\nu}\right) \int (dp) \exp(-ip^2 s + ipkvs) = \\ & = -i\pi^2 s^{-2} \left(-i\frac{1}{2} s^{-1} \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{4} v^2 k_\mu k_\nu\right) \exp\left[-i\frac{1}{4}k^2(1-v^2)s\right]. \quad (6.22) \end{aligned}$$

Член, содержащий $\delta_{\mu\nu}$, в интеграле (6.22), удобно заменить на выражение, дающее эквивалентную величину после интегрирования по v . Именно, исходя из

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \exp \left[-i \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) s \right] = \\ = 1 - is \frac{1}{2} k^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv v^2 \exp \left[-i \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) s \right], \quad (6.23)$$

мы получаем в данном случае

$$\int (dp) p_\mu p_\nu \exp \left[-i \left(p^2 + \frac{1}{4} k^2 \right) s + ipkvs \right] = \\ = -\frac{1}{2} \pi^2 s^{-3} \delta_{\mu\nu} - i \pi^2 s^{-2} \frac{1}{4} v^2 (k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2) \exp \left[-i \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) s \right]. \quad (6.24)$$

Подставив значения интегралов и используя равенство

$$(k_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu} k^2) A_\mu(-k) A_\nu(k) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k), \quad (6.25)$$

мы сразу получаем калибровочно-инвариантное выражение для $W^{(1)}$ (при $s \rightarrow -is$)

$$W^{(1)} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \int (dk) \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \int_0^1 dv (1 - v^2) \times \\ \times \int_0^\infty ds s^{-1} \exp \left\{ -\left[m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] s \right\}. \quad (6.26)$$

При выводе этого выражения не использовалось никаких специальных приемов; было лишь отложено на конец интегрирование по собственному времени.

Важное разделение членов получается при интегрировании по частям интеграла по v , согласно формуле

$$\int_0^1 dv (1 - v^2) \int_0^\infty ds s^{-1} \exp \left\{ -\left[m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] s \right\} = \\ = \frac{2}{3} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s) - \frac{1}{2} k^2 \int_0^1 dv \left(v^2 - \frac{1}{3} v^4 \right) \times \\ \times \int_0^\infty ds \exp \left\{ -\left[m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] s \right\}. \quad (6.27)$$

Прибавляя к $W^{(1)}$ интеграл действия максвелловского поля, выражающийся в импульсном пространстве в виде

$$W^{(0)} = - \int (dk) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k), \quad (6.28)$$

мы получаем модифицированный интеграл действия

$$W = - \left[1 + \frac{e^2}{12\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s) \right] \int (dk) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) + \\ + \frac{e^2}{4\pi^2} \int (dk) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) k^2 \int_0^1 dv \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}. \quad (6.29)$$

Перенормировка напряженностей поля и заряда (3.48) приводит затем к конечному калибровочно-инвариантному результату¹⁾

$$W = - \int (dk) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi} \frac{k^2}{m^2} \int_0^1 dv \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right)}{1 + \frac{k^2}{4m^2} (1 - v^2)} \right]. \quad (6.30)$$

Накладывавшееся до сих пор ограничение, согласно которому исключается возможность реального порождения пар, соответствует тому условию, что величина $1 + (k^2/4m^2)(1 - v^2)$ нигде не обращается в нуль. Это условие реализуется, если для всех k_μ , входящих в разложение Фурье поля, выполняется неравенство $-k^2 < 4m^2$. В самом деле, из энергетических соображений очевидно, что для порождения пары с поглощением одиночного кванта вектор энергии-импульса последнего должен быть временно-подобным и должен превышать по абсолютной величине $2m$. Сейчас мы заметим только то, что для распространения наших результатов на случай полей, порождающих пары, достаточно всего лишь добавить бесконечно малую отрицательную мнимую постоянную в знаменателе выражения (6.30) и истолковать величину

$$|e^i W|^2 = e^{-2 \text{Im } W} \quad (6.31)$$

как вероятность того, что не произошло действительного порождения пар. Введение бесконечно малой мнимой постоянной по типу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\varepsilon} = P \frac{1}{x} + \pi i \delta(x) \quad (6.32)$$

является обычным приемом рассмотрения реальных процессов. Из выражения (6.30) получаем

$$\begin{aligned} 2 \text{Im } W &= \frac{1}{2} \alpha \int (dk) \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \frac{k^2}{m^2} \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) \delta \left[1 + \frac{k^2}{4m^2} (1 - v^2) \right] = \\ &= \alpha \int_{-k^2 > 4m^2} (dk) \left(-\frac{1}{4}\right) F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) \left(1 - \frac{4m^2}{(-k^2)}\right)^{1/2} \frac{1}{3} \left(2 + \frac{4m^2}{(-k^2)}\right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

В случае слабых полей выражение (6.33) прямо равно вероятности порождения пары полем. Можно отметить, что для поля, порождающего пары, величина

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2} [|\mathbf{E}(k)|^2 - |\mathbf{H}(k)|^2] \quad (6.34)$$

является фактически положительной. Это получается, в частности, если учесть, что в специальной системе координат, в которой не равна нулю только временная компонента k_μ , магнитное поле обращается в нуль.

Другой вид выражения (6.33) получается, если заменить в нем поле на соответствующий ток с помощью уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} ik_\mu F_{\mu\nu}(k) &= -J_\nu(k), \\ k_\mu F_{\nu\lambda}(k) + k_\nu F_{\lambda\mu}(k) + k_\lambda F_{\mu\nu}(k) &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Используя равенство

$$k_\lambda^2 F_{\mu\nu}(-k) F_{\mu\nu}(k) = 2k_\nu F_{\nu\mu}(-k) k_\lambda F_{\lambda\mu}(k) = 2J_\nu(-k) J_\nu(k), \quad (6.36)$$

¹⁾ Соответствующий результат для заряженных полей нулевого спина получается, если отбросить в выражении (6.19) спиновое слагаемое и умножить оставшиеся члены на $(-1/2)$. Это равносильно замене $(v^2 - \frac{1}{3} v^4)$ на $\frac{1}{6} v^4$ в выражении (6.30). — *Прим. авт.*

получаем ¹⁾

$$2 \operatorname{Im} W = \frac{\alpha}{8m^2} \int_{-k^2 > 4m^2} (dk) J_\mu(-k) J_\mu(k) (1 - \gamma)^{1/2} \gamma \frac{1}{3} (2 + \gamma), \quad (6.37)$$

где

$$\gamma = \frac{4m^2}{-k^2}. \quad (6.38)$$

Следует теперь обратить внимание на то, что интеграл (3.49), представляющий лагранжеву функцию постоянного поля, содержит особенности, если не выполняются условия $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{F} > 0$, требующие наличия только одного магнитного поля в некоторой специально подобранной системе координат. Это является аналитическим выражением того обстоятельства, что пары порождаются постоянным электрическим полем. В частности, если $\mathcal{G} = 0$, $-2\mathcal{F} = \mathcal{E}^2 > 0$, что является инвариантным определением наличия одного электрического поля, то входящий в лагранжеву функцию интеграл по собственному времени

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty ds s^{-3} \exp(-m^2 s) \left[e\mathcal{E} s \operatorname{ctg}(e\mathcal{E}s) - 1 + \frac{1}{3} (e\mathcal{E}s)^2 \right] \quad (6.39)$$

имеет особенности при

$$s = s_n = \frac{n\pi}{e\mathcal{E}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.40)$$

Если считать, что путь интегрирования лежит над вещественной осью, т. е. использовать один из вариантов способа вычислений, характеризующегося формулой (6.32), то мы получим положительную мнимую составляющую к лагранжевой функции

$$2 \operatorname{Im} \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^\infty s_n^{-2} \exp(-m^2 s_n) = \frac{\alpha^2}{\pi^2} \mathcal{E}^2 \sum_{n=1}^\infty n^{-2} \exp\left(\frac{-n\pi m^2}{e\mathcal{E}}\right). \quad (6.41)$$

Последняя величина является отнесенной к единице времени и единице объема вероятностью того, что постоянное электрическое поле порождает пару.

Рассмотрим теперь в рамках взятой специальной задачи связь между нашим методом, в котором используется собственное время, и „инвариантной регуляризацией“. Связанный с поляризацией вакуума добавок к интегралу действия имеет общую структуру

$$W^{(1)} = \int (dk) A_\mu(-k) K_{\mu\nu}(k, m^2) A_\nu(k). \quad (6.42)$$

При использовании метода собственного времени коэффициент $K_{\mu\nu}(k, m^2)$ получается в виде

$$K_{\mu\nu}(k, m^2) \Big|_p = \int_0^\infty ds \exp(-im^2 s) K_{\mu\nu}(k, s), \quad (6.43)$$

где $K_{\mu\nu}(k, s)$ — конечная калибровочно-инвариантная величина; бесконечности появляются только на конечном этапе вычислений при интегрировании по s до нуля. По существу в данном методе нижний предел интеграла по собственному времени заменяется на s_0 и переход к пределу $s_0 \rightarrow 0$ откладывается на конец вычислений. Если в отличие от этого не вводить явным образом собственного времени, то величина $K_{\mu\nu}(k, m^2)$ будет представляться в виде расходящихся интегралов, приводящих, вообще говоря, к не обладающим калибровочной инвариант-

¹⁾ Данная формула может быть применена, например, при рассмотрении порождения пары при ядерном переходе $j = 0 \rightarrow 0$ [8]. — *Прим. авт.*

ностью результатам. При использовании метода регуляризации данная трудность устраняется посредством введения интегрирования по квадрату собственной массы с некоторым весом; тем самым $K_{\mu\nu}(k, m^2)$ заменяется на величину

$$K_{\mu\nu}(k, m^2)]_R = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) K_{\mu\nu}(k, x). \quad (6.44)$$

„Регулятор“ $\rho(x)$ должен сводиться в соответствующем пределе к $\delta(x - m^2)$; при этом калибровочно-инвариантные результаты получаются, если выполнены следующие условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x \rho(x) = 0. \quad (6.45)$$

Взяв обращения Фурье

$$R(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ixs} \rho(x), \quad (6.46)$$

$$K_{\mu\nu}(k, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} K_{\mu\nu}(k, x),$$

имеем

$$K_{\mu\nu}(k, m^2)]_R = \int_{-\infty}^{\infty} ds R(s) K_{\mu\nu}(k, s); \quad (6.47)$$

при этом условия, налагаемые на $\rho(x)$, принимают вид

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R(s) \rightarrow \exp(-im^2s). \quad (6.48)$$

Отметим теперь, что в методе собственного времени величина $K_{\mu\nu}(k, m^2)$ дается в виде (6.47), причем в этом случае

$$R(s) = \exp(-im^2s) \quad \text{при } s > s_0, \quad (6.49)$$

$$R(s) = 0 \quad \text{при } s < s_0. \quad (6.50)$$

Данное выражение для $R(s)$ и все его производные обращаются в нуль вначале, чем удовлетворяются условия (6.48). Таким образом, оказывается, что прием регуляризации, используемый для обеспечения калибровочной инвариантности, равносильен в основном методу, основанному на введении собственного времени.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Мы применим теперь уравнения движения с собственным временем (2.36) для подсчета тока, индуцируемого в вакууме слабым произвольно меняющимся полем

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int (dk) e^{ikx} F_{\mu\nu}(k). \quad (A.1)$$

При отсутствии поля решением уравнений движения будет

$$\Pi_\mu(s) = \Pi_\mu(0), \quad x_\mu(s) = x_\mu(0) + 2\Pi_\mu(0)s. \quad (A.2)$$

Соответственно этому в качестве первого приближения для слабых полей мы берем уравнение

$$\frac{d\Pi_\mu(s)}{ds} = \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) F_{\mu\nu}(k) \{ e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s)}, \Pi_\nu(0) \} + \\ + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) ik_\mu \frac{1}{2} \sigma_{\lambda\nu} F_{\lambda\nu}(k) e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s)}. \quad (A.3)$$

Интегрируя это уравнение по s , получаем

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(s) - \Pi_\mu(0) = & \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) F_{\mu\nu}(k) \int_0^s ds' \{ e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} , \Pi_\nu(0) \} + \\ & + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) ik_\mu \frac{1}{2} \sigma_{\lambda\nu} F_{\lambda\nu}(k) \int_0^s ds' e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Второе интегрирование даст

$$\begin{aligned} \frac{x_\mu(s) - x_\mu(0)}{2s} = & \Pi_\mu(0) + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) F_{\mu\nu}(k) \int_0^s ds' \left(1 - \frac{s'}{s}\right) \{ e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} , \Pi_\nu(0) \} + \\ & + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) ik_\mu \frac{1}{2} \sigma F(k) \int_0^s ds' \left(1 - \frac{s'}{s}\right) e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Pi_\mu(s) + \Pi_\mu(0)) = & \frac{x_\mu(s) - x_\mu(0)}{2s} + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) F_{\mu\nu}(k) \int_0^s ds' \left(\frac{s'}{s} - \frac{1}{2}\right) \{ e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} , \\ & \Pi_\nu(0) \} + \frac{e}{(2\pi)^2} \int (dk) ik_\mu \frac{1}{2} \sigma F(k) \int_0^s ds' \left(\frac{s'}{s} - \frac{1}{2}\right) e^{ik(x(0)+2\Pi(0)s')} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Индукцированный ток представляется двумя эквивалентными выражениями

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle = & e \operatorname{tr} \gamma_\mu \left(x \left| (\gamma\Pi - m) \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) U(s) \right| x \right) = \\ = & e \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) \operatorname{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \langle x(s') | \Pi_\nu(s) | x(0)'' \rangle_{x', x'' \rightarrow x} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

и

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle = & e \operatorname{tr} \gamma_\mu \left(x \left| \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) U(s) (\gamma\Pi - m) \right| x \right) = \\ = & e \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) \operatorname{tr} \gamma_\nu \gamma_\mu \langle x(s') | \Pi_\nu(0) | x(0)'' \rangle_{x', x'' \rightarrow x} . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Беря полусумму этих двух выражений, находим

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle = & -e \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) \operatorname{tr} \left(x(s') \left| \frac{1}{2} (\Pi_\mu(s) + \Pi_\mu(0)) \right| x(0)'' \right)_{x', x'' \rightarrow x} - \\ - & ie \int_0^\infty ds \exp(-im^2s) \operatorname{tr} \sigma_{\mu\nu} \left(x(s') \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) - \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right)_{x', x'' \rightarrow x} . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Здесь следует отметить, что при отсутствии поля тока нет, так как

$$\lim_{x' - x'' \rightarrow \pm 0} \langle x(s') | x_\mu(s) - x_\mu(0) | x(0)'' \rangle = 0, \quad (\text{A.10})$$

и, следовательно, для определения выражения (A.9) в первом порядке нужна только функция преобразования для случая отсутствия поля.

Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \sigma_{\mu\nu} \left(x(s') \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) - \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right) = & \frac{2e}{(2\pi)^2} \int (dk) \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}(k) s \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \times \\ \times & \left(x(s') \left| \exp \left[i(kx(s) \frac{1}{2} (1+v) + kx(0) \frac{1}{2} (1-v)) \right] \right| x(0)'' \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Здесь переменная s' заменена на v по формуле

$$s' = \frac{s(1+v)}{2}. \quad (\text{A.12})$$

Операторы $kx(s)$ и $kx(0)$ не коммутируют:

$$[kx(s), kx(0)] = 2s [k\Pi(0), kx(0)] = -2isk^2. \quad (\text{A.13})$$

Однако мы можем использовать простую теорему

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]}, \quad (\text{A.14})$$

имеющую место для операторов A и B , переставимых с коммутатором $[A, B]$. С помощью этой теоремы получаем

$$\begin{aligned} & \exp \left[i \left(kx(s) \frac{1}{2} (1+v) + kx(0) \frac{1}{2} (1-v) \right) \right] = \\ & = \exp \left[ikx(s) \frac{1}{2} (1+v) \right] \exp \left[ikx(0) \frac{1}{2} (1-v) \right] \exp \left[-ik^2 \frac{1}{4} (1-v^2) s \right], \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} & \text{tr } \sigma_{\mu\nu} \left(x(s)' \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) - \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right) \Big|_{x', x'' \rightarrow x} = \\ & = \frac{2e}{(2\pi)^2} \int (dk) e^{ikx} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} (k) s \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \exp \left[-ik^2 \frac{1}{4} (1-v^2) s \right] \frac{-i}{(4\pi)^2 s^2}. \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Аналогичное рассмотрение дает

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(x(s)' \left| \frac{1}{2} (\Pi_\nu(s) + \Pi_\nu(0)) \right| x(0)'' \right) \Big|_{x', x'' \rightarrow x} = \\ & = \frac{2e}{(2\pi)^2} \int (dk) F_{\mu\nu}(k) s \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv v \left(x(s)' \left| \left\{ \exp \left[i \left(kx(s) \frac{1}{2} (1+v) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. + kx(0) \frac{1}{2} (1-v) \right) \right] \right\} \frac{x_\nu(s) - x_\nu(0)}{2s} \right| x'(0) \right) \Big|_{x', x'' \rightarrow x}. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Последнее выражение с помощью перестановочных соотношений

$$\begin{aligned} & [e^{ikx(0) \frac{1}{2} (1-v)}, x_\nu(s)] = -k_\nu (1-v) s e^{ikx(0) \frac{1}{2} (1-v)}, \\ & [e^{ikx(s) \frac{1}{2} (1+v)}, x_\nu(0)] = k_\nu (1+v) s e^{ikx(s) \frac{1}{2} (1+v)} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

сводится к виду

$$\begin{aligned} & \text{tr} \left(x(s)' \left| \frac{1}{2} (\Pi_\mu(s) + \Pi_\mu(0)) \right| x(0)'' \right) \Big|_{x', x'' \rightarrow x} = \\ & = -\frac{2ie}{(2\pi)^2} \int (dk) e^{ikx} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} (k) s \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv v^2 \exp \left[-ik^2 \frac{1}{4} (1-v^2) s \right] \frac{-i}{(4\pi)^2 s^2}. \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выражение

$$\begin{aligned} \langle j_\mu(x) \rangle & = -\frac{\alpha}{2\pi} (2\pi)^{-2} \int (dk) e^{ikx} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} (k) \int_0^1 dv (1-v^2) \times \\ & \times \int_0^\infty ds s^{-1} \exp \left\{ - \left[m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1-v^2) \right] s \right\}, \quad (\text{A.20}) \end{aligned}$$

в котором вновь сделана подстановка $s \rightarrow -is$. Это выражение совпадает с выражением для тока, получающимся из интеграла действия $W^{(1)}$ (6.26), и дальнейшее рассмотрение может проводиться так же, как и в разделе 6.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Электрон, взаимодействующий со своим собственным полем излучения и внешним полем, описывается модифицированным уравнением Дирака¹⁾

$$\gamma_{\mu}(-i\partial_{\mu} - eA_{\mu}(x))\psi(x) + \int (dx') M(x, x')\psi(x') = 0. \quad (\text{Б.1})$$

С точностью до второго порядка по e оператор массы $M(x, x')$ задается в виде

$$M(x, x') = m_0\delta(x - x') + ie^2\gamma_{\mu}G(x, x')\gamma_{\mu}D_+(x - x'); \quad (\text{Б.2})$$

здесь $G(x, x')$ — функция Грина уравнения Дирака во внешнем поле, а $D_+(x - x')$ — фотонная функция Грина, взятая в виде

$$D_+(x - x') = (4\pi)^{-2} \int_0^{\infty} dt t^{-2} \exp\left[i \frac{(x - x')^2}{4t}\right]. \quad (\text{Б.3})$$

Предположим, что внешнее поле является слабым и постоянным. Тогда функция преобразования $(x(s) | x(0)')$, входящая в выражение для $G(x, x')$, может быть приближенно задана в виде

$$(x(s) | x(0)') \approx -i(4\pi)^{-2} \Phi(x, x') s^{-2} \exp\left[i \frac{(x - x')^2}{4s}\right] \exp\left(i \frac{1}{2} e\sigma F\right). \quad (\text{Б.4})$$

Таким образом, члены, линейные по напряженностям поля, входят только в сочетании с дираковским спиновым магнитным моментом. Соответствующее приближение для гриновской функции при усреднении двух эквивалентных выражений (3.21) дает

$$G(x, x') \approx (4\pi)^{-2} \Phi(x, x') \int_0^{\infty} ds s^{-2} \exp(-im^2s) \times \\ \times \exp\left[i \frac{(x - x')^2}{4s}\right] \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\gamma(x - x')}{2s} + m, \exp\left(i \frac{1}{2} e\sigma F\right) \right\}. \quad (\text{Б.5})$$

Оператор массы приближенно представляется посредством

$$M(x, x') = m_0\delta(x - x') + ie^2 \frac{1}{(4\pi)^4} \Phi(x, x') \int_0^{\infty} ds s^{-2} \int_0^{\infty} dt t^{-2} \exp(-im^2s) \times \\ \times \exp\left[i \frac{1}{4} (x - x')^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right)\right] \gamma_{\lambda} \frac{1}{2} \left\{ \frac{-\gamma(x - x')}{2s} + m, \exp\left(i \frac{1}{2} e\sigma F\right) \right\} \gamma_{\lambda} \quad (\text{Б.6})$$

или

$$M(x, x') = m_0\delta(x - x') + \frac{ie^2}{(4\pi)^4} \Phi(x, x') \times \\ \times \int_0^{\infty} ds s^{-2} \exp(-im^2s) \int_0^s d\omega \omega^{-2} \exp\left[i \frac{(x - x')^2}{4\omega}\right] \times \\ \times \left[-4m - s^{-1}\gamma(x - x') + \frac{1}{2} i \left\{ \gamma(x - x'), \frac{1}{2} e\sigma F \right\} \right], \quad (\text{Б.7})$$

при этом мы заменили переменную t на ω соответственно

$$\omega^{-1} = s^{-1} + t^{-1} \quad (\text{Б.8})$$

¹⁾ Этот вопрос будет подробно рассмотрен в последующих статьях. — *Прим. авт.*

и использовали свойства матриц Дирака, в частности

$$\gamma_{\lambda\sigma\mu\nu}\gamma_{\lambda} = 0. \quad (\text{Б.9})$$

Используя также равенство

$$\begin{aligned} (x-x')_{\mu} \Phi(x, x') \exp\left[i\frac{(x-x')^2}{4w}\right] &= 2w(-i\partial_{\mu} - eA_{\mu}(x) - \\ &- \frac{1}{2}eF_{\mu\nu}(x-x')_{\nu}) \Phi(x, x') \exp\left[i\frac{(x-x')^2}{4w}\right] \approx [2w(-i\partial_{\mu} - eA_{\mu}(x)) - \\ &- 2w^2eF_{\mu\nu}(-i\partial_{\nu} - eA_{\nu}(x))] \Phi(x, x') \exp\left[i\frac{(x-x')^2}{4w}\right], \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

получаем

$$\begin{aligned} M(x, x') &= m_0\delta(x-x') + \frac{e^2}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} ds s^{-2} \exp(-im^2s) \times \\ &\times \int_0^s d\omega \left[2m\left(2 - \frac{\omega}{s}\right) + \frac{2\omega}{s}(\gamma(-i\partial - eA) + m) - 2m\omega\left(1 - \frac{\omega}{s}\right) i\frac{1}{2}e\sigma F - i\omega\left(1 + \frac{\omega}{s}\right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \gamma(-i\partial - eA) + m, \frac{1}{2}e\sigma F \right\} \right] (x(\omega) | x(0)'), \end{aligned} \quad (\text{Б.11})$$

в силу соотношения

$$\left[\gamma(-i\partial - eA), \frac{1}{2}\sigma F \right] = 2i\gamma F(-i\partial - eA). \quad (\text{Б.12})$$

Применим теперь метод теории возмущений, предполагая, что оператор массы играет роль, приписываемую в таких случаях обычно энергии. Для определения $\int (dx') M(x, x') \psi(x')$ мы заменим $\psi(x')$ на невозмущенную волновую функцию, являющуюся решением уравнения Дирака с массой m (в данном приближении можно не различать действительную массу m и механическую m_0). Интегрирование по x' может быть тогда легко выполнено:

$$\int (x(\omega) | x(0)') (dx') \psi(x') = \int (x | U(\omega) | x') (dx') \psi(x') = \exp(im^2\omega) \psi(x), \quad (\text{Б.13})$$

так как $\psi(x)$ является собственной функцией оператора \mathcal{H} с собственным значением $-m^2$. Таким образом, отбрасывая члены, содержащие оператор дираковского уравнения, которые не входят в выражение

$$\int (dx) (dx') \psi(x) M(x, x') \psi(x'),$$

мы получаем

$$\left[\gamma(-i\partial - eA) + m - \mu' \frac{1}{2}\sigma F \right] \psi = 0, \quad (\text{Б.14})$$

где величина

$$m = m_0 + \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^{\infty} ds s^{-1} \int_0^s d\omega s^{-1} \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) \exp[-im^2(s-\omega)] \quad (\text{Б.15})$$

выражает массу свободного электрона, а

$$\mu' = \frac{\alpha}{2\pi} emi \int_0^{\infty} ds \int_0^s \frac{d\omega}{s} \frac{\omega}{s} \left(1 - \frac{\omega}{s} \right) \exp[-im^2(s-\omega)] \quad (\text{Б.16})$$

представляет дополнительный спиновый магнитный момент. Оба интеграла без труда берутся после подстановки

$$u = 1 - \frac{\omega}{s} \quad (\text{Б.17})$$

и замены $s \rightarrow -is$, причем получается

$$m = m_0 + \frac{\alpha}{2\pi} m \int_0^\infty ds s^{-1} \int_0^1 du (1+u) \exp(-m^2 us) = \\ = m_0 + \frac{3\alpha}{4\pi} m \left[\int_0^\infty ds s^{-1} \exp(-m^2 s) + \frac{5}{6} \right] \quad (\text{Б.18})$$

и

$$\mu' = \frac{\alpha}{2\pi} em \int_0^\infty ds \int_0^1 du u (1-u) \exp(-m^2 us) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{m} \int_0^1 du (1-u) = \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e\hbar}{2mc}. \quad (\text{Б.19})$$

Мы получаем, таким образом, что спиновый магнитный момент, связанный с эффектами второго порядка в электромагнитной массе, равен $\alpha/2\pi$ магнетонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volkow D. M., Zs. f. Phys., **94**, 25 (1935).
2. Heisenberg W., Euler H., Zs. f. Phys., **93**, 714 (1936); Weisskopf V., Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **14**, No 6 (1936).
3. Fukuda H., Miyamoto Y. Progr. Theor. Phys., **4**, 347 (1949).
4. Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., **21**, 434 (1949).
5. Фок В. А., Sow. Phys., **12**, 404 (1937).
6. Nambu Y., Progr. Theor. Phys., **5**, 82 (1950).
7. Steinberger J., Phys. Rev., **76**, 1180 (1949).
8. Oppenheimer J. R., Schwinger J., Phys. Rev., **56**, 1066 (1939).

IX. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СДВИГ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

I. СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА

Р. КАРПЛУС и А. КЛЕЙН

R. Karplus and A. Klein, Phys. Rev., 85, № 6, 972 (1952)

Вакуумные флуктуации фотонного поля и поля частиц вызывают изменение взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Влияние указанного изменения на уровни энергии удобно описывать при помощи оператора массы и потенциала поляризации вакуума. В работе сначала выводится калибровочно-инвариантное выражение для оператора массы в случае движения электрона в слабом внешнем электромагнитном поле; данное выражение включает члены, квадратичные по полю, и учитывает электромагнитные поправки только низшего порядка. Далее вычисляются поправки к формуле Ферми путем подстановки в качестве внешнего поля кулоновского и магнитного дипольного полей ядра и подсчета матричного элемента операторов для S -состояния водородоподобных атомов. Все изменения можно описать как поправку $\Delta g = -2Z\alpha^2 \left(\frac{5}{2} - \ln 2 \right)$ к гиромагнитному отношению для электрона. Значение постоянной тонкой структуры, вычисленное из результатов измерений сверхтонкой структуры, равно $\alpha^{-1} = 137.0364$.

1. Введение

Успех новой ковариантной формулировки квантовой электродинамики заключается в первую очередь в том, что она позволила предсказать наблюдаемые эффекты, вызванные связью электрона с вакуумными флуктуациями фотонного поля. Экспериментальное исследование таких эффектов сводится в основном к опытам с водородоподобными атомами. С помощью этих опытов удастся проверить предсказания теории, касающиеся эффективного статического магнитного момента электрона [1, 2] и электродинамического сдвига энергетических уровней (лэмбовского сдвига) [3, 4] (в работе [4] приводятся дальнейшие литературные ссылки). Кроме того, подстановка полученного значения магнитного момента в исправленную формулу Ферми [5] в сочетании с тщательным определением сверхтонкой структуры расщепления основного состояния водорода [6] представляет собой самый точный способ определения постоянной тонкой структуры α [5].

За исключением вычисления статического магнитного момента, выполненного до поправок четвертого порядка (α^2) включительно, все остальные имеющиеся теоретические предсказания являются, как известно, во многих отношениях неполными. Именно: найдены только члены, линейно зависящие от поля ядра, причем для медленно меняющегося поля; не полностью выяснены электромагнитные поправки порядка α^2 ; ядра везде считаются бесструктурными частицами, обладающими зарядом и магнитным дипольным моментом.

Цель настоящей и последующей части состоит в описании методов рассмотрения заданного ядерного поля (или любого другого электромагнитного поля) в высших приближениях. Получающиеся результаты применяются в двух случаях. Во-первых, мы найдем поправки к формуле Ферми, вызванные взаимодействием между кулоновским и дипольным полями ядра. Во-вторых, будет вычислен член формулы лэмбовского сдвига, квадратичный по кулоновскому полю.

Исследование основывается на уравнении Дирака с изменениями, вызванными учетом собственной энергии электрона и потенциала поляризации, индуцируемой в вакууме [7]. Собственная энергия описывается при помощи оператора массы,

представляющего собой интегральный оператор, общая структура которого была проанализирована в предыдущих работах¹⁾.

Мы ограничимся рассмотрением электромагнитных поправок порядка α . Оператор массы явным образом зависит от поля только через функцию Грина электрона во внешнем поле. Ранее был развит ряд методов для представления этой зависимости с желаемой степенью приближения²⁾. В настоящей части мы опишем один из указанных методов, пригодный для случая слабого поля, при котором разложение в степенной ряд является допустимым. Построение функции Грина сводится к построению функции преобразования и связанных с ней операторов импульса [8]. Последние выражаются в виде калибровочно-инвариантных величин с точностью до второго порядка по внешнему полю посредством прямого разложения и ряда преобразований. В получающемся операторе массы выполняется отделение бесконечной части, не зависящей от поля и представляющей собой перенормировку массы, от конечной и зависящей от поля части, которая кладется в основу дальнейшего рассмотрения.

Условие слабости поля выполняется в случае исследования связи электрона с дипольным полем протона³⁾. Главная составляющая, представляющая собой хорошо известную $(\alpha/2\pi)$ поправку к статическому магнитному моменту, получается при пренебрежении высшими компонентами разложения Фурье магнитного поля в члене, линейном по полю. В случае S -состояния соответствующая магнитная энергия зависит в формуле Ферми только от плотности электронной волновой функции в начале. Существенно новые результаты включают члены, имеющие по сравнению с предыдущей поправкой относительный порядок $Z\alpha$. Из структуры оператора массы вытекает, что эти поправки вызваны поведением электрона на расстояниях от ядра, меньших комптоновской длины волны, и существуют поэтому только в S -состоянии. В частности, в случае P -состояния входит еще один добавочный множитель $Z\alpha$, связанный с уменьшением плотности вероятности вблизи начала.

Настоящее рассмотрение недостаточно для исследования лэмбовского сдвига, когда приходится сталкиваться с известной „инфракрасной катастрофой“, вызываемой тем обстоятельством, что большая часть эффекта связана с поведением электрона вне ближайшей окрестности ядра. Здесь начинает играть существенную роль испускание мягких виртуальных квантов, в результате чего становится непригодным разложение по степеням поля. Изложение измененного приближения, в котором не содержится указанной трудности, и оценка результатов будут приведены в последующей части.

2. Предварительное рассмотрение

A. ОПЕРАТОР МАССЫ; ФУНКЦИИ ГРИНА

Описание движения электрона в заданном электромагнитном поле при учете эффектов поляризации вакуума и собственной энергии будет основываться на модифицированном уравнении Дирака [7, 8] вида

$$\gamma_{\mu} (-i\partial_{\mu} - e\bar{A}_{\mu}(x))\psi(x) + \int M(x, x')\psi(x')d^4x' = 0. \quad (2.1)$$

¹⁾ См. [7, 8]. Мы будем следовать обозначениям статьи [8]. — *Прим. авт.*

²⁾ См. [8]. Некоторые из подобных методов были рассмотрены Фейнманом [9]. — *Прим. авт.*

³⁾ Как выяснится в дальнейшем, такое взаимодействие существует в S -состоянии тогда, когда электрон находится на расстоянии от ядра, не превышающем комптоновскую длину волны $(1/m)$. На этом расстоянии кинетическая энергия электрона $p^2/2m \sim m$, тогда как потенциальная энергия (в кулоновском поле) $\alpha/r \sim \alpha m$. Магнитная связь еще меньше, почти на множитель, равный по порядку величины отношению масс электрона и протона. Таким образом, оба упомянутых вида связи могут рассматриваться в данном случае как малое возмущение. Отсюда также ясно, почему мы в дальнейшей главе не рассматриваем членов, квадратичных по магнитной связи. — *Прим. авт.*

Здесь $\bar{A}_\mu(x)$ — четырехмерный потенциал внешнего поля, сложенный с потенциалом поля, индуцированного в вакууме. Величина $M(x, x')$ представляет собой оператор массы, формально включающий эффекты собственной энергии всех порядков. В низшем порядке по e (электромагнитные поправки второго порядка) этот оператор задается в виде

$$M(x, x') = m_0 \delta(x - x') + ie^2 \gamma_\mu G_+(x, x') \gamma_\mu D_+(x - x'), \quad (2.2)$$

где $G_+(x, x')$ — функция Грина для уравнения Дирака в присутствии внешнего поля, а $D_+(x - x')$ — фотонная функция Грина (принята сокращенная запись: $ab = a_\mu b_\mu = \mathbf{ab} - a_0 b_0$):

$$\begin{aligned} D_+(x - x') &= \int (2\pi)^{-4} d^4 k e^{ik(x-x')} (k^2)^{-1} = \\ &= \int (2\pi)^{-4} d^4 k e^{ik(x-x')} i \int_0^\infty dt \exp[-itk^2] = (4\pi)^{-2} \int_0^\infty t^{-2} dt \exp\left[\frac{i(x-x')^2}{4t}\right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В выражении (2.3) подразумевается, что под k^2 следует понимать $k^2 - i\varepsilon$, где ε — малая положительная величина, благодаря чему в функцию Грина $D_+(x - x')$ входят только расходящиеся волны в отдаленном прошлом и будущем.

Используемый способ получения физических выводов из уравнения (2.1) основывается на применении соответствующего приближения теории возмущений, причем невозмущенным считается волновое уравнение в заданном поле, а как возмущения рассматриваются потенциал поляризации и второй член уравнения (2.2). Влияние первого из указанных возмущений уже было ранее вычислено с требующейся нам точностью. С другой стороны, предыдущие исследования эффектов собственной энергии ограничивались, за исключением нерелятивистского подсчета Бете, рассмотрением выражения (2.2) в первом борновском приближении. Нашей первой задачей будет изучение способов представления оператора массы в явном виде в высшем порядке приближения по внешнему полю. Рассмотрим сначала один из таких способов, основанный на прямом разложении $G_+(x, x')$, пригодном, когда поле может считаться слабым. Подобный метод пригоден для выражения функции Грина или какого-либо оператора, содержащего эту функцию, в калибровочно-инвариантном виде до конкретизации вида электромагнитных потенциалов. Он был уже использован в ряде случаев в статье [8] при рассмотрении поляризации вакуума медленно меняющимся полем произвольной напряженности. Мы кратко повторим указанное рассмотрение, имеющее отношение к исследуемой проблеме.

Функция Грина частицы удовлетворяет операторному уравнению

$$(\gamma\Pi + m) G_+ = 1, \quad (2.4)$$

решение которого может быть записано в симметричной форме:

$$G_+ = \frac{1}{2} \{m - \gamma\Pi, [m^2 - (\gamma\Pi)^2]^{-1}\} = i \int_0^\infty ds \exp[im^2 s] \frac{1}{2} \{m - \gamma\Pi, \exp[i(\gamma\Pi)^2 s]\}. \quad (2.5)$$

В интегральном представлении (2.5) подразумевается, что у m^2 имеется малая отрицательная мнимая часть, так что функция Грина G_+ соответствует распространению волн из источника с возрастающей фазой во всех временно-подобных направлениях. Следует сразу подчеркнуть, что нас будут интересовать только действительные части матричных элементов оператора массы, поскольку мы ограничиваемся рассмотрением сдвига энергетических уровней. Поэтому для нас в дальнейшем будет несущественным наличие малой мнимой составляющей у k^2 в (2.3) и у массы в (2.5), введение которой делает выражение (2.5) однозначно определенным. Когда мы будем в конце концов выполнять интегрирование по s , будет правильным трактовать осциллирующие экспоненты как убывающие. Говоря более формально, мы вправе сделать подстановку $s' = is$ и интегрировать по s' вдоль положительной вещественной оси.

Функция Грина электрона является матричным элементом оператора (2.5) относительно четырехмерных координат

$$G_+(x', x'') = (x' | G_+ | x''). \quad (2.6)$$

Мы используем символ

$$(x' | \exp[i(\gamma\Pi)^2s] | x'') \equiv (x' | U(s) | x'') \equiv (x'(s) | x''(0)), \quad (2.7)$$

который будет называться „функцией преобразования“;

$$(x' | \Pi_\mu U(s) | x'') \equiv (x'(s) | \Pi_\mu(s) | x''(0)) = (-i\partial'_\mu - eA'_\mu)(x'(s) | x''(0)) \quad (2.8)$$

и

$$(x' | U(s) \Pi_\mu | x'') \equiv (x'(s) | \Pi_\mu(0) | x''(0)) = (i\partial'_\mu - eA'_\mu)(x'(s) | x''(0)) \quad (2.9)$$

представляют собой соответствующие матричные элементы операторов импульса. Функция Грина может, таким образом, быть записана в виде¹⁾

$$G_+(x', x'') = i \int_0^\infty ds \exp[-im^2s] \left[m(x'(s) | x''(0)) - \frac{1}{2} \gamma(x'(s) | \Pi(s) | x''(0)) - \frac{1}{2} (x'(s) | \Pi(0) | x''(0)) \gamma \right]. \quad (2.10)$$

Теперь надо найти разложение $(x'(s) | x''(0))$ по членам, квадратичных по внешнему полю, причем результат следует выразить в калибровочно-инвариантной форме. После этого можно будет получить при помощи выражений (2.7) и (2.8) матричные элементы операторов импульса и подставить их затем в оператор массы (2.2). Детали намеченного вычисления изложены в разделе 3.

Б. СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА

Чтобы охарактеризовать способ применения результатов раздела 3 к вычислению поправок к формуле сверхтонкой структуры Ферми, кратко изложим исходные положения.

Полный векторный потенциал, входящий в уравнение (2.1), имеет вид

$$\bar{A}_\mu(x) = A_\mu^E(x) + A_\mu^M(x) + A_\mu^{EP}(x) + A_\mu^{MP}(x), \quad (2.11)$$

где индексы E и M обозначают соответственно электрический и магнитный потенциалы, а дополнительный индекс P — потенциал поляризации вакуума. Величина $A^E(x)$ представляет собой кулоновский потенциал ядра

$$A^E = 0, \quad A_0^E = -Z \frac{e}{4\pi r} \quad (2.12)$$

(e — заряд электрона) и входит в невозмущенное уравнение. Величина $A^M(x)$ является векторным потенциалом протона, рассматриваемого как точечный диполь. Он задается выражением

$$A^M = \frac{\mu \times r}{4\pi r^3} = \nabla \times \left(\frac{\mu}{4\pi r} \right), \quad A_0^M = 0, \quad (2.13)$$

где μ — оператор дипольного момента протона. В формулу Ферми входит диагональный матричный элемент взаимодействия A^M с электронным током в основном состоянии водорода. Поскольку в данном случае существует только поляризационный ток электрона, энергия взаимодействия ΔE_0 имеет вид

$$\Delta E_0 = - \left(\frac{e}{2m} \right) \int dr \bar{\psi}_e(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \psi_e(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (2.14)$$

¹⁾ Комбинация матричных элементов оператора импульса, входящая в уравнение (2.10), будет в дальнейшем для удобства условно записываться в виде

$$- \frac{1}{2} (x'(s) | \gamma \Pi(s) + \Pi(0) \gamma | x''(0)).$$

— Прим. авт.

В S -состоянии благодаря сферической симметрии магнитное поле сводится к δ -функции:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(\nabla \times \left(\frac{\mu}{4\pi r} \right) \right) = \nabla \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{4\pi r} \right) - \nabla^2 \left(\frac{\mu}{4\pi r} \right) \rightarrow -\frac{2}{3} \nabla^2 \left(\frac{\mu}{4\pi r} \right) = \frac{2}{3} \mu \delta(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

Соответствующее представление больших и малых компонент волновой функции в кулоновском поле $\psi_c(\mathbf{r})$ посредством шредингеровской волновой функции $\varphi_0(\mathbf{r})$ приводит затем к формуле Ферми с поправкой Брейга [10, 11]:

$$\Delta E_0 = -\frac{2}{3} \mu_0^F \langle \sigma \mu \rangle |\varphi_0(0)|^2 \left(1 + \frac{3}{2} (Z\alpha)^2 \right). \quad (2.16)$$

Поправки, которые мы получим, будут выражены в виде величин, пропорциональных главному члену формулы (2.16).

Основной поправкой электромагнитного происхождения является, конечно, изменение спиновой плотности электрона на относительную величину $\alpha/2\pi$; эта поправка будет вновь получена в наших вычислениях. Другие поправки имеют по меньшей мере относительный порядок $Z\alpha^2$ по сравнению с приведенным членом и могут быть истолкованы как следствие пространственного размывания, свойственного эффектам квантовой электродинамики. Высказанное утверждение проще всего проиллюстрировать на примере предварительного рассмотрения эффектов, вызванных взаимодействием электронного тока с потенциалом поляризации вакуума. Для этой цели оказывается удобным воспользоваться разложением в четырехмерный интеграл Фурье

$$A_\mu(x) = \int (2\pi)^{-3} d^4 k A_\mu(k) e^{ikx}. \quad (2.17)$$

Аналогичным образом разлагаются ток $J_\mu(x)$ и тензор поля $F_{\mu\nu}(x)$. В дальнейшем нами будут использоваться также следующие величины:

$$\begin{aligned} 2\pi A_0^E(k) &= -\delta(k_0) Z \frac{e}{k^2}, \\ 2\pi \mathbf{A}^M(k) &= \delta(k_0) i\mathbf{k} \times \frac{\boldsymbol{\mu}}{k^2}, \\ 2\pi \mathbf{E}(k) &= \delta(k_0) Z e i \frac{\mathbf{k}}{k^2}, \\ 2\pi \mathbf{H}(k) &= \delta(k_0) i\mathbf{k} \times (i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mu}) / k^2 \rightarrow \frac{2}{3} \mu \delta(k_0), \\ 2\pi J_0^E(k) &= -\delta(k_0) Z e, \\ 2\pi \mathbf{J}^M(k) &= \delta(k_0) i\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mu}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Второе выражение для $\mathbf{H}(k)$ является обращением Фурье формулы (2.15). Согласно [12], имеет место равенство

$$A_\mu^P(k) = \frac{\alpha}{4\pi} J_\mu(k) \int_0^1 \frac{dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}. \quad (2.19)$$

Отсюда, используя (2.18), получаем

$$\mathbf{H}^P(\mathbf{k}) = ik \times \mathbf{A}^{MP}(\mathbf{k}) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\delta(k_c)}{2\pi} k^2 \mathbf{H}(\mathbf{k}) \int_0^1 \frac{dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}. \quad (2.20)$$

Соответствующая энергия взаимодействия равна

$$- \mu_0 \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_c(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \psi_c(\mathbf{r}) \frac{2}{3} \mu \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{\alpha}{4\pi} k^2 \int_0^1 \frac{dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}. \quad (2.21)$$

Из приведенного выражения очевидно, что действие магнитного поля неrestrict ограничивается началом; не происходит размазывание по области с размерами порядка комптоновской длины электрона $1/m$. Действительно, если приближенно положить $\psi_c(\mathbf{r})$ равным $\varphi_0(0)$, то выражение (2.21), как легко видеть, обращается в нуль. Для получения неисчезающего результата необходимо использование более точного приближения для волновой функции в окрестности начала координат:

$$\begin{aligned} \psi_c(\mathbf{r}) &\rightarrow \varphi_0(\mathbf{r}) \approx \varphi_0(0) (1 - Z\alpha r m), \\ \varphi_c^*(\mathbf{r}) \varphi_c(\mathbf{r}) &\approx |\varphi_0(0)|^2 (1 - 2Z\alpha r m). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Матричный элемент (2.21) принимает при этом вид

$$\frac{2}{3} \mu_0 (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\mu}) |\varphi_0(0)|^2 \frac{Z\alpha^2}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} r k^3 m \int_0^1 \frac{dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2\right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}. \quad (2.23)$$

Дальнейшее исследование выражения (2.23) будет проведено в разделе 6, где будут также рассмотрены аналогичные составляющие энергии, соответствующие кулоновскому потенциалу поляризации при учете влияния магнитного поля на волновую функцию. Отметим еще только то обстоятельство, что выражение (2.23) имеет типичный вид, поскольку оно содержит один множитель α электромагнитного происхождения и множитель $Z\alpha$ кулоновского происхождения и линейно относительно магнитной связи.

Поправки порядка $Z\alpha^2$, связанные с матричными элементами оператора массы, будут рассмотрены в разделах 4 и 5.

3. Оператор массы

Мы выведем теперь выражение для оператора массы в слабом произвольно меняющемся внешнем электромагнитном поле с точностью до членов второго порядка по этому полю. Поскольку получающиеся формулы оказываются довольно сложными, удобно предварительно найти с требующейся точностью матричный элемент функции преобразования $U(s)$. Вычислив затем, исходя из этой функции, импульсы Π_μ , мы получим возможность построить функцию Грина, полностью определяющую зависимость оператора массы от внешнего поля.

Чтобы явно выразить калибровочную инвариантность функции преобразования, запишем ее в виде

$$\begin{aligned} (x'(s) | x''(0)) &= (x' | U(s) | x'') = \\ &= -i(4\pi s)^{-2} \Phi(x', x'') \exp \left[\frac{i(x' - x'')^2}{4s} \right] U'(s; x', x''), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где функция $U'(s; x', x'')$ должна зависеть от поля калибровочно-инвариантным образом и должна в случае отсутствия поля равняться единице. Разложение

вида, рассмотренного в разделе 6 статьи [8], дает оператор преобразования

$$\begin{aligned}
 U(s) = & \exp[-isp^2] + ise \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \exp\left[-isp^2 \frac{1}{2}(1-v)\right] \times \\
 & \times \left(pA + Ap + \frac{1}{2}\sigma F - eA^2\right) \exp\left[-isp^2 \frac{1}{2}(1+v)\right] + (ise)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \times \\
 & \times \exp\left[-isp^2 \frac{1}{2}(1-v_1)\right] \left(pA + Ap + \frac{1}{2}\sigma F\right) \times \\
 & \times \exp\left[-isp^2 \frac{1}{2}(v_1-v_2)\right] \left(pA + Ap + \frac{1}{2}\sigma F\right) \exp\left[-isp^2 \frac{1}{2}(1+v_2)\right] \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

с матричным элементом

$$\begin{aligned}
 (x' | U(s) | x'') = & \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip(x'-x'')} \left\{ \exp[-isp^2] + \right. \\
 & + ise \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (2\pi)^{-2} d^4 k e^{\frac{1}{2}ik(x'+x'')} \exp\left[-is\left(p + \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1-v)\right] \times \\
 & \times \left[2pA + \frac{1}{2}\sigma F - e \int (2\pi)^{-2} d^4 k' A(k') A(k-k')\right] \times \\
 & \times \exp\left[-is\left(p - \frac{1}{2}k\right)^2 \frac{1}{2}(1+v)\right] + (ise)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 (2\pi)^{-4} \times \\
 & \times d^4 k_1 d^4 k_2 e^{\frac{1}{2}i(k_1+k_2)(x'+x'')} \exp\left[-is\left(p + \frac{1}{2}(k_1+k_2)\right)^2 \frac{1}{2}(1-v_1)\right] \times \\
 & \times \left[(2p+k_2)A^1 + \frac{1}{2}\sigma F^1\right] \exp\left[-is\left(p - \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)^2 \frac{1}{2}(v_1-v_2)\right] \times \\
 & \times \left[(2p-k_1)A^2 + \frac{1}{2}\sigma F\right] \exp\left[-is\left(p - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_2\right)^2 \frac{1}{2}(1+v_2)\right] \left. \right\}, \\
 & (A_\mu(k_i) = A_\mu^i = \int (2\pi)^{-2} d^4 x e^{-ik_i x} A_\mu(x)). \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Сдвиг импульсных координат

$$p_\mu \rightarrow \left(p + \frac{1}{2}kv\right)_\mu \quad \text{и} \quad p_\mu \rightarrow \left(p + \frac{1}{2}(k_1v_1 + k_2v_2)\right)_\mu \quad (3.4)$$

в линейном и квадратичном членах разложения позволяет исключить из экспонент все скалярные произведения (pk) и приводит к обычному множителю $\exp[-isp^2]$. После этого можно выполнить интегрирование по p_μ (используется интегрирование по частям):

$$\begin{aligned}
 \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip(x'-x'')} p_\mu \exp[-isp^2] = & \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip(x'-x'')} \frac{1}{2} is^{-1} \times \\
 \times \left(\frac{\partial}{\partial p_\mu}\right) \exp[-isp^2] = & \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip(x'-x'')} (2s)^{-1} (x' - x'')_\mu \exp[-isp^2] = \\
 = & -i(4\pi s)^{-2} (2s)^{-1} (x' - x'')_\mu \exp\left[\frac{i(x' - x'')^2}{4s}\right]. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Вводя обозначение $(x' - x'')_\mu = \Delta x_\mu$, получаем

$$\begin{aligned}
 \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip\Delta x} \exp[-isp^2] \{1; p_\mu; p_\mu p_\nu; p_\mu p_\nu p_\lambda\} = & -i(4\pi s)^{-2} \times \\
 \times \exp\left[\frac{i(\Delta x)^2}{4s}\right] \{1; (2s)^{-1} \Delta x_\mu; (2s)^{-2} \Delta x_\mu \Delta x_\nu - i(2s)^{-1} \delta_{\mu\nu}; \\
 (2s)^{-3} \Delta x_\mu \Delta x_\nu \Delta x_\lambda - i(2s)^{-2} (\delta_{\mu\nu} \Delta x_\lambda + \delta_{\mu\lambda} \Delta x_\nu + \delta_{\nu\lambda} \Delta x_\mu)\}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Определяемая формулой (3.1) функция $U'(s; x', x'')$ теперь может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
 U'(s; x', x'') = & [\Phi(x', x'')]^{-1} \left\{ 1 + ise \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (2\pi)^{-2} d^4 k e^{ik\xi} \times \right. \\
 & \times \exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] \left[\left(\left(\frac{\Delta x}{s} \right) + kv \right) A + \frac{1}{2} \sigma F - e \int (2\pi)^{-2} d^4 k' A(k') \times \right. \\
 & \times A(k - k') \left. \right] + (ise)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 e^{ik_1 \xi_1} e^{ik_2 \xi_2} (2\pi)^{-4} d^4 k_1 d^4 k_2 \times \\
 & \times \exp \left[-is \frac{1}{4} K^2 \right] \left\{ \left[\left(\left(\frac{\Delta x}{s} \right) + k_2 (1 + v_2) + k_1 v_1 \right) A^1 + \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] \times \right. \\
 & \times \left[\left(\left(\frac{\Delta x}{s} \right) + k_2 v_2 - k_1 (1 - v_1) \right) A^2 + \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] - \frac{2iA^1 A^2}{s} \left. \right\}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\xi_{i\mu} = \frac{1}{2} [x'_\mu (1 + v_i) + x''_\mu (1 - v_i)] \quad (3.7')$$

и

$$K^2 = k_1^2 (1 - v_1^2) + 2k_1 k_2 (1 - v_1)(1 - v_2) + k_2^2 (1 - v_2^2).$$

Теперь посредством довольно длинных преобразований можно показать, что с точностью до членов второго порядка по внешнему полю функция $U'(s; x', x'')$ действительно зависит только от калибровочно-инвариантных величин. Мы дадим прямое доказательство этого утверждения для членов первого порядка:

$$ise \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv (2\pi)^{-2} d^4 k e^{ik\xi} \left\{ \left[\left(\frac{\Delta x}{s} \right) + kv \right] A \exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] - \left(\frac{\Delta x}{s} \right) A \right\}. \quad (3.8)$$

Последний член в скобках входит из разложения зависящей от калибровки величины $[\Phi(x', x'')]^{-1}$. Интегрирование второго слагаемого выражения (3.8) по частям

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv e^{ik\xi} v \exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] = (isk^2)^{-1} e^{ik\xi} \left(\exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 \times \right. \right. \\
 & \times (1 - v^2) \left. \right] - 1 \Big|_{-1}^1 - \left(\frac{k \Delta x}{sk^2} \right) \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv e^{ik\xi} \left(\exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] - 1 \right) \quad (3.9)
 \end{aligned}$$

показывает, что (3.8) тождественно с

$$ise \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv (2\pi)^{-2} d^4 k e^{ik\xi} \left(\frac{\Delta x J}{sk^2} \right) \left(\exp \left[-is \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right] - 1 \right), \quad (3.10)$$

так как

$$k^2 A_\mu - k_\mu (kA) = -ik_\nu F_{\nu\mu} = J_\mu. \quad (3.11)$$

Аналогичным образом члены второго порядка, входящие из разложения $[\Phi(x', x'')]^{-1}$ от линейного и квадратичного членов разложения, могут быть объединены в одно выражение, зависящее только от напряженностей поля, плотности тока и их производных. Вводя сокращенные обозначения для экспоненциальных множителей

$$e_i(s) = \exp \left[-is \frac{1}{4} k_i^2 (1 - v_i^2) \right], \quad E(s) = \exp \left[-is \frac{1}{4} K^2 \right] \quad (3.12)$$

и для интегральных операторов

$$\int d^4 \bar{k}_j = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_j \int (2\pi)^{-2} d^4 k_j e^{ik_j \bar{k}_j}$$

и

$$\int d^8 \bar{K} = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_2 \int (2\pi)^{-4} d^4 k_1 d^4 k_2 e^{ik_1 \bar{k}_1} e^{ik_2 \bar{k}_2}, \quad (3.13)$$

для функции $U'(s; x', x'')$ получаем

$$\begin{aligned} U'(s; x', x'') = & 1 + ise \int d^4 \bar{k} \left\{ \left(\Delta x \frac{J}{sk^2} \right) (e(s) - 1) + \frac{1}{2} \sigma F e(s) \right\} + (ise)^2 \times \\ & \times \int d^8 \bar{K} \left\{ \left(\Delta x \frac{J_1}{sk_1^2} \right) \left(\Delta x \frac{J_2}{sk_2^2} \right) [E(s) - e_1(s) - e_2(s) + 1] + i \left(J^1 F^1 \frac{\Delta x}{sk_1^2} \right) \times \right. \\ & \times [(1 - \vartheta_1) - (J^1 F^2 \frac{\Delta x}{sk_1^2}) (1 + \vartheta_2)] E(s) + \frac{1}{2} \left(\frac{J^1 J^2}{sk_1^2 k_2^2} \right) [k_2 \Delta x (1 + \vartheta_2) - k_1 \Delta x \times \\ & \times (1 - \vartheta_1) + sk_1^2 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) - sk_2^2 \vartheta_2 (1 + \vartheta_2)] E(s) + \frac{1}{2} \sigma F^1 \left(\frac{\Delta x J^2}{sk_2^2} \right) \times \\ & \times [E(s) - e_1(s)] + \frac{1}{2} \sigma F^2 \left(\frac{\Delta x J^1}{sk_1^2} \right) [E(s) - e_2(s)] + \left[\frac{1}{2} \sigma F^1 \left(\frac{k_1 J^2}{k_2^2} \right) (1 + \vartheta_2) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \sigma F^2 \left(\frac{k_2 J^1}{k_1^2} \right) (1 - \vartheta_1) \right] E(s) - (1 - \vartheta_1) (1 + \vartheta_2) \frac{1}{2} F^1 F^2 E(s) + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sigma F^1 \frac{1}{2} \sigma F^2 E(s) \right\}. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Теперь можно перейти к определению матричных элементов операторов импульса:

$$\begin{aligned} (x'(s) | \Pi_\mu(s) | x''(0)) = & (-i\partial'_\mu - eA_\mu(x')) (x'(s) | x''(0)) = \\ = & -i(4\pi s)^{-2} \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4s} \right] \Phi(x', x'') \left\{ \left[\frac{\Delta x_\mu}{2s} \right] + e \int d^4 \bar{k} \frac{1}{2} (1 + \vartheta) (F \Delta x)_\mu \right\} \times \\ & \times U'(s; x', x'') - i\partial'_\mu U'(s; x', x'') \left. \right\} \quad (3.15) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (x'(s) | \Pi_\mu(0) | x''(0)) = & (i\partial''_\mu - eA_\mu(x'')) (x'(s) | x''(0)) = \\ = & -i(4\pi s)^{-2} \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4s} \right] \Phi(x', x'') \left\{ \left[\frac{\Delta x_\mu}{2s} \right] - e \int d^4 \bar{k} \frac{1}{2} (1 - \vartheta) (F \Delta x)_\mu \right\} \times \\ & \times (U'(s; x', x'') + i\partial''_\mu U'(s; x', x'')) \left. \right\}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Поскольку импульсы входят в оператор массы в виде комбинации $\frac{1}{2} (\gamma \Pi(s) + \Pi(0) \gamma)$, подобное выражение будет получено только для этой величины. В связи с тем обстоятельством, что оператор массы представляет собой дираковскую матрицу, естественно подразделить составляющие импульса и функции преобразования по их спинорным свойствам. Так, имеется скалярная часть (пропорциональная единичной матрице), „спиновая“ часть (пропорциональная $\sigma_{\mu\nu}$) и псевдоскалярная часть (пропорциональная γ_5), которая получается путем разбивания

$$\frac{1}{2} \sigma F^1 \frac{1}{2} \sigma F^2 = \frac{1}{2} F^1 F^2 - i \text{tr} [F^1 \sigma F^2] + \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^2 + \quad (3.17)$$

и содержит величину, дуальную $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (3.18)$$

При помощи интегральных операторов, определение которых дается ниже, мы можем теперь записать функцию Грина для дираковского поля в виде

$$\begin{aligned}
 G_+(x', x'') &= i \int_0^\infty ds \exp[-im^2s] (x'(s) | m - \frac{1}{2}(\gamma\Pi(s) + \Pi(0)\gamma) | x''(0)) = \\
 &= (4\pi)^{-2} \int_0^\infty s^{-2} ds \exp\left[-im^2s + i\frac{(\Delta x)^2}{4s}\right] \Phi(x', x'') \times \\
 &\times \left(\left[m - \frac{\gamma\Delta x}{2s} \right] [1 + A(s) + C(s)] - \gamma_\mu [A_{+\mu}(s) + C_{+\mu}(s)] - \right. \\
 &- \frac{1}{2} \left\{ \gamma B_+(s) + \left[\frac{\gamma\Delta x}{2s} - m \right] B(s), \frac{1}{2} \sigma F \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \left[\gamma B_-(s), \frac{1}{2} \sigma F \right] - \frac{1}{2} \left\{ \gamma D_+^2(s) + \left[\frac{\gamma\Delta x}{2s} - m \right] D^2(s), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \left[\gamma D_-^2(s), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] - \frac{1}{2} \left\{ \gamma D_+^1(s) + \left[\frac{\gamma\Delta x}{2s} - m \right] D^1(s), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} - \\
 &- \frac{1}{2} \left[\gamma D_-^1(s), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] + \frac{1}{2} i \left\{ \gamma G_+(s) + \left[\frac{\gamma\Delta x}{2s} - m \right] G(s), \text{tr}[F^1\sigma F^2] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2} i [\gamma G_-(s), \text{tr}[F^1\sigma F^2]] + [\gamma G_-(s) + mG(s)] \frac{1}{2} \gamma_5 F^1 F^{2*}. \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Использованные обозначения имеют следующий смысл:

$$A(s) = ise \int d^4\bar{k} \frac{\Delta x J}{sk^2} [e(s) - 1], \quad (3.20a)$$

$$A_{+\mu}(s) = ise \int d^4\bar{k} \frac{1}{2} v \left[-i \left(\frac{v \Delta x}{s} \right)_\mu - v J_\mu \right] e(s); \quad (3.20б)$$

$$B(s) = ise \int d^4\bar{k} e(s)$$

$$\left[\text{так как } B(s) \frac{1}{2} \sigma F = ise \int d^4\bar{k} \frac{1}{2} \sigma F e(s) \right]; \quad (3.20в)$$

$$B_{+\mu}(s) = ise \int d^4\bar{k} \frac{1}{2} v k_\mu e(s); \quad (3.20г)$$

$$B_{-\mu}(s) = ise \int d^4\bar{k} \frac{1}{2} k_\mu e(s); \quad (3.20д)$$

$$\begin{aligned}
 C(s) &= (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \left(\frac{\Delta x J^1}{sk_1^2} \right) \left(\frac{\Delta x J^2}{sk_2^2} \right) [E(s) - e_1(s) - e_2(s) + 1] + \frac{1}{2} \left(\frac{J^1 J^2}{sk_1^2 k_2^2} \right) \times \right. \\
 &\times [k_2 \Delta x (1 + v_2) - k_1 \Delta x (1 - v_1) + sk_1^2 v_1 (1 - v_1) - sk_2^2 v_2 (1 + v_2)] E(s) + \\
 &+ i \left[\frac{J^{1^2} \Delta x}{sk_2^2} (1 - v_1) - \frac{J^{1^2} \Delta x}{sk_1^2} (1 + v_2) \right] E(s) + (v_1 - v_2 + v_1 v_2) \frac{1}{2} F^1 F^2 E(s) \left. \right\}, \quad (3.20е) \\
 C_{+\mu}(s) &= (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{v_1}{s} J_\mu^1 \frac{\Delta x J^2}{sk_2^2} \left[E(s) \left(v_1 + \frac{k_1 k_2}{k_1^2} (1 + v_2) \right) - v_1 e_1(s) \right] - \frac{1}{2} \frac{v_2}{s} \times \right. \\
 &\times J_\mu^2 \frac{\Delta x J^1}{sk_1^2} \left[E(s) \left(v_2 - \frac{k_1 k_2}{k_2^2} (1 - v_1) \right) - v_2 e_2(s) \right] + (sk_1^2 k_2^2)^{-1} \left[\frac{1}{2} J^1 J^2 (k_2 (1 + v_2) - \right. \\
 &- k_1 (1 - v_1)), + ik_1^2 (J^2 F^1), (1 - v_1) - ik_2^2 (J^1 F^2), (1 + v_2) \left. \right] \times \\
 &\times \left[\Delta x_\nu \frac{1}{2} (k_1 v_1 + k_2 v_2)_\mu - i \delta_{\mu\nu} \right] E(s) - \frac{1}{2} i v_1 (F^1 \Delta x)_\mu \left(\frac{\Delta x J^2}{sk_2^2} \right) [E(s) - e_1(s)] + \\
 &+ \frac{1}{2} i v_2 (F^2 \Delta x)_\mu \left(\frac{\Delta x J^1}{sk_1^2} \right) [E(s) - e_2(s)] + \left[\frac{1}{2} \frac{J^1 J^2}{k_1^2 k_2^2} (k_1^2 v_1 (1 - v_1) - k_2^2 v_2 (1 + v_2)) + \right. \\
 &\left. + (v_1 - v_2 + v_1 v_2) \frac{1}{2} F^1 F^2 \right] \frac{1}{2} (k_1 v_1 + k_2 v_2)_\mu E(s) \left. \right\}, \quad (3.20ж)
 \end{aligned}$$

$$D^1(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{\Delta x J^1}{s k_1^2} (E(s) - e_2(s)) + (1 + v_2) \left(k_2 \frac{J^1}{k_1^2} \right) E(s) \right\}, \quad (3.20a)$$

$$D^2(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{\Delta x J^2}{s k_2^2} (E(s) - e_1(s)) - (1 - v_1) \left(k_1 \frac{J^2}{k_2^2} \right) E(s) \right\}, \quad (3.20b)$$

$$D_{+\mu}^1(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{1}{2} v_2 k_{2\mu} \frac{\Delta x J^1}{s k_1^2} (E(s) - e_2(s)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} i v_1 \left(\frac{F^1 \Delta x}{s} \right)_\mu E(s) - \frac{1}{2} v_1 J_\mu^1 \left[v_1 + \frac{k_1 k_2}{k_1^2} (1 + v_2) \right] E(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (k_1 v_1 + k_2 v_2)_\mu \left(\frac{k_2 J^1}{k_1^2} \right) E(s) \right\}; \quad (3.20c)$$

$$D_{+\mu}^2(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{1}{2} v_1 k_{1\mu} \frac{\Delta x J^2}{s k_2^2} (E(s) - e_1(s)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} i v_2 \left(\frac{F^2 \Delta x}{s} \right)_\mu E(s) - \frac{1}{2} v_2 J_\mu^2 \left[v_2 - \frac{k_1 k_2}{k_2^2} (1 - v_1) \right] E(s) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (k_1 v_1 + k_2 v_2)_\mu \left(\frac{k_1 J^2}{k_2^2} \right) E(s) \right\}; \quad (3.20d)$$

$$D_{-\mu}^1(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{1}{2} k_{2\mu} \frac{\Delta x J^1}{s k_1^2} (E(s) - e_2(s)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} i \left(F^1 \frac{\Delta x}{s} \right)_\mu E(s) - \frac{1}{2} J_\mu^1 \left[v_1 + \frac{k_1 k_2}{k_1^2} (1 + v_2) \right] E(s) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu \left(k_2 \frac{J^1}{k_1^2} \right) E(s) \right\}, \quad (3.20e)$$

$$D_{-\mu}^2(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \left\{ \frac{1}{2} k_{1\mu} \frac{\Delta x J^2}{s k_2^2} (E(s) - e_1(s)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} i \left(\frac{F^2 \Delta x}{s} \right)_\mu E(s) - \frac{1}{2} J_\mu^2 \left[v_2 - \frac{k_1 k_2}{k_2^2} (1 - v_1) \right] E(s) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu \left(\frac{k_1 J^2}{k_2^2} \right) E(s) \right\}; \quad (3.20f)$$

$$G(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} E(s); \quad (3.20g)$$

$$G_{+\mu}(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \frac{1}{2} (k_1 v_1 + k_2 v_2)_\mu E(s), \quad (3.20h)$$

$$G_{-\mu}(s) = (ise)^2 \int d^8\bar{K} \frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\mu E(s). \quad (3.20i)$$

Следует отметить, что A и C являются скалярными частями, в то время как B , D и G представляют собой спиновые части, а G — псевдоскалярную.

Нам еще остается построить полный оператор массы и выделить из него ту часть, которая представляет добавку к массе покоя электрона. С помощью функции Грина фотоинного поля в представлении собственного времени оператора массы записывается в виде

$$M(x', x'') = m_0 \delta(x' - x'') + ie^2 (2\pi)^{-4} \Phi(x', x'') \int_0^\infty s^{-2} ds \times \\ \times \int_0^\infty \omega^{-2} d\omega \exp \left[-im^2 s + i \frac{(\Delta x)^2}{4\omega} \right] \gamma_\lambda () \gamma_\lambda. \quad (3.21)$$

Здесь символ $()$ обозначает выражение в круглых скобках в формуле (3.19) и вместо t из (2.3) введена переменная $\omega = (s^{-1} + t^{-1})^{-1}$.

Теперь заметим, что главные члены поправки к массе покоя

$$-i(4\pi\omega)^{-2} \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4\omega} \right] \left[-4m - 2 \left(\frac{\gamma \Delta x}{2s} \right) \right] \quad (3.22)$$

являются также главными членами разложения оператора

$$\left(x'(\omega) \left| -4m - \frac{\omega}{s} \left(\gamma \Pi(\omega) + \Pi(0) \gamma \right) \right| x''(0) \right) = \delta m(\omega; x', x''), \quad (3.23)$$

для которого волновая функция, удовлетворяющая уравнению

$$(\gamma \Pi + m) \psi = 0, \quad (3.24)$$

является собственной функцией

$$\int \delta m(\omega; x', x'') \psi(x'') d^4 x'' = -2m \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) \exp [im^2 \omega] \psi(x'). \quad (3.25)$$

Если трактовать электродинамические поправки как возмущение и учитывать их только в первом порядке, то можно использовать волновые функции, удовлетворяющие уравнению (3.24), и переписать (3.21) в виде

$$\int M(x', x'') \psi(x'') d^4 x'' = \int (m \delta(x' - x'') + \bar{M}(x', x'')) \psi(x'') d^4 x'', \quad (3.26)$$

где подставлено значение наблюдаемой массы свободного электрона [7]

$$m = m_0 + \left(\frac{\alpha m}{2\pi} \right) \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s d\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) \exp [-im^2(s - \omega)] \quad (3.27a)$$

и конечный оператор, описывающий влияние вакуумных флуктуаций поля на поведение электрона во внешнем поле:

$$\begin{aligned} \bar{M}(x', x'') = & - \left(\frac{\alpha}{4\pi} \right) \int_0^\infty ds \exp [-im^2 s] \int_0^s d\omega \left\{ s^{-2} \left(x'(\omega) \left| 4m + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega}{s} (\gamma \Pi(\omega) + \Pi(0) \gamma) \right| x''(0) \right) + \omega^{-2} \gamma_\lambda \left(x'(s) \left| m - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} (\gamma \Pi(s) + \Pi(0) \gamma) \right| x''(0) \right) \gamma_\lambda \exp \left[\frac{1}{4} i (\Delta x)^2 (\omega^{-1} - s^{-1}) \right] \right\}. \quad (3.27b) \end{aligned}$$

Сравнивая с (3.19) в силу спинового характера матричного элемента, мы можем объединить два слагаемых выражения (3.27б). При этом используются следующие тождества:

$$\gamma_\lambda^2 = -4; \quad \gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\lambda = 4\gamma_5; \quad (3.28a)$$

$$\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\lambda = 2\gamma_\mu; \quad \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda = -2\gamma_\mu \gamma_5; \quad (3.28б)$$

$$\gamma_\lambda \sigma_{\mu\nu} \gamma_\lambda = 0; \quad (3.28в)$$

$$\gamma_\lambda [\gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho}] \gamma_\lambda = -2 [\gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho}]; \quad (3.28г)$$

$$\gamma_\lambda \{ \gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho} \} \gamma_\lambda = 2 \{ \gamma_\mu, \sigma_{\nu\rho} \}.$$

Разложение оператора массы (3.27б), аналогичное выражению (3.19) для функции Грина, теперь может быть записано при помощи операторов $A(\omega)$, $B(\omega)$ и т. д.

$$\begin{aligned} \overline{M}(x', x'') = & -i\alpha (4\pi)^{-3} \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s \omega^{-2} d\omega \exp\left[-im^2 s + \frac{i\Delta x^2}{4\omega}\right] \Phi(x', x'') \times \\ & \times \left(\left[4m + \gamma \frac{\Delta x}{s} \right] [A(s) - A(\omega) + C(s) - C(\omega)] + 2\gamma_\mu [A_{+\mu}(s) - A_{+\mu}(\omega) + \right. \\ & + C_{+\mu}(s) - C_{+\mu}(\omega)] + 4m \left[B(\omega) \frac{1}{2} \sigma F + D^1(\omega) \frac{1}{2} \sigma F^2 + D^2(\omega) \frac{1}{2} \sigma F^1 - \right. \\ & \left. - iG(\omega) \operatorname{tr} [F^1 \sigma F^2] + (G(s) + G(\omega)) \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} \right] - \\ & - \left\{ \gamma B_+(s) + \frac{\omega}{s} \gamma B_+(\omega) + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (B(s) + B(\omega)), \frac{1}{2} \sigma F \right\} + \\ & + \left[\gamma B_-(s) - \frac{\omega}{s} \gamma B_-(\omega), \frac{1}{2} \sigma F \right] - \left\{ \gamma D_+^1(s) + \frac{\omega}{s} \gamma D_+^1(\omega) + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (D^1(s) + \right. \\ & \left. + D^1(\omega)), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} - \left\{ \gamma D_+^2(s) + \frac{\omega}{s} \gamma D_+^2(\omega) + \frac{\gamma \Delta x}{2s} (D^2(s) + D^2(\omega)), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right\} + \\ & + i \left\{ \gamma G_+(s) + \frac{\omega}{s} \gamma G_+(\omega) + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (G(s) + G(\omega)), \operatorname{tr} [F^1 \sigma F^2] \right\} + \\ & + \left[\gamma D_-^1(s) - \frac{\omega}{s} \gamma D_-^1(\omega), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] + \left[\gamma D_-^2(s) - \frac{\omega}{s} \gamma D_-^2(\omega), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] - \\ & - i \left[\gamma G_-(s) - \frac{\omega}{s} \gamma G_-(\omega), \operatorname{tr} [F^1 \sigma F^2] \right] + \\ & + 2 \left[\gamma G_-(s) - \frac{\omega}{s} \gamma G_-(\omega) \right] \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} \Big). \quad (3.29) \end{aligned}$$

Следует заметить, что этот оператор существенно отличается от нуля только при $(\Delta x^2) \lesssim m^{-2}$, так как в противном случае наличие быстро осциллирующих экспоненциальных множителей при интегрировании по параметрам собственного времени дает исчезающее значение.

4. Составляющая первого порядка

Поскольку мы хотим получить результат с точностью до слагающих, квадратичных по полю, то, очевидно, матричные элементы тех членов уравнения (3.29), которые зависят от поля линейно, т. е. всех операторов A и B , должны вычисляться более тщательно, чем в случае квадратичных членов. В частности, зависящие от поля члены, которые входят в соотношения между $\gamma\Pi$ и $\gamma\Delta x/2s$ (3.15) и (3.16), следует оставлять в членах первого типа, тогда как в квадратичных членах ими можно пренебречь. Аналогичным образом, в квадратичных членах множитель $\Phi(x', x'')$ может быть положен равным единице, в то время как в линейных членах должны быть учтены линейные составляющие его разложения. Дальнейшие преобразования будут производиться без ограничения общности векторного потенциала A_μ . Однако мы примем, что матричный элемент оператора массы берется относительно волновых функций, удовлетворяющих уравнению (3.24); следовательно, операторы $\gamma[-i\partial' - eA(x')]$ и $\gamma[i\partial'' - eA(x'')]$, стоящие соответственно справа или слева от волновой функции, могут сдвигаться к ней посредством интегрирования по частям и затем заменяться на $(-m)$.

Мы поясним метод вычислений на примере преобразования первого члена выражения (3.29)¹):

$$\begin{aligned}
 & 4m \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4\omega} \right] \Phi(x', x'') i e \int d^4 \bar{k} \left(-\frac{\frac{1}{2} \{ \gamma \Delta x, \gamma J \}}{s k^2} \right) (e(s) - e(\omega)) = \\
 & = 4m i e \int \left(-\frac{\omega}{s} \right) \left[\gamma \left(-i \partial' - e A(x') - \frac{1}{2} k (1 + \nu) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - e \int d^4 k_1 \frac{1}{2} (1 + \nu_1) (F^1 \Delta x) \right) \gamma J + \gamma J \gamma \left(i \partial'' - e A(x'') + \frac{1}{2} k (1 - \nu) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + e \int d^4 k_1 \frac{1}{2} (1 - \nu_1) (F^1 \Delta x) \right) \right] \Phi(x', x'') \frac{1}{k^2} \exp \left[\frac{i(\Delta x)^2}{4\omega} \right] d^4 \bar{k} (e(s) - e(\omega)) = \\
 & = 4m \exp \left[\frac{i(\Delta x)^2}{4\omega} \right] \Phi(x', x'') \left\{ i e \int d^4 \bar{k} \left[2m \gamma J - k^3 \frac{1}{2} \sigma F \right] \frac{[e(s) - e(\omega)]}{k^2} + \right. \\
 & \left. + (ie)^2 \omega \int d^4 \bar{k}_1 d^4 \bar{k}_2 \left[i \gamma J^2 (\gamma F^1 \Delta x) \frac{1}{2} (1 - \nu_1) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - i (\gamma F^1 \Delta x) \gamma J^2 \frac{1}{2} (1 + \nu_2) \right] \frac{(e_2(s) - e_2(\omega))}{k_2^2} \right\}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

При выполнении приведенного преобразования, как и при рассмотрении остальных членов первого порядка, применяются следующие тождества:

$$\{ \gamma J, \gamma k \} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{1}{2} [\gamma J, \gamma k] = k^2 \frac{1}{2} \sigma F; \quad (4.2б)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \gamma_\mu, \frac{1}{2} \sigma F \right\} = i \gamma_5 (\gamma F^*)_\mu, \quad \frac{1}{2} \left\{ \gamma k, \frac{1}{2} \sigma F \right\} = 0, \quad (4.2в)$$

$$\frac{1}{2} \left[\gamma_\mu, \frac{1}{2} \sigma F \right] = i (\gamma F)_\mu, \quad \frac{1}{2} \left[\gamma k, \frac{1}{2} \sigma F \right] = \gamma J. \quad (4.2г)$$

Если разложить теперь до членов первого порядка множитель, зависящий от калибровки, то получатся составляющие оператора массы, линейные по внешнему полю,

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1(x', x'') & = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s d\omega \exp [im^2(s - \omega)] \times \\
 & \times \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip \Delta x} \exp [-i\omega(p^2 + m^2)] i e \int d^4 \bar{k} \left[2m^2 \omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) + \frac{i\omega}{s} \right] \times \\
 & \times \frac{[e(s) - e(\omega)] \gamma J}{k^2} + \frac{1}{2} [s + \omega - \omega^2(s - \omega)] e(s) \gamma J - m\omega \left(1 - \frac{\omega}{s} \right) e(s) \frac{1}{2} \sigma F \}. \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Мы здесь вновь подставили разложение в интеграл Фурье

$$-i(4\pi\omega)^{-2} \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4\omega} \right] = \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip \Delta x} \exp [-i\omega p^2]. \quad (4.4)$$

¹) Заметим, что в $d^4 \bar{k}$ включается зависимость от координат x' и x'' .—Прим. авт.

Остальные части рассматриваемых членов имеют явный второй порядок по полю

$$\begin{aligned} \overline{M}_2^1(x', x'') = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s d\omega \exp[-im^2(s-\omega)] \int (2\pi)^{-4} d^4 p e^{ip \Delta x} \times \\ & \times \exp[-i\omega(p^2 + m^2)] (ie)^2 \int d^4 \bar{k}_1 d^4 \bar{k}_2 \left\{ \frac{1}{2} i\omega(v_1 - v_2) (\gamma F^1 \Delta x) (\Delta x J^2) \times \right. \\ & \times \left[\frac{e_2(s) - e_2(\omega)}{k_2^2} + im\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) \left(v_2 J^2 F^1 \Delta x + \frac{1}{2} [\gamma J^2, \gamma F^1 \Delta x] \right) \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{e_2(s) - e_2(\omega)}{k_2^2} - \frac{1}{4} i\omega \left(v_2 \left\{ \gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} + v_1 v_2 \left[\gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] \right) \right] \times \right. \\ & \times \left[e_2(s) - \frac{\omega}{s} e_2(\omega) \right] - \frac{1}{4} i\omega \left(v_1 \left\{ \gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} + \left[\gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] \right) \times \\ & \times \left[e_2(s) + \frac{\omega}{s} e_2(\omega) \right] + (\gamma J^2) (A^1 \Delta x) \left[2m^2 \omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) + \frac{i\omega}{s} \right] \left[\frac{e_2(s) - e_2(\omega)}{k_2^2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (\gamma J^2) (A^1 \Delta x) [s + \omega - v_2^2(s - \omega)] e_2(s) - m \left(\frac{1}{2} \sigma F^2 \right) (A^1 \Delta x) \omega \left(1 - \frac{\omega}{s} \right) e_2(s) \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Они будут исследованы в последующем совместно с членами второго порядка C , D и G выражения (3.29).

При нахождении матричного элемента оператора (4.3) для S -состояния атома водорода

$$\overline{M}_1 = \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' dt'' \overline{\psi}_0(x') \overline{M}_1(x', x'') \psi_0(x'') \quad (4.6)$$

следует учитывать, что нужны только поправки порядка α и $Z\alpha^2$ относительно матричного элемента плотности энергии сверхтонкой структуры $\frac{1}{2} \sigma F$. Поскольку множитель α входит сразу явным образом, все остальные множители следует рассматривать только до порядка $Z\alpha$. Таким образом, энергия электрона может быть приближенно положена в данном случае равной энергии покоя, так что можно выполнить интегрирование по t'' , если учесть, что для статического потенциала имеют место равенства

$$A_\mu(k) = A_\mu(\mathbf{k}) \delta(k_0) \quad \text{и} \quad \psi_0(x) = \psi_0(\mathbf{r}) e^{-imt}. \quad (4.7)$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 = & \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \overline{\psi}_0(\mathbf{r}') \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s d\omega \exp[-im^2(s-\omega)] \int (2\pi)^{-3} \times \\ & \times d^3 p e^{ip \cdot \Delta r} \exp[-i\omega p^2] ie \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (2\pi)^{-2} dk e^{\frac{1}{2} i\mathbf{k} [\mathbf{r}'(1+v) + \mathbf{r}''(1-v)]} \{ \} \psi_0(\mathbf{r}''), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где символ $\{ \}$ обозначает выражение в фигурных скобках в формуле (4.3).

Присутствие в каждом члене экспонент $e(s)$ и $e(\omega)$ совместно с множителем $e^{\frac{1}{2} i\mathbf{k} (\mathbf{r} + \mathbf{r}'')}$ обуславливает то обстоятельство, что основная часть величины \overline{M}_1 связана с пространственной областью вокруг начала с радиусом, равным комптоновской длине волны электрона $1/m$. Следовательно, в самом грубом приближении величина \overline{M}_1 получится, если пренебречь малыми компонентами функции ψ_0 и подставить вместо нее значение $\varphi_0(0)$ волновой функции Паули вначале. В этом

случае не обратится в нуль только последнее слагаемое в выражении (4.3), причем получится $(u = 1 - \frac{\omega}{s})$

$$\begin{aligned} \overline{M}_1 = & -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty im^2 ds \int_0^1 du \exp[-im^2su] 2u(1-u) \times \\ & \times \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Приведенная формула дает добавок в расщеплении тонкой структуры, связанный с аномальным магнитным моментом $\mu_0 \sigma / 2\pi$.

Для нахождения дальнейших поправок к данному результату необходимо использовать более точные решения уравнения (3.24). Эффекты первого порядка по магнитному полю учитываются в выражении

$$\psi(x) = \psi_e(x) + e \int G_e(x, x') \gamma A^M(r') \psi_e(x') d^4x', \quad (4.10)$$

которое включает точную кулоновскую волновую функцию $\psi_e(x)$ и функцию Грина в кулоновском поле G_e . При рассмотрении последнего слагаемого можно ограничиваться самым грубым приближением, поскольку входящий в него векторный потенциал в сочетании с линейным по полю оператором массы дает члены, обладающие явной квадратичной зависимостью от поля. Таким образом, вместо G_e можно взять функцию Грина для свободной частицы

$$G(x, x') = \int (2\pi)^{-4} d^4k e^{ik(x-x')} \frac{m - \gamma k}{m^2 + k^2} \quad (4.11)$$

и приближенно положить энергию состояния равной энергии покоя

$$\psi(x) = \psi(r) e^{-imt}, \quad \psi_e(x) = \psi_e(r) e^{-imt}. \quad (4.12)$$

После интегрирования по t' для зависимости волновой функции от пространственных координат получается выражение ¹⁾

$$\psi(r) = \psi_e(r) + \int (2\pi)^{-3} (k^2)^{-1} dk dr' e^{ik(r-r')} [m(1 + \gamma_0) - \gamma k] \gamma A^M(r') \psi_e(r'). \quad (4.13)$$

Выражая через волновые функции Паули большие компоненты функции (4.13), получаем для S -состояния

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) + e \int (2\pi)^{-3} (k^2)^{-1} dk dr' e^{ik(r-r')} \sigma k \sigma A^M(r') \varphi_0(r') \approx \\ \approx \varphi_0(r) + e \int (2\pi)^{-3} (k^2)^{-1} dk e^{ikr} i \sigma (k \times A^M(k)) \varphi_0(0) \rightarrow \frac{\varphi_0(r) + \frac{2}{3} e \sigma \mu \varphi_0(0)}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь учтено, что постоянная $\varphi_0(0)$ является достаточным приближением к медленно меняющейся волновой функции; кроме того, в последнем выражении заранее выполнено усреднение по углам в матричном элементе. Наконец, малые компоненты волновой функции (4.13) с требуемой точностью имеют вид

$$-i \frac{\sigma \cdot \nabla}{2m} \varphi_0(r). \quad (4.15)$$

¹⁾ На необходимость учета этой магнитной поправки нам любезно указал Норман Кроль. — Прим. авт

При подстановке приведенных волновых функций в выражение (4.8) получаются члены четырех типов:

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e\gamma^M \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \frac{1}{2m} \varphi_0^*(\mathbf{r}') \left[e\sigma J^M(\mathbf{k}) \sigma \left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{k} (1 - \nu) \right) + \right. \\ \left. + \sigma \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{k} (1 + \nu) \right) e\sigma J^M(\mathbf{k}) \right] \varphi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \cdot \mu \rangle k^2 \varphi_0^*(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}''), \quad (4.16)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e\gamma^F \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \langle \sigma \cdot \mu \rangle 2Z\alpha \frac{1}{2} \left[\frac{\varphi_0^*(\mathbf{r}') \varphi_0(0)}{r''} + \frac{\varphi_0^*(0) \varphi_0(\mathbf{r}'')}{r'} \right], \quad (4.17)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e \frac{1}{2} \sigma F^M \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} e \langle \sigma \cdot \mu \rangle \varphi_0^*(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}''), \quad (4.18)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e \frac{1}{2} \sigma F^F \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow 0. \quad (4.19)$$

Из симметрии $\bar{M}_1(x', x'')$ относительно r' и r'' и из того обстоятельства, что эта величина велика только вблизи начала, следует, что в выражение (4.8) можно приближенно подставить разложение кулоновской волновой функции

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0(0) (1 - Z\alpha r m), \\ \varphi_0^*(\mathbf{r}') \varphi_0(\mathbf{r}'') = |\varphi_0(0)|^2 (1 - 2Z\alpha r' m). \quad (4.20)$$

После всех указанных приближений матричный элемент принимает более простой вид:

$$\bar{M}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \cdot \mu \rangle |\varphi_0(0)|^2 \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty im^2 ds \int_0^1 du \exp[-ism^2 u] \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \int (2\pi)^{-6} d\mathbf{p} d\mathbf{k} d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')} e^{i \frac{1}{2} \mathbf{k} \cdot [\mathbf{r}'(1+\nu) + \mathbf{r}''(1-\nu)]} \left\{ \left[1 - 2Z\alpha r' m + \frac{4Z\alpha m}{r'^2 k^2} \right] \times \right. \\ \times \left[\left(2(1 - u^2) - \frac{1-u}{im^2 s} \right) (e(s) - e(s(1-u))) + \frac{1}{2} (2 - u - uv^2) \left(\frac{k^2}{m^2} \right) e(s) \right] - \\ \left. - (1 - 2Z\alpha r' m) 2u(1-u)e(s) \right\}. \quad (4.21)$$

Интегрирование по \mathbf{r}'' и \mathbf{p} выполняется без труда в силу равенства

$$\int (2\pi)^{-3} d\mathbf{r}'' \exp \left[i\mathbf{r}'' \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{k} (1 - \nu) - \mathbf{p} \right) \right] = \delta \left(\mathbf{p} - \frac{1}{2} \mathbf{k} (1 - \nu) \right). \quad (4.22)$$

Интегралы по r' и k приводят к выражениям вида

$$\int (2\pi)^{-3} dr' dk e^{ik \cdot r'} \exp \left[-\frac{1}{4} is k^2 \lambda_n \right] \{ 1; k^2; r'; r' k^2; (r' k^2)^{-1}; (r')^{-1} \} = \\ = \left\{ 1; 0; 2 \left(i\lambda_n \frac{s}{\pi} \right)^{1/2}; -4 (i\lambda_n s \pi)^{-1/2}; - \left(i \frac{\lambda_n s}{\pi} \right)^{1/2}; 2 (i\lambda_n s \pi)^{-1/2} \right\} \quad (n=1, 2), \quad (4.23)$$

где

$$\lambda_1 = (1 - \nu) (2 - u (1 - \nu)) \quad [\text{член с } e(s)], \\ \lambda_2 = 2(1 - \nu)(1 - u) \quad [\text{член с } e(s(1 - u))]. \quad (4.24)$$

Интегралы по собственному времени представляют собой Γ -функции. После описанных операций \bar{M}_1 получается в виде интеграла по двум параметрам u и ν :

$$\bar{M}_1 = \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \cdot \mu \rangle |\varphi_0(0)|^2 \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 du \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \left\{ -2(1-u)(1 - 2Z\alpha u^{-1/2} \lambda_1^{1/2}) + \right. \\ \left. + \left[-2Z\alpha + 4Z\alpha \left(-\frac{1}{2} \right) \right] [2(u^{-3/2}(1-u^2) - \right. \\ \left. - u^{-1/2}(1-u)) (\lambda_1^{1/2} - \lambda_2^{1/2}) - 2(2-u-uv^2) u^{-1/2} \lambda_1^{-1/2}] \right\}. \quad (4.25)$$

Отсюда при помощи табличных интегралов получается

$$\overline{M}_1 = -\frac{2}{3} \nu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{4} Z\alpha^2 (60 \ln 2 - 23) \right\}. \quad (4.26)$$

5. Члены второго порядка

Совокупность членов второго порядка в выражениях (3.29) и (4.5) теперь следует рассмотреть так же, как были рассмотрены члены первого порядка, только волновую функцию теперь можно положить приближенно равной ее значению в точке, где расположено ядро:

$$\psi_0(x) \approx \varphi_0(0) e^{-imt}. \quad (5.1)$$

Для того чтобы выполнить интегрирование по координатам, удобно вернуться к импульсным переменным, используя соотношения (4.4) и (3.6):

$$\begin{aligned} \Delta x_\mu &\rightarrow 2\omega p_\mu, \\ \Delta x_\mu \Delta x_\nu &\rightarrow 4\omega^2 p_\mu p_\nu + 2i\omega \delta_{\mu\nu}, \\ \Delta x_\mu \Delta x_\nu \Delta x_\lambda &\rightarrow 8i\omega^3 p_\mu p_\nu p_\lambda + 4i\omega^2 (\delta_{\mu\nu} p_\lambda + \delta_{\nu\lambda} p_\mu + \delta_{\lambda\mu} p_\nu). \end{aligned} \quad (5.2)$$

После этого интегрирование по координатам дает δ -функции Дирака, связывающие импульсные переменные k_1 , k_2 и p , в результате чего для \overline{M}_2 получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \overline{M}_2 &= \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty s^{-2} ds \int_0^s d\omega \exp[-in^2(s-\omega)] \int (2\pi)^{-1} dk_1 dk_2 d^4p \exp[-i\omega(p^2+m^2)] \times \\ &\times (ie)^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\sigma_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\sigma_2 \delta(k_1+k_2) \delta\left(p + \frac{1}{2}k_1(\sigma_1-\sigma_2)\right) \delta(p_0-m) \varphi_0^*(0) \{ \} \varphi_0(0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь скобки $\{ \}$ обозначают соответствующие выражения в (3.29) и (4.5); члены последнего симметризуются по σ_1 и σ_2 . Определение данных скобок облегчается тем обстоятельством, что существует только тот случай, когда аргументы δ -функций обращаются в нуль, т. е. когда

$$k_1 = -k_2, \quad p = \frac{1}{2} k_1 \Delta\sigma = -\frac{1}{2} k_2 \Delta\sigma; \quad \Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2. \quad (5.4)$$

Приведенные соотношения в совокупности с тем обстоятельством, что два вектора поля являются сочетанием электрического поля с магнитным полем и что конечное интегрирование по k_1 не дает нуля только в случае сферически симметричных членов, сильно упрощают выражение (5.3). Легко проверить, что, кроме антикоммутаторов из (3.29) и (4.5), в выражении (4.5) не исчезают только два члена¹⁾:

$$\varphi_0^*(0) \frac{1}{2} \sigma F^1 A^1 \Delta x \varphi_0(0) \rightarrow \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) \frac{2m\omega}{2\pi k_1^2} \quad (5.5a)$$

и

$$\varphi_0^*(0) [\gamma J^2, \gamma F^1 \Delta x] \varphi_0(0) \rightarrow \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) \frac{4im\omega}{2\pi}. \quad (5.5b)$$

¹⁾ Рассмотрим, например, первый член в (3.20e)

$$\varphi_0^*(0) \Delta x J^1 \Delta x J^2 \varphi_0(0) \rightarrow | \varphi_0(0) |^2 (4\omega^2 (pJ^1) (pJ^2) + 2i\omega (J^1 J^2));$$

имеем $J_\mu^E J_\mu^M = 0$, поскольку $J^E = (0, J_0^E)$, $J^M = (J^M, 0)$. Далее,

$$(pJ^E(k_1)) (pJ^M(k_2)) \rightarrow p_0 J_0^E(k_1) p J^M(k_2) \rightarrow -m J_0^E \left(\frac{1}{2} \Delta\sigma k_2 J^M(k_2) \right) = 0.$$

Антикоммутаторы определяются следующим образом [для сокращения ниже используются обозначения (3.20) и предполагается, что сделана подстановка (5.2)]:

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(0) \left[\left\{ \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (D^1(s) + D^1(w)), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} + \left\{ \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (D^2(s) + D^2(w)), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right\} \right] \varphi_0(0) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2\pi k_1^2} \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) 4 (m^2 w^2 - iw) \left[2E(s) - e_1(s) - \right. \\ \left. - e_2(s) + \frac{w}{s} (2E(w) - e_1(w) - e_2(w)) \right], \quad (5.5b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0^*(0) \left[\left\{ \gamma \left(D_+^1(s) + \frac{w}{s} D_+^1(w) \right), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} + \left\{ \gamma \left(D_+^2(s) + \frac{w}{s} D_+^2(w) \right), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right\} \right] \varphi_0(0) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) (-2s) \left[(\Delta v)^2 w \left(E(s) + \left(\frac{w}{s} \right)^2 E(w) \right) + \Delta v (1 - \right. \\ \left. - \Delta v) s \left(E(s) + \left(\frac{w}{s} \right)^2 E(w) \right) \right], \quad (5.5r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\varphi_0^*(0) \left\{ \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) (G(s) + G(w)), \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right\} \varphi_0(0) \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) 2s w \Delta v \left(E(s) + \left(\frac{w}{s} \right)^2 E(w) \right), \quad (5.5d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -i\varphi_0^*(0) \left\{ \gamma \left(G_+(s) + \frac{w}{s} G_+(w) \right), \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right\} \varphi_0(0) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) (-2s^2 \Delta v) \left(E(s) + \left(\frac{w}{s} \right)^2 E(w) \right), \quad (5.5e) \end{aligned}$$

$$\varphi_0^*(0) \left\{ \gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} \varphi_0(0) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{2}{3} \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 (2Z\alpha) (4iw \Delta v). \quad (5.5ж)$$

Один из экспоненциальных множителей сводится к виду

$$E(s) = \exp \left[-\frac{1}{4} i s k_1^2 \Delta v (2 - \Delta v) \right], \quad (5.6)$$

в то время как остальные могут быть объединены [см. (5.5в)];

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 (e_1(s) + e_2(s)) \rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_2 e_2(s), \quad (5.7)$$

так что они будут взяты вместе с составляющими (5.5а), (5.5б), (5.5ж) выражения (4.5).

Затем, после введения параметра $u = 1 - (w/s)$, производится оставшееся интегрирование по импульсам.

Соответствующие формулы имеют вид

$$\int dk \exp \left[-\frac{1}{4} i s k^2 \lambda_i \right] \{1; (k^2)^{-1}\} = \{8\pi^{3/2} (i\lambda_i)^{-3/2}; 4\pi^{3/2} (i\lambda_i)^{-1/2}\}, \quad (5.8)$$

где λ_i принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \Delta v (2 - \Delta v) && \text{из } E(s), \\ \lambda_2 &= 2\Delta v (1 - u) && \text{из } E(w), \\ \lambda_3 &= 1 - v_2^2 + (\Delta v)^2 (1 - u) && \text{из } e_2(s), \\ \lambda_4 &= (1 - v_2^2 + (\Delta v)^2) (1 - u) && \text{из } e_2(w). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Интегрирование по собственному времени дает, как и раньше, Γ -функции от полуцелого аргумента. После этого интегрирования получаются две составляющие величины энергии сверхтонкой структуры:

$$\begin{aligned} \bar{M}_2^A = & \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left(2Z \frac{\alpha^2}{2\pi} \right) \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \int_0^1 du \{ 4(1-u)^2 u^{-3/2} \times \\ & \times (\lambda_1^{-1/2} - \lambda_2^{-1/2}) + 4(1-u) u^{-1/2} (2\lambda_1^{-1/2} - (1-u)\lambda_2^{-1/2}) - 4(u^{1/2} \Delta v (1-\Delta v) + u^{-1/2} \Delta v) \times \\ & \times \lambda_1^{-3/2} - 4u^{-1/2} (1-u)^2 \Delta v \lambda_2^{-3/2} \} = \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 4Z\alpha^2 (1 - \ln 2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{M}_2^B = & \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left(\frac{2Z\alpha^2}{2\pi} \right) \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \int_0^1 du 4u^{-1/2} \{ -(1-u)\lambda_3^{-1/2} + \\ & + (1-u)^2 \Delta v (v_1 + v_2) \lambda_3^{-3/2} - (1-u)^2 \lambda_4^{-1/2} + (1-u)^3 (\Delta v)^2 \lambda_4^{-3/2} \} = \\ & = \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 Z\alpha^2 (5 - 12 \ln 2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Сумма всех трех поправок равна

$$\bar{M} = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{4} Z\alpha^2 (13 - 4 \ln 2) \right\}. \quad (5.12)$$

6. Поляризация вакуума

Теперь мы получим составляющие для выражения, описывающего влияние поляризации вакуума, которое обсуждалось в разделе 2. При применении аналога выражения (2.14)

$$M^P = -e \int \bar{\psi}(\mathbf{r}) \gamma A^P \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (6.1)$$

совместно с выражением (2.19) можно прямо использовать вычисленные матричные элементы (4.16) и (4.17). Получающееся выражение

$$\begin{aligned} M^P = & \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left(\frac{Z\alpha^2}{2\pi} \right) \times \\ & \times \int (2\pi)^{-3} d\mathbf{r} dk e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \left(rk^2 - \frac{2}{r} \right) m \int_0^1 dv \frac{v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right)}{m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2)}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

в котором применено разложение (2.22), включает выражение (2.23) в качестве первой составляющей. Вторая составляющая содержит матричный элемент плотности электрического заряда. После подстановки

$$\left[m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right]^{-1} = i \int_0^\infty ds \exp \left[-is \left(m^2 + \frac{1}{4} k^2 (1 - v^2) \right) \right] \quad (6.3)$$

выражение (6.2) принимает форму, полностью соответствующую (4.21). Интегрирование по пространству, импульсам и собственному времени выполняется здесь точно так же, как и в указанном случае. Последнее интегрирование по параметру v дает

$$\begin{aligned} M^P = & \frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) | \left(\frac{Z\alpha^2}{2\pi} \right) \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right) \times \\ & \times \left[-4(1-v^2)^{-1/2} - 4(1-v^2)^{-3/2} \right] = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) | \left\{ \frac{3}{4} Z\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

7. ВЫВОДЫ

Выражения (5.12) и (6.4) дают две составляющие формулы Ферми

$$\bar{M} = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left\{ \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{4} Z\alpha^2 (-13 + 4 \ln 2) \right\}$$

$$M^P = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left\{ + \frac{3}{4} Z\alpha^2 \right\}.$$

Таким образом, формула Ферми (2.16) принимает вид¹⁾

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \mu_0 \langle \sigma \mu \rangle | \varphi_0(0) |^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{1}{2} Z\alpha^2 (5 - 2 \ln 2) - 2,97 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right\} \left(1 + \frac{3}{2} (Z\alpha)^2 \right),$$

если учесть поправки четвертого порядка к магнитному моменту [2].

Полученные поправки вызывают изменение значения постоянной тонкой структуры по сравнению с экспериментально найденным.

В обозначениях Дюмонда и Коэна [5] имеем

$$\Gamma = 1,807\alpha^2 + 2 \cdot 10^{-6}; \quad \delta(\alpha^{-1}) = -0,880\alpha - 1,5 \cdot 10^{-4} = -0,0065.$$

Следовательно,

$$\alpha^{-1} = 137,0364 \pm 0,0009.$$

Недавние экспериментальные и теоретические исследования [6, 15] проблемы дейтерона показывают, что наша трактовка протона как точечного магнитного диполя с бесконечной массой не является полностью удовлетворительной. Оценка необходимых в связи с этим поправок дается в статье [15].

Авторы считают своим приятным долгом указать на неоднократную помощь со стороны Швингера и Кролля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koenig, Prodehl, Kusch, Phys. Rev., **83**, 687 (1951).
2. Karplus R., Kroll N., Phys. Rev., **77**, 536 (1950).
3. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **81**, 222 (1951).
4. Bethe H. A., Brown, Stehn, Phys. Rev., **77**, 370 (1950).
5. Diamond J. W. M., Cohen E. R., „A Least-Squares Adjustment of the Atomic Constants as of December 1950“ (A report to the Natl. Research Council). См. также Phys. Rev., **82**, 555 (1951).
6. Prodehl A. G., Kusch P., Phys. Rev., **79**, 1009 (1950).
7. Schwinger J., Proc. Natl. Acad., **7**, 432, 455 (1951).
8. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951) (см. статью VIII настоящего сборника).
9. Feynman R. P., Phys. Rev., **84**, 108 (1951).
10. Fermi E., Zs. f. Phys., **60**, 320 (1930).
11. Breit G., Phys. Rev., **35**, 1447 (1949).
12. Schwinger J., Phys. Rev., **76**, 790 (1949).
13. Karplus R., Klein A., Schwinger J., Phys. Rev., **84**, 597 (1951).
14. Kroll N. M., Pollock F., Phys. Rev., **84**, 594 (1951).
15. Low F. E., Salpeter E. E., Phys. Rev., **83**, 478 (1951).

¹⁾ Приводимый результат уже сообщался ранее Карплусом, Клейном и Швингером [13]. Такое же выражение было получено Кроллем и Поллаком [14] другим методом. — *Прим. авт.*

Х. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ СДВИГ АТОМНЫХ УРОВНЕЙ

II. ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ

Р. КАРПЛУС, А. КЛЕЙН и Ю. ШВИНГЕР

R. Karplus, A. Klein, J. Schwinger, Phys. Rev., 86, No 3, 288 (1952).

Вакуумные флуктуации фотонного поля и поля пар вызывают изменение взаимодействия электрона с электромагнитным полем. Влияние указанного изменения на уровни энергии описывается в работе с помощью представляющего ряд преимуществ метода, основывающегося на введении оператора массы и потенциала поляризации вакуума. С целью отделения той составляющей, которая относится к мягким квантам, когда внешнее электромагнитное поле не может считаться слабым, используется операторное рассмотрение. Остальные составляющие выражаются в виде рядов по степеням поля. Дополнительный сдвиг относительного порядка $Z\alpha$ по сравнению с опубликованными значениями для лэмбовского сдвига получается при подстановке в качестве внешнего поля кулоновского поля ядра в результате вычисления матричных элементов операторов для S -состояния водородоподобных атомов. Оказывается, что nS -уровень сдвигается на величину

$$\frac{Z^5\alpha^4}{n^3} \text{Ry} \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{192} \right).$$

Теоретическое значение лэмбовского сдвига для атома с бесконечно тяжелым ядром получается в результате равным 1058,42 *мгц*. Учет влияния конечности массы и размеров ядра приводит к уточненным значениям 1057,8 и 1058,9 *мгц* для водорода и дейтерия соответственно.

Введение

В предыдущей статье [1] мы рассмотрели влияние вакуумных флуктуаций фотонного и электронно-позитронного полей на движение электрона в заданном внешнем поле. В частности, нами был приближенно выведен оператор массы в виде разложения по полю до членов второго порядка, описывающий влияние виртуального испускания и поглощения одиночного фотона. При вычислениях предполагалось, что потенциальная энергия электрона мала по сравнению с его кинетической энергией. Полученное приближение оказывается достаточным для вычисления поправок относительного порядка $Z\alpha^2$ к сверхтонкой структуре расщепления основного состояния атома водорода. Поскольку с указанной точностью рассмотренные эффекты разыгрываются на расстоянии от ядра, не превышающем комптоновскую длину волны электрона, то основное условие пригодности разложения по полю является в данном случае выполненным. Однако это условие, как известно, не выполняется, если обратиться к рассмотрению лэмбовского сдвига [2] — электромагнитного смещения энергетических уровней $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$. Уже самое первое исследование этой проблемы [3] показало, что порядок величины сдвига можно вычислить, считая движение электрона нерелятивистским и используя дипольное приближение для виртуальных квантов. Таким образом, данное явление зависит в основном от поведения электрона на расстояниях от ядра порядка борковского радиуса, а не комптоновской длины волны. Это обстоятельство явилось причиной непригодности всех попыток полного рассмотрения лэмбовского сдвига с помощью непосредственного разложения эффектов собственной энергии по степеням внешнего поля. Последующие рассмотрения релятивистских уточнений¹⁾ к вычислениям Бете показали, что в действительности недостаточность разложения в ряд является не очень существенной. Посредством введения в релятивистские вычисления обрезания при низких

¹⁾ См. [4, 5] с поправками в [6, 7]. — *Прим. авт.*

энергиях можно связать результаты релятивистских и нерелятивистских вычислений так, что с рассматриваемой точностью (поправки порядка $Z\alpha \ln \alpha$ и $Z\alpha$ к формуле тонкой структуры) результаты получатся независимыми от параметра обрезания.

Цель настоящей статьи заключается в установлении поправок относительного порядка $Z\alpha$ к имеющейся формуле для энергетического сдвига. Основной возникающей при этом проблемой является задача отделения нерелятивистских эффектов, определяемых главным образом структурой атома, от релятивистских эффектов, которые от деталей структуры атома почти не зависят. Было бы нерационально пытаться использовать и в данном случае методы обрезания, примененные в предыдущих вычислениях, поскольку с рассматриваемой теперь точностью эти методы не дадут результатов, не зависящих от способа обрезания. Можно, однако, доказать, что поправки к нерелятивистской части сдвига уровня вызываются только тонкой структурой энергетических уровней атома и имеют поэтому относительный порядок $(Z\alpha)^2$. С другой стороны, релятивистские эффекты, которые с точностью до первого порядка по полю определяются поведением вначале, будут давать поправки относительного порядка $Z\alpha$ при правильном учете особенностей движения электрона как нелокализованного объекта в неоднородном поле. В связи с этим, естественно, подобные эффекты будут зависеть от скорости. Поэтому следует ожидать, что эти эффекты будут значительны только при больших скоростях электронов, т. е. тогда, когда электрон находится вблизи ядра. Как раз при этом условии поле можно считать слабым. Правильность приведенных аргументов подтверждается результатами настоящей статьи.

На всех этапах вычислений нами применяются операторы с матричными элементами, свободными от инфракрасных расходимостей. Это становится возможным благодаря использованию нового способа рассмотрения оператора массы. В разделе 2 указанный метод применяется для нахождения полного сдвига первого порядка без использования какого-либо искусственного обрезания. В разделах 3—5 приводятся более точные вычисления. При этом оказывается, что если выделить и рассматривать по методу раздела 2 некоторую часть оператора массы, включающую известный нерелятивистский результат, то остальная часть оператора массы при разложении по слабому полю будет давать полностью конечный матричный элемент. В разделе 7 приводится и обсуждается окончательный результат, в котором учитывается малая составляющая, связанная с эффектами поляризации вакуума (раздел 6).

2. Новый вывод выражения первого порядка для лэмбовского сдвига

Мы изложим здесь обладающий следующими особенностями метод рассмотрения оператора массы. Оператор рассматривается не в каком-нибудь частном, а в собственном представлении; перенормировка массы может быть выполнена во всех порядках по внешнему полю. Оператор массы оказывается возможным разбить на две части, одна из которых включает все составляющие, относящиеся к медленно движущейся частице, тогда как другая часть может быть разложена по степеням внешнего поля. В этом разделе мы сосредоточим внимание на методе отделения нерелятивистских эффектов. Начнем с рассмотрения структуры оператора массы.

При помощи интегральных представлений (2.3) и (2.5) статьи [1] оператор массы может быть записан в виде¹⁾

¹⁾ Возможность включения множителя $\exp[iq(x' - x'')]$ представления Фурье в фотонную функцию Грина следует из калибровочного преобразования $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + (1/e) \partial_\mu(qx)$. $\Pi_\mu \rightarrow \Pi_\mu - q_\mu$ при учете соответствующего изменения фазы дираковских волновых функций. Можно также считать, что произведено смещение типа

$$\exp[iq(x' - x'')] (x' | \Pi_\mu | x'') = (x' | e^{iqx} | \Pi_\mu e^{-iqx} | x'') = (x' | \Pi_\mu - q_\mu | x'').$$

— Прим. авт.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} = m_0 - ie^2 \int (2\pi)^{-4} d^4q \int_0^\infty ds \int_0^\infty dt \exp[-im^2s] \gamma_\lambda \frac{1}{2} \{ m - \gamma(\Pi - q) \times \\
 \times \exp[-is((\Pi - q)^2 - e \frac{1}{2} \sigma F) - itq^2] \} \gamma_\lambda = m_0 - ie^2 \int (2\pi)^{-4} d^4q \int_0^\infty s ds \int_0^1 u^{-2} du \times \\
 \times \exp[-ism^2u] \gamma_\lambda \frac{1}{2} \{ m - \gamma(\Pi - q), e^{-i\varphi} \} \gamma_\lambda, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

где

$$\varphi = -su^{-1}(\gamma(q - u\Pi))^2 + w\mathcal{H} = su^{-1}(q - u\Pi)^2 - sue \frac{1}{2} \sigma F + w\mathcal{H}, \quad (2.2)$$

\mathcal{H} — квадратированный оператор Дирака:

$$\mathcal{H} = -(\gamma\Pi)^2 + m^2, \quad \mathcal{H}\psi = 0, \quad (2.3)$$

а параметры u и w , определяемые формулами

$$t = wu^{-1}, \quad w = s(1 - u), \quad (2.4)$$

имеют тот же смысл, что и в статье [1]. В том случае, когда внешнее поле обращается в нуль

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = 0, \quad (2.5)$$

можно переставлять дираковские матрицы в выражении (2.1) с экспоненциальным оператором и произвести смещение

$$q_\mu \rightarrow (q + \Pi u)_\mu. \quad (2.6)$$

Выполнив интегрирование по импульсам виртуальных фотонов, мы получим для оператора массы в отсутствие поля

$$\mathbf{M}_0(\gamma\Pi) = m_0 + e^2(4\pi)^{-2} \int_0^\infty s^{-1} ds \int_0^1 du \exp[-im^2s + iw(\gamma\Pi)^2] [4m + 2\gamma\Pi(1 - u)], \quad (2.7)$$

для которого дираковская волновая функция является собственной функцией с собственным значением, равным полной массе электрона [8]. Следовательно, оператор массы в присутствии внешнего поля должен представляться в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0(\gamma\Pi) + \bar{\mathbf{M}}, \quad (2.8)$$

где в $\bar{\mathbf{M}}$ содержатся наблюдаемые эффекты внешнего поля.

Учитывая вид выражения (2.8), произведем предварительное преобразование

$$\begin{aligned}
 \gamma_\lambda \frac{1}{2} \{ m - \gamma(\Pi - q), e^{-i\varphi} \} \gamma_\lambda = - \{ 2m + \gamma\Pi(1 - u), e^{-i\varphi} \} - (1 - u) [\Pi_\lambda \gamma_\lambda, e^{-i\varphi}] - \\
 - \frac{1}{4} \{ m + \gamma\Pi(1 - u), [\gamma_\lambda \gamma_\lambda, e^{-i\varphi}] \} + \frac{1}{2} \gamma_\lambda \{ \gamma(q - u\Pi), e^{-i\varphi} \} \gamma_\lambda. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Формула (2.9) существенна в нескольких отношениях. Прежде всего, как видно из (2.4), близкие к нулю значения параметра u соответствуют большим значениям фотонного „собственного времени“ t и малым значениям фотонного импульса. Следовательно, всякая инфракрасная расходимость, могущая войти в оператор массы, будет относиться к расходимостям на нижнем пределе $u = 0$ данного параметра. Таким образом, относительная степень u (а также на данном этапе степень фотонного импульса) является характеристикой того, к каким сравнительно высоким или низким энергиям относятся составляющие сдвига уровня, соответствующие различным членам (2.9). Как будет показано, по крайней мере для всех членов, квадратичных по кулоновскому полю, все инфракрасные трудности содержатся в первых двух слагаемых выражения (2.9). [Мы можем полагать $\gamma\Pi$ равным $-m$ в тех членах, в которых $(\gamma\Pi)$ является крайним множителем.]

Непосредственно для нас важно сейчас то обстоятельство, что первый член выражения (2.9) совпадает с подинтегральным выражением в $M_0(\gamma\Pi)$, если заменить $\exp(-i\varphi)$ следующим образом:

$$\exp[-i\varphi(0)] = \exp[-isu^{-1}q^2 - iw\mathcal{H}] \quad (2.10)$$

и выполнить интегрирование по q . Дальнейшее разложение физически существенной разности

$$[\exp(-i\varphi) - \exp(-i\varphi(0))]$$

по степеням поля представляло бы собой повторение метода статьи [1], относящегося к слабому полю. Из рассмотрения (2.2) очевидно, что практическая необходимость введения того или иного разложения $\exp(-i\varphi)$ вызывается только неспособностью выполнить интегрирование по q в первоначальном выражении. С другой стороны, как уже отмечалось, разложение $\exp(-i\varphi(0))$ не является в данной связи необходимым. Поэтому вместо прямого разложения естественно взять разложение $\exp(-i\varphi)$ вблизи $\exp(-i\varphi(0))$. После этого, как будет показано ниже, удастся получить оператор, матричный элемент которого воспроизводит известную полную формулу для лэмбовского сдвига, включая логарифмический член, полученный Бете. Значение указанного разложения проще всего будет понять после вычислений.

Мы используем тождество

$$\exp[-i\varphi] = \exp[-i\varphi(0)] + \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp[-i\varphi(\lambda)], \quad (2.11)$$

где, как легко видеть, величина

$$\varphi(\lambda) = -su^{-1}[\gamma(q - \lambda u\Pi)]^2 + w\mathcal{H} = su^{-1}(q - \lambda u\Pi)^2 + \lambda^2 su e \frac{1}{2} \sigma F + w\mathcal{H} \quad (2.12)$$

в пределе при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ обращается в φ и $\varphi(0)$ соответственно.

Разбираемый метод можно пояснить на примере рассмотрения¹⁾

$$\begin{aligned} \int d^4q \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp[-i\varphi(\lambda)] &= \int d^4q \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dv \exp[-iv\varphi(\lambda)] \times \\ &\times \left[2is(q\Pi - \lambda u\Pi^2) + 2i\lambda sue \frac{1}{2} \sigma F \right] \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Спиновый член в (2.13) имеет явный первый порядок по полю. Чтобы представить остальные члены в аналогичном виде, выполним интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int d^4q \frac{\partial}{\partial q_\mu} \int_0^1 dv \exp[-iv\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] &= 0 = \\ = \int d^4q \int_0^1 dv \int_0^1 dy \{ \exp[-ivy\varphi(\lambda)] (-2isu^{-1}v)(q - \lambda u\Pi)_\mu \exp[-iv(1-y)\varphi(\lambda)] \times \\ &\times \Pi_\mu \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] + \exp[-iv\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \times \\ &\times \exp[-i(1-v)y\varphi(\lambda)] (-2isu^{-1}(1-v)) \times \\ &\times (q - \lambda u\Pi)_\mu \exp[-i(1-v)(1-y)\varphi(\lambda)] \}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

¹⁾ Мы пользуемся формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp[-i\varphi(\lambda)] &= \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{\exp[-i\varphi(\lambda) - i\Delta\lambda \varphi'(\lambda)] - \exp[-i\varphi(\lambda)]}{\Delta\lambda} = \\ &= \int_0^1 dv \exp[-iv\varphi(\lambda)] (-i\varphi'(\lambda)) \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)], \end{aligned}$$

получающейся после разложения первого экспоненциального множителя и перехода к пределу. — Прим. авт.

откуда после соответствующего изменения параметра в двух слагаемых следует

$$\begin{aligned} \int d^4q \int_0^1 dv \exp[-iv\varphi(\lambda)] q \Pi \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] = \\ = 2\lambda u \int d^4q \int_0^1 dv \int_0^v dz \exp[-i(v-z)\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \times \\ \times \exp[-iz\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Мы можем теперь написать

$$\begin{aligned} \int d^4q \int_0^1 d\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp[-i\varphi(\lambda)] = \int d^4q \int_0^1 d\lambda 2\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \exp[-i\varphi(\lambda)] = \\ = \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \exp[-i\varphi(\lambda)] \Big|_{\lambda=0} - \int d^4q \int_0^1 d(\lambda^2) (\lambda^2 - 1) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2}\right)^2 \exp[-i\varphi(\lambda)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

причем

$$\begin{aligned} \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \exp[-i\varphi(\lambda)] \Big|_{\lambda=0} = \int d^4q isu \exp(-isu^{-1}q^2) \times \\ \times \left\{ 2 \int_0^1 dv \int_0^1 dz \exp[-i\mathcal{H}w(v-z)] \Pi_\mu \exp[-i\mathcal{H}wz] \Pi_\mu \exp[-i\mathcal{H}w(1-v)] - \right. \\ \left. - \int_0^1 dv \exp[-i\mathcal{H}wv] \left(\Pi^2 - e^{\frac{1}{2}\sigma F}\right) \exp[-i\mathcal{H}w(1-v)] \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

и

$$\begin{aligned} \int d^4q \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2}\right)^2 \exp[-i\varphi(\lambda)] = \int d^4q isu \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2}\right) \left\{ 2 \int_0^1 dv \int_0^v dz \times \right. \\ \times \exp[-i(v-z)\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \exp[-iz\varphi(\lambda)] \Pi_\mu \times \\ \times \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] - \int_0^1 dv \exp[-iv\varphi(\lambda)] \left(\Pi^2 - e^{\frac{1}{2}\sigma F}\right) \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В дальнейшем мы не будем учитывать члены вида (2.18), поскольку можно показать, что они не дают составляющих лэмбовского сдвига первого порядка. С другой стороны, выражение (2.17) может быть приведено к виду, позволяющему связать его с первым членом (2.9), так как экспоненциальные операторы, входящие в соответствующее выражение в качестве крайних множителей, могут быть заменены на единицу в силу уравнения Дирака. Получающееся выражение, являющееся уже частично матричным элементом, можно записать после интегрирования по q в виде¹⁾

$$\begin{aligned} \left\langle \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \exp[-i\varphi(\lambda)] \Big|_{\lambda=0} \right\rangle = \\ = \pi^2 u^3 s^{-1} \left\langle e^{\frac{1}{2}\sigma F} + 2 \int_0^1 dv (1-v) \Pi_\lambda [\exp(-i\mathcal{H}wv) - 1] \Pi_\lambda \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.19)$$

¹⁾ Скобками $\langle \rangle$ мы будем обозначать, что матричный элемент берется относительно состояний удовлетворяющих уравнению Дирака; обозначения $\langle \rangle_0$ будут относиться к матричному элементу для nS -уровня водородного атома. — *Прим. авт.*

Проведем аналогичное рассмотрение для остальных слагающих выражения (2.9); поскольку эти члены обращаются при отсутствии внешнего поля в нуль, оказывается, как это и должно иметь место, возможным выделить все составляющие первого порядка без подсчета производных по λ . Таким образом, учитывая формулу

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu, e^{-i\varphi}] &= - \int_0^1 dv \frac{\partial}{\partial v} [\exp(-iv\varphi) \gamma_\mu \exp(-i(1-v)\varphi)] = \\ &= \int_0^1 dv \exp(-iv\varphi) [\gamma_\mu, -i\varphi] \exp(-i(1-v)\varphi), \quad (2.20) \end{aligned}$$

мы находим, что второй и третий члены выражения (2.9) имеют явный первый порядок. Первый из них равен

$$\begin{aligned} &\langle (1-u) \int d^4q [\pi_\lambda [e^{-i\varphi}, \gamma_\lambda]] \rangle = \\ &= \langle (1-u) \int d^4q \int_0^1 dv [\Pi_\lambda, \exp(-iv\varphi) 2se(\gamma F)_\lambda \exp(-i(1-v)\varphi)] \rangle = \\ &= \langle -2i\pi^2 u^2 (1-u) s^{-1} \int_0^1 dv \{ \Pi_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] e(\gamma F)_\lambda - e(\gamma F)_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda \} + \\ &+ (1-u) \int d\lambda \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda} [\Pi_\lambda, \exp(-iv\varphi(\lambda)) 2se(\gamma F)_\lambda \exp(-i(1-v)\varphi(\lambda))] \rangle. \quad (2.21) \end{aligned}$$

При выводе (2.21) мы применили формулу (4.2) статьи [1], разложение типа (2.11) и выполнили интегрирование по импульсам виртуальных фотонов, используя при этом в первом члене уравнение Дирака.

Ряд аналогичных операций приводит для третьего члена в (2.9) к выражению

$$\begin{aligned} &\langle -\frac{1}{4} \int d^4q \{ m + \gamma \Pi (1-u), [\gamma_\lambda [\gamma_\lambda, e^{-i\varphi}]] \} \rangle = \\ &= \langle -\frac{1}{2} u \int d^4q \int_0^1 dv [\gamma_\lambda, \exp(-iv\varphi)] is \left[\gamma_\lambda, e^{\frac{1}{2}\sigma F} \right] \exp(-i(1-v)\varphi) \rangle = \\ &= \langle 4\pi^2 m u^3 s^{-1} e^{\frac{1}{2}\sigma F} - \frac{1}{2} \pi^2 u^3 s^{-1} \int_0^1 dv \{ [\gamma_\lambda, \exp(-i\mathcal{H}\omega v)] \left[\gamma_\lambda, e^{\frac{1}{2}\sigma F} \right] \times \right. \\ &\times \exp(-i\mathcal{H}\omega(1-v)) + \exp(-i\mathcal{H}\omega v) \left[\gamma_\lambda, e^{\frac{1}{2}\sigma F} \right] [\gamma_\lambda, \exp(-i\mathcal{H}\omega(1-v))] \} - \\ &- \frac{1}{2} u \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dv \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda} [\gamma_\lambda, \exp(-iv\varphi(\lambda))] is \times \\ &\times \left. \left[\gamma_\lambda, e^{\frac{1}{2}\sigma F} \right] \exp(-i(1-v)\varphi(\lambda)) \right\rangle. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Второе слагаемое выражения (2.22), которое входит в часть оператора, определяемую при $\lambda=0$, имеет явный второй порядок по полю. Это слагаемое записано в исходном виде для того, чтобы показать, что его появление связано с некоммутуруемостью дираковских матриц.

Теперь остается оценить последний член (2.9). Используя равенство

$$\int d^4q \gamma q \exp(-i\varphi) = \int d^4q \int_0^1 dv \gamma_\lambda \exp(-iv\varphi) u \Pi_\lambda \exp(-i(1-v)\varphi), \quad (2.23)$$

доказательство которого аналогично доказательству (2.15), можно написать¹⁾

$$\begin{aligned} \int d^4q \{ \gamma(q - u\Pi), e^{-i\varphi} \} &= \int d^4q \left[\int_0^1 dv \{ \gamma_\lambda, \exp(-iv\varphi) u \Pi_\lambda \exp(-i(1-v)\varphi) \} - \right. \\ &\quad \left. - \{ \gamma \Pi u, e^{-i\varphi} \} \right] = \int d^4q \int_0^1 dv \{ [\gamma_\lambda, \exp(-iv\varphi)] u \Pi_\lambda \exp(-i(1-v)\varphi) - \\ &\quad - \exp(-i(1-v)\varphi) u \Pi_\lambda [\gamma_\lambda, \exp(-iv\varphi)] + [\exp(-iv\varphi), \gamma \Pi u] \times \\ &\quad \times \exp(-i(1-v)\varphi) - \exp(-i(1-v)\varphi) [\exp(-iv\varphi), \gamma \Pi u] \}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Первые два слагаемых из (2.24) лишь несущественно отличаются от оператора, определяемого формулой (2.21) и, как можно без труда проверить, имеют вид

$$\begin{aligned} &\left\langle 2i\pi^2 u^3 s^{-1} \int_0^1 dv (1-v) \{ e(\gamma F)_\lambda \exp(-i\mathcal{H}\omega v) \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \exp(-i\mathcal{H}\omega v) e(\gamma F)_\lambda \} + \right. \\ &\quad + \int_0^1 d\lambda \int d^4q \int_0^1 dv \int_0^v dz \frac{\partial}{\partial \lambda} \{ \exp[-i(v-z)\varphi(\lambda)] 2isu e(\gamma F)_\lambda \exp[-iz\varphi(\lambda)] \times \\ &\quad \times \Pi_\lambda \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] - \exp[-i(1-v)\varphi(\lambda)] \Pi_\lambda \times \\ &\quad \left. \times \exp[-iz\varphi(\lambda)] 2isue(\gamma F)_\lambda \exp[-i(v-z)\varphi(\lambda)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Наконец, остальные члены выражения (2.24) мы преобразуем последовательно следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left\langle \int d^4q \int_0^1 dv \{ (1-v) \exp(-iv\varphi) (2isu) [q\Pi, \gamma\Pi] \exp(-i(1-v)\varphi) - \right. \\ &\quad \left. - v \exp(-iv\varphi) (2isu) [q\Pi, \gamma\Pi] \exp(-i(1-v)\varphi) \} \right\rangle = \left\langle \int d^4q \int_0^1 dv \int_0^v dz 2isu^2 \times \right. \\ &\quad \times (1-2v) \{ \exp(-i(v-z)\varphi) \Pi_\lambda \exp(-iz\varphi) [\Pi_\lambda, \gamma\Pi] \exp(-i(1-v)\varphi) - \\ &\quad \left. - \exp(-i(1-v)\varphi) [\Pi_\lambda, \gamma\Pi] \exp(-iz\varphi) \Pi_\lambda \exp(-i(v-z)\varphi) \} \right\rangle = \\ &= \left\langle 2i\pi^2 u^4 s^{-1} \int_0^1 dv v(1-v) \{ \Pi_\lambda \exp(-i\mathcal{H}\omega v) e(\gamma F)_\lambda - e(\gamma F)_\lambda \exp(-i\mathcal{H}\omega v) \Pi_\lambda \} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 d\lambda \int d^4q \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^1 dv \int_0^v dz (2isu^2) (1-2v) \{ \} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

¹⁾ Отметим, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_\lambda \{ \gamma(q - \Pi u), e^{-i\varphi} \} \gamma_\lambda &= \{ \gamma(q - \Pi u), e^{-i\varphi} \} + \\ &+ \frac{1}{2} \gamma_\lambda \gamma(q - \Pi u) [e^{-i\varphi}, \gamma_\lambda] + \frac{1}{2} [\gamma_\lambda, e^{-i\varphi}] \gamma(q - \Pi u) \gamma_\lambda. \end{aligned}$$

Можно показать, что последние два слагаемых имеют по меньшей мере второй порядок, поскольку главный член их λ -разложения обращается в нуль после интегрирования по q . — Прим. авт.

В последнем случае скобки $\{ \}$ обозначают соответствующее выражение из предыдущего равенства, в котором только вместо φ подставлено $\varphi(\lambda)$. При получении (2.26) мы использовали соотношения, аналогичные (2.20) и (2.15), преобразовали для удобства параметры и выполнили интегрирование по q .

Объединим теперь результаты (2.9), (2.16), (2.17), (2.21), (2.22), (2.25) и (2.26). Если пренебречь всеми членами, о которых было указано, что они имеют по меньшей мере квадратичный порядок по полю, то мы получим для оператора массы (2.1) приближенное выражение

$$\begin{aligned} \langle M \rangle = & m_0 + \frac{\alpha m}{2\pi} \int_0^\infty s^{-1} ds \int_0^1 du (1+u) \exp[-ism^2u] - \left(\frac{iam}{4\pi}\right) \int_0^\infty ds \int_0^1 du 2u(1-u) \times \\ & \times \exp[-ism^2u] \left\langle e^{\frac{1}{2}\sigma F} \right\rangle + \frac{iam}{2\pi} \int_0^\infty ds \int_0^1 du 2u(1+u) \exp[-ism^2u] \int_0^1 dv (1-v) \times \\ & \times \langle \Pi_\lambda [\exp(-i\mathcal{H}\omega v) - 1] \Pi_\lambda \rangle + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty ds \int_0^1 du \exp[-ism^2u] \times \\ & \times \int_0^1 dv [(1-u) + u(1-v) - u^2v(1-v)] \langle e^{(\gamma F)_\lambda} \exp(-i\mathcal{H}\omega v) \Pi_\lambda - \\ & - \Pi_\lambda \exp(-i\mathcal{H}\omega v) e^{(\gamma F)_\lambda} \rangle. \quad (2.27) \end{aligned}$$

При используемых в этом разделе ограничениях (ограничение членами, имеющими явный первый порядок по полю и рассмотрение матричных элементов для состояний, удовлетворяющих уравнению Дирака во внешнем поле) предпоследнему слагаемому из (2.27) можно придать форму, подобную форме последнего слагаемого из этого же выражения. Выполним сначала интегрирование по частям по параметру собственного времени

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty i(m^2u)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} (\exp[-ism^2u]) [\exp(-i\mathcal{H}\omega v) - 1] ds = \\ & = -v(1-u)(m^2u)^{-1} \int_0^\infty ds \exp[-ism^2u] \mathcal{H} \exp[-i\mathcal{H}\omega v], \quad (2.28) \end{aligned}$$

так как вынесенный за знак интеграла член исчезает. Далее, отметим следующее преобразование:

$$\begin{aligned} & \langle \Pi_\lambda \mathcal{H} \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda \rangle = \langle \Pi_\lambda (m - \gamma \Pi) (m + \gamma \Pi) \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda \rangle = \\ & = \langle 2m \Pi_\lambda (m + \gamma \Pi) \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda - [\Pi_\lambda, \gamma \Pi] \exp[-i\mathcal{H}\omega v] (m + \gamma \Pi) \Pi_\lambda \rangle = \\ & = \langle -ime(\gamma F)_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda + im \Pi_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] e^{(\gamma F)_\lambda} - \\ & - e^2(\gamma F)_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] (\gamma F)_\lambda \rangle. \quad (2.29) \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемым (2.29), имеющим явный второй порядок, мы после выполнения элементарных интегрирований в спиновом члене получаем, что оператор массы может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \langle M \rangle = & m - \frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{2m} \left\langle \frac{1}{2} \sigma F \right\rangle + \\ & + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty ds \int_0^1 du \exp[-ism^2u] \int_0^1 dv [1 - 2v(1-v) - uv + u^2v(1-v)] \times \\ & \times \langle e^{(\gamma F)_\lambda} \exp[-i\mathcal{H}\omega v] \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \exp[-i\mathcal{H}\omega v] e^{(\gamma F)_\lambda} \rangle. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Здесь m означает уже перенормированную массу, второе слагаемое соответствует известному изменению магнитного момента, а последнее содержит, как будет показано, правильное выражение члена зарядного взаимодействия.

Последнее утверждение может быть доказано несколькими способами. Предварительно отметим, что, если отбросить оператор $\exp(-i\mathcal{E}\mathcal{L}wv)$, то зависящий от поля множитель примет вид

$$e(\gamma F)_\lambda \Pi_\lambda - \Pi_\lambda e(\gamma F)_\lambda = ie\gamma_\lambda J_\lambda, \quad (2.31)$$

где J_λ — ток, соответствующий внешнему полю. В этом случае остающиеся интегрирования могут быть выполнены тривиальным образом. Однако получающееся выражение

$$\frac{\alpha}{3\pi m^2} e\gamma J \left[\int_0^1 \frac{du}{u} - \frac{5}{8} \right] \quad (2.32)$$

оказывается неудовлетворительным. Оно содержит логарифмическую расходимость на нижнем пределе $u = 0$, связанную с „инфракрасной катастрофой“. Выражение (2.32) представляет собой как раз тот результат, который получился бы в случае использования прямого разложения по степеням поля при ограничении низшим порядком, подобно тому как это делалось в статье [1]. С другой стороны, наши усилия направлены по существу на то, чтобы найти экспоненциальный оператор, который позволил бы получить правильное описание атомной структуры. В связи с этим достаточно специально рассмотреть лишь слагаемое, содержащее множителем $[1 - 2v(1 - v)]$, поскольку только оно расходится на инфракрасном пределе. Выполним интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \int_0^1 du \exp[-is(m^2u - \mathcal{E}v(1 - u))] &= \int_0^1 du \exp[-is\mathcal{E}v(1 - u)] \times \\ &\times (-ism^2)^{-1} \frac{\partial}{\partial u} \exp[-ism^2u] = (-ism^2)^{-1} [\exp(-ism^2) - \exp(-is\mathcal{E}v)] + \\ &+ \int_0^1 du \mathcal{E}vm^{-2} \exp[-is(m^2u + \mathcal{E}v(1 - u))]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Второй член выражения (2.33) приводит к составляющей второго порядка в силу

$$\langle (\gamma F)_\lambda \exp[-i\mathcal{E}wv] \mathcal{E} \Pi_\lambda \rangle = \langle (\gamma F)_\lambda \exp[-i\mathcal{E}wv] [\mathcal{E}, \Pi_\lambda] \rangle. \quad (2.34)$$

Искомый оператор примет, таким образом, вид

$$\begin{aligned} \frac{i\alpha}{2\pi m^2} \int_0^1 dv(1 - 2v(1 - v)) \int_0^\infty s^{-1} ds \langle (\gamma F)_\lambda [\exp(-ism^2) - \exp(-is\mathcal{E}v)] \Pi_\lambda - \\ - \Pi_\lambda [\exp(-ism^2) - \exp(-is\mathcal{E}v)] e(\gamma F)_\lambda \rangle = -\frac{i\alpha}{2\pi m^2} \int_0^1 dv(1 - 2v(1 - v)) \times \\ \times \langle (\gamma F)_\lambda \ln \frac{m^2}{\mathcal{E}v} \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \ln \frac{m^2}{\mathcal{E}v} e(\gamma F)_\lambda \rangle = \frac{\alpha}{3\pi m^2} \langle e\gamma J \left[\ln \frac{m}{2k_0(n_0, l)} + \frac{13}{12} \right] \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

если сделать подстановку

$$\langle e(\gamma F)_\lambda \ln \frac{m^2}{\mathcal{E}} \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \ln \frac{m^2}{\mathcal{E}} e(\gamma F)_\lambda \rangle \rightarrow \langle ie\gamma J \ln \left[\frac{m}{2k_0(n_0, l)} \right] \rangle, \quad (2.36)$$

где $k_0(n_0, l)$ представляет энергию возбуждения как функцию от главного и азимутального квантовых чисел, определенную и вычисленную Бете [9]. Обоснование этой подстановки дано в приложении. Следует отметить, что матричный элемент γJ нужно подсчитывать для состояния $(n_0, 0)$.

Составляющая первого порядка матричного элемента может быть теперь выражена через эффективный оператор

$$\int \bar{\psi}_0(x') \bar{M}_1(x', x'') \psi_0(x'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' dt'' = \\ = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{e}{2m} \left\langle \frac{1}{2} \sigma F \right\rangle_0 + \frac{\alpha}{3\pi m^2} \langle e\gamma J \rangle_0 \left[\ln \left(\frac{m}{2k_0(n_0, l)} \right) + \frac{11}{24} \right]. \quad (2.37)$$

В случае S -состояния выражение (2.37) дает известный результат для сдвига уровня энергии, если добавить в член зарядного взаимодействия слагаемое $(-1/5)$, входящее из-за поляризации вакуума. При завершении подсчета следует учесть, что оператор в (2.37) является диагональным в координатном пространстве. Интегрирование по координатам, отмеченным двумя штрихами, выполняется затем тривиальным образом и из выражения исключается время, входящее через посредство функций стационарного состояния

$$\psi_0(x) = \psi_0(\mathbf{r}) e^{-iE_0 t}. \quad (2.38)$$

Далее, имеем

$$e\gamma J(x) = 4\pi Z\alpha\gamma_0 \delta(\mathbf{r}) \quad (2.39)$$

и

$$e \frac{1}{2} \sigma F = e\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{e}{2m} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi}{m} Z\alpha \delta(\mathbf{r}) \quad (2.40)$$

для сферически симметричного состояния после сведения ψ к большим и малым компонентам. Получающийся сдвиг уровня энергии, включающий член, обусловленный поляризацией вакуума, равен [9]

$$\Delta E(n_0, 0) = \frac{4}{3} \frac{Z\alpha^2}{m^2} |\varphi_0(0)|^2 \left[\ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right] = \\ = \frac{8Z^4}{n_0^3} \frac{\alpha^3}{3\pi} \text{Ry} \left[\ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right]. \quad (2.41)$$

Для состояния с $l \neq 0$, в случае которого входят только член спин-орбитального взаимодействия, получающийся из спиновых слагающих, и член с логарифмом, аналогичным образом находим [9]

$$\Delta E(n_0, l) = \frac{8Z^4}{n_0^3} \frac{\alpha^3}{3\pi} \text{Ry} \left[\ln \frac{\text{Ry}}{k_0(n_0, l)} + \frac{3}{8} \frac{C_{lj}}{2l+1} \right], \quad (2.42)$$

где

$$C_{lj} = \frac{1}{l+1} \quad \text{для} \quad j = l + \frac{1}{2}, \quad (2.43a)$$

$$C_{lj} = -\frac{1}{l} \quad \text{для} \quad j = l - \frac{1}{2}. \quad (2.43b)$$

Смысл рассмотрения настоящего раздела может быть, повидимому, лучше всего разъяснен посредством следующего замечания; можно сказать, что вместо того, чтобы разлагать зависящий от поля экспоненциальный оператор вблизи его значения для свободной частицы

$$i \int_0^\infty ds \int_0^1 \exp[-ism^2 u] = \frac{1}{m^2} \int_0^1 \frac{du}{u} \quad (2.44)$$

[см. (2.27) и (2.32)], мы „разложили“ этот оператор вблизи зависящей от поля величины

$$i \int_0^\infty ds \int_0^1 du \exp[-is(m^2 u + \mathcal{E}(1-u)v)] = \int_0^1 du \frac{1}{m^2 u + \mathcal{E}(1-u)v} \quad (2.45)$$

[см. (2.33)]. Тем самым мы сохранили естественный нижний предел частот виртуальных квантов, определяемый структурой атома. Наш метод достаточно гибкий в том смысле, что позволяет всюду, где можно считать вычтенными все нерелятивистские эффекты, разложить на каждом этапе остающуюся часть оператора в степенные ряды. Метод, ведущий к более полным вычислениям, основанный на изложенных соображениях, приводится в следующем разделе.

3. Разложение оператора массы

Разложение в степенной ряд и перенормировку массы можно просто выполнить с помощью описанного выше λ -процесса. Подобный способ особенно удобен для отделения релятивистских эффектов, вызываемый которыми сдвиг уровней не зависит от деталей строения атома. Соответствующие члены обычно определяются степенными рядами. В отличие от этого зависящие от структуры атома поправки, связанные с виртуальными квантами малой энергии, не могут рассматриваться с помощью разложения по слабому полю. Для их получения приходится, следовательно, применить описанный выше метод. Нужно отметить, что указанное разделение никоим образом не является однозначным. Сделанный здесь выбор основывается только на соображениях удобства и связи с вычислениями, выполненными в статье [1].

Рассмотрим оператор

$$\mathfrak{F}(\lambda^2, n) = -ie^2 \int 2\pi^{-4} d^4q \int_0^\infty s ds u^{-2} \exp[-ism^2u] \frac{1}{2} \gamma_\mu \{m - \gamma\Pi(1-u) + \lambda\gamma(q - \lambda\Pi u), \exp[-i\varphi(\lambda)]\} \gamma_\mu. \quad (3.1)$$

Здесь значение интеграла по u равно, очевидно, при $\lambda=1$ электромагнитной добавке к массе электрона. Для отделения изменения массы покоя от эффектов, зависящих от поля, разделим оператор на две части

$$\mathfrak{F}(\lambda^2, u) = \mathfrak{F}_A(\lambda^2, n) + \mathfrak{F}_B(\lambda^2, u), \quad (3.2)$$

получающиеся естественным образом при исключении дираковских матриц γ_μ из (3.1):

$$\mathfrak{F}_A(\lambda^2, u) = ie^2 \int (2\pi)^{-4} d^4q \int_0^\infty s ds u^{-2} \exp[-ism^2u] \times \\ \times \{2m + \gamma\Pi(1-u), \exp(-i\varphi(\lambda))\}, \quad (3.3a)$$

$$\mathfrak{F}_B(\lambda^2, u) = -ie^2 \int (2\pi)^{-4} d^4q \int_0^\infty s ds u^{-2} \exp[-ism^2u] \times \\ \times \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu \{ \lambda\gamma(q - \lambda\Pi u), \exp(-i\varphi(\lambda)) \} \gamma_\mu + \frac{1}{4} (m + \gamma\Pi(1-u)) \times \right. \\ \left. \times [\gamma_\mu, \exp[-i\varphi(\lambda)] \gamma_\mu] \right) + (1-u) [\Pi_\mu \exp[-i\varphi(\lambda)], \gamma_\mu]. \quad (3.3b)$$

Для первой части получается особенно простое выражение при $\lambda=0$. Интегрирование по импульсам виртуальных фотонов может быть тогда выполнено, причем в результате получается

$$\int_0^1 du \mathfrak{F}_A(0, u) = M_0(\gamma\Pi),$$

т. е. перенормировка массы, обсуждавшаяся ранее в связи с формулой (2.7). Физически существенные составляющие оператора массы, таким образом, содержатся в выражении

$$\bar{M} = \int_0^1 du [\mathfrak{F}(1, u) - \mathfrak{F}_A(0, u)] = \int_0^1 du \left[\mathfrak{F}_B(1, u) + \int_0^1 d\lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial \lambda^2} \right) \mathfrak{F}_A(\lambda^2, u) \right]. \quad (3.5)$$

Выкладки, выполненные в разделе 2, показывают, что эффекты первого порядка, связанные с мягкими виртуальными квантами, полностью включаются в выражение [см. (2.19) и (2.21)]

$$\bar{M}_0 = \int_0^1 du [\mathfrak{F}_B(0, u) + \mathfrak{F}'_A(0, u)] \quad \left(\mathfrak{F}' = \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \mathfrak{F} \right). \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что подстановка

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + \bar{M}', \quad (3.7)$$

$$\bar{M}' = \int_0^1 du \int_0^1 d\lambda^2 [\mathfrak{F}'_B(\lambda^2, u) + (1 - \lambda^2) \mathfrak{F}''_A(\lambda^2, u)] \quad (3.8)$$

отделяет составляющую, для которой разложение в степенной ряд является наверняка непригодным, от составляющей, которую можно пытаться рассматривать с помощью подобного разложения. Обе составляющие нужно определить с требуемой степенью точности; в первом случае будут применены методы раздела 2; вторая же составляющая будет получена в виде степенных рядов. Правильность такого рассмотрения требует особого доказательства.

Калибровочное преобразование (см. примечание на стр. 306)

$$\Pi_\mu \rightarrow \Pi_\mu + \frac{\lambda}{\Lambda} q_\mu \quad (3.9)$$

с

$$\Lambda = 1 - u + \lambda^2 u \quad (3.10)$$

позволяет выразить координатный матричный элемент от $\mathfrak{F}(\lambda^2, u)$ в виде произведения эффективной фотонной функции Грина на эффективную электронную функцию Грина, взятых в представлении собственного времени:

$$\begin{aligned} (x' | \mathfrak{F}(\lambda^2, u) | x'') &= -ie^2 \int_0^\infty s ds \exp[-im^2 s] \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right)^4 u^{-2} (-i) (4\pi t')^{-2} \times \\ &\times \exp \left[\frac{i(\Delta x)^2}{4t'} \right] \left(x' \left| \frac{1}{2} \gamma_\mu \{ m - \Delta \gamma \Pi, \exp[is'(\gamma \Pi)^2] \} \gamma_\mu \right| x'' \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

В указанных двух функциях в качестве параметра собственного времени выступают величины

$$t' = \frac{\Lambda \omega}{\lambda^2 u}, \quad s' = \Delta s. \quad (3.12)$$

Хотя приведенное выражение не имеет физического смысла для значений λ , не равных единице, оно все же является полезным, так как зависимость от электромагнитного поля теперь полностью входит в операторы, разложения которых по слабому полю приведены в работе [1]. Действительно, матричный элемент (3.11) получается непосредственно из (3.29) статьи [1], если отбросить там члены, зависящие от собственного времени ω , заменить всюду в больших скобках s на s' и умножить все члены, связанные с операторами импульса, на множитель Λ .

В результате получается выражение

$$\begin{aligned}
 (x' | \mathfrak{F}(\lambda^2, u) | x'') = & -ix(4\pi)^{-3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2s] \Phi(x', x'') \omega^{-2} \times \\
 & \times \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4w} \right] \left(\left[4m + \gamma \frac{\Delta x}{s} \right] [1 + A(s') + C(s')] + 2\Delta\gamma_\mu [A_{+\mu}(s') + C_{+\mu}(s')] - \right. \\
 & - \left\{ \Delta\gamma B_+(s') + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) B(s'), \frac{1}{2} \sigma F \right\} + \left[\Delta\gamma B_-(s'), \frac{1}{2} \sigma F \right] - \\
 & - \left\{ \Delta\gamma D_+^1(s') + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) D^1(s'), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right\} + \left[\Delta\gamma D_-^1(s'), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] - \\
 & - \left\{ \Delta\gamma D_+^2(s') + \gamma \Delta x(2s) D^2(s'), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right\} + \left[\Delta\gamma D_-^2(s'), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] + \\
 & + i \left\{ \Delta\gamma G_+(s') + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) G(s'), \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right\} - i \left[\Delta\gamma G_-(s'), \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right] - \\
 & - 4m G(s') \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} + 2\Delta\gamma G_-(s') \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} \Big). \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Здесь через \mathfrak{F} обозначено разложение в степенной ряд оператора \mathfrak{F} с точностью до членов второго порядка. Разложение в степенной ряд для $\mathfrak{F}_A(\lambda^2, u)$ получается аналогичным образом. Подстановка (3.9) в выражение (3.3а) позволяет легко выполнить интегрирование по q , что дает

$$\begin{aligned}
 (x' | \mathfrak{F}_A(\lambda^2, u) | x'') = & ie^2 \int_0^\infty s ds \exp[-ism^2] \left(\frac{\Lambda}{\lambda} \right)^4 (-i)(4\pi t')^{-2} \times \\
 & \times \exp \left[i \frac{\Delta x^2}{4t'} \right] \left(x' \left| \left\{ 2m + \gamma \Pi(1-u) + \left(\lambda^2 u \gamma \frac{\Delta x}{2s'} \right), \exp[is'(\gamma \Pi)^2] \right\} \right| x'' \right). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Разложение данной величины в ряд может быть получено из (3.14) и (3.19) статьи [1]:

$$\begin{aligned}
 (x' | \mathfrak{F}_A(\lambda^2, u) | x'') = & -ix(4\pi)^{-3} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2s] \Phi(x', x'') \omega^{-2} \times \\
 & \times \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4w} \right] \left(\left[4m + \gamma \frac{\Delta x}{s} \right] [1 + A(s') + C(s')] + 2(1-u) \gamma_\mu \times \right. \\
 & \times [A_{+\mu}(s') + C_{+\mu}(s')] + \left[(1-u) \gamma B_-(s'), \frac{1}{2} \sigma F \right] + \left\{ (1-u) \gamma B_+(s') + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) \times \right. \\
 & \times B(s'), \frac{1}{2} \sigma F \Big\} + \left[(1-u) \gamma D_-^1(s'), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] + \left\{ (1-u) \gamma D_+^1(s') + \right. \\
 & + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) D^1(s'), \frac{1}{2} \sigma F^2 \Big\} + \left[(1-u) \gamma D_-^2(s'), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] + \left\{ (1-u) \gamma D_+^2(s') + \right. \\
 & + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) D^2(s'), \frac{1}{2} \sigma F^1 \Big\} - i \left[(1-u) \gamma G_-(s') \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right] - i \left\{ (1-u) \gamma G_+(s') + \right. \\
 & + \left(\gamma \frac{\Delta x}{2s} \right) G(s'), \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \Big\} + 4m \left[B(s') \frac{1}{2} \sigma F + D^1(s') \frac{1}{2} \sigma F^2 + D^2(s') \frac{1}{2} \sigma F^1 + \right. \\
 & \left. + G(s') \left(\gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} - i \text{tr}(F^1 \sigma F^2) \right) \right] - 2(1-u) \gamma G_-(s') \gamma_5 \frac{1}{2} F^1 F^{2*} \Big). \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Степенной ряд для матричного элемента $\mathfrak{F}_B(\lambda^2, u)$ получается проще всего вычитанием (3.15) из (3.13).

Отметим, что приведенные степенные разложения функций $\mathfrak{F}(\lambda^2, u)$ и $\mathfrak{F}_A(\lambda^2, u)$ не содержат явно λ^2 и зависят от λ^2 только через Δ .

4. Определение M'

Вычислим теперь матричные элементы для степенных рядов операторов \mathfrak{F} , \mathfrak{F}_A и \mathfrak{F}_B в случае S -состояния водородоподобного атома. Указанное вычисление проводится точно таким же образом как и вычисление в разделах 4 и 5 статьи [1]. Единственное отличие заключается в том, что теперь внешнее поле состоит только из одного электрического поля ядра. Используя преобразование (4.1) статьи [1] в случае \mathfrak{F} и \mathfrak{F}_A , получаем для членов, линейных по полю, выражения

$$\begin{aligned} \langle x' | \mathfrak{F}_1(\lambda^2, u) | x'' \rangle = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2su] \int (2\pi)^{-4} d^4p e^{ip \Delta x} \times \\ & \times \exp[-i\omega(p^2 + m^2)] ie \int d^4\bar{k} \left\{ \left(2m^2\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) + i \frac{\omega}{s} \right) (e(s') - 1) \gamma \frac{J}{k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \Lambda (s' + \omega - \omega^2 (s' - \omega)) e(s') \gamma J - m\omega \left(\left(2 - \frac{\omega}{s} \right) (e(s') - 1) - \Lambda e(s') \right) \frac{1}{2} \sigma F \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

и

$$\begin{aligned} \langle x' | \mathfrak{F}_{A1}(\lambda^2, u) | x'' \rangle = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2su] \int (2\pi)^{-4} d^4p e^{ip \Delta x} \times \\ & \times \exp[-i\omega(p^2 + m^2)] ie \int d^4\bar{k} \left\{ \left(2m^2\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) + i \frac{\omega}{s} \right) (e(s') - 1) \gamma \frac{J}{k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (1 - u) \omega^2 (s' - \omega) e(s') \gamma J + m \left((2s' - \omega) e(s') - \omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) (e(s') - 1) \right) \frac{1}{2} \sigma F \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \langle x' | \mathfrak{F}_{B1}(\lambda^2, u) | x'' \rangle = & \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2su] \int (2\pi)^{-4} d^4p e^{ip \Delta x} \times \\ & \times \exp[-i\omega(p^2 + m^2)] ie \int d^4\bar{k} \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda (s' + \omega) - \right. \\ & \left. - \lambda^2 u \omega^2 (s' - \omega)) e(s') \gamma J - 2m\Lambda (s - \omega) e(s') \frac{1}{2} \sigma F \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Кроме того, в \mathfrak{F} входят имеющие явный второй порядок члены C , D и G , являющиеся аналогами (4.5) статьи [1], а \mathfrak{F} и \mathfrak{F}_A содержат еще член

$$\langle x' | \mathfrak{F}_0(u) | x'' \rangle = -i\alpha (4\pi)^{-2} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \omega^{-2} \exp \left[i \frac{(\Delta x)^2}{4\omega} \right] \Phi(x', x'') \left(4m + \gamma \frac{\Delta x}{s} \right), \quad (4.4)$$

не зависящий от λ .

Входящие в матричные элементы волновые функции в кулоновском поле могут быть приближенно приравнены волновым функциям Паули; точное представление для волновых функций следует брать только вблизи положения ядра (см. (4.12), (4.2) и (5.1) статьи [1]). После этого операторы, входящие в \mathfrak{F} , либо дают нуль, либо переходят в следующие выражения (ср. (5.2) и (5.4)

статьи [1], а также соображения, приведенные в связи с (5,5) статьи [1]):

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e\gamma J \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow 2Z\alpha |\varphi_0(0)|^2 (1 - 2Z\alpha r'm); \quad (4.5a)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') \frac{1}{2} e\sigma F \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow 2Z\alpha |\varphi_0(0)|^2 (1 - 2Z\alpha r'm) \left(-\frac{1}{2}\right); \quad (4.5б)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (\gamma F^1 \Delta x) (\Delta x J^2) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 2im\omega^2 \Delta v; \quad (4.5в)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') \frac{1}{2} e^2 \left[\gamma F^1 \Delta x, \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow -(2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 i\omega \frac{m}{k_3^2}; \quad (4.5г)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (A^1 \Delta x) (\gamma J^2) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 2\omega \frac{m}{k_3^2}; \quad (4.5д)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (\Delta x J^1) (\Delta x J^2) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 (4m^2\omega^2 - 2i\omega); \quad (4.5е)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (\gamma \Delta x) (\Delta x J^1) (\Delta x J^2) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 (-8\omega^3 m^3 + 12i\omega^2 m); \quad (4.5ж)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 \{1; \gamma \Delta x\} J^1 J^2 \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 \{-1; 2\omega m\}; \quad (4.5з)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 \{1; \gamma \Delta x\} [k_2 \Delta x (1 + v_2) - k_1 \Delta x (1 - v_1)] J^1 J^2 \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \\ \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 k^2 \omega \Delta v (2 - \Delta v) \{1; -2\omega m\}; \end{aligned} \quad (4.5и)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 \{1; \gamma \Delta x\} (iJ^1 F^1 \Delta x (1 - v_1) - iJ^1 F^2 \Delta x (1 + v_2)) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \\ \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 \omega \Delta v (2 - \Delta v) \{1; -2\omega m\}; \end{aligned} \quad (4.5к)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 \{1; \gamma \Delta x\} \frac{1}{2} F^1 F^2 \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 \frac{\{-1; 2\omega m\}}{k_1^2}; \quad (4.5л)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^3 [v_1 (\gamma F^1 \Delta x) (\Delta x J^2) + v_2 (\gamma F^2 \Delta x) (\Delta x J^1)] \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 2i\omega^2 m (\Delta v)^2; \quad (4.5м)$$

$$\bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (\gamma J^1) (\Delta x J^2) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \bar{\psi}_0(\mathbf{r}') e^2 (\gamma J^2) (\Delta x J^1) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow (2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 2m\omega; \quad (4.5н)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_0(\mathbf{r}') \left(\left[\gamma D_-^1(s'), \frac{1}{2} \sigma F^2 \right] + \left[\gamma D_-^2(s'), \frac{1}{2} \sigma F^1 \right] \right) \psi_0(\mathbf{r}'') \rightarrow \\ \rightarrow -(2Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 i^2 [e_1(s') + e_2(s')] 2m\omega s'. \end{aligned} \quad (4.5о)$$

Здесь в формулах (4.5а) и (4.5б) приведены операторы, входящие в \mathfrak{D}_1 ; формулы (4.5в) — (4.5д) связаны с (4.5) статьи [1]; формулы (4.5е) — (4.5л) относятся к члену второго порядка $C(s')$, формулы (4.5м) и (4.5н) связаны с членом второго порядка $C_{+\mu}(s')$; наконец, формула (4.5о) дополнительных разъяснений не требует. Интересно отметить, что совокупность членов, рассмотренная здесь в связи со сдвигом уровней, и совокупность членов, входящих в тонкую структуру, не перекрываются друг с другом. Это обстоятельство является следствием ортогональности двух векторных потенциалов.

После указанных подстановок матричный элемент оператора $\mathfrak{F}(\lambda^2, u)$ для S -состояния примет вид

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(\lambda^2, u) \rangle_0 &= \langle \mathfrak{F}_0(u) \rangle_0 + 2Z\alpha^2 |\varphi_0(0)|^2 \int_0^\infty \frac{ds}{s} \exp[-im^2su] \left\{ i \times \right. \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta \int (2\pi)^{-3} d\mathbf{k} d\mathbf{r}' \exp\left[-i\omega \frac{1}{4} k^2 (1 - \vartheta^2)\right] (1 - 2Z\alpha r' m) \left[\left(2m^2\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{i\omega}{s} \right) \frac{(e(s') - 1)}{k^2} + \frac{1}{2} \Lambda (s' + \omega - \vartheta^2 (s' - \omega)) e(s') + \frac{1}{2} \omega \left(\left(2 - \frac{\omega}{s} \right) (e(s') - 1) - \Lambda e(s') \right) \left. \right] + \\ &+ 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_2 i^2 \int (2\pi)^{-2} d\mathbf{k}_1 \exp\left[-i\omega \frac{1}{4} k_1^2 (\Delta\vartheta)^2\right] \left[2m\vartheta \left(2m^2\omega \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) - \right. \right. \\ &- \left. \left. i \left(2 - 3 \frac{\omega}{s} \right) \right) \frac{(E(s') - 1)}{k_1^4} + \frac{1}{2} m \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) s' (\omega \Delta\vartheta (2 - \Delta\vartheta) - s' \Delta\vartheta (3 - \Delta\vartheta)) \times \right. \\ &\times \left. \frac{E(s')}{k_1^2} + \Lambda m\omega (\omega (\Delta\vartheta)^2 + s' \Delta\vartheta (1 - \Delta\vartheta)) \frac{E(s')}{k_1^2} \right] + 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta_2 i^2 \times \\ &\times \int (2\pi)^{-2} d\mathbf{k}_2 \exp\left[-i\omega \frac{1}{4} k_2^2 (\Delta\vartheta)^2\right] \left[4im\omega \left(1 - \frac{\omega}{s} \right) \times \right. \\ &\times \left. \frac{(e^2(s') - 1)}{k_2^4} - m\omega^2 \left(\frac{\omega}{s} (\Delta\vartheta)^2 - \left(2 - \frac{\omega}{s} \right) \vartheta_1 \Delta\vartheta \right) \frac{(e^2(s') - 1)}{k_2^2} \right] \left. \right\}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Оставшиеся в последнем выражении интегралы по координатам и импульсам имеют вид (4.23) и (5.8) статьи [1], а также

$$\int (2\pi)^{-3} d\mathbf{r}' d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left(\exp\left[-is \frac{1}{4} k^2 \eta_j\right] - 1 \right) \frac{r_1}{k^2} = -\frac{1}{3} (is\eta_j)^{3/2} \pi^{-1/2} \quad (4.7a)$$

и

$$\int (2\pi)^{-2} d\mathbf{k} \frac{\left(\exp\left[-isk^2 \frac{1}{4} \eta_j\right] - 1 \right)}{k^4} = -\frac{1}{2} \left(\frac{i\eta_j}{\pi} \right)^{3/2}. \quad (4.7b)$$

Величины η_j принимают следующие значения:

$$\eta_{11} = 2(1 - \vartheta) \left[1 - u \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (1 + \vartheta) \right) \right]; \quad \bar{\eta}_{11} = (1 - \vartheta^2) (1 - u), \quad (4.8a)$$

$$\eta_{12} = 2\Delta\vartheta \left[1 - u \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 (2 - \Delta\vartheta) \right) \right]; \quad \bar{\eta}_{12} = (\Delta\vartheta)^2 (1 - u), \quad (4.8b)$$

$$\eta_{13} = 1 - \vartheta_2^2 + (\Delta\vartheta)^2 - u [(1 - \vartheta_2^2) (1 - \lambda^2) + (\Delta\vartheta)^2]; \quad \bar{\eta}_{13} = (\Delta\vartheta)^2 (1 - u). \quad (4.8b)$$

После интегрирования по собственному времени окончательно получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}(\lambda^2, u) \rangle_0 &= \langle \mathfrak{F}_0(u) \rangle_0 + \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \times \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d\vartheta \left[-\frac{1}{4} \Lambda (1 - \vartheta^2) u^{-2} \times \right. \right. \\ &\times \left(2(1 - u^2) - u(1 - u) \right) + \Lambda u^{-1} \left(1 - u + \frac{1}{2} \lambda^2 u (1 - \vartheta^2) \right) - \frac{1}{2} u^{-1} (1 - u) \Lambda + \\ &+ 2Z\alpha \left(u^{-3/2} (\eta_{11}^{3/2} - \bar{\eta}_{11}^{3/2}) \left(\frac{1}{2} (1 - u^2) - \frac{1}{6} u(1 - u) \right) - \right. \\ &- \left. u^{-3/2} \Delta \eta_{11}^{3/2} \left(1 - u + \frac{1}{2} u \lambda^2 (1 - \vartheta^2) \right) + \frac{1}{2} u^{-3/2} \left(\Delta \eta_{11}^{3/2} (1 - u) - (\eta_{11}^{3/2} - \bar{\eta}_{11}^{3/2}) (1 - u^2) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \left[-3(1-u)u^{-3/2}(\eta_2^{1/2} - \bar{\eta}_2^{1/2}) \left(\frac{1}{2}(1-u^2) - \frac{1}{6}u(1-3u) \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \Delta u^{-3/2} \eta_2^{-1/2} \left(\frac{1}{2}(1-u^2) \Delta v (2 - \Delta v) - \frac{1}{2}(1+u) \times \Lambda \Delta v (3 - \Delta v) + \right. \\
 &+ \left. \left. (1-u)^2 (\Delta v)^2 + (1-u) \Lambda \Delta v (1 - \Delta v) \right) \right] + 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_2 \times \\
 &\times \left[u^{-1/2} (\eta_3^{1/2} - \bar{\eta}_3^{1/2}) (1-u) - \frac{1}{2} u^{-3/2} (\eta_3^{-1/2} - \bar{\eta}_3^{-1/2}) \times \right. \\
 &\quad \left. \times (1-u)^2 \left((1-u) (\Delta v)^2 - (1+u) v_1 \Delta v \right) \right] \}. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаются выражения для $\mathfrak{F}_A(\lambda^2, u)$ и $\mathfrak{F}_B(\lambda^2, u)$:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{F}_A(\lambda^2, u) \rangle_0 &= \langle \mathfrak{F}_0(u) \rangle_0 + \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \times \\
 &\times \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \left[-\frac{1}{4} \Delta (1-v^2) u^{-2} (2(1-u^2) - u(1-u)) - \frac{1}{2} \lambda^2 v^2 (1-u) - \right. \right. \\
 &- \frac{1}{2} u^{-1} \Lambda (1+u) + 2Z\alpha \left(u^{-3/2} (\eta_1^{3/2} - \bar{\eta}_1^{3/2}) \left(\frac{1}{2}(1-u^2) - \frac{1}{6}u(1-u) \right) + \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{1}{2} u^{-1/2} \lambda^2 \eta_1^{1/2} v^2 (1-u) + \frac{1}{2} u^{-3/2} \left\{ \Lambda \eta_1^{1/2} (1+u) - (\eta_1^{1/2} - \bar{\eta}_1^{1/2}) (1-u^2) \right\} \right) \right] + \\
 &+ 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \left[-3u^{-3/2} (1-u) \times (\eta_2^{1/2} - \bar{\eta}_2^{1/2}) \left(\frac{1}{2}(1-u^2) - \frac{1}{6}u(1-3u) \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} u^{-3/2} \eta_2^{-1/2} (1-u) \left(\frac{1}{2}(1+u) \Lambda \Delta v (2 - \Delta v) - \frac{1}{2} \Lambda^2 \Delta v (3 - \Delta v) + \right. \\
 &+ \left. \left. (1-u)^2 (\Delta v)^2 + \Lambda (1-u) \Delta v (1 - \Delta v) \right) \right] + 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_2 \times \\
 &\times \left[u^{-1/2} (\eta_3^{1/2} - \bar{\eta}_3^{1/2}) (1-u) - \frac{1}{2} u^{-3/2} (\eta_3^{-1/2} - \bar{\eta}_3^{-1/2}) (1-u)^2 \times \right. \\
 &\quad \left. \times ((1-u) (\Delta v)^2 - (1+u) v_1 \Delta v) \right] \}. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 \langle \mathfrak{F}_B(\lambda^2, u) \rangle_0 &= \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv \left[\frac{1}{2} u^{-1} (\Lambda (\Delta + 1 - u) - \lambda^4 u^2 v^2) + \right. \right. \\
 &+ \left. \Lambda - 2Z\alpha \left(\frac{1}{2} u^{-3/2} \eta_1^{1/2} (\Lambda (\Delta + 1 - u) - \lambda^4 u^2 v^2) + u^{-1/2} \eta_1^{1/2} \Lambda \right) \right] + \\
 &+ 2Z\alpha \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dv_1 \int_{-1}^{v_1} \frac{1}{2} dv_2 \left[\frac{1}{2} u^{-1/2} \eta_2^{-1/2} \lambda^2 (1-u) \times \right. \\
 &\quad \left. \times ((1-u) (\Delta v)^2 + \Lambda (\Delta v) (1 - \Delta v)) \right] \}. \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Исследование этих функций показывает, что они обладают особенностями при $u=0$. Слагаемые \mathfrak{F}_A первого порядка ведут себя как u^{-2} , слагаемые второго порядка — как $u^{-3/2}$; особенности в \mathfrak{F}_B на одну степень ниже. Однако из вида зависимости Λ и η_j от λ^2 следует, что дифференцирование по этой переменной будет приводить к уменьшению расходимости на одну степень. Отсюда следует, что вторая производная от \mathfrak{F}_A и первая производная от \mathfrak{F}_B будут представлять

собой конечные интегралы по переменной u . Матричный элемент оператора, определяемого (3.8), может быть, следовательно, приближенно представлен в виде степенного ряда; соответствующие величины могут быть без труда выведены из выражений (4.10) и (4.11). В результате получается

$$\langle \bar{M}' \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ \frac{17}{12} + \pi Z\alpha \left[-2 + \left(\frac{38}{105} \right) + \frac{11}{64} - \ln 2 \right] \right\}. \quad (4.12)$$

Как будет видно из результатов следующего раздела, интегрирование по λ^2 в выражении (3.8) полезно провести до выполнения остальных операций. В этом случае можно записать

$$\langle \bar{M}' \rangle_0 = \int_0^1 du \langle (\mathfrak{F}(1, u) - \mathfrak{F}_A(0, u)) - \mathfrak{F}_B(0, u) - \mathfrak{F}'_A(0, u) \rangle_0, \quad (4.13)$$

где правая сторона попрежнему, конечно, разлагается по степеням внешнего поля. Хотя интегралы от отдельных слагаемых в (4.11) оказываются расходящимися и их, строго говоря, не имеет смысла рассматривать отдельно, мы все же выпишем их значения:

$$\int_0^1 du \langle \mathfrak{F}(1, u) - \mathfrak{F}_A(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ \frac{2}{3} (-\ln u)_{u=0} - \frac{1}{6} - Z\alpha \left[\frac{76}{36} (u^{-1/2})_{u=0} - \pi \left(2 + \frac{11}{64} - \ln 2 \right) \right] \right\}, \quad (4.14)$$

$$\int_0^1 du \langle \mathfrak{F}_B(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \{ (-\ln u)_{u=0} - 1 - Z\alpha [4 (u^{-1/2})_{u=0} - 4\pi] \}, \quad (4.15)$$

$$\int_0^1 du \langle \mathfrak{F}'_A(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ -\frac{1}{3} (-\ln u)_{u=0} - \frac{7}{12} + Z\alpha \left[\frac{64}{35} (u^{-1/2})_{u=0} - \frac{38}{105} \pi \right] \right\}. \quad (4.16)$$

5. Определение \bar{M}_0

Чтобы завершить определение матричного элемента оператора массы для S -состояния, нужно подсчитать составляющую (3.6). Рассмотрим по порядку обе части этой составляющей.

После определения значений коммутаторов [см. (2.20)] и выполнения интегрирования по импульсам в операторе $\mathfrak{F}_B(0, u)$

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{F}_B(0, u) \rangle_0 = & -\frac{\alpha}{4\pi} \left\langle \int_0^\infty ds \exp[-ism^2u] \left\{ 4imu(1-u)e^{\frac{1}{2}\sigma F} + \right. \right. \\ & + e \int_0^1 dv (2-u) (\Pi_\mu \exp[iw\mathcal{E}v] (\gamma F)_\mu - (\gamma F)_\mu \exp[-iw\mathcal{E}v] \Pi_\mu) - \\ & \left. \left. - e^2 \int_0^1 dv 4s(1-u)^2 mu(1-v) (\gamma F)_\mu \exp[-iw\mathcal{E}v] (\gamma F)_\mu \right\} \right\rangle, \quad (5.1) \end{aligned}$$

члены первого порядка могут быть отделены от членов второго порядка. Далее, в S -состоянии и в членах, имеющих явный второй порядок, можно пренебречь полем в экспонентах и взять обычное приближение для волновой функции. Переход к импульсному представлению для экспонент облегчает интегрирование по времени в матричном элементе (см. (4.6) статьи [1]). Дираковские матрицы исключаются из выражения в силу того, что отличными от нуля диагональными

элементами обладают только матрицы γ_0 и $-\gamma_4^2$. В частности, последний член выражения (5.1) при учете (2.18) статьи [1] принимает вид

$$e^2 \langle (\gamma F)_\mu \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle_0 \rightarrow \\ \rightarrow |\varphi_0(0)|^2 e^2 \int (2\pi)^{-3} d\mathbf{p} \exp[-i\omega p^2 v] \left(\int d\mathbf{r}' F_{\mu\nu}(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}'} \right) \left(\int d\mathbf{r}'' F_{\mu\nu}(\mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}''} \right) = \\ = 16 (Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 \int \frac{d\mathbf{p}}{4\pi p^2} \exp[-i\omega^2 p v] = 8 (Z\alpha)^2 |\varphi_0(0)|^2 \left(\frac{\pi}{i\omega v} \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Первый член выражения (5.1) крайне прост [см. (2.40)]:

$$\left\langle m e \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} F(\mathbf{r}) \right\rangle_0 = -2\pi Z\alpha |\varphi_0(0)|^2. \quad (5.3)$$

Часть остальных членов выражения (5.1) преобразуется соответственно (2.33) к виду

$$e \int_0^1 du \exp[-ism^2 u] \langle \Pi_\mu \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle = \\ = \frac{ie}{m^2 s} \langle \Pi_\mu \exp[-i\omega \mathcal{H}v - ism^2 u] (\gamma F)_\mu \rangle \Big|_{u=0}^{u=1} + \\ + \frac{ev}{m^2} \int_0^1 du \exp[-im^2 su] \langle \Pi_\mu \mathcal{H} \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle = \\ = \frac{ie}{m^2 s} \langle \Pi_\mu (\exp[-im^2 s] - \exp[-is \mathcal{H}v]) (\gamma F)_\mu \rangle - \\ - \frac{ie^2 v}{m^2} \int_0^1 du \exp[-ism^2 u] \langle (\gamma F)_\mu (m - \gamma \Pi) \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle. \quad (5.4)$$

После симметризации последнего выражения матричный элемент для членов первого порядка определяется при помощи (2.35), в то время как в случае членов второго порядка матричный элемент можно получить, основываясь на замечаниях, приведенных перед формулой (5.2). Последнюю составляющую удобно проинтегрировать по s по частям:

$$e \int_0^\infty ds (-2u + u^2) \exp[-ism^2 u] \langle \Pi_\mu \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle = \left(i \frac{2-u}{m^2} \right) \left[\langle e \Pi_\mu (\gamma F)_\mu \rangle - \right. \\ \left. - (1-u) v \int_0^\infty ds \exp[-ism^2 u] \langle (\gamma F)_\mu (m - \gamma \Pi) \exp[-i\omega \mathcal{H}v] (\gamma F)_\mu \rangle \right]. \quad (5.5)$$

Полный матричный элемент $\mathfrak{F}_B(0, u)$ будет, следовательно, равен [см. (2.35)]

$$\langle \mathfrak{F}_B(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \int_0^1 dv \left\{ \ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)v} - \right. \\ \left. - 2 + u + (1-u) + Z\alpha \pi^{-1/2} \int_0^\infty ds \exp[-ism^2 u] \times \right. \\ \left. \times \left[-32 (ism^2)^{1/2} (1-u)^{3/2} u (1-v) v^{-1/2} + 16 (ism^2)^{-1/2} v^{1/2} (1-u)^{-1/2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 16 (ism^2)^{-1/2} v^{1/2} (2-u) (1-u)^{1/2} \right] \right\}, \quad (5.6)$$

откуда следует

$$\int_0^1 du \langle \mathfrak{F}_B(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ \ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} + 4\pi Z\alpha \right\}. \quad (5.7)$$

Оператор $\mathfrak{F}'_A(0, u)$ [см. (2.19)]

$$\langle \mathfrak{F}'_A(0, u) \rangle = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^\infty i ds 2m(2+u) \exp[-ism^2u] \times \\ \times \left\langle \frac{1}{2} e\sigma F + 2 \int_0^1 dv (1-v) \Pi_\mu (\exp[-i v \mathcal{H} v] - 1) \Pi_\mu \right\rangle \quad (5.8)$$

определяется аналогичным образом. Он дает составляющие

$$\int_0^1 du \langle \mathfrak{F}'_A(0, u) \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ -\frac{1}{3} \ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} - \frac{31}{36} - \frac{38}{105} \pi Z\alpha \right\}. \quad (5.9)$$

Если добавить эти составляющие к выражению, получающемуся из членов разложения в степенной ряд (4.12), то получится полный сдвиг S -уровня, связанный с оператором массы¹⁾:

$$\langle \bar{M} \rangle_0 = \left(2Z\alpha^2 \frac{|\varphi_0(0)|^2}{m^2} \right) \left\{ \frac{2}{3} \ln \frac{m}{2n_0(n_0, 0)} - \frac{5}{9} + 2\pi Z\alpha \left[1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 \right] \right\}. \quad (5.10)$$

Если сравнить этот результат с выражением (4.14), то становится ясным, что точное определение эффектов мягких квантов может быть дано следующим образом:

$$\left(-\frac{2}{3} (-\ln u) - \frac{76}{35} Z\alpha u^{-1/2} \right)_{u=0} \rightarrow \frac{2}{3} \ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} + \frac{13}{18}. \quad (5.11)$$

Последовательно усиливающиеся инфракрасные расходимости в степенном ряде являются результатом разложения логарифма из правой части по нулевому значению энергии k_0 „свободной частицы“. Сравнение показывает, что поправок порядка $Z\alpha$ к самому логарифму нет. Это не удивительно, поскольку релятивистские поправки к структуре атома водорода имеют относительный порядок $(Z\alpha)^2$.

6. Поляризация вакуума

Теперь нам остается подсчитать составляющую сдвига, появляющуюся из-за поляризации вакуума кулоновским полем. Энергия возмущения в этом случае имеет вид

$$\langle M^P \rangle_0 = e \int d\mathbf{r} \bar{\psi}_0(\mathbf{r}) V^P(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) = \int (2\pi)^{-3} d\mathbf{r} d\mathbf{k} \bar{\psi}_0(\mathbf{r}) e V^P(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \psi_0(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

где, согласно (2.19) статьи [1],

$$e V^P(k) = -Z\alpha^2 \int_0^\infty i ds \int_0^1 dv v^2 \left(1 - \frac{1}{3} v^2 \right) \exp \left[-ism^2 - is \frac{1}{4} k^2 (1-v) \right]. \quad (6.2)$$

Используя обычное приближение для волновой функции (2.22) статьи [1] и интегралы (4.23) статьи [1], сразу получаем численный результат

$$\langle M^P \rangle_0 = 2Z\alpha^2 |\varphi_0(0)|^2 \left[-\frac{2}{15} + \frac{5}{96} \pi Z\alpha \right]. \quad (6.3)$$

7. Сводка результатов

Подстановка значения волновой функции для атома водорода

$$|\varphi_0(0)|^2 = \pi^{-1} \left(\frac{Z\alpha m}{n_0} \right)^3$$

¹⁾ Такой же результат был получен в вычислениях Бараджера [10]. Мы обязаны Бете, сообщившему об этих вычислениях, и Баранжеру, предоставившему экземпляр своей диссертации. — *Прим. авт.*

(n_0 — главное квантовое число) в формулы (5.10) и (6.3) приводит к следующим более наглядным выражениям:

$$\langle \bar{M} \rangle_0 = \frac{8Z^4 \alpha^3}{n_0^3} \frac{1}{3\pi} \left\{ \ln \frac{m}{2k_0(n_0, 0)} + \frac{5}{6} + 3\pi Z\alpha \left[1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 \right] \right\} Ry_\infty$$

и

$$\langle M^P \rangle_0 = \frac{8Z^4 \alpha^3}{n_0^3} \frac{1}{3\pi} \left\{ -\frac{1}{5} + \frac{5}{64} \pi Z\alpha \right\} Ry_\infty.$$

Вычисленные в настоящей статье поправки высшего порядка соответствуют дополнительному сдвигу 2S-уровня на величину¹⁾

$$\frac{\alpha^3}{3\pi} \left[3\pi\alpha \left(1 + \frac{11}{128} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5}{192} \right) \right] Ry_\infty = 7,14 \text{ мггц.}$$

Для полной оценки поправок до относительного порядка α к сдвигу $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ следует также учесть электромагнитные поправки четвертого порядка; однако из них нам известна только поправка, связанная с магнитным моментом. Она уменьшает расщепление на 0,94 мггц. Использование нового значения α приводит в итоге к уточненному теоретическому значению лэмбовского сдвига в атоме с бесконечно тяжелым ядром:

$$\Delta E_\infty = -1058,42 \text{ мггц.}$$

Эта величина хорошо согласуется с опубликованным экспериментальным значением для водорода, равным 1062 ± 5 мггц. Поправки относительного порядка $\alpha^2 \ln \alpha$, которые получаются при более точном рассмотрении кулоновского поля, повидимому, много меньше 1 мггц.

В связи с тем, что сейчас выполняются значительно более точные эксперименты по определению сдвига уровней в водороде и дейтерии, важно учесть влияние структуры и конечности массы ядер. В нерелятивистском приближении [3] поправки на приведенную массу учитываются посредством использования соответствующего значения постоянной Ридберга. В результате сдвиг уровней уменьшается в водороде на 0,6 мггц и в дейтерии на 0,3 мггц. Наиболее заметный эффект структуры ядра вызывается движением протона внутри дейтерона. Получающееся изменение энергии кулоновского взаимодействия определяется средним квадратом расстояния между нейтроном и протоном в дейтроне

$$\delta E \approx \frac{1}{6} \pi\alpha |\varphi_0(0)|^2 \langle R^2 \rangle_{Av}.$$

Эта величина может быть выражена с помощью асимптотического выражения для волновой функции дейтерона с достаточной точностью через размер дейтрона $d = 4,314 \cdot 10^{-13}$ см и эффективный триплетный радиус $\rho = 1,71 \cdot 10^{-13}$ см:

$$\langle R^2 \rangle_{Av} = \frac{1}{2} d^2 \left(1 - \frac{\rho}{d} \right)^{-1}.$$

Уровень 2S повышается, таким образом, на 0,75 мггц, в то время как уровни 2P остаются неизменными. Учет указанных ядерных взаимодействий приводит к следующим значениям сдвига уровней:

$$\Delta E_H = 1057,8 \text{ мггц, } \Delta E_D = 1058,9 \text{ мггц}$$

соответственно для водорода и дейтерия.

Мы благодарим Кролля за многочисленные дискуссии.

¹⁾ Здесь исправлена небольшая численная ошибка, допущенная ранее [11].—Прим. авт.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы подтвердим правильность подстановки (2.36), сделанной в тексте. Нам нужно, следовательно, установить с точностью до порядка $(Z\alpha)^2$ правильность тождества

$$-\frac{i\alpha}{3\pi m^2} \int \bar{\psi}_0(x') \left(x' | e(\gamma F)_\lambda \ln \frac{m^2}{m^2 - (\gamma \Pi)^2} \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \ln \frac{m}{m^2 - (\gamma \Pi)^2} e(\gamma F)_\lambda | x'' \right) \times \\ \times \psi_0(x') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' dt'' = \frac{2\alpha}{3\pi m^2} \sum_n |p_{n0}|^2 (E_n - E_0) \ln \frac{m}{2|E_n - E_0|}. \quad (\text{П. 1})$$

В первое выражение входит релятивистский матричный элемент, а во втором стоит сумма по нерелятивистским преддингеровским состояниям, вычисленная Бете и др. [9]. Отметим сначала, что имеет место

$$\left\langle e(\gamma F)_\lambda \ln \frac{m^2}{m^2 - (\gamma \Pi)^2} \Pi_\lambda - \Pi_\lambda \ln \frac{m^2}{m^2 - (\gamma \Pi)^2} e(\gamma F)_\lambda \right\rangle = \\ = 2i \left\langle \Pi_\lambda (\gamma \Pi + m) \ln \frac{m^2}{m^2 - (\gamma \Pi)^2} \Pi_\lambda \right\rangle_0 = 2i \left\langle \Pi_\lambda \gamma_0 (H^{r1} - E_0^r) \ln \frac{m}{2(H^{r2} - E_0^r)} \Pi_\lambda \right\rangle_0 \quad (\text{П. 2})$$

в связи со стационарным характером состояния $\psi_0(x)$. Индекс r обозначает здесь релятивистский; дополнительные индексы 1 или 2 введены для различения гамильтонианов первого и второго порядков; оператор Π_λ представляется в виде

$$\Pi_\lambda = (\mathbf{p}, E_0^r - V), \quad (\text{П. 3})$$

где V — кулоновский потенциал. Из структуры (П.2) очевидно, что в дальнейшем достаточно учитывать только пространственную часть Π_λ , поскольку составляющие с четвертой компонентой Π_λ дают всюду нуль, за исключением члена с двумя множителями потенциальной энергии. Интегрирование по отмеченным двумя штрихами пространственно-временным координатам сводит затем рассматриваемый матричный элемент к не зависящему от времени выражению

$$\int \bar{\psi}_0^*(\mathbf{r}') \mathbf{p} (H^{r1} - E_0^r) \ln \frac{m}{2(H^{r2} - E_0^r)} \mathbf{p} \psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \\ = \langle \mathbf{p} (H^{r1} - E_0^r) \ln \frac{m}{2(H^{r2} - E_0^r)} \mathbf{p} \rangle_0 = \left(\sum_{n+} + \sum_{n-} \right) |p_{n0}|^2 (E_n^r - E_0^r) \ln \frac{m}{2|E_n^r - E_0^r|}. \quad (\text{П. 4})$$

Сумма по состояниям положительной энергии может быть сразу отождествлена (если не учитывать поправок тонкой структуры) с нерелятивистской суммой из (П.1). В сумму по состояниям отрицательной энергии входят большие разности $E_n^r - E_0^r \approx -2m$. Кроме того, легко показать, что $|p_{0n-}|^2 \approx \alpha^4 |p_{0n+}|^2$, так что в нашем случае суммой по состояниям отрицательной энергии можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karplus R., Klein A., Phys. Rev., **85**, 972 (1952). (См. статью IX настоящего сборника.)
2. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **81**, 222 (1951).
3. Bethe H. A., Phys. Rev., **72**, 339 (1947).
4. Kroll N. M., Lamb W. E., Phys. Rev., **75**, 380 (1949); French J. B., Weisskopf V. F., Phys. Rev., **75**, 1280 (1949).
5. Feunman R. P., Phys. Rev., **74**, 1430 (1948).
6. Feunman R. P., Phys. Rev., **76**, 769 (1949). (См. статью IV настоящего сборника.)
7. Schwinger J., Phys. Rev., **76**, 790 (1949). [См. статью II (часть II) настоящего сборника.]
8. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 664 (1951). (См. статью VIII настоящего сборника.)
9. Bethe H. A., Brown, Stehn, Phys. Rev., **77**, 370 (1950).
10. Baranger M., Phys. Rev., **84**, 866 (1951).
11. Karplus R., Klein A., Schwinger J., Phys. Rev., **84**, 597 (1951).

XI. ПЕРЕНОРМИРОВКА МЕЗОННЫХ ТЕОРИЙ

П. МЭТТЬЮС и А. САЛАМ

P. T. Matthews and A. Salam, Rev. Mod. Phys., 23, № 4, 311 (1951)

Связанное с именами Томонага, Швингера и Фейнмана недавнее развитие квантовой электродинамики (теории взаимодействия фотонного и электронно-позитронного полей) завершилось (в вопросах, связанных с перенормировкой массы и заряда) в работе Дайсона [1], опубликованной в 1949 г. Объединив способ графического изображения событий Фейнмана [2] и инвариантный метод вычитания расходимостей Швингера [3], Дайсон пришел к двум важным выводам. Он, во-первых, доказал, что в любом сколь угодно высоком порядке теорий возмущений могут встретиться три и только три типа расходящихся интегралов; во-вторых, им было доказано, что все эти расходимости исключаются посредством перенормировки массы и заряда. Как было показано, данная теория очень хорошо согласуется с экспериментом ¹).

После выполнения программы Дайсона возникает, очевидно, проблема пространства его рассуждений на различные мезонные теории и выяснения того, могут ли быть получены в какой-нибудь из этих теорий результаты, аналогичные полученным в случае электродинамики. Такая работа сейчас выполнена и цель настоящей статьи состоит в том, чтобы отметить некоторые из возникающих при этом трудностей, а также суммировать главные из полученных выводов.

Следует подчеркнуть, что мы касаемся здесь только чисто математической задачи о том, какая из мезонных теорий может быть сделана подобным образом внутренне непротиворечивой. Вопросу о связи теории с экспериментом будет отведено очень мало места.

Прежде чем разбирать мезонные теории, напомним кратко метод вычислений Дайсона. Как теперь известно [1, 2], матричный элемент для некоторого определенного электромагнитного процесса (элемент S -матрицы) может быть явным образом записан в виде интеграла в импульсном пространстве с помощью соответствующей диаграммы, причем подинтегральное выражение получается сопоставлением электронным и фотонным линиям функций распространения $S_F(p)$ и $D_F(p)$ ²) и подстановкой множителей $e\gamma_\mu$ (матриц Дирака, умноженных на заряд) соответственно каждой из вершин диаграммы. Рассматривая получающиеся подобным образом интегралы, Дайсон нашел, что полная степень расходимости ³) некоторой определенной диаграммы может быть опреде-

¹) Эта теория замечательным образом объясняет лэмбовский сдвиг (ссылки на опубликованные работы см. в [4]; сейчас выполняются более точные вычисления) и аномальный магнитный момент электрона [5]. — *Прим. авт.*

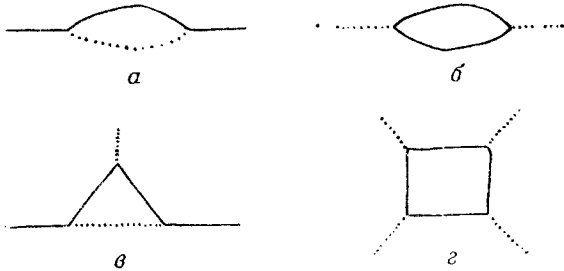
²) Эти функции являются функциями Грина, выражающими (причины обоснованно) взаимодействие полей в различных точках. См. статью Фирца [6]. (В обозначениях Фирца $D_F = D_c$. В обозначениях Фейнмана $D_F = \delta_+$, $S_F = K_+$.) — *Прим. авт.*

³) Под „полной степенью расходимости“ подразумевается степень расходимости интеграла по всем переменным диаграммы, для которой интеграл по некоторому меньшему числу переменных является конечным (или становится конечным после соответствующих вычитаний). Хотя получающиеся интегралы являются сложными, степень расходимости может быть просто определена с помощью подсчета степеней в подинтегральном выражении. В случае электродинамики степень расходимости зависит только от числа внешних линий. — *Прим. авт.*

лена по ее внешним линиям. Пусть E_f означает число внешних линий фермионов (термин фермионы обозначает частицы с полуцелым спином), а E_p — число внешних фотонных линий. Соответствующий диаграмме интеграл может расхо- диться только при условии

$$\frac{3}{2} E_f + E_p < 5. \quad (1)$$

Из этого основного неравенства следует, что имеется только конечное число типов диаграмм, могущих приносить расходимости в теорию. Сюда относятся



Фиг. 1. Пунктирные линии относятся к фотонам, сплошные — к электронам.

диаграммы собственной энергии электрона и фотона и вершинные части; простейшие примеры таких диаграмм приведены на фиг. 1 (*a*, *b*, *v*). Еще один тип расходящихся диаграмм соответствует рассеянию света на свете (фиг. 1 *z*). Однако в этом случае все же получается сходящийся результат благодаря калибровочной инвариантности теории [7]. Кроме того, формально возможны расходящиеся диаграммы с одной или тремя внешними фотонными

линиями, однако они исключаются в силу аргументов, основанных на зарядной симметрии. Диаграммы *a*, *b* и *v* являются, таким образом, представителями всех типов расходимостей теории, и если эти расходимости могут быть устранены посредством перенормировки заряда и массы, то, очевидно, вся *S*-матрица может быть сделана конечной. Метод использования диаграмм может быть без труда распространен на случай взаимодействующих мезонов и нуклеонов, причем анализ возможных типов расходимостей может быть выполнен аналогичным образом¹). Различные виды взаимодействий мезонов с нуклеонами распадаются на два класса. Для (псевдо) скалярного взаимодействия (псевдо) скалярных мезонов с нуклеонами необходимым условием расходимости является неравенство

$$\frac{3}{2} E_f + E_m < 5, \quad (2)$$

где E_m — число внешних мезонных линий. Во всех остальных случаях, включая случаи взаимодействия с парами мезонов и связи фермиевского типа четырех фермионов, данное условие имеет вид

$$E < 5 + n, \quad (3)$$

где E — линейная функция E_f и E_m , а n — число вершин диаграммы. В подобных случаях имеется, вообще говоря, бесконечное число типов расходимостей (поскольку для каждого процесса может быть получена расходящаяся диаграмма, если взять достаточно большое n), так что нет никакой надежды на возможность устранения этих расходимостей посредством перенормировки конечного числа постоянных. Единственным исключением является случай *векторной связи для нейтральных векторных мезонов*. Как было показано, в том, что касается расходимостей, здесь имеет место эквивалентность с электродинамикой и, сле-

¹ См. работу Мэттьюса [8]. В указанной работе допущены ошибки (см. первый раздел статьи [9]). — *Прим. авт.*

довательно, выполнима программа перенормировки ¹⁾ [9]. Однако этот случай физически мало интересен.

Что касается частиц нулевого спина, подчиняющихся условию (2), то, очевидно, у них имеются все возможные типы расходимостей электродинамики. В случае заряженных мезонов части с одной или тремя внешними мезонными линиями исключаются в силу сохранения заряда, так как входящий и выходящий заряды должны быть равными; для нейтральных псевдоскалярных мезонов подобные части обращаются тождественно в нуль, как это можно показать, рассмотрев поведения поля при пространственных отражениях. В случае нейтральных скалярных мезонов такие части приводят к действительным расходимостям. Во всех случаях имеются также расходимости, соответствующие рассеянию мезонов на мезонах (фиг. 1, 2) в дополнение к расходимостям, соответствующим вершинным и относящимся к собственным энергиям частям в электродинамике. Для этого класса мезонных теорий программа перенормировки может быть, очевидно, успешно выполнена и мы рассмотрим вопрос более подробно.

Общее доказательство Дайсона в электродинамике основывается на том важном обстоятельстве, что три типа расходящихся диаграмм, входящих в качестве составных частей в бóльшие диаграммы, могут быть истолкованы как модифицирование отдельных линий или вершин. Таким образом, можно ввести наряду с функциями распространения также функции, учитывающие влияние включения в линию всех возможных частей, относящихся к собственной энергии, и функции, учитывающие влияние подстановок вершинных частей вместо вершины. Эти новые функции обозначаются через

$$S'_F, D'_F \text{ и } \Gamma'_\mu$$

и являются, конечно, расходящимися. Имеющая физический смысл конечная часть этих функций S'_{F1}, D'_{F1} и $\Gamma'_{\mu 1}$ получается после вычитания бесконечных постоянных ²⁾ ковариантным образом.

Дайсон, далее, показал, что после соответствующей перенормировки массы конечные и бесконечные функции связываются друг с другом следующим образом:

$$\begin{aligned} S'_F &= Z_2 S'_{F1}, \\ D'_F &= Z_3 D'_{F1}, \\ \Gamma'_\mu &= Z_1^{-1} \Gamma'_{\mu 1}, \end{aligned} \tag{4}$$

где Z_s — бесконечные постоянные. Таким образом, эти замечательные уравнения позволяют интерпретировать по-новому *вычитание* бесконечных постоянных как *выделение бесконечных постоянных множителей*.

Рассмотрим теперь какой-нибудь процесс, не входящий в число расходящихся типов. Для подсчета матричного элемента для этого процесса мы можем взять только те соответствующие ему диаграммы, которые не содержат вершинных или относящихся к собственной энергии частей в своих линиях и вершинах, т. е. „несводимые“ диаграммы. Интеграл, соответствующий подобной диаграмме, является сходящимся в силу выполнения неравенства (1) (он удовлетворяет условию, указанному в примечании 3 на стр. 327, так как по определению в нем нет расходящихся частей). Подынтегральное выражение является функцией от S_F, D_F и $e\gamma_\mu$ вида $e^n I(S_F, D_F, \gamma_\mu)$, где n есть попрежнему число вер-

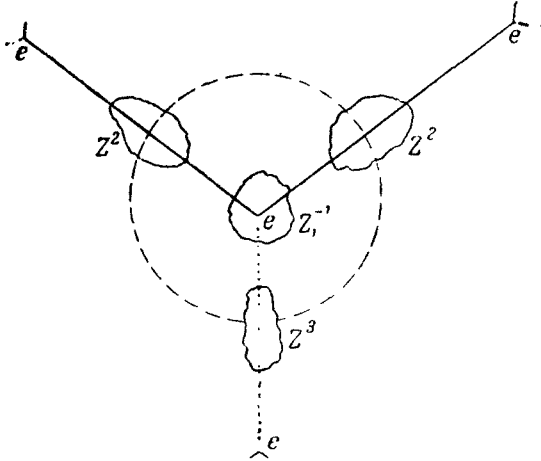
¹⁾ Имеется также поддающаяся перенормировке предложенная Фейнманом смесь псевдоскалярных и псевдовекторных мезонов с одинаковыми массами и постоянными связи и при псевдовекторной связи [10]. — *Прим. авт.*

²⁾ Бесконечные постоянные имеют вид $\int_0^\infty x^{-1} dx$. Если подынтегральные выражения совпадают, то подобные постоянные приравниваются. — *Прим. авт.*

шин диаграммы. Все радиационные поправки к диаграмме получаются однозначно посредством подстановок в ее линии и вершины всех возможных вершинных и относящихся к собственной энергии частей. Аналитически этому соответствует замена в I функций S_F, D_F и γ_μ на функции S'_F, D'_F и Γ_μ . Интеграл становится расходящимся; однако с помощью уравнений Дайсона (4) для полного вклада от диаграммы, включая все поправки, получается выражение

$$e^n I(S'_F, D'_F, \Gamma_\mu) = e^n F(Z_1, Z_2, Z_3) I(S'_{F1}, D'_{F1}, \Gamma_{\mu 1}). \quad (5)$$

Вид множителя $F(Z)$ находится при рассмотрении типичной вершины какой-либо неприводимой диаграммы. Части, относящиеся к собственной энергии, и вершинные



Фиг. 2. Пунктирным кругом обведена «основная ячейка» диаграммы. Из таких ячеек конструируются все (неперекрывающиеся) диаграммы.

части могут быть включены, как это показано на фиг. 2, приводя к появлению множителей Z . Каждому множителю e соответствует, таким образом, множитель $Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2}$. (Берется корень из относящихся к линии множителей, так как каждый из них умножается на заряд дважды, в начале и в конце линии. Внешние линии требуют особого рассмотрения.) Таким образом,

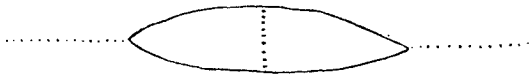
$$e^n F(Z) = (e Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2})^n = e_1^n, \quad (6)$$

где величина e_1 определяется последним равенством. Если теперь отождествить e_1 с экспериментальным значением заряда, то правая сторона равенства (5) превратится в

$$e_1^n I(S'_{F1}, D'_{F1}, \Gamma_{\mu 1}),$$

так что каждая несводимая диаграмма будет давать составляющую искомого матричного элемента, имеющую вид произведения конечной постоянной на абсолютно сходящийся интеграл. При этом учитываются физически существенные части всех возможных диаграмм.

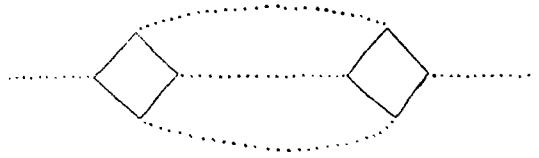
Изложенное рассуждение является простым и изящным. Главная трудность заключается в установлении соотношений (4), которые должны правильно учитывать поправки к поправкам. Можно опять производить изменение линий и вершин неприводимых диаграмм, относящихся к собственной энергии и вершинным частям; однако правила вычислений перестают быть тогда однозначными. Рассмотрим,



Фиг. 3.

например, диаграмму, изображенную на фиг. 3. Она может рассматриваться как видоизменение фигуры посредством подстановки вершинной части вместо каждой из двух вершин. Две вершинные части перекрываются по центральной линии. Для нахождения сходящегося, имеющего физического смысла слагаемого, требуется расширение вычитательного метода, причем наличие подобных «перекрывающихся» частей значительно усложняет вывод уравнений (4). К счастью, указанные перекрывающиеся части являются единственными в своем роде в электродинамике, так что Дайсон мог их выделить и рассматривать особыми способами (см. также [11]). Однако трактовка перекрывающихся частей оказывается центральной проблемой при распространении метода Дайсона на мезонные теории, так что ее приходится рассматривать в наиболее общей форме [12].

В случае заряженных скалярных мезонов и заряженных или нейтральных псевдоскалярных мезонов, подчиняющихся условию (2), требуется учитывать только один дополнительный тип расходимостей (фиг. 1, г). Поскольку этот тип не является изменением каких-либо из имеющихся вершин, мы вводим такие вершины, добавляя в лагранжиан контактное взаимодействие между мезонами $(\lambda + \delta\lambda)\phi^4$. При этом предполагается, что λ — бесконечная постоянная, подобранная так, чтобы компенсировать расходимости нового типа, а $\delta\lambda$ конечно и может быть определено экспериментально. Для подтверждения выполнимости этой программы нужно доказать, что $\delta\lambda$ может быть выбрано так, чтобы сокращались расходимости, возникающие из-за новых диаграмм, ко-



Фиг. 4.

которые входят в рассмотрение вследствие введения новой вершины. Следует, кроме того, доказать, что введение указанного члена в лагранжиан не мешает определить множители Z , несмотря на появление более сложных перекрывающихся частей в диаграммах. Эта задача является очень сложной. Характер возникающих трудностей можно понять из рассмотрения фиг. 4, где рассеяние мезонов на мезонах перекрывается с вершинными частями внутри сравнительно простой диаграммы собственной энергии.

В действительности намеченная программа может быть выполнена [12]; однако прежде чем переходить к дальнейшему изложению, рассмотрим взаимодействие мезонов с фотонами ¹⁾. В этом случае имеет место аналогичное положение с одним дополнительным усложнением. Для мезонов спина единица в условии [имеющее вид (3)] расходимости диаграммы вновь входит n , так что здесь нет никаких надежд на успех. Для мезонов спина нуль получается условие

$$E_m + E_p < 5, \tag{7}$$

являющееся несколько менее ограничительным, чем условие (2). В данном случае остаются те же типы истинных расходимостей, что и в электродинамике (пунктирные линии соответствуют теперь фотонам, а сплошные — мезонам), и, кроме того, добавляются расходимости, соответствующие рассеянию мезонов на мезонах ($E_m = 4$) и эффекту Комптона ($E_m = 2, E_p = 2$). Однако гамильтониан содержит при этом, кроме членов, линейных по e , еще член $e^2 A_\mu^2 \phi^2$, приводящий к появлению вершин как раз последнего указанного типа. Вследствие этого новые расходимости, соответствующие комптоновскому эффекту, можно рассматривать как результат изменения этих вершин, которым можно попытаться сопоставить новый множитель Z_4^{-1} . Мы вновь вынуждены ввести дополнительный член $(\lambda + \delta\lambda)\phi^4$ со всеми связанными с ним трудностями. Далее, после выделения множителей мы должны доказать, что к вершинам с e^2 относится всегда некоторая комбинация множителей Z , соответствующая комбинации множителей Z , относящихся к вершинам с e . Для выполнения этого необходимо наличие определенных соотношений ²⁾ между множителями Z . Проблема перекрывающихся частей здесь еще более усложняется. В частности, диаграмма фиг. 4 содержит двенадцать перекрывающихся расходимостей. Тем не менее,

¹⁾ См. [13, 14]. Вычислительная процедура для перекрывающихся частей в последней работе является ошибочной. — *Прим. авт.*

²⁾ Приняв соотношения вида (4), легко вывести „основную ячейку“ для вершины с e^2 (подобно фиг. 2) и показать, что она будет приводить к множителю $e^2 Z_4^{-1} Z_2 Z_3$. Для подтверждения непротиворечивости перенормировки необходимо доказать, что $Z_4^{-1} Z_2 Z_3 = (Z_1^{-1} Z_2 Z_3)^2$. В действительности $Z_1 = Z_2 = Z_4$ и фактическая перенормировка заряда определяются только множителем Z_3 . Это верно также и в случае электродинамики, где $Z_1 = Z_2$ [15]. — *Прим. авт.*

намеченная программа может быть выполнена, и вся теория становится после перенормировки конечной [16].

Мы не будем входить здесь в детали доказательства, однако уже должно быть достаточно ясно, что главная трудность распространения рассуждений Дайсона на мезонные взаимодействия заключается в определении того, какие бесконечности нужно вычесть из перекрывающихся частей так, чтобы остался однозначный, ковариантный и абсолютно сходящийся остаток. Только после решения этой проблемы можно пытаться истолковать вычитание подобных бесконечностей как выделение бесконечных множителей Z и искать связь между получающимися множителями.

Мы ограничимся указанием правильного вычитательного приема. Рассмотрим интеграл, например, по трем основным переменным с подинтегральным выражением

$$I(t_1, t_2, t_3).$$

Сначала нужно рассмотреть интегрирование только по t_1 . Если оно приводит к расхожести, то следует вычесть по правилам Дайсона расходящуюся часть, умноженную на оставленный без изменений остаток подинтегрального выражения. Именно, следует взять

$$I(t_1, t_2, t_3) - D(t_1)R(t_2, t_3).$$

Такую же операцию следует сделать *независимо* для t_2 и t_3 , причем получится выражение

$$I(t_1, t_2, t_3) - D(t_1)R(t_2, t_3) - D(t_2)R(t_3, t_1) - D(t_3)R(t_1, t_2). \quad (8)$$

Затем аналогично рассматривается интегрирование по парам переменных, причем при интегрировании по $t_1 t_2$ следует учитывать в подинтегральном выражении первые три слагаемых (8), при интегрировании по $t_2 t_3$ — первое, третье и четвертое слагаемые и т. д., не меняя в каждом случае остающегося члена. Относящиеся к этим интегрированиям расходящиеся члены, подлежащие вычитанию, записываются в виде

$$\sum_{1, 2, 3} D(t_1, t_2)R(t_3). \quad (9)$$

Последнее вычитаемое выражение $D(t_1, t_2, t_3)$ получается при применении приема Дайсона к полному выражению (8) — (9). После всех вычитаний получается остаток, сходящийся при интегрировании по любой комбинации из t_1, t_2, t_3 и представляющий собой физически существенную часть диаграммы.

Было получено общее доказательство того, что в случае поддающихся перенормировке теорий подобное правило вычитания приводит к конечному остатку искомого вида [17] и что это правило может быть истолковано как введение множителей Z ¹⁾. Хотя метод доказательства кажется очень громоздким, заключенная в нем идея по существу крайне проста. Как и во всей указанной работе, трудность в данном случае заключается только в нахождении сжатых и достаточно легко понятных для читателя и автора обозначений.

Сделанный краткий обзор можно резюмировать посредством утверждения, что простейшей теорией, поддающейся перенормировке как для заряженных, так и для нейтральных мезонов, является теория *псевдоскалярных мезонов с псевдоскалярной связью* с нуклеонами. В подобной теории требуется вводить дополнительный член в лагранжиане $(\lambda + \delta\lambda)\varphi^4$. Как было установлено, совокупность взаимодействующих *мезонного, нуклеонного, фотонного и электронно-позитронного* полей можно рассматривать без введения каких-либо существенных новых усложнений [18]. Другой также поддающейся перенормировке теорией является теория *скалярных мезонов со скалярным взаимодействием*. В этом случае требуется вводить другой дополнительный член

¹⁾ Общее рассмотрение выделения множителей Z приведено в введении к [16]. — *Прим. авт.*

$(\chi + \delta\chi)\varphi^3$ для компенсации расходимостей, соответствующих частям с тремя внешними мезонными линиями.

Следует во всяком случае считать удовлетворительным, что из приведенных чисто теоретических соображений вытекает в согласии с экспериментом заключение о равенстве нулю спина мезонов, непосредственно взаимодействующих с нуклонами. Кроме этого вывода из теории в ее настоящей форме можно получить мало результатов. Подсчеты со скалярной теорией приводят к малой постоянной связи; однако результаты в этом случае определено не согласуются с экспериментом. С другой стороны, псевдоскалярная теория требует столь большой постоянной связи для получения правильных порядков величин, что перестает быть пригодной теория возмущений и какое-либо сравнение с опытом становится невозможным. Проблема нахождения метода вычисления сечений рассеяния, не зависящего от величины постоянной связи, является крайне сложной, но, по видимому, пока она не будет решена, какие-либо действительные успехи в теоретическом полевым истолковании ядерных явлений будут невозможными.

В гепенормируемых теориях конечные сечения могут быть пока получены только посредством произвольных вычитательных процедур, являющихся либо внутренне противоречивыми, либо несовместимыми с перенормировкой и тем самым противоречащими опыту¹⁾.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486 1736 (1949). (См. статью V настоящего сборника.)
2. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749, 769 (1949). (См. статью III и IV настоящего сборника.)
3. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949); **76**, 790 (1949). (См. статью II настоящего сборника.)
4. Lamb W. E., Retherford R. C., Phys. Rev., **79**, 549 (1950).
5. Kush P., Foley H. A., Phys. Rev., **74**, 750 (1948); Schwinger J., Phys. Rev., **73**, 415 (1948); Karplus R., Kroll N. M., Phys. Rev., **77**, 536 (1950); Koenig, Prodel, Kusch, Phys. Rev., 687 (1951).
6. Fierz M., Helv. Phys. Acta, **23**, 731 (1950). (См. статью VI настоящего сборника.)
7. Ward J. C., Phys. Rev., **77**, 293 (1950).
8. Matthews P. T., Phil. Mag., **41**, 185 (1950).
9. Matthews P. T., Phys. Rev., **80**, 293 (1950).
10. Beard D. B., Bethe H. A., Phys. Rev., **83**, 1106 (1951).
11. Ward J. C., Proc. Phys. Soc. (London), **64**, 54 (1951).
12. Salam Abdus, Phys. Rev., **82**, 217 (1951).
13. Matthews P. T., Phys. Rev., **80**, 292 (1950).
14. Rohrllich F., Phys. Rev., **80**, 666 (1950).
15. Ward J. C., Phys. Rev., **78**, 182 (1950).
16. Salam Abdus, Phys. Rev. (в печати).
17. Salam Abdus, Phys. Rev., **84**, 426 (1951).
18. Matthews P. T., Phys. Rev., **80**, 292 (1950); Phil. Mag., **42**, 221 (1951); Salam Abdus, Phys. Rev., **79**, 910 (1950).
19. Heitler W., Proc. Cam. Phil. Soc., **37**, 291 (1941).
20. Matthews P. T., Phys. Rev., **81**, 936 (1951).
21. Ning Hu, Phys. Rev., **80**, 1109 (1950).
22. Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., **79**, 145 (1950).

¹⁾ Примером может служить теория радиационного трения Гайтлера (см. [19] и многочисленные последующие статьи), не дающая лэмбовского сдвига и аномальных магнитных моментов нуклонов, или рассмотренная недавно одним из нас [20] теория „регуляризации“. Интересный вычитательный прием был недавно предложен Нинг Ху [21], однако вследствие вхождения постоянной связи в знаменатель функции распространения у Нинг Ху очевидно, что подобное вычитание нельзя истолковать как перенормировку. Кроме того, модифицированная функция распространения Нинг Ху аналогична (но более обща) функциям распространения, рассмотренных и отвергнутых Пайсом и Улейбеком [22], и ее введение вызывает, по видимому, возражения, аналогичные возражениям, приведенным этими авторами. — *Прим. авт.*

ХИ. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

Е. САЛЬПЕТЕР и Г. БЕТЕ

E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev., 84, N 6, 1232 (1951)

Фейнмановский релятивистский формализм S -матрицы применяется в случае задачи о связанных состояниях двух взаимодействующих дираковских частиц. Связанное состояние описывается волновой функцией, зависящей от двух особых для каждой частицы временных координат. Для данной волновой функции выводятся два различных интегральных уравнения с ядрами, представленными в виде разложения по степеням безразмерной постоянной связи g^2 . Каждый член этого разложения дает лорентц-инвариантные уравнения. В работе обсуждается пригодность и физический смысл выведенных уравнений; в нерелятивистском пределе и в низшем порядке по g^2 эти уравнения сводятся к соответствующему уравнению Шредингера.

Одно из полученных интегральных уравнений применяется к задаче об основном состоянии дейтрона для случая переноса взаимодействия скалярными мезонами с массой μ при скалярной связи. Для нейтральных мезонов лорентц-инвариантное взаимодействие сводится к сумме мгновенного юкавского взаимодействия и поправочного члена, учитывающего запаздывание. Значение, полученное для g^2 , отличается только на слагаемое относительного порядка $(\mu/M)^2$ от значения, получающегося при использовании феноменологического юкавского потенциала.

В случае переноса взаимодействия одними заряженными мезонами поправочный член получается посредством прямого решения релятивистского интегрального уравнения при учете только первого члена в разложении для ядра. Наличие этой поправки связано с тем обстоятельством, что нуклон может испускать и поглощать положительные и отрицательные мезоны только последовательно. Постоянная g^2 увеличивается в этом случае на слагаемое относительной величины 1,1 (μ/M), т. е. на 15%.

1. Введение

За последние несколько лет Дайсоном, Фейнманом, Швингером и Томонага были развиты математически различные, но физически эквивалентные формализмы для релятивистского рассмотрения задач рассеяния в случае двух или более частиц. Цель настоящей статьи состоит в изложении способа обобщения формализма Фейнмана [1, 2] на задачи о связанных состояниях с несколькими частицами.

В данной работе в дальнейшем всюду будет предполагаться, что имеются две дираковские частицы, связанные между собой некоторым произвольным (электромагнитным или мезонным) взаимодействием, и отсутствуют внешние силы, другие частицы и кванты. Излагаемый метод может быть в принципе непосредственно распространен на случай более сложных задач о связанных состояниях, хотя при этом, возможно, встретятся значительные вычислительные трудности.

В случае задачи рассеяния с участием двух частиц формализм Фейнмана состоит по существу в задании правил записи амплитуды (или ядра) $K(3,4; 1,2)$, представляющей амплитуду вероятности перехода одной частицы из пространственно-временной точки $x_{\mu 1}$ в точку $x_{\mu 3}$ и перехода другой частицы из точки $x_{\mu 2}$ в $x_{\mu 4}$. Из этого смысла амплитуды вытекает, что состояние системы следует описывать волновой функцией $\psi(x_{\mu 1}, x_{\mu 2})$ с 16 спинорными компонентами, зависящими как от различных временных, так и от пространственных координат каждой из двух частиц. Подобный подход в известной мере сходен с много-временным формализмом Дирака, Фока и Подольского [3] и Блоха [4]. Если известна функция $\psi(1,2)$, то по правилам, изложенным в статьях [1, 2], может

быть получена функция $\psi(3,4)$ чисто формальным образом с помощью амплитуды $K(3,4; 1,2)$. Амплитуда $K(3,4; 1,2)$ определяется в виде двойного бесконечного ряда; однако для нее получается сравнительно простое интегральное уравнение. Исходя из этого уравнения может быть получено интегральное уравнение для $\psi(3,4)$ с неоднородным членом, зависящим от $\psi(1,2)$. Амплитуда $K(3,4; 1,2)$ подчиняется также интегро-дифференциальному уравнению, из которого получается однородное интегро-дифференциальное уравнение для $\psi(3,4)$, не включающее явно граничных условий при t_1 и t_2 .

Указанные уравнения выводятся в разделе 2, а их законность разбирается в разделе 3. В разделах 4 и 5 с помощью этих уравнений рассматривается основное состояние дейтерона для случая скалярных мезонов со скалярным взаимодействием.

2. Вывод уравнений

В данной статье мы будем всюду, где это только возможно, использовать обозначения статей [1, 2] и положим $\hbar = c = 1$. Сначала будет дан формальный вывод двух уравнений для волновой функции $\psi(1,2)$ и амплитуды $K(3,4; 1,2)$, основывающийся на выражении для $K(3,4; 1,2)$, приведенном в статье [2]; обсуждение законности полученных уравнений откладывается до следующего раздела.

Рассмотрим две дираковские частицы с массами m_a и m_b соответственно (электроны или нуклоны), способные взаимодействовать друг с другом „посредством виртуального испускания и поглощения квантов“ (фотонов или мезонов). Пусть $G(1,2)$ будет (пропорциональной безразмерной константе связи g^2) функцией взаимодействия, соответствующей простому обмену одним квантом и записанной в лорентц-инвариантной форме. В случае электродинамики

$$G(1, 2) = e^2 \gamma_\mu^a \gamma_\mu^b \delta_+(s_{12}^2). \tag{1}$$

Для скалярных мезонов со скалярной связью $G(1, 2)$ будет релятивистским обобщением потенциала Юкава и т. д. (о дальнейших подробностях см. раздел 10 статьи [2]). Определим теперь приводимые и неприводимые диаграммы подобно тому, как это было сделано Дайсоном [5], т. е. будем называть диаграмму приводимой, если ее можно расщепить на две более простые диаграммы, проведя разрез, проходящий только по одному разу через линии каждой из двух частиц и не пересекающий линий квантов. Остающиеся неприводимые диаграммы можно подразделить по степени постоянной g^2 , входящей в сопоставляемое диаграмме выражение; эта степень равна половине числа вершин на диаграмме. Первой степени g^2 соответствует только одна диаграмма, обозначенная цифрой 1 на фиг. 1. Введем еще две величины G' и $G^{(1)}$ посредством соотношений

$$G(1, 2) = \Gamma_a \Gamma_b G'(1, 2),$$

$$G^{(1)}(1, 2; 3, 4) = G(1, 2) \delta^{(4)}(1, 3) \delta^{(4)}(2, 4), \tag{2}$$

где $\delta^4(1, 3)$ — четырехмерная δ -функция

$$\prod_{\mu=1}^4 \delta(x_{\mu 1} - x_{\mu 3})$$

и Γ_a , „вершинная часть“, — оператор, составляемый из дираковских матриц, относящихся только к частице a , а Γ_b — оператор, составляемый из дираковских матриц, относящихся только к частице b . Индекс τ соответствует суммированию по компонентам операторов (четырем в случае электродинамики; одному, четырем или шестнадцати в случае простейших мезонных теорий и т. п.). Величина $G'(1, 2)$, описывающая распространение кванта, является функцией $(x_{\mu 1} - x_{\mu 3})$ и не содержит дираковских операторов. Другим неприводимым диаграммам мы сопоставим

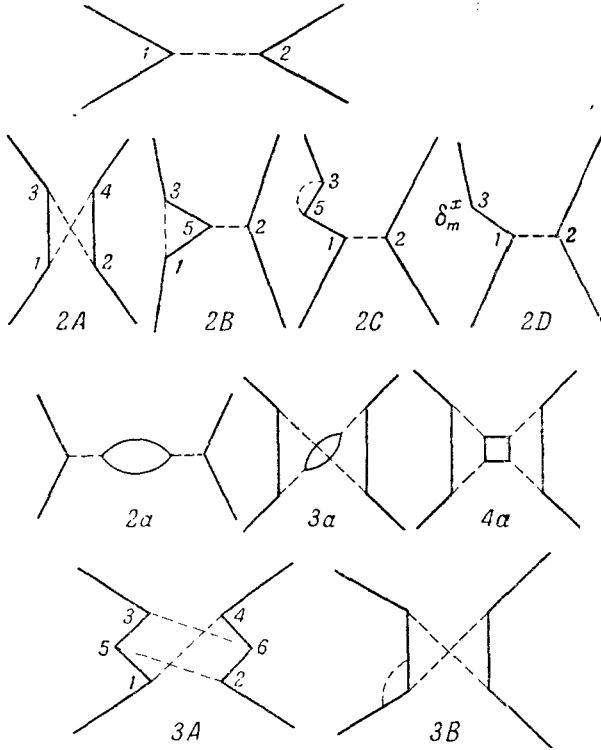
величины $G^{(n)}(1, 2; 3, 4)$. Величинами, соответствующими трем диаграммам 2A, 2B и 2C, изображенным на фиг. 1, будут выражения

$$G^{(2A)}(1, 2; 3, 4) = -\Gamma_{a\sigma}\Gamma_{b\tau}K_{+a}(3, 1)K_{+b}(4, 2)\Gamma_{a\tau}\Gamma_{b\sigma}G'(1, 4)G'(2, 3), \quad (3a)$$

$$G^{(2B)}(1, 2; 3, 4) = -i \int d\tau_5 \delta^{(4)}(2, 4)\Gamma_{a\sigma}K_{+a}(3, 5)\Gamma_{a\tau}K_{+a}(5, 1) \times \\ \times \Gamma_{a\sigma}\Gamma_{b\tau}G'(1, 3)G'(2, 5), \quad (3b)$$

$$G^{(2C)}(1, 2; 3, 4) = -i \int d\tau_5 \delta^{(4)}(2, 4) \times \\ \times \Gamma_{a\sigma}K_{+a}(3, 5)\Gamma_{a\sigma}K_{+a}(5, 1)\Gamma_{a\tau}\Gamma_{b\tau}G'(3, 5)G'(1, 2), \quad (3в)$$

где $K_{+a}(1, 3)$ — амплитуда распространения частицы a в том случае, когда она является свободной. Выражения, соответствующие диаграммам 2C и 2D и относящиеся к членам собственной энергии и перенормировки массы, должны быть взяты совместно с выражением, соответствующим диаграмме 2B. В качестве примера более сложной диаграммы возьмем диаграмму 3A, для которой



$$G^{(3A)}(1, 2; 3, 4) = \\ = - \int \int d\tau_5 d\tau_6 \Gamma_{a\sigma}K_{+a}(3, 5) \times \\ \times \Gamma_{a\tau}K_{+a}(5, 1)\Gamma_{a\tau}\Gamma_{b\tau}K_{+b}(4, 6) \times \\ \times \Gamma_{b\sigma}K_{+b}(6, 2)\Gamma_{b\tau}G'(3, 6) \times \\ \times G'(5, 2)G'(1, 4). \quad (4)$$

Из приведенных примеров становятся ясными правила построения $G^{(n)}(1, 2; 3, 4)$ в общем случае. Следует отметить, что вне зависимости от степени сложности диаграммы (n) величина $G^{(n)}$ явно зависит только от четырех переменных: $x_{\mu 1}$, $x_{\mu 2}$, $x_{\mu 3}$, $x_{\mu 4}$.

Приведенное в статье [2] выражение для амплитуды

Ф и г. 1. Неприводимые диаграммы различных порядков. Сплошные линии обозначают дираковские частицы, пунктирные линии — кванты.

$K(3, 4; 1, 2)$ представляет собой двойную бесконечную сумму слагающих, соответствующих каждой возможной приводимой или неприводимой диаграмме, плюс член $K_{+a}(3, 1)K_{+b}(4, 2)$, соответствующий распространению частиц без обмена квантами. Несводимая диаграмма (n) привносит член

$$K^{(n)}(3, 4; 1, 2) = -i \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 \times \\ \times K_{+a}(3, 5)K_{+b}(4, 6)G^{(n)}(5, 6; 7, 8)K_{+a}(7, 1)K_{+b}(8, 2). \quad (5)$$

Приводимой диаграмме, которую можно расщепить на две неприводимые диаграммы (n) и (m), соответствует член

$$K^{(n, m)}(3, 4; 1, 2) = -i \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 \times \\ \times K_{+a}(3, 5)K_{+b}(4, 6)G^{(n)}(5, 6; 7, 8)K^{(m)}(7, 8; 1, 2). \quad (6)$$

Для диаграммы, расщепляющейся на три неприводимые диаграммы, мы получаем член

$$K^{(n, m, k)}(3, 4; 1, 2) = -i \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 \times \\ \times K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) G^{(n)}(5, 6; 7, 8) K^{(m, k)}(7, 8; 1, 2) \quad (7)$$

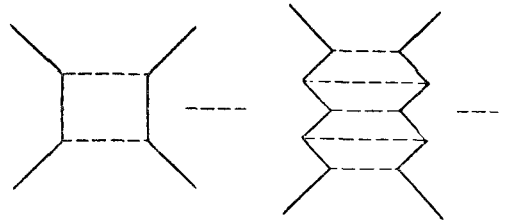
и т. д. для каждой приводимой диаграммы. Пусть $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ будет суммой всех выражений $G^{(n)}(1, 2; 3, 4)$, относящихся ко всем неприводимым диаграммам.

$$\bar{G} = \{G^{(1)} + G^{(2A)} + G^{(2B)} + G^{(2C)} + G^{(2D)} + G^{(2a)} + G^{(3A)} + \dots\}. \quad (8)$$

В разделе 3 статьи [1], исходя из выражения в виде одинарной бесконечной суммы, выведено интегральное уравнение с простым ядром для амплитуды одиночного электрона во внешнем поле. Основываясь на аналогичных аргументах и используя выражения (5) — (8), мы получаем, исходя из двойной суммы, интегральное уравнение для амплитуды $K(3, 4; 1, 2)$, в ядро которого входит бесконечная сумма $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$:

$$K(3, 4; 1, 2) - K_{+a}(3, 1) K_{+b}(4, 2) = \\ = i \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) \bar{G}(5, 6; 7, 8) K(7, 8; 1, 2). \quad (9)$$

Выражение (8) для $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ является разложением в ряд по степеням постоянной связи. Каждый член этого разложения может быть в принципе вычислен, однако замкнутого выражения для $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ до сих пор найдено не было и поэтому описываемый метод не может быть непосредственно применен в задачах со связанными состояниями, когда постоянная связи велика. В тех же задачах, в которых постоянная связи относительно мала, метод, использующий функции \bar{G} , приводит к значительным упрощениям по сравнению с рассмотрением, в котором проводится суммирование по всем приводимым диаграммам.



Фиг. 2. Приводимые диаграммы, влияние которых учитывается одним членом $G^{(1)}$.

Если, например, заменить величину \bar{G} в уравнении (9) на первый член ее разложения $G^{(1)}$, то это будет эквивалентно учету в бесконечной двойной сумме кроме неприводимой диаграммы бесконечного числа приводимых диаграмм „лестничного типа“, подобных приведенным на фиг. 2. Это означает, что при таком приближении одна часть диаграмм, соответствующих высшим степеням g^2 , автоматически учитывается, а другая — нет. Значение этого приема для случая малого g^2 может быть, повидимому, разъяснено с помощью следующих физических рассуждений. В связанном состоянии частицы взаимодействуют друг с другом бесконечно (или, по крайней мере, очень большое) время. Если величина g^2 очень мала, то мала вероятность „нахождения одного виртуального кванта в поле“, а вероятность „нахождения двух виртуальных квантов одновременно в поле“ будет еще меньше. Хотя вероятность обмена квантом в течение малого временного интервала достаточно мала, за бесконечное время существования связанного состояния может произойти *последовательно* обмен бесконечным числом квантов. Именно подобные процессы и представляются диаграммами лестничного типа. С другой стороны, все диаграммы, опускаемые при подобном приближенном рассмотрении, за исключением диаграмм, относящихся к собственной энергии и перенормировке массы, содержат либо пересеченные квантовые линии (например, диаграммы 2A и 3A), либо слагающие типа лэмбовского сдвига (например, диаграмма 2B). Подобные диаграммы соответствуют процессам, при

которых в поле одновременно находятся два или более квантов и которые действительно несущественны, если постоянная связи мала. Итак, если заменить в уравнении (9) \bar{G} на $G^{(1)}$, то это интегральное уравнение сводится с помощью соотношения (2) к более простому уравнению, включающему $G(I, 2)$.

Если желательно учесть члены высшего порядка из разложения \bar{G} , то дополнительное упрощение может быть получено за счет модификаций $\Gamma_{a\tau}$, G' и т. д., подобно тому как это было указано Дайсоном [5]. Так, за счет модификации G' в выражение, соответствующее диаграмме 1, может быть автоматически включено выражение, соответствующее диаграмме 2а (член поляризации вакуума). Диаграмма 3а будет тогда включаться в диаграмму 2А и т. д. Аналогично модификации $\Gamma_{a\tau}$ и $\Gamma_{b\sigma}$ приведут к включению диаграммы 2В (типа лэмбовского сдвига) в диаграмму 1, диаграммы 3В в диаграмму 2А и т. д. Модификация $G^{(2A)}$ приведет к включению диаграмм, содержащих части, подобные диаграмме 4а, в диаграммы, содержащие части, подобные диаграмме 2А, и т. д.

Мы можем снова чисто формально записать, согласно предписаниям статей [1, 2] (см. формулу (18) статьи [1]), уравнение распространения волновой функции $\psi(I, 2)$, используя для этого $K(3, 4; I, 2)$;

$$\psi(3, 4) = \iint K(3, 4; I, 2) N^a(I) N^b(2) \psi(I, 2) d^3 V_1 d^3 V_2, \quad (10)$$

где для любого 4-вектора A_μ положено

$$A^a \equiv A_\mu \gamma_{\mu a}.$$

В $x_{\mu 1}$ -пространстве интегрирование выполняется в пространстве — времени по замкнутой трехмерной поверхности, окружающей точку $x_{\mu 3}$. Основными частями этой поверхности являются две пространственно-подобные поверхности, а именно, все трехмерное пространство при $t_1 < t_3$ и все трехмерное пространство при $t_1 > t_3$. Вектор N_μ представляет собой направленную внутрь нормаль к поверхности. В момент времени t_1 существенно входят здесь только те компоненты $\psi(I, 2)$, которые соответствуют положительной энергии частицы, а от момента времени t_1 — только компоненты, соответствующие отрицательной энергии. Для пространства $x_{\mu 2}$ и частицы b имеют место аналогичные правила.

Обозначим через $\varphi_{1,2}(3, 4)$ выражение, получающееся для $\varphi(3, 4)$ при подстановке $K_{+a}(3, I) K_{+b}(I, 2)$ в формулу (10) вместо $K(3, 4; I, 2)$. Тогда $\varphi_{1,2}(3, 4)$ будет волновой функцией, зависящей от t_3 и t_1 так, как зависит волновая двух свободных частиц, и равной $\psi(I, 2)$ при $t_3 = t_1$ и $t_4 = t_2$. Подставив (9) в формулу (10), получим неоднородное интегральное уравнение для $\psi(3, 4)$:

$$\psi(3, 4) = \varphi_{1,2}(3, 4) - i \iiint \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 \times \\ \times K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) \bar{G}(5, 6; 7, 8) \psi(7, 8). \quad (11)$$

Удобно отделить движение центра масс от относительного движения. При этом возникают известные затруднения, вызванные тем, что в релятивистской теории нельзя определить координаты центра масс. Однако может быть определен полный импульс, являющийся импульсом движения центра масс. Можно затем более или менее произвольно выделить некоторую координату, представляющую абсолютное положение в пространстве и времени и использовать, кроме нее, только относительные координаты. Обозначим „абсолютную“ координату через X_μ ; в качестве нее можно, в частности, взять положение частицы или линейную комбинацию

$$X_\mu = \alpha x_{\mu 1} + (1 - \alpha) x_{\mu 2} \quad (12)$$

с некоторой произвольной константой α . Обозначим затем относительную координату через

$$x_\mu = x_{\mu 1} - x_{\mu 2}. \quad (12a)$$

Штрихованные величины x'_μ, X'_μ и т. п. будут обозначать соответствующие выражения, получающиеся при замене 1 на 3 и 2 на 4. Если функция взаимодействия $G(1, 2)$ не зависит от внешних факторов, то она будет функцией $G(x_\mu)$ только от x_μ . Величина $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ будет тогда зависеть от относительных пространственно-временных координат x_μ и x'_μ и от разности двух „абсолютных“ координат $(X_\mu - X'_\mu)$, но не будет зависеть от самих координат. В этом случае мы можем искать решение для нашей волновой функции в частном виде

$$\psi(1, 2) = \exp(iK_\mu X_\mu) \psi(x_\mu), \tag{13}$$

где K_μ — некоторый произвольный постоянный четырехмерный вектор. Подобная волновая функция представляет собой собственную функцию оператора полного импульса P_μ и, следовательно, является стационарным состоянием с полной энергией K_4 . Условием того, что это состояние является связанным, будет неравенство

$$K^2 \equiv K_\mu K_\mu < (m_a + m_b)^2. \tag{14}$$

Любое решение уравнения (11) может быть разложено по компонентам Фурье вида (13). Если мы выберем компоненту Фурье, удовлетворяющую условию для энергии (14), то для этой компоненты член $\varphi_{1,2}(3, 4)$ должен в уравнении (11) обращаться в нуль, поскольку он представляет свободное состояние двух частиц и, следовательно, при этом не может выполняться условия (14). Поэтому для связанного состояния мы получаем уравнение без неоднородного члена:

$$\psi(3, 4) = -i \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 K_{+a}(3, 5) K_{+b}(4, 6) \bar{G}(5, 6; 7, 8) \psi(7, 8). \tag{11a}$$

Точно такое же уравнение было строго выведено из квантовой теории поля Гель-Маном и Лоу [6]. Связь этого уравнения с формулами для состояний „положительной энергии“ становится наглядной, если учесть, что в каждом стационарном состоянии происходит бесконечное число рассеяний, так что каждая функция свободных частиц, подобная $\varphi_{1,2}(3, 4)$, которая могла „первоначально“ присутствовать, будет разрушаться с течением времени.

В противоположность строгим рассуждениям Гель-Мана и Лоу, мы только формально вывели соотношения (9), (11) и (11a) из соотношения (10) и выражения Фейнмана для $K(3, 4; 1, 2)$ в виде двойной суммы. Гель-Ман и Лоу [6] показали, что данное выражение для $K(3, 4; 1, 2)$ и, следовательно, уравнение (9) могут быть строго выведены из квантовой теории поля. В действительности уравнение (10) перестает быть правильным, если нельзя пренебречь взаимодействием между моментами времени t_1 и t_2 . Если взаимодействие остается постоянным в течение всего времени, то будет правильным не уравнение (11), а уравнение (11a).

3. Дальнейшее исследование полученного уравнения

Для дальнейшего исследования удобно перейти к импульсным переменным. Если $\chi(p_3, p_4)$ — обращение Фурье функции $\psi(3, 4)$, то уравнение (11a) преобразуется в

$$\chi(p_3, p_4) = i \int \int dp_7 dp_8 [p_3^a - m_a]^{-1} [p_4^b - m_b]^{-1} \bar{G}(p_3, p_4; p_7, p_8) \chi(p_7, p_8), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}(p_3, p_4; p_7, p_8) = & (2\pi)^{-8} \int \int \int \int d\tau_5 d\tau_6 d\tau_7 d\tau_8 \times \\ & \times \exp \{i[p_3 x_5 + p_4 x_6 - p_7 x_7 - p_8 x_8]\} \bar{G}(5, 6; 7, 8). \end{aligned}$$

Символы p_3 и т. п. означают четырехмерные векторы, а символы $p_3 x_5$ — четырехмерные скалярные произведения; каждый из интегралов в уравнении (15) распро-

странен по всему четырехмерному пространству. Индекс a у p_3^a означает, что используются γ -операторы Дирака, относящиеся к частице a .

Далее, можно ввести полный и относительный импульсы. Определяя координаты согласно формулам (12) и (12а), получаем для сопряженных импульсов выражения

$$\begin{aligned} P_\mu &\equiv i\partial_{x_\mu} = i\partial_{x_{\mu 1}} + i\partial_{x_{\mu 2}}, \\ p_\mu &\equiv i\partial_{x_\mu} = i(1 - \alpha)\partial_{x_{\mu 1}} - i\alpha\partial_{x_{\mu 2}}. \end{aligned} \quad (12б)$$

Здесь P_μ является, очевидно, однозначно определенным полным импульсом, в то время как определение относительного импульса может быть изменено в зависимости от выбора постоянной α . Для облегчения перехода к нерелятивистскому пределу удобно взять частное значение

$$\alpha = \frac{m_a}{m_a + m_b}; \quad (12в)$$

тогда в нерелятивистском пределе координата (12) перейдет в координату центра масс. Однако все вычисления настоящего раздела не зависят от выбора постоянной α .

При выборе переменных, определяемых формулами (12)–(12в), уравнение (15) сводится к виду

$$\psi(p_\mu) = i \int d^4 p' \mathfrak{F}^{-1} \bar{G}(p, p'; K) \psi(p'_\mu), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}(p, p'; K) &= (2\pi)^{-4} \int \int \int d\tau_x d\tau_{x'} d\tau_{X-X'} \times \\ &\times \exp \{i[K(X-X') + px - p'x']\} G(x, x'; X-X') \end{aligned}$$

и

$$\mathfrak{F} = \left[\frac{m_a}{m_a + m_b} K^a + p^a - m_a \right] \left[\frac{m_b}{m_a + m_b} K^b - p^b - m_b \right].$$

Уравнение (16) представляет собой интегральное уравнение для волновой функции в импульсном пространстве $\psi(p_\mu)$, зависящей только от четырех переменных, а именно, от компонент относительного импульса двух взаимодействующих частиц. Эта функция отличается от обычной шредингеровской волновой функции в импульсном пространстве наличием „относительной энергии“ $\varepsilon \equiv p_4$ в качестве четвертой независимой переменной. Величина $\bar{G}(p, p'; K)$ является обобщенной функцией взаимодействия в четырехмерном импульсном пространстве.

Представляется заманчивым упростить уравнение (16) (или уравнение (15)) за счет умножения его с обеих сторон на оператор \mathfrak{F} , который не зависит от переменных интегрирования p', P' . При этом получается уравнение

$$\mathfrak{F}\psi(p_\mu) = i \int d^4 p' \bar{G}(p, p'; K) \psi(p'_\mu). \quad (17)$$

Из уравнения (17) можно получить эквивалентное уравнение в координатном пространстве:

$$\mathfrak{F}\psi(x_\mu) = i \int d\tau_{x'} \bar{G}(x, x'; K) \psi(x'_\mu), \quad (18)$$

где

$$\bar{G}(x, x'; K) = \int d\tau_{X'} \exp [iK(X-X')] \bar{G}(x, x'; X-X'),$$

и p^a следует уже рассматривать как дифференциальный оператор $i\nabla^a \equiv i\gamma_{\mu a} \partial_{x_\mu}$. Так как $\psi(p_\mu)$ зависит от „относительной энергии“ p_4 , то $\psi(x_\mu)$ в уравнении (18) зависит не только от трех пространственных координат, но также и от „относительной временной переменной“ $t \equiv x_4$. Уравнение (18) также явно релятивистски инвариантно и его следует рассматривать как уравнение в четырехмер-

ном пространстве для задачи о собственных значениях с величиной K^2 в качестве собственного значения при энергии связи, равной $[m_a + m_b - |K|]$.

Интегродифференциальное уравнение, подобное уравнению (18), может быть получено без использования понятия о центре масс системы и уравнения (13) посредством действия на уравнение (11) или (11а) оператором $(i\nabla_3^a - m_a) \times (i\nabla_4^b - m_b)$, после чего получается

$$(i\nabla_3^a - m_a)(i\nabla_4^b - m_b)\psi(3, 4) = i \int \int d\tau_5 d\tau_6 \bar{G}(3, 4; 5, 6)\psi(5, 6). \quad (19)$$

Уравнение (19) является в нашем случае аналогом уравнения для дираковской частицы во внешнем поле. Как было разъяснено в статье [1], для получения результатов, эквивалентных результатам теории дырок, следует принять, что обе массы в уравнении (19) [а также в уравнениях (17) и (18)] обладают бесконечно малой отрицательной мнимой слагающей.

Если постоянная связи g^2 мала, то мы получим разумное приближение, заменив $\bar{G}(1, 2; 3, 4)$ на $G^{(1)}(1, 2; 3, 4)$. Такая подстановка значительно упрощает уравнения (11), (11а), (15) — (19), в силу наличия δ -функций в выражении (2). В подобном приближении уравнение (17) сводится к уравнению

$$\mathcal{F}\psi(p_\mu) = (2\pi)^{-2} i \int d^4k G(k_\nu)\psi(p_\mu + k_\nu), \quad (17a)$$

где функция взаимодействия в импульсном пространстве $G(k_\nu)$ представляет собой *четырёхмерное* обращение Фурье функции $G(1, 2)$. Аналогично, уравнения (18) и (19) сводятся при этом к простым дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{F}\psi(x_\mu) = iG(x_\nu)\psi(x_\nu) \quad (18a)$$

и

$$(i\nabla_1^a - m_a)(i\nabla_2^b - m_b)\psi(1, 2) = iG(1, 2)\psi(1, 2). \quad (19a)$$

Хотя каждое решение уравнения (11а) удовлетворяет также уравнению (19), однако обратное положение не является всегда справедливым, поскольку уравнение (19) выводится из (11) или (11а) умножением на два дифференциальных оператора. Решения уравнения (11а) или эквивалентных ему уравнений (15) и (16), соответствующие заданному значению полной энергии, однозначно определяют стационарные состояния системы. Практически, однако, оказывается более удобным решать уравнение (19) или, что эквивалентно, уравнения (17) и (18), чем уравнение (11а). Так как выполнимость уравнения (19) является необходимым, но не достаточным условием, то только те решения этого уравнения будут физически приемлемыми, для которых доказывается, что они удовлетворяют уравнению (11а). С практической точки зрения более желательно иметь некоторые критерии „хорошего поведения“ волновой функции $\psi(1, 2)$, непосредственно определяющие без обращения к уравнению (11а), какие из решений уравнения (19) соответствуют физическим состояниям. Пока не найдено полностью удовлетворительного набора таких критериев; однако последующее рассмотрение некоторого воображаемого адиабатического варьирования постоянной связи g^2 может быть пригодно для их нахождения, а также для более глубокого истолкования физического смысла волновой функции $\psi(1, 2)$.

Пусть T будет временной координатой X_4 центра масс в той системе координат, в которой этот центр масс покоится. Допустим, что функция $G(1, 2)$ не совсем неизменна, а что константа связи g^2 является бесконечно медленно изменяющейся в зависимости от T (адиабатической) функцией $g^2(T)$, причем для очень больших положительных и отрицательных значений T величина $g^2(T)$ сколь угодно мала, а при $-T_0 < T < T_0$ величина $g^2(T)$ практически постоянна и равна своему истинному физическому значению g_0^2 . Предположим, что мы нашли совокупность таких решений уравнения (18) (по одному для каждого значения g^2 между нулем и g_0^2), что как K^2 , так и $\psi(x_\nu)$ оказываются „гладкими“

непрерывными функциями от g^2 . В пределе бесконечно медленной вариации $g^2(T)$ волновая функция будет задаваться адиабатическим приближением

$$\psi(x_\mu; \mathbf{X}, T) = \exp \left\{ iK\mathbf{X} + i \int_{-\infty}^T dT' K_i [g^2(T')] \right\} \psi(x_\mu; g^2(T)). \quad (20)$$

Для придания решению $\psi(x_\mu; \mathbf{X}, T)$ физического смысла, необходимо, чтобы волновая функция $\psi(x_\mu; g^2(T))$ при $g^2(\pm\infty) = 0$ описывала две свободные дираковские частицы с массами m_u и m_s соответственно. Если частная совокупность решений уравнения (18) удовлетворяет этому „граничному условию“, то эта совокупность удовлетворяет уравнению (11)¹⁾.

Рассматривавшиеся до сих пор связанные состояния в том случае, когда постоянная связи адиабатически стремится к нулю, переходят в состояние, в котором присутствуют только две частицы и нет других пар частиц или квантов. Когда взаимодействие „выпадает“, функция $\psi(I, 2)$ представляет лишь частную амплитуду вероятности наличия только двух частиц. Однако в принципе должно быть возможно выразить частные амплитуды вероятности для случаев наличия любого числа дополнительных пар частиц и квантов только через $\psi(I, 2)$ и $K^2(g^2)$. Такие выражения будут состоять из разложений по положительным степеням g^2 и будут обращаться в нуль в пределе при g^2 , стремящемся к нулю. Могут существовать также более сложные виды связанных состояний. В частности, может существовать связанное состояние с двумя частицами и одним квантом. (При достаточно больших значениях g^2 сами кванты могут также оказаться связанными с двумя частицами.) Исходная волновая функция для подобного связанного состояния будет иметь вид $\psi(I, 2; q_\mu)$, где q_μ обозначает координаты кванта, и будет удовлетворять более сложному уравнению типа (11а). Амплитуды вероятности наличия двух частиц и ни одного кванта, двух частиц и двух квантов и т. д. будут тогда выражаться через $\psi(I, 2; q_\mu)$ и будут стремиться к нулю при стремлении g^2 к нулю.

В нерелятивистском пределе в случае малой постоянной связи изложенный формализм сводится к обычному нерелятивистскому уравнению Шредингера для связанного состояния двух частиц. Соответствующий пример, а также способ практического решения уравнения (19) приведены в следующем разделе.

4. Скалярные мезоны. Предельный нерелятивистский случай

Рассмотрим задачу основного состояния дейтерона, используя теорию скалярных мезонов со скалярной связью. Мы будем решать только приближенное уравнение (19а), получающееся из уравнения (19) при замене там \bar{G} на первый член разложения $G^{(1)2}$). Наиболее удобно использовать эквивалентное уравнение в пространстве относительных импульсов (17а), которое принимает вид

$$\left(\frac{1}{2} K^a + p^a - M \right) \left(\frac{1}{2} K^b - p^b - M \right) \psi(p_\mu) = \\ = -g^2 (4\pi^3 i)^{-1} \int d^4 k [k_\nu^2 - \mu^2]^{-1} \psi(p_\mu + k_\mu), \quad (21)$$

где мы подставили релятивистское обобщение потенциала Юкавы

$$G(k_\mu) = g^2 [\pi (k_\nu^2 - \mu^2)]^{-1}. \quad (22)$$

¹⁾ Как будет видно, данный критерий „хорошего поведения“ должен быть достаточным; однако он не является однозначным, так как адиабатическая вариация волновой функции не полностью определена для такого значения $g^2(T)$, которое соответствует связанному состоянию с нулевой энергией связи. — *Прим. авт.*

²⁾ Другой, более удобный метод приближенного решения уравнения (19) указан в статье XIII настоящего сборника. — *Прим. ред.*

Постоянные M и μ представляют собой соответственно массу нуклона и массу мезона, каждая из которых включает бесконечно малую отрицательную мнимую часть, а g^2 является безразмерной постоянной связи, эквивалентной постоянной тонкой структуры квантовой электродинамики. Без потери общности мы можем выбрать такую систему координат, в которой центр масс покоится. Первые три компоненты K_μ будут тогда равны нулю, а K_4 будет собственным значением уравнения (21).

Радиус ядерных сил велик по сравнению с комptonовской длиной волны нуклона, и, следовательно, масса мезона μ мала в сравнении с массой нуклона M . Кроме того, энергия связи дейтерона меньше, чем $\mu^2 M$. При этих условиях нерелятивистский подсчет задачи дейтерона показывает, что постоянная связи g^2 имеет порядок величины μM и, следовательно, мала по сравнению с единицей. Далее, найдено, что распределение импульсов в нуклоне резко обрывается для импульсов, больших чем μ , т. е. „скорости“ в дейтероне имеют порядок величины g^2 и, следовательно, малы. Поэтому подобное нерелятивистское решение должно быть хорошим приближением и должно совпадать с нерелятивистским пределом для уравнения (21).

Волновая функция $\psi(p_a)$ или $\psi(x_a)$ является шестнадцатикомпонентным спинором, причем каждая из 16 компонент относится к одному из двух возможных направлений спина и одному из двух возможных знаков энергии каждой из двух частиц. По аналогии с обычной трактовкой нерелятивистского предела уравнения Дирака мы будем проводить сведение к „большим компонентам“ уравнений (19а) или (21), т. е. будем искать приближенное уравнение, содержащее только спинорные компоненты, относящиеся к обеим частицам в состояниях с положительной энергией. Это можно выполнить разными способами, аналогичными различным способам, которые используются в случае уравнения Дирака (7). Один из таких путей состоит в переносе члена, содержащего G , на левую сторону уравнения (19а) и умножении этого уравнения слева на оператор $[(p_1^a + m_a)(p_2^b + m_b) - iG]$, после чего получается уравнение

$$\{ (p_1^a - m_a)(p_2^b - m_b) - i[G, (p_1^a p_2^b + m_a m_b)]_+ + + i[G, (p_1^a m_b + p_2^b m_a)]_- - G^2 \} \psi(1, 2) = 0, \quad (23)$$

где $p_1^a = i\gamma_{\mu a} \partial x_{\mu 1}$; уравнение (23) рассматривается как обычное дифференциальное уравнение в конфигурационном пространстве. Аналогичное уравнение может быть получено из уравнения (21). Далее, берем разложение в ряд по степеням p/M и g^2 (которые имеют один и тот же порядок величины) и ограничиваемся только первыми двумя не исчезающими членами в этом разложении (p^4 и p^5/M соответственно). Пространственные компоненты γ_μ имеют порядок p/M . Из уравнения (24), которое будет выведено, вытекает, что G имеет порядок величины p^4/M^2 . Следовательно¹⁾, третье и четвертое слагаемые уравнения (23) дают лишь члены порядка p^6/M^2 и выше. Пусть $E \equiv (2M - K_4)$ будет энергией связи, $\varepsilon \equiv p_4$ — переменной относительной энергии и $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$ — трехмерным относительным импульсом. Уравнение (23) сводится тогда к следующему приближенному уравнению для „больших компонент“ в пространстве относительной энергии и импульса:

$$\left(\frac{1}{2} E + \varepsilon + \frac{p^2}{2M} \right) \left(\frac{1}{2} E - \varepsilon + \frac{p^2}{2M} \right) \psi(\mathbf{p}, \varepsilon) = = - \frac{k^2}{2\pi i} \int \int d^3 k d\omega [2\pi^2 (k^2 - \omega^2 + \mu^2)]^{-1} \psi(\mathbf{p} + \mathbf{k}, \varepsilon + \omega). \quad (24)$$

Это уравнение вообще не содержит дираковских (т. е. спиновых) операторов. Поскольку в уравнении (21) в величину M (но не в p_4) входит бесконечно

¹⁾ Доказательство этого требует только алгебраических выкладок. — Прим. авт.

малая отрицательная мнимая часть, то величина $\frac{1}{2}E$ в обоих множителях в уравнении (24) также содержит отрицательную мнимую часть.

В следующем разделе будет описан метод решения уравнения (24) методом итераций. Однако мы уже сейчас покажем, что если опустить слагаемое относительной энергии ω^2 в знаменателе правой части уравнения (24), то это уравнение непосредственно сводится к обычному уравнению Шредингера для двух нерелятивистских частиц. Подобное отбрасывание слагаемого ω^2 эквивалентно замене релятивистски инвариантного и, следовательно, запаздывающего юкавского взаимодействия на мгновенное взаимодействие в системе центра масс. Заменяем переменную интегрирования ω на $(\omega \mp \varepsilon)$ и введем функцию

$$\varphi(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon' \psi(\mathbf{p}, \varepsilon'). \quad (25)$$

Правая сторона преобразованного уравнения (24) не будет уже содержать ε , а с левой стороны ψ будет умножаться на число (а не на оператор). Мы можем поэтому записать преобразованное уравнение (24) в виде

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{p}, \varepsilon) = & -g^2 \left\{ \left[\left(\frac{E}{2} \right) + \left(\frac{p^2}{2M} \right) + \varepsilon \right] \left[\frac{E}{2} + \frac{p^2}{2M} - \varepsilon \right] 2\pi i \right\}^{-1} \times \\ & \times \int d^3k \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}) [2\pi^2(k^2 + \mu^2)]^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

От ε зависят теперь только два первых множителя в уравнении (26); их легко проинтегрировать по ε , учитывая то обстоятельство, что E содержит малую отрицательную мнимую часть. После интегрирования получается простое уравнение для $\varphi(\mathbf{p})$:

$$\left(E + \frac{p^2}{M} \right) \varphi(\mathbf{p}) = -g^2 \int d^3k \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}) [2\pi^2(k^2 + \mu^2)]^{-1}. \quad (27)$$

Уравнение (27) совпадает с уравнением Шредингера в импульсном пространстве для двух нерелятивистских нуклеонов, взаимодействующих через средство статического центрального потенциала Юкава.

Для описания относительного движения двух нуклеонов можно вместо $\psi(x_\mu)$ или $\psi(p_\mu)$ брать „смешанную“ волновую функцию $\psi(\mathbf{p}, t)$, получающуюся, если взять обращение Фурье от $\psi(x, t)$ только по трем пространственным координатам, но не по относительному времени. Функция $\varphi(\mathbf{p})$, являющаяся обычной волновой функцией в импульсном пространстве, будет, очевидно, совпадать с точностью до постоянного множителя с $\psi(\mathbf{p}, t)$ при частном значении $t=0$, т. е. при одних и тех же временах у обеих частиц. Общее выражение для $\psi(\mathbf{p}, t)$ может быть получено из уравнений (26) и (27), при этом полная волновая функция пропорциональна $\varphi(\mathbf{p})$ с коэффициентом пропорциональности, равным

$$\begin{aligned} \exp \left\{ iET + i \left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right) t \right\} &= \exp \left\{ i \left(E + \frac{p^2}{2M} \right) t_1 - i \frac{p^2}{2M} t_2 \right\} \text{ для } t < 0, \\ \exp \left\{ iET - i \left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right) t \right\} &= \exp \left\{ i \left(E + \frac{p^2}{2M} \right) t_2 - i \frac{p^2}{2M} t_1 \right\} \text{ для } t > 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Можно сказать, что эта волновая функция (28) соответствует распространению в „будущее“ в виде свободной волны (частота $p^2/2M$) и распространению в „прошлое“ более сложным „связанным“ образом.

5. Строгое решение нерелятивистского уравнения

Решения уравнений (24) и (26) отличаются на члены относительного порядка g^2 . Было найдено, что непосредственное использование разложения теории возмущений в ряд по степеням g^2 с решением уравнения (26) в качестве нулевого приближения приводит к неверным результатам даже при

очень малых значениях g^2 . Это вызвано тем обстоятельством, что одно из подинтегральных выражений, входящих в решение уравнения (24), имеет полюс при некотором значении ε , для которого решение уравнения (26) является очень плохим приближением. В статье [8] был описан способ решения интегральных уравнений типа, подобного уравнению (24), с помощью метода итерации, который не включает какого-либо разложения по степеням g^2 .

Такой метод итераций был применен [9] для решения уравнения [27] для основного состояния дейтерона с исходной пробной волновой функцией вида

$$\varphi_0(\mathbf{p}) = \left[\left(E + \frac{p^2}{M} \right) (p^2 a^{-2} + \mu^2) \right]^{-1}, \quad (29)$$

где a — безразмерный параметр. Исходя из аналогии с методами статьи [8], мы возьмем для решения уравнения (24) исходную пробную волновую функцию основного состояния дейтерона в виде

$$\psi_0(\mathbf{p}, \varepsilon) = \left[\left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{-1} (p^2 a^{-2} - \varepsilon^2 b^{-2} + \mu^2)^{-1}, \quad (30)$$

где a и b — безразмерные коэффициенты, которые надлежит определить; при этом считается, что E и μ имеют малую отрицательную мнимую часть. При значениях ε , малых в сравнении с μ , функция ψ_0 мало отличается от соответствующего решения уравнения (26). Из рассмотрения первого множителя выражения (30) следует, что наиболее существенны значения $\psi(\mathbf{p}, \varepsilon)$ при $|\varepsilon|$, равном по порядку величины μ^2/M , т. е. при $|\varepsilon|$, действительно много меньшем, чем μ . Выражение (30) для ψ_0 дастся затем вместо ψ в интеграл с правой стороны уравнения (24), что дает следующее приближение для $\psi(\mathbf{p}, \varepsilon)$, а именно, первую итерированную функцию $\psi_1(\mathbf{p}, \varepsilon)$:

$$\psi_1(\mathbf{p}, \varepsilon) = -g^2 \left[\left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{-1} \int \int d^3k d\omega \psi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}; \varepsilon + \omega) \times \\ \times [4\pi^3 i (k^2 - \omega^2 + \mu^2)]^{-1}. \quad (31)$$

Подобные итерации могут быть в принципе повторены любое число раз.

Так как энергия связи дейтерона известна, мы будем считать E заданным, а g^2 будем рассматривать как собственное значение уравнения (24). После этого мы получим последовательные приближения g_1^2, g_2^2 и т. д., потребовав

$$\psi_{n+1}(0, 0) = \psi_n(0, 0). \quad (32)$$

Для упрощения вычислений удобно ввести две функции $a_n(p)$ и $b_n(p, \varepsilon)$ следующим образом:

$$\psi_n(\mathbf{p}, \varepsilon) = \left[\left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]^{-1} \{ p^2 a_n^{-2}(p) - \varepsilon^2 b_n^{-2}(p, \varepsilon) + \mu^2 \}^{-1}. \quad (33)$$

Удобство введения функций a_n и b_n связано с тем, что они медленно изменяются при изменении p и ε . Определим далее „разумные“ значения a и b , потребовав, чтобы при специально подобранных значениях p и ε имели место соотношения

$$\frac{\psi_1(p, 0)}{\psi_1(0, 0)} = \frac{\psi_0(p, 0)}{\psi_0(0, 0)}, \quad \text{т. е. } a_1(p) = a; \quad (34)$$

$$\frac{\psi_1(p, \varepsilon)}{\psi_1(p, 0)} = \frac{\psi_0(p, \varepsilon)}{\psi_0(p, 0)}, \quad \text{т. е. } b_1(p, \varepsilon) = b. \quad (35)$$

За более детальным рассмотрением используемого метода отсылаем к статье [8].

Выбор массы мезона μ , равной $275 m_e$, хорошо согласуется как с массой заряженного π -мезона [10], так и с вычислениями эффективной области взаимодействия нейтрон — протон в триплетном состоянии [11]. В связи с этим мы положим величину μ/M равной 0,150. Для отношения $(EM)^{1/2}/\mu$ примем значение 0,32, что соответствует энергии связи дейтерона $E = 2,226 \text{ Мэв}$ и указанной

величине массы мезона. Определим значение a , применив условие (34) при $p = a$. В случае предельного нерелятивистского уравнения (26) аналогичный выбор [9] дает для a значение, равное приблизительно 1,85; из трехмерных уравнений, эквивалентных уравнениям (31) и (32), при $n = 0$ следует значение для g_1^2 , равное 2,39 μ/M . Это значение g_1^2 отличается от точного значения g^2 , соответствующего уравнению (26), только на доли процента [9].

Оценка значения b в случае четырехмерного уравнения (24) может быть легко получена с помощью соотношений (31) и (35) для четырех случаев (p и ϵ либо очень малы, либо очень велики в сравнении с μ); при этом оценка значения a получается из соотношений (31) и (34). Подобные подсчеты могут быть в принципе выполнены при любой величине μ/M ; однако они оказываются довольно сложными, так как соотношения (34) и (35) являются связанными уравнениями для двух неизвестных a и b . Для упрощения вычислений нами было взято разложение по степеням μ/M с сохранением только первых двух членов этого разложения. В этом приближении в соотношение (1.35) вместо a входит величина 1,85 и при $p \ll \mu$ и $\epsilon \ll \mu$ получается $b = 1,31$; при $p \ll \mu$ и $\epsilon \gg \mu$ получается $b = 1,93$; при $p \gg \mu$ и любом значении ϵ получается $b = 1,85$. В последующих вычислениях используется в известной мере произвольное значение $b = 1,6$. Далее, нами было решено уравнение (34) при $p = a$, для чего пришлось произвести небольшое численное интегрирование. В случае полученных значений для a и b уравнения (31) и (32) дают при $n = 0$ следующее значение для g_1^2 :

$$a = 1,85 \left(1 - 0,56 \frac{\mu}{M} \right), \quad b = 1,6;$$

$$g_1^2 = 2,39 \frac{\mu}{M} \left(1 + 0,98 \frac{\mu}{M} \right). \quad (36)$$

Входящие в уравнение (31) интегралы не могут быть взяты аналитически при любых p и ϵ ; однако численное вычисление при какой-либо частной паре значений p и ϵ , включающее определение $\psi_1(p, \epsilon)$, не очень сложно; функция $a_1(p)$ вещественна при всех значениях p ; функция $b_1(p, \epsilon)$ вещественна при $\epsilon < \mu$ и, вообще говоря, комплексна при $\epsilon > \mu$. Функция $a_1(p)$ и абсолютная величина $b_1(p, \epsilon)$ являются медленно меняющимися функциями и изменяются на всем интервале $0 < p, \epsilon < M$ не более чем примерно на 50%. Следовательно, можно определить величины $\psi_1(p, \epsilon)$, $a_1(p)$ и $b_1(p, \epsilon)$ лишь при нескольких значениях p и ϵ и пользоваться интерполяцией для вычисления $a_1(p)$ и $b_1(p, \epsilon)$ при промежуточных значениях p и ϵ . Следующее приближение g_2^2 для константы связи в уравнении (24) может быть затем получено с помощью еще одного двукратного интегрирования с использованием уравнения (31) при $n = 1$. Однако величина g_1^2 , повидимому, отличается от g_2^2 не более чем на 1—2%. Так как при выводе уравнения (24) члены относительного порядка величины $(\mu/M)^2 > 0,01$ в каждом случае опускались, то подсчет g_2^2 не представляет интереса.

Смешанной волновой функцией, соответствующей $\psi_0(p, \epsilon)$, является функция

$$\frac{\exp(iET)}{\left[b^2(p^2 a^{-2} + \mu^2) - \left(\frac{E}{2} + \frac{p^2}{2M} \right)^2 \right]} \left\{ \frac{\exp \left[\pm i \left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right) t \right]}{\left(\frac{1}{2} E + \frac{p^2}{2M} \right)} - \frac{\exp \left[\pm i b (p^2 a^{-2} + \mu^2)^{1/2} t \right]}{b (p^2 a^{-2} + \mu^2)^{1/2}} \right\}, \quad (37)$$

где знак плюс берется при $t < 0$, а знак минус при $t > 0$. Первый член в формуле (37) имеет тот же вид, что и выражение (28); второй член дает составляющую волновой функции, которая не соответствует распространению в „будущее“ в качестве свободной волны и связана с тем обстоятельством, что использовалось

запаздывающее взаимодействие. Два различных знаменателя, входящих в первый и второй члены выражения (37), имеют порядок величины μ^2/M и μ соответственно. Таким образом, абсолютное значение второго члена меньше абсолютного значения первого члена примерно в μ/M раз.

Выражение (36) для g_1^2 показывает, что в случае использования релятивистской запаздывающей функции взаимодействия $(k^2 - \omega^2 + \mu^2)^{-1}$ получается результат, сильно отличающийся от результата, получающегося при использовании мгновенной функции взаимодействия $(k^2 + \mu^2)^{-1}$. Значение этой разницы легче понять, если вывести из уравнения (24) приближенное уравнение, содержащее трехмерную волновую функцию. Определим снова $\varphi_n(\mathbf{p})$ посредством соотношения

$$\varphi_n(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon' \psi_n(\mathbf{p}, \varepsilon').$$

В отличие от уравнения (26) в уравнении (24) нельзя исключить ε и ω , если неизвестна зависимость $\psi(\mathbf{p}, \varepsilon)$ от ε . Однако если подставить в уравнение (31) выражение (30), то интегрирование по ω может быть выполнено. Найденное таким образом выражение для $\psi_1(\mathbf{p}, \varepsilon)$ может быть затем проинтегрировано по ε , причем получается выражение для $\varphi_1(\mathbf{p})$, не содержащее ε или ω . Далее, подинтегральное выражение в получившейся формуле для $\varphi_1(\mathbf{p})$ можно выразить через $\varphi_0(\mathbf{p})$. Пренебрегая членами порядка $(\mu/M)^2$ в сравнении с единицей, получаем

$$\left(E + \frac{p^2}{M}\right) \varphi_1(\mathbf{p}) = -g^2 \int d^3k [2\pi^2(k^2 + \mu^2)]^{-1} \{1 + F(\mathbf{p}, \mathbf{k})\} \varphi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (38)$$

$$F(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \equiv \frac{E + (p^2 + |\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2)/2M}{(k^2 + \mu^2)^{1/2}} + \frac{\frac{1}{2}E + |\mathbf{p} + \mathbf{k}|^2/2M}{b(p^2 a^{-2} + \mu^2)^{1/2} + (k^2 + \mu^2)^{1/2}}. \quad (39)$$

Уравнение (38) совпадает с уравнением для функции $\varphi_1(\mathbf{p})$, получающимся из уравнения (26), если не считать появления дополнительного члена с множителем $F(\mathbf{p}, \mathbf{k})$. Таким образом, различие между запаздывающей и мгновенной функциями взаимодействия может быть учтено с точностью до первого порядка по μ/M в уравнении для обычной трехмерной волновой функции $\varphi(\mathbf{p})$ посредством прибавления дополнительного члена к $(k^2 + \mu^2)^{-1}$. Этот дополнительный член является функцией \mathbf{p} и \mathbf{k} и представляет собой поэтому потенциал, зависящий от скорости. При $p, k \ll \mu$ величина $F(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ имеет порядок μ/M .

Из уравнения (38) может быть также получено несколько более точное чем g_1^2 приближение к g^2 . Если опять считать отношение μ/M малым и брать разложение по степеням этого отношения, то функция $F(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ будет мала в сравнении с единицей во всей области, в которой подинтегральное выражение формулы (38) заметно отлично от нуля. Поэтому мы можем взять первое приближение теории возмущений, считая решение уравнения (27) для основного состояния невозмущенной волновой функцией и рассматривая $(k^2 + \mu^2)^{-1} F(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ как возмущающий потенциал. Следует отметить, что попытка применения теории возмущений непосредственно к уравнению (24) была бы эквивалентна неоправданному отбрасыванию второй части выражения (39) для $F(\mathbf{p}, \mathbf{k})$. Нами было найдено первое приближение теории возмущений для уравнения (38) с использованием выражения (29) как приближения к невозмущенной волновой функции. После ряда довольно утомительных численных и аналитических интегрирований мы нашли, считая энергию связи дейтерона постоянной,

$$g^2 = 2,39 \frac{\mu}{M} \left(1 + 1,07 \frac{\mu}{M}\right). \quad (40)$$

Выражение (40) дает только первые два члена разложения по степеням μ/M . Коэффициент 1,07 во втором слагаемом в формуле (40) вычислен с точностью до $10^0/0$; он совпадает, как и следовало ожидать, с соответствующим коэффициентом в менее точной формуле (36).

6. Обсуждение результатов

Из полученной формулы (40) следует, что значение g^2 , требующееся для получения правильной величины энергии связи дейтерона, отличается в релятивистской теории от соответствующего нерелятивистского значения на величину относительного порядка μ/M , т. е. на величину того же порядка, что и постоянная связи g^2 или среднее значение отношения p/M в основном состоянии дейтерона. Таким образом, мы получаем поправку относительного порядка v/c , где v — средняя скорость нуклеонов, в противоположность известному результату для атома водорода, где релятивистские эффекты (тонкая структура) имеют относительный порядок $(v/c)^2 \approx (e^2/\hbar c)^2$.

Подобный неожиданный результат не вызван какими-либо погрешностями, поскольку при выводе уравнения (24) из релятивистски инвариантного уравнения (21) отбрасывались члены лишь порядка p/M^2 и выше. В действительности мы подтвердим, что полученный результат является правильным с точностью до членов относительного порядка $(\mu/M)^2$, если только нуклеонами могут испускаться и поглощаться заряженные мезоны. С другой стороны, в случае нейтральных мезонов, как и в случае электромагнитного взаимодействия, имеющего место в водородном атоме, результат предыдущего раздела должен быть исправлен.

Действительно, уравнение (21), лежащее в основе вычислений предыдущего раздела, отличается от полного уравнения (19) заменой полной функции взаимодействия \bar{G} на функцию одномезонного взаимодействия $G^{(1)}$. Однако в случае нейтральных мезонов следует также принимать во внимание все остальные составляющие $G^{(n)}$; в частности, диаграммы $2A-2D$ фиг. 1 будут давать составляющие, содержащие только на одну степень g^2 больше, чем „главный“ член $G^{(1)}$, единственно учитывавшийся в уравнении (21). Следует поэтому ожидать, что данные члены будут давать поправки к выражению (40) порядка $g^2 \approx \mu/M$, т. е. того же порядка, что и величина отличия выражения (40) от нерелятивистского результата. В случае заряженных мезонов диаграммы $2A-2D$, как будет показано ниже, можно не учитывать.

Соответственно примеру тонкой структуры атома водорода следует ожидать, что составляющая от „двухмезонных диаграмм“ $2A-2D$ не только имеет тот же самый порядок, что и релятивистская поправка в формуле (40), но даже просто сокращается с ней, оставляя только поправки к нерелятивистскому результату, имеющие относительный порядок $(\mu/M)^2$. Действительно, при обычном выводе уравнения (27) из теории поля отбрасываются, очевидно, только члены относительного порядка $(p/M)^2$. Правильность этого подтверждает подробный релятивистский анализ проблемы, сделанный Данковым [12]. Поэтому мы должны показать, что наша теория также дает результат, совпадающий с точностью до $(\mu/M)^2$ с результатом нерелятивистской теории. Это можно, конечно, было бы сделать, вычислив явным образом составляющие, соответствующие диаграммам $2A-2D$ и показав, что эти составляющие точно сокращаются с членом релятивистской поправки в формуле (40); однако подобный способ доказательства является сложным и неубедительным. Вместо этого мы произведем модификацию теории, приводящую непосредственно к искомому результату; это преобразование к тому же удобно при практическом применении теории к случаю нейтральных полей.

Данное преобразование в известной мере аналогично преобразованию, использованному в разделе 8 статьи [2] для исключения продольного поля в квантовой электродинамике. Фейнман показал, что формальное включение определенной функции взаимодействия, явно зависящей от изменения энергии взаимодействующей частицы, в матричные элементы для любых процессов, претерпеваемых частицей (находящейся в начале и в конце в свободном состоянии), не влияет на полную амплитуду каждого подобного физического процесса. В случае электродинамики добавление таких членов к двум продольным составляющим запаздывающего электромагнитного взаимодействия приводит как раз к мно-

венному кулоновскому взаимодействию. Теперь мы покажем, что формальное включение несколько измененной функции взаимодействия не будет влиять на полную амплитуду каждого физического процесса, происходящего с участием нейтральных скалярных мезонов. Добавление такого взаимодействия к запаздывающему скалярному мезонному взаимодействию (22) приводит к мгновенному юкавскому взаимодействию и более сложному, но малому запаздывающему взаимодействию.

Рассмотрим амплитуду вероятности, соответствующую некоторой произвольной диаграмме с „вершинной частью“ Γ , для двух дираковских частиц, находящихся в начале и в конце в свободном состоянии и взаимодействующих N раз через посредство некоторых сил. В частном случае скалярных мезонов со скалярной связью определенные в формуле (2) величины Γ равны единице. Рассмотрим дополнительное взаимодействие, включающее изменение энергии — импульса q_μ с зависящей от скорости вершинной частью Δ ,

$$\Delta = (\mathbf{p} - M) \gamma_4 - \gamma_4 (\boldsymbol{\pi} - M) = (\mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}) \gamma_4 - \omega, \quad (41)$$

где p_μ и $\pi_\mu \equiv (p_\mu + q_\mu)$ — векторы энергии — импульса до и соответственно после взаимодействия, ω — изменение энергии q_4 и \mathbf{p} , $\boldsymbol{\pi}$ — трехмерного импульса. Данная функция взаимодействия аналогична использованной в статье [2] при замене γ_4 на единицу.

Изменим теперь произвольно указанную диаграмму, включающую N Γ -взаимодействий, введением дополнительного взаимодействия с вершинной частью Δ в первом случае до первого Γ -взаимодействия частицы a , во втором случае между первым и вторым взаимодействием и т. д., причем соответствующие вершинные части для частицы b оставляются произвольными. Просуммируем, далее, амплитуды, соответствующие полученным $N + 1$ измененным диаграммам, следуя способу, описанному в статье [2]. Составляющая этой суммы, соответствующая первому слагаемому выражения (41) для Δ , действующему между n -м и $(n + 1)$ -м взаимодействием, а также второму слагаемому выражения (41), действующему между $(n - 1)$ -м и n -м взаимодействием, содержит следующие множители:

$$\begin{aligned} & \dots (\mathbf{p}_{n-1} - M)^{-1} \Gamma_n (\mathbf{p}_n - M)^{-1} [(\mathbf{p}_n - M) \gamma_4] (\boldsymbol{\pi}_n - M)^{-1} \dots, \\ & - \dots (\mathbf{p}_{n-1} - M)^{-1} [\gamma_4 (\boldsymbol{\pi}_{n-1} - M)] (\boldsymbol{\pi}_{n-1} - M)^{-1} \Gamma_n (\boldsymbol{\pi}_n - M)^{-1} \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Составляющие, соответствующие первому члену уравнения (41), действующему до первого Γ -взаимодействия, и второму члену, действующему после последнего Γ -взаимодействия, равны нулю, так как частица a в начале и в конце является свободной. Сумма амплитуд, соответствующих данным $(N + 1)$ измененным диаграммам, равна поэтому сумме по N измененным диаграммам, у каждой из которых одно из N Γ -взаимодействий заменено на комбинированное взаимодействие с вершинной частью

$$\Delta' = \Gamma \gamma_4 - \gamma_4 \Gamma. \quad (43)$$

Если Γ равно единице, то Δ' равно нулю и введение Δ -взаимодействий не будет влиять на полную амплитуду. Выражение для Δ , использованное в статье [2] (где вместо γ_4 берется единица), приводит к Δ' , равному нулю при любых Γ .

В системе центра масс ($p_{a\mu} = -p_{b\mu} \equiv p_\mu$) мы определяем взаимодействие между частицами a и b , включающее передачу энергии — импульса $q_\mu = (\mathbf{k}\omega)$ с помощью зависящей от скорости функции взаимодействия $L(p_\mu; \mathbf{k}; \omega)$:

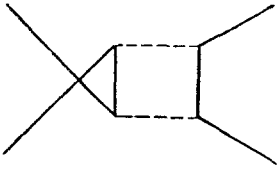
$$L = g^2 [4\pi^2 (k^2 - \omega^2 + \mu^2) (k^2 + \mu^2)]^{-1} \{ \Delta^a (\Delta^b - 2\omega) + (\Delta^a + 2\omega) \Delta^b \}. \quad (44)$$

Мы можем записать релятивистски инвариантную функцию взаимодействия $G(\mathbf{k}, \omega)$ для случая скалярных мезонов (выражение (22) как $\{|G - L| + L\}$. Используя выражение (44) и формулу (41), получаем

$$G - L = \frac{g^2}{2\pi^2 (k^2 + \mu^2)} \left\{ 1 - \frac{(\mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}) \gamma^a \gamma^a (\mathbf{p} + \boldsymbol{\pi}) \gamma^b \gamma^b}{(k^2 - \omega^2 + \mu^2)} \right\}. \quad (45)$$

Первые два члена выражения (45) точно совпадают с функцией мгновенного юкавского взаимодействия, причем при подстановке величины \bar{G} они приводят не к уравнению (24), а к уравнению (27). Второй член, представляющий взаимодействие, зависящее от скорости и спина, меньше первого члена примерно в $(\mu/M)^2$ раз, так как все величины p , k и $|\gamma M|$ имеют порядок μ . Так как в случае скалярных мезонов \bar{G} равно единице, то из формулы (43) следует, что дополнительная функция взаимодействия $\dagger L$ не должна в этом случае входить в полную амплитуду какого-либо взаимодействия между двумя частицами.

Можно считать, что „пересеченная“ диаграмма 2A соответствует „одновременному присутствию“ двух распространяющихся мезонов“. Первая часть выражения (45) представляет мгновенный обмен мезонами и следовало бы ожидать, что подобное взаимодействие не будет вносить никакого вклада в член $G^{(2A)}$, относящийся к диаграмме 2A. Действительно, так как диаграммой 2A учитываются также процессы с промежуточными состояниями отрицательной энергии (см. фиг. 3), данный вклад в $G^{(2A)}$ не равен полностью нулю, однако он меньше величины $G^{(2A)}$ для заглядывающего взаимодействия (22) примерно в $(\mu/M)^2$ раз. Второй член выражения (45) уже сам по себе мал, а соответствующая ему составляющая в $G^{(2A)}$ будет меньше еще на порядок μ/M ; сумма выражений $[G^{(2B)} + G^{(2C)} + G^{(2D)}]$ должна



Фиг. 3. Диаграмма для включаемого в диаграмму 2 процесса с участием виртуального порождения и уничтожения пары.

иметь такой же порядок, что и данная составляющая. Таким образом, мы показали, что замена \bar{G} на функцию мгновенного юкавского взаимодействия $g^2/2\pi^2(k^2 + \mu^2)$ приводит только к ошибкам относительного порядка $(\mu/M)^2$, причем главный поправочный член связан со вторым слагаемым выражения (45).

Однако в случае только одних *заряженных* мезонов положение коренным образом изменяется, если предполагать, что нуклеон не может превращаться при испускании и поглощении заряженных мезонов в обладающий двойным зарядом или же отрицательно заряженный протон, и если предполагать, что совершенно отсутствует связь нуклеонов с нейтральными мезонами. В этом случае положительные и отрицательные мезоны могут испускаться (или поглощаться) нуклеоном только чередуясь друг с другом, так что диаграмма 2A, а также диаграмма лэмбовского сдвига 2B полностью запрещаются законом сохранения заряда. Поскольку нуклоны в дейтероне не являются свободными, диаграммы собственной энергии и перенормировки массы 2C и 2D могут давать при совместном учете не равные нулю члены; однако эти члены, так же как и члены, соответствующие более сложным диаграммам, имеют меньший порядок величины, чем член $G^{(2A)}$, связанный с функцией заглядывающего скалярного взаимодействия. Следовательно, выражение (24) и приближенное решение, выведенное в связи с ним в предыдущем разделе, дают правильные два первых члена разложения по степеням μ/M в случае заряженных скалярных мезонов (при отсутствии заряженных нуклеонов). Следует отметить, что выполненное выше для нейтральных мезонов преобразование основывается на том условии, что Λ -взаимодействие может быть введено в *любой* точке каждой диаграммы. Если мы ограничиваемся только заряженными мезонами и нейтронами и протонами, то это условие не выполняется (ввиду сохранения заряда) и данное преобразование произведено быть не может.

В случае одних заряженных мезонов постоянная связи g^2 для взаимодействия должна, следовательно, быть примерно в 1,1 μ/M раз больше (на 15%), чем постоянная связи в случае одних нейтральных мезонов. Для смеси Сербера заряженных и нейтральных мезонов (не дающей сил в p -состояниях) данное превышение составляет только одну четверть указанной величины; в случае кеммеровской зарядно-симметричной смеси имеется по грубой оценке в четыре раза большее уменьшение. Следует подчеркнуть, что

вычисления проводились со скалярными мезонами в основном лишь для иллюстрации развитого метода, а не из-за убеждения, что такой выбор является физически правильным.

Описанные в этой статье уравнения применяются сейчас для исследования релятивистских поправок к тонкой и сверхтонкой структуре водорода. Пока не было найдено способа применения данного уравнения к задачам, в которых постоянная связи не является малой, т. е. к дейтерону с псевдоскалярными мезонами. Однако если задать некоторый феноменологический потенциал взаимодействия, то всегда можно найти его релятивистски инвариантное обобщение. Найденная релятивистски инвариантная функция взаимодействия может быть затем подставлена в формулу (19), при этом получится релятивистское феноменологическое уравнение для связанных состояний двух частиц. Нами намечается исследование подобным способом теории Ферми и Янга [13].

Авторы выражают благодарность проф. Фейнману и ряду своих коллег из Принстонскому институту и другим организациям за стимулирующие дискуссии, а также Гель-Ману и Лоу за сообщение полученных ими результатов до публикации.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СВОДКА УРАВНЕНИЙ, ВЫВЕДЕННЫХ В РАЗДЕЛАХ 2 И 3

Амплитуда $K(3,4; 1,2)$ однозначно определяется неоднородным интегральным уравнением (9). Такое определение полностью равносильно определению в виде двойных бесконечных рядов, данному Фейнманом. Из уравнения (9) вытекает уравнение (11) или (11a) для волновой функции в координатном пространстве $\psi(1,2)$. Уравнение (11) получается, если взаимодействие „включено“ только конечное время, а уравнение (11a), — если взаимодействие происходит постоянно. Уравнение (11) включает граничное условие в форме неоднородного члена $\varphi_{1,2}(3,4)$ и поэтому имеет только одно решение. Интегрированное уравнение (11a) является однородным и имеет бесконечное число решений, каждое из которых соответствует „физически допустимому состоянию“. Уравнение (15) для волновой функции в импульсном пространстве $\chi(p_1, p_2)$ представляет собой преобразование Фурье уравнения (11a).

В случае постоянного во всем временном интервале взаимодействия можно искать частные решения для волновой функции в виде (13). Подобные решения соответствуют состояниям с определенной полной энергией и полным импульсом. Для таких состояний уравнение (11a) сводится к более частному уравнению (не записанному явно в тексте), а уравнение (15) — к частному уравнению (16).

Действуя определенными операторами на уравнение (11a) или (11), мы получаем уравнение (19); эквивалентное уравнение (не приведенное явно) может быть получено из уравнения (15). Действуя эквивалентными операторами на уравнение (16) и на его аналог в координатном пространстве, мы получаем соответственно уравнения (17) и (18). Полученные четыре производных уравнения более удобны при практическом решении, однако их выполнимость является только необходимым, но недостаточным условием. При замене в уравнениях выражения \bar{G} на первый член его разложения $G^{(1)}$, уравнения (17)—(19) переходят в приближенные уравнения (17a), (18a) и (19a) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feuntpan R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). (См. статью III настоящего сборника.)
2. Feuntpan R. P., Phys. Rev., **76**, 769 (1949). (См. статью IV настоящего сборника.)
3. Dirac, P. A. M., Podolski, Sow. Phys., **2**, 468 (1932).
4. Bloch F., Sow. Phys., **5**, 301 (1934).
5. Dyson F. J., Phys. Rev., **73**, 486, 1736 (1949). (См. статью V настоящего сборника.)
6. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **84**, 350 (1951).
7. Bethe H. A., Handb. d. Phys., **24/1**, 304 (1933). (См. перевод: Бете Г., Квантовая механика простейших систем, М.—Л., 1934.) Kramers H. A., Hand. u. Jahrbuch der chemischen Physik, Akad. Verl., V. I, Leipzig, 1938, S. 295.
8. Salpeter E. E., Phys. Rev., **84**, 1226 (1951).
9. Goldstein J. S., Salpeter E. E. (в печати).
10. Smith, Barkas, Bishop, Bradner, Gardner, Phys. Rev., **73**, 86 (A) (1950).
11. Salpeter E. E., Phys. Rev., **82**, 60 (1951).
12. Dancoff S. M., Phys. Rev., **73**, 382 (1950).
13. Fermi E., Yang C. N., Phys. Rev., **76**, 1739 (1949).

ХИИ. МАССОВЫЕ ПОПРАВКИ К ТОНКОЙ СТРУКТУРЕ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ

Е. САЛЬПЕТЕР

E. E. Salpeter, Phys. Rev., 87, № 2, 328 (1952)

Дается дальнейшее рассмотрение выведенного ранее релятивистского четырехмерного волнового уравнения для связанных состояний системы из двух тел. Из этого уравнения получается в случае „мгновенной“ функции взаимодействия точное трехмерное уравнение, близкое, но не совпадающее с уравнением Брейта. Развивается теория возмущений для малого дополнительного немгновенного взаимодействия.

С помощью данного ковариантного метода вычисляются поправки относительного порядка $\alpha (m/M)$ к тонкой структуре водорода, связанные с конечностью массы ядра. В предыдущем приближенном рассмотрении, основывающемся на уравнении Брейта, в этом порядке не получалось никаких членов. Часть из полученных членов содержит множителем $\ln \alpha$. I оказывается, что подобные члены могут быть получены из обычной квантовой электродинамики с помощью теории возмущений.

Найденные поправки к тонкой структуре составляют $0,379 \text{ мэгц}$ для $2s$ -состояния атома водорода и $-0,017 \text{ мэгц}$ для $2p$ -состояния. Для водородоподобных атомов с более тяжелыми ядрами соответствующие поправки примерно в Z^2/A раз больше, чем поправки для водорода.

1. Введение

В случае водородоподобного атома с бесконечно тяжелым ядром уравнение Дирака позволяет получить точное выражение для тонкой структуры. Если принять, что бесконечно тяжелое ядро обладает заданным магнитным дипольным моментом паулиевского типа, то из уравнения Дирака может быть также выведено точное выражение для сверхтонкой структуры. В случае ядра массы M появляются поправки к указанным выражениям, вызываемые движением ядра (помимо того, что в нерелятивистском приближении в энергию связи подставляется приведенная масса μ). Следует ожидать, что такие поправки будут пропорциональны отношению m/M , где m — масса электрона, и некоторой степени постоянной тонкой структуры α . Поскольку выражения для тонкой структуры и для сверхтонкой структуры сами по себе являются существенно релятивистскими, для нахождения поправок к этим выражениям, обусловленных движением ядра, требуется произвести релятивистское рассмотрение задачи о связанных состояниях для системы двух тел.

Приближенный релятивистский способ рассмотрения подобной задачи был уже довольно давно предложен Брейтом [1]. Согласно Брейту, сначала точно (или хотя бы с требуемой точностью) решается уравнение Брейта для электрона и ядра, причем берется только мгновенное кулоновское взаимодействие. Затем учитывается, по крайней мере приближенно, эффект зазадерживания посредством добавления к гамильтониану так называемого брейтовского взаимодействия. Это брейтовское взаимодействие эквивалентно члену, получающемуся во втором порядке теории возмущений в квантовой теории поля, вследствие обмена одним поперечным фотоном между электроном и ядром при пренебрежении отлечей в промежуточных состояниях. Если, далее, принять, что указанное брейтовское взаимодействие следует рассматривать как малое возмущение и искать лишь его среднее значение, то весь расчет может быть проведен без особых затруднений. По сути дела подобная программа была тщательно выполнена для тонкой структуры Брейтом и Брауном [2] и для сверхтонкой структуры Брейтом, Брауном и Арфкенем [3] для водородоподобных атомов. С помощью раз-

ложения по степеням m/M они прежде всего нашли поправочный множитель $[1 - (m/M)]$ для тонкой структуры. Эта поправка может быть включена в дираковское выражение для тонкой структуры посредством замены массы электрона m на приведенную массу μ . Брейт, Браун и Арфкен затем показали, что при упомянутых выше предположениях не получается никаких поправок относительного порядка $\alpha(m/M)$ ни к тонкой, ни к сверхтонкой структуре.

Однако, как было отмечено ранее Брейтом и другими, рассмотрение, основывающееся на уравнении и члене взаимодействия Брейта, является только приближенно релятивистским, причем горюлок величины допускаемых ошибок оценить довольно трудно. Главная задача настоящей статьи состоит в том, чтобы показать, что при использовании полностью релятивистского рассмотрения для тонкой структуры получаются поправки относительного порядка $\alpha(m/M)$; при этом находятся выражения для этих поправок. В основной части данной статьи мы разбираем только случай водорода и считаем протон, составляющий ядро, точечной дираковской частицей, пренебрегая внутренней структурой протона (аномальным магнитным моментом, облаком заряженных мезонов и т. п.). В рассматриваемых членах не появляется никаких расходимостей даже для точечной частицы. В разделе 7 дается простое приближенное обобщение на случай ядра, состоящего из нескольких нуклеонов. В последующей статье будут рассмотрены эффекты ядерной структуры, не учтенные в настоящей работе, а также различные поправки к лэмбовскому сдвигу. В другой статье будет показано, что поправки того же относительного порядка получаются и для сверхтонкой структуры.

Недавно Сальпетером и Бете [4] было выведено из формализма Фейнмана [5] четырехмерное полностью релятивистское волновое уравнение для связанных состояний двух дираковских частиц с произвольным взаимодействием. Строгий вывод этого уравнения из квантовой теории поля был дан Гель-Маном и Лоу [6]. Содержание настоящей статьи носит двойной характер. Во-первых, предлагается метод приближенного решения общего уравнения указанного типа для случая, когда главный член взаимодействия является мгновенным и постоянная связи мала. Во-вторых, развитый метод применяется для вычисления поправок порядка $\alpha(m/M) = \Delta E_{(m)}$ к выражениям, полученным Брейтом и сотрудниками для тонкой структуры.

В разделе 2 будет показано, что если функция взаимодействия, входящая в четырехмерное волновое уравнение, является мгновенной, то может быть выведено точное трехмерное волновое уравнение, сходное, но не тождественное с уравнением Брейта. В разделе 3 общая теория раздела 2 применяется к специальному случаю кулоновского взаимодействия в водороде, при этом используется разложение по степеням m/M . В разделе 4 показывается, каким образом из четырехмерного уравнения могут быть получены поправочные члены, связанные с обменом поперечными фотонами. Некоторые из поправочных членов порядка $\alpha m/M$ содержат также множитель $\ln \alpha$. В разделе 5 показывается, что такие члены могут быть очень просто получены непосредственно из квантовой теории поля с помощью обычной (не полностью релятивистской) теории возмущений. В разделе 6 выписывают точные выражения для всех поправочных членов порядка $\alpha m/M$ к тонкой структуре водорода (при $m \ll M$).

2. Мгновенное взаимодействие и теория возмущений для четырехмерного уравнения

А. МГНОВЕННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Всюду, где это возможно, будут использоваться обозначения статей [4] и [5], причем мы положим $\hbar = c = 1$. В формализме Фейнмана в случае двух дираковских частиц равного и противоположного по знаку электрического заряда e могут использоваться два различных выражения для функции электро-

магнитного взаимодействия. В импульсном пространстве эти функции имеют вид

$$G(k_\mu) = \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{\gamma_\mu^a \gamma_\mu^b}{k_\mu^2} \quad (1)$$

и

$$G(k_\mu) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \left[\frac{\gamma_4^a \gamma_4^b}{k^2} + \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\gamma_i^a \gamma_i^b}{k_\mu^2} \right) \right], \quad (2)$$

где γ_μ — обычный дираковский матричный четырехмерный вектор, индекс a соответствует частице a , k_μ обозначает переносимый четырехмерный импульс и \mathbf{k} обозначает трехмерные составляющие последней величины. Посредством k^2 обозначено $|\mathbf{k}|^2$, k_μ^2 означает $[k_4^2 - |\mathbf{k}|^2]$. Первый член в (2) представляет мгновенное кулоновское взаимодействие в частной системе отсчета. Второй член в (2), который мы будем называть поперечной частью, представляет собой сумму по двум взаимно перпендикулярным направлениям поляризации, каждое из которых перпендикулярно к \mathbf{k} .

Можно было бы предпочесть явно релятивистски инвариантное выражение (1), в случае использования которого можно прямо применить изящные методы интегрирования, развитые Фейнманом. Однако при применении выражения (1) для рассмотрения данной конкретной проблемы высшие члены $G^{(n)}$ разложения полной функции взаимодействия \bar{G} , определенной в статье [4], оказываются довольно громоздкими, и получаются пары поправок определенных степеней по α , сокращающиеся в окончательном результате друг с другом. Аналогичное положение, имеющее место в случае дейтерона, взаимодействующего со скалярными мезонами, было разобрано в статье [4]. По этой причине более удобно использовать выражение (2). Потеря внешней релятивистской инвариантности компенсируется при таком выборе тем обстоятельством, что нерелятивистское рассмотрение, при котором используется только первая часть выражения (2), будет всегда давать в этом случае довольно хорошее приближение.

Рассмотрим сначала решения общего четырехмерного волнового уравнения типа, введенного в статье [4], в котором только полная функция взаимодействия $\bar{G}(k_\mu)$ заменена на функцию $G(\mathbf{k})$, зависящую лишь от первых трех компонент переносимого импульса \mathbf{k} и имеющую в остальном совершенно общий вид. Обращение Фурье функции $G(\mathbf{k})$ представляет собой мгновенный потенциал в координатном пространстве. Подобная функция взаимодействия не является, конечно, релятивистски инвариантной. После отделения движения „центра масс“ рассматриваемое уравнение примет вид [4]

$$(\mu_a K_\mu \gamma_\mu^a + p_\mu \gamma_\mu^a - m_a)(\mu_b K_\mu \gamma_\mu^b - p_\mu \gamma_\mu^b - m_b) \psi(p_\mu) = \\ = -(2\pi i)^{-1} \int d^4 k G(\mathbf{k}) \psi(p_\mu + k_\mu), \quad (3)$$

где K — заданный четырехмерный вектор (вектор энергии — импульса „центра масс“), пространственные компоненты которого равны нулю, а четвертая компонента равна E . При этом E представляет собой собственное значение данного уравнения. Четырехмерный вектор p_μ является вектором относительного четырехмерного импульса; величины $p_\mu \gamma_\mu^a$ и $p_\mu \gamma_\mu^b$ отличаются тем, что входящие в них операторы действуют на различные частицы. Безразмерные коэффициенты μ_a и μ_b определяются формулами

$$\mu_a = \frac{m_a}{m_a + m_b}, \quad \mu_b = \frac{m_b}{m_a + m_b}.$$

Волновая функция $\psi(p_\mu)$ представляет собой шестнадцатикомпонентный спинор.

Умножая уравнение (3) на $\gamma_4^a \gamma_4^b$, получаем

$$F(p_\mu) \psi(p_\mu) = -(2\pi i)^{-1} \int d^4 k G'(\mathbf{k}) \psi(p_\mu + k_\mu), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 F(p_\mu) &\equiv [\mu_a E - H_a(\mathbf{p}) + \varepsilon] [\mu_b E - H_b(\mathbf{p}) - \varepsilon], \\
 H_a(\mathbf{p}) &\equiv (m_a \beta^a + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}^a), \quad H_b(\mathbf{p}) \equiv (m_b \beta^b - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}^b), \\
 G'(\mathbf{k}) &= \gamma_4^a \gamma_4^b G(\mathbf{k}), \quad \varepsilon \equiv p_4.
 \end{aligned}$$

Величина $G'(\mathbf{k})$ носит совершенно общий характер за исключением того, что она не зависит от k_4 и может включать дираковские матрицы. Чтобы наше уравнение отвечало дираковской теории дырок, следует соответственно правилам формализма Фейнмана считать, что как у m_a , так и у m_b имеются бесконечно малые отрицательные мнимые части. Так же как и в статье [4], мы введем трехмерную волновую функцию $\varphi(\mathbf{p})$

$$\varphi(\mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \psi(\mathbf{p}, \varepsilon). \tag{5}$$

Поскольку $G'(\mathbf{k})$ не зависит от $k_4 \equiv \omega$, мы можем сразу выполнить в правой части уравнения (4) интегрирование по ω , что дает

$$\Gamma(\mathbf{p}) = -(2\pi i)^{-1} \int d^3 k G'(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \tag{6}$$

Введем обычным образом операторы проектирования Казимира для частицы a :

$$\begin{aligned}
 \Delta_+^a(\mathbf{p}) &= \frac{[E_a(p) + H_a(\mathbf{p})]}{2E_a(p)}, \\
 \Delta_-^a(\mathbf{p}) &= \frac{[E_a(p) - H_a(\mathbf{p})]}{2E_a(p)},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$E_a(p) = + (m_a^2 + p^2)^{1/2},$$

и аналогично для частицы b . Определим затем четыре волновые функции

$$\begin{aligned}
 \psi_{++}(p_\mu) &= \Delta_+^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) \psi(p_\mu), \\
 \psi_{-+}(p_\mu) &= \Delta_-^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) \psi(p_\mu) \text{ и т. д.}
 \end{aligned} \tag{8}$$

После этого можно записать уравнение (4), используя (6), в виде системы из четырех уравнений:

$$F_{++}(\mathbf{p}, \varepsilon) \psi_{++}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \Delta_+^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) \Gamma(\mathbf{p}), \tag{9a}$$

$$F_{-+}(\mathbf{p}, \varepsilon) \psi_{-+}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \Delta_-^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) \Gamma(\mathbf{p}), \tag{9б}$$

$$F_{+-}(\mathbf{p}, \varepsilon) \psi_{+-}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \Delta_+^a(\mathbf{p}) \Delta_-^b(\mathbf{p}) \Gamma(\mathbf{p}), \tag{9в}$$

$$F_{--}(\mathbf{p}, \varepsilon) \psi_{--}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \Delta_-^a(\mathbf{p}) \Delta_-^b(\mathbf{p}) \Gamma(\mathbf{p}), \tag{9г}$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{++}(p, \varepsilon) &= [\mu_a E - E_a(p) + \varepsilon + i\delta] [\mu_b E - E_b(p) - \varepsilon - i\delta], \\
 F_{-+}(p, \varepsilon) &= [\mu_a E + E_a(p) + \varepsilon - i\delta] [\mu_b E - E_b(p) - \varepsilon - i\delta] \text{ и т. д.}
 \end{aligned} \tag{10}$$

В (10) явно выписаны мнимые члены, получающиеся из мнимых отрицательных составляющих m_a и m_b ; при этом δ обозначает бесконечно малую вещественную положительную величину.

Правые части уравнений (9) не зависят от переменной ε . Мы можем разделить каждое из этих четырех уравнений на соответствующую функцию $F(p, \varepsilon)$, не содержащую теперь дираковских операторов. Тогда справа в уравнениях (9)

от ε будет зависеть только множитель $F^{-1}(p, \varepsilon)$, и эти уравнения можно будет проинтегрировать по ε . С помощью соотношений

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon (a \mp i|\delta| - \varepsilon)^{-1} (b \mp i|\delta| \mp \varepsilon)^{-1} = \mp (2\pi i) (a + b)^{-1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon (a \mp i|\delta| - \varepsilon)^{-1} (b \mp i|\delta| + \varepsilon)^{-1} = 0$$
(11)

и определения (5) проинтегрированные уравнения (9) могут быть сведены к четырем связанным трехмерным уравнениям:

$$[E - E_a(p) - E_b(p)] \varphi_{++}(p) = \Lambda_+^a(p) \Lambda_+^b(p) \int d^3k G'(k) \varphi(p+k), \quad (12a)$$

$$[E + E_a(p) + E_b(p)] \varphi_{--}(p) = -\Lambda_-^a(p) \Lambda_-^b(p) \int d^3k G'(k) \varphi(p+k), \quad (12b)$$

$$\varphi_{-+}(p) = \varphi_{+-}(p) = 0, \quad (12в)$$

где трехмерные волновые функции $\varphi_{++}(p)$ и т. д. получаются из $\varphi(p)$ аналогично тому, как функции $\psi_{++}(p)$ и т. д. получаются из $\psi(p)$. Четыре связанных уравнения (12) можно переписать в виде одного операторного уравнения

$$[E - H_a(p) - H_b(p)] \varphi(p) = \{\Lambda_+^a(p) \Lambda_+^b(p) - \Lambda_-^a(p) \Lambda_-^b(p)\} \int d^3k G'(p) \varphi(p+k), \quad (13)$$

вывод которого является основным результатом настоящего раздела. При выводе (13) мы использовали тождество

$$[\Lambda_+^a(p) \Lambda_+^b(p) + \Lambda_-^a(p) \Lambda_+^b(p) + \Lambda_+^a(p) \Lambda_-^b(p) + \Lambda_-^a(p) \Lambda_-^b(p)] = 1. \quad (14)$$

Зависимость $\psi(p_a)$ от ε становится полностью определенной, и волновая функция может быть записана в виде

$$\psi(p_a) = -[E - H_a(p) - H_b(p)] [2\pi i F(p, \varepsilon)]^{-1} \chi(p), \quad (15)$$

где $\chi(p)$ — шестнадцатикомпонентный спинор, не зависящий от ε , причем

$$\varphi(p) = \{\Lambda_+^a(p) \Lambda_+^b(p) - \Lambda_-^a(p) \Lambda_-^b(p)\} \chi(p). \quad (15a)$$

Используя (15) и (9), находим

$$[E - H_a(p) - H_b(p)] \chi(p) = \int d^3k G'(k) \varphi(p+k). \quad (15b)$$

Отметим, что уравнение (13) близко соответствующему уравнению Брейта для рассматриваемой задачи:

$$[E - H_a(p) - H_b(p)] \varphi(p) = \int d^3k G'(k) \varphi(p+k). \quad (16)$$

Отличие от (13) заключается лишь в наличии в (13) члена в фигурных скобках с правой стороны, содержащего операторы проецирования. В нерелятивистском пределе в случае, когда обе частицы находятся в состояниях с положительной энергией, существенно только φ_{++} , так что в этом пределе уравнения (13) и (16) становятся тождественными. Приближенное уравнение вида, аналогичного уравнению (13), было ранее выведено Брауном и Равенхолом [7].

Представляет известный интерес, к каким изменениям в уравнениях приведет использование одноэлектронной теории вместо теории дырок. В формализме Ферми единственное различие заключается только в том, что в последнем случае бесконечно малая мнимая слагающая включается уже не в m_a и m_b , а в E . Это означает, что знак перед $i\delta$ во всех выражениях (10) должен быть одним и тем же. При этом при интегрировании (9) вместо уравнения (13) получится в точности уравнение Брейта (16). В нерелятивистском пределе, например в слу-

чае одного электрона и одного протона, находящихся в состояниях отрицательной энергии, существенно только φ_{--} , и кинетические энергии будут отрицательны. При использовании уравнения Брейта энергия взаимодействия будет также отрицательна и связанных состояний получаться не будет, что согласуется с одноэлектронной теорией. Если же использовать уравнение (13), то энергия взаимодействия будет положительной и связанные состояния будут получаться; при этом кинетическая энергия, энергия взаимодействия и энергия связи будут равны и противоположны по знаку соответствующим величинам для такого связанного состояния, в котором обе частицы находятся в состояниях положительной энергии. Можно сказать, что подобные волновые функции соответствуют связанному состоянию позитрона и отрицательного протона. Таким образом, если постулировать мгновенное взаимодействие, то уравнение Брейта соответствует одноэлектронной теории и не согласуется с теорией дырок.

Б. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Введенная в (4) функция F зависит не только от переменных $(\mathbf{p}, \varepsilon)$, но и является также квадратичной функцией постоянного собственного значения E . Таким образом, в наше основное уравнение E входит не линейно, как в трехмерное уравнение Шредингера, а квадратично. Для получения результатов соответствующих результатам первого порядка теории возмущений, нам придется поэтому применить способ вычислений, несколько отличающийся от обычного.

Уравнение (13) представляет собой обычное уравнение Шредингера в гамилтоновской форме. Пусть $\varphi_n(\mathbf{p})$ — волновая функция, а E_n — собственное значение энергии некоторого стационарного состояния данного уравнения. Волновая функция $\psi_n(p_\mu)$ будет тогда определяться соотношением (15), где вместо E подставлено E_n . Функция $\chi_n(\mathbf{p})$ будет определяться по (15б). Примем, что φ_n удовлетворяет следующему нормировочному условию:

$$\int d^3p \chi^*(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) = \int d^3p [\varphi_{++}^*(\mathbf{p}) \varphi_{++}(\mathbf{p}) - \varphi_{--}^*(\mathbf{p}) \varphi_{--}(\mathbf{p})] = 1. \quad (17)$$

Обозначим для сокращения интегральный оператор с ядром $-(2\pi i)^{-1}G'(\mathbf{k})$ через \mathcal{G} . Уравнение (4) примет тогда вид

$$(F_n - \mathcal{G}) \psi_n = 0. \quad (18)$$

Для некоторого произвольного постоянного значения E_Δ , необязательно равного E_n , мы можем определить две новые функции

$$\psi_n^\Delta(p_\mu) = -[E_\Delta - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})] [2\pi i F_\Delta(p, \varepsilon)]^{-1} \chi_n(\mathbf{p}), \quad (19)$$

$$\tilde{\psi}_n^\Delta(p_\mu) = -[F_\Delta - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})] [2\pi i F_\Delta(p, \varepsilon)]^{-1} \chi_n^*(\mathbf{p}), \quad (19a)$$

где F_Δ есть выражение F , в котором величина E имеет значение E_Δ . Используя то обстоятельство, что $G'(\mathbf{k})$ не зависит от k_3 , а также соотношения (5), (11), (15б) и (19), можно показать, что

$$(F_\Delta - \mathcal{G}) \psi_n^\Delta = -(2\pi i)^{-1} (E_\Delta - E_n) \chi_n, \quad (20)$$

$$\tilde{\psi}_n^\Delta (F_\Delta - \mathcal{G}) = -(2\pi i)^{-1} (E_\Delta - E_n) \chi_n^*. \quad (20a)$$

Уравнение (20a) имеет место в том смысле, что правая и левая его части будут давать тождественные выражения, если их умножить справа на произвольную функцию $\psi'(p_\mu)$ и проинтегрировать по d^4p .

Рассмотрим теперь уравнение, подобное уравнению (4), в котором только к $G'(k_\mu)$ добавлена дополнительная функция взаимодействия $G'_\Delta(k_\mu)$, рассматриваемая как малое возмущение и, вообще говоря, зависящая также и от k_3 . Возьмем частное решение $\Psi_n(p_\mu)$ этого видоизмененного уравнения, сводящееся к $\psi_n(p_\mu)$

при обращении G'_Δ в нуль. Пусть собственное значение энергии такого состояния будет равно

$$E_\Delta = E_n + \Delta E. \quad (21)$$

Обозначив интегральный оператор с ядром $-(2\pi i)^{-1}G'_\Delta(k_\mu)$ через \mathfrak{G}_Δ , получим уравнение

$$(F_\Delta - \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_\Delta)\Psi_n = 0, \quad (22)$$

где в выражении F_Δ величина E имеет значение E_Δ . Удобно ввести новую функцию ψ_Δ следующим образом:

$$\psi_\Delta = \Psi_n - \psi_n^\Delta, \quad (23)$$

где ψ_n^Δ определено так же, как и в (18). Уравнение (22) можно теперь переписать в виде

$$(F_\Delta - \mathfrak{G})\psi_n^\Delta + (F_\Delta - \mathfrak{G})\psi_\Delta = \mathfrak{G}_\Delta\psi_n^\Delta + \mathfrak{G}_\Delta\psi_\Delta. \quad (22a)$$

Поскольку предполагается, что \mathfrak{G}_Δ „мало“ по сравнению с \mathfrak{G} , то ΔE будет мало по сравнению с E_n и ψ_Δ мало по сравнению с ψ_n^Δ , так что ψ_n^Δ будет приближенно равно ψ_n .

Умножим уравнение (22a) слева на $\tilde{\psi}_n^\Delta$ и проинтегрируем по d^4p . Используя (20a), в результате получим

$$\Delta E \chi_n^*(\psi_n^\Delta + \psi_\Delta) = -(2\pi i) \tilde{\psi}_n^\Delta \mathfrak{G}_\Delta (\psi_n^\Delta + \psi_\Delta). \quad (22b)$$

Первые члены правой и левой частей уравнения (22b) представляют собой величины первого порядка малости, а вторые члены — величины второго порядка малости. Мы получим поправку первого порядка теории возмущений $\Delta E^{(1)}$ к ΔE , опустив указанные два члена второго порядка малости и заменив в членах первого порядка малости ψ_n^Δ на ψ_n . Проинтегрировав получающееся приближенное уравнение по d^4p , с помощью (5) и (17) получим искомое выражение для $\Delta E^{(1)}$:

$$\Delta E^{(1)} = -(2\pi i) \int d^4p \tilde{\psi}_n(p_\mu) \mathfrak{G}_\Delta \psi_n(p_\mu) = \int \int d^4p d^4k \tilde{\psi}_n(p_\mu) G'_\Delta(k_\mu) \psi_n(p_\mu + k_\mu). \quad (23a)$$

3. Мгновенное кулоновское взаимодействие

Теперь применим общую теорию предыдущего раздела к специальному случаю двух дираковских частиц с зарядом, равным e и $(-e)$ соответственно. Возьмем выражение (2) для электромагнитного взаимодействия $G(k_\mu)$ и ограничимся в этом разделе учетом только первого слагаемого этого выражения, соответствующего мгновенному кулоновскому взаимодействию

$$G'_C(\mathbf{k}) = -\frac{e^2}{2\pi^2 k^2}. \quad (24)$$

Эффекты поперечной части взаимодействия $G_T(k_\mu)$ будут рассмотрены в следующих трех разделах с помощью видоизмененной теории возмущений.

Четырехмерное уравнение для данной задачи имеет вид

$$F(\mathbf{p}, \varepsilon)\psi(p_\mu) = -(2\pi i)^{-1} \int d^4k \{ G'_C(\mathbf{p}) + G'_{CC^{(2)}}(k_\mu) + \dots \} \psi(p_\mu + k_\mu). \quad (25)$$

Как было указано в статье (4), в ядро этого интегрального уравнения входит не только $G_C(\mathbf{k})$, но также все выражения, соответствующие неприводимым диаграммам высшего порядка. Из всех этих выражений в рассматриваемом приближении необходимо учесть только $G'_{CC^{(2)}}$. Последнее выражение соответствует диаграмме 1, показанной на фиг. 1, т. е. соответствует „пересеченному двойному фотонному“ члену, включающему два мгновенных кулоновских взаимодействия. Как было разобрано в статье [4], такой член при использовании теории дырок

не равен тождественно нулю ¹⁾, причем конечная составляющая получается в связи с наличием промежуточных состояний, в которых одна из двух частиц находится в состоянии с отрицательной энергией. Однако этот член мал, его вклад в энергию связи имеет порядок $\alpha \Delta E$ (fs), и он будет трактоваться как возмущение в выражении теории возмущений первого порядка (23), выведенном в предыдущем разделе.

Рассмотрим в связи с этим уравнение (25), заменив в нем полное ядро на первый член его разложения $G_C(\mathbf{k})$. Данная функция не зависит от k_4 , и, следовательно, в этом случае применимо рассмотрение предыдущего раздела, приводящее к формуле (13). Мы, таким образом, получаем трехмерное уравнение вида (13):

$$[E - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})] \varphi(\mathbf{p}) = \{ \Delta_+^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) - \Delta_-^a(\mathbf{p}) \Delta_-^b(\mathbf{p}) \} \frac{-e^2}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (26)$$

В нерелятивистском пределе это уравнение переходит в обычное нерелятивистское уравнение Шредингера:

$$\left[W - \frac{p^2}{2\mu} \right] \varphi_0(\mathbf{p}) = - \frac{e^2}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \varphi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (27)$$

где

$$W = E - m_a - m_b, \quad \mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}.$$

Данное приближение для энергии связи W отклоняется, конечно, от истинного значения на величину относительного порядка α (полностью опускается тонкая структура). Величина ошибки в приближенной волновой функции $\varphi_0(\mathbf{p})$ имеет относительный порядок $[(p + p_0)/\mu]^2$, где p_0 — боровский импульс

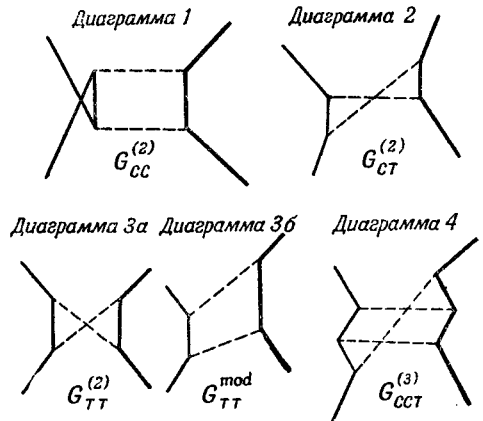
$$p_0 = \alpha\mu, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03}, \quad (28)$$

$$Ry = \frac{\alpha^2 \mu}{2}.$$

Функция $\varphi_0(\mathbf{p})$ будет давать поэтому плохое приближение при $p \lesssim \mu$. Полезно отметить, что лучшее приближение к волновой функции $\varphi_1(\mathbf{p})$ может быть получено посредством однократного применения метода итераций к уравнению (26) с использованием $\varphi_0(\mathbf{p})$ в качестве нулевого приближения. Для функции $\varphi_1(\mathbf{p})$ при этом получится выражение

$$\varphi_1(\mathbf{p}) = [E - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})]^{-1} \{ \Delta_+^a(\mathbf{p}) \Delta_+^b(\mathbf{p}) - \Delta_-^a(\mathbf{p}) \Delta_-^b(\mathbf{p}) \} \left(-\frac{e^2}{2\pi^2} \right) \int d^3k k^{-2} \varphi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (29)$$

причем в $\varphi_1(\mathbf{p})$ ошибка имеет относительный порядок $\alpha [(p + p_0)/(p + \mu)]$, т. е. меньший или равный α при всех значениях p ²⁾. Это увеличение точности вызывается тем обстоятельством, что волновая функция $\varphi(\mathbf{p})$ убывает более быстро с ростом p , чем потенциал $G_C(\mathbf{p})$. При больших p основную роль в интегралах уравнений (26) и (29) играют подинтегральные выражения при значениях $|\mathbf{p} + \mathbf{k}|$, равных по порядку величины p_0 , для которых функция $\varphi_0(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ является хорошим приближением.



Ф и г. 1. Фейнмановские диаграммы, соответствующие различным членам взаимодействия.

Тонкие сплошные линии обозначают электроны, а жирные линии — протоны. Горизонтальные пунктирные линии обозначают мгновенные кулоновские взаимодействия, наклонные пунктирные линии соответствуют поперечным фотонам.

¹⁾ Он, однако, был бы равен нулю, если бы использовалась одноэлектронная теория. — Прим. авт.

²⁾ Точнее, при всех $p \ll p_0 \exp(137)$. — Прим. авт.

Рассмотрим теперь случай электрона массы $m_a = m$ и протона массы $m_b = M$, считая для простоты, что $M \gg m$. Аналогичное рассмотрение может быть, вообще говоря, выполнено для любых значений m_a и m_b (например, для позитрония). Уравнение Брейта (16) для кулоновского потенциала имеет следующий вид:

$$[E - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})] \varphi(\mathbf{p}) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (26a)$$

В табл. 1 указывается порядок величин четырех компонент и т. д. для решения уравнения (26a) при $m \ll M$.

Таблица 1

ПОРЯДОК ВЕЛИЧИНЫ ЧЕТЫРЕХ КОМПОНЕНТ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРОВ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ φ УРАВНЕНИЯ БРЕЙТА (26a)

[$p_0 \equiv \alpha m$ означает боровский импульс, m — массу электрона и M — массу протона]

	$p < p_0$	$p_0 < p < m$	$m < p < M$	$p > M$
φ_{++}	1	$(p_0/p)^4$	$\alpha^4 (m/p)^3$	$\alpha^4 (m/p)^3$
φ_{-+}	α^3	$\alpha^3 (p_0/p)$	$\alpha^4 (m/p)^3$	$\alpha^4 (m/p)^3$
φ_{+-}	$\alpha^3 (m/M)^2$	$\alpha^3 (p_0/p) (m/M)^2$	$\alpha^4 (m/p) (m/M)^2$	$\alpha^4 (m/p)^3$
φ_{--}	$\alpha^4 (m/M)^2$	$\alpha^4 (m/M)^2$	$\alpha^4 (m/p) (m/M)^2$	$\alpha^4 (m/p)^3$

Отметим, что при $p \gtrsim p_0$ последние три компоненты φ меньше φ_{++} по крайней мере на порядок множителя α^3 . Порядок величины φ_{++} и φ_{--} решения уравнения (26) тот же, что и указанный в табл. 1, но φ_{-+} и φ_{+-} равны нулю. Очевидно, что для выполнения нормировочного условия (17) с требуемой точностью достаточно, чтобы φ_{++} было нормировано к единице.

В настоящей статье мы будем пренебрегать всеми членами, имеющими порядок величины, меньший чем $\alpha m/M$ (fs). В этом приближении в уравнении (26) можно опустить член с $\Lambda_-^a \Lambda_-^b$. Интересно отметить, что в низшем приближении из уравнения (26) может быть сразу просто получена тонкая структура. Если полностью пренебречь m/M и произвести разложение по степеням p/m и k/m , то уравнение (26) сведется к следующему приближенному уравнению:

$$\left[W - \frac{p^2}{2m} + \frac{p^4}{8m^3} \right] \varphi(\mathbf{p}) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int d^3k \left[1 + (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}) \cdot \frac{(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k})}{4m^2} \right] k^{-2} \varphi(\mathbf{p} + \mathbf{k}), \quad (26.6)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — спиновый оператор Паули для электрона, и у $\varphi(\mathbf{p})$ теперь вместо шестнадцати только две спинорные компоненты. Стоящий с правой стороны уравнения (26) множитель в квадратных скобках является приближением к Λ_+^a (см. приложение). Можно показать, что уравнение (26a) в точности совпадает с обращением Фурье приближенного уравнения, получающегося для тонкой структуры в обычной трактовке с использованием сведения к „большим компонентам“ [8].

Вместо того чтобы фактически вычислять собственные значения энергии для уравнения (26), более просто и в то же время поучительно оценить лишь разность между энергиями, получающимися при настоящей трактовке, и из уравнения Брейта (26a). С требуемой точностью уравнение (26) сводится к

$$[E - E_a(\mathbf{p}) - E_b(\mathbf{p})] \varphi_{++}(\mathbf{p}) = \\ = \left(-\frac{e^2}{2\pi^2} \right) \Lambda_+^a(\mathbf{p}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}) \int d^3k k^{-2} [\varphi_{++}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \varphi_{-+}(\mathbf{p} + \mathbf{k})], \quad (30)$$

$$[E + E_a(\mathbf{p}) - E_b(\mathbf{p})] \varphi_{-+}(\mathbf{p}) = \\ = \left(-\frac{e^2}{2\pi^2} \right) \Lambda_-^a(\mathbf{p}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}) \int d^3k k^{-2} [\varphi_{++}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \varphi_{-+}(\mathbf{p} + \mathbf{k})], \quad (30a)$$

где через φ_{++} и т. д. вновь обозначены величины, получающиеся из φ умножением на два проектирующих оператора. В рассматриваемом приближении членами, содержащими φ_{+-} и φ_{--} (состояния отрицательной энергии для ядра), можно пренебречь. Приближенное выражение для φ_{-+} через φ_{++} с точностью до низшего порядка по α можно получить, если опустить с правой стороны уравнения (30а) член с $\varphi_{-+}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$. Используя данное приближение, мы приходим к уравнению, содержащему только φ_{++} :

$$[E - E_a(\mathbf{p}) - E_b(\mathbf{p})] \varphi_{++}(\mathbf{p}) = \left(\frac{-e^2}{2\pi^2}\right) \Lambda_+^a(\mathbf{p}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}) \int \frac{d^3k \varphi_{++}(\mathbf{p} + \mathbf{k})}{k^2} + \left(\frac{e^2}{2\pi^2}\right)^2 \Lambda_+^a(\mathbf{p}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}) \int \int \frac{d^3k d^3p' \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \varphi_{++}(\mathbf{p}')}{k^2 (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 [E + E_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - E_b(\mathbf{p} + \mathbf{k})]}. \quad (31)$$

С указанной точностью уравнение (26) совпадает с уравнением (31) за исключением того, что с правой стороны не хватает одного члена, имеющего порядок $\alpha \Delta E_{(fs)}$. Нам придется вычислить только составляющую энергии связи, соответствующую этому члену, используя первое приближение теории возмущений.

В нашем рассмотрении мы должны добавить к соответственному значению энергии, получающемуся из уравнения (26), среднее значение члена взаимодействия $G_{fs}^{(2)}$, используя (23). В это выражение войдут два „энергетических“ знаменателя вида $p_\mu \gamma_\mu - m$. Вместо того чтобы использовать фейнмановский метод вычисления подобных интегралов, разобьем сначала выражение для среднего значения с помощью тождества (14) на четыре слагающих. Знаменатели в каждом из этих четырех слагающих не будут содержать дираковских матриц. Используя (23) и беря выражение для $G_{fs}^{(2)}$, приведенное в статье [4], получим, что составляющая собственной энергии будет тогда задаваться собственным значением

$$\left(\frac{e^4}{8\pi^3 i}\right) \int \int \int d^4p d^4k d^4p' \times \frac{\tilde{\psi}(p_\mu) \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \psi(p'_\mu)}{k^2 (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 [\mu_a E + E_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \varepsilon + \omega - i\delta] [\mu_b E - E_b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) - \varepsilon' + \omega + i\delta]} + \dots, \quad (32)$$

где $\varepsilon, \varepsilon'$ заменяет p_4 и p'_4 соответственно. Не выписанные явно в (32) три дополнительных члена (содержащие $\Lambda_+^a \Lambda_+^b, \Lambda_+^a \Lambda_-^b$ и $\Lambda_-^a \Lambda_-^b$) не дают составляющих рассматриваемого порядка малости.

Нам достаточно определить интеграл (32) с точностью до низшего порядка по α . С этой точностью $\tilde{\psi}(p_\mu)$ и $\psi(p'_\mu)$ можно заменить на $\tilde{\psi}_{++}(p_\mu)$ и $\psi_{++}(p'_\mu)$ соответственно; при этом $\psi_{++}(p_\mu)$ является явной функцией решения уравнения (26) $\varphi_{++}(\mathbf{p})$, задаваемой формулой (15):

$$\psi_{++}(p_\mu) = -[E - E_a(p) - E_b(p)] [2\pi i F_{++}(\mathbf{p}, \varepsilon)]^{-1} \varphi_{++}(\mathbf{p}). \quad (15в)$$

Зависимость подинтегрального выражения в (32) от ε и ε' определяется в этом случае явным образом, и интегрирование по ε и ε' может быть выполнено. При этом оказывается, что основную роль играют значения подинтегрального выражения при

$$p, p' \sim p_0; \quad k \sim m. \quad (33)$$

После интегрирования в (32) по $\varepsilon, \varepsilon'$ и ω и разложения результата по степеням α получается следующее выражение (если ограничиться низшим порядком по α):

$$\left(\frac{e^2}{2\pi^2}\right)^2 \int \int \int \frac{d^3p d^3k d^3p' \varphi_{++}^*(\mathbf{p}) \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \varphi_{++}(\mathbf{p}')}{k^2 (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 [(\mu_a - \mu_b) E + E_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + E_b(\mathbf{p}' - \mathbf{k})]}. \quad (34)$$

Среднее значение (34) в нашем рассмотрении следует сравнить с эквивалентным членом рассмотрения Брейта — средним значением оператора из второй строки (31). В пределе, когда отношение m/M стремится к нулю, получается,

что эти две величины равны. Этого и следовало ожидать, поскольку в данном пределе уравнение Брэйта (30) сводится в точности к уравнению Дирака для одиночного электрона, которое во всяком случае правильно, если ядро бесконечно тяжело. Однако при конечной массе M ядра упомянутые две величины не равны и разность между ними дает ошибку в собственном значении, получающуюся при использовании метода Брейта. Возьмем разложение этой разности по степеням m/M и ограничимся первым исчезающим членом этого разложения.

Обозначим поправку к брейтовскому собственному значению энергии [разность выражения (34) и среднего значения второго члена (31)] через ΔE_{CC} . Существенны будут значения подинтегрального выражения только в области, задаваемой (33), т. е. при $p, p' \ll k \ll M$. С точностью до низшего порядка по α и до первых двух порядков по (m/M) оператор проектирования Λ_+^b в обоих выражениях может быть заменен на единицу, а оператор $\Delta_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k})$ — на $[E_a(k) - m]/4E_a(k)$. Так как существенны только значения $p, p' \sim \alpha m$, то мы можем также заменить φ_{++} решением нерелятивистского уравнения (27) φ_0 . Тогда получим с требуемой точностью

$$\Delta E_{CC} = - \left(\frac{e^2}{2\pi^2} \right)^2 \iiint \frac{d^3 p d^3 k d^3 p' \varphi_0^*(\mathbf{p}) [E_a(k) - m] \varphi_0(\mathbf{p}')}{k^2 M [E_a(k) + m]^2 4E_a(k)}.$$

Это выражение легко проинтегрировать по $d^3 k$, после чего получим

$$\Delta E_{CC} = - \frac{\pi}{3mM} \left(\frac{e^2}{2\pi^2} \right)^2 \left| \int d^3 p \varphi_0(\mathbf{p}) \right|^2 = - \left(\frac{2\alpha^2}{3mM} \right) |\psi_0(0)|^2, \quad (35)$$

где $\psi_0(\mathbf{r})$ — трехмерное обращение Фурье от $\varphi_0(\mathbf{p})$, т. е. нерелятивистская шредингеровская волновая функция в координатном пространстве для водородо-подобного атома.

Приближение для подинтегрального выражения, использованное при выводе (35), пригодно только при $p, p' \ll m$. Истинное подинтегральное выражение убывает более быстро с ростом p и p' при $p, p' > m$, чем использованное приближение, и интеграл по p в (35) следует в действительности распространять только до $p \sim m$, а не до бесконечности. Однако поскольку мы используем не дираковскую волновую функцию, а шредингеровскую волновую функцию $\varphi_0(\mathbf{p})$, то составляющие интеграла (35), относящиеся к области $p \gg \alpha m$, всегда малы и ошибка, получающаяся из-за распространения интеграла до бесконечности, оказывается меньшего порядка величины, чем члены, рассматриваемые в настоящей статье. В настоящей статье $\varphi_0(0)$ всюду будет обозначать значение нерелятивистской волновой функции (в трехмерном координатном пространстве) в начале.

Для всех атомных состояний с не равным нулю моментом выражение (35) обращается в нуль (в рассматриваемом порядке). Для s -состояния с главным квантовым числом n поправка ΔE_{CC} к брейтовскому собственному значению энергии будет равна в случае водорода

$$\Delta E_{CC} = - \left(4\alpha^3 m \frac{Ry}{3\pi n^3 M} \right). \quad (36)$$

Этот член имеет порядок $\alpha(m/M)$, но входящий в него численный коэффициент мал. В водороде (36) соответствует энергетическому сдвигу, равному всего $-0,037$ мэгц для $2s$ -состояния.

4. Поправки, связанные с поперечными фотонами

До сих пор мы ограничивались только эффектами мгновенного кулоновского взаимодействия; теперь нужно рассмотреть влияние второй части выражения (2), которую мы обозначим через $G_T(k_\mu)$, соответствующей обмену поперечным фотоном. Применим прежде всего к этому члену метод статьи [4],

включающий разложение по степеням α . Вместо (4) мы будем иметь полное уравнение

$$F(\mathbf{p}, \varepsilon) \psi(p_\mu) = -(2\pi i)^{-1} \int d^4 k [G'_G + G'^{(2)}_{GG} + G'_T + G'^{(2)}_{GT} + G'^{(2)}_{TT} + \dots](k_\mu) \psi(p_\mu + k_\mu), \quad (37)$$

где

$$G'_T(k_\mu) = - \left(\frac{e^2}{2\pi^2} \right) \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i^a \alpha_i^b}{k_\mu^2} \quad (38)$$

(α^a обозначает дираковскую матрицу для частицы a). В (37) через G'_{GT} обозначено введенное в статье [4] выражение, соответствующее „пересеченной двойной фотонной“ диаграмме с взаимодействием, задаваемым G_G , и с другим взаимодействием, задаваемым G_T (фиг. 1, диаграмма 2); G'_{TT} обозначает эквивалентное выражение, для которого оба взаимодействия задаются G_T (фиг. 1, диаграмма 3а). С правой стороны (37) входят также выражения, соответствующие неприводимым диаграммам высшего порядка $G'^{(3)}_{GGT}$, и т. д. Члены $G'^{(2)}_{GT}$ и $G'^{(2)}_{TT}$ дают энергетический сдвиг только порядка $\alpha (m/M) \Delta E$ (fs), и для определения этого сдвига достаточно воспользоваться вычислением его в первом порядке четырехмерной теории возмущений, подобно тому как это делалось для $G'^{(2)}$. В то же время член G'_T имеет порядок m/M (fs) $\sim \alpha^2 (m/M) W$. С первого взгляда можно ожидать, что ошибка, получающаяся при рассмотрении этого члена с помощью теории возмущений в первом порядке, будет иметь пренебрежимо малую величину порядка $\alpha^4 (m/M)^2 W$. Однако в действительности ошибка будет иметь порядок $\alpha (m/M) M$. Это связано с тем известным обстоятельством, что, хотя среднее значение некоторых дираковских матриц мало, квадрат таких матриц дает единицу.

Вернемся теперь к рассмотрению теории возмущений, использованной в разделе 2, взяв в качестве мгновенного взаимодействия $G(\mathbf{k})$ выражение G_G и в качестве возмущения G_Δ — выражение G_T . Все уравнения до (22б) включительно останутся неизменными. Поскольку ΔE имеет только порядок $\alpha^2 (m/M) R$, получаем с требующейся точностью, что второй член левой стороны уравнения (22б) может быть опущен, а $\psi_n^\Delta, \tilde{\psi}_n^\Delta$ — заменены на ψ_n и $\tilde{\psi}_n$ соответственно. Однако второй член правой части уравнения (22б), который ранее также опускался в приближенном уравнении (23), дает в данном случае поправку порядка $\alpha (m/M) \Delta E$ (fs). Нам поэтому нужно найти приближенное выражение для ψ_Δ с точностью до низшего порядка по α .

Используя (20) и (22б), мы получаем точное соотношение

$$F_\Delta \psi_\Delta = \mathcal{G}_\Delta \psi_n^\Delta + [\mathcal{G} \psi_\Delta + (2\pi i)^{-1} \Delta E \chi_n + \mathcal{G}_\Delta \psi_\Delta]. \quad (39)$$

Если бы мы использовали неизменную теорию возмущений, то следовало бы сохранить первые два члена в квадратных скобках правой части (39). Однако в рассматриваемом случае электродинамики получается достаточно точное приближение для ψ_Δ , если опустить все члены в квадратных скобках и заменить F_Δ, ψ_n^Δ на F_n и ψ_n , т. е. если взять

$$\psi_\Delta \approx F_n^{-1} \mathcal{G}_\Delta \psi_n. \quad (39a)$$

Используя данные приближения и интегрируя (22б) по $d^4 p$, мы получаем вместо выражения (23)

$$\Delta E = -(2\pi i) \int d^4 p \tilde{\psi}_n [\mathcal{G}_\Delta + \mathcal{G}_\Delta F_n^{-1} \mathcal{G}_\Delta] \psi_n = \int \int d^4 p d^4 k \tilde{\psi}_n(p_\mu) G'_\Delta(k_\mu) \psi_n(p_\mu + k_\mu) - (2\pi i)^{-1} \int \int \int d^4 p d^4 k d^4 p' \tilde{\psi}_n(p_\mu) G'_\Delta(k_\mu) F_n^{-1}(p_\mu + k_\mu) G'_\Delta(p'_\mu - p_\mu - k_\mu) \psi_n(p'_\mu). \quad (40)$$

Отметим, что второй член правой стороны (40) в известной мере подобен среднему значению $G'^{(2)}_{TT}$. В действительности, этот член равен фейнмановскому

выражению для последовательного обмена двумя поперечными фотонами между двумя частицами (обозначенному G_{TT}^{mod} на диаграмме 3б, фиг. 1).

В предыдущем рассмотрении мы пренебрегали влиянием неприводимых диаграмм высшего порядка $G_{ST}^{(3)}$ и т. д. (фиг. 1, диаграмма 4). Можно ожидать, что эти члены будут давать в энергии только составляющие порядка $\alpha^2 \Delta E(\text{fs})(m/M)$ или меньше. Однако имеет место эффект, аналогичный в некоторой мере „инфракрасной катастрофе“. Рассмотрим какую-либо неприводимую диаграмму, соответствующую обмену одним поперечным фотоном с трехмерным импульсом k , а также некоторому числу мгновенных кулоновских взаимодействий. Оказывается, что составляющая энергии, соответствующая подобной диаграмме, для значений $k \gtrsim \alpha r_0 \sim W$ хотя и конечна, но имеет порядок $\alpha(m/M)\Delta E(\text{fs})$, которым нельзя пренебрегать. Грубо говоря, можно сказать, что обмен фотоном импульса k протекает за время порядка k^{-1} , а мгновенное кулоновское взаимодействие — за время порядка W^{-1} . Следовательно, если $k \ll \alpha r_0$, то за „время перелета“ одного поперечного фотона с таким импульсом может произойти много кулоновских взаимодействий.

Очевидно, что не имеет смысла брать для получения поправок порядка $\alpha \Delta E(\text{fs})$ сумму бесконечного числа составляющих. Это затруднение связано с тем обстоятельством, что в методе, предложенном в статье [4], используется фейнмановская функция распространения K_+ , соответствующая распространению в качестве свободной частицы. Наиболее изящный прием преодоления подобной трудности состоит, по видимому, в видоизменении метода статьи [4] на основе соображений, развитых недавно Дайсоном [9]. Подобная трактовка была бы эквивалентна разделению электромагнитного взаимодействия на „низкочастотную“ и „высокочастотную“ части релятивистски инвариантным образом. При этом пришлось бы сначала решить задачу для одной низкочастотной части без использования разложения по степеням α . После нахождения эквивалентной фейнмановской функции распространения для данной проблемы можно было бы рассмотреть высокочастотную часть с помощью разложения, предложенного в [4], которое теперь быстро бы сходилось.

В настоящем случае, однако, трудности связаны только с нерелятивистскими частотами или импульсами $k \sim \alpha r_0$. Следовательно, можно воспользоваться значительно более простым способом, состоящим в расщеплении поперечных фотонов членов G_T и т. д. на две части, соответствующие переносимому импульсу $k < A$ и $k > A$ (в системе центра масс, определенной в статье [4]), где

$$\alpha r_0 \ll A \ll r_0. \quad (41)$$

Для мгновенного кулоновского члена G_G подобное разбиение не производится и уравнение (26) получается и решается сначала так же, как и в предыдущем разделе. Для низкочастотной части $G_T(\mathbf{k})$ ($k < A$) мы используем не формализм статьи [4] и Фейнмана, а „обычную“ квантовую электродинамику и теорию возмущений. Иными словами, мы берем решение $\varphi(\mathbf{p})$ уравнения (26) в качестве возмущенной трехмерной волновой функции, рассматривая в качестве возмущения обычные операторы испускания и поглощения поперечных фотонов с импульсом, меньшим A , и определяем собственное значение энергии в четвертом порядке теории возмущений. Для высокочастотной части $G_T(\mathbf{k})$ ($k > A$) мы используем метод статьи [4], подобно тому как это было описано выше.

Подобное нерелятивистское рассмотрение для низкочастотной части поперечного взаимодействия хотя и не является особенно изящным, но зато очень просто. Некоторые из поправочных членов порядка $\alpha(m/M)\Delta E(\text{fs})$ содержат множитель $\ln \alpha$ и больше по величине, чем члены без этого множителя. Если указанное нерелятивистское рассмотрение выполнить не только для значений импульса k , меньших величины A из (41), но и до значений k , меньших или равных по порядку величине m , то члены, содержащие $\ln \alpha$, могут быть очень просто найдены. Такое вычисление будет произведено в следующем разделе.

Все же для сравнительно простого вычисления всех членов порядка $\alpha (m/M) \Delta E_{(1s)}$, наиболее выгодно, повидимому, приведенное четырехмерное рассмотрение ¹⁾.

Как и при рассмотрении кулоновского взаимодействия, мы не будем явно определять собственное значение энергии, а только вычислим разность между точным выражением и выражением, получающимся при использовании метода Брейта [2]. Полное уравнение Брейта имеет вид

$$[E - H_a(\mathbf{p}) - H_b(\mathbf{p})] \varphi(\mathbf{p}) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \int d^3k k^{-2} \left[1 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i^a \alpha_i^b \right] \varphi(\mathbf{p} \mp \mathbf{k}). \quad (42)$$

Это уравнение решается сначала без члена с $\alpha_i^a \alpha_i^b$. Такое уравнение (33) рассматривалось в предыдущем параграфе. Влияние члена, включающего $\alpha_i^a \alpha_i^b$, учитывается затем с помощью теории возмущений в первом порядке.

5. Трехмерное рассмотрение с помощью теории возмущений

Возьмем волновую функцию в координатном пространстве $\psi_n(\mathbf{r})$, соответствующую решению уравнения (26), в качестве невозмущенной волновой функции. Рассмотрим член возмущения в гамильтониане

$$H' = e \sum_{k < A} \sum_{i=1}^2 \{ \alpha_i^a (q_{k,i}^{op} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} + \bar{q}_{k,i}^{op} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a}) - \alpha_i^b (q_{k,i}^{op} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_b} + \bar{q}_{k,i}^{op} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_b}) \}, \quad (43)$$

где $q_{k,i}^{op}$ и $\bar{q}_{k,i}^{op}$ — обычные операторы испускания и поглощения фотона с импульсом ($-\mathbf{k}$) и направлением поляризации i . Их матричные элементы для переходов между состоянием с одним таким фотоном и состоянием без фотонов равны $(2\pi k)^{1/2}$. Энергия, соответствующая H' , будет равна во втором порядке теории возмущений

$$-2 \left(\frac{e}{2\pi} \right)^2 \int d^3k \sum_{i=1}^2 \sum_m \frac{\langle n | \alpha_i^a e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} | m \rangle \langle m | \alpha_i^b e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_a} | n \rangle}{k(E_n - E_m - k)}, \quad (44)$$

где E_m и E_n — невозмущенные собственные значения энергии для промежуточного и начального атомного состояния соответственно. Появление множителя 2 связано с тем обстоятельством, что виртуальный фотон может быть как испущен частицей a и поглощен частицей b , так и, наоборот, испущен частицей b и поглощен частицей a .

Если опустить в знаменателе выражения (44) слагаемое $(E_n - E_m)$ (пренебречь „отдачей“), то для суммирования по промежуточным состояниям m может быть использовано правило сумм. Получающееся при подобном пренебрежении выражение тождественно с эквивалентным членом взаимодействия Брейта. Мы будем поэтому вычислять только разность между точным выражением (41) и эквивалентным брейтовским выражением. Эта разность имеет порядок $\alpha (m/M) E_{1s}$; нам достаточно найти ее значение с точностью до низшего порядка по α и по (m/M) . Заменяем поэтому r_a относительным расстоянием r и r_b — на нуль (индекс a соответствует электрону с малой массой m , а индекс b — протону с массой M). Перейдем затем к нерелятивистскому приближению, заменив дираковские матрицы α_i^a на p_i/m и α_i^b на $-p_i/M$, где $\mathbf{p} = -i\nabla_r$. При этих приближениях разность энергий примет вид

$$\Delta E_{T,A} = -\frac{e^2}{2\pi m M} \int d^3k \sum_{i=1}^2 \sum_m \frac{\langle n | p_i e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} | m \rangle \langle m | p_i | n \rangle (E_m - E_n)}{k^2 (E_m - E_n + k)}. \quad (45)$$

¹⁾ Отметим, однако, что полученные в этой статье члены были вычислены Бором, Гурари, Кроллем и Лэмбом с помощью метода, в котором только электрон (но не протон) трактовался релятивистски. — *Прим. авт.*

Брейтовское взаимодействие представляет обмен виртуальным поперечным фотоном между электроном и ядром. Аналогичным образом поперечная собственная энергия электрона может рассматриваться как результат обмена фотоном электрона самим с собой. Лэмбовский сдвиг в нерелятивистском приближении равен разности между собственной энергией связанного электрона, находящегося в атомном состоянии, и эквивалентным выражением без члена $E_m - E_n$ в знаменателе. Таким образом, имеется известная математическая аналогия между рассматриваемой поправкой (45) и лэмбовским сдвигом. В действительности выражение (45) тождественно с выражением для лэмбовского сдвига, полученным Бете [10] при нерелятивистском подсчете в формуле (5) с точностью до множителя 2 (либо электрон, либо ядро испускает фотон), множителя e^{ikr} (импульс k переносится от одной частицы к другой) и множителя m/M (отношение скоростей ядра и электрона). Поскольку верхний предел A для k много меньше, по предположению, чем p_0 , то k очень мало по сравнению со „средним“ импульсом в атомном состоянии и множителем e^{ikr} можно пренебречь. Атомные волновые функции могут быть также заменены шредингеровскими нерелятивистскими функциями. Выражение (45) будет равно соответствующему выражению для лэмбовского сдвига, умноженному на $2m/M$,

$$\Delta E_{T,A} = \frac{8\alpha^2}{3mM} \ln \left(\frac{A}{\langle E_m - E_n \rangle_{\Delta v}} \right) |\psi_n(0)|^2. \quad (46)$$

Для $2s$ - и $2p$ -состояний величина $\langle E_m - E_n \rangle_{\Delta v}$ была ранее точно вычислена [11]; подставив ее значение для $2s$ -состояния, получаем

$$\Delta E_{T,A} = \left(\frac{2\alpha^3 m \text{ Ry}}{3\pi M} \right) \ln \frac{A}{16,64 \text{ Ry}}. \quad (46a)$$

Для состояний с не равным нулю орбитальным моментом соответствующая величина очень мала (она составляет $+0,004 \text{ мггц}$ для $2p$ -состояния).

Высоочастотная часть ($k > A$) будет строго рассмотрена в следующем разделе. Здесь же мы покажем, что составляющие, содержащие множитель $\ln x$, могут быть получены из нерелятивистского приближения. Пусть

$$p_0 \ll B \ll m; \quad (47)$$

рассмотрим выражение (45) с A в качестве нижнего предела для k и с B — в качестве верхнего предела. Член $(E_m - E_n)$ в знаменателе будет в этом случае мал по сравнению с k и может быть опущен. В числителе E_m заменяется на невозмущенный гамильтониан H_0 , действующий на состояние m , и E_n — на гамильтониан H_0 , действующий на состояние n . При этом может быть вновь применено правило сумм для исключения суммирования по m . Используя то обстоятельство, что

$$[H_0, p_i] = i \frac{\partial V}{\partial r_i},$$

где $V(r) = -e^2/r$, находим выражение

$$\Delta E_{T,B} = \frac{ie^2}{2\pi^2 m M} \int_A^B d^3 k k^{-3} \sum_{i=1}^2 \langle n | p_i e^{ikr} \left(\frac{\partial V}{\partial r_i} \right) | n \rangle. \quad (48)$$

Для $2s$ -состояния определение собственного значения (48) дает при использовании нерелятивистской шредингеровской волновой функции с точностью до низшего порядка по α и m/M выражение, не зависящее от B ,

$$\Delta E_{T,B} = \left(2\alpha^3 m \frac{\text{Ry}}{3\pi M} \right) \left\{ \ln \left(\frac{p_0}{A} \right) + \frac{25}{12} \right\}. \quad (48a)$$

Верхний предел логарифмического множителя имеет порядок боровского импульса p_0 , а не m , как это имеет место в случае лэмбовского сдвига. Это связано с множителем e^{ikr} , который обрезает составляющую, относящуюся к области частот $k \gg p_0$.

Для $2s$ -состояния водорода сумма (46а) и (48а) равна

$$\Delta E_{ст} = \left(2\alpha^3 m \frac{Ry}{3\pi M} \right) \left\{ \ln \left(\frac{p_0}{16,64} Ry \right) + \frac{25}{12} \right\} = +0,721 \text{ мэгэв}. \quad (49)$$

Для всех состояний, за исключением s -состояний, соответствующее выражение мало. Для $2p$ -состояния находим

$$\Delta E_{т, в} = - \left(\frac{\alpha^3 m Ry}{18\pi M} \right) = -0,012 \text{ мэгэв}, \quad (49a)$$

и $\Delta E_{ст}$ равно, таким образом, для $2p$ -состояния $-0,008$ мэгэв. Выражение (46) является единственным членом порядка $\alpha (m/M) \Delta E(fs)$, относящимся к области частот $k < A$. Имеется еще один член, соответствующий значениям k , лежащим между p_0 и m , и рассматриваемый строго в следующем разделе, для которого можно получить простое приближение с помощью нерелятивистского рассмотрения настоящего раздела.

Рассмотрим энергию возмущения четвертого порядка, соответствующую H' [формула (43)]. Эта энергия включает член, связанный со следующим процессом: одна из двух частиц испускает виртуальный поперечный фотон с импульсом \mathbf{k} и переходит в состояние с отрицательной энергией. После этого та же самая частица испускает другой поперечный фотон с импульсом $\mathbf{q} = \mathbf{k}$ и возвращается в состояние с положительной энергией. Вторая частица поглощает затем один из двух фотонов и переходит в состояние отрицательной энергии. В конце вторая частица поглощает оставшийся фотон, и весь атом возвращается в начальное состояние.

Единственная составляющая порядка $\alpha (m/M) \ln \alpha \Delta E(fs)$, входящая в указанный член, относится к значениям импульсов p, q и k , удовлетворяющих условиям $p_0 \ll k \ll m$ и $p \sim q \sim p_0$. Следовательно, $(\mathbf{q} = \mathbf{k})$ можно приближенно приравнять $-\mathbf{k}$. Для таких значений k входящие в знаменатель энергии трех промежуточных состояний могут быть аппроксимированы величинами $(-2m)$, $(-k - |\mathbf{q} - \mathbf{k}|)$ и $(-2M)$ соответственно. При этих приближениях для выполнения суммирования по трем промежуточным состояниям может быть использовано правило сумм. Подобным образом получается следующее приближенное выражение для энергии возмущения в четвертом порядке:

$$\Delta E_{TT'} \approx - \frac{e^4}{64\pi^4 m M} \int_{p_0}^m d^3 k k^{-3} \int d^3 q \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \langle n | \alpha_i^a \alpha_j^a (\alpha_i^b \alpha_j^b + \alpha_j^b \alpha_i^b) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} | n \rangle. \quad (50)$$

Используя равенство

$$\int d^3 q \cdot e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{r}),$$

выражение (50) можно представить в виде

$$E_{TT'} \approx - \left(\frac{2\alpha^3}{mM} \right) \ln \left(\frac{m}{p_0} \right) |\psi_n(0)|^2. \quad (50a)$$

Соответствующие выражения для состояний с не равным нулю орбитальным моментом в этом случае опять очень малы.

6. Четырехмерное рассмотрение „поперечных“ членов

Определим теперь строго члены порядка $\alpha (m/M) \Delta E(fs)$, которые включают обмен по крайней мере одним поперечным фотоном между электроном и протоном в водороде. Соответственно рассмотрению раздела 4 мы используем уравнение (37), беря в качестве предслов для входящих туда интегралов по импульсам фотонов величину A [см. (41)] и бесконечность. Возьмем четырехмерные решения $\psi_n(p_q)$, соответствующие решениям уравнения (26), в качестве невозмущенных решений и используем видоизмененную теорию возмущений, полученную

в разделе 4. Поскольку мы в предыдущем разделе уже разобрали низкочастотную часть $k < A$, то мы можем пренебречь членами высшего порядка, не записанными явно в выражении (37). Используя (37) и (40), мы получим в этом случае следующую составляющую собственного значения энергии:

$$\Delta E_n = \int \int d^4 p d^4 k \tilde{\psi}_n(p_\mu) [G'_T + G'^{(2)}_{GT} + G'^{(2)}_{TT} + G'^{\text{mod}}_{TT}] (k_\mu) \psi_n(p_\mu + k_\mu), \quad (51)$$

где G'^{mod}_{TT} означает «дополнительный член, соответствующий второму слагаемому правой части уравнения (40), который получается в нашем видоизменении теории возмущений в первом порядке. Первые и последние два из четырех слагаемых (51) будет удобно рассматривать совместно.

А. «ГЛАВНЫЙ ЧЛЕН»

Рассмотрим первое слагаемое правой части (51). Используя тождество (14), можно записать соотношение

$$\psi(p_\mu) = \psi_{++} + \psi_{-+} + \psi_{+-} + \psi_{--}$$

и аналогичное соотношение для $\tilde{\psi}(p_\mu)$. С помощью этих соотношений рассматриваемый член, содержащий $G'_{T\gamma}$, можно разбить на шестнадцать членов. Из этих шестнадцати членов только один, включающий ψ_{++} и $\tilde{\psi}_{++}$, дает составляющую рассматриваемого порядка малости. С помощью (15) и (19а) мы можем выразить ψ_{++} и $\tilde{\psi}_{++}$ через решение уравнения (26). Явная зависимость подынтегрального выражения в (51) от $\varepsilon = p_1$ и $\varepsilon' = (p_4 + k_4)$ станет тогда известной, что позволяет выполнить интегрирование по этим двум переменным. Первый член (51) можно в этом случае записать в виде

$$\frac{e^2}{2\pi^2} \int \int d^3 p d^3 p' \varphi_{++}(\mathbf{p}) \mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sum_{i=1}^2 \alpha_i^a \sigma_i^b \varphi_{++}(\mathbf{p}'), \quad (52)$$

где

$$\mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int \int \frac{d\varepsilon d\varepsilon'}{(2\pi i)^2} F_{++}(\mathbf{p}, \varepsilon) F_{++}(\mathbf{p}', \varepsilon') [k^2 - |\varepsilon' - \varepsilon|^2 - i\Delta],$$

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p}.$$

Соответственно правилам Фейнмана, мы должны в выражении для $\mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ приписывать фотону бесконечно малую отрицательную мнимую массу ($-i\Delta$). Входящие в последнее выражение интегралы могут быть взяты, что дает

$$\mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \left\{ [k^2 - |E_b(p) - E_b(p')|^2]^{-1} + \frac{[E - E_a(p) - E_b(p)]}{2k[k + E_a(p) + E_b(p') - E][k - E_b(p) + E_b(p')]} + \frac{[E - E_a(p') - E_b(p')]}{2k[k + E_a(p') + E_b(p) - E][k - E_b(p') + E_b(p)]} \right\}. \quad (53)$$

При брейгговском рассмотрении получается выражение, совпадающее с (52), только вместо $\mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ входит k^{-2} и $\varphi_{++}(\mathbf{p})$ заменяется на эквивалентное решение уравнения Брейта с кулоновским взаимодействием. С требуемой точностью первый член (53) при подстановке в (52) дает такую же составляющую энергии, что и член Брейта.

Рассмотрим теперь выражение, получающееся при подстановке в (52) грегг-го члена (53). Оказывается, что для этого нужно приближенное выражение для $\varphi_{++}(\mathbf{p})$ в области $p \lesssim p_0$, правильное с точностью до низшего порядка по α . Поэтому мы будем аппроксимировать $\varphi_{++}(\mathbf{p})$ нерелятивистской шрединг-

ровской функцией $\varphi_0^*(\mathbf{p})$ из (27). Вместо $\varphi_{++}(\mathbf{p}')$ удобно использовать полу-
ченную с помощью итерации волновую функцию φ_{1++} , определяемую форму-
лой (29) и дающую хорошее приближение также и при $p' \sim m$. После выпол-
нения этих подстановок и изменения переменных интегрирования рассматривае-
мая составляющая энергии примет вид

$$-\left(\frac{e^2}{2\pi^2}\right)^2 \int \int d^3p d^3p' \varphi_0^*(\mathbf{p}) \mathfrak{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \varphi_0(\mathbf{p}'), \quad (54)$$

где $\mathfrak{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ — оператор, содержащий интеграл по k . В подынтегральное выра-
жение входит знаменатель первого члена (53). Далее, $k > A \gg Ry$ и оказы-
вается, что составляющие искомого порядка получаются только при значениях k ,
удовлетворяющих условию $k \ll m$. Знаменатель третьего члена (53) может быть,
следовательно, приближенно положен равным $(2k^2)$. В этом случае получаем

$$\mathfrak{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int d^3k \sum_{i=1}^2 \alpha_i^a \alpha_i^b \Lambda_+^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) (2k^2)^{-1} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^{-2}. \quad (55)$$

Рассмотрим теперь одну из частей второго слагаемого правой стороны ра-
венства (51). Соответствующее выражение эквивалентно выражению (32), только
вместо кулоновского взаимодействия с импульсом \mathbf{k} стоит импульс поперечного
фотона \mathbf{k} :

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{e^4}{8\pi^2 i}\right) \int \int \int d^4p d^4k d^4p' \times \\ & \quad \frac{\sum_{i=1}^2 \tilde{\psi}(p_\mu) \alpha_i^a \Lambda_+^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^b \psi(p'_\mu)}{(k^2 - \omega^2 - i\Delta)(\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^2 [\mu_a E - E_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \varepsilon + \omega + i\delta][\mu_b E - E_b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) - \varepsilon' + \omega + i\delta]} + \dots \end{aligned} \quad (56)$$

Не выписанные явно в (56) три остальных члена (содержащих $\Lambda_+ \Lambda_-$, $\Lambda_- \Lambda_+$
и $\Lambda_- \Lambda_-$) не дают составляющих требуемого порядка. Далее оказывается,
что в данном приближении $\tilde{\psi}(p_\mu)$ и $\psi(p'_\mu)$ можно заменить $\tilde{\psi}_{++}(p_\mu)$ и $\psi_{++}(p'_\mu)$
соответственно. Последние две функции могут быть в свою очередь выражены
с помощью (15), (15б) и (19а) через $\varphi_{++}^*(p_\mu)$ и $\varphi_{++}(p'_\mu)$. Подобным образом
находится явная зависимость подынтегрального выражения (56) от $\varepsilon \equiv p_1$,
 $\omega \equiv k_4$ и $\varepsilon' \equiv p'_1$, так что становится возможным выполнить интегрирование
по этим трем переменным. При этом оказывается, что подынтегральное выра-
жение дает составляющие требуемого порядка только в области

$$p, p' \sim p_0; \quad A \ll k \lesssim p_0. \quad (57)$$

В связи с этим можно, далее, заменить φ_{++}^* и φ_{++} на нерелятивистские шре-
дингеровские волновые функции φ_0^* и φ_0 . С требуемой точностью по α и
(m/M) выражение (56) сводится тогда к выражению вида (54), в котором
вместо \mathfrak{H}_1 стоит \mathfrak{H}_2 :

$$\mathfrak{H}_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = - \int d^3k \sum_{i=1}^2 \alpha_i^a \Lambda_+^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_+^b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^b (2k^2)^{-1} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^{-2}. \quad (58)$$

До сих пор мы рассматривали только третий член (53) и половину члена,
содержащего $G_{CT}^{(2)}$. В этих двух выражениях матрицы α_i^a входят слева от Λ_+^a .
Второй член (53) дает выражение, эквивалентное (54), только \mathfrak{H}_1 заменяется
в нем аналогичным оператором \mathfrak{H}_3 , в котором матрицы α_i^a входят справа от Λ_+^a .
Подобным образом вторая половина $G_{CT}^{(2)}$ (соответствующая перестановке порядка
кулоновского и поперечного взаимодействий) дает новое выражение, где \mathfrak{H}_2

заменено оператором δ_{ij} , в котором матрицы α_i^a входят также справа от Λ_+^a . Сумма данных четырех операторов равна

$$\int d^3k (2k^3)^{-1} (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^{-2} \times \\ \times \sum_{i=1}^2 \{ [\alpha_i^a \Lambda_+^a (\mathbf{p} + \mathbf{k}) - \Lambda_+^a (\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^a] [\alpha_i^b \Lambda_+^b (\mathbf{p} + \mathbf{k}) - \Lambda_+^b (\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^b] \}. \quad (59)$$

Подставим, наконец, (59) в выражение (54). В области интегрирования (57) член в фигурных скобках в (59) можно приближенно заменить на $[-(p'_i - p_i)^2/mM]$. После этого мы получаем следующую составляющую энергии:

$$\Delta E_{T, B} = \frac{e^4}{4\pi^4 mM} \int \int \int d^3p d^3k d^3p' \varphi_0^*(\mathbf{p}) \left[\sum_{i=1}^2 (p'_i - p_i)^2 (\mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k})^{-2} \right] (2k^3)^{-1} \varphi_0(\mathbf{p}'). \quad (60)$$

Интегрирование по k в (60) распространяется от A до бесконечности. Подынтегральное выражение при $k \gtrsim B$ не дает составляющих требуемого порядка. В связи с этим, учитывая свойства нерелятивистского уравнения Шредингера для атома водорода, можно легко показать, что выражение (60) тождественно с эквивалентным выражением (48), полученным с помощью трехмерного рассмотрения.

Добавим теперь к (60) составляющие (46), относящиеся к области $k < A$. Сумма данных членов ΔE_{CT} с точностью до порядка $\alpha(m/M) \Delta E(\text{fs})$ равняется выражению, полученному в предыдущем разделе. Для s -состояний коэффициент перед членом с $\ln \alpha$ может быть также просто получен непосредственно из (60). При $k \ll p_0$ член в квадратных скобках в (60) сводится к $2/3$ и выражение (60) переходит в

$$\Delta E_{CT} \sim \left(\frac{e^4}{3\pi^2 mM} \right) \left| \int d^3p \varphi_0(\mathbf{p}) \right|^2 \int dk k^{-1} = \left(8 \frac{\alpha^3}{3mM} \right) |\psi_n(0)|^2 \int dk k^{-1}. \quad (61)$$

Интеграл по k берется в пределах от $k \sim \alpha p_0$ до $k \sim p_0$ и поэтому имеет порядок $\ln \alpha^{-1}$. Выражение (61) совпадает со слагаемым строгого выражения, содержащим $\ln \alpha^{-1}$.

Б. „ПОПЕРЕЧНЫЙ ДВУХФОТОННЫЙ“ ЧЛЕН

Рассмотрим, наконец, последние два члена (51), представленные на фиг. 1 награммами 3а и 3б, соответствующие обмену двумя поперечными фотонами „накрест“ в случае $G_{TT}^{(2)}$ и „последовательно“ в случае $G_{TT}^{m \rightarrow 1}$. Для точного определения этих членов наиболее удобен, повидимому, изящный метод интегрирования Фейнмана. Однако указанные члены сами по себе имеют порядок $\alpha(m/M) \Delta E(\text{fs})$, так что в рамках поставленной задачи достаточно определить их с точностью до низшего порядка по α и (m/M) . Для этой цели наиболее удобно использовать метод, который мы применили при рассмотрении $G_{CT}^{(2)}$ и $G_{CT}^{(2)}$.

Как и в предыдущих случаях, находим, что четырехмерные волновые функции ψ можно приближенно заменить на ψ_{++} . Последние функции опять выражаются через трехмерные функции φ_{++} , вместо которых используется нерелятивистское приближение φ_0 . Каждый член, далее, вновь расщепляется на четыре слагаемых с помощью тождества (14). Оказывается, что из этих четырех слагаемых только те из них, которые содержат $\Lambda_-^a \Lambda_-^b$ и $\Lambda_+^a \Lambda_-^b$, дают составляющие требуемого порядка. Это вызывается тем обстоятельством, что с каждой стороны Λ^b стоит по одной дираковской матрице, относящейся к протону. Для иллюстрации

метода мы выпишем один из данных членов, относящийся к G_{TT}^{mn} и $\Lambda^a \Lambda^b$. При подстановке в (51) этот член даст

$$-\frac{e^4}{8\pi^2 i} \iiint \frac{d^4 p d^4 k d^4 p'}{(k^2 - \omega^2 - i\delta)} \times \\ \times \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \bar{\psi}(p_i) \alpha_i^a \alpha_i^b \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_-^b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j^a \alpha_j^b \psi(p_j)}{(k'^2 - |\varepsilon' - \varepsilon - \omega|^2 - i\delta) [\nu_a E + E_a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + \varepsilon + \omega - i\delta] [\nu_b E + E_b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - \varepsilon - \omega - i\delta]}, \quad (62)$$

где

$$\mathbf{k}' \equiv \mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{k}.$$

Выразив $\psi(p_i)$ через $\varphi_0(\mathbf{p})$, как было указано выше, и проинтегрировав по ε , ω и ε' , мы получим из (62)

$$-\left(\frac{e^2}{2\pi^2}\right)^2 \iint d^3 p d^3 p' \varphi_0^*(\mathbf{p}) \mathfrak{L}_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \varphi_0(\mathbf{p}'), \quad (63)$$

где

$$\mathfrak{L}_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \int d^3 k \alpha_i^a \alpha_i^b \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \Lambda_-^b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j^a \alpha_j^b \mathfrak{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{k}),$$

а \mathfrak{K} — функция, не содержащая дираковских операторов. Если $p_0 \ll B \ll m$, то \mathfrak{K} с требуемой точностью имеет вид

$$\mathfrak{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{k}) = \begin{cases} [8mMkk'(|k| + |k'|)]^{-1} & \text{при } k < B, \\ [m + 2k + E_a(k)] [8Mk^3 [m + k + E_a(k)]^2]^{-1} & \text{при } k > B. \end{cases} \quad (64)$$

Составляющая $G_{TT}^{(2)}$ дает член, аналогичный (63), только \mathfrak{L}_1 заменяется в нем другой функцией \mathfrak{L}_2 , зависящей от той же самой функции \mathfrak{K} (64) и содержащей еще различные дираковские операторы. С рассматриваемой точностью допустимо сделать подстановку

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left(\frac{1}{2}\right) [\alpha_i^a \Lambda_-^a(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j^a + \alpha_j^a \Lambda_-^a(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^a] \times \\ \times [\alpha_i^b \Lambda_-^b(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j^b + \alpha_j^b \Lambda_-^b(\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_i^b] \rightarrow 2 [1 + \cos^2 \theta] [m + E_a(k)] \frac{1}{2E_a(k)}, \quad (65)$$

где θ — угол между направлениями \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Доказательство правильности (65) дано в приложении. С помощью формул (64) и (65) можно вычислить сумму члена ΔE_{TT}^- (63) и эквивалентного члена с \mathfrak{L}_2 для любого частного атомного состояния.

Выведенное ранее с помощью трехмерного рассмотрения приближенное выражение (50а) для данного члена может быть также просто получено настоящим методом. Так как при $p_0 \ll k \ll m$ $\mathbf{k} \approx -\mathbf{k}'$, то, следовательно, $\cos \theta \approx 1$. Функция $\mathfrak{K}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{k})$ может быть в этом случае приближенно приравнена $[16mMk^3]^{-1}$, а выражение (65) заменено на множитель 4. После интегрирования от $k \sim p_0$ до $k \sim m$ мы получим приближенное выражение для ΔE_{TT}^-

$$\Delta E_{TT}^- \sim -\left(\frac{e^4}{4\pi^3 m M}\right) \ln\left(\frac{m}{p_0}\right) \left| \int d^3 p \varphi_0(\mathbf{p}) \right|^2,$$

которое совпадает с (50а).

Точное вычисление ΔE_{TT}^- может быть произведено для каждого частного атомного состояния при учете (63) — (65). Интегрирование по k производится от нуля до бесконечности. При вычислении не получается никаких бесконеч-

ности и область интегрирования $k < A$ не дает составляющих требуемого порядка. Для $2s$ - и $2p$ -состояний атома водорода получаем в результате

$$2s: \quad \Delta E_{\overline{T}T} = - \left(\frac{\alpha^3 m R y}{2\pi M} \right) \left\{ \ln(2\alpha^{-1}) - \frac{5}{4} - 0,411 \right\} = -0,438 \text{ мггц}, \quad (66)$$

$$2p: \quad \Delta E_{\overline{T}T} = - \left(\frac{\alpha^3 m R y}{24\pi M} \right) = -0,009 \text{ мггц}. \quad (66a)$$

Слагаемое $(-0,411)$ в выражении (66) получим в результате численного интегрирования довольно сложного интеграла.

Рассмотрим, наконец, член $E_{\overline{T}T}^+$, эквивалентный $\Delta E_{\overline{T}T}^-$, в котором только вместо операторов проектирования $\Lambda_-^a \Lambda_-^b$ стоят операторы $\Lambda_+^a \Lambda_-^b$. Этот член можно определить таким же (но несколько более простым) способом, что и член $\Delta E_{\overline{T}T}^-$. В результате для всех состояний в водороде получим

$$\Delta E_{\overline{T}T}^+ = + \left(\frac{2\alpha^2}{mM} \right) \left\{ \ln 2 + \frac{1}{2} \right\} |\psi_n(0)|^2; \quad (67)$$

эта величина равна $0,132$ мггц для $2s$ -состояния и нулю для $2p$ -состояния.

Члены ΔE_{CC} , ΔE_{CT} , $\Delta E_{\overline{T}T}^-$ и $\Delta E_{\overline{T}T}^+$ для каждого атомного состояния можно записать в виде средних значений в частном состоянии операторов „поправочного потенциала“ (одних и тех же операторов для всех состояний). В случае ΔE_{CC} и $\Delta E_{\overline{T}T}^+$ эти операторы будут равняться с точностью до численных множителей, не включающих $\ln \alpha$ (при записи в конфигурационном пространстве) $(\alpha^2/mM) \delta^{(3)}(\mathbf{r})$. В случае ΔE_{CC} и $\Delta E_{\overline{T}T}^+$ соответствующие операторы будут при $r \neq 0$ пропорциональны α^2/mMr^3 и поэтому будут давать конечные, хотя и малые, составляющие также и для состояний с не равным нулю моментом количества движения. Эти операторы, обладающие сильными особенностями вначале, могут быть выражены с помощью предельного перехода

$$\text{Оператор} = \left(\frac{\alpha^2}{mM} \right) \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ [a \ln \alpha + 4\pi b \ln \eta] \delta^{(3)}(\mathbf{r}) + \frac{b}{(r+\eta)^3} \right\}; \quad (68)$$

здесь a и b — численные постоянные, равные по порядку величины единице.

Полная поправка порядка $\alpha(m/M)E(\text{fs})$ к тонкой структуре водорода ΔE будет, таким образом, равняться сумме четырех слагаемых ΔE_{CC} , ΔE_{CT} , $\Delta E_{\overline{T}T}^-$ и $E_{\overline{T}T}^+$. Для $2s$ -состояния из (36), (49), (66) и (67) следует

$$\Delta E = + \left(\frac{\alpha^3 R y}{3\pi} \right) \left(\frac{m}{M} \right) \left\{ 2 \left[\ln \left(\frac{\alpha^{-1}}{8,32} \right) + \left(\frac{11}{6} \right) \right] - \left(\frac{3}{2} \right) \left[\ln(\alpha^{-1}) - \frac{7}{4} - 0,411 \right] \right\}. \quad (69)$$

В формуле (69) первый член в квадратных скобках относится к $(\Delta E_{CT} + \Delta E_{\overline{T}T}^-)$, а второй — к $(\Delta E_{\overline{T}T}^+ + \Delta E_{CT})$.

Численные значения для $2s$ - и $2p$ -состояний водорода равны]

$$\begin{aligned} 2s: \quad \Delta E &= +0,379 \text{ мггц}, \\ 2p: \quad \Delta E &= -0,017 \text{ мггц}. \end{aligned} \quad (70)$$

7. Обобщение на сложные ядра

В данной статье мы показали, что имеются поправки к тонкой структуре водорода ΔE порядка $\alpha(m/M)E(\text{fs})$, обязанные своим происхождением конечности массы ядра. Эти поправки были вычислены в предположении, что ядро (протон) является одиночной дираковской частицей с электрическим зарядом $(+e)$; при этом мы пренебрегали эффектами структуры ядра, подобными аномальному магнитному моменту, мезонному облаку и т. п.

Пренебрежем опять специфическими мезонными и структурными эффектами и будем рассматривать протоны и нейтроны в ядре как дираковские частицы

с зарядом $(+e)$ и нуль соответственно и с взаимодействием, описываемым посредством некоторого феноменологического потенциала. В этом случае мы можем обобщить рассмотрение нашей статьи на случай любого водородо-подобного атома. Поправочный член ΔE обусловлен обменом фотонами или кулоновским взаимодействием, соответствующий которому импульс $k \lesssim m$. Эти импульсы очень малы по сравнению с импульсами нуклеонов в ядре (длины волн фотонов велики по сравнению с радиусом ядра), а также малы по сравнению с энергиями связи нуклеонов в ядре. Члены $\Delta E_{\text{от}}$ и $\Delta E_{\text{от}}$ включают промежуточные состояния только с положительной энергией для ядра и поэтому являются относительно ядра полностью нерелятивистскими. При рассмотрении этих членов любое ядро можно, по крайней мере приближенно, трактовать как одиночную частицу с зарядом $+Ze$ и массой $M = AM_p$, где M_p — масса протона, Z — атомный заряд и A — атомный вес. Поэтому мы можем использовать формулы, выведенные в настоящей статье, подставив Ze вместо e и полную массу ядра вместо M .

Далее, покажем несколько более подробно, что аналогичный результат получается¹⁾ в случае членов $\Delta E_{\text{от}}$ и $\Delta E_{\text{от}}$. Это обстоятельство является далеко не очевидным, поскольку в указанных членах дираковские операторы $e\alpha$ индуцируют переходы нуклеонов в состояния отрицательной энергии. Таким образом, изменения энергии при виртуальных переходах имеют порядок $2M_p$ и, следовательно, велики по сравнению с энергией взаимодействия нуклеонов. Протоны по отдельности связаны с полем излучения и с первого взгляда можно предположить, что ядро будет участвовать во взаимодействии не как единое целое, а что протоны будут переходить в состояния отрицательной энергии независимо друг от друга. Подобная проблема аналогична случаю нерелятивистского предела ядерного комптон-эффекта для сложного ядра. При комптоновском эффекте фотон малого импульса поглощается одним из протонов ядра и испускается другой фотон; в настоящем случае протонами ядра испускаются (или поглощаются) два виртуальных фотона.

Рассмотрим, например, часть членов $\Delta E_{\text{от}}$, соответствующих последовательному испусканию двух фотонов с импульсами k и k' сложным ядром с атомным номером Z и атомным весом A . Применим трехмерную теорию возмущений раздела 5 и рассмотрим только множитель в матричном элементе, соответствующий испусканию двух фотонов ядром. Пусть перед испусканием фотонов ядро находится в своем основном состоянии с полной энергией E_0 (все нуклеоны занимают состояния положительной энергии). После испускания первого фотона ядро может перейти в какое-либо „возбужденное“ состояние, включая те из них, в которых некоторые нуклеоны занимают состояния отрицательной энергии. Обозначим энергию этого промежуточного состояния через E_n . После испускания обоих фотонов ядро (но не атом) должно вернуться в свое основное состояние. В стоящей в знаменателе энергии первого промежуточного состояния мы можем пренебречь энергией атомной связи и эффектом отдачи. Рассматриваемая часть матричного элемента будет тогда равняться

$$\sum_n \sum_{z, z'} \langle 0 | \alpha_i^z | n \rangle \langle n | \alpha_j^{z'} | 0 \rangle \frac{1}{E_0 - E_n - k}, \quad (71)$$

где α_i^z — дираковская матрица в направлении [поляризации i для z -го протона. По z и z' производится суммирование от единицы до Z . Мы везде пренебрегаем ядерными обменными силами.

Рассмотрим сначала состояния n , в которых один из протонов занимает состояние с отрицательной энергией. Поскольку тогда $k \lesssim m \ll M_p$, мы можем в (71) знаменатель $(E_0 - E_n - k)$ приближенно приравнять $(+2M_p)$. После

1) Этот факт автору был впервые указан Крэйлем. — *Прим. авт.*

этого можно с помощью правила сумм произвести суммирование по n , в результате чего получим

$$\sum_{z, z'} \langle 0 | \alpha_i^z \alpha_j^{z'} | 0 \rangle \frac{1}{2M_p}. \quad (71a)$$

В нерелятивистском приближении эта величина примет вид

$$\frac{Z \cos \theta}{2M_p}$$

(где θ — угол между двумя направлениями поляризации), совпадающий с точностью до множителя Z с видом соответствующего выражения для одиночного свободного протона.

Однако в случае сложного ядра промежуточные состояния положительной энергии n дают в (71) составляющие такого же порядка величины, что (71a). Заменяем для этих состояний α_i^z нерелятивистским приближением p_i^z/M_p , где p_i^z — компонента импульса z -го протона в i -м направлении. При этом величина E_n даже для наинизшего возбужденного состояния будет больше E_0 на несколько $Mэв$ для большинства ядер. С другой стороны, $k \lesssim m \approx 0,5 Mэв$, и мы, следовательно, получим хорошее (но не безупречное) приближение, опустив в знаменателе (71) в данных членах k . При указанном приближении мы получим дополнительную составляющую

$$\sum_n \sum_{z, z'} \langle 0 | p_i^z | n \rangle \langle n | p_j^{z'} | 0 \rangle \frac{1}{M_p^2 (E_0 - E_n)}, \quad (71b)$$

которая может быть записана в виде

$$-\frac{\cos \theta}{2M_p} \sum_n f_{0n}, \quad (72)$$

где f_{0n} — сила осциллятора для дипольного перехода. При пренебрежении обменными силами сумма $\sum_n f_{0n}$ равна $(A - Z)Z/A$ [12]. Складывая (71a) и (71b), получаем

$$\frac{\cos \theta}{2M_p} \left[Z - \frac{(A - Z)Z}{A} \right] = \frac{\cos \theta}{2M_p} \left(\frac{Z^2}{A} \right). \quad (73)$$

Из рассмотрения (73) вытекает, что даже в случае членов ΔE_{TT} выражение для одиночного фотона следует, помимо подстановки соответствующего значения $|\psi(0)|^2$, умножить на (Z^2/A) . Иными словами, множитель e^2/M_p следует заменить $(Ze)^2/AM_p$, что равносильно применению результатов настоящей статьи для ядра, рассматриваемого как частица с зарядом (Ze) и массой (AM_p) . Для дейтерия полный эффект будет в этом случае вдвое меньше, чем для водорода. В общем случае величина полного эффекта будет немного меньше, чем соответствующая величина для водорода, умноженная на (Z^3/A) , поскольку логарифмические множители в ΔE_{CT} и ΔE_{TT} несколько убывают с возрастанием Z .

В выводах настоящего раздела делались многочисленные приближения. Пренебрежение запаздыванием приводит к относительной ошибке, самое большее порядка отношения длины волны виртуальных фотонов к радиусу ядра, т. е. меньше чем одной пятидесятой. Пренебрежение k в сравнении с $(E_0 - E_n)$ в случае промежуточных состояний положительной энергии дает малую относительную ошибку порядка $m/2M_p$ или меньше. Большую ошибку дает пренебрежение величиной $k/(E_0 - E_n)$ в случае промежуточных состояний с положительной энергией ядра. В частности, для дейтерия наименьшее возможное значение $E_0 - E_n$, равное энергии связи дейтерона, составляет всего лишь $2,3 Mэв$. По аналогии с фотораспадом дейтерона можно ожидать, что „среднее“ значение $E_0 - E_n$ будет вдвое больше, т. е. будет равняться примерно $5 Mэв$. В случае ΔE_{CT} , $k \lesssim p_0 \ll m$ и соответствующая ошибка пренебрежимо мала. В слу-

чае ΔE_{TT} член, включающий логарифмический множитель, относится к области $k \ll m$ и допускаемая ошибка также будет мала. Однако ΔE_{SS} и некоторые составляющие ΔE_{TT} , не включающие логарифмического множителя, относятся к значениям k порядка m . Вследствие частичного взаимного сокращения ΔE_{ST} и ΔE_{TT} члены, относящиеся к области $k \sim m$, равны по величине полному результату ΔE . Поэтому ошибка в полном результате в случае дейтерия может составлять 0,5 Мэв/5 Мэв, т. е. 10%. Влияние ядерных обменных сил пока не было исследовано; однако, повидимому, оно мало.

Вычисленные в настоящей статье массовые поправки к тонкой структуре различны для 2s- и 2p-состояний и должны, следовательно, обнаруживаться при анализе опытов по лэмбовскому сдвигу. Однако, кроме них, имеются массовые поправки к самому теоретическому значению лэмбовского сдвига, обладающие таким же порядком величины, что и поправки, вычисленные в настоящей статье. Имеются еще другие поправки к тонкой структуре и лэмбовскому сдвигу, связанные с конечностью размеров сложного ядра и внутренней структурой ядер. В последующей статье будут рассмотрены все эти поправки в связи с лэмбовским сдвигом.

Брейтовский способ рассмотрения был применен [19] в случае тонкой структуры позитрония в низшем порядке; поправочные члены относительного порядка α могут быть вычислены так же, как и в случае водорода [2, 3]. Ошибки порядка $\alpha \Delta E(\text{fs})$, получающиеся при брейтовском способе рассмотрения, могут быть определены для позитрония с помощью методов, описанных в настоящей статье.

Из содержания настоящей статьи также следует, что не имеется никаких поправочных членов порядка $\alpha \Delta E(\text{hfs}) \sim \alpha (m/M) \Delta E(\text{fs})$ к сверхтонкой структуре (т. е. членов, включающих операторы ядерного спина). Однако если в разложениях по степеням m/M сохранять на одну степень больше, поправки к сверхтонкой структуре будут иметь место. Эти поправки, имеющие порядок $\alpha (m/M) \ln(M/m) \Delta E(\text{hfs})$, будут рассмотрены в последующей статье.

Автор глубоко благодарен Беге за многочисленные советы и разъяснения, касающиеся настоящей статьи. Автор обязан также Дэйсону, Карлусу и Кролло за ценные дискуссии и Баранжеру за проверку вычислений настоящей статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В настоящей статье мы использовали волновые функции в импульсном пространстве $\psi(\mathbf{p}, \epsilon)$ и $\varphi(\mathbf{p})$, представляющие собой шестнадцатикомпонентные спиноры с четырьмя индексами для частицы a и четырьмя индексами для частицы b . Выведенные в данном приложении формулы имеют одинаковый вид для $\psi(\mathbf{p}, \epsilon)$ и $\varphi(\mathbf{p})$, и поэтому мы для простоты разберем только случай $\varphi(\mathbf{p})$. Определим обычные операторы проектирования Казимира

$$\Lambda_{\pm}(\mathbf{p}) = [E(\mathbf{p}) \pm H(\mathbf{p})]^{-1} 2E(\mathbf{p}); \quad (П.1)$$

$$E(\mathbf{p}) = (m^2 + p^2)^{1/2}, \quad H(\mathbf{p}) = m\beta + \alpha\mathbf{p}$$

в отдельности для частиц a и b ¹⁾. Каждую волновую функцию $\varphi(\mathbf{p})$ можно затем записать в виде суммы из шестнадцати собственных функций оператора $H^a(\mathbf{p})H^b(\mathbf{p})$. Эти шестнадцать функций расщепляются на четыре набора с четырьмя вырожденными функциями в каждом (по два спиновых состояния для двух частей):

$$\varphi_{\pm\pm}(\mathbf{p}) = \Lambda_{\pm}^a(\mathbf{p})\Lambda_{\pm}^b(\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p}). \quad (П.2)$$

Каждая из данных шестнадцати функций будет в свою очередь произведением двух четырехкомпонентных спиноров.

¹⁾ В тексте статьи мы обозначали величину $(m\beta - \alpha\mathbf{p})$ для частицы b через $H(\mathbf{p})$.—
Прим. авт.

Выведем теперь использованные в тексте приближенные выражения для матричных элементов некоторых операторов, включающих различные дираковские матрицы обеих частиц. При этом требуются только матричные элементы, взятые между волновыми функциями типа $\varphi_{++}(\mathbf{p})$ и $\varphi_{++}(\mathbf{p}')$, где $p, p' \ll m_a, m_b$. Поскольку дираковские матрицы для частицы a коммутируют с дираковскими матрицами для частицы b и поскольку волновые функции являются произведением двух четырехкомпонентных спиноров, то указанные матричные элементы будут представлять собой произведение двух отдельных матричных элементов, относящихся к одной частице. Поэтому определим только матричные элементы операторов для отдельной дираковской частицы, взятые между волновыми функциями, представляющими собой четырехкомпонентный спинор.

Введем опять

$$\varphi_{\pm}(\mathbf{p}) = \Lambda_{\pm}(\mathbf{p}) \varphi(\mathbf{p}) \quad (\text{П.3})$$

и рассмотрим только матричные элементы, содержащие φ_{+} . Функция $\varphi_{+}(\mathbf{p})$ может быть записана в виде 2×1 матрицы $\{\varphi_{+}^{+}, \varphi_{+}^{-}\}$, где φ_{+}^{+} и φ_{+}^{-} — двухкомпонентные спиновые функции Паули. В этом обозначении можно записать

$$\alpha = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{П.4})$$

и

$$\varphi_{+}^{-}(\mathbf{p}) = (\sigma \mathbf{p}) |m \mp E(\mathbf{p})|^{-1} \varphi_{+}^{+}(\mathbf{p}), \quad (\text{П.5})$$

где σ — спиновый вектор Паули.

Разберем сначала вывод уравнения (25а) из (46), где оператор Λ_{+}^b заменен единицей и Λ_{-}^b — нулем. С помощью соотношения (П.5) функция $\varphi_{+}(\mathbf{p})$ явно выражается через $\varphi_{+}^{+}(\mathbf{p})$. Получим подобным образом из (26) уравнение, содержащее только $\varphi_{+}^{+}(\mathbf{p})$ и $\varphi_{+}^{+}(\mathbf{p} + \mathbf{k})$. Используя (П.1), (П.4) и (П.5), находим точное соотношение

$$[\Lambda_{+}(\mathbf{p}) \varphi_{+}(\mathbf{p} + \mathbf{k})]^{+} = \left\{ 1 + \frac{(\sigma \mathbf{p})(\sigma \cdot \mathbf{k}) + [E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p} + \mathbf{k})][E(\mathbf{p}) - m]}{2E(\mathbf{p})[E(\mathbf{p} + \mathbf{k}) + m]} \right\} \varphi_{+}^{+}(\mathbf{p} + \mathbf{k}). \quad (\text{П.6})$$

В нерелятивистском приближении ($p, k \ll m$) множитель, стоящий в (П.6) в фигурных скобках, сводится к множителю в квадратных скобках из правой части уравнения (26а). Беря подобное приближение для (П.6), мы получим из (26) уравнение (26а), в котором вместо φ_{+}^{+} стоит φ .

Нам, далее, нужны матричные элементы различных дираковских операторов O , взятых между волновыми функциями $\varphi_{+}(\mathbf{p})$ и $\varphi_{+}(\mathbf{p}')$ с точностью до низшего порядка по p/m и p'/m . В этом случае матричный элемент оператора O равен матричному элементу оператора $\Lambda_{+}(\mathbf{p}) O$. Используя соотношения (П.1), (П.4) и (П.5), можно, далее, представить величину $[\Lambda_{+}(\mathbf{p}) O \varphi_{+}(\mathbf{p}')]^{+}$ в виде $U \varphi_{+}^{+}(\mathbf{p}')$, где U — оператор, содержащий только паулиевскую спиновую матрицу σ и не включающий дираковских операторов. С требующейся точностью дираковский оператор O может быть после этого заменен паулиевским оператором U .

Ограничимся записью операторов U , соответствующих определенным операторам O , в низшем порядке по p/m и p'/m при произвольном k :

$$O = \Lambda_{-}(\mathbf{p} + \mathbf{k}); \quad U = \frac{[E(k) - m]}{4E(k)}. \quad (\text{П.7})$$

$$O = \alpha_i \alpha_j; \quad U = \alpha_i \alpha_j. \quad (\text{П.8})$$

$$O = \alpha_i \Lambda_{-}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j; \quad U = \alpha_i \alpha_j [E(k) + m] \frac{1}{2E(k)}. \quad (\text{П.9})$$

$$O = \alpha_i \Lambda_{+}(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \alpha_j; \quad U = \alpha_i \alpha_j \frac{[E(k) - m]}{2E(k)}. \quad (\text{П.10})$$

Для случая $p, p', k \ll m$ получаем в низшем порядке по $p/m, p'/m$ и k/m :

$$O = \alpha_j \Lambda_+ (\mathbf{p} + \mathbf{k}); \quad U = \{2p_j + k_j + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}]_j\} \frac{1}{2m}, \quad (\text{II.11})$$

$$O = \Lambda_+ (\mathbf{p}' - \mathbf{k}) \alpha_j; \quad U = \{2p'_j - k_j + i[\mathbf{k} \times \boldsymbol{\sigma}]_j\} \frac{1}{2m}. \quad (\text{II.12})$$

При выводе приведенных соотношений в данном приложении использовалось следующее свойство матриц Паули:

$$\boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\sigma} = 2i\boldsymbol{\sigma}.$$

При получении из (II.11) и (II.12) приближенного выражения, подставляемого в тексте в формулу (60), использовалось то обстоятельство, что направление поляризации j перпендикулярно к импульсу фотона \mathbf{k} , так что компонента k_j равна нулю. При получении формулы (65) применялись перестановочные соотношения:

$$\sigma_j^2 = 1, \quad [\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i] = 0, \quad (\text{II.13})$$

где i и j — два взаимно перпендикулярных направления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Breit G., Phys. Rev., **34**, 553 (1929).
2. Breit G., Brown G. E., Phys. Rev., **74**, 1278 (1948).
3. Breit, Brown, Arfken, Phys. Rev., **76**, 1299 (1949).
4. Salpeter E. E., Bethe H. A., Phys. Rev., **84**, 1232 (1951). (См. статью XII настоящего сборника.)
5. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749 (1949). (См. статью IV настоящего сборника.)
6. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **84**, 350 (1951).
7. Brown G. E., Ravenhall D. G., Proc. Roy. Soc. (London), **A203**, 552 (1951).
8. Bethe H. A., Handb. d. Phys., **24** 1, 305 (1933). (См. перевод: Бете Г., Квантовая механика простейших систем. М. — Л., 1934.)
9. Dyson F. J., Phys. Rev., **82**, 428 (1951); **83**, 608, 1207 (1951); Proc. Roy. Soc. (London), **A207**, 395 (1951).
10. Bethe H. A., Phys. Rev., **72**, 339 (1947).
11. Bethe H. A., Brown, Stein, Phys. Rev., **77**, 370 (1950).
12. Levinger J. S., Bethe H. A., Phys. Rev., **78**, 115 (1950).
13. Ferrell R. A., Phys. Rev., **84**, 858 (1951); Pirenne J., Arch. Sci., **28**, 233 (1946); **29**, 121, 207, 265 (1947); Берестский В. Б., ЖЭТФ, **19**, 1130 (1949).

XIV. ТРАКТОВКА КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БЕЗ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ¹⁾

С. ЭДВАРДС

S. F. Edwards, Phys. Rev., 90, No[2, 284 (1953)]

С помощью уравнений в форме Швингера, описывающих взаимодействие электрона с электромагнитным полем, выводится линейное интегральное уравнение для оператора тока Γ , ядро которого представляет собой разложение в ряд по степеням α . Взято первое приближение этого ядра; полученное интегральное уравнение решено без помощи теории возмущений. Найденные, исходя из первого приближения, значения собственной энергии оказываются конечными. Даны исследования их аналитического поведения. Применение этого метода к мезонной теории показывает возможность классификации по видам получаемых интегральных уравнений. Обсуждается возможность дальнейшего развития метода.

1. Введение

После выполнения программы перенормировки в квантовой электродинамике теория возмущений смогла чрезвычайно успешно объяснить экспериментальные результаты. Хотя почти все экспериментальные результаты связаны с рассмотрением различных взаимодействий, в которых содержатся интегралы, полностью сходящиеся после перенормировки, получение конечных результатов для значений собственной энергии, а также для других коэффициентов перенормировки, оказалось совершенно невозможным. При таком положении дел можно стать на одну из двух точек зрения: 1) исходный лагранжиан не применим для получения значений собственной энергии, но достаточно точен для учета взаимодействий, так что для исследования первой проблемы требуются какие-то новые идеи; 2) можно, однако, возразить, что, если до сих пор использовались только такие простейшие формы решений, как непосредственное разложение в ряд, то теперь требуется более точное приближение, которое должно быть более пригодным, чем теория возмущений, при большой константе связи. Например, собственная энергия электрона выражается в теории возмущений рядом

$$m = e^2(m_1 + e^2m_2 + e^4m_3 + \dots),$$

где все m_i бесконечны. Такое разложение законно, если me^{-2} аналитично по e^2 в начале координат, причем не существует априорных соображений в пользу последнего утверждения. Последний аргумент в пользу второго способа трактовки заключается в том, что некоторые теории, например мезонная теория с градиентной связью, имеют расходимости даже после перенормировки, причем остается неясным, не происходит ли это вследствие применяемого метода решения.

Мы здесь рассмотрим второй способ трактовки. Ниже предложена попытка найти решение проблемы квантовой электродинамики электрона без обращения к теории возмущений. При этом мы пользовались формулировкой Швингера [1]²⁾.

В его работе показано, что функции распространения удовлетворяют определенным функциональным интегро-дифференциальным уравнениям. После перенормировки этих уравнений в настоящей статье мы пытаемся свести проблему к решению линейного интегрального уравнения, ядро которого выражается степенным рядом по константе связи. Мы взяли первое приближение к этому ядру, решили соответствующее интегральное уравнение и произвели исследование

¹⁾ Перевод этой статьи выполнен Г. Е. Пустоваловым. — *Прим. ред.*

²⁾ Мы следуем обозначениям Швингера. — *Прим. авт.*

решения. Этот метод является лишь частичным отступлением от теории возмущений, однако есть надежда, что он будет иметь методический интерес, так как с его помощью получены интересные результаты, касающиеся поведения решений уравнения, как функций константы связи α , а также ряда физических величин.

Метод применим к различным вариантам мезонных теорий; он также дает возможность классифицировать разные типы получаемых уравнений.

2. Вывод уравнения

В случае лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} [\bar{\psi}, \gamma_{\mu} (-i\partial_{\mu} - eA_{\mu}) \psi + m\psi] + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{4} \{F_{\mu\nu}, \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}\} + \text{эрмит. сопр. величины} \quad (2.1)$$

уравнения, которым удовлетворяют гриновские функции электрона G , фотона D и оператор тока Γ , имеют в пространстве импульсов следующий вид:

$$[\gamma(p - eA) + M] G = 1, \quad (2.2)$$

$$[k^2 + P] D = 1, \quad (2.3)$$

$$\Gamma = -\frac{\delta}{\delta eA} G^{-1}, \quad (2.4)$$

$$M = m + ie^2 \gamma G \Gamma D, \quad (2.5)$$

$$P = -ie^2 \gamma G \Gamma G. \quad (2.6)$$

В этих уравнениях опущены индексы и переменные; кроме того, подразумеваются выполненными „матричные“ произведения. Величины A и γ рассматриваются как матрицы в конфигурационном пространстве:

$$\gamma(\xi; x, x') = \gamma \delta(\xi - x) \delta(x - x'), \quad (2.7)$$

$$(x|A|x') = \delta(x - x') A(x), \quad (2.8)$$

так что

$$\gamma A \rightarrow \int (d\xi) \gamma_{\mu}(\xi) A_{\mu}(\xi), \quad (2.9)$$

где ξ — „фотонная координата“. Величины G и M являются функциями координат электрона: $G(x, x')$, $M(x, x')$, причем

$$MG = \int M(x, x') G(x', x'') d^4 x'. \quad (2.10)$$

В уравнении (2.2) это произведение имеет вид $M(p)Q(p)$. Функция Γ представляет собой обобщение оператора γ , взятого с учетом вакуумных поправок, и является функцией трех переменных:

$$\Gamma_{\mu}(\xi; x, x') = -\left[\frac{\delta}{\delta eA_{\mu}(\xi)} \right] G^{-1}(x, x'). \quad (2.11)$$

Функции D и P зависят от двух фотонных координат:

$$P(\xi, \xi') = -ie^2 \text{tr} \int \gamma(\xi; x, x') G(x', x'') \Gamma(\xi; x'', x''') G(x''', x) \times \times d^4 x d^4 x' d^4 x'' d^4 x'''. \quad (2.12)$$

Подробности получения этих выражений можно найти в статье Швингера [1].

Мы сейчас сосредоточим свое внимание на функции Γ . С помощью итераций написанное выше уравнение можно выразить в виде ряда по степеням e^2 :

$$\Gamma = -\frac{\delta}{\delta eA} [\gamma(p - eA) + M] = \quad (2.13)$$

$$= \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} (\gamma G \Gamma D). \quad (2.14)$$

Так как $GG^{-1} = 1$, имеем

$$\frac{\delta G}{\delta eA} G^{-1} + \frac{\delta G^{-1}}{\delta eA} G = 0, \quad (2.15)$$

$$\Gamma = \gamma + ie^2 \gamma G \Gamma G \Gamma D - ie^2 \gamma G \frac{\delta}{\delta eA} \Gamma D, \quad (2.16)$$

и т. д. Это выражение для Γ может быть использовано для нахождения G и D в виде степенных рядов, и дальнейшее разложение может быть проведено с помощью выражений $G_1 = [\gamma(p - eA) + m]^{-1}$ и $D_1 = (k^2)^{-1}$. Как уже отмечалось выше, хорошо известно, что этот способ ведет к ряду, состоящему из расходящихся членов, и необходимо произвести перенормировку, чтобы придать этим уравнениям физический смысл. Экспериментально массе соответствует величина M для свободно движущегося электрона, т. е. величина, для которой $G_1^{-1} = \gamma p + M = 0$. Величиной Γ для излучения свободным электроном фотона с пренебрежимо малым импульсом будет γ , и гриновские функции свободного электрона и фотона с пренебрежимо малым импульсом будут иметь вид

$$G_{0\text{exp}}^{-1} = (\gamma p + m)_{\text{exp}}, \quad (2.17)$$

$$D_{0\text{exp}}^{-1} = k^2. \quad (2.18)$$

Дайсон [2] показал, что уравнения (2.2)—(2.6), выраженные через экспериментальные значения массы и заряда, могут быть решены с помощью теории возмущений до любого порядка по e^2 . Для получения перенормированной теории возмущений над рядом производятся определенные операции. Если эти операции произвести над точными уравнениями (2.2)—(2.6) в предположении, что результирующие функции G' , Γ' и D' существуют, и если бы эти функции можно было бы получить, не прибегая к теории возмущений, то затем можно было бы получить снова разложение в соответствующий ряд теории возмущений. Так как в этой статье мы полностью не смогли избежать применения теории возмущений, то этот способ не может быть строго доказан, однако он представляется нам вполне разумным.

Перенормировка производит изменение величин G , Γ , D и e^2 . Для этого разложение (2.16) должно быть выражено в симметричной форме. Таким образом, если мы напишем

$$\Gamma = \gamma + \Lambda, \quad (2.19)$$

Λ может быть полностью выражено через Γ :

$$\Gamma = \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} (\Gamma - \Lambda) \Gamma \Gamma D = \quad (2.20)$$

$$= \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} \Gamma G \Gamma D + ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} \left\{ -ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} \Gamma G \Gamma D \right\} \Gamma \Gamma D + \dots \quad (2.21)$$

В теории возмущений эта операция соответствует перегруппировке членов разложения. Если мы теперь обозначим через Γ' , Λ' такие величины, что $Z\Gamma' = \Gamma$ и $Z\Lambda' = \Lambda$, то, поскольку eA и $e^2 D$ должны не меняться при такой замене вследствие калибровочной инвариантности [3], из определения Γ следует:

$$G' = Z^{-1} G, \quad (2.22)$$

$$Z\Gamma' = \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} Z(\Gamma' - \Lambda') G' \Gamma' D',$$

$$\Gamma' = Z^{-1} \gamma - ie^2 \frac{\delta}{\delta eA} (\Gamma' - \Lambda') G' \Gamma' D', \quad (2.23)$$

или

$$\Gamma' = Z^{-1} \gamma + \Lambda' = Z^{-1} \gamma - ie^2 \Gamma' G' \Gamma' G' \Gamma' D' + \text{члены порядка } e^4 + \dots \quad (2.24)$$

Этот результат не изменится при перенормировке заряда, при которой

$$\begin{aligned} e' &= Z^{*1/2} e, & A' &= (Z^*)^{-1/2} A, & D' &= Z^{*-1} D, \\ D'^{-1} &= Z^{*-1} k^2 - ie'^2 (\Gamma' - \Lambda') G' \Gamma' G'. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Здесь Z выбраны так, что

$$\Gamma'_0 = \gamma, \quad D'_0 = k^2, \quad G'_0 = \gamma p + m, \quad (2.26)$$

где нулевой индекс обозначает величину этих функций для свободного электрона и свободного фотона, т. е.

$$\Gamma' = \gamma + \Lambda' - (\Lambda')_0.$$

Уравнение для Γ' представляет собой нелинейное интегральное уравнение возрастающей сложности по мере продолжения разложения и не может быть непосредственно решено в этом виде.

Наш метод заключается в разложении в ряд по теории возмущения всех операторов, стоящих справа, за исключением одного Γ' , что приводит к линейному интегральному уравнению с ядром, разложенным в ряд. Наиболее простое приближение получается при оставлении того Γ' , которое возникает в каждом члене в результате действия $(\delta/\delta eA)$ на оператор массы M . В этом случае интегральное уравнение включает в себя только одну переменную величину и может быть написано в следующем виде (который является символическим, так как при перенесении Γ' направо должны быть учтены перестановочные соотношения):

$$\Gamma'(k, j) = Z^{-1}\gamma + \int \Gamma'(k, l) \left[\sum_0^{\infty} e^{2n} K_n(l, j; k) \right] d^4l, \quad (2.27)$$

где $\Gamma'(k, j)$ получается преобразованием Фурье из $\Gamma'(\xi; x, x')$, зависящее от $\xi - x, x - x'$, а K_n не зависят от e^2 .

В явном виде соотношение (2.27) переписывается в форме

$$\Gamma' = Z^{-1}\gamma - ie^2\gamma G'_1\Gamma'G'_1\gamma D'_1 + \text{члены порядка } e^4, \quad (2.28)$$

причем Z^{-1} определяется граничными условиями для (2.28).

3. Решение уравнения

Существование и поведение решения зависит от свойств ядра интегрального уравнения. Выражение в виде степенного ряда приносит мало пользы, так как из поведения нескольких первых членов разложения можно сделать очень мало заключений относительно поведения самой функции. Мы взяли простейшее приближение, в котором присутствует только K_0 (возможность лучшего приближения рассматривается в дальнейшем). Способ рассмотрения можно пояснить следующим образом. Из бесконечного числа членов полного разложения теории возмущений (2.27) отброшен бесконечный ряд и, кроме того, в остающемся выражении пренебрегаются члены порядка e^4 и выше¹⁾.

При вычислении с помощью интегрального уравнения сумма ряда получается в виде замкнутой функции, которая при разложении должна снова дать ряд теорий возмущений, но которая может быть использована и вне круга сходимости степенного ряда.

Уравнение, которое надо решить, имеет вид (штрихи опущены)

$$\Gamma_\mu(k, j) = Z^{-1}\gamma_\mu - ie^2 \int \gamma_\nu G_1\left(\frac{k}{2} + l\right) \Gamma_\nu(k, l) G_1\left(l - \frac{k}{2}\right) \times \\ \times \gamma_\nu D_1\left(j - l - \frac{k}{2}\right) d^4l. \quad (3.1)$$

1) Можно видеть, что это упрощение ведет к „ступенчатому“ приближению, предложенному для уравнения двух тел Бете и Сальпетером. Согласно терминологии диаграмм Фейнмана, мы оставляем только те из фотонных линий, которые не пересекаются, причем замкнутые петли и части, относящиеся к собственной энергии электрона, опущены. „Ступенчатое“ приближение проблемы двух тел в некоторых случаях ведет к описываемым здесь интегральным уравнениям. Решение уравнения двух тел в этом приближении с точки зрения интегрального уравнения было исследовано Гольдштейном, которому автор обязан некоторыми интересными замечаниями. — *Прим. авт.*

Здесь Z'^{-1} — постоянная перенормировки для этого уравнения, не равная в общем случае Z^{-1} . Решение является оператором, который описывает излучение фотона с импульсом k через посредство электрона с импульсом j , $Z^{-1}\gamma$ представляет собой вклад „голого“ электрона, а следующий член — действие фотонного поля, которое в этом приближении трактуется по теории возмущений, причем оставлены только те эффекты, которые происходят вследствие неперекрещивающихся излучения и поглощения виртуальных фотонов. Интегральное уравнение (3.1) сингулярно, так как пределы интегрирования бесконечны. Более того, так как $\int \gamma_v G_1 \gamma_v G_1 \gamma_v D_1$ расходится, обычные методы Неймана и метод Фредгольма не могут быть применены вследствие наличия у ядра полюса на бесконечности.

Здесь применяется метод, заключающийся в нахождении собственных функций однородной части уравнения (3.1) и исследовании возможности построения из него полного решения, удовлетворяющего граничным условиям. При этом можно заметить, что, хотя такое уравнение содержит только часть общего решения, в нем сохраняются все трудности, поскольку расходимости, связанные с прямым разложением, остаются в силе. Единственное соображение в пользу возможности решения (3.1) вместо (2.27) по теории возмущений заключается в том, что расходимости, связанные с ядром, так слабы, что замена $\Gamma' = \gamma + \Lambda' - (\Lambda')_0$ может быть оправдана.

Уравнение (3.1) представляет еще значительные трудности. Поэтому его упрощают следующим образом. Так как интегральное уравнение действует только на j , то возможно рассмотреть случай, когда $k = 0$, который является особенно простым. Тогда мы можем выбрать решение в форме $\gamma_v f(j^2)$, пренебрегая членами $\sigma_{\mu\nu} p_\nu$ и т. д. и конечной частью, возникающей вследствие перестановочных свойств γ . Мы получим

$$f(j^2) = Z'^{-1} - \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{f(l^2) d^4l}{(l^2 + m^2)(j-l)^2}. \quad (3.2)$$

Отброшенные здесь члены можно всегда учесть позже на основании решения уравнения (3.2). В мезонной теории с $\gamma_v f(j^2)$ уравнение (3.2) фактически будет полным. В случае уравнения (3.2) решение можно получить в замкнутой форме для однородного уравнения

$$f(j^2) = -ik \left(\frac{2}{\pi^3} \right) \int \frac{f(l^2) d^4l}{(l^2 + m^2)(j-l)^2}, \quad (3.3)$$

подробности решения которого даны в Приложении.

Так как этот метод не пригоден для $k \neq 0$ или когда имеется конечная масса мезона, то для решения (3.3) найден иной способ, который можно обобщить на эти случаи. Чтобы сделать более ясной структуру уравнения (3.3), используем преобразование, сводящее это уравнение к одномерному интегральному уравнению. Напишем f в форме „преобразования Стильтерса“

$$f(l^2) = \int \frac{F(a) da}{a + l^2}, \quad (3.4)$$

где к знаменателю добавляется малая мнимая часть, которая придает выражению форму суперпозиции функций распространения. Интегрируем обычным способом:

$$\begin{aligned} \int \frac{f(l^2) d^4l}{(l^2 + m^2)(j-l)^2} &= \int da \int \frac{F(a) d^4l}{(l^2 + m^2)(l^2 + a)(l^2 - 2lj + j^2)} \\ &= \int da \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x F(a) d^4l}{[l^2 + j^2 xy(1-xy) + m^2 x(1-y) + a(1-x)]^3} \\ &= \frac{i}{8} (2\pi)^2 \int da \int_0^1 dx \int_0^1 dy F(a) x [j^2 xy(1-xy) + a(1-x) + m^2 x(1-y)]^{-1}. \end{aligned}$$

Теперь обращаем преобразование (3.4)

$$-\frac{i\pi^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x(1-x)^{-1} f \left[\frac{\{j^2 xy(1-xy) + m^2 x(1-y)\}}{(1-x)} \right]. \quad (3.5)$$

Отсюда можно получить

$$f(j^2 + m^2) = \lambda \int_0^1 dy \int_0^\infty \xi d\xi (1+\xi)^{-2} f[(j^2 y + m^2) \xi(1-\xi) / (\xi + 1 + y)]. \quad (3.6)$$

Граничным условием теперь будет $f(0) = 1$; так как в f под интегралом входят только положительные аргументы, мы можем рассматривать одномерное уравнение с положительной переменной $\xi = j^2$. Для распространения решения на отрицательные значения ξ , когда f принимает явно неоднозначную форму, подразумевается, что в формуле (3.4) к знаменателю добавлена небольшая мнимая величина, гарантирующая существование и однозначность функции.

Так как обычный способ получения собственных значений и собственных функций здесь не применим, мы рассмотрим уравнение при очень больших ξ . Тогда уравнение (3.6) примет вид

$$f(\xi) \approx \lambda \int_0^1 dy \int_0^\infty \xi d\xi f(\xi) [\xi + \xi(1-y)]^{-2}. \quad (3.7)$$

Это уравнение принадлежит к общему классу уравнений, для которых $f(\mu\xi)$ является решением, если $f(\xi)$ есть решение, причем решения будут иметь вид $\xi^{-\beta}$. Подставляя решение в такой форме в (3.6), где по соображениям сходимости $0 < R\beta < 1$ и $\xi \ll m^2$, получим

$$\xi^{-\beta} \approx \lambda \beta^{-1} (\beta - 1)^{-1} \xi^{-\beta},$$

т. е. $\beta = \frac{1}{2} [1 \pm (1 - 4\lambda)^{1/2}]$, что при малых λ дает $\beta = \lambda, 1 - \lambda$ и является

комплексной величиной при $\lambda > \frac{1}{4}$. Других решений не существует²⁾. Поэтому

общим решением будет $C\xi^{-\beta_1} + B\xi^{-\beta_2}$, где β_1 и β_2 — два корня для данного λ . Спектр уравнения (3.6) является непрерывным, так что собственные функции неинтегрируемы квадратично, и ни один из известных методов не может быть использован для построения ортонормированной системы. Возвращаясь к (3.2), мы вынуждены сделать заключение, что $Z'^{-1} = 0$ и что при $Z'^{-1} = 0$ существует решение (3.2) для всех значений $e^2/4\pi = \alpha$, причем $\alpha = 8\pi\lambda$. Решение для (3.2) получено в замкнутой форме в виде гипергеометрической функции в Приложении; кроме того, ряд результатов, сообщенных выше, доказывается там более строго. Для решения уравнения (3.2) и более общего уравнения мы исходим из поведения $\xi^{-\lambda}$ на бесконечности (λ — меньший корень), написав его в форме, эквивалентной разложению в окрестности точки A ; например, функция $A^\lambda (j^2 + m^2 + A)^{-\lambda}$ ведет себя регулярно и в начале координат и на бесконеч-

1) Это преобразование предполагает, что f имеет в качестве особенностей только полюсы и точки ветвления. Для выполнения интегрирования должно быть известно расположение особенностей; преобразование является специальным приемом, применяемым для этой цели. С его помощью сравнительно легко можно проинтегрировать в смысле Фейнмана многие сложные функции. — *Прим. авт.*

2) Это строго доказано для ядра $(x+y)^{-1}$ Харди и Тичмаршем (см., например, [4]). Способом, приведенным в Приложении, это доказывается строго для уравнения (3.3), причем предполагается, что результат верен и для более общих уравнений. Об уравнениях такого типа имеется довольно значительная, хотя и не систематизированная литература (см., например, [10]). — *Прим. авт.*

ности. Можно думать, что более общим разложением будет разложение вдоль линии, например,

$$\int_1^{\infty} f(x) (j^2 x + m^2)^{-\lambda} dx,$$

т. е.

$$\int_1^{\infty} \varphi(x) \left(\frac{m^2(1-x)}{j^2 x + m^2} \right)^{-\lambda} dx, \quad (3.8)$$

где $\varphi(x) \approx 1$, $\int_0^1 \varphi(x) dx = 1$. В Приложении показано, что для выражения (3.2) $\varphi(x) = x^{-\lambda} (1-x)^{\lambda}$, откуда получается

$$\Gamma_x^{(0)}(0, j) \approx \gamma_x \int_0^1 \frac{x^{-\lambda} e^{i\lambda\pi} \left(\frac{m^2(1-x)}{j^2 x + m^2} \right)^{\lambda/\hbar\pi}}{1 - \frac{\alpha}{8\pi}} dx. \quad (3.9)$$

Это находится в согласии с разложением по теории возмущений из (2.2):

$$f(j^2) = 1 - \frac{\alpha}{8\pi} \int_0^1 \ln \left(\frac{m^2(1-x)}{j^2 x + m^2} \right) dx + O(\alpha^2).$$

Когда j^2 отрицательно, нужно считать, что дробь подставлена в форму (3.4).

Несмотря на то, что в (3.2) мы имеем дело с очень упрощенным случаем, приведенные соображения являются весьма общими. Случай $k \neq 0$ может быть рассмотрен (а также и несимметричные члены вроде $\sigma_\mu p_\nu$) тем же способом, хотя со значительными математическими трудностями.

4. Анализ оператора $\Gamma^{(0)}$

Оператор $\Gamma^{(0)}$ в замкнутой форме выражает размазывание электрона, вызываемое полем, которое ясно выражено, если мы будем рассматривать $\Gamma^{(0)}$ в конфигурационном пространстве для статического случая $j^2 = k^2 - m^2$ (k — трехмерный вектор); причем мы находим распределение $\alpha x^{-1} r^{-3+\alpha/8\pi} \chi(r)$, где $\chi(r)$ конечна в начале координат и спадает экспоненциально.

С помощью $\Gamma^{(0)}$ можно подсчитать собственную полевую энергию электрона и поляризацию вакуума. При этом надо принять условие, что, как и при нахождении $\Gamma^{(0)}$, в интегралах полностью сохраняется только одно $\Gamma^{(0)}$, а все остальные берутся в первом приближении. Обе интересные нас величины оказываются порядка единицы, тогда как в теории возмущений сделано предположение, что они должны быть порядка α ; тем самым в теории возмущений сделана попытка включить полюсы в степенной ряд, которая и приводит к ряду из расходящихся членов.

Когда α отрицательно, для $\Gamma^{(0)}$ решения не существует. Поэтому надо считать, что $\Gamma^{(0)}$ определено только для $\alpha > 0$, так же как и все величины, вычисляемые с его помощью. Казалось, что теория возмущений дает решения, одинаково действительные для любого знака α , что, однако, с настоящей точки зрения несправедливо. Дайсон предполагал это, исходя из общих физических соображений, и хотя $\Gamma^{(0)}$ является только частным решением, это можно рассматривать как иллюстрацию к замечанию Дайсона [5].

На первый взгляд кажется странным, что $Z'^{-1} = 0$, так как это подразумевает отсутствие „голового“ электрона. В теории возмущений $Z^{-1} = 1 + \sum \alpha^n Z_n$, где все Z_n бесконечны. Это должно бы получиться и здесь, если бы Z'^{-1} мы взяли именно в такой форме. Разница в результатах возникает вследствие

различных точек зрения, в зависимости от того, характеризуем ли мы единицей только „голый“ электрон и пытаемся выразить влияние фотонов в виде ряда по степеням α , или же, напротив, сосредоточиваем наше внимание на влиянии фотонов, благодаря чему Z'^{-1} оказывается нулем, как в методе интегрального уравнения.

С помощью Γ можно найти гриновскую функцию, хотя для этого случай $k = 0$ не пригоден. В результате получается, что при очень больших p^2 имеем $G(p) \approx (\gamma p + m)(p^2)^{-\alpha/8\pi}$. Для получения конечного результата надо использовать упомянутое выше условие, так как последующее употребление этой функции может изменить сходимость M или Γ .

5. Применение к мезонной теории

В мезонной теории наиболее интересным является случай сильной связи. Это уменьшает пригодность методов настоящей статьи, но, несмотря на это, мы будем применять их к различным вариантам мезонных теорий, так как они все-таки представляют значительный интерес и, кроме того, иллюстрируют типы уравнений, которые получаются при связях разного типа.

А. НЕЛИНЕЙНОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ

В качестве примера теории, которая представляет меньше трудностей, чем электродинамика, рассмотрим скалярное поле, связанное с самим собой членом φ^3 . Его лагранжиан, включающий функцию источника $I(x)$, имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (i\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} x^2 \varphi^2 - \frac{2}{3} \lambda \varphi^3 + I\varphi. \tag{5.1}$$

Эта теория особенно проста, так как включает только один тип частиц. Функция Грина Δ в обозначениях Швингера определяется формулой

$$\Delta(x, x') = \frac{\delta \varphi(x)}{\delta I(x')} = i \langle \varphi(x) \varphi(x') \rangle_+ - i \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(x') \rangle. \tag{5.2}$$

В этой теории существует вспомогательная функция Ω , аналог функции Γ :

$$\Omega(x, x', x'') = - \frac{\delta \Delta^{-1}(x', x'')}{\delta \lambda \varphi(x)}. \tag{5.3}$$

Из уравнения движения

$$(-\square + x^2) \varphi - \lambda \varphi^3 = I \tag{5.4}$$

следует

$$\Delta^{-1} = k^2 - \lambda \langle \varphi \rangle + x^2 - i\lambda^2 \Delta \Omega \Delta, \tag{5.5}$$

$$\Omega = 1 + i\lambda^2 \left(\frac{\delta}{\delta \lambda \varphi} \right) \Delta \Omega \Delta, \tag{5.6}$$

$$\Omega = 1 + i\lambda^2 (2\Delta \Omega \Delta \Omega \Delta) + i\lambda^2 \Delta \frac{\delta \Omega}{\delta \lambda \varphi} \Delta. \tag{5.7}$$

Последнее уравнение можно решать методом итераций. Интегралы, которые появляются в (5.7) после итераций, оказываются конечными, и перенормировка может быть отложена до разрешения уравнения. За исключением перенормировки массы, которая по теории возмущений является бесконечной, эти уравнения можно рассматривать без дальнейших изменений. Линейное интегральное уравнение имеет следующий вид:

$$\Omega = 1 + i\lambda^2 2\Omega (\Delta_0 \Delta_0 \Delta_0 + \lambda^4 \dots) = 1 + i2\lambda^2 \Omega \sum \lambda^{2n} K_n. \tag{5.8}$$

Интегралы $\int K_n(jj) d^4j$ конечны, так что можно пользоваться решением по методу Фредгольма до любого порядка. При условии сходимости ряда $\sum \lambda^{2n} K_n$ метод Фредгольма гарантирует конечность решения¹⁾.

Б. ПСЕВДОСКАЛЯРНАЯ МЕЗОННАЯ ТЕОРИЯ С ПСЕВДОСКАЛЯРНОЙ СВЯЗЬЮ

Эта теория представляет значительный интерес и принадлежит к тому же классу, что и электродинамика. Ее основные уравнения удобно установить, используя методы статьи Швингера с учетом того, что для полной теории с присутствием фотонов требуется третья вариация лагранжиана:

$$\begin{aligned} & \delta'' \delta' \langle \delta \mathcal{L}(x) \rangle = \\ & = i \int_{z_2}^{z_1} (dx') (dx'') \{ \langle \delta \mathcal{L}(x) \delta' \mathcal{L}(x') \delta'' \mathcal{L}(x'') \rangle_+ - \langle \delta \mathcal{L}(x) \delta'' \mathcal{L}(x'') \rangle_+ \langle \delta' \mathcal{L}(x) \rangle - \\ & \quad - \langle \delta \mathcal{L}(x) \delta'' \mathcal{L}(x'') \rangle_+ \langle \delta' \mathcal{L}(x') \rangle - \langle \delta' \mathcal{L}(x') \delta'' \mathcal{L}(x'') \rangle_+ \langle \delta \mathcal{L}(x) \rangle + \\ & \quad + 2 \langle \delta \mathcal{L}(x) \rangle \langle \delta' \mathcal{L}(x) \rangle \langle \delta'' \mathcal{L}(x'') \rangle \}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Приведем полную формулу для лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \sum_i \{ (\partial_\mu - ie \mathcal{F} A_\mu) \varphi_i (\partial_\mu - ie \mathcal{F} A_\mu) \varphi_i \} + \frac{1}{2} \sum_i x_i^2 \varphi_i^2 - \\ & - \frac{1}{4} \{ \bar{\psi}, (-i \partial_\mu - e T A_\mu) \psi + m \psi \} + \sum_i \frac{1}{4} g_i^2 \{ \bar{\psi}, \gamma_5 \tau_i \psi \} \varphi_i + \\ & + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{4} \{ F_{\mu\nu}, \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \} + I_\mu A_\mu + \\ & + \sum K_i \varphi_i + \frac{1}{2} \{ \bar{\psi}, \eta_i \} + g^2 \lambda \sum_i (\varphi_i U \varphi)_i + \text{эрмит. сопряж. всех членов с } \psi, \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Здесь $g\tau\varphi$ и т. д. есть сокращенная запись для $\sum g_i \tau_i \varphi_i$; причем φ_i имеет три компоненты. Обычно индекс i при g и K будет опускаться. Функция ψ имеет два ряда компонент в изотопическом пространстве. Величины \mathcal{F} , T и U являются матрицами сохранения заряда:

$$T = \frac{1 + \tau_3}{2}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\varphi U \varphi) = \begin{pmatrix} 3\varphi_3^2 + \varphi_1 \varphi_2 \\ 3\varphi_3^2 + \varphi_1 \varphi_2 \\ 3\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_3^2 \end{pmatrix}.$$

η , J_μ , K_i являются источниками дираковского, максвелловского и мезонного полей соответственно. Они приводят к появлению трех типов гриновских функций G , Δ и D , причем под этими обозначениями мы будем подразумевать их компоненты. Функция G имеет 4 компоненты, две из которых имеют отличные от нуля средние значения, Δ имеет три компоненты и D — одну. С помощью их можно определить ряд вспомогательных функций²⁾:

1) Ряд $\sum \lambda^{2n} K_n$, согласно [6], не сходится, так как для его вычисления применяется теория возмущений. Если мы, однако, последуем интерпретации Херста, согласно которой разложение является асимптотическим и для получения наилучших результатов должно быть оборвано на некотором члене, приведенные выше аргументы могут считаться справедливыми. — Прим. авт.

2) Это наиболее полезное определение. Однако можно (а иногда и необходимо) употреблять и другие способы. Например,

$$C_{\mu\nu} = g^2 e^{-2} \left(\frac{\delta}{\delta g \varphi} \right) \left(\frac{\delta}{\delta g \varphi} \right) D_{\mu\nu}^{-1} + \left(\frac{\delta}{\delta g \varphi} \right) (\Gamma_\mu D) = DV_\mu \Gamma_5 \Delta + \frac{D \delta \Gamma_5}{\delta A_\mu}. \quad \text{— Прим. авт.}$$

$$\Gamma_\mu = -\frac{\delta}{\delta e A_\mu} G^{-1}, \quad (5.10)$$

$$\Gamma_\psi = -\frac{\delta}{\delta g \varphi} G^{-1}, \quad (5.11)$$

$$V_\mu = -\frac{\delta}{\delta e A_\mu} \Delta^{-1}, \quad (5.12)$$

$$C_{\lambda\nu} = \frac{\delta}{\delta e A_\mu} \frac{\delta}{\delta e A_\nu} \Delta^{-1}, \quad (5.13)$$

$$N = \frac{\delta}{\delta g \varphi} \frac{\delta}{\delta g \varphi} \Delta^{-1}. \quad (5.14)$$

Здесь опять подразумевается, что Γ_μ имеет две компоненты, Γ_ψ — шесть (две из которых равны нулю) и т. д. Например (в полной записи),

$$N_{jk}^i = \frac{\delta}{\delta g_{j\varphi_j}(\xi_1)} \frac{\delta}{\delta g_{k\varphi_k}(\xi_2)} \Delta^{-1}(\xi_3, \xi_4).$$

Окончательные уравнения для гриновских функций имеют вид

$$\{\gamma p + M\} G = 1, \quad (5.15)$$

$$\{k^2 + P\} D = 1, \quad (5.16)$$

$$\{k^2 + \kappa^2 + \Pi\} \Delta = 1, \quad (5.17)$$

где

$$M = m + ig^2 \tau \gamma_\psi G \Gamma_\psi \Delta + ie^2 T \gamma_\mu \dot{G} \Gamma_\lambda D_{\lambda\mu}, \quad (5.18)$$

$$P_{\mu\lambda} = e^4 \mathcal{F}^2 \delta_{\mu\rho} D_{\rho\nu} C_{\lambda\nu} \Delta \Delta + 2e^2 \mathcal{F} \partial_\mu \Delta V_\lambda \Delta - ie^2 \mathcal{F}^2 \Delta \delta_{\mu\lambda} + ie^2 T \text{tr} \gamma_2 G \Gamma_\lambda G, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \pi = & 2e^2 \mathcal{F} \partial_\lambda \Delta V_\lambda D_{\lambda\mu} + e^4 \mathcal{F}^2 \delta_{\lambda\kappa} D_{\mu\rho} C_{\lambda\rho} D - ig^2 \lambda n \Delta - \\ & - ie^2 \mathcal{F}^2 D_{\mu\nu} \delta_{\nu\lambda} + ig^2 \text{tr} \gamma_\psi G \Gamma_\psi G + g^4 \lambda^2 n \Delta \Delta \Delta N; \end{aligned} \quad (5.20)$$

здесь n — матрица сохранения заряда.

Эти уравнения могут теперь рассматриваться так же, как прежний случай электродинамики, только с большим числом перенормировок, требуемым большим числом полей, при учете отсутствия калибровочной инвариантности. При наличии члена φ^4 можно показать, что ряды теории возмущений сходятся [7].

Можно вывести интегральные уравнения для Γ_μ , Γ_ψ , $C_{\lambda\nu}$, V_μ и N , которые все оказываются того же типа. Мы остановим наше внимание на операторе Γ_ψ , удовлетворяющем уравнению

$$\Gamma_\psi = \gamma_\psi Z'^{-1} + ig^2 \int \gamma_\psi \tau G \Gamma_\psi G \gamma_\psi \tau \Delta. \quad (5.21)$$

Решение в виде $\Gamma_\psi = \gamma_\psi f$ не является приближенным, насколько это касается γ_ψ , однако получить решение в замкнутой форме оказывается невозможным. Поэтому приходится пользоваться приближенным методом. Величина τ имеет значения ± 1 , 0 , -1 в зависимости от того, будет ли применяемая теория зарядо-симметричной или нейтральной, причем только первой можно пользоваться при данном методе решения. Функция $f(0, j)$ для больших $(j)^2$ ведет себя как $(j^2)^{-\beta}$, где

$$\beta = \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2} \right)^{1/2} \right].$$

При $\beta = 1/2$ решение является логарифмическим. Для больших g^2 , т. е. $g^2/4\pi > 2\pi$ $\beta = \frac{1}{2} \pm i\epsilon$. Это значит, что при больших j^2 решение ведет себя как $\cos \ln(j^2)$, причем можно думать, что функция Грина будет также иметь целый ряд корней. Поскольку такое поведение должно быть исключено по физическим соображениям, то можно считать, что оно определяет верхний предел константы связи, до которого применим рассматриваемый метод.

Если $\beta = 1/2$, то разложение $(j^2)^{-1/2}$ в степенной ряд по g^2 теряет всякий смысл. Приближенным же решением для $\beta < 1/2$ будет

$$\gamma_5 \tau \int_0^1 (1 - \beta) \{m^2 x + x^2 (x^{-1} - 1)\}^\beta \{j^2 x (1 - x) + m^2 x + x^2 (1 - x)\}^{-\beta} dx. \quad (5.22)$$

Выражение (5.22) отличается от соответствующего выражения в случае электродинамики членом с x^2 , который можно интерпретировать в виде частицы, обладающей плотным ядром с радиусом, равным комптоновской длине волны нуклеона, окруженным размазанной областью с размерами порядка комптоновской длины мезона.

Взаимодействие электромагнитного поля с нуклоном описывается с помощью Γ_μ и, повидимому, имеет смысл попытаться определить разницу масс протона и нейтрона. Так как в операторе массы преобладает мезонная часть, то приближенное интегральное уравнение примет вид

$$\Gamma_\mu = (Z^{-1} \gamma_\mu (1 + \tau_3)/2) - ig^2 \gamma_5 \tau G \Gamma_\mu G \gamma_5 \tau \Delta - ig^2 \gamma_5 \tau G \gamma_5 \tau \Delta V_\mu \Delta. \quad (5.23)$$

Рассмотрим сначала только первый и второй члены справа. Они дают интегральное уравнение, по существу совпадающее с (5.21), причем соотношение $Z^{-1} = 0$ является условием его разрешимости. Здесь подразумевается, что изотопические матрицы в Γ_μ удовлетворяют соотношению $t = C \tau_i \tau_i$, т. е. $t = 1$ и не равно $\frac{1}{2}(1 + \tau_3)$. Это показывает, что если мезоны присутствуют всегда, то как протон, так и нейтрон взаимодействуют с электромагнитным полем аналогичным образом, а различие заключается в заряде мезонного облака. Таким образом, доля собственной энергии, возникающая вследствие члена $ie^2 \Gamma_\mu G \Gamma_\mu D$, одинакова для протона и для нейтрона. Для нахождения доли собственной энергии, возникающей вследствие взаимодействия мезонов друг с другом, можно применить соображения из теории возмущений. Таким образом, разница в массах возникает из-за взаимодействия мезонов с нуклеонами, которое одинаково по величине и противоположно по знаку в этих двух случаях. Применявшиеся приближенные методы, очевидно, не пригодны для решения этого вопроса. Однако можно видеть, что поскольку действие Γ , V сводится к обрезанию, которое делает результат конечным, и поскольку результат в основном обязан членам, которые в теории возмущений бесконечны, то можно ожидать, что знак искомого результата, повидимому, будет совпадать со знаком бесконечных членов теории возмущений. Рассматривая первые члены, например, $g^2 e^2 \Gamma_5 G \Gamma_\mu G \Gamma_5 \Delta V_\mu \Delta$, мы получаем неправильный знак. Однако отсюда еще нельзя вывести какого-либо окончательного заключения.

В. ПСЕВДОСКАЛЯРНЫЕ МЕЗОНЫ, ГРАДИЕНТНАЯ СВЯЗЬ

Единственная разница в лагранжиане по сравнению с лагранжианом в случае псевдоскалярной связи будет в члене $\frac{1}{2} ig [\bar{\psi}, \gamma_5 \gamma_\mu \psi] \partial_\mu \varphi$. Первым приближением интегрального уравнения будет

$$\Omega = Z'^{-1} \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu - ig^2 \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu G_1 \Omega G_1 \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\nu \Delta_1. \quad (5.24)$$

Здесь Ω является аналогом Γ .

Ядро этого уравнения имеет линейную, а не логарифмическую расходимость. Если вместо Ω в однородное уравнение подставить его значение из этого же уравнения, то получится уравнение, которое должно содержать все решения самого однородного уравнения. Тогда мы будем иметь

$$\Omega = -g^4 \gamma_5 \gamma_\mu \partial_\mu G_1 \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\nu G_1 \Omega G_1 \gamma_5 \gamma_\lambda \partial_\lambda G_1 \gamma_5 \gamma_\pi \partial_\pi \Delta \Delta.$$

Однако если проделать вспомогательные интеграции в этом уравнении, это приведет к расходимости ядра; для этого уравнения существует только тривиаль-

ное решение, а уравнение (5.24) вовсе не имеет решений. Приведенные соображения не исключают полностью возможность решения полного уравнения, так как приближение, используемое для вывода уравнения (5.24), зависит от наличия его решения. Однако ясно, что если решение и существует, то требуется более эффективный метод для его нахождения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Мезонные теории дают возможность классифицировать типы уравнений, которые могут быть разрешимы в смысле Фредгольма, разрешимы, но неограничены, и неразрешимы в зависимости от того, будет ли ядро для больших k^2 вести себя как $(k^2)^{-2-\delta}$, $(k^2)^{-2}$, $(k^2)^{-2+\delta}$ ($\delta > 0$); эти категории подобны классам, которые получаются в теории возмущений: тривиально ренормируемые, нетривиально ренормируемые и неренормируемые; причем эта классификация может быть расширена для более сложных типов теории, общая классификация которых недавно обсуждалась в работах Саката и др. [8, 9]. Однако нужно указать, что такая классификация не является окончательной, так как если ядро, которое в (2.27) разложено в ряд, представить в замкнутой форме, то оно может попасть в другой класс¹⁾. Окончательный ответ на этот вопрос можно дать только после получения замкнутой формулы. Например, электродинамика в этой форме может быть разрешима в смысле Фредгольма и иметь $Z^{-1} \neq 0$, в то время как вообще она может быть неразрешима. Главная трудность лежит в разложении, связанном с перенормировкой, так как приближение, в котором полагается $\Gamma G = \gamma G_1$, законно только для больших импульсов, причем функциональная производная может заменяться в некоторых случаях частной производной, которая, хотя и не является систематически применяемым методом, дает результаты, согласующиеся с решениями, найденными выше. Мы выбрали первый член в выражении (2.27). Однако можно было бы выбрать любой другой член и получить решение, ведущее себя как квадрат импульса в степени, кратной α , для малых α и больших импульсов (несмотря на дополнительные степени α , появляющиеся впереди ядра, которые компенсируются большей степенью расходимости ядра). По аналогии можно сказать, что вклад в собственную энергию электрона от каждого из этих ядер будет порядка единицы, и если такой способ вычисления дает сходящийся результат, то эту сходимость нельзя отнести за счет малости α . Тогда у нас не будет критерия сходимости.

Автор благодарен Швингеру, а также Опленгеймеру, Пайсу и Гольдштейну за советы и указания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Мы дадим здесь полное исследование приближенного интегрального уравнения. Будем рассматривать уравнение

$$f(j^2) = Z^{-1} - \frac{ia}{4\pi^3} \int \frac{f(k^2) d^4k}{(k^2 + m^2)(k-j)^2}. \quad (\text{П.1})$$

Возьмем однородное уравнение и положим $(k^2 + m^2)^{-1} f = \varphi$,

$$(j^2 + m^2) \varphi = i\lambda \int \frac{\varphi(j^2) d^4k}{(k-j)^2}. \quad (\text{П.2})$$

Применим преобразование типа (3, 4):

$$\varphi(k^2) = \int \frac{\Phi(A) dA}{(A + k^2)^2}, \quad (\text{П.3})$$

$$(j^2 + m^2) \varphi(j^2) = \lambda \int \frac{\Phi(A)}{j^2} \ln \frac{A + j^2}{A}. \quad (\text{П.4})$$

¹⁾ Это замечание справедливо даже, если ряд не сходится; это верно для производящей функции при условии, что ряд является асимптотическим. — *Прим. авт.*

Умножаем на j^2 . Полагая $j^2 = x$ и дифференцируя дважды по x , мы получим исходное уравнение

$$[x(x+1)\varphi(x)]'' = -\lambda\varphi(x). \quad (\text{П.5})$$

Теперь вернемся к f . Тогда получим

$$(xf)'' = -\lambda f(x+1)^{-1}, \quad (\text{П.6})$$

или

$$x(x+1)f'' + 2(x+1)f' + \lambda f = 0. \quad (\text{П.7})$$

Заметим, что в процессе дифференцирования вводятся произвольные постоянные, так что решение (П.7) содержит также решения уравнения

$$f(j^2) = A + \frac{B}{j^2} - \frac{ia}{4\pi^3} \int \frac{f(h^2) d^4k}{(h^2 + m^2)(k-j)^2}, \quad (\text{П.8})$$

где A и B произвольные постоянные.

Уравнение (П.7) имеет характеристическое уравнение на бесконечности

$$\beta(\beta-1) + \lambda = 0, \quad (\text{П.9})$$

которое было уже получено ранее. Такие функции нельзя использовать для построения полного ряда в интервале, содержащем бесконечно удаленную точку, и поэтому $A = 0$, т. е. $Z^{-1} = 0$. В начале координат индексы равны 0 или -1 , что можно было ожидать вследствие присутствия коэффициента B в уравнении (П.8), поэтому решение, содержащее этот коэффициент, должно быть отброшено. При $x+1 = 0$, т. е. в точке, где мы хотим использовать наше граничное условие, решение имеет вид

$$\sum_1^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} a_n (\ln x) x^n + \sum_0^{\infty} b_n x^n,$$

причем последнее является единственно пригодным для этой задачи. Оно дано в замкнутой форме Уиттекером и Ватсоном [10]. Удобной для нашей цели формой будет

$$\int_0^1 z^{-\beta} (1-z)^{\beta} (1+xz)^{-\beta} dz.$$

Здесь β является корнем (П.9), т. е. $\beta \approx a/8\pi$, или в обозначениях (3.9) и нормированном виде

$$f(h^2) = \int_0^1 \frac{z^{-a/8\pi}}{[1-(a/8\pi)]} \left\{ \frac{(m^2)(1-z)}{(k^2z+m^2)} \right\}^{+a/8\pi} dz,$$

что совпадает с полученным ранее менее обоснованным решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwinger J. S., Proc. Natl. Acad. Sci., **37**, 452 (1951).
2. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 1736 (1949). (См. статью V настоящего сборника.)
3. Ward J. C., Phys. Rev., **78**, 182 (1950).
4. Widder D. V., The Laplace Transform, Princeton, 1941.
5. Dyson F. J., Phys. Rev., **85**, 631 (1952).
6. Hurst C. A., Proc. Camb. Phil. Soc., **48**, 625 (1952).
7. Matthews P. T., Salam A., Rev. Mod. Phys., **23**, 311 (1951).
8. Sakata, Umezawa, Kamefuchi, Prog. Theor. Phys., **7**, 337 (1952); Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
9. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, New York, 1946.
10. Carleman T., Sur les equations integrales singulieres, Uppsala, 1923; Тичмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступительная статья	III
1. Вводные замечания	III
2. Основные формы представлений квантовой электродинамики	V
3. Решение уравнений квантовой электродинамики	XIV
4. Замечания о методах Фейнмана	XXII
5. Поляризация вакуума и перенормировка заряда	XXV
6. Полевая энергия электрона и перенормировка массы	XXIX
7. Лэмбовский сдвиг	XXXIV
8. Различные вакуумные эффекты	XL
9. Релятивизация проблемы двух тел	XLII
10. Квантовая мезодинамика	XLIV
11. Квантовая теория гравитации	XLVI
12. Регуляризация	XLVIII
Приложение. Сингулярные функции	LII
I. Дираковская δ -функция; разрывная функция θ ; знаковая функция ϵ ; оператор упорядочения P	LII
II. Решения однородного клейповского уравнения	LIII
III. Решения неоднородного клейповского уравнения	LV
IV. Каузальные функции	LVII
V. Сингулярные функции волнового даламберовского уравнения	LIX
VI. Сингулярные функции дираковского уравнения	LXI
Заключение	LXII
Литература	LXIII
I. Релятивистски инвариантная формулировка квантовой теории волновых полей (С. Тсмонэга)	1
1. Формализм обычной квантовой теории волновых полей	1
2. Четырехмерная форма перестановочных соотношений	2
3. Обобщение уравнения Шредингера	4
4. Обобщенная амплитуда вероятности	8
5. Обобщенный функционал преобразования	9
6. Заключительные замечания	10
Литература	11
II. Квантовая электродинамика (Ю. Швингер)	12
Часть I. Ковариантная формулировка	12
Введение	13
1. Ковариантное рассмотрение в гейзенберговском представлении	15
2. Представление взаимодействия	24
3. Ковариантное исключение продольного поля	31
4. Инвариантный оператор столкновения	37
Часть II. Поляризация вакуума и собственная энергия	40
1. Определение вакуума	41
2. Поляризация вакуума	49
3. Собственная энергия электрона	57
Приложение	73
Часть III. Электромагнитные свойства электрона. Радиационные поправки к формулам рассеяния	78
1. Поправки второго порядка к оператору тока	79
2. Радиационные поправки к формулам для рассеяния электронов	94
Приложение	108
Часть IV. Теория квантовых полей	115
1. Введение	116
2. Квантовая динамика локализуемых полей	117
3. Инверсия времени	133
Литература	137

III. Теория позитронов (Р. Фейнман).	138.
1. Введение	138
2. Рассмотрение уравнения Шредингера с помощью функции Грина	140
3. Рассмотрение уравнения Дирака	143
4. Случай нескольких зарядов	149
5. Вакуумные проблемы	151
6. Импульсное представление	152
Приложение	155
Литература	160.
IV. Пространственно-временная трактовка квантовой электродинамики (Р. Фейнман)	161
1. Сравнение с гамильтоновым методом	164
2. Взаимодействие между зарядами	165
3. Проблема собственной энергии	169
4. Рассмотрение в импульсном пространстве	171
5. Сходимость выражений, описывающих процессы с виртуальными квантами	174
6. Радиационные поправки к формулам рассеяния	175
7. Проблема поляризации вакуума	179
8. Продольные волны	183.
9. Уравнение Клейна — Гордона	185
10. Применения к мезонным теориям	187
Приложение	191
А. Собственная энергия	195
Б. Поправки к формулам для рассеяния	196
В. Поляризация вакуума	197
Г. Более сложные задачи	199
Литература	204
V. S-матрица в квантовой электродинамике (Ф. Дайсон)	205
1. Введение	205
2. Теория Фейнмана как теория S-матрицы	206
3. S-матрица в импульсном пространстве	211
4. Дальнейшее преобразование S-матрицы	214
5. Исследование расходимостей S-матрицы	218
6. Выделение расходимостей в S-матрице	223
7. Устранение расходимостей из S-матрицы	227
8. Сводка результатов	234
9. Обсуждение дальнейших перспектив	237
Литература	238.
VI. О значении каузальной функции D_c в квантовой теории поля (М. Флорц)	239
Введение	239
Добавление автора	244
Литература	244
VII. Вычисление матрицы столкновений (Д. Вик)	245
1. Введение	245
2. Алгебраический анализ	246
3. Физические применения	250
4. Продольные волны	252
Литература	253
VIII. О калибровочной инвариантности и поляризации вакуума (Ю. Швингер)	254
1. Введение	254
2. Общая теория	256
3. Постоянные поля	261
4. Поля плоских волн	266
5. γ -распад нейтральных мезонов	269
6. Теория возмущений	272
Приложение А	278
Приложение Б	281
Литература	283.

IX. Электромагнитный сдвиг атомных уровней. I. Сверхтонкая структура (<i>Р. Карплус и А. Клейн</i>)	284
1. Введение	284
2. Предварительное рассмотрение	285
А. Оператор массы; функции Грина	285
Б. Сверхтонкая структура	287
3. Оператор массы	289
4. Составляющая первого порядка	296
5. Члены второго порядка	301
6. Поляризация вакуума	303
7. Выводы	304
Литература	304
X. Электромагнитный сдвиг атомных уровней. II. Лэмбовский сдвиг (<i>Р. Карплус, А. Клейн и Ю. Швингер</i>)	305
1. Введение	305
2. Новый вывод выражения первого порядка для лэмбовского сдвига	306
3. Разложение оператора массы	315
4. Определение \bar{M}'	318
5. Определение \bar{M}_0	322
6. Поляризация вакуума	324
7. Сводка результатов	324
Приложение	326
Литература	326
XI. Перенормировка мезонных теорий (<i>П. Мэттьюс и А. Салам</i>)	327
Литература	333
XII. Релятивистское уравнение для связанных состояний (<i>Е. Сальпетер и Г. Бете</i>)	334
1. Введение	334
2. Вывод уравнений	335
3. Дальнейшее исследование полученного уравнения	339
4. Скалярные мезоны. Предельный нерелятивистский случай	342
5. Строгое решение нерелятивистского уравнения	344
6. Обсуждение результатов	348
Приложение. Сводка уравнений, выведенных в разделах 2 и 3	351
Литература	351
XIII. Массовые поправки к тонкой структуре водородоподобных атомов (<i>Е. Сальпетер</i>)	352
1. Введение	352
2. Мгновенное взаимодействие и теория возмущений для четырехмерного уравнения	353
А. Мгновенное взаимодействие	353
Б. Теория возмущений	357
3. Мгновенное кулоновское взаимодействие	358
4. Поправки, связанные с поперечными фотонами	362
5. Трехмерное рассмотрение с помощью теории возмущений	365
6. Четырехмерное рассмотрение „поперечных“ членов	367
А. „Главный член“	368
Б. „Поперечный двухфотонный“ член	370
7. Обобщение на сложные ядра	372
Приложение	375
Литература	377
XIV. Трактровка квантовой электродинамики без теории возмущений (<i>С. Эдвардс</i>)	378
1. Введение	378
2. Вывод уравнения	379
3. Решение уравнения	381
4. Анализ оператора $\Gamma^{(0)}$	384
5. Применение к мезонной теории	385
А. Нелинейное скалярное поле	385
Б. Псевдоскалярная мезонная теория с псевдоскалярной связью	386
В. Псевдоскалярные мезоны, градиентная связь	388
Заключение и перспективы	389
Приложение	389
Литература	390

Сборник
НОВЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Редактор *К. П. Гуров*

Технический редактор *Б. И. Корнилов*

Корректор *А. Ф. Рыбальченко*

Переплет художника *М. М. Малкина*

Сдано в производство 8/VII 1953 г.

Подписано к печати 19/XII 1953 г.

T-09064. Бумага $70 \times 108 \frac{1}{16} = 14,4$ бум. л.

39,4 печ. л. Уч.-издат. л. 45,6.

Изд. № 2/1383. Цена 33 р. 90 к. Зак. 573.

Издательство иностранной литературы,
Москва, Ново-Алексеевская, 52,

4-я типография им. Евг. Соколовой

Главиздата Союзполиграфтрона

Министерства культуры СССР.

Ленинград, Измайловский пр., 29.