

ПРОБЛЕМЫ

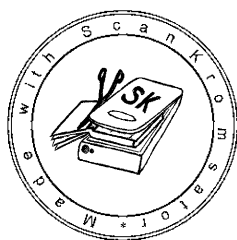


ФИЗИКИ

НОВЕЙШИЕ
ПРОБЛЕМЫ
ГРАВИТАЦИИ



Эта страница пуста



ПРОБЛЕМЫ



ФИЗИКИ

НОВЕЙШИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ

СБОРНИК СТАТЕЙ

Перевод

Д. В. БЕЛОВА и Б. Т. ВАВИЛОВА

Под редакцией

и со вступительной статьей

Д. ИВАНЕНКО

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1961

АННОТАЦИЯ

Сборник посвящен основным современным направлениям в исследовании гравитации, приобретающим все возрастающий интерес в связи с достижениями в изучении космического пространства и актуальными проблемами физики элементарных частиц, астрофизики и теории относительности.

В сборник включены выполненные крупными зарубежными учеными наиболее существенные работы последнего времени, в которых исследуются вопросы классической теории гравитации (проблемы тензора энергии, уравнений движения и гравитационных волн) и квантования гравитационного поля, обсуждаются возможности экспериментального обнаружения гравитационных волн и излагаются результаты новых лабораторных экспериментов в области гравитации.

Обзор основных проблем гравитации, отраженных в публикуемых в сборнике статьях, а также новых направлений в теории гравитационного поля (например, алгебраический анализ уравнений гравитации), дается во вступительной статье к сборнику.

Сборник рассчитан прежде всего на физиков-теоретиков, работающих в области теории поля и элементарных частиц, а также широкий круг физиков и математиков — научных работников, аспирантов, преподавателей и студентов, интересующихся современными проблемами теоретической физики.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ

§ 1. Введение

Настоящий сборник содержит переводы ряда наиболее важных работ, посвященных новейшим исследованиям в области гравитации.

За последние годы интерес к проблемам гравитации вновь заметно возрос. Впервые были созваны конференции, посвященные гравитации: в Чэпел-Хилле (США, 1957 г.) и Руайомоне — Париже (1959 г.). К ним следует присоединить юбилейную конференцию 1955 г. в Берне. Значительно увеличилось число опубликованных работ, посвященных тяготению.

Следует отметить, что речь идет как о развитии (часто весьма существенном) результатов теории Эйнштейна и специально космологии нестационарной Вселенной, так и об анализе последних с новых, иногда неожиданных (как в случае анализа решения Шварцшильда), точек зрения. Например, значительное внимание уделяется выводу уравнений движения из уравнений поля. Много работ посвящено тензору энергии гравитационного поля и гравитационным волнам, отысканию новых решений, анализу топологической структуры решений, проблеме Коши; продолжались астрономические наблюдения красного смещения и трех эйнштейновских эффектов; развивались обобщенные неоднородные, анизотропные модели Вселенной.

Более того, весьма характерным для современных работ по гравитационной динамике является постановка новых вопросов, например об алгебраической структуре теории, топологических обобщениях и т. д., притом не только теоретических, но и экспериментальных на базе эйнштейновской теории

гравитации или ее непосредственных обобщений. Характерно также настойчивое стремление провести квантование гравитационного поля и, одновременно, выяснить роль гравитации в релятивистской квантовой теории элементарных частиц.

Несомненно, запуск советских, а затем американских искусственных спутников содействовал возрождению интереса к гравитационным проблемам. Была высказана надежда об использовании искусственных спутников для более точной проверки различных гравитационных эффектов. С другой стороны, такие эффекты гравитации, как гравитационные волны, должны быть в будущем как-то приняты в расчет при определении движения спутников.

Весьма характерным и многообещающим является применение в самое последнее время новейших методов радиофизики и ядерной физики к исследованию гравитации. В частности, в начале 1960 г., применяя так называемый эффект Мёссбауэра, Паунд и Ребка впервые сумели наблюдать красное смещение спектральных линий в гравитационном поле Земли, а не в астрономических условиях.

Впервые поставлен на реальную экспериментальную почву вопрос об обнаружении гравитационных волн и измерении их скорости.

Как известно, геометрия характеризуется также топологическими свойствами. Попытку учесть топологию пространства-времени, допуская многосвязные области и т. д., предпринял недавно Уилер (см. § 9).

Продвинулась вперед проблема квантования гравитационного поля и расчет различных квантовых эффектов, в частности флуктуаций гравитационного поля и взаимных трансмутаций гравитации и обычной материи.

Хотя все указанные и другие исследования не привели еще к результатам, сравнимым по значению с результатами общей теории относительности и фридмановской космологии, можно, несомненно, говорить о начале нового, третьего периода в истории изучения гравитации, вслед за ньютоновским и эйнштейновским. Поэтому представляется весьма целесообразным дать советскому читателю информацию о современном состоянии и перспективах исследований в области гравитации, выходящую, как правило, за рамки проблем, рассматривавшихся в основных существующих

монографиях (Сборник «Принцип относительности» [1], Эйнштейн [2], Паули [3], Вейль [4], Эддингтон [5], Лауэ [6], Толмен [7], Фок [8], Лишнеровиц [9], Бергман [10], Леви-Чивита [11], Мёллер [12] и др.). В настоящий сборник, в силу ограниченности его объема, не включены статьи по космологии и единой теории поля. Мы лишь коротко коснемся этих вопросов во вступительной статье, задачей которой является краткое изложение наиболее фундаментальных проблем современного развития гравитационной динамики и некоторые комментарии к отдельным статьям, включенным в сборник.

В конце статьи прилагается список основных работ последнего времени начиная примерно с 1957 г., в том числе ряда монографий [12—22] и трудов конференций [23—25].

Прежде чем охарактеризовать основные проблемы гравитационной динамики на современном этапе ее исследования, напомним совсем кратко основные результаты эйнштейновской теории тяготения. Исторически эта теория тяготения возникла как «общая теория относительности», обобщавшая на любые виды движения специальную теорию относительности Лоренца — Эйнштейна — Пуанкаре — Минковского, установленную для прямолинейных и равномерных движений. Кроме того, вместо одной компоненты ньютоновского скалярного потенциала, определявшегося уравнением Лапласа — Пуассона $\Delta\varphi = 4\pi\rho$, Эйнштейн ввел потенциал, или волновую функцию, гравитационного поля в виде симметричного тензора $\psi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$. Наиболее существенным является отождествление этой величины с метрическим тензором римановой геометрии, в которой четырехмерный интервал задается выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1)$$

Таким образом, гравитация оказалась связанной с искривлением пространства-времени. При этом для определения $g_{\mu\nu}$ была установлена (в 1916 г.) сложная нелинейная система уравнений.

Обнаружение астрономическими средствами трех известных предсказаний теории (движение перигелия Меркурия, отклонение луча света в поле тяготения Солнца, красное смещение спектральных линий в поле тяготения плотных звезд) было справедливо воспринято (после результатов

наблюдений затмения Солнца в 1919 г.) как подтверждение теории Эйнштейна и вместе с тем идей Лобачевского — Большиа о неевклидовом характере реального пространства.

Напомним, что геометрия характеризуется не только формой интервала, но также законом параллельного переноса вектора из точки в точку:

$$\delta A_\mu = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha A_\alpha dx^\nu,$$

причем в случае римановой геометрии коэффициенты Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ симметричны по двум индексам и выражаются через производные от $g_{\mu\nu}$. Вообще же говоря, их можно задать независимо от метрики в гораздо более общем виде, выходя за рамки римановой геометрии. Наглядно говоря, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, составленные из производных потенциалов поля $g_{\mu\nu}$, играют роль напряженностей поля. Сам Эйнштейн построил искомые уравнения, определяющие распределение $g_{\mu\nu}$ в пустом пространстве и при наличии обычной материи, руководствуясь принципом эквивалентности, утверждающим локальную равноценность однородного поля тяготения и ускорения, т. е. в конце концов универсальным принципом равенства инертной и гравитационной массы, используя средства тензорного анализа и стремясь удовлетворить предельному случаю ньютоновской теории¹⁾.

Наряду с подобной геометризованной точкой зрения мы можем, ограничиваясь (как и в случае других полей) низ-

¹⁾ В принципе можно было бы строить теорию, основываясь не на компонентах метрического тензора, а на матрицах Дирака γ_μ , являющихся функциями четырех координат и представляющих собой, наглядно говоря, квадратные корни из $g_{\mu\nu}$:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} I.$$

Можно ввести линейную матричную метрику $ds = \gamma_\mu dx^\mu$ и развить геометрию на этой базе (Д. Иваненко и В. А. Фок [28], Мимура и др. [30]). С другой стороны, Виттен [31] и Пенроуз [32, 33] показали, что, подобно уравнениям Максвелла и другим уравнениям поля, эйнштейновские уравнения также можно записать в спинорной форме, причем в геометрии Римана с обычной сигнатурой роль тензора кривизны играют два четырехзначковых спинора, свойства которых уточняются наличием эйнштейновских уравнений. В частности, один из «гравитационных» спиноров Ψ_{ABCD} оказывается симметричным по всем четырем значкам (см. § 3, 6, 10).

шими производными, построить простейший инвариант гравитационного поля, составленный из потенциалов $g_{\mu\nu}$:

$$I_1 = g^{\mu\nu}, \quad (2)$$

и инвариант, образованный из напряженностей, которые сами, однако, образуют тензор лишь относительно линейных преобразований (т. е. образуют лишь аффинный тензор). Поэтому нельзя ограничиться «квадратом» $(\Gamma_{\mu\nu}^\alpha)^2$, но следует взять более сложные комбинации для получения истинного инварианта, который, как оказывается, имеет вид

$$I_2 = R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}, \quad (3)$$

где

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^\beta \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta. \quad (4)$$

Вторая часть $R_{\mu\nu}$ не зависит от вторых производных $g_{\mu\nu}$, а первая, являющаяся аффинной скалярной плотностью, представляет собой аффинную дивергенцию. Комбинируя оба инварианта при помощи так называемой «космологической постоянной» Λ , получаем искомый инвариант гравитационного поля, который вместе с лагранжианом обычной материи L_m , умноженным на константу связи, являющейся гравитационной константой Эйнштейна κ , можно взять в качестве простейшего лагранжиана теории

$$L = \Lambda I_1 + I_2 + \kappa L_m. \quad (5)$$

За доказательством отсутствия других инвариантов отсылаем читателя к работам Вейля и Картана [26]; для получения уравнений поля в качестве лагранжиана вместо члена I_2 в L можно взять выражение L_1 , отличающееся от I_2 членом четырехмерной дивергенции:

$$I_2 = L_1 + \text{Div } \Omega. \quad (6)$$

Как видно, лагранжиан содержит степень $g_{\mu\nu}$ выше второй, что приводит к нелинейным уравнениям. Нет оснований брать инвариант типа R^2 и другие¹⁾, приводя-

1) Инварианты типа R^2 недавно рассмотрел Стефенсон [25, 27], показавший, вслед за Эддингтоном, что все три эйнштейновских эффекта общей теории относительности (см. § 7) вытекают также из более общей теории.

щие к нелинейным членам высшего порядка. Наличие нелинейности в уравнениях гравитационного поля означает, наглядно говоря, порождение гравитационного поля самим полем, а не только обычной материей, или взаимодействием поля с самим собой.

Далее, образуя функцию действия

$$W = \int L \sqrt{-g} d^4x, \quad (7)$$

получаем путем вариации последней по $g_{\mu\nu}$ знаменитые уравнения Эйнштейна как уравнения Лагранжа — Эйлера данной вариационной задачи:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}; \quad (8)$$

здесь $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса обычной материи в гравитационном поле. С геометрической точки зрения $R_{\mu\nu}$ и R представляют собой свертки тензора Римана $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, определяющего коренные характеристики искривленного пространства-времени. В уравнении (8) чаще всего полагают $\Lambda = 0$ (см. § 8), если нет особых оговорок.

Полагая

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (9)$$

где $g^0_{\mu\nu}$ — метрический тензор плоского мира Минковского $(+1, -1, -1, -1)$, а $h_{\mu\nu}$ — малые величины, получаем в случае слабого поля в линейном приближении для $h_{\mu\nu}$ волновые уравнения, с помощью которых Эйнштейн впервые исследовал излучение гравитационных волн. В статическом случае слабого поля тяготения, порожденного покоящейся массой, получим в пределе уравнения Лапласа — Пуассона для главной компоненты $h_{44} = 2\varphi_N/c^2$. Задавая различные распределения обычной материи или ограничиваясь одним гравитационным полем, при тех или иных граничных условиях, выбирая те или иные дополнительные координатные условия и подвергая в дальнейшем квантованию поле гравитации (наряду с другими полями), мы в принципе можем решить любую задачу порождения или рассеяния гравитационного поля, а также любую задачу о взаимодействии и движении отдельных тел, распределен-

ной материи или элементарных частиц в гравитационном поле. При этом имеется в виду, что в случае нелинейной теории гравитации в противоположность случаю электродинамики и других линейных теорий не нужно отдельно задавать уравнения движения тел в гравитационном поле, так как последние выводятся из самих уравнений поля (см. § 4).

Основное решение уравнений Эйнштейна, соответствующее создаваемому точечной массой m гравитационному полю (или искривлению метрики), было получено К. Шварцшильдом (1916 г.) (анализ решений уравнений поля дается в § 2). Из этого решения, обобщающего закон тяготения Ньютона, вытекают все три эффекта эйнштейновской теории гравитации, которых мы коснемся в § 7 наряду с новыми предсказаниями.

Вопрос о плотности энергии гравитационного поля, вызвавший большую дискуссию, специально рассматривается в § 3; проблема гравитационного излучения обсуждается в § 5; алгебраическому анализу уравнений Эйнштейна, помогающему отысканию новых решений, посвящен § 6.

В настоящем обзоре мы не касаемся вопросов релятивистской гидродинамики, связи гравитации с эволюцией звезд и многих других более специальных проблем. Однако для полноты обзора мы кратко резюмируем положение вещей в области космологии, современному развитию которой был дан толчок в работе Эйнштейна, введшего космологический член (1917 г.), и которая приобрела затем в основном общепризнанную современную формулировку в работах А. А. Фридмана (1922—1924 гг.), открывшего возможность нестационарной геометрической структуры Вселенной, в частности расширение Вселенной (см. § 8).

В § 9 мы кратко остановимся на различных (в том числе новейших) попытках построения единой геометризованной теории поля, естественно возникшей на арене физики после успеха геометризации гравитации. Вопрос о включении гравитационного поля в систему других полей и частиц, а также проблема структуры частиц и их трансмутаций и т. д. с необходимостью приводят нас к построению квантовой теории тяготения, далеко еще незаконченной; эти вопросы мы попытаемся резюмировать в §§ 10 и 11.

В ряде случаев мы более подробно останавливались на относительно менее значительных вопросах, учитывая состояние литературы. Мы надеемся, что настоящий сборник вместе с данной вступительной статьей и списком литературы по рассматриваемым вопросам поможет читателю, знакомому с основами общей теории относительности, продолжить как теоретические и экспериментальные исследования, так и дальнейшее ознакомление с обширной литературой в данной области.

§ 2. Решения уравнений Эйнштейна

Переходя к решениям уравнений гравитации следует отметить, что в последнее время внимание в основном было сосредоточено, во-первых, на анализе «псевдосингулярностей» (по терминологии принстонской школы) на гравитационном радиусе, во-вторых, на отыскании новых точных решений, например реализующих метрики Петрова типа II, решений типа «связанных пар» и т. д., и на приближенных решениях типа «геонов»; продолжалось отыскание новых космологических решений (см. § 8).

Интересный анализ решений Шварцшильда и Нордстрема был произведен в работах Финкельштейна [34], Фрондэла [35], Крускала [36, 14], Брилла и Грейвса [37] и продолжен И. Новиковым [36а] и Ю. Рыловым с целью выяснения характера сингулярностей метрики при значениях r , равных нулю и гравитационному радиусу (в случае решения Шварцшильда), и соответствующих сингулярностей в случае заряженной частицы. Вводя новую координату времени (см. [5]), Финкельштейн показывает, что его метрика в противоположность метрике Шварцшильда может быть аналитически продолжена внутрь области, ограниченной гравитационным радиусом, хотя на границе g_{44} меняет знак. Любопытной особенностью новой метрики является наличие члена типа $-(2/r)d\tau dr$, указывающего на асимметрию по отношению к прошедшему и будущему.

Анализ «псевдосингулярности» решения Шварцшильда при $r=r_g$ показал, что в этой точке все инвариантные величины не имеют особенностей, так же как уравнения геодезических, которые сингулярны лишь при $r=0$. Для анализа проблемы Фрондэл применяет вложение шварцшильдова

многообразия в плоское шестимерное пространство, которое исследовал впервые Каснер [38]. Оказывается, что, рассматривая всю область $0 < r < \infty$, т. е. дополняя метрику Шварцшильда, мы приходим к нестационарному гравитационному полю в любой глобальной системе координат, которое, однако, может быть сделано, как обычно, стационарным при $r > 1$ с любой степенью точности.

Аналогичные важные выводы имеют место также для метрики Нордстрема [37]. Вводя новые координаты u и v , переписываем эту метрику в виде (Крускал—Бриль)

$$ds^2 = f^2 (-dv^2 + du^2) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{r}{2m} \right) - 1 \right] \exp \left(\frac{r}{2m} \right) &= u^2 - v^2, \\ \frac{1}{2m} &= \operatorname{arcth} \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2} \right), \\ f^2 &= \left(\frac{32m^3}{r} \right) \exp \left(-\frac{r}{2m} \right). \end{aligned}$$

Метрика Крускала является регулярной в начальный момент времени, но остается регулярной только для конечного собственного времени. Относительно возможности проникновения из внешней области во внутреннюю см. [14].

Эйнштейн и Розен [39] ввели новую координату ϱ из условия

$$r = \varrho \left(1 + \frac{m}{2\varrho} \right)^2,$$

что дает характерную двузначность, топологическая трактовка которой развивалась Уилером. Следует отметить, что решение Шварцшильда по существу получено не для пустого пространства, а для случая сингулярной точечной массы; это можно усмотреть из предельного ньютоновского случая, удовлетворяющего уравнению Пуассона с правой частью в виде δ -функции.

Различные новые решения были получены А. З. Петровым в связи с его теорией трех типов метрик (см. § 6).

Группу точных решений уравнений Эйнштейна отыскал Харрисон [40], который, руководствуясь некоторыми ана-

логиями с гидродинамикой, полагал $g_{\mu\nu}$ в виде «связанных пар»:

$$g_{\mu\nu} = \pm \delta_{\mu\nu} A_{\mu}^2(x^0, x^1) B_{\mu}^2(x^0, x^3).$$

Таким путем удалось отыскать 30 решений уравнений Эйнштейна, ряд которых в предельных «вырожденных» случаях переходит в решения Шварцшильда и других.

Хотя некоторые решения Харрисона, по-видимому, могут быть интерпретированы, например, как волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, и т. д., однако физический анализ полученных метрик еще далеко не закончен.

Уилер с сотрудниками (см., например, [14]) отыскал приближенные решения, соответствующие «геонам», а также пространствам, обладающим разнообразными топологическими особенностями (см. § 9).

§ 3. Энергия гравитационного поля

Вопрос об энергии гравитационного поля не является тривиальным, так как, с одной стороны, потенциалы $g_{\mu\nu}$ геометризуются и гравитационное поле может быть в данной точке устранено преобразованием координат, а с другой, по всей видимости, должно иметь место излучение гравитационных волн, несущих энергию при движении обычной материи, обладающей квадрупольным моментом распределения масс (или даже имеющих источником само поле тяготения). Тем самым вопросы отыскания тензора плотности энергии-импульса-натяжений (для краткости будем называть его просто «тензор энергии»), членов затухания в уравнениях движения тел и проблема гравитационных волн, примыкающая к вопросу о решениях уравнений гравитации, тесно связаны друг с другом. Однако для ясности разобьем этот комплекс вопросов на три параграфа.

Вокруг определения энергии гравитационного поля ведется многолетняя дискуссия, к первому периоду которой относятся работы Эйнштейна, Лоренца, Леви-Чивиты, Шредингера. В самые последние годы вопрос возник вновь и его с новых точек зрения рассмотрели Мёллер (статьи 1 и 2

настоящего сборника; см. также [41—43]), Н. В. Мицкевич [44, 45], Комар [46], Гольдберг [47], Флетчер [48], Дирак (статья 3 и 4 настоящего сборника; см. также [49, 50, 25]), Арновитт, Дезер и Мизнер [51—54], Бергман [55], Бель [56], Робинсон [57] и другие [58—65].

Однако до сих пор вопрос нельзя считать в какой-то мере решенным. Как известно, с помощью того или иного лагранжиана на основе теоремы Нетер можно образовать либо канонический, вообще говоря, несимметричный тензор энергии любого поля (электромагнитного, мезонного, спинорного и т. д.), либо при помощи вариации по $g_{\mu\nu}$ (метод Гильберта) метрический, симметричный тензор энергии. Несимметричная часть соответствует наличию спиновых свойств данного поля, кроме случая скалярного или псевдоскалярного полей нулевого спина, когда оба тензора совпадают; однако в случае гравитации имеет место вырожденный случай, так как вариация по $g_{\mu\nu}$ совпадает с вариацией по волновым функциям поля, приводящим к уравнениям поля. Таким образом, полученный последним способом симметричный тензор Лоренца — Ф. Клейна — Леви-Чивиты и Сурьо [60] исчезает (также при учете обычной материи) и тривиальным образом удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} (T_\beta^{\alpha(\text{грав.})} + T_\beta^\alpha) = 0,$$

$$T_\beta^{\alpha(\text{грав.})} = \frac{1}{\kappa} \left(R_\beta^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha R \right).$$

Ввиду тождественного исчезновения указанного тензора подобный результат физически неприемлем. Другая форма величины типа тензора энергии была получена исходя из требования его симметрии [9]. Канонический сохраняющийся несимметричный псевдотензор энергии гравитационного поля t_β^α , являющийся тензором относительно линейных преобразований и полученный Эйнштейном исходя из части лагранжиана L_1 , имеет вид (при учете обычной материи)

$$\begin{aligned} T_\beta^{\prime\alpha} &= t_\beta^\alpha + T_\beta^\alpha, \\ t_\beta^\alpha &= \frac{\partial L_1}{\partial g_{\mu\nu, \alpha}} g_{\mu\nu, \beta} - L_1 \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогичным путем, исходя, однако, из лагранжиана истинного скаляра R , Х. Мёллер и Н. В. Мицкевич получили для канонического квазитензора энергии гравитационного поля также сохраняющееся выражение, которому можно придать вид производной от суперпотенциала, антисимметричного по двум индексам:

$$\tau_{\mu}^{\nu} \text{ (М.-М.)} = T_{\mu}^{\nu} \text{ (Эйншт.)} + \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \Psi_{\mu}^{\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} X_{\mu}^{[\nu\lambda]}. \quad (12)$$

Поскольку полный симметричный тензор материи и гравитации обращается в нуль и равен сумме канонической и спиновой (u_{σ}^{α}) частей

$$T_{\beta}^{\alpha} \text{ (симм.)} = t_{\beta}^{\alpha} \text{ (полн.)} + u_{\beta}^{\alpha} \text{ (полн.)}, \quad (13)$$

то в случае чистой гравитации получим равенство спиновой части энергии (с обратным знаком) и канонического квазитензора энергии.

Эйнштейновское выражение страдает существенным недостатком, подчеркнутым Шредингером, а также Бауэром, поскольку оно приводит к значению полной энергии, зависящему от преобразования чисто пространственных координат. Недавно Мёллер вновь подчеркнул это обстоятельство и предложил видоизменить псевдотензор Эйнштейна. Однако квазитензор Мёллера — Мицкевича, устраняющий указанную трудность, не дает правильного выражения 4-вектора для замкнутой системы [42]. Нетрудно указать законы преобразования различных квазитензоров (Мёллер — Мицкевич) ($M_{\sigma}^{\alpha\tau}$ — плотность спина, т. е. момента 1-го порядка), например,

$$t_{\mu}^{\nu} = |I| \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}} \left(\frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}} t'_{\sigma}{}^{\alpha} - \frac{\partial^2 x'^{\sigma}}{\partial x'^{\tau} \partial x^{\mu}} M_{\sigma}^{\alpha\tau} - \frac{\partial^3 x'^{\sigma}}{\partial x'^{\tau} \partial x'^{\beta} \partial x_{\mu}} N_{\sigma}^{\alpha\tau\beta} \right). \quad (14)$$

Анализируя проблему определения массы при помощи метрики Шварцшильда, Флетчер [48] предложил для суперпотенциала следующее выражение:

$$X_{\sigma}^{[\nu\mu]} = (-g)^{W/2} [\delta_{\sigma}^{\nu} (g^{k\lambda} \Gamma_{k\lambda}^{\mu} - g^{\mu k} \Gamma_{k\lambda}^{\lambda}) - g^{\nu\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu} - \delta_{\sigma}^{\mu} (g^{k\lambda} \Gamma_{k\lambda}^{\nu} - g^{\nu k} \Gamma_{k\lambda}^{\lambda}) + g^{\mu\lambda} \Gamma_{\sigma\lambda}^{\nu}]. \quad (15)$$

В частности, при $W = 1$ получим псевдотензор Эйнштейна (см. [63]) (относительно случая $W = 2$ см. [13]).

Дирак, Арновитт, Дезер и Мизнер и другие стремятся тем или иным методом придать общей теории относительности каноническую форму, выделяя время и производя $(3 + 1)$ -разбиение теории. Это позволяет подойти новым способом к вопросу об энергии и импульсе, а также подготовить почву для квантования (см. Дирак — статьи 3 и 4 настоящего сборника — и Бергман и Комар — статья 14 настоящего сборника). В частности, Арновитт, Дезер и Мизнер, выделяя производные по времени, записывают сначала лагранжиан в виде

$$L = (-{}^4g)^{1/2} {}^4R = {}^3g^{1/2} [-g^{ij} \partial_0 K_{ij} - \partial_0 K + N ({}^3R + K^2 - K_{ij} + K^2 - K_{ij} K^{ij}) - 2\eta^i (K_i^j - \delta_i^j K)_{|j} - 2(N_{,j} - \eta^i K_{ij})^{|j}], \quad (16)$$

где $N = (-g^{00})^{-1/2}$, $\eta_i = g_{0i}$, $K_{ij} = N\Gamma_{ij}^0$, $K = g^{ij} K_{ij}$ и вертикальной черточкой обозначено ковариантное, а запятой — обычное дифференцирование по трем пространственным координатам; затем в качестве канонических переменных вводятся две независимые компоненты $g_{ij}^{(TT)}$ и $\pi^{ij(TT)}$ поперечных (точнее, трансверсально-трансверсальных) беспшуровых частей потенциала g_{ij} и моментов

$$\pi^{ij} = (-{}^4g)^{1/2} (\Gamma_{mn}^0 - g_{mn} \Gamma_{pq}^0 \gamma^{pq}) \gamma^{im} \gamma^{jn}$$

при определенных координатных условиях. Тогда действие при учете уравнений связи записывается в виде

$$I = \int d^4x (\pi^{ij(TT)} \partial_0 g_{ij}^{(TT)} - H),$$

где форма лагранжиана аналогична случаю механики

$$L = p\dot{q} - H.$$

При этом плотность гамильтониана $H = -g_{,ii}^{(T)}$ и импульсы $T_i^0 = -2\pi_{,j}^{ij}$ позволяют получить выражения полной энергии и импульса $(f^{(T)} = f_{ij} - \frac{1}{\nabla^2} f_{ij,ij})$:

$$E = - \int g_{,ii}^T d^3x = - \int g_{,i}^{(T)} dS_i,$$

совпадающие с интегральными значениями, полученными на основе псевдотензора Эйнштейна, недавнего выражения Дирака, а также симметричного псевдотензора [13]. Теория легко обобщается на случай наличия источников, и в шварцшильдовском случае получается правильное значение энергии $E = mc^2$. Возбуждение гравитационных волн будет соответствовать неисчезающим значениям трансверсально-трансверсальных величин. Хотя в классической формулировке непосредственно получаются скобки Пуассона между каноническими переменными, переход к квантовым коммутаторам не так прост, в частности, ввиду необходимости упорядочения множителей в нелинейных выражениях и необходимости учета уравнений связи, в данном случае для величин $g_{0\mu}$, не входящих в каноническую схему.

Баргманн и Дирак в своей канонической трактовке, не выделяя трансверсальных частей, полагают

$$q^n \rightarrow g_{\alpha\beta}, \quad \dot{q}_n = g_{\alpha\beta, 0}, \quad p = \frac{\partial L}{\partial g_{\alpha\beta, 0}}.$$

Дирак предлагает модифицированное выражение плотности энергии, не зависящее от $g_{\mu 0}$, благодаря чему энергия в меньшей степени зависит от выбора системы координат [25].

Отметим новый подход, связанный с «хронометрическими» инвариантами А. Л. Зельманова [64]. Разобьем все допустимые преобразования на трансформации от одной движущейся системы отсчета к другой (преобразования Лоренца и другие более общие) и трансформации при выбранной системе. Последние сводятся к произвольным трехмерным преобразованиям координат $x^{i'} = f^i(x^1, x^2, x^3)$ и произвольным трансформациям временной координаты $x^{4'} = F(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Относительно координатных преобразований физические величины должны быть трехмерно ковариантны, а относительно временных — «хронометрически» инвариантны. Вводятся понятия хронометрически инвариантного чисто пространственного тензора, длины, хронометрически инвариантного дифференцирования и т. д. Этот формализм был развит специально для теории анизотропной неоднородной Вселенной (см. § 8).

Поскольку И. Д. Новиков [65] показал, что выражения для энергии гравитационного поля Эйнштейна, Мёллера — Мицкевича и другие известные выражения (см., например, [13]) не являются хронометрически инвариантными в противоположность добротным с этой точки зрения выражениям вектора Умова — Пойнтинга в электродинамике, то возникает проблема отыскания хронометрически инвариантного выражения энергии для гравитации, которая, возможно, окажется удовлетворительной и с других точек зрения. Таким образом, несмотря на углубленный недавний анализ проблемы энергии гравитационного поля, вопрос этот окончательно еще не решен.

§ 4. Уравнения движения

Перейдем к проблеме уравнений движения тел в поле тяготения, которые благодаря нелинейному характеру уравнений гравитационного поля содержатся в самих уравнениях поля, тогда как, например, уравнения движения зарядов независимы от линейных максвелловых уравнений электродинамики. То обстоятельство, что линейные уравнения поля не могут содержать уравнения движения тел, было замечено Эйнштейном и Громмером еще в 1927 г. В самом деле, сумма двух решений, например потенциалов точечных покоящихся зарядов $(e_1/r + e_2/r)$, также будет решением в случае линейной теории Максвелла, тогда как в действительности взаимодействующие заряды будут двигаться. Важная задача получения уравнений движения была впервые решена в 1938 г. Эйнштейном, Гофманом и Инфельдом [66—68] весьма громоздким методом, в котором применялось разложение в ряд по обратным степеням скорости света; впоследствии этот метод был упрощен Инфельдом совместно с Плебанским и другими сотрудниками [21, 69—74] для случая точечных масс.

Несколько позднее В. А. Фок [75, 8] решил ту же задачу для тел конечных размеров. При этом он существенно применял для ряда задач гармонические координатные условия де-Дондера:

$$\mathfrak{G}_{,\beta}^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\beta} (-g^{1/2} g^{\alpha\beta}) = 0, \quad (16)$$

подчеркивая не только удобный для ряда проблем, но даже, по его мнению, принципиально существенный их характер¹⁾.

Относительно выбора тех или иных координатных условий и деталей вывода уравнений движения по методу Эйнштейна — Гофмана — Инфельда отсылаем читателей к статье Инфельда (статья 5 настоящего сборника) и другим его работам [69, 70]. Отметим, что, применяя иные, негармонические условия, Инфельд получил те же постньютоновские члены в уравнениях движения, которые были получены Н. Петровой [76] по методу В. А. Фока (см. также [77—82]).

В связи с получением уравнения движения вращающихся масс В. П. Кашкаровым [77] по методу Фока укажем на особое направление, развиваемое главным образом польскими теоретиками [86—88], стремящимися получить методом Эйнштейна — Гофмана — Инфельда из уравнений тяготения уравнения движения не только точечных масс, но также уравнения движения диполей и мультиполей, путем специализации вида сингулярности. Вейсенхофф [89] пытается связать подобные уравнения движения с классическими аналогами спина.

Плебанский и Бертоцци [73] улучшают метод Эйнштейна — Гофмана — Инфельда, отбрасывая ограничение малыми скоростями, но оставляя ограничение слабым полем, так что старые результаты получаются при разложении в ряд по степеням c^{-1} . Например, уже в первом приближении получаются для ускорения члены вида

$$\nabla \frac{\chi m}{r} \text{ (Ньютонова сила), } \frac{v^2}{c^2} \nabla \frac{\chi m}{r}, \quad \frac{v^3}{c^3} \nabla \frac{\chi m}{r},$$

тогда как у Эйнштейна — Гофмана — Инфельда последний член отсутствовал.

Действуя в духе методов Фоккера и Уилера — Фейнмана, формулировавших классическую электродинамику в терминах общих мировых линий источников при исключении переменных поля, Бертоцци и Плебанский получают в случае гравитации при помощи обобщенных функций Грина бесконечные ряды для определения потенциалов

¹⁾ В связи с выбором тех или иных координатных условий укажем работы, в которых делаются попытки установить дополнительные условия ковариантного вида, что по существу является выходом за рамки эйнштейновской теории [83—85].

поля $g_{\mu\nu}$. Они получают в уравнениях движения член затухания, что указывает на наличие излучения гравитационных волн (в противоположность мнению Инфельда).

Вопрос о гравитационном излучении тесно связан с проблемой вывода уравнений движения из уравнений поля. В первой работе Эйнштейна — Гофмана — Инфельда было сделано допущение, аналогичное выбору симметричной комбинации запаздывающих и опережающих потенциалов. В ряде работ Инфельд пытался показать при помощи некоторых (по-видимому, не всегда корректных) приближений, что член гравитационного трения отсутствует, вплоть до седьмого приближения (уравнения Ньютона соответствуют четвертому приближению).

В других работах Инфельд (статья 6 настоящего сборника) пытался утверждать, что излучение можно всегда оттрансформировать при помощи некоторого координатного преобразования.

Ввиду крайней громоздкости расчетов никто не смог найти причину, очевидно, ошибочного результата, полученного Ху Нином [90], который обнаружил в девятом приближении не уменьшение, а увеличение (!) энергии двойной звезды. Однако подсчет Траутмана [91] до девятого приближения привел к наличию гравитационного трения в уравнениях движения, полученных из уравнений поля.

Де Витт и Бреме [92] показывают, что в согласии с ожиданиями на основании принципа эквивалентности заряженная частица при движении в гравитационном поле излучает электромагнитные волны, что описывается ковариантным обобщением дираковского уравнения для точечного электрона.

§ 5. Гравитационные волны. Проблема Коши

Возможность излучения гравитационных волн, несущих энергию, импульс, вращательный момент и отрывающихся от источников, была предсказана Эйнштейном на основе линеаризованной трактовки, аппроксимировавшей сложную нелинейную систему уравнений. В дальнейшем этот вопрос неоднократно обсуждался; при этом трудности связаны, с одной стороны, с отысканием точных решений системы

нелинейных уравнений и, с другой — с отсутствием общепризнанного выражения энергии гравитационного поля.

Полные выкладки, относящиеся к потере гравитационной энергии вращающимся стержнем, приведены в книге Эддингтона [5]; В. А. Фок [25] привел простой вывод гравитационного излучения, применяя гармонические координаты. Фундаментальный результат для потери энергии можно записать в виде (приближение слабого поля):

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\kappa}{45c^5} (\ddot{Q}_{\alpha\beta})^2, \quad (17)$$

где

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho (3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\mu^2) d^3x$$

является квадрупольным моментом распределения масс. В прежних работах речь шла о тензоре инерции, связанном линейно с $Q_{\alpha\beta}$. Суть дела легко пояснить по аналогии с излучением электромагнитного поля зарядами, заметив, что в случае гравитации дипольный момент отсутствует благодаря совпадению отношения заряда к массе для всех тел, поскольку роль заряда играет $\sqrt{\kappa}m$.

Таким образом, надо учитывать квадрупольное излучение. Это согласуется со значением $S=2$ спина элементарной гравитационной волны или гравитона, что в свою очередь согласуется с числом независимых компонент поля.

Вопрос о скорости распространения гравитационного поля, тесно связанный с проблемой излучения волн, служит предметом многих исследований вплоть до последнего времени. На основе общей теории Адамара было выяснено, что характеристики уравнений Эйнштейна, определяемые членами с высшими производными, по существу совпадают с характеристиками волнового уравнения Даламбера. Этот результат наиболее просто получается при использовании гармонических координат. Отсюда вытекает фундаментальный результат, что фронт гравитационной волны распространяется со скоростью света.

К этому вопросу примыкает трактовка проблемы Коши для гравитационных уравнений, которой занимались специально Лишнеровиц и Фурес-Брюа [9, 93, 94], Б. Финци (статья 8 настоящего сборника), Ф. И. Франкль [95].

Вопреки некоторым сомнениям выяснилось, что проблема Коши для гравитационного поля может быть сформулирована вполне корректно как в случае чистой гравитации, так и в случае наличия вещества. Если в некоторой области пространственно-подобной гиперповерхности заданы гравитационные потенциалы и их первые производные по времени, а также параметры, характеризующие обычную материю, то все искомые величины могут быть определены как в прошлом, так и в будущем в любых точках пространства-времени.

А. З. Петров рассмотрел проблему Коши по методу Лишнеровица для каждого из трех возможных типов полей тяготения (см. § 6).

Согласно Лишнеровицу и Фурес-Брюа задачу решения уравнений Эйнштейна удобно разбить на два этапа: 1) отыскание возможных значений метрики на начальной пространственно-подобной поверхности и 2) отыскание распространения этой метрики (проблема Коши — Ковалевской). Из уравнений Эйнштейна четыре уравнения (компоненты μ_0) дают условия в начальный момент, и всякое их решение может быть продолжено посредством остальных уравнений.

Из новейших работ, посвященных излучению гравитационных волн, обратим внимание на статью Вебера и Уилера (статья 10 настоящего сборника), в которой показана реальность цилиндрических или «тороидальных» гравитационных волн, исследованных впервые Эйнштейном и Розеном (вопреки скептической позиции Розена).

Ф. Пиранни в статье, послужившей поводом довольно широкой дискуссии (статья 9 настоящего сборника) предложил связать излучение волн только с метриками Петрова типа II и III. Однако А. З. Петров и Б. Т. Вавилов отыскивали волновое решение и в случае метрики типа I.

Пример гравитационных волн, несущих энергию, приводит Брилл [97, 98], рассмотревший лишённые сингулярностей свободные цилиндрические аксиально-симметричные и симметричные по времени волны, ограниченные в пространстве так, что асимптотически метрика является шварцшильдовой. Обобщая работу Вебера—Уилера и приближенный расчет Бонди, Бриль, не пользуясь приближениями, показывает, что подобная волна имеет положительную энергию. Подчеркивается реальность гравитационных волн

вне зависимости от источника. Аксиальная метрика записывается в виде Вейля — Бонди:

$$ds^2 = \psi^4 [e^{2q} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2], \quad (18)$$

причем $\psi_\varphi = q_\varphi = 0$ всюду; $\psi_\rho = q_\rho = 0$ при $\rho = 0$ и $q = 0$ при $\rho = 0$. При больших r метрика, согласно Брилли, должна иметь вид

$$\psi = 1 + \frac{mk}{2r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

где $k = \kappa\mu/c^2$. При этом цилиндрическая волна рассматривается как предельный случай тороидальной. Существенную роль играет задание симметричных по времени начальных значений в виде ${}^3R = 0$ (трехмерное пространство).

Проблема волн, несущих энергию, рассматривается также в работах Мёллера (статьи 1 и 2 настоящего сборника). Боннор [96] исследовал сферические гравитационные волны. В противоположность огромному большинству авторов (Эйнштейн, Эддингтон, Дирак, Уилер и Брилли, Арновитт, Дезер и Мизнер, Фок, Бергман, Плебанский, Бертотти и другие; см. также наши работы с А. А. Соколовым и А. М. Бродским), признающих реальность гравитационных волн, переносящих энергию, Инфельд, практически в научном одиночестве, полагает, что можно доказать их отсутствие, применяя некоторое определение энергии системы и подбирая координатные преобразования, при которых в соответствующих приближениях энергия системы остается постоянной. По-видимому, здесь идет речь о недостаточно корректном применении приближенных расчетов (см. § 4). Примыкая отчасти к Инфельду, Шейдеггер [71] полагает, что гравитационное излучение может иметь место лишь при наличии электромагнитных и других негравитационных сил.

Остановимся теперь на исследованиях Дирака (статьи 3 и 4 настоящего сборника) и Арновитта, Дезера и Мизнера [51—54], изложенных авторами в ряде перекрывающихся работ, опубликованных в 1959—1960 гг. и посвященных канонической форме уравнений общей теории относительности и вместе с тем проблеме гравитационного излучения, о чем речь уже шла выше (см. § 3).

В последних работах подчеркивается, что общая теория относительности представляет собой теорию, уже сформулированную в «параметризованной» форме. Как известно, вариационному принципу классической механики можно придать параметризованную форму, рассматривая время как функцию некоторого параметра. Лагранжиан общей теории относительности может быть записан в аналогичной параметризованной форме. Для этой цели применяется предложенный Палатини лагранжиан, линейный относительно первых производных; при этом символы Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ рассматриваются как независимые переменные:

$$I = \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma). \quad (19)$$

Затем производится выделение трехмерных величин. Аналог формулировки Палатини может быть получен в случае электродинамики, когда лагранжиан записывается в виде

$$L_M = A_{\mu,\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

В случае гравитации имеем (см. § 3)

$$L = \sqrt{-g} {}^4R = -g_{ij} \partial_i \pi^{ij} - NR^0 - N_i R^i - 2 \left(\pi^{ij} N_j - \frac{1}{2} \pi N^i + N^i \sqrt{g} \right)_{,i}, \quad (20)$$

где

$$R^0 \equiv -\sqrt{g} \left[{}^3R + g^{-1} \left(\frac{1}{2} \pi^2 - \pi^{ij} \pi_{ij} \right) \right], \\ R^i \equiv -2\pi^{ij}_{,j}.$$

Параметризованная форма лагранжиана получится отсюда при отбрасывании дивергенции и полной производной по времени:

$$L = \pi^{ij} \partial_t g_{ij} - NR^0 - N_i R^i, \\ R^\mu = R^\mu(g_{ij}, \pi^{ij}). \quad (21)$$

«Гамильтониан», равный $NR^0 + N_i R^i$, исчезает; однако можно найти истинный, не исчезающий гамильтониан после учета уравнений связи и выбора соответствующих координатных условий.

При приведении лагранжиана к канонической форме существенную роль играет выражение генератора, которое в случае классической механики имеет вид

$$G = \sum_{i=1}^M p_i \delta q_i - H \delta q_{M+1}.$$

Для случая гравитационного поля имеем

$$G = \int d^3x [\pi^{ij(TT)} \delta g_{ij}^{TT} + \zeta_0^0 \delta t + \zeta_i^0 \delta x^i], \quad (22)$$

где ζ_0^0 и ζ_i^0 — решения уравнений связи.

Возбуждение канонических степеней свободы поля даст определение волн, аналогично случаю электродинамики.

Для того чтобы в общей теории относительности имела место ситуация типа волновой зоны, недостаточно удалиться от источников излучения, представляющих собой обычную материю; необходимо обеспечить также отсутствие влияния нелинейных членов на распространение волн.

Таким образом, в разумно определенной волновой зоне мы получим следующую линейную систему однородных уравнений, выражающих распространение со скоростью света гравитационного излучения без всякого самодействия или связи с ньютоновской частью поля:

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ij}^{(TT)} &= 2\pi^{ij(TT)}, \\ \partial_t \pi^{ij(TT)} &= \frac{1}{2} \nabla^2 g_{ij}^{(TT)}, \end{aligned}$$

что в конце концов эквивалентно уравнениям для трансверсально-трансверсальной части слабого гравитационного поля, рассмотренного Эддингтоном.

Поскольку, таким образом, согласно Арновитту, Дезеру и Мизнеру [51—54], точная динамика канонических переменных в волновой зоне совпадает со случаем линеаризованной теории, оказывается возможным моделировать при помощи линейной теории с источниками любой случай излучения, обязанный сильному внутреннему полю, и тем самым применять вектор Умова — Пойнтинга к линеаризованной теории, приводящей к указанному выражению.

Рассматривая ударные волны гравитационного поля как разрывы тензора Римана, Тредер [107] находит законы их распространения, развивая результаты Штельмахера, применявшего методы характеристик и бихарактеристик.

В последние годы вопросам гравитационного излучения и проблеме Коши посвящено большое число работ [101—115].

Отметим, наконец, возможную роль гравитационных волн в балансе энергии всей известной части Вселенной, подчеркиваемую Уилером; не исключено, что эти волны будут также играть роль в стабильности астрономических систем [100].

§ 6. Алгебраический анализ уравнений Эйнштейна и три типа метрик

Остановимся теперь на исследованиях А. З. Петрова [116—120], впервые выяснивших алгебраическую структуру уравнений Эйнштейна и установивших наличие трех типов метрик. Работы эти получают все более широкое развитие в мировой литературе, отраженное, например, в работе Пирани (статья 9 настоящего сборника), посвященной гравитационному излучению (см. также работы Жеэнь [121, 122], Дебеве [123], Кундта [124], Шелла [125], и других [32, 33]).

Рассмотрим, согласно А. З. Петрову, в локальной геометрии касательного пространства, возникающей в каждой точке 4-пространства, тензоры, обладающие четным числом контра- и ковариантных индексов, причем индексы каждого рода делятся на кососимметричные пары. Перенумеруем каждую пару подобных индексов «битензора» по схеме:

$$14 \rightarrow 1$$

$$24 \rightarrow 2$$

$$34 \rightarrow 3$$

$$23 \rightarrow 4$$

$$31 \rightarrow 5$$

$$12 \rightarrow 6$$

Оказывается, что локальное бивекторное множество тензоров допускает отображение на так называемое центро-аффинное пространство E_6 , что определяет изоморфизм

по отношению к сложению, вычитанию и умножению битензоров.

Мы получим метрическое пространство R_6 с тензором g_{ab} , метризуя E_6 . Если

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & +1 & \\ & & & & & +1 \end{pmatrix},$$

то в бивекторном пространстве R_6 в орторепере по определению имеем $g_{ab} = g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}$, т. е.

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & +1 & \\ & & & & & +1 \\ & & & & & & +1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Аналогично тензор Римана $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ индуцирует в R_6 битензор R_{ab} . Основной пункт заключается в рассмотрении λ -матрицы для R_{ab} и корней секулярного уравнения

$$|R_{ab} - \lambda g_{ab}| = 0,$$

которое и будет задавать тип пространства и соответствующие инварианты.

Напомним, что, действуя аналогичным образом в случае электродинамики при рассмотрении матрицы $|F_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}|$, мы получаем оба основных инварианта теории: $(E^2 - H^2)$ и $(EH)^2$.

Доказывается, что матрица R_{ab} для любого орторепера будет иметь вид

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} M & N \\ N & -M \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Вторая важная теорема А. З. Петрова гласит, что существуют три и только три типа характеристик λ -матрицы; следовательно, имеются три и только три типа пространств с метриками, удовлетворяющими уравнениям Эйнштейна, вообще говоря, с космологическим членом Λ , но без обычной материи.

При этом битензору R_{ab} всегда можно придать следующий вид:

$$\text{Тип I: } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \beta_2 & \\ & & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad (25a)$$

$$\sum_i^3 \alpha_i = -\Lambda, \quad \sum \beta_i = 0;$$

$$\text{Тип II: } M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 + 1 & \\ & & \alpha_2 - 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 \\ 0 & 1 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad (25б)$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = -\Lambda, \quad \beta_1 + 2\beta_2 = 0;$$

$$\text{Тип III: } M = \begin{pmatrix} -\Lambda/3 & 1 & 0 \\ 1 & -\Lambda/3 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda/3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (25в)$$

Полученные результаты обобщаются на случай присутствия обычной материи, характеризуемой тензором $T_{\alpha\beta}$ путем введения тензора Петрова пространства-материи:

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\alpha\beta\gamma\delta} - S_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

где $S_{\alpha\beta\gamma\delta}$ конструируется из $T_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta}$, причем в общем случае снова существуют три и только три типа пространств.

В дальнейшем А. З. Петров с сотрудниками [127—130] исследовал классификацию полей тяготения общего вида по группам движений, допускаемым полем данного вида. Это дает возможность получать в замкнутом виде метрики пространств. Суть дела заключается в том, что при движениях в римановом пространстве метрика и поле тяготения не меняются; таким образом, полю можно сопоставить геометрию автоморфизмов данной группы движений. В частности, пространство Минковского специальной теории относительности отвечает 10-параметрической группе движений Лоренца.

Решение Шварцшильда соответствует некоторой 4-параметрической группе движений. Для полей типа II найдена 6-параметрическая группа максимальной подвижности,

являющаяся аналогом группы Лоренца, однако для метрики, не переходящей в метрику Минковского. Для полей максимальной подвижности типа III найдена метрика с 2-параметрической группой движения, также не сводящаяся никогда к плоскому пространству.

Отметим, что решения Шварцшильда, Вейля, Розена, Эйнштейна, а также космологические модели Эйнштейна, де-Ситтера, А. Фридмана, Геделя, Хекмана и Шюкинга (см. § 8) все относятся к полям типа I или II. А. З. Петров с сотрудниками, Розен, Бонди и Робинсон нашли некоторые метрики, соответствующие полям типа II или III.

Однако вопрос о физической интерпретации полей типов II и III еще далеко не ясен. В частности, возникает вопрос об их физической реальности, поскольку лишь поля типа I дают в пределе метрику Минковского. На наш взгляд, либо мы должны выяснить их физический смысл, предсказывая тем самым необычные области пространства, либо заключить, что уравнения Эйнштейна содержат в себе описание некоторых ситуаций, не имеющих отношения к действительности.

Пенроуз [33] проводит сравнение классификаций по трем типам в тензорной и спинорной формах.

Развивая работу А. З. Петрова по эйнштейновским пространствам, для которых тензор Риччи $R_{\alpha\beta}$ удовлетворяет уравнениям поля, Шелл [125] устанавливает классификацию четырехмерных римановых пространств с сигнатурой $+2$ ($+++-$), основываясь не только на алгебраических, но также на дифференциальных свойствах тензора Римана и применяя понятие группы голономии пространства¹⁾.

§ 7. Экспериментальная проверка общей теории относительности

Остановимся сначала на проверке трех основных предсказаний общей теории относительности.

1. *Гравитационное красное смещение.* Если источник, обладающий 4-скоростью v_s , излучает свет частоты ν_s , то

¹⁾ Инфинитезимальная группа голономии есть группа вращений в соответствующем плоском касательном пространстве (Шелл [125]). Это исследование примыкает к многочисленным работам Главатого по группам голономии [131].

наблюдатель, обладающий 4-скоростью v_0 , будет в своей системе отсчета воспринимать частоту ν_0 :

$$\frac{\nu_0}{\nu_s} = \frac{(g_{\mu\nu} v_0^\mu \rho^\nu)_0}{(g_{\mu\nu} v_s^\mu \rho^\nu)_s},$$

где ρ^ν — изотропный вектор, переносимый параллельно вдоль луча [132]. Здесь не вводится различия между доплер-эффектом и гравитационным сдвигом частот. Гравитационное красное смещение было предсказано Эйнштейном в 1911 г. на базе принципа эквивалентности.

В слабом поле с потенциалом Φ для покоящихся источника и наблюдателя получаем известную формулу

$$\frac{\nu_0 - \nu_s}{\nu_s} = \frac{1}{c^2} (\Phi_s - \Phi_0).$$

Удобно ввести эквивалентную скорость

$$v_e = \frac{c \Delta \Phi}{\nu_s}.$$

Для Солнца v_e составляет 0,636 км/сек.

Хотя наблюдения показали наличие красного смещения, до сих пор еще не может быть речи о количественном согласии ввиду ряда усложняющих обстоятельств, из которых главным является «дисковый» эффект, представляющий зависимость красного смещения от положения по отношению к диску Солнца. Вблизи края диска наблюдение дает релятивистское или превышающее его значение, тогда как в центре смещение гораздо меньше. Убедительной теории дискового эффекта нет; возможно, последний обязан радиальным потокам в солнечной атмосфере [133—136].

Благодаря малым радиусам (0,1—0,01 радиуса Солнца) и массам, сравнимым с массой Солнца, белые карлики обладают значительным гравитационным потенциалом на поверхности. Однако только для небольшого числа из примерно 400 известных подобных звезд определены массы и радиусы, причем их спектральные линии вообще очень размыты. Измерения на спутнике Сириуса дали $v_e = 9—31$ км/сек (ожидалось 60 км/сек [137, 138]). К сожалению, это качественное согласие неубедительно ввиду неточности в определении радиуса и в учете света, рассеянного от главной

звезды. Хотя в случае белого карлика в созвездии Эридана (40 Eri B) компоненты достаточно удалены друг от друга, но параметры снова недостаточно точно известны. Величина красного смещения 21 ± 3 км/сек неплохо согласуется с теоретическим значением 17 ± 3 км/сек [139].

Возможно, что эксперименты с атомными часами, помещенными на спутниках, дадут точное квазиастрономическое значение эффекта.

Паунд и Ребка в Гарварде (статья 18 настоящего сборника), а также с меньшей точностью Крэншоу [140] с сотрудниками в Харуэлле, впервые измерили гравитационное красное смещение в земных условиях, используя γ -лучи Fe^{57} , обладающие незначительной относительной шириной линии — порядка 10^{-12} . Разность высот в опытах Паунда достигала 22,5 м и уменьшалась у Крэншоу до 3 м, причем ожидаемый сдвиг, обязанный различию в потенциалах земного поля тяготения на разных высотах, составил

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 2,5 \cdot 10^{-15}.$$

Идея эксперимента заключалась в использовании безотдачных γ -лучей, испускаемых и поглощаемых ядрами, находящимися внутри кристаллической решетки. Поскольку отдача принимается всем кристаллом, доплеровское уширение, как было открыто Мёссбауэром в 1958 г. [141], оказывается ничтожным и мы имеем дело практически с естественной шириной линии. Особое внимание обращалось на сдвиги, связанные с тепловыми эффектами и индивидуальными особенностями данного кристалла. Эти прекрасные эксперименты дали вполне удовлетворительное подтверждение теории Эйнштейна в земных условиях.

2. *Отклонение света в поле тяготения.* Этот эффект, как было указано Зольднером еще установления до общей теории относительности, должен иметь место при учете ньютоновского притяжения электромагнитного поля, иначе говоря фотона, к Солнцу. Для луча света от звезды, проходящего вблизи края Солнца, получается угловое отклонение $\delta\varphi = 0",85$. Эйнштейн предсказал в 1911 г. на основании принципа эквивалентности искривление лучей света в гравитационном поле, приводящее к угловому смещению $\delta\varphi = 0",83$. Наконец, общая теория относительности приводит к вдвое большему смещению $\delta\varphi = 1",75$.

Наглядно говоря, искривление луча обязано переменной рефракции, причем показатель преломления определяется гравитационным потенциалом:

$$n = \frac{\left(1 + \frac{\varphi}{2}\right)^3}{1 - \frac{\varphi}{2}} \approx 1 + 2\varphi,$$

где $\varphi = \kappa M/Rc^2$; для слабого поля R является обычным расстоянием, откуда отклонение

$$\delta\varphi = \frac{4\kappa M}{Rc^2}.$$

Астрономические наблюдения во время затмений, начиная с эддингтоновской экспедиции 1919 г., в основном подтверждали эйнштейновский эффект; однако было желательным уточнение как самих наблюдений, так и методов пересчета на фотографиях звездного неба, полученных в отсутствие Солнца. Осложняющими обстоятельствами являются: преломление в земной атмосфере, обязанное понижению температуры в области лунной тени; преломление в солнечной короне; искривления в эмульсии фотопластинок; искажения в оптической системе, обязанные вариациям температуры во время затмения и др.

Приведем несколько значений наблюдавшихся отклонений во время ряда затмений:

1919 г.: $1'',98 \pm 0'',12$ (2,0),

1947 г.: $2'',01 \pm 0'',27$ (2,01; 2,20),

1952 г.: $1'',70 \pm 0'',10$ (1,43) (данные А. А. Михайлова [142],

пришедшего окончательно к среднему значению $2'',0$). (В скобках поставлены значения, полученные при дополнительном анализе.)

Возможно, использование фотоэлектрических методов для наблюдений, не зависящих от затмений, позволит получить более точные результаты.

3. *Движение перигелия Меркурия.* Предсказываемое общей теорией относительности движение перигелия планетной орбиты Меркурия, по общему мнению, полностью объясняет незначительную аномалию, обнаруженную еще в XIX в. Леверрье, Ньюкомбом и другими. Теория

предсказывает смещение на $43'',03$ в столетие, тогда как наблюдения дают $43'',11 \pm 0'',45$. Для Венеры имеем соответственно $8'',6$ (теория) и $8'',4 \pm 4'',8$ (наблюдения). Никакими другими причинами не удастся объяснить аномалии движения перигелия Меркурия и других планет.

Перечислим другие гравитационные эффекты [143], (см. также [151б]) поиски которых могут быть приняты в настоящее время.

Согласно общей теории относительности, поле вращающейся сферы отличается от поля покоящейся массы. Уравнение для вектора собственного момента количества движения некоторой пробной частицы в поле Земли с точки зрения сопутствующего наблюдателя гласит:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{S}^0], \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{[\mathbf{F}\mathbf{v}]}{2mc^2} + \frac{3\kappa M [\mathbf{r}\mathbf{v}]}{2c^2 r^3} + \frac{\kappa I [3(\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}_0)]}{c^2 r^3}, \quad (27)$$

где $I=2MR^2/5$ — момент инерции Земли, R — ее радиус, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости, \mathbf{F} — сила негравитационного типа. Первый член в выражении для $\boldsymbol{\Omega}$ представляет собой томасовскую прецессию, два других — гравитационные эффекты в низшем порядке, причем третий член был указан Лензе и Тиррингом. Частота спинового момента постоянна в сопутствующей системе, но внешний наблюдатель будет обнаруживать сдвиги доплеровского или гравитационного типов, как и для случая часов. Отсюда найдем угловую скорость прецессии на некоторой широте λ [144]:

$$\begin{aligned} \Omega &\sim 2\pi \left(\frac{4gR}{5c^2} \right) (1 + \cos^2 \lambda) = \\ &= 3,5 \cdot 10^{-9} (1 + \cos^2 \lambda) \text{ радиан/день} \end{aligned} \quad (28)$$

($g=\kappa M/R^2$). Предложено использовать для измерения столь малой прецессии гироскоп, образованный сверхпроводящей сферой в статическом магнитном поле. В дальнейшем можно было бы проследить за изменением ориентации гироскопа по отношению к «неподвижным» звездам в течение ряда лет. По-видимому, выгоднее поставить подобные эксперименты на спутнике.

Коккони и Сальпетер (статья 20 настоящего сборника) (см. также [145]) предлагают использовать эффект Мёсбауэра для обнаружения возможной анизотропии инерции, измеряя ускорения в плоскости Галактики и перпендикулярно к этой плоскости и учитывая, что, согласно идеям принципа Маха, инерция тела обусловлена влиянием всех масс во Вселенной. Если массы тел вносят вклад в инерцию $\sim 1/r$, то масса Галактики может привести к изменению инертной массы примерно на

$$\frac{\Delta m}{m} \sim \frac{M}{r} \frac{R}{m} \sim 10^{-5}$$

(r — среднее расстояние от центра Галактики до Земли, R — радиус известной части Вселенной, содержащей материю с массой M). Анизотропия же инерции, вызванная анизотропией распределения масс в Галактике, будет составлять какую-то долю этой величины. Указывается верхняя граница анизотропии $\Delta m/m \sim 10^{-20}$. Можно ожидать, что годовые вариации $\sim 1\%$ в радиусе орбиты Земли должны привести к вариациям $\kappa \sim 10^{-10}$ в духе принципа Маха.

Обратим теперь внимание на проверку идей Дирака, Йордана и Дике [24] об изменении постоянной тяготения со временем $\kappa \sim 1/t$. Дирак [146] разделил безразмерные константы физики на два класса: малые и большие. К малым относится, например, постоянная тонкой структуры, а к большим — отношение кулоновской и ньютоновской потенциальной энергии $\sim 10^{40}$. Эта гипотеза приводит к ряду эмпирических следствий. Предполагается, что «большие» константы являются функциями времени, так что, например, сила тяготения раньше была гораздо больше. Фермиевская постоянная слабой связи, в частности β -распада и четырехфермионной связи, константы нелинейного самодействия фундаментального спинорного поля и т. д. также будут меняться со временем. Аналогично должна меняться и зоммерфельдсовская постоянная тонкой структуры $\alpha = 1/137$, причем $\alpha \sim t^{-2}$ или, по другим соображениям, $\alpha \sim \ln(1/t)$ [143].

Йордан [17] насчитывает 12 пунктов, связанных с возможной проверкой уменьшения гравитационной постоянной со временем. К ним относится, например, трактовка трещин на поверхности Земли и Луны, вызванных

увеличением поверхности вследствие уменьшения κ . Предсказываемая высокая температура в каменноугольный геологический период, возможно, также объясняет ряд особенностей этой эпохи. Как будто наблюдаемое увеличение радиуса Земли ($\sim 0,5$ мм/год), по-видимому, согласуется с вековым увеличением продолжительности суток, как было указано М. У. Сагитовым [143а]; вместе с ним мы предлагаем продолжить карту трещин на поверхности Земли [143а], проведя ее через среднеазиатские и сибирские районы на базе как геологических и сейсмических данных, так и гравитационных аномалий.

Использование спутников может помочь установить изменение гравитационной константы со временем путем сравнения атомного стандарта частоты с астрономической частотой (Маркович). Оптические наблюдения спутников на больших высотах со своей стороны, по-видимому, смогут обнаружить годовые изменения κ порядка 10^{-8} и уменьшение κ порядка 10^{-10} в год [143].

Для определения возможных изменений зоммерфельдовской постоянной α Бономи начал использовать атомные часы с переходами в цезии и аммонии [143].

Изменение α со временем привело бы к небольшому сдвигу ядерных уровней благодаря изменению кулоновской энергии, что в свою очередь привело бы к изменениям в определении времени жизни различных горных пород и метеоритов.

В последнее время вновь привлекли внимание классические опыты Этвеша. В них применялись крутильные весы, на которые были подвешены две массы из различного материала. Установка в подобных опытах Дике позволит, по-видимому, достигнуть точности по крайней мере 10^{-11} по сравнению с точностью $3 \cdot 10^{-10}$ у Этвеша [143, 148] путем использования более тонкой нити, большего зеркала и электронных средств наблюдения. Неоднородности в гравитационном поле и медленные изменения в константе кручения исключаются применением маятника с тремя массами.

Гравитационное действие Солнца в течение суток или годового движения Земли может, в случае отсутствия равенства тяжелой и инертной масс, вызвать поворот крутильных весов, что указало бы на отсутствие равенства инертной

и «пассивной» гравитационной массы. В отличие от «пассивной» гравитационной массы «активная» гравитационная масса служит источником поля.

Отступление от равенства гравитационной и инертной масс подсказывается некоторыми соображениями квантовой теории поля. Наличие группы преобразований, ведущей к сохранению барионного заряда, приводит к некоторой поправке. Кроме того, согласно нашим соображениям [214], можно ожидать квантовых поправок на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Отметим также в этой связи, что поскольку античастицы (позитроны, антипротоны и т. д.), реально не присутствующие в атоме, вносят все же вклад в общую массу и энергию через виртуальные пары, вызванные поляризацией вакуума, то наличие допускаящихся с разных сторон антигравитационных сил (отталкивания) между ними или отрицательной гравитационной массы у позитрона привело бы к заметной разности инертной и гравитационной масс, в противоречии с результатами Этвеша [150]. Таким образом, опыты Этвеша опровергают гипотезу об аномальных гравитационных свойствах позитрона (Шифф, статья 16 настоящего сборника). Относительно опытов с гравитационными свойствами античастиц см. [147].

Как было указано Бонди (статья 11 настоящего сборника), общая теория относительности в принципе не запрещает существования отрицательных масс; это дало повод к различным догадкам как в области элементарных частиц, так и в космологии.

Фундаментальной проблемой в области новейших экспериментов по гравитации и общей теории относительности является обнаружение гравитационных волн.

Вебер предложил использовать в качестве детектора гравитационных волн пьезоэлектрический кристалл, соединенный с усилителем. При частоте порядка 10^3 гц имеется надежда обнаружить поток энергии $\sim 10^{-4}$ эрг/см².сек. Вращение Земли будет модулировать излучение в зависимости от звездного времени.

Использование пьезоэлектрика в качестве излучателя оказывается на много порядков выгоднее использования вращающегося стержня (см. статью 17 настоящего сборника). Наряду с астрономическими земные источники гра-

витационного излучения (типа больших вращающихся масс) могут быть в принципе использованы для определения скорости распространения гравитации или хотя бы для обнаружения нестатического характера гравитационного поля (В. Брагинский, Д. Иваненко, Г. Рукман, [149]).

Любопытное сравнение гравитационного излучения, связанного источникам типа взрыва звезд и ядерного взрыва, произвел Шюкинг [25].

Так как в начальной стадии расширения Вселенной могло иметь место интенсивное гравитационное излучение, интересно было бы рассмотреть вопрос о существовании гравитационных волн с длиной волны порядка расстояния между Галактиками. Рассеяние света на подобных искажениях метрики могло бы привести к образованию повторных оптических изображений отдаленных звезд [14]). Не исключено, что плотность энергии гравитационных волн во Вселенной сравнима с плотностью обычной материи или даже превосходит ее [151a]. Заметим, наконец, что новейшие методы позволят выяснить все недоразумения в неудачных опытах Майораны [151], пытавшегося обнаружить экранировку статического поля тяготения. Томашек [151] не нашел никакой экранировки поля Солнца Луной во время солнечного затмения 1954 г.

Таким образом, применение новейших экспериментальных методов позволило достичь в последнее время важных результатов и вселяет надежду на существенные достижения в недалеком будущем.

§ 8. Проблемы космологии

Начало современной космологии было положено работой Эйнштейна 1917 г., в которой была сделана попытка получить решение уравнений гравитационного поля для всей Вселенной в случае конечной средней плотности материи. При этом был введен космологический член $\Lambda g_{\mu\nu}$ по некоторой аналогии с членом в уравнении Лапласа — Пуассона, включенным Нейманом (1896 г.) с целью получения конечного потенциала, порождаемого распределением материи с постоянной плотностью в бесконечной Вселенной с эвклидовой метрикой:

$$\Delta\varphi - \Lambda\varphi = 4\pi\rho. \quad (29)$$

Действительно, отсюда имеем

$$\varphi = \int \frac{e^{-V_{\Lambda} r}}{r} \varrho \, d\tau,$$

и замена ньютоновского закона тяготения на «юкавский» обуславливает сходимость интеграла при $r \rightarrow \infty$.

Однако в 1929 г. Хаббл, продолжая наблюдения Слайфера, начатые в 20-х годах, открыл красное смещение спектральных линий, испускаемых внегалактическими туманностями, которое общепризнанно толкуется как доплер-эффект, обязанный разбеганию туманностей, причем скорость движения оказалась примерно пропорциональной расстоянию до наблюдателя:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \delta = h_1(t_0 - t) + \frac{2h_1^2 - h_2}{2}(t_0 - t)^2 + \dots \quad (30)$$

Здесь $h_1 = \dot{R}_0/R_0$, $h_2 = \ddot{R}_0/R_0$; точкой отмечены производные по t . При этом учитывается также квадратичный член. По последним подсчетам постоянная Хаббла $h_1 = 2,43 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ (75 км/сек·мегапарсек) [152—154]. Вторая постоянная h_2 оказывается отрицательной $h_2 \approx -h_1^2$, что указывает на замедление разбегания (или расширения нашей части Вселенной).

Красное смещение внегалактических туманностей было измерено также радиоастрономическими методами, например Р. Минковским (1960 г.) для объекта, обладавшего скоростью $v \approx 0,5 c$.

А. А. Фридман показал (1922 г.), что эффект разбегания может быть истолкован как расширение пространства [155]. Удалось найти решение уравнений Эйнштейна, притом без космологического члена, соответствующее конечной, хотя и не постоянной плотности, взяв за основу величину интервала в изотропном виде:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - R^2(\tau) \{d\chi^2 + \text{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)\}. \quad (31)$$

Была указана возможность сжимающихся или пульсирующих пространств. После этого, Эйнштейн отказался от своего решения, не дававшего объяснения красного смещения и указал на ненужность космологического члена $\Lambda g_{\mu\nu}$ в уравнениях поля. Де-Ситтер (1917 г.) нашел другое ста-

тическое решение, соответствовавшее, однако, исчезающей плотности материи; можно показать, что статические решения не являются устойчивыми [13].

Отметим ряд обстоятельств.

1. Вопрос о космологическом члене Λ , вопреки мнению многих авторов, нельзя считать решенным. Этот член должен быть введен в уравнения поля из общековариантных соображений. Для его исключения необходимы добавочные соображения типа тех, при помощи которых исключается член с массой фотона или нейтрино. В частности, нужно учесть инвариантность относительно калибровочных преобразований типа Гильберта — Лоренца для потенциалов гравитационного поля. (Отметим, что при переходе к слабому полю: $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, наряду с членом Неймана $\Lambda h_{\mu\nu}$, получаем еще неоднородный член.)

2. Нельзя признать состоятельными аргументы против космологического члена Λ , который отбрасывается на том основании, что при $\Lambda = 0$ фридмановское нестатическое решение уже обеспечивает возможность Вселенной с исчезающей плотностью. Однако фридмановский тип решений может иметь место и при $\Lambda \neq 0$.

3. Следует тщательно проанализировать эмпирические данные. Из эйнштейновских уравнений при $\Lambda \neq 0$ получаем следующие соотношения для фридмановской метрики:

$$\begin{aligned} 8\pi k\rho &= \frac{3(kc^2 + \dot{R}^2)}{R^2} - \Lambda, \\ 8\pi k\left(\frac{p}{c^2}\right) &= -\frac{2\dot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{kc^2}{R^2} - \Lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

Подставляя h_1 и принятое в настоящее время значение средней плотности $\rho = 3,1 \cdot 10^{-31}$ г/см³ [156], приходим, согласно Мак-Витти, как обычно, к пространству отрицательной кривизны типа Лобачевского ($k < 0$) и к отрицательному, но, по-видимому, конечному значению Λ ¹⁾. По всей видимости, уточнения значения плотности не смогут изменить вывода о гиперболическом характере общего пространственного фона нашей части Вселенной, находящейся

¹⁾ Сьяма указывает значение $\rho \sim 10^{-30} - 10^{-27}$; он считает спор о стационарной (см. ниже) или расширяющейся модели на основе экспериментальных данных еще не решенным [25].

в состоянии расширения. С другой стороны, эмпирическое значение ρ еще гораздо менее достоверно (не забывать учета нейтрино и гравитационного излучения [25]). Мы не касаемся здесь вопросов о состоянии сжатого вещества в начале расширения участка Вселенной, когда должны быть приняты в расчет ядерные реакции и превращения частиц, описываемые квантовой теорией. Эти обстоятельства не учитывались в приближенной классической метрике Фридмана, дававшей формально при экстраполяции к «начальному» моменту времени особую точку. Во всяком случае не может быть речи о сжатии материи в точку, так как даже сами нуклоны и другие элементарные частицы обладают размерами. Мы не будем также касаться дальнейшей эволюции расширяющегося участка Вселенной и возможного существования сжимающихся или пульсирующих участков Вселенной, антимиров, — участков с преимущественной концентрацией античастиц (возможно, соответствующих сжатию) или участков, в которых может иметь место антигравитация. Отрицательное значение Λ означает наличие универсальной силы, добавляемой к гравитационному притяжению.

Наряду с изотропными решениями данной проблемы в последнее время рассматривались случаи неоднородных, анизотропных, в частности вращающихся, Вселенных разного типа [157—160].

Отклонения Вселенной от пространственной изотропии могут проявляться в следующих шести пунктах: 1) в кривизне, 2) в деформациях, 3) в абсолютном вращении, 4) в поле гравитационных сил, 5) в вязкости, 6) в потоке энергии. Хекман и Шюкинг получили обобщение основного соотношения

$$\frac{1}{2} \dot{R}^2 = \frac{\kappa M}{R} + h + \frac{\lambda}{6R^2} - \frac{\alpha}{R^2}, \quad (33)$$

где член с α , связанный с вращением, приводит к нижней границе для R , вместо точечных особенностей однородной изотропной модели. Обсуждение этих моделей с эмпирической точки зрения преждевременно.

Как было показано Милном и Мак-Кри [161], решения нестатического типа могут быть выведены также из ньютоновской теории, если отбросить предположение о статической плотности. При этом случаи эллиптического, гиперболи-

ческого и параболического движения материи в ньютоновской теории соответствуют пространствам положительной, нулевой и отрицательной кривизны в теории Фридмана.

Кратко коснемся космологических схем, выходящих за рамки эйнштейновской теории. Некоторое внимание обратило на себя предложение Хойля и Бонди [162—164]—строить теорию стационарной расширяющейся Вселенной. Плотность материи должна быть постоянной, что приводит к требованию перманентного возникновения материи для компенсации уменьшения плотности при расширении. Независимо от общих возражений теория Хойля — Бонди, по-видимому, не выдерживает сравнения с астрономическими наблюдениями.

Исходя из соображений пятимерной метрики Калуца (см. [3, 5]), П. Йордан [165, 166] построил космологическую схему, в которой допускается изменение гравитационной константы со временем. Сравнение с наблюдениями различных решений йордановской космологии еще, конечно, не было проведено. Сама же идея изменения гравитационной константы со временем, например в виде $\kappa \sim 1/t$, заслуживает внимания (см. § 7).

Наконец, упомянем попытку Милна построить «кинематическую» космологию на основе требования одной лишь лоренц-инвариантности и представления о реальном разбегании материи. Однако при отбрасывании самих основ эйнштейновской теории гравитации и кривизны пространства схема Милна, заодно производящая ревизию основ электродинамики и других разделов физики и лежащая вне общепризнанных основ современной науки, в настоящее время перестала обсуждаться. Следствия милновской космологии [167, 168] находятся, по всей видимости, в прямом противоречии с астрономическими наблюдениями.

Таким образом, в области космологии в последние годы также был проведен ряд стимулирующих исследований.

§ 9. Геометризованная единая теория поля

Ввиду полной физической бесплодности всех «старых» вариантов 20-х годов геометризации электромагнетизма [5, 9], основанных на отходе от римановой геометрии, интерес к ним в науке практически исчез; лишь пятимерная

геометрия показала свою живучесть. С другой стороны, недавно в работах Уилера начал разрабатываться вариант геометризации материи, основанный на топологических обобщениях и учитывающий квантовую теорию элементарных частиц; несмотря на их незавершенный характер, эти работы заслуживают внимания.

Успех объяснения гравитационного поля при помощи римановой геометрии побудил Г. Вейля (1918 г.) попытаться геометрически истолковать электромагнитное поле, выходя за рамки римановой геометрии и вводя изменение длины отрезка при параллельном переносе:

$$d(\ln l) = \varphi_{\mu} dx^{\mu}$$

в зависимости от потенциала векторного поля φ_{μ} , отождествляемого с вектор-потенциалом.

Кроме преобразований координат, здесь следует учитывать калибровочные (градиентные) преобразования

$$\varphi'_{\mu} = \varphi_{\mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}}, \quad \varphi = \ln \lambda(x^{\mu}), \quad ds' = \lambda ds,$$

так что в теории должны фигурировать величины, инвариантные относительно обеих групп преобразований. Развивая эти идеи, Эддингтон и Скаутен поставили во главу угла закон аффинной связности при параллельном переносе и соответствующие, пока что произвольные, коэффициенты $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$.

$$\delta A^{\mu} = -\Gamma_{\nu\alpha}^{\mu} A^{\alpha} dx^{\nu}.$$

Для замкнутого пути вдоль контура $\Sigma^{\nu\sigma}$

$$\delta A^{\mu} = -\frac{1}{2} B_{\epsilon\nu\sigma}^{*\mu} A^{\epsilon} \Sigma^{\nu\sigma}.$$

Лишь в частных случаях отсюда получается геометрия Вейля и, наконец, геометрия Римана, в которой $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \{\mu\nu, \sigma\}$ — обычные коэффициенты Кристоффеля, симметричные по μ и ν и выраженные через производные $g_{\alpha\beta}$.

Эйнштейн сначала возражал против попытки Вейля, но затем сам принял участие в разработке многих вариантов единой теории («далекий параллелизм», несимметричная метрика и др.); пытаясь в некоторых случаях, как и ряд других авторов, не только геометризовать электромагнетизм, но даже вывести существование частиц из единой

теории (притом неквантованной). Последние годы Эйнштейн потратил много сил на разработку единой теории, основанной на несимметричной метрике [169 — 176]

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + g'_{\mu\nu}, \quad (34)$$

где

$$g_{\mu\nu}^0 = g_{\nu\mu}^0, \quad g'_{\mu\nu} = -g'_{\nu\mu},$$

пытаясь связать антисимметричную часть с электромагнитным полем. Система уравнений поля распадается, однако, на обычную эйнштейновскую и максвелловскую части только в линейном приближении.

Обобщенное кручение наряду или вместо кривизны ввели Картан [177], Тоннела [178], А. Е. Левашов [179, 180] и другие. В. И. Родичев [181] рассмотрел в пространстве с кручением параллельный перенос спинора, аналогично теории ковариантного дифференцирования спиноров в римановой геометрии (см. § 11) и получил отсюда предложенный нами нелинейный добавок в уравнении Дирака. Шредингер [182] пытался геометризовать наряду с электромагнитным и мезонное поле.

Калуца (1921 г.) ввел пять координат и интервал в пятимерном римановом пространстве [183]:

$$\begin{aligned} d\sigma &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 5), \\ d\sigma &= ds^2 - \alpha (d\varphi)^2, \quad d\varphi = dx^5 + A_\nu dx^\nu, \end{aligned} \quad (35)$$

где A_ν — вектор-потенциал электромагнитного поля, $\alpha = e^2/m^2c^4$. Тогда довольно поразительным образом оказывается, что уравнения Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 5) \quad (36)$$

в пятимерном пространстве в точности распадаются на эйнштейновские уравнения того же вида в четырехмерном пространстве и максвелловские уравнения. Но реальный успех пятимерия связан с установлением квантового релятивистского уравнения, описывающего, как позднее выяснилось, скалярные или псевдоскалярные частицы, т. е. π - и K -мезоны, как волнового уравнения в пятимерном пространстве, вместе с дополнительным условием периодичности по пятой координате (О. Клейн, 1926)

$$\square \square \varphi = \square \varphi - k_0^2 \varphi = 0,$$

$$\psi(x^\mu) = \psi(x^1, \dots, x^4) \exp\{ik_0 x^5\}. \quad (37)$$

Веблен предложил проективную формулировку пятимерия, в которой пять однородных координат вводятся в четырехмерном пространстве. В развитии пятимерной теории приняло участие большое число физиков (Эйнштейн, Бергман, Г. А. Мандель, Ю. Б. Румер, В. А. Фок, Йордан, Тири, Лишнеровиц, Пайс, Мёллер и Розенфельд [184], В. Паули и другие). Редкий теоретик (не исключая автора этих строк) мог в свое время пройти равнодушно мимо этой изящной схемы. В. И. Родичев интерпретировал пятую координату как собственное время и привлек пятимерие для определения спектра масс бозонов (см. [192]).

Под влиянием пятимерного формализма, а также идеи о возможности уменьшения гравитационной константы с течением времени Йордан развил теорию, которой можно придать в конце концов четырехмерную форму [17]:

$$\delta \int \kappa \left(R - \zeta \frac{(\partial \kappa / \partial x^\mu)^2}{\kappa^2} \right) \sqrt{-g} d^4 x = 0, \quad (38)$$

где ζ — новая безразмерная константа. В теории Йордана было найдено обобщение решения Шварцшильда и фридмановской космологической метрики, в котором $R \sim t$, $\varrho \sim t$, $\kappa \sim t^{-1}$. Важно отметить, что интересный вопрос об уменьшении κ может быть в конце концов проверен на ряде геологических и астрономических явлений (см. § 7).

Остановимся на идеях Уилера [185], развивавшего в ряде работ «геометродинамику» с целью чисто геометрического описания гравитации, электромагнетизма, зарядов и «геонов» (сначала в рамках некантованной теории). Отправным пунктом явился вывод Райнича [186], что комбинация эйнштейновских и максвелловских уравнений допускает чисто геометрическую трактовку. Наличие электромагнитного поля оставляет столь характерные «следы» на метрике пространства, что обратно можно воспроизвести это поле по чисто геометрическим величинам. В общем случае тензор поля будет иметь вид

$$F_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} \cos \alpha + \xi_{\mu\nu}^* \sin \alpha,$$

где $\xi_{\mu\nu}$ является функциями точки, которые могут быть определены, если известна кривизна. Поэтому речь идет

относительно «уже объединенной теории поля». В дальнейшем в рамках классической геометродинамики рассматриваются взаимодействия без введения константы связи. Далее устанавливаются — по терминологии Уилера — теория «уравнений движения без уравнений движений», теория «заряда без заряда» и т. д.

Фундаментальное место в геометродинамике занимают «геоны», представляющие собой огромные концентрации электромагнитного поля, сдерживаемого собственными, порожденными ими гравитационными полями. Были рассмотрены также нейтринные и чисто гравитационные геоны [187—190], образованные гравитационными волнами. Геоны связаны с некоторыми новыми решениями эйнштейновских уравнений, которые до сих пор были получены приближенно. Геоны оказываются метастабильными (хотя и долгоживущими) образованиями благодаря некоторой утечке различных излучений. Классические геоны, масса которых, как оказывается, должна значительно превосходить массы галактик, не имеют ничего общего с астрономическими системами; с другой стороны, недавно появилось предложение включить модифицированные, как-то проквантованные геоны в систему элементарных частиц.

Характерным для геометродинамики является широкое использование топологии. Новая трактовка метрики Шварцшильда Финкельштейном, Фрондэлом, Крускалом (см. § 2), по мнению Уилера, с неизбежностью должна привести к неевклидовой топологии. Рассматриваются различные участки евклидова пространства, соединенные «рукавом», или «червяком». Подобный «рукав», по мнению Уилера, пригоден для трактовки двух тел. Если в рукаве имеется поток электромагнитного поля, то его концы могут быть отождествлены с двумя противоположными зарядами [236].

Отметим в данной связи, что в квантовой геометродинамике (см. § 11) существенную роль играют флуктуации метрики. Наряду с вакуумными флуктуациями электромагнитного, электронно-позитронного, а также слабого гравитационного поля рассматриваются флуктуации метрики [191], ведущие к принципиально новым следствиям типа изменения сигнатуры, появления многосвязных областей и других топологических изменений. Подобные флуктуации достигают значительной величины на расстояниях порядка

$$l^* \sim (h\kappa/c^3)^{1/2} \sim 10^{-33} [14, 191].$$

Оставляя сейчас в стороне геометродинамическую интерпретацию перестановочных соотношений, отметим лишь, что при использовании фейнмановских интегралов по траекториям также подчеркивается необходимость учета топологии (см. § 10). Наиболее очевидным препятствием на пути геометродинамической трактовки системы всех элементарных частиц является невозможность включить пока что в эту схему фермионы, т. е. нейтрино, электроны, нуклоны и другие спинорные частицы.

С другой стороны, на наш взгляд, наиболее перспективная современная попытка объединенной трактовки материи, связанная с использованием нелинейного обобщения дираковского уравнения, а также, возможно, индефинитной метрики в гильбертовом пространстве, позволяет предварительным образом построить волновые функции различных элементарных частиц и вывести значения электрического заряда и других констант связи¹⁾. Однако при помощи нелинейной спинорной теории, по-видимому, пока что не удастся получить компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ [199], а вопрос о гравитонах и слабом гравитационном поле остается открытым.

Таким образом, с этой точки зрения физическая реальность является, по-видимому, дуалистической и связанной с искривленным пространством-временем (включая продольное гравитационное поле) плюс «обычная» материя (включая, возможно, гравитоны), сводимая к фундаментальному спинорному нелинейному полю.

§ 10. Квантовая гравидинамика

Переходя к квантовой гравидинамике укажем, что вопросы квантования нелинейного гравитационного поля до сих пор еще не получили завершения, хотя квантование

¹⁾ Отправным пунктом такой теории является идея слияния де-Бройля. Нелинейные обобщения рассматривались в наших работах [192—196]; индефинитная метрика Дирака была применена в данной связи Гейзенбергом, который с сотрудниками наиболее далеко продвинулся на пути осуществления программы единой теории. (Работы Гейзенберга и его сотрудников см. в сборнике [198], где читатель найдет список литературы.)

слабого поля (линейное приближение) было проделано давно и привело к ряду интересных результатов.

Другой класс проблем связан с взаимодействием элементарных частиц с гравитацией. Хотя на этом пути также достигнуты известные успехи, до сих пор остается, например, открытым вопрос о роли гравитации в структуре элементарных частиц.

Для квантования гравитационного поля были предложены в основном следующие методы:

1. Квантование слабого (линейного) поля «старыми» методами (до создания современной теории вакуума) [200—203].

2. Квантование в представлении взаимодействия при помощи методов Швингера — Фейнмана — Дайсона, характерных для теории вакуума (Гупта, статьи 12 и 13 настоящего сборника).

Для развития квантовой теории гравитации последних лет характерными являются три направления, в которых делаются попытки избежать линейного приближения или разложения в ряд.

3. Квантование по методу Фейнмана образования «сумм по истории процесса» [204, 205].

4. Обобщенный канонический формализм [206—210]. (см. также Дирак, статьи 3 и 4 настоящего сборника, и Бергман — Комар, статья 14 настоящего сборника).

5. Квантование в ковариантном виде без выделения времени [210].

Отметим, что в принципе в квантовой теории гравитации можно будет применить метод получения перестановочных соотношений, который был предложен для нелинейной спинорной теории [213, 215].

Квантование слабого поля. Слабое поле тяготения, описываемое линейным уравнением, может быть проквантовано одним из методов, применяемых в современной теории поля. Например, применяя «старые» методы Дирака — Йордана — Гейзенберга — Паули, введем независимые поперечно-поперечные компоненты и получим лагранжиан, который в случае распространения вдоль оси x^1 будет иметь простой вид

$$L = \frac{c^4}{16\pi k} \sum_{\mu, \nu=2, 3} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^1} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (39)$$

Разлагая $h_{\mu\nu}$ в ряд Фурье, получаем бозевские правила перестановки для коэффициентов Фурье, а также трех- и четырехмерные коммутаторы, выражаемые через сингулярную функцию Паули D .

Значение спина гравитона ($s=2$) можно получить как из подсчета независимых компонент поля, так и из общих формул для спина [201]. Уравнение слабого гравитационного поля совпадает с уравнением для частиц спина 2 и может быть, в частности, получено методом «слияния» Л. де-Бройля [211], в котором за основу берутся спинорные уравнения, описывающие частицы спина $1/2$.

Гупта (статьи 12 и 13 настоящего сборника) применил формализм представления взаимодействия. Метрический тензор, символы Кристоффеля и т. д. разлагаются по степеням гравитационной постоянной; полагая

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - \kappa\gamma^{\mu\nu}, \quad (40)$$

получаем, например,

$$g = -1 + \kappa\gamma + \frac{1}{2} \kappa^2 (\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu} - \gamma\gamma) + \dots \quad (41)$$

Существенно отметить также применение индефинитной метрики в пространстве амплитуд состояния. В линейном приближении получают коммутаторы для потенциалов гравитационного поля при помощи причинных и других сингулярных функций. Например, имеем [212, 213]

$$[\gamma^{\lambda\rho}(x), \gamma^{\sigma\tau}(y)] = -i\delta^{\sigma\tau, \lambda\rho} D_0^c(x-y). \quad (42)$$

Трудности, стоящие на пути квантования нелинейного поля, обсуждаются в работе Бергмана и Комара (статья 14 настоящего сборника).

Уилер и Мизнер трактуют проблему квантования гравитации по методу Фейнмана, в котором основную роль играет выражение амплитуды преобразования

$$(\sigma_1 | \sigma_2) = \frac{1}{N} \int \exp \left[\frac{1}{i\hbar c\kappa} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} g^{1/2} R d^4x \right] \delta[g],$$

где R — скалярная кривизна, N — нормировочный множитель, а символом $\int \delta[g]$ обозначен функциональный инте-

грал по различным метрикам (сумма по геометрическим «историям») [24].

Де-Витт пытается строить ковариантную форму скобок Пуассона и коммутаторов, не стремясь к явному выделению времени в работах, развивающих канонический формализм (см. § 3 и 5). На пути построения квантовой теории гравитации наряду с нелинейностью (приводящей к трудностям вследствие проблемы упорядочения множителей) имеется трудность, связанная с дополнительными условиями, обязательными ковариантности. В качестве скобок Пуассона между двумя инвариантами A и B в классической теории устанавливается выражение

$$(A, B) = ck \int d^4x \int d^4z \frac{\delta A}{\delta g_{\mu\nu}} G_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\delta B}{\delta g_{\alpha\beta}}, \quad (43)$$

где функция распространения комбинируется из запаздывающей и опережающей частей:

$$G_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv G_{\mu\nu\alpha\beta}^+ - G_{\mu\nu\alpha\beta}^-$$

и удовлетворяет уравнению

$$g^{\sigma\tau} G_{\mu\nu\alpha\beta, \sigma\tau} - 2R_{\mu\nu}^{\sigma\tau} G_{\sigma\tau\alpha\beta} = 0.$$

Скобки Пуассона удовлетворяют тождеству Пуассона — Якоби, соотношению $(A, BC) = (A, B)C + B(A, C)$ и другим соотношениям. При переходе к квантовой теории возникает трудность с установлением порядка множителей. В качестве коммутатора в конце концов предлагается выражение

$$[A, B] = i\hbar ck \int d^4x \int d^4z \frac{\delta A}{\delta g_{\mu\nu}} \cdot G_{\mu\nu\alpha\beta} \cdot \frac{\delta B}{\delta g_{\alpha\beta}}, \quad (44)$$

где точки обозначают некоторым образом определенное умножение. Указывается, что нелинейные вариационные уравнения для функций Грина могут быть проинтегрированы путем итераций, начиная с их некантового значения, соответствующего плоскому пространству-времени. Таким образом, несмотря на развитие ряда интересных методов, квантовая теория гравитации остается далеко еще не законченной.

§ 11. Квантовая теория взаимодействия элементарных частиц с гравитацией

Как известно, взаимодействие частиц с гравитационным полем включается путем замены в уравнениях для этих частиц обычных производных ковариантными. Тем самым решается задача о включении гравитации в уравнения Максвелла, Клейна — Гордона, Прокá и уравнения других тензорных полей, описывающие бозоны. Однако, в случае взаимодействия фермионов, описываемых спинорами, с гравитацией возникают затруднения. Важная для дальнейшего развития теории задача определения параллельного переноса спинора и установления взаимодействия спиноров с гравитационным полем была решена в 1929 г. (В. А. Фок и Д. Иваненко [216, 217], Г. Вейль [218]). Впоследствии этот вопрос рассматривался рядом других авторов [219 — 224] и, в частности, Брилем и Уилером (см. статью 15 настоящего сборника). Изменение ортогональных компонент спинора связано с бесконечно малыми сдвигами по осям ортогонального репера (тетрапода) и задается в виде

$$\delta\psi = \sum_l e_l C_l ds^l \psi, \quad (45)$$

где коэффициенты C_l определяются путем сравнения с приращением вектора

$$\delta A_i = \delta\psi^* \alpha_i \psi + \psi^* \alpha_i \delta\psi,$$

которое выражается через коэффициенты вращения Риччи γ_{ikl} . Отсюда для определения C_l имеем

$$C_l^\dagger \alpha_i + \alpha_i C_l = \sum_{k=1}^4 e_k \gamma_{ikl} \alpha_k,$$

$$C_l = g_l + i\Phi_l,$$

где

$$g_l = \frac{1}{4} \sum \alpha_m \alpha_k e_k \gamma_{mkl}.$$

Здесь e_k — значки Эйзенхарта, равные ± 1 , а величина Φ_l может быть интерпретирована как вектор-потенциал электромагнитного поля. (О включении других дополнительных

членов, обязанных взаимодействию спинора с псевдоскалярным и другими бозонными полями см. [199].)

Таким образом, общековариантное уравнение Дирака примет вид

$$-i\hbar \sum_{k=1}^4 e_k \alpha_k \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \right)_h - C_k \psi \right) + m c \alpha_0 \psi = 0, \quad (46)$$

или в криволинейных координатах

$$\gamma^\sigma \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\sigma} - \Gamma_\sigma \psi \right) - i k_0 \alpha_0 \psi = 0, \quad (47)$$

где наши коэффициенты Γ_σ являются спинорными аналогами коэффициентов Кристоффеля

$$\Gamma_\sigma = \sum_k e_k h_{k, \sigma} C_k, \quad \gamma^\sigma = \sum_k e_k \alpha_k h_k^\sigma; \quad (48)$$

здесь h_k^ν , $h_{\nu k}$ — соответственно параметры и моменты, характеризующие оси репера.

Имея выражение взаимодействия любых частиц с гравитационным полем и производя вторичное квантование всех полей, включая гравитацию, в принципе можно решить любую задачу рассеяния, взаимодействия, рождения и аннигиляции частиц, поляризации вакуума и т. д. на уровне аналогичных задач современной квантовой теории поля (например, квантовой электродинамики, квантовой мезодинамики или теории полей, связанных слабой фермиевской связью).

Ввиду незавершенного характера квантовой гравитации и специфической связи гравитации с геометрией пространства-времени разработка квантовых эффектов с участием гравитации еще, конечно, не достигла степени совершенства квантовой мезодинамики или теории слабой связи, и тем более электродинамики. Однако, несмотря на наличие общих глубоких трудностей, присущих квантовой теории поля и связанных с расходимостями полевой массы, полевых зарядов и других констант связи, включение гравитации, которое при изолированном рассмотрении последней приводило бы к вполне аналогичным трудностям, напротив, может оказаться способным даже компенсировать расходимости электродинамики и т. д. Не вдаваясь в детали,

укажем в этой связи на различные варианты гипотезы дискретного или квантованного пространства-времени, которое, возможно, будет содействовать устранению этих трудностей [236—241, 192].

Вопросы измеримости гравитационного поля были рассмотрены по методу Бора — Розенфельда (см. [226]).

Нетрудно вывести формулу излучения гравитонов, вполне аналогичную классическому эйнштейновскому выражению¹⁾. Аналогично квантовому выводу закона Кулона был получен ньютоновский закон тяготения, обязанный, наглядно говоря, обмену квантами продольного гравитационного поля [201]. Однако аналогично электродинамике удобно оттрансформировать продольную часть поля и рассматривать лишь истинные гравитоны.

Интересной задачей квантовой гравитодинамики является расчет взаимных превращений обычной материи и гравитационного поля, в частности электрон-позитронных пар и других пар частиц — античастиц в гравитоны. Высказанная в свое время нами гипотеза о возможности подобных трансмутаций, так же как и обратных процессов рождения частиц гравитационным полем, возможно будет иметь далеко идущие космологические следствия [227, 228]. Эти расчеты были распространены на случай превращения фотонов в гравитоны [229], а также на случай превращения пар нейтрино и антинейтрино в гравитоны [230] (см. также статью 15 настоящего сборника). Эффективное сечение превращения пары частиц в гравитоны (строго говоря, в случае пары скалярных частиц) оказывается равным [203]

$$\sigma = \frac{24\pi r_g^2 c}{v} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2.$$

Эта формула становится наглядной из сравнения с формулой Дирака для превращения электрона — позитрона в фотоны,

¹⁾ К. П. Станюкович [242—244] применяет формулу для гравитационного излучения к гипотетическому излучению, испускаемому элементарными частицами (например, нуклонами), подставляя соответственные размеры и правдоподобные частоты. В его интерпретации, развивающей гидродинамические идеи Бьеркнеса-Жуковского, интерференция подобных излучений может привести к аналогу закона Ньютона.

основной член которой имеет вид

$$\sigma_e \sim \frac{r_e^2 c}{v} \left(\frac{mc^2}{E} \right)^2.$$

В формуле для превращений пары в гравитоны вместо электрического радиуса электрона $r_e = e^2/mc^2$ стоит гравитационный радиус $r_g = \kappa m/c^2$, а также проявляется квадрупольный характер излучения, приводящий к дополнительному фактору $(E/mc^2)^4$; ввиду малости масс и константы тяготения, т. е. малости гравитационного заряда $\sqrt{\kappa m}$, вероятность гравитационных трансмутаций крайне мала. Применяя метод Швингера, можно получить [193] выражение для вакуумного вклада в лагранжиан, обязанного поляризации вакуума скалярных частиц гравитационным полем. Учитывая, что

$$\Delta L = \frac{1}{2} \text{Sp} \ln \sqrt{-g} S = -\frac{1}{2} \text{Sp} \ln G + \text{const}, \quad (49)$$

где S — соответствующая функция Грина, получаем

$$\begin{aligned} \Delta L = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \tau^{-1} d\tau \int \exp\{-ikx\} \times \\ \times \exp\{i\sqrt{-g} S\tau\} \exp\{ikx\} dx dk. \end{aligned} \quad (50)$$

Взяв разложение в случае слабого поля, получим прежде всего члены ренормировки. Указанное выражение может быть использовано для подсчета гравитационных трансмутаций и других эффектов, связанных с поляризацией вакуума. Рядом авторов было рассчитано много случаев рассеяния фотонов, мезонов полем Шварцшильда, рассеяния гравитонов, нелинейное рассеяние фотонов фотонами через гравитоны и т. д. (см., например, [229 — 231]).

Что касается весьма важного вопроса устранения или ослабления расходимостей в полевой массе и других величинах, вычисленных методами квантовой теории поля, то эти исследования находятся лишь в начальной стадии. В данной связи обратим внимание на результаты Арновитта — Дезера — Мизнера [232], показавших, что при введении затравочной массы полевая гравитационная, а также электромагнитная массы, при учете гравитации в классической теории, оказываются конечными.

Классический подсчет собственной гравитационной энергии частицы дает для случая чистой гравитации при полной массе

$$m = m_0 - \frac{1}{2} \frac{\kappa m^2}{r},$$

где m_0 — затравочная масса, распределенная в сфере радиуса r , выражение

$$m = \kappa^{-1} \{ -r + (r^2 + 2\kappa m_0 r)^{1/2} \},$$

откуда следует, что m при $r \rightarrow 0$ обращается в нуль.

Если без учета гравитации масса частицы равнялась

$$m_0 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi r},$$

то с учетом гравитации получим

$$m = \kappa^{-1} \left\{ -r + \left[r^2 + 2m_0 r \kappa + \left(\frac{e^2}{4\pi} \right) \kappa \right]^{1/2} \right\}.$$

В пределе $r \rightarrow 0$ имеем

$$m = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^{1/2} \kappa^{-1/2}.$$

Полученный результат эквивалентен введению обрезającego радиуса в кулоновском интеграле:

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^{1/2} \kappa^{1/2}.$$

Итак, классическая электростатическая собственная энергия, ренормированная при помощи гравитации, оказывается конечной! При обычной трактовке решений Шварцшильда или Нордстрема затравочная масса не вводилась, что и не позволяло подойти корректно к проблеме собственной энергии. Получение конечной классической гравитационной электромагнитной массы дает некоторую надежду на дальнейшее ослабление известных расходимостей квантовой теории поля при учете гравитации.

Конечно, отсюда еще далеко до устранения расходимостей в квантовой теории при помощи учета гравитации. Некоторые надежды на устранение квантовых расходимостей дают предварительные исследования И. З. Фишера [233], Мёллера [234] и Кимуры [235].

Отметим в заключение, что гравитационное поле можно понимать в духе Сакураи [245], сопоставив его лоренцовым преобразованиям с переменными коэффициентами в различных точках 4-пространства.

Таким образом, в квантовой гравитации в последнее время было произведено немало интересных, стимулирующих и перспективных исследований, которые, по всей видимости, могут сыграть немаловажную роль при построении теории элементарных частиц, общей теории тяготения и, возможно, даже космологии.

Д. Иваненко

ЛИТЕРАТУРА

1. «Принцип относительности (Сборник работ классиков релятивизма)», М.—Л., 1935.
2. Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
3. Паули В., Теория относительности, М.—Л., 1947.
4. Weyl H., Raum, Zeit, Materie, 5 Aufl., Berlin, 1923.
5. Эддингтон А. С., Теория относительности, М.—Л., 1934.
6. Лауе М., Die Relativitätstheorie, 4 Aufl., 1956.
7. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, London — New York, 1956.
8. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М., 1955.
9. Lichnerowicz A., Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Paris, 1955.
10. Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.
11. Levi-Civita T., The absolute differential calculus, London, 1927.
12. Möller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, 3 изд., М., 1960.
14. Wheeler J. A., Gravitation, Geometry, Neutrino, Rendiconti Scuola Intern. Fys. «Enrico Fermi», Corso XI, 67 (1960).
15. Schrödinger E., Space — time — structure, Cambridge, 1950.
16. Schrödinger E., Expanding Universes, Cambridge, 1956.
17. Jordan P., Schwerkraft und Weltall, 2 Aufl., Braunschweig, 1955.
18. Heckmann O., Theorien der Kosmologie, Berlin, 1942.
19. Synge J. L., Relativity: The Special Theory, Amsterdam, 1956.; Relativity: The General Theory, Amsterdam, 1960.

20. McVittie G. C., *General Relativity and Cosmology*, London, 1956.
21. Infeld L., Plebański J., *Motion and Relativity*, New York—London—Paris—Warszawa, 1960.
22. Bondi H., *Cosmology*, Cambridge, 1952.
23. Jubilee of Relativity Theory, *Helv. Phys. Acta*, Suppl. IV, (1956).
24. Conference on the Role of Gravitation in Physics, Held at the University of North Carolina, Chapel Hill, January 18—23, 1957. *Rev. Mod. Phys.* **29**, № 3 (1957).
25. Colloque International sur Gravitation et Relativité Generale. Royaumont—Paris, 1959; в печати.

§ 1

26. Cartan E., *Journ. Math. pures et appl.*, **1**, 141 (1922).
27. Stephenson G., *Nuovo Cimento*, **9**, 263 (1958).
28. Иваненко Д., *Изв. АН СССР* (1929).
29. Фок В. А., Иваненко Д., *Zs. f. Phys.*, **54**, 798 (1929).
30. Mima *et al.*, *Journ. Sci. Hiroshiman Univ.* (ряд статей начиная с 1935 г.).
31. Witten L., *Phys. Rev.*, **113**, 357 (1959).
32. Penrose R., *Proc. Cambr. Phys. Soc.*, **55**, 137 (1959).
33. Penrose R., *Technical Note 60—114*, King's College, University of London, 1960.

§ 2

34. Finkelstein D., *Phys. Rev.*, **110**, 965 (1958).
35. Fronsdal C., *Phys. Rev.*, **116**, 778 (1959).
36. Kruskal, *Thesis*, Princeton, 1959.
- 36а. Новиков И. Д., *Астроном. журн.*, **38**, № 2 (1961).
37. Brill D., Graves J. C., *Preprint*, Princeton, 1960.
38. Kasner E., *Am. Journ. Math.*, **43**, 126 (1921).
39. Einstein A., Rosen N., *Journ. Frankl. Inst.*, **223**, 43 (1937).
40. Harrison B. K., *Phys. Rev.*, **116**, 1285 (1959).

§ 3

41. Møller C., *Ann. of Phys.*, **4**, 347 (1958).
42. Møller C., *Ann. of Phys.*, **12**, 118 (1961).
43. Møller C., в сборнике «*Max-Planck Festschrift*», Berlin, 1958, S. 139.
44. Мицкевич Н. В., *Ann. d. Phys.*, **1**, 319 (1958).
45. Иваненко Д., Мицкевич Н. В., *ЖЭТФ*, **37**, 868 (1959).
46. Komar A., *Phys. Rev.*, **113**, 934 (1959).
47. Goldberg J., *Phys. Rev.*, **111**, 315 (1958).

48. Fletcher J., Preprint, Princeton, 1960.
49. Dirac P. A. M., *Canad. Journ. Math.*, **2**, 129 (1950).
50. Dirac P. A. M., *Phys. Rev. Lett.*, **2**, 368 (1959).
51. Arnowitt R., Deser S., Misner C., *Phys. Rev.*, **116**, 1322 (1959).
52. Arnowitt R., Deser S., Misner C., *Phys. Rev.* **117**, 1595 (1960); **118**, 1100 (1960).
53. Arnowitt R., Deser S., *Phys. Rev.*, **113**, 745 (1959).
54. Arnowitt R., Deser S., Misner C., *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 375 (1960).
55. Bergmann P., *Phys. Rev.*, **112**, 287 (1958).
56. Bel L., *Compt. Rend.*, **247**, 1094 (1958); **248**, 1297, 2561, (1959).
57. Robinson J., Preprint.
58. Géhéniau J., *Compt. Rend.*, **244**, 723 (1957).
59. Møller C., *Kgl. Norske vid. selskabs. forhandl.*, **31**, № 13 (I); № 14 (II) (1958).
60. Souriau J. M., *Compt. Rend.*, **245**, 958 (1957).
61. Trautman A., *Bull. Acad. Sci. Pol.*, **4**, 665 (1956).
62. Trautman A., *Bull. Acad. Sci. Pol.*, **5**, 721 (1957).
63. Freud P., *Ann. Math.*, **40**, 417 (1939).
64. Зельманов А. Л., *ДАН СССР*, **107**, № 6 (1956).
65. Новиков И. Д., *Вестник МГУ*, № 2 (1960).

§ 4

66. Einstein A., Hoffman B., Infeld L., *Ann. of Math.*, **39**, 66 (1938).
67. Einstein A., Infeld L., *Ann. of Math.*, **41**, 455 (1940).
68. Einstein A., Infeld L., *Canad. Journ. Math.*, **1**, 209 (1949).
69. Infeld L., *Acta Phys. Pol.*, **13**, 187 (1954).
70. Infeld L., Schild, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 408 (1949).
71. Scheidegger A., *Rev. Mod. Phys.*, **25**, 451 (1953).
72. Plebanski J., Bazanski S., *Acta Phys. Pol.*, в печати.
73. Plebanski J., Bertotti B., Preprint, Princeton, 1960.
74. Bertotti B., *Nuovo Cimento*, **4**, 898 (1956).
75. Фок В. А., *ЖЭТФ*, **9**, 375 (1939).
76. Петрова Н., *ЖЭТФ*, **19**, 989 (1949).
77. Кашкаров В. П., *ЖЭТФ*, **27**, 563 (1954).
78. Фихтенгольц И. Г., *ЖЭТФ*, **20**, 233 (1950).
79. Фихтенгольц И. Г., *ЖЭТФ*, **39**, 809 (1960).
80. Фок В. А., *ЖЭТФ*, **38**, 108 (1960).
81. Parapetrou A., *Proc. Phys. Soc.*, **A64**, 57 (1951).
82. Parapetrou A., *Proc. Phys. Soc.*, **A64**, 302 (1951).
83. Köhler M., *Zs. f. Phys.*, **134**, 286 (1953).
84. Пугачев Я. И., Широков М. Ф., *ЖЭТФ*, **24**, 375 (1953).

85. Гутман И. И., ЖЭТФ, **37**, 1639 (1959).
86. Mathisson M., Acta Phys. Pol., **6**, 163 (1937).
87. Lubanski J., Acta Phys. Pol., **6**, 356 (1937).
88. Weysenhoff J., Raabe A., Acta Phys. Pol., **9**, 19 (1947).
89. Weysenhoff J., в сборнике «Max-Planck Festschrift», Berlin, 1958.
90. Hu Ning, Proc. Roy. Irish. Acad., **51A**, 87 (1947).
91. Trautman A., Bull. Acad. Sci., Polon. **6**, 627 (1958).
92. De-Witt B., Brehme R., Inst. Field Phys., Publ., Preprint, Chapel-Hill, 1959.

§ 5

93. Fourés-Bruhat Y., Acta Math., **88**, 141 (1952).
94. Fourés-Bruhat Y., Journ. Rat. Mech. Anal., **5**, 951 (1956).
95. Франкль Ф. И., Труды физ.-мат. фак-та Киргизского Государственного университета, вып. 3, 119 (1956).
96. Вонног W., Phil. Trans. Roy. Soc., **A251**, 233 (1959).
97. Brill D., Ann. of Phys., **7**, 466 (1959).
98. Brill D., Thesis, Princeton, 1960.
99. Bondi H., Nature, **186**, 535 (1960).
100. Иваненко Д., Бродский А., Гинсбург Л., ДАН СССР, **80**, 565 (1951).
101. Navas P., Phys. Rev., **108**, 1351 (1957).
102. Boardman J., Bergmann P., Phys. Rev., **115**, 1318 (1959).
103. Peres A., Phys. Rev. Lett., **3**, 571 (1959).
104. Компанеец А. С., ЖЭТФ, **34**, 953 (1958).
105. Bondi H., Nature, **179**, 1072 (1957).
106. Vonnog W., Nature, **181**, 1196 (1958).
107. Treder H., Ann. d. Phys., **2**, 225 (1958).
108. Trautman A., Bull. Acad. Sci. Polon., **6**, 407 (1958).
109. Robinson J., Trautman A., Phys. Rev. Lett., **4**, 431 (1960).
110. Peres A., Nuovo Cimento, **15**, 351 (1960).
111. Marder L., Proc. Roy. Soc., **A244**, 524 (1958); **A246**, 133 (1958).
112. Pirani F., Proc. Roy. Soc., **A252**, 96 (1959).
113. Bondi H., Pirani F., Robinson J., Proc. Roy. Soc., **251**, 519 (1959).
114. Trautman A., Bull. Acad. Sci., Polon. **5**, 273 (1957).
115. Geissler D., Treder H., Tensor, **8**, 165 (1958).

§ 6

116. Петров А. З., ДАН СССР, **81**, 149 (1951).
117. Петров А. З., Ученые записки КГУ (Казань) **114**, 55 (1954).

118. Петров А. З., ДАН СССР, **105**, 905 (1955).
 119. Петров А. З., УМН, **11**, 70 (1956).
 120. Петров А. З., Труды III математич. съезда, т. 2, 1956
 121. Géhéniаu J., Bull. As., Roy de Belgique, **47**, 252 (1956).
 122. Géhéniаu J., Compt. Rend., **244**, 723 (1957).
 123. Debever, Compt. Rend., **249**, 1324 (1959).
 124. Kundt W., Dissertation, Hamburg, 1958.
 125. Schell J., Preprint, 1960.
 126. Вавилов Б. Т., Изв. ВУЗ, **2**, 73 (1959).
 127. Петров А. З., Затворников С. В., Ученые записки КГУ, **117**, 9, 35 (1957).
 128. Петров А. З., Изв. ВУЗ, **4**, № 5 (1960).
 129. Петров А. З., Изв. ВУЗ, **5**, № 1 (1961).
 130. Петров А. З., Пространства Эйнштейна, М., 1961.
 131. Hlavaty W., Journ. Math., Mech., **8**, 285, 597 (1959); **9**, 89, 453 (1960).

§ 7

132. Shroedinger E., Nuovo Cimento, **1**, 63 (1955).
 133. St. John C., Astrophys. Journ., **67**, 195 (1928).
 134. Adam M., Monthly Not. Roy Astron. Soc., **118**, 61 (1958).
 135. Shroeter E., Zs. Astrophys., **41**, 141 (1957).
 136. Schwarzschild M., Astrophys. Journ., **130**, 345 (1958).
 137. Adams W., Proc. Nat. Acad. Sci., **11**, 382 (1925).
 138. Moore J., Publ. Astron. Soc. Pacific, **40**, 229 (1928).
 139. Popper D., Astrophys. Journ., **120**, 316 (1954).
 140. Cranshaw, Schiffer, Whitehead, Phys. Rev. Lett., **4**, 163 (1960).
 141. Mössbauer R., Zs. f. Phys., **151**, 124 (1958); УФН, **72**, 658 (1960); Шапиро Ф. Л., УФН, **72**, 685 (1960); Паунд Р. В., УФН, **72**, 673 (1960).
 142. Михайлов А. А., Астроном. журнал, **33**, 912 (1956); Monthly Not., **119**, 593 (1959).
 143. Brill D., Bertotti V., Krotkov R., Experiments on Gravitation, Preprint, 1960.
 143а. Heezen В. С., Sci. American **203**, 98 (1960). Сагитов М. У., Иваненко Д., Вестник МГУ, № 6 (1961).
 144. Schiff L., Phys. Rev. Lett., **4**, 215 (1960).
 145. Cossoni G., Salpeter E., Nuovo Cimento, **10**, 646 (1958).
 146. Dirac P. A. M., Nature, **139**, 323 (1937); Proc. Roy. Soc. **A165**, 199 (1938).
 147. Segre E. Proc. Intern. Conf. on Mesons and Recently discovered Particles, Padova—Venezia, 1957; Александров Ю. А., Андреев В. Н., Бондаренко И. И., ЖЭТФ, **35**, 1305 (1958); Оконов Э. О., Подгорецкий М. И., Хрусталева О. А., Препринт ОИЯИ, Д-647 (1961).

148. Dicke R., Science, **129**, 621 (1959).
149. Брагинский В. А., Рукман Г. И., Иваненко Д., ЖЭТФ, **38**, 1005 (1960).
150. Eötvös, Peкар, Fekete, Ann. d. Phys., **68**, 11 (1922).
Eötvös R., Gesammelte Arbeiten, Budapest, 1953.
151. Majorana Q., Phil. Mag., **39**, 488 (1920); C. R. **173**, 478 (1921).
Tomashuk R., Nature, **175**, 937 (1955).
- 151a. Понтекорво Б., Смородинский Я., ЖЭТФ, **41**, № 1 (1961).
- 151b. Гинзбург В. Л., УФН **63**, 119 (1957)

§ 8

152. McVittie, Handbuch der Physik, Bd. 53, Berlin, 1959, S. 445.
153. Sandage A., Astrophys. Journ., **127**, 513 (1958).
154. Baum W., Trans. Intern. Astron. Union, **10**, 437 (1960).
155. Friedman A., Zs. f. Phys., **10**, 377 (1922).
156. Oort J., Distribution of Galaxies and Density in the Universe (Solvay Conf. 1958), Brussels, 1959.
157. Goedel K., Proc. Int. Congr. Math. 1950, **7**, 175 (1952).
158. Зельманов А. Л., Труды VI совещания по космогонии, АН СССР, М., 1959; ДАН СССР, **124**, № 5 (1959); **135**, № 6 (1960).
159. Heckmann O., Schücking E., Handbuch der Physik, Bd. 53, 489, Berlin, 1959.
160. Heckmann O., Schücking E., Handbuch der Physik, Bd. 53, 520, Berlin, 1959.
161. Milne E., McCrea W., Quart. Journ. Math. (Oxford), (V), **73** (1934).
162. Hoyle F., Month. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 372 (1948).
163. Hoyle F., Month. Not. Roy. Astron. Soc., **109**, 365 (1949).
164. Bondi H., Gold T., Month. Not. Roy. Astron. Soc., **108**, 252 (1948).
165. Jordan P., Naturwiss., **25**, 513 (1937); **26**, 417 (1938).
166. Ludwig G., Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie, Braunschweig, 1951.
167. Milne E., Relativity, Gravitation and World Structure, Oxford, 1935.
168. Milne E., Kinematic Relativity, Oxford, 1948.

§ 9

169. Bertotti B., Preprint, 1954.
170. Einstein A., Ann. of Math., **46**, 578 (1945).
171. Einstein A., Strauss E., Ann. of Math., **47**, 731 (1946).
172. Schrödinger E., Proc. Irish. Acad., **A51**, 163 (1947).
173. Schrödinger E., Proc. Irish. Acad. **A51**, 205 (1948).
174. Schrödinger E., Proc. Irish. Acad., **A52**, 1 (1948).

175. Einstein A., Kaufman B., в сборнике «Louis de Broglie, physicien et penseur», Paris, 1953.
176. Hlavatý V., Colloque sur la théorie de la relativité, Bruxelles, 1959.
177. Cartan E., Ann. de l'Ecole Norm. sup., **42**, 17 (1928).
178. Tonnelat M. A., Ann. de phys., **17**, 158 (1942).
179. Левашов А., ДАН СССР, **4**, 124 (1934).
180. Левашов А., Бюлл. САГУ, **23**, 47 (1945).
181. Родичев В. И., ЖЭТФ, № 5 (1961).
182. Schrödinger E., Proc. Roy. Irish. Acad., **48A** (1944).
183. Schmutzger E., Zs. f. Naturforsch. **15a**, 355 (1960).
184. Møller C., Rosenfeld L., Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-Fys. Medd., **17**, № 8 (1940).
185. Wheeler J. A., Misner C., Ann. of Phys., **2**, 525 (1957).
186. Rainich G. J., Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **10**, 124 (1924).
187. Wheeler J. A., Power E. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957).
188. Ernst F. J., Rev. Mod. Phys., **29**, 496 (1957).
189. Ernst F. J., Phys. Rev., **105**, 1665 (1957).
190. Hartle J. B., The Gravitational Geon, Thesis, Princeton, 1960.
191. Блохинцев Д. И., Препринт ОИЯИ, Д-474 (1960).
192. Соколов А., Иваненко Д. Квантовая теория поля, ч. II, М.—Л., 1952.
193. Бродский А., Иваненко Д., ЖЭТФ, **24**, 384 (1953).
194. Мирианашвили М., Труды Института физики АН ГССР, **4**, 97 (1956).
195. Курдгеландзе Д. Ф., ЖЭТФ, **32**, 1156 (1957); **34**, 1587 (1958); **36**, 842 (1959).
196. Иваненко Д., Мирианашвили М., ДАН СССР, **106**, 413 (1956).
197. DeWitt B. S., The Quantization of Geometry. Inst. Field Physics, Publ. № 8, University of North Carolina, 1960.
198. Нелинейная квантовая теория поля, Сборник статей, ИЛ, 1959.
199. Kita H., Progr. Theor. Phys., Suppl., **9**, 5 (1959).

§ 10

200. Pauli W., Fierz M., Proc. Roy. Soc., **173**, 212 (1939).
201. Бронштейн М. П., ЖЭТФ, **6**, 135 (1936).
202. Rosenfeld L., Rapports Institut Henri Poincare, (1937).
203. Иваненко Д., Соколов А., Вестник МГУ, № 8, 103 (1947).
204. Misner C., Rev. Mod. Phys., **29**, 497 (1957).
205. DeWitt B., Inst. Field. Phys. Publ. № 5, University of North Carolina, 1960.
206. Arnowitt R., Deser S., Misner C., Phys. Rev., **118**, 1100 (1960).

207. Arnowitt R., Deser S., Misner C., Phys. Rev., **117**, 1595 (1960).
208. Arnowitt R., Deser S., Misner C., Preprint, 1960.
209. Arnowitt R., Deser S., Misner C., Preprint, 1960.
210. De Witt B., Inst. Field. Phys. Publ. № 6, University of North Carolina, 1960.
211. de Broglie L., Théorie generale des particules a Spin (Méthode de fusion), 2 ed., Paris, 1954.
212. Мицкевич Н. В., Доклады Болгарской АН, **11**, № 5 (1956).
213. Mitter H., Zs. f. Naturforsch., **15a**, 753 (1960).
214. Иваненко Д., Бродский А., ДАН СССР, **92**, 731 (1953).
215. Курдгелайдзе Д. Ф., Известия высшей школы, Томск, № 1, 1961. Иваненко Д., Курдгелайдзе Д. Ф., ЖЭТФ, **40**, № 4 (1961).

§ 11

216. Фок В. А., Иваненко Д., Phys. Zs., **30**, 648 (1929); Compt. Rend., **188**, 1470 (1929).
217. Фок В. А., Zs. f. Phys., **57**, 261 (1929).
218. Weyl H., Zs. f. Phys., **56**, 330 (1929).
219. Schrödinger E., Berlin. Ber., 105 (1932).
220. Infeld L., der Waerden, Berlin. Ber., 380 (1933).
221. Дирак Р. А. М., в сборнике «Max-Planck Festschrift», Berlin, 1958, S. 339.
222. Belinfante F., Physica, **7**, 305 (1940).
223. Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, 1947.
224. Bade W., Jehle H., Rev. Mod. Phys., **25**, 714 (1953).
225. Misner C., Phys. Rev., **118**, 1110 (1960).
226. Riesz M., XII Congres d. Math. Scandinaves 241, 1953.
227. Regge T., Nuovo Cimento, **7**, 215 (1958).
228. Salecker H., Wigner E., Phys. Rev., **109**, 571 (1958).
229. Пийр И., Труды института физики АН ЭССР, 1957.
230. Euberta Thesis, Princeton, 1958.
231. Мицкевич Н. В., ЖЭТФ, **34**, № 6 (1958).
232. Arnowitt, Deser, Misner, Preprint, Princeton, 1960.
233. Фишер И. З., ЖЭТФ, **18**, 636 (1948); **19**, 271 (1949).
234. Møller C., Ninth Ann. Intern. Conf on High-Energy Physics (Kiev, 1959).
235. Kimura T., Progr. Theor. Phys., **16**, 157, 555 (1956).
236. Coish H. R., Phys. Rev. **114**, 383 (1959).
237. Амбарцумян В. А., Иваненко Д., Zs. f. Phys., **64**, 563 (1930).
238. Schild A., Phys. Rev., **73**, 414 (1948); Canad. Journ. Math., **1**, 29 (1949).

239. Snyder H., Phys. Rev., **71**, 38 (1947).
240. Шапиро И. С., Nucl. Phys., **21**, 474 (1960).
241. Гольфанд Ю. А., ЖЭТФ, **37**, 504 (1959).
242. Станюкович К. П., ДАН СССР, **119**, № 2 и 4 (1958).
243. Станюкович К. П., ЖЭТФ, **36**, № 6 (1959).
244. Станюкович К. П., Бюллетень ВАГО АН СССР, № 4, 1958.
245. Sakurai J., Ann. of Phys., **11**, 1 (1960).

1. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

1. ЭНЕРГИЯ НЕЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Х. Мёллер

C. Møller, в сборнике «Max-Planck Festschrift», 1958, Berlin, S. 139—153

В работе прежде всего показывается, что при надлежащем определении плотности псевдотензора энергии-импульса можно получить инвариантное по отношению к пространственным преобразованиям выражение для энергии, содержащейся в ограниченной области пространства, так что можно говорить о локализации энергии в гравитационном поле. Кроме того, при расчете полной энергии замкнутой системы больше нет необходимости применять систему квазигалилеевых координат.

Это создает основу для однозначной трактовки распределения энергии и потока энергии внутри незамкнутых систем. Важнейшим примером такого рода систем являются гравитационные волны.

Аппроксимация решений нелинейных уравнений поля решениями линеаризованных уравнений оказывается непригодной для обсуждения вопроса о существовании гравитационных волн, несущих энергию. На основании до сих пор известных точных решений нелинейных уравнений поля для пустого пространства показывается, что полная энергия этих гравитационных волн равна нулю. В этом усматривается веский довод в пользу предположения, что вообще не существует гравитационных волн, несущих энергию, и, таким образом, становится понятным, почему применение к гравитационному полю обычных методов квантования не привело к удовлетворительному результату.

§ 1. Введение

Имя Макса Планка связано прежде всего с открытием элементарного кванта действия. Но, кроме того, в первом десятилетии нашего века целый ряд важных работ Планка [1—4] внес значительный вклад в развитие специальной теории относительности, в особенности релятивистской механики и термодинамики. В этом развитии существенную роль играло понятие тензора энергии-импульса T_i^h произвольной материальной системы, поскольку общие законы

сохранения энергии и импульса могут быть выражены как обращение в нуль четырехмерной дивергенции этого тензора:

$$T_{i,k}^k \equiv \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (1)$$

Обобщение этих уравнений в общей теории относительности однозначно проводится с помощью принципа эквивалентности Эйнштейна, так что вместо (1) мы получим

$$T_{i,k}^k \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0, \quad (1')$$

где в левой части уравнения стоит *ковариантная* дивергенция тензора материи T_i^k . В такой форме эти уравнения, конечно, не представляют собой непосредственно законов сохранения. Так, например, уравнение (1') с $i = 4$, напротив, выражает *несохранение* энергии, связанной с материей. Путем введения известной псевдотензорной плотности

$$\Theta_i^k = \sqrt{-g} (T_i^k + \theta_i^k), \quad (2)$$

которая является суммой «материальной» и «гравитационной» (полевой) частей и удовлетворяет уравнениям

$$\Theta_{i,k}^k \equiv \frac{\partial \Theta_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad (3)$$

Эйнштейну и другим [5 — 8] удалось непротиворечивым образом сформулировать законы сохранения для замкнутых систем. В формуле (2), так же как и в уравнениях (1) и (1'), T_i^k представляет собой тензор энергии-импульса материи, который в уравнениях поля Эйнштейна

$$R_i^k - \frac{1}{2} g_i^k R = -\kappa T_i^k \quad (4)$$

выступает как источник гравитационного поля. Далее, g есть детерминант метрического тензора g_{ik} и θ_i^k — аффинный тензор, который зависит только от g_{ik} и их производных первого порядка $g_{ik,l}$. Так как θ_i^k — однородные функции от $g_{ik,l}$, то они обращаются в нуль в локальной инерциальной системе отсчета, и уравнения (3) переходят тогда в уравнения 1) и (1') специальной теории относительности.

Для «замкнутых» систем, которые определяются тем, что существуют «квазигалилеевы» системы координат, в которых g_{ik} в пространственной бесконечности достаточно быстро сходятся к обычным постоянным значениям специальной теории относительности, величины

$$P_i = \frac{1}{c} \int \Theta_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (5)$$

могут быть истолкованы как компоненты 4-импульса. Для возможности такой интерпретации существенно, что P_i вследствие уравнений (3) постоянны во времени и что они ведут себя при линейных преобразованиях координат как ковариантные компоненты вектора. Последнее вытекает из уравнений (3) и из того факта, что Θ_i^k есть аффинный тензор.

Если в выражении (2) для Θ_i^k исключить тензор материи T_i^k с помощью уравнений поля (4), то Θ_i^k оказывается функцией g_{ik} и их производных первого и второго порядков. Можно показать [9], что Θ_i^4 в этом случае будет суммой частных производных по пространственным координатам, так что величины P_i могут быть записаны как интегралы по некоторой лежащей в пространственной бесконечности двумерной поверхности. Величины P_i зависят, таким образом, только от значений функций g_{ik} и их первых производных в пространственной бесконечности. Но для покоящейся замкнутой системы g_{ik} на больших расстояниях представлены решением Шварцшильда для пустого пространства. Если при расчете P_i воспользоваться квазигалилеевой системой координат, то получаются значения

$$P_i^0 = \{0, 0, 0, -M_0 c^2\}, \quad (6)$$

где M_0 — полная ньютоновская масса системы, т. е. масса, которая по теории Ньютона должна порождать на больших расстояниях такой же гравитационный потенциал, какой следует из рассматриваемого решения Шварцшильда.

Этот весьма удовлетворительный результат теории Эйнштейна сохраняется, однако, только в специальных системах координат, а именно в квазигалилеевых системах, что кажется странным в общей теории относительности. Однако еще менее удовлетворительно то, что в этой

теории понятию количества энергии какой-либо части системы вообще нельзя придать достаточно определенный смысл. Это связано прежде всего с тем, что интеграл

$$E_{\Omega} = \int_{\Omega} \Theta_4^4 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (7)$$

взятый по конечной части Ω пространства, *инвариантен* по отношению к чисто пространственным преобразованиям типа

$$\bar{x}^i = f^i(x^k), \quad \bar{x}^4 = x^4. \quad (8)$$

Поэтому до сих пор предполагалось, что не имеет физического смысла говорить о локализации энергии гравитационного поля и что только полная энергия замкнутой системы может быть однозначно определена.

В недавней нашей работе [9] было, однако, показано, что можно заменить Θ_i^k другой псевдотензорной плотностью \mathfrak{T}_i^k , которая также удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{T}_{i,k}^k = 0 \quad (9)$$

и компонента которой \mathfrak{T}_4^4 может быть непротиворечиво истолкована как плотность энергии. Как функция от g_{ik} и их производных \mathfrak{T}_i^k имеет форму

$$\mathfrak{T}_i^k = \chi_{i,l}^{kl}, \quad (10)$$

где

$$\chi_i^{kl} = \frac{V \sqrt{-g}}{\kappa} (g_{in,m} - g_{im,n}) g^{km} g^{ln}. \quad (11)$$

Вследствие свойства симметрии $\chi_i^{kl} = -\chi_i^{lk}$ уравнение (9) является непосредственным следствием (10). Далее, легко видеть, что величины

$$P_i = \frac{1}{c} \int \mathfrak{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (12)$$

имеют те же самые трансформационные свойства и те же самые значения, что и определяемые, согласно (5), эйнштейновские интегралы (по крайней мере в тех случаях, когда последние вообще имеют определенный смысл). Но в

противоположность (7) выражение

$$E_{\Omega} = - \int_{\Omega} \mathfrak{E}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (13)$$

инвариантно относительно группы преобразований (8). Это позволяет интерпретировать E_{Ω} как энергию, содержащуюся в ограниченной области Ω пространства. Кроме того, здесь уже нет необходимости при расчете полной энергии замкнутой системы использовать только квазигалилеевы координаты.

Инвариантность выражения (13) следует немедленно, если заметить, что \mathfrak{E}_4^k при преобразованиях (8) ведет себя как векторная плотность. Из закона преобразования тензора g_{ik} прежде всего видно, что величины

$$A_i \equiv g_{i4} \quad (14)$$

ведут себя при преобразованиях (8) как компоненты ковариантного вектора. [В действительности, конечно, A_4 — инвариант, в то время как A_i ($i = 1, 2, 3$) — компоненты 3-вектора.] Отсюда получается, что

$$\chi_4^{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{\chi} (A_{n,m} - A_{m,n}) g^{km} g^{ln} \quad (15)$$

ведет себя как антисимметричная тензорная плотность 2-го ранга, и

$$\mathfrak{E}_4^k = \chi_4^{kl},{}_{,l} \quad (16)$$

есть, следовательно, векторная плотность.

Если обозначить через γ детерминант пространственного метрического тензора, то

$$\gamma = \frac{g}{g_{44}}. \quad (17)$$

Тогда интеграл (13) будет

$$E_{\Omega} = - \int_{\Omega} \mathfrak{E}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \int_{\Omega} h dV, \quad (18)$$

где плотность энергии

$$h = - \frac{\mathfrak{E}_4^4}{\sqrt{\gamma}} \quad (19)$$

есть, таким образом, скаляр относительно чисто пространственных преобразований. Далее, величины

$$S^* = -\frac{c\mathfrak{E}_4^*}{V\gamma} \quad (20)$$

являются контравариантными компонентами пространственного вектора \mathfrak{S} , который должен быть интерпретирован как плотность потока энергии. В самом деле, уравнение (9) с $i=4$ может быть записано в форме

$$\operatorname{div}\mathfrak{S} + \frac{1}{V\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (V\gamma h) = 0, \quad (21)$$

где

$$\operatorname{div}\mathfrak{S} = \frac{1}{V\gamma} \frac{\partial}{\partial x^*} (V\gamma S^*)$$

есть пространственная ковариантная дивергенция потока энергии. Закон сохранения энергии (21) имеет здесь форму уравнения непрерывности, отдельные члены которого не зависят от выбора пространственных координат в рамках нашей системы отсчета. Выражения (19) и (20) допускают теперь однозначное определение плотности энергии и потока энергии внутри незамкнутой системы. Важным примером такой системы являются гравитационные волны, к которым мы вернемся в § 3—5. В подобных исследованиях уравнение (21) играет ту же роль, что и теорема Пойнтинга в электродинамике. По аналогии с потоком электромагнитной энергии определяется скорость w_g распространения энергии равенством

$$\mathfrak{S} = hw_g; \quad (22)$$

при этом w_g — пространственный вектор, всюду параллельный потоку энергии.

Плотность энергии h , однако, не является положительно определенной, и нужно примириться с тем, что энергия ограниченной части системы, как и ее вклад в общую энергию и общую массу, может быть также отрицательной. Если h отрицательно, то векторы w_g и \mathfrak{S} имеют противоположные направления. Если по аналогии с формулой (2) положить

$$\mathfrak{E}_i^h = \sqrt{-g} (T_i^h + t_i^h), \quad (23)$$

то величина t_i^h может быть истолкована как вклад гравитационного поля в плотность псевдотензора энергии и импульса. В отличие от θ_i^h , t_i^h не обращается в нуль в локальной инерциальной системе, так как она содержит, кроме первых производных, также и вторые производные величин g_{ik} . Однако $(\sqrt{-g}t_i^h)_{,h}$ в локальной инерциальной системе равна нулю, так что уравнения (9) для такой системы снова переходят в уравнения (1) специальной теории относительности, в соответствии с принципом эквивалентности.

§ 2. Однозначность выражений для плотности энергии и потока энергии

В этом параграфе мы ответим на вопрос, в какой мере единственны выражения (19) и (20) для h и \mathfrak{S} , которые обладают требуемыми трансформационными свойствами. Поэтому мы попытаемся построить из g_{ik} и их производных самое общее выражение для \mathfrak{S}_i^h , которое, во-первых, являлось бы *аффинной* тензорной плотностью и, во-вторых, тождественно удовлетворяло бы уравнениям

$$\mathfrak{S}_{i, h}^h = 0. \quad (24)$$

Очевидно, оба эти условия необходимы, чтобы определяемые, согласно (12), величины P_i для замкнутой системы были постоянными во времени и изменялись при линейных преобразованиях как ковариантные компоненты 4-вектора. С другой стороны, они необходимы, чтобы P_i могли быть истолкованы как компоненты полного 4-импульса¹⁾.

1) В § 98 отличной книги Ландау и Лифшица [10] определена величина $\mathfrak{S}_{Л.-Л.}^{ik}$ с двумя верхними индексами, которая тоже удовлетворяет условию (24) и, кроме того, симметрична по обоим индексам. Из этого следует, что для замкнутой системы следующие десять величин постоянны во времени

$$P_{Л.-Л.}^i = \frac{1}{c} \int \mathfrak{S}_{Л.-Л.}^{i4} dx^1 dx^2 dx^3,$$

$$M_{Л.-Л.}^{ik} = \frac{1}{c} \int \left(x^i \mathfrak{S}_{Л.-Л.}^{k4} - x^k \mathfrak{S}_{Л.-Л.}^{i4} \right) dx^1 dx^2 dx^3,$$

что наводит на мысль интерпретировать эти величины как 4-импульс

Так как (24) обязано выполняться тождественно, то \mathfrak{F}_i^k , должны быть такими, чтобы их можно было представить в форме¹⁾

$$\mathfrak{F}_i^k = \chi_{i,l}^{kl}, \quad (25)$$

где

$$\chi_i^{kl} = -\chi_i^{lk} \quad (26)$$

есть некоторая аффинная тензорная плотность 3-го ранга, антисимметричная по индексам k и l .

Мы сделаем теперь обычное предположение, какое делается и при выводе уравнений поля (4), что в выражение для \mathfrak{F}_i^k не входят производные выше второго порядка. Из этого следует, что χ_i^{kl} зависят только от g_{ik} и их производных первого порядка. Для простоты мы предполагаем далее, что в χ_i^{kl} не входят члены со степенями $g_{ik,l}$ выше второй. Простое рассуждение показывает тогда, что самое общее выражение для χ_i^{kl} , которое удовлетворяет этим условиям, имеет вид

$$\begin{aligned} \chi_i^{kl} = & a_1 \sqrt{-g} g_{in,m} (g^{km} g^{ln} - g^{lm} g^{kn}) + \\ & + a_2 \sqrt{-g} (\delta_i^k g_m^{lm} - \delta_i^l g_m^{km}) + a_3 (\delta_i^k g^{lm} - \delta_i^l g^{km}) \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^m}, \quad (27) \end{aligned}$$

и 4-момент импульса. Но теперь $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}-\mathcal{L}}^{ik}$ не являются аффинной тензорной плотностью, будучи умноженной еще на $\sqrt{-g}$. Поэтому, например, $P_{\mathcal{L}-\mathcal{L}}^i$ не преобразуется как 4-вектор при общих линейных преобразованиях; это имеет место только при ортогональных преобразованиях Лоренца. Поэтому нам представляется невозможным истолковывать $P_{\mathcal{L}-\mathcal{L}}^i$ как 4-импульс. Здесь, по-видимому, нельзя сохранить обычную связь между 4-импульсом и 4-скоростью u^i

$$P_{\mathcal{L}-\mathcal{L}}^i = M_0 u^i$$

с инвариантной массой покоя, поскольку правая часть этого равенства представляет собой вектор при общих преобразованиях, в то время как левая — только при ортогональных преобразованиях.

¹⁾ См. аналогичное рассмотрение в книге [10], § 98.

где $g_i^{ik} \equiv \partial g^{ik} / \partial x^l$; a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные. Чтобы еще более уточнить это выражение, поставим условие, чтобы величина \mathfrak{X}_4^k была векторной плотностью относительно группы преобразований (8). Из этого следует, что χ_4^{kl} относительно той же группы преобразований должна быть антисимметричной тензорной плотностью 2-го ранга. Первый член в (27) пропорционален выражению (11), которое, как мы видели, как раз обладает требуемым трансформационным свойством. Напротив, ни второй, ни третий члены в (27), ни любая их линейная комбинация не обладают этим свойством, в чем легче всего убедиться, рассматривая произвольное *бесконечно малое* преобразование типа (8). Отсюда с необходимостью следует

$$a_2 = a_3 = 0. \quad (28)$$

Из условия (6), что полная энергия

$$E = -cP_4 = - \int \mathfrak{X}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3$$

покоящейся замкнутой системы должна иметь значение $M_0 c^2$, следует значение для постоянной a_1 :

$$a_1 = \frac{1}{\kappa}. \quad (29)$$

Исключая возможность очень многих более сложных выражений, которые зависели бы от производных третьего порядка и от более высоких степеней первых производных, мы приходим к выводу, что псевдотензоры (10) и (11), а также выражения (19) и (20) для плотности и потока энергии определены однозначно.

§ 3. Плоские гравитационные волны в приближении слабого поля

Вопрос о том, теряет ли система движущихся масс, как, например, наша планетная система, свою энергию за счет излучения гравитационных волн, в последние годы многократно обсуждался; однако единого мнения в этом вопросе достигнуто не было. Существенной причиной этого, по всей вероятности, является тот факт, что до сих пор не

существовало однозначного выражения для потока энергии. Хотя энергия, которая излучается вследствие испускания гравитационных волн, во всяком случае крайне мала, вопросу о том, существуют ли вообще несущие энергию гравитационные волны, следует придавать большое значение прежде всего в связи с проблемой квантования гравитационных полей.

Вскоре после создания теории относительности этот вопрос, казалось, был решен в положительном смысле, ибо Эйнштейн [11] смог показать, что уравнения поля в линейном приближении принимают форму обычных волновых уравнений. В этом приближении имеются, например, решения уравнений поля для пустого пространства, которые имеют форму плоских монохроматических волн, и для них $\Theta_4^{\times} = \sqrt{-g} \theta_4^{\times}$, вообще говоря, отличны от нуля. Так как, далее, запаздывающие решения для поля на больших расстояниях от материальных систем представляются приближенно плоской волной, то отсюда делали вывод, что такая система должна постоянно излучать энергию.

Но если вместо Θ_4^{\times} использовать правильное выражение (20) для потока энергии, то легко видеть, что при расчете излучения нельзя ограничиваться первым, «линейным» приближением. А именно, кроме члена, который, как и θ_4^{\times} , квадратичен относительно производных первого приближения, формула (20) содержит также члены, линейные относительно производных второго приближения, и все эти члены, вообще говоря, одного порядка величины. Если же, согласно методу приближений, вычислить следующее приближение, то получается, как мы увидим, странный результат: вообще не существует регулярного всюду решения типа распространяющейся плоской монохроматической волны. Этот результат находится в согласии с недавно опубликованным исследованием Папапетру [12].

Во всех таких исследованиях удобно, хотя и не необходимо, пользоваться «гармоническими» координатами, для которых выполняется условие Фока—де-Дондера [13—15]:

$$g_k^{ik} = 0, \quad g^{ik} \equiv \sqrt{-g} g^{ik}. \quad (30)$$

Для «слабых» полей можно написать разложение

$$\frac{g^{ik}}{\sqrt{-g}} = \varepsilon_{(i)} \delta_{ik} + g_{ik}^{(1)} + g_{ik}^{(2)} + \dots, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{(i)} = [1, 1, 1, -1]. \quad (32)$$

Из равенств

$$\frac{g^{il} g_{hl}}{\sqrt{-g}} = \delta_k^i \quad (33)$$

следует тогда разложение

$$g^{ik} = \varepsilon_{(i)} \delta^{ik} - g^{ik(1)} - g^{ik(2)} + g_l^i g^{lk(1)} + \dots, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} g^{ik(1)} &= \varepsilon_{(i)} \varepsilon_{(k)} g_{ik}^{(1)}, \\ g_k^i &= \varepsilon_{(i)} g_{ik}^{(1)}, \quad g^{ik(2)} = \varepsilon_{(i)} \varepsilon_{(k)} g_{ik}^{(2)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Условие Фока — де-Дондера (30) дает тогда для различных приближений уравнения

$$g_k^{ik(1)} = 0, \quad (36a)$$

$$g_k^{ik(2)} = g_{i,k}^{(1)} g^{lk(1)}, \quad (36б)$$

.....

Если подставить разложения (31) и (34) в уравнения поля (4), то последние распадаются на последовательность уравнений для различных приближений. Для пустого пространства в первом приближении при учете (36a) получается обычное волновое уравнение

$$\square g_i^k \equiv \varepsilon_{(l)} g_{i,l}^k{}_{,l} = 0, \quad (37)$$

которое имеет в качестве решения плоскую волну, распространяющуюся со скоростью c в направлении x^1 . Надлежащим выбором координат всегда можно добиться [16]

(см. также [11]), чтобы все компоненты g_i^k , кроме $g_2^2 = g_3^3 = g_3^2$, были равны нулю.

Мы полагаем

$$g_2^{(1)} = g_3^{(1)} = \varphi(u), \quad (38)$$

где $\varphi(u)$ — произвольная функция переменной

$$u = x^1 - x^4. \quad (39)$$

Так как

$$\alpha_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x^i} = \{1, 0, 0, -1\}, \quad (40)$$

то отсюда следует

$$g_{i,k}^{(1)} g^{lk} = (g_i^{(1)})' \alpha_k g^{lk} = 0 \quad (41)$$

(здесь штрихом обозначена производная по u) и условие (36б) будет иметь вид

$$g_{i,k}^{(2)} = 0. \quad (42)$$

Если ввести решение уравнений первого приближения (37) в уравнения поля второго приближения, то получим

$$\square g_i^{(2)} = -\alpha_i \alpha_k \varepsilon_{(k)} (\varphi')^2, \quad \varphi'(u) = \frac{d\varphi}{du}. \quad (43)$$

Без ограничения общности мы можем теперь считать, что все компоненты $g_i^{(2)}$ с i или k , равными 2 и 3, обращаются в нуль. Для других компонент $g_i^{(2)}$ из (43) и (42) легко получаются следующие, не зависящие от y и z решения:

$$\begin{aligned} g_1^{(2)} &= 2 \int f(u) du - v f(u), & g_4^{(2)} &= 2 \int f(u) du + v f(u), \\ g_1^{(2)} &= -g_1^{(2)} = v f(u). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь

$$v = x^1 + x^4 \quad (45)$$

и

$$f(u) = \frac{1}{4} \int [\varphi'(u)]^2 du. \quad (46)$$

Далее, для Θ_i^h и \mathfrak{X}_i^h во втором приближении получаем

$$\Theta_i^h = \frac{\alpha_i \alpha_h \varepsilon^{(h)}}{2\kappa} \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2, \quad (47)$$

$$\mathfrak{X}_i^h = \frac{\alpha_i \alpha_h \varepsilon^{(h)}}{2\kappa} \left[\frac{d^2}{du^2} (\varphi^2) + \left(\frac{d\varphi}{du} \right)^2 \right].$$

Эти выражения зависят только от u . Однако весьма сомнительно, чтобы ограничение вторым приближением имело какой-либо смысл, поскольку решения $g_{ik}^{(2)}$ в (44) зависят также от переменной v и соответственно этому могут произвольно возрастать в противоположность предположению, сделанному в аппроксимационной схеме. Так, например, если φ в (38) есть простая монохроматическая волна

$$\varphi = A \cos \left(\frac{u}{\lambda} \right), \quad (48)$$

то

$$f(u) = \frac{1}{4} \int [\varphi'(u)]^2 du = \frac{A}{8\lambda^2} \left[u - \frac{\lambda}{2} \sin \frac{2u}{\lambda} \right] \quad (49)$$

и

$$\int f(u) du = \frac{A}{16\lambda^2} \left[u^2 + \frac{\lambda^2}{2} \cos \frac{2u}{\lambda} \right]. \quad (50)$$

Таким образом, во втором приближении g_{ik} содержат, согласно (44), кроме периодических членов, также и члены, квадратично возрастающие с x . В последующих приближениях появляются члены с еще более высокими степенями.

Подобный результат получается также и в том случае, если φ имеет форму конечного волнового пакета, типа $\varphi = A \cdot \exp[-u^2/2a^2]$. Поэтому обычно используемое «приближение слабого поля» непригодно для исследования таких протяженных решений уравнений поля, как гравитационные волны. Именно в большой пространственно-временной области решение точных нелинейных уравнений поля плохо аппроксимируется решением линейных уравнений. При исследовании вопроса о существовании гравитационных волн, переносящих энергию, необходимо, очевидно, рассматривать точные решения уравнений поля.

§ 4. Точные «плоские» гравитационные волны

Единственные известные нам точные решения уравнений поля для пустого пространства — это «плоские» волны Бонди [17] и цилиндрические волны Эйнштейна и Розена [16]. Бонди берет интервал в форме

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 + \\ + 2\alpha(y dy - z dz) du - \left[\frac{2\alpha}{u}(y^2 - z^2) + \alpha^2 uv \right] du^2. \quad (51)$$

Здесь

$$x^i = [x, y, z, ct], \quad u = x - ct, \quad v = x + ct \quad (52)$$

и $\alpha = \alpha(u)$ — произвольная, дважды дифференцируемая функция от u .

Чтобы g_{ik} при фиксированных y, z и t оставались регулярными для всех значений x , функция α при $u = 0$ должна обращаться в нуль, а при $u \rightarrow \pm \infty$ должна стремиться к нулю быстрее, чем $1/u^2$, т. е.

$$\frac{\alpha}{u} \rightarrow \text{const} \quad \text{при } u \rightarrow 0, \\ \alpha^2 u^2 \rightarrow \text{const} \quad \text{при } u \rightarrow \pm \infty. \quad (53)$$

Таким образом, среди многих различных волн типа Бонди нет монохроматических волн; более того, все они имеют характер волновых пакетов.

Путем элементарного расчета, обозначая

$$a \equiv \frac{2\alpha}{u}(y^2 - z^2) + \alpha^2 uv, \quad (54)$$

получаем

$$g = \det \{g_{ik}\} = -1, \\ A_i = g_{i4} = \{a, -\alpha y, \alpha z, -(1+a)\}, \quad (55) \\ \mathfrak{S}_4^h = \left[\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (A_{n,m} - A_{m,n}) g^{km} g^{ln} \right]_{,l} = \\ = \alpha_4 \alpha_h \varepsilon_{(h)} \frac{2}{\kappa} \frac{d}{du} [\alpha^2 u],$$

где α_i и $\varepsilon_{(i)}$ определены согласно (40) и (32). Таким образом, \mathfrak{S}_4^h не зависит от y и z , и поток энергии всюду параллелен оси x . Скорость распространения гравитац

ной энергии имеет, согласно (22), контравариантные компоненты

$$\omega_g^t = \frac{S^t}{h} = \frac{c\mathfrak{I}_4^t}{\mathfrak{I}_4} = c\alpha_i = \{c, 0, 0\} \quad (56)$$

и, таким образом, представляет собой некоторый пространственный вектор, всюду имеющий направление положительной оси x .

Далее,

$$\begin{aligned} \gamma_{ix} &= g_{ix} - \frac{g_{i4}g_{x4}}{g_{44}} = \\ &= \begin{pmatrix} (1+a)^{-1} & \alpha y (1+a)^{-1} & -\alpha z (1+a)^{-1} \\ \alpha y (1+a)^{-1} & 1 + \alpha^2 y^2 (1+a)^{-1} & -\alpha^2 yz (1+a)^{-1} \\ -\alpha z (1+a)^{-1} & -\alpha^2 yz (1+a)^{-1} & 1 + \alpha^2 z^2 (1+a)^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

и величина скорости распространения энергии

$$\omega_g = \sqrt{\gamma_{ix} \omega_g^i \omega_g^x} = c \sqrt{\gamma_{11}} = \frac{c}{\sqrt{1+a}}. \quad (58)$$

Скорость светового луча в направлении, определяемом единичным вектором e (см., например, [18])

$$\omega(e) = \frac{c \sqrt{-g_{44}}}{1 + \gamma_i e^i},$$

где

$$\gamma_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}} = \left\{ \frac{a}{\sqrt{1+a}}, \frac{-\alpha y}{\sqrt{1+a}}, \frac{\alpha z}{\sqrt{1+a}} \right\} \quad (59)$$

представляют собой компоненты гравитационного вектор-потенциала. Единичный вектор в положительном направлении оси x имеет компоненты

$$e^t = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}}}, 0, 0 \right\} = \{ \sqrt{1+a}, 0, 0 \}. \quad (60)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \gamma_i e^i &= \gamma_1 e^1 = a, \\ \omega(e) &= \frac{c \sqrt{1+a}}{1+a} = \frac{c}{\sqrt{1+a}}. \end{aligned} \quad (61)$$

Сравнение с (58) показывает, что гравитационная энергия распространяется всюду со скоростью света в положительном направлении оси x .

Из (57), или проще из (17), следует, что

$$\gamma = (1 + a)^{-1}. \quad (62)$$

Таким образом, для плотности энергии и потока энергии получаем

$$h = -\frac{\mathfrak{E}_4^4}{V\bar{\gamma}} = \frac{2}{\kappa V\sqrt{1+a}} \frac{d}{du} [\alpha^2 u],$$

$$S = ch \delta^{41}. \quad (63)$$

Знак h определяется частным дифференциалом: $d[\alpha^2 u]/du$. В волновом пакете, для которого α равно нулю вне интервала

$$u_1 < u < u_2, \quad (64)$$

$(d/du)[\alpha^2 u]$ внутри интервала (64) должно быть знакопеременной функцией. Таким образом, при постоянных t , y и z величина h меняет знак при возрастании x внутри волнового пакета. Полная же энергия внутри цилиндра с осью, направленной вдоль x , и с площадью основания $dy dz$ всегда равна нулю, так как

$$dy dz \int_{x_1}^{x_2} h V\bar{\gamma} dx = -dy dz \int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{E}_4^4 dx =$$

$$= dy dz \frac{2}{\kappa} \int_{u_1}^{u_2} \frac{d[\alpha^2 u]}{du} du = \frac{2}{\kappa} dy dz \alpha^2 u \Big|_{u_1}^{u_2} = 0. \quad (65)$$

Этот результат, очевидно, имеет место для всех волн, которые удовлетворяют условию регулярности (53).

Рассмотрим, далее, элемент поверхности $d\sigma$, расположенный в фиксированном месте системы отсчета перпендикулярно к оси x ; тогда полная энергия, протекающая через него за время прохождения волны, есть

$$\int_{t_1}^{t_2} dt S^\kappa d\sigma_\kappa = dy dz \frac{2}{\kappa} \int_{u_2}^{u_1} \frac{d}{du} [\alpha^2 u] du =$$

$$= \frac{2}{\kappa} dy dz \alpha^2 u \Big|_{u_2}^{u_1} = 0. \quad (66)$$

Итак, полная гравитационная энергия, которую несут волны Бонди, равна нулю.

Если для интервала (51) рассчитать эйнштейновские величины Θ_4^h , то снова получаются значения (55). Таким образом, Θ_4^h и \mathfrak{T}_4^h здесь случайно оказываются одинаковыми.

§ 5. Цилиндрические гравитационные волны

Цилиндрические волны, которые впервые были выведены Эйнштейном и Розеном [16], исследовались затем Розеном [19], а также недавно Вебером и Уилером [20]. Используя цилиндрические координаты

$$x^i = \{r, \varphi, z, ct\}, \quad (67)$$

можно привести интервал к следующему виду:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik} dx^i dx^k = \\ &= e^{2(\chi - \psi)} (dr^2 - c^2 dt^2) + r^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 + e^{2\psi} dz^2, \end{aligned} \quad (68)$$

где χ и ψ — функции r и t . Уравнения поля для пустого пространства ($T_i^h = 0$) сводятся к следующим уравнениям для χ и ψ :

$$\psi'' + \frac{1}{r} \psi' - \dot{\psi} = 0, \quad (69a)$$

$$\chi' = r(\psi'^2 + \dot{\psi}^2), \quad (69b)$$

$$\dot{\chi} = 2r\psi'\dot{\psi}. \quad (69v)$$

Здесь штрих и точка означают частное дифференцирование соответственно по r и ct .

Как уже было показано Розеном и Вебером и Уилером, величина Θ_4^h со значениями g_{ik} из (68) всюду равна нулю. Однако вследствие неоднозначности величины Θ_4^h этот результат не имеет точного физического смысла. В противоположность Θ_4^h , как мы сейчас увидим, \mathfrak{T}_4^h , а вместе с ним и плотность энергии h не всюду обращается в нуль.

Простой расчет с g_{ik} из (68) дает

$$g = -r^2 e^{4(\chi-\psi)}, \quad \gamma = r^2 e^{2(\chi-\psi)},$$

$$A_i = g_{i4} = \{0, 0, 0, -e^{2(\chi-\psi)}\}; \quad (70)$$

$$\chi_4^{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (A_{n,m} - A_{m,n}) g^{km} g^{ln} =$$

$$= \frac{2r}{\kappa} (\chi' - \psi') (\delta_1^k \delta_4^l - \delta_1^l \delta_4^k), \quad (71)$$

$$\mathfrak{S}_4^k = \chi_{4,l}^{kl} = \left\{ \frac{2r}{\kappa} (\dot{\chi}' - \dot{\psi}'), 0, 0, -\frac{2}{\kappa} [r(\chi' - \psi')] \right\};$$

$$h = \frac{\frac{2}{\kappa} [r(\chi' - \psi)]'}{\sqrt{\gamma}}, \quad (72)$$

$$S^t = -\frac{\delta_1^t \frac{2c}{\kappa} r (\dot{\chi}' - \dot{\psi}')}{\sqrt{\gamma}}.$$

Эти выражения справедливы как в местах, где присутствует материя, так и в пустом пространстве, и, очевидно, h и \mathfrak{S} , вообще говоря, отличны от нуля. В пустом пространстве вследствие (69б) величина, определяющая h и \mathfrak{S} , имеет вид

$$r(\chi' - \psi') = r(\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}'^2 - \dot{\psi}'). \quad (73)$$

Пусть теперь

$$d\sigma_i = \sqrt{\gamma} \delta_{i,\kappa\lambda} dx^\kappa \delta x^\lambda \quad (74)$$

— псевдовектор, который представляет элемент поверхности, построенный на бесконечно малых векторах dx^κ и δx^λ . При

$$dx^\kappa = \{0, d\varphi, 0\}, \quad \delta x^\lambda = \{0, 0, dz\}$$

он будет

$$d\sigma_i = \{\sqrt{\gamma} d\varphi dz, 0, 0\}. \quad (75)$$

Нормаль к рассматриваемому элементу поверхности, таким образом, перпендикулярна оси симметрии, и на расстоянии r полная энергии, проходящая за единицу времени через этот элемент поверхности, будет

$$S^t d\sigma_i = -\frac{2c}{\kappa} r d\varphi dz \frac{\partial}{\partial t} (\chi' - \psi'). \quad (76)$$

Следовательно, энергия, проходящая за отрезок времени

$t_1 \leq t \leq t_2$, будет

$$\Delta E = \int_{t_1}^{t_2} S^i d\sigma_i dt = -\frac{2c}{\kappa} r d\varphi dz (\chi' - \psi') \Big|_{t=t_1}^{t=t_2}. \quad (77)$$

Если $\chi' - \psi'$ периодически изменяется во времени, то полная энергия, проходящая за один период, будет равна нулю. Именно это имеет место для «мономатических» волн, более подробно изученных Розеном и Вебером и Уилером. В соответствующем решении уравнений поля (69), которое дается равенствами (5) и (6) работы Вебера и Уилера, ψ является периодической функцией времени; однако χ , кроме периодического члена, содержит также аperiодический член $-(2A^2/\pi)\omega ct$, где A — амплитуда «масштабной функции» ψ . Появление этого члена, который означает систематическое изменение метрики, первоначально считалось признаком того, что система теряет энергию вследствие излучения. Но так как этот член не зависит от r , то он не дает вклада в χ' , и поэтому, согласно (77), энергия в среднем не излучается.

Подобный результат получается и для волнового пакета, представленного уравнением (7) работы Вебера и Уилера [20]. Здесь

$$\begin{aligned} \psi &= 2A \int_0^{\infty} e^{-a\omega} J_0(\omega r) \cos(\omega ct) d\omega = \\ &= A \{[(a - ict)^2 + r^2]^{-1/2} + [(a + ict)^2 + r^2]^{-1/2}\}, \end{aligned} \quad (78)$$

где A — некоторая постоянная.

В некоторый момент времени t полная энергия системы внутри плоскостепенного слоя, перпендикулярного оси z и имеющего толщину Δz , согласно (72) и (73), есть

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta z \int h \sqrt{\gamma} dr d\varphi = \Delta z \frac{2}{\kappa} \int [r(\chi' - \psi')] dr d\varphi = \\ &= \Delta z \frac{4\pi}{\kappa} \lim_{r \rightarrow \infty} r (\dot{\psi}^2 + \psi'^2 - \dot{\psi}'). \end{aligned} \quad (79)$$

Но для больших r имеют место асимптотические выражения

$$\psi' \approx -\frac{2A}{r^2}, \quad \dot{\psi} \approx \frac{2Act}{r^3}, \quad (80)$$

т. е.

$$\Delta E = 0. \quad (81)$$

Итак, хотя плотность энергии h не обращается в нуль всюду, полное количество энергии в волновом пакете равно нулю. Тот факт, что все известные точные решения уравнений поля для пустого пространства имеют полную энергию, равную нулю, подтверждает неоднократно высказываемое предположение, что вообще не существует несущих энергию гравитационных волн и что поэтому астрономические системы могут терять энергию только благодаря испусканию «материи». Если это имеет место на самом деле (что, конечно, не может быть установлено лишь из решений уравнений поля для пустого пространства), то становится понятным, почему обычные методы квантования, которые предполагают существование квантов поля, не дали положительных результатов в применении к гравитационному полю.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Planck M., Berlin. Ber., 1907, S. 542.
2. Planck M., Ann. d. Phys., 76, 1 (1908).
3. Planck M., Phys. Zs., 9, 828 (1908).
4. Planck M., Phys. Zs., 11, 294 (1910).
5. Einstein A., Berlin. Ber., 1915, S. 778.
6. Einstein A., Ann. d. Phys., 49, 769 (1916).
7. Einstein A., Berlin. Ber., 1918, S. 448.
8. Klein F., Gött. Nachr. Math.-Phys. Klasse 1918, S. 394.
9. Møller C., Ann. of Phys., 4, 347 (1958).
10. Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, М.—Л., 1948.
11. Einstein A., Berlin. Ber., 1918, S. 154.
12. Parapetrou A., Ann. d. Phys., 20, 399 (1957).
13. de-Donder Th., Theorie des Champs Gravifiques, Paris, 1926.
14. Фок В. А., Rev. Mod. Phys., 29, 325 (1957).
15. Фок В. А., Journ. of Phys. (СССР), 1, 81 (1939).
16. Einstein A., Rosen N., Journ. Frankl. Inst., 223, 43 (1937).
17. Bondi H., Nature, 179, 1072 (1957).
18. Møller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952, Ch. VIII, Eq. (70).
19. Rosen N., Jubilee of Relativity Theory, Basel, 1956.
20. Weber J., Wheeler J., Rev. Mod. Phys., 29, 509 (1957); статья 10 настоящего сборника.
21. Scheidegger A. E., Rev. Mod. Phys., 25, 451 (1953).

2. КОМПЛЕКС ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Х. Мёллер

C. Møller, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-fys. Medd., 31,
No. 14 (1959)

Показано, что выведенное из физических соображений в одной из наших предыдущих работ выражение для комплекса энергии-импульса непосредственно следует также из математических свойств инвариантности теории. Обычный метод бесконечно малых преобразований координат обобщен на случай вариационного принципа, в котором подинтегральное выражение варьируемого интеграла зависит от производных переменных поля произвольно высокого порядка. Далее этот метод применяется к гравитационному полю и к полю материи по отдельности. Выведены трансформационные свойства комплекса при произвольных пространственно-временных преобразованиях и уточнено понятие «локальной инерциальной системы».

§ 1. Введение и выводы

В общековариантной теории, например в теории гравитации Эйнштейна, когда уравнения поля выводятся из вариационного принципа, может быть определено большое число «сохраняющихся» величин (см., например, [1, 2]). Поэтому необходимы особые критерии для отбора из этого множества сохраняющихся величин тех, которые имеют физический смысл. В частности, возникает проблема нахождения правильных выражений для псевдотензора энергии-импульса. В случае лагранжевой системы, когда уравнения поля следуют из плотности лагранжиана \mathcal{L} , являющейся функцией переменных поля и их производных лишь первого порядка и преобразующейся как скалярная плотность при произвольных пространственно-временных преобразованиях, известный «метод бесконечно малых

преобразований» приводит к естественному выбору комплекса энергии-импульса¹⁾.

В случае гравитационных полей можно записать уравнения поля в лагранжевой форме с плотностью лагранжиана $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(g^{ik}, g_i^{ik})$, являющейся скалярной плотностью лишь при произвольных *линейных* преобразованиях. Ввиду этого обстоятельства при использовании метода бесконечно малых преобразований приходится ограничиваться линейными преобразованиями, и полученный таким путем «канонический» комплекс энергии-импульса Θ_i^k не обладает всеми трансформационными свойствами, требуемыми физической интерпретацией его компонент. Канонический комплекс Θ_i^k , следующий из инвариантности \mathfrak{L} при произвольных линейных преобразованиях, имеет вид

$$\Theta_i^k = \sqrt{-g} (T_i^k + \theta_i^k) = s_i^{kl}. \quad (1)$$

Здесь T_i^k — тензор материи, стоящий в правой части уравнений гравитационного поля

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik}. \quad (2)$$

Здесь $g = \det \{g_{ik}\}$ — детерминант метрического тензора g_{ik} и

$$\sqrt{-g} \theta_i^k = \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_i^{lm}} g_i^{lm} - \delta_i^k \mathfrak{L} \right\}. \quad (3)$$

Далее,

$$s_i^{kl} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_i^{lm}} g^{lm} \quad (4)$$

есть величина, введенная Эйнштейном [3] и Толменом [4], а Θ_i^k удовлетворяет соотношению

$$\Theta_i^k{}_{,k} \equiv \frac{\partial \Theta_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (5)$$

¹⁾ Мы принимаем терминологию Лоренца, называвшего *комплексом* ковариантно определенную величину с тензорными индексами, которая, однако, ведет себя как тензор, или тензорная плотность, лишь при *линейных* пространственно-временных преобразованиях.

Простое вычисление показывает¹⁾, что s_i^{kl} имеет вид

$$s_i^{kl} = h_i^{kl} + a_i^{klm}, \quad (6)$$

где

$$h_i^{kl} = -h_i^{lk} = \frac{g_{in}}{2\kappa \sqrt{-g}} [(-g)(g^{kn}g^{lm} - g^{ln}g^{km})]_{,m}, \quad (7)$$

$$a_i^{klm} = -a_i^{kml} = \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} (\delta_i^l g^{km} - \delta_i^m g^{kl}).$$

Ввиду антисимметрии последней величины по индексам l и m величина a_i^{klm} равна нулю, и комплекс Θ_i^k с помощью соотношений (1) и (6) может быть выражен через «суперпотенциалы» h_i^{kl} :

$$\Theta_i^k = h_i^{kl}, \quad (8)$$

Теперь соотношение (5) становится простым следствием равенства (8) ввиду антисимметрии h_i^{kl} по индексам k и l .

Хотя интегралы

$$P_i = \frac{1}{c} \int \Theta_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (9)$$

дают правильные значения полных энергии и импульса замкнутой системы, по крайней мере, если используются квазигалилеевы координаты, все же величина Θ_i^k не является корректным выражением комплекса энергии и импульса, так как она теряет физический смысл при рассмотрении распределения в пространстве энергии и ее потока. В нашей недавней работе [10] было предложено другое выражение для комплекса энергии-импульса. Он определяется выражением

$$\mathfrak{T}_i^k = \sqrt{-g} (T_i^k + t_i^k), \quad (10)$$

$$\sqrt{-g} t_i^k = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{\kappa} G_i^k + 2\theta_i^k \right) - \delta_i^k h_r^{rl} + h_r^{rk}, \quad (11)$$

¹⁾ См., например, Приложение в работе [10]. После того, как настоящая работа была закончена, мы обнаружили, что существование антисимметричной величины h_i^{kl} , которой дано название суперпотенциалов, было установлено много лет назад—сначала в работе [5], а позднее в работе [6] (см. также [7-9]).

Исключая T_i^k с помощью уравнений поля (2), можно выразить \mathfrak{T}_i^k через суперпотенциал χ_i^{kl} :

$$\mathfrak{T}_i^k = \chi_{i,l}^{kl}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_i^{kl} &= -\chi_i^{lk} = 2h_i^{kl} - \delta_i^k h_r^{rl} + \delta_i^l h_r^{rk} = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (g_{in,m} - g_{im,n}) g^{km} g^{ln}, \end{aligned} \quad (13)$$

так что

$$\mathfrak{T}_i^k{}_{,k} = 0. \quad (13')$$

В случае замкнутой системы комплекс \mathfrak{T}_i^k дает для полных энергии и импульса

$$P_i = \frac{1}{c} \int \mathfrak{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (14)$$

те же значения, что и каноническая величина Θ_i^k в (9), по крайней мере в тех случаях, когда последняя вообще приводит к разумному результату. Однако выражения (14) являются более общими и дают правильные значения энергии также при интегрировании по конечным областям пространства. Это связано с тем обстоятельством, что \mathfrak{T}_4^k в противоположность Θ_4^k преобразуется как векторная плотность при чисто пространственных преобразованиях

$$\bar{x}^l = f^l(x^x), \quad \bar{x}^4 = x^4; \quad (15)$$

это свойство является необходимым условием для возможности интерпретировать \mathfrak{T}_4^4 и \mathfrak{T}_4^x соответственно как плотности энергии и ее потока. Более того, в последней нашей работе [11] (см. также [12]) было показано, что псевдотензорная плотность \mathfrak{T}_i^k , определенная соотношениями (10) — (13), однозначно определена этим требованием. Поэтому с физической точки зрения, казалось бы, величина \mathfrak{T}_i^k является корректным выражением для комплекса энергии-импульса, однако в действительности метод бесконечно малых преобразований, будучи примененным к лагранжиану \mathfrak{L} , приводит к выражению Θ_i^k , что говорит в пользу канонической величины Θ_i^k .

В настоящей работе мы, однако, увидим, что метод бесконечно малых преобразований приводит именно к комплексу \mathfrak{X}_i^k , если исходить из вариационного принципа в другой форме. Известно, что уравнения гравитационного поля могут быть получены из нелагранжева вариационного принципа, если в качестве подынтегрального выражения варьируемого интеграла взять плотность скалярной кривизны

$$\mathfrak{R} = \sqrt{-g} R, \quad (16)$$

которая является функцией g^{ik} и их первых и вторых производных по пространственно-временным координатам. На самом деле, из этого вариационного принципа обычно исходят при выводе лагранжева принципа. В противоположность лагранжиану \mathfrak{L} величина \mathfrak{R} является скалярной плотностью при произвольных пространственно-временных преобразованиях. Поэтому метод бесконечно малых преобразований, примененный к \mathfrak{R} вместо \mathfrak{L} , приводит к комплексу с более широкими свойствами симметрии, и, как мы увидим в § 3, он приводит именно к величине $\mathfrak{X}_i^{k_1}$.

В § 2 описывается «метод бесконечно малых преобразований» для общего случая уравнений поля, следующих из нелагранжева вариационного принципа, в котором подынтегральное выражение V в варьируемом интеграле зависит также от производных переменных поля выше первого порядка. Этот метод применяется в § 3 к гравитационному полю, причем величина V равна \mathfrak{R}/κ . Как отмечено выше, это приводит непосредственно к соотношениям (10)–(13). В качестве примера мы применяем этот метод также к плотности лагранжиана материи и в этом случае, конечно, приходим к известным результатам Розенфельда [13] и Белинфанте [14], относящимся к симметричной форме тензора энергии, связанной с материей. Это показано в § 4. В остальных параграфах более подробно исследованы некоторые трансформационные свойства комплекса \mathfrak{X}_i^k при произвольных пространственно-временных преобразованиях. Полученные результаты предполагают конкретизацию понятия локальной инерциальной системы.

¹⁾ Ср. Мицкевич Н. В., Ann. d. Phys. 1, 319 (1958).—
Прим. ред.

§ 2. Метод бесконечно малых преобразований в применении к нелагранжевым системам полей

Рассмотрим, вообще говоря, незамкнутую систему полей с переменными поля $Y^A(x)$ и их производными по пространственно-временным координатам

$$Y_i^A \equiv \frac{\partial Y^A}{\partial x^i}, \quad Y_{i,k}^A \equiv \frac{\partial^2 Y^A}{\partial x^i \partial x^k}, \quad \dots$$

Предполагается, что уравнения поля могут быть получены из вариационного принципа. Прежде всего предположим, что подынтегральное выражение варьируемого интеграла V является алгебраической функцией лишь величин Y^A и их производных первого и второго порядков. Тогда уравнения поля примут вид

$$\frac{\delta V}{\delta Y^A} = -J^A, \quad (17)$$

где величины J^A являются «источниками» поля и, вообще говоря, зависят не только от переменных Y^A и их производных. Здесь

$$\frac{\delta V}{\delta Y^A} = \frac{\partial V}{\partial Y^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_i^A} \right)_{,i} + \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i,k}^A} \right)_{,i,k} \quad (18)$$

суть «вариационные производные» от величины V по переменным Y^A . Содержащиеся в (18) частные производные имеют несколько символический характер, так как Y^A , Y_i^A и $Y_{i,k}^A$ не являются, вообще говоря, действительно независимыми переменными. Они определяются следующим образом. Рассмотрим произвольные вариации δY^A величин Y^A , которые подразумевают определенные вариации

$$\delta Y_i^A = (\delta Y^A)_{,i}, \quad \delta Y_{i,k}^A = (\delta Y^A)_{,i,k} \quad (19)$$

величин Y_i^A и $Y_{i,k}^A$, а также алгебраического выражения $V(Y^A, Y_i^A, Y_{i,k}^A)$. Тогда частные производные в (18) следует *определить* соответственно как коэффициенты при

δY^A , δY_i^A и $\delta Y_{i,k}^A$ в вариации δV величины V , т. е.

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial Y^A} \delta Y^A + \frac{\partial V}{\partial Y_i^A} \delta Y_i^A + \frac{\partial V}{\partial Y_{i,k}^A} \delta Y_{i,k}^A \quad (20)$$

(суммирование по A , i и $k!$).

Ввиду того, что $\delta Y_{i,k}^A = \delta Y_{k,i}^A$, члены в уравнении (20) можно сгруппировать таким образом, чтобы коэффициенты при $\delta Y_{i,k}^A$ и при $\delta Y_{k,i}^A$ совпали. При этом условии мы получим

$$\frac{\partial V}{\partial Y_{i,k}^A} = \frac{\partial V}{\partial Y_{k,i}^A}. \quad (21)$$

В случае, когда переменные Y^A не независимы (например, в некоторых дальнейших приложениях), скажем, $Y^A = Y^{A'}$, мы используем аналогичное правило симметризации и получим

$$\frac{\partial V}{\partial Y^A} = \frac{\partial V}{\partial Y^{A'}}. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь произвольное бесконечно малое пространственно-временное преобразование

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x). \quad (23)$$

Во всех рассмотренных ниже случаях локальная вариация $Y^A(x)$

$$\delta Y^A = \bar{Y}^A(x) - Y^A(x) \quad (24)$$

имеет вид

$$\delta Y^A = u^{Ak}_i \xi^i_{,k} - Y^A_i \xi^i, \quad (25)$$

где u^{Ak}_i — линейные функции переменных поля. Поэтому с помощью соотношений (19) получим

$$\delta Y^A_l = u^{Ak}_i \xi^i_{,k,l} + (u^{Ak}_{i,l} - Y^A_i \delta_l^k) \xi^i - Y^A_{i,l} \xi^i. \quad (26)$$

Для обеспечения общей ковариантности уравнений поля (17) мы предполагаем теперь, что величина V есть скалярная плотность. Поэтому в любой точке четырехмерного мира и для произвольных функций $\xi^i(x)$ должно

иметь место соотношение

$$\delta V + (V\xi^k)_{,k} = 0. \quad (27)$$

Если мы интегрируем соотношения (27) по конечной области Ω четырехмерного мира, то путем интегрирования по частям при равенстве нулю всех функций $\xi^i(x)$, а также их производных первого и второго порядков на гиперповерхности, ограничивающей область Ω , получим

$$\int \delta V dx = \int \frac{\delta V}{\delta Y^A} \delta Y^A dx = 0, \quad (28)$$

где $\delta V/\delta Y^A$ — вариационная производная, определяемая равенством (18).

Тогда, учитывая соотношение (25) и продолжая интегрировать по частям, получаем

$$-\int \left[\frac{\delta V}{\delta Y^A} Y_i^A + \left(\frac{\delta V}{\delta Y^A} u^{Ak}_i \right)_{,k} \right] \xi^i dx = 0. \quad (29)$$

Ввиду произвольности функций $\xi^i(x)$ внутри области Ω приходим к тождеству

$$\frac{\delta V}{\delta Y^A} Y_i^A + \left(\frac{\delta V}{\delta Y^A} u^{Ak}_i \right)_{,k} = 0. \quad (30)$$

Выражение (20) для вариации V может быть также записано в виде

$$\delta V = \frac{\delta V}{\delta Y^A} \delta Y^A + \left[\left[\frac{\partial V}{\partial Y^A_k} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y^A_{k,l}} \right)_{,l} \right] \delta Y^A + \frac{\partial V}{\partial Y^A_{k,l}} \delta Y^A_{k,l} \right]_{,k}. \quad (31)$$

Подставляя выражения (25) и (26) для δY^A и $\delta Y^A_{k,l}$ в (31), получаем соотношение, содержащее ξ^i и их производные первого и второго порядков. После некоторых преобразований и использования тождества (30), соотношение (27) может быть записано в виде

$$-S_{i,k}^k \xi^i - [S_i^k - V_{i,l}^{kl}] \xi^i_{,k} + \\ + [V_i^{kl} + V_{i,m}^{klm}] \xi^i_{,k,l} + V_i^{klm} \xi^i_{,k,l,m} = 0, \quad (32)$$

где

$$S_i^k = -\frac{\delta V}{\delta Y^A} u_i^{Ak} + \left[\frac{\partial V}{\partial Y_h^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{k,l}^A} \right)_{,l} \right] Y_i^A + \frac{\partial V}{\partial Y_{k,l}^A} Y_{i,l}^A - V \delta_i^k, \quad (33)$$

$$V_i^{kl} = \left[\frac{\partial V}{\partial Y_l^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{l,m}^A} \right)_{,m} \right] u_i^{Ak} + \frac{\partial V}{\partial Y_{l,m}^A} (u_i^{Ak,m} - Y_i^A \delta_m^k), \quad (34)$$

$$V_i^{klm} = V_i^{kml} = u_i^{Ak} \frac{\partial V}{\partial Y_{l,m}^A}. \quad (35)$$

Так как уравнение (32) должно удовлетворяться при произвольном выборе функций $\xi^i(x)$, получаем следующие тождества:

$$S_i^k{}_{,k} = 0, \quad (36)$$

$$S_i^k = V_i^{kl}{}_{,l}, \quad (37)$$

$$V_i^{kl} + V_i^{lk} + (V_i^{klm} + V_i^{lkm})_{,m} = 0, \quad (38)$$

$$V_i^{klm} + V_i^{lmk} + V_i^{mkl} = 0, \quad (39)$$

$$V_i^{klm} = V_i^{kml}.$$

Тождество (36) показывает, что величина S_i^k , определяемая формулой (33), удовлетворяет дивергенциальному соотношению, и использованный метод приводит однозначно, с точностью до постоянного множителя, к выражению (33). Если бы нашей целью было лишь получение соотношений (33) и (36), можно было бы получить этот результат гораздо проще из рассмотрения «жесткого инфинитезимального параллельного смещения» системы координат, когда величины ξ^i являются постоянными ϵ^i . Тогда из (25) и (26) получим

$$\delta Y^A = -Y_i^A \epsilon^i, \quad \delta Y_{i,l}^A = -Y_{i,l}^A \epsilon^i. \quad (40)$$

Подставляя эти выражения в (31) и (27) и учитывая тождество (30), получаем непосредственно

$$-\epsilon^i S_i^k{}_{,k} = 0, \quad (41)$$

откуда, вследствие произвольности постоянных ϵ^i , приходим к (36).

Из тождества (39) получим

$$\left(V_i^{mkl} + \frac{1}{2} V_i^{klm} \right)_{,l,m} = \frac{1}{2} (V_i^{mkl} + V_i^{lkm} + V_i^{klm})_{,l,m} = 0. \quad (42)$$

Таким образом, если ввести новую величину U_i^{kl} , положив

$$U_i^{kl} = V_i^{kl} - \frac{2}{3} \left(V_i^{mkl} + \frac{1}{2} V_i^{klm} \right)_{,m}, \quad (43)$$

то из равенств (37) и (42) получим

$$S_i^k = U_i^{kl}_{,l}. \quad (44)$$

Это выражение имеет то преимущество, что величина U_i^{kl} антисимметрична по индексам k и l , так что тождество (36) является непосредственным следствием (44).

Действительно, на основании (43), (38) и (39) получим

$$\begin{aligned} U_i^{kl} + U_i^{lk} &= V_i^{kl} + V_i^{lk} - \\ &- \frac{2}{3} \left[V_i^{mkl} + V_i^{mlk} + \frac{1}{2} (V_i^{klm} + V_i^{lkm}) \right]_{,m} = \\ &= \left[V_i^{mkl} - \frac{4}{3} V_i^{mkl} - \frac{1}{3} (V_i^{klm} + V_i^{lkm}) \right]_{,m} = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$U_i^{kl} = -U_i^{lk}. \quad (45)$$

Поэтому можно записать U_i^{kl} в явно антисимметричной форме

$$\begin{aligned} U_i^{kl} &= \frac{1}{2} (U_i^{kl} - U_i^{lk}) = \frac{1}{2} (V_i^{kl} - V_i^{lk}) - \frac{1}{6} (V_i^{klm} - V_i^{lkm})_{,m}, \\ U_i^{kl} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\left[\frac{\partial V}{\partial Y_i^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i,m}^A} \right)_{,m} \right] u_i^{Ak} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial V}{\partial Y_{l,m}^A} u_i^{Ak} - \frac{1}{3} \left[u_i^{Ak} \frac{\partial V}{\partial Y_{l,m}^A} \right]_{,m} \right) - \left(\overleftarrow{k}, \overrightarrow{l} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (46)$$

где последний член получается из первого путем взаимной замены индексов k и l .

Итак, метод бесконечно малых преобразований однозначно, с точностью до произвольного постоянного множи-

теля, приводит к величине S_i^k , удовлетворяющей соотношению (36) и на основании равенства (44) связанной с «суперпотенциалом», определенным соотношениями (43), (34), (35) или (46).

Изложенные выше соображения легко обобщить на случай, когда величина V является функцией переменных Y^A и их производных сколь угодно высоких порядков. Тогда вариационная производная V по переменным Y^A определяется равенством

$$\frac{\delta V}{\delta Y^A} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i_1, i_2, \dots, i_n}^A} \right)_{, i_1, i_2, \dots, i_n}. \quad (47)$$

(Здесь производится суммирование по n и для каждого n независимое суммирование по индексам i_1, i_2, \dots, i_n .)

Если V не зависит от производных Y^A выше второго порядка, определение (47), очевидно, сводится к (18). Мы вводим подобным же образом вариационные производные от V по $Y_i^A, Y_{i,k}^A, \dots$ с помощью равенств

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta Y_i^A} &= \frac{\partial V}{\partial Y_i^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i, i_1}^A} \right)_{, i_1} + \dots = \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i, i_1, \dots, i_n}^A} \right)_{, i_1, \dots, i_n}, \\ \frac{\delta V}{\delta Y_{i,k}^A} &= \frac{\partial V}{\partial Y_{i,k}^A} - \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i,k, i_1}^A} \right)_{, i_1} + \dots = \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{\partial V}{\partial Y_{i,k, i_1, \dots, i_n}^A} \right)_{, i_1, \dots, i_n} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (48)$$

В этом общем случае метод бесконечно малых преобразований приводит к следующему комплексу энергии-импульса S_i^k , удовлетворяющему соотношению (36):

$$\begin{aligned} S_i^k &= -\frac{\delta V}{\delta Y^A} u_i^{Ak} + \frac{\delta V}{\delta Y_k^A} Y_i^A + \frac{\delta V}{\delta Y_{k, l_1}^A} Y_{i, l_1}^A + \dots - \delta_i^k V = \\ &= -\frac{\delta V}{\delta Y^A} u_i^{Ak} + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\delta V}{\delta Y_{k, l_1, \dots, l_n}^A} \right) Y_{i, l_1, \dots, l_n}^A - \delta_i^k V. \end{aligned} \quad (49)$$

Прежде всего, ясно, что тождество (30) остается справедливым, так как соображения, приведшие к уравнениям (27) — (30), остаются в силе. Тогда, если рассматривать жесткое смещение при $\xi^i = \varepsilon^i = \text{const}$, когда

$$\delta Y_{i_1, \dots, i_n}^A = -Y_{i_1, \dots, i_n}^A \varepsilon^i, \quad (50)$$

легко заметить, что соотношения (41), а следовательно, и (36), удовлетворяются и в этом случае при S_i^k , определяемой равенством (49).

§ 3. Гравитационные поля

Известно, что гравитационное поле может трактоваться как лагранжева система с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} g^{ih} (\Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l), \quad (51)$$

где Γ_{kl}^i — символы Кристоффеля. Действительно, если все вариации переменных поля g^{ik} обращаются в нуль на границе области Ω в четырехмерном мире, то получим

$$\delta \int_{\Omega} \mathcal{L} dx = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ik}} \delta g^{ik} dx = \int_{\Omega} \mathcal{G}_{ik} \delta g^{ik} dx, \quad (52)$$

где

$$\mathcal{G}_{ik} = \sqrt{-g} G_{ik} = \sqrt{-g} \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right). \quad (53)$$

Поэтому уравнения поля имеют вид

$$\frac{1}{\kappa} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{\kappa} \mathcal{G}_{ik} = -\sqrt{-g} T_{ik}. \quad (54)$$

Из сравнения уравнений (54) и (17) видно, что речь идет о частном случае систем, рассмотренных в § 2. Здесь переменными поля Y^A являются величины g^{ik} , а $V = \mathcal{L}/\kappa$ есть функция Y^A и лишь первых их производных. Следовательно,

$$\frac{\delta V}{\delta Y^A} = \frac{1}{\kappa} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{ik}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{il}}, l \right) \right]. \quad (55)$$

Так как $g^{ik} = g^{ki}$, мы имеем здесь случай, когда некоторые из Y^A равны между собой. Таким образом,

согласно условию, указанному на стр. 91, уравнения (22) выполняются, т. е.

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g^{ih}} = \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g^{ki}}, \quad \frac{\delta \mathfrak{Q}}{\delta g^{ih}} = \frac{\delta \mathfrak{Q}}{\delta g^{ik}}. \quad (56)$$

Однако величина $V = \mathfrak{Q}/\kappa$ ведет себя как скалярная плотность лишь при *линейных* пространственно-временных преобразованиях. Поэтому в таком случае могут быть получены лишь тождества (36) и (37), так как для линейных преобразований $\xi_{,k}^i, l = \xi_{,k}^i, l, m = 0$, что означает исчезновение двух последних членов в (32). Простой расчет показывает, что в этом случае

$$S_i^k = 2\Theta_i^k, \quad V_i^{kl} = 2s_i^{kl}, \quad (57)$$

где величины Θ_i^k и s_i^{kl} определены равенствами (1), (3) и (4). Кроме того, равенство (30) совпадает со свернутыми тождествами Бианки:

$$G_i^k{}_{;k} \equiv \frac{1}{V-\overline{g}} \frac{\partial V-\overline{g} G_i^k}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g_i^{rs} G_{rs} = 0. \quad (58)$$

Это уравнение, однако, не может быть получено с помощью метода, использованного в § 2, поскольку в таком случае потребовалась бы инвариантность $\int_{\Omega} V dx = (1/\kappa) \int_{\Omega} \mathfrak{Q} dx$ относительно произвольных пространственно-временных преобразований.

Более удовлетворительной является трактовка гравитационного поля как нелагранжевой системы типа рассмотренных в § 2, причем

$$V = \frac{\mathfrak{R}}{\kappa} = \frac{V-\overline{g} R}{\kappa}. \quad (59)$$

Эта величина зависит от g^{ik} и их первых и вторых производных g_l^{ik} и $g_{l,m}^{ik}$. В этом случае мы также приходим к уравнению типа (52), т. е.

$$\delta \int_{\Omega} \mathfrak{R} dx = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta g^{ih}} \delta g^{ih} dx = \int_{\Omega} \mathfrak{G}_{ih} \delta g^{ih} dx, \quad (60)$$

или

$$\frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta g^{ik}} = \mathfrak{G}_{ik}. \quad (61)$$

Причина этого обстоятельства состоит в том, что \mathfrak{R} отличается от \mathfrak{Q} лишь слагаемым типа дивергенции. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{Q} + \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{h} &= \kappa h_r^{rl}, \end{aligned} \quad (62)$$

Это следует непосредственно из (1) и (8), если заметить, что

$$\begin{aligned} \Theta_r^r &= \sqrt{-g} (T_r^r + \theta_r^r) = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} G_r^r + \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g_r^{lm}} g_r^{lm} - 4\mathfrak{Q} \right] = \frac{1}{\kappa} (\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}). \end{aligned} \quad (63)$$

В последнем соотношении мы воспользовались тем обстоятельством, что \mathfrak{Q} является однородной функцией g_r^{lm} 2-й степени. Пользуясь величинами h_i^{kl} , определяемыми соотношениями (7), легко показать, что

$$h_r^{rl} = \frac{1}{\kappa} (\sqrt{-g} g_m^{lm} + 2g^{lm} (\sqrt{-g})_{,m}) = \frac{1}{\kappa \sqrt{-g}} (-g g^{lm})_{,m} \quad (64)$$

(см., например, Приложение в работе [10]).

При произвольных вариациях δg^{ik} , обращаясь в нуль на границе области Ω , теперь получим

$$\delta \int_{\Omega} \mathfrak{h} dx = \int_{\Omega} \frac{\delta \mathfrak{h}}{\delta g^{ik}} \delta g^{ik} dx = \kappa \int_{\Omega} (\delta h_r^{rl})_{,l} dx = 0, \quad (65)$$

т. е.

$$\frac{\delta \mathfrak{h}}{\delta g^{ik}} = 0. \quad (66)$$

Если теперь принять

$$V = \frac{1}{\kappa} \mathfrak{R}, \quad (67)$$

уравнения поля примут вид (17), т. е.

$$\frac{1}{\kappa} \mathfrak{G}_{ik} = \frac{1}{\kappa} \frac{\delta \mathfrak{Q}}{\delta g^{ik}} = \frac{1}{\kappa} \frac{\delta \mathfrak{R}}{\delta g^{ik}} = -\sqrt{-g} T_{ik}. \quad (68)$$

Поскольку \mathfrak{R} ведет себя как скалярная плотность при произвольных пространственно-временных преобразованиях, здесь остаются в силе соотношения (32) — (46). Бесконечно малое преобразование (23) дает теперь

$$\delta g^{rs} = g^{sk} \xi^r_{,k} + g^{rk} \xi^s_{,k} - g_i^{rs} \xi^i, \quad (69)$$

откуда из сравнения с (25) получим

$$u^{Ak}_i = u^{rsk}_i = \delta_i^r g^{sk} + g^{rk} \delta_i^s. \quad (70)$$

Тогда из (30), (68) и (70) получим прежде всего

$$\frac{2}{\kappa} \left[\frac{\partial \mathfrak{G}_i^k}{\partial x^k} + \frac{1}{2} g_i^{rs} \mathfrak{G}_{rs} \right] = 0, \quad (71)$$

т. е. тождества Бианки (58). Далее, используя (33), (59), (61), (62) и (70), находим

$$\begin{aligned} S_i^k = & -\frac{2}{\kappa} \mathfrak{G}_i^k + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g_k^{lm}} g_i^{lm} - \delta_i^k \mathfrak{Q} \right] + \\ & + \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_k^{rs}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{k,l}^{rs}} \right)_{,l} \right] g_i^{rs} + \\ & + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{k,l}^{rs}} \right) g_{i,l}^{rs} - \frac{1}{\kappa} \delta_i^k \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (72)$$

или, используя формулу (3) и уравнения поля (2),

$$S_i^k = \sqrt{-g} \left(T_i^k + 2\theta_i^k - \frac{1}{\kappa} G_i^k \right) + A_i^k - K_i^{kl}{}_{,l}, \quad (73)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa A_i^k = & \left[\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_k^{rs}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{k,l}^{rs}} \right)_{,l} \right] g_i^{rs} - \\ & - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{k,l}^{rs}} \right)_{,i} g_l^{rs} + \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{l,m}^{rs}} g_l^{rs} \right)_{,m} - \mathfrak{H} \right] \delta_i^k, \end{aligned} \quad (74)$$

$$K_i^{kl} = \frac{1}{\kappa} \left(\delta_i^k \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{l,m}^{rs}} - \delta_i^l \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial g_{k,m}^{rs}} \right) g_m^{rs} = -K_i^{lk}. \quad (75)$$

Как показано в Приложении А, при величине \mathfrak{h} , определяемой соотношениями (62) и (64), величина A_i^k тождественно равна нулю, а K_i^{kl} определяется соотношением

$$K_i^{kl} = \delta_i^k h_r^{rl} - \delta_i^l h_r^{rk}. \quad (76)$$

Следовательно,

$$S_i^k = \sqrt{-g} (T_i^k + t_i^k), \quad (77)$$

где

$$\sqrt{-g} t_i^k = -\frac{1}{\kappa} \mathfrak{G}_i^k + 2 \sqrt{-g} \theta_i^k - (\delta_i^k h_r^{rl} - \delta_i^l h_r^{rk})_{,i} \quad (78)$$

есть величина, определенная равенством (11). Таким образом, «сохраняющаяся» величина S_i^k равна в этом случае в точности псевдотензорной плотности энергии и импульса, определенной формулой (10).

Из соотношений (46), (62) и (70) для суперпотенциала U_i^{kl} получим выражение

$$\begin{aligned} \kappa U_i^{kl} = & \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g_l^{im}} g^{km} + \left[\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} \right)_{,m} \right] g^{ks} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} g_m^{ks} - \frac{1}{3} \left[\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} g^{ks} \right]_{,m} \right) - \overleftarrow{(k, l)}, \quad (79) \end{aligned}$$

$$U_i^{kl} = s_i^{kl} - s_i^{lk} + B_i^{kl} - B_i^{lk}, \quad (80)$$

где s_i^{kl} — величина, определенная равенствами (4)–(7), и

$$\begin{aligned} \kappa B_i^{kl} = & \left[\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} \right)_{,m} \right] g^{ks} + \\ & + \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} g_m^{ks} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_l^{is}, m} g^{ks} \right)_{,m}. \quad (81) \end{aligned}$$

Вычисление величин B_i^{kl} и U_i^{kl} выполнено в Приложении А, где обнаружено, что суперпотенциал U_i^{kl} равен в данном случае суперпотенциалу χ_i^{kl} , определяемому соотношением (13) и приводящему к тому, что соотношение (44) совпадает с (12) для \mathfrak{F}_i^k . Таким образом, метод бесконечно малых преобразований приводит с точностью до произвольного постоянного множителя непосредственно к выражениям (10) —

(13) для плотности псевдотензора энергии-импульса. Произвольный множитель определяется условием равенства правильным значениям интегралов P_i для «замкнутых» систем в (14); в случае $V = \mathfrak{R}/\kappa$ этот множитель равен единице.

§ 4. Поле материи

Предположим теперь, что «материя», порождающая гравитационное поле, имеет свойства тензорного поля и описывается совокупностью переменных поля $Q^a(x)$. (Для простоты мы исключаем из рассмотрения спиноры.) Предположим далее, что это поле лагранжева типа, т. е. уравнения поля материи имеют вид

$$\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta Q^a} = 0, \quad (82)$$

где \mathfrak{M} — скалярная плотность, зависящая от $Q^a(x)$, $g^{ih}(x)$ и их производных первого порядка, а симметричный тензор материи получается путем дифференцирования \mathfrak{M} по g^{ih} , т. е.

$$\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta g^{ik}} = \sqrt{-g} T_{ik}. \quad (83)$$

Во всех случаях на практике \mathfrak{M} не зависит от g^{ih} :

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(g^{ih}, Q^a, Q_{,i}^a). \quad (84)$$

Это позволяет выводить как уравнения гравитационного поля (2), так и уравнения поля материи (82) из вариационного принципа

$$\delta \int \left(\frac{1}{\kappa} \mathfrak{R} + \mathfrak{M} \right) dx = 0 \quad (85)$$

при независимом варьировании g^{ih} и Q^a .

Мы можем теперь применить общие рассуждения § 2 к незамкнутым системам, для которых

$$\begin{aligned} V &= \mathfrak{M}, \\ Y^A &= \{g^{ih}, Q^a\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Как мы увидим здесь, этот путь ведет к частному случаю известного соотношения между симметричным и «каноническим» тензорами материи, открытого Розенфельдом [13]

и Белинфанте [14]. Полагая $V = \mathfrak{M}(g^{ih}, Q^a, Q_{,i}^a)$, на основании (33), (70) и (83), получаем

$$S_i^h = -2\sqrt{-g} T_i^h - \frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta Q^a} u^{ah}{}_i + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Q_{,i}^a} Q_{,i}^a - \mathfrak{M} \delta_i^h. \quad (87)$$

С другой стороны, в данном случае из (44) и (46) следует

$$U^{hl}{}_i = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Q_{,l}^a} u^{ah}{}_i - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Q_{,h}^a} u^{al}{}_i \right], \quad (88)$$

$$S_i^h = U_i^{hl}{}_{,l}.$$

Таким образом, из (87) и (88) получим

$$\sqrt{-g} T_i^h = \sqrt{-g} (\check{T}_i^h + \hat{T}_i^h), \quad (89)$$

где

$$\sqrt{-g} \check{T}_i^h = \frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial Q_{,h}^a} Q_{,i}^a - \left(\frac{\mathfrak{M}}{2} \right) \delta_i^h, \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \hat{T}_i^h &= -\frac{\delta (\mathfrak{M}/2)}{\delta Q^a} u^{ah}{}_i - \\ &- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial Q_{,l}^a} u^{ah}{}_i - \frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial Q_{,h}^a} u^{al}{}_i \right]_{,l}. \end{aligned} \quad (91)$$

Здесь \check{T}_i^h , вообще говоря, несимметричный канонический тензор материи, получаемый из «лагранжиана материи»:

$$\mathfrak{Q}^{(m)} = -\frac{\mathfrak{M}}{2}, \quad (92)$$

а \hat{T}_i^h — член, который необходимо прибавить к \check{T}_i^h с тем, чтобы получить симметричный тензор материи T_i^h . В равенстве (91) первый член правой части равен нулю вследствие удовлетворения уравнений поля (82), а последний член в случае материальной системы, локализованной в конечной области трехмерного пространства, не вносит вклада в полную энергию и импульс материи. В самом деле,

$$\begin{aligned} P_i^{(m)} &= \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} T_i^a dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \check{T}_i^a dx^1 dx^2 dx^3 - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2c} \int U_i^{4\lambda}{}_{,\lambda} dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \check{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (93)$$

Вообще говоря, $P_i^{(m)}$ не является постоянным во времени. В замкнутой системе сохраняется лишь сумма частей, соответствующих материи и гравитационному полю, т. е.¹⁾

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{c} \int \mathfrak{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} [T_i^4 + t_i^4] dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned} \quad (94)$$

Для примера рассмотрим случай, когда поле материи представлено лишь электромагнитным полем. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{rl} g^{sm} F_{rs} F_{lm}, \\ F_{ik} &= A_{k,i} - A_{i,k} = -F_{ki}. \end{aligned} \quad (95)$$

В качестве переменных поля Q^a возьмем компоненты вектор-потенциала A_i . Тогда

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial A_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial A_{i,h}} = -2 \sqrt{-g} F^{ih}, \quad (96)$$

а уравнения поля (82) суть уравнения Максвелла

$$\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta A_i} = -\frac{\partial}{\partial x^k} (2 \sqrt{-g} F^{ik}) = 0. \quad (97)$$

Далее, исходя из равенства

$$\begin{aligned} &\delta (\sqrt{-g} g^{rl} g^{sm}) = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} [-g_{ik} g^{rl} g^{sm} + g^{sm} (\delta_i^r \delta_k^l + \delta_k^r \delta_i^l) + g^{rl} (\delta_i^s \delta_k^m + \delta_k^s \delta_i^m)] \delta g^{ik}, \end{aligned}$$

справедливого при любых вариациях g^{ih} , из (83) получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} T_{ik} &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g^{ik}} = \frac{1}{2} F_{rs} F_{lm} \frac{\partial (\sqrt{-g} g^{rl} g^{sm})}{\partial g^{ik}} = \\ &= \sqrt{-g} [F_{il} F_k^l - \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm}]. \end{aligned} \quad (98)$$

¹⁾ В связи с этим замечанием о неодинаковой природе складываемых здесь величин см. Д. Иваненко и Н. Мицкевич, ЖЭТФ 37, 868 (1959).—Прим. ред.

Это обычное выражение тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

С другой стороны, на основании (90), (95) и (96) канонический тензор равен

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \tilde{T}_i^k &= \frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial A_{l,k}} A_{l,i} - \left(\frac{\mathfrak{M}}{2} \right) \delta_i^k = \\ &= -\sqrt{-g} F^{lk} A_{l,i} - \frac{\sqrt{-g}}{4} F_{lm} F^{lm} \delta_i^k. \end{aligned} \quad (99)$$

Он отличается от (98) членом $\sqrt{-g} \widehat{T}_i^k$, заданным равенством (91). Так как A_i является четырехмерным вектором, при бесконечно малом преобразовании его имеем

$$\delta A_r = -A_i \xi_{,r}^i - A_{r,i} \xi^i = u_r^k \xi_{,k}^i - A_{r,i} \xi^i, \quad (100)$$

т. е.

$$u^{ah}{}_i \equiv u_r^h{}_i = -\delta_r^h A_i.$$

Таким образом, на основании равенств (91) и (96) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \widehat{T}_i^k &= -\left(\frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial A_{r,l}} \right)_{,l} \delta_r^k A_i + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial A_{r,l}} \delta_r^k A_i - \frac{\partial (\mathfrak{M}/2)}{\partial A_{r,k}} \delta_r^l A_i \right]_{,l} = \\ &= (\sqrt{-g} F^{kl})_{,l} A_i - \frac{1}{2} \left[\sqrt{-g} F^{kl} A_i - \sqrt{-g} F^{lk} A_i \right]_{,l} \end{aligned}$$

или

$$\sqrt{-g} \widehat{T}_i^k = -\sqrt{-g} F^{kl} A_{i,l}. \quad (101)$$

Складывая выражения (99) и (101), мы снова получаем выражение (98) для симметричного тензора материи в соответствии с общим уравнением (89).

В заключение резюмируем основные результаты предыдущих параграфов. Плотность полного псевдотензора энергии и импульса \mathfrak{T}_i^k может быть записана как сумма двух частей, соответствующих материи (T_i^k) и гравитационному полю (t_i^k):

$$\mathfrak{T}_i^k = \sqrt{-g} [T_i^k + t_i^k], \quad (102)$$

где, на основании равенств (89) — (92),

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} T_i^k &= -Q_{,i}^a \frac{\partial \Omega^{(m)}}{\partial Q_{,k}^a} + \delta_i^k \Omega^{(m)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[u_i^{ak} \frac{\partial \Omega^{(m)}}{\partial Q_{,l}^a} - u_i^{al} \frac{\partial \Omega^{(m)}}{\partial Q_{,k}^a} \right]_{,l} + u_i^{ak} \frac{\delta \Omega^{(m)}}{\delta Q^a} \end{aligned} \quad (103)$$

и, на основании равенств (72) — (78),

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} t_i^k &= -\frac{1}{\kappa} \mathfrak{E}_i^k + 2 \sqrt{-g} \theta_i^k - (\delta_i^k h_r^l - \delta_i^l h_r^k)_{,l} = \\ &= \frac{1}{\kappa} \left\{ -\frac{\delta \mathfrak{M}}{\delta g^{il}} g^{kl} + \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g_k^{rs}} - \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g_{k,l}^{rs}} \right)_{,l} \right] g_i^{rs} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial g_{k,l}^{rs}} g_{i,l}^{rs} - \mathfrak{M} \delta_i^k \right\}. \end{aligned} \quad (104)$$

Если не считать последних двух членов, не вносящих вклада в $P_i^{(m)}$, отвечающая материи часть (103) полного псевдотензора энергии-импульса обладает канонической формой, соответствующей лагранжиану материи $\mathfrak{Q}^{(m)} = -\mathfrak{M}/2$. С другой стороны, отвечающая гравитационному полю часть (104) обладает совершенно иной структурой и не может быть выведена из плотности лагранжиана согласно обычным правилам. Это обстоятельство может указывать на возможный факт, что «квантование» гравитационных полей должно производиться иным путем, чем по известным правилам обычной квантовой механики. Верно также, что величина $\sqrt{-g} t_i^k$ в (104) может быть записана в виде

$$\sqrt{-g} t_i^k = \sqrt{-g} \theta_i^k + \psi_i^{kl}, \quad (105)$$

где

$$\psi_i^{kl} = h_i^{kl} - \delta_i^k h_r^{rl} + \delta_i^l h_r^{rk} \quad (106)$$

есть величина, антисимметричная по индексам k и l . Поэтому при интегрировании по частям полные энергия и импульс гравитационного поля принимают вид

$$\begin{aligned} P_i^{(g)} &= \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} t_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \frac{1}{c} \int \sqrt{-g} \theta_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 + A_i, \end{aligned} \quad (107)$$

где A_i зависит от переменных гравитационного поля лишь

на пространственной бесконечности. Гравитационное поле может поэтому формально трактоваться как каноническая система. Однако, даже если не обращать внимания на трудности, уже имеющиеся в классическом рассмотрении и проявляющиеся при переходе от лагранжевой к гамильтоновой форме вследствие различных типов ограничений [15—18], мы все же сталкиваемся с трудной проблемой определения правильного порядка сомножителей при переходе к квантовому описанию по обычным правилам квантовой механики. Следует отметить, что разделение величины \mathfrak{F}_i^k на части, отвечающие материи и гравитационному полю, является в значительной степени произвольным ввиду того обстоятельства, что тензор материи является источником гравитационного поля. С помощью уравнений гравитационного поля бóльшая или меньшая часть тензора T_i^k могут быть исключены из \mathfrak{F}_i^k . Если мы полностью исключим T_i^k , то придем к простому и удобному выражению (12), зависящему лишь от переменных гравитационного поля.

Для полных энергии и импульса системы получим тогда величину

$$P_i = \frac{1}{c} \int \mathfrak{F}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{c} \int \chi_{i, \lambda}^{4\lambda} dx^1 dx^2 dx^3,$$

которая может быть на основании теоремы Гаусса записана в форме поверхностного интеграла, зависящего лишь от переменных гравитационного поля на пространственной бесконечности.

§ 5. Трансформационные свойства \mathfrak{F}_i^k и t_i^k

Комплекс энергии-импульса является тензорной плотностью лишь при *линейных* преобразованиях. Исследуем теперь трансформационные свойства \mathfrak{F}_i^k и t_i^k при более общих пространственно-временных преобразованиях. Для этого сначала рассмотрим произвольное векторное поле $a^i(x)$ и антисимметричную тензорную плотность

$$\mathfrak{F}^{kl} = -\mathfrak{F}^{lk} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (a_{n, m} - a_{m, n}) g^{km} g^{ln}, \quad (108)$$

$$a_i(x) = g_{ik} a^k(x).$$

Отсюда видно, что для произвольного векторного поля $a^i(x)$ векторная плотность

$$\mathfrak{F}^k = \mathfrak{F}_{,l}^{kl} \quad (109)$$

удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{F}_{,k}^k = 0 \quad (110)$$

ввиду антисимметрии величины \mathfrak{F}^{kl} по индексам k и l .

Как было замечено Комаром [19], векторная плотность \mathfrak{F}^k тесно связана с комплексом \mathfrak{F}_i^k . Действительно, полагая контравариантные компоненты произвольного векторного поля a^i равными постоянным ε^i в некоторой системе координат, получаем с помощью (108), (109), (12) и (13)

$$\mathfrak{F}^k = \varepsilon^i \left[\frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (g_{in, m} - g_{im, n}) g^{km} g^{ln} \right]_{,l} = \varepsilon^i \chi_i^{kl, l} = \varepsilon^i \mathfrak{F}_i^k. \quad (111)$$

С другой стороны, для произвольного векторного поля $a^i(x)$ найдем

$$\mathfrak{F}^{kl} = a^i \chi_i^{kl} - a_{,m}^i b_i^{klm}, \quad (112)$$

так как

$$a_{n, m} = a^i g_{in, m} - a_{,m}^i g_{in},$$

где b_i^{klm} — тензорная плотность 4-го ранга, определяемая соотношением

$$b_i^{klm} = -b_i^{lkm} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (\delta_i^k g^{lm} - \delta_i^l g^{km}). \quad (113)$$

Следовательно, на основании (109), (112) и (12) получим

$$\mathfrak{F}^k = a^i \mathfrak{F}_i^k + a_{,l}^i (\chi_i^{kl} - b_i^{klm, m}) - a_{,m}^i b_i^{klm}. \quad (114)$$

Рассмотрим теперь произвольное пространственно-временное преобразование $(x^i) \rightarrow (x'^i)$, для которого

$$a_k^i(x) = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}, \quad \tilde{a}_k^i(x') = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}. \quad (115)$$

Так как \mathfrak{F}^k — векторная плотность, то

$$\mathfrak{F}'^k = |\tilde{\alpha}| \alpha_i^k \mathfrak{F}^i = |\tilde{\alpha}| \alpha_i^k \{a^r \mathfrak{F}_r^i + a_{,m}^r (\chi_r^{im} - b_r^{lmn, n}) - a_{,m}^r b_r^{lmn}\}, \quad (116)$$

где $|\tilde{\alpha}| = \det \{\tilde{\alpha}_k^i\}$ — детерминант матрицы $\tilde{\alpha}_k^i$. Полагая компоненты a'^i в штрихованной системе равными константам ϵ^i , получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'^k &= \epsilon^i \tilde{\mathfrak{I}}_i'^k, \\ a^r &= \tilde{\alpha}_i^r \epsilon^i, \\ a_{,m}^r &= \alpha_m^s \tilde{\alpha}_{i,s}^r \epsilon^i, \\ a_{,m,n}^r &= \alpha_m^s \alpha_{i,s}^r \epsilon^i + \alpha_m^s \alpha_n^t \tilde{\alpha}_{i,s,t}^r \epsilon^i,\end{aligned}\tag{117}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{i,s}^r &= \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^i \partial x'^s}, \quad \alpha_{m,n}^s = \frac{\partial^2 x'^s}{\partial x^m \partial x^n}, \\ \tilde{\alpha}_{i,s,t}^r &= \frac{\partial^3 x^r}{\partial x'^i \partial x'^s \partial x'^t}, \dots\end{aligned}\tag{118}$$

Подстановка выражений (117) в (116) при учете произвольности констант ϵ^i приводит к следующему закону преобразования для комплекса $\tilde{\mathfrak{I}}_i^k$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{I}}_i'^k &= |\tilde{\alpha}| \alpha_l^k \tilde{\alpha}_i^m \tilde{\mathfrak{I}}_m^l + |\tilde{\alpha}| \alpha_l^k \{ \tilde{\alpha}_{i,s}^r \alpha_m^s (\chi_r^{lm} - b_r^{lnm}) - \\ &\quad - (\tilde{\alpha}_{i,s,t}^r \alpha_m^s \alpha_n^t + \tilde{\alpha}_{i,s}^r \alpha_m^s \alpha_n) b_r^{lmn} \}.\end{aligned}\tag{119}$$

Последний член в правой части соотношения (119) описывает отклонение от закона преобразования тензорной плотности. При линейных преобразованиях, когда $\tilde{\alpha}_{i,s}^r = \tilde{\alpha}_{i,s,t}^r = 0$, этот член равен нулю в соответствии с тем фактом, что $\tilde{\mathfrak{I}}_i^k$ является аффинной тензорной плотностью. Более того, при чисто пространственных преобразованиях (15) мы получим

$$\tilde{\alpha}_4^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^4} = \delta_4^r, \quad \tilde{\alpha}_{4,s}^r = 0,\tag{120}$$

т. е.

$$\tilde{\mathfrak{I}}_4'^k = |\tilde{\alpha}| \alpha_l^k \tilde{\mathfrak{I}}_4^l.\tag{121}$$

Из этого соотношения видно, что четвертый столбец матрицы $\tilde{\mathfrak{I}}_i^k$ при преобразованиях (15) преобразуется как векторная плотность; это свойство было исходным требова-

нием при выводе величины \mathfrak{F}_i^k в работе [10]. Кажущаяся выделенность временной координаты в отношении этого свойства не является неожиданной, так как в этой теории плотности энергии и ее потока связаны с «временным столбцом» величины \mathfrak{F}_i^k . Действительно, если обозначить через a какое-либо значение индексов 1, 2, 3, 4, то a -й столбец величины \mathfrak{F}_a^k также будет преобразовываться как векторная плотность при преобразованиях

$$x'^a = x^a, \quad x'^i = f^i(x^k) \quad (i \neq a, \quad k \neq a), \quad (122)$$

так как в этом случае мы имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_a^r &= \frac{\partial x^r}{\partial x'^a} = \delta_a^r, \\ \mathfrak{F}_a'^k &= |\tilde{\alpha}| \alpha_i^k \mathfrak{F}_a^i. \end{aligned} \quad (123)$$

Однако при $a \neq 4$ это свойство не поддается простой физической интерпретации.

Так как отвечающая материи часть $\sqrt{-g}T_i^k$ комплекса \mathfrak{F}_i^k преобразуется как тензорная плотность, мы получим закон преобразования для гравитационного комплекса t_i^k , определенного равенствами (10) и (11), в форме

$$\begin{aligned} t_i'^k &= \alpha_i^k \tilde{\alpha}_i^m t_m^l + \alpha_i^k \{ \tilde{\alpha}_{i,s}^r \alpha_m^s (\chi_r^{lm} - b_r^{lnm}) - \\ &- (\tilde{\alpha}_{i,s}^r \alpha_m^s \alpha_n^t + \tilde{\alpha}_{i,s}^r \alpha_m^s \alpha_n^s) b_r^{lmn} \}. \end{aligned} \quad (124)$$

С помощью равенств (108), (109) и (111) можно найти удобное явное выражение для t_i^k . Прежде всего, в антисимметричном выражении (108) обычные производные $a_{n,m}$ можно заменить на ковариантные $a_n{}_{;m}$, являющиеся компонентами тензора. Следовательно,

$$\mathfrak{F}^{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (a^{l;k} - a^{k;l})$$

и

$$\mathfrak{F}^k = \mathfrak{F}^{kl} = \sqrt{-g} \left[\frac{\mathfrak{F}^{kl}}{\sqrt{-g}} \right]_{;l} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (a^l{}_{;k} - a^k{}_{;l}). \quad (125)$$

Применим далее правило коммутации для повторного ковариантного дифференцирования

$$a^{l ; k}{}_{; l} = a^l{}_{; l}{}^{; k} - R_i{}^{lk}{}_l a^i = (a^l{}_{; l})^{; k} - R_i{}^k a^i, \quad (126)$$

где R_{iklm} — тензор кривизны Римана, а R_{ik} — свернутый тензор кривизны. Поэтому на основании (125), (126) и уравнений поля (2) получим

$$\mathfrak{F}^k = \sqrt{-g} T_i^k a^i - \frac{\sqrt{-g} R}{2\kappa} \delta_i^k a^i + \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} [(a^l{}_{; l})^{; k} - (a^k{}_{; l})^{; l}]. \quad (127)$$

Выбирая теперь a^i равными постоянным ε^i , приходим, согласно (111), к формуле

$$\mathfrak{F}^k = \varepsilon^i \mathfrak{F}_i{}^k = \sqrt{-g} (T_i^k + t_i^k) \varepsilon^i \quad (128)$$

и после простых вычислений — к соотношению

$$\begin{aligned} (a^l{}_{; l})^{; k} - (a^k{}_{; l})^{; l} &= [(\Gamma_{il}^l)^{; k} - (\Gamma_{il}^k g^{lm})_{, m} - \\ &- \Gamma_{in}^k \Gamma_{ml}^l g^{mn} - \Gamma_{lm}^k \Gamma_{in}^m g^{ln}] \varepsilon^i. \end{aligned} \quad (129)$$

Поэтому, так как постоянные ε^i произвольны, соотношения (127) и (128) дают

$$t_i^k = -\frac{R}{2\kappa} \delta_i^k + \hat{t}_i^k, \quad (130)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa \hat{t}_i^k &= (\Gamma_{il}^l)^{; k} - (\Gamma_{il}^k)^{; l} - \\ &- \Gamma_{il}^k (g_m^{lm} + g^{lm} \Gamma_{mn}^n) - \Gamma_{in}^m \Gamma_{lm}^k g^{ln} \end{aligned} \quad (131)$$

и

$$(\Gamma_{kl}^i)^{; m} = (\Gamma_{kl}^i)_{, n} g^{mn}.$$

Разность между \hat{t}_i^k и t_i^k является тензором. Таким образом, закон преобразования (124) справедлив и для \hat{t}_i^k .

В силу уравнений (10), (13') и (71) t_i^k удовлетворяет закону сохранения

$$(\sqrt{-g} t_i^k)_{, k} = -(\sqrt{-g} T_i^k)_{, k} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{kl, i} T^{kl} \quad (132)$$

в любой координатной системе. Но, как известно, всегда можно бесчисленным множеством способов прийти к коор-

динатным системам, геодезическим в данной точке 0 в четырехмерном мире, т. е. к системам, в которых первые производные метрического тензора обращаются в нуль в точке 0. Тогда в этой точке, которую мы выбираем за начало координат геодезической системы, соотношение (132) сводится к

$$\begin{aligned} t_i^k{}_{,k} &= 0, \\ T_i^k{}_{,k} &= 0, \end{aligned} \quad (133)$$

т. е. закон сохранения принимает ту же форму, что и в инерциальной системе координат в специальной теории относительности. Поэтому геодезические системы координат часто называют *локальными инерциальными системами*. Однако, вообще говоря, комплекс t_i^k не равен нулю в геодезической системе, и, как мы увидим в § 7, представляется рациональным использовать последнее обозначение лишь для некоторого ограниченного класса геодезических систем. В некоторой общей геодезической системе, согласно (129), (131), (113) и (13), в начале координат имеем

$$\begin{aligned} t_i^k &= -\frac{\delta_i^k R}{2\kappa} + \hat{t}_i^k, \\ \hat{t}_i^k &= (\Gamma_{il}^l)_{,k} - (\Gamma_{il}^k)_{,l}, \\ \chi_i^{kl} &= 0, \quad b_{i,il}^{klm} = 0. \end{aligned} \quad (134)$$

Пусть теперь обе координатные системы (x^i) и (x'^i) в (124) являются геодезическими в точке 0, что означает равенство нулю в точке 0 первых производных от α_i^k , т. е.

$$\alpha_{m,n}^s(0) = 0. \quad (135)$$

Положим далее

$$\alpha_k^i(0) = \delta_k^i, \quad (135')$$

что не вносит существенного ограничения. Тогда в начале координат наших геодезических систем закон преобразования (124) принимает вид

$$t_i'^k = t_i^k - \tilde{\alpha}_{i,m,n}^r(0) b_r^{kmn}. \quad (136)$$

Здесь величины $\tilde{\alpha}_{i,m,n}^r$ могут представлять собою любой набор чисел, симметричный по индексам i , m и n .

Остается решить, могут ли коэффициенты $\tilde{\alpha}_{i,m,n}^r(0)$ быть выбраны таким образом, чтобы величины t_i^k обратились в нуль в точке 0. Легко видеть, что это не всегда возможно, так как диагональная сумма t_i^i , очевидно, инвариантна относительно перехода от одной геодезической системы к другой. В самом деле, из (136) получим

$$t_i^i = t_i^i, \quad (137)$$

так как последний член в (136) обращается в нуль при свертке по индексам i и k в связи с симметрией $\tilde{\alpha}_{i,m,n}^r$ и антисимметрией b_r^{imn} по индексам i и m .

Далее, вследствие (134)

$$\begin{aligned} \hat{t}_i^i &= (\Gamma_{il}^l)^i - (\Gamma_{il}^i)^l = 0, \\ \hat{t}_i^i &= -\frac{2R}{\kappa}, \end{aligned} \quad (138)$$

так что ясно, что преобразование (136) не может обратить t_i^k в нуль, если только скалярная кривизна не равна нулю в точке 0. С другой стороны, ввиду равенств $\hat{t}_i^i = \hat{t}_i^i = 0$ и законов преобразования (136), верных также и для \hat{t}_i^k , всегда представляется возможным выбрать такую геодезическую систему, в которой обращаются в нуль все компоненты \hat{t}_i^k .

В следующих параграфах мы увидим, что это в действительности имеет место для большой группы геодезических систем — для «локально нормальных» систем координат.

§ 6. Нормальные координатные системы

Среди координатных систем, являющихся геодезическими в данной точке 0, выделенную роль играют нормальные координаты, введенные еще Риманом для случая двумерных поверхностей. Определяются они следующим образом. Пусть (x^i) есть некоторая произвольная

система координат. Тогда геодезические линии могут быть определены уравнениями

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0, \quad (139)$$

где параметр λ определен с точностью до линейного преобразования. Для всех геодезических, кроме нулевых линий, параметр λ пропорционален инвариантному четырехмерному интервалу s . Рассмотрим теперь все геодезические, проходящие через точку O . Они определяются касательными в нуле векторами с компонентами $\beta^i = (dx^i/d\lambda)|_{x=0}$. В определенной конечной окрестности точки O будет лишь одна геодезическая, проходящая через данную точку P . Эту точку можно поэтому охарактеризовать четырьмя числами:

$$\overset{\circ}{x}^i = \beta^i (\lambda_P - \lambda_0), \quad \beta^i = \frac{dx^i}{d\lambda}(0), \quad (140)$$

являющимися нормальными координатами по Риману. Они определяются однозначно, так как не меняются при линейных преобразованиях параметра λ . Если точка P приближается к нулю, то линия, соединяющая O и P , определяет в нуле бесконечно малый вектор с контравариантными компонентами dx^i и $\overset{\circ}{dx}^i$ соответственно в двух координатных системах. Очевидно, в точке O $\overset{\circ}{dx}^i = dx^i$, т. е. $\overset{\circ}{\alpha}_h^i(0) = \delta_h^i$ и компоненты любого тензора совпадают в этих двух системах в начале координат. Итак, например,

$$\overset{\circ}{g}_{ih}(0) = g_{ih}(0), \quad \overset{\circ}{R}_{iklm}(0) = R_{iklm}(0). \quad (141)$$

Таким образом, однозначно определенная нормальная система $\overset{\circ}{x}^i$ может быть связана с любой системой x^i . Некоторое произвольное преобразование системы $(x^i) \rightarrow (x'^i)$, очевидно, индуцирует *линейное* преобразование $(\overset{\circ}{x}^i) \rightarrow (\overset{\circ}{x}'^i)$, сопоставленной ей нормальной системы. Нормальные системы координат в общем римановом пространстве предельно близки к прямолинейным системам в плоском пространстве. Из их определения следует, что всякая геодезическая, проходящая через начало координат,

описывается линейным параметрическим представлением в нормальных координатах, т. е.

$$\overset{\circ}{x}^i = \beta^i (\lambda - \lambda_0),$$

где β^i — константы. Таким образом,

$$\frac{d\overset{\circ}{x}^i}{d\lambda} = \beta^i = \frac{\overset{\circ}{x}^i}{\lambda - \lambda_0}, \quad \frac{d^2\overset{\circ}{x}^i}{d\lambda^2} = 0,$$

и с помощью уравнений (139), записанных в нормальных координатах, получим

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{hl}^i(\overset{\circ}{x}) \overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{x}^l = 0 \quad (142)$$

во всех точках четырехмерного мира. Необходимым и достаточным условием того, чтобы координатная система была нормальной, являются уравнения (142) или эквивалентные им уравнения

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{i,kl}(\overset{\circ}{x}) \overset{\circ}{x}^k \overset{\circ}{x}^l = 0. \quad (143)$$

При последовательных операциях дифференцирования этих уравнений, как показано в приложении Б, могут быть получены следующие значения производных метрического тензора в начале координат:

$$\overset{\circ}{g}_{ik, l}(0) = 0, \quad (144a)$$

$$\overset{\circ}{g}_{ik, l, m}(0) = \overset{\circ}{g}_{lm, i, k}(0) = -\frac{1}{3} [R_{ilmk}(0) + R_{imlk}(0)], \quad (144б)$$

$$\begin{aligned} &\overset{\circ}{g}_{ik, l, m, n}(0) = \\ &= \frac{1}{3} [R_{ilk m; n}(0) + R_{imkn; l}(0) + R_{inkl; m}(0)], \quad (144в) \end{aligned}$$

где $R_{ilmk}(0)$ — тензор кривизны Римана в точке 0. В малой окрестности точки 0 мы получим следующее приближенное выражение для $g_{ik}(x)$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{g}_{ik}(x) &= g_{ik}(0) + \frac{1}{2} \overset{\circ}{g}_{ik, l, m}(0) \overset{\circ}{x}^l \overset{\circ}{x}^m + \\ &+ \frac{1}{3!} \overset{\circ}{g}_{ik, l, m, n}(0) \overset{\circ}{x}^l \overset{\circ}{x}^m \overset{\circ}{x}^n \quad (145) \end{aligned}$$

с коэффициентами, заданными формулами (144). Линейные члены отсутствуют, так как, согласно (144а), нормальная система является частным случаем геодезической системы координат. Согласно (12), (13) и (144), в точке 0 находим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{I}}_i^k &= \frac{V^{-g}}{\varkappa} (\overset{\circ}{g}_{in,m;l} - \overset{\circ}{g}_{im,n;l}) g^{km} g^{ln} = \\ &= -\frac{V^{-g}}{3\varkappa} (R_{imln} + R_{ilmn} - R_{inlm} - R_{ilnm}) g^{km} g^{ln} = \\ &= -\frac{V^{-g}}{\varkappa} R_{il}{}^{kl} = -\frac{V^{-g}}{\varkappa} R_i^k = V^{-g} T_i^k - \frac{1}{2} \frac{V^{-g}}{\varkappa} R \delta_i^k. \end{aligned} \quad (146)$$

Мы использовали здесь свойства симметрии тензора Римана и выражение для свернутого тензора кривизны. Сравнение выражения (146) с (10) и (134) дает

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{t}_i^k &= -\frac{R}{2\varkappa} \delta_i^k, \\ \overset{\circ}{\hat{t}}_i^k &= 0 \end{aligned} \quad (147)$$

в начале нормальной системы координат.

Аналогичным образом, из (12), (13) и (144) в начале координат находим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathfrak{I}}_{i,r}^k &= \frac{V^{-g}}{\varkappa} (\overset{\circ}{g}_{in,m;l,r} - \overset{\circ}{g}_{im,n;l,r}) g^{km} g^{ln} = \\ &= -\frac{V^{-g}}{3\varkappa} (R_{inml;r} + R_{ilmr;n} + R_{irmn;l} - \\ &\quad - R_{imnl;r} - R_{ilnr;m} - R_{irnm;l}) g^{km} g^{ln}. \end{aligned} \quad (148)$$

С учетом свойств симметрии тензора Римана и тождеств Бианки это выражение может быть записано в виде

$$\overset{\circ}{\mathfrak{I}}_{i,r}^k = -\frac{2V^{-g}}{3\varkappa} (R_{il}{}^{kl}{}_{;r} - R_{ir}{}^{lk}{}_{;l}).$$

Далее,

$$R_{ir}{}^{lk}{}_{;l} = R_{ir}{}^{lk}{}_{;l} = -R^{lk}{}_{rl}{}_{;i} - R^{lk}{}_{li}{}_{;r} = R_r^k{}_{;i} - R_i^k{}_{;r}.$$

Таким образом, в начале нормальной системы мы имеем

$$\overset{\circ}{\mathfrak{I}}_{i,r}^k = -\frac{4\sqrt{V-g}}{3\kappa} \left(R_{i;r}^k - \frac{1}{2} R_{r;i}^k \right). \quad (149)$$

В соответствии с соотношением (13'), правая часть уравнения (149) обращается в нуль вследствие свернутых тождеств Бианки, если положить $r = k$ и просуммировать по индексу k .

§ 7. Локально нормальные координаты.

Локально инерциальные системы в пустом пространстве

Рассмотренные в предыдущем параграфе нормальные координаты ($\overset{\circ}{x}^i$) однозначно определяются условиями (141) и (142). Однако обычно представляют интерес лишь системы координат, являющиеся *локально* нормальными, т. е. когда условие (142) лишь приближенно выполняется в малой окрестности начала координат. В этой связи можно ввести понятия локально нормальных систем первого, второго и третьего порядков, в зависимости от того, удовлетворяется ли одно, два или все три соотношения (144) соответственно. Очевидно, локально нормальная система первого порядка есть просто геодезическая система. Исходя из произвольной системы координат (x^i), можно получить локально нормальную систему n -го порядка с помощью преобразования вида

$$\overset{\circ}{x}^i = P_{(n)}^i(x), \quad (150)$$

где $P_{(n)}^i(x)$ — полином степени $n+1$ относительно разностей координат $x^i - x_0^i$ с соответствующими коэффициентами. Здесь (x_0^i) обозначают координаты точки 0 в системе (x^i). Как показано в Приложении В, локально нормальные системы, например второго порядка, могут быть получены с помощью преобразования

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}^i = x^i + \frac{1}{2} \Gamma_{kl}^i(0)(x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l) + \frac{1}{3!} B_{klm}^i(0) \times \\ \times (x^k - x_0^k)(x^l - x_0^l)(x^m - x_0^m), \end{aligned} \quad (151)$$

где

$$B_{klm}^i = \frac{1}{3} [\Gamma_{kl,m}^i + \Gamma_{lm,k}^i + \Gamma_{mk,l}^i + \Gamma_{rk}^i \Gamma_{lm}^r + \Gamma_{rl}^i \Gamma_{mk}^r + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{kl}^i]. \quad (152)$$

Отбрасывая в (151) последний член, получаем обычное преобразование, приводящее к геодезическим системам.

Рассмотрим теперь область четырехмерного мира, не содержащую материи, т. е. такую, где

$$T_i^k = 0, \quad R_i^k = 0, \quad R_{i,r}^k = 0. \quad (153)$$

В этом случае, согласно (10) и (130), имеем

$$\mathfrak{X}_i^k = \sqrt{-g} t_i^k, \quad t_i^k = \hat{t}_i^k. \quad (154)$$

В пустом пространстве представляется естественным определить локальную инерциальную систему как такую систему, в которой не только метрический тензор является локально постоянным до членов первого порядка, но и комплексы \mathfrak{X}_i^k и t_i^k обращаются в нуль в начале координат. С такой точки зрения локально инерциальными системами следует называть лишь нормальные системы по меньшей мере второго порядка, так как, согласно (146), (147) и (153), мы лишь для таких систем имеем

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_i^k(0) = \overset{\circ}{t}_i^k(0) = \overset{\circ}{\hat{t}}_i^k(0) = 0. \quad (155)$$

Если же рассматриваемая система является нормальной даже более высокого порядка, величина t_i^k может также оказаться *локально постоянной*, так как из (149) и (153) следует, что

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_i^{k,r} = \overset{\circ}{t}_i^{k,r} = 0 \quad (156)$$

в начале координат.

С другой стороны, внутри материи, где отличны от нуля величины T_i^k , R_i^k , а также, вообще говоря, и R , на основании (147) во всех нормальных системах не ниже второго порядка имеем

$$\overset{\circ}{t}_i^k(0) = -\frac{\delta_i^k R(0)}{2\kappa}. \quad (157)$$

Таким образом, комплекс t_i^k отличен от нуля, если только не выполняется равенство $T_i^i = R/\kappa = 0$, как, например, оно выполняется в том случае, когда материя представлена лишь электромагнитным полем. Более того, рассуждения § 5 приводят нас к заключению, что вообще невозможно найти такую геодезическую систему, в которой комплекс t_i^k точно обращался бы в нуль. Лишь комплекс \hat{t}_i^k может быть, вообще говоря, устранен полностью путем введения локально нормальных систем второго порядка.

Таким образом, эти системы внутри материи едва ли заслуживают названия локальных инерциальных систем. В последующей работе будет показано в другой связи, что более естественно сохранить это название для класса систем, лишь приближенно являющихся локально нормальными системами координат.

Приложение А

Из равенств (62) и (64)

$$\mathfrak{h} = \kappa h_r^{rl},{}_l = (\eta g_m^{lm} + 2g^{lm}\eta_m),{}_l, \quad (\text{A.1})$$

где

$$\eta = \sqrt{-g}, \quad \eta_m = \frac{\partial \eta}{\partial x^m},$$

мы получим для произвольных вариаций g^{ik}

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{h} = & \eta \delta g_{l,m}^{lm} + g_{r,s}^{rs} \delta \eta + 3g_r^{kr} \delta \eta_k + 3\eta_l \delta g_m^{lm} + \\ & + 2\eta_{l,m} \delta g^{lm} + 2g^{ik} \delta \eta_{i,k}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Дифференцирование соотношения

$$\delta \eta = -\frac{1}{2} \eta g_{lm} \delta g^{lm} \quad (\text{A.3})$$

приводит к равенствам

$$\delta \eta_k = -\frac{1}{2} [(\eta g_{lm}),_k \delta g^{lm} + \eta g_{lm} \delta g_k^{lm}] \quad (\text{A.4})$$

и

$$\delta\eta_{i,k} = -\frac{1}{2} [(\eta g_{lm}),_{i,k} \delta g^{lm} + (\eta g_{lm}),_k \delta g_i^{lm} + (\eta g_{lm}),_i \delta g_k^{lm} + \eta g_{lm} \delta g_{i,k}^{lm}]. \quad (\text{A.5})$$

Подставляя эти выражения в (A.2) и переставляя некоторые члены, $\delta\mathfrak{h}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{h} = & \eta \left[\frac{1}{2} (\delta_l^i \delta_m^k + \delta_l^k \delta_m^i) - g^{ik} g_{lm} \right] \delta g_{i,k}^{lm} + \\ & + \left[\frac{3}{2} (\eta_l \delta_m^k + \delta_l^k \eta_m) - \frac{3}{2} g_r^{kr} \eta g_{lm} - 2g^{rk} (\eta g_{lm}),_r \right] \times \\ & \times \delta g_k^{lm} + \left[2\eta_{l,m} - g^{rs} (\eta g_{lm}),_{r,s} - \frac{3}{2} g_s^{rs} (\eta g_{lm}),_r - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \eta g_{lm} g_{r,s}^{rs} \right] \delta g^{lm}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Следовательно, по определению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g^{lm}} = & 2\eta_{l,m} - g^{rs} (\eta g_{lm}),_{r,s} - \frac{3}{2} (\eta g_{lm}),_r g_s^{rs} - \\ & - \frac{1}{2} \eta g_{lm} g_{r,s}^{rs}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_k^{lm}} = \frac{3}{2} (\delta_l^i \eta_m + \eta_l \delta_m^k) - \frac{3}{2} g_r^{kr} \eta g_{lm} - 2g^{kr} (\eta g_{lm}),_r, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_{i,k}^{lm}} = \eta \left[\frac{1}{2} (\delta_l^i \delta_m^k + \delta_l^k \delta_m^i) - g^{ik} g_{lm} \right]. \quad (\text{A.9})$$

Легко видеть, что эти выражения согласуются с тождествами (66).

Используя соотношение

$$\eta_i = -\frac{1}{2} \eta g_{lm} g_i^{lm}, \quad (\text{A.10})$$

из (A.9) получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathfrak{h}}{\partial g_{i,k}^{lm}} g_i^{lm} \right),_k &= [\eta g_i^{ik} - \eta g^{ik} g_{lm} g_i^{lm}],_k = \\ &= [\eta g_i^{ik} + 2g^{ik} \eta_i],_k = \mathfrak{h}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

откуда видно, что последний член в (74) равен нулю. Далее, на основании (A.8) и (A.9) следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial g_k^{lm}} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial g_{k,r}^{lm}} \right)_{,r} &= \delta_l^k \eta_m + \eta_l \delta_m^k - \\ &- \frac{1}{2} g_r^{kr} \eta g_{lm} - g^{kr} (\eta g_{lm})_{,r}, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial g_k^{lm}} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial g_{k,r}^{lm}} \right)_{,r} \right] g_i^{lm} = 2g_i^{kl} \eta_l + g_r^{kr} \eta_i - g^{kr} (\eta g_{lm})_{,r} g_i^{lm}$$

и

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \eta}{\partial g_{k,r}^{lm}} \right)_{,i} g_r^{lm} &= \left[\eta_i \frac{1}{2} (\delta_l^r \delta_m^k + \delta_l^k \delta_m^r) - g_i^{kr} \eta g_{lm} - \right. \\ &- \left. g^{kr} (\eta g_{lm})_{,i} \right] g_r^{lm} = g_r^{kr} \eta_i + 2g_i^{kr} \eta_r - g^{kr} (\eta g_{lm})_{,i} g_r^{lm}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Таким образом, для величины A_i^k , определяемой (74), находим выражение

$$\begin{aligned} A_i^k &= g^{kr} [-\eta_r g_{lm} g_i^{lm} + \eta_i g_{lm} g_r^{lm} - \\ &- \eta (g_{lm,r} g_i^{lm} - g_{lm,i} g_r^{lm})] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

где учтено равенство (A.10) и соотношение

$$g_{lm,i} = -g_{ls} g_i^{st} g_{tm}, \quad (\text{A.15})$$

которое получается из уравнения

$$g_{il} g^{kl} = \delta_i^k \quad (\text{A.16})$$

путем дифференцирования последнего.

Мы имеем далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial g_{l,m}^{rs}} g_m^{rs} &= \left[\frac{\eta}{2} (\delta_r^l \delta_s^m + \delta_r^m \delta_s^l) - \eta g^{lm} g_{rs} \right] g_m^{rs} = \\ &= \eta g_m^{lm} + 2g^{lm} \eta_m = \kappa h_r^l, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

откуда на основании (75) следует выражение (76) для K_i^{kl} .

Наконец, мы должны вычислить величину B_i^{kl} , определенную равенством (81). Для первого члена с помощью

(А.12) найдем

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial g_l^{in}} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial g_l^{in}} \right)_{,m} \right] g^{kn} = \left[\delta_i^l \eta_n + \eta_i \delta_n^l - \frac{1}{2} g_r^{lr} \eta g_{in} - \right. \\ \left. - g^{lr} (\eta g_{in})_{,r} \right] g^{kn} = \delta_i^l g^{kn} \eta_n + \eta_i g^{kl} - \frac{1}{2} \delta_i^k \eta g_r^{lr} - \\ - g^{lm} (\eta_m g_{in} + \eta g_{in,m}) g^{kn},$$

а для второго и третьего членов с помощью (А.9) найдем

$$\frac{\partial \eta}{\partial g_l^{in,m}} g_m^{kn} = \left[\frac{1}{2} \eta (\delta_i^l \delta_n^m + \delta_i^m \delta_n^l) - \eta g^{lm} g_{in} \right] g_m^{kn} = \\ = \frac{\eta}{2} \delta_i^l g_m^{km} + \frac{\eta}{2} g_i^{kl} + g^{lm} \eta g_{in,m} g^{kn}, \\ - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial g_l^{in,m}} \right) g^{kn} \right]_{,m} = - \frac{1}{3} \left[\frac{\eta}{2} (\delta_i^l \delta_n^m + \delta_i^m \delta_n^l) g^{kn} - \right. \\ \left. - g^{lm} \eta g_{in} g^{kn} \right]_{,m} = - \frac{1}{6} \delta_i^l (\eta g^{km})_{,m} - \\ - \frac{1}{6} (\eta g^{kl})_{,i} + \frac{1}{3} \delta_i^k (\eta g^{lm})_{,m}.$$

Следовательно,

$$\kappa B_i^{kl} = \frac{1}{2} \delta_i^l (\eta g_m^{km} + 2g^{km} \eta_m) - \frac{1}{2} \delta_i^k (\eta g_m^{lm} + 2g^{lm} \eta_m) + \\ + \frac{1}{3} \delta_i^k (\eta g^{lm})_{,m} - \frac{1}{6} \delta_i^l (\eta g^{kn})_{,m} + \eta_i g^{kl} + \frac{\eta}{2} g_i^{kl} - \frac{1}{6} (\eta g^{kl})_{,i} \quad (\text{А.18})$$

и

$$B_i^{kl} - B_i^{lh} = \delta_i^l h_r^{rh} - \delta_i^k h_l^{rl} + \\ + \frac{1}{2\kappa} [\delta_i^k (\eta g^{lm}) - \delta_i^l (\eta g^{km})]_{,m}. \quad (\text{А.19})$$

С другой стороны, на основании равенств (6) и (7) имеем

$$s_i^{kl} - s_i^{lh} = 2h_i^{kl} + \frac{1}{2\kappa} [\delta_i^l (\eta g^{km}) - \delta_i^k (\eta g^{lm})]_{,m}, \\ 2h_i^{kl} = \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} g_{in} (g_m^{kn} g^{lm} - g_m^{ln} g^{km}) + \\ + \frac{1}{\kappa} \left[\delta_i^k \frac{1}{\eta} (\eta^2 g^{lm})_{,m} - \delta_i^l \frac{1}{\eta} (\eta^2 g^{km})_{,m} \right].$$

Таким образом, с помощью (64) и (80) имеем

$$\begin{aligned} U_i^{kl} &= s_i^{kl} - s_i^{lk} + B_i^{kl} - B_i^{lk} = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} g_{in} (g_m^{kn} g^{lm} - g_m^{ln} g^{km}) = \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{\kappa} (g_{in, m} - g_{im, n}) g^{km} g^{ln} = \chi_i^{kl}, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

где величина χ_i^{kl} определяется соотношением (13).

Приложение Б

Система нормальных римановых координат в четырехмерном мире определяется уравнениями (143), которые должны быть удовлетворены во всех точках. Тогда, отбрасывая значок « \circ » над символами величин, т. е. записывая

x^i, g_{ik}, \dots вместо $\overset{\circ}{x}^i, \overset{\circ}{g}_{ik}, \dots$, имеем

$$\Gamma_{i, rs}(x) x^r x^s = 0. \quad (\text{B.1})$$

Дифференцируя это уравнение дважды по x^k и x^l , а затем по x^m , получаем следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{i, rs})_{,k, l}(x) x^r x^s + \\ &+ 2[(\Gamma_{i, kr})_{,l} + (\Gamma_{i, lr})_{,k}] x^r + 2\Gamma_{i, kl}(x) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} &(\Gamma_{i, rs})_{,k, l, m}(x) x^r x^s + 2[(\Gamma_{i, mr})_{,k, l} + (\Gamma_{i, kr})_{,l, m} + \\ &+ (\Gamma_{i, lr})_{,k, m}] x^r + 2[(\Gamma_{i, km})_{,l} + (\Gamma_{i, lm})_{,k} + (\Gamma_{i, kl})_{,m}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Полагая в этих уравнениях $x^i = 0$, получаем значения $\Gamma_{i, kl}$ и $(\Gamma_{i, kl})_{,m}$ в начале координат:

$$\Gamma_{i, kl} = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$A_{iklm} \equiv \underset{(klm)}{\mathbf{S}} (\Gamma_{i, kl})_{,m} \equiv (\Gamma_{i, kl})_{,m} + (\Gamma_{i, lm})_{,k} + (\Gamma_{i, mk})_{,l} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Здесь и в дальнейшем символ $\underset{(klm)}{\mathbf{S}}$ перед той или иной величиной, содержащей индексы k, l и m , означает прибавление к ней двух членов, получаемых путем циклической перестановки этих индексов.

Аналогичным образом, дифференцируя (Б.3) по x^n и затем полагая $x^i = 0$, получаем в точке 0 соотношение

$$A_{ilmnk} + B_{iklmn} = 0, \quad (\text{Б.6})$$

где

$$\begin{aligned} A_{ilmnk} &= \mathbf{S}_{(lmn)} (\Gamma_{i, lm})_{,n,k}, \\ B_{iklmn} &= \mathbf{S}_{(lmn)} (\Gamma_{i, kl})_{,m,n}. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Уравнение (Б.4) эквивалентно уравнению

$$g_{ik, l} = 0; \quad (\text{Б.8})$$

это доказывает, что данная система является геодезической в нуле.

Символы Кристоффеля определяются соотношением

$$\Gamma_{i, kl} = \frac{1}{2} (g_{ik, l} + g_{il, k} - g_{kl, i}). \quad (\text{Б.9})$$

Подстановка выражений для $\Gamma_{i, kl}$ в (Б.5) дает

$$A_{iklm} \equiv \mathbf{S}_{(klm)} g_{ik, l, m} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{(klm)} g_{kl, m, i} = 0,$$

что эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned} 2A_{iklm} + A_{kil m} &\equiv 3g_{ik, l, m} + \frac{3}{2} (g_{il, k, m} + \\ &+ g_{im, k, l} - g_{lm, i, k}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда вследствие симметрии $g_{ik, l, m}$ по индексам i и k имеем

$$g_{ik, l, m} = -(\Gamma_{i, lm})_{,k} = -(\Gamma_{k, lm})_{,i}. \quad (\text{Б.10})$$

Аналогичным образом, после перегруппировки членов для A_{ilmnk} и B_{iklmn} в (Б.7) получим

$$A_{ilmnk} = \mathbf{S}_{(lmn)} g_{il, m, n, k} - \frac{1}{2} \mathbf{S}_{(lmn)} g_{lm, n, i, k}, \quad (\text{Б.11})$$

и

$$B_{iklmn} = \frac{3}{2} g_{ik, l, m, n} + \frac{1}{2} \mathbf{S}_{(lmn)}^\Gamma [g_{il, m, n, k} - g_{kl, m, n, i}]. \quad (\text{Б.12})$$

Ввиду симметрии по индексам i и k последнего члена в правой части (Б.11), а также первого члена в правой части (Б.12) получим

$$\begin{aligned} B_{ihlmn} - B_{kilmn} &= \mathbf{S}_{(lmn)} [g_{il,m,n,k} - g_{kl,m,n,i}] = \\ &= A_{ilmnk} - A_{klmni}. \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

С другой стороны, из (Б.6) имеем

$$B_{ihlmn} - B_{kilmn} = -(A_{ilmnk} - A_{klmni}),$$

откуда следует, что эти разности должны быть равны нулю. Таким образом, из (Б.12) и (Б.6) следует

$$\begin{aligned} g_{ik,l,m,n} &= \frac{2}{3} B_{ihlmn} = -\frac{2}{3} A_{ilmnk}, \\ g_{ik,l,m,n} &= -\frac{2}{3} \mathbf{S}_{(lmn)} (\Gamma_{i,lm})_{,n,k} = \\ &= -\frac{2}{3} [(\Gamma_{i,lm})_{,n} + (\Gamma_{i,mn})_{,l} + (\Gamma_{i,nl})_{,m}],_k. \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

В начале координат, где уравнения (Б.4) и (Б.8) выполняются, тензор кривизны Римана R_{iklm} и его производные можно записать в виде

$$\begin{aligned} R_{iklm} &= (\Gamma_{i,kl})_{,m} - (\Gamma_{i,km})_{,l}, \\ R_{iklm;n} &= R_{iklm,n} = (\Gamma_{i,kl})_{,m,n} - (\Gamma_{i,km})_{,l,n}. \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

Отсюда на основании (Б.5) и (Б.10) имеем

$$\begin{aligned} R_{ilmk} + R_{imlk} &= 2(\Gamma_{i,lm})_{,k} - (\Gamma_{i,kl})_{,m} - \\ &\quad - (\Gamma_{i,mk})_{,l} = 3(\Gamma_{i,lm})_{,k} \end{aligned}$$

и

$$g_{ik,l,m} = -\frac{1}{3} (R_{ilmk} + R_{imlk}). \quad (\text{Б.16})$$

Аналогично из (Б.15), (Б.6), (Б.7) и (Б.14) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{(lmn)} R_{iklm;n} &= \mathbf{S}_{(lmn)} [(\Gamma_{i,kl})_{,m,n} - (\Gamma_{i,lm})_{,n,k}] = \\ &= -2 \mathbf{S}_{(lmn)} (\Gamma_{i,lm})_{,n,k} \end{aligned}$$

и

$$g_{ik;l,m;n} = \frac{1}{3} \mathbf{S}_{(lmn)} R_{iklm;n} = \frac{1}{3} [R_{iklm;n} + R_{imkn;l} + R_{inkl;m}]. \quad (\text{B.17})$$

Уравнения (Б.8), (Б.16) и (Б.17) и представляют собой в точности уравнения (144), использованные в § 6.

Приложение В

В этом Приложении мы рассмотрим преобразования, переводящие произвольную систему координат x^i в нормальную систему $\overset{\circ}{x}^i$ с началом в данной точке 0. Положим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}^i &= f^i(x), & \alpha_h^i &= \frac{\partial x^i}{\partial x^h}, & \alpha_{h,l}^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^h \partial x^l}, \dots \\ x^i &= g^i(\overset{\circ}{x}), & \tilde{\alpha}_h^i &= \frac{\partial x^i}{\partial \overset{\circ}{x}^h}, & \tilde{\alpha}_{h,l}^i &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial \overset{\circ}{x}^h \partial \overset{\circ}{x}^l}, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\alpha_l \tilde{\alpha}_h^l = \tilde{\alpha}_l^i \alpha_h^i = \delta_h^i. \quad (\text{B.2})$$

С помощью (В.2) формулы преобразования символов Кристоффеля

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{kl}^i(\overset{\circ}{x}) = \alpha_r^i \tilde{\alpha}_{h,l}^r + \alpha_r^i \tilde{\alpha}_h^s \tilde{\alpha}_l^r \Gamma_{st}^r(x)$$

можно записать в виде

$$\tilde{\alpha}_{h,l}^i + \Gamma_{st}^i(x^m) \tilde{\alpha}_h^s \tilde{\alpha}_l^t = \tilde{\alpha}_r^i \overset{\circ}{\Gamma}_{kl}^r(\overset{\circ}{x}). \quad (\text{B.3})$$

Умножая это уравнение на $\overset{\circ}{x}^h \overset{\circ}{x}^l$, получаем при использовании уравнения (143) следующие дифференциально-функциональные уравнения для функций $g^i(\overset{\circ}{x})$:

$$\overset{\circ}{x}^h \overset{\circ}{x}^l \frac{\partial^2 g^i}{\partial \overset{\circ}{x}^h \partial \overset{\circ}{x}^l} + \Gamma_{st}^i(g^m(\overset{\circ}{x})) \frac{\partial g^s}{\partial \overset{\circ}{x}^h} \frac{\partial g^t}{\partial \overset{\circ}{x}^l} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Преобразование к нормальным координатам определяется четырьмя независимыми решениями уравнений (В.4), удовлетворяющими условиям

$$g^i(0) = x_0^i, \quad \frac{\partial g^i}{\partial \overset{\circ}{x}^h}(0) = \delta_h^i.$$

Если нас интересуют лишь локально нормальные системы, нет необходимости рассматривать значения $g^i(x)$ на больших расстояниях от точки 0. Исходя из обращенного соотношения (B.3), т. е.

$$\alpha_{k,l}^i(x) + \overset{\circ}{\Gamma}_{st}^i(x) \alpha_k^s(x) \alpha_l^t(x) = \alpha_r^i(x) \Gamma_{kl}^r(x) \quad (\text{B.5})$$

и вспоминая равенства $\alpha_k^i(0) = \delta_k^i$ и $\overset{\circ}{\Gamma}_{kl}^i(0) = 0$, в точке 0 получаем

$$\alpha_{k,l}^i(0) = \Gamma_{kl}^i(0), \quad (\text{B.6})$$

что, с точностью до множителя 2 совпадает с коэффициентом при квадратичном члене в преобразовании (151). Если теперь продифференцировать (B.5) по x^m , то получим

$$\begin{aligned} \alpha_{k,l,m}^i(x) + \overset{\circ}{\Gamma}_{st,r}^i(x) \alpha_m^r \alpha_k^s \alpha_l^t + \overset{\circ}{\Gamma}_{st}^i(x) (\alpha_{k,m}^s \alpha_l^t + \alpha_k^s \alpha_{l,m}^t) = \\ = \alpha_{r,m}^i \Gamma_{kl}^r(x) + \alpha_r^i \Gamma_{kl,m}^r(x). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Это дает в точке 0

$$\alpha_{k,l,m}^i(0) + \overset{\circ}{\Gamma}_{kl,m}^i(0) = \alpha_{r,m}^i(0) \Gamma_{kl}^r(0) + \Gamma_{kl,m}^i(0). \quad (\text{B.8})$$

Тогда ввиду симметрии величин $\alpha_{k,l,m}^i$ по индексам k, l и m , на основании (B.6) и уравнения

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{kl,m}^i(0) + \overset{\circ}{\Gamma}_{lm,h}^i(0) + \overset{\circ}{\Gamma}_{mk,l}^i(0) = 0, \quad (\text{B.9})$$

справедлив го в локально нормальной системе [см. (144б) и (B.5)], получим

$$\alpha_{k,l,m}^i(0) = \frac{1}{3} \sum_{(klm)} [\Gamma_{kl,m}^i(0) + \Gamma_{rm}^i(0) \Gamma_{kl}^r(0)], \quad (\text{B.10})$$

что совпадает с коэффициентом $B_{klm}^i(0)$ в преобразовании (151). Таким образом, последнее преобразование приводит к локально нормальной системе второго порядка. Продолжая эти рассуждения, мы можем путем дальнейшего дифференцирования (B.7) и последующей подстановки $x^i = 0$ вывести выражения для значений производных еще более высокого порядка от величин α_k^i в начале координат и таким образом определить коэффициенты при чле-

нах более высоких порядков в полиноме $P_{(n)}^i(x)$ в уравнении (150), которое определяет преобразования к локально нормальным координатным системам произвольно высоких порядков.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Goldberger J. N., Phys. Rev., **111**, 315 (1958).
2. Bergmann P. C., Phys. Rev., **112**, 287 (1958).
3. Einstein A., Berlin. Ber., 1916, S. 167.
4. Tolman R. C., Phys. Rev., **35**, 875 (1930).
5. von Freud Ph., Ann. Math., **40**, 417 (1939).
6. Zatzkis H., Phys. Rev., **81**, 1023 (1951).
7. Bergmann P. G., Phys. Rev., **75**, 680 (1949).
8. Bergmann P. G., Schiller R., Phys. Rev., **89**, 4 (1953).
9. Goldberger J. N., Phys. Rev., **89**, 263 (1953); **99**, 1873 (1955).
10. Møller C., Ann. of Phys., **4**, 347 (1958).
11. Møller C., в сборнике «Max-Planck Festschrift», Berlin, 1958; статья 1 настоящего сборника.
12. Magnusson M., в сборнике «Max-Planck Festschrift», Berlin, 1958.
13. Rosenfeld L., Acad. Roy. Belg. Mémoires XVIII, Fasc. 6 (1940).
14. Belinfante F., Physica, **6**, 887 (1939).
15. Bergmann P. G., Goldberger I., Janis A., Newman E., Phys. Rev., **103**, 807 (1956).
16. Bergmann P. G., Schiller R., Phys. Rev., **89**, 4 (1953).
17. DeWitt B. S., Rev. Mod. Phys., **29**, 377 (1957).
18. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A246**, 333 (1958); статья 4 настоящего сборника.
19. Komar A., Phys. Rev., **113**, 934 (1959).

3. ОБОБЩЕННАЯ ДИНАМИКА В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ

П. Дирак

P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A 246, No. 1246, 326—332 (1958)

Предложенный автором метод перехода от лагранжиана к гамильтониану в случае, когда импульсы не являются независимыми функциями скоростей, представлен в более простой и более удобной для практических приложений форме. При этом основные результаты получены путем непосредственного решения уравнений при требовании непротиворечивости последних. Показано, каким образом, при определенных условиях, можно устранить некоторые степени свободы и тем самым существенно упростить гамильтонов формализм.

Обычный метод перехода от лагранжевой формы уравнений движения к гамильтоновой форме требует, чтобы импульсы были независимыми функциями скоростей. Существуют важные в практическом отношении случаи, когда это условие не выполняется, что, например, имеет место в релятивистской теории поля, и возникает необходимость обобщить этот метод. Такого рода метод был предложен автором [1]. В настоящей работе этому методу придается более простая и удобная для практических приложений форма.

Другая трактовка этой задачи была предложена Андерсоном и Бергманом [2]. Их метод является менее общим, чем представленный здесь, так как он применим только в том случае, когда лагранжиан является квадратичной функцией скоростей. В предлагаемом же методе лагранжиан может быть любой функцией скоростей и координат и подчинен единственному ограничению, чтобы лагранжевы уравнения не приводили к каким-либо противоречиям.

Ф-уравнения

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается координатами q_n ($n = 1, 2, \dots, N$) и скоростями \dot{q}_n , с лагранжианом $L = L(q, \dot{q})$. Определим импульсы обычным путем

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (1)$$

Может оказаться, что p_n не будут независимыми функциями \dot{q}_n . Если среди p_n имеется только $N - M$ независимых функций \dot{q}_n , то будут иметь место M независимых соотношений

$$\Phi_m(q, p) = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M). \quad (2)$$

При этом M может быть любым числом от 0 до N .

Лагранжевы уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n} \quad (3)$$

определяют теперь $N - M$ функций от ускорений \ddot{q}_n и дают M уравнений только между координатами и скоростями. Может оказаться, что посредством дифференцирования по времени этих M уравнений (один или, возможно, несколько раз) мы сможем получить еще несколько независимых уравнений, содержащих ускорения. Если таких уравнений будет недостаточно, чтобы определить все ускорения, то общее решение этих уравнений движения, соответствующее заданным начальным значениям величин q_n и \dot{q}_n , будет содержать некоторое число произвольных функций от времени.

Рассмотрим произвольные малые вариации δq_n и $\delta \dot{q}_n$ координат и скоростей. Они обусловят вариации δp_n , которые сохраняют соотношения (1). Эти вариации должны сохранять соотношения (2), являющиеся следствиями (1), так что

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n} \delta p_n = 0. \quad (4)$$

Соотношения (4) будут единственными ограничениями, налагаемыми на вариации δp_n , при условии, что уравнения (2) записаны таким образом, что независимые вариации первого порядка величин p_n и q_n обуславливают вариации первого порядка функций Φ_m .

Мы имеем

$$\begin{aligned} \delta(p_n \dot{q}_n - L) &= p_n \delta \dot{q}_n + \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n = \\ &= \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как члены с $\delta \dot{q}_n$ взаимно уничтожаются, то вариация величин \dot{q}_n , сохраняющая соотношения (1) без какого-либо изменения в величинах q_n и p_n , не изменяет $p_n \dot{q}_n - L$. Это означает, что $p_n \dot{q}_n - L$ является функцией только от q_n и p_n , так что мы можем положить

$$p_n \dot{q}_n - L = H(q, p). \quad (6)$$

Функция $H(q, p)$, разумеется, определена неоднозначно. Мы можем изменить ее следующим образом:

$$H \rightarrow H + c_m \Phi_m, \quad (7)$$

где c_m — произвольные функции q_n и p_n . В том случае, когда L является однородной функцией первой степени относительно \dot{q}_n , мы можем взять $H = 0$.

Теперь соотношение (5) дает

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n + \frac{\partial H}{\partial q_n} \delta q_n = \dot{q}_n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n$$

для вариаций δq_n , δp_n , которые ограничены соотношением (4), но в остальном произвольны. Отсюда следует, что

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial p_n}, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_n} = \frac{\partial H}{\partial q_n} + u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_n} \quad (9)$$

при надлежащих коэффициентах u_m . При преобразовании (7) u_m изменяются на функцию только q_n и p_n , а именно, на величину $-c_m$.

Уравнения (8) показывают, что \dot{q}_n определяются величинами q_n вместе с $N - M$ независимыми переменными p и M новыми переменными u_m . Поэтому мы можем взять в качестве наших основных динамических переменных вместо q_n и \dot{q}_n величины q_n , p_n и u_n . Они являются переменными в гамильтоновом формализме.

Уравнения движения (3), в силу (9), принимают вид

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_n}. \quad (10)$$

Используя скобки Пуассона, определенные обычным образом:

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q_n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q_n}, \quad (11)$$

мы имеем для любой функции g от q_n и p_n :

$$\dot{g} = [g, H] + u_m [g, \Phi_m]. \quad (12)$$

Уравнение (12) включает в себе все уравнения (8) и (10). Это общее уравнение движения в гамильтоновом формализме.

Определение (11) скобок Пуассона требует, чтобы q_n и p_n рассматривались как независимые переменные. Любые соотношения, которые ограничивают независимость q_n и p_n , такие, как соотношения (2), нельзя использовать, прежде чем вычислены скобки Пуассона, поскольку в противном случае последние перестают быть хорошо определенными величинами. Чтобы помнить об этом ограничении при использовании некоторых из наших уравнений, удобно назвать такие уравнения *слабыми уравнениями* и писать их в виде

$$\Phi_m \approx 0.$$

χ-уравнения

Дифференцируя (2) по времени и используя (12), получаем

$$[\Phi_m', H] + u_m [\Phi_m', \Phi_m] = 0. \quad (13)$$

Эти уравнения, если все они не сводятся к тождеству $0 = 0$, будут уменьшать число независимых гамильтоновых

переменных q , p , u , устанавливая некоторые соотношения между ними.

Может случиться, что уравнения (13) приведут к некоторым соотношениям только между q_n и p_n , независимым от φ -уравнений. Они должны быть слабыми уравнениями, так что мы запишем их в виде

$$\chi_k(q, p) \approx 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (14)$$

Дифференцируя каждое из уравнений (14) по времени, получаем

$$[\chi_k, H] + u_m [\chi_k, \varphi_m] = 0. \quad (15)$$

Эти уравнения могут привести к новым соотношениям только между q_n и p_n , которые представляют собой новые уравнения (14), ведущие в свою очередь к новым уравнениям (15). Мы продолжаем эту процедуру, насколько это возможно, и тем самым получим все уравнения (14) и (15), которые являются следствием соотношения (2) и общего уравнения движения (12). Пусть полный набор этих уравнений описывается значениями $k = 1, 2, \dots, K$. Тем самым мы уменьшили число независимых переменных p_n и q_n до $2N - M - K$ и получили ограничения на величины u_m в виде уравнений (13) и (15), поскольку эти последние не сводятся к тождествам $0 = 0$ или к χ -уравнениям.

Будем теперь рассматривать эти уравнения (13) и (15) как уравнения для неизвестных u_m , где коэффициенты являются заданными функциями q_n и p_n . Они должны иметь некоторое решение

$$u_m = U_m(q, p), \quad (16)$$

ибо отсутствие решения означало бы, что уравнения движения Лагранжа (3) несовместны. Решение (16) означает, что уравнения

$$\begin{aligned} [\varphi_m', H] + U_m [\varphi_m', \varphi_m] &\approx 0, \\ [\chi_k, H] + U_m [\chi_k, \varphi_n] &\approx 0 \end{aligned} \quad (17)$$

выполняются как следствия (2) и (14).

Решение (16), вообще говоря, не является единственным. Мы можем добавить к U_m любое решение

$V_m = V_m(q, p)$ уравнений

$$V_m[\Phi_m', \Phi_m] \approx 0, \quad V_m[\chi_k, \Phi_m] \approx 0. \quad (18)$$

Обозначим все независимые решения (18) через V_{am} ($a = 1, 2, \dots, A$). Тогда общее решение уравнений (13) и (15) будет

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \quad (19)$$

где v_a — произвольные коэффициенты.

Мы можем использовать уравнения (19), чтобы исключить переменные u_m ; тем самым мы будем иметь в качестве основных гамильтоновых переменных $2N - M - K$ независимых q_n и p_n , допускаемых уравнениями (2) и (14), и A переменных v_a . Общее число этих переменных может быть меньшим, чем первоначальное число $2N$ независимых переменных, так как уравнения движения могут уменьшить это число.

Андерсон и Бергман [2] называют ϕ -уравнения первичными, а χ -уравнения — вторичными связями. Для многих целей ϕ - и χ -уравнения рассматриваются как равноправные, и тогда удобно обозначать все эти уравнения как χ_j ($j = 1, 2, \dots, M + K$). Существенное различие между ними с точки зрения гамильтонова формализма состоит в том, что ϕ_k в отличие от χ_k фигурируют в общем уравнении движения (12).

Функции первого класса

Функция от q_n и p_n является, по определению, функцией *первого класса*, если все ее скобки Пуассона с H и χ_j равны нулю. Для этих скобок Пуассона достаточно, чтобы они обращались в нуль слабо, т. е. при наличии соотношений (2) и (14). Функцию от q_n и p_n , которая не удовлетворяет этим условиям, будем называть функцией *второго класса*.

Теорема. Скобки Пуассона двух функций первого класса есть функция первого класса. Пусть X и Y являются функциями первого класса, так что

$$[X, \chi_j] \approx 0, \quad [Y, \chi_j] \approx 0.$$

Эти слабые уравнения означают, что

$$[X, \chi_j] = x_{jj'} \chi_{j'}, \quad [Y, \chi_j] = y_{jj'} \chi_{j'},$$

где $x_{jj'}$ и $y_{jj'}$ — надлежащие коэффициенты. Следовательно,

$$\begin{aligned} [[X, Y], \chi_j] &= [[X, \chi_j], Y] - [[Y, \chi_j], X] \approx \\ &\approx x_{jj'} [\chi_{j'}, Y] - y_{jj'} [\chi_{j'}, X] \approx 0. \end{aligned}$$

Приведенное доказательство остается справедливым, если заменить в нем χ_j на H , откуда следует, что

$$[[X, Y], H] \approx 0.$$

Отсюда следует, что $[X, Y]$ — функция первого класса.

Положим

$$H + U_m \Phi_m = H'. \quad (20)$$

Уравнения (17) показывают, что скобки Пуассона от H' с любой функцией χ_j обращаются в нуль слабо. Далее, умножая первое из уравнений (17) на $U_{m'}$, находим

$$[H', H] \approx U_{m'} [\Phi_{m'}, H] \approx 0.$$

Таким образом, H' — функция первого класса. Заметим, что H' является гамильтонианом, который может быть получен из H с помощью преобразования (7).

Всякая линейная комбинация функций φ , коэффициенты которой являются функциями q_n и p_n , может рассматриваться как некоторое другое φ . Положим

$$V_{am} \Phi_m = \Phi_a. \quad (21)$$

Соотношения (18) показывают, что скобки Пуассона для Φ_a с любой функцией χ_j обращаются в нуль слабо. Мы видим, что, поскольку скобки Пуассона от Φ_a и H' обращаются в нуль, то скобки Пуассона от Φ_a и H также должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что Φ_a — функция первого класса.

Общее уравнение движения (12) с учетом (19) принимает вид

$$\dot{g} = [g, H'] + v_a [g, \Phi_a]. \quad (22)$$

Оно содержит теперь гамильтониан первого класса H' и функции Φ_a первого класса. Коэффициенты v_a , связанные с этими φ -функциями первого класса, никак не ограничиваются уравнениями движения. Таким образом, каждый из них приводит к некоторой произвольной

функции от времени в общем решении уравнений движения с заданными начальными условиями.

Каждая ϕ -функция первого класса имеет вид $U_m \Phi_m$, где U_m удовлетворяют уравнениям (17). Таким образом, в (22) должны входить все независимые ϕ -функции первого класса. Отсюда следует, что число произвольных функций времени в общем решении уравнений движения равно числу независимых ϕ -функций первого класса. Различные решения уравнений движения, полученные при различном выборе произвольных функций времени при данных начальных условиях, следует рассматривать как соответствующие одному и тому же физическому состоянию движения, описываемому различными способами путем разного выбора некоторых математических переменных, не имеющего значения с физической точки зрения (например, путем различного выбора калибровки в электродинамике или координатной системы в релятивистской механике).

В практических приложениях из инвариантных свойств интеграла действия обычно известно, какие произвольные функции времени имеются в общем решении уравнений движения. Это дает возможность видеть, какие из функций ϕ являются функциями первого класса, не прибегая к оценке всех скобок Пуассона для них. Любая переменная типа скорости, которая может быть изменена без влияния на физическое состояние, должна появляться в уравнении движения Гамильтона (22) в качестве коэффициента v_a при некоторой ϕ -функции первого класса.

Уменьшение числа степеней свободы

Предположим, что некоторые из ϕ -функций первого класса содержат импульсы только линейным образом с числовыми коэффициентами. Хотя с математической точки зрения этот случай представляется весьма специальным, тем не менее он часто встречается в практических приложениях и потому очень важен.

Путем тривиальной замены переменных можно достичь того, чтобы эти ϕ -функции первого класса имели вид

$$p_r - f_r \approx 0 \quad (r = 1, 2, \dots, R), \quad (23)$$

где f_r — функция только переменных q . Условие для функций первого класса требует, чтобы скобки Пуассона величин $p_r - f_r$ обращались в нуль слабо. Эти скобки Пуассона могут содержать только переменные q . Предположим, что не существует χ_j , содержащих только переменные q ; тогда эти скобки Пуассона должны обращаться в нуль строго. Отсюда следует, что

$$f_r = \frac{\partial F}{\partial q_r},$$

где F — некоторая функция переменных q . Добавим теперь к лагранжиану L член

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \dot{q}_n, \quad (24)$$

который не влияет на уравнения движения. Величины p_r увеличатся на $\partial F / \partial q_r$, так что ф-уравнения (23) примут вид

$$p_r \approx 0. \quad (25)$$

Будем продолжать рассмотрение с новым лагранжианом. Любую из функций χ_j , которые не содержатся в (25), мы обозначим через χ_i ($i = 1, 2, \dots, M + K - R$), причем χ_i могут быть функциями либо первого, либо второго класса. Без ограничения общности можно предположить, что χ_i не содержат переменных p_r . Можно также предположить, что H' не содержит p_r , так как в противном случае с помощью преобразования (7) можно перейти к другому гамильтониану первого класса H' , не содержащему p_r .

Так как p_r — функции первого класса, то

$$[\chi_i, p_r] \approx 0, \quad [[\chi_i, p_r], p_r] \approx 0 \quad (26)$$

и т. д. Отсюда следует, что χ_i , если они вообще содержат переменные q_r , могут удовлетворять этим уравнениям только в том случае, если они имеют вид

$$\chi_i = \beta_{ii} \chi_i^*, \quad (27)$$

где величины χ_i^* обращаются в нуль слабо и не зависят от q_r , так что q_r появляются только в коэффициентах β_{ii} . Это значит, что условия $\chi_i \approx 0$ эквивалентны условиям

$\chi_i^* \approx 0$, которые не содержат переменных q_r . Число функций χ_i^* должно равняться числу функций χ_i . [Функций χ_i^* не может быть больше, чем χ_i , так как все условия $\chi_i^* \approx 0$ являются следствиями условий $\chi_i \approx 0$ вместе с условиями (26), а последние сами являются следствиями условий $\chi_i \approx 0$.]

Если χ_i является функцией первого класса, то, применяя к χ_i и p_r теорему предыдущего раздела, мы видим, что χ_i может быть выражена через функции χ_i^* первого класса, т. е. можно сделать так, чтобы в (27) коэффициент $\beta_{ii'}$ обращался в нуль, если χ_i^* не есть функция первого класса.

Можно проделать эту же процедуру, заменив χ_i на H' ; тогда мы получим

$$H' = H'' + \gamma_i \chi_i^*, \quad (28)$$

где H'' , как и χ_i^* , не включает q_r . Так как H' есть функция первого класса, то можно заключить, что H'' и все χ_i^* , фигурирующие в (28), являются функциями первого класса.

Посмотрим теперь, какой вид примет уравнение движения (22). Если взять в качестве g одну из q_r , то мы найдем, что \dot{q}_r произвольна, так что q_r изменяется произвольным образом. Если в качестве g взять некоторую функцию переменных q_s, p_s ($s = R + 1, \dots, N$), мы получим уравнение вида

$$\dot{g} = [g, H''] + \omega_\alpha [g, \chi_\alpha^*], \quad (29)$$

где χ_α^* представляет собой χ^* -функции первого класса. (Они могут включать все или не все χ^* -функции первого класса.) Переменные q_r, p_r не появляются в этом уравнении, за исключением того случая, когда q_r могут встречаться в коэффициентах ω_α .

Допустим, что мы можем получить произвольные вариации величин ω_α , варьируя q_r и те коэффициенты v_α в (22), которые связаны с ϕ -функциями первого класса, отличными от p_r . Это допущение обычно выполняется на практике. Тогда мы можем рассматривать ω_α в (29) как произвольные коэффициенты, которые вместе с q_s и p_s образуют основные гамильтоновы переменные. При этом q_r и p_r не появляются больше в общем уравнении дви-

жения (29). Это уравнение имеет ту же форму, что и уравнение (22), но относится только к степеням свободы q_s , p_s . Таким образом, степени свободы q_r , p_r исключаются из теории.

Может оказаться, что некоторые из χ_a^* , фигурирующих в (29), содержат импульсы только линейно с числовыми коэффициентами. Тогда мы можем повторить всю процедуру и получить дальнейшее уменьшение числа эффективных степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., *Canad. Journ. Math.*, 2, 129 (1950).
2. Anderson J. L., Bergmann P. G., *Phys. Rev.*, 83, 1018 (1951).

4. ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ ФОРМЕ

П. Дирак

P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., A246, 333—343 (1958)

Обобщенный автором метод представления теории в гамильтоновой форме применяется к теории тяготения Эйнштейна. Показано, что можно, не влияя на уравнения движения, изменить плотность действия таким образом, что из гамильтонова формализма исключаются четыре из десяти степеней свободы, связанных с десятью компонентами $g_{\mu\nu}$. Это упрощение может быть достигнуто ценой отказа от четырехмерной симметрии.

В приближении слабого поля можно произвести фурье-разложение величин, характеризующих поле; тогда те степени свободы, которым соответствуют переменные, зависящие от выбора системы координат, можно полностью отделить от степеней свободы, которым соответствуют не зависящие от этого выбора переменные. Для каждой фурье-компоненты имеется четыре степени свободы первого типа и две — второго типа. Две последние соответствуют гравитационным волнам с двумя независимыми состояниями поляризации. Одна из четырех степеней свободы первого типа ответственна за ньютоновское притяжение масс, а также дает отрицательную гравитационную собственную энергию для каждой массы.

Введение

Квантовая теория свидетельствует о важности гамильтоновой формы уравнений движения. Чтобы можно было проквантовать какую-либо динамическую теорию, ее необходимо прежде представить в гамильтоновой форме. Но и помимо вопроса квантования, желательно получить физические теории, типа теории тяготения, в гамильтоновой форме вследствие широких трансформационных возможностей, связанных с этой формой теории и вследствие того, что она помогает отделить физически существенные динамические переменные от тех, которые лишь описывают координатную систему.

Основное понятие гамильтоновой теории — это понятие состояния в данный момент времени. В релятивистской теории под этим понимается состояние на некоторой трехмерной пространственно-подобной поверхности общего вида в пространстве-времени. Уравнения движения Гамильтона определяют, как изменяются динамические переменные, которые определяют это состояние, с изменением этой поверхности. Так как поверхность может изменяться произвольно (при условии, что она остается всегда пространственно-подобной), то в движении имеется большой произвол, вследствие которого обычный способ получения гамильтониана из принципа действия оказывается неприменимым, и возникает необходимость использовать некоторую обобщенную процедуру, как, например, процедуру, предложенную автором [1].

При построении теории можно выбрать поверхность, которая не зависела бы от системы координат x^μ . Этот выбор имеет то преимущество, что можно сохранить равноправие четырех координат x^μ . Однако он имеет недостаток, связанный с введением большего числа переменных, чем это необходимо для математической трактовки проблемы, в результате чего уравнения усложняются и становятся менее ясными. Более простая схема получается, если систему координат x^μ выбрать таким образом, чтобы поверхности $x^0 = \text{const}$ были всегда пространственно-подобными, и затем рассматривать только состояния на этих поверхностях, используя координаты x^1, x^2, x^3 как параметры, описывающие точки на этих поверхностях. При этом симметрия между четырьмя координатами x^μ полностью нарушается, однако получающиеся упрощения вполне оправдывают такую жертву.

Теория гравитации Эйнштейна уже была представлена в гамильтоновой форме с поверхностью, не зависящей от системы координат, Пирани и Шилдом [2], использовавшими нашу обобщенную процедуру в гамильтоновом формализме, а также Бергманом и др. [3], использовавшими иную процедуру. Эти работы являются неполными, так как в них не учитывались χ -уравнения. В более поздней работе Пирани, Шилда и Скиннера [4] совершается переход к поверхности $x^0 = c$ и вводятся χ -уравнения.

Настоящая работа выходит за рамки предыдущих работ в том направлении, что некоторые степени свободы исклю-

чаются. В результате значительно упрощается гамильтониан. Для удобства статья изложена так, как будто она является независимой от предшествующих работ.

Обозначения

Пространственно-временные координаты обозначаются через x^μ (греческие индексы принимают значения 0, 1, 2, 3). Для любой функции f координат x^μ будем писать $(\partial f / \partial x^\mu) = f_{,\mu}$. Индекс будет всегда означать дифференцирование такого рода, если символ без индекса имеет смысл.

Метрика задается выражением $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Определитель метрического тензора $g_{\mu\nu}$ отрицателен и обозначается через $-J^2$. Символы Кристоффеля записываются в виде

$$\frac{1}{2}(g_{\alpha\mu\beta} + g_{\beta\mu\alpha} - g_{\alpha\beta\mu}) = \Gamma_{\alpha\beta\mu}, \quad \Gamma_{\alpha\beta\mu} g^{\mu\nu} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}.$$

Таким образом,

$$\frac{J_{,\mu}}{J} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta\mu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}. \quad (1)$$

Приведем формулу

$$g_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g_{\mu\nu\alpha}. \quad (2)$$

На поверхности $x^0 = c$, где c — некоторая постоянная, точка определяется координатами x^r . (Малые латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.) Метрика на этой поверхности задается выражением $g_{rs} dx^r dx^s$. Определитель тензора g_{rs} отрицателен и обозначается через $-K^2$. При этом имеем

$$g^{00} J^2 = K^2. \quad (3)$$

Определим

$$e^{\mu\nu} = e^{\nu\mu} = g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{g^{00}}. \quad (4)$$

Заметим, что $e^{\mu\nu}$ равно нулю, если хотя бы один индекс μ или ν равен нулю. Мы имеем

$$e^{rs} g_{s\alpha} = e^{r\mu} g_{\mu\alpha} = g_{\alpha}^r - \frac{g^{r0} g_{\alpha}^0}{g^{00}}.$$

Поэтому

$$e^{rs} g_{sa} = g_a^r \quad (5)$$

и

$$e^{rs} g_{s0} = -\frac{g^{r0}}{g^{00}}. \quad (6)$$

Соотношение (5) показывает, что матрица e^{rs} обратна матрице g_{rs} . Таким образом, e^{rs} является метрическим тензором, которым надо пользоваться для поднятия индексов у тензоров в трехмерном пространстве $x^0 = c$. В соответствии с соотношением (1) мы имеем

$$\frac{K_r}{K} = \frac{1}{2} e^{ab} g_{abr}. \quad (7)$$

Ф-уравнения

Лагранжиан имеет вид

$$L = \int \mathcal{L} d^3x,$$

где $d^3x = dx^1 dx^2 dx^3$ и \mathcal{L} — плотность действия. Для чисто гравитационного поля плотность действия в теории Эйнштейна имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= J g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}) = \\ &= \frac{1}{4} J g_{\mu\nu\alpha} g_{\alpha\beta\sigma} \{ (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) g^{\alpha\sigma} + \\ &+ 2 (g^{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\beta\alpha}) g^{\nu\sigma} \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Чтобы теория описывала гравитационное поле, взаимодействующее с другими физическими объектами (например, с частицами материи, электромагнитным полем или полями другого типа), введем дополнительную плотность действия \mathcal{L}_M , так что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M.$$

Для целей предлагаемой теории \mathcal{L}_M может быть любой функцией $g_{\mu\nu}$ и любых дополнительных динамических переменных, необходимых для описания прочих физических объектов, но не должна, однако, содержать произ-

водных от $g_{\mu\nu}$. (Это условие в действительности выполняется в случае частиц и электромагнитного поля.)

Величины $g_{\mu\nu}$ во всех точках поверхности $x^0 = c$ рассматриваются в качестве динамических переменных, описывающих гравитационное поле (они соответствуют переменным q в нашей предыдущей работе [1]). Тогда величины $g_{\mu\nu 0}$ во всех точках этой поверхности представляют собой скорости (они соответствуют величинам \dot{q} в [1]). Величины $g_{\mu\nu r}$ в любой точке поверхности определяются величинами $g_{\mu\nu}$ во всех точках поверхности и потому являются функциями только от динамических координат, будучи независимыми от скоростей. Теперь мы видим, что выражение (8) имеет вид

$$\mathcal{L}_G = \mathcal{L}(2) + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}_G(0),$$

где $\mathcal{L}(2)$ — однородная квадратичная функция скоростей, $\mathcal{L}(1)$ — однородная линейная функция скоростей и $\mathcal{L}_G(0)$ не зависит от скоростей. Полагая в (8) $q = \sigma = 0$, получаем для $\mathcal{L}(2)$ следующее выражение:

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{4} J g^{00} g_{\mu\nu 0} g_{\alpha\beta 0} \left\{ \left(g^{\mu\alpha} - \frac{g^{\mu 0} g^{\alpha 0}}{g^{00}} \right) \left(g^{\nu\beta} - \frac{g^{\nu 0} g^{\beta 0}}{g^{00}} \right) - \right. \\ \left. - \left(g^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{g^{00}} \right) \left(g^{\alpha\beta} - \frac{g^{\alpha 0} g^{\beta 0}}{g^{00}} \right) \right\}.$$

С помощью (4) это выражение приводится к форме

$$\mathcal{L}(2) = \frac{1}{4} J g^{00} g_{r s 0} g_{a b 0} (e^{r\alpha} e^{s\beta} - e^{rs} e^{ab}). \quad (9)$$

Скорости $g_{\mu 0 0}$ здесь не появляются.

Чтобы определить импульсы $p^{\mu\nu}$, сопряженные с $g_{\mu\nu}$, произведем произвольные малые вариации скоростей $g_{\mu\nu 0}$ и представим соответствующую вариацию лагранжиана в виде

$$\int \delta \mathcal{L} d^3x = \int p^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu 0} d^3x, \quad (10)$$

причем $p^{\mu\nu} = p^{\nu\mu}$. Обычные соотношения для скобок Пуассона от динамических переменных и сопряженных им

импульсов в теории поля должны быть заменены на

$$[p^{\mu\nu}, g'_{\alpha\beta}] = \frac{1}{2}(g_{\alpha}^{\mu}g_{\beta}^{\nu} + g_{\beta}^{\mu}g_{\alpha}^{\nu})\delta_3(x - x'), \quad (11)$$

где правая часть симметризована относительно μ и ν , с одной стороны, и α и β — с другой. Здесь $g'_{\alpha\beta}$ означает величину $g_{\alpha\beta}$ в точке x'^1, x'^2, x'^3 на поверхности $x^0 = c$.

Часть \mathcal{L}_M лагранжиана не дает вклада в $p^{\mu\nu}$ в (10). Так как ни один из квадратичных по скоростям членов в \mathcal{L}_G не содержит $g_{\mu 0}$, то $p^{\mu 0}$ не содержат каких-либо скоростей. Таким образом,

$$p^{\mu 0} - f^{\mu} \approx 0, \quad (12)$$

где f^{μ} — некоторая функция только от динамических переменных, а именно от $g_{\alpha\beta}$ и $g_{\alpha\beta r}$. Следовательно, уравнения (12) представляет собой ϕ -уравнения. Для каждой точки x^r поверхности $x^0 = \text{const}$ имеется четыре таких уравнения. Они, как будет обосновано позже [см. (22)], являются единственными ϕ -уравнениями. Мы должны выяснить, относятся ли они к уравнениям первого класса.

Произведя малое преобразование системы координат, например $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + b^{\mu}$, получаем

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} b_{\nu}^{\alpha} + g_{\nu\alpha} b_{\mu}^{\alpha} + g_{\mu\nu\alpha} b^{\alpha}. \quad (13)$$

Положим

$$b^{\alpha} = \frac{1}{2}(x^0 - c)^2 \beta^{\alpha},$$

где β^{α} — некоторая произвольная функция x^1, x^2, x^3 . Тогда на поверхности $x^0 = c$

$$\delta g_{\mu\nu} = 0, \quad \delta g_{\mu\nu 0} = (g_{\mu\alpha} g_{\nu}^{\alpha 0} + g_{\nu\alpha} g_{\mu}^{\alpha 0}) \beta^{\alpha},$$

так что

$$\delta g_{r s 0} = 0, \quad \delta g_{\mu 0 0} = \beta_{\mu} + g_{\mu}^{\alpha} \beta_{\alpha}.$$

Следовательно, мы можем произвольно менять скорости $g_{\mu 0 0}$, оставляя все динамические координаты $g_{\mu\nu}$ и скорости $g_{r s 0}$ инвариантными. Поэтому уравнения движения не могут наложить ограничения на скорости $g_{\mu 0 0}$, так что ϕ -уравнения (12) должны быть уравнениями первого класса.

Модифицированный лагранжиан

Соответствующим изменением лагранжиана, не влияющим на уравнения движения, можно привести \mathcal{L} -уравнения (12) к виду

$$\rho^{\mu 0} \approx 0. \quad (14)$$

Произведем изменение в лагранжиане, которое соответствует следующему изменению в плотности действия:

$$\mathcal{L}^* - \mathcal{L} = \left\{ (Jg^{00})_v \frac{g^{v0}}{g^{00}} \right\}_0 - \left\{ (Jg^{00})_0 \frac{g^{v0}}{g^{00}} \right\}_v, \quad (15)$$

и убедимся, что оно приводит к желаемому результату. Это изменение не влияет на уравнения движения, поскольку его вклад в действие может быть выражен в виде поверхностного интеграла.

Соотношение (15) можно записать в виде

$$\mathcal{L}^* - \mathcal{L} = (Jg^{00})_v \left(\frac{g^{v0}}{g^{00}} \right)_0 - (Jg^{00})_0 \left(\frac{g^{v0}}{g^{00}} \right)_v. \quad (16)$$

Из (1) и (2) получаем

$$(Jg^{00})_q = J \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{00} - g^{\alpha 0} g^{\beta 0} \right) g_{\alpha\beta q},$$

$$\left(\frac{g^{v0}}{g^{00}} \right)_q = g^{v0} (g^{v0} g^{\mu 0} - g^{\mu v} g^{00}) \frac{g_{\mu\nu q}}{(g^{00})^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* - \mathcal{L} &= J g_{\mu\nu 0} g_{\alpha\beta v} \left\{ \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{00} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g^{\alpha 0} g^{\beta 0} \right) g^{v0} (g^{v0} g^{\mu 0} - g^{\mu v} g^{00}) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{00} - g^{\mu 0} g^{\nu 0} \right) g^{\beta 0} (g^{v0} g^{\alpha 0} - g^{\alpha v} g^{v0}) \right\} \frac{1}{(g^{00})^2} = \\ &= \frac{1}{2} J g_{\mu\nu 0} g_{\alpha\beta v} \left\{ g^{\mu\nu} g^{\alpha v} g^{\beta 0} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} g^{v0} + \right. \\ &\quad \left. + [2(g^{\mu\nu} g^{\alpha 0} - g^{\alpha v} g^{\mu 0}) g^{\beta 0} g^{v0} + \right. \\ &\quad \left. + (g^{\alpha\beta} g^{\mu 0} g^{v0} - g^{\mu\nu} g^{\alpha 0} g^{\beta 0}) g^{v0} \right\} \frac{1}{g^{00}} \}. \quad (17) \end{aligned}$$

Это выражение линейно и однородно по скоростям, так что $\mathcal{L}(2)$ и $\mathcal{L}_G(0)$ остаются неизменными, в то время как $\mathcal{L}(1)$ переходит, скажем, в $\mathcal{L}^*(1)$. Прибавляя к (17) выражение $\mathcal{L}(1)$, которое получается, если сло-

жить выражение (8) при $\varrho = 0$, $\sigma = v$ с тем же выражением при $\varrho = v$, $\sigma = 0$, получаем выражение

$$\mathcal{L}^*(1) = \frac{1}{2} J g_{\mu\nu 0} g_{\alpha\beta v} \{ (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}) g^{v0} + \\ + 2(g^{\mu\nu} g^{\alpha v} - g^{\mu\alpha} g^{\nu v}) g^{\beta 0} + [2(g^{\mu\nu} g^{\alpha 0} - g^{\alpha v} g^{\mu 0}) g^{\beta 0} g^{v0} + \\ + (g^{\alpha\beta} g^{\mu 0} g^{v0} - g^{\mu\nu} g^{\alpha 0} g^{\beta 0}) g^{v0}] \frac{1}{g^{00}} \},$$

которое приводится к виду

$$\mathcal{L}^*(1) = \frac{1}{2} J g_{\mu\nu 0} g_{\alpha\beta v} \{ (e^{\mu\alpha} e^{\nu\beta} - e^{\mu\nu} e^{\alpha\beta}) g^{v0} + \\ + 2(e^{\mu\nu} e^{\alpha v} - e^{\mu\alpha} e^{\nu v}) g^{\beta 0} \}. \quad (18)$$

В этом выражении равны нулю все члены, за исключением тех, у которых μ, ν, α все отличны от нуля. Тем самым скорости $g_{\mu 0}$ не появляются в \mathcal{L}^* , что подтверждает правильность выбора $\mathcal{L}^* - \mathcal{L}$.

Складывая выражения (9) и (18), получаем

$$\mathcal{L}(2) + \mathcal{L}^*(1) = \frac{1}{4} J (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \times \\ \times \{ g_{rs0} g_{ab0} g^{00} + 2g_{rs0} g_{abv} g^{v0} - 4g_{rs0} g_{\alpha\beta b} g^{\beta 0} \} = \\ = \mathcal{L}_X + \frac{1}{4} J (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \times \\ \times \{ g_{rs0} g^{00} + g_{rsu} g^{u0} - (g_{ras} + g_{sar}) g^{\alpha 0} \} \times \\ \times \{ g_{ab0} g^{00} + g_{abv} g^{v0} - (g_{\alpha\beta b} + g_{b\beta a}) g^{\beta 0} \} \frac{1}{g^{00}},$$

где

$$\mathcal{L}_X = -\frac{1}{4} J (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \{ g_{rsu} g^{u0} - (g_{ras} + g_{sar}) g^{\alpha 0} \} \times \\ \times \{ g_{abv} g^{v0} - (g_{\alpha\beta b} + g_{b\beta a}) g^{\beta 0} \} \frac{1}{g^{00}} \quad (19)$$

и является, таким образом, функцией только динамических координат. Далее,

$$g_{rs0} g^{00} + g_{rsu} g^{u0} - (g_{ras} + g_{sar}) g^{\alpha 0} = -2\Gamma_{rs}^0,$$

так что мы получаем

$$\mathcal{L}(2) + \mathcal{L}^*(1) = \mathcal{L}_X + J (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) \frac{\Gamma_{rs}^0 \Gamma_{ab}^0}{g^{00}}. \quad (20)$$

Чтобы получить импульсы p^{rs} при новом, модифицированном лагранжиане, мы должны проварьировать скорости g_{rs0} в \mathcal{L}^* и подставить в (10) с \mathcal{L}^* вместо \mathcal{L} . Все члены в \mathcal{L}^* , содержащие g_{rs0} , заключены в (20) и дают при варьировании

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{L}^* &= 2J (e^{ra}e^{sb} - e^{rs}e^{ab}) \Gamma_{ab}^0 \frac{\delta \Gamma_{rs}^0}{g^{00}} = \\ &= -J (e^{ra}e^{sb} - e^{rs}e^{ab}) \Gamma_{ab}^0 \delta g_{rs0}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$p^{rs} = J (e^{rs}e^{ab} - e^{ra}e^{sb}) \Gamma_{ab}^0. \quad (21)$$

Разрешая эту формулу относительно $J\Gamma_{ab}^0$, получаем

$$J\Gamma_{ab}^0 = \left(\frac{1}{2} g_{rs}g_{ab} - g_{ra}g_{sb} \right) p^{rs}. \quad (22)$$

Соотношения (21) и (22) дают связь между гравитационными импульсами и скоростями. Так как все скорости g_{ab0} могут быть выражены, согласно (22), через импульсы, то для гравитационных переменных не может существовать никаких иных φ -уравнений, кроме уравнений (14).

Общее уравнение движения

Мы видели, что $g_{\mu 0}$ могут произвольным образом изменяться во времени без каких-либо ограничений со стороны уравнений движения. Посмотрим теперь, как эти переменные входят в общее уравнение движения.

Возьмем динамическую переменную η на поверхности $x^0 = c$, которая зависела бы лишь от g_{rs} и переменных, описывающих присутствующую материю какого-либо вида и поля, отличные от гравитационного, и не зависела бы от $g_{\mu 0}$. При этом η может быть либо локализованной в одной точке x'^r указанной поверхности, либо нелокализованной.

Произведем малое смещение поверхности, применяя к каждой ее точке преобразование

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu,$$

где a^μ — малая величина, зависящая от x^1, x^2, x^3 . Изменение величины η будет линейным относительно функций a^μ и тем самым будет иметь вид

$$\delta\eta = \int \xi_\mu a^\mu d^3x, \quad (23)$$

где ξ_μ — некоторые функции от x^1, x^2, x^3 , не зависящие от a^μ . Мы имеем, очевидно,

$$\dot{\eta} = \int \xi_0 d^3x. \quad (24)$$

Обозначим через l^μ единичную нормаль к поверхности $x^0 = c$ в некоторой точке x^r последней, так что

$$l^\mu g_{\mu r} = 0, \quad l^\mu l_\mu = 1.$$

Тогда

$$l^\mu = g^{\mu 0} (g^{00})^{-1/2}. \quad (25)$$

Положим

$$\xi_L = l^\mu \xi_\mu = g^{\mu 0} (g^{00})^{-1/2} \xi_\mu;$$

тогда с помощью (6) получим

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (g^{00})^{-1/2} \xi_L - \frac{g^{s0} \xi_s}{g^{00}} = \\ &= (g^{00})^{-1/2} \xi_L + g_{r0} e^{rs} \xi_s. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, (24) принимает вид

$$\dot{\eta} = \int \{(g^{00})^{-1/2} \xi_L + g_{r0} e^{rs} \xi_s\} d^3x. \quad (27)$$

Теперь ξ_L и ξ_s определяются величиной $\delta\eta$, которая задается формулой (23), соответственно для нормального и тангенциального смещений и не зависят таким образом от $g_{\mu 0}$. Итак, уравнение (27) показывает в явном виде, как величины $g_{\mu 0}$ входят в уравнение движения для η .

Можно показать, что гамильтониан должен иметь вид

$$H = \int \{(g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_L + g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_s\} d^3x, \quad (28)$$

где \mathcal{H}_L и \mathcal{H}_s не зависят от $g_{\mu 0}$, так как этот гамильтониан приводит уравнения движения $\dot{\eta} = [\eta, H]$ к виду

(27), при условии, что

$$[\eta, \mathcal{H}_L] = \xi_L, \quad [\eta, e^{rs} \mathcal{H}_s] = e^{rs} \xi_s. \quad (29)$$

Из требования $[\rho^{\mu 0}, H] = 0$ получаем теперь χ -уравнения

$$\mathcal{H}_L \approx 0, \quad \mathcal{H}_s \approx 0, \quad (30)$$

которые должны быть уравнениями первого класса, чтобы уравнения движения с произвольными $g_{\mu 0}$ могли быть совместными.

Эти соображения, приводящие к гамильтониану вида (28), применимы вообще для любой релятивистской динамической теории в римановом пространстве. Отсюда следует, что части гамильтониана, обусловленные гравитационным полем и материей, должны каждая в отдельности иметь вид (28), а именно:

$$H_G = \int \{(g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_{GL} + g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_{Gs}\} d^3x, \quad (31)$$

$$H_M = \int \{(g^{00})^{-1/2} \mathcal{H}_{ML} + g_{r0} e^{rs} \mathcal{H}_{Ms}\} d^3x, \quad (32)$$

где все величины \mathcal{H}_{GL} , \mathcal{H}_{Gs} , \mathcal{H}_{ML} , \mathcal{H}_{Ms} не зависят от $g_{\mu 0}$.

Гамильтониан

Гравитационная часть гамильтониана, по определению, имеет вид

$$\begin{aligned} H_G &= \int (p^{rs} g_{rs0} - \mathcal{L}_G^*) d^3x = \\ &= \int p^{rs} \left(g_{rs0} + \frac{\Gamma_{rs}^0}{g^{00}} \right) d^3x - \int \{ \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_G(0) \} d^3x, \end{aligned} \quad (33)$$

где использованы соотношения (20) и (21). Далее,

$$g_{rs0} + \frac{\Gamma_{rs}^0}{g^{00}} = g_{r0s} + g_{s0r} + \frac{2g^{v0} \Gamma_{rsv} - \Gamma_{rs}^0}{g^{00}},$$

так что первый член в (33) с помощью (22) и (6) принимает вид

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ (g^{00}J)^{-1} \left(g_{ra}g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs}g_{ab} \right) p^{rs} p^{ab} - \right. \\
& \left. - 2p_s^{rs} g_{r0} - 2g_{u0} e^{uv} p^{rs} \Gamma_{rsv} \right\} d^3x = \\
& = \int \left\{ \left(g^{00} \right)^{-1/2} K^{-1} \left(g_{ra}g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs}g_{ab} \right) p^{rs} p^{ab} + \right. \\
& \left. + g_{u0} e^{uv} [p^{rs} g_{rsv} - 2(p^{rs} q_{rv})_s] \right\} d^3x, \quad (34)
\end{aligned}$$

где использовано также соотношение (3).

Второй член в (33) является довольно сложным и его непосредственный расчет был бы весьма громоздким. Однако из (31) нам известно, что он должен иметь вид

$$- \int \{ \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_G(0) \} d^3x = \int \left[\left(g^{00} \right)^{-1/2} X_L + g_{r0} X^r \right] d^3x, \quad (35)$$

где X_L и X^r — функции только от g_{rs} и их пространственных производных. Сразу видно, что X^r должна обращаться в нуль, так как она не может содержать индекса 0, который был бы необходим для «компенсации» индекса 0 в ее коэффициенте g_{r0} . Мы можем приступить к расчету X_L при упрощающем допущении $g_{r0} = 0$, из которого следует также

$$g^{r0} = 0, \quad g^{rs} = e^{rs}, \quad g^{00} = g_{00}^{-1}. \quad (36)$$

В этом случае \mathcal{L}_X , задаваемая (19), обращается в нуль, в то время как $\mathcal{L}_G(0)$, задаваемая (8) с $q = u$, $\sigma = v$, принимает вид

$$\mathcal{L}_G(0) = (g^{00})^{-1/2} B + \frac{1}{2} J g_{rsu} g_{00v} g^{00} (e^{ru} e^{sv} - e^{rs} e^{uv}), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned}
B = \frac{1}{4} K g_{rsu} g_{abv} \{ & (e^{ra} e^{sb} - e^{rs} e^{ab}) e^{uv} + \\
& + 2(e^{ru} e^{ab} - e^{ra} e^{bu}) e^{sv} \}. \quad (38)
\end{aligned}$$

С помощью соотношений

$$\{(g^{00})^{-1/2}\}_v = (g_{00}^{1/2})_v = \frac{1}{2} g_{00v} (g^{00})^{1/2},$$

являющихся следствием (36), последний член в (37) преобразуется к виду

$$\{(g^{00})^{-1/2}\}_v K g_{rsu} (e^{ru} e^{sv} - e^{rs} e^{uv}),$$

так что, подставляя (37) в (35), находим

$$X_L = -B + \{K g_{rsu} (e^{ru} e^{sv} - e^{rs} e^{uv})\}_v. \quad (39)$$

Так как обе части этого уравнения вообще не зависят от g_{r0} , то уравнение должно оставаться в силе и в случае, когда g_{r0} не обращаются в нуль.

Складывая выражения (34), (35), (32) и используя (39), находим, что H дается формулой (28), в которой

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_L = K^{-1} \left(g_{ra} g_{sb} - \frac{1}{2} g_{rs} g_{ab} \right) p^{rs} p^{ab} - \\ - B + \{K g_{rsu} (e^{ru} e^{sv} - e^{rs} e^{uv})\}_v + \mathcal{H}_{ML} \approx 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\mathcal{H}_v = p^{rs} g_{rsv} - 2 (p^{rs} g_{rv})_s + \mathcal{H}_{Mv} \approx 0. \quad (41)$$

Эти уравнения дают гамильтониан для гравитационного поля, взаимодействующего с материей. Они содержат, кроме переменных, соответствующих материи, только шесть степеней свободы, описываемых величинами g_{rs} , p^{rs} , для каждой точки поверхности, на которой рассматривается состояние. Величины $g_{\mu 0}$ входят в теорию только через переменные g_{r0} , $(g^{00})^{-1/2}$, которые фигурируют в качестве произвольных коэффициентов в уравнениях движения, что приводит к произвольным функциям в общем решении уравнений движения.

Приближение слабого поля

В задачах, с которыми обычно имеют дело, кривизна пространства-времени чрезвычайно мала. Это означает, что при подходящем выборе системы координат компоненты $g_{\mu\nu}$ отличаются от их значений в специальной теории относительности на малые величины, скажем порядка ε , и все производные $g_{\mu\nu}$ будут порядка ε . Из соотношения (21) следует, что p^{rs} также будут порядка ε .

Если пренебречь членами порядка ε^2 , то χ -уравнения (40), (41) примут вид

$$g_{rsrs} - g_{rrss} + \mathcal{H}_{ML} \approx 0, \quad (42)$$

$$2p_s^{rs} + \mathcal{H}_{Mr} \approx 0. \quad (43)$$

Гамильтониан, определяемый формулами (28), (40), (41)

и (38), при пренебрежении членами порядка ε^3 принимает вид

$$\begin{aligned}
 H = \int \left\{ p^{rs} p^{rs} - \frac{1}{2} p^{rr} p^{ss} + \frac{1}{4} g_{rsu} g_{rsu} - \frac{1}{4} g_{rru} g_{ssu} + \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} g_{rsr} g_{uus} - \frac{1}{2} g_{rsu} g_{rus} + \mathcal{H}_{ML} \right\} d^3x + \\
 + \int \left[\left((g^{00})^{-1/2} - 1 \right) (g_{,srs} - g_{rrss} + \mathcal{H}_{ML}) d^3x - \right. \\
 \left. - \int g_{,0} (2p_s^{rs} + \mathcal{H}_{Mr}) d^3x. \right. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Здесь первый член представляет собой обычный гамильтониан, содержащий только эффективные динамические переменные и не содержащий произвольных $g_{\mu 0}$. Второй и третий члены состоят из произвольных линейных комбинаций χ -функций (42) и (43) с коэффициентами порядка ε . Эти члены необходимы в гамильтониане, чтобы внести в уравнения движения ту степень произвола, которая связана с возможностью осуществить изменения порядка ε в системе координат.

Уравнения (42) и (43) показывают, что \mathcal{H}_{ML} и \mathcal{H}_{Ms} являются величинами порядка ε . Это связано, конечно, с тем обстоятельством, что они содержат гравитационную постоянную. Теперь мы видим, что \mathcal{H}_{ML} — наибольший член в первом подынтегральном выражении в (44); все же другие — величины порядка ε^2 . Это приводит к тому, что движение в основном определяется плотностью гамильтониана \mathcal{H}_{ML} , гравитационные же эффекты вносят лишь малое возмущение.

Найдем вклад в гамильтониан частицы с массой покоя m . Пусть z^r — координаты частицы и пусть $g_{z\mu\nu}$ обозначает значение $g_{\mu\nu}$ в точке $x^r = z^r$. Тогда мы имеем

$$L_M = -m (g_{z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{1/2}, \quad (45)$$

где \dot{z}^0 равно единице и не рассматривается в качестве динамической переменной. Импульс P_r , сопряженный z^r , будет иметь вид

$$P_r = -m g_{z\mu r} \dot{z}^\mu (g_{z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1/2}. \quad (46)$$

Это приводит к выражению

$$\begin{aligned} e_Z^{rs} P_r P_s &= m^2 \left(g_Z^{00} - \frac{g_Z^{00} g_Z^{\sigma 0}}{g_Z^{00}} \right) g_{Z\mu 0} g_{Z\nu 0} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu (g_{Z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1} = \\ &= m^2 - m^2 (g_Z^{00} g_{Z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1}. \end{aligned} \quad (47)$$

Вклад частицы в гамильтониан будет иметь вид

$$\begin{aligned} H_M &= P_r \dot{z}^r - L_M = \\ &= m (g_{Z\mu\nu} \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu - g_{Z\mu r} \dot{z}^\mu \dot{z}^r) (g_{Z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1/2} = \\ &= m g_{Z\mu 0} \dot{z}^\mu (g_{Z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1/2} = \\ &= m \left(e_Z^{rs} g_{Zs 0} g_{Z\mu r} + \frac{g_\mu^0}{g_Z^{00}} \right) \dot{z}^\mu (g_{Z\alpha\beta} \dot{z}^\alpha \dot{z}^\beta)^{-1/2}, \end{aligned}$$

при этом мы воспользовались формулой (6). Учитывая (46) и (47), получаем

$$H_M = -g_{Zs 0} e_Z^{rs} P_r + \left(g_Z^{00} \right)^{-1/2} (m^2 - e_Z^{rs} P_r P_s)^{1/2}. \quad (48)$$

Подставляя в (32), находим, что

$$\mathcal{H}_{ML} = (m^2 - e^{rs} P_r P_s)^{1/2} \delta_3(x - z), \quad (49)$$

$$\mathcal{H}_{Mr} = -P_r \delta_3(x - z). \quad (50)$$

Таковы вклады одной частицы в \mathcal{H}_{ML} и \mathcal{H}_{Mr} . В случае нескольких частиц, взаимодействующих только через гравитационное поле, мы должны были бы просто взять сумму вкладов каждой отдельной частицы. Формулы (49) и (50) получены без использования приближения слабого поля, однако их нельзя было бы использовать в точной теории, так как они относятся к точечной частице, которая приводит к сингулярности поля, где уравнения поля не могут быть удовлетворены точно.

Гравитационные волны

В рамках приближения слабого поля рассмотрим гравитационные волны в отсутствие материи или в присутствии материи, которую будем считать медленно движущейся.

щейся. Тогда, согласно (50), член \mathcal{H}_{Mr} мал и им можно пренебречь, так что χ -уравнения (43) принимают простой вид

$$p_s^{rs} \approx 0. \quad (51)$$

Разложим все величины, характеризующие поле, в интеграл Фурье в трехмерном пространстве (x^1, x^2, x^3) :

$$g_{rs} = -\delta_{rs} + \int g_{krs} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d^3k,$$

$$p^{rs} = \int p_k^{rs} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d^3k, \quad (52)$$

$$\mathcal{H}_{ML} = \int q_k e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} d^3k.$$

В каждом случае фурье-компонента с индексом $-\mathbf{k}$ является комплексно сопряженной от фурье-компоненты с индексом \mathbf{k} .

Для простоты обсуждения ограничимся рассмотрением волн, распространяющихся в направлении оси \mathbf{x}^3 , так что $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = 0$. Тогда из уравнения (51) получим 72

$$p_k^{13} \approx 0, \quad p_k^{23} \approx 0, \quad p_k^{33} \approx 0, \quad (53)$$

а из уравнения (42)

$$\mathbf{k}^2 (g_{k11} + g_{k22}) + q_k \approx 0. \quad (54)$$

Поскольку мы имеем дело со слабыми гравитационными полями, можно сделать допущение, что полная энергия равна гамильтониану (44). Некоторый вклад дает лишь первый член в (44), так как другие члены слабо обращаются в нуль. В таком случае энергия гравитационного поля дается первым членом в (44) без члена \mathcal{H}_{ML} в подынтегральном выражении. Если подставим вместо g_{rs} и p^{rs} их фурье-разложения (52), то эта энергия запишется в виде суммы некоторого числа членов вида

$$\iint \int f_k f_{k'} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x})} e^{i(\mathbf{k}'\mathbf{x})} d^3k d^3k' d^3x = 8\pi^3 \int f_k f_{-\mathbf{k}} d^3k.$$

Вклад в эту энергию волн, движущихся в направлении x^3 (при пренебрежении множителем $8\pi^3$), будет

$$E_{(3)} = p_k^{rs} p_{-k}^{rs} - \frac{1}{2} p_k^{rr} p_{-k}^{ss} + \\ + \frac{1}{4} k^2 (g_{krs} g_{-krs} - g_{krr} g_{-kss} + g_{k33} g_{-kuu} + \\ + g_{kuu} g_{-k33} - 2g_{kr3} g_{-kr3}). \quad (55)$$

Последний член в этом выражении приводится к виду

$$\frac{1}{4} k^2 (2g_{k12} g_{-k12} - g_{k11} g_{-k22} - g_{k22} g_{-k11}) = \\ = \frac{1}{4} k^2 \left\{ 2g_{k12} g_{-k12} + \frac{1}{2} (g_{k11} - g_{k22}) (g_{-k11} - g_{-k22}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (g_{k11} + g_{k22}) (g_{-k11} + g_{-k22}) \right\}.$$

Итак, формула (55) с помощью (53) и (54) принимает вид

$$E_{(3)} \approx 2p_k^{12} p_{-k}^{12} + \frac{1}{2} (p_k^{11} - p_k^{22}) (p_{-k}^{11} - p_{-k}^{22}) + \\ + \frac{1}{4} k^2 \left\{ 2g_{k12} g_{-k12} + \frac{1}{2} (g_{k11} - g_{k22}) (g_{-k11} - g_{-k22}) \right\} - \\ - \frac{1}{8} k^{-2} \varrho_k \varrho_{-k}. \quad (56)$$

Проведенный анализ дает возможность выяснить значение различных степеней свободы гравитационного поля, представленных в виде их фурье-компонент. χ -уравнения (53) и (54) показывают, что переменные, соответствующие степеням свободы «13», «23», «33», «11 + 22», чувствительны к изменениям системы координат, а переменные, соответствующие степеням свободы «12», «11 - 12» — инвариантны при изменениях последней. Выражение (56) для энергии представлено в виде суммы членов, каждый из которых связан с одной из этих шести степеней свободы, в отсутствие каких-либо перекрестных членов, связанных с двумя из них.

Степени свободы «13», «23», «33» вообще не появляются в (56). Степени свободы «12» «11 - 22» дают поло-

жительно определенный вклад в (56) такого вида, который соответствует энергии гравитационных волн. Эти две степени свободы соответствуют, на языке квантовой теории, гравитационным «фотонам» (гравитонам) с проекциями спина ± 2 на направление их движения.

Последний член в (56) обусловлен степенью свободы «11+22». Если взять для q_k ее значение, соответствующее формуле (49) для нескольких медленно движущихся частиц, а именно:

$$q_k = (2\pi)^{-3} \sum m e^{-i(kz)},$$

и перейти обратно к переменным x , то получится как раз выражение, являющееся суммой ньютоновской потенциальной энергии каждой пары частиц и членов собственной энергии каждой частицы, представляющих энергию ньютоновского поля вокруг них. Последний член в (56) является отрицательно определенным, что указывает на то обстоятельство, что гравитационные силы между двумя положительными массами являются силами притяжения и что собственная гравитационная энергия каждой массы отрицательна.

Не зависящие от координат степени свободы «12» и «11—22» являются единственными существенными с физической точки зрения. Другие степени свободы выпадают из гамильтоновых уравнений движения. Такова общая картина приближения слабого поля. Даже без ограничения медленно движущимися частицами, когда величиной \mathcal{H}_{Mr} нельзя пренебречь, можно было бы использовать χ -уравнения (42) и (43), чтобы исключить степени свободы «13», «23», «33», «11+22» путем контактного преобразования, аналогичного тому, которое исключает продольные волны в электродинамике.

Заключение

Точный гамильтониан теории тяготения, определяемый уравнениями (28), (40), (41), оказывается значительно более простым, чем этого можно было ожидать. Сначала мы имели десять степеней свободы для каждой точки пространства соответственно десяти значениям $g_{\mu\nu}$, но, следуя изложен-

ному здесь методу, нашли, что некоторые из них выпадают, так что остается только шесть степеней свободы соответственно шести значениям g_{rs} . *Это существенное упрощение, однако оно может быть получено только ценой отказа от четырехмерной симметрии.* В связи с этим мы склонны считать, что четырехмерная симметрия не является фундаментальным свойством физического мира.

Эйнштейн показал, и в этом состоит его огромная заслуга, что каждое индивидуальное решение уравнений движения, которые представляют законы природы, проявляют четырехмерную симметрию. Однако мы знаем теперь, что физическое состояние соответствует не отдельному решению уравнений движения, а некоторому семейству всех решений, относящихся к одной и той же основной функции Гамильтона; это такое семейство, которое соответствует волновой функции в квантовой теории, в то время как индивидуальное решение не имеет квантового аналога. Чтобы иметь дело с семейством решений, необходимо пользоваться методами гамильтонова формализма. Настоящая работа показывает, что эти методы, будучи выражены в своей простейшей форме, *вынуждают отказаться от четырехмерной симметрии.*

С математической точки зрения потеря четырехмерной симметрии вызывает сожаление, ибо это означает утрату трансформационных свойств уравнений. Эта утрата в достаточной мере компенсируется за счет обогащения трансформационных свойств, возникающих из возможности осуществления контактных преобразований в уравнениях Гамильтона.

Представляется вполне допустимым рассматривать гамильтонов формализм как основной; тогда в теории не было бы никакой фундаментальной четырехмерной симметрии. Мы имели бы гамильтониан, построенный из четырех слабо обращающихся в нуль функций, которые задаются формулами (40) и (41). Обычное требование четырехмерной симметрии физических законов заменилось бы требованием, чтобы скобки Пуассона этих функций слабо обращались в нуль, так что они могут быть подставлены с произвольными коэффициентами в уравнения движения, что соответствует произвольному движению поверхности, на которой определено состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A246, 326 (1958); статья 3 настоящего сборника.
2. Pirani F. A. E., Schild A., Phys. Rev., 79, 986 (1950).
3. Bergmann P. G., Penfield R., Schiller R., Zatzkis H., Phys. Rev., 80, 81 (1950).
4. Pirani F. A. E., Schild A., Skinner R., Phys. Rev., 87, 452 (1952).

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ

Л. Инфельд

L. Infeld, Rev. Mod. Phys., 29, 398—411 (1957)

§ 1. Историческое введение

История проблемы движения в общей теории относительности с полным основанием начинается с опубликования в 1927 г. статьи Эйнштейна и Громмера [1]. В этой работе было впервые показано, что нет необходимости к уравнениям поля добавлять уравнения движения для пробной частицы (с массой $m \rightarrow 0$), поскольку последние могут быть выведены из релятивистских уравнений поля. Много лет спустя сам Эйнштейн, а затем совместно со своими сотрудниками взялся за решение задачи движения двух частиц. Их задачей было выяснить, могут ли и в этом случае уравнения движения быть выведены из уравнений поля. Ответ на этот вопрос был дан в работах Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана [2—4], в которых впервые была решена задача двух тел.

Независимо от нас и несколько позже Фок [5] также вывел уравнения движения (правда, только ньютоновские) из уравнений поля. Позже Папапетру [6] упростил его метод и получил постньютоновские уравнения движения, после того как они уже были получены Петровой [7] на основе метода Фока. Результаты Петровой и Папапетру совпадают с нашими.

В чем состоит основное сходство и различие между теорией Эйнштейна (в особенности в том виде, как она сформулирована в двух более поздних работах Эйнштейна и Инфельда [3, 4]) и теорией, развиваемой в работах Фока — Папапетру?

Вообще говоря, идея обоих направлений одна и та же, однако по двум пунктам имеются расхождения,

причем лишь один из этих пунктов существен. Идеей, общей для обоих направлений, является метод приближений. Остановимся теперь на первом различии.

В работах школы Эйнштейна используются уравнения поля в пустом пространстве, которые в обычных обозначениях имеют вид ¹⁾

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 0. \quad (1.1)$$

Эйнштейн всегда считал, что использование уравнения

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (1.2)$$

где $T_{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса, вместо уравнения (1.1) в некотором смысле некорректно, так как мы не знаем в (1.2), что представляет собой $T_{\alpha\beta}$, и смешиваем некоторый геометрический тензор в левой части уравнения с некоторым физическим тензором в правой части. Это явилось причиной, побудившей Эйнштейна к длительным поискам единой теории поля, в которой не появлялось бы такого смешивания физики и геометрии.

Известно, что не существует решений уравнения (1.1), представляющих непрерывно распределенную материю. Поэтому, принимая (1.1), мы представляем материю посредством сингулярностей. Метод, впервые использованный нами, состоял в образовании некоторых двумерных интегралов по поверхностям, окружающим эти сингулярности. Уравнения поля предписывали законы, по которым должны двигаться поверхности, окружающие сингулярности, а следовательно и сами сингулярности. Таким образом, эти законы были выведены из уравнений поля в постньютоновском приближении.

Фок и Папапетру, однако, рассматривают уравнение (1.2) и используют определенные выражения для $T_{\alpha\beta}$.

Это различие нам не кажется существенным по следующим соображениям. Нам не известно действительное рас-

¹⁾ Здесь и в дальнейшем греческие индексы пробегают значения от 0 до 3, латинские — от 1 до 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Квадратичная форма для геодезической системы координат имеет вид (скорость света $c=1$)

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta; \quad \eta_{00} = 0; \quad \eta_{0m} = 0; \quad \eta_{mn} = -\delta_{mn}.$$

пределение материи. Ни один из этих методов не отображает действительности правильно. Использование нашего метода, опирающегося на (1.1), подразумевает следующее: если два тела находятся на очень большом расстоянии друг от друга, так что мы можем считать поле вблизи каждого тела приближенно центрально-симметричным, то в этом случае точные сведения о распределении плотности внутри поверхности, окружающей тело, не существенны. Вне таких поверхностей уравнение (1.1) выполняется.

Это различие между двумя школами можно уяснить на простом примере классической теории гравитации. Здесь мы имеем два типа уравнений, в зависимости от того, представляем ли мы материю при помощи сингулярностей или же описываем ее непрерывным распределением вещества. В первом случае мы имеем уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0; \quad (1.3)$$

во втором случае — уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi\rho. \quad (1.4)$$

В том случае, когда мы имеем дело со сферически-симметричным решением уравнения Лапласа, последнее более естественно писать в форме

$$\Delta\varphi = 4\pi t\delta_{(3)}, \quad (1.5)$$

где t — масса и $\delta_{(3)}$ — трехмерная δ -функция Дирака.

Попытаемся последовательно использовать δ -функции в общей теории относительности. Здесь в первом приближении, используя уравнение (1.1) для пустого пространства, мы имеем уравнение Лапласа, которое удовлетворяется сферически-симметричным решением. Это означает, что решение уравнения (1.1) в первом приближении, справедливое всюду, соответствует такому решению уравнения (1.2), когда тензор энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ пропорционален δ -функции Дирака. Таким образом, использование уравнения (1.2) с $T_{\alpha\beta}$, пропорциональным $\delta_{(3)}$, в точности соответствует нашим предыдущим рассмотрениям уравнения (1.1) с сингулярными решениями в полной аналогии с тем, что уравнение (1.5) является лишь иной формой (1.3).

Использование уравнения (1.2) с $T_{\alpha\beta}$, пропорциональным $\delta_{(3)}$ -функциям, существенно упрощает весь процесс вывода

уравнений движения. Это упрощение было осуществлено в нашей работе [10], а также в [8, 9]; однако вся процедура может быть сделана еще более простой и прозрачной. В настоящей работе мы дадим вывод постньютоновских уравнений движения почти без каких-либо громоздких выкладок¹⁾.

Резюмируя, можно сказать, что, хотя мы являемся сторонниками идеи Эйнштейна — не использовать тензора энергии импульса, — будем тем не менее использовать тензор энергии-импульса, пропорциональный $\delta_{(3)}$ -функции, для выражения сингулярных решений.

Следующее различие между школами Фока и Эйнштейна является более существенным. Фок, Петрова и Папапетру используют гармоническую систему координат, т. е. четыре соотношения

$$(-g^{1/2}g^{a\beta})_{,\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\beta} (-g^{1/2}g^{a\beta}) = 0. \quad (1.6)$$

Фок считает выбор этой системы координат крайне важным, утверждая, что добавление его к гравитационным уравнениям (плюс некоторые условия на бесконечности) ограничивает систему координат с точностью до преобразования Лоренца. Тем самым для Фока выбор гармонического координатного условия становится некоторым фундаментальным законом природы, изменяющим сам характер эйнштейновской общей теории относительности и превращающим ее в теорию гравитационного поля, справедливую только в инерциальных системах координат. Другие же авторы, как, например, Папапетру [6], который в своем исследовании основывается на работе Фока, не заходят столь далеко, однако также рассматривают координатное условие (1.6) как существенное для вывода уравнений движения.

В нашей первой работе мы использовали координатное условие, отличное от гармонического; тем не менее мы получили те же самые уравнения движения, которые позже были получены Папапетру [6] и Петровой [7]. В нескольких

¹⁾ Некоторые из излагаемых в этой работе идей принадлежат Плебанскому и автору и в более полной форме описаны в книге L. Infeld, J. Plebański. *Motion and Relativity*, New York—London—Paris—Narszawa, 1960.

последующих работах [8—12] эта проблема была тщательно проанализирована.

Мы утверждаем, что уравнения движения не имеют никакого отношения к гармоническим координатным условиям; в то же время они в значительной степени связаны с методом приближений. Именно этот метод однозначно определяет уравнения движения вплоть до постньютоновского порядка. Позже мы покажем в явной форме, что нарушение гармонического координатного условия не изменяет постньютоновских уравнений движения, пока мы придерживаемся определенной процедуры приближения.

§ 2. Некоторые обозначения и замечания о математическом аппарате

Пусть мы имеем мировую линию $\xi^k(t)$ и некоторое поле, например скалярное поле φ , которое зависит от координат x^k и времени $x^0 = t$, а также от $\xi^k(t)$ и их производных по времени:

$$\varphi = \varphi(x^k, t, \xi^k, \dot{\xi}^k), \quad \dot{\xi}^k = \frac{d\xi^k}{dt}. \quad (2.1)$$

Мы предполагаем, что в окрестности линии $\xi^k(t)$ поле становится сингулярным и имеет следующий вид:

$$\varphi = \frac{-1\varphi}{\varrho} + \bar{\varphi} + \overline{\varphi_{,s}}(x^s - \xi^s) + \frac{1}{2} \overline{\varphi_{,sr}}(x^s - \xi^s)(x^r - \xi^r) + \dots \quad (2.2)$$

Здесь

$$\varrho^2 = (x^s - \xi^s)(x^s - \xi^s) \quad (2.3)$$

и, следовательно,

$$\bar{\varphi} = \left(\varphi - \frac{-1\varphi}{\varrho} \right) \Big|_{x^s = \xi^s}. \quad (2.4)$$

Подобным же образом

$$\overline{\varphi_{,s}} = \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\varphi - \frac{-1\varphi}{\varrho} \right) \Big|_{x^s = \xi^s}. \quad (2.5)$$

Следует различать величины

$$\overline{\varphi_{,s}} \text{ и } \bar{\varphi}_{,s} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^s} = \bar{\varphi}_{,\xi^s}, \quad (2.6)$$

которые, вообще говоря, не равны друг другу.

Если бы функция φ не была сингулярной на кривой $\xi^k(t)$, мы могли бы определить $\bar{\varphi}$ следующим образом:

$$\bar{\varphi} = \int \varphi \delta_{(3)}(x^s - \xi^s) d_{(3)}x. \quad (2.7)$$

Мы можем сузить определение δ -функций Дирака таким образом, чтобы (2.7) оставалось в силе даже в том случае, если φ имеет сингулярность до k -го порядка включительно. Такие δ -функции могут быть построены (см. Приложение А) как пределы обычных функций. При использовании подобных δ -функций мы избавляемся от бесконечностей, не прибегая к процедуре ренормировки. Таким образом, все δ -функции, используемые здесь, будут обладать тем свойством, что они переводят φ в $\bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi}$ — непрерывная функция ξ^k , $\dot{\xi}^k$ и $\ddot{\xi}^k$. Следовательно, мы используем (2.7) в качестве определения $\bar{\varphi}$, где δ — трехмерная δ -функция Дирака, удовлетворяющая следующим условиям.

1) $\delta(\mathbf{x})$ может формально рассматриваться как сферически-симметричная функция, все производные которой существуют.

2) $\delta(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$.

3) Для всякой функции $f(\mathbf{x})$, непрерывной в произвольной области $\Omega(\mathbf{x}_0)$, которая расположена в окрестности \mathbf{x}_0 , мы имеем

$$\int_{\Omega(\mathbf{x}_0)} d_{(3)}x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

4) Для произвольной окрестности $\Omega(0)$ точки $\mathbf{x} = 0$ имеем

$$\int_{\Omega(0)} d_{(3)}x \delta(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^{-p} = 0 \quad \text{при } p = 1, 2, \dots, k.$$

Четвертое условие отличает эту δ -функцию от обычной. Доказательство существования дано в Приложении А (см. также [13]).

Таким образом, черточка сверху подразумевает две операции: во-первых, отбрасываются сингулярности и, во-вторых, x^k заменяются на ξ^k .

Возвращаясь к вопросу о различии между $\overline{\varphi}_{,s} = \overline{\partial\varphi/\partial\xi^s}$ и $\overline{\varphi}_{,s}$, имеем из (2.7)

$$\overline{\varphi}_{,\xi^s} = \overline{\varphi}_{,\xi^s} + \overline{\varphi}_{,s}. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что $\overline{\varphi}_{,s}$ и $\overline{\varphi}_{,s}$ равны между собой в том и только в том случае, если $\overline{\varphi}_{,\xi^s} = 0$. Последнее заведомо имеет место, если та часть функции φ , которая дает вклад в $\overline{\varphi}$, не зависит от ξ^s .

Приведем еще одну формулу, вытекающую из определения (2.7), которая будет в дальнейшем играть важную роль:

$$\overline{\varphi}_{,0} = \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \overline{\varphi}_{,0} + \overline{\varphi}_{,s}\dot{\xi}^s = \overline{\varphi}_{,\alpha}\dot{\xi}^\alpha \quad (\dot{\xi}^0 = 1). \quad (2.9)$$

Пусть имеются две функции, например φ и ψ :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{-1\varphi}{\varrho} + \overline{\varphi} + \overline{\varphi}_{,s}(x^s - \xi^s) + \frac{1}{2}\overline{\varphi}_{,sr}(x^s - \xi^s)(x^r - \xi^r) + \dots, \\ \psi &= \frac{-3\psi}{\varrho^3} + \frac{-1\psi}{\varrho} + \overline{\psi} + \overline{\psi}_{,s}(x^s - \xi^s) + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Тогда

$$\overline{\varphi\psi} = \overline{\varphi}\overline{\psi}. \quad (2.11)$$

Взяв произведение $\varphi\psi$ и отбросив в нем сингулярные выражения и выражения, обращающиеся в нуль при $x^s = \xi^s$, получим в результате следующее выражение нулевого порядка по $(x^s - \xi^s)$:

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}\overline{\psi} + {}^{-1}\overline{\varphi}\overline{\psi}_{,s} \frac{x^s - \xi^s}{\varrho} + {}^{-1}\overline{\varphi}\overline{\psi}_{,s} \frac{x^s - \xi^s}{\varrho} + \\ &+ {}^{-3}\overline{\psi} \frac{1}{6} \frac{\overline{\varphi}_{,srp}(x^s - \xi^s)(x^r - \xi^r)(x^p - \xi^p)}{\varrho^3}. \end{aligned}$$

Для произведения с черточкой получаем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi\psi} &= \int \delta_{(3)} d_{(3)}x \left[\overline{\varphi}\overline{\psi} + (\overline{\varphi}_{,s} {}^{-1}\overline{\psi} + \overline{\psi}_{,s} {}^{-1}\overline{\varphi}) \frac{x^s - \xi^s}{\varrho} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{6} \overline{\varphi}_{,srp} {}^{-3}\overline{\psi} \frac{(x^s - \xi^s)(x^r - \xi^r)(x^p - \xi^p)}{\varrho^3} \right]. \end{aligned}$$

Два последних выражения, стоящие под знаком интеграла, дают нуль, так как они представляют собой произведение *симметричных* δ -функций и *нечетных* степеней $(x^s - \xi^s)$. Таким образом,

$$\overline{\varphi\psi} = \int \overline{\varphi} \overline{\psi} \delta_{(3)} x = \overline{\varphi} \overline{\psi}.$$

Однако соотношение (2.11) не имело бы места, если бы φ или ψ обладали сингулярностью порядка ϱ^{-2} . Вообще, (2.11) справедливо в тех случаях, когда в сингулярных частях φ и ψ фигурируют *нечетные* степени ϱ . Следовательно, нужно быть осторожным при использовании последнего уравнения.

Итак, мы имеем векторы и тензоры, определенные только *вдоль* кривой, типа \overline{S}^a , \overline{T}^{ab} и т. д. Мы можем определить метрический тензор *вдоль кривой* $\overline{g}_{\alpha\beta}$ и $\overline{g}^{\alpha\beta}$, для которого, предполагая выполнение соотношения (2.11), будем иметь

$$\overline{g_{\alpha\varrho} g^{\beta\varrho}} = \overline{g_{\alpha\varrho} g^{\beta\varrho}} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.12)$$

К таким тензорам мы можем применять тензорную алгебру и тензорный анализ, но *только* вдоль кривой.

Так как

$$\overline{g_{\alpha\beta}} = \int_{\Omega_{(3)}} g_{\alpha\beta} \delta d_{(3)} x \quad (2.13)$$

(где $\Omega_{(3)}$ — малая трехмерная область, окружающая сингулярность), то $\overline{g_{\alpha\beta}}$ будет тензором вдоль кривой, если $\delta_{(3)} d_{(3)} x$ является инвариантом.

Четырехмерная релятивистская δ -функция Дирака $\delta_{(4)}$ представляет собой скалярную плотность вследствие инвариантного соотношения

$$\int \delta_{(4)} d_{(4)} x = 1. \quad (2.14)$$

Положим теперь

$$\delta_{(4)} = \delta_{(4)} (x^{\alpha} - \xi^{\alpha}), \quad (2.15)$$

где

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(\lambda), \quad (2.16)$$

причем λ — некоторый инвариантный параметр. Тогда мы можем построить функцию, являющуюся скалярной плотностью

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(4)} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{(4)} \frac{d\lambda}{d\xi^0} d\xi^0 = \frac{d\lambda}{dt} \delta_{(3)}. \quad (2.17)$$

Поскольку речь идет о трансформационных свойствах, это является определением $\delta_{(3)}$. Итак, $\delta_{(3)}$ представляет собой нулевую компоненту векторной плотности. Из этого определения следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(3)} \delta_{(3)} d_{(3)} x &= \int_{\Omega(3)} \delta_{(3)} \frac{d\lambda}{dt} d_{(3)} x \frac{dt}{d\lambda} = \\ &= \int_{\Omega(3)} \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} \delta_{(4)} d_{(3)} x dt = \int_{\Omega(4)} \delta_{(4)} d_{(4)} x. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Следовательно, пространственный интеграл от $\delta_{(3)}$ является инвариантом.

Сделаем еще одно замечание относительно обозначений. Если мы имеем несколько кривых, то, чтобы различать их, будем приписывать индекс слева вверху: ${}^a \xi^s$ ($a = 1, 2, \dots, p$). Тогда нам следует также писать ${}^a \bar{\varphi}$, подразумевая выражение

$${}^a \bar{\varphi} = \int_{{}^a \Omega(3)} \varphi {}^a \delta d_{(3)} x, \quad {}^a \delta = \delta_{(3)} (x^s - {}^a \xi^s). \quad (2.19)$$

Однако для простоты не будем всегда писать индекс a около черточки, понимая при этом, что имеется в виду первая (или единственная) кривая: $\bar{\varphi} = {}^1 \bar{\varphi}$.

§ 3. Уравнения тяготения

Уравнения тяготения, выраженные через контравариантные тензорные плотности, имеют вид

$$\mathbf{G}^{\alpha\beta} = \mathbf{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathbf{R} = -8\pi \mathbf{T}^{\alpha\beta}. \quad (3.1)$$

В частном случае, например, двух частиц, движущихся вдоль мировых линий ${}^1\xi^s$ и ${}^2\xi^s$, имеем

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = {}^1t^{\alpha\beta} \delta + {}^2t^{\alpha\beta} \delta. \quad (3.2)$$

Введем инвариантный и конечный интервал, относящийся к первой частице (опуская индекс «1» слева):

$$\overline{ds^2} = \overline{g_{\alpha\beta}} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (3.3)$$

Из тензорной плотности мы можем построить *тензор* вдоль (первой) кривой

$$\frac{dt}{ds} \int_{\Omega(3)} \mathbf{T}^{\alpha\beta} d_{(3)}x = \overline{t^{\alpha\beta}} \frac{dt}{ds}. \quad (3.4)$$

В следующем параграфе мы увидим, что, в силу уравнений поля, должны иметь место следующие уравнения [14]:

$$t^{\alpha\beta} \frac{dt}{ds} = \mu \xi^{\alpha'} \xi^{\beta'}, \quad \xi^{\alpha'} = \frac{d}{ds} \xi^\alpha \quad (3.5)$$

(здесь μ — масса покоя). В § 4 мы не только покажем, что $t^{\alpha\beta}$ имеет вид (3.5), но и то, что масса покоя μ является постоянной. Пока же мы используем (3.5), как некоторое *допущение*, не предполагая постоянства μ в (3.5).

Из уравнений (3.5) следует

$$t^{\alpha\beta} = \mu \dot{\xi}^\alpha \xi^{\beta'} = m \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta, \quad \xi^\alpha = \frac{d}{dt} (\xi^\alpha), \quad \frac{m}{\mu} = \frac{dt}{ds}. \quad (3.6)$$

и

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{\rho} {}^a m^a \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta {}^a \delta. \quad (3.7)$$

Правые части уравнений тяготения однозначно определяются условием, согласно которому тензорная плотность $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ линейно зависит от ${}^a\delta$ -функций.

§ 4. Уравнения движения в общем виде

Как следствие тождеств Бианки мы всегда имеем

$$\mathbf{G}_{;\beta}^{\alpha\beta} = \left(\mathbf{R}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \mathbf{R} \right)_{;\beta} = -8\pi \mathbf{T}_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0, \quad (4.1)$$

где точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование. Беря интеграл от $\Gamma_{;\beta}^{\alpha\beta}$ по трехмерной области, окружающей первую сингулярность, и умножая на dt/\bar{ds} , получаем

$$\frac{dt}{\bar{ds}} \int_{\Omega_{(3)}} \Gamma_{;\beta}^{\alpha\beta} d_{(3)} x = \bar{A}^\alpha = 0, \quad (4.2)$$

где \bar{A}^α представляет собой некоторый вектор, определяемый соотношением (4.2), вдоль первой кривой. В общем случае

$${}^a \bar{A}^\alpha = 0, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, \dots, p, \quad (4.3)$$

где p — число сингулярностей. Итак, мы имеем $4p$ уравнений (4.3), которые являются следствием уравнений поля и которые мы назовем *уравнениями движения* p сингулярностей. В самом деле, они содержат $4p$ неизвестных:

$${}^a \xi^s(t) \text{ и } {}^a m(t), \quad s = 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, \dots, p. \quad (4.4)$$

Выпишем теперь \bar{A}^α в явной форме (опуская индекс «1» слева). Исходим из выражения

$$\Gamma_{;\beta}^{\alpha\beta} = \Gamma_{,\beta}^{\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \Gamma^{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

После подстановки сюда $\Gamma^{\alpha\beta}$ из (3.7) первый член в правой части принимает вид

$$\Gamma_{,\beta}^{\alpha\beta} = \Gamma_{,s}^{\alpha s} + \Gamma_{,0}^{\alpha 0} = ({}^1 m \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^s \delta)_{,s} + ({}^1 m \dot{\xi}^\alpha \delta)_{,0} +$$

+ Аналогичные выражения, соответствующие другим частицам.

$$(4.6)$$

Имеет место следующее соотношение:

$$\frac{dt}{\bar{ds}} \int_{\Omega_{(3)}} ({}^1 m \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^s \delta)_{,s} d_{(3)} x = \frac{dt}{\bar{ds}} \int_{\Omega_{(3)}} \Gamma_{,s}^{\alpha s} d_{(3)} x = 0. \quad (4.7)$$

В этом легко убедиться, даже не производя расчетов, если преобразовать объемный интеграл в поверхностный, который должен исчезать, так как ${}^1 \delta$ обращается в нуль на поверхности, ограничивающей область ${}^1 \Omega_{(3)}$. Следова-

тельно, то, что остается от интеграла от выражения (4.6), в силу (3.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} \int_{\Omega(3)} T_{,0}^{\alpha 0} d_{(3)} x &= \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega(3)} m \dot{\xi}^{\alpha} \delta_{(3)} d_{(3)} x \right] = \\ &= \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} (m \dot{\xi}^{\alpha}) = (\mu \dot{\xi}^{\alpha})'. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, вследствие (4.5), (3.6) и (4.8) наши уравнения движения (4.2) приводятся к виду

$$\mu' \dot{\xi}^{\alpha'} + \mu \ddot{\xi}^{\alpha'} + \mu \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^{\mu'} \dot{\xi}^{\nu'} = 0. \quad (4.9)$$

Мы покажем теперь, что $\mu' = d\mu/ds = 0$, т. е. масса покоя есть постоянная величина. Допустим, что

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} = \overline{g^{\alpha\sigma}} [\overline{\mu\nu}, \sigma]. \quad (4.10)$$

Тогда, умножая (4.9) на $\overline{g_{\alpha\sigma}} \dot{\xi}^{\sigma'}$, получаем

$$\mu' \dot{\xi}^{\alpha'} \dot{\xi}^{\sigma'} \overline{g_{\alpha\sigma}} + \mu \ddot{\xi}^{\alpha'} \dot{\xi}^{\sigma'} \overline{g_{\alpha\sigma}} + \frac{1}{2} \mu \overline{g_{\mu\nu, \sigma}} \dot{\xi}^{\mu'} \dot{\xi}^{\nu'} \dot{\xi}^{\sigma'} = 0. \quad (4.11)$$

В силу (2.9) это эквивалентно

$$\mu' + \frac{\mu}{2} \frac{d}{ds} (\overline{g_{\alpha\beta}} \dot{\xi}^{\alpha'} \dot{\xi}^{\beta'}) = 0, \quad \mu' = 0, \quad (4.12)$$

благодаря чему уравнение (4.9) принимает вид

$$\frac{1}{\mu} \overline{A^{\alpha}} = \dot{\xi}^{\alpha'} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^{\mu'} \dot{\xi}^{\nu'} = 0. \quad (4.13)$$

Итак, масса покоя должна быть постоянной.

Если бы не черточка над символом Кристоффеля, то наше уравнение (4.13) было бы уравнением геодезической линии. Для каждой частицы имеется четыре таких уравнения движения.

Перейдем в уравнении (4.13) обратно от \bar{s} к t , используя соотношения (3.6). Тогда будем иметь

$$\frac{dm}{dt} + m \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt} (m \dot{\xi}^s) + m \left\{ \begin{matrix} \bar{k} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0, \quad (\dot{\xi}^0 = 1)$$

Как и раньше, имеем здесь $4p$ уравнений, определяющих ${}^a\xi^k$ и ${}^a m$. Из первого уравнения в (4.14) и (3.6) следует, что

$$\frac{m}{\mu} = \exp \left(- \int \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta dt \right) = \frac{dt}{ds}, \quad (4.15)$$

так как

$$\frac{\dot{m}}{m} = - \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = \left(\ln \frac{m}{\mu} \right)_{,0}. \quad (4.16)$$

Из (4.15) видно, что

$$\bar{ds} = dt \exp \int_0^t \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta dt.$$

Эта связь между \bar{ds} и dt следует из уравнений движения. Нормировка такова, что при $t=0$ dt и \bar{ds} равны друг другу.

Подставляя значения \dot{m}/m из (4.16) в последние три уравнения (4.14), получаем $3p$ уравнений движения для ${}^a\xi^s$.

$$\dot{\xi}^s + \left\{ \begin{matrix} \bar{s} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta - \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0 \quad (\dot{\xi}^0 = 1). \quad (4.17)$$

Это уравнение непригодно для установления связи между уравнениями движения и некоторым вариационным принципом. Чтобы установить ее, перепишем первое уравнение (4.14), используя (3.6):

$$\left(\ln \frac{m}{\mu} \right)_{,0} = \left(\ln \frac{dt}{ds} \right)_{,0} = - \left\{ \begin{matrix} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta, \quad (4.18)$$

или, так как $dt/\overline{ds} = (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})^{-1/2}$,

$$\begin{aligned} [\ln(\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})^{-1/2}]_{,0} &= -\frac{1}{2} (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})^{-1} (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})_{,0} = \\ &= -\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Следовательно, три уравнения (4.17) могут быть также записаны в форме

$$\ddot{\xi}^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta - \frac{1}{2} (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})^{-1} (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})_{,0} \dot{\xi}^k = 0. \quad (4.20)$$

Обозначим для краткости

$$\overline{\mathcal{L}} = (\overline{g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta})^{1/2} \quad (\dot{\xi}^0 = 1). \quad (4.21)$$

Тогда мы можем переписать (4.17) в форме

$$\ddot{\xi}^\sigma - (\ln \overline{\mathcal{L}})_{,0} \dot{\xi}^\sigma + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (4.22)$$

«Нулевое» уравнение ($\sigma = 0$) дает уже известное уравнение (4.19). Умножим (4.22) на $\overline{g_{\sigma r}}$ и предположим, что для $\overline{g_{\alpha\beta}}$ и их производных всегда справедливо соотношение (2.11), т. е. произведение с черточкой от двух выражений равно произведению этих выражений с черточками. Тогда в силу (2.9) мы имеем три уравнения движения в виде

$$(\overline{g_{\sigma r} \dot{\xi}^\sigma})_{,0} - \overline{g_{\sigma r} \dot{\xi}^\sigma} (\ln \overline{\mathcal{L}})_{,0} - \frac{1}{2} \overline{g_{\alpha\beta, r} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta} = 0. \quad (4.23)$$

Это наводит на мысль о существовании лагранжиана $\overline{\mathcal{L}}$. Посмотрим, эквивалентно ли (4.23) уравнению

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\xi}^k} - \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \xi^k} = 0. \quad (4.24)$$

Находим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\xi}^k} &= \frac{1}{2} \overline{\mathcal{L}}^{-1} \overline{g_{\alpha\beta, k} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta}, \\ \frac{\partial \overline{\mathcal{L}}}{\partial \xi^k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial \xi^k} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta + 2 \overline{g_{\alpha k} \dot{\xi}^\alpha} \right) \overline{\mathcal{L}}^{-1}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\xi}^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\xi}^k} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta \bar{\mathcal{L}}^{-1} \right)_{,0} + \quad (4.25)$$

$$+ (\bar{g}_{\alpha k} \dot{\xi}^\alpha)_{,0} \bar{\mathcal{L}}^{-1} + \bar{g}_{\alpha k} \dot{\xi}^\alpha (\bar{\mathcal{L}}^{-1})_{,0}.$$

Следовательно, уравнение Лагранжа (4.24) имеет вид

$$(\bar{g}_{\alpha k} \dot{\xi}^\alpha)_{,0} - \bar{g}_{\alpha k} \dot{\xi}^\alpha (\ln \bar{\mathcal{L}})_{,0} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta, k} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\xi}^k} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta \bar{\mathcal{L}}^{-1} \right)_{,0} \bar{\mathcal{L}} = 0. \quad (4.26)$$

Сравнивая (4.26) с (4.23), мы видим, что $\bar{\mathcal{L}}$ является лагранжианом, если

$$\bar{g}_{\alpha\beta, s} = \bar{g}_{\alpha\beta, s} = \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\xi}^s}, \quad \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \dot{\xi}^s} = 0. \quad (4.27)$$

Это означает, что \bar{ds}/dt является лагранжианом, если интересующая нас часть $g_{\alpha\beta}$, а именно $\bar{g}_{\alpha\beta}$, не зависит от ${}^1\xi^s$ и ${}^1\dot{\xi}^s$. Позже мы увидим, что первое условие, т. е. независимость $\bar{g}_{\alpha\beta}$ от ${}^1\xi^s$, не всегда выполняется.

Таким образом, уравнение (4.23) следует из вариационного принципа:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \bar{\mathcal{L}} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_{\Omega(s)} d_{(s)} x \delta_{(s)} (x^s - \xi^s) g_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta \right]^{1/2} = 0, \quad (4.28)$$

если рассматривать $g_{\alpha\beta}$ лишь как функции x^α , т. е. если мы, варьируя функцию под знаком интеграла, пренебрегаем возможной зависимостью $g_{\alpha\beta}$ от ${}^1\xi$ и ${}^1\dot{\xi}$. В этом случае (4.28) эквивалентно (4.23), что можно показать и непосредственным расчетом. Назовем результат такого варьирования «геодезической линией»; тогда (4.23) будет представлять собой уравнение «геодезической линии» [15].

Для пробной частицы, т. е. если $\mu \rightarrow 0$ и $g_{\alpha\beta}$ не сингулярны и не зависят от ${}^1\xi$ и ${}^1\dot{\xi}$, уравнение (4.23) является уравнением геодезической линии и кавычки означают лишь подстановку ${}^1\xi^s$ вместо x^s .

Можно показать (Тульчиев [14]), что уравнения движения следуют из уравнений поля при единственном допущении, что $T^{\alpha\beta}$ линейно зависят от δ -функций, т. е. выражения (3.6) для $t_{\alpha\beta}$ и (3.7) для $T_{\alpha\beta}$ являются следствием уравнений поля.

Из тождеств Бианки следует

$$\frac{dt}{ds} \int_{\Omega(s)} \theta T_{;\beta}^{\alpha\beta} d_{(s)} x = 0, \quad (4.29)$$

где θ — произвольная функция, непрерывная на мировой линии $\xi^s(t)$. Опуская снова индекс «1» у величин $t^{\alpha\beta}$ и δ , мы можем написать

$$\frac{dt}{ds} \int_{\Omega(s)} \theta (t^{\alpha\beta} \delta_{(s)});_{\beta} d_{(s)} x = 0. \quad (4.30)$$

Таким образом, мы приходим к следующему уравнению:

$$\overline{A^{\alpha}} \overline{\theta} + \overline{A^{\alpha\beta}} \overline{\theta}_{,\beta} = 0. \quad (4.31)$$

Вычислим сначала $\overline{A^{\alpha\beta}}$. Так как

$$\delta_{,0} = -\delta_{,s} \dot{\xi}^s, \quad (4.32)$$

то имеем

$$\overline{\theta}_{,\beta} \overline{A^{\alpha\beta}} = \frac{dt}{ds} (-t^{\alpha s} + t^{\alpha 0} \dot{\xi}^s) \overline{\theta}_{,s}. \quad (4.33)$$

Поскольку $\dot{\xi}^0 = 1$, последнее выражение можно переписать в форме

$$\overline{\theta}_{,\beta} \overline{A^{\alpha\beta}} = \frac{dt}{ds} (-t^{\alpha\beta} + t^{\alpha 0} \dot{\xi}^{\beta}) \overline{\theta}_{,\beta}. \quad (4.34)$$

Так как $\overline{\theta}_{,\beta}$ произвольно, то

$$\overline{A^{\alpha\beta}} = \frac{dt}{ds} (-t^{\alpha\beta} + t^{\alpha 0} \dot{\xi}^{\beta}) = 0. \quad (4.35)$$

Полагая здесь $\alpha = 0$, находим

$$t^{0\beta} = t^{00} \dot{\xi}^{\beta} \quad (4.36)$$

и, следовательно,

$$t^{\alpha\beta} = t^{00} \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta = m \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta, \quad (4.37)$$

что и требовалось доказать. Очевидно, $\overline{A}^\alpha = 0$ дает уравнения движения.

§ 5. Метод приближений

Решим уравнения поля и сформулируем уравнения движения в явной форме при помощи определенного метода приближений, который мы здесь изложим.

Представим себе некоторую функцию, разложенную в степенной ряд по параметру $\lambda = 1/c$ (c будем считать произвольным и не равным «единице»):

$$\Phi = {}_0\Phi + {}_1\Phi + {}_2\Phi + \dots \quad (5.1)$$

Здесь индексы слева внизу означают степень λ , в которой этот параметр входит в соответствующее Φ .

Если функция $\Phi(x^\mu)$ изменяется быстро в пространстве, но медленно по x^0 , то мы вправе не рассматривать все ее производные одинаковым образом. Производные по x^0 будут более высокого порядка, чем пространственные производные. Это обстоятельство можно формально выразить, полагая

$$\frac{\partial}{\partial x^0} ({}_i\Phi) = {}_{i+1}\Phi_{,0}; \quad (5.2)$$

это означает, что дифференцирование по x^0 повышает степень λ , входящую в соответствующее Φ , на единицу.

Задача теперь состоит в том, чтобы выяснить, с какого порядка мы должны начинать разложение в степенной ряд величин, фигурирующих в уравнениях поля.

Разложение величины ξ^s начинается (как естественно условиться) с «нулевого» порядка. Она будет неизвестной величиной, определяемой уравнениями движения; пока мы не будем разлагать ξ^s в степенные ряды. Отсюда следует, что $\dot{\xi}^s$ будет «первого» порядка и $\ddot{\xi}^s$ — «второго».

Из сказанного следует разложение

$${}^a m = {}_2^a m + {}_4^a m + {}_6^a m + \dots \quad (5.3)$$

То обстоятельство, что разложение здесь начинается с ${}_2m$, не является уже чисто условным. Действительно, в ньютоновском приближении, которое мы надеемся получить, имеем в выбранных нами единицах

$$\text{Масса} \times \text{Ускорение} = \frac{\text{Масса} \times \text{Масса}}{(\text{Расстояние})^2}.$$

Так как ускорение — величина второго порядка, то порядки обеих частей будут равными только в том случае, если масса является величиной второго порядка.

Во всех разложениях в степенные ряды мы будем учитывать только четные (как в am) или только нечетные степени λ (Инфельд [8]).

Таким образом, указанный порядок величин am и ξ^s приводит к следующим разложениям $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{00} &= {}_2\mathbf{T}^{00} + {}_4\mathbf{T}^{00} + {}_6\mathbf{T}^{00} + \dots, \\ \mathbf{T}^{0m} &= {}_3\mathbf{T}^{0m} + {}_5\mathbf{T}^{0m} + \dots, \\ \mathbf{T}^{mn} &= {}_4\mathbf{T}^{mn} + {}_6\mathbf{T}^{mn} + \dots. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Запишем теперь метрический тензор в виде

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}. \quad (5.5)$$

Из уравнения тяготения следует

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -8\pi \left(\mathbf{T}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \mathbf{T} \right), \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} \sqrt{-g}, \\ R_{\mu\nu} &= - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_{,\rho} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\rho \end{matrix} \right\}_{,\nu} + \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\nu \end{matrix} \right\} - \\ &\quad - \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho\sigma \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из рассмотрения правой части уравнения (5.6) следует, что разложение R_{00} и R_{mn} начинается с членов второго порядка и R_{0m} — с членов третьего порядка. Выражениями наименьшего порядка в левой части уравнения являются:

$$\begin{aligned}
 \text{в } R_{00} &: -\frac{1}{2} h_{00, ss}, \\
 \text{в } R_{mn} &: -\frac{1}{2} h_{mn, ss} + \frac{1}{2} h_{ms, ns} + \frac{1}{2} h_{ns, ms} + \\
 &+ \frac{1}{2} h_{00, mn} - \frac{1}{2} h_{ss, mn}, \\
 \text{в } R_{0m} &: -\frac{1}{2} h_{0m, ss} + \frac{1}{2} h_{0s, ms} + \frac{1}{2} h_{ms, 0s} - \frac{1}{2} h_{ss, m0}.
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 h_{00} &= {}_2h_{00} + {}_4h_{00} + \dots, \\
 h_{0m} &= {}_3h_{0m} + {}_5h_{0m} + \dots, \\
 h_{mn} &= {}_2h_{mn} + {}_4h_{mn} + \dots.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Все встречающиеся в дальнейшем функции получаются из величин $h_{\mu\nu}$ путем суммирования, умножения и дифференцирования. Для каждой компоненты имеет место следующее правило: любая компонента, имеющая нечетное (четное) число нулевых индексов, содержит в своем разложении только нечетные (четные) степени λ .

§ 6. Ньютоновские уравнения движения

Попытаемся найти уравнения движения в низшем (ньютоновском) приближении. Мы осуществим это таким путем, чтобы сделать по возможности более простым обобщение на постньютоновское приближение.

В силу (5.6) и (5.8) уравнение поля наимизшего порядка имеет место для h_{00} :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} {}_2h_{00, ss} &= -8\pi \left({}_2\mathbf{T}^{00} - \frac{1}{2} {}_2\mathbf{T}^{00} \right) = \\
 &= -4\pi {}_2\mathbf{T}^{00} = -4\pi \sum_{\alpha=1}^p {}_2m^\alpha \delta,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

или

$${}_2h_{00, ss} = 8\pi \sum_{\alpha=1}^p {}_2m^\alpha \delta. \tag{6.2}$$

В качестве решения этого уравнения мы берем ньютоновское поле, т. е.

$${}_2h_{00} = -2\frac{1}{2}m {}^1r^{-1} - 2\frac{2}{2}m {}^2r^{-1} - \dots, \quad (6.3)$$

где

$${}^a r^2 = (x^s - a\xi^s)(x^s - a\xi^s). \quad (6.4)$$

Запишем для краткости

$${}_2h_{00} = \varphi, \quad (6.5)$$

и в случае двух тел, который мы для простоты и рассмотрим, будем иметь ¹⁾

$$\begin{aligned} \varphi &= f + g, \\ f &= -2\frac{1}{2}m {}^1r^{-1}, \quad g = -2\frac{2}{2}m {}^2r^{-1}, \\ {}^1\xi &= \xi, \quad {}^2\xi = \eta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Вследствие (6.5) и соотношения

$$g^{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (6.7)$$

имеем

$${}_2h^{00} = -\varphi. \quad (6.8)$$

Интересующая нас часть φ , а именно g , не зависит от ξ ; следовательно,

$$\overline{{}_2h_{00}, s} = \overline{{}_2h_{00}, s} = \overline{g}, s = \frac{\partial \overline{g}}{\partial \xi^s} = \overline{g}, \xi^s. \quad (6.9)$$

Нет оснований делать допущение, что ${}_2m$ постоянна. Однако это следует из (4.15) или из первого уравнения (4.14).

Вследствие (6.9) и в силу того обстоятельства, что в низшем порядке отсутствуют какие-либо произведения величин „ h “, условия (4.10) и (4.27) выполняются, а это означает, что траектория является «геодезической линией» и может быть выведена из лагранжиана

$$\overline{\mathcal{L}} = (\overline{g_{\alpha\beta}} \dot{\xi}^{\alpha} \dot{\xi}^{\beta})^{1/2}, \quad {}_2\overline{\mathcal{L}} = (1 - \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \overline{g})^{1/2}, \quad (6.10)$$

$${}_2\overline{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \frac{1}{2} \overline{g} = -\frac{1}{2} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - \frac{{}_2m}{r},$$

$$r^2 = (\xi^s - \eta^s)(\xi^s - \eta^s). \quad (6.11)$$

¹⁾ Не путать это g в (6.6) с $g = |g_{\alpha\beta}|$.

Таким образом, уравнения движения с учетом членов второго порядка имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \dot{\xi}^s} - \frac{\partial \bar{\mathcal{L}}}{\partial \xi^s} = 0, \quad (6.12)$$

т. е.

$$\ddot{\xi}^s = \frac{\partial}{\partial \xi^s} \left(\frac{{}^2m}{r} \right). \quad (6.13)$$

Лагранжиан $\bar{\mathcal{L}}^{**}$ для обеих частиц имеет вид

$${}^4\bar{\mathcal{L}}^{**} = -\frac{1}{2} {}^1m \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - \frac{1}{2} {}^2m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s - \frac{{}^1m {}^2m}{r}. \quad (6.14)$$

Ньютоновский лагранжиан для обеих частиц имеет четвертый порядок. Так как $(m/\mu) = (dt/\bar{ds})$, то

$${}^2m = {}^2\mu, \quad {}^4m = \frac{1}{2} {}^1m \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \frac{{}^1m {}^2m}{r}. \quad (6.15)$$

Можно получить уравнения движения, непосредственно исходя из (4.17). Тогда мы имеем просто

$$\ddot{\xi}^s + \left\{ \begin{matrix} s \\ 00 \end{matrix} \right\} = 0 \quad (6.16)$$

или

$$\ddot{\xi}^s - [00, s] = \ddot{\xi}^s + \frac{1}{2} \bar{g}_{,s} = 0, \quad (6.17)$$

что совпадает с (6.13).

§ 7. Переход к следующему приближению

Чтобы найти уравнения движения с учетом членов четвертого порядка, мы должны, кроме ${}^2h_{00}$, знать также величины

$${}^2h_{mn}, \quad {}^3h_{0m}, \quad {}^4h_{00}. \quad (7.1)$$

С первыми двумя дело обстоит просто. Левые части соответствующих уравнений даются выражениями (5.8), правые же части — выражением (5.6), и для mn и $0m$ соот-

ветственно имеют вид

$$\begin{aligned} & -4\pi\delta_{mn}({}_2^1m^1\delta + {}_2^2m^2\delta), \\ & 8\pi({}_2^1m\dot{\xi}^m{}^1\delta + {}_2^2m\dot{\eta}^m{}^2\delta). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Следовательно, для величин ${}_2h_{mn}$ имеем уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}{}_2h_{mn,ss} + \frac{1}{2}{}_2h_{ms,ns} + \frac{1}{2}{}_2h_{ns,ms} - \frac{1}{2}{}_2h_{ss,mn} + \frac{1}{2}\Phi_{,mn} = \\ = -\frac{1}{2}\delta_{mn}\Phi_{,ss}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Мы ищем решение ньютоновского характера. Таким решением является

$${}_2h_{mn} = \delta_{mn}\Phi. \quad (7.4)$$

Выбор этих ньютоновских решений для ${}_2h_{00}$ и ${}_2h_{mn}$ следует рассматривать как составную часть нашего метода приближений (§ 9).

Следующим шагом является расчет ${}_3h_{0m}$. Из (5.8) и (7.2) снова имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}{}_3h_{0n,ss} + \frac{1}{2}{}_3h_{0s,ns} + \frac{1}{2}{}_3h_{ns,0s} - \frac{1}{2}{}_3h_{ss,n0} = \\ = 8\pi({}_2^1m\dot{\xi}^n{}^1\delta + {}_2^2m\dot{\eta}^n{}^2\delta). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подставляя (7.4) в последнее уравнение, получаем

$$-\frac{1}{2}{}_3h_{0n,ss} + \frac{1}{2}{}_3h_{0s,ns} - \Phi_{,n0} = 8\pi({}_2^1m\dot{\xi}^n{}^1\delta + {}_2^2m\dot{\eta}^n{}^2\delta). \quad (7.6)$$

Решение, которое мы выбираем здесь, имеет вид

$${}_3h_{0n} = -2f\dot{\xi}^n - 2g\dot{\eta}^n. \quad (7.7)$$

Это не единственное возможное решение. В § 9 мы рассмотрим более общее решение и обсудим его влияние на уравнения движения.

Вычисление ${}_4h_{00}$ требует более кропотливых расчетов (см. Приложение Б). Здесь мы приведем лишь те существенные члены ${}_4h_{00}$, которые дают вклад в ${}_4\overline{h}_{00}$ и ${}_4\overline{h}_{00,\alpha}$.

Это следующие выражения:

$${}_4h_{00} \sim 2(2m)^2(2r)^{-2} - 3\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s m(2r)^{-1} - 2m^2 r_{,00} + 2^1 m^2 m(r^2 r)^{-1}. \quad (7.8)$$

Посмотрим теперь, приводят ли эти выражения для ${}_2h_{mn}$, ${}_3h_{0n}$, ${}_4h_{00}$ к уравнениям движения, эквивалентным уравнениям «геодезической линии», т. е. удовлетворяются ли условия

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha} \\ \beta_Q \end{array} \right\} = \overline{g^{\alpha\sigma}} [\bar{\beta}_Q, \sigma], \quad (7.9)$$

$$\overline{g_{\alpha\beta, s}} = \overline{g_{\alpha\beta}}, \quad \frac{\partial \overline{g_{\alpha\beta}}}{\partial \dot{\xi}^r} = 0. \quad (7.10)$$

Для ${}_2h_{mn}$ и ${}_3h_{0n}$ оба условия выполняются. Эти выражения имеют сингулярность порядка $1/r$, т. е. сингулярность нечетного порядка; следовательно, для них выполняется соотношение (7.9). В интересующую нас часть этих выражений ни ξ , ни $\dot{\xi}$ не входят явно; следовательно, для них выполняются условия (7.10). Однако с ${}_4h_{00}$ дело обстоит иначе. Это выражение имеет сингулярность четного порядка вследствие появления $(1r)^{-2}$. Однако это обстоятельство не существенно, так как ${}_4h_{00}$ входит в уравнения движения только *линейно*. Поэтому мы можем не обращать внимания на выполнение условия (7.9) для ${}_4h_{00}$. Но удовлетворяется ли для ${}_4h_{00}$ условие (7.10)? Во всяком случае оно удовлетворяется для первых двух выражений, т. е. для $2(2m)^2(2r)^{-2} - 3\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s m(2r)^{-1}$, так как ни одно из этих двух выражений не зависит от ξ и $\dot{\xi}$. С третьим выражением

$$-2m^2 r_{,00} = -2m^2 r_{, \eta^s \eta^r \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r} - 2m^2 r_{, \eta^s \dot{\eta}^s} \quad (7.11)$$

мы должны быть более осторожны. Первый член в правой части не зависит от ξ и $\dot{\xi}$, но второе выражение содержит $\ddot{\eta}^s$. Здесь мы можем ввести для $2m\ddot{\eta}^s = -1m\ddot{\xi}^s$ ньютоновское значение, так как ошибка будет шестого порядка.

Таким образом, мы можем положить

$$\begin{aligned} \alpha &= -{}^2m^2r_{,\eta^s} \ddot{\eta}^s = {}^1m^2m^2r_{,\eta^s} \left(\frac{1}{r} \right)_{,\xi^s} = \\ &= [{}^1m^2m(x^s - \eta^s)({}^2r)^{-1}] (\xi^s - \eta^s) r^{-3}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Производная этого выражения по x^m обращается в нуль в точке $x^s = \xi^s$, так что

$$\overline{\alpha}_{,m} = 0. \quad (7.13)$$

С другой стороны,

$$\overline{\alpha}_{,m} = \frac{\partial \overline{\alpha}}{\partial \xi^m} = {}^1m^2m(r^{-2})_{,\xi^m}.$$

Подобная ситуация встречается и в последнем выражении в ${}_4h_{00}^*$:

$$\beta = 2{}^1m^2m(r^2r)^{-1}. \quad (7.14)$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_{,s} &= 2{}^1m^2m r^{-1} \left(\frac{1}{r^2} \right)_{,s} = 2{}^1m^2m r^{-1} (r^{-1})_{,\xi^s}, \\ \overline{\beta}_{,s} &= 2{}^1m^2m (r^{-2})_{,\xi^s}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Следовательно,

$$\overline{\beta}_{,s} = 2\overline{\beta}_{,s}. \quad (7.16)$$

Однако легко можно найти некоторое вспомогательное поле, которое мы будем обозначать через h_{00}^* , такое, что

$${}_4\overline{h}_{00,m}^* = \overline{{}_4h_{00,m}}. \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что такое ${}_4\overline{h}_{00}^*$ имеет следующий вид:

$${}_4\overline{h}_{00}^* = 2({}^2m)^2 r^{-2} - 3\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s {}^2mr^{-1} - {}^2m r_{,\xi^s \xi^s} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r + {}^1m^2m r^{-2}. \quad (7.18)$$

§ 8. Постньютоновские уравнения движения

В общих уравнениях движения (4.17) с учетом членов четвертого порядка ${}_4h_{00}$ появится только *один раз*, а именно в выражении $\frac{1}{2} \overline{{}_4h_{00,m}}$. В силу (7.17) это озна-

чает, что лагранжиан с точностью до четвертого порядка существует¹⁾:

$$\overline{\mathcal{L}^*} = \frac{d\overline{s^*}}{dt}, \quad (8.1)$$

причем

$$\left(\frac{d\overline{s^*}}{dt}\right)^2 = \overline{g_{\alpha\beta}^* \dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta}, \quad (8.2)$$

где $\overline{g_{00}^*} \neq \overline{g_{00}}$ и

$$g_{00}^* = \eta_{00} + {}_2h_{00} + {}_4h_{00}^* = 1 + \varphi + {}_4h_{00}^*. \quad (8.3)$$

Следовательно,

$$\overline{\mathcal{L}^*} = (1 + \overline{\varphi} + {}_4\overline{h_{00}^*} - \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \overline{\varphi} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + {}_3\overline{h_{s0}} \dot{\xi}^s)^{1/2}. \quad (8.4)$$

Подставим сюда следующие значения:

$$\overline{\varphi} = -2 {}^2mr^{-1}, \quad {}_3\overline{h_{0s}} = 4 {}^2mr^{-1} \dot{\eta}^s, \quad (8.5)$$

$${}_4\overline{h_{00}^*} = 2 ({}^2m)^2 r^{-2} - 3 \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s {}^2mr^{-1} - {}^2mr_{,\xi^s \xi^r} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r + {}^1m {}^2m r^{-1}.$$

Учитывая, что с учетом величин четвертого порядка

$$(1 + {}_2a + {}_4a)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} ({}_2a + {}_4a) - \frac{1}{8} {}_2a^2, \quad (8.6)$$

получаем из (8.4) и (8.5) следующее выражение для лагранжиана:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}^*} = \overline{{}_2\mathcal{L}^*} + \overline{{}_4\mathcal{L}^*} = & -\frac{1}{2} \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - {}^2mr^{-1} - \\ & -\frac{3}{2} {}^2m r^{-1} (\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s) + 4 {}^2mr^{-1} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^s - \frac{1}{8} (\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{{}^2m ({}^1m + {}^2m)}{r^2} - \frac{1}{2} {}^2mr_{,\xi^s \xi^r} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Предполагается, что это есть лагранжиан *первой* частицы. Однако мы хотим найти лагранжиан для *обеих* частиц. Под этим подразумевается такой лагранжиан, который, *во-первых*, дает те же самые уравнения движе-

¹⁾ См. работу Фихтенгольца [16], где лагранжиан находится механически из уравнений движения в явной форме, а не уравнения движения из лагранжиана, как в настоящей работе.

ния, что и лагранжиан (8.7), и который, во-вторых, инвариантен по отношению к замене

$${}^1m\xi \rightleftarrows {}^2m\eta. \quad (8.8)$$

Умножим $\overline{\mathcal{L}}^*$ в (8.7) на 1m . Уравнения движения останутся теми же самыми. Добавим следующее выражение:

$$-\frac{1}{2} {}^2m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s - \frac{1}{8} {}^2m (\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s)^2. \quad (8.9)$$

При таком добавлении уравнения движения первой частицы не изменятся, так как выражение (8.9) не дает в них никакого вклада. При этих изменениях единственным выражением в лагранжиане, неинвариантным по отношению к замене (8.8), будет последний член в (8.7), а именно

$$-\frac{1}{2} {}^1m {}^2mr_{,\xi^s \xi^r} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r. \quad (8.10)$$

Но вместо него мы можем написать выражение

$$\frac{1}{2} {}^1m {}^2mr_{,\xi^s \eta^r \xi^s} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^r, \quad (8.11)$$

которое инвариантно по отношению к замене (8.8) и дает тот же самый вклад в уравнения движения.

Выражение (8.10) дает следующий вклад в уравнения движения первой частицы:

$$\frac{1}{2} {}^1m {}^2m r_{,\xi^s \xi^r \xi^s} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r = -\frac{1}{2} {}^1m {}^2m r_{,\xi^s \eta^r \xi^s} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r. \quad (8.12)$$

Вклад выражения (8.11) будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} {}^1m {}^2m (r_{,\xi^s \eta^r \dot{\eta}^s})_{,0} - \frac{1}{2} {}^1m {}^2m r_{,\xi^s \eta^r \xi^s} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^r = \\ & = \frac{1}{2} {}^1m {}^2m (r_{,\xi^s \eta^r \xi^s} \dot{\eta}^r \dot{\xi}^s + r_{,\xi^s \eta^r \eta^s} \dot{\eta}^r \dot{\eta}^s + r_{,\xi^s \eta^r} \ddot{\eta}^r - r_{,\xi^s \eta^r \xi^s} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^r) = \\ & = \frac{1}{2} {}^1m {}^2m (r_{,\xi^s \eta^r \eta^s} \dot{\eta}^r \dot{\eta}^s + r_{,\xi^s \eta^r} \ddot{\eta}^r). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Однако последний член в (8.13) равен

$$\frac{1}{2} {}^1m {}^2m r_{,\xi^s \eta^r} \ddot{\eta}^r = \frac{1}{2} {}^1m {}^2m \left(-\frac{\delta_{nr}}{r} + \frac{(\xi^n - \eta^n)(\xi^r - \eta^r)}{r^3} \right) \ddot{\eta}^r. \quad (8.14)$$

Так как

$$\ddot{\eta}^r = \frac{{}^1m(\xi^r - \eta^r)}{r^3}, \quad (8.15)$$

то выражение (8.14) обращается в нуль и, следовательно, (8.10) и (8.11) дают одинаковые вклады в уравнения движения.

Таким образом, обозначая окончательный лагранжиан для двух частиц через $\overline{\mathcal{L}}^{**}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}^{**} = \overline{{}_4\mathcal{L}}^{**} + \overline{{}_6\mathcal{L}}^{**} = & -\frac{1}{2} {}^1m \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - \frac{1}{2} {}^2m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s - \frac{{}^1m {}^2m}{r} - \\ & - \frac{3}{2} \frac{{}^1m {}^2m}{r} (\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s) + 4 \frac{{}^1m {}^2m}{r} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^s - \frac{1}{8} {}^1m (\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s)^2 - \\ & - \frac{1}{8} {}^2m (\dot{\eta}^s \dot{\eta}^s)^2 + \frac{1}{2} \frac{{}^1m {}^2m ({}^1m + {}^2m)}{r^2} + \frac{1}{2} {}^1m {}^2m r_{,\xi^s \eta^r} \dot{\xi}^s \dot{\eta}^r. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Уравнения движения первой частицы, следующие из этого лагранжиана, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}^n - 2m \left(\frac{1}{r} \right)_{,\xi^n} = 2m \left\{ \left[\dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \frac{3}{2} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s - 4 \dot{\xi}^s \dot{\eta}^s - \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \frac{{}^2m}{r} - 5 \frac{{}^1m}{r} \right] \left(\frac{1}{r} \right)_{,\xi^n} + [4 \dot{\xi}^s (\dot{\eta}^n - \dot{\xi}^n) + 3 \dot{\xi}^n \dot{\eta}^s - \right. \\ \left. - 4 \dot{\eta}^n \dot{\eta}^s] \left(\frac{1}{r} \right)_{,\xi^s} + \frac{1}{2} r_{,\xi^s \xi^r \xi^n} \dot{\eta}^s \dot{\eta}^r \right\}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Уравнения движения другой частицы получаются заменой

$${}^1m, {}^2m, \xi, \eta \text{ на } {}^2m, {}^1m, \eta, \xi \quad (8.18)$$

соответственно.

Обобщение этого результата на случай p частиц почти тривиально, если учесть изменения в \overline{h}_{00}^* , обусловленные добавлением этих частиц (Приложение Б). Эти добавочные выражения обязаны, например в случае трех частиц, взаимодействию между второй и третьей частицами; это означает, что в уравнения движения для первой частицы они дадут вклад, пропорциональный ${}^1m {}^2m {}^3m$. Эти выражения появляются в $\overline{\mathcal{L}}^{**}$ из двух источников: из $\overline{{}_4h}_{00}^*$ и из $\overline{\varphi}^2$ в (8.6). Если мы теперь обозначим «расстояние»

от a -й до b -й частицы через

$$((ab)r)^2 = (a\xi^s - b\xi^s)(a\xi^s - b\xi^s), \quad (8.19)$$

то лагранжиан для p частиц будет иметь вид

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}^{**}} &= \overline{{}_4\mathcal{L}^{**}} + \overline{{}_6\mathcal{L}^{**}} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^p a m a \xi^s a \xi^s - \frac{1}{2} \sum'_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^p a m b m ((ab)r)^{-1} - \\ &\quad - \frac{3}{4} \sum'_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^p a m b m ((ab)r)^{-1} (a \xi^s a \xi^s + b \xi^s b \xi^s) + \\ &\quad + 2 \sum'_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^p a m b m ((ab)r)^{-1} a \xi^s b \xi^s - \\ &\quad - \frac{1}{8} \sum_{a=1}^p a m (a \xi^s a \xi^s)^2 + \frac{1}{4} \sum'_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^p a m b m (a m + b m) ((ab)r)^{-2} + \\ &\quad + \sum'_{\substack{a, b=1 \\ a \neq b}}^p a m b m ((ab)r_{\xi^s \xi^s r}) a \xi^s b \xi^r + \\ &\quad + \frac{1}{6} \sum'_{\substack{a, b, c=1 \\ a \neq b \neq c}}^p a m b m c m [((ab)r (ac)r)^{-1} + \\ &\quad + ((bc)r (ba)r)^{-1} + ((ca)r (cb)r)^{-1}]. \quad (8.20) \end{aligned}$$

В случае двух частиц лагранжиан (8.20) сводится к (8.16). Единственным новым выражением, появляющимся в (8.20), является последнее выражение; в случае трех частиц, если использовать обозначения Приложения Б, оно имеет вид

$${}^1 m \left(\frac{1}{2} \overline{{}_4 s_{00}} - \frac{1}{4} \overline{gk} \right),$$

где $\overline{{}_4 s_{00}}$ — представляет собой изменение $\overline{{}_4 h_{00}^*}$, обусловленное взаимодействием второй и третьей частиц, а величина k играет для третьей частицы ту же роль, какую играют

f и g для первой и второй частиц соответственно. Поэтому величина $-\frac{1}{4} \bar{g} \bar{k}$ представляет собой вклад в лагранжиан взаимодействия между второй и третьей частицами, проистекающий от члена $-\frac{1}{8} \bar{\varphi}^2$ в (8.6).

§ 9. О выборе системы координат

Гармоническое координатное условие имеет вид

$$[(-g)^{1/2} g^{\mu\nu}]_{,\nu} = 0, \quad (9.1)$$

что в нашем случае означает

$${}_2h'^{mn} = 0, \quad {}_3h'_{,m}{}^{0m} + {}_2h'_{,0}{}^{00} = 0. \quad (9.2)$$

Ни одно из этих условий не выполняется в нашей системе координат.

Значения ${}_2h'_{00}$ и ${}_2h'_{mn}$, которые мы выбрали здесь, были ньютоновскими значениями. Мы условились, что их выбор характеризует нашу процедуру приближений. Однако есть некоторые основания рассматривать такой подход как слишком формальный. Вместо наших значений ${}_2h'_{mn}$ мы могли бы выбрать

$${}_2h'_{mn} = {}_2h_{mn} + {}_2a_{m, n} + {}_2a_{n, m},$$

где a — произвольные функции. Эта замена ${}_2h'_{mn}$ на ${}_2h_{mn}$ могла бы быть вызвана изменением системы координат, не нарушающим процедуру приближений. Физический смысл выбора ${}_2a_m = 0$ заключается в том, что мы предполагаем существование некоторой системы координат, в которой каждое из двух тел проявляет свою сферическую симметрию, т. е. такой системы координат, в которой поле при ${}_2m \rightarrow 0$ и $\dot{\xi} \rightarrow 0$ переходит в поле, определяемое решением Шварцшильда в изотропной координатной системе. Наша процедура приближений неявно предполагает выбор такой системы координат. Однако этот выбор ${}_2a_m = 0$ относится только к начальной стадии нашей процедуры приближений; поэтому он не сказывается на ${}_3h'_{0m}$. Если заменить ${}_3h'_{0m}$ на

$${}_3h'_{0m} = {}_3h_{0m} + {}_3a_{0, m}, \quad (9.3)$$

где ${}_3a_0$ — произвольная функция x^a , то уравнение (7.5) по-прежнему будет выполняться. Это изменение в ${}_3h_{0m}$ может быть вызвано изменением системы координат, не нарушающим нашу процедуру приближений. Такое изменение вызовет также определенное изменение ${}_4h_{00}$ (Приложение Б):

$${}_4h'_{00} = {}_4h_{00} + 2{}_4a_{0,0}. \quad (9.4)$$

Поэтому могло бы показаться, что лагранжиан, а вместе с ним и уравнения движения, также должны измениться. Выражения, которые изменяются в лагранжиане (8.4), есть

$$\bar{h}_{0s}\dot{\xi}^s + \frac{1}{2}{}_4h_{00}^*. \quad (9.5)$$

и вызванное ими изменение в лагранжиане, в силу (9.3) и (9.4), имеет вид

$$\Delta \bar{\mathcal{L}}^* = \overline{a_{0,s}\dot{\xi}^s} + \overline{a_{0,0}} = \frac{d\bar{a}_0}{dt}. \quad (9.6)$$

Следовательно,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Delta \bar{\mathcal{L}}^* dt = \delta (\bar{a}_0) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (9.7)$$

Это означает следующее: уравнения движения однозначно определены с учетом членов четвертого порядка уравнениями поля и нашей процедурой приближений. Ни гармонические, ни какие-либо другие координатные условия не играли никакой роли в нашем выводе уравнений движения.

§ 10. Общая теория

Сформулируем теперь общую теорию¹⁾, в соответствии с которой мы поступали в нашем частном случае и в рамках которой мы нашли уравнения движения во втором и четвертом порядках. Такая общая теория не имеет большого

¹⁾ Развиваемые здесь идеи возникли несколько лет назад. Шейдегер ссылается на них в § 5 работы [17], утверждая, что они были предложены мной. Я нашел более отчетливую формулировку подобных идей в работе Рамешварарао [18]. Другая возможная общая формулировка теории дана в нашей работе с Плебанским [19].

практического значения, так как едва ли имеет смысл с физической точки зрения проводить расчеты в последующем приближении. Более того, нам представляется (и мы обсудим это позже), что надлежащим выбором системы координат мы можем уничтожить все вклады в уравнения движения выше четвертого порядка. С формальной точки зрения важно знать, что процедура при желании может быть продолжена. Конечно, мы ничего не знаем относительно ее сходимости.

Прежде чем сформулировать общую теорию, напомним, что нами здесь уже достигнуто. Мы имели ньютоновские уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} \int {}_3T_{;v}^{0v} d_{(3)}x &= {}_3\bar{A}^0 = 0, \\ \frac{dt}{ds} \int {}_4T_{;v}^{nv} d_{(3)}x &= {}_4\bar{A}^n = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Так как $\frac{1}{2}m$ появляется в виде коэффициента, мы называли эти уравнения (после деления их на $\frac{1}{2}m$) уравнениями *второго* порядка. Здесь, однако, в силу наличия множителя $\frac{1}{2}m$, такое уравнение выступает как уравнение четвертого порядка. Вследствие этого для настоящего параграфа мы переименуем порядок уравнений движения, называя *ньютоновские* уравнения движения уравнениями *четвертого* порядка и *постньютоновские* уравнения — уравнениями *шестого* порядка. Положим вообще

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} \int {}_{2n-1}T_{;v}^{0v} d_{(3)}x &= {}_{2n-1}\bar{A}^0, \\ \frac{dt}{ds} \int {}_{2n}T_{;v}^{nv} d_{(3)}x &= {}_{2n}\bar{A}^n. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Тем самым для наших постньютоновских уравнений движения мы имеем

$${}_3\bar{A}^0 + {}_5\bar{A}^0 = 0, \quad {}_4\bar{A}^n + {}_6\bar{A}^n = 0. \quad (10.3)$$

Из этих уравнений мы получили

$${}^a m = {}^a_2 m + {}^a_4 m, \quad {}^a \xi^s = {}^a_0 \xi^s + {}^a_2 \xi^s, \quad (10.4)$$

где ${}^a_0 \xi^s$ представляют движение в ньютоновском приближении. Чтобы найти эти уравнения в явной форме, мы

воспользовались в $\overline{{}_6A^m}$ ньютоновским уравнением движения, поскольку использование ${}^a\xi^s$ вместо ${}^0\xi^s$ должно давать вклад восьмого порядка в уравнения движения. Выразим эту идею символически, написав вместо (10.3)

$$\begin{aligned} {}_3A^0({}_0\xi^k + {}_2\xi^k) + {}_5A^0({}_0\xi^k) &= 0, \\ {}_4A^m({}_0\xi^k + {}_2\xi^k) + {}_6A^m({}_0\xi^k) &= 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Таким образом, ${}_4A^m({}_0\xi + {}_2\xi)$ также дает вклад шестого порядка. Чтобы получить (10.4), поле должно быть найдено:

для m, n — с учетом членов порядка ${}_2h_{mn}({}_0\xi)$,
 для $0, m$ — с учетом членов порядка ${}_3h_{0m}({}_0\xi)$,
 для $0, 0$ — с учетом членов порядка ${}_4h_{00}({}_0\xi)$.

Предположим, что мы хотим продвинуться на один шаг дальше. Тогда мы имеем уравнения движения

$$\begin{aligned} {}_3A^0({}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi) + {}_5A^0({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_7A^0({}_0\xi) &= 0, \\ {}_4A^m({}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi) + {}_6A^m({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_8A^m({}_0\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Аргумент функций ${}_3A, {}_5A, {}_4A, {}_6A$ в (10.6) иной, чем в (10.5); следовательно, они дают вклады *вплоть* до восьмого порядка. Однако, чтобы найти ${}_8A^m({}_0\xi)$, мы должны знать величины

$${}_4h_{mn}, {}_5h_{0m}, {}_6h_{00}, \quad (10.7)$$

как функции от ${}_0\xi$. Таким образом, обозначая

$$\mathbf{Q}^{\alpha\beta} = -8\pi\left(\mathbf{T}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\mathbf{T}\right), \quad (10.8)$$

мы должны решить следующие уравнения (опуская индексы α у ξ):

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{R}^{mn}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_4\mathbf{R}^{mn}({}_0\xi) &= {}_2\mathbf{Q}^{mn}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_4\mathbf{Q}^{mn}({}_0\xi), \\ {}_3\mathbf{R}^{0m}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_5\mathbf{R}^{0m}({}_0\xi) &= {}_3\mathbf{Q}^{0m}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_5\mathbf{Q}^{0m}({}_0\xi), \\ {}_2\mathbf{R}^{00}({}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi) + {}_4\mathbf{R}^{00}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_6\mathbf{R}^{00}({}_0\xi) &= \\ = {}_2\mathbf{Q}^{00}({}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi) + {}_4\mathbf{Q}^{00}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_6\mathbf{Q}^{00}({}_0\xi). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Может показаться, что эта задача не разрешима, так как, чтобы решить последнее уравнение в (10.9), мы должны были бы знать ${}_4\xi$, которое мы хотим найти

с помощью уравнений (10.6). Однако это не так, поскольку мы имеем

$${}_2R^{00} = -\frac{1}{2} {}_2h_{00, ss} = -4\pi \sum_{\alpha=1}^p a_m^\alpha \delta = {}_2Q^{00} \quad (10.10)$$

для произвольного движения. Поэтому мы можем переписать последнее уравнение в (10.9) в следующем виде:

$${}_4R^{00}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_6R^{00}({}_0\xi) = {}_4Q^{00}({}_0\xi + {}_2\xi) + {}_6Q^{00}({}_0\xi). \quad (10.11)$$

Собирая здесь выражения шестого порядка, находим ${}_6h_{00}({}_0\xi)$. Аналогичным путем можно найти ${}_5h_{0m}$ и ${}_4h_{mn}$. Таким образом можно продвинуть наше приближение еще на один шаг.

Теперь можно сформулировать общую теорию. В разложении $g_{\alpha\beta}$, R , T мы принимали во внимание произвольное движение. При этом допущении мы использовали разложение, скажем,

$$T^{mn} = {}_4T^{mn} + {}_6T^{mn} + {}_8T^{mn} + \dots \quad (10.12)$$

Теперь же, вместо произвольного движения, введем в качестве аргументов определенное движение, разложенное в степенной ряд

$$\xi = {}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi + \dots, \quad (10.13)$$

и запишем, например,

$${}_{2s}T({}_0\xi + {}_2\xi + {}_4\xi). \quad (10.14)$$

При надлежащем разложении последнее выражение дает вклады порядка $2s+2$ и $2s+4$. Предположим, что мы решили уравнения движения порядка $2r$:

$$\begin{aligned} {}_3A^0({}_0\xi + {}_2\xi + \dots + {}_{2r-4}\xi) + {}_5A^0({}_0\xi + \dots + {}_{2r-6}\xi) + \\ + \dots + {}_{2r-1}A^0({}_0\xi) = 0, \\ {}_4A^m({}_0\xi + \dots + {}_{2r-4}\xi) + {}_6A^m({}_0\xi + \dots + {}_{2r-6}\xi) + \\ + \dots + {}_{2r}A^m({}_0\xi) = 0. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Это предполагает, что мы решили уравнения поля

для m, n — с учетом членов порядка ${}_{2r-4}h_{mn}$,
 для $0, m$ — с учетом членов порядка ${}_{2r-3}h_{0m}$,
 для $0, 0$ — с учетом членов порядка ${}_{2r-2}h_{00}$.

Теперь мы хотим решить уравнение движения порядка $2r + 2$:

$$\begin{aligned} {}_3A^0({}_0\xi + \dots {}_{2r-2}\xi) + \dots {}_{2r+1}A^0({}_0\xi) &= 0, \\ {}_4A^m({}_0\xi + \dots {}_{2r-2}\xi) + \dots {}_{2r+2}A^m({}_0\xi) &= 0. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Аргументы в ${}_3A^0, \dots, {}_{2r-1}A^0, {}_4A^m, \dots, {}_{2r}A^m$ в уравнениях (10.16) иные, чем в (10.15). Следовательно, они дают вклады порядка $2r + 1$ и $2r + 2$. Однако, чтобы найти ${}_{2r+2}A^m({}_0\xi)$, необходимо знать

$${}_{2r-2}h_{mn}, \quad {}_{2r-1}h_{0m}, \quad {}_{2r}h_{00}.$$

Следовательно, мы должны решить уравнения

$$\begin{aligned} {}_2R^{mn}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r-2}R^{mn}({}_0\xi) &= \\ &= {}_2Q^{mn}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r-2}Q^{mn}({}_0\xi), \\ {}_3R^{0m}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r-1}R^{0m}({}_0\xi) &= \\ &= {}_3Q^{0m}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r-1}Q^{0m}({}_0\xi), \\ {}_2R^{00}({}_0\xi + \dots {}_{2r-2}\xi) + \dots {}_{2r}R^{00}({}_0\xi) &= \\ &= {}_2Q^{00}({}_0\xi + \dots {}_{2r-2}\xi) + \dots {}_{2r}Q^{00}({}_0\xi). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Всюду в этих уравнениях, за исключением ${}_2R^{00}$ и ${}_2Q^{00}$, мы подставляем выражения, соответствующие уже известному движению. Однако ${}_2R^{00} = {}_2Q^{00}$ для произвольного движения. Поэтому последнее уравнение (10.17) можно заменить следующим уравнением:

$$\begin{aligned} {}_4R^{00}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r}R^{00}({}_0\xi) &= \\ &= {}_4Q^{00}({}_0\xi + \dots {}_{2r-4}\xi) + \dots {}_{2r}Q^{00}({}_0\xi). \end{aligned}$$

В ${}_{2r-2}R^{mn}({}_0\xi)$ впервые появляется выражение ${}_{2r-2}h_{mn}$; в ${}_{2r-1}R^{0m}$ — выражение ${}_{2r-1}h_{0m}$ и, наконец, в ${}_{2r}R^{00}$ — выражение ${}_{2r}h_{00}$. Собирая в этих уравнениях все вклады наивысшего порядка и приравнивая их нулю, мы можем найти ${}_{2r-2}h_{mn}, {}_{2r-1}h_{0m}, {}_{2r}h_{00}$; уравнение для ${}_{2r}h_{00}$ является в точности уравнением Пуассона!

Возвращаясь к уравнению (5.8), мы видим, что если ${}_{2r-1}h_{0m}$ и ${}_{2r}h_{mn}$ являются решением уравнений (10.17), то

$$\begin{aligned} {}_{2r-1}h'_{0m} &= {}_{2r-1}h_{0m} + {}_{2r-1}a_{0, m}, \\ {}_{2r}h'_{mn} &= {}_{2r}h_{mn} + {}_{2r}a_{m, n} + {}_{2r}a_{n, m} \end{aligned} \quad (10.18)$$

также будут решением.

Пусть, например, $r = 2$; в этом случае

$${}_3h'_{0m} = {}_3h_{0m} + {}_3a_{0, m}, \quad {}_4h'_{mn} = {}_4h_{mn} + {}_4a_{m, n} + {}_4a_{n, m}.$$

Выбор этих функций всегда может быть осуществлен преобразованием координат от координатной системы, в которой все коэффициенты a равны нулю. Тогда в уравнениях движения восьмого порядка появятся производные этих функций. Вообще говоря, их можно выбрать таким образом, чтобы уничтожить члены восьмого порядка в уравнениях движения. Однако трудно решить вопрос, имеет ли такая система координат какой-либо физический смысл. Во всяком случае, вплоть до постньютоновского приближения выбор системы координат не играет никакой роли, пока мы придерживаемся нашей процедуры приближений, для которой определено ее начало, а именно, сделан выбор ${}_2h_{00}$ и ${}_2h_{mn}$.

Приложение А¹⁾

Чтобы отличать *нашу* δ -функцию от δ -функции Дирака, будем обозначать здесь первую через δ_1 . Наша задача — дать «реалистическую» модель, показывающую, как надо построить такую последовательность $\delta_1(\epsilon)$, чтобы $\delta_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_1(\epsilon)$ и чтобы для каждого ϵ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(\epsilon) d_{(3)}x = 1, \quad \int \delta_1(\epsilon) r^{-p} d_{(3)}x = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, k). \quad (\text{A.1})$$

Такая модель может быть получена из некоторой модели $\delta(\epsilon)$ обычной δ -функции Дирака, удовлетворяющей следующим условиям:

$$\delta(\epsilon) = \delta(\epsilon, r) = \epsilon^{-3} \Delta\left(\frac{r}{\epsilon}\right), \quad (\text{A.2})$$

где $\Delta(r/\epsilon)$ такова, что всегда существует интеграл

$$\frac{1}{4\pi} D^{(p)} = \int_0^{\infty} \Delta(z) z^{-p+2} dz \quad (p = 1, 2, \dots, k) \quad (\text{A.3})$$

¹⁾ Настоящее Приложение представляет собой сокращенное и измененное изложение двух наших работ, написанных совместно с Плебанским [13].

и

$$D^{(0)} = \int \delta(\varepsilon) d_{(3)}, x = 4\pi \int_0^{\infty} z^2 \Delta(z) dz = 1. \quad (\text{A.4})$$

Если $\delta(\varepsilon)$ не обладает этим свойством, то это может быть достигнуто умножением ее на $(r/\varepsilon)^k$ и ренормировкой¹⁾. С помощью подобных δ -функций можно построить модель нашей δ_1 -функции следующим образом:

$$\delta_1(\varepsilon, r) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^k \left[\varepsilon^{k-3} \Delta \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (\text{A.5})$$

Мы должны показать, что такой выбор δ_1 удовлетворяет (A.1). Для этого начнем с первого соотношения (A.1):

$$\int \delta_1 d_{(3)}, x = \frac{4\pi}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^k \varepsilon^k \int_0^{\infty} \Delta(z) z^2 dz = D^{(0)} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Что же касается второго соотношения (A.1), то мы имеем

$$\begin{aligned} \int \delta_1 r^{-p} d_{(3)}, x &= \frac{4\pi}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^k \varepsilon^{k-p} \int_0^{\infty} \Delta(z) z^{2-p} dz = \\ &= \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^k \varepsilon^{k-p} D^{(p)} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

для любого целого p , если $1 \leq p \leq k$.

Таким образом, функции δ_1 , определяемые формулой (A.5), удовлетворяют соотношениям (A.1).

¹⁾ Например, возьмем

$$\delta(\varepsilon) = (2\pi)^{-3/2} \varepsilon^{-3} \exp \left(-\frac{1}{2} r^2 \varepsilon^{-2} \right),$$

т. е.

$$\Delta(z) = (2\pi)^{-3/2} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right).$$

Такое $\Delta(z)$ может быть преобразовано к виду

$$\Delta(z) = z^k (2\pi)^{-12-(k+3/2)} \left[\Gamma \left(\frac{k+3}{2} \right) \right]^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} z^2 \right).$$

Эту процедуру можно легко обобщить. Введем модифицированные дираковские функции δ_2 , исходя из условий

$$\int \delta_2 r^{-p} d_{(3)}, x = \omega_{(p)} \quad (p = 1, 2, \dots, k), \quad (\text{A.8})$$

где ω — произвольно заданные числа. Реалистической $\delta_2(\varepsilon)$, удовлетворяющей условию (A.8) в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$, является следующая функция:

$$\delta_2(\varepsilon) = \sum_{s=0}^k (D^{(k-s)})^{-1} \frac{\omega_{(k-s)}}{s!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^s \left[\varepsilon^{k-s} \Delta \left(\frac{r}{\varepsilon} \right) \right]. \quad (\text{A.9})$$

Мы находим

$$\begin{aligned} & \int \delta_2(\varepsilon) r^{-p} d_{(3)}, x = \\ & = 4\pi \sum_{s=0}^k (D^{(k-s)})^{-1} \frac{\omega_{(k-s)}}{s!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^s \varepsilon^{k-p} \int_0^\infty z^{-p+2} \Delta(z) dz = \\ & = \sum_{s=0}^k (D^{(k-s)})^{-1} \frac{\omega_{(k-s)}}{s!} \left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^s \varepsilon^{k-p} D^{(p)}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Это выражение отлично от нуля и конечно при $\varepsilon \rightarrow 0$, если только $s = k - p$. Тогда

$$\int \delta_2 r^{-p} d_{(3)}, x = \omega_{(p)} + O(\varepsilon)$$

и при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к (A.8).

Использование дираковских δ -функций требует задания определенных значений функций $\omega_{(p)}$. Функция, используемая в настоящей работе, наиболее удобна для наших целей; для нее $\omega_{(p)} = 0$ при $p = 1, 2, \dots, k$.

Приложение Б

Величина R_{00} с учетом членов четвертого приближения имеет вид

$$\begin{aligned} R_{00} = & -\frac{1}{2} \Phi_{,ss} - \frac{1}{2} {}_4 h_{00,ss} + {}_4 h_{0s,0s} - \frac{3}{2} \Phi_{,00} + \\ & + \frac{1}{2} \Phi_{,s} \Phi_{,s} - \frac{1}{2} \Phi \Phi_{,ss}. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R^{00} &= R_{00}(1 - 2h_{00}) = R_{00}(1 - 2\varphi), \\ R^{00} &= R^{00} \sqrt{-g} = (1 - \varphi) R^{00} = R_{00}(1 - 3\varphi). \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

В (Б.2), в виде исключения, $g = |g_{\alpha\beta}|$. Имеем

$$R^{00} = -\frac{1}{2} \varphi_{,ss} + \varphi \varphi_{,ss} + \frac{1}{2} \varphi_{,s} \varphi_{,s} + \frac{1}{2} \varphi_{,00} - \frac{1}{2} {}_4 h_{00, ss}. \quad (\text{Б.3})$$

Правая часть наших уравнений тяготения

$$R^{\alpha\beta} = -8\pi \left(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T \right) \quad (\text{Б.4})$$

для компоненты «нуль-нуль» с учетом членов четвертого порядка имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & -8\pi \left[{}_2 T^{00} - \frac{1}{2} (\eta^{00} - \varphi) {}_2 T^{00} (\eta^{00} + \varphi) + \right. \\ & \left. + {}_4 T^{00} - \frac{1}{2} {}_4 T^{00} + \frac{1}{2} {}_4 T^{ss} \right] = -4\pi ({}_2 T^{00} + {}_4 T^{00} + {}_4 T^{ss}). \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Так как

$$\begin{aligned} {}_4 m &= \frac{1}{2} {}_2 m \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + \frac{{}_1 m^2 m}{r}, \\ {}_2 m &= \frac{1}{2} {}_2 m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s + \frac{{}_1 m^2 m}{r}, \end{aligned}$$

то для правой части имеем

$$\begin{aligned} & -4\pi \left(\frac{1}{2} {}_2 m^1 \delta + \frac{2}{2} {}_2 m^2 \delta + \frac{3}{2} {}_1 m \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s \delta + \frac{3}{2} {}_2 m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s \delta + \right. \\ & \left. + \frac{{}_1 m^2 m}{r} \delta + \frac{{}_2 m^1 m}{r} \delta \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

В обеих частях мы берем только а) выражения четвертого порядка и б) выражения, которые дают конечный вклад в ${}_4 h_{00, ss}$. Тем самым интересующая нас часть ${}_4 h_{00}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} {}_4 h_{00, ss} &= 2fg_{,ss} + 2gg_{,ss} + g_{,00} + g_{,s}g_{,s} + \\ & + 8\pi \left(\frac{3}{2} {}_2 m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s \delta + \frac{{}_2 m^1 m}{r} \delta \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Так как

$$g_{,ss} = 8\pi {}_2 m^2 \delta, \quad f = -2 {}_1 m ({}^1 r)^{-1}, \quad (\text{Б.8})$$

то для вклада 4C в 4h , даваемого первыми двумя выражениями, имеем

$${}^4C_{,ss} = -4\pi {}^2\delta a. \quad (\text{Б.9})$$

Вообще, решение уравнения

$${}^4C_{,ss} = -4\pi {}^2\delta a \quad (\text{Б.10})$$

есть

$${}^4C = {}^2\bar{a} ({}^2r)^{-1}, \quad (\text{Б.11})$$

где

$${}^2\bar{a} = \int_{{}^2\Omega_{(3)}} a {}^2\delta d_{(3)}x. \quad (\text{Б.12})$$

Таким образом, в нашем случае

$${}^4C = \frac{{}^4{}^1m {}^2m}{r {}^2r}. \quad (\text{Б.13})$$

Следовательно,

$${}^4h_{00,ss} = g_{,00} + g_{,s}g_{,s} + 8\pi \left(\frac{3}{2} {}^2m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s {}^2\delta - \frac{{}^4{}^1m {}^2m}{r} {}^2\delta \right). \quad (\text{Б.14})$$

Итак, мы имеем окончательно

$${}^4h_{00} \rightarrow -{}^2m {}^2r_{,00} + 2 ({}^2m)^2 ({}^2r)^{-2} - 3 {}^2m \dot{\eta}^s \dot{\eta}^s ({}^2r)^{-1} + {}^2{}^1m {}^2m ({}^2rr)^{-1}. \quad (\text{Б.15})$$

Обобщим теперь ${}^4h_{00}$ на случай *трех* частиц, причем снова будем искать только те выражения, которые дают вклад в ${}^4h_{00, m}$. Единственными нетривиальными выражениями этого типа являются выражения, пропорциональные ${}^2m {}^3m$.

Обозначим через $({}^{ab})r$ «расстояние» между a -й и b -й частицами¹⁾:

$$({}^{ab})r^2 = ({}^a\xi^s - {}^b\xi^s) ({}^a\xi^s - {}^b\xi^s), \quad (\text{Б.16})$$

и попытаемся выяснить, какие вклады в (Б.4), propor-

¹⁾ Прежде было принято $({}^{12})r = r$.

циональные величине ${}^2m {}^3m$, дает третья частица. Теперь имеем

$$\begin{aligned} \Phi = {}_2h_{00} &= f + g + k, & f &= -2^1m ({}^1r)^{-1}, \\ g &= -2^2m ({}^2r)^{-1}, & k &= -2^3m ({}^3r)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Б.17})$$

Тогда добавочные выражения в (Б.3), которые мы ищем, имеют вид

$$\frac{1}{2} (gk)_{,ss} + \frac{1}{2} gk_{,ss} + \frac{1}{2} kg_{,ss} - \frac{1}{2} s_{00, ss}, \quad (\text{Б.18})$$

где через s_{00} обозначено добавочное выражение в ${}_4h_{00}$. В силу (Б.5) добавочные выражения в (Б.6) таковы:

$$-4 {}^2m {}^3m ({}^{(23)}r)^{-1} (2\delta + 3\delta). \quad (\text{Б.19})$$

Следовательно, добавочное выражение в ${}_4h_{00, ss}$ есть

$$s_{00, ss} \sim 8\pi {}^2m {}^3m ({}^{(23)}r)^{-1} (2\delta + 3\delta) + (gk)_{,ss} + gk_{,ss} + kg_{,ss}. \quad (\text{Б.20})$$

Отсюда находим

$$s_{00} = 2 {}^2m {}^3m [({}^{(23)}r)^{-1} ({}^3r)^{-1} + ({}^{(32)}r)^{-1} ({}^2r)^{-1} + 2({}^2r {}^3r)^{-1}]. \quad (\text{Б.21})$$

Таким образом, мы видим, что s_{00} не зависит явно от ${}^1\xi$. Следовательно,

$$\overline{s_{00, m}} = \overline{s_{00, m}} \quad (\text{Б.22})$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{s_{00}} - \frac{1}{4} \overline{gk} &= {}^2m {}^3m [({}^{(23)}r ({}^{31}r)^{-1} + \\ &+ ({}^{(23)}r ({}^{21}r)^{-1} + ({}^{(12)}r ({}^{13}r)^{-1})]. \end{aligned} \quad (\text{Б.23})$$

Последним, очень простым вопросом, который мы здесь рассмотрим, является переход от ${}_3h_{0m}$ к ${}_3h'_{0m}$:

$${}_3h'_{0m} = {}_3h_{0m} + {}_3a_{0, m}. \quad (\text{Б.24})$$

Подставляя это в (Б.1), имеем

$${}_4h'_{00} = {}_4h_{00} + 2 {}_4a_{0, 0}, \quad (\text{Б.25})$$

что совпадает с (9.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Grommer J., Sitzer. deut. Akad. Wiss. Berlin, 2 (1927).
2. Einstein, Infeld, Hoffman, Ann. Math., 39, 66 (1938).
3. Einstein A., Infeld L., Ann. Math., 41, 797 (1940).
4. Einstein A., Infeld L., Canad. Journ. Math., 1, 209 (1949).
5. Фок В. А., Journ. of Phys. (СССР), 1, 81 (1939).
6. Параретру А., Proc. Phys. Soc., 64, 57 (1951).
7. Петрова Н., ЖЭТФ, 19, 989 (1949).
8. Infeld L., Phys. Rev., 53, 836 (1938).
9. Infeld L., Canad. Journ. Math., 5, 17 (1953).
10. Infeld L., Acta Phys. Polon., 13, 205 (1954).
11. Teisseyre R., Acta Phys. Polon., 13, 47 (1954).
12. Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon., 4, 689 (1956); 5, 51 (1957).
13. Tulczyjew W., Bull. Acad. Polon., 5, 279 (1957).
14. Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon., 4, 749 (1956).
15. Фихтенгольц И. Г., ЖЭТФ, 27, 563 (1954).
16. Scheidegger A. E., Rev. Mod. Phys., 25, 451 (1953).
17. Rameswararao B., Banares Hindu University, 1955.
18. Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon., 4, 755 (1956).

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Л. Инфельд

L. Infeld, Ann. of Phys., 6, 341—367 (1959)

В настоящей статье рассматривается вопрос о том, излучает ли энергию система тяготеющих масс. Сначала мы пытаемся дать простое определение гравитационного излучения. Его полный поток оказывается равным производной по времени от гравитационного импульса. Поэтому возникает основной вопрос: является ли этот гравитационный импульс постоянным или нет? Этот вопрос, сформулированный надлежащим образом, оказывается тесно связанным с проблемой движения частиц в их гравитационном поле. Мы исследуем эту связь и в конце концов возвращаемся к нашему основному вопросу. Ответ таков: можно всегда найти подходящую систему координат, в которой гравитационное излучение отсутствует.

Введение

Прежде всего нам хотелось бы упомянуть главную проблему, которой посвящена настоящая статья. Мы имеем тяготеющие массы, которые для удобства будем рассматривать как сингулярности гравитационного поля. Эти массы движутся в соответствии с законами, предписываемыми гравитационным полем. Возникает вопрос: излучает такая система движущихся масс энергию или нет? Будем шаг за шагом приближаться к решению этой проблемы. Сначала исследуем связь между уравнениями движения и уравнениями, описывающими гравитационное излучение. Затем дадим определение полного гравитационного импульса. Его производная по времени определяет гравитационное излучение. Таким образом, вопрос о существовании гравитационного излучения сводится к вопросу о том, является гравитационный импульс постоянным или нет. Только в § 9 мы, наконец, получим ответ на этот вопрос. Конечно, полный

гравитационный импульс не является вектором; хотя его компоненты инвариантны по отношению к малым преобразованиям координат, однако они изменяются при произвольных преобразованиях. Поэтому возникает такой вопрос: существуют ли разумные системы координат, в которых полный гравитационный импульс постоянен, т. е. такие, в которых гравитационное излучение отсутствует? Ответ состоит в том, что такие системы координат существуют; иначе говоря, гравитационное излучение может быть порождено или уничтожено надлежащим выбором системы координат.

§ 1. Уравнения движения в форме поверхностного интеграла

В этом параграфе мы напомним, как уравнения движения были сформулированы Эйнштейном и автором [1] в 1949 г. Хотя в настоящей статье формализм значительно упрощен по сравнению с только что упомянутой статьей, основная идея остается той же.

Мы предполагаем, что источниками поля являются сингулярности, движение которых описывается уравнениями поля. Обозначим через

$${}^A \xi^k(t), \quad k = 1, 2, 3, \quad A = 1, 2, \dots, N$$

мировую линию A -й сингулярности (латинские индексы пробегают значения от 1 до 3, греческие — от 0 до 3; по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Предположим, что эти мировые линии заключены в тонкие трубки, которые никогда не пересекаются, и будем рассматривать (в этом параграфе) поле лишь вне этих трубок. В этом случае уравнения поля в обычных обозначениях имеют вид

$$\sqrt{-g} G^{\mu\nu} = \mathcal{G}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0. \quad (1.1)$$

Теперь мы используем известную формулу [2]:

$$\sqrt{-g} \mathcal{G}^{\mu\nu} = -g G^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(-g)(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta})]_{|\alpha\beta} + \Lambda'^{\mu\nu}. \quad (1.2)$$

(Здесь и в дальнейшем вертикальная черточка означает обычное дифференцирование.)

Выражение $\Lambda'^{\mu\nu}$ является довольно сложным, но в данный момент его явный вид нас мало интересует. Достаточно помнить, что $\Lambda'^{\mu\nu}$ содержит лишь выражения, нелинейные относительно первых производных компонент метрического тензора.

Назовем систему координат галилеевой в точке P , если в этой точке метрический тензор имеет значения метрики Минковского и его первые производные обращаются в нуль, т. е. если в точке P

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}, \quad \eta^{00} = 1, \quad \eta^{kl} = -\delta^{kl}, \quad \eta^{0m} = 0, \quad g_{|\sigma}^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.3)$$

Из сказанного относительно $\Lambda'^{\mu\nu}$ следует, что в такой галилеевой системе координат все $\Lambda'^{\mu\nu}$ и их первые производные обращаются в нуль в точке P . Очевидно, $\Lambda'^{\mu\nu}$ не является тензором.

Положим теперь

$$g^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu} \quad (1.4)$$

и не будем считать $\gamma^{\mu\nu}$ малыми. Их можно рассматривать как основные выражения, характеризующие метрическое поле, из которых могут быть получены все другие; так, например,

$$g = |g_{\alpha\beta}| = |g^{\alpha\beta}|^{-1} = |\eta^{\alpha\beta} + \gamma^{\alpha\beta}|^{-1} g^2, \quad (1.5)$$

откуда следует, что

$$g = |\eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}| \quad (1.6)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{-g} = 1 + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} + \text{нелинейные выражения.} \quad (1.7)$$

Если мы запишем

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta}, \quad (1.8)$$

то из соотношений (1.4) и (1.7) следует, что

$$h^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\rho\sigma} \gamma^{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta} + \text{нелинейные выражения,} \quad (1.9)$$

и если

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (1.10)$$

то найдем, что

$$h_{\alpha\beta} = -h^{\rho\sigma} \eta_{\rho\alpha} \eta_{\sigma\beta} + \text{нелинейные выражения.} \quad (1.11)$$

Вернемся к формуле (1.2). Выделим в ней те выражения, которые не обращаются в нуль в галилеевой системе, т. е. те, которые линейны относительно вторых производных величин $\gamma^{\mu\nu}$. С этой целью запишем (1.2) в виде

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = S^{\mu\ \alpha\nu\beta} + \Lambda^{\mu\nu}. \quad (1.12a)$$

$$S^{\mu\ \alpha\nu\beta} = \frac{1}{2} [\gamma^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha} + \gamma^{\nu\alpha} \eta^{\mu\beta} - \gamma^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} - \gamma^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta}]. \quad (1.12b)$$

Все другие, нелинейные выражения объединены теперь в $\Lambda^{\mu\nu}$. Таким образом, $\Lambda^{\mu\nu}$ тоже содержат вторые производные величин $\gamma^{\mu\nu}$, но только в виде произведений с другими $\gamma^{\mu\nu}$. Следовательно, величины $\Lambda^{\mu\nu}$ обладают тем же свойством, какими раньше обладали $\Lambda'^{\mu\nu}$: они вместе со своими производными обращаются в нуль в системе координат, галилеевой в точке P .

Исследуем теперь свойства симметрии выражения $S^{\mu\ \alpha\nu\beta}$. Последнее антисимметрично по индексам $\mu\alpha$ и $\nu\beta$. Оно симметрично относительно одновременной замены μ на ν и α на β . Наконец, $S^{\mu\nu\ \alpha\beta}$ удовлетворяет соотношению

$$S^{\mu\ \alpha\nu\beta} + S^{\mu\nu\beta\ \alpha} + S^{\mu\beta\ \alpha\nu} = 0. \quad (1.13)$$

Таким образом, мы видим, что

$$S^{\mu\ \alpha\nu\beta} = S^{\mu\alpha, \nu\beta} \quad (1.14)$$

обладает всеми свойствами симметрии тензора Римана.

Докажем теперь лемму, которой мы будем пользоваться в дальнейшем.

Лемма. Пусть имеется некоторая функция $\mathfrak{F}^{(\dots)ks}$, антисимметричная по индексам k, s и обладающая также другими произвольными греческими или латинскими

индексами, которые изображены точками в скобках. Тогда

$$\int_{\Sigma} \mathfrak{F}_{|s}^{(\dots)ks} n_k dS = 0, \quad (1.15)$$

если Σ — произвольная замкнутая двумерная поверхность, не проходящая через сингулярности поля. Под n_k понимаем

$$n_k = \cos(x^k, \mathbf{n}), \quad (1.16)$$

т. е., компоненты «единичного вектора нормали» к поверхности Σ . Слова «нормаль» и «единичный» употреблены здесь лишь в условном смысле, чтобы указать на соответствующие функции координат, которые подразумеваются под этими терминами в евклидовой геометрии.

Доказательство этой леммы довольно просто. Прежде всего видно, что интеграл (1.15) определенно не зависит от формы поверхности, пока не изменяется число сингулярностей, охватываемых этой поверхностью. Это утверждение вытекает из того факта, что

$$\mathfrak{F}_{|sk}^{(\dots)ks} = 0 \quad (1.17)$$

и из теоремы Грина. Запишем теперь

$$\mathfrak{F}^{(\dots)ks} = \varepsilon^{ksr} \mathfrak{A}_r^{(\dots)} \quad (1.18)$$

или, в явном виде,

$$\mathfrak{F}^{(\dots)23} = \mathfrak{A}_1^{(\dots)}, \quad \mathfrak{F}^{(\dots)31} = \mathfrak{A}_2^{(\dots)}, \quad \mathfrak{F}^{(\dots)12} = \mathfrak{A}_3^{(\dots)}. \quad (1.19)$$

Тогда интеграл (1.15) можно записать в форме

$$\int_{\Sigma} \mathfrak{F}_{|s}^{(\dots)ks} n_k dS = \int_{\Sigma} \varepsilon^{ksr} \mathfrak{A}_{r|s} n_k dS = \int_{\Sigma} \text{rot}_n \mathfrak{A} dS. \quad (1.20)$$

Этот интеграл может быть преобразован, согласно теореме Стокса, в линейный интеграл по контуру, ограничивающему поверхность. Но, как мы условились, поверхность замкнутая. Следовательно, длина ее контура равна нулю. Таким образом, лемма доказана.

Вернемся к уравнениям поля. Перепишем соотношения (1.12а), полагая $m = \mu$,

$$\mathfrak{G}^{mv} = S_{|\beta a}^{ma} v^{\beta} + \dot{S}_{|\beta}^{m0} v^{\beta} + \Lambda^{mv}. \quad (1.21)$$

Рассмотрим произвольную двумерную замкнутую поверхность, окружающую A -ю сингулярность. Обозначим такую поверхность через ${}^A\Sigma$. Так как тензор Эйнштейна вне сингулярности равен нулю, то, используя нашу лемму, имеем

$$\int_{A\Sigma} \dot{S}_{\beta}^{m0, \nu\beta} n_m dS + \int_{A\Sigma} \Lambda^{mv} n_m dS = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad A = 1, 2, \dots, N. \quad (1.22)$$

Эти $4N$ уравнений справедливы¹⁾ (опять-таки в силу нашей леммы) для произвольных поверхностей, каждая из которых заключает в себе только одну сингулярность. Вследствие произвольности формы поверхности, эти уравнения не могут дать каких-либо соотношений между пространственными координатами поля. Они могут дать нам только соотношения между координатами сингулярностей и их производными по времени. Поэтому они по определению являются уравнениями движения для N частиц. В одной из наших предыдущих работ [4] показано, как получить из них ньютоновские и постньютоновские уравнения движения. Это было сделано с помощью «нового» приближенного метода, который, однако, мы будем мало использовать в этой статье.

Во всяком случае, как мы уже сказали, будем рассматривать (1.22) по определению как точные уравнения движения для N частиц.

§ 2. Уравнения движения в форме объемных интегралов

В этом параграфе мы сформулируем уравнения движения в иной форме. Сущность предыдущей формулировки состояла в том, что некоторый интеграл по произвольной двумерной поверхности ${}^A\Sigma$, окружающей сингулярность, обращался в нуль. Основной чертой новой формулировки будет обращение в нуль некоторого интеграла по объему, взятого по произвольной окрестности A -й сингулярности.

Как известно, уравнения гравитационного поля с источниками, представленными непрерывным распре-

¹⁾ Уравнения, подобные этим, были сформулированы Голдбергом [3].

лением плотности тензора энергии-импульса, имеют вид

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} + 8\pi\mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

Вид $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ обычно предполагается заданным; он зависит от плотности масс, от векторного поля скоростей и, например, от электромагнитного и мезонного полей. В предыдущем параграфе в качестве источников поля мы рассматривали сингулярности. Известно, что сингулярности не описывают должным образом реальность. Возникает вопрос: каков смысл использования сингулярностей в качестве математической модели частиц?

Чтобы ответить на этот вопрос, представим себе, что мы имеем два тела, расстояние между которыми велико по сравнению с размерами этих тел. Предположим также, что вблизи каждого из этих тел в надлежащем образом выбранной системе координат имеет место центральная симметрия. Пусть, далее, нас интересуют такие вопросы, ответ на которые не требует знания распределения плотности внутри поверхности, окружающей какое-либо одно из этих тел. В этом случае можно с уверенностью использовать математическую модель сингулярностей как источников поля, так как истинное распределение материи нам не известно и вообще нас не интересует.

Если мы хотим рассматривать уравнения поля не только вне сингулярностей, как в § 1, а всюду, то мы должны взять $\mathfrak{T}^{\mu\nu}$ в виде суммы выражений, пропорциональных δ -функциям Дирака.

Обозначим,

$${}^A\delta = \delta_{(3)}(x^k - A\xi^k) = \delta_{(3)}(\mathbf{x} - A\xi). \quad (2.2)$$

Тогда для N частиц принимаем

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sum_{A=1}^N A_t{}^{\mu\nu} A\delta \quad (2.3)$$

где $A_t{}^{\mu\nu}$, казалось бы, являются произвольными функциями времени. Однако это не так. Здесь мы ссылаемся на результат, полученный Тульчиевым [5]: вид $A_t{}^{\mu\nu}$ можно вывести из условия самосогласованности уравнений поля.

При этом $A_t^{\mu\nu}$ должны иметь вид

$$A_t^{\mu\nu} = A_m A_{\dot{\xi}^\mu}^{\dot{\xi}^\nu} \left(\dot{\xi}^k = \frac{d\xi^k}{dt} = \frac{d\xi^k}{dx^0}, \dot{\xi}^0 = 1 \right). \quad (2.4)$$

Коэффициент A_m , который является функцией времени, мы будем называть *инертной* массой A -й частицы. Трансформационные свойства $\dot{\xi}^k$ очевидны; для $\delta_{(3)}$ они вытекают из инвариантного соотношения

$$\int_{\Omega} \delta_{(3)} d_{(3)}x = 1; \quad (2.5)$$

для A_m эти свойства следуют из трех последних уравнений, если вспомнить, что $\mathfrak{E}^{\mu\nu}$ является тензорной плотностью.

Скажем еще несколько слов о δ -функциях, которые мы предполагаем использовать. Обычные трехмерные δ -функции Дирака обладают следующими свойствами:

1) Формально их можно рассматривать как сферически-симметричные функции, для которых существуют все производные.

2) $\delta(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$.

3) Для любой $f(\mathbf{x})$, непрерывной в произвольной области Ω , расположенной в окрестности $\mathbf{x} = 0$, имеем

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \delta d_{(3)}x = f(0). \quad (2.6)$$

Используемые нами δ -функции обладают одним добавочным свойством. Они допускают, чтобы $f(\mathbf{x})$ в (2.6) была сингулярной, и они «обрезают» сингулярности $f(\mathbf{x})$ в $\mathbf{x} = 0$. Иначе говоря,

4) δ -функции удовлетворяют условию

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^{-p} d_{(3)}x = 0 \quad \text{при } p = 1, 2, \dots, k. \quad (2.7)$$

Можно показать [6, 7], что модели δ -функций, обладающие всеми четырьмя свойствами, действительно могут быть построены. С помощью таких функций мы избавляемся от бесконечностей при расчете уравнений движения и последовательно избегаем проблемы ренормировки.

Мы будем обозначать через

$$\tilde{f}(0) = \int_{\Omega} f(x) \delta d_{(3)}x \quad (2.8)$$

ту часть $f(x)$, которая непрерывна в точке $x=0$.

Сославшись на результат предыдущей работы, можно теперь перейти к формулировке уравнений движения.

Уравнения поля для N частиц имеют вид ¹⁾

$$\mathfrak{E}^{\mu\nu} + 8\pi \mathfrak{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \sum_{A=1}^N A m^A \xi^{\mu A} \xi^{\nu A} \delta. \quad (2.9б)$$

Из тождества Бианки следует

$$\mathfrak{F}_{;v}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование, т. е.

$$\mathfrak{F}_{;v}^{\mu\nu} = \mathfrak{F}_{|v}^{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathfrak{F}^{\alpha\beta}. \quad (2.11)$$

Но это уравнение имеет лишь символический смысл вследствие наличия δ -функций в выражениях $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$. Можно избавиться от этих δ -функций, произведя интегрирование по трехмерной области ${}^A\Omega$, окружающей A -ю сингулярность. Таким образом, имеем

$$\int_{{}^A\Omega} \mathfrak{F}_{;v}^{\mu\nu} d_{(3)}x = 0, \quad \begin{matrix} \mu = 0, 1, 2, 3, \\ A = 1, 2, \dots, N. \end{matrix} \quad (2.12)$$

Это $4N$ обыкновенных дифференциальных уравнения, которые, по определению, будем называть уравнениями движения для N частиц.

Так как мы знаем, что $\mathfrak{F}^{\mu\nu}$ имеет форму (2.9б), то можно переписать (2.12) в более явном виде. С этой целью подставим (2.9б) в (2.11) и затем выполним инте-

¹⁾ Здесь используются единицы, в которых скорость света и гравитационная постоянная равны единице. — *Прим. ред.*

гирование. Начнем с вычисления выражения

$$\int_{A\Omega} \mathfrak{F}_{|\nu}^{\mu\nu} d_{(3),x} = \int_{A\Omega} ({}^A m {}^A \dot{\xi}^\mu {}^A \dot{\xi}^\nu {}^A \delta)_{|\nu} d_{(3),x} =$$

$$= \int_{A\Omega} ({}^A m {}^A \dot{\xi}^\mu {}^A \delta)_{|0} d_{(3),x} + \int_{A\Omega} ({}^A m {}^A \dot{\xi}^\mu {}^A \dot{\xi}^k {}^A \delta)_{|k} d_{(3),x}. \quad (2.13)$$

Разумеется, никакого суммирования по A в этих интегралах производить не нужно, так как интегралы типа $\int_{A\Omega} {}^B \delta d_{(3),x}$ обращаются в нуль, если $A \neq B$. Кроме того, последний интеграл в правой части соотношения (2.13) равен нулю. В этом можно убедиться, преобразовав объемный интеграл в поверхностный, который должен обращаться в нуль, так как ${}^A \delta$ обращается в нуль на поверхности области ${}^A \Omega$. Следовательно, имеем

$$\int_{A\Omega} \mathfrak{F}_{|\nu}^{\mu\nu} d_{(3),x} = \frac{d}{dt} ({}^A m {}^A \dot{\xi}^\mu). \quad (2.14)$$

Таким образом, вместо (2.12) мы можем написать

$$\frac{d}{dt} ({}^A m {}^A \dot{\xi}^\mu) + \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} {}^A \dot{\xi}^\alpha {}^A \dot{\xi}^\beta {}^A m = 0, \quad \begin{matrix} \mu = 0, 1, 2, 3 \\ A = 1, 2, \dots, N. \end{matrix} \quad (2.15)$$

Здесь индекс A слева от символа Кристоффеля, в соответствии с определением (2.8), подразумевает выполнение двух операций: во-первых, замену x^k координатами ξ^k и, во-вторых, отбрасывание сингулярностей. Таким образом, мы получили $4N$ обыкновенных дифференциальных уравнения, которые определяют $4N$ неизвестных функций: ${}^A m$ и ${}^A \dot{\xi}^k$. Так как $\dot{\xi}^0 = 1$, то последнее уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{}^A m}{}^A m} + {}^A m \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} {}^A \dot{\xi}^\alpha {}^A \dot{\xi}^\beta = 0, \quad (2.16a)$$

$$\frac{d}{}^A m}{}^A m} + {}^A m \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} k \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} {}^A \dot{\xi}^\alpha {}^A \dot{\xi}^\beta = 0. \quad (2.16b)$$

Из первого из этих уравнений мы можем найти ${}^A m$:

$${}^A m = A_\mu \exp - \int \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} A_\xi^\alpha A_\xi^\beta dt, \quad A_\mu = \text{const.} \quad (2.17)$$

Подставляя это выражение в (2.16б), находим $3N$ уравнений для $3N$ неизвестных ${}^A \xi^k$. В такие уравнения A_μ не входят. Это обстоятельство обычно рассматривают как проявление принципа «эквивалентности».

§ 3. Уравнения движения в форме объемных и поверхностных интегралов

Здесь мы дадим третью и последнюю формулировку уравнений движения.

Напомним, что первая формулировка основывалась на интегралах по двумерным поверхностям, окружающим одну сингулярность; а второе — на интегралах по некоторому объему, окружающему одну из сингулярностей. В формулировке, которую мы дадим в этом параграфе, будут фигурировать как поверхностный, так и объемный интегралы.

Снова будем исходить из уравнения

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} + 8\pi \mathfrak{T}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = S_{|\alpha\beta}^{\mu\alpha, \nu\beta} + \Lambda^{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Вследствие антисимметрии по индексам $\nu\beta$ имеем

$$(\mathfrak{G}^{\mu\nu} + 8\pi \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{|\nu} = (\Lambda^{\mu\nu} + 8\pi \mathfrak{T}^{\mu\nu})_{|\nu} = 0. \quad (3.3)$$

Здесь величины $\Lambda^{\mu\nu}$, содержащие только нелинейные по „ γ ” выражения, не являются, очевидно, компонентами тензора. Обычно, такое уравнение рассматривают как выражение закона сохранения, включая плотность псевдотензора энергии-импульса $\Lambda^{\mu\nu}$ гравитационного поля. Однако в данном случае пока пренебрежем возможностью такой интерпретации и используем наше последнее уравнение, чтобы с его помощью определить уравнения движения. Это можно сделать путем интегрирования его по ${}^A \Omega$. Преобразуя объемный интеграл в поверхностный

интеграл по ${}^A\Sigma$, получаем

$$\int_{A\Sigma} \Lambda^{am} n_m dS = - \frac{d}{dt} \int_{A\Omega} (\Lambda^{0a} + 8\pi \mathfrak{I}^{0a}) d_{(3),x}. \quad (3.4)$$

Итак, мы снова получили $4N$ дифференциальных уравнения, которые мы определим как уравнения движения N частиц. В левой части этих уравнений тензор энергии-импульса не появляется, так как он обращается в нуль на поверхности ${}^A\Sigma$.

§ 4. Следствия из различных форм уравнений движения

Мы представили уравнения движения в трех различных формах.

Во-первых, в (Σ) -форме, согласно (1.22), они имеют вид

$$- \int_{A\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, \nu\beta} n_m dS = \int_{A\Sigma} \Lambda^{mv} n_m dS. \quad (4.1)$$

Во-вторых, в (Ω) -форме, согласно (2.12) и (2.15), они будут

$$\int_{A\Omega} \mathfrak{I}_{;\beta}^{\alpha\beta} d_{(3),x} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{d}{dt} (A_m A_{\xi}^{\alpha}) + A_m \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\varrho \end{matrix} \right\} A_{\xi}^{\beta} A_{\xi}^{\varrho} = 0. \quad (4.2b)$$

В-третьих, в $(\Sigma\Omega)$ -форме, согласно (3.4), имеем

$$\int_{A\Sigma} \Lambda^{am} n_m dS = - \int_{A\Omega} (\dot{\Lambda}^{0a} + 8\pi \dot{\mathfrak{I}}^{0a}) d_{(3),x}. \quad (4.3)$$

Можно легко показать, что эти три формы эквивалентны, если удовлетворяются уравнения поля

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} + 8\pi \mathfrak{I}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.4)$$

и если

$$\mathfrak{I}^{\mu\nu} = \sum_{A=1}^N A_m A_{\xi}^{\mu} A_{\xi}^{\nu}. \quad (4.5)$$

Сначала исследуем связь между уравнениями движения в (Ω) - и $(\Sigma\Omega)$ -формах. Уравнения движения в (Ω) -форме были получены из символического уравнения

$$\mathfrak{F}_{;\beta}^{\alpha\beta} = \mathfrak{F}_{|\beta}^{\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\varrho \end{matrix} \right\} \mathfrak{F}^{\beta\varrho} = 0, \quad (4.6)$$

в то время как уравнение в $(\Sigma\Omega)$ -форме — из символического уравнения

$$\Lambda_{|\beta}^{\alpha\beta} + \Lambda_{|\beta}^{\alpha\beta} = 0. \quad (4.7)$$

Из этих двух уравнений имеем

$$\Lambda_{|\beta}^{\alpha\beta} = \mathfrak{F}^{\varrho\sigma} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \varrho\sigma \end{matrix} \right\} \quad (4.8)$$

как следствие уравнений поля и тождеств Бианки.

Подставим теперь в уравнения движения в $(\Sigma\Omega)$ -форме вместо компонент $\mathfrak{F}^{0\alpha}$ их явные выражения. Тогда будем иметь

$$\frac{d}{dt} (A_m A_{\xi}^{\dot{\alpha}\alpha}) = -\frac{1}{8\pi} \left[\int_{A_{\Sigma}} \Lambda^{am} n_m dS + \int_{A_{\Omega}} \dot{\Lambda}^{0\alpha} d_{(\alpha),x} \right] \quad (4.9)$$

или, с учетом уравнений движения в (Ω) -форме,

$$A_m \overset{A}{\sim} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\varrho \end{matrix} \right\} A_{\xi}^{\dot{\alpha}\beta} A_{\xi}^{\dot{\alpha}\varrho} = \frac{1}{8\pi} \left[\int_{A_{\Sigma}} \Lambda^{am} n_m dS + \int_{A_{\Omega}} \dot{\Lambda}^{0\alpha} d_{(\alpha),x} \right]. \quad (4.10)$$

В этих уравнениях мы видим связь между величинами, характеризующими материю (в левой части) и поле (в правой части); обе эти основные категории и их взаимосвязь хорошо известны со времени появления классической электродинамики.

Обратимся теперь к более важной проблеме, а именно найдем некоторые следствия из эквивалентности уравнений движения в (Σ) - и $(\Sigma\Omega)$ -формах. Уравнения в обеих этих формах можно записать в виде одного уравнения, которое будет играть существенную роль для дальнейшего рассмотрения:

$$\int_{A_{\Sigma}} \Lambda^{am} n_m dS = - \int_{A_{\Omega}} (\dot{\Lambda}^{0\alpha} + 8\pi \dot{\mathfrak{F}}^{0\alpha}) d_{(\alpha),x} = - \int_{A_{\Sigma}} \dot{S}_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS. \quad (4.11)$$

Из последнего уравнения следует

$$\int_{A_{\Omega}} (\Lambda^{0\alpha} + 8\pi \mathfrak{L}^{0\alpha}) d_{(3)}x = \int_{A_{\Sigma}} S_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS + C, \quad (4.12)$$

где C — постоянная интегрирования. Можно, однако, показать, что вследствие уравнений поля эта постоянная равна нулю. Действительно, уравнения поля (2.1) при $\mu = 0$ в силу (1.12а) дают

$$\Lambda^{0\nu} + 8\pi \mathfrak{L}^{0\nu} = -S_{|\alpha\beta}^{0\alpha, \nu\beta} = -S_{|\beta m}^{0m, \nu\beta} = S_{|\beta m}^{m0, \nu\beta}. \quad (4.13)$$

Интегрируя последнее уравнение по A_{Ω} , получаем

$$\int_{A_{\Omega}} (\Lambda^{0\nu} + 8\pi \mathfrak{L}^{0\nu}) d_{(3)}x = \int_{A_{\Sigma}} S_{|\beta}^{m0, \nu\beta} n_m dS. \quad (4.14)$$

Напомним, что $S^{m0, \nu\beta}$ содержат только линейные по $\gamma^{\mu\nu}$ выражения, и (1.12б) дает нам возможность написать их в явном виде:

$$S_{|\beta}^{m0, 0\beta} = \frac{1}{2} [-\gamma_{|m}^{00} + \gamma_{|s}^{ms}], \quad (4.15)$$

$$S_{|\beta}^{m0, k\beta} = \frac{1}{2} [\delta^{mk} (\gamma_{|0}^{00} + \gamma_{|s}^{0s}) - \gamma_{|m}^{k0} - \gamma_{|0}^{mk}]. \quad (4.16)$$

§ 5. Три импульса

В силу формы $\mathfrak{L}^{0\alpha}$, уравнение (4.14) можно записать в виде

$$\frac{1}{8\pi} \int_{A_{\Omega}} \Lambda^{0\alpha} d_{(3)}x + A m \dot{\xi}^{\alpha} = \frac{1}{8\pi} \int_{A_{\Sigma}} S_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS. \quad (5.1)$$

Будем называть «вектор»

$$A m \dot{\xi}^{\alpha} = A P_{(IN)}^{\alpha} \quad (5.2)$$

инерциальным импульсом A -й частицы. Этот импульс зависит от частицы, ее скорости и от поля в той точке, через которую проходит эта частица. Это имеет место в силу того, что массы $A m$ зависят от поля согласно формуле (2.17).

Будем называть «вектор»

$$\frac{1}{8\pi} \int_{A_\Omega} \Lambda^{0\alpha} d_{(3)}x = {}^A P_{(F)}^\alpha \quad (5.3)$$

импульсом поля в окрестности A -й частицы. Он зависит от области интегрирования.

Будем называть «вектор»

$$\frac{1}{8\pi} \int_{A_\Sigma} S_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS = {}^A P_{(G)}^\alpha \quad (5.4)$$

гравитационным импульсом A -й частицы и ее окрестности. Тогда уравнение (5.1) можно просто записать в виде

$${}^A P_{(G)}^\alpha = {}^A P_{(IN)}^\alpha + {}^A P_{(F)}^\alpha. \quad (5.5)$$

Но гравитационный импульс $P_{(G)}^\alpha$ определен лишь через поверхностный интеграл от выражений, линейных по первым производным величин $\gamma^{\mu\nu}$. В то же время $P_{(F)}^\alpha$ определяется через объемный интеграл от функций, нелинейных по „ $\dot{\gamma}$ ”.

Желательно выяснить физический смысл этих трех импульсов по крайней мере в некоторых частных случаях. К сожалению, чтобы сделать это, мы должны сослаться на некоторые результаты, полученные ранее с помощью метода приближений.

Сделаем специальное предположение, что мы рассматриваем задачу двух тел и интересуемся лишь 0 -компонентой последнего уравнения. Обозначим через $m_{(IN)}$, $m_{(F)}$ и $m_{(G)}$ инертную, полевую и гравитационную массы первой частицы, соответствующие, очевидно, $P_{(IN)}^0$, $P_{(F)}^0$ и $P_{(G)}^0$, так как $\xi^0 = 1$. Аналогично, для второй частицы будем писать индекс «2» над символами соответствующих масс. Теперь для каждой из этих масс напишем

$$m = m_2 + m_4, \quad (5.6)$$

где m_2 и m_4 — массы соответственно в ньютоновском и пост-ньютоновском приближениях. Для m_2 дело обстоит просто:

в этом приближении инертная и гравитационная массы, обе будучи постоянными, равны между собой, в то время как полевая масса равна нулю. Что же касается m_4 , то результаты расчета¹⁾ таковы:

$$m_4^{(IN)} = \frac{1}{2} m_2^1 \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s + m_2^1 m_2^2 \frac{1}{r}, \quad (5.7)$$

$$m_4^{(G)} = \frac{1}{2} m_2^1 \dot{\xi}^s \dot{\xi}^s - \frac{1}{2} m_2^1 m_2^2 \frac{1}{r}. \quad (5.8)$$

Это означает, что добавочная гравитационная масса в постньютоновском приближении равна сумме кинетической энергии и половины потенциальной энергии взаимодействия. Из этих уравнений можно найти $m_4^{(F)}$:

$$m_4^{(F)} = m_4^{(G)} - m_4^{(IN)} = -\frac{3}{2} m_2^1 m_2^2 \frac{1}{r}. \quad (5.9)$$

Это показывает, что в случае задачи двух тел только в ньютоновском приближении нет никакой разницы между инертной и гравитационной массами.

§ 6. Уравнения для гравитационного излучения

В § 3 мы получили уравнения движения из дифференциального закона сохранения:

$$\left(\mathfrak{T}^{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} \Lambda^{\mu\nu} \right)_{|v} = 0. \quad (6.1)$$

Используем то же самое уравнение, из которого были получены уравнения движения в $(\Sigma\Omega)$ -форме, для определения гравитационного излучения. Единственное различие между ходом рассуждений в § 3 и здесь заключается в том простом обстоятельстве, что теперь мы будем инте-

¹⁾ В работе автора [6] [формула (6.8)] вычислена масса $m_4^{(IN)}$; в работе Эйнштейна и автора [1] [стр. 231, формула (12.5)] вычислена масса $m_4^{(G)}$.

гировать не по окрестности A -й сингулярности, а по всему пространству, которое мы обозначим через Ω . Бесконечную сферическую поверхность, окружающую такое пространство, обозначим через Σ . Внутри поверхности Σ находятся частицы, движущиеся согласно законам движения, которые выводятся из уравнений поля и сформулированы в первых трех параграфах. Предположим, что частицы никогда не достигают поверхности Σ . Итак, интегрируя (6.1) по всему пространству, находим

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS = - \int_{\Omega} (\dot{\Lambda}^{0\mu} + 8\pi \dot{\mathfrak{T}}^{0\mu}) d_{(3)}x. \quad (6.2)$$

Левую часть этого уравнения

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS \quad (6.3)$$

будем рассматривать, по определению, как *поток гравитационного излучения*. Таким образом, уравнение (6.2), с помощью которого мы определили гравитационное излучение, тесно связано с уравнениями движения. Единственное различие между (6.2) и уравнениями движения заключается в области интегрирования: Σ и Ω вместо ${}^A\Sigma$ и ${}^A\Omega$. Уравнение (6.2) представляет собой *закон сохранения* в $(\Sigma\Omega)$ -форме, подобно тому как прежде с ${}^A\Sigma$ и ${}^A\Omega$ вместо Σ и Ω оно представляло собой *уравнение движения* в $(\Sigma\Omega)$ -форме.

Как прежде уравнения движения, так теперь законы сохранения могут быть записаны в (Σ) -форме:

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS = - \int_{\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, \mu\beta} n_m dS \quad (6.4)$$

или, объединяя (6.2) и (6.4),

$$\int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS = - \int_{\Omega} (\dot{\Lambda}^{0\mu} + 8\pi \dot{\mathfrak{T}}^{0\mu}) d_{(3)}x = - \int_{\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, \mu\beta} n_m dS, \quad (6.5)$$

или, как в § 4, имеем

$$\int_{\Omega} (\dot{\Lambda}^{0\mu} + 8\pi \dot{\mathfrak{T}}^{0\mu}) d_{(3)}x = \int_{\Sigma} S_{|\beta}^{m0, \mu\beta} n_m dS. \quad (6.6)$$

Наконец, мы можем также записать законы сохранения в (Ω) -форме

$$\int_{\Omega} \mathfrak{T}_{;\beta}^{\alpha\beta} d_{(3)}x \equiv \sum_{A=1}^N \int_{A\Omega} \mathfrak{T}_{;\beta}^{\alpha\beta} d_{(3)}x =$$

$$= \sum_{A=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} (A m A \dot{\xi}^\alpha) + \tilde{\sim} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\sigma \end{matrix} \right\} A \dot{\xi}^\beta A \dot{\xi}^\sigma A m \right\} = 0 \quad (6.7)$$

Все эти уравнения являются следствием уравнений движения, которые в свою очередь вытекают из уравнений поля.

Мы знаем, что законы сохранения в (Σ) -форме, т. е. (6.4), не зависят от формы поверхности постольку, поскольку эта поверхность не проходит через сингулярности. Поэтому мы можем построить двумерную поверхность Σ , окружающую все сингулярности, в виде совокупности малых сфер, каждая из которых окружает одну из сингулярностей и соединена с каждой другой сферой тонкими трубками. Но так как поток через эти тонкие трубки равен нулю, то (6.4) можно записать в виде

$$\int_{\Sigma} (\Lambda^{\mu m} + \dot{S}_{|\beta}^{m0, \mu\beta}) n_m dS = \sum_{A=1}^N \int_{A\Sigma} (\Lambda^{\mu m} + \dot{S}_{|\beta}^{m0, \mu\beta}) n_m dS = 0. \quad (6.8)$$

Подобным образом, используя уравнения в $(\Sigma\Omega)$ -форме, можно написать

$$\sum_{A=1}^N \int_{A\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS = - \sum_{A=1}^N \int_{A\Omega} (\dot{\Lambda}^{\mu 0} + 8\pi \dot{\mathfrak{E}}^{0\mu}) d_{(3)}x. \quad (6.9)$$

Однако, вообще говоря,

$$\sum_{A=1}^N \int_{A\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS \neq \int_{\Sigma} \Lambda^{\mu m} n_m dS. \quad (6.10)$$

В качестве определения гравитационного излучения мы рассматриваем именно правую, а не левую часть этого

неравенства. Это определение не совпадает в точности с обычным, так как $\Lambda^{\mu m}$ содержит также производные второго порядка. Однако нам представляется более последовательным использовать для гравитационного излучения именно это определение, которое тесно связано с уравнениями движения.

Так же, как и прежде, определим полный инерциальный импульс

$$P_{(IN)}^{\alpha} = \int_{\Omega} \mathfrak{E}^{0\alpha} d_{(3)}x = \sum_{A=1}^N A m^A \dot{\xi}^{\alpha}, \quad (6.11)$$

полный импульс поля

$$P_{(F)}^{\alpha} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} \Lambda^{0\alpha} d_{(3)}x \quad (6.12)$$

и полный гравитационный импульс

$$P_{(G)}^{\alpha} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} S_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS. \quad (6.13)$$

Как и раньше, (6.6) можно записать в форме

$$P_{(G)}^{\alpha} = P_{(IN)}^{\alpha} + P_{(F)}^{\alpha}. \quad (6.14)$$

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, которая встречается почти на каждом шагу в электродинамике. Величины, относящиеся к мировой линии, такие, как $P_{(IN)}^{\alpha}$, связаны с величинами, относящимися к полю, такими, как $P_{(F)}^{\alpha}$ и $P_{(G)}^{\alpha}$.

Поучительно сравнить представленную здесь ситуацию для гравитационного поля с ситуацией в случае электромагнитного поля в специальной теории относительности, где мы имеем тензор энергии-импульса $E^{\alpha\beta}$ электромагнитного поля и закон сохранения $E_{|\beta}^{\alpha\beta} = 0$. Интегрируя последнее уравнение по всему пространству, находим

$$\int_{\Sigma} E^{\alpha m} n_m dS = - \int_{\Omega} \dot{E}^{\alpha 0} d_{(3)}x. \quad (6.15)$$

Правая часть этого равенства трактуется обычно как (взятая со знаком минус) производная по времени пол-

ного импульса поля. Для электромагнитного поля это единственный импульс, который фигурирует в законе сохранения. В случае, когда левая часть, представляющая поток электромагнитного излучения, обращается в нуль, мы заключаем, что импульс поля является постоянным вектором.

В случае гравитационного поля ситуация иная. Поток гравитационного излучения равен (взятой со знаком минус) производной по времени от суммы двух импульсов: импульса гравитационного поля и импульса инертной материи. В том случае, когда поток гравитационного излучения равен нулю, остается постоянной именно сумма двух импульсов. Эту сумму мы называем гравитационным импульсом, и она равна поверхностному интегралу от выражения, представляющего собой линейную комбинацию производных величин $\gamma^{\mu\nu}$.

Чтобы проиллюстрировать различие между этими тремя полными импульсами, обратимся снова к примеру, рассмотренному в конце предыдущего параграфа, а именно к задаче о двух частицах и их полных массах, вычисленных в ньютоновском и постньютоновском приближениях. Как и прежде, в ньютоновском приближении имеем

$$P_{2(IN)}^0 = P_{2(G)}^0 = \text{const}, \quad P_{2(F)}^0 = 0. \quad (6.16)$$

Затем, в постньютоновском приближении:

$$P_{4(IN)}^0 = \text{Полная кинетическая энергия} - 2 \text{ (Потенциальная энергия)},$$

$$P_{4(G)}^0 = \text{Полная кинетическая энергия} + \text{Потенциальная энергия} = \text{const.}$$

$$P_{4(F)}^0 = 3 \text{ (Потенциальная энергия)}.$$

Из выражения для $P_{4(G)}^0$ мы видим, что в этом приближении поверхностный интеграл от «нормальной компоненты вектора Пойнтинга» для гравитационного излучения в рассматриваемом случае обращается в нуль. Это имеет место в силу того, что

$$\dot{P}_{2(G)}^0 + \dot{P}_{4(G)}^0 = \frac{1}{8\pi} \int \Lambda^{0m} n_m dS = 0; \quad (6.17)$$

иными словами, вследствие ньютоновских уравнений движения сумма кинетической и потенциальной энергии является постоянной величиной.

§ 7. Об инвариантных свойствах $P_{(G)}^\alpha$

Возникает вопрос о трансформационных свойствах величин $P_{(G)}^\alpha$ при малых преобразованиях типа

$$x^{*\mu} = x^\mu + a^\mu(x). \quad (7.1)$$

Будем всюду пренебрегать произведениями величин „ a “, так же как и произведениями величин „ γ “ и „ a “. Напомним, что в соответствии с (4.15) и (4.16)

$$P_{(G)}^0 = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} S_{|\beta}^{m0, 0\beta} n_m dS = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} [-\gamma_{|m}^{00} + \gamma_{|s}^{ms}] n_m dS, \quad (7.2a)$$

$$\begin{aligned} P_{(G)}^k &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} S_{|\beta}^{m0, k\beta} n_m dS = \\ &= \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} [\delta^{mk} \gamma_{|\alpha}^{0\alpha} - \gamma_{|m}^{k0} - \gamma_{|0}^{mk}] n_m dS. \end{aligned} \quad (7.2б)$$

Начнем с исследования изменений в $P_{(G)}^0$ при преобразовании (7.1). Для этого мы должны использовать формулу

$$g^{*\mu\nu} = g^{\alpha\beta} x_{|\alpha}^{*\mu} x_{|\beta}^{*\nu} \det \frac{\partial x}{\partial x^*}. \quad (7.3)$$

В это соотношение мы должны подставить

$$x_{|\alpha}^{*\mu} = \delta_{\alpha}^{\mu} + a_{|\alpha}^{\mu}, \quad (7.4a)$$

$$\det \frac{\partial x}{\partial x^*} = 1 - a_{|\alpha}^{\alpha}. \quad (7.4б)$$

Из трех последних уравнений следует (поскольку $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \gamma^{\mu\nu}$):

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} + a_{|0}^0 - a_{|s}^s, \quad (7.5a)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} - a_{|m}^0 + a_{|0}^m, \quad (7.5б)$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} - a_{|n}^m - a_{|m}^n + \delta^{mn} a_{|s}^s + \delta^{mn} a_{|0}^0. \quad (7.5в)$$

Подставляя эти выражения в (4.15) и (4.16), находим

$$S_{|\beta}^{*m0, 0\beta} = S_{|\beta}^{m0, 0\beta} + (a_{|m}^s - a_{|s}^m)_{|\beta}, \quad (7.6a)$$

$$S_{|\beta}^{*m0, k\beta} = S_{|\beta}^{m0, k\beta} + (\delta^{ks} a_{|m}^0 - \delta^{mk} a_{|s}^0)_{|\beta} + (\delta^{ks} a_{|0}^m - \delta^{mk} a_{|0}^s)_{|\beta}. \quad (7.6б)$$

Выражения в скобках в правой части (7.6) антисимметричны по индексам m, s ; следовательно, в силу леммы, доказанной в § 1, имеем

$$\int_{\Sigma} S^{*m0, \nu\beta} n_m dS = \int_{\Sigma} S^{m0, \nu\beta} n_m dS, \quad (7.7)$$

или

$$P_{(G)}^{*\alpha} = P_{(G)}^{\alpha},$$

откуда видно, что компоненты гравитационного импульса инвариантны при малых преобразованиях системы координат. Это не имело бы места, если бы учитывались произведения величин γ и a . Это видно непосредственно в том частном случае, когда гравитационный поток обращается в нуль. В этом случае $\Lambda^{0\alpha}$ и $\mathfrak{F}^{0\alpha}$ при преобразованиях Лоренца ведут себя как компоненты тензора и, следовательно, $P_{(G)}^{\alpha}$ — как постоянный вектор. Таким образом, величины $P_{(G)}^{\alpha}$ не инвариантны по отношению к преобразованиям Лоренца.

§ 8. Гравитационное излучение и выбор системы координат

Теперь мы подходим к основному вопросу нашей работы: можно ли найти такую разумную систему координат, в которой гравитационное излучение отсутствует? Иными словами, представляет ли собой гравитационное излучение, как оно здесь определено, нечто такое, что может быть устранено подходящим выбором системы координат, или же это есть нечто, имеющее абсолютное значение? Это значит: можем ли мы найти систему координат, в которой $\dot{P}_{(G)}^{\alpha} = 0$ и $P_{(G)}^{\alpha} = \text{const}$, т. е. в которой выполняется закон сохранения суммы двух импульсов — инерциального и полевого?

Прежде чем ответить на этот вопрос, напомним еще раз определение $P_{(G)}^\alpha$. Оно дается формулой (6.13):

$$\dot{P}_{(G)}^\alpha = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, \alpha\beta} n_m dS. \quad (8.1)$$

Но вследствие (6.9) можно также написать:

$$\dot{P}_{(G)}^\alpha = \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \Lambda^{\alpha m} n_m dS. \quad (8.2)$$

Следовательно, мы можем рассчитать изменение в импульсах двумя путями: во-первых, через линейные по γ выражения, т. е. с помощью (8.1), и, во-вторых, через нелинейные по γ выражения, т. е. с помощью (8.2).

Перейдем теперь к вопросу о выборе системы координат. Все наши допущения будут касаться только поведения системы координат и величин γ при $r \rightarrow \infty$, где r — «расстояние» от некоторой фиксированной точки, т. е. $r^2 = x^k x^k$, при очень больших значениях r . Допустим, что при $r \rightarrow \infty$ наша метрика стремится к галилеевым значениям по крайней мере как $1/r$, т. е.

$$|\gamma^{\alpha\beta}| \leq \frac{|A^{\alpha\beta}(t)|}{r}. \quad (8.3)$$

Кроме того, примем следующие координатные условия при $r \rightarrow \infty$:

$$\gamma_{|\alpha}^{0\alpha} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (8.4a)$$

$$\gamma_{|n}^{mn} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (8.4б)$$

Нам хотелось бы обратить внимание на условие (8.4б), которое отличается от условия де-Дондера $\gamma_{|\alpha}^{m\alpha} = 0$, столь широко используемого Фоком. Если в настоящей работе и достигнут какой-либо прогресс, то он в значительной степени обязан выбору координатного условия (8.4б), которое основывается на идеях, лежащих в основе «нового приближенного метода», а именно, что пространство и время должны рассматриваться различным образом; это различие проявляется в выборе координатных условий. В самом деле, именно это координатное условие

было выбрано в наших ранних статьях с Эйнштейном [4, 1]. Основное различие между этой работой и работой других авторов, среди которых следует выделить работу Траутмана [8], также состоит в том, что в настоящей работе использовано иное координатное условие.

Теперь, при этом особом координатном условии, величины $S_{|\beta}^{m0, \nu\beta}$ принимают очень простой вид:

$$S_{|\beta}^{m0, 0\beta} = -\frac{1}{2} \gamma_{|m}^{00}, \quad (8.5a)$$

$$S_{|\beta}^{m0, k\beta} = -\frac{1}{2} [\gamma_{|m}^{k0} + \gamma_{|0}^{mk}], \quad (8.5b)$$

как это следует из (7.2). Уравнения поля в этой системе координат также принимают более простую форму. В данный момент нас интересует только их $(0, 0)$ - и $(0, k)$ -компоненты и только при $r \rightarrow \infty$, когда тензор энергии-импульса равен нулю:

$$S_{|ab}^{0a, 0b} + \Lambda^{00} = 0, \quad (8.6a)$$

$$S_{|a\beta}^{0a, k\beta} + \Lambda^{0k} = 0, \quad (8.6b)$$

или вследствие (8.5) в нашей системе координат при $r \rightarrow \infty$ просто имеем

$$\frac{1}{2} \gamma_{|ss}^{00} = -\Lambda^{00}, \quad (8.7a)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{|ss}^{0k} = -\Lambda^{0k}. \quad (8.7b)$$

Остановимся пока на втором из этих уравнений. Как мы знаем, Λ^{0k} представляет собой сумму произведений величин $\gamma^{\mu\nu}$ и их производных. Величины $\gamma^{\mu\nu}$ имеют порядок $1/r$; в таком случае производные будут порядка $1/r$ или более высокого порядка по $1/r$. Следовательно, Λ^{0k} должны быть по крайней мере второго порядка по $1/r$. Поэтому, казалось бы, Λ^{0m} могут дать вклад в поверхностный интеграл (8.2) при $\alpha=0$, и тем самым $P_{(G)}^0$ в этой координатной системе может зависеть от времени. Однако это не так.

Разложим в степенной ряд по x^s/r те существенные выражения в Λ^{0m} , которые могут дать вклад в поверх-

ностный интеграл (8.2), предполагая, конечно, что такое разложение возможно. Тогда имеем

$$\Lambda^{0m} = \frac{a^{0m}}{r^2} + \frac{a_s^{0m} x^s}{r^3} + \frac{a_{sp}^{0m} x^s x^p}{r^4} + \dots, \quad (8.8)$$

где коэффициенты a^{0m} и т. д. являются функциями лишь времени. Так как, с другой стороны, левая часть (8.7б) представляет собой чистый лапласиан, то γ^{0m} должны иметь вид

$$\gamma^{0m} = A^{0m} \ln r + A_s^{0m} \frac{x^s}{r} + \dots, \quad (8.9)$$

где A^{0m} и т. д. — такие функции времени, которые удовлетворяют уравнениям (8.7б). Но это противоречит нашему допущению, что γ^{0m} , как и все другие $\gamma^{\mu\nu}$, принимают на бесконечности галилеевы значения. Следовательно, Λ^{0m} не могут содержать выражений порядка r^{-2} ; они могут содержать выражения, начиная по крайней мере с члена порядка r^{-3} ; поэтому $\dot{P}_{(G)}^0$ должно быть равным нулю, и, следовательно, $P_{(G)}^0$ — постоянная величина!

Этот результат самым определенным образом связан с выбором нашей системы координат. Этот выбор обуславливает появление в левой части (8.7б) лапласиана вместо даламбертиана. Действительно, в случае даламбертиана в γ^{0m} могли бы входить выражения порядка α/r и α/r^2 , совместимые с Λ^{0m} порядка r^{-2} .

Если Λ^{0m} являются величинами порядка r^{-3} при $r \rightarrow \infty$ и если мы снова разложим их в степенные ряды по x^s/r , то выражения γ^{0m} , в соответствии с (8.7б), могут быть записаны в форме

$$\gamma^{0m} = \frac{\dot{C}^{0m}}{r} + \frac{\dot{C}_s^{0m} x^s}{r^2} + \dots \quad (8.10)$$

Здесь коэффициенты \dot{C}^{0m} и т. д. снова являются функциями лишь времени. Тогда, в силу координатного условия (8.4а), γ^{00} можно записать в форме

$$\begin{aligned} \gamma^{00} = & \frac{4M}{r} + \frac{4M_a x^a}{r^2} + \frac{4M_{ab} x^a x^b}{r^3} + \dots - \\ & - C^{0m} \left(\frac{1}{r} \right)_{|m} - C_s^{0m} \left(\frac{x^s}{r^2} \right)_{|m} - \dots, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где M , M_a , M_{ab} и т. д. — постоянные. Действительно, легко видеть, что это есть наиболее общее решение для γ^{00} , удовлетворяющее уравнениям поля и координатным условиям, а также условиям для γ^{00} на бесконечности.

Обращаясь к определению $P_{(G)}^0$ как интеграла от линейных по γ выражений, мы видим, что

$$\begin{aligned} \dot{P}_{(G)}^0 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, 0\beta} n_m dS = \\ &= -\frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \gamma_{|m0}^{00} n_m dS = 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

так как единственные существенные в этом интеграле выражения порядка -2 по r имеют в качестве коэффициентов постоянные M , M_a , M_{ab} и т. д. Если

$$M \neq 0 \text{ и } M_a = M_{ab} \dots = 0, \quad (8.13)$$

то, вычисляя поверхностный интеграл, находим

$$P_{(G)}^0 = -\frac{1}{16\pi} \int \left(\frac{4M}{r} \right)_{|m} n_m dS = M. \quad (8.14)$$

Следовательно, если имеет место (8.13), то γ^{00} принимает вид

$$\gamma^{00} = \frac{4M}{r} + \text{Члены более высокого порядка по } \frac{1}{r}, \quad (8.15)$$

где M — полная гравитационная масса, которая в нашей системе координат, определяемой условиями (8.4) и (8.3), должна быть постоянной.

Обратимся теперь к $P_{(G)}^k$. Мы покажем, что можно еще более специализировать нашу систему координат на бесконечности таким образом, чтобы эти величины также были постоянными. При этом мы имеем в виду, что преобразование координат, которое мы теперь произведем, не должно изменить существенных особенностей предыдущей системы координат. Под этим мы подразумеваем, что $\gamma^{*\mu\nu}$ будут исчезать на бесконечности как $1/r$ и что $\gamma_{|\alpha}^{*0\alpha}$ и $\gamma_{|n}^{*mn}$ будут стремиться к нулю по крайней мере как $1/r^3$.

Произведем преобразование координат:

$$x^{*k} = x^k + C^k \frac{1}{r}, \quad (8.16)$$

где C^k — функции только t . Выпишем в преобразовании $\gamma^{\mu\nu}$ все члены, линейные и нелинейные, до порядка $1/r^3$. Из (7.3) и (8.16) находим

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} - C^s \left(\frac{1}{r} \right)_{|s} + O\left(\frac{1}{r^3} \right), \quad (8.17a)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} + \dot{C}^m \frac{1}{r} + \dot{C}^m \frac{\gamma^{00}}{r} + O\left(\frac{1}{r^3} \right), \quad (8.17б)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{*mn} = & \gamma^{mn} - C^m \left(\frac{1}{r} \right)_{|n} - C^n \left(\frac{1}{r} \right)_{|m} + \delta^{mn} \left(\frac{1}{r} \right)_{|s} C^s + \\ & + \dot{C}^m \frac{\gamma^{n0}}{r} + \dot{C}^n \frac{\gamma^{m0}}{r} + \dot{C}^m \dot{C}^n \frac{1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (8.17в)$$

Так как в (8.17б) выражение γ^{00}/r по крайней мере порядка $1/r^2$, мы видим, что при $r \rightarrow \infty$

$$\gamma_{|0}^{*00} + \gamma_{|m}^{*0m} = O\left(\frac{1}{r^3} \right), \quad (8.18)$$

и аналогично

$$\gamma_{|n}^{*mn} = O\left(\frac{1}{r^3} \right), \quad (8.19)$$

поскольку γ^{m0} — величины порядка $1/r$, а их производные по пространственным координатам порядка $1/r^2$. Мы знаем, что линейные члены в (8.17) не дают вклада в $P_{(G)}^k$. Это было подробно показано в предыдущем параграфе. Кроме того, члены порядка $1/r^3$ не оказывают какого-либо влияния на поверхностный интеграл. Наконец, так как в (8.5б) γ^{*0k} дифференцируются по пространственным координатам, то в γ^{*0k} достаточно учесть только выражения порядка $1/r$. Мы видим также, что в (8.17в) выражение $\dot{C}^m \dot{C}^n / r^2$ не может дать какого-либо вклада в поверхностный интеграл, поскольку оно умножается на $n_m = x^m / r$, и поверхностный интеграл обращается в нуль в силу асимметрии. Поэтому для находж-

дения $P_{(G)}^{*k}$ мы можем положить

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00}, \quad (8.20a)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m}, \quad (8.20б)$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + \dot{C}^m \frac{\gamma^{n0}}{r} + \dot{C}^n \frac{\gamma^{m0}}{r}. \quad (8.20в)$$

Введем теперь следующие функции времени:

$$A_m^n = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} \frac{\gamma^{n0}}{r} n_m dS. \quad (8.21)$$

Тогда, в силу (8.1) и (8.5б), имеем

$$\dot{P}_{(G)}^{*k} = \dot{P}_{(G)}^k - [A_m^k \dot{C}^m + A_s^s \dot{C}^k]_{|00}. \quad (8.22)$$

Таким образом, мы можем, вообще говоря, обратить в нуль $\dot{P}_{(G)}^{*k}$, не нарушая наших первоначальных условий. Чтобы сделать это, мы должны решить дифференциальное уравнение

$$\dot{P}_{(G)}^k = [A_m^k \dot{C}^m + A_s^s \dot{C}^k]_{|00}. \quad (8.23)$$

В этом уравнении $P_{(G)}^k$ и A_m^k — известные функции времени. Зная их, мы находим C^k и с помощью последних производим преобразование координат (8.16). В новой системе координат со «звездочкой» мы имеем

$$\dot{P}_{(G)}^{*a} = 0, \quad P_{(G)}^{*a} = \text{const}. \quad (8.24)$$

Следовательно, в такой системе координат сумма инерциального и полевого импульсов остается постоянной!

Как нам представляется, против этого обоснования можно было бы выдвинуть только один аргумент, а именно: что произойдет, если A_m^k обратятся в нуль?

На этот вопрос легко дать ответ, если обобщить только что представленное доказательство.

В самом деле, введем вместо преобразования

$$x^{*k} = x^k + \frac{C^k}{r} \quad (8.25)$$

несколько более общее преобразование

$$x^{*k} = x^k + a^k, \quad (8.26)$$

где a^k имеют вид

$$a^k = \frac{b^k}{r} + b_s^k \frac{x^s}{r^2} + \dots, \quad (8.27)$$

а b^k , b_s^k и т. д. в (8.27) — функции только t . Иными словами, мы полагаем, что a^k суть величины порядка r^{-1} и не изменяют своего порядка при дифференцировании по времени, но понижают его при дифференцировании по пространственным координатам. Таким образом, мы имеем

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} - a_{|s}^s + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (8.28a)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} + a_{|0}^m + a_{|0}^m \gamma^{00} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (8.28б)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{*mn} = & \gamma^{mn} - a_{|n}^m - a_{|m}^n + \delta^{mn} a_{|s}^s + a_{|0}^m \gamma^{n0} + \\ & + a_{|0}^n \gamma^{m0} + a_{|0}^n a_{|0}^m + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \end{aligned} \quad (8.28в)$$

Так как вклад в $P_{(G)}^k$ могут давать лишь произведения типа γa и aa , причем только в том случае, если они надлежащего порядка, то мы можем положить (чтобы найти $P_{(G)}^k$), подобно тому как это было сделано в (8.20),

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00}, \quad (8.29a)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m}, \quad (8.29б)$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + a_{|0}^m \gamma^{n0} + a_{|0}^n \gamma^{m0} + a_{|0}^m a_{|0}^n. \quad (8.29в)$$

Следовательно, в силу (7.2б)

$$P_{(G)}^{*k} = P_{(G)}^k - \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} (a_{|0}^k \gamma^{m0} + a_{|0}^m \gamma^{k0} + a_{|0}^k a_{|0}^m)_{|0} n_m dS. \quad (8.30)$$

Таким образом, можно обратить в нуль $P_{(G)}^{*k}$ любым преобразованием, удовлетворяющим условию

$$P_{(G)}^k = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} (a_{|0}^k \gamma^{m0} + a_{|0}^m \gamma^{k0} + a_{|0}^k a_{|0}^m)_{|0} n_m dS. \quad (8.31)$$

Даже если γ^{m0} — величина порядка r^{-2} , такие величины a^k всегда будут существовать. В этом частном случае

имеем

$$P_{(G)}^k = \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma} (a_{|0}^m a_{|0}^k)_{|0} n_m dS. \quad (8.32)$$

Достаточно выбрать a^k вида

$$a^k = \frac{\alpha^k}{r} + \beta \frac{x^k}{r^2}; \quad (8.33)$$

тогда мы получим следующее соотношение для α^k и β :

$$P_{(G)}^k = \frac{1}{3} (\dot{\alpha}^k \dot{\beta})_{|0}.$$

Это преобразование оставляет координатные условия существенно инвариантными, как легко видеть из (8.28), так что мы имеем

$$\gamma_{|\alpha}^{*0\alpha} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (8.34a)$$

$$\gamma_{|n}^{*mn} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (8.34б)$$

§ 9. Обобщение системы координат

До сих пор мы предполагали, что для метрического поля на бесконечности имеют место условия:

$$1) |\gamma^{\alpha\beta}| \ll \left| \frac{M^{\alpha\beta}(t)}{r} \right|. \quad (9.1)$$

$$2) \gamma_{|\alpha}^{\alpha 0} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad \gamma_{|n}^{mn} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.2)$$

3) Величины Λ^{0m} при $r \rightarrow \infty$ можно разложить в степенной ряд по x^s/r , причем коэффициенты разложения являются функциями только времени.

При этих условиях мы доказали следующие положения.

А. $P_{(G)}^0$ постоянно; фактически, для доказательства этого положения нет необходимости требовать выполнения условия 1. Достаточно было бы предположить, что

$$|\gamma^{0m}| \ll \left| \frac{M^{0m}(t)}{r} \right|,$$

или даже

$$|\gamma^{0m}| \leq \left| M^{0m}(t) \frac{\ln r}{r^\alpha} \right|,$$

если $\alpha > 0$ при $r \rightarrow \infty$.

Б. $P_{(G)}^\alpha$ инвариантно относительно преобразований

$$x^{*\alpha} = x^\alpha + a^\alpha, \quad (9.3)$$

если при $r \rightarrow \infty$ мы пренебрегаем всеми произведениями γa и aa .

Мы будем называть

$$x^{*\alpha} = x_\alpha + a^\alpha$$

собственным преобразованием, если при $r \rightarrow \infty$ выполняются следующие условия: a^α имеет порядок $1/r$, пространственное дифференцирование понижает порядок на единицу, в то время как дифференцирование по времени не изменяет порядка; или a^α могут быть разложены в степенной ряд по x^s/r с коэффициентами, зависящими только от времени. Кроме того, мы предполагаем, что для *собственных* преобразований величины $S_{|\beta}^{*m0, \alpha\beta}$ следует рассчитывать до порядка $1/r^3$; это означает, что в случае необходимости, в преобразовании величин $\gamma^{\alpha\beta}$ должны быть учтены нелинейные члены.

При таком определении собственного преобразования мы доказали:

В. $P_{(G)}^0$ и координатные условия (9.2) инвариантны относительно собственных пространственных преобразований, т. е. если

$$x^{*0} = x^0, \quad (9.4a)$$

$$x^{*k} = x^k + a^k. \quad (9.4b)$$

Мы доказали также, что:

Г. Всегда можно выбрать a^k в *собственном* преобразовании (9.4) таким образом, чтобы

$$P_{(G)}^k = 0. \quad (9.5)$$

Возникает вопрос: что произойдет с $P_{(G)}^0$ и координатными условиями (9.2), если использовать не

собственное преобразование (9.4), а полное собственное преобразование (9.3)? Чтобы ответить на этот вопрос, достаточно рассмотреть только собственное преобразование времени, т. е.

$$x^{*0} = x^0 + a^0. \quad (9.6)$$

Мы имеем

$$\gamma^{*00} = \gamma^{00} + a_{|0}^0 + a_{|0}^0 \gamma^{00} + (a_{|0}^0)^2 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (9.7)$$

$$\gamma^{*0m} = \gamma^{0m} - a_{|m}^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (9.8)$$

$$\gamma^{*mn} = \gamma^{mn} + \delta^{mn} a_{|0}^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.9)$$

Но линейные выражения не дают никакого вклада в $P_{(G)}^0$. Нелинейные члены имеют порядок $1/r^2$ и, будучи продифференцированы еще раз по пространственным координатам, не дадут вклада в поверхностный интеграл. Следовательно:

Д. $P_{(G)}^0$ инвариантно по отношению к собственному пространственно-временному преобразованию.

Однако легко видеть, что такое преобразование не оставляет инвариантными координатные условия. В самом деле, мы имеем

$$\gamma_{|a}^{*0a} = a_{|00}^0 + a_{|00}^0 a_{|00}^0 + (a_{|0}^0 \gamma^{00})_{|0} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (9.10a)$$

$$\gamma_{|n}^{*mn} = a_{|0m}^0 + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.10b)$$

Здесь величины a^0 — произвольны, поскольку преобразование остается *собственным*. Из этих уравнений мы заключаем, что

$$\gamma_{|n0}^{*mn} - \gamma_{|am}^{*0a} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.11)$$

Это значит, что мы можем доказать постоянство величины $P_{(G)}^0$ при несколько менее жестких условиях, чем те, которые были приняты в начале этого параграфа. Действительно, мы можем принять только три координатных условия (9.11) вместо четырех (9.2).

Координатное условие (9.11), если его явно ввести в начале нашего доказательства, может показаться довольно искусственным. Здесь же мы подошли к нему естественным путем, исследуя трансформационные свойства $P_{(G)}^0$. Тем не менее можно дать более простое и более непосредственное доказательство следующей теоремы:

Е. Пусть при $r \rightarrow \infty$

$$1) |\gamma^{0m}| \leq \frac{|M^{0m}(t)|}{r},$$

или

$$|\gamma^{0m}| \leq \left| M^{0m}(t) \frac{\ln r}{r^\alpha} \right| \quad \text{при } \alpha > 0. \quad (9.12)$$

$$2) \gamma_{|n0}^{mn} - \gamma_{|\alpha m}^{0\alpha} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.13)$$

3) Λ^{0m} могут быть разложены в степенные ряды по x^s/r .

Тогда, если эти условия выполнены, имеем

$$P_{(G)}^0 = \text{const.}$$

Путь доказательства этой теоремы такой же, как и в § 8, и здесь мы опишем его лишь в общих чертах. В соответствии с (6.13) и (6.5)

$$\begin{aligned} \dot{P}_{(G)}^0 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \dot{S}_{|\beta}^{m0, 0\beta} n_m dS = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \Lambda^{0m} n_m dS = \\ &= \int_{\Omega} \left(\dot{\mathfrak{E}}^{00} + \frac{1}{8\pi} \dot{\Lambda}^{00} \right) d_{(3)}x. \end{aligned} \quad (9.14)$$

В соответствии с (8.6б) и (4.16) (0, k)-уравнения поля можно записать в виде

$$-\frac{1}{2} [\gamma_{|ss}^{k0} - \gamma_{|\alpha k}^{0\alpha} + \gamma_{|s0}^{sk}] + \Lambda^{0k} = 0. \quad (9.15)$$

Отсюда вследствие координатного условия (9.13) имеем в согласии с (8.7б):

$$\frac{1}{2} \gamma_{|ss}^{k0} = -\Lambda^{0k} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.16)$$

С этого момента доказательство тождественно с тем, которое опирается на уравнение (8.76), и ведет к заключению, что $\dot{P}_{(G)}^0 = 0$, т. е. $P_{(G)}^0$ должно быть постоянной величиной. Мы можем убедиться в этом еще более простым, почти тривиальным путем. Поскольку γ^{h0} как решения уравнения (9.16) могут быть разложены в степенные ряды по x^s/r , мы заключаем, что

$$\gamma_{|mk}^{0m} = O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (9.17)$$

и, следовательно, наше условие (9.13) можно записать в виде

$$\gamma_{|n0}^{mn} - \gamma_{|0m}^{00} = O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.18)$$

Однако сравнение с (7.2a) показывает, что

$$\gamma_{|n0}^{mn} - \gamma_{|0m}^{00} = -2\dot{S}_{|\beta}^{m0, 0\beta}, \quad (9.19)$$

здесь, очевидно, $\dot{P}_{(G)}^0$ должно обращаться в нуль.

Координатные условия (9.13), так же как и $P_{(G)}^0$, инвариантны по отношению к произвольным *собственным* пространственно-временным преобразованиям. Из уравнения (9.14) мы видим также, что $P_{(G)}^0$ можно представить в виде поверхностного интеграла. Очевидно, он не зависит от координатной системы внутри области, ограниченной бесконечной сферой, поскольку это приводит к собственному преобразованию на сфере.

Он будет также инвариантен по отношению к чисто пространственному преобразованию, которое при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$x^{*k} = x^k + a^k(x^s),$$

где a^k — величины нулевого порядка по r , поскольку при дифференцировании они понижают порядок на единицу. Следовательно, величина $P_{(G)}^0$, определяемая координатным условием (9.13) и равная полной гравитационной массе, должна рассматриваться как полная энергия системы.

Однако можно показать, что величина $P_{(G)}^0$ не будет постоянной во всех системах координат. В самом деле, рассмотрим в качестве примера простое преобразование

координат при $r \rightarrow \infty$:

$$x^{0'} = x^0 + \varepsilon \ln \frac{r}{R}. \quad (9.20)$$

Здесь ε — постоянная, а R — очень большой постоянный радиус, по которому мы интегрируем. Непосредственное применение формулы (7.3) дает

$$\gamma'^{00} = \gamma^{00} + \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \varepsilon \frac{2x^s}{r^2} \gamma^{0s}, \quad (9.21a)$$

$$\gamma'^{0m} = \gamma^{0m} + \varepsilon \frac{x^m}{r^2} + \varepsilon \gamma^{ms} \frac{x^s}{r^2}, \quad (9.21б)$$

$$\gamma'^{mn} = \gamma^{mn}. \quad (9.21в)$$

Чтобы применить теперь эти выражения к нашему координатному условию, следует помнить, что

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\beta}} = \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} - \varepsilon a_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}. \quad (9.22)$$

Следовательно,

$$\gamma'_{|0m}{}^{00} = \gamma_{|0m}{}^{00} - \varepsilon \gamma_{|00}{}^{00} \frac{x^m}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad (9.23a)$$

$$\gamma'_{|0n}{}^{mn} = \gamma_{|0n}{}^{mn} - \varepsilon \gamma_{|00}{}^{mn} \frac{x^n}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (9.23б)$$

Добавочные выражения имеют порядок $1/r^2$, и они могут, вообще говоря, изменить поверхностный интеграл. Следовательно, «гравитационное излучение», или, точнее, поток его энергии, может быть порожден или уничтожен выбором системы координат. Однако, как мы показали, существуют разумные системы координат, в которых «гравитационное излучение» всегда исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Infeld L., *Canad. Journ. Math.*, 1, 209 (1949).
2. Ландау Л., Лифшиц Е., *Теория поля*, М.—Л., 1948, § 98.

3. Goldberg J. N., Phys. Rev., 89, 263 (1953).
4. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. of Math., 39, 66 (1938).
5. Tulczyjew W., Bull. Acad. Polon., 5, 279 (1957).
6. Infeld L., Rev. Mod. Phys., 29, 398 (1957); статья 5 настоящего сборника.
7. Infeld L., Plebański J., Bull. Acad. Polon., 4, 697 (1956); 5, 51 (1957).
8. Trautman A., Bull. Acad. Polon., 6, 407 (1958).

7. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ВРЕМЕННО НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

А. Папанетру, Д. Гейслер и Г. Тредер

A. Papapetrou, D. Geissler and H. Tredner,
Ann. d. Phys., 2, 344—350 (1959)

С помощью предложенной Вейлем интегральной формы общерелятивистского закона сохранения энергии-импульса показано, что гравитационное излучение, испускаемое временно нестационарной системой, обладает не равной нулю полной энергией, которая не может быть уничтожена преобразованием координат.

§ 1. Система, периодически зависящая от времени, согласно Эйнштейну [1] (см. также [2]) и Эддингтону [3], испускает гравитационное излучение, которое связано с потоком гравитационной энергии. Поэтому периодическое во времени стационарное гравитационное поле не может существовать, что находится в соответствии с результатом Папанетру [4].

В расчеты Эйнштейна входит псевдотензор t_{μ}^{ν} плотности энергии-импульса гравитационного поля. Поэтому очевидно, что поток энергии не может быть уничтожен преобразованием координат, и, в частности, что результат не зависит от использованных Эйнштейном координатных условий Гильберта. Напротив, высказывались различного рода сомнения по поводу физической реальности результатов Эйнштейна.

В настоящей работе показано, что при помощи теоремы Вейля [5] (см. также [6]) о полном энергии-импульсе явно ковариантным образом можно рассчитать гравитационное излучение системы, которая в течение некоторого конечного временного интервала периодически зависит от времени.

Теорема Вейля утверждает следующее. Пусть \mathfrak{T}_{μ}^{ν} — плотность тензора материи некоторой изолированной материальной системы и t_{μ}^{ν} — псевдотензор ее гравитационного

поля. Для $\mathfrak{X}_\mu^\nu + t_\mu^\nu$ имеет место эйнштейновский закон сохранения энергии-импульса:

$$\mathfrak{X}_{\mu, \nu}^\nu + t_{\mu, \nu}^\nu = 0. \quad (1)$$

Из (1) следует, что интегралы

$$cP_\mu = \int_{x^0 = \text{const}} (\mathfrak{X}_\mu^0 + t_\mu^0) dV, \quad (2)$$

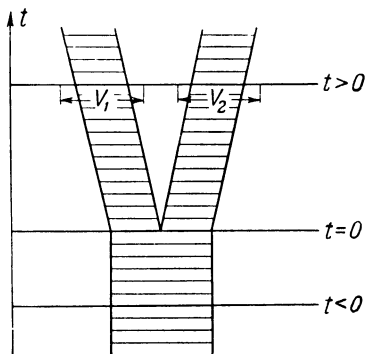
взятые по пространственно-подобной гиперплоскости $x^0 \equiv ct = \text{const}$, образуют, если они сходятся, 4-вектор. Для их сходимости необходимо, чтобы: а) пространство на гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ на бесконечности достаточно быстро переходило в плоское пространство и б) система координат была выбрана на бесконечности так, чтобы $g_{\mu\nu}$ асимптотически принимали постоянные значения.

В этом случае P_μ является 4-вектором по отношению к произвольным преобразованиям координат в конечной области, для которых — вследствие условия «б» — следует лишь потребовать, чтобы они на бесконечности переходили в общие преобразования Лоренца. Для этого 4-вектора из соотношения (1) следует интегральный закон сохранения:

$$\frac{dP_\mu}{dt} = 0. \quad (3)$$

При этом P_i ($i = 1, 2, 3$) — полный импульс и $cP_0 \equiv E$ — полная энергия изолированной системы.

В специальной теории относительности ($t_\mu^\nu = 0$, $\mathfrak{X}_\mu^\nu \rightarrow T_{\mu\nu}$) мы говорим о разбиении полной системы на изолированные подсистемы, если тензор $T_{\mu\nu}$ отличен от нуля только внутри некоторых отделенных друг от друга (трубкообраз-



Фиг. 1. $T_{\mu\nu} \neq 0$ только в заштрихованной области.

ных) областей четырехмерного пространства. Тогда из дифференциального закона сохранения (1)

$$T_{\mu\nu, \nu} = 0$$

можно вывести интегральный закон сохранения как для полной системы, так и для каждой отдельной подсистемы. В качестве примера рассмотрим случай, наглядно изображенный на фиг. 1: для $t < 0$ имеется единственная, локализованная в некоторой конечной области система, которая в момент времени $t = 0$ расщепляется на две изолированные друг от друга системы. Интегральный закон сохранения дает для каждой отдельной подсистемы

$$\int_{V_n} T_{\mu 0} dV = cP_{\mu} = 4\text{-вектор} = \text{const},$$

где V_n — область гиперплоскости $x^0 = \text{const}$, которую занимает n -я подсистема. Для полной системы равным образом имеет место

$$\int_{x^0 = \text{const}} T_{\mu 0} dV = cP_{\mu} = 4\text{-вектор} = \text{const},$$

причем

$$P_{\mu} = \sum_n P_{\mu}. \quad (4)$$

В общей теории относительности также можно говорить об изолированных подсистемах, если сумма $\mathfrak{F}_{\mu}^{\nu} + t_{\mu}^{\nu}$ отлична от нуля только внутри отдельных разделенных друг от друга областей и вне этих областей стремится к нулю настолько быстро, что взятые по областям V_n ¹⁾ гиперповерхности $x^0 = \text{const}$ интегралы

$$\int_{V_n} (\mathfrak{F}_{\mu}^0 + t_{\mu}^0) dV = cP_{\mu} \quad (5)$$

сходятся. В таком случае теорема Вейля может быть при-

¹⁾ Строго говоря, в этом случае области V_n бесконечны; см. ниже обсуждение в связи с фиг. 3.

менена также и к каждой отдельной подсистеме, что дает

$$\frac{d}{dt} P_n^\mu = 0.$$

Далее, для каждого n четыре величины P_n^μ являются компонентами 4-вектора граничной метрики Минковского, которая теперь должна быть справедливой не только в бесконечности, но и в промежуточных областях. Интегралы P_n^μ полной системы снова даются соотношением (4).

§ 2. Стационарная периодическая во времени система обладает, согласно Папаетру [4], расходящейся полной энергией. Следовательно, для применимости теоремы Вейля требуется, чтобы мы рассматривали систему, которая периодически зависит от времени только в течение некоторого конечного интервала времени. Примем следующее модельное представление системы такого рода.

Состояние A (реализуется в бесконечном интервале времени $t < 0$): материальная система состоит из некоторого аксиально-симметричного тела, вращающегося вокруг своей оси симметрии.

Состояние B (реализуется в конечном интервале времени $0 \leq t \leq T$): благодаря внутренним силовым взаимодействиям тело распадается на две равные части, которые движутся по круговым траекториям вокруг их общего центра тяжести с постоянной угловой скоростью ω , причем скорость должна быть малой по сравнению со скоростью света. При таком круговом движении можно либо представлять себе, что угловая скорость и радиус круговой траектории обеих частей тела определены таким образом, что система удерживается своим собственным гравитационным полем, либо считать, что оба тела связаны какими-либо внутренними силами.

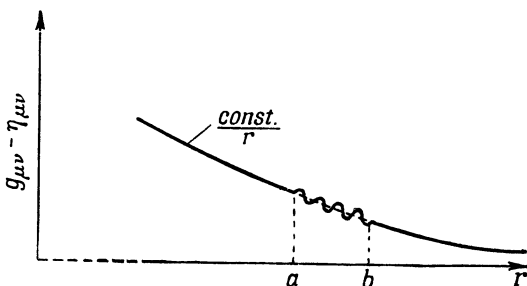
Состояние C (реализуется в бесконечном интервале времени $t > T$): оба тела снова соединяются в одно вращающееся аксиально-симметричное тело¹⁾.

Можно считать, что переходы $A \rightarrow B$ и $B \rightarrow C$ осуществляются какими-либо внутренними силами, о которых лишь предполагается, что они действуют только в течение

¹⁾ Так как в состоянии B система с необходимостью имеет момент, то в состояниях A и C тело должно вращаться.

некоторого достаточно короткого промежутка времени ($\ll T$), так что обусловленным ими вкладом в полное гравитационное поле можно пренебречь.

Если описанная материальная система является единственным источником рассматриваемого гравитационного поля, то мы должны пользоваться запаздывающим решением уравнений тяготения и исключить падающие волны. Таким образом, для всех моментов времени $t < 0$ мы получаем стационарное гравитационное поле. Для всех моментов



Ф и г. 2. Схематическое изображение поведения гравитационного поля системы, которая зависит от времени лишь в течение конечного промежутка времени, для очень большого положительного значения t .

времени $t \gg T$ гравитационное поле зависит от времени в области, имеющей форму шарового слоя толщиной cT , радиус которого, согласно результатам Лишнеровица [7], растет со скоростью света. Внутри и вне этого шарового слоя имеем стационарное гравитационное поле, причем вне — поле, порожаемое состоянием A , а внутри — состоянием S .

Полное поле для всех моментов времени можно также качественно описать, сделав с физической точки зрения разумное для макроскопической задачи предположение, что гравитационное поле всюду слабое и что, следовательно, возможно разложение

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}^1 + g_{\mu\nu}^2 + \dots \quad (6)$$

Согласно результатам Папанетру, можно утверждать, что этот ряд сходится, так как поле является зависящим от времени только в течение некоторого конечного интервала

времени. Введя надлежащие координатные условия, получаем для отдельных $g_{\mu\nu}$ соответствующие неоднородные волновые уравнения. Тогда описанное выше полное поле дается разложением (6), в которое подставлены соответствующие запаздывающие решения этих волновых уравнений.

На фиг. 2 схематически представлено поведение гравитационного поля для очень большого положительного значения t на большом расстоянии r от (расположенной в начале координат) системы, возбуждающей поле. Поле $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ убывает как r^{-1} и зависит от времени только в полосе шириной cT . Эта полоса движется от начала координат со скоростью света.

§ 3. Рассмотрим теперь энергетические соотношения в трех состояниях нашей системы.

Состояние A ($t < 0$). Поле стационарно и $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ убывает с ростом r как r^{-1} . Для такого поля t_{μ}^{ν} убывает как r^{-4} . Следовательно, условия теоремы Вейля выполнены, и, согласно (1) и (2), получаем

$$E_A = \int_{x^0=\text{const}} (\mathfrak{I}_A^0 + t_A^0) dV = \text{const}, \quad (7)$$

где величины E_A , \mathfrak{I}_A^0 , t_A^0 относятся к состоянию A . Так как поле не зависит от времени, по теореме Толмена [8] вместо (7) можно также написать

$$E_A = \int_{x^0=\text{const}} (\mathfrak{I}_A^0 - \mathfrak{I}_A^i) dV = \text{const}. \quad (8)$$

Состояние B ($0 \leq t \leq T$). Обе части тела, очевидно, образуют периодически зависящую от времени систему (период $2\pi/\omega$), эйнштейновский момент инерции которой

$$D^{ik} = \int \rho (3x^i x^k - r^2 \delta^{ik}) dV$$

отличен от нуля.

Состояние C ($t > T$). Теперь условия теоремы Вейля выполняются для всех конечных значений t , так как в области $r \rightarrow \infty$ находится поле, создаваемое состоянием A . Согласно этой теореме, полная энергия во все моменты

времени снова будет E_A , хотя теперь t_0^0 и зависит от времени в некоторой части области интегрирования.

Если, согласно Эйнштейну и Эддингтону, в состоянии B испускается гравитационное излучение и оно существует независимо от выбора системы координат, то энергия стационарного конечного состояния E_C должна быть меньше, чем полная энергия E_A , причем $E_A - E_C$ не зависит от выбранной системы координат.

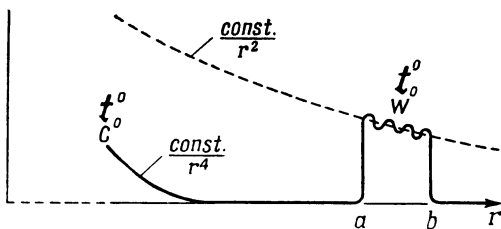
Чтобы проверить это, рассмотрим гравитационное поле при некотором очень большом положительном значении времени t . Следует различать три области (см. фиг. 2):

1. $r < a$, где $a \approx c(t - T)$. Поле обусловлено стационарным распределением материи в состоянии C : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^C$.

2. $a < r < b$, где $b \approx ct$. Здесь имеет место поле периодического по времени распределения материи в состоянии B : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^B$.

3. $r > b$. Поле в этой области создается стационарным распределением материи в состоянии A : $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^A$.

Радиусы обеих шаровых поверхностей, разделяющих эти три области, растут со скоростью света.



Фиг. 3. Схематическое изображение распределения плотности энергии t_0^0 системы, которая периодически зависит от времени в течение конечного промежутка времени, для очень большого положительного значения t .

Плотность энергии t_0^0 гравитационного поля убывает при больших значениях r в случае стационарного гравитационного поля как $1/r^4$, а при зависящем от времени гравитационном поле, согласно Эйнштейну [1], — лишь как $1/r^2$ (см. также [9, 10]). Тем самым для некоторого очень

большого значения времени t получается распределение плотности энергии t_0^0 , изображенное на фиг. 3. Полная энергия¹⁾ стационарного состояния C сосредоточена в основном внутри шара радиуса a . (Строго это имеет место для $t \rightarrow +\infty$.) Плотность энергии t_0^0 зависящего от времени гравитационного поля сосредоточена внутри шарового слоя конечной толщины cT , окружающего этот шар. Энергия во внешней области ($r > b$) для больших t мала и строго обращается в нуль при $t \rightarrow +\infty$ ²⁾.

Так как на бесконечности мы имеем снова поле $g_{\mu\nu}$, то, согласно теореме Вейля, можем интегрировать по всему пространству и вследствие (3) получаем

$$\int_{x^0 = \text{const} \gg cT} (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV = E_A. \quad (9)$$

Здесь $\mathfrak{E}_0^0 = \mathfrak{E}_C^0$ — плотность энергии стационарного распределения материи в состоянии C . Но, с другой стороны, согласно фиг. 3, для достаточно больших моментов времени t плотность t_0^0 сконцентрирована в двух отдельных областях, так что для (9) мы можем также написать

$$\int_C (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV + \int_W t_0^0 dV = E_A. \quad (10)$$

Здесь C означает соответствующую стационарному полю центральную область $r < a$ и W — волновую область $a < r < b$. Следовательно, здесь имеет место случай, представленный схематически на фиг. 1, с той лишь разницей, что теперь одна область окружает другую.

Первый член в левой части равенства (10) представляет собой полную энергию E_C стационарного состояния C

$$E_C = \int_C (\mathfrak{E}_0^0 + t_0^0) dV, \quad (11)$$

¹⁾ Величина \mathfrak{E}_C^0 отлична от нуля только в малой центральной области.

²⁾ А именно, из $t_0^0 \sim r^{-4}$ получается $\int_{r > ct} t_0^0 dV \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{t}$.

которую мы можем также, согласно теореме Толмена, представить в виде

$$E_C = \int_C (\mathfrak{E}_0^0 - \mathfrak{E}_i^i) dV.$$

Для вычисления последнего члена в (10) заметим, что при достаточно больших t полное поле в области W с необходимостью становится слабым. Поэтому достаточно произвести расчет в первом приближении. В этом приближении плотность энергии t_0^0 в области W дается формулами Эйнштейна [1], Фока [10] и Ландау и Лифшица [9]:

$$t_0^0 = \frac{k\omega^6}{144\pi c^6} \frac{1}{r^2} [(D_{ik}n^i n^k)^2 + 2D_{ik}D^{ik} - 4n^k n^l D_{ik}D_l^i], \quad (12)$$

где $n^i = x^i/r$, k — ньютоновская гравитационная постоянная. Далее, так как гравитационное излучение происходит в течение некоторого конечного промежутка времени, то мы сделаем лишь ошибку второго порядка, если допустим, что в этот промежуток времени угловая скорость ω и величина $(D_{ik}D^{ik})^{1/2}$ момента инерции постоянны. Тогда из (10), проводя интегрирование во втором члене с учетом (12), получаем

$$E_A = E_C + \frac{k\omega^6 T}{45c^5} D_{ik}D^{ik}, \quad (13)$$

где E_C дается формулой (11). Если мы положим

$$E_W = \frac{k\omega^6 T}{45c^5} D_{ik}D^{ik}, \quad (13a)$$

то баланс энергии имеет вид

$$E_A = E_C + E_W. \quad (14)$$

Определяемая формулой (13a) энергия E_W , на которую энергия стационарного состояния A отличается от энергии стационарного состояния C , согласуется при этом со значением энергии излучения, которая получается для нашей системы в состоянии B по формулам Эйнштейна [1], Паули [2] и Ландау и Лифшица [9]. Согласно этим последним формулам, поток излучения J через некоторую замкнутую сферическую поверхность очень большого

радиуса, окружающую систему, равен

$$J = \frac{k}{45c^5} \omega^6 D_{ik} D^{ik}. \quad (15)$$

При сделанном выше допущении о приближенном постоянстве ω и $(D_{ik} D^{ik})^{1/2}$ для энергии излучения, испущенного в течение времени T , из формулы (15) получается выражение (13а). Если $m = E_A/c^2$ — полная масса системы и R — радиус круговой траектории, по которой движутся части тела в состоянии B , то, согласно Ландау и Лифшицу,

$$D_{ik} D^{ik} = 36m^2 R^4.$$

Поэтому

$$E_W = \frac{4}{5} \frac{k}{c^5} \omega^6 m^2 R^4 T. \quad (16)$$

Эту энергию излучения E_W нельзя уничтожить никаким преобразованием координат, если не отказываться от необходимого, с физической точки зрения, требования, чтобы при этих преобразованиях как на бесконечности, так и в пространстве между центральной областью S и волновой зоной W величины $g_{\mu\nu}$ при $t \rightarrow +\infty$ сохраняли форму метрического тензора Минковского. Тот факт, что энергию невозможно устранить путем преобразования координат, непосредственно следует из обобщенной теоремы Вейля (5): E_S и E_W являются нулевыми компонентами 4-векторов, пространственные компоненты которых, из соображений симметрии, равны нулю.

Отсюда мы должны заключить, что выведенное Эйнштейном гравитационное излучение временно нестационарной системы представляет реальный физический процесс, который связан с переносом энергии.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Einstein A., Berlin. Ber., 1918, 154.
2. Pauli W., Relativitätstheorie, Enzykl. d. Math. Wiss., Bd. V, 2, 1921 (см. перевод: Паули В., Теория относительности, М.—Л., 1947).
3. Eddington A. S., Relativitäts theorie in mathematischer Behandlung, Berlin, 1925 (см. перевод: Эддингтон А. С., Теория относительности, М.—Л., 1934).

4. Папанетру А., Ann. d. Phys., (6) 20, 399 (1957); (7) 1, 186 (1958).
5. Weyl H., Raum — Zeit — Materie, Berlin, 1923, § 37, 38.
6. Einstein A., Berlin. Ber., 1918, 448.
7. Lichnerowicz A., Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme, Paris, 1955, гл. 2 и 3.
8. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934, § 92.
9. Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, М., 1948, § 101.
10. Фок В. А., Rev. Mod. Phys., 29, 325 (1957).

8. РАЗРЫВ ГРАВИТАЦИОННОГО ДЕЙСТВИЯ НА ФРОНТЕ ВОЛНЫ

Б. Финци

B. Finzi, *Atti della Accad. Naz. Lincei*, 6, 18—25 (1949)

Характеристические многообразия эйнштейновских гравитационных уравнений Леви-Чевиты в 1930 г. получил прямым методом [1]. Каждое такое многообразие представляет собой трехмерную гиперповерхность в непрерывном римановом пространстве-времени. В трехмерном пространстве ему соответствует фронт волны, распространяющийся по нормали к фронту со скоростью света. Таким образом, подтверждается следующее положение, вытекающее из теории относительности: гравитационное «действие» распространяется со скоростью света [2].

Исследование ранга матрицы, соответствующей системе десяти линейных уравнений с десятью неизвестными, носит у Леви-Чевиты громоздкий характер. При этом указанная система в явном виде не разрешима. Причиной всего этого, возможно, служит ошибка в вычислениях¹⁾.

Важность проблемы побудила нас вновь предпринять исследование вопроса о характеристических многообразиях уравнений Эйнштейна. Предложенный здесь метод значительно упрощает решение этой задачи. Получена система линейных уравнений, определяющая условия, которым должны удовлетворять гравитационные разрывы на общей гиперповерхности пространства-времени; затем указанная система может быть решена точно с помощью удобной комбинации переменных. Анализ полученного решения приводит непосредственно к уравнению для

¹⁾ В формуле (15) работы Леви-Чевиты [1, 2] множитель $\{p_i p_k - H g_{ik}\}$ должен быть заменен на $\{p_i p_k - 2H g_{ik}\}$.

характеристического многообразия гравитационных уравнений Эйнштейна. Из нашего рассмотрения естественно вытекает определение разрыва гравитационного поля на фронте волны.

1. Распространение гравитационного действия

Пусть x^0, x^1, x^2, x^3 — обобщенные координаты элементарного события, а c — скорость света в пустоте относительно наблюдателя, жестко связанного с фиксированной системой координат. Положим $x^0 = ct$ и будем интерпретировать x^0 как временную, а x^1, x^2, x^3 — как пространственные координаты. Пространство-время в гравитационных явлениях представляет собой непрерывное риманово четырехмерное пространство, определяемое следующей дифференциальной квадратичной формой, задающей метрику¹⁾:

$$ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q. \quad (1)$$

Систему координат всегда можно выбрать так, чтобы ds^2 имела следующий вид:

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2, \quad \text{где} \quad dl^2 = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dx^i dx^k. \quad (1')$$

Здесь V представляет собой скорость света, меняющуюся от точки к точке и от мгновения к мгновению, а $dl^2 > 0$ — квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками трехмерного пространства.

Рассмотрим в пространстве-времени гиперповерхности Σ , задаваемые уравнениями

$$\tau(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{const}, \quad (2)$$

которые делят пространство на две области, различным образом искривленные материей и наличием энергии. Гиперповерхностям Σ в четырехмерном пространстве-времени соответствует в трехмерном пространстве с метрикой

¹⁾ В этой и последующих формулах по контравариантным (индекс сверху) и ковариантным (индекс снизу) индексам подразумевается суммирование от 0 до 3.

$dl^2 = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dx^i dx^k$ движущаяся поверхность σ , задаваемая уравнением (2) и делящая в каждый момент времени пространство на две области, различным образом возмущенные гравитационным полем.

Если бы система дифференциальных уравнений, описывающая гравитационные явления, была «нормальной», то произвольно выбранная гиперповерхность Σ была бы гиперповерхностью, на которой разрыв поля был бы невозможен: условия разрыва могли бы выполняться лишь на некоторых особых гиперповерхностях, являющихся характеристическими многообразиями. Но, как мы увидим ниже, система дифференциальных уравнений Эйнштейна не является нормальной и поэтому разрыв гравитационного поля допустим также и на произвольных гиперповерхностях четырехмерного пространства-времени. Но среди них имеются особые гиперповерхности, которые допускают по сравнению с другими более сильный разрыв. Они называются характеристическими многообразиями и соответствуют в трехмерном пространстве распространяющимся фронтам гравитационных волн.

Скорость u , с которой фронт гравитационной волны движется в направлении нормали, имеет, согласно уравнению для характеристического многообразия, следующий вид ¹⁾:

$$u = \frac{\left| \frac{\partial \tau}{\partial x^i} \right|}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \tau_{|i} \tau_{|k}}} . \quad (3)$$

2. Гравитационные разрывы

Гравитационные уравнения, устанавливающие связь между фундаментальным метрическим тензором g_{pq} , который фигурирует в (1), и тензором T_{pq} , определяющим распределение материи в пространстве и времени, имеет

¹⁾ В этой и последующих формулах индексы тензорных производных отделяются вертикальной черточкой.

следующий вид ($p, q = 0, 1, 2, 3$):

$$G_{pq} - \frac{1}{2} G g_{pq} + \chi T_{pq} = 0, \quad (4)$$

где χ — универсальная гравитационная постоянная в теории Эйнштейна, G_{pq} — свернутый тензор Римана

$$G_{pq} = g^{lh} R_{plhq},$$

и $G = g^{pq} G_{pq}$ — скалярная кривизна. Тензоры g_{pq} , G_{pq} и T_{pq} симметричны и, следовательно, определяются в пространстве-времени десятью независимыми компонентами.

Умножая каждый член уравнения (4) на g^{pq} , суммируя по обоим индексам от 0 до 3 и учитывая, что скалярный инвариант тензора энергии-импульса связан с плотностью k соотношением $T = kc^2$, получаем

$$G = \chi c^2 k.$$

В силу этого, (4) принимает вид

$$G_{pq} - \frac{1}{2} \chi c^2 k g_{pq} + \chi T_{pq} = 0. \quad (5)$$

Так как компоненты R_{plhq} тензора Римана содержат компоненты метрического тензора и его производных первого и второго порядков, уравнение (5) представляет собой систему десяти уравнений второго порядка в частных производных для десяти компонент фундаментального метрического тензора.

Рассмотрим гиперповерхность Σ , на которой возможен разрыв поля. На ней могут быть непрерывными g_{pq} , его первые производные и, следовательно, символы Кристоффеля $\{p^h, l\}$; кроме того, остаются непрерывными плотность k и компоненты тензора энергии-импульса T_{pq} . Вторые же производные компонент фундаментального метрического тензора должны иметь разрыв и, следовательно, должны иметь разрыв компоненты R_{plhq} и компоненты свернутого тензора Римана G_{pq} .

Обозначая разрыв физических величин на гиперповерхности Σ символом Δ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta G_{pq} &= g^{lh} \Delta R_{plhq} = g^{lh} \left[\Delta \frac{\partial}{\partial x^q} \{ph, l\} - \Delta \frac{\partial}{\partial x^h} \{pq, l\} \right] = \\ &= \frac{g^{lh}}{2} \left[\Delta \frac{\partial^2 g_{pl}}{\partial x^h \partial x^q} + \Delta \frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p \partial x^q} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l \partial x^q} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta \frac{\partial^2 g_{pl}}{\partial x^q \partial x^h} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p \partial x^h} + \Delta \frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l \partial x^h} \right] = \\ &= \frac{g^{lh}}{2} \left[\Delta \frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l \partial x^h} + \Delta \frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p \partial x^q} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l \partial x^q} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p \partial x^h} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая (5), имеем на Σ

$$\Delta G_{pq} = 0.$$

Следовательно,

$$g^{lh} \left[\Delta \frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l \partial x^h} + \Delta \frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p \partial x^q} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l \partial x^q} - \Delta \frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p \partial x^h} \right] = 0. \quad (6)$$

Из простых геометрических соображений следует, что для величин разрыва на Σ вторых производных от компонент метрического тензора должно выполняться следующее соотношение:

$$\Delta \frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l \partial x^h} = \lambda_{pq} \tau_{|l} \tau_{|h} \quad (p, q, l, h = 0, 1, 2, 3), \quad (7)$$

где $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ — десять произвольных множителей¹⁾, определяющих разрыв на Σ .

Подставляя (7) в (6), видим, что λ_{pq} должны удовлетворять десяти однородным линейным уравнениям

$$\begin{aligned} g^{lh} \tau_{|l} \tau_{|h} \lambda_{pq} + \tau_{|p} \tau_{|q} g^{lh} \lambda_{lh} - \tau_{|q} \tau^{lh} \lambda_{ph} - \tau_{|p} \tau^{lh} \lambda_{qh} = 0, \\ (p, q = 0, 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (8)$$

которые можно также переписать в виде

$$\lambda_{rs} \{ \tau_{|l} \tau^{ll} g_p^r g_q^s + \tau_{|p} \tau_{|q} g^{rs} - \tau_{|q} \tau^{ls} g_p^r - \tau_{|p} \tau^{ls} g_q^r \} = 2\Delta G_{pq}.$$

Это показывает, что десять множителей λ_{rs} образуют ковариантный симметричный тензор, свертывание которого

¹⁾ См. [5], стр. 56—60.

с тензором 4-го ранга, стоящим в скобках, дает симметричный тензор с компонентами $2\Delta G_{pq}$. Следовательно, система уравнений (8) имеет тензорный характер.

3. Решение системы уравнений (8) в общем случае

Будем решать систему линейных однородных уравнений (8) относительно десяти компонент симметричного тензора λ_{pq} , которые, согласно (7), определяют разрыв G_{pq} на Σ .

Преобразуем (8) к более простому виду путем введения более удобных переменных. Тогда для получения требуемого решения системы (8) достаточно перейти к первоначальным переменным по обычным формулам тензорного исчисления.

Перейдем от переменных x^0, x^1, x^2, x^3 к новым переменным

$$\bar{x}^0 = \tau(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad \bar{x}^i = x^i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (9)$$

В новых переменных имеем

$$\bar{\tau}_{|0} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}^0} = 1, \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{|i} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \bar{x}^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим инвариант

$$H = \frac{1}{2} g^{lh} \tau_{|l} \tau_{|h}. \quad (11)$$

Учитывая соотношения (9), находим

$$H = \bar{H} = \frac{1}{2} \bar{g}^{lh} \bar{\tau}_{|l} \bar{\tau}_{|h} = \frac{1}{2} \bar{g}^{00}. \quad (12)$$

В силу (10) и (12), система (8), благодаря своему тензорному характеру, примет вид

$$\begin{aligned} \bar{g}^{00} \bar{\lambda}_{00} + \bar{g}^{lh} \lambda_{|h} - 2\bar{g}^{h0} \bar{\lambda}_{0h} &= 0, \\ \bar{g}^{00} \bar{\lambda}_{0i} - \bar{g}^{h0} \bar{\lambda}_{ih} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \bar{g}^{00} \bar{\lambda}_{ik} &= 0 \quad (i, k = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

и новыми неизвестными будут: $\bar{\lambda}_{00}$, $\bar{\lambda}_{0i} = \bar{\lambda}_{i0}$ ($i = 1, 2, 3$), $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Замечая, что

$$\bar{g}^{lh}\bar{\lambda}_{lh} = \bar{g}^{00}\bar{\lambda}_{00} + 2 \sum_1^3 \bar{g}^{i0}\bar{\lambda}_{i0} + \sum_{i,k=1}^3 \bar{g}^{ik}\bar{\lambda}_{ik},$$

$$\bar{g}^{h0}\bar{\lambda}_{0h} = \bar{g}^{00}\bar{\lambda}_{00} + \sum_1^3 \bar{g}^{i0}\bar{\lambda}_{i0},$$

$$\bar{g}^{h0}\bar{g}_{ih} = \bar{g}^{00}\bar{\lambda}_{i0} + \sum_1^3 \bar{g}^{k0}\bar{\lambda}_{ik},$$

получаем

$$\sum_{i,k=1}^3 \bar{g}^{ik}\bar{\lambda}_{ik} = 0,$$

$$\sum_1^3 \bar{g}^{0k}\bar{\lambda}_{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (13)$$

$$\bar{g}^{00}\bar{\lambda}_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Как легко видеть, система уравнений (13) содержит всего шесть неизвестных $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

В общем случае, когда инвариант H , заданный с помощью (11), отличен от нуля, то, согласно (12), $\bar{g}^{00} \neq 0$ и система (13) сводится к следующим шести независимым уравнениям:

$$\bar{\lambda}_{ik} = 0 \quad (\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}; \quad i, k = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Таким образом, общее решение системы (13) допускает произвольные значения четырех компонент $\bar{\lambda}_{00}$, $\bar{\lambda}_{01}$, $\bar{\lambda}_{02}$, $\bar{\lambda}_{03}$ и нулевые значения шести компонент $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Для нахождения λ_{pq} ($\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$; $p, q = 0, 1, 2, 3$), удовлетворяющих исходной системе (8) в общем случае, когда $H \neq 0$ достаточно перейти к первоначальным переменным x^0, x^1, x^2, x^3 по следующим формулам:

$$\lambda_{pq} = \bar{\lambda}_{lh} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \quad (p, q = 1, 2, 3). \quad (15)$$

Следовательно, учитывая (9) и (14), имеем

$$\begin{aligned}\lambda_{00} &= \bar{\lambda}_{00}\tau_{10}\tau_{10}, \\ \lambda_{0i} &= \bar{\lambda}_{00}\tau_{10}\tau_{1i} + 2\bar{\lambda}_{0i}\tau_{10} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \lambda_{ik} &= \bar{\lambda}_{00}\tau_{1i}\tau_{1k} + \bar{\lambda}_{0k}\tau_{1i} + \bar{\lambda}_{i0}\tau_{1k}.\end{aligned}\quad (15')$$

Формулы (15'), в которых $\bar{\lambda}_{00}$, $\bar{\lambda}_{01}$, $\bar{\lambda}_{02}$, $\bar{\lambda}_{03}$ выбраны произвольно, представляют собой решение однородной линейной системы относительно десяти неизвестных $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ ($p, q = 0, 1, 2, 3$) в случае, когда $H \neq 0$. Эти уравнения показывают, что в общем случае, когда $H \neq 0$, ранг матрицы системы (8) равен $K = 6$. Таким образом, $K < 10$ и это означает, что система дифференциальных уравнений Эйнштейна (4) или (5) является недоопределенной.

4. Уравнение характеристического многообразия

Предположим теперь, что инвариант H , заданный формулой (11), равен нулю:

$$H = 0.$$

В этом случае, как видно из (12), обращается в нуль также и \bar{g}^{00} , и десять линейных однородных уравнений (13) сводятся к четырем следующим:

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^3 \bar{g}^{ik}\bar{\lambda}_{ik} &= 0, \\ \sum_1^3 \bar{g}^{0k}\bar{\lambda}_{ik} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3),\end{aligned}\quad (16)$$

которые включают всего лишь шесть неизвестных величин $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ ($i, k = 1, 2, 3$).

Ранг матрицы этой системы $K = 4$. Ранг матрицы исходной системы (8), когда $H = 0$, также равен 4.

Таким образом, гиперповерхности Σ пространства-времени, описываемые уравнением (2), для которых $H = 0$, понижают ранг матрицы системы (8), задающей величины, которые определяют разрыв ΔG_{pq} . Они являются характеристическим многообразием (в смысле Адамара) недоопределенной системы дифференциальных уравнений, состоящих из уравнений Эйнштейна (4) или (5) [1, 2].

Дифференциальное уравнение для характеристического многообразия получается, если записать условие $H = 0$, беря для инварианта H его выражение (11). Таким образом, имеем

$$g^{lh}\tau_{|l}\tau_{|h} = 0. \quad (17)$$

Это есть уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция $\tau(x^0, x^1, x^2, x^3)$.

При учете (1') уравнение (17) запишется в виде

$$\frac{1}{V^2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 - \sum_{i,k=1}^3 a^{ik} \tau_{|i} \tau_{|k} = 0. \quad (17')$$

Как показала М. Пастори [6], из этого уравнения при учете (3) следует равенство

$$u = V, \quad (18)$$

подтверждающее, что гравитационное действие распространяется со скоростью света.

5. Разрыв на фронте волны

Величину разрыва G_{pq} на фронте волны, следуя которому распространяются гравитационные действия, можно получить, если определить сначала функцию τ в (17) и (17') и затем записать соотношение (7). В этом последнем вместо множителей $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ подставляются их выражения из (15). При $H = 0$ равенства (14) уже не имеют места и из (15) и (9) не вытекает формула (15'), которая справедлива при $H \neq 0$ и, следовательно, $\bar{\lambda}_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3$); тогда имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= \bar{\lambda}_{00} \tau_{|0} \tau_{|0}, \\ \lambda_{0i} &= \bar{\lambda}_{00} \tau_{|0} \tau_{|i} + 2\bar{\lambda}_{0i} \tau_{|0} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \lambda_{ik} &= \bar{\lambda}_{00} \tau_{|i} \tau_{|k} + \bar{\lambda}_{0k} \tau_{|i} + \bar{\lambda}_{i0} \tau_{|k} + \bar{\lambda}_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (19)$$

В этих формулах коэффициенты $\bar{\lambda}_{pq}$ ($p, q = 0, 1, 2, 3$) должны удовлетворять системе уравнений (16), к которой сводится система (13) при $H = 0$. Это значит, что $\bar{\lambda}_{00}$, $\bar{\lambda}_{01}$, $\bar{\lambda}_{02}$, $\bar{\lambda}_{03}$ произвольны, тогда как остальные шесть мно-

жителей $\bar{\lambda}_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3$) удовлетворяют четырем линейным уравнениям, которые образуют «нормальную» систему (16).

Коэффициенты этой системы известны, так как

$$\bar{g}^{ik} = g^{pq} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} = g^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$\bar{g}^{0k} = g^{pq} \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^p} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} = g^{0k} \tau_{10} + \sum_1^3 g^{ik} \tau_{1i} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Подставляя $\tau^k = \sum_1^3 a^{ik} \tau_{1i}$, с учетом (1') получаем

$$\bar{g}^{ik} = -a^{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad \bar{g}^{0k} = -\tau^k \quad (k = 1, 2, 3).$$

Для разрешения системы (16), которую перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^3 a^{ik} \bar{\lambda}_{ik} &= 0, \\ \sum_1^3 \tau^k \bar{\lambda}_{ik} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (20)$$

достаточно произвольным образом задать две из шести неизвестных $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ и найти с помощью правила Крамера значения остальных четырех компонент $\bar{\lambda}_{ik}$ из системы (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Levi-Civita T., Rend. Lincei, 11, 3 (1930).
2. Levi-Civita T., Rend. Lincei, 11, 113 (1930).
3. Einstein A., Sitzb. d. preuss. Akad. d. Wiss., 1916, S. 688.
4. Einstein A., Sitzb. d. preuss. Akad. d. Wiss., 1918, S. 154.
5. Levi-Civita T., Caratteristiche dei sistemi differenziale e propagazione ondosa, Bologna, 1931, p. 33, 34.
6. Pastori M., Rend. Ist. Lombardo, LXXII, 1939.

9. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ¹⁾

Ф. Пирани

F. Pirani, Phys. Rev., 105, 1089—1099 (1957)

В настоящей статье дано инвариантное определение гравитационного излучения в рамках общей теории относительности. Определение получено в предположениях: а) что гравитационное излучение характеризуется тензором Римана и б) что оно распространяется со скоростью света. Поэтому фронт гравитационной волны должен возникать как изотропная гиперповерхность, на которой имеет место разрыв тензора Римана. Возможный вид этого разрыва найден здесь из условий непрерывности Лишнеровица.

С помощью собственных векторов тензора Римана определено понятие «наблюдателя», следующего за гравитационным полем. Показано, что 4-скорость такого наблюдателя временно-подобна для одного из трех, полученных Петровым, канонических типов тензора Римана и изотропна для двух других типов. Первый тип отождествлен с отсутствием, а два других — с наличием излучения. Это утверждение является определением. Показано, что различие между нерадиационным и одним из радиационных типов может быть связано с возможными разрывами тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности. Это доказывает непротиворечивость понятия фронта волны и понятия следования за полем.

Определена ковариантная аппроксимация канонического псевдотензора энергии-импульса с использованием нормальных координат, которым дана физическая интерпретация. Показано, что, когда имеет место гравитационное излучение, приближенный поток гравитационной энергии не может быть обращен в нуль с помощью локальных преобразований Лоренца, что говорит в пользу приведенного выше определения излучения.

Доказано, что гравитационное излучение не может иметь места в области свободного пространства-времени со статической метрикой.

§ 1. Введение

Исследование гравитационного излучения в общей теории относительности затруднено вследствие отсутствия

¹⁾ В перевод настоящей статьи включены замечания, любезно присланные автором.—Прим. ред.

инвариантного определения этого понятия. Вопрос о наличии гравитационного излучения не должен быть связан с математической точки зрения с выбором системы координат, а с физической точки зрения—с характером движения наблюдателя. В ковариантной нелинейной теории определение излучения (если последнее имеет реальный смысл) не должно зависеть от предположения о слабости поля или от специальных координатных условий. В настоящей статье предлагается инвариантное определение гравитационного излучения.

Это определение дано с помощью тензора Римана. Действительно, так как именно тензор Римана описывает прежде всего истинное гравитационное поле, то:

А. Тензор Римана характеризует наличие гравитационного излучения.

Физически это основано на том, что тензор Римана описывает изменение гравитационного поля от точки к точке в пространстве-времени. В соответствии с принципом эквивалентности только изменения поля (а не само поле) могут производить некоторые реальные физические эффекты. Возникает вопрос: какие изменения поля могли бы быть классифицированы как гравитационное излучение?

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо прежде всего решить, какие из свойств излучения, известные главным образом из электродинамики, можно приписать гравитации. Для формулировки предлагаемого здесь определения мы предположим, что одно из существенных свойств гравитационного поля заключается в следующем:

Б. В пустом пространстве-времени гравитационное излучение распространяется со скоростью света.

Предположения А и Б полностью характеризуют гравитационное излучение. В последующих параграфах излагаются два основных аргумента в пользу предлагаемого определения. Эти аргументы связаны соответственно со следующими следствиями, вытекающими из А и Б.

В. Фронт гравитационной волны проявляется как разрыв тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности.

Г. Движение наблюдателя, следующего за гравитационным полем, определяется с помощью тензора Римана. Чтобы следовать за полем, при наличии гра-

витационного излучения такой наблюдатель должен был бы двигаться со скоростью света.

Ниже эти идеи будут развиты более детально. В связи с предположением А можно исследовать изменения гравитационного поля, записывая непосредственно уравнение геодезической. Это уравнение описывает изменение поля при переходе от данной точки пространства-времени к соседней с помощью тензора Римана [1, 11]. Физические эффекты, возникающие в связи с этим, более подробно рассмотрены в § 2.

Допущение Б подтверждается как самыми общими рассуждениями, так и некоторыми специальными (например, результатом Лишнеровица [2], показывающим, что характеристическими поверхностями уравнений Эйнштейна являются изотопные гиперповерхности). Лишнеровиц исходит из условий непрерывности, достаточных для того, чтобы убедиться в физической однозначности решений уравнений для пустого пространства-времени.

В § 2 условия Лишнеровица будут использованы для доказательства допустимости разрыва тензора Римана на изотропной гиперповерхности. В соответствии с высказанным выше утверждением В мы должны ожидать наличие такого разрыва всякий раз, как только включается или выключается источник гравитационного излучения.

Концепция наблюдателя, следующего за полем, введенная в Г, известна из обычной электродинамики Максвелла — Лоренца и без труда обобщается в теории гравитационного поля. В теории Максвелла — Лоренца наблюдателем, следующим за полем, называется наблюдатель, движущийся таким образом, что в системе координат, в которой он покоится, вектор Пойнтинга обращается в нуль. Следовательно, в этом случае не наблюдается потока энергии. Если это понятие сформулировать ковариантно (пока в теории Максвелла — Лоренца) с помощью тензора энергии-импульса поля, то получается, что наблюдатель всегда может следовать за полем с соответствующей 4-скоростью, за исключением случая изотропного поля¹⁾, когда для следования за полем он должен двигаться со

1) Здесь под изотропным полем понимается электромагнитное поле в свободном пространстве.— *Прим. ред.*

скоростью света, чтобы сделать поток энергии равным нулю. Это является следствием того, что для изотропного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны друг другу и равны по абсолютной величине в любой лоренцевской системе отчета. Плоские и сферические волны являются простыми примерами изотропных полей¹⁾). Согласно принятой здесь точке зрения, только изотропные поля будут считаться полями излучения.

Сформулированная таким образом концепция следования за полем не может быть непосредственно ковариантно обобщена на случай гравитационного поля, так как в силу принципа эквивалентности не существует ковариантного тензора энергии гравитационного поля. Обобщение будет достигнуто с помощью анализа геометрических свойств этих двух полей. Будет показано, что в случае как электромагнитного, так и гравитационного поля могут быть определены собственные векторы поля. Оказывается, что в электромагнитном случае 4-скорость наблюдателя, следующего за полем, представляет собой некоторый временно-подобный собственный вектор. Когда же поле изотропно, этот временно-подобный собственный вектор вырождается в изотропный конус [3], что и характеризует наличие излучения.

Аналогичным образом, временно-подобный собственный вектор в общем случае может быть определен с помощью тензора Римана и для гравитационного поля в свободном пространстве-времени. Этот вектор интерпретируется как 4-скорость наблюдателя, следующего за полем. Для некоторых полей этот вектор вырождается в изотропный конус, и, как и для случая электромагнитного поля, это отождествляется с наличием излучения.

Этим временно-подобным собственным векторам гравитационного и электромагнитного полей можно придать определенный физический смысл. Например, в случае неизотропного электромагнитного поля 4-скорость следования за полем дает для данного поля экстремальную величину силы Лоренца. Аналогично, физические (более сложные) эффекты гравитационного поля также достигают экстремального значения для наблюдателя, следующего за полем. Это будет подробно обсуждено в § 4.

¹⁾ Подробное рассмотрение геометрических и алгебраических свойств электромагнитного поля см. в книге Синга [3].

Собственные векторы гравитационного поля определены в § 3 с помощью классификации Петрова [4] по каноническим типам тензора Римана для свободного пространства-времени. Эта классификация, приводящая к двум типам гравитационных полей с наличием излучения и одному — с отсутствием излучения, основана на изящном геометро-алгебраическом формализме, разработанном Рузе [5] и другими. Будет показано, что разница между типами с излучением и без излучения может быть получена с помощью подходящей ориентации осей координат в соответствии с концепцией разрыва тензора Римана на фронте волны, допускаемого условиями Лишнеровица. Это подтверждает совместимость понятия (§ 2) фронта гравитационной волны с утверждением (§ 3), что наблюдатель, следующий за гравитационным излучением, должен двигаться со скоростью света.

Такой геометрический подход здесь необходим, поскольку в теории Эйнштейна, как и следовало ожидать, в силу принципа эквивалентности не существует ковариантный тензор энергии-импульса гравитационного поля. В лоренц-инвариантных теориях тензор энергии-импульса зависит от напряженностей поля, но эти последние локально не имеют абсолютного смысла для гравитационного поля. Канонический псевдотензор энергии-импульса¹⁾ t_{μ}^{ν} является квадратичной функцией напряженностей поля (символов Кристоффеля) и удовлетворяет закону сохранения. Но он нековариантен и фактически может быть полностью обращен в нуль вдоль произвольной незамкнутой кривой в пространстве-времени. Тем не менее t_{μ}^{ν} использовался различными авторами [6, 7] для определения гравитационного излучения, хотя при этом всегда делалось предположение о слабости поля и принимались физически неясные координатные условия.

Можно было бы построить ковариантные и, следовательно, имеющие физический смысл выражения из t_{μ}^{ν} для больших областей пространства-времени так, чтобы в них входили только изменения гравитационного поля (но не само поле). Однако такая попытка нам не представляется успешной. Трудности могли бы быть разрешены, если бы

¹⁾ Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3.

можно было переформулировать приближенный метод, применяющийся в случае слабых полей, ковариантным образом, так чтобы сделать его пригодным для расширенной области пространства-времени.

В качестве альтернативы такому подходу в § 4 развивается локальный ковариантный приближенный метод, пригодный для поля любой интенсивности, но лишь для малых областей пространства-времени. Это сделано с помощью введения нормальных координат [8, 9], которым дана физическая интерпретация. Псевдотензор энергии-импульса t_{μ}^{ν} обращается в нуль в начале нормальной системы координат и отличен от нуля в его конечной окрестности. Он может быть разложен в ряд с тензорными коэффициентами, являющимися функциями тензора Римана и его ковариантных производных. Усреднением по малой двумерной области можно построить ковариантное приближение псевдотензора энергии импульса \bar{t}_{μ}^{ν} в области. Найдено, что, когда гравитационное излучение отсутствует, существуют наблюдатели (с соответствующими 4-скоростями), относительно которых не существует потока энергии, тогда как при наличии излучения невозможно выбрать таких наблюдателей. Это в точности соответствует случаю электромагнитного поля и подтверждает определение гравитационного излучения.

В § 5 обсуждаются различные примеры; в § 6 отмечаются некоторые трудности настоящего рассмотрения.

§ 2. Природа фронта гравитационной волны

Перейдем теперь к исследованию природы фронта гравитационной волны путем нахождения допустимых разрывов тензора Римана на изотропной трехмерной гиперповерхности. Вычисления основаны на условиях непрерывности Лишнеровица [2] (для метрического тензора и его производных), достаточных для обеспечения физической однозначности уравнений Эйнштейна в вакууме¹⁾:

¹⁾ Космологический член в данной статье не рассматривается. Он мог бы быть учтен без каких-либо трудностей; однако его учет привел бы к некоторому усложнению изложения.

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1)$$

Эти условия по существу совпадают с условиями, найденными О'Брайеном и Сингом [10] из предположения о конечности некоторых величин на границе между двумя областями непрерывной среды.

Лишнеровиц постулирует, что пространство-время может быть разделено на частично перекрывающиеся области, в каждой из которых имеет место такая система координат, что: 1) метрический тензор непрерывен; 2) первые частные производные $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\rho (\equiv g_{\mu\nu, \rho})$ непрерывны; 3) вторые и третьи производные кусочно непрерывны. Предполагается, что пространство-время представляет собой риманово многообразие с определенными свойствами дифференцируемости, не затрудняющими нашу аргументацию.

В рассмотрении Лишнеровица координатная система в одной из этих областей выбирается так, чтобы поверхность $S: x^0=0$ являлась поверхностью разрыва гравитационного поля. Тогда, согласно нашим предположениям, координатная система может быть выбрана так, чтобы все $g_{\mu\nu}$, все $g_{\mu\nu, \rho}$ и все $g_{\mu\nu, \sigma\sigma}$, за возможным исключением $g_{\mu\nu, 00}$, были непрерывны на поверхности S . Теперь ковариантные компоненты тензора Римана имеют вид ¹⁾

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = [\sigma\nu, \rho]_{,\mu} - [\sigma\mu, \rho]_{,\nu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\pi} [\rho\nu, \pi] - \Gamma_{\sigma\nu}^{\pi} [\rho\mu, \pi]. \quad (2.2)$$

Если выписать полностью первые два члена, то легко видеть, что только те компоненты $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ допускают разрыв на S , которые имеют в каждой из пар индексов $\rho\sigma, \mu\nu$ по одному индексу 0. Этот вывод совпадает с результатом О'Брайена и Синга [10].

Этим результатам можно придать ковариантную форму с помощью перехода к локальной галилеевой системе координат и введения четырехмерного репера (ортонормированной системы координат, тетрапода) ортогональных единичных векторов, направленных вдоль осей локальной галилеевой системы. Тензорные уравнения можно тогда переписать в скалярном виде с помощью свертывания

¹⁾ Здесь используются обозначения $[\sigma\nu, \rho] \equiv \frac{1}{2} (g_{\nu\sigma, \rho} + g_{\rho\sigma, \nu} - g_{\sigma\nu, \rho})$ и $\Gamma_{\sigma\nu}^{\pi} \equiv g^{\pi\rho} [\sigma\nu, \rho]$ для символов Кристоффеля первого и второго родов соответственно.

с векторами 4-репера; специальные же системы координат можно теперь не рассматривать.

С физической точки зрения временно-подобный вектор 4-репера имеет смысл 4-скорости наблюдателя, производящего измерения в заданной точке с помощью пространственных осей, совпадающих по направлению с тремя пространственно-подобными векторами 4-репера. Скаляры, образованные путем свертывания какого-либо тензора с векторами 4-репера, представляют собой физические компоненты этого тензора, измеренные этим наблюдателем [11].

Для нашей цели трехмерная гиперповерхность S должна быть изотропной. Несколько неудобно иметь изотропной какую-либо из координат x^μ . Поэтому запишем уравнение для S в виде $\xi = 0$ в плоскости $x^0 = 0$. С помощью линейных преобразований можно в каждой точке P гиперповерхности S ввести локальную галилееву систему координат, так чтобы $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, где ¹⁾

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

и в конечной окрестности P можно положить $\xi = 2^{-1/2}(x^0 - x^1)$. Если, кроме того, положить в этой окрестности $\zeta = 2^{-1/2}(x^0 + x^1)$, то в точке P

$$ds^2 = 2d\xi d\zeta - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Тогда, если обозначить через Δ величину скачка на поверхности S , то из условий Лишнеровица каждой точке P получим

$$\begin{aligned} \Delta(g_{\mu\nu}) &= 0, \\ \Delta(g_{\mu\nu, \sigma}) &= \Delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \xi}\right) = \Delta\left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \zeta}\right) = 0, \\ \Delta\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \xi \partial \zeta}\right) &= \Delta\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \xi^2}\right) = 0, \end{aligned}$$

но

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial \xi^2}\right) = a_{\mu\nu},$$

где $a_{\mu\nu}$ — некоторые числа. Возможные разрывы $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ теперь легко найти из (2.2). Непосредственные расчеты показы-

¹⁾ Здесь использованы единицы, в которых $c=1$.

вают, что из всех $a_{\mu\nu}$ вклад в тензор Римана в пустом пространстве времени дают лишь

$$-a_{22} = a_{33} = \sigma \quad \text{и} \quad a_{23} = \varphi, \quad (2.3)$$

где σ и φ — произвольны. Это в точности соответствует двум типам «поперечно-поперечных» волн, полученных в линейном приближении теории гравитационного излучения [12].

Все члены в φ можно обратить в нуль поворотом координатных осей на угол $\arctg(\varphi/\sigma)$ в плоскости x_2x_3 .

Получающийся разрыв тензора Римана запишется теперь в ковариантном виде с помощью введения 4-репера единичных векторов¹⁾ λ_α^μ , которые в точке P направлены вдоль координатных осей, так что в точке P $\lambda_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu$. В силу ортонормированности всюду имеет место равенство

$$g_{\mu\nu} \lambda_\alpha^\mu \lambda_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta}.$$

Теперь введем

$$\lambda^{\alpha\mu} \equiv \eta^{\alpha\beta} \lambda_\beta^\mu,$$

так что $\lambda^{0\mu} = \lambda_0^\mu$, $\lambda^{\alpha\mu} = -\lambda_\alpha^\mu$. Тогда нетрудно доказать, что

$$\eta_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha\mu} \lambda^{\beta\nu} = \lambda^{\alpha\mu} \lambda_\alpha^\nu = g^{\mu\nu}, \quad \lambda_\mu^\alpha \lambda_\alpha^\nu = \delta_\mu^\nu$$

и т. д. Для краткости обозначим

$$\lambda_0^\mu = \lambda^{0\mu} \equiv \lambda^\mu.$$

Эти обозначения несколько отличаются от обозначений Эйзенхарта [13], который использует $\eta^{\alpha\beta}$ вместо $\eta_{\alpha\beta}$.

Для обсуждения тензора Римана и других бивектор-тензоров удобно перейти к простому шестимерному формализму. Вводится 6-мерное псевдоэвклидово пространство (пространство Клейна). Векторы в пространстве Клейна являются бивекторами (кососимметрическими тензорами) в локальном касательном пространстве Минковского, опре-

¹⁾ Здесь μ — векторный индекс, а α служит для нумерации 4-векторов. Греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \varepsilon$ и латинские — a, b, c, d, e будут употребляться только для нумерации. При этом они пробегают те же значения (греческие — 0, 1, 2, 3; латинские — 1, 2, 3) и подчиняются тем же правилам суммирования, что и обычные тензорные индексы $\mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \dots$ и m, n, p, r, \dots . В дальнейшем, если вместо индекса пишется его значение, то при этом понимается индекс нумерации (а не тензорный). При таких обозначениях отпадает необходимость использования индексов в скобках.

деленном с помощью репера λ_α^μ . Правила перехода к 6-мерному формализму заключаются в следующем.

Если $H_{\alpha\beta}$ — физические компоненты некоторого кососимметрического тензора $H_{\mu\nu}$ относительно данного репера в заданной пространственно-временной точке P , то соответствующий 6-вектор в точке P в шестимерном пространстве ¹⁾ H_A получается с помощью замены пар индексов $\alpha\beta$ по схеме:

$$\begin{array}{l} \alpha\beta: \quad 23 \ 31 \ 12 \ 10 \ 20 \ 30, \\ A: \quad 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6. \end{array} \quad (2.4)$$

Аналогично, любой бивектор-тензор соответствует симметричному тензору в шестимерном пространстве. В частности, физические компоненты $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ тензора Римана переходят в компоненты симметричного шестимерного тензора R_{AB} , если каждую пару фиксированных индексов $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ заменить согласно схеме (2.4).

Чтобы поднятию и опусканию индексов в шестимерном пространстве соответствовали поднятие и опускание пар индексов физических компонент в четырехмерном пространстве, метрический тензор шестимерного пространства должен быть выбран в виде

$$\eta_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, -1, -1, -1), \quad (2.5)$$

что соответствует бивектору-тензору $\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta} - \eta_{\alpha\delta}\eta_{\beta\gamma}$. Разрыв тензора Римана в произвольной точке на изотропной гиперповерхности S в свободном пространстве-времени может быть вычислен непосредственно из (2.2) и (2.3) и записан с помощью R_{AB} . Оказывается, что имеет место равенство ²⁾

$$\Delta R_{AB} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sigma & -\varphi & \cdot & -\varphi & \sigma \\ \cdot & -\varphi & \sigma & \cdot & \sigma & \varphi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\varphi & \sigma & \cdot & \sigma & \varphi \\ \cdot & \sigma & \varphi & \cdot & \varphi & -\sigma \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

¹⁾ Значки $A, B, C \dots$ принимают значения $1, 2, 3, \dots, 6$.

²⁾ Изящное ковариантное определение было дано ранее Траутманом [14]. Эти результаты первоначально были получены Штельмахером [15].

Здесь σ и φ — произвольные числа. Однако элементы, содержащие φ , можно, как установлено выше, обратить в нуль с помощью вращения. В § 3 будет показано, что различие между радиационным и нерадиационным каноническими типами тензора Римана (отнесенным к соответствующим образом ориентированным 4-реперам) определяется именно размещением элементов σ в (2.6). Это подтверждает нашу интерпретацию формулы (2.6), согласно которой последняя определяет разрыв R_{AB} на фронте гравитационной волны¹⁾.

Физические эффекты, обусловленные разрывами типа (2.6), могут быть изучены с помощью уравнения геодезического отклонения [17]

$$\frac{\delta^2 \eta^\mu}{\delta \tau^2} + R^\mu{}_{\nu\sigma\tau} \lambda^\nu \eta^\sigma \lambda^\tau = 0, \quad (2.7)$$

описывающего относительное ускорение двух соседних (сферически-симметричных) пробных частиц [1]. В уравнении (2.7) $\lambda^\mu = dx^\mu/d\tau$ — единичный вектор, касательный к геодезической мировой линии \mathcal{C} одной из частиц, τ — собственное время вдоль \mathcal{C} , η^μ — вектор смещения, ортогонального по отношению к мировой линии другой частицы. Для получения непосредственной физической интерпретации формулу (2.7) нужно отнести к реперу, состоящему из векторов λ^μ (где λ^0 — 4-скорость частицы с мировой линией \mathcal{C} , а λ_a^μ — три взаимно ортогональных пространственно-подобных вектора, перемещающихся вдоль \mathcal{C}). Тогда (2.7) принимает вид

$$\frac{d^2 X^a}{d\tau^2} + K^a{}_b(\tau) X^b = 0, \quad (2.8)$$

где $X^a = \eta^\mu \lambda_\mu^a$ — физические компоненты вектора смещения ($X^0 = 0$), а

$$K^a{}_b = R^a{}_{0b0} \quad (2.9)$$

являются физическими компонентами тензора Римана. В уравнении Ньютона, соответствующем (2.8), X^a — коор-

¹⁾ Свойства гиперповерхности разрыва ранее обсуждались Траутманом [16].

динаты одной частицы по отношению к другой, а $K^a_b = \partial^2 V / \partial x^a \partial x^b$, где V — обычный гравитационный потенциал Ньютона. Таким образом, $-K^a_b X^b$ должно быть отождествлено с относительным ускорением двух частиц (с относительными координатами X^b), возникающим вследствие разницы гравитационного поля в точках местонахождения частиц.

Следовательно, как только фронт гравитационной волны, описываемый (2.6), проходит пару пробных частиц, на фронте волны возникает разрыв

$$\Delta K^a_b = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sigma & \varphi \\ \cdot & \varphi & \sigma \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Реперы, к которым относятся (2.6) и (2.8), выбраны таким образом, чтобы они совпадали в той точке пространства-времени, где фронт волны проходит частицы. Можно заметить, что разрыв для относительного ускорения зависит от относительного положения частиц. В частности, разрыв не имеет места, если две частицы расположены на одномерной линии в направлении распространения фронта волны.

Этот результат инвариантным образом отображает поперечный характер гравитационного излучения. Две частицы, лежащие в плоскости $x_2 x_3$ (которая перпендикулярна направлению распространения излучения) будут испытывать скачкообразное изменение относительного ускорения. Если, например, 2-ось выбрана так, что $\varphi = 0$ и линия, соединяющая частицы, образует с этой осью угол θ , то, согласно (2.10), изменение относительного ускорения будет иметь место в направлении, образующем угол $-\theta$ с этой осью.

§ 3. Канонические формы тензора Римана

В этом параграфе более подробно разработана концепция следования за гравитационным полем. Это выполнено путем непосредственного обобщения рассуждений, имеющих место в случае электромагнитного поля. В последнем случае собственные векторы поля определяются урав-

нениями

$$T_{\mu}^{\nu} \xi_{\nu} = \lambda \xi_{\mu}, \quad (3.1)$$

где T_{μ}^{ν} — тензор энергии электромагнитного поля. Было показано, что в общем случае могут иметь место временно-подобные, пространственно-подобные и изотропные собственные векторы. Первые два лежат во взаимно ортогональных двумерных поверхностях, направление же изотропного вектора не определено. С другой стороны, для изотропного поля временно-подобный собственный вектор не существует. Здесь все собственные векторы пространственно-подобны, за исключением единственного собственного вектора, который изотропен. При этом все пространственно-подобные векторы лежат в трехмерном пространстве, касательном к изотропному конусу вдоль направления этого изотропного собственного вектора.

Смысл следования наблюдателя за полем легче всего выяснить из рассмотрения вектора Пойнтинга. Прежде чем вводить частную лоренцовскую систему координат, можно ковариантным образом определить 4-вектор Пойнтинга

$$P_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\mu} - v_{\alpha} v^{\mu}) T_{\mu\nu} v^{\nu}, \quad (3.2)$$

где v^{μ} — 4-скорость наблюдателя, измеряющего поле. Это легко получить из обычного определения, когда v^{μ} направлена вдоль оси времени в локальной лоренцовской системе. Так как

$$P_{\alpha} v^{\alpha} = 0, \quad (3.3)$$

то P_{α} должен быть пространственно-подобным. Если ввести в рассмотрение 4-нормаль n_{α} к некоторой бесконечно малой двумерной поверхности Σ , движущейся вместе с наблюдателем со скоростью v^{α} , то поток электромагнитной энергии через Σ запишется в виде

$$P_{\alpha} n^{\alpha} = T_{\mu\nu} v^{\mu} n^{\nu}. \quad (3.4)$$

Говорят, что такой и только такой наблюдатель следует за электромагнитным полем, для которого поток энергии через все возможные 2-поверхности (независимо от ориентации), жестко с ним связанные, равен нулю. Согласно (3.3)

и (3.4), это может иметь место лишь при условии

$$P_0 = 0, \quad (3.5)$$

что приводит к соотношению

$$T_{0\nu}v^\nu = (T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu) v_0, \quad (3.6)$$

так что v_0 должен быть собственным вектором $T_{\mu\nu}$. Этим устанавливается связь между понятием следования за полем и собственными векторами тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Как уже указывалось, в случае изотропного поля не существует временно-подобного собственного вектора, так что вектор Пойнтинга не обращается в нуль ни для какого наблюдателя, движущегося с конечной скоростью. Поток энергии для изотропного поля не может быть уничтожен преобразованиями Лоренца. Изотропное поле имеет один изотропный собственный вектор (назовем его ξ^μ), принадлежащий нулевому собственному значению, так что

$$T_{\mu\nu}\xi^\nu = 0. \quad (3.7)$$

Таким образом, «наблюдатель», движущийся со скоростью света в направлении ξ^μ (последний является по существу вектором распространения), не должен наблюдать потока энергии.

В случае гравитационного поля не существует тензора энергии-импульса самого гравитационного поля (псевдотензор обсуждается в § 4). Однако, согласно доводам, приведенным в § 1, можно попытаться связать определение «следования за гравитационным полем» с геометрической структурой тензора Римана, аналогично определению этого понятия для случая электромагнитного поля. Это определение, естественно, будет более сложным, поскольку тензор Римана более сложный объект, чем максвелловский тензор энергии. Определение дается в два этапа. Прежде всего определяются собственные бивекторы (кососимметрические тензоры) тензора Римана. С помощью канонических типов Петрова [4] эти собственные бивекторы можно записать точно для всех трех алгебраически различных типов тензора Римана в свободном пространстве-времени. Собственные бивекторы геометрически соответствуют двумерным поверхностям или парам двумерных

поверхностей в пространстве-времени. Пересечения этих двумерных поверхностей друг с другом определяют некоторое число 4-векторов (которые предполагаются нормированными, если они не изотропны), которые мы будем называть *главными векторами Римана*.

Будем говорить, что наблюдатель, 4-скорость которого совпадает с временно-подобным главным тензором Римана, следует за гравитационным полем.

Оказывается, что для двух из трех типов тензора Римана этот временно-подобный главный вектор вырождается в изотропный конус. Гравитационные поля, соответствующие этим двум типам, отождествляются с гравитационным излучением.

Собственные векторы $P_{\mu\nu}$ тензора Римана определяются соотношением

$$R_{\mu\nu\sigma} P^{\sigma} = \lambda P_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

или

$$R_{AB} P^B = \lambda P_A$$

в шестимерном формализме, введенном в § 2.

Петров [4] показал, что соответствующим выбором системы координат в каждой точке пространства-времени тензор Римана можно привести к каноническому виду одного из трех следующих типов¹⁾:

Тип I:

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdot & \cdot & \beta_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha_2 & \cdot & \cdot & \beta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_3 & \cdot & \cdot & \beta_3 \\ \beta_1 & \cdot & \cdot & -\alpha_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta_2 & \cdot & \cdot & -\alpha_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \beta_3 & \cdot & \cdot & -\alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_k = 0,$$

$$\sum_{k=1}^3 \beta_k = 0.$$

¹⁾ Алгебраические свойства пустого пространства-времени подробно исследовались Белем [18] (см. также примечание 2 на стр. 286).

Тип II:

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \cdot & \cdot & -2\beta & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha - \sigma & \cdot & \cdot & \beta & \sigma \\ \cdot & \cdot & \alpha + \sigma & \cdot & \sigma & \beta \\ -2\beta & \cdot & \cdot & +2\alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \beta & \sigma & \cdot & -(\alpha - \sigma) & \cdot \\ \cdot & \sigma & \beta & \cdot & \cdot & -(\alpha + \sigma) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Тип III:

$$R_{AB} = \begin{pmatrix} \cdot & -\sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma \\ -\sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma & \cdot & \sigma & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sigma & \cdot & \cdot \\ \sigma & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Для типа I система координат, в которой задан канонический вид R_{AB} , полностью определена. К появлению некоторой свободы выбора может привести случайное совпадение между α и β . В типах II и III система координат определена только с точностью до лоренцовских вращений в плоскости x_1x_0 . Величины α и β являются скалярными инвариантами тензора Римана. Однако величина σ зависит от выбора осей в плоскости x_1x_0 .

Указанные формы R_{AB} определяются, во-первых, ограничениями, накладываемыми на преобразования в шестимерном пространстве (т. е. лоренцовскими преобразованиями, включающими вращения), и, во-вторых, отсутствием симметрии R_A^B (другими словами, индефинитным характером метрики η_{AB}). В результате этого элементарные делители R_A^B могут не быть простыми. Это имеет место для типов II и III.

Собственные бивекторы R_{AB} , определенные с помощью (3.8), легко получить, исходя из (3.9) — (3.11). Таковыми являются простые и попарно дуальные бивекторы или

бивекторы вида $P_A = S_A \pm i^0 S_A$, где S_A — простой бивектор, а ${}^0 S_A$ — дуальный к нему¹⁾.

Таким образом, каждый собственный бивектор P^A , соответствующий R_{AB} , определяет пару ортогональных двумерных пространств. При этом P^A , полученные с помощью (3.9) — (3.11) (при надлежащей нормировке), должны иметь следующий вид:

Тип I. Шесть независимых собственных бивекторов:

Если $\beta_1 = 0$, то $P^A = \delta_1^A$ и $P^A = \delta_4^A$ (взаимно-дуальны);

$$\text{если } \beta_1 \neq 0, P^A = \delta_1^A \pm i \delta_4^A.$$

Если $\beta_2 = 0$, то $P^A = \delta_2^A$ и $P^A = \delta_5^A$ (взаимно-дуальны);

$$\text{если } \beta_2 \neq 0, P^A = \delta_2^A \pm i \delta_5^A.$$

Если $\beta_3 = 0$, то $P^A = \delta_3^A$ и $P^A = \delta_6^A$ (взаимно-дуальны);

$$\text{если } \beta_3 \neq 0, P^A = \delta_3^A \pm i \delta_6^A.$$

Тип II: Четыре независимых собственных бивектора:

Если $\beta = 0$, то $P^A = \delta_1^A$ и $P^A = \delta_4^A$ (взаимно-дуальны)

и $P^A = \delta_2^A - \delta_6^A$ и $P^A = \delta_3^A + \delta_5^A$ (взаимно-дуальны). Если

$\beta \neq 0$, то $P^A = \delta_1^A \pm i \delta_4^A$ и $P^A = \delta_2^A - \delta_6^A \pm i(\delta_3^A + \delta_5^A)$.

Тип III. Два независимых собственных бивектора:

$$P^A = \delta_2^A - \delta_6^A \text{ и } P^A = \delta_3^A + \delta_5^A.$$

¹⁾ Простой бивектор $S_{\mu\nu}$, для которого $\det(S_{\mu\nu}) = 0$ и который всегда может быть представлен в виде $S_{\mu\nu} = X_\mu Y_\nu - X_\nu Y_\mu$, определяет двумерную поверхность в пространстве-времени. Бивектор, дуальный к какому-либо бивектору $P_{\mu\nu}$, имеет вид

$${}^0 P_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \epsilon^{\alpha\sigma\tau\pi} P_{\tau\pi} ({}^0 P_A = g_{AB} \epsilon^{BC} P_C),$$

где $\epsilon^{\alpha\sigma\tau\pi} = \pm \sqrt{-g}$ — знаковый тензор (последний нужно брать со знаком минус, когда $\alpha\sigma\tau\pi$ размещены в порядке 0, 1, 2, 3). Бивектор, дуальный к $S_{\mu\nu}$, определяет двумерную поверхность, ортогональную к той, которая задается с помощью $S_{\mu\nu}$.

Различные пары двумерных поверхностей, представленные этими простыми бивекторами, не являются ортогональными. Их пересечения дают следующие главные векторы Римана r^α (соответствующим образом нормированные):

Тип I: $r^\alpha = \delta_1^\alpha, \delta_2^\alpha, \delta_3^\alpha, \delta_0^\alpha$. Здесь главные векторы Римана совпадают с оортами репера. Один из них временно-подобный, три других пространственно-подобны.

Тип II: $r^\alpha = \delta_0^\alpha - \delta_1^\alpha, \delta_2^\alpha, \delta_3^\alpha$. Первый вектор изотропен, два других — пространственно-подобны.

Тип III: $r^\alpha = \delta_0^\alpha - \delta_1^\alpha$. Имеется только один главный вектор Римана, который является изотропным вектором.

Согласно установленному выше критерию, гравитационное излучение определяется теперь следующим образом¹⁾:

В любой точке свободного пространства-времени, где тензор Римана относится к типу II и III, присутствует гравитационное излучение; для тензора Римана типа I справедливо обратное утверждение.

Заметим теперь, что σ в (3.10) оказываются на тех же самых местах и с тем же самым знаком, что и в матрице (2.6), описывающей допустимые разрывы на изотропной трехмерной гиперповерхности. Это соответствие достигнуто отчасти за счет ориентации двух реперов. Однако в том утверждении, что именно при переходе из области пространства-времени без гравитационного поля излучения в область, где имеется поле излучения, допустимые, согласно условиям Лишнеровица, разрывы диктуются только что предложенным определением, содержится определенный физический смысл. Это, очевидно, является одним из признаков совместимости двух различных подходов к проблеме.

¹⁾ Это утверждение почти наверняка является сильно упрощенным. Из последних работ Лишнеровица, Робинсона, Сакса и других ясно, что тип II₀ (при $\alpha = \beta = 0$) представляет собой чистое поле излучения. Кроме того, оказывается, согласно последней работе Сакса (не опубликовано), что типы II и III представляют как поля, близкие к полям излучения, так и промежуточные поля, которые переходят в тип II₀ вдали от своих источников.

Отметим также, что при переходе от типа I к типу II число независимых α и β сокращается (как для α , так и для β) с двух до одного. Это означает некоторую дополнительную симметрию для полей излучения, что на первый взгляд может показаться неожиданным. Однако физическая интерпретация, которая сразу же здесь напрашивается, состоит в том, что вследствие нелинейности поля (т. е. вследствие того, что гравитационное поле включает в себя свой источник) гравитационные волны без какого-либо рода симметрии интерферировали бы друг с другом и взаимно гасились¹⁾.

Физические эффекты, обусловленные гравитационными волнами, можно исследовать с помощью уравнения (2.8) таким же способом, каким в § 2 исследовались эффекты, связанные с разрывами. Различие между типами I и II пространства-времени сразу же вытекает из рассмотрения поведения пробных частиц, движущихся со скоростями, отличными от скоростей, определяемых временно-подобным вектором репера. В качестве примера рассмотрим поведение K_{β}^{α} [определяемого формулой (2.9)] при локальных преобразованиях Лоренца, определяемых в каждой точке соотношениями

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{\mu} &= \lambda_{\mu}^0 \operatorname{ch} \theta + \lambda_{\mu}^1 \operatorname{sh} \theta, \\ \bar{\lambda}_{\mu} &= \lambda_{\mu}^0 \operatorname{sh} \theta + \lambda_{\mu}^1 \operatorname{ch} \theta, \\ \bar{\lambda}_{\mu}^2 &= \lambda_{\mu}^2, \quad \bar{\lambda}_{\mu}^3 = \lambda_{\mu}^3,\end{aligned}\tag{3.12}$$

где репер λ_{μ}^{α} является репером, к которому отнесены канонические формы (3.9) и (3.10). При этом преобразовании K_{ab} (кроме K_{1b} , которые не меняются) выглядит следующим образом:

Тип I:

$$K_{22} = -(\alpha - \sigma), \quad \bar{K}_{22} = -(\alpha - \sigma \operatorname{ch} 2\theta),$$

¹⁾ Дальнейшее рассмотрение ограничивается обсуждением типов I и II. Отсутствие скалярных инвариантов в типе III, видимо, связано с тем, что пространство-время этого типа представляет собой излучение без источников. Интерпретация этого типа не очевидна. Дальнейший анализ этого случая будет дан в последующей работе.

$$K_{23} = 0, \quad \bar{K}_{23} = \frac{1}{2}(\beta_3 - \beta_2) \operatorname{sh} 2\theta,$$

$$K_{33} = -(\alpha + \sigma), \quad \bar{K}_{33} = -(\alpha + \sigma \operatorname{ch} 2\theta).$$

Тип II:

$$K_{22} = -(\alpha - \sigma), \quad \bar{K}_{22} = -(\alpha - \sigma e^{-2\theta}),$$

$$K_{23} = 0, \quad \bar{K}_{23} = 0,$$

$$K_{33} = -(\alpha + \sigma), \quad \bar{K}_{33} = -(\alpha + \sigma e^{-2\theta}).$$

Здесь компоненты \bar{K}_{ab} относятся к реперу $\bar{\lambda}_\mu^\alpha$. Величины α_2 и α_3 в типе I для удобства сравнения с типом II здесь заменены на $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3)$ и $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \alpha_2)$.

Существенное отличие между типами I и II состоит в том, что при малых θ преобразования K_{22} и K_{33} в типе II зависят от θ линейно, тогда как в типе I — квадратично ($\sim \theta^2$). Зависимость от θ для K_{ab} типа I отображает по существу эффект специальной теории относительности, аналогичный известному эффекту лоренцовского сокращения, тогда как в типе II мы имеем дело с явлениями нелоренцовского характера. Наличие изменений первого порядка K_{23} , представляющих собой другой пример лоренцовского поведения, возможно, обусловлено тем, что β может быть связана с вращательными свойствами поля.

Для конечных лоренцовских преобразований (большие θ) величины K , относящиеся к типу I, становятся большими по абсолютной величине для обоих знаков θ ; для типа же II величины K стремятся при больших положительных θ к конечному пределу. Для типа I K_{ab} имеют экстремальные значения при $\theta = 0$, тогда как для типа II K_{ab} при $\theta \rightarrow \infty$, т. е. когда скорость наблюдателя в направлении распространения излучения приближается к скорости света.

§ 4. Редукция псевдотензора энергии-импульса

Как известно, от ковариантной записи¹⁾ закона сохранения

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$$

¹⁾ Точка с запятой перед индексом означает ковариантное дифференцирование.

можно перейти к записи вида

$$\left\{ (-g)^{1/2} T_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{\kappa} t_{\mu}^{\nu} \right\}_{,\nu} = 0$$

с помощью введения канонического псевдотензора энергии-импульса t_{μ}^{ν} . Этот факт и каноническое происхождение t_{μ}^{ν} позволяют считать эту величину «псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля».

Физическое обоснование состоит, грубо говоря, в следующем: отклонение метрики пространства-времени от псевдоэвклидовой вносит дополнительные члены в уравнения сохранения. Эти отклонения являются следствием наличия гравитационного поля. Все было бы хорошо, если бы t_{μ}^{ν} не зависел от выбора системы координат (как это должно выполняться для истинных физических величин). Неоднородные трансформационные свойства t_{μ}^{ν} делают невозможным построение из него каких бы то ни было скалярных величин, по крайней мере прямым путем, и, таким образом, физическая интерпретация t_{μ}^{ν} , вследствие его существенной зависимости от выбора системы координат, выглядит сомнительной.

Совершенно не очевидно, каким образом можно выяснить физический смысл t_{μ}^{ν} , не выяснив прежде всего физического смысла координатной системы. Та же трудность могла бы возникнуть для векторов и тензоров. Однако в этих случаях путем свертывания данных векторов и тензоров с другими векторами и тензорами можно построить скаляры (т. е. физические компоненты), которые, разумеется, не зависят от выбора системы координат.

Обычный прием, который применяется по отношению к t_{μ}^{ν} , заключается в использовании приближения слабого поля и выборе математически удобных координатных условий. Эти методы спорны, и их физический смысл не ясен. Трудности с t_{μ}^{ν} возникают в любом случае в силу принципа эквивалентности. Поскольку гравитационное поле может быть уничтожено в любой точке путем преобразования координат (в том смысле, что $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ можно сделать равными нулю), энергия, импульс и натяжения гравитационного поля в любой точке могут считаться в такой же мере слу-

чайными, как и система координат. Не имеет смысла говорить о величине энергии поля в каждой точке; остается определенным только изменение величины энергии при переходе от точки к точке. Естественно, невозможно обратить t_μ^ν в нули на какой-либо всей конечной двумерной поверхности в пространстве-времени. Однако можно определить среднее значение t_μ^ν на двумерной поверхности некоторого небольшого трехмерного объема. С помощью подходящего с физической точки зрения выбора системы координат такое определение может быть сделано ковариантным.

Предлагается выбрать координаты, известные как нормальные координаты. Эти координаты уже использовались в общей теории относительности [19, 20]. Тем не менее желательно дать некоторое физическое обоснование такого выбора.

Выбор системы координат зависит от конкретной физической ситуации. Для многих целей достаточно для каждого события (точки) определить репер единичных векторов, или соответствующие локальные координатные оси Минковского, представляющие собой 4-скорость наблюдателя и прямоугольные декартовы оси в их мгновенном локальном трехмерном пространстве. Существует, чтобы в принципе можно было отождествить выбранную систему с такой системой, которая могла бы быть использована наблюдателем в данной физической ситуации.

Недавно автор [1, 11] провел сравнение поведения пробных частиц в гравитационном поле в общей теории относительности и в ньютоновской теории (см. § 2). При этом было удобно ввести локальные декартовы системы координат в мгновенном трехмерном пространстве вдоль одной из мировых линий частицы. Системы координат в разных пространственно-временных точках здесь были связаны через параллельный перенос векторов репера, задающих координатные оси, вдоль этой мировой линии. Как и следовало ожидать, было показано, что такой способ переноса приводит к описанию гравитационных явлений, имеющему наибольшее сходство с ньютоновской теорией, где используются обычные инерциальные системы отсчета. Однако весь формализм, с помощью которого проводилось это сравнение, был по существу нерелятивистский.

Рассматриваемый случай в некоторой степени отличен от исследованного ранее. Только что описанный формализм предназначен для обсуждения динамических эффектов [например, таких, как обсуждавшийся выше после уравнения (2.8)]; однако общая идея тензора энергии-импульса является существенно релятивистской, развитой в основном в рамках релятивистской теории — электродинамики Максвелла, — и может оказаться непригодной в общей теории относительности, которая рассматривается здесь как теория поля гравитации. Следовательно, требуется удобный 4-мерный аналог инерциальных систем специальной теории относительности, но определенных более сложно, чем с помощью репера единичных векторов. При этом неизбежна потеря общей ковариантности, и главная задача состоит в том, чтобы как-нибудь менее искусственно связать концепцию, развитую здесь для случая гравитационного излучения с обычной концепцией, развитой специально для электромагнитной теории (хотя следует допустить, что рассмотрение вектора Пойнтинга в начале § 3 применимо к случаю истечения любой другой энергии).

Поскольку мы хотим исследовать псевдовектор энергии-импульса по аналогии с лоренц-инвариантными теориями поля, то имеет смысл выбрать такую систему координат, которая являлась бы приближением к системе координат специальной теории относительности. В методе, использующем приближение слабого поля, это сделано путем рассмотрения метрики, которая на достаточно больших расстояниях от материальных частиц мало отличается от метрики Минковского. Существенные трудности, связанные с этим методом, могут быть приписаны отсутствию ковариантной формулировки приближения слабого поля. Другим возможным принятым здесь методом является метод локального приближения, совместимого с инвариантной формулировкой: в окрестности каждой точки вводится система нормальных координат, которая вполне определенным с математической и физической точек зрения путем аппроксимирует инерциальную систему координат специальной теории относительности.

Физическая интерпретация нормальных координат вытекает из их точного соответствия координатам Минковского только в одном отношении, а именно в измерении интер-

вала. Лучше всего это можно пояснить, исходя из рассмотрения основных свойств такой системы координат, которые состоят в следующем.

Нормальные координаты x^μ всегда могут быть выбраны так, что в любой выбранной пространственно-временной точке O :

$$x^\mu = 0, \quad (4.1)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = g_{\mu\nu, \rho} = 0, \quad (4.3)$$

$$g_{\mu\nu, \rho\sigma} = \frac{1}{3} (R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\mu\sigma}), \quad (4.4)$$

для каждой точки P в окрестности O

$$x^\mu = u p_0^\mu, \quad (4.5)$$

где

$$p_0^\mu = \frac{dx^\mu}{du} \quad (4.6)$$

есть вектор, касательный в O к геодезической OP , и

а) если OP временно-подобен, то u — собственно-временной интервал τ , разделяющий O и P ;

б) если OP пространственно-подобен, то u есть чисто пространственный интервал s , разделяющий O и P ;

в) если OP изотропен, то u является выделенным параметром, с помощью которого уравнение изотропной геодезической OP принимает вид

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\rho}{du} = 0.$$

[Это определяет u с точностью до линейного преобразования изотропной геодезической в точке O . Начало отчета u выбрано в точке O , а x^μ , определенное с помощью (4.5), не зависит от масштаба u .]

Системы нормальных координат в точке O связаны друг с другом с помощью однородных преобразований Лоренца в этой точке.

Из рассмотрения этих свойств ясно, что наблюдатель, который определял бы координаты в окрестности данной точки O путем измерения с помощью теодолита и изме-

рений интервалов от точки O так, как если бы пространство-время было плоским, получал бы нормальные координаты. Таким образом, использование нормальных координат основывается на всех локальных свойствах риманова пространства.

Чтобы связать это с предшествующим рассмотрением, удобно снова ввести репер единичных векторов, направленных вдоль координатных осей.

Свойство (4.4) дает ключ для ковариантного представления псевдотензора энергии-импульса t_{μ}^{ν} . Последний представляет собой однородную квадратичную функцию $g_{\mu\nu, \sigma}$ и, таким образом, если его разложить в ряд в окрестности начала нормальных координат, первый исчезающий член будет иметь инвариантный коэффициент, являющийся функцией $R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Усреднением по малой двумерной сфере мы получаем инвариантное выражение для среднего¹⁾). Подробности расчета заключаются в следующем. Псевдотензор энергии-импульса определяется соотношением

$$t_{\mu}^{\nu} = L \delta_{\mu}^{\nu} - g_{\rho\sigma, \mu} \frac{\partial L}{\partial g_{\rho\sigma, \nu}}, \quad (4.7)$$

где

$$L = (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} [\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}] \quad (4.8)$$

представляет собой лагранжиан поля в первом приближении. Непосредственный расчет дает точное выражение L как функции $g_{\mu\nu, \rho}$:

$$L = \frac{1}{8} (-g)^{1/2} S^{\pi\tau\mu\nu\rho\sigma} g_{\pi\tau, \sigma} g_{\mu\nu, \rho}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} S^{\pi\tau\mu\nu\rho\sigma} &= S^{\mu\nu\pi\tau\sigma\rho} = g^{\pi\tau} U^{\mu\nu\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} U^{\mu\nu\pi\tau} - \\ &\quad - g^{\pi\rho} U^{\mu\nu\tau\sigma} + g^{\tau\sigma} U^{\mu\nu\pi\rho}, \quad (4.10) \\ U^{\mu\nu\rho\sigma} &= g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

¹⁾ Это является, быть может, несколько необычным определением усреднения, состоящим в следующем:

$$\bar{t}_{\Psi}^{\Phi} = \lim_{r \rightarrow 0} (4\pi r^4)^{-1} \int t_{\Psi}^{\Phi} d^2S.$$

С помощью формул (4.7) — (4.9) t_μ^ν можно выразить через $g_{\mu\nu, \rho}$ в явной форме:

$$t_\psi^\varphi = \frac{1}{8} (\delta_\tau^\rho \delta_\psi^\varphi - 2\delta_\psi^\rho \delta_\tau^\varphi) (-g)^{1/2} S^{\pi\chi\mu\nu\tau\sigma} g_{\pi\chi, \sigma} g_{\mu\nu, \rho}. \quad (4.11)$$

Дифференцируя (4.11) дважды по x^ξ и полагая в соответствии с (4.3) $g_{\mu\nu, \rho} = 0$, получаем

$$t_\psi^\varphi = 0, \quad t_{\psi, \xi}^\varphi = 0, \quad (4.12)$$

$$t_{\psi, \xi\eta}^\varphi = \frac{1}{8} (\delta_\tau^\rho \delta_\psi^\varphi - 2\delta_\psi^\rho \delta_\tau^\varphi) (-g)^{1/2} S^{\pi\chi\mu\nu\tau\sigma} \times \\ \times (g_{\pi\chi, \sigma\xi} g_{\mu\nu, \rho\eta} + g_{\pi\chi, \sigma\eta} g_{\mu\nu, \rho\xi}). \quad (4.13)$$

Используя теперь (4.4) и уравнения поля для пустого пространства-времени (2.1), после непосредственных вычислений получаем

$$t_{\psi, \xi\eta}^\varphi = \frac{1}{9} (\delta_\tau^\rho \delta_\psi^\varphi - 2\delta_\psi^\rho \delta_\tau^\varphi) (\delta_\xi^\kappa \delta_\eta^\lambda + \delta_\eta^\kappa \delta_\xi^\lambda) \times \\ \times (R^{\tau\mu\nu}_\kappa + R^{\tau\nu\mu}_\kappa) R_{\rho\mu\nu\lambda}. \quad (4.14)$$

Из выражения (4.9) для L следует, что среднее значение t_ψ^φ на поверхности малой сферы с центром в O будет иметь вид

$$\bar{t}_\psi^\varphi = \frac{1}{6} t_{\psi, ss}^\varphi. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14) в (4.15) и вводя единичный вектор $\lambda^\rho = \delta_0^\rho$, направленный вдоль оси времени, получаем

$$\bar{t}_\psi^\varphi = \frac{1}{27} (\delta_\tau^\rho \delta_\psi^\varphi - 2\delta_\psi^\rho \delta_\tau^\varphi) (\lambda^\kappa \lambda^\lambda - g^{\kappa\lambda}) (R^{\tau\mu\nu}_\kappa + R^{\tau\nu\mu}_\kappa) R_{\rho\mu\nu\lambda}. \quad (4.16)$$

Это ковариантное выражение должно интерпретироваться как приближенный тензор энергии-импульса гравитационного поля, фиксируемый наблюдателем, движущимся с 4-скоростью λ^κ , с помощью измерений в его мгновенном трехмерном пространстве. Легко видеть, что $\bar{t}_{\psi\chi} = g_{\chi\varphi} \bar{t}_\psi^\varphi$ — симметрический тензор.

Непосредственные, но громоздкие вычисления приводят к значению \bar{t}_ψ^φ , соответствующему тензору Римана в каноническом виде. Важно сравнить физические компоненты

\bar{t}_Ψ^Φ для полей типов I и II. Для типа I находим

$$\bar{t}_\alpha^\beta = \frac{1}{27} \left[2 \left\{ \sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 (\delta_\alpha^0 \delta_0^\beta + 2\delta_\alpha^k \delta_k^\beta + 3\delta_\alpha^{k+1} \delta_{k+1}^\beta + 3\delta_\alpha^{k+2} \delta_{k+2}^\beta) \right\} - 9\delta_\alpha^\beta \sum_{k=1}^3 \alpha_k^2 \right]. \quad (4.17)$$

Заметим, что все недиагональные члены здесь равны нулю. Отсюда следует, что наблюдатель, измеряющий эти физические компоненты в системе координат, в которой он покоится, не наблюдает потока гравитационной энергии. С другой стороны, для полей типа II получаем

$$\begin{aligned} \bar{t}_\alpha^\beta = \frac{1}{27} [& \alpha^2 (-42 \delta_\alpha^\beta + 16\delta_\alpha^1 \delta_1^\beta + 22\delta_\alpha^2 \delta_2^\beta + \\ & + 22\delta_\alpha^3 \delta_3^\beta) + 4\alpha\sigma (\delta_\alpha^2 \delta_2^\beta - \delta_\alpha^3 \delta_3^\beta) + \\ & + 8\sigma^2 (\delta_\alpha^0 + \delta_\alpha^1) (\delta_0^\beta - \delta_1^\beta)]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Это выражение можно записать в виде

$$\bar{t}_\alpha^\beta = \text{Диагональная часть} + \left(\frac{8}{27} \right) \sigma^2 \xi_\alpha \xi^\beta,$$

где $\xi_\alpha = \delta_\alpha^0 + \delta_\alpha^1$ — изотропный вектор в направлении пространства излучения, представленного типом II. Ненормированная часть \bar{t}_α^β в точности совпадает по форме с тензором энергии электромагнитного поля излучения и, таким образом, должна интерпретироваться как часть, обусловленная гравитационным излучением. С другой стороны, члены $\sim \alpha^2$ должны быть связаны с нерадикационной частью поля, а члены $\sim \alpha\sigma$ — с взаимодействием между этими двумя частями поля. Наблюдатель, измеряющий поле второго типа, будет, согласно такому определению \bar{t}_μ^ν , наблюдать поток гравитационной энергии в направлении x_1 .

Эти результаты подчеркивают правдоподобность определения гравитационного излучения, предложенного в § 3. Если псевдотензор энергии-импульса признать в качестве приемлемого объекта в теории Эйнштейна, вычисления последнего параграфа показывают, что должен наблюдаться поток энергии через малую двумерную

поверхность, когда, согласно принятому определению, присутствует гравитационное излучение¹⁾).

§ 5. Примеры

Предложенное определение не было бы удовлетворительным, если бы области свободного пространства-времени со статической метрикой допускали наличие излучения. То, что это не имеет места, можно видеть из следующего довольно грубого доказательства.

Статическая область пространства-времени при строгом ее определении представляет собой область, для которой имеет место всюду временно-подобная группа движений области внутри самой себя (кроме границ). При этом производящие функции группы образуют нормальную конгруенцию.

Следовательно, если временно-подобный вектор репера λ^μ выбран касательным к образующим, то

$$\gamma_{0ab} = 0, \quad (5.1)$$

где $\gamma_{0ab} = \lambda_{\mu ; \nu} \lambda_a^\mu \lambda_b^\nu$ — некоторые коэффициенты вращения Риччи [13]. Тогда по обычным формулам [13] получаем

$$R_{0abc} = 0. \quad (5.2)$$

Затем с помощью вращения пространственно-подобных векторов репера приводим трехмерный тензор R_{0a0b} к диагональному виду. Из уравнений же (2.1) следует, что при этом должен одновременно диагонализироваться тензор R_{abcd} .

Следовательно, тензор Римана имеет в этом случае канонический вид типа I и, таким образом, гравитационное излучение отсутствует. Из результата Тауба [21] следует, что не могут иметь место неполяризованные плоские волны, заполняющие все пространство-время²⁾.

¹⁾ Ковариантные выражения для энергии обсуждались многими авторами. Большинство этих выражений является квадратичными функциями. Было также предложено много нековариантных выражений.

²⁾ Плоско-поляризованные волны были независимо открыты Бонди и Робинсоном (см. [22]).

Простейшим примером гравитационного поля в пустом пространстве-времени является поле Шварцшильда. Записывая метрику этого поля в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.3)$$

и ставя в соответствие координатам τ , θ , φ , t соответственно индексы 1, 2, 3, 0, легко показать с помощью векторов 4-репера, направленных вдоль координатных осей, что тензор Римана имеет канонический вид типа Ic

$$-\frac{1}{2} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{m}{r^3}, \quad \beta_k = 0. \quad (5.4)$$

Однако римановы главные векторы вследствие симметрии поля, которая проявляется в равенстве α_2 и α_3 , определены неполностью. Согласно теореме Биркгофа [19], сферические волны не могут существовать, так как поле Шварцшильда является единственным сферически-симметричным решением уравнений Эйнштейна (2.1) в пустоте.

Цилиндрически симметричная метрика, введенная Розеном [23] (см. также [27]) при обсуждении цилиндрических волн,

$$ds^2 = e^{2\gamma-2\psi} (dt^2 - d\varrho^2) - e^{-2\psi} \varrho^2 d\varphi^2 - e^{2\psi} dz^2, \quad (5.5)$$

$$\psi = \psi(\varrho, t), \quad \gamma = \gamma(\varrho, t)$$

переходит асимптотически (для больших ϱ) в метрику типа II

$$\sigma \approx \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho \partial t} + 5 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial \varrho} - 3 \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (5.6)$$

что может быть легко получено с помощью векторов 4-репера, направленных вдоль координатных осей.

§ 6. Обсуждение результатов

Определение, предложенное в данной статье, обеспечивает однозначный локальный критерий наличия гравитационного излучения. Но оно имеет некоторые недостатки.

Во-первых, оно классифицирует как излучение лишь такие гравитационные возмущения, которые распростра-

няются со скоростью света. Если бы оказалось, что желательнее отнести к радиационным полям сигналы, распространяющиеся со скоростью, меньшей, чем скорость света, то такие поля не могли бы быть охвачены предлагаемым определением. В частности, за рамки определения выходили бы стоячие волны. Тем не менее анализ показывает, что исследование гравитационных полей в общем виде, а именно с помощью скалярных инвариантов α_R и β_R ¹⁾, является новым и мощным методом.

Во-вторых, определение носит локальный геометрико-алгебраический характер и не может, вообще говоря, описать изменение свойств поля излучения вдоль пути распространения. Этот пробел может быть заполнен, по крайней мере формально, с помощью введения канонических форм Петрова (3.9) — (3.11) в закон сохранения для гравитационного поля в пустоте

$$R^{\mu}_{\nu\sigma;\mu} = 0, \quad (6.1)$$

вытекающий непосредственно из тождеств Бианки и уравнений поля (2.1). Получающиеся уравнения, которые чрезвычайно похожи на обычные законы сохранения для непрерывной среды под давлением, будут обсуждаться в последующей статье²⁾.

Другой недостаток изложенного здесь анализа состоит в том, что он не дает никаких указаний относительно изменений в излучающей материи. Предположим, например, что статичность и сферическая симметрия шварцшильдовской частицы нарушены внутренними силами. Пусть эта частица затем некоторое время излучает и, наконец, снова возвращается в прежнее состояние (статическое и сферически симметричное). Может ли измениться полная масса частицы? Этот и аналогичные вопросы требуют исследования³⁾.

¹⁾ Значение этого подчеркивалось многими в официальных беседах и дискуссиях на Бернской конференции по теории относительности в июле 1955 г.

²⁾ Эта задача была решена Элерсом и Саксом [24] и в других еще не опубликованных работах Сакса.

³⁾ Эта задача была рассмотрена Боннором [25].

Кроме того, заслуживает выяснения возможность применения скалярных инвариантов тензора Римана в приближенных теориях Эйнштейна, Инфельда и Гоффмана. Можно надеяться, что это поможет разрешить неприятную неоднозначность интерпретации, которая возникает в этих теориях¹⁾.

Автор признателен проф. Бонди за ценные замечания и многочисленные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pirani F. A. E., *Helv. Phys. Acta*, в печати.
2. Lichnerowicz A., *Théories relativistes de la gravitation et d'électromagnétisme*, Paris, 1955, p. 33.
3. Synge J. L., *Relativity: the Special Theory*, Amsterdam, 1956, Ch. IX.
4. Петров А. З., *Ученые записки Казанского Государственного университета*, **114**, 55 (1954).
5. Ruse H. S., *Proc. Roy. Soc. (Edinburgh)*, **62**, 64 (1944); *Quart. Journ. Math. (Oxford)*, **17**, 1 (1946); *Proc. London, Math. Soc.*, **50**, 75 (1948).
6. Ландау Л., Лифшиц Е., *Теория поля*, М.—Л., 1948.
7. Goldberg J. N., *Phys. Rev.*, **99**, 1873 (1955).
8. Riemann B., *Göttingen Abhandl.*, **13**, 1 (1862).
9. Veblen O., *Invariants of Quadratic Differential Forms*, Cambridge, 1927 (см. перевод: Веблен О., *Инварианты квадратичных дифференциальных форм*, ИЛ, 1948).
10. O'Brien S., Synge J. L., *Comm. Dublin Inst.*, A, No. 9 (1952).
11. Pirani F. A. E., *Acta Phys. Polon.*, в печати.
12. Eddington A. S., *Mathematical Theory of Relativity*, New York, 1924, p. 247 (см. перевод: Эддингтон А. С., *Теория относительности*, М.—Л., 1934).
13. Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton 1949, Ch. 3; (см. перевод: Эйзенхарт Л., *Риманова геометрия*, ИЛ, 1948).
14. Trautman A., *Bull. Acad. Polon.*, **5**, 273 (1957).
15. Stellmacher, *Math. Ann.*, **115**, 741 (1938).
16. Trautman A., *Compt. Rend.*, **246**, 1500 (1958).
17. Synge J. L., Schild A., *Tensor Calculus*, Toronto, 1949, p. 93.

¹⁾ Теория гравитационного излучения была подробно обсуждена на конференции по теории гравитации в Руайомоне в июне 1959 г. Много полезных результатов было доложено Траутманом [26].

Обзорная статья Робинсона и автора настоящей статьи должна выйти в Варшавском сборнике в 1960 г.

18. Bel L., *Compt. Rend.*, **245—249** (1957—1959).
19. Birkhoff G. D., *Relativity and Modern Physics*, Cambridge (USA), 1923.
20. Thomas T. Y., *Phil. Mag.*, **48**, 1056 (1924).
21. Taub A. H., *Ann. Math.*, **53**, 472 (1951).
22. Bondi H., Robinson, *Proc. Roy. Soc.*, **A251**, 519 (1959).
23. Rosen N., *Bull. Research Council Israel*, **3**, 328 (1954).
24. Ehlers, Sachs, *Zs. f. Phys.*, **155**, 498 (1959).
25. Bonnor W. B., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **251**, 233 (1959).
26. Trautman A., *Lectures on General Relativity*, Kings College, London, 1958.
27. Marder L., *Proc. Roy. Soc.* **A244**, 524 (1958).

10. РЕАЛЬНОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ЭЙНШТЕЙНА—РОЗЕНА

Дж. Вебер и Дж. Уилер

J. Weber and J. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 29, 509—515 (1957)

§ 1. Введение

В последнее время высказываются сомнения относительно существования гравитационного излучения [1]. Придерживаясь этой скептической позиции, Розен [2] провел дальнейшее исследование цилиндрических гравитационных волн. Подобные волны впервые были рассмотрены Эйнштейном и Розеном [3, 4], развившими идею Робертсона. Монохроматическая цилиндрически симметричная волна (или импульс) движется внутрь в свободном от материи пространстве, «сходится» на оси и снова расходится. Это единственная задача гравитационного излучения, для которой получено *точное* решение уравнений тяготения Эйнштейна. Поскольку эта задача представляет собой лишь частный случай, то она не выявляет всех особенностей гравитационного излучения. С другой стороны, все общие утверждения относительно гравитационного излучения должны, очевидно, быть сопоставимы с этой задачей. Эта задача, следовательно, занимает особое положение в теории гравитационного излучения.

Розен пришел к неожиданному результату. Псевдотензор, который является мерой плотности гравитационной энергии и импульса, в цилиндрической волне всюду равен нулю. Выяснение смысла этого открытия и является предметом данной статьи. Мы заключаем, что многие из парадоксальных в других отношениях свойств этих цилиндрических волн могут быть поняты, если принять во внимание аналогию между гравитационными и электромагнитными волнами и специальные требования принципа эквивалентности, который исключает привилегированное положение для любой конкретной системы отсчета.

В § 2 кратко резюмируются выражения, полученные как Эйнштейном и Розеном, так и Розеном, для метрики цилиндрической волны. Представляют интерес два типа решений: монохроматические волны и волновые пакеты (импульсы). Решение импульсного типа строится таким образом, чтобы оно представлялось особенно простыми математическими выражениями. В § 3 рассматривается доказательство того, что плотность псевдотензора гравитационного импульса и энергии всюду равна нулю, как для монохроматических волн, так и для импульсов. Из этого не следует, что энергия гравитационной волны равна нулю. Скорее эта энергия *неопределенна*, поскольку волна неограничена. Если бы импульс «сходил» не на бесконечной прямой, а на окружности, то по простым физическим соображениям следовало бы ожидать, что энергия будет иметь конечное и физически разумное значение.

В § 4 мы возвращаемся к бесконечно протяженному случаю, для которого имеется точное решение. Тензор кривизны Римана R_{ijk} не обращается в нуль в области, занятой волной; инварианты, образованные из компонент этого тензора кривизны, также не обращаются в нуль. Следовательно, возмущения, с которыми мы здесь имеем дело, реальны и не могут быть устранены никаким преобразованием координат.

В § 5 изучается влияние гравитационной волны на движение бесконечно малой пробной частицы, которая до прибытия импульса находится в покое. Стягиваясь к оси, импульс сообщает частице некоторую скорость, но после отражения от оси импульс действует на частицу в обратном направлении и уменьшает ее скорость до нуля. Подчеркивается аналогия со случаем заряженной частицы, подверженной действию плоской электромагнитной волны. В последнем случае проходящая волна не сообщает частице количества движения в направлении своего распространения в приближении, в котором пренебрегается вторичной волной, испущенной самой частицей. Если же принять в расчет реакцию излучения, то уравнения движения частицы предсказывают некоторый толчок вперед. Сделаны отдельные предсказания относительно реакции пробной частицы на гравитационное излучение, которые в принципе могут быть проверены. Делается заключение, что цилиндрические волны Эйнштейна и Розена не

представляют в действительности парадокса, что кажущееся аномальное поведение этих волн полностью согласуется с принципом эквивалентности общей теории относительности.

§ 2. Цилиндрические волны

Сферические гравитационные волны, подобно электромагнитным сферическим волнам, никогда не могут быть в точности сферически-симметричными. Тензор поляризации в первом случае (или вектор поляризации во втором) не может сохранять постоянное значение и непрерывно изменяется при движении по поверхности сферы, в соответствии с теоремой топологии о неподвижной точке. Цилиндрические гравитационные волны, подобно цилиндрическим электромагнитным волнам, лишены этой трудности. Поляризация в некоторой точке описывается малым эллипсом в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны. Этот эллипс описывает расстояния от некоторой центральной пробной частицы из набора пробных частиц, которые первоначально покоились на окружности, пока не пришла волна. Одна из главных осей этого эллипса параллельна, а другая — перпендикулярна к оси цилиндра. По мере продвижения фазы колебаний, длинная ось становится короткой, и наоборот, но оси не поворачиваются. Цилиндрические волны Эйнштейна и Розена не обладают другим независимым состоянием поляризации, в котором главные оси повернуты на 45° к оси цилиндра.

Положение точки описывается цилиндрическими координатами ϱ , φ и z . Произведение скорости света на время обозначается через T . В этих координатах метрика Эйнштейна и Розена имеет вид

$$ds^2 = e^{2\gamma-2\psi} (-dT^2 + d\varrho^2) + \varrho^2 e^{-2\psi} d\varphi^2 + e^{2\psi} dz^2, \quad (1)$$

где масштабные факторы γ и ψ зависят только от ϱ и T . Для метрики вида (1) уравнения тяготения в пустом пространстве будут выполнены при условии, что ψ и γ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\psi_{\varrho\varrho} + \frac{1}{\varrho} \psi_{\varrho} - \psi_{TT} = 0, \quad (2)$$

$$\gamma_0 = \varrho [\psi_0^2 + \psi_T^2], \quad (3)$$

$$\gamma_T = 2\varrho\psi_0\psi_T. \quad (4)$$

Решения уравнения (2) хорошо известны и представляют цилиндрические волны. Сначала считали, что эти волны способны переносить энергию на неограниченные расстояния, поскольку можно написать решение, представляющее распространяющиеся волны, где первый масштабный фактор имеет следующий вид:

$$\psi = AJ_0(\omega\varrho) \cos \omega t + BN_0(\omega\varrho) \sin \omega t, \quad (5)$$

а второй фактор, в частном случае $A=B$, сводится к выражению

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{1}{2} A^2 \omega \varrho \{ J_0(\omega\varrho) J_0'(\omega\varrho) + N_0(\omega\varrho) N_0'(\omega\varrho) + \\ & + \omega \varrho [(J_0(\omega\varrho))^2 + (J_0'(\omega\varrho))^2 + (N_0(\omega\varrho))^2 + (N_0'(\omega\varrho))^2] + \\ & + [J_0(\omega\varrho) J_0'(\omega\varrho) - N_0(\omega\varrho) N_0'(\omega\varrho)] \cos 2\omega T + \\ & + [J_0(\omega\varrho) N_0'(\omega\varrho) + N_0(\omega\varrho) J_0'(\omega\varrho)] \sin 2\omega T \} - \frac{2}{\pi} A^2 \omega T. \end{aligned} \quad (6)$$

Последний член в (6) аperiodически зависит от времени. Это ведет к систематическому изменению метрики со временем, что интерпретировалось вначале как результат потери энергии. Розен [4] выдвинул аргументы против этой интерпретации. Следуя Розену, мы исключим решения, содержащие сингулярную функцию Бесселя $N_0(\omega\varrho)$, вследствие их неудовлетворительного поведения в нуле.

Более интересным, чем монохроматический масштабный фактор ψ вида (5) с $B=0$, является импульс, представляющий линейную суперпозицию таких волн [3, 4]. Мы складываем такие волны с амплитудным множителем $A = 2Ce^{-a\omega}$, так что

$$\begin{aligned} \psi &= 2C \int_0^{\infty} e^{-a\omega} J_0(\omega\varrho) \cos \omega T d\omega = \\ &= C [(a - iT)^2 + \varrho^2]^{-1/2} + C [(a + iT)^2 + \varrho^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Величина a является приближенной мерой ширины импульса¹⁾.

Рассмотрим некоторое значение расстояния ϱ , очень большое по сравнению с a . Тогда выражение (7) будет велико лишь при значениях T , лежащих вблизи $-\varrho$ и $+\varrho$. Первый момент времени соответствует прохождению сходящейся волны; второй момент — прохождению волны, расходящейся в бесконечность.

Рассмотрим случай большого отрицательного T и найдем форму импульса в этот момент времени. Введем безразмерную величину x по формуле $\varrho = -T + ax$. Тогда импульс будет иметь приближенную форму

$$\psi \sim 2C (-2aT)^{-1/2} \left\{ \frac{x + (1 + x^2)^{1/2}}{2(1 + x^2)} \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

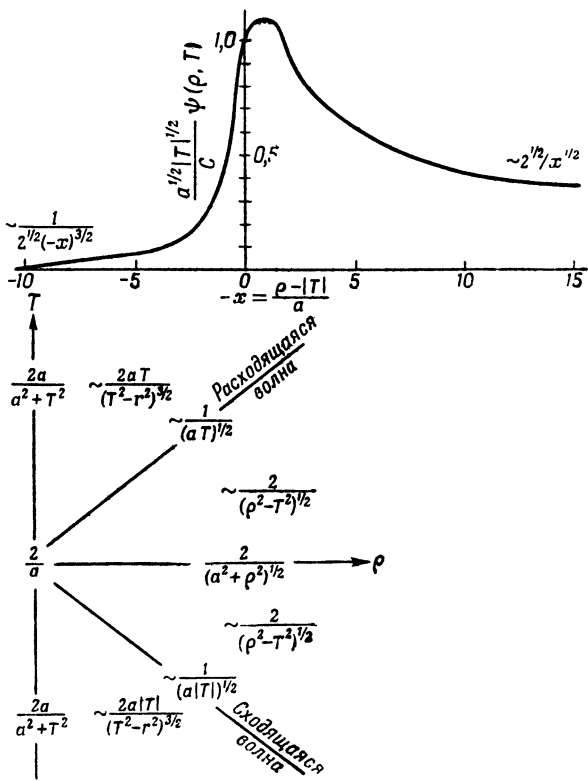
изображенную на фиг. 1. Импульсы другой формы можно легко построить, комбинируя два выражения в формуле (7) с постоянными фазовыми множителями $e^{i\delta}$ и $e^{-i\delta}$ соответственно. Форма рассматриваемого импульса не изменяется со временем до тех пор, пока он не подойдет близко к оси. Напряженность, очевидно, обратно пропорциональна корню из расстояния от максимума импульса до оси, как это и следует ожидать для цилиндрической волны. На самой оси масштабный фактор ψ имеет значение

$$\psi = \frac{2Ca}{a^2 + T^2}. \quad (9)$$

Второй масштабный фактор γ определяется с точностью до постоянной величины путем интегрирования формул (3) и (4), что приводит к следующему выражению:

$$\gamma = \frac{1}{2} C^2 \{ a^{-2} - \varrho^2 [(a - iT)^2 + \varrho^2]^{-2} - \varrho^2 [(a + iT)^2 + \varrho^2]^{-2} - a^{-2} (T^2 + a^2 - \varrho^2) [T^4 + 2T^2 (a^2 - \varrho^2) + (a^2 + \varrho^2)]^{-1/2} \}. \quad (10)$$

¹⁾ Мы признательны У. Боннору за предоставление нам прейннта его работы [5], в которой рассмотрена та же самая форма волны



Ф и г. 1. Цилиндрическая гравитационная волна типа импульса, описываемая уравнением (7), сконцентрирована около радиуса $\rho = -T$ для отрицательных значений T , т. е. в период, когда она сходится к оси, и сконцентрирована около $\rho = +T$, когда она расходится от оси симметрии.

График сверху показывает форму импульса, справедливую как во время движения к оси, так и во время движения от оси, когда ρ и T велики по сравнению с шириной импульса a . На диаграмме внизу даны приближенные выражения для формы импульса в отдельных областях плоскости (ρ, T) . Символы r и ρ употребляются на равных правах. Асимптотическое значение масштабной постоянной γ внутри светового конуса взято равным нулю, откуда следует, что асимптотическое значение γ всюду в промежуточной зоне есть постоянная величина:

$$\gamma_{\text{асимпт.}} = \int_0^{\infty} \rho (\psi_0^2 + \psi_T^2) d\rho.$$

Выберем некоторый фиксированный момент времени T и возьмем произвольно малую величину ϵ . Попытаемся описать вокруг начала координат сферу столь большого радиуса R , чтобы масштабные факторы ψ и γ были меньше ϵ всюду на поверхности этой сферы. Этого сделать нельзя, ибо такой сферы не существует. Метрика всюду регулярна, но она не становится асимптотически плоской в указанном смысле.

§ 3. Обращение в нуль плотности псевдотензора энергии-импульса

При оценке псевдотензора энергии-натяжений рассмотрим не только монохроматическую волну (5) и импульс (7), не только наиболее общее решение уравнений (2)–(4) для пустого пространства, но также и случай, когда присутствует негравитационная энергия. Тогда уравнения поля (2)–(4) больше уже не имеют места. Однако мы ограничимся случаем, когда тензор энергии-натяжений T_{ik} для этой добавочной негравитационной энергии цилиндрически симметричен и метрика все еще имеет форму (1).

Как известно, псевдотензор t_{ik} гравитационного натяжения и энергии не однозначно определяется локальным законом сохранения, т. е. требованием равенства нулю дивергенции:

$$(-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)^{1/2} (T_k^\alpha + t_k^\alpha)] = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (11)$$

Мы принимаем обычный эйнштейновский выбор псевдотензора энергии-натяжений, сформулированный Толменом [6]¹⁾ следующим образом:

1) Определим плотность функции Лагранжа

$$\mathcal{L} = (-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\nu - \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\nu). \quad (12)$$

2) Введем величину

$$s_i^{km} = \frac{c^4}{8\pi G} g^{k\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{i\lambda}^m}, \quad (13)$$

¹⁾ См. также [7] и особенно [8], гл. 11.

где g^{il} — сокращенная запись производной $\partial g^{il}/\partial x^m$. Тогда дивергенция этой величины дает выражение для полного псевдотензора энергии-натяжений

$$T_i^k + t_i^k = (-g)^{-1/2} \frac{\partial s_i^{k\mu}}{\partial x^\mu}, \quad (14)$$

которое удовлетворяет закону сохранения (11).

Расчет выражений (12)–(14) упрощается вследствие диагонального характера метрики. Мы находим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_4^{44}} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_1^{44}} = \frac{1}{2} (-g)^{1/2} g^{11} g_{44} \left(g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \quad (15)$$

и отсюда получаем значения s_4^{41} и s_4^{44} . Мы не интересуемся значениями s_4^{42} и s_4^{43} , так как их производные соответственно по $x^2 = z$ и $x^3 = \varphi$ равны нулю.

Мы приходим к тождественно равному нулю значению для плотности энергии:

$$T_4^4 + t_4^4 = (-g)^{-1/2} \frac{c^4}{16\pi G} \frac{\partial}{\partial x^1} (-g)^{1/2} g^{11} \left(g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) + \frac{c^4}{8\pi G} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(-1 + 2\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} - 2\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right) = 0. \quad (16)$$

Иными словами, если материя отсутствует, то плотность гравитационной псевдоэнергии (компонента t_4^4 псевдотензора энергии-импульса) равна нулю, как это уже было показано Розеном [2]. Если материя присутствует, правые части уравнений поля (2)–(4) должны быть исправлены, но расчет плотности энергии (16) остается в силе. Гравитационное поле автоматически подстраивается таким образом, чтобы плотность псевдотензора энергии гравитационного поля была равна и противоположна по знаку плотности всех прочих форм энергии. Подобным образом гравитационный вклад в плотность импульса в радиальном направлении в точности компенсирует все прочие вклады в этот импульс:

$$T_4^1 + t_4^1 = 0. \quad (17)$$

Результаты (16) и (17), несмотря на свою внушительность, бессмысленны. Величина T_{ik} есть тензор, однако t_{ik} не является тензором. Преобразование координат не изменяет значений четырех независимых инвариантов I_p тензора T_{ik} , определяемых соотношением

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \lambda^3 I_1 + \lambda^2 I_2 + \lambda I_3 + I_4 = \\ & = \begin{vmatrix} (\lambda + T_1^1) & T_1^2 & T_1^3 & T_1^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_4^1 & T_4^2 & T_4^3 & (\lambda + T_4^4) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (18)$$

Соответствующие величины i_1, i_2, i_3, i_4 для псевдотензора t_{ik} не инвариантны; им можно придать в любой точке произвольные значения путем подходящего преобразования координат, или путем изменения определения (14) псевдотензора энергии, совместимого с законом сохранения (11), или же путем какой-либо комбинации этих способов.

С физической точки зрения не имеет смысла утверждать, что плотность гравитационной энергии равна нулю или что поток гравитационной энергии обращается в нуль. Никакой эксперимент не позволяет проверить, равны ли эти величины нулю. Плотность *других* форм энергии может быть измерена по гравитационным полям, которые они вызывают. Но энергия гравитационного поля сама не фигурирует как источник в эйнштейновских уравнениях поля, так что не имеет смысла говорить о плотности *локализованной* гравитационной энергии, как об источнике измеряемого гравитационного поля.

Только полная энергия имеет вполне определенное значение, и то только в том случае, если удовлетворяется ряд весьма специальных условий. Например, для замкнутой Вселенной не имеет смысла такая величина, как полная энергия [6]; здесь интегральные законы сохранения сводятся к тривиальному тождеству: $0 = 0$. Для определения полной энергии необходимо, чтобы метрика становилась асимптотически плоской. Точнее, должна существовать система координат, в которой компоненты метрического тензора переходят в соответствующие компо-

ненты плоского эвклидова пространства по крайней мере как $1/r$ (r — расстояние от начала координат). Тогда гравитационное поле убывает как $1/r^2$ или быстрее, и поверхностный интеграл позволяет однозначно вычислить массу или энергию системы. Это условие не выполняется в случае бесконечной цилиндрической гравитационной волны¹⁾.

¹⁾ Мы признательны проф. М. Фирцу за разрешение процитировать выдержку из его письма к нам от 14 мая 1957 г.

«Итак, мы имеем $\gamma(\infty, T) = \text{const}$, т. е. не зависит от T [из уравнения (4)]. Пусть $\psi(q, T)$ — волновой пакет, удовлетворяющий уравнению (2); мы можем предположить, что $\psi(q, T) = 0$ при $q > R$, — это, конечно, не соответствует строго действительности, однако практически мы можем представить себе, что ψ обладает конечной протяженностью. Теперь мы имеем при $q \gg R$:

$$ds^2 = e^{2\gamma} (dq^2 - dT^2) + q^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

где γ — положительная постоянная, а именно «энергия» волнового поля ψ в обычном смысле слова:

$$\gamma(\infty, T) = \int_0^{\infty} q (\psi_q^2 + \psi_T^2) dq = \text{const}.$$

(Здесь γ нормировано таким образом, чтобы оно равнялось нулю на оси.) Полагая $q' = e^\gamma q$, $T' = e^\gamma T$, $\varphi' = e^{-\gamma} \varphi$, имеем

$$ds^2 = -dT'^2 + dq'^2 + q'^2 d\varphi'^2 + dz^2.$$

Этот интервал имеет такой же вид, как и в случае псевдоевклидова пространства. Однако пределы изменения φ' не $0 \rightarrow 2\pi$, а $0 \rightarrow e^{-\gamma} 2\pi$. Это означает, что геометрия на «плоскости» $T = \text{const}$, $z = \text{const}$ есть геометрия на некоторой конической поверхности. Это остается справедливым с той точностью, с какой мы пожелаем, для любого T , если q (или q') достаточно велико. Итак, если мы допустим, что ψ всюду регулярен, то геометрия оказывается «нерегулярной» на бесконечности ($q \rightarrow \infty$), т. е. она не будет псевдоевклидовой, хотя кривизна и обращается в нуль при больших q . При таком рассмотрении проблемы становится очевидным, что отклонение от эвклидовости не является следствием выбора координатной системы. Это особое поведение представляет собой свойство в большом».

Этот прекрасный анализ Фирца подсказывает идею, как можно определить некоторую величину типа энергии на единицу длины цилиндрически симметричной гравитационной волны и показывает, далее, что эта величина типа энергии является положительно определенной. Имеется некоторая весьма интересная аналогия между коническим пространством Фирца и искривленным пространством с метрикой Шварцшильда в следующем смысле: в обоих случаях имеется отклонение от эвклидового характера, интегральное значе-

Чтобы иметь корректно определенную энергию, волна должна быть ограничена конечной областью пространства. Рассмотрим поэтому гравитационную волну, сходящуюся не на прямой, а на окружности. Пусть ширина импульса a будет очень малой по сравнению с радиусом b окружности. Пусть для простоты начальные условия задачи заданы в момент $T=0$, когда импульс максимально стянут. Мы потребуем, чтобы масштабные факторы в этот момент удовлетворяли формулам

$$\begin{aligned} \psi &\sim 2C (a^2 + \varrho^2)^{-1/2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0, \\ \gamma &\sim \frac{C^2}{a^2} \left[\left(1 + \frac{a^2}{\varrho^2} \right)^{-2} - 1 \right], \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

ние которого на поверхности радиуса ρ , или r , не зависит от r и является мерой полной энергии, заключенной внутри этой поверхности. Конечно, площадь ограничивающей поверхности быстрее возрастает с r во втором случае, чем в первом; соответственно отклонение от эвклидового характера остается постоянным (оно измеряется величиной $\Delta \varphi$) в случае цилиндрического поля и уменьшается с r в случае сферического поля. По этому вопросу мы отсылаем читателя также к обсуждению Фирца в конце работы [2].

Мы признательны Ч. Мизнеру за важное дополнительное замечание относительно возможности определения энергии в системе, которая не является асимптотически эвклидовой, и особенно в замкнутой Вселенной. Ландау и Лифшиц [8] [соотношение (98.12)] показали, что четырехмерный вектор энергии-импульса может быть представлен в виде некоторого интеграла по замкнутой двумерной поверхности, ограничивающей трехмерный пространственно-подобный объем: $P^\beta = \int h^{\beta\alpha} dS^*_{\alpha}$. Если трехмерное пространство замкнуто, то ограничивающая поверхность S может быть стянута в точку. Это обстоятельство могло бы дать повод утверждать, как показано в тексте, что закон сохранения энергии сводится к тривиальному тождеству $0=0$. Однако никакая замкнутая поверхность не может быть покрыта без сингулярности какой-либо одной системой координат. Для этой цели необходимо использовать по крайней мере два «куска» различных систем координат. Но выражение $h^{\beta\alpha}$ зависит от гравитационного псевдотензора энергии-натяжений. Поэтому его значения в двух или более кусках систем координат в областях, где последние смыкаются, не относятся друг к другу так, как это имеет место для значений истинного тензора. Следовательно, как указывает Ч. Мизнер, не ясно, обращается ли в нуль интеграл энергии. Замечания Фирца и Мизнера выдвигают следующий вопрос. Не существует ли в общей теории относительности для замкнутого пространства какой-либо совершенно общим образом определенной величины типа энергии, которая пока еще ясно не сформулирована?—Прим. авт. при корректуре.

соответствующим (7) и (10), при условии, что расстояние q — измеряемое теперь от окружности — мало по сравнению с радиусом b последней. Теперь мы имеем вместо цилиндрической гравитационной волны тороидальную гравитационную волну. До момента $T=0$ эта волна сходится к окружности, а в последующие моменты волна расходится от нее. Если волна достаточно слабая ($C \ll a$), то для рассмотрения ее поведения можно применить известную линеаризованную теорию гравитационных волн или даже принцип Гюйгенса. При очень больших значениях T она будет асимптотически приближаться к картине сферической волны. С качественной стороны волна будет вести себя подобным образом и при больших значениях безразмерной характеристики интенсивности C/a , но в этом случае анализ усложняется.

Возникает вопрос: будет ли тороидальная гравитационная волна обладать какой-либо энергией? В силу законов сохранения ответ на этот вопрос для какого-либо момента времени будет ответом и для любого другого момента. Поэтому выберем момент времени $T=0$ максимальной концентрации волны. Так как возмущение ограничено конечной областью пространства, то можно предположить, что метрика является асимптотически плоской. Это дает возможность определить полную энергию или массу гравитационной волны. Но однозначно ли определена эта энергия? Не может ли она быть определена по усмотрению путем выбора произвольных значений для коэффициентов при $1/r$ в асимптотических формулах для пространственной части метрики

$$ds^2 \sim \left(1 + \frac{GM}{2c^2 r}\right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (20)$$

Не является ли выбор начальных условий для гравитационной волны в момент $T=0$ произвольным? Не означает ли существование этой свободы, что не имеет смысла говорить о гравитационной энергии и гравитационных волнах?

Никакой подобной свободы не существует [9]. Пусть $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) представляют собой пространственную часть метрики в момент $T=0$ и пусть через $R^{(3)}$ обозначена скалярная кривизна этого трехмерного пространства. Далее,

введем шесть величин $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) со следом $\varphi = \varphi_{\gamma}^{\gamma}$, характеризующих скорость изменения метрики во времени

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial T} = \varphi_{\alpha\beta}. \quad (21)$$

Тогда трехмерный «тензор скорости деформации» $\varphi_{\alpha\beta}$ должен удовлетворять в трехмерном пространстве, при $T = 0$, уравнениям Лишнеровица и Фурес-Брюа:

$$\begin{aligned} (\varphi_{\alpha}^{\beta} - \delta_{\alpha}^{\beta}\varphi)_{;\beta} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3), \\ \varphi^2 - \varphi_{\alpha\beta}\varphi^{\alpha\beta} + R^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (22)$$

При $T = 0$ первые производные по времени от всех метрических компонент обращаются в нуль. Из (22) следует, что *трехмерный скаляр кривизны метрики $g_{\alpha\beta}$ должен всюду обращаться в нуль в момент $T = 0$:*

$$R^{(3)} = 0 \text{ при } T = 0. \quad (23)$$

Этому требованию автоматически и точно удовлетворяет линейный элемент (20). Но этот линейный элемент является асимптотической формой метрики тороидальной волны. Поэтому (23) представляет собой дифференциальное уравнение для метрики, которое связывает ее асимптотическое поведение (определяемое параметром M) с ее поведением в области концентрации энергии, так что (23) *дает возможность определить «массу», или энергию, гравитационной волны.*

Наиболее общая чисто гравитационная волна, симметричная по отношению к моменту $T = 0$, удовлетворяет уравнению (23). Особый класс таких решений может быть записан в форме:

$$ds^2 = f^4(x, y, z) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (24)$$

где f удовлетворяет уравнению Лапласа (см. [10], стр. 90, соотношение (28.7))

$$\nabla^2 f = 0$$

За исключением тривиального постоянного решения, все решения этого уравнения где-нибудь расходятся, как это видно на примере (20). Следовательно, всюду регулярные

решения уравнения (23) не могут быть записаны в форме (24). Мы пока еще не нашли какой-либо схемы для построения и систематизации всех таких регулярных решений. Решение этой задачи является центральным вопросом дальнейшего изучения симметричных во времени гравитационных волн.

§ 4. Цилиндрическая гравитационная волна порождает отличную от нуля кривизну

В дальнейшем мы будем рассматривать цилиндрическую гравитационную волну как идеализированный предел тороидальной гравитационной волны, обладающей конечной и разумным образом определенной энергией, когда радиус b тора очень велик по сравнению со всеми другими встречающимися физическими размерами.

Чтобы убедиться, что эта волна не является фиктивной «координатной» волной в пространстве, являющемся в действительности плоским, достаточно рассмотреть риманов *тензор* кривизны R_{ijkl} . Если бы пространство в действительности было плоским, этот тензор обращался бы в нуль в некоторой системе координат, а следовательно, и во всех системах координат. Однако непосредственный расчет с метрикой (1) [без использования уравнений поля (2) — (4)] дает следующие выражения для компонент тензора кривизны:

$$\begin{aligned}
 R_{1\ 14}^4 &= \gamma_{TT} - \gamma_{\theta\theta} - \psi_{TT} + \psi_{\theta\theta}, \\
 R_{1\ 12}^2 &= \frac{\gamma_\theta + \psi_\theta}{\rho} - \psi_\theta \gamma_\theta + \psi_{\theta\theta} - \psi_T \gamma_T + \psi_T^2, \\
 R_{1\ 42}^2 &= -\psi_\theta \gamma_T + \psi_{T\theta} + \frac{\gamma_T}{\rho} - \psi_T \gamma_\theta + \psi_T \psi_\theta, \\
 R_{1\ 13}^3 &= \psi_T \gamma_T - \psi_T^2 + \psi_\theta \gamma_\theta - 2\psi_\theta^2 - \psi_{\theta\theta}, \\
 R_{1\ 43}^3 &= \psi_T \gamma_\theta - 3\psi_T \psi_\theta + \psi_\theta \gamma_T - \psi_{\theta T}, \\
 R_{2\ 23}^3 &= \rho^{-2} \gamma \rho^2 \left[\psi_\theta^2 - \psi_T^2 - \frac{\psi_\theta}{\rho} \right], \\
 R_{1\ 42}^4 &= \rho^{-2} \gamma \rho^2 \left[\psi_{TT} - \psi_T \gamma_T + \frac{\gamma_\theta - \psi_\theta}{\rho} - \psi_\theta \gamma_\theta + \psi_\theta^2 \right],
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$R_{3,12}^4 = e^{-2\gamma} e^2 \left[\psi_{TQ} - \psi_T \gamma_Q + \frac{\psi_T}{e} + \frac{\gamma_T - \psi_T}{e} - \psi_Q \gamma_T + \psi_Q \psi_T \right],$$

$$R_{3,43}^4 = e^{4\psi - 2\gamma} [\psi_T \gamma_T - 2\psi_T^2 - \psi_{TT} + \psi_Q \gamma_Q - \psi_Q^2].$$

Использование уравнений поля (2) — (4) еще более упрощает эти выражения, но не сводит их все к нулю. Существование этих отличных от нуля компонент доказывает, что цилиндрические гравитационные волны вызывают реальное искривление пространства.

Это отклонение от плоского пространства приводит к реальным физическим эффектам; кривизна изменяет [11] инвариантное расстояние между соседними бесконечно малыми пробными частицами. Следовательно, гравитационной волне, порождающей эти эффекты, следует приписать объективное существование.

§ 5. Реакция пробных частиц на цилиндрическую гравитационную волну

Движение бесконечно малой пробной частицы описывается уравнением геодезической линии

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (26)$$

где величины Γ_{jk}^i можно рассматривать как компоненты гравитационного поля, зависящие, конечно, в соответствии с принципом эквивалентности, от выбора системы координат. В системе координат (1) пробная частица, покоящаяся в какой-то момент относительно этой системы ($dx^1/ds = 0$, $dx^4/ds = 1$), испытывает в этот момент ускорение

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q}{dT^2} = -\Gamma_{44}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^1} = -\frac{\partial \gamma}{\partial Q} + \frac{\partial \psi}{\partial Q} = C^2 Q \left\{ \frac{Q^2 - (a - iT)^2}{[(a - iT)^2 + Q^2]^3} + \right. \\ \left. + \frac{Q^2 - (a + iT)^2}{[(a + iT)^2 + Q^2]^3} + 2 \frac{Q^2 + a^2 + T^2}{[Q^2 + (a - iT)^2]^{3/2} [Q^2 + (a + iT)^2]^{3/2}} \right\} + \\ + C_Q \{ [(a - iT)^2 + Q^2]^{-3/2} + [(a + iT)^2 + Q^2]^{-3/2} \} \quad (27) \end{aligned}$$

со стороны гравитационной волны типа импульса. В частности, частица, покоящаяся в некоторый момент времени

на оси цилиндра, будет оставаться в покое во все последующие моменты времени.

Для рассмотрения движения некоторой частицы, находящейся на некотором расстоянии от оси, проанализируем уравнение движения, ограничившись первым приближением: 1) пренебрежем членами, содержащими C^2 , такими, как γ и их производные, по сравнению с членами, содержащими C ; 2) при вычислении сил будем брать для них значения не в новой, а в исходной точке; 3) будем считать величину dx^4/ds равной 1; и, наконец, 4) будем записывать волну типа импульса в форме

$$\psi \sim f(\varrho + T) \quad (28)$$

для отрицательных значений T , и в форме

$$\psi \sim f(\varrho - T) \quad (29)$$

для положительных значений T . В этом приближении имеем следующие выражения для скорости:

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dT} &\sim \int_{-\infty}^T \frac{d^2\varrho}{dT^2} dT \sim \int_{-\infty}^T \frac{\partial\psi}{\partial T} dT = +\psi(\varrho_0, T) \text{ при } T < 0, \\ \frac{d\varrho}{dT} &\sim -\psi(\varrho_0, T) \text{ при } T > 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Частица испытывает резкий толчок в направлении от оси (см. фиг. 1) приблизительно в момент $T = -\varrho$, а затем более слабое ускорение в направлении к оси, которое останавливает частицу к моменту $T = 0$. Затем слабое ускорение в направлении оси возобновляется и частица приобретает все большую и большую скорость; наконец, примерно при $T = +\varrho$ частица испытывает последнее резкое ускорение в направлении от оси, которое останавливает ее. Смещение частицы в направлении от оси, происходящее до момента $T = 0$, в точности компенсируется последующим перемещением в направлении к оси:

$$\Delta\varrho = \int_{-\infty}^0 \frac{d\varrho}{dT} dT \sim \int_{-\infty}^0 \psi dT = C\pi. \quad (31)$$

Частица в конце концов оказывается там же, где она находилась вначале. Точный же расчет в первом прил

жении, т. е. без замены $\partial\psi/\partial q$ на $\partial\psi/\partial T$, дает для смещения не выражение (31), а

$$\Delta q = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{T'} \frac{\partial\psi}{\partial q} dT' dT = 2C$$

при больших q за промежуток времени от $T = -\infty$ до $T = 0$.

Изменение координаты не является истинной мерой изменения расстояния между пробной частицей и началом координат. В первом приближении это расстояние в момент $T = 0$ дается формулой

$$\begin{aligned} \int (g_{11})^{1/2} dq &= \int_0^{q_0 + \Delta q} e^{\nu - \psi} dq \sim \int_0^{q_0 + \Delta q} (1 - \psi) dq = \\ &= q_0 + \Delta q - \int_0^q \psi dq \sim q_0 + 2C - 2C \ln \frac{2q}{a}. \end{aligned} \quad (32)$$

Частица движется так, что она приближается к оси, а не удаляется от нее¹⁾. Эти результаты показывают, насколько опасно делать какие-либо выводы о движении пробных частиц по изменениям их координат. Вместо этого для измерения воздействия гравитационной волны на частицы

¹⁾ Во втором приближении скорость пробной частицы, первоначально находившейся в точке с координатой q_0 , получается в результате интегрирования уравнения

$$\frac{d^2 q}{dT^2} \sim \left(\frac{\partial\psi}{\partial q} \right)_q + \left(\frac{dq}{dT} \right) \left(\frac{\partial\psi}{\partial T} \right)_{q_0} - \left(\frac{\partial\gamma}{\partial q} \right)_{q_0}.$$

Здесь законно в том же приближении написать

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial q} \right)_q \sim \psi'_0 + (q - q_0)\psi''_0.$$

Интегрирование дает для скорости в момент $T = +\infty$ значения $-2(C^2/a^2)$ и $-(2\pi C^2 q_0/a^3)$ соответственно для больших и малых по сравнению с a значений q_0 . Эта конечная скорость приводит в течение бесконечного промежутка времени к бесконечному перемещению. Это обстоятельство не нарушает справедливости разложения по степеням постоянной C . — Прим. авт. при корректуре.

необходимо пользоваться инвариантными интервалами между частицами. Заметим (см. табл. 1), что главные оси эллипса поляризации лежат в направлениях z и ϕ , несмотря на то обстоятельство, что эти координаты *не изменяются*, в то время как изменяется ρ .

Можно ли извлечь энергию из гравитационной волны? Да, это можно сделать, так как расстояние δz между соседними пробными частицами изменяется с течением времени. Это изменение может быть использовано для приведения в действие какой-либо машины. Откуда же поступает энергия, если установлено, что псевдотензор плотности гравитационной энергии и потока энергии равен нулю в выбранной системе координат? Максимально возможная мощность, поглощаемая машиной, определяется работой гравитационных сил над пробными частицами в единицу времени. Эти силы будут пропорциональными первой степени массы типичной пробной частицы. Следовательно, поток энергии в систему пробных частиц должен быть пропорциональным первой степени массы пробной частицы. Рассмотрим эти величины в приближении слабого поля. Пусть Γ_ω обозначает гравитационное поле цилиндрической волны. Подобным образом, пусть Γ_ρ обозначает гравитационное поле, создаваемое движущимися пробными частицами. Тогда плотность энергии качественно можно записать в виде

$$\Gamma_\omega^2 + 2 \Gamma_\omega \Gamma_\rho + \Gamma_\rho^2.$$

Таблица 1

Изменение расстояния между соседними пробными частицами как соответствующий инвариантный способ описания поляризационных свойств цилиндрической гравитационной волны

Характер расстояния между двумя бесконечно малыми пробными частицами	Происходит ли изменение расстояния, если его определять как изменение	
	координат	инвариантных интервалов
$\delta \rho$	Да	Да
δz	Нет	«
$\rho e^{-\psi} \delta \phi$	$\delta \phi$ не изменяется	«

Первому члену, обусловленному основным полем, можно придать произвольные значения путем соответствующего выбора системы координат, и он оказывается равным нулю в системе координат (1). Средний член описывает поток энергии в принимающую систему.

Подробное описание передачи энергии требует сложного анализа. По аналогии с проблемой взаимодействия электромагнитной волны с одной или двумя пробными частицами можно сделать следующие заключения:

1) реакция частиц, которая характеризуется изменениями инвариантных расстояний между ними, пропорциональна первой степени напряженности поля в приближении слабого поля;

2) переход энергии от возбуждающей волны к системе пробных частиц можно описать при помощи интерференции между первичной волной и вторичной, или рассеянной, волной (см. [12—14]);

3) если пробная система не поглощает, а только рассеивает энергию, то рассеянная энергия, являющаяся величиной второго порядка по напряженности поля пробной частицы, в интегральном значении равна по величине и противоположна по знаку потере энергии первичной волны, которая представляется выражением, линейным относительно поля пробной частицы;

4) в первом порядке относительно напряженности первичного поля первичная волна движет пробную частицу только в поперечном направлении, а во втором порядке по напряженности первичного поля имеет место также движение пробной частицы вперед и назад.

Заряженная частица под действием электромагнитной волны описывает «восьмерку», не совершая в этом втором приближении какого-либо систематического движения вперед. Только при учете реакции излучения вторичной волны на пробную частицу получается отставание по фазе в движении по «восьмерке» и возникает результирующий импульс вперед, сообщаемый заряду. Радиационное давление появляется только при учете рассеяния. Все эти результаты согласуются с законами сохранения.

Итак, аналогия между гравитационной и электромагнитной волнами легко позволяет получить ряд важных заключений. Смысл этих выводов в случае гравитации

значительно менее прозрачен, чем в электромагнитном случае. Ни плотность энергии поля, ни движение пробной частицы не имеют какого-либо смысла, не зависящего от выбора системы координат. Вместо этого простыми наблюдаемыми следствиями воздействия волны являются *изменения* расстояний между различными соседними пробными частицами — изменения, которые в большей степени связаны с ковариантными компонентами тензора кривизны R_{ijkl} , нежели с нековариантными напряжениями поля Γ_{jk}^i . Этот более сложный характер проблемы наблюдения в гравитационной физике находится в полном соответствии с принципом эквивалентности Эйнштейна.

Этот принцип не отрицает физической реальности гравитационного излучения, а напротив того, приводит к единственному определенному способу, при помощи которого выражается влияние этого излучения—через его воздействие на инвариантные пространственно-временные интервалы, такие, как интервалы между двумя пробными телами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scheidegger A. E., Rev. Mod. Phys., **25**, 451 (1953).
2. Rosen N. в сборнике «Jubilee of Relativity Theory», Basel, 1956.
3. Einstein A., Rosen N., Journ. Frankl. Inst., **223**, 43 (1937).
4. Rosen N., Bull. Res. Council. Israel, **3**, 328 (1953).
5. Вонног W. B., Journ. Math. and Mech., **6**, 203 (1957).
6. Tolman R. C., Phys. Rev., **35**, 875 (1930).
7. Møller C., The Theory of Relativity, Oxford, 1952.
8. Ландау Л., Лифшиц Е., Теория поля, М.—Л., 1948.
9. Fourès-Bruhat Y., Journ. Rational Mech. Anal., **5**, 951 (1956).
10. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1926 (см. перевод: Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, ИЛ, 1948).
11. Pirani F., в Proc. Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics, 1957.
12. Bohr, Peierls, Placzek, Nature, **144**, 200 (1939).
13. Mott N. F., Massey H. S. W., Theory of Atomic Collisions, Oxford, 1949 (см. перевод: Мотт Н. и Мессии Г., Теория атомных столкновений, ИЛ, 1951).
14. Mott N. F., Proc. Roy. Soc., **A133**, 228 (1931).

11. ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ МАССА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Г. Бонди

H. Bondi, Rev. Mod. Phys., 29, 423—428 (1957)

1.

Хотя некоторые соображения относительно отрицательной массы совершенно элементарны и хорошо известны, тем не менее целесообразно снова обсудить смысл этого понятия. Прежде всего, не углубляясь в детали, можно различать три аспекта массы соответственно тому способу измерения, которым она определяется: инертную, пассивную гравитационную и активную гравитационную массы. Инертная масса — это величина, которая вводится (и определяется) вторым законом Ньютона¹⁾; пассивная гравитационная масса — это масса, на которую действует гравитационное поле, т. е. она определяется формулой $F = -m \text{grad} V$; активная гравитационная масса — это масса, которая является источником гравитационных полей²⁾ и, следовательно, это та масса, которая входит в уравнение Пуассона и теорему Гаусса.

В ньютоновой физике закон действия и противодействия подразумевает равенство активной и пассивной гравитационных масс, равенство же инертной массы с этими двумя представляет собой отдельный эмпирический факт. Знак этих обеих масс может принимать любое значение, и тот факт, что он всегда положителен, является дополнительным эмпирическим результатом. Если же не принимать во внимание этот опытный факт, то возникают четыре возможных случая.

1) Все массы положительные; это — обычный случай.

¹⁾ По понятным причинам здесь следует использовать силы, не зависящие от массы (например, силы электромагнитной природы).

2) Инертная масса — отрицательная, гравитационная масса — положительная. Тело, состоящее из вещества такого рода, необычно реагирует на все силы, как гравитационные, так и силы другой природы, но порождает гравитационные силы точно такие же, как обычное тело.

3) Инертная масса — положительная, гравитационные массы — отрицательные. В этом случае мы имели бы дело с обычным поведением по отношению ко всем негравитационным силам, однако гравитационное взаимодействие между массой этого типа и массой типа «1» определялось бы законом Кулона с отрицательным знаком; это значит, что массы одного знака притягивались бы, а массы разных знаков — отталкивались.

4) Все массы отрицательные. Этот случай представляет собой комбинацию случаев 2 и 3. Такого рода материя необычно реагировала бы на негравитационные силы, реагировала бы подобно обычной материи на гравитационные силы, однако порождала бы отталкивающие гравитационные поля.

В общей теории относительности ситуация совсем иная. Принцип эквивалентности является не отдельным фактом, а основой теории. В соответствии с этим отношение инертной массы к пассивной гравитационной массе одно и то же для всех тел. Соотношение между активной и пассивной гравитационными массами не фиксируется каким-либо условием типа третьего закона Ньютона, так как для этого потребовались бы интегралы по конечным областям пространства-времени, которые не обладают требуемым тензорным характером. В этом направлении был выполнен ряд работ (см., например, [1, 2]), которые дают основание считать, что этот вопрос является более сложным.

Поскольку теория относительности рассматривается только как теория тяготения, инертная и пассивная гравитационная массы фактически не фигурируют в теории. Активная гравитационная масса входит в теорию прежде всего в качестве постоянной интегрирования в шварцшильдовском решении. Если эту постоянную считать положительной, то пробные частицы, в первом приближении, будут описывать ньютоновские орбиты, соответствующие притяжению тел. Однако если эту постоянную считать отрицательной, то тогда, в первом приближении, пробные

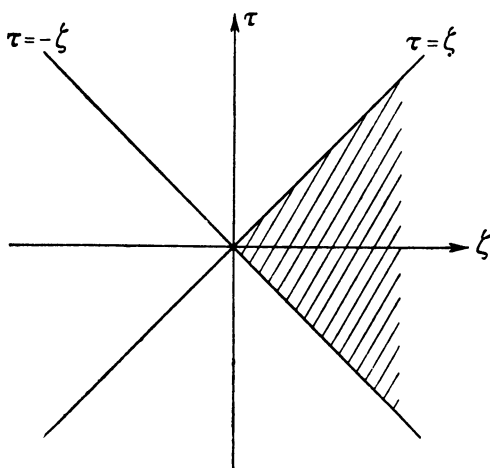
частицы будет описывать орбиты, соответствующие ньютоновскому случаю с отталкиванием. Отметим, что в первом случае *все* тела будут притягиваться, во втором — *все* тела будут отталкиваться.

Если мы теперь перейдем к задаче двух тел, то возникает удивительная ситуация. Представим себе тело с положительной массой и тело с отрицательной массой, разделенные пустым пространством. Тогда, на языке ньютоновского приближения, тело с положительной массой будет притягивать тело с отрицательной массой (ибо оно притягивает все тела), в то время как тело с отрицательной массой будет отталкивать тело с положительной массой (ибо оно отталкивает все тела). Если движение происходит вдоль линии, соединяющей центры тел, то можно ожидать, что такая пара будет двигаться с постоянным ускорением. Для подтверждения этого удивительного результата требуется, конечно, построить полную модель в рамках общей теории относительности.

2.

Несмотря на то, что равномерно ускоренные системы в общей теории относительности (и в специальной теории относительности) хорошо известны [3], имеет смысл напомнить здесь кратко основные свойства таких систем. Ньютоновская концепция постоянного ускорения может быть обобщена на случай специальной теории относительности несколькими путями, но один из них имеет особое значение, с точки зрения сохранения свойства стационарности. В этом случае система описывается уравнением $\zeta^2 - \tau^2 = \text{const}$. Орбиты всех частиц в плоскости $\tau - \zeta$ образуют систему равнобедренных гипербол с фиксированными асимптотами (расположенными под прямым углом друг к другу). Все эти частицы имеют некоторое ускорение, которое постоянно в том смысле, что движение каждой частицы, рассматриваемое с точки зрения этой частицы, является постоянным во времени. Однако, хотя ускорение каждой точки постоянно, ускорение различных точек неодинаково. Грубо говоря, чем ближе к началу координат проходит траектория частицы, тем больше ускорение последней. Замечательной особенностью этой системы является ее стационарный характер.

Если какой-либо частице сопутствует наблюдатель, измеряющий расстояние до любой другой частицы, принимающей участие в движении, то он найдет, что это расстояние остается постоянным во времени, хотя по отношению к неподвижному наблюдателю он и эта другая частица



Фиг. 1. Заштрихованная область справа соответствует полупространству $z \geq 0$, а также целому пространству $(\bar{t}, \bar{r}, \bar{z}, \theta)$.

будут иметь различные ускорения. Обычная метрика Минковского может быть преобразована к равномерно ускоренной системе отсчета путем преобразования

$$\tau = z \operatorname{sh} t, \quad \zeta = z \operatorname{ch} t, \quad \xi = x, \quad \eta = y,$$

приводящего к метрике

$$ds^2 = z^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ясно, что эта метрика не распространяется на все пространство, а ограничивается частями асимптот, которые выступают в качестве горизонтов, и, следовательно, метрика охватывает только четверть пространства-времени (фиг. 1).

Обратимся теперь к задаче о построении в общей теории относительности модели двух тел, массы которых

имеют противоположный знак. В соответствии с изложенным мы используем равномерно ускоренную систему отсчета и затем поместим в нее два конечных тела с массами противоположного знака. В равномерно ускоренной системе отсчета эта система будет обладать аксиальной симметрией, и поэтому мы можем использовать [4] метрику Вейля и Леви-Чивиты. Для этой метрики в пустом пространстве мы имеем

$$ds^2 = e^{2\varphi} d\bar{t}^2 - e^{-2\varphi} [e^{2\sigma} (d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2) + \bar{r}^2 d\theta^2], \quad (1)$$

где $\varphi = \varphi(\bar{r}, \bar{z})$ и $\sigma = \sigma(\bar{r}, \bar{z})$ удовлетворяют уравнениям

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right] \varphi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{r}} = \bar{r} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} = 2\bar{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}. \quad (4)$$

[Оператор, фигурирующий в уравнении (2), будем обозначать через ∇^2 .] Как известно, для этой метрики имеется некоторое условие совместности [4]. Здесь для наших целей целесообразно записать это условие в форме, несколько отличной от той, в которой оно обычно применяется.

Для любого замкнутого контура C , целиком расположенного в пустом пространстве (хотя, возможно, и охватывающего область, где присутствует материя), из уравнений (3) и (4), используя теорему Грина, имеем

$$0 = \oint_C \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \bar{r}} d\bar{r} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right] = \oint_C \left\{ \bar{r} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] d\bar{r} + \right. \\ \left. + 2\bar{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right\} = 2 \int \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \nabla^2 \varphi \bar{r} d\bar{r} d\bar{z}, \quad (5)$$

где интеграл берется по части меридиональной плоскости, ограниченной контуром C . Здесь мы принимаем, что во всей области метрика имеет вид (1), хотя она не обязательно должна удовлетворять уравнениям (2) — (4).

В действительности метрика (1) не является самой общей метрикой для статической аксиально симметричной области, содержащей материю, но она является достаточно общей для той модели, которую мы хотим построить. Легко показать, что

$$-\kappa\rho = -\kappa T_0^0 = e^{2(\varphi-\sigma)} \left[-2\nabla^2\varphi + \nabla^2\sigma - \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma}{\partial r} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right], \quad (6)$$

$$-\kappa\rho_{11} = -\kappa T_1^1 = \kappa T_2^2 = \kappa\rho_{22} = e^{2(\varphi-\sigma)} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\sigma}{\partial r} - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right], \quad (7)$$

$$-\kappa\rho_{33} = -\kappa T_3^3 = e^{2(\varphi-\sigma)} \left[\nabla^2\sigma - \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma}{\partial r} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right], \quad (8)$$

$$-\kappa T_{12} = 2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma}{\partial z}. \quad (9)$$

Характер ограничений, которые влечет за собой использование метрики (1), ясно проявляется в уравнении (7). Условие, чтобы T_{12} было конечным на оси, означает, что $\sigma = \text{const}$ при $\bar{r} = 0$. Без ограничения общности можно положить $\sigma = 0$ при $\bar{r} = 0$. Если мы предположим, что на линии $\bar{r} = 0$ материя отсутствует, то это условие также вытекает из соотношения (5).

Теперь мы можем построить ньютоновский аналог нашей системы, в которой \bar{r} , \bar{z} , θ представляют собой цилиндрические полярные координаты, а φ — гравитационный потенциал (в гравитационных единицах). В пустом пространстве φ удовлетворяет уравнению Лапласа (2). Кроме того, пока φ — малая величина, из уравнений (3) и (4) следует, что σ есть малая величина второго порядка. Тогда уравнение (6) с точностью до величин второго порядка совпадает с уравнением Пуассона, в то время как уравнения (7) — (9) показывают, что натяжения малы по сравнению с плотностью.

Смысл условия совместности (5) теперь ясен: оно означает, что z -компонента гравитационной силы на поверхности любого тела, окруженного пустым пространством, должна обращаться в нуль. Так как остальные компоненты равны нулю в силу симметрии, условие (5) является просто ньютоновским условием равновесия. Теперь φ можно рассматривать как *точный* ньютоновский потенциал ньютоновского аналога нашей системы, хотя плотность ньютоновской системы не будет в точности совпадать с плотностью релятивистской системы.

В силу линейности уравнения Лапласа, мы можем, конечно, воспользоваться принципом суперпозиции решений. В частности, если имеется два тела [т. е. две отдельные области, в которых не выполняется уравнение (2)], то два соответствующих решения могут быть суперпонированы при условии, что соотношение (5) выполняется для каждого тела в отдельности. Приведем теперь несколько теорем из ньютоновской теории тяготения.

1. Если $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $\nabla^2\varphi = 0$ всюду, за исключением отдельной конечной замкнутой области, то условие (5) выполняется.

2. Если $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $\nabla^2\varphi = 0$ всюду, за исключением некоторой конечной замкнутой области, которая целиком лежит внутри области $\bar{z} < a$ и в которой $\nabla^2\varphi \geq 0$, то $\partial\varphi/\partial\bar{z} \geq 0$ для всех $\bar{z} \geq a$.

3. Если $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ и $\nabla^2\varphi = 0$ всюду, за исключением двух конечных областей, одна из которых целиком лежит в области $\bar{z} < a$, а другая — в области $\bar{z} > a$, и в каждой из которых $\nabla^2\varphi$ не меняет знака, то в этом случае условие (5) не может быть выполнено. Этот важный результат следует из теорем «1» и «2». Если φ разбить на две части, φ_1 и φ_2 , так что φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме области, занимаемой телом 1, и φ_2 — всюду, кроме области, занимаемой телом 2, то условие (5) для тела 1 требует, чтобы

$$\iint \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{z}} \nabla^2\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar{z}} \nabla^2\varphi_1 \right] \bar{r} \, dr \, d\bar{z} = 0.$$

Первый член обращается в нуль в силу теоремы «1»; второй же член вследствие теоремы «2» не может быть

равным нулю. Эта теорема показывает, что в общей теории относительности не существует статического решения задачи двух тел, если каждое из этих тел состоит из материи одного знака, если тела расположены по противоположным сторонам от поверхности $z = \text{const}$ и если метрика на бесконечности совпадает с метрикой Минковского. Теперь мы покажем, что если отбросить последнее условие, то такое решение окажется возможным.

3.

Метрика равномерно ускоренной системы

$$ds^2 = z^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (10)$$

может быть преобразована к форме (1) Вейля — Леви-Чивиты с помощью преобразования

$$\begin{aligned} t &= \bar{t}, \\ z &= e^\varphi, \\ (x^2 + y^2)^{1/2} &= \bar{r}e^{-\varphi}, \\ \text{arctg } \frac{y}{x} &= \theta, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \{ [\bar{r}^2 + (\bar{z} - a)^2]^{1/2} + (\bar{z} - a) \}, \quad (12)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\bar{z} - a) [\bar{r}^2 + (\bar{z} - a)^2]^{-1/2} \right\} \quad (13)$$

и a — произвольная постоянная.

Это φ , которое мы будем обозначать через φ_0 , удовлетворяет уравнению Лапласа во всей интересующей нас части пространства, т. е. за исключением области $\bar{r} = 0$, $\bar{z} \leq a$. Как было выяснено ранее, метрика равномерно ускоренной системы представляет только часть пространства-времени и тем самым сингулярность при $\bar{r} = 0$, $\bar{z} \leq a$ не должна вызывать удивление.

Заметим, что при $\bar{z} > a$, $\partial\varphi_0/\partial\bar{z} > 0$.

Рассмотрим теперь задачу двух тел, подобно тому как это было сделано выше (теорема «3»), но добавим потен-

циал φ_0 . Это означает, что мы отказываемся от граничного условия, требующего, чтобы пространство на бесконечности имело метрику Минковского, и заменяем его граничным условием, соответствующим равномерно ускоренной системе отсчета в пространстве-времени, которое на бесконечности является плоским. Если оба тела расположены в области $\bar{z} > a$ и если внутри тела, расположенного в области с меньшим значением \bar{z} (тело 1), $\nabla^2\varphi_1 \leq 0$, в то время как внутри другого тела (тело 2) $\nabla^2\varphi_2 \geq 0$, то при надлежащих условиях соотношение (5) может быть удовлетворено, поскольку в этом случае внутри тела 1 $\partial\varphi_2/\partial\bar{z} < 0$ и внутри тела 2 $\partial\varphi_1/\partial\bar{z} < 0$. Так как $\partial\varphi_0/\partial\bar{z} > 0$ в обеих областях, то доказательство, опирающееся на знак подынтегрального выражения и показывающее, что интересующая нас система невозможна, теперь не имеет силы.

Чтобы установить возможность существования исследуемой системы, поступим следующим образом. Пусть B_1 и B_2 , представляют собой две конечные области пространства, причем B_1 целиком лежит в $\bar{z}_1 \leq \bar{z} \leq \bar{z}'_1$, а B_2 — в $\bar{z}_2 \leq \bar{z} \leq \bar{z}'_2$, где $\bar{z}'_1 < \bar{z}_2$. Пусть φ_1 удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне B_1 , причем $\varphi_1 \rightarrow 0$ на бесконечности и $\nabla^2\varphi_1 \leq 0$ в B_1 . Подобным образом, пусть φ_2 удовлетворяет уравнению Лапласа вне B_2 , стремится к нулю на бесконечности, но $\nabla^2\varphi_2 \geq 0$ в B_2 . Рассмотрим теперь выражение

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + l\varphi_2, \quad (14)$$

где a , входящая в φ_0 , есть некоторая постоянная, а k и l — постоянные, которые будут определены позже, причем $l, k > 0$ и $a < \bar{z}_1$. Если условие (5) выполняется для B_1 и B_2 , то должно иметь место

$$k \iint_{B_1} \bar{r} d\bar{r} d\bar{z} \nabla^2\varphi_1 \left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial\bar{z}} + l \frac{\partial\varphi_2}{\partial\bar{z}} \right] = 0 \quad (15)^1$$

и

$$l \iint_{B_2} \bar{r} d\bar{r} d\bar{z} \nabla^2\varphi_2 \left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial\bar{z}} + k \frac{\partial\varphi_1}{\partial\bar{z}} \right] = 0. \quad (16)^1$$

¹⁾ Мы опускаем в (15) и (16) член ньютоновского «самодействия» $\nabla^2\varphi_s (\partial\varphi_s/\partial\bar{z})$, так как при интегрировании он дает нуль в силу теоремы 1.

Поскольку уравнение (15) можно сократить на k , его можно рассматривать как уравнение, определяющее l . Кроме того, так как в B_1

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} > 0 > \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}, \quad (17)$$

то l должно быть положительной величиной. Аналогичным образом уравнение (16) определяет некоторое положительное k .

Итак, все условия задачи удовлетворены, и тем самым нам удалось построить модель равномерно ускоренной пары тел, плотности которых имеют противоположные знаки.

В качестве примера можно рассмотреть случай, когда $a = 0$ и

$$\varphi_1 = \begin{cases} -\frac{m_1}{[\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_1)^2]^{1/2}} & (\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_1)^2 \geq a_1^2), \\ \frac{m_1}{2a_1^3} [\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_1)^2] - \frac{3m_1}{2a_1} & (\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_1)^2 \leq a_1^2), \end{cases} \quad (18)$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} -\frac{m_2}{[\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_2)^2]^{1/2}} & (\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_2)^2 \geq a_2^2), \\ \frac{m_2}{2a_2^3} [\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_2)^2] - \frac{3m_2}{2a_2} & (\bar{r}^2 + (\bar{z} - h_2)^2 \leq a_2^2). \end{cases} \quad (19)$$

Здесь, для простоты, можем взять в качестве свободных параметров h_1 и h_2 , а не k и l .

Так как $\nabla^2 \varphi_2 = \text{const}$ в области B_2 , то условие (16) принимает вид

$$0 = \int \int_{B_2} \bar{r} d\bar{r} d\bar{z} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]. \quad (20)$$

Если $a_2 \ll h_2 - h_1$, то это условие эквивалентно

$$\left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right]_{\bar{z}=h_2, \bar{r}=0} = 0 \quad (21)$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{2h_2} = -\frac{m_1}{(h_2 - h_1)^2}. \quad (22)$$

Следовательно, m_1 — отрицательная величина.

Аналогично, если $a_1 \ll h_2 - h_1$ и $a_1 \ll h_1$, мы должны иметь

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{\bar{z}=h_1, \bar{r}=0} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{1}{2h_1} = \frac{m_2}{(h_2 - h_1)^2}. \quad (24)$$

Отсюда следует, что в обоих телах производные φ_0 того же порядка величины, что и производные потенциалов, порождаемых самими телами. Если, далее, ньютоновские потенциалы обоих тел малы, то производные от σ будут малыми величинами второго порядка, несмотря на добавочные члены, обусловленные φ_0 . В соответствии с этим плотности имеют больший порядок величины, чем натяжения, и даются при учете лишь членов первого порядка выражением

$$\kappa_Q = 2e^{2(\varphi_0 - \sigma_0)} \nabla^2 \varphi.$$

Из (12) и (13) имеем

$$e^{-2(\varphi_0 - \sigma_0)} = \frac{1}{2(\bar{r}^2 + \bar{z}^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{2h}. \quad (25)$$

Следовательно,

$$\kappa_Q = 12h \frac{m}{a^3}. \quad (26)$$

Полезно рассмотреть нашу систему с точки зрения галилеевой системы отсчета $\tau, \zeta, \alpha, \theta$ при $\tau = \bar{t} = 0$ ¹⁾. В этом случае тела представляются шарами радиусов $a(2h)^{-1/2}$ с центрами в $\zeta = (2h)^{1/2}$. Плотности определяются равенством (26) и, следовательно, массы равны $M = m(2h)^{-1/2}$, в то время как ускорения равны $(2h)^{-1/2}$. В ньютоновском предельном случае ускорения должны определяться соотношением

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2h_2)^{1/2}} = f_2 &= - \frac{M_1}{[(2h_2)^{1/2} - (2h_1)^{1/2}]^2} = \\ &= - \frac{m_1}{(2h_1)^{1/2} [(2h_2)^{1/2} - (2h_1)^{1/2}]^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

¹⁾ Здесь $\xi = \alpha \cos \theta$, $\eta = \alpha \sin \theta$.

Учитывая (22), находим отсюда

$$\frac{(h_2 - h_1)^2}{2h_2(2h_1)^{1/2} [(2h_2)^{1/2} - (2h_1)^{1/2}]^2} = \frac{1}{(2h_2)^{1/2}} \frac{\left\{ \frac{1}{2} [(2h_1)^{1/2} + (2h_2)^{1/2}] \right\}^2}{(2h_1)^{1/2} (2h_2)^{1/2}}. \quad (28)$$

Это приближенно имеет место при условии $h_2 - h_1 \ll h_1$, т. е. если произведение ускорения на расстояние между телами мало. Это ограничение свойственно ньютоновскому случаю. Интересно отметить, что эти массы не в точности равны и противоположны по знаку, однако в этом нет ничего неожиданного, поскольку их ускорения должны быть неравными друг другу в равномерно ускоренной системе.

4.

Построенная в предыдущем параграфе метрика обладает сингулярностью при $\bar{r} = 0$, $\bar{z} \leq 0$. В этом нет ничего удивительного, так как метрика равномерно ускоренной системы ($\varphi = \varphi_0$) также содержит такого рода сингулярность, которая, однако, является чисто искусственной и устраняется при переходе к метрике $(\tau, \zeta, \alpha, \theta)$. Возможно ли подобное устранение сингулярности, если $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$?

Прежде всего заметим, что если $\varphi = \varphi_0$, то полное пространство $(\bar{t}, \bar{z}, \bar{r}, \theta)$ соответствует области $z \geq 0$ в пространстве (t, z, r, θ) и четверти пространства-времени, а именно $\zeta \geq |\tau|$ в пространстве $(\tau, \zeta, \alpha, \theta)$. С помощью тех же самых формул преобразования

$$\bar{r} = rz, \quad \bar{z} = \frac{1}{2}(z^2 - r^2), \quad \bar{t} = t \quad (29)$$

мы приходим теперь к метрике

$$ds^2 = z^2 e^{2\psi} dt^2 - e^{2(\delta - \psi)} (dr^2 + dz^2) - r^2 e^{-2\psi} d\theta^2, \quad (30)$$

где явно появляется сингулярная часть метрики и где мы имеем дело лишь с $z \geq 0$. Легко видеть, что

$$\psi(z, r) = \varphi(\bar{z}, \bar{r}) - \varphi_0(\bar{z}, \bar{r}) \quad (31)$$

является регулярной функцией z и r . Кроме того, нетрудно показать, что для малых z функция ψ может быть

разложена в степенной ряд по z^2 с коэффициентами, зависящими от r , причем эти коэффициенты сами могут быть разложены в степенные ряды по r^2 для малых r . То же самое имеет место для функции

$$\delta(z, r) = \sigma(\bar{z}, \bar{r}) - \sigma_0(\bar{z}, \bar{r}). \quad (32)$$

Производя замену переменных

$$\tau = ze^\psi \operatorname{sh} t, \quad \zeta = ze^\psi \operatorname{ch} t, \quad \alpha = re^{-\psi}, \quad (33)$$

мы приходим к следующей метрике:

$$ds^2 = d\tau^2 - d\zeta^2 - \mu(\tau d\tau - \zeta d\zeta)^2 - \\ - 2\nu d\alpha(\tau d\tau - \zeta d\zeta) - \lambda d\alpha^2 - \alpha^2 d\theta^2, \quad (34)$$

где коэффициенты μ , ν , λ являются функциями только от α и $\zeta^2 - \tau^2$. Заметим, что эта метрика инвариантна по отношению к любым (ζ, τ) -преобразованиям Лоренца; это обстоятельство указывает на то, что мы все еще имеем дело со случаем постоянного ускорения, хотя уже не находимся в плоском пространстве-времени.

Благодаря соотношениям (33) метрика (34) определена лишь для $\zeta \geq |\tau|$. Что происходит на этой границе и за ней? Из структуры (34) явствует, что эта граница состоит из частей двух изотропных геодезических линий. Кроме того, довольно трудоемкое сравнение коэффициентов дает выражения для μ , ν , λ через ψ , $\partial\psi/\partial z$, $\partial\psi/\partial r$ и δ . Исследование этих выражений показывает, что в силу упомянутого выше поведения ψ и δ при малых z , три новые величины могут быть разложены в ряды по степеням $\zeta^2 - \tau^2$ вблизи границы, причем коэффициенты при членах в этих рядах являются функциями от α , которые в свою очередь могут быть разложены по степеням α^2 вблизи $\alpha = 0$. Следовательно, метрика (34) вполне регулярна на границе.

Так как границей является изотропная геодезическая, то продолжение метрики за нее не определено однозначно. Было бы крайне заманчивым найти такое продолжение метрики (34), которое не содержало бы сингулярностей и материи и заключало бы в себе все пространство-время. Математические трудности, связанные с нахождением такого продолжения, по-видимому, весьма серьезны и до

сих пор еще не преодолены. Интересной и важной задачей является также доказательство существования такого продолжения, однако эта задача также пока еще далека от своего решения.

Тем не менее было получено некоторое решение иного характера. Если предположить, что метрика (34) сохраняет свою форму при всех τ и ζ , то получается метрика, симметричная относительно $\tau = 0$ и относительно $\zeta = 0$. В области $\tau \geq |\zeta|$ коэффициенты зависят только от α и от временно-подобной переменной $\tau^2 - \zeta^2$ (аналогично обстоит дело в области $|\zeta| \leq -\tau$), в то время как при $-\zeta \geq |\tau|$ следует применить зеркальное отображение условий при $\zeta \geq |\tau|$; тем самым мы снова будем иметь дело с двумя равномерно ускоренными телами с противоположными знаками масс. Единственный вопрос, который следует решить, чтобы установить законность этого типа решения, это вопрос о том, существует ли метрика пустого пространства этого типа при $\tau \geq |\zeta|$, переходящая с требуемой степенью точности в ранее полученную нами метрику при $\tau = \zeta \geq 0$.

Прежде всего заметим, что преобразование

$$\tau = Te^\varepsilon \operatorname{ch} Z, \quad \zeta = Te^\varepsilon \operatorname{sh} Z, \quad \alpha = Re^{-\varepsilon},$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon(T, R) \quad (35)$$

приводит к метрике

$$ds^2 = e^{2(\eta-\varepsilon)}(dT^2 - dR^2) - T^2 e^{2\varepsilon} dZ^2 - R^2 e^{-2\varepsilon} d\theta^2, \quad (36)$$

где

$$\eta = \eta(T, R)$$

при условии, что μ , ν , λ в (34) надлежащим образом связаны с ε и η в (36). В действительности оказывается, что выражения для μ , ν , λ через ε и η совпадают с их выражениями через ψ и δ при условии, что ψ , δ , r , z^2 и $z(\partial/\partial z)$ заменены соответственно на ε , η , R , $-T^2$ и $T(\partial/\partial T)$. Таким образом, мы нашли метрику, достаточно гладко переходящую в нашу исходную метрику, путем продолжения промежуточной метрики (34) за границу.

Поведение (36) вдали от границы описывается в пустом пространстве следующими уравнениями:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial T^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}, \quad (37)$$

$$(R^2 - T^2) \frac{\partial \eta}{\partial T} = R^2 T \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^2 \right] - \\ - 2RT^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + 2R^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - 2RT \frac{\partial \varepsilon}{\partial R}, \quad (38)$$

$$-(R^2 - T^2) \frac{\partial \eta}{\partial R} = RT^2 \left[\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^2 \right] - \\ - 2R^2 T \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + 2RT \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - 2R^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial R}. \quad (39)$$

Так как (37) является уравнением гиперболического типа, оно не будет иметь сингулярностей при $T > 0$, $R \geq 0$ при условии, что ε и $\partial \varepsilon / \partial T$ задаются при $T = 0$ в виде несингулярных, четных функций от R . Это имеет место в силу свойств ψ и в силу характера упоминавшейся выше связи ε и ψ . Действительно, вблизи $T = 0$ величину ε можно разложить в степенной ряд по T^2 с коэффициентами, которые в свою очередь могут быть разложены в ряд по степеням R^2 , вследствие соответствующего свойства ψ . Следовательно, ε будет несингулярной функцией. Что касается η , то единственное сомнение относительно ее несингулярного характера возникает в связи с множителем $R^2 - T^2$. Однако легко видеть, что этот множитель не приводит к сингулярности, если $\partial \varepsilon / \partial R = \partial \varepsilon / \partial T$ при $R = T$, а это в свою очередь является следствием (37) и того факта, что $\partial \varepsilon / \partial R = \partial \varepsilon / \partial T = 0$ при $R = T = 0$.

Итак, нам удалось построить несингулярное во всем пространстве-времени решение уравнений Эйнштейна, соответствующее двум ускоренным в противоположных направлениях парам тел¹⁾, причем каждая пара состоит из двух тел с массами противоположных знаков. Так как T_0^0 и m имеют один и тот же знак для каждого тела, то появляющиеся отрицательные массы относятся к типу 4.

¹⁾ Это решение имеет большое сходство с борновским решением для электромагнитного случая (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Synge J. L., Proc. Edinburgh Math. Soc., 7, 93 (1937).
2. Whittaker E. T., Proc. Roy. Soc., A149, 384 (1935).
3. Marder L., Proc. Cambr. Phil. Soc., 53, 194 (1957).
4. Bergmann P. G., Introduction to the Theory of Relativity
New York, 1946, p. 208 (см. перевод: Бергман П. Г.
Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947).
5. Bondi H., Gold T., Proc. Roy. Soc., A229, 416 (1955)

II. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

12. КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

С. Гупта

S. Gupta, Proc. Phys. Soc., A 65, 161—169 (1952)

Приближенная линейная форма гравитационного поля Эйнштейна проквантована путем использования индефинитной метрики. Показано, что могут быть наблюдаемыми только два типа гравитонов, хотя в виртуальных состояниях при наличии взаимодействия могут существовать и многие другие типы. Показано, что спин наблюдаемых гравитонов должен быть равен 2. Используя представление взаимодействия, кратко обсуждается взаимодействие гравитационного поля с полем материи.

§ 1. Введение

Настоящее исследование предпринято с целью квантования эйнштейновского гравитационного поля и исследования взаимодействия гравитационных квантов, или «гравитонов», с другими элементарными частицами. Для простоты мы будем вначале квантовать приближенную линейную форму эйнштейновского поля; точное рассмотрение нелинейного гравитационного поля будет проведено в последующей работе. Несколько работ по квантованию гравитационного поля было выполнено раньше Розенфельдом [1]. Однако с тех пор в этом направлении было достигнуто мало успехов.

При квантовании приближенного линейного гравитационного поля мы будем следовать тому же методу, который был применен для полей излучения в одной из наших прежних работ [2]. Таким образом, мы будем использовать индефинитную метрику для компонент гравитационного поля с отрицательным коммутатором, а затем гравитоны, соответствующие этим компонентам, будут сделаны ненаблюдаемыми с помощью дополнительных

условий. Таким путем мы найдем, что только два типа гравитонов могут быть наблюдаемыми, хотя в виртуальных состояниях могут существовать многие другие типы. Поскольку гравитационное поле имеет большое число компонент, настоящее рассмотрение, естественно, является более сложным, чем в случае поля излучения, хотя ни с какими новыми трудностями мы здесь не встречаемся.

Необходимо заметить, что дополнительные условия играют в нашей трактовке существенную роль. Если бы не было дополнительных условий, настоящая теория включала бы наблюдаемые состояния с отрицательными вероятностями, которые не имеют физического смысла. Поэтому оказывается, что роль дополнительных условий (или координатных условий) более фундаментальна, чем первоначально предполагалось Эйнштейном.

§ 2. Линейное приближение для гравитационного поля

Основное уравнение гравитационного поля Эйнштейна имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \kappa^2 T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

где символы $g^{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu}$ и R имеют обычный смысл, κ — константа, а $T^{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса поля материи, причем под материей понимается все, кроме гравитационного поля. Ковариантная дивергенция левой части уравнения (1), как известно, равна нулю. Следовательно, ковариантная дивергенция $T^{\mu\nu}$ также равна нулю; отсюда получаем

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_\mu^\nu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \mathfrak{X}^{\alpha\beta} \frac{dg_{\alpha\beta}}{dx^\mu} = 0, \quad (2)$$

где $\mathfrak{X}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} (-g)^{1/2}$ — плотность тензора энергии-импульса для поля материи. Следовательно, закон сохранения энергии-импульса имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (\mathfrak{X}_\mu^\nu + t_\mu^\nu) = 0. \quad (3)$$

Здесь $t^{\mu\nu}$ — плотность псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial t_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{1}{2} \mathfrak{F}^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}. \quad (4)$$

Следуя Эйнштейну [3], получаем теперь линейное приближение для указанных выше уравнений поля, полагая

$$g_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — значения $g_{\mu\nu}$ для метрики Минковского; вторыми и высшими степенями κ пренебрегается. Используя обычные тензорные обозначения в плоском пространстве-времени¹⁾, уравнения (1) и (4) можно записать в виде

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \left(\frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x_{\nu} \partial x_{\lambda}} - \frac{\partial^2 h_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\lambda}} \right) + \frac{\partial^2 h_{\lambda\lambda}}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}} + \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial^2 h_{\lambda\sigma}}{\partial x_{\lambda} \partial x_{\sigma}} - \square^2 h_{\lambda\lambda} \right) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial h_{\nu\lambda}}{\partial x_{\mu}} T_{\nu\lambda}. \quad (7)$$

Согласно Эйнштейну, можно также выбрать координатные или дополнительные условия в виде

$$\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda\lambda}}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad (8)$$

так, чтобы (6) свелось к уравнению

$$\square^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \square^2 h_{\lambda\lambda} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (9)$$

Удобно положить

$$h_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma_{\lambda\lambda}. \quad (10)$$

¹⁾ В качестве пространственно-временных координат выбираем x_1, x_2, x_3, it .

Таким образом, уравнения (9), (8) и (7) можно соответственно записать в виде

$$\square^2 \gamma_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dt_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial \gamma_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} T_{\nu\lambda} - \frac{\kappa}{4} \frac{\partial \gamma_{\lambda\lambda}}{\partial x_\mu} T_{\nu\nu}. \quad (13)$$

Из указанных выше уравнений следует

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\lambda\lambda}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\nu} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\lambda\lambda}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma} \right) \right]. \quad (14)$$

В частности, для плотности гамильтониана мы получаем

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\lambda\lambda}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\lambda\lambda}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial \gamma_{\sigma\sigma}}{\partial x_\sigma} \right) \right]. \quad (15)$$

Уравнения (11) – (13), описывающие линейное гравитационное поле, так просты, что может показаться неожиданным, что они должны рассматриваться только как приближение более сложной теории. Поэтому следует отметить, что дополнительные условия (12) совместны с уравнением поля (11) лишь приближенно; для (11) и (12) имеем соответственно

$$\square^2 \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \kappa \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \quad \text{и} \quad \square^2 \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Эти уравнения согласуются друг с другом лишь в первом приближении. С другой стороны, как будет показано в последующей работе, для точного нелинейного гравитационного поля дополнительные условия точно совместны с уравнением поля.

§ 3. Квантование гравитационного поля

Плотность лагранжиана для линейного гравитационного поля может быть взята в виде

$$L = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \right), \quad (16)$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ и γ нужно рассматривать как независимые переменные. Отсюда обычным путем приходим к уравнениям поля

$$\square^2 \gamma_{\mu\nu} = 0, \quad \square^2 \gamma = 0 \quad (17)$$

и плотности гамильтониана

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \right) \right]. \quad (18)$$

Чтобы выражение (18) согласовалось с (15), потребуем с помощью дополнительных условий, которые будут обсуждены в следующем параграфе, равенства среднего значения γ среднему значению $\gamma_{\mu\mu}$. Но для целей же квантования мы рассматриваем γ как независимую полевую величину, так чтобы можно было легко разделить вклады различных компонент в гамильтониан (18).

Теперь мы должны получить перестановочные соотношения для $\gamma_{\mu\nu}$ и γ , учитывая, что $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\nu\mu}$. Для этого заметим, что канонически сопряженный импульс для γ_{11} задается в виде

$$\pi_{11} = \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma_{11} / \partial t)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial t}. \quad (19)$$

Поэтому перестановочное соотношение

$$[\gamma_{11}(\mathbf{r}, t), \pi_{11}(\mathbf{r}', t)] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

приводит к соотношению

$$\left[\gamma_{11}(\mathbf{r}, t), \left(\frac{\partial \gamma_{11}}{\partial t}(\mathbf{r}', t) \right) \right] = 2i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Используя обозначения Швингера [4], можем записать

$$[\gamma_{11}(x), \gamma_{11}(x')] = 2iD(x - x'). \quad (20)$$

С другой стороны, поскольку $\gamma_{12} = \gamma_{21}$, получаем

$$\pi_{12} = \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma_{12} / \partial t)} = \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial t}, \quad (21)$$

так что перестановочное соотношение в этом случае имеет вид

$$[\gamma_{12}(x), \gamma_{12}(x')] = iD(x - x'). \quad (22)$$

Согласно (20) и (22), перестановочные соотношения для $\gamma_{\mu\nu}$ могут быть записаны в виде

$$[\gamma_{\mu\nu}(x), \gamma_{\lambda\rho}(x')] = i(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda})D(x - x'). \quad (23)$$

Далее, канонически сопряженный γ импульс определяется соотношением

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma / \partial t)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \gamma}{\partial t},$$

и, следовательно, получаем

$$[\gamma(x), \gamma(x')] = -4iD(x - x'). \quad (24)$$

Следуя работе [2], будем рассматривать теперь $\gamma_{\mu\nu}$ и γ как самосопряженные величины. Представим их в форме:

$$\gamma_{\mu\nu} = \sum_{\mathbf{k}} (2k)^{-1/2} \{a_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)} + a_{\mu\nu}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)}\}, \quad (25)$$

$$\gamma = \sum_{\mathbf{k}} 2(2k)^{-1/2} \{a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-kt)}\}, \quad (26)$$

где символом \dagger обозначено комплексное сопряжение. Подставляя записанные выше фурье-разложения в (23) и (24) соответственно, находим

$$[a_{\mu\nu}(\mathbf{k}), a_{\lambda\rho}^\dagger(\mathbf{k})] = \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\lambda}, \quad (27)$$

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})] = -1. \quad (28)$$

Подставляя затем (25) и (26) в (18), используя перестановочные соотношения (27) и (28) и пренебрегая нулевой энергией, получаем для гамильтониана гравитационного поля

$$\int H dv = \sum_{\mathbf{k}} k \left\{ \frac{1}{2} a_{\mu\nu}^\dagger(\mathbf{k}) a_{\mu\nu}(\mathbf{k}) - a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \right\}. \quad (29)$$

Для наших целей удобно заменить операторы $a_{11}(\mathbf{k})$, $a_{22}(\mathbf{k})$, $a_{33}(\mathbf{k})$ и $a_{00}(\mathbf{k})$ операторами $a'_{11}(\mathbf{k})$, $a'_{22}(\mathbf{k})$, $a'_{33}(\mathbf{k})$ и $a'_{00}(\mathbf{k})$, которые задаются соотношениями

$$a'_{11}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \{a_{11}(\mathbf{k}) - a_{22}(\mathbf{k})\}, \quad a'_{22}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \{a_{11}(\mathbf{k}) + a_{22}(\mathbf{k})\},$$

$$a'_{33}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{33}(\mathbf{k}), \quad a'_{00}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{00}(\mathbf{k}).$$
(30)

Согласно (27) и (30), перестановочные соотношения для новых операторов имеют вид

$$\begin{aligned} [a'_{11}(\mathbf{k}), a'^{\dagger}_{11}(\mathbf{k})] &= 1, & [a'_{22}(\mathbf{k}), a'^{\dagger}_{22}(\mathbf{k})] &= 1, \\ [a'_{33}(\mathbf{k}), a'^{\dagger}_{33}(\mathbf{k})] &= 1, & [a'_{00}(\mathbf{k}), a'^{\dagger}_{00}(\mathbf{k})] &= 1, \end{aligned}$$
(31)

и гамильтониан (29) может быть записан в форме

$$\begin{aligned} \int H dv &= \sum_{\mathbf{k}} k \{ a_{12}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{12}(\mathbf{k}) + a_{23}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{23}(\mathbf{k}) + a_{31}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{31}(\mathbf{k}) - \\ &- a_{10}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{10}(\mathbf{k}) - a_{20}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{20}(\mathbf{k}) - a_{30}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{30}(\mathbf{k}) + \\ &+ a'^{\dagger}_{11}(\mathbf{k}) a'_{11}(\mathbf{k}) + a'^{\dagger}_{22}(\mathbf{k}) a'_{22}(\mathbf{k}) + a'^{\dagger}_{33}(\mathbf{k}) a'_{33}(\mathbf{k}) + \\ &+ a'^{\dagger}_{00}(\mathbf{k}) a'_{00}(\mathbf{k}) + a^{\dagger}(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \}, \end{aligned}$$
(32)

где использован тот факт, что $a_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = a_{\nu\mu}(\mathbf{k})$. Таким образом, мы имеем всего одиннадцать типов гравитонов, соответствующих одиннадцати независимым компонентам $\gamma_{\mu\nu}$ и γ . Мы будем называть гравитоны, соответствующие оператору $a_{12}(\mathbf{k})$, a_{12} -гравитонами и т. д.

Согласно (27) и (28), коммутаторы для $a_{i0}(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$ имеют отрицательные знаки. Следовательно, по соображениям, изложенным в работе [2], для компонент γ_{i0} и γ гравитационного поля мы должны использовать индефинитную метрику, тогда как остальные компоненты нужно трактовать обычным образом. Таким образом, все операторы $a_{12}(\mathbf{k})$, $a_{23}(\mathbf{k})$, $a_{31}(\mathbf{k})$, $a_{10}(\mathbf{k})$, $a_{20}(\mathbf{k})$, $a_{30}(\mathbf{k})$, $a'_{11}(\mathbf{k})$, $a'_{22}(\mathbf{k})$, $a'_{33}(\mathbf{k})$, $a'_{00}(\mathbf{k})$ и $a(\mathbf{k})$ оказываются операторами поглощения, а сопряженные им операторы — операторами испускания. Следует заметить, что, хотя теперь все гравитоны имеют положительную энергию, вероятности неко-

торых состояний будут отрицательны. Таким образом, ввиду использования индефинитной метрики мы должны нормировать любое состояние Ψ следующим образом:

$$\Psi^\dagger \Psi = (-1)^{n_{10} + n_{20} + n_{30} + n}, \quad (33)$$

где n_{10} , n_{20} , n_{30} и n — соответственно числа a_{10^-} , a_{20^-} , a_{30^-} и a -гравитонов в состоянии Ψ . Наличие отрицательных вероятностей, однако, не создает каких-либо трудностей для физической интерпретации, так как мы покажем ниже, что для всех реальных состояний $n_{10} = n_{20} = n_{30} = n = 0$.

§ 4. Дополнительные условия

При отсутствии взаимодействия дополнительные условия для гравитационного поля можно взять в виде

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}^{(+)}}{\partial x_\mu} \Psi = 0, \quad (34)$$

$$(\gamma_{\mu\mu}^{(+)} - \gamma^{(+)}) \Psi = 0, \quad (35)$$

где $\gamma_{\mu\nu}^{(+)}$ и $\gamma^{(+)}$ — положительно-частотные части $\gamma_{\mu\nu}$ и γ соответственно. Из (34), (35) и сопряженных им соотношений следует, что

$$\left\langle \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \right\rangle = 0, \quad \langle \gamma_{\mu\mu} \rangle = \langle \gamma \rangle.$$

Таким образом, дополнительные условия (34) согласуются с (12) в классическом пределе, тогда как в силу (35) гамильтониан (18) оказывается эквивалентным (15).

Подставляя фурье-разложения (25) в (34) и выбирая ось x_3 вдоль \mathbf{k} , получаем

$$\{a_{31}(\mathbf{k}) - a_{01}(\mathbf{k})\} \Psi = 0, \quad (36a)$$

$$\{a_{32}(\mathbf{k}) - a_{02}(\mathbf{k})\} \Psi = 0, \quad (36б)$$

$$\{a_{33}(\mathbf{k}) - a_{03}(\mathbf{k})\} \Psi = \{\sqrt{2} a'_{33}(\mathbf{k}) - a_{03}(\mathbf{k})\} \Psi = 0, \quad (36в)$$

$$\{a_{30}(\mathbf{k}) - a_{00}(\mathbf{k})\} \Psi = \{a_{30}(\mathbf{k}) - \sqrt{2} a'_{00}(\mathbf{k})\} \Psi = 0. \quad (36г)$$

Как показано в работе [2], решение уравнения (36a) состоит из нормированного состояния, не содержащего a_{31^-} и a_{01^-} -гравитонов и суперпозиции ряда «лишних» со-

стояний с произвольными коэффициентами и нулевой нормой. Однако эти лишние состояния не дают вклада в какой-либо из наблюдаемых эффектов. Кроме того, поскольку нормировка сохраняется с течением времени, лишнее состояние всегда будет оставаться лишним. Таким образом, для всех практических целей такие состояния можем игнорировать и рассматривать a_{31} - и a_{01} -гравитоны как полностью отсутствующие в невзаимодействующем гравитационном поле. Аналогично, уравнение (36б) приводит к отсутствию a_{32} - и a_{02} -гравитонов для свободного гравитационного поля. Положение вещей с уравнениями (36в) и (36г) несколько проще, так как оба этих уравнения включают оператор $a_{03}(\mathbf{k})$. Легко видеть, что только состояния, удовлетворяющие (36в) и (36г), не будут содержать a_{03} -, a'_{33} - и a'_{00} -гравитонов.

Теперь мы рассмотрим дополнительное условие (35). Подставляя фурье-разложения (25) и (26) в (35), получаем

$$\{a_{\mu\mu}(\mathbf{k}) - 2a(\mathbf{k})\} \Psi = 0. \quad (37)$$

Используя (30), (36в) и (36г), получаем из (37)

$$\{a'_{22}(\mathbf{k}) - a(\mathbf{k})\} \Psi = 0. \quad (38)$$

Как и в случае уравнения (36а), (38) приводит к отсутствию a'_{22} - и a -гравитонов в чисто гравитационном поле.

Мы видели, что дополнительные условия (34) и (35) дают нам право отбросить девять типов гравитонов, так что для свободного гравитационного поля мы можем положить

$$n_{23} = n_{31} = n_{01} = n_{02} = n_{03} = n'_{22} = n'_{33} = n'_{00} = n = 0, \quad (39)$$

где n_{23} — число a_{23} -гравитонов и т. д. Следовательно, в свободном гравитационном поле могут существовать лишь a_{12} - и a'_{11} -гравитоны. Отсюда следует, что состояние вакуума гравитационного поля может быть определено как состояние, не содержащее a_{12} - и a'_{11} -гравитонов, поскольку другие типы гравитонов будут исключены с помощью дополнительных условий. К тому же, поскольку, согласно нашей трактовке, все компоненты $\gamma_{\mu\nu}^{(+)}$ и $\gamma^{(++)}$ со-

держат операторы поглощения, состояние вакуума будет удовлетворять соотношениям

$$\gamma_{\mu\nu}^{(+)} \Psi_0 = 0, \quad \gamma^{(+)} \Psi_0 = 0. \quad (40)$$

§ 5. Спин гравитонов

В предыдущем параграфе было показано, что в свободном гравитационном поле могут существовать только два типа гравитонов. Рассмотрим теперь спин этих гравитонов.

Канонический тензор энергии-импульса гравитационного поля $t_{\mu\nu}$, соответствующий плотности лагранжиана (16), имеет вид

$$t_{\mu\nu} = \frac{\partial \gamma_{\lambda\sigma}}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma_{\lambda\sigma} / \partial x_\nu)} - \frac{\partial \gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma / \partial x_\nu)} + \delta_{\mu\nu} L. \quad (41)$$

Однако, согласно трактовке Белинфанте (см. [5]), этот тензор энергии-импульса должен быть модифицирован. Рассматривая бесконечно малые преобразования Лоренца

$$\delta x_\mu = \delta \omega_{\mu\nu} x_\nu, \quad (42)$$

причем

$$\delta \omega_{\mu\nu} = -\delta \omega_{\nu\mu},$$

находим тензор $f_{\mu\nu, \sigma}$, имеющий вид

$$f_{\mu\nu, \sigma} \equiv -\frac{\partial \gamma_{\lambda\eta}}{\partial \omega_{\mu\nu}} \frac{\partial L}{\partial (\partial \gamma_{\lambda\eta} / \partial x_\sigma)} = \frac{\partial \gamma_{\mu\eta}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\nu\eta} - \frac{\partial \gamma_{\nu\eta}}{\partial x_\sigma} \gamma_{\mu\eta}. \quad (43)$$

Тогда модифицированный тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ будет

$$\theta_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\sigma} (f_{\mu\nu, \sigma} + f_{\sigma\mu, \nu} + f_{\sigma\nu, \mu}), \quad (44)$$

а плотность момента количества движения примет вид

$$M_{\mu\nu, \sigma} = x_\mu \theta_{\nu\sigma} - x_\nu \theta_{\mu\sigma} = x_\mu t_{\nu\sigma} - x_\nu t_{\mu\sigma} + f_{\mu\nu, \sigma}. \quad (45)$$

Таким образом, для компонент момента количества движения получаем

$$P_{ik} = -i \int M_{ik,4} dv = P_{ik}^0 + P'_{ik}, \quad (46)$$

где

$$P_{ik}^0 = -i \int dv (x_i T_{k4} - x_k T_{i4}), \quad (47)$$

$$P'_{ik} = -i \int dv f_{ik,4} = i \int dv \left(\gamma_{i\eta} \frac{\partial \gamma_{k\eta}}{\partial x_4} - \gamma_{k\eta} \frac{\partial \gamma_{i\eta}}{\partial x_4} \right). \quad (48)$$

Здесь P_{ik}^0 — орбитальный момент количества движения и P'_{ik} — вклад в полный момент, обусловленный спином. Подставляя фурье-разложения (25) в (48), получаем

$$\begin{aligned} P'_{ik} &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{i}{2} \int dv [-\{a_{i\eta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k t)} + a_{i\eta}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k t)}\} \times \\ &\quad \times \{a_{k\eta}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - k' t)} - a_{k\eta}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - k' t)}\} + \\ &\quad + \{a_{k\eta}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k t)} + a_{k\eta}^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k t)}\} \times \\ &\quad \times \{a_{i\eta}(\mathbf{k}') e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - k' t)} - a_{i\eta}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - k' t)}\}] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{i}{2} [a_{i\eta}(\mathbf{k}) a_{k\eta}^\dagger(\mathbf{k}) - a_{i\eta}^\dagger(\mathbf{k}) a_{k\eta}(\mathbf{k}) - a_{k\eta}(\mathbf{k}) a_{i\eta}^\dagger(\mathbf{k}) + \\ &\quad + a_{k\eta}^\dagger(\mathbf{k}) a_{i\eta}(\mathbf{k})] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} i [a_{k\eta}^\dagger(\mathbf{k}) a_{i\eta}(\mathbf{k}) - a_{i\eta}^\dagger(\mathbf{k}) a_{k\eta}(\mathbf{k})]. \quad (49) \end{aligned}$$

Поскольку реальные гравитоны соответствуют операторам

$$a_{12}(\mathbf{k}) \text{ и } a'_{11}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \{a_{11}(\mathbf{k}) - a_{22}(\mathbf{k})\},$$

мы должны рассматривать только ту часть P'_{ik} , которая включает операторы $a_{12}(\mathbf{k})$, $a_{11}(\mathbf{k})$, $a_{22}(\mathbf{k})$ и сопряженные им операторы. Эти операторы входят лишь в компоненту P'_{12} и их вклад дается выражением

$$\begin{aligned} P'_{12} &= \sum_{\mathbf{k}} i [a_{21}^\dagger(\mathbf{k}) a_{11}(\mathbf{k}) + a_{22}^\dagger(\mathbf{k}) a_{12}(\mathbf{k}) - \\ &\quad - a_{11}^\dagger(\mathbf{k}) a_{21}(\mathbf{k}) - a_{12}^\dagger(\mathbf{k}) a_{22}(\mathbf{k})] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 2i [a_{12}^\dagger(\mathbf{k}) a'_{11}(\mathbf{k}) - a_{11}^\dagger(\mathbf{k}) a_{12}(\mathbf{k})]. \quad (50) \end{aligned}$$

Чтобы отделить вклады двух независимых компонент

в приведенном выше выражении, введем операторы

$$\begin{aligned} a_+(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a'_{11}(\mathbf{k}) - ia'_{12}(\mathbf{k})\}, \\ a_-(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{a'_{11}(\mathbf{k}) + ia'_{12}(\mathbf{k})\}, \end{aligned} \quad (51)$$

где, согласно (27) и (31),

$$\begin{aligned} [a_+(\mathbf{k}), a_+^\dagger(\mathbf{k})] &= [a_-(\mathbf{k}), a_-^\dagger(\mathbf{k})] = 1, \\ [a_+(\mathbf{k}), a_-^\dagger(\mathbf{k})] &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

С помощью этих новых операторов можем записать

$$\begin{aligned} P'_{12} &= \sum_{\mathbf{k}} 2 [a_+^\dagger(\mathbf{k}) a_+(\mathbf{k}) - a_-^\dagger(\mathbf{k}) a_-(\mathbf{k})] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} 2 [n_+(\mathbf{k}) - n_-(\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (53)$$

где $n_+(\mathbf{k})$ и $n_-(\mathbf{k})$ задают число гравитонов, соответствующих операторам $a_+(\mathbf{k})$ и $a_-(\mathbf{k})$.

Это показывает, что гравитоны являются частицами спина 2 и имеют два независимых спиновых состояния с параллельной и антипараллельной ориентациями спина по отношению к направлению движения гравитонов.

§ 6. Описание взаимодействия

Из уравнения (11) следует, что взаимодействие гравитационного поля с полем материи может быть учтено, если модифицировать плотность лагранжиана (16) следующим образом:

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \right) - \\ &\quad - \frac{\kappa}{2} \left(\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma \right) T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (54)$$

Плотность лагранжиана (54) приводит к следующим уравнениям поля:

$$\square^2 \gamma_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \square^2 \gamma = \kappa T_{\mu\mu}. \quad (55)$$

При наличии взаимодействия дополнительные условия (34) и (35) должны быть также модифицированы. Следуя

работе [2], дополнительные условия в гейзенберговском представлении можно установить в виде

$$\left[\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \right]^+ \Psi = 0, \quad [\gamma_{\mu\mu} - \gamma]^+ \Psi = 0, \quad (56)$$

где $[]^+$ означает положительно-частотную часть. Эти условия, естественно, совпадают с (34) и (35) при отсутствии взаимодействия. Необходимость же придать им вид (56) возникает потому, что в гейзенберговском представлении $\gamma_{\mu\nu}$ и γ не могут быть разделены на положительно- и отрицательно-частотные части при наличии взаимодействия. Однако такое разделение еще возможно для $\partial \gamma_{\mu\nu} / \partial x_\mu$ и $\gamma_{\mu\mu} - \gamma$. Согласно (55), $\partial \gamma_{\mu\nu} / \partial x_\mu$ и $\gamma_{\mu\mu} - \gamma$ еще удовлетворяют волновому уравнению для плоских волн

$$\square^2 \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \quad \square^2 (\gamma_{\mu\mu} - \gamma) = 0,$$

где использовано приближение, принятое в § 2.

Когда мы переходим от гейзенберговского представления к представлению взаимодействия, требуемые дополнительные условия могут быть получены тем же самым путем, как и в случае поля излучения. Следуя методу, который использовался в случае поля излучения [6]¹⁾, в представлении взаимодействия легко получить

$$\left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}^{(+)}(x)}{\partial x_\mu} + \int_{t'=t}^{t'+} D(x-x') T_{0\nu}(x') dv' \right) \Psi(t) = 0, \quad (57)$$

$$(\gamma_{\mu\mu}^{(+)} - \gamma^{(+)}) \Psi(t) = 0,$$

где $D^{(+)}(x-x')$ — положительно-частотная часть $D(x-x')$. Следует заметить, что вследствие наличия члена $T_{0\nu}$ в уравнениях (57) те гравитоны, которые не могли существовать в свободном гравитационном поле, могут теперь появиться в виртуальных состояниях при наличии взаимодействия.

¹⁾ В работе [6] содержится ошибка. Вместо соотношения, предшествующего (9), должно быть следующее:

$$\left[\frac{\delta D(x-x')}{\delta t} \right]_{t=t'} = -\delta(x_1-x'_1) \delta(x_2-x'_2) \delta(x_3-x'_3).$$

Для практических целей удобнее использовать инвариантную теорию возмущений, основанную на представлении взаимодействия. Для этого, помимо перестановочных соотношений (23) и (24), потребуются вакуумные ожидания антикоммутаторов. Используя определение вакуума (40), мы легко находим, следуя Швингеру [7],

$$\begin{aligned} \langle \{\gamma_{\mu\nu}(x), \gamma(x')\} \rangle_0 &= (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\lambda}) D^{(1)}(x-x'), \\ \langle \{\gamma(x), \gamma(x')\} \rangle_0 &= -4D^{(1)}(x-x'). \end{aligned} \quad (58)$$

Отметим, что при вычислении вакуумного среднего использование индефинитной метрики не приводит к каким-либо отличиям в расчете, поскольку оператор индефинитной метрики η , определенный в работе [2], в точности равен единице для состояния вакуума, которое не содержит никаких гравитонов.

§ 7. Лоренц-инвариантность

В настоящей статье мы рассматривали компоненты γ_{0i} тензора $\gamma_{\mu\nu}$ с помощью индефинитной метрики, тогда как другие компоненты были проанализированы обычным путем. Таким образом, хотя среднее значение $\gamma_{\mu\nu}$ всегда вещественно, мы должны рассматривать $\gamma_{\mu\nu}$ как комплексный тензор с антиэрмитовыми γ_{0i} и эрмитовыми остальными компонентами. При этом лоренц-инвариантность нашей трактовки не вполне очевидна. Однако лоренц-инвариантность настоящей теории может быть легко установлена путем разбиения $\gamma_{\mu\nu}$ на эрмитову и антиэрмитову части более общим способом, как это делалось нами в работе [2].

Для этого возьмем $\gamma_{\mu\nu}$ в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} = & N_{\mu}^{(1)} N_{\nu}^{(1)} \Lambda^{(11)} + N_{\mu}^{(1)} N_{\nu}^{(2)} \Lambda^{(12)} + N_{\mu}^{(1)} N_{\nu}^{(3)} \Lambda^{(13)} - N_{\mu}^{(1)} N_{\nu}^{(0)} \Lambda^{(10)} + \\ & + N_{\mu}^{(2)} N_{\nu}^{(1)} \Lambda^{(21)} + N_{\mu}^{(2)} N_{\nu}^{(2)} \Lambda^{(22)} + N_{\mu}^{(2)} N_{\nu}^{(3)} \Lambda^{(23)} - N_{\mu}^{(2)} N_{\nu}^{(0)} \Lambda^{(20)} + \\ & + N_{\mu}^{(3)} N_{\nu}^{(1)} \Lambda^{(31)} + N_{\mu}^{(3)} N_{\nu}^{(2)} \Lambda^{(32)} + N_{\mu}^{(3)} N_{\nu}^{(3)} \Lambda^{(33)} - N_{\mu}^{(3)} N_{\nu}^{(0)} \Lambda^{(30)} - \\ & - N_{\mu}^{(0)} N_{\nu}^{(1)} \Lambda^{(01)} - N_{\mu}^{(0)} N_{\nu}^{(2)} \Lambda^{(02)} - N_{\mu}^{(0)} N_{\nu}^{(3)} \Lambda^{(03)} + N_{\mu}^{(0)} N_{\nu}^{(0)} \Lambda^{(00)}, \end{aligned} \quad (59)$$

где, как и в работе [2], $N_\mu^{(1)}$, $N_\mu^{(2)}$, $N_\mu^{(3)}$ и $N_\mu^{(0)}$ — набор ортогональных 4-векторов, из которых $N_\mu^{(1)}$, $N_\mu^{(2)}$, $N_\mu^{(3)}$ пространственно-подобны, а $N_\mu^{(0)}$ временно-подобен. Далее, $\Lambda^{(11)}$, $\Lambda^{(12)}$, ... — скаляры, из которых $\Lambda^{(10)}$, $\Lambda^{(20)}$, $\Lambda^{(30)}$, $\Lambda^{(01)}$, $\Lambda^{(02)}$ и $\Lambda^{(03)}$ антиэрмитовы, тогда как остальные — эрмитовы. Итак, согласно (59), мы разделили $\gamma_{\mu\nu}$ на шестнадцать компонент формально лоренц-инвариантным образом. Теперь можно повторить все рассмотрение настоящей статьи, учитывая только, что, во-первых, вместо $\gamma_{\mu\nu}$ мы должны выполнять фурье-разложение (25) для величины Λ и, во-вторых, вместо того, чтобы брать ось x_3 вдоль \mathbf{k} , должны выбрать (как и в работе [2]) $N_\mu^{(1)}$, $N_\mu^{(2)}$, $N_\mu^{(3)}$ таким образом, чтобы

$$k_\mu N_\mu^{(1)} = k_\mu N_\mu^{(2)} = 0, \quad k_\mu N_\mu^{(3)} = -k_\mu N_\mu^{(0)}. \quad (60)$$

Рассмотрение величины γ , разумеется, не изменится, поскольку γ является скаляром, не зависящим от $\gamma_{\mu\nu}$. При таком подходе определение вакуума (40) и все другие результаты останутся неизменными.

Поскольку соотношение (59) имеет тензорный характер, все наши результаты будут теперь формально лоренц-инвариантными. Однако, чтобы установить релятивистскую инвариантность нашего рассмотрения, остается выяснить еще одно обстоятельство.

Если мы выберем систему координат, в которой $N_\mu^{(0)} = (0, 0, 0, i)$, т. е. временная ось совпадает с $N_\mu^{(0)}$, то, согласно (59), компоненты γ_{0i} тензора $\gamma_{\mu\nu}$ будут антиэрмитовыми, тогда как остальные компоненты — эрмитовыми. Поскольку это свойство $\gamma_{\mu\nu}$ не сохраняется во всех системах отсчета, наше рассмотрение выделяет те системы отсчета, в которых временная ось совпадает с $N_\mu^{(0)}$. Таким образом, в изложенной здесь теории $N_\mu^{(0)}$ оказывается преимущественным направлением. Однако это не существенно, поскольку $N_\mu^{(0)}$ может быть выбрано произвольным образом, и результаты, представляющие физический интерес, не зависят от этого направления. Действительно, после того, как условия (40), определяющие вакуум, установлены, $N_\mu^{(0)}$ никогда не появится явно в представлении взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenfeld L., Zs. f. Phys., **65**, 589 (1930).
2. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A63**, 681 (1951).
3. Einstein A., Berlin. Ber., 1918, S. 154.
4. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948) (см. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
5. Wentzel G., Quantum theory of fields, New York, 1949, p. 217 (см. перевод с 1-го издания: Вентцель Г., Квантовая теория волновых полей, М.—Л., 1946).
6. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A64**, 850 (1951).
7. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 651 (1949) (см. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).

13. КВАНТОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

С. Гупта

S. Gupta, Proc. Phys. Soc., A65, 608—619 (1952)

Как продолжение работы, выполненной нами ранее [1], проводится квантование гравитационного поля, описываемого полными нелинейными уравнениями поля. Основные трудности квантования эйнштейновского поля преодолены с помощью представления величин поля, определенных в римановом пространстве, в виде разложения в ряды в плоском пространстве и последующего разбиения гравитационного поля на линейную и нелинейную части. Линейная часть гравитационного поля рассматривается как свободное гравитационное поле, тогда как нелинейная часть трактуется как прямое взаимодействие между гравитонами. Это рассмотрение является совершенно общим, но страдает обычными ограничениями метода возмущений.

В рамках линейного приближения исследована также гравитационная собственная энергия фотона и электрона. Установлено, что собственная энергия фотона обращается в нуль, а собственная энергия электрона квадратично расходится.

§ 1. Введение

Квантование гравитационного поля в линейном приближении было выполнено нами в более ранней работе [2]. Теперь мы будем рассматривать квантование точного нелинейного поля. Эйнштейновское гравитационное поле отличается от других полей в двух отношениях: во-первых, теория этого поля использует риманову геометрию; и, во-вторых, это поле нелинейно. Мы попытаемся преодолеть трудности, возникающие в связи с этими обстоятельствами, следующим образом.

Как обычно, будем полагать $g^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} - \kappa\gamma^{\mu\nu}$, где $\epsilon^{\mu\nu}$ — метрический тензор Минковского, имеющий вид

$$\epsilon^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix},$$

а κ — константа. Тогда пространство Минковского мы можем рассматривать как нулевое приближение риманова пространства. Кроме того, все полевые величины можно представить в виде разложения в ряд по κ в пространстве Минковского. Этот прием не требует какого-либо отступления от идей Эйнштейна. Однако мы будем несколько расходиться с Эйнштейном в выборе координатных условий, предпочитая координатные условия де-Дондера [2], Фока [3] и Папапетру [4].

После перехода от риманова пространства к пространству Минковского мы разделим поле гравитации на линейную и нелинейную части. Затем мы будем рассматривать линейную часть как «свободное» гравитационное поле, тогда как нелинейную часть будем трактовать как прямое взаимодействие между гравитонами. В следующем параграфе будет показано, что разделение гравитационного поля на линейную и нелинейную части может быть довольно просто физически истолковано.

Наше рассмотрение является совершенно общим, хотя ему и присущи обычные ограничения метода возмущений. Однако трактовка нелинейности гравитационного поля как возмущения представляется нам достаточно оправданной, поскольку, как мы знаем, линейное приближение теории Эйнштейна, которая содержит в себе теорию тяготения Ньютона, описывает наблюдаемые факты с очень высокой степенью точности. Это показывает, что нелинейность может дать для наблюдаемых эффектов поправку лишь второго порядка.

В настоящей статье при ссылках на формулы в нашей предшествующей работе [1] мы всюду будем пользоваться следующими обозначениями: формулу (1) работы [1] будем обозначать как (I, 1), формулу (2) — как (I, 2) и т. д.

§ 2. Координатные условия для уравнений гравитационного поля

Как отмечалось выше, мы будем использовать координатные условия де-Дондера [2], которые задаются в виде

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1)$$

Используя условия (1), Папаметру [4] сумел записать уравнения гравитационного поля в крайне простой форме. В этом параграфе мы кратко изложим эту работу Папаметру и обсудим ее физический смысл.

Плотность лагранжиана для эйнштейновского гравитационного поля может быть взята в виде

$$\mathfrak{L} = -\kappa^{-2} g^{\mu\nu} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \nu\alpha \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \right). \quad (2)$$

Рассматривая \mathfrak{L} как функцию $g^{\alpha\beta}$ и $g_\mu^{\alpha\beta} = \partial g^{\alpha\beta} / \partial x^\mu$, получаем для плотности канонического псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля выражение

$$t_\nu^\mu = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_\mu^{\alpha\beta}} g_\nu^{\alpha\beta} - \delta_\nu^\mu \mathfrak{L}. \quad (3)$$

Мы можем далее получить симметричную плотность энергии-импульса методом Белинфанте, который мы изложили в § 5 работы [1].

Рассмотрим бесконечно малое линейное преобразование

$$\delta x^\mu = -\varepsilon^{\mu\lambda} \delta\omega_{\lambda\nu} x^\nu, \quad \text{где } \delta\omega_{\lambda\nu} = -\delta\omega_{\nu\lambda} \quad (4)$$

и определим величину $f^{\mu\nu, \alpha}$ выражением

$$f^{\mu\nu, \alpha} \equiv -\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta\omega_{\mu\nu}} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_\alpha^{\beta\gamma}} = 2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_\alpha^{\beta\gamma}} (\varepsilon^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - \varepsilon^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}). \quad (5)$$

Тогда симметричная плотность энергии-импульса $\theta^{\mu\nu}$ будет иметь вид

$$\theta^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\lambda} t_\lambda^\nu - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (f^{\mu\nu, \alpha} + f^{\alpha\nu, \mu} + f^{\alpha\mu, \nu}), \quad (6)$$

а плотность момента количества движения будет задаваться формулой

$$\mathfrak{M}^{\mu\nu, \rho} = x^{\mu} \theta^{\nu\rho} - x^{\nu} \theta^{\mu\rho} = x^{\mu} \varepsilon^{\nu\lambda} t_{\lambda}^{\rho} - x^{\nu} \varepsilon^{\mu\lambda} t_{\lambda}^{\rho} + f^{\mu\nu, \rho}. \quad (7)$$

Прибавляя к (5) симметричную тензорную плотность энергии-импульса поля материи $\varepsilon^{\mu\lambda} \mathfrak{F}_{\lambda}^{\nu}$, для полной плотности энергии-импульса системы $\Theta^{\mu\nu}$ получаем

$$\Theta^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\lambda} (\mathfrak{F}_{\lambda}^{\nu} + t_{\lambda}^{\nu}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} (f^{\mu\nu, \rho} + f^{\rho\mu, \nu} + f^{\rho\nu, \mu}). \quad (8)$$

Для упрощения (8) заметим, что [5]

$$\mathfrak{R}_{\nu}^{\mu} + t_{\nu}^{\mu} = 2 \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \mathfrak{R}_{\nu}^{\lambda\mu}, \quad (9)$$

где

$$\mathfrak{R}_{\nu}^{\lambda\mu} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\lambda}^{\nu\rho}} g^{\mu\rho} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{\lambda}^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma}. \quad (10)$$

Кроме того, согласно (5) и (10), имеем

$$f^{\mu\nu, \rho} = -2 (\mathfrak{R}_{\lambda}^{\rho\mu} \varepsilon^{\nu\lambda} - \mathfrak{R}_{\lambda}^{\rho\nu} \varepsilon^{\mu\lambda}). \quad (11)$$

Используя (9) и (11), можно записать формулу (8) в виде

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left[\varepsilon^{\mu\beta} (\mathfrak{R}_{\beta}^{\alpha\nu} + \mathfrak{R}_{\beta}^{\nu\alpha}) + \varepsilon^{\nu\beta} (\mathfrak{R}_{\beta}^{\alpha\mu} + \mathfrak{R}_{\beta}^{\mu\alpha}) - \varepsilon^{\alpha\beta} (\mathfrak{R}_{\beta}^{\mu\nu} + \mathfrak{R}_{\beta}^{\nu\mu}) \right] \quad (12)$$

Вычисляя $\mathfrak{R}_{\nu}^{\lambda\mu}$ из (2) и (10) и подставляя в формулу (12), получаем

$$\kappa^2 \Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} (g^{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} \varepsilon^{\nu\beta} + g^{\alpha\beta} \varepsilon^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu} \varepsilon^{\mu\beta}). \quad (13)$$

Используя дополнительные условия (1), приходим к следующему простому результату:

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = \kappa^2 \Theta^{\mu\nu}. \quad (14)$$

Так как дополнительные условия (1) приводят к простым уравнениям поля (14), а также сводятся к дополнительным условиям Эйнштейна (I,12) в линейном приближении, разумно признать их приемлемыми.

Уравнения поля (14), полученные с помощью лагранжиана (1), подобны уравнениям электромагнитного поля. Разница состоит лишь в том, что вместо 4-векторов A_μ и j_μ имеем теперь симметричные величины $g^{\mu\nu}$ и $\Theta^{\mu\nu}$ соответственно. Итак, для «свободного» гравитационного поля мы можем принять уравнения

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = 0 \quad (15)$$

и считать, что полное взаимодействие обусловлено тензором $\Theta^{\mu\nu}$, который представляет собой плотность энергии-импульса полной системы, включая само гравитационное поле. Это показывает, что выбор линейного поля (15) как свободного гравитационного поля просто означает, что мы определяем взаимодействие гравитационного поля со своим собственным псевдотензором энергии-импульса на тех же основаниях, как и его взаимодействие с тензором энергии-импульса поля материи.

В работе [1] было установлено, что дополнительные условия (I,12) лишь приблизительно совместны с уравнениями поля (I,11). Здесь же, вследствие закона сохранения

$$\frac{\partial \Theta^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (16)$$

(1) и (14) совместны точно.

§ 3. Разложение плотности лагранжиана гравитационного поля в плоском пространстве

Будем разлагать плотность лагранжиана для эйнштейновского гравитационного поля в ряд по константе связи κ и покажем, что это разложение можно рассматривать как бесконечный ряд в плоском пространстве. Для этого, как это уже делалось, мы полагаем

$$g^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} - \kappa \gamma^{\mu\nu}. \quad (17)$$

Тогда в силу соотношения

$$|g^{\mu\nu}| = (\sqrt{-g})^4 |g^{\mu\nu}| = \frac{(\sqrt{-g})^4}{g} = g \quad (18)$$

получаем

$$g = -1 + \kappa \varepsilon_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} + \frac{\kappa^2}{2} (\varepsilon_{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\lambda} - \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\lambda\alpha}) \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\lambda\alpha} + O(\kappa^3) \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} = & (-g)^{-1/2} \mathfrak{g}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu} - \kappa \gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} - \\ & - \frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \kappa^2 \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\sigma} \varepsilon_{\beta\lambda} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + \\ & + \frac{1}{8} \kappa^2 \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + O(\kappa^3), \end{aligned} \quad (20)$$

где тензор $\varepsilon_{\mu\nu}$ является взаимным тензору $\varepsilon^{\mu\nu}$. Чтобы получить разложение для $g_{\mu\nu}$, заметим, что

$$g_{\mu\nu} = \frac{\text{Минор}(g^{\mu\nu})}{|g^{\mu\nu}|} = -(-g)^{-1/2} \text{Минор}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}). \quad (21)$$

Но легко показать, что

$$\begin{aligned} \text{Минор}(\mathfrak{g}^{\mu\nu}) = & -\varepsilon_{\mu\nu} + \kappa \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} - \kappa \varepsilon_{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta} - \\ & - \kappa^2 \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\lambda\nu} \varepsilon_{\beta\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + \kappa^2 \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\beta\nu} \varepsilon_{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} - \\ & - \frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\beta\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + O(\kappa^3). \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} = & \varepsilon_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} + \kappa \varepsilon_{\mu\alpha} \varepsilon_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta} + \kappa^2 \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\lambda\nu} \varepsilon_{\beta\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} - \\ & - \frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon_{\alpha\mu} \varepsilon_{\beta\nu} \varepsilon_{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + \frac{1}{8} \kappa^2 \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\lambda\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} - \\ & - \frac{1}{4} \kappa^2 \varepsilon_{\mu\nu} \varepsilon_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\beta\sigma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\lambda\sigma} + O(\kappa^2). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь для разложения плотности лагранжиана (2) используем соотношение

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (24)$$

и после некоторых упрощений получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & -\frac{1}{4\kappa^2} \mathfrak{g}^{\mu\nu} g^{\alpha\lambda} g^{\beta\sigma} \left[2 \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\alpha} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя разложения (17), (20) и (23), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \left[2\varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial\gamma^{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} - \varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\beta\sigma} \frac{\partial\gamma^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\sigma\beta}}{\partial x^{\mu}} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\lambda\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial\gamma^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \kappa\varepsilon_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\beta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial\gamma^{\lambda\alpha}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\sigma\beta}}{\partial x^{\mu}} - \\ & - \frac{1}{2} \kappa\varepsilon_{\lambda\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial\gamma^{\lambda\sigma}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + 2\kappa\varepsilon_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\beta\sigma}\varepsilon^{\mu\nu} \frac{\partial\gamma^{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} + \\ & + \kappa\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\sigma\lambda}\varepsilon_{\eta\varrho} \gamma^{\lambda\sigma} \frac{\partial\gamma^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\gamma^{\sigma\eta}}{\partial x^{\nu}} - \\ & \left. - 2\kappa\varepsilon^{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\eta}\varepsilon_{\alpha\lambda}\varepsilon_{\beta\sigma}\varepsilon^{\gamma\alpha\beta} \frac{\partial\gamma^{\lambda\eta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\sigma\alpha}}{\partial x^{\mu}} + O(\kappa^2) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Согласно (1) и (17), дополнительные условия будут теперь записываться в виде

$$\frac{\partial\gamma^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0, \quad (27)$$

что позволяет упростить (26). Так, например, первый член в (26) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \frac{\partial\gamma^{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial\gamma^{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} = & -\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}\gamma^{\beta\mu} \frac{\partial\gamma^{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}\gamma^{\beta\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial\gamma^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Поскольку первый член в правой части (28) представляет собой дивергенцию, а второй член в силу (27) равен нулю, первый член в (26) мы можем опустить.

Тогда предыдущий результат можно записать в более компактной форме, используя обычные обозначения для плоского пространства, т. е. считая, что греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4 вместо 1, 2, 3, 0, где $x_4 = ix_0$. Тогда отпадает необходимость различать ковариантный и контравариантный тензоры Минковского $\varepsilon^{\mu\nu}$ и $\varepsilon_{\mu\nu}$, и все индексы можно писать внизу. Таким образом, используя обозначения для плоского пространства и опуская по указанным выше соображениям первый член в (26), мы можем записать (26) и (27) соответственно в следую-

щем виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & -\frac{1}{4} \left[\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\beta\beta}}{\partial x_\lambda} + \right. \\ & + \kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} - \frac{\kappa}{2} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\alpha\alpha}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\beta\beta}}{\partial x_\nu} + \\ & + 2\kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\beta} \frac{\partial \gamma_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} + \kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\beta\beta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \\ & \left. - 2\kappa \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\mu\beta}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\beta}}{\partial x_\alpha} + O(\kappa^2) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0. \quad (30)$$

Можно отметить, что в выражении (29) сумма членов, не зависящих от κ , совпадает с плотностью лагранжиана (I,16).

§ 4. Взаимодействие гравитационного и электромагнитного полей

Чтобы показать, как учитывается взаимодействие гравитационного поля с другими полями, рассмотрим здесь взаимодействие гравитационного и электромагнитного полей.

При наличии гравитационного поля уравнения электромагнитного поля имеют вид [6]

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad F^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{J}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\mathfrak{J}^\mu, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{\mu\nu} &= \sqrt{-g} F^{\mu\nu}, & \mathfrak{A}^\mu &= \sqrt{-g} A^\mu, \\ \mathfrak{J}^\mu &= \sqrt{-g} J^\mu. \end{aligned} \quad (33)$$

Полную плотность лагранжиана для гравитационного и электромагнитного полей можно взять в виде

$$\mathfrak{L}_{\text{полн.}} = \mathfrak{L} + \mathfrak{L}_R, \quad (34)$$

где \mathfrak{L} задается формулой (2), а

$$\mathfrak{L}_R = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{\mu\lambda} g^{\nu\varrho} F_{\lambda\varrho} F_{\mu\nu}. \quad (35)$$

Теперь мы имеем

$$A_\nu = (-g)^{-1/2} g_{\nu\sigma} \mathfrak{A}^\sigma = \varepsilon_{\nu\sigma} \mathfrak{A}^\sigma + \kappa \varepsilon_{\sigma\alpha} \varepsilon_{\nu\beta} \gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{A}^\sigma + O(\kappa^2), \quad (36)$$

так что

$$F_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{A}^\sigma}{\partial x^\mu} - \varepsilon_{\mu\sigma} \frac{\partial \mathfrak{A}^\sigma}{\partial x^\nu} + \kappa \varepsilon_{\sigma\alpha} \varepsilon_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{A}^\sigma) - \\ - \kappa \varepsilon_{\sigma\alpha} \varepsilon_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\gamma^{\alpha\beta} \mathfrak{A}^\sigma) + O(\kappa^2). \quad (37)$$

Используя формулы (17), (20) и (37), мы можем разложить \mathfrak{L}_R в ряд:

$$\mathfrak{L}_R = -\frac{1}{4} \left(\varepsilon^{\lambda\mu} \varepsilon^{\varrho\nu} - \kappa \varepsilon^{\lambda\mu} \gamma^{\varrho\nu} - \kappa \varepsilon^{\varrho\nu} \gamma^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^{\lambda\mu} \varepsilon^{\varrho\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\mu} \varepsilon_{\alpha\nu} - \frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\nu} \varepsilon_{\alpha\mu} \right) \left(\frac{\partial \mathfrak{A}^\beta}{\partial x^\lambda} \varepsilon_{\beta\varrho} - \frac{\partial \mathfrak{A}^\beta}{\partial x^\varrho} \varepsilon_{\beta\lambda} \right) + \\ + \left[\kappa \frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathfrak{A}^\beta \gamma^{\mu\nu}) \varepsilon_{\beta\nu} - \kappa \frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right. \\ \left. (\mathfrak{A}^\beta \gamma^{\lambda\varrho}) \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\beta\varrho} \varepsilon_{\alpha\lambda} \right] + O(\kappa^2). \quad (38)$$

Члены в квадратных скобках в (38) можно записать в виде

$$- \kappa \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) \mathfrak{A}^\beta \gamma^{\mu\nu} \varepsilon_{\beta\nu} + \\ + \kappa \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\mu} (\mathfrak{A}^\beta \gamma^{\lambda\varrho}) \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{\beta\varrho} \varepsilon_{\alpha\lambda} + \text{Расходящиеся члены}. \quad (39)$$

Первый член в выражении (39) обращается в нуль в силу условия Лоренца $\partial \mathfrak{A}^\alpha / \partial x^\alpha = 0$, второй же член можно включить в $O(\kappa^2)$, так как

$$\frac{\varepsilon^{\mu\nu} \partial^2 \mathfrak{A}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = O(\kappa).$$

Таким образом, выражение (38) может быть сведено к более

простой форме:

$$\mathcal{Q}_R = -\frac{1}{4} \left(\varepsilon^{\lambda\mu} \varepsilon^{\rho\nu} - \kappa \varepsilon^{\lambda\mu} \gamma^{\rho\nu} - \kappa \varepsilon^{\rho\nu} \gamma^{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \kappa \varepsilon^{\lambda\mu} \varepsilon^{\rho\nu} \varepsilon_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta} \right) \times \\ \times \left(\frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial x^\mu} \varepsilon_{\alpha\nu} - \frac{\partial \mathcal{A}^\alpha}{\partial x^\nu} \varepsilon_{\alpha\mu} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{A}^\beta}{\partial x^\lambda} \varepsilon_{\beta\rho} - \frac{\partial \mathcal{A}^\beta}{\partial x^\rho} \varepsilon_{\beta\lambda} \right) + O(\kappa^2). \quad (40)$$

Используя обозначения для плоского пространства, принятые в § 3, выражение (40) можно записать в виде

$$\mathcal{Q}_R = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \kappa \gamma_{\alpha\beta} \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta\mu} - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^2 \right) + O(\kappa^2), \quad (41)$$

где, согласно введенным обозначениям, $F_{\mu\nu} = \partial \mathcal{A}_\nu / \partial x_\mu - \partial \mathcal{A}_\mu / \partial x_\nu$ заметим, что член взаимодействия первого порядка в (41) будет $-\frac{1}{2} \kappa \gamma_{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, где $T_{\mu\nu}$ — обычный тензор энергии-импульса электромагнитного поля в плоском пространстве. Этот результат согласуется с (1,54), если учесть, что след $T_{\mu\nu}$ равен нулю.

§ 5. Квантование полного гравитационного поля

Как уже указывалось, мы можем считать, что линейная часть гравитационного поля соответствует «свободному» гравитационному полю; нелинейные же члены можно рассматривать как прямое взаимодействие между гравитонами. Таким образом, полагая в (29) $\kappa = 0$, мы получаем плотность лагранжиана свободного гравитационного поля. Эта плотность лагранжиана точно совпадает с (1,16). Следовательно, общий метод квантования, изложенный в работе [1] остается в силе для свободного гравитационного поля. Из других результатов мы можем еще использовать определение вакуума (1,40), перестановочные соотношения (1,23) и (1,24) и вакуумные средние значения (1,58).

Переходя к рассмотрению полного гравитационного поля, мы должны исходить из полной плотности лагранжиана (29). Тогда обычным путем можно перейти к представлению взаимодействия, рассматривая линейную часть как свободное гравитационное поле, а нелинейную — как взаимодействие. В представлении взаимодействия мы можем снова использовать перестановочные соотношения (1,23)

и (I,24) и вакуумные средние значения (I,58). Аналогичным же образом мы можем поступить с взаимодействием гравитационного и электромагнитного полей, прибавляя к (29) плотность лагранжиана (41) и трактуя нелинейную часть как взаимодействие.

Нужно также заметить, что дополнительные условия для полного гравитационного поля в гейзенберговском представлении по-прежнему задаются соотношениями (I,56). Следовательно, согласно уравнениям поля (14), величины $\partial\gamma_{\mu\nu}/\partial x_\nu$ всегда удовлетворяют волновому уравнению для плоских волн:

$$\square^2 \frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \kappa \frac{\partial\Theta_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Поэтому $\partial\gamma_{\mu\nu}/\partial x_\nu$ всегда могут быть разделены на положительно- и отрицательно-частотные части и дополнительные условия (I,56) сохраняются с течением времени. Дополнительные условия в представлении взаимодействия можно получить обычным путем.

В заключение нашего исследования остановимся на некоторых приложениях изложенного здесь метода квантования гравитационного поля. Мы видели, что полное гравитационное поле можно трактовать с помощью изложенного метода в любом сколь угодно высоком приближении. Однако в тех приложениях, которые мы собираемся рассмотреть в следующих главах, мы будем для простоты использовать лишь линейное приближение гравитационного поля. Более полный обзор приложений настоящего метода будет дан в отдельной работе, где будет учтено также влияние нелинейных членов.

§ 6. Собственная энергия фотона

Сначала рассмотрим проблему гравитационной собственной энергии фотона, поскольку соответствующей проблеме в квантовой электродинамике уделяется много внимания. Как уже отмечалось, мы будем здесь для простоты использовать лишь линейное приближение гравитационного поля.

Согласно (I,54) или (41), плотность лагранжиана электромагнитного поля, взаимодействующего с линейным

гравитационным полем, задается выражением:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \gamma}{\partial x_\lambda} \right) - \\ - \frac{1}{2} \kappa \gamma_{\alpha\beta} \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta\mu} - \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}^2 \right). \quad (42)$$

Обозначая канонически сопряженные величины для $\gamma_{\mu\nu}$, γ и A_μ соответственно через $\pi_{\mu\nu}$, π и π_μ имеем

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t}, \quad \pi = -\frac{1}{4} \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (43)$$

$$\pi_i = -iF_{i4} + i\kappa\gamma_{4j}F_{ji} - i\kappa\gamma_{ij}F_{j4} + \frac{1}{2} i\kappa (\gamma_{\alpha\alpha} - 2\gamma_{44}) F_{i4}, \quad (44)$$

$$\pi_4 = \frac{i\partial A_\nu}{\partial x_\nu}.$$

Получая обычным образом из (42) плотность гамильтониана и выражая ее через переменные поля, их пространственные производные и канонически сопряженные величины, мы получаем

$$H = H_G + H_R + H_{\text{вз.}},$$

где H_G и H_R — плотности гамильтониана соответственно для гравитационного и электромагнитного полей, а $H_{\text{вз.}}$ — плотность энергии взаимодействия, имеющая вид

$$H_{\text{вз.}} = -\frac{1}{8} \kappa \gamma_{\alpha\alpha} F_{ij}^2 + \frac{1}{2} \kappa \gamma_{jk} F_{ij} F_{ik} - i\kappa \gamma_{4j} \pi_i F_{ji} + \\ + \frac{1}{4} \kappa (\gamma_{\alpha\alpha} - 2\gamma_{44}) \pi_i^2 - \frac{1}{2} \kappa \gamma_{ki} \pi_i \pi_k + \frac{1}{8} \kappa^2 (\gamma_{\alpha\alpha} - 2\gamma_{44})^2 \pi_i^2 - \\ - \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{ij} (\gamma_{\alpha\alpha} - 2\gamma_{44}) \pi_i \pi_j + \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{ij} \gamma_{ki} \pi_k \pi_j - \\ - \frac{1}{2} i\kappa^2 \gamma_{4j} (\gamma_{\alpha\alpha} - 2\gamma_{44}) \pi_i F_{ji} + i\kappa^2 \gamma_{4j} \gamma_{ki} \pi_k F_{ji} - \\ - \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{4j} \gamma_{4k} F_{ji} F_{ki} + O(\kappa^2). \quad (45)$$

Это выражение задает плотность энергии взаимодействия в гейзенберговском представлении. В представлении взаимодействия плотность энергии взаимодействия будет иметь тот же вид, что и (45), с той лишь разницей, что пере-

менные поля и канонически сопряженные им величины будут относиться к свободным полям. Таким образом, переходя к представлению взаимодействия и выражая канонически сопряженные величины через переменные поля, получаем¹⁾

$$\begin{aligned}
 H_{\text{вз.}} = & \frac{1}{2} \kappa \gamma_{\alpha\beta} \left(F_{\alpha\mu} F_{\beta\mu} - \frac{1}{4} \delta_{\beta} F_{\mu\nu}^2 \right) - \\
 & - \frac{1}{8} \kappa^2 \gamma_{\alpha\alpha} \gamma_{\beta\beta} F_{4\nu} F_{4\nu} - \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{\alpha\nu} \gamma_{\beta} F_{4\alpha} F_{4\beta} + \\
 & + \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{\alpha\nu} \gamma_{\beta\beta} F_{4\alpha} F_{4\nu} - \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{\alpha 4} \gamma_{\beta 4} F_{\mu\alpha} F_{\mu\beta} + \\
 & + \frac{1}{2} \kappa^2 \gamma_{\alpha 4} \gamma_{\beta\beta} F_{\mu\alpha} F_{\mu 4} + \kappa^2 \gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\beta 4} F_{4\alpha} F_{\mu\beta} + O(\kappa^3).
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Теперь, согласно Дайсону [7], S -матрица для взаимодействия гравитонов с фотонами будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 S = & 1 + (-i) \int_{-\infty}^{\infty} dx H_{\text{вз.}}(x) + \\
 & + \frac{1}{2} (-i)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \{H_{\text{вз.}}(x), H_{\text{вз.}}(x')\}.
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

Для членов второго порядка S -матрицы, дающих вклад в собственную энергию фотона, имеем

$$\begin{aligned}
 S_{\text{фотон.}} = & -i \int_{-\infty}^{\infty} dx H_2(x) - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \{H_1(x), H_1(x')\},
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

где через H_1 и H_2 обозначены слагаемые, включающие первые и вторые степени κ в (46). Чтобы вычислить P -произведение в (48), мы должны определить вакуумные

¹⁾ Напомним, что для простоты мы пользуемся одними и теми же обозначениями для величин в гейзенберговском представлении и в представлении взаимодействия.

средние для P -произведений, включающих свертки по $\gamma_{\mu\nu}$ или по $F_{\mu\nu}$. Из (I,23) и (I,58) следует, что

$$\langle P(\gamma_{\mu\nu}(x), \gamma_{\lambda\varrho}(x')) \rangle_0 = \frac{1}{2} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\varrho} + \delta_{\mu\varrho} \delta_{\nu\lambda}) D'_F(x-x'), \quad (49)$$

где $D'_F(x-x')$ — фейнмановская сингулярная функция для гравитационного поля. Для электромагнитного поля мы также имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle P \left(\frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x_\mu}, \frac{\partial A_\varrho(x')}{\partial x'_\lambda} \right) \right\rangle_0 = \\ & = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\lambda} \langle P(A_\nu(x), A_\varrho(x')) \rangle_0 + i \delta_{\nu\varrho} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\lambda\lambda} \delta(x-x') = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{\nu\varrho} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\lambda} + i \delta_{\nu\varrho} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\lambda\lambda} \delta(x-x'), \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} & \langle P(F_{\mu\nu}(x), F_{\lambda\varrho}(x')) \rangle_0 = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{\nu\varrho} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\lambda} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\lambda} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\nu \partial x'_\varrho} - \\ & - \frac{1}{2} \delta_{\nu\lambda} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\varrho} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\varrho} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\nu \partial x'_\lambda} + \\ & + i \delta_{\varrho} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\lambda\lambda} \delta(x-x') + i \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\varrho\lambda} \delta(x-x') - \\ & - i \delta_{\nu\lambda} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\varrho\lambda} \delta(x-x') - i \delta_{\mu\varrho} \delta_{\nu\lambda} \delta_{\lambda\lambda} \delta(x-x'). \quad (50) \end{aligned}$$

Теперь легко проверить, что члены в (50), включающие δ -функцию, обуславливают вклад (48), который точно компенсирует вклад H_2 . Известно, что такая компенсация, действительно, всегда имеет место. Таким образом, вместо (48) можем взять

$$S_{\text{фотон.}} = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \{H_1(x), H_1(x')\}, \quad (51)$$

при условии, что мы принимаем также

$$\begin{aligned} & \langle P(F_{\mu\nu}(x), F_{\lambda\varrho}(x')) \rangle_0 = \\ & = \frac{1}{2} \left(\delta_{\nu\varrho} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\lambda} + \delta_{\mu\lambda} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\nu \partial x'_\varrho} - \right. \\ & \left. - \delta_{\nu\lambda} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\varrho} - \delta_{\mu\varrho} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\nu \partial x'_\lambda} \right). \quad (52) \end{aligned}$$

Подставляя значение H_1 из (46) в (51), находим

$$S_{\text{фотон.}} = -\frac{1}{8} \kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \left\{ \left(\gamma_{\alpha\nu}(x) F_{\mu\alpha}(x) F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4} \gamma_{\alpha\alpha}(x) F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \right), \left(\gamma_{\beta\varrho}(x') F_{\lambda\beta}(x') F_{\lambda\varrho}(x') - \frac{1}{4} \gamma_{\beta\beta}(x') F_{\lambda\varrho}(x') F_{\lambda\varrho}(x') \right) \right\}. \quad (53)$$

Выделяя из (53) вклад собственной энергии фотона, после некоторых упрощений получаем

$$S_{\text{фотон.}} = -\frac{1}{4} \kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' F_{\mu\lambda}(x) \times \\ \times \left(\frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\mu \partial x'_\nu} + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial^2 D_F(x-x')}{\partial x_\alpha \partial x'_\alpha} \right) D'_F(x-x') F_{\nu\lambda}(x'). \quad (54)$$

Теперь перейдем к импульсному представлению, полагая

$$F_{\nu\lambda}(x') = F_{\nu\lambda}(p) \exp(ipx'),$$

$$D_F(x-x') = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int dk (k^2 + \lambda^2)^{-1} \exp\{ik(x-x')\},$$

$$D'_F(x-x') = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int dk' (k'^2 + \varrho^2)^{-1} \exp\{ik'(x-x')\},$$

где, следуя Фейнману [8], предполагается, что фотон и гравитон имеют малые массы λ и ϱ , которые в конечном результате полагаются равными нулю. Таким образом, мы получаем

$$S_{\text{фотон.}} = \frac{\kappa^2}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dx F_{\mu\lambda}(x) F_{\nu\lambda}(p) e^{ipx} \int dk \frac{k_\mu k_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} k_\alpha^2}{(k^2 + \lambda^2) [(k-p)^2 + \varrho^2]} = \\ = -i \int_{-\infty}^{\infty} dx F_{\mu\lambda}(x) F_{\nu\lambda}(p) e^{ipx} J_{\mu\nu}(p), \quad (55)$$

где

$$J_{\mu\nu}(p) = \frac{i\kappa^2}{(2\pi)^4} \int dk \frac{k_\mu k_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} k_\alpha^2}{(k^2 + \lambda^2) [(k-p)^2 + \varrho^2]}. \quad (56)$$

Так как плотность собственной энергии фотона $W_{\text{фотон}}$ связана с $S_{\text{фотон}}$ соотношением

$$S_{\text{фотон}} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dx W_{\text{фотон}},$$

из (55) следует, что $W_{\text{фотон}}$ включает только напряженности электромагнитного поля. Отсюда следует, что наш результат калибровочно инвариантен, и, следовательно, собственная энергия фотона несомненно обращается в нуль. Эта ситуация значительно проще, чем соответствующая ситуация в квантовой электродинамике, где собственная энергия фотона определяется менее ясно.

Хотя мы убедились, что собственная энергия свободного фотона равна нулю, представляется интересным выяснить, какие расходимости заключены во внутренних собственно-энергетических диаграммах Фейнмана для фотона. Для этого мы должны вычислить интеграл (56), что может быть выполнено с помощью регуляризации и использования известных приемов интегрирования. Таким образом, находим

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(p) = & -\frac{\kappa^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{3}{2} \delta_{\mu\nu} \{2x\xi^2 \ln 2 - \Delta \ln(x\xi^2) + \right. \\ & \left. + \Delta \ln(2\Delta) - \Delta\} + x^2 \left(p_\mu p_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} p^2 \right) \times \right. \\ & \left. \times \{ \ln(x\xi^2) - \ln(2\Delta) \} \right], \end{aligned} \quad (57)$$

где $\Delta = x(p^2 + q^2) + (1-x)\lambda^2 - p^2 x^2$ и параметр ξ , имеющий размерность массы, стремится к бесконечности. Можем записать (57) в виде

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu}(p) = & -\frac{3\kappa^2}{32\pi^2} \ln 2 \delta_{\mu\nu} \xi^2 - \\ & -\frac{\kappa^2}{24\pi^2} \left(p_\mu p_\nu - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} p^2 \right) \ln \xi + \text{Конечные члены.} \end{aligned} \quad (58)$$

Квадратично расходящийся член в (58) может быть исключен с помощью перенормировки напряженностей электромагнитного поля [9], тогда как оставшийся логарифмически расходящийся член указывает на определенные трудности теории.

§ 7. Собственная энергия электрона

Согласно (I,54), плотность лагранжиана для электронного поля, взаимодействующего с линейным гравитационным полем, задается выражением

$$\begin{aligned}
 L = & -\frac{1}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma_{\mu} \psi + 2m \bar{\psi} \psi \right) - \\
 & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\lambda}} \frac{\partial \gamma}{\partial x_{\lambda}} \right) - \frac{1}{8} \kappa \left(\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma \right) \times \\
 & \times \left\{ \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} \psi \right) + \left(\bar{\psi} \gamma_{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma_{\nu} \psi \right) \right\}. \quad (59)
 \end{aligned}$$

Как и в случае электромагнитного поля, плотность энергии взаимодействия в представлении взаимодействия мы можем взять в виде

$$\begin{aligned}
 H(x) = & \frac{1}{8} \kappa \left(\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma \right) \left\{ \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} \psi \right) + \right. \\
 & \left. + \left(\bar{\psi} \gamma_{\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\mu}} \gamma_{\nu} \psi \right) \right\} \quad (60)
 \end{aligned}$$

при условии, что мы также полагаем

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(t, t') \left\langle P \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\mu}}, \bar{\psi}(x') \right) \right\rangle_0 &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} [\varepsilon(t, t') \langle P(\psi(x), \bar{\psi}(x')) \rangle_0], \\
 \varepsilon(t, t') \left\langle P \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\mu}}, \frac{\partial \bar{\psi}(x')}{\partial x'_{\nu}} \right) \right\rangle_0 &= \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x'_{\nu}} [\varepsilon(t, t') \langle P(\psi(x), \bar{\psi}(x')) \rangle_0],
 \end{aligned}$$

наряду с обычным соотношением

$$\varepsilon(t, t') \langle P(\psi(x), \bar{\psi}(x')) \rangle_0 = -\frac{1}{2} S_F(x-x'). \quad (61)$$

Удобно также положить

$$\gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \gamma = h_{\mu\nu}; \quad (62)$$

тогда легко получим

$$\begin{aligned}
 & \langle P(h_{\mu\nu}(x), h_{\lambda\rho}(x')) \rangle_0 = \\
 &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho}) D'_F(x-x'). \quad (63)
 \end{aligned}$$

Используя (62) и учитывая, что $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, можно записать выражение (60) для $H(x)$ в более простой форме

$$H(x) = \frac{1}{4} \kappa h_{\mu\nu} \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} \psi \right). \quad (64)$$

Теперь вклад второго порядка в S -матрицу для взаимодействия электронов и гравитонов определяется выражением

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \{ H(x), H(x') \} = \\ &= -\frac{\kappa^2}{32} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' P \left\{ h_{\mu\nu}(x) \left(\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_{\nu}} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} \psi(x) \right), h_{\lambda\varrho}(x') \left(\bar{\psi}(x') \gamma_{\lambda} \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_{\varrho}} - \frac{\partial \bar{\psi}(x')}{\partial x'_{\varrho}} \gamma_{\lambda} \psi(x') \right) \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Исключая из (65) собственно-энергетическую часть для электрона, получаем

$$\begin{aligned} S_{\text{эл.}} &= -\frac{\kappa^2}{64} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\varrho} + \delta_{\mu\varrho} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\varrho}) D'_F(x-x') \times \\ &\times \left[-\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} S_F(x-x') \gamma_{\lambda} \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_{\varrho}} + \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\varrho}} \times \right. \\ &\quad \times S_F(x-x') \gamma_{\lambda} \psi(x') + \\ &\left. + \frac{\partial \bar{\psi}(x)}{\partial x_{\nu}} \gamma_{\mu} S_F(x-x') \gamma_{\lambda} \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_{\varrho}} - \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_{\nu} \partial x'_{\varrho}} \times \right. \\ &\quad \left. \times S_F(x-x') \gamma_{\lambda} \psi(x') \right]. \end{aligned} \quad (66)$$

Полагая

$$\psi(x') = \psi(p) \exp(ipx'),$$

$$D'_F(x-x') = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int dk' (k'^2 + \varrho^2)^{-1} \exp\{ik'(x-x')\},$$

$$S_F(x-x') = -\frac{2i}{(2\pi)^4} \int dk \frac{ik\gamma - m}{k^2 + m^2} \exp\{ik(x-x')\},$$

находим в импульсном представлении

$$S_{эл.} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{\psi}(x) I(p) \psi(p) \exp(ipx), \quad (67)$$

где

$$I(p) = -\frac{\kappa^2}{16(2\pi)^4} \int dk (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\rho} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\rho}) \times \\ \times \frac{\gamma_{\mu} (k_{\nu} k_{\rho} + p_{\rho} k_{\nu} + p_{\nu} k_{\rho} + p_{\nu} p_{\rho}) (k\gamma + im) \gamma_{\lambda}}{(k^2 + m^2) [(k-p)^2 + \varrho^2]}. \quad (68)$$

Используя обычные приемы интегрирования с применением регуляризации, мы находим

$$I(p) = \frac{\kappa^2}{128\pi^2} \int_0^1 dx \left[\{2im(1+x)^2 p^2 - x(1+x)^2 p^2 (p\gamma)\} \times \right. \\ \times \left\{ \ln \frac{\xi^2}{m^2} + \ln \frac{3xm^2}{8} - \ln \Lambda \right\} + \{4im - (1+3x)(p\gamma)\} \times \\ \left. \times \left\{ 3x \ln \left(\frac{4}{3} \right) \xi^2 - \Lambda \left(\ln \frac{\xi^2}{m^2} + \ln \frac{3xm^2}{8} - \ln \Lambda + 1 \right) \right\} \right], \quad (69)$$

где параметр ξ , имеющий размерность массы, стремится к бесконечности, а $\Lambda = (p^2 + \varrho^2)x + m^2(1-x) - x^2 p^2$.

Так как для свободного электрона

$$p^2 + m^2 = 0, \quad (ip\gamma + m)\psi(p) = 0, \quad (70)$$

мы получаем из (69)

$$I(p) = \frac{\kappa^2 m^3}{128\pi^2} \left(\frac{3}{2} \ln \left(\frac{4}{3} \right) \frac{\xi^2}{m^2} - 4 \ln \frac{3\xi^2}{8m^2} - \frac{13}{3} \right). \quad (71)$$

Последнее выражение представляет собой гравитационную собственную массу электрона.

Чтобы найти все расходимости во внутреннем собственнo-энергетическом графике для электрона, мы должны вычислить (69) без использования (70). В этом случае легко показать, что $I(p)$ имеет вид

$$I(p) = A + B(ip\gamma + m) + C(ip\gamma + m)^2 + \\ + D(ip\gamma + m)^3 + \text{Конечные члены}, \quad (72)$$

где A и B — квадратично расходящиеся, а C и D — логарифмически расходящиеся выражения. Эта ситуация много хуже, чем соответствующая ситуация в квантовой электродинамике, где собственно-энергетическая часть для электрона включает лишь две расходимости.

Из нашего анализа диаграмм Фейнмана для гравитационной собственной энергии фотона и электрона видно, что учет гравитационного поля приводит к многочисленным новым расходимостям, в дополнение к расходимостям, имеющим место в квантовой электродинамике. Это наводит на мысль, что невозможно устранить все расходимости для гравитационного поля с помощью перенормировки массы и заряда. Однако нужно отметить, что в наших вычислениях мы не учитывали вклады нелинейных членов в собственно-энергетических диаграммах Фейнмана. Чтобы выяснить, перенормируема ли теория при учете гравитационного поля, нужно было бы выполнить более сложные расчеты с учетом нелинейных членов. Эта проблема будет подробно рассмотрена в последующей работе.

Автор благодарит проф. Л. Розенфельда за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gupta S. N., Proc. Phys. Soc., **A65**, 161 (1952); статья 12 настоящего сборника.
2. De Donder, La Gravifique Einsteinienne, Paris, 1921.
3. Фок В. А., Journ. of Phys. (СССР), **1**, 81 (1939).
4. Параретроу А., Proc. Roy. Irish Acad., **A52**, 11 (1948).
5. Толман Р. С., Phys. Rev., **35**, 875 (1930).
6. Толман Р. С., Relativity Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934, Ch. VIII.
7. Дьюсон Ф. Дж., Phys. Rev., **75**, 486 (1949) (см. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
8. Феупман Р. Р., Phys. Rev., **76**, 769 (1949) (см. перевод в сборнике «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954).
9. Gupta S. N., Proc Phys. Soc., **A64**, 426 (1951).

14. О КВАНТОВАНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ¹⁾

П. Бергман и А. Комар

P. Bergmann and A. Komar, Preprint.

§ 1. Введение

Первые попытки применить формализм квантования теории поля к общей теории относительности были приняты еще в 1930 г. [1, 2]. Почти двадцать лет спустя они были возобновлены [3], и в настоящее время проблема квантования гравитационного поля привлекает внимание ряда групп [4—9]. В настоящей статье мы сначала дадим обзор одной стороны исследований в этом направлении — современного состояния проблемы *наблюдаемых*.

При наиболее общем подходе к квантованию классических полей отправной точкой служит группа канонических преобразований, отображающих фазовое пространство классической теории на само себя. Группа бесконечно малых канонических преобразований может быть представлена своими генераторами (производящими операторами), каноническими переменными поля и их функционалами, которые с помощью скобок Пуассона подчиняются правилам коммутационной алгебры. Для выполнения квантования поля стремятся установить соответствие между данной классической группой бесконечно малых преобразований и аналогичной группой бесконечно малых унитарных преобразований, переводящих гильбертово пространство возможных квантовых состояний в само себя. Эти бесконечно малые унитарные преобразования задаются эрмитовыми операторами, которые в квантовой теории называются *наблюдаемыми*. Предполагается, что эти последние соответствуют каноническим переменным классического поля.

¹⁾ Обзор, который авторы посвящают Леопольду Инфельду и работающей в области общей теории относительности под его руководством группе (ранее не публиковался).

Соответствие между двумя группами бесконечно малых преобразований и их коммутационными алгебрами неоднозначно. Классическая группа гомоморфна группе унитарных преобразований в гильбертовом пространстве, оставляющих тождественной инвариантную подгруппу всех тех унитарных преобразований, генераторы которой стремятся к нулю при $\hbar=0$. Такой подход не применим к квантованию фермионных полей, которые, по-видимому, не имеют классических аналогов. Поскольку гравитационное поле является несомненно бозонным, мы ограничимся в последующем квантованием бозонных полей.

Общерелятивистские теории во многих важных отношениях отличаются от других полевых теорий, с которыми обычно имеют дело в теоретической физике. Они инвариантны не только по отношению к группе преобразований, совокупность элементов которой образует функциональное пространство, определенное на 4-мерном пространственно-временном многообразии (этим свойством обладают также и другие калибровочно-инвариантные теории); полученная система связей первого класса включает, кроме того, гамильтонову связь. Другими словами, группа, относительно которой теория инвариантна, включает преобразования, переводящие трехмерные пространственно-подобные гиперповерхности («мгновенные во времени») друг в друга. Это соответствует тому, что обычно может быть названо эволюцией физического состояния во времени.

Подобное обстоятельство, с которым связаны значительные вычислительные трудности, привело к ряду сложных проблем при построении наблюдаемых, составляющих предмет настоящей статьи. Насколько это будет возможно, мы не будем касаться техники современных методов расчета и сосредоточим вместо этого основное внимание на теоретико-групповом рассмотрении.

§ 2. Фазовое пространство общей теории относительности

Общей теории относительности можно придать гамильтонову форму несколькими различными путями. Розенфельд [1, 2] использовал формализм «тетраэдров» (или

ортогональных реперов), содержащий 16 переменных поля и 16 канонически сопряженных плотностей импульсов при 14 связях первого класса. Пирани и Шилд [3] и Бергман и др. [11] исходили из 10 переменных $g_{\mu\nu}$ и 10 канонически сопряженных им плотностей импульсов, подчиняющихся 8 связям первого класса. Недавно Дирак [12] ввел в качестве связей координатные условия. В его формализме число канонически сопряженных переменных поля равно 12, а число связей второго класса — 8.

Во всех указанных методах является общим тот факт, что удвоенное число степеней свободы минус удвоенное число связей первого класса и минус число связей второго класса равно 4. Таким образом, обычно считают, что число «динамических» степеней свободы гравитационного поля равно двум, т. е. совпадает с числом степеней свободы электромагнитного поля. Это предположение совпадает с выводом Паули и Фирца [13] относительно линейных полей с произвольным ненулевым спином, распространяющихся со скоростью света.

Прежде всего обсудим те формулировки, которые включают связи первого класса. Во всех этих случаях первоначальное число канонических переменных поля ограничивается числом связей. Некоторые из этих связей возникают вследствие того, что определяющие импульсы соотношения

$$\pi^A = \frac{\partial L}{\partial y_{A,0}} \quad (2.1)$$

не могут быть разрешены относительно производных по времени от $y_{A,0}$. Вместо этого существуют соотношения между π^A , полностью независимые от всех $y_{A,0}$. Эти соотношения называются *первичными связями*. Некоторые из производных по времени от первичных связей, согласно каноническим уравнениям поля, не обращаются в нуль тождественно, но могут быть обращены в нуль с помощью дополнительных требований. Эти последние называются *вторичными связями*. Если в первичные связи подставим выражения (2.1) для π^A , мы получим тождества, тогда как вторичные связи представляют собой такие комбинации уравнений Лагранжа — Эйлера, которые не содержат вторых производных по времени $y_{A,0,0}$. Комбинации канонических пере-

менных поля u_A , π^A , удовлетворяющие всем связям, образуют подпространство фазового пространства теории, которое мы будем называть *гиперповерхностью* связи.

Поскольку все эти связи относятся к первому классу (т. е. скобки Пуассона с учетом этих связей обращаются в нуль), бесконечно малые преобразования, производимые ими, не выводят за пределы гиперповерхности связи. Однако они переводят точки гиперповерхности связи друг в друга. Следуя стандартной терминологии, мы будем называть изображающую точку, взятую на гиперповерхности связи, *допустимым полем*. Компоненты этого поля, разумеется, определены только на трехмерной гиперповерхности физического пространства-времени. Если допустимое поле на некотором отрезке времени меняется согласно уравнениям поля общей теории относительности, то получающийся при этом набор функций, определенных в четырехмерном пространстве, будем называть *решением уравнений поля*. Будем называть два решения *эквивалентными*, если они могут быть переведены друг в друга путем преобразования координат. Будем называть также эквивалентными два допустимых поля, если они приводят к *эквивалентным решениям*.

В рамках этих определений, бесконечно малые преобразования, соответствующие линейным комбинациям связей (с переменными коэффициентами), переводят допустимые поля в эквивалентные. Таким образом, генераторы, подчиненные связям, дают возможность покрыть всю гиперповерхность связи взаимно исключающими классами эквивалентности допустимых полей. Эти *классы эквивалентности* являются точками нового так называемого *редуцированного фазового пространства*.

Сохраняя первоначальный смысл канонических преобразований и генераторов (т. е. первоначальное определение скобок Пуассона), мы утверждаем, что любой генератор бесконечно малого канонического преобразования, который переводит эквивалентные классы друг в друга, есть функция (функционал), определенная на редуцированном фазовом пространстве. Другими словами, мы утверждаем, что каждый такой генератор имеет постоянное значение внутри данного класса эквивалентности. Доказательство очевидно. Предположим, что бесконечно малое преобра-

зование переводит точку a , принадлежащую одному классу эквивалентности, в точку b другого класса эквивалентности, а другую точку a' , принадлежащую тому же классу, что и a , в точку b' . Согласно предположению, b и b' принадлежат одному классу эквивалентности. Однако операцию перехода от точки a' к точке b' мы можем выполнить следующим образом: сначала перейти от a' к a , затем к b и, наконец, к b' . Генераторы для первого и второго преобразований равны нулю; следовательно, генераторы переходов $a \rightarrow b$ и $a' \rightarrow b'$ имеют одно и то же значение.

Переменную, определенную на редуцированном фазовом пространстве, уместно назвать *константой движения*. Это определение содержит в себе как обычное требование сохранения переменной во времени, так и требование инвариантности этой переменной по отношению к преобразованию координат. Ввиду того факта, что в общей теории относительности изменение во времени определено лишь с точностью до преобразования координат, только инвариантные функционалы могут быть константами движения во всех возможных системах координат. Таким образом, мы приходим к тому, что константы движения (рассматриваемые как генераторы) переводят классы эквивалентности друг в друга. Другими словами, они производят бесконечно малые канонические преобразования в редуцированном фазовом пространстве.

Структура редуцированного фазового пространства не зависит от выбора начального фазового пространства, подчиненного связям первого класса. В этом смысле редуцированное фазовое пространство представляет собой внутреннюю структуру теории, не зависящую от частных методов рассмотрения. Можно, кстати, отметить, что лагранжев метод [13, 14] приводит к тому же самому редуцированному фазовому пространству и преобразования последнего подчиняются той же алгебре Ли.

§ 3. Координатные условия

Построение констант движения в общей теории относительности в количестве, достаточном, чтобы они покрыли редуцированное фазовое пространство, еще не было вполне полностью удовлетворительным образом. Многие авторы

[6—8, 11, 15, 16] подходили к проблеме квантования общей теории относительности с помощью координатных условий по аналогии с использованием условий калибровки для электромагнитного поля. В общей теории относительности предлагались самые различные координатные условия. В качестве примера могут служить условия де-Дондера

$$(\sqrt{-g} g^{\mu\alpha})_{,\alpha} = 0, \quad (3.1)$$

алгебраические условия, такие, как

$$g_{\mu 0} = \delta_{\mu 0}, \quad (3.2)$$

и введение так называемых собственных координат, которые будут обсуждаться в § 4. Смысл введения координатных условий состоит в том, чтобы уменьшить число эквивалентных решений, либо ограничивая число эквивалентных допустимых полей, либо устраняя произвольные функции, входящие в гамильтониан [3,10] (и делая тем самым динамику теории однозначной), либо выполняя и то и другое.

Условия типа (3.1) просто фиксируют произвольные функции в гамильтониане, тогда как условия (3.2) в дополнение к этому ограничивают множество допустимых полей. Разумеется, те координатные условия, которые полностью исключают классы эквивалентности, должны быть отброшены. Гарантировать себя от появления этих тривиальных ограничений в частных случаях чрезвычайно трудно. Действительно, как будет показано в следующем параграфе, собственные координаты, предложенные нами, по крайней мере в том виде, в каком они были выбраны вначале, исключают некоторые решения уравнений поля. Мы докажем, что исключенное множество решений имеет в некотором смысле меру нуль.

Координатные условия типа (3.2) или в более общем случае координатные условия, которые могут быть выражены через канонические переменные поля (без производных канонических переменных поля по времени), допустимы, если не существует функционал от координатных условий, обращающий в нуль скобки Пуассона для всех связей. Координатные условия де-Дондера (3.1) не могут

быть полностью выражены через канонические переменные поля ($g^{0\mu},_0$ не могут быть выражены через плотности канонических импульсов). При наличии условий этого типа нужно прежде всего выяснить, возможно ли построение функционалов от координатных условий, которые выражались бы через канонические переменные поля. Если построение таких функционалов возможно, то возникает необходимость, как и в предыдущем случае, исследовать поведение скобок Пуассона при наличии связей. Тогда остальные координатные условия ограничат произвол функций в гамильтониане и могут определить их полностью или частично. Они выделяют также направление, в котором может распространяться с течением времени любое данное допустимое поле внутри своего класса эквивалентности. Наконец, такие условия не могут локально исключить ни один из классов эквивалентности. Рассмотрение вопроса в целом, как это всегда имеет место в общей теории относительности, является крайне трудной проблемой, которая, конечно, не может быть решена с какой-либо степенью общности.

Рассмотрим сначала условия, которые связывают канонические переменные поля на пространственно-подобной гиперповерхности. Эти координатные условия выделяют подобласть на гиперповерхности связи. Условия (3.2), также как и условия, предложенные Дираком [12], Арновитом, Дезером [8] и Мизнером [9], относятся к этому типу. Условия такого типа допустимы только в том случае, если система скобок Пуассона, которые образует каждое из этих условий со всеми связями, линейно независимы. В этом случае получается, что некоторые канонические преобразования, порождаемые связями, переводят допустимые поля, подчиняющиеся координатным условиям, в поля, которые этим условиям не подчиняются.

Аналогично, если сами координатные условия рассматривать как дополнительные связи, и, таким образом, рассматривать канонические преобразования, порождаемые ими, то каждое координатное условие переводит по крайней мере некоторые из допустимых полей в точки фазового пространства, лежащие вне гиперповерхности связи. Такая ситуация крайне неудовлетворительна. Оказывается, что это не позволяет нам рассматривать часть гиперповерхности

связи, подчиняющейся координатным условиям, как новое пространство, которое может быть, естественно, разделено на классы эквивалентности.

Выход, предложенный Дираком, заключается в видоизменении скобок Пуассона [17] (см. также Бергман и Гольдберг [19]). Метод Дирака может быть пояснен следующим образом. Будем называть часть гиперповерхности связи, выделенную с помощью координатных условий, *ограниченной областью* фазового пространства. Рассмотрим далее некоторый генератор A , который переводит ограниченную область (частично) вне себя. Прибавим к A линейную комбинацию связей и координатных условий (коэффициенты могут быть переменными) так, чтобы модифицированный генератор A^* переводил ограниченную область в саму себя. Такой оператор A^* всегда существует. Внутри ограниченной области мы имеем $A^* = A$. Выбор оператора A однозначен только при условии, если при дополнении связей координатными условиями все связи (как старые, так и новые) относятся ко второму классу. В противном случае A^* определяется лишь с точностью до линейной комбинации тех связей, которые относятся к первому классу.

Модификация скобок Пуассона, согласно Дираку, является тогда лишь средством сократить число действующих связей до такого числа, при котором ограниченная область фазового пространства преобразуется сама в себя. Ясно, что это уменьшенное число действующих связей сокращает размер класса эквивалентности до такой части первоначального класса эквивалентности, которая совместима с выбором координатных условий. Остается нерешенным вопрос: приводит ли сокращенное число связей к появлению новых констант движения, т. е. переменных, которые коммутировали бы с меньшим числом связей, формирующих генераторы эквивалентных преобразований [15]. Ответ зависит от нашего определения «констант движения». Согласно определению, принятому в § 2 (это определение предполагает инвариантность констант движения по отношению к любой группе инвариантных преобразований, которая может иметь место после того, как координатные условия уже приняты), никаких новых констант движения не возникает.

Андерсон [16], используя общепринятое определение констант движения, получил новые константы движения, которые коммутируют с гамильтонианом, но не коммутируют с оставшимися связями. Например, полагая в случае электродинамики

$$\varphi = 0, \quad (3.3)$$

он находит

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0. \quad (3.4)$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{A}$ не меняется со временем и не коммутирует со вторичной связью,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = 0. \quad (3.5)$$

Вводя далее координатные условия

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.6)$$

и сводя таким образом переменные электромагнитного поля лишь к $A_{\text{попер.}}$, $\boldsymbol{\pi}_{\text{попер.}}$, он редуцировал, по существу, фазовое пространство электромагнитного поля к калибровочно-инвариантным классам эквивалентности.

Координатные условия, содержащие производные по времени, сокращают диапазон направлений, по которым точка, заданная на гиперповерхности связи, может двигаться в пределах своего класса эквивалентности. Это требование формально эквивалентно сокращению произвола функций в гамильтониане теории. При нашем определении констант движения, данном в § 2, ограничения, налагаемые на вид гамильтониана, не приводят к новым константам движения. Следовательно, такие координатные условия не нарушают структуру редуцированного фазового пространства.

§ 4. Собственные координаты

Различные наборы координатных условий уменьшают оставшийся выбор координатных систем в различной степени. Если в каждом классе эквивалентности остается только одна возможная система координат, мы будем называть эту систему координат *собственной*. Редуцированный

класс эквивалентности тогда состоит из однопараметрического набора разрешенных полей; параметром при этом является координата собственного времени x^0 . Если канонические переменные поля не зависят от x^0 (т. е. если остается допустимым лишь одно поле), мы будем называть систему собственных координат *сопутствующей*. (Сопутствующими называются такие системы координат, в которых гамильтониан строго обращается в нуль в том смысле, в каком это понятие используется Дираком. Сопутствующая система координат не обязательно является собственной.) Опыт показал, что недостаточно знать число наложенных координатных условий, чтобы ответить на вопрос, приводит ли данная система ограничений к собственным координатам. Построение систем собственных координат является, по крайней мере, одним из возможных подходов (и до сих пор единственным подходом), приводящим к успеху в построении редуцированного фазового пространства общей теории относительности. Если можно таким образом выделить систему координат, чтобы в любом многообразии Римана — Эйнштейна существовала единственная (четырёхмерная) система координат, обладающая свойствами, определяющимися данным выбором координатных условий, то каждая компонента любого геометрического объекта в заданной мировой точке в этой системе координат имеет инвариантный смысл, т. е. ее численное значение определено однозначно для каждого решения независимо от того, в какой системе координат это решение было вначале получено.

Существование систем собственных координат уже было установлено [19]. Вопрос о том, должны ли они определяться локальными свойствами многообразия Эйнштейна — Римана или их можно ввести, обращаясь к общим характеристикам (например, задаваясь граничными условиями на пространственной бесконечности), остается, на наш взгляд, открытым. Была высказана мысль, что могут существовать системы координат, определенные не однозначно, а с точностью до группы преобразований, изоморфной группе Лоренца [6—8, 20]. Это предположение также еще не доказано.

В целях иллюстрации еще раз обратимся к электродинамике. Условие калибровки для излучения (3.3) вместе

с (3.6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \\ \nabla^2\Lambda &= 0, \quad \frac{\partial\Lambda}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В конечной области пространства при отсутствии граничных условий уравнение Лапласа для Λ имеет бесконечное число решений. Однако при наличии обычных граничных условий существует только тривиальное решение $\Lambda = \text{const}$, если исключить из рассмотрения решения с сингулярностями в трехмерном топологически евклидовом пространстве. Наконец, в метрически плоском, но топологически замкнутом или многосвязном многообразии имеются не-сингулярные калибровочные преобразования, сохраняющие условия калибровки (4.1) на всем многообразии.

Совокупность собственных систем координат может быть подразделена с учетом чисто локальных свойств пространства. Если уравнения поля Эйнштейна удовлетворены во всем римановом пространстве, из двадцати компонент тензора кривизны Римана — Кристоффеля только 10 оказываются алгебраически независимыми. Это так называемые компоненты тензора Вейля. Из них можно построить четыре и только четыре алгебраически независимых скаляра [21]. При условии, что якобиан преобразования от произвольных координат к указанным четырем скалярным полям не равен нулю (т. е. четыре градиента данных скаляров не компланарны), эти скаляры могут рассматриваться как собственные координаты. Каждая мировая точка может быть задана с помощью численных значений этих четырех скаляров, и это задание мировой точки совершенно не зависит от выбора начальной системы координат. Эта схема нарушается, если четыре градиента поля компланарны, например при наличии группы «движений» многообразия (т. е. когда существует поле Киллинга). Такие частные многообразия, вероятно, представляют собой множество меры нуль среди всех многообразий Римана — Эйнштейна. Заметим, что все решения уравнений поля в замкнутой форме относятся к этому вырожденному типу!

Ниже мы всюду будем предполагать, что рассматриваемые многообразия невырождены в том смысле, что они допускают систему собственных координат по крайней

мере в отдельных областях. При таких допущениях существование собственных координат указывает на то, что мировые точки многообразия Римана — Эйнштейна являются не только различными, но и эквивалентными в смысле локальных геометрических свойств. Для нашего обсуждения не существенно, являются ли выбранные нами координаты наиболее удобными из всех в практическом отношении. Достаточно, чтобы существовал метод однозначного локального отождествления независимо от наличия альтернативных методов.

В § 2 мы установили существование интегралов движения, т. е. совокупности переменных поля, численные значения которых однозначно определяют весь класс эквивалентности решений эйнштейновских уравнений поля. Существование собственных координат показывает, что эти интегралы движения не дают полного описания геометрии в окрестности мировой точки, т. е. что в пределах данного многообразия Римана — Эйнштейна некоторые геометрические свойства меняются при переходе от одной мировой точки к другой. Поэтому, чтобы задать геометрию на данной трехмерной гиперповерхности полностью, мы должны знать как значения собственных координат на этой гиперповерхности, так и значения полного набора констант движения, удовлетворяющих решению уравнений поля.

Эта ситуация была известна, по крайней мере частично, и ранее. Дирак [12] показал, что для определения внутренней природы решения, исходя из данных на пространственно-подобной гиперповерхности с нормалью n^q , не требуется знание четырех компонент метрического тензора $g_{\mu q} n^q$. С другой стороны, эти компоненты и их производные входят в выражения для тензора Вейля и его четырех скаляров. Оказывается, следовательно, что константы движения действительно не зависят от $g_{\mu q} n^q$, тогда как для собственных координат это не имеет места.

Обращаясь к допустимым соотношениям между двумя системами собственных координат, может оказаться уместным исследовать вопрос о возможности того, что дополнительные собственные координатные системы со временем будут открыты. Система собственных координат отождествляет мировые точки на различных (неэквивалентных) многообразиях Римана — Эйнштейна. Другими сло-

вами, любая система собственных координат обеспечивает взаимно-однозначное преобразование двух неэквивалентных многообразий друг в друга. Это преобразование, конечно, не единственно. В связи с этим будем называть две различные системы собственных координат *подобными*, если они переводятся друг в друга тождественными преобразованиями, и *неподобными*, если преобразования, связывающие их, различны. Формально подобные собственные координаты зависят друг от друга. Неподобные координаты зависят друг от друга, а также являются функциями констант движения.

§ 5. Решения, зависящие от времени

Построение редуцированного фазового пространства автоматически приводит к формулировке общей относительности с помощью констант движения и коммутационной алгебры, связывающей эти константы. В таком представлении гамильтониан обращается строго в нуль и оказывается исключенной всякая возможность ввести понятие энергии. Часто задавался вопрос, является ли, с точки зрения физиков, такое представление «естественным» или возможны некоторые другие представления, в большей степени оправданные с точки зрения интуиции.

В предыдущем параграфе мы установили, что в общей теории относительности имеют место два типа переменных: константы движения, характеризующие классы эквивалентности и являющиеся генераторами группы преобразований, которые подчиняются коммутационной алгебре, и собственные координаты, с помощью которых мы фиксируем положение точки внутри данного многообразия. Комбинируя переменные этих двух типов, мы можем построить новые переменные, которые содержат в себе те или иные характеристики из упомянутых выше [6—8, 11, 22]. Не пытаясь делать в связи с этим окончательных суждений (на наш взгляд, в настоящее время мы не располагаем достаточными для этого знаниями о том или ином представлении), отметим в данном параграфе некоторые из свойств тех канонических переменных, не являющихся константами движения.

Мы снова будем исходить из формулировки общей теории относительности, в которой гамильтониан является

комбинацией связей первого класса и, следовательно, обращается в нуль (в смысле дираковского определения этого понятия). Выберем теперь одну из (бесконечного числа) констант движения C и одну переменную, которую обозначим через θ , так чтобы скобки Пуассона этой переменной с константой движения были равны единице. (Даже после того как константа движения уже выбрана, выбор второй переменной может быть сделан множеством различных способов.) Кроме того, потребуем, чтобы θ не была константой движения, так чтобы она могла служить в конечном счете в качестве «времени». Наконец, мы выберем каноническое преобразование, которое переводит первоначальные канонические переменные поля в новый набор, в котором θ и C оказываются канонически сопряженными переменными. В этом случае мы можем принять $-C$ в качестве гамильтониана теории.

Наконец, используем алгебраическое соотношение, связывающее C с помощью первоначального гамильтониана H теории с остальными каноническими переменными. Мы гарантированы, что «время» θ в гамильтониан H не входит (или входит с постоянным множителем), так как оно является канонически сопряженной константе движения. Таким образом, мы получаем соотношение вида

$$C + h(\varphi, \pi) = 0, \quad (5.1)$$

где второй член не зависит от θ . Первоначальная гамильтонова связь теории H была определена лишь с точностью до произвольного локально переменного множителя. Фиксируем теперь этот множитель, принимая для гамильтоновой связи выражение

$$H \equiv h(\varphi, \pi) + C = 0. \quad (5.2)$$

Будем различать первоначальное фазовое пространство с каноническими переменными поля $(\varphi, \theta; \pi, C)$ и новое фазовое пространство, допускающее в качестве канонических переменных только $(\varphi; \pi)$. Будем обозначать скобки Пуассона для первого фазового пространства символом $\{, \}$, а для второго — символом $[,]$. Тогда, очевидно, для любых двух функционалов A и B мы имеем

$$\{A, B\} = [A, B] + \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial C} - \frac{\partial A}{\partial C} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right), \quad (5.3)$$

и, в частности,

$$\{A, H\} = [A, h] + \frac{\partial A}{\partial \theta}. \quad (5.4)$$

Тогда функционал h будет адекватно играть роль нового гамильтониана. Он не зависит от θ и, таким образом, очевидно, является константой движения. Из (5.4) следует также, что если принять в качестве гамильтониана h , то скорость изменения переменной θ будет равна единице.

Придавая скобкам Пуассона для бесконечномерного первоначального фазового пространства вид (5.4), мы, очевидно, исключаем из него две канонически сопряженные «координаты» и одну связь из бесконечного числа связей первого класса. Из нашего метода построения ясно, что начальный выбор переменной S определяет значение «энергии» (т. е. гамильтониана) для любого класса эквивалентности. Действительно, это значение может быть выбрано при желании так, чтобы любой функционал, определенный на классах эквивалентности, был априори константой движения как в нашем, так и в общепринятом смысле. В силу тех же рассуждений при любом выборе гамильтониана h последний является инвариантом, т. е. его значение остается неизменным в пределах данного класса эквивалентности. Даже при задании S , временная координата определена неоднозначно. Любой функционал θ' , имеющий вид

$$\theta' = \theta + g(\varphi, \pi), \quad (5.5)$$

равным образом допустим при любом выборе θ . При таком рассмотрении может оказаться, что выбор «энергии» и «времени» должен базироваться на более строгих критериях, чем просто на условиях, что энергия должна сохраняться и что она может служить в качестве гамильтониана.

Что можно сказать относительно остальных связей? До того, как S и θ были устранены из числа канонических переменных, все остальные связи обращали скобки Пуассона для самих переменных и для переменных и гамильтониана в нуль. В качестве первого шага сокращения числа канонических переменных мы с помощью (5.2) устранили переменную S всюду, куда она могла входить в одной из оставшихся связей. Это эквивалентно замене первоначальных связей алгебраическими комбинациями с H .

Это не должно менять свойств связей, состоящих в принадлежности их к первому классу, т. е. факта обращения $\{ , \}$ в нуль как между переменными, так и между каждой переменной и H . Отсюда непосредственно следует, что ни одна из связей не может зависеть от θ , так как в противном случае скобки Пуассона, содержащие C , не обращались бы в нуль. Отсюда мы делаем вывод, что, поскольку рассматриваются скобки Пуассона для связей (не включая H), последние останутся связями первого класса и при скобках Пуассона типа $[,]$. Более того, так как связи не зависят от θ , то для них скобки Пуассона, содержащие h , равны нулю в силу (5.4). Следовательно, оставшиеся связи и h образуют функциональную группу с новым определением скобок Пуассона. Та форма теории, к которой мы на данном этапе пришли, аналогична другим известным калибровочно-инвариантным теориям типа электродинамики.

В теории, оперирующей с редуцированным фазовым пространством, среди всех полей канонических переменных, удовлетворяющих оставшимся связям, снова можно выделить классы эквивалентности. Поля должны рассматриваться как эквивалентные, если они переводятся друг в друга с помощью непрерывных канонических преобразований, заданных линейными комбинациями только оставшихся связей. Бесконечно малое преобразование, порожденное гамильтонианом h , выводит нас за пределы класса эквивалентности. Соответствующее преобразование в первоначальном фазовом пространстве также приводит к другому классу эквивалентности. Оно отличается от преобразования, порожденного H , в котором $\delta\theta=0$ вместо $\delta\theta=1$.

Устанавливая затем соответствие между классами эквивалентности в первоначальной формулировке общей теории относительности и в формулировке с «временной» зависимостью, мы должны делать различие между допустимыми полями и решениями (последние описывают всю историю поля). Соответствие между классами эквивалентности решений в обеих формулировках безупречно. Этого нельзя сказать относительно классов эквивалентности полей. Здесь однопараметрическая совокупность неэквивалентных полей (относящихся к одному и тому же решению для различных значений θ) в формализме с зависимостью

от «времени» соответствует полям одного класса эквивалентности в первоначальной формулировке.

С помощью новых классов эквивалентности мы можем снова попытаться свести оставшееся фазовое пространство к редуцированному фазовому пространству классов эквивалентности. В новом формализме существуют инварианты, которые не обязательно являются константами движения. Они задают преобразования *классов эквивалентности допустимых полей* друг в друга. Однако преобразование *классов эквивалентности решений* друг в друга будет иметь место только при условии, если эти инварианты являются константами движения. Инвариант, являющийся константой движения в новом формализме, есть также константы движения в первоначальном формализме (в смысле, определенном в § 2).

Если мы хотим сохранить особенности формализма с «временной» зависимостью, но одновременно избавиться от всех оставшихся связей первого класса, мы должны рассмотреть редуцированное фазовое пространство эквивалентных классов полей и канонические преобразования этого пространства, порожденные переменными, определенными в этом редуцированном фазовом пространстве. Число независимых канонических переменных в этом редуцированном фазовом пространстве будет снова равно четырем для каждой точки трехмерного пространства.

§ 6. Построение констант движения

Наличие собственных координат делает по крайней мере принципиально возможным построение констант движения. Тогда для данного произвольного решения уравнений поля в любой конкретной системе собственных координат в заданной фиксированной мировой точке однозначно определяется компонента любого выбранного нами геометрического объекта (такого, как метрический тензор, аффинная связность, тензор Вейля и т. д.). При этом значение каждой компоненты является функционалом данных, определенных на трехмерной пространственно-подобной поверхности в произвольных координатах при условии, что этих данных достаточно для однозначной характеристики решения (предполагается, что сами данные независимы друг

от друга, так что они не могут привести к внутренним противоречиям при наложении связей). Такой функционал является тогда в любом смысле слова константой движения; его зависимость от соответствующих аргументов не содержит явного указания на применяемые нами координаты.

Если нам удастся таким образом построить все компоненты метрического тензора во всех мировых точках относительно какой-нибудь конкретной системы собственных координат, мы будем иметь достаточно данных для однозначного определения решения; однако эта информация содержит много лишних данных. Число данных, действительно необходимых для полного определения решения, равно четырем [19].

Все наши рассуждения носят общий характер и пока что не представляют собой практической схемы. Для фактического построения констант движения необходимы дальнейшие усовершенствования существующего формализма.

§ 7. Заключительные замечания

Допустим, что мы смогли преодолеть все стоящие перед нами трудности и решили проблему построения полного и не содержащего лишних переменных набора наблюдаемых, подчиняющихся определенной алгебре Ли, в некантованной общей теории относительности. Какие возможны пути продвижения вперед в построении квантованной теории? Мы не считаем, что на этот вопрос можно в настоящее время ответить с полной определенностью; мы хотели бы по этому поводу сделать лишь некоторые замечания, которые, правда, могут оказаться более устарелыми, чем выводы предыдущих параграфов.

При формулировке некантованной теории с помощью формализма с «временной» зависимостью мы приходим к гамильтониану, который является функционалом канонических координат теории. Предположим, что мы уже исключили связи. Тогда при условии, что из каких-либо эвристических соображений мы можем определить хронологическую последовательность аргументов в гамильтониане, будем иметь замкнутую теорию (однако, по-видимому, не

существует логически определенного способа, который позволил бы это выполнить).

Это изобилие возможностей устраняется с помощью алгебры Ли, имеющей дело исключительно с константами движения, поскольку гамильтониан такой теории обра- щается тождественно в нуль.

Однако это кажущееся преимущество «застывшей» тео- рии перед теорией с «временной» зависимостью в лучшем случае невелико. Конструируя все константы движения, которые имеют место, согласно аргументации, изложенной в § 6, мы должны большинство из них исключить, прежде чем остальные окажутся излишними. Даже если бы мы потребовали, чтобы оставшиеся константы движения со- стояли из канонически сопряженных пар, это требование не было бы единственным. Выбор переменных, которые можно рассматривать в качестве основных в квантован- ной «застывшей» теории, по-видимому, столь же произ- волен, как и соответствующий выбор в теории с «времен- ной» зависимостью.

В связи с этой неопределенностью в построении кван- товой теории, которая, на наш взгляд, успешно не преодо- лена ни в одной из предложенных в последние годы схем, в памяти всплывают замечания, высказывавшиеся мно- гими физиками-теоретиками и, в частности, в наиболее яркой форме, Паули. История дираковской теории элек- трона показывает, что переход от неквантованной теории к квантованной не обязан быть непосредственным. Коррек- тная квантованная теория может содержать формальные и физические понятия, не имеющие аналогии с некванто- ванной теорией.

Однако вследствие полного отсутствия эксперименталь- ных сведений о гравитационных волнах, мы не можем здесь опираться на эмпирические данные, тогда как спин элек- трона был обнаружен экспериментально задолго до по- строения его квантовой теории Паули и Дираком. Но если даже у нас пока нет уверенности в том, что квантовая теория гравитации даст нам возможность построить теорию элементарных частиц или что-либо подобное, то мы вправе надеяться, что при дальнейшей формальной разработке теории будет найден ключ к решению про- блемы квантования самого гравитационного поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rosenfeld L., *Ann. d. Phys.*, **5**, 113 (1930).
2. Rosenfeld L., *Ann. Inst. H. Poincare*, **2**, 25 (1932).
3. Pirani F. A. E., Schild A., *Phys. Rev.* **79**, 986 (1950).
4. Anderson J. L., Bergmann P. G., *Phys. Rev.*, **83**, 1018 (1951).
5. Bergmann P. G., *Helv. Phys. Acta, Suppl.*, **IV**, 79 (1956).
6. De Witt B. S., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 377 (1957).
7. Deser S., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 417 (1957).
8. Arnowitt R., Deser S., *Phys. Rev.* **113**, 745 (1959).
9. Misner C. W., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 497 (1957).
10. Belinfante F. J., Caplan D. I., Kennedy W. L., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 518 (1957).
11. Bergmann P. G., Penfield R., Schiller R., Zatzkis H., *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950).
12. Dirac P. A. M., *Phys. Rev.*, **114**, 924 (1959).
13. Pauli W., Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, **12**, 297 (1939).
14. Bergmann P. G., Schiller R., *Phys. Rev.*, **89**, 4 (1953).
15. Bergmann P. G., Goldberg I., Janis A., Newman E., *Phys. Rev.*, **103**, 807 (1956).
16. Anderson J. L., Generation of Coordinate Conditions and the Construction of Invariants in Covariant Theories, Preprint.
17. Bergmann P. G., Janis A., *Phys. Rev.*, **111**, 1191 (1958).
18. Dirac P. A. M., *Canad. Journ. Math.*, **2**, 129 (1950); **3**, 1 (1951).
19. Bergmann P. G., Goldberg I., *Phys. Rev.*, **98**, 531 (1955).
20. Komar A., *Phys. Rev.*, **111**, 1182 (1958).
21. Фок В. А., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 325 (1957).
22. Gehenniau J., Debever R., *Helv. Phys. Acta, Suppl.*, **IV**, 101 (1956).
23. Anderson J. L., Absolute Change in General Relativity, Preprint.

15. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЙТРИНО С ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОЛЕМ¹⁾

Д. Брилль и Дж. Уилер

D. Brill and J. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 29, 465—479 (1957)

§ 1. Введение; гравитационное поле — единственное средство, позволяющее просто анализировать нейтрино

В настоящее время сведения о нейтрино ограничиваются главным образом процессами испускания и поглощения, т. е. областью превращений элементарных частиц. Для сравнения представим себе, что нам известны об электронах лишь вероятности, с которыми они образуются при β -распаде, или поглощаются при K -захвате, но что мы ничего не знаем о движении электронов в электрическом и магнитном полях, о связи электронов в атомах или о существовании спин-орбитального взаимодействия и очень мало знаем о тензоре энергии-натяжений электрона. Что следует предпринять, чтобы узнать о нейтрино хотя бы некоторую часть того, что мы знаем на сегодняшний день об электронах?

Нейтрино не реагирует непосредственно на электрическое или магнитное поля. Следовательно, если мы хотим воздействовать на его орбиту силами, поддающимися простому анализу, то мы должны использовать гравитационные поля. Иными словами, мы должны рассмотреть физику нейтрино в искривленном пространстве.

Для решения этой задачи единственно пригодным средством является теоретический анализ. Мы принимаем недавно разработанную [1, 2] и столь эффектно проверенную [3, 4] теорию нейтрино. Мы не видим никаких оснований изменять эту теорию. Вместо этого в § 2 мы напомним обобщение уравнения Дирака на случай искривленного

¹⁾ В переводе настоящей статьи учтены замечания, любезно присланные авторами.—Прим. ред.

пространства, которое представляет гравитационное поле самого общего вида. В § 3 мы специально останавливаемся на нейтрино с его равной нулю массой и ограничиваемся классом решений с правой поляризацией, что диктуется недавно полученными результатами [1—4]. В § 4 выделяется радиальное волновое уравнение для движения нейтрино в центрально-симметричном гравитационном поле, и один из членов этого уравнения отождествляется со спин-орбитальным взаимодействием. В § 5 сравнивается и сопоставляется спектр энергетических уровней в случае сферической симметрии для 1) электрона в электростатическом поле, 2) электрона в гравитационном поле, 3) фотона в гравитационном поле и 4) нейтрино в гравитационном поле. В § 6 мы напоминаем статистическую механику ансамбля нейтрино. В § 7 обсуждаются некоторые процессы рождения нейтринных пар, существование которых не зависит от β -взаимодействий. В § 8 рассматривается вопрос о вкладе нейтрино в тензор энергии-импульса, в § 9 — о гравитационном взаимодействии двух нейтрино, движущихся параллельно или антипараллельно друг другу. В § 10 обсуждается вклад в тензор энергии-импульса, вносимый нейтрино, находящимся в связанном состоянии. Наконец, в § 11 в виде иллюстрации рассматривается некоторый объект, где вступают в действие как создание гравитационных полей нейтрино, так и реакция нейтрино на гравитационные поля, а именно геон—некое образование, которое состоит исключительно из нейтрино и удерживается как целое благодаря их взаимному гравитационному притяжению.

§ 2. Спинорный анализ в искривленном пространстве

Спинорные поля в общей теории относительности рассматривались многими авторами¹⁾, причем с трех основных точек зрения (табл. 1). Эти три формализма в принципе эквивалентны и должны, следовательно, во всякой

¹⁾ Общий обзор литературы по этому вопросу см. в работе [5]. К приведенному там списку основных работ следует добавить работы [6—8].

Таблица 1

**Сравнение трех основных формализмов описания спина
в общей теории относительности**

Формализм	Общий формализм		Формализм тетраподов	
	4	2	4	2
Число компонент ψ				
Спиновые матрицы ($i = 1, 2, 3, 4$)	γ_i	s_i	$\tilde{\gamma}_i$	\tilde{s}_i
Зависимость от положения	Имеется		Нет	
Соотношение между спиновыми матрицами и метрикой	Спиновые матрицы связаны с метрикой соотношениями: $[\gamma_i, \gamma_j]_+ = 2g_{ij}$ $[\bar{s}_i, \bar{s}_j]_+ = 2g_{ij}$		Метрика преобразована к локальной лоренцевой метрике: $d\tilde{x}^k = b_\alpha^k dx^\alpha$, $g_{ik} = b_i^\alpha b_k^\beta g_{\alpha\beta}$ (лоренц.) $\gamma_k = b_k^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha \quad \quad s_k = b_k^\alpha \tilde{s}_\alpha$;	
Преобразования, относительно которых формализм ковариантен	Общие преобразования координат и преобразования подобия		Общие преобразования координат и совершенно независимо преобразования Лоренца для дифференциалов $d\tilde{x}^k$ тетрапода.	
Наиболее общая форма второго из этих преобразований	16 параметров	4 комплексных параметра	6 вещественных лоренцевых параметров с инверсией или без инверсии пространства или времени, или того и другого.	

Продолжение табл. 1

Формализм	Общий формализм		Формализм тетраподов	
	4	2	4	2
Образование ковариантных величин	Как в тензорном анализе; см. табл. 2 для ковариантной производной			
Сопряженная в смысле Паули функция, ψ^\dagger	$\psi^* \cdot i \cdot$ (Эрмитизирующая матрица)		$\psi^* i \tilde{\gamma}^4$	$\psi^* i \tilde{s}^4$ компл. сопр.
Уравнение Дирака для нейтрино	$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$	$s^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$	$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$	$s^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0$
Лагранжиан, L	$\psi^\dagger \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi$	$\psi^\dagger s^\alpha \nabla_\alpha \psi$	$\psi^\dagger \gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi$	$\psi^\dagger s^\alpha \nabla_\alpha \psi$
4-вектор тока, s^k	$\psi^\dagger i \gamma^k \psi$	$\psi^\dagger i s^k \psi$	$\psi^\dagger i \gamma^k \psi$	$\psi^\dagger i s^k \psi$

Формализм тетраподов для уравнения Дирака в сферических координатах для двух простых случаев выбора осей тетрапода

	Оси тетрапода параллельны единичным векторам в	
	направлениях r, θ, φ, T	направлениях x, y, z, T
Соответствующие матрицы γ	$\gamma_r = \left(\exp \frac{1}{2} \lambda \right) \tilde{\gamma}_1$ $\gamma_\theta = r \tilde{\gamma}_2$ $\gamma_\varphi = r \sin \theta \tilde{\gamma}_3$ $\gamma_T = \left(\exp \frac{1}{2} \nu \right) \tilde{\gamma}_4$	$\gamma_r = \left(\exp \frac{1}{2} \lambda \right) \times$ $\times (\sin \theta \sin \varphi \tilde{\gamma}_1 +$ $+ \sin \theta \cos \varphi \tilde{\gamma}_2 + \cos \theta \tilde{\gamma}_3)$ <p>Аналогично для γ_θ и γ_φ</p> $\gamma_T = \left(\exp \frac{1}{2} \nu \right) \tilde{\gamma}_4$

Продолжение табл. 1

	Оси тетрапода параллельны единичным векторам в	
	направлениях r, θ, φ, T	направлениях x, y, z, T
Разделение дираков- ской вол- новой функции при про- стом вы- боре пред- ставления матриц γ	$\begin{bmatrix} F(r) f(\theta) \\ F(r) g(\theta) \\ G(r) f(\theta) \\ G(r) g(\theta) \end{bmatrix} \times \exp\left(im_j\varphi - \frac{iEt}{\hbar}\right)$	$\begin{bmatrix} F(r) Y_1(\theta) \times \\ \times \exp\left[i\left(m_j + \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{iEt}{\hbar}\right] \\ F(r) Y_2(\theta) \times \\ \times \exp\left[i\left(m_j - \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{iEt}{\hbar}\right] \\ G(r) Y_1(\theta) \times \\ \times \exp\left[i\left(m_j + \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{iEt}{\hbar}\right] \\ G(r) Y_2(\theta) \times \\ \times \exp\left[i\left(m_j - \frac{1}{2}\right)\varphi - \frac{iEt}{\hbar}\right] \end{bmatrix}$
Спинорная волновая функция как функ- ция поло- жения	Неоднозначна	Однозначна

реальной задаче давать одинаковые результаты для таких основных физических величин, как собственные значения энергии и плотность энергии-импульса. Мы считаем удобным использовать здесь обобщение формализма В. Фока и Д. Иваненко, предложенное В. Баргманом [8], вследствие его общности. Уравнения в этом формализме ковариантны по отношению к общим преобразованиям координат и инвариантны при общих, т. е. зависящих от местоположения преобразованиях подобия спиноров. Фундаментальная связь между пространством и спином осуществляется через поле γ -матриц, которые в каждой точке пространства удовлетворяют антикоммутационному соотношению

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2g_{ik} \mathbf{1}, \quad (1)$$

где g_{ik} — метрический тензор в этой точке и 1 — единичная матрица. Для сигнатуры метрического тензора мы, следуя Паули, принимаем значение $(1, 1, 1, -1)$. Пусть известна зависимость g_{ik} от положения. Тогда можно развить общековариантный спинорный формализм при помощи любого поля четырехрядных матриц γ_i , которые обладают следующими свойствами: 1) компоненты γ_i являются непрерывными функциями координат в пространстве-времени; 2) они удовлетворяют соотношению (1); 3) они преобразуются как вектор при преобразованиях координат; 4) при преобразованиях спиноров

$$(\text{Спинор})_{\text{нов.}} = S^{-1} (\text{Спинор})_{\text{стар.}},$$

они подвергаются преобразованию подобия

$$(\gamma_i)_{\text{нов.}} = S^{-1} (\gamma_i)_{\text{стар.}} S.$$

Рассмотрение заряженных спинорных полей существенно упрощается, если ограничиться вещественными представлениями спиновых матриц γ_k , и спинорными преобразованиями S , матричные элементы которых также являются вещественными величинами.

Основной особенностью математического аппарата является определение ковариантного дифференцирования, которое представляет собой естественное обобщение ковариантного дифференцирования в тензорном анализе (табл. 2). В дополнение к обычным символам Кристоффеля Γ_{ik}^m , образуемым из g_{ik} , необходимо ввести четыре четырехрядные матрицы Γ_k . Эти величины определены с точностью до аддитивной величины, кратной единичной матрице, соотношением

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\mu \gamma_\mu - \Gamma_k \gamma_i + \gamma_i \Gamma_k = 0. \quad (2)$$

Величины Γ_{ik}^m и Γ_k вместе дают возможность определить ковариантную производную любой величины, для которой известны трансформационные свойства при общих преобразованиях координат и общих преобразованиях подобия. Эта ковариантная производная обозначается символом ∇_k ; его явная форма зависит от той величины, на которую он действует (см. табл. 2). Это ковариантное дифференциро-

Таблица 2

**Ковариантное дифференцирование спинорных величин
и его сравнение с ковариантным дифференцированием
тензоров**

	Тензоры	Величины, преобразующиеся как спиноры
Обозначение ковариантного дифференцирования по x^k	Индекс ; k внизу справа	Оператор ∇_k
Частный вид ковариантного дифференцирования, когда пространство плоское, координаты—эвклидовы и матрицы γ не зависят от координат	$\frac{\partial}{\partial x^k}$	$\frac{\partial}{\partial x^k}$
Дополнительные величины, необходимые для определения ковариантного дифференцирования в том случае, если одно или более из этих условий не выполнено	40 функций Γ_{ik}^m , зависящих от координат.	Те же функции Γ_{ik}^m и четыре матрицы Γ_k

Продолжение табл. 2

	Тензоры	Величины, преобразующиеся как спиноры
Формула, определяющая эти дополнительные величины по метрике	$\frac{1}{2} g^{m\alpha} \left(\frac{\partial g_{ka}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\alpha} \right)$	Уравнение (2) или (8)
Как эти величины входят в определение ковариантной производной	Зависит от трансформационных свойств дифференцируемой величины	
Пример I	Скаляр f	Спинор ψ
Действие координатного преобразования	$f' = f$	$\psi' = \psi$
Действие спинорного преобразования	$f' = f$	$\psi' = S^{-1}\psi$
Ковариантная производная	$f_{;k} = \frac{\partial f}{\partial x^k}$	$\nabla_k \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^k} - \Gamma_k \psi$
Пример II	Вектор A^s	Сопряженный спинор ψ^\dagger
Действие координатного преобразования	$A^{s'} = \frac{\partial \bar{x}^s}{\partial x^\alpha} A^\alpha$	$\psi^{\dagger'} = \psi^\dagger$
Действие спинорного преобразования	$A^{s'} = A^s$	$\psi^{\dagger'} = \psi^\dagger S$
Ковариантная производная	$A^s_{;k} = \frac{\partial A^s}{\partial x^k} + \Gamma_{k\alpha}^s A^\alpha$	$\nabla_k \psi^\dagger = \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^k} + \psi^\dagger \Gamma_k$

Продолжение табл. 2

Пример III	Тензор M_i^k	Спинорный тензор T_{ik} (например, $\gamma_i \gamma_k$)
Действие координатного преобразования	$M_i^{k'} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} M_\alpha^\beta$	$T'_{ik} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} T_{\alpha\beta}$
Действие спинорного преобразования	$M_i^{k'} = M_i^k$	$T'_{ik} = S^{-1} T_{ik} S$
Ковариантная производная	$M_{i;l}^k = \frac{\partial M_i^k}{\partial x^l} + \Gamma_{l\alpha}^k M_i^\alpha - \Gamma_{il}^\alpha M_\alpha^k$	$\nabla_l T_{ik} = T_{ik;l} + T_{ik} \Gamma_k - \Gamma_k T_{ik}$

вание обладает обычными свойствами

$$\begin{aligned} \nabla_k (AB) &= (\nabla_k A) B + A (\nabla_k B), \\ \nabla_k (A^*) &= (\nabla_k A)^*, \\ \nabla_k \gamma_i &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где символ * у той или иной величины означает эрмитово-сопряженную величину (комплексно-сопряженную и транспонированную). Величина $\nabla_k A$ преобразуется как A при преобразованиях подобия и как тензор на единицу более высокого ранга, чем A , при преобразованиях координат. Определению (1) всегда можно удовлетворить, взяв в качестве γ_i некоторую линейную комбинацию матриц специальной теории относительности. Эти последние являются постоянными и, если мы пожелаем, чисто вещественными матрицами, которые удовлетворяют условиям:

$$\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_k + \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_i = 2g_{ik} \text{Лоренц.},$$

$$g^{ik}_{\text{Лоренц.}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$\tilde{\gamma}_i^* = \tilde{\gamma}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \tilde{\gamma}_4^* = -\tilde{\gamma}_4. \quad (5)$$

Таким образом, в каждой точке x в четырехмерном пространстве можно совершить преобразование от общих координат x^i к системе \tilde{x}^i «тетраподов» («Vierbein»), метрика которой представляет собой метрику Минковского в этой точке:

$$dx^k = a_\alpha^k d\tilde{x}^\alpha, \quad d\tilde{x}^k = b_\beta^k dx^\beta. \quad (6)$$

Тогда соотношение (1) удовлетворяется, если

$$\gamma_i = b_i^\alpha \tilde{\gamma}_\alpha. \quad (7)$$

Формализм, который ограничивается решениями соотношения (1), имеющими специальный вид (7), называется формализмом тетраподов. В рамках этого формализма точное решение уравнения (2) может быть записано в простой форме¹⁾

$$\Gamma_k = \frac{1}{4} g_{\mu\alpha} \left[\frac{\partial b_\nu^\beta}{\partial x^k} a_\beta^\alpha - \Gamma_{\nu k}^\alpha \right] s^{\mu\nu} + a_k \mathbf{1}, \quad (8)$$

где $s^{ij} = 1/2 (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i)$ и a_k — произвольные постоянные. В рамках формализма тетраподов преобразование подобия для спиноров эквивалентно преобразованию Лоренца для тетрапода. Следовательно, инвариантность формализма при преобразованиях подобия может быть понята геометрически как инвариантность при произвольных лоренцовых преобразованиях тетраподов. Эти преобразования Лоренца не имеют ничего общего с каким-либо преобразованием координат и изменяются произвольно от точки к точке в пространстве.

¹⁾ Относительно решения для общих γ -полей см. [9]. См. также J. G. Fletcher, Nuovo Cimento, 8, 451 (1958).

Уравнение Дирака в общей теории относительности может быть написано в форме

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi + \mu \psi = 0 \quad \left(\mu = \frac{mc}{\hbar} \right). \quad (9)$$

Здесь мы предполагаем, что произвольные следы матриц Γ_k подобраны таким образом, чтобы они объясняли действия электромагнитных потенциалов.

Чтобы образовать вещественные выражения, такие, как плотность тока, будем следовать Баргману, незначительно изменив обозначения, и определим сопряженную в смысле Паули величину для ψ :

$$\psi^\dagger = \psi^* \alpha$$

при помощи «эрмитизирующей» матрицы α , выбранной так, чтобы как сама α , так и четыре матрицы $\alpha i \gamma^k$ были эрмитовыми. В формализме тетраподов мы можем выбрать матрицы $\tilde{\gamma}^k$ вещественными и положить ¹⁾ $\alpha = i \tilde{\gamma}^4$. Тогда можно образовать плотность тока

$$s^k = \psi^\dagger i \gamma^k \psi, \quad (10)$$

ковариантная дивергенция которой обращается в нуль в силу уравнения Дирака (9). Уравнение Дирака может быть выведено из вариационного принципа

$$\delta \int L(-g)^{1/2} d^4x = 0 \quad (11)$$

с

$$L = \psi^\dagger \gamma^\alpha (\nabla_\alpha \psi) + \mu \psi^\dagger \psi \quad (12)$$

путем независимого варьирования по ψ^\dagger и ψ .

§ 3. α - и β -вращения и волновое уравнение двухкомпонентного нейтрино

Чтобы получить волновое уравнение дираковского типа для нейтрино, положим равным нулю член с массой в уравнении Дирака (9) и в лагранжиане (12):

$$\gamma^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0. \quad (13)$$

¹⁾ Относительно общей эрмитизирующей матрицы см. [10].

В этом специальном случае равной нулю массы покоя волновое уравнение и лагранжиан оказываются инвариантными относительно более широкого класса преобразований, чем тот, который обычно рассматривается в теории Дирака. Ситуация здесь аналогична случаю электромагнитного поля F_{ik} в отсутствие зарядов. Рассмотрим любое решение уравнений Максвелла

$$\varepsilon^{i\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0, \quad (14)$$

$$(-g)^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} [(-g)^{1/2} F^{\alpha k}] = 0,$$

где $\varepsilon^{1234} = 1$, а ε^{ijkl} меняет знак при взаимной перестановке двух любых индексов. Из любого решения этих уравнений в случае метрики произвольной кривизны можно образовать новое решение, проделав преобразование особого рода, которое мы можем назвать « α -вращением»

$$(F_{ik})_{\text{нов.}} = F_{ik} \cos \alpha + \frac{1}{2} (-g)^{-1/2} g_{i\sigma} g_{k\tau} \varepsilon^{\sigma\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta} \sin \alpha, \quad (15)$$

где α — некоторый угол, который не зависит от координат и времени. В плоском пространстве это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{нов.}} &= \mathbf{E} \cos \alpha + \mathbf{H} \sin \alpha, \\ \mathbf{H}_{\text{нов.}} &= \mathbf{H} \cos \alpha - \mathbf{E} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

Это преобразование не представляет собой какого-либо непосредственного вращения в обычном смысле, за исключением того частного случая, когда \mathbf{E} и \mathbf{H} представляют главные направления поляризации плоской монохроматической волны; в этом случае α -преобразование поворачивает оси поляризации на угол α .

Аналогичным образом, пусть ψ — некоторое решение уравнения Дирака с равной нулю массой в пространственно-временном континууме произвольной кривизны. Тогда можно образовать новое решение путем « β -вращения»¹⁾:

¹⁾ Возможность этого преобразования в плоском пространстве хорошо известна.

$$\psi_{\text{нов.}} = \exp\left(\frac{1}{2} \beta \gamma_5\right) \psi = \left[1 \cos\left(\frac{1}{2} \beta\right) + \gamma_5 \sin\left(\frac{1}{2} \beta\right) \right] \psi, \quad (17)$$

где β — постоянная и

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= (-g)^{-1/2} \frac{1}{4!} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\gamma \gamma_\delta, \\ (\gamma_5)^2 &= -1, \\ \gamma_5 \gamma_i &= -\gamma_i \gamma_5 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (18)$$

В частном случае, когда нейтринная волна линейно поляризована в некоторой заданной области пространства, β -вращение поворачивает это направление поляризации на угол β . То обстоятельство, что $\gamma_5 \psi$ является решением уравнения (13), следует из (3) и антикоммутиционных соотношений (18); следовательно, линейная комбинация (17) ψ и $\gamma_5 \psi$ также будет решением.

Никакое изменение в метрике не может снять вырождения между состояниями поляризации спина ψ и $\exp(i/2 \beta \gamma_5) \psi$. Подобная ситуация имеет место в физике системы двух электронов. Никакая допустимая система сил не может создать разность в энергии между состояниями $u(x_1, x_2)$ и $\exp(i\gamma P_{12}) u(x_1, x_2)$, где P_{12} — оператор перестановки. По-видимому, природа вообще не допускает неустранимого вырождения такого рода. Возможны лишь комбинации $u(x_1, x_2) - u(x_2, x_1)$. Подобно этому, допустим, что природа исключает дублетность спиновых состояний для нейтрино, которые не могли бы быть разделены никаким как угодно сильным гравитационным полем. Более того, будем считать, что допустимыми состояниями ψ для нейтрино являются лишь такие, которые при всяком β -вращении преобразуются в то же ψ с некоторым постоянным множителем:

$$\exp\left(\frac{1}{2} \beta \gamma_5\right) \psi_{\text{допуст.}} = e^{i(\text{const})} \psi_{\text{допуст.}} \quad (19)$$

В таком случае мы приходим к выводу, что волновые функции допустимых состояний имеют с необходимостью *круговую поляризацию* в том смысле, что выражение

$$\psi_{\text{допуст.}} = \psi_c = (1 + i\gamma_5) \psi \quad (20)$$

представляет собой смесь с разностью фаз 90° состояний с поворотом на 0 и 180° . Чтобы изменить знак перед i в (20), нужно лишь взаимно переставить определения состояний с положительной и отрицательной энергией. Ли и Янг [1,2] выдвинули другие аргументы в пользу того, чтобы рассматривать все нейтрино как обладающие правой круговой поляризацией. Их соображения получили блестящее подтверждение [3,4]. Представляется неизбежным вывод, что нейтрино обладают только одним состоянием поляризации, являющейся поляризацией по кругу.

Спинорные волновые функции допустимых состояний удовлетворяют условию

$$(1 - i\gamma_5)\psi_c = 0 \quad (21)$$

и имеют в соответствующем представлении только две отличные от нуля компоненты. Как показали Ли и Янг, они могут быть описаны двухкомпонентными спинорами Паули. Они ввели двухкомпонентное волновое уравнение

$$H\psi = c\sigma \cdot \mathbf{p}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (22)$$

где σ — три спиновые матрицы Паули. Чтобы записать это уравнение в общековариантной форме, удобно ввести четыре двухрядные матрицы s_i , которые удовлетворяют условиям

$$[\bar{s}_i, s_j]_+ \equiv \bar{s}_i s_j + \bar{s}_j s_i = 2g_{ij}, \quad (23)$$

где чертой обозначено комплексное сопряжение. Тогда ковариантная форма уравнения Паули — Ли — Янга будет иметь вид

$$s^\alpha \nabla_\alpha \psi = 0. \quad (24)$$

Точный смысл s^i и ковариантной производной ∇_i известен из спинорного анализа¹⁾.

Бета-вращение не является единственным средством образования нового решения волнового уравнения для нейтрино (13) из общего решения ψ . Используем представление, в котором все базисные матрицы вещественны,

$$\gamma_{\text{компл.-сопр.}}^i = \gamma^i$$

и возьмем выражение, комплексно-сопряженное (13); тогда

¹⁾ См., например, [5], а также [8]

сразу видно, что $\psi_{\text{компл.-сопр.}}$ удовлетворяет тому же волновому уравнению, что и само ψ . Если ψ представляет состояние с положительной энергией, то $\psi_{\text{компл.-сопр.}}$, очевидно, представляет состояние с отрицательной энергией; но в метрике, которая изменяется как в пространстве, так и во времени, не имеется никакого ясно выраженного различия между этими двумя типами состояний.

Как убедиться, что базисные матрицы можно выбрать вещественными даже в том случае, когда рассматриваемое трехмерное пространство имеет произвольную кривизну и топологию? Для простоты мы допустим, что время имеет топологию прямой линии¹⁾. В *трехмерном* пространстве всегда можно определить три взаимно ортогональных не-сингулярных векторных поля — построение, которое, как известно, невозможно на *двумерной* замкнутой поверхности сферы. Поэтому нам остается лишь заимствовать четыре обычные *вещественные* матрицы $\tilde{\gamma}$ плоского пространства и применить формализм тетраподов, чтобы получить в рассматриваемом кривом пространстве четыре вещественные матрицы

$$\gamma_i = b_i^{\alpha} \tilde{\gamma}_{\alpha}. \quad (25)$$

§ 4. Движение нейтрино в сферически-симметричном гравитационном поле

Исследуем взаимодействие нейтрино с гравитационным полем в простейшем известном случае сферически-симметричной метрики шварцшильдовского типа:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{\nu} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Здесь координатами являются: $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = ct = T$. Предположим, что масштабные функции $\lambda(r)$

¹⁾ Мы признательны проф. В. Баргману, информировавшему нас о теореме, на которую ссылался Хопф на Международном конгрессе математиков в Кэмбридже, США (Труды конгресса, т. I, 1950, стр. 193).

и $\nu(r)$ произвольным образом зависят от расстояния; они не ограничиваются специальным решением Шварцшильда для локально сконцентрированной массы

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (27)$$

Чтобы написать уравнение Дирака в этой метрике, выберем поле γ -матриц типа (7). Есть две простые возможности выбора этих матриц: 1) оси тетрапода в каждой точке параллельны осям r , θ и φ , так что нужные нам матрицы Дирака γ^i выражаются через обычные матрицы Дирака $\tilde{\gamma}^i$ для декартовой системы координат по формулам

$$\gamma_1 = e^{1/2\lambda}\tilde{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = r\tilde{\gamma}_2, \quad \gamma_3 = r \sin \theta \tilde{\gamma}_3, \quad \gamma_4 = e^{1/2\nu}\tilde{\gamma}_4 \quad (28)$$

и 2) оси тетрапода параллельны осям некоторой другой прямоугольной системы координат:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= e^{1/2\lambda} (\sin \theta \cos \varphi \tilde{\gamma}_1 + \sin \theta \sin \varphi \tilde{\gamma}_2 + \cos \theta \tilde{\gamma}_3), \\ \gamma_2 &= r (\cos \theta \cos \varphi \tilde{\gamma}_1 + \cos \theta \sin \varphi \tilde{\gamma}_2 - \sin \theta \tilde{\gamma}_3), \\ \gamma_3 &= r \sin \theta (-\sin \varphi \tilde{\gamma}_1 + \cos \varphi \tilde{\gamma}_2), \\ \gamma_4 &= e^{1/2\nu} \tilde{\gamma}_4. \end{aligned} \quad (29)$$

Оба выбора приводят к одному и тому же радиальному уравнению, но к различной зависимости компонент спинорной волновой функции от углов (см. табл. 1). В случае 2 угловая зависимость соответствует той, которая в обычном случае специальной теории относительности предсказывается стандартными формулами (см., например, [11]). Такую неоднозначность волновой функции следует ожидать всегда, когда используется формализм, инвариантный относительно преобразований подобия, которые совершенно не зависят от преобразований координат. Величины, имеющие физический смысл, такие, как плотность тока, будут, конечно, одинаковы в обоих случаях, так как они инвариантны относительно преобразования подобия. Приведем подробный расчет для случая 1. Мат-

рицы Γ_h находятся из уравнения (2) или (8):

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= 0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} e^{-1/2\lambda} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} (\sin \theta e^{-1/2\lambda} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_3 + \cos \theta \tilde{\gamma}_2 \tilde{\gamma}_3), \\ \Gamma_4 &= \frac{\nu'}{4} e^{1/2(\nu-\lambda)} \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_4,\end{aligned}\quad (30)$$

где $\nu' = dv/dr$.

Уравнение Дирака для частицы с массой $\mu\hbar/c$ принимает форму

$$\begin{aligned}0 &= \gamma^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha \right) \psi + \mu\psi = \\ &= \left[\tilde{\gamma}_1 e^{-1/2\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} + r^{-1} + \frac{\nu'}{4} \right) + \frac{\tilde{\gamma}_2}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\tilde{\gamma}_3}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e^{-1/2\nu} \tilde{\gamma}_4 \frac{\partial}{\partial T} \right] \psi + \mu\psi.\end{aligned}\quad (31)$$

Следуя Шредингеру, можно переписать это уравнение следующим образом:

$$i \frac{\partial \omega}{\partial T} = h\omega, \quad (32)$$

где

$$\omega = \exp \left(\frac{\nu}{4} \right) r (\sin \theta)^{1/2} \psi \quad (33)$$

и

$$e^{-1/2\nu} h = \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_1 e^{-1/2\lambda} \frac{\partial}{i\partial r} + \frac{\tilde{\gamma}_1}{r} K - i\tilde{\gamma}_4 \mu, \quad (34)$$

$$K = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_2 \frac{\partial}{i\partial \theta} + \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_3 \frac{1}{i \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (35)$$

Оператор K является эрмитовым и коммутирует с h . Следовательно, мы можем выбрать функции, являющиеся собственными функциями операторов h и K одновременно, и представить μ -ю компоненту волновой функции ω_μ в виде произведения радиальной, угловой и временной частей

$$\omega_\mu = R_\mu(r) \Theta_\mu(\theta, \varphi) \exp(-ihT). \quad (36)$$

Здесь величина h представляет собой энергию (в единицах $\hbar c$). Угловая часть Θ определяется требованием

$$K\omega = k\omega, \quad (37)$$

где k — постоянная. Это уравнение для собственных состояний ротатора было исследовано Шредингером [12]. В соответствии с общепринятым рассмотрением уравнения Дирака в центральном поле он нашел спектр положительных и отрицательных целых собственных значений k .

После замены оператора K числом k в радиальном уравнении (34) остаются в явном виде только две матрицы, $\tilde{\gamma}_4$ и $\tilde{\gamma}_1$. Поэтому они могут быть представлены двухрядными матрицами, а радиальная часть волновой функции — двухкомпонентным спинором:

$$\tilde{\gamma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma}_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \quad (38)$$

В этом представлении радиальные уравнения для электрона в шварцшильдовской метрике с электростатической потенциальной энергией $V = v\hbar c$ принимают вид:

$$\begin{aligned} [e^{-1/2\nu}(h-v) + \mu] F - e^{-1/2\lambda} \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r} G &= 0, \\ [e^{-1/2\nu}(h-v) - \mu] G + e^{-1/2\lambda} \frac{dF}{dr} - \frac{k}{r} F &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

и представляют собой некоторую модификацию обычных радиальных уравнений (см., например, [13]) для электрона в центрально-симметричном потенциальном поле. Для нейтрино мы, конечно, полагаем v и μ равными нулю.

§ 5. Сравнение уровней энергии электрона в электростатическом и гравитационном полях и уровней энергии нейтрино и фотона в гравитационном поле

Чтобы получить некоторое качественное представление о поведении электронов и нейтрино в гравитационных полях, рассмотрим сначала электрон в гравитационном поле. Мы принимаем шварцшильдовское решение (27) для метрики вне некоторой массы M . Эту метрику мы подставляем в радиальное волновое уравнение (39) и пренебрегаем членами порядка $1/c^2$ и выше. Мы нахо-

дим, что $(E - V) = \hbar c (h - v)$ заменяется выражением $(E - V - \phi)$, где $\phi = - (GM/r) (E/c^2) -$ «гравитационная потенциальная энергия» частицы с энергией E . Следовательно, в этом приближении уровни энергии электрона, обладающего положительной энергией, остаются неизменными, если электростатический потенциал заменить гравитационным потенциалом той же интенсивности. Формулы Бора для уровней энергии и радиусов круговых орбит

$$E = mc^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{Ze^2}{n\hbar} \right)^2, \quad (40)$$

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{mZe^2}$$

заменяются соответствующими формулами

$$E = mc^2 - \frac{1}{2} m \left(\frac{GMm}{n\hbar} \right)^2, \quad (41)$$

$$r = \frac{n^2 \hbar^2}{GMm^2}.$$

Отклонения от этих формул, вызываемые, например, гравитационным спин-орбитальным взаимодействием, следует ожидать только в том случае, когда вычисленная скорость электрона на наинизшей боровской орбите сравнима со скоростью света:

$$\frac{GMm}{\hbar} \sim c,$$

или

$$Mm \sim \frac{\hbar c}{G} = (2,18 \cdot 10^{-5} g)^2,$$

или

$$M \sim 5 \cdot 10^{19} g. \quad (42)$$

Для реализации такого предельного случая было бы необходимо, чтобы эта притягивающая масса была заключена в области порядка шварцшильдовского радиуса этой массы или комптоновского радиуса электрона

$$r_{\text{Шв.}} = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\hbar}{mc} = 7,7 \cdot 10^{-11} \text{ см};$$

это условие не достигается даже для материи ядерной плотности.

Изложенный выше анализ в приближении слабого поля требует, чтобы энергия связи частицы была мала по сравнению с ее энергией покоя. Он неприменим к нейтрину с его равной нулю массой покоя. Более того, связанные состояния лежат в области энергий между $-mc^2$ и $+mc^2$ и потому не существуют для объекта с нулевой массой покоя. Волновые функции такого объекта не могут убывать экспоненциально в области, где метрика становится плоской. Однако можно построить метрику с некоторой внутренней областью (областью потенциального барьера) и некоторой внешней областью таким образом, чтобы волновые функции нейтрино экспоненциально убывали в области барьера. Тогда просачивание из внутренней области во внешнюю в значительной степени затруднено. В этом случае для нейтрино во внутренней области существуют связанные собственные состояния с большим временем жизни.

Такого рода «ловушку» для нейтрино особенно просто проиллюстрировать в метрике сферического геона с тонкой оболочкой [14]:

$$\begin{aligned} e^\nu &= e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad \text{при } r > \frac{9}{4} \frac{GM}{c^2}, \\ e^\nu &= \frac{1}{9}, \quad e^{-\lambda} = 1 \quad \text{при } r < \frac{9}{4} \frac{GM}{c^2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Обозначив для сокращения

$$\begin{aligned} dr^* &= e^{\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu} dr, \\ \varrho &= \frac{c^2}{GM} r, \\ h \text{ (см}^{-1}\text{)} &= \frac{\text{Энергия}}{\hbar c}, \\ \varepsilon &= \frac{GM}{c^2} h = \frac{GM}{\hbar c^3} \text{ (Энергия)}, \end{aligned} \quad (44)$$

(здесь ε — безразмерная величина), перепишем два волновых уравнения первого порядка (39) для случая нулевой массы покоя и отсутствия электростатического поля. Исключив затем одну из двух функций, получим одно уравнение второго порядка для другой функции;

либо

$$\frac{d^2 F}{dQ^{*2}} + [\varepsilon^2 - \xi(Q)] F = 0,$$

где

$$\xi(Q) = \varepsilon^{\nu} \frac{k^2}{Q^2} - e^{\nu - \frac{1}{2}\lambda} \frac{k}{Q^2} + \frac{k}{Q} \frac{d}{dQ^*} e^{\frac{1}{2}\nu}, \quad (45)$$

либо

$$\frac{d^2 G}{dQ^{*2}} + [\varepsilon^2 - \eta(Q)] G = 0,$$

где

$$\eta(Q) = \varepsilon^{\nu} \frac{k^2}{Q^2} + e^{\nu - \frac{1}{2}\lambda} \frac{k}{Q^2} - \frac{k}{Q} \frac{d}{dQ^*} e^{\frac{1}{2}\nu}. \quad (46)$$

Последний член в правых частях выражений (45) и (46) для безразмерных эффективных потенциалов $\xi(Q)$ и $\eta(Q)$ имеет характер спин-орбитального взаимодействия. Как и в случае электрона, движущегося в электростатическом поле, где спин-орбитальное взаимодействие пропорционально моменту количества движения и радиальной производной потенциала, так и здесь один из членов в эффективном потенциале, действующем на нейтрино, пропорционален параметру k момента количества движения, а также радиальной производной метрической величины $e^{1/2\nu} = (-g_{44})^{1/2}$. Однако в волновых уравнениях второго порядка для двух компонент F и G одной и той же волновой функции этот член появляется с противоположными знаками. Из того факта, что два различных уравнения имеют одинаковые собственные значения, следует, что последние два члена взаимодействия в (45) и (46), взятые вместе, не оказывают никакого влияния на уровни энергии. Иначе говоря, собственные значения энергии инвариантны по отношению к замене k на $-k$. Это вырождение такое же, как и фундаментальное вырождение поляризации, которое обсуждалось в § 4. Требование, чтобы нейтрино имело правовинтовую поляризацию, означает, что функция разрешенного состояния дается не решением (45) и (46) для положительного k и не решением для отрицательного k , а надлежащей линейной комбина-

цией этих двух решений. Однако (45) и (46) дают точные выражения, из которых строится полная разрешенная волновая функция, а также дают правильные собственные значения энергии.

Покажем теперь, что те же самые радиальные уравнения получаются в двухкомпонентном формализме. Выберем спиновые матрицы s_i , которые определяются соотношениями (23), аналогично случаю 1 согласно (28):

$$\begin{aligned} s_1 &= e^{\frac{1}{2}\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\lambda} \tilde{s}_1, \\ s_2 &= r \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = r \tilde{s}_2, \\ s_3 &= r \sin \theta \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = r \sin \theta \tilde{s}_3, \\ s_4 &= e^{\frac{1}{2}\nu} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\nu} \tilde{s}_4. \end{aligned} \quad (47)$$

Для определения ковариантной производной нам нужны двухрядные матрицы Γ_k , которые удовлетворяют соотношению, аналогичному (2):

$$\frac{\partial s_i}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^\mu s_\mu - \Gamma_k \text{ компл.-сопр. } s_i + s_i \Gamma_k = 0, \quad (48)$$

а именно

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= 0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\lambda} \tilde{s}_1 \text{ компл.-сопр. } \tilde{s}_2, \\ \Gamma_3 &= \frac{1}{2} (\sin \theta e^{-\frac{1}{2}\lambda} \tilde{s}_1 \text{ компл.-сопр. } \tilde{s}_3 + \cos \theta \tilde{s}_2 \text{ компл.-сопр. } \tilde{s}_3), \\ \Gamma_4 &= \frac{\nu'}{4} e^{\frac{1}{2}\nu} - \frac{1}{2} \lambda \tilde{s}_1 \text{ компл.-сопр. } \tilde{s}_4. \end{aligned} \quad (49)$$

Эти не зависящие от представления выражения, очевидно, могут быть также образованы из матриц Γ_k дираковского формализма (30) путем простой замены: каждое произведение вида $\tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j$ заменяется на произведение вида $\tilde{s}_i \text{ компл.-сопр. } \tilde{s}_j$. Уравнение Дирака для частицы с мас-

сой t в данном формализме оперирует с двумя двух-компонентными спинорами ψ и φ :

$$\begin{aligned} s^\alpha \nabla_\alpha \psi + \mu\varphi &= 0, \\ \tilde{s}_{\text{компл.-сопр.}}^\alpha \nabla_\alpha \varphi + \mu\psi &= 0, \end{aligned} \quad (50)$$

а уравнение Паули — Ли — Янга для нейтрино имеет более простую форму

$$0 = s^\alpha \nabla_\alpha \psi = s^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_\alpha \right) \psi. \quad (51)$$

Это уравнение получается в явной форме из (31), если отбросить член с массой $\mu\psi$ и заменить всюду $\tilde{\gamma}_i$ на \tilde{s}_i . Снова введем новую форму для волновой функции:

$$\omega = \exp\left(\frac{\nu}{4}\right) r (\sin\theta)^{\frac{1}{2}} \psi, \quad (52)$$

как в (33). Умножим также обе части уравнения для ω на \tilde{s}_4 компл.-сопр. и заметим, что

$$\tilde{s}_4 \text{ компл.-сопр.} \tilde{s}_4 = -1,$$

величины

$$\tilde{s}_4 \text{ компл.-сопр.} \tilde{s}_i = \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (53)$$

являются спиновыми матрицами Паули. Тогда общековариантная форма уравнения Паули — Ли — Янга для нейтрино в пространстве с центрально-симметричной метрикой будет иметь вид

$$\left(\sigma_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda} \frac{\partial}{\partial r} + \sigma_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma_3 \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + e^{-\frac{1}{2}\nu} \frac{\partial}{\partial T} \right) \omega = 0. \quad (54)$$

Рассмотрим решение ω , которое экспоненциально зависит от азимутального угла и времени:

$$\exp(im_j\varphi - ihT),$$

так что уравнение (54) приводится к виду

$$\left(\sigma_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda} \frac{\partial}{\partial r} + \sigma_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{im_j\sigma_3}{r \sin\theta} - ihe^{-\frac{1}{2}\nu} \right) \omega = 0. \quad (55)$$

Теперь мы уже не можем найти такой действующий на угловые переменные оператор K , который коммутировал бы с (55). Вместо этого мы поступим следующим образом.

1) Временно введем явное представление для матриц Паули σ_i и выразим уравнение (55) в виде двух зацепляющихся уравнений первого порядка для двух неизвестных функций.

2) Установим характер решения из тех сведений, которые нам уже известны об этом решении в дираковском формализме.

3) Из этого решения построим матрицу смешанной плотности $M(1, 2) = \psi(2)\psi^\dagger(1)$. Зная эту матрицу, мы можем вычислить среднее значение любой физической величины. Так, например, поток нейтрино дается следующим выражением:

$$(\text{Поток нейтрино})^k = \psi^\dagger i s^k \psi = \text{Tr} [i s^k M(1, 1)]. \quad (56)$$

4) Эта матрица плотности может быть представлена в виде линейной комбинации четырех матриц, σ_i и 1 , и, таким образом, переведена обратно в форму, не зависящую от специального представления матриц Паули. В этом случае она принимает вид

$$\begin{aligned} M(1, 2) &= \psi(2)\psi^\dagger(1) = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{4} \nu(r_1) - \frac{1}{4} \nu(r_2) \right] (r_1 r_2)^{-1} \{ [\bar{F}(r_1) F(r_2) + \\ &+ \bar{G}(r_1) G(r_2)] [\bar{\Theta}_1(1) \Theta_1(2) + \bar{\Theta}_2(1) \Theta_2(2)] + \\ &+ i [\bar{G}(r_1) F(r_2) - \bar{F}(r_1) G(r_2)] [\bar{\Theta}_1(1) \Theta_1(2) - \\ &- \bar{\Theta}_2(1) \Theta_2(2)] \} 1 (i s^4) + \text{и т. д.}, \end{aligned} \quad (57)$$

где F и G — введенные ранее радиальные функции. Угловые множители в (57) имеют вид

$$\begin{aligned} \Theta_1(1) &= f(\theta_1) \exp(im_j \varphi_1) \frac{1}{(\sin \theta_1)^{1/2}}, \\ \Theta_2(1) &= g(\theta_1) \exp(im_j \varphi_1) \frac{1}{(\sin \theta_1)^{1/2}} \text{ и т. д.}, \end{aligned} \quad (58)$$

где f и g — угловые функции Шредингера [12]. Такие величины, как число частиц, поток и плотность энергии-

импульса нейтрино, получаются непосредственно из матрицы плотности (57), согласно формуле (56), которая основывается на двухкомпонентных спинорах. С другой стороны, те же результаты могут быть получены в рамках дираковского формализма, с которым мы и будем в основном иметь дело.

В двух- или четырехкомпонентном формализме уровни энергии «захваченного» нейтрино находятся путем решения уравнения для собственных значений, в качестве которого можно взять уравнение (45). Мы примем метрику геона (43). В этом случае безразмерный эффективный потенциал $\xi(\varrho)$ вне сферы радиуса $\varrho = 2,25$ имеет вид

$$\xi(\varrho) = \left[1 - \frac{2}{\varrho} \right] \frac{k^2}{\varrho^2} - \left[1 - \frac{2}{\varrho} \right]^{1/2} \frac{k}{\varrho} \left[1 - \frac{3}{\varrho} \right],$$

а внутри сферы —

$$\xi(\varrho) = \frac{k(k-1)}{9\varrho^2}. \quad (59)$$

Этот потенциал изображен на фиг. 1 для нескольких значений положительного целого числа k . Метастабильные связанные состояния имеют место лишь при значениях k порядка 10 и выше. Для таких значений k члены, пропорциональные k , пренебрежимо малы по сравнению с членами, содержащими k^2 . В этом случае во внешней области $\xi(\varrho)$ достигает своего максимального значения

$$\xi_{\text{макс.}}(\varrho_{\text{макс.}}) = \frac{k^2}{27}$$

при

$$\varrho_{\text{макс.}} = 3. \quad (60)$$

Его минимум

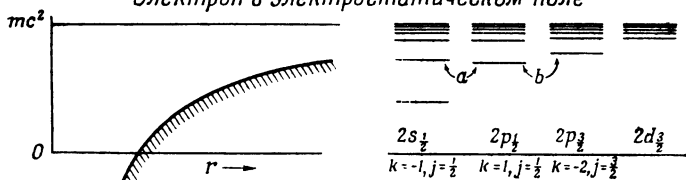
$$\xi_{\text{мин.}}(\varrho_{\text{мин.}}) = \frac{4^2 k^2}{9^3}$$

имеет место при

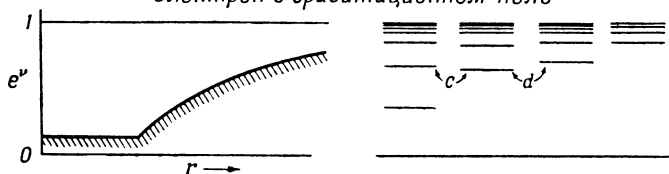
$$\varrho_{\text{мин.}} = \frac{9}{4}. \quad (61)$$

Безразмерную частоту колебаний, или энергию ε , n -го метастабильного связанного состояния можно оценить

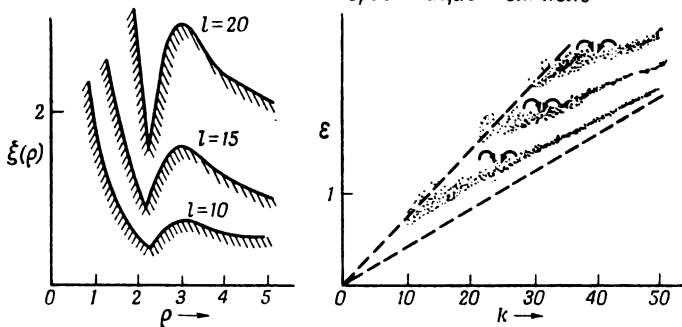
Электрон в электростатическом поле



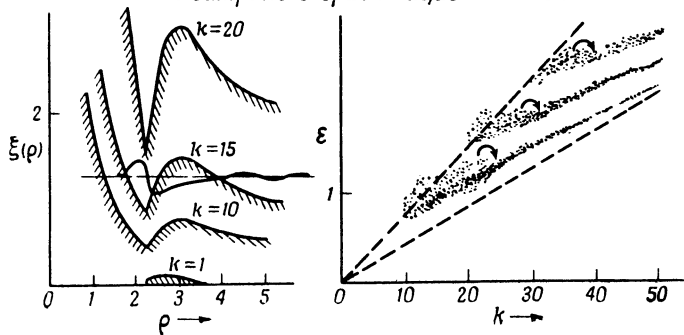
Электрон в гравитационном поле



Фотон в том же гравитационном поле



Нейтрино в гравитационном поле



с помощью формулы, полученной в приближении ВКБ:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi = \int_a^b [\varepsilon^2 - \xi(\varrho)]^{1/2} d\varrho^*, \quad (62)$$

где a и b — классические точки поворота «связанного» состояния с наивысшей энергией. Этот интеграл существует только в том случае, когда ε лежит между $\xi_{\text{мин}}^{1/2} = 2k/27$ и $\xi_{\text{макс}}^{1/2} = k/3^{3/2}$ (две границы, проведенные штриховыми линиями, на фиг. 1 справа). Полное число N_k связанных состояний типа k можно оценить, полагая ε^2 равным максимальному значению $\xi(\varrho)$ и вычисляя (62); в результате получим

$$N = \pi^{-1} k \left\{ \int_{9/4}^3 \left[\frac{1}{27} - \frac{1}{\varrho^2} + \frac{2}{\varrho^3} \right]^{1/2} \left[1 - \frac{2}{\varrho} \right]^{1/2} d\varrho + \int_{\sqrt{3}}^{9/4} \left[\frac{1}{27} - \frac{1}{9\varrho^2} \right]^{1/2} 3 d\varrho \right\} - \frac{1}{2} = 0,15k - 0,5. \quad (63)$$

Фиг. 1. Сравнение энергетических уровней электрона в электростатическом и гравитационном полях и фотона и нейтрино в гравитационном поле.

На четырех графиках слева изображены: электростатический потенциал для электрона, эйнштейновский гравитационный потенциал для электрона ($-g_{44} = -e^V$ для «метрики геона»), безразмерный эффективный потенциал $\xi(\rho) = l(l + 1)(e^V/\rho^2)$ для фотонов и соответствующая величина для нейтрино [$\xi(\rho)$, задаваемый (59)]. Связанные состояния электрона лежат ниже mc^2 и, следовательно, стабильны в отношении утечки электрона. Смещение уровня энергии «а» происходит за счет лембовского сдвига и любых других возмущений, которые увеличивают эффективный потенциал вблизи центра по сравнению с чисто кулоновским потенциалом. Подобным же образом расщепление в случае «с» возникает ввиду того, что s -электроны реагируют сильнее, чем p -электроны, на центральную плоскую область метрики. Расщепление в случаях «b» и «d» возникает вследствие спин-орбитального взаимодействия. Фотоны и нейтрино вообще не могут находиться в полностью стабильных состояниях, а только в состояниях с большим или меньшим временем жизни. Волновая функция такого квазисвязанного состояния экспоненциально спадает в области эффективного потенциального барьера, что изображено на нижнем графике слева. Случай равного нулю или малого момента импульса соответствует движению вдоль или почти вдоль радиуса; этот род движения всегда ведет к утечке фотона или нейтрино.

Графики справа внизу изображают схематически положение и ширину метастабильных связанных состояний. В каждом фотонном состоянии может находиться любое число фотонов с тем или иным независимым состоянием поляризации. В каждом нейтринном состоянии может находиться только одно нейтрино. Соответствующее антинейтринное состояние имеет ту же частоту и энергию и также может быть заполнено. Ничего подобного спин-орбитальному расщеплению электронных состояний здесь не существует, ибо момент количества движения нейтрино всегда прецессирует таким образом, чтобы оставаться параллельным импульсу нейтрино.

Для каждого значения k спектр разрешенных значений безразмерного параметра энергии ε лежит в пределах от некоторого минимального значения, несколько больше $\xi_{\text{мин.}}^{1/2}$ (пропорционального k), до некоторого максимального значения, несколько меньшего $\xi_{\text{макс.}}^{1/2}$ (также пропорционального k). В этом интервале число уровней N_k также приблизительно пропорционально k . Эти качественные особенности системы уровней схематически показаны на фиг. 1.

При отсутствии гравитационного поля спектр нейтрино сводится к естественному аналогу спектра свободного электрона. Для каждого волнового вектора (k_x, k_y, k_z) имеется одно состояние с правой круговой поляризацией и положительной энергией и второе состояние с отрицательной энергией и левой круговой поляризацией. Все состояния с отрицательной энергией считаются заполненными. Отсутствие нейтрино в фоне частиц с отрицательной энергией интерпретируется как присутствие антинейтрино. В соответствии с теорией дырок импульс (или момент количества движения) реального физического антинейтрино есть взятый со знаком минус импульс (или момент количества движения) дырки в фоне нейтрино с отрицательными энергиями. Для такого нейтрино с отрицательной энергией импульс и спин противоположны по направлению (антипараллельны) в соответствии с уравнением Ли и Янга $H = c(\sigma \cdot p)$. Следовательно, как показали Ли и Янг, для реального физического антинейтрино импульс и спин имеют *противоположные* направления.

§ 6. Статистическая механика и тепловое равновесие нейтрино

Гамов и Шёнберг [15] привели доводы в пользу предположения, что излучение нейтрино определяет степень гравитационного сжатия тяжелой звезды на поздних стадиях ее эволюции, после того как исчерпаны обычные источники термоядерной энергии. Попросту говоря, горячие нейтроны превращаются в более холодные протоны плюс электроны плюс нейтрино; горячие протоны и электроны превращаются в более холодные нейтроны и антинейтрино. Среда непрерывно теряет энергию вследствие излучения нейтрино и антинейтрино — «Урка-процесса» Гамова. Ней-

трино и антинейтрино настолько легче вырваться наружу, чем фотонам, что фактически они одни определяют излучение энергии и гравитационное сжатие. На поздних стадиях такого гравитационного сжатия плотность может возрасти до такой степени, когда становится ощутительной непрозрачность материи даже для нейтрино. Для примера рассмотрим тот момент, где достигаются ядерные плотности, порядка 10^{38} нуклон/см³, и предположим, что сечение захвата нейтрино имеет значение порядка 10^{-43} см², найденное Рейнсом и Коуэном [16]; тогда средний свободный пробег нейтрино будет порядка только 1 км. При таких условиях следует говорить о непрозрачности по отношению к нейтрино и о локальной температуре нейтрино подобно тому, как это делается в теории переноса теплоты электромагнитным излучением. Но даже безотносительно к частной проблеме, касающейся процессов внутри звезд, можно поставить вопрос: каково равновесное распределение нейтрино? Для характеристики этого равновесия в случае нейтрино требуется на одну величину больше, чем в случае фотонов: следует задать как температуру, так и соответствующим образом определенную энергию Ферми. Вероятность $W(E)$ того, что состояние нейтрино с энергией E будет занято, дается выражением [17]

$$W(E) = \frac{1}{1 + e^{-\eta + (E/T)}}, \quad (64)$$

где T — температура (в энергетических единицах) и ηT — энергия Ферми.

Переходя с языка теории дырок к физически наблюдаемым нейтрино и антинейтрино (фиг. 2), получаем выражение

$$dn_+ = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{-\eta + (\hbar c/T)}} \quad (65)$$

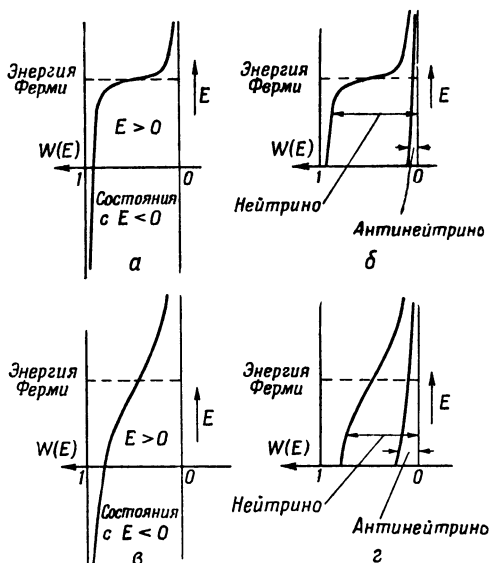
для среднего числа нейтрино в единице объема в интервале dk модуля волнового вектора; для соответствующего числа антинейтрино имеем

$$\begin{aligned} dn_- &= \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} [1 - W(-\hbar c)] = \\ &= \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + e^{\eta + (\hbar c/T)}}. \end{aligned} \quad (66)$$

Наибольший интерес представляют величины полной плотности нейтрино

$$n_+ = \frac{T^3}{2\pi^2\hbar^3c^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{1 + e^{x-\eta}}, \quad (67)$$

полной плотности антинейтрино (даваемой тем же выра-



Ф и г. 2. Влияние температуры и энергии Ферми на равновесное распределение нейтрино и антинейтрино.

$W(E)$ — вероятность заполнения. Графики *а* и *в* отвечают дырочной картине и соответственно низкой и высокой температурам; графики *б* и *г* отвечают реальным физическим состояниям и соответственно низкой и высокой температурам.

жением с обратным знаком η) и плотности полной энергии

$$\varepsilon = \frac{T^4}{2\pi^2\hbar^3c^3} \left[\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + e^{x-\eta}} + \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1 + e^{x+\eta}} \right]. \quad (68)$$

Если энергия Ферми равна нулю, интегралы могут быть

легко вычислены, в результате чего получим

$$n_+ = n_- = \frac{T^3}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} 1,803$$

и

$$\varepsilon_\nu = \frac{T^4}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} 2,5,757 = \frac{7\pi^2}{120} \frac{T^4}{\hbar^3 c^3}. \quad (69)$$

Для сравнения вспомним, что энергия электромагнитного излучения черного тела дается выражением

$$\varepsilon_{эл.} = \frac{8\pi^2}{120} \frac{T^4}{\hbar^3 c^3}. \quad (70)$$

Энергия нейтрино меньше, чем электромагнитная энергия, а именно равна $7/8$ последней. Число возможных состояний, соответствующих данному волновому числу, одинаково для обоих видов излучения: две поляризации спина для фотонов и для более проникающего излучения—одно нейтринное и одно антинейтринное состояния. Более того, выражения для вероятности заполнения состояний обоих видов приводят в предельном случае высоких энергий к одной и той же формуле Больцмана $W(E) \sim e^{-E/T}$. Однако в любом данном состоянии с низкой энергией может находиться много фотонов и в то же время не более одного нейтрино; в этом состоит отличие в поведении электромагнитного излучения по сравнению с нейтрино. Приведенные выше соотношения коренным образом видоизменяются, если энергия Ферми нейтрино отлична от нуля. В этом случае плотность энергии нейтрино может, вообще говоря, принимать сколь угодно большие значения.

§ 7. Рождение нейтринных пар¹⁾

В настоящей работе мы оставляем без внимания все процессы рождения или уничтожения нейтрино, связанные

¹⁾ Обсуждение этих и других подобных процессов, происходящих при взаимодействии элементарных частиц с гравитационным полем в приближении слабого поля, см. также в работах Д. Иваненко, А. Соколов, Вестник МГУ, 8, 103 (1947); Классическая теория поля, М.—Л., 1951; А. Соколов, Д. Иваненко, Квантовая теория поля, М.—Л., 1952; Д. Иваненко, А. Бродский, ДАН СССР, 92, 73 (1953), а также R. N. Ewens, Neutrinos and their interactions with matter, Thesis, Princeton, 1949.

с превращениями элементарных частиц, ограничиваясь рассмотрением реакции нейтрино на искривление метрики. Выражаясь точнее, мы ограничимся процессами, в которых, согласно теории дырок, нейтрино переходит из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, т. е., иначе говоря, когда порождается пара нейтрино — антинейтрино.

Имеются ли у гравитационного поля какие-либо специфические особенности, которые не позволяли бы ему переводить нейтрино из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией? Иными словами, существует ли такая величина Q , которая коммутировала бы или антикоммутировала с оператором в волновом уравнении (51) и которая служила бы для различения состояний с положительной и отрицательной энергиями? Для построения такого оператора в нашем распоряжении имеются только четыре независимые двухрядные спиновые матрицы. Из них только единичная матрица коммутирует с оператором уравнения (51). Из нее одной ничего интересного построить нельзя. Следовательно, мы вправе надеяться, что не существует каких-либо принципиальных возражений против возможности перехода из состояний с отрицательной энергией в состояния с положительной энергией. Иначе говоря, в физике нейтрино в той же мере, в какой это имеет место в физике электрона, невозможно провести какое-либо достаточно определенное различие между состояниями с отрицательной и положительной энергиями в случае произвольного гравитационного или электромагнитного поля.

Механизм переходов в случае нейтрино весьма прост. В то время как статическое возмущение в метрике отклоняет нейтрино, вызывая переход между состояниями с различным импульсом, изменяющееся во времени возмущение обуславливает переход между состояниями с различной энергией. Разложим в ряд Фурье такое изменяющееся во времени возмущение в свободном гравитационном поле в приближении слабого поля. В силу законов сохранения импульса и энергии никакое отдельное монохроматическое возмущение не может вызвать переходов нейтрино из состояний с отрицательной энергией в состояния с положительной энергией (за исключением единственного слу-

чая, когда все три импульса лежат на одной и той же прямой). Для образования реальной пары требуется совместное действие по крайней мере двух из этих монохроматических возмущений, движущихся в различных направлениях. Как и в случае, когда два фотона, сталкиваясь, образуют электронную пару [18]¹⁾, так и здесь наиболее просто анализировать двухквантовый процесс в системе отсчета, в которой импульсы равны по величине и противоположны по направлению. Для оценки порядка величины сечения рождения пары нет необходимости подробно рассчитывать матричные элементы. Вместо этого можно идти по пути, намеченному Бором и Розенфельдом [20] при рассмотрении ими поляризации вакуума. Представим себе два сгустка энергии, локализованные в двух областях пространства размерами $\sim \lambda$ и движущиеся навстречу друг другу со скоростью c , так что они перекрываются и взаимодействуют между собой только в течение промежутка времени $\sim \lambda/c$. В этом случае расчеты, приведенные в табл. 3, дают для процесса рождения пары $(\nu, \bar{\nu})$ двумя гравитонами, каждый из которых имеет энергию E , следующую оценку сечения по порядку величины:

$$\sigma \sim \left(\frac{GE}{c^4} \right)^2 \sim \frac{(1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см})^4}{\lambda^2}. \quad (71)$$

Это сечение фантастически мало для квантов любых энергий, с которыми мы привыкли иметь дело. С увеличением энергии длина волны достигает в конце концов величины $\lambda \sim (\hbar G/c^3) \sim 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см}$, т. е. области, в которой обычный волновой анализ гравитационных возмущений, по-видимому, исключается: возмущения в метрике по порядку величины достигают $\delta g \sim 1$, так что в анализе основную роль играют нелинейные эффекты. Даже при таких невероятных высоких энергиях сечение, определяемое выражением (71), достигает лишь значения порядка

$$\sigma \sim 10^{-66} \text{ см}^2. \quad (72)$$

Принцип микроскопической обратимости дает сечение также порядка (71) для процесса

$$\nu + \bar{\nu} \rightarrow G + G. \quad (73)$$

¹⁾ О наблюдаемых физических следствиях этого процесса рождения пары см. [19].

Таблица 3

Оценка порядка величины сечения рождения пары при столкновении двух квантов с равными по величине, но противоположно направленными импульсами

Процесс	$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-$	$G + G \rightarrow \nu + \bar{\nu}$
Энергия одного кванта	$E = \frac{\hbar c}{\lambda}$	$E = \frac{\hbar c}{\lambda}$
Объем, в котором она локализована	$\sim \lambda^3$	$\sim \lambda^3$
Плотность энергии	$\sim \frac{\hbar c}{\lambda^4}$	$\sim \frac{\hbar c}{\lambda^4}$
Поле, играющее роль в соответствующем процессе	Электрическое	Гравитационное
Напряженность поля	$\sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\lambda^2}$	$\sim \frac{(\hbar c G)^{1/2}}{\lambda^2}$
Потенциал в области, где сконцентрирована энергия	$\delta A \sim \frac{(\hbar c)^{1/2}}{\lambda}$	$\delta g \sim \frac{(\hbar G / c^3)^{1/2}}{\lambda}$
Потенциал, вызывающий переход из состояния с $E_1 = -\frac{\hbar c}{\lambda^2}$ в состояние с $E_2 = +\frac{\hbar c}{\lambda^2}$ с вероятностью, близкой к 100%	$\delta A \sim \frac{\hbar c}{\lambda e}$	$\delta g \sim 1$
Отношение наличного возмущения к требуемому	$\sim \frac{e}{(\hbar c)^{1/2}}$	$\sim \frac{(\hbar G / c^3)^{1/2}}{\lambda}$
Сколько раз этот множитель входит в матричный элемент	2	2

Продолжение табл. 3

Процесс	$\nu + \bar{\nu} \rightarrow e^+ + e^-$	$G + G \rightarrow \nu + \bar{\nu}$
Сколько раз матричный элемент входит в вероятность перехода	2	2
Сечение рождения пары при 100-процентной вероятности рождения	$\sim \lambda^2$	$\sim \lambda^2$
Окончательная оценка сечения рождения пары	$\sigma \sim \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \lambda^2 \sim$ $\sim \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$	$\sigma \sim \frac{(\hbar G/c^3)^2}{\lambda^2} \sim$ $\sim \frac{(1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см})^4}{\lambda^2} \sim$ $\sim \left(\frac{GE}{c^4}\right)^2$
Асимптотическое поведение точной формулы для сечения при больших энергиях в случае неполяризованного излучения	$\sigma \sim 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \times$ $\times \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 \times$ $\times \ln \left[\frac{2E}{e^{1/2} mc^2} \right]$	Еще не рассчитано

Существование неупругого процесса (73) подразумевает, согласно теории дисперсионных соотношений [21, 22], существование некоторого процесса упругого рассеяния

$$\nu + \bar{\nu} \text{ (через } \rightarrow G + G) \rightarrow \nu' + \bar{\nu}'. \quad (74)$$

Для оценки сечения этого процесса даже для энергий нейтрино $\hbar\omega$, малых по сравнению с критической энергией $(\hbar c^5/G)^{1/2}$, нельзя использовать формулу для сечения упругого рассеяния вперед с частотой ω :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{упр. вп.}} = \left[\frac{\omega^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\text{погл.}}(\omega') d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \right]^2, \quad (75)$$

так как основной вклад в интеграл дают виртуальные процессы с энергиями $\hbar\omega'$, которые сравнимы по величине с критической энергией или больше нее.

Мы не рассматривали процессы, которые относятся к области собственно физики элементарных частиц, такие, как

$$\nu + \bar{\nu} \rightarrow \mu^+ + e^- \quad (76)$$

и

$$\nu + \nu \text{ (через виртуальные } \rightarrow \mu^+ + e^-) \rightarrow \nu' + \bar{\nu}'. \quad (77)$$

В системе отсчета, в которой полный импульс равен нулю, первый процесс имеет порог при энергии нейтрино

$$E = 104mc^2. \quad (78)$$

Расчет показывает, что для энергий, значительно превышающих порог, сечение растет, согласно асимптотической формуле [14]:

$$\sigma_{\text{погл.}} \sim \frac{g^2}{\hbar^2 c^4} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2, \quad (79)$$

где константа связи g для взаимодействия, ответственного за β -распад, имеет известное значение

$$g \sim 10^{-49} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3. \quad (80)$$

Из существования процесса поглощения, на основе принципа причинности можно сделать вывод о существовании процесса рассеяния (77). В применении к этому процессу дисперсионный интеграл в (75) расходится только логарифмически. Припишем логарифмически расходящемуся выражению условное значение «10». Тогда сечение упругого рассеяния вперед [14] по порядку величины будет

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{упр. вп.}} \sim \ll 100 \gg \left(\frac{E^3 g^2}{\hbar^5 c^5} \right)^2. \quad (81)$$

Представляется разумным сделать заключение, что сечения обоих процессов ($\nu, \bar{\nu}$)-рассеяния при любых разумных энергиях ничтожно малы по сравнению с двумя процессами поглощения. Интересно отметить, что сечения обоих процессов поглощения имеют одинаковую зависимость от энергии (как E^2). Их отношение пред-

ставляет собой безразмерную величину

$$\frac{\sigma(\nu + \bar{\nu} \rightarrow \mu^+ + e^-)}{\sigma(\nu + \bar{\nu} \rightarrow G + G)} \sim \frac{g^2 \left(\frac{E}{\hbar}\right)^2}{\left(\frac{GE}{c^4}\right)^2} = \left(\frac{gc^2}{G\hbar^2}\right)^2 \sim 10^{34}, \quad (82)$$

что является свидетельством известного обстоятельства — огромной разницы между значениями констант связи β -взаимодействия и гравитационного взаимодействия.

§ 8. Плотность натяжений, импульса и энергии

До сих пор мы рассматривали поведение нейтрино (или электрона) при заданной метрике, статической или меняющейся во времени. Теперь мы рассмотрим влияние нейтрино (или электрона) на гравитационное поле. Уравнения поля Эйнштейна связывают гравитационное поле и изменение в метрике с тензором натяжений-импульса-энергии T_{ik} . Этот тензор рассмотрен, например, в работе Паули [23] для случая плоского пространства. Розенфельд [24]¹⁾ рассмотрел этот тензор в кривом пространстве с точки зрения формализма тетраподов и получил некоторые из его компонент. Мы будем следовать его весьма общему методу. Плотность лагранжиана в общей теории относительности пропорциональна величине

$$\left[\frac{c^4}{G} R + L \right] (-g)^{-1/2}, \quad (83)$$

где R — скалярная кривизна, а L строится из переменных других полей и величин g_{ik} . Требование экстремальности лагранжиана по отношению к вариациям величин g_{ik} приводит к уравнениям поля Эйнштейна, которые имеют вид

$$G_{ik} \left(\equiv R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}, \quad (84)$$

где тензор энергии-натяжений T_{ik} определяется для обыч-

¹⁾ Мы признательны де-Витту за предоставление нам возможности ознакомиться несколько лет назад с его неопубликованной рукописью, где уже был получен результат (92).

ных полей как вариационная производная от плотности лагранжиана

$$\begin{aligned} T_{ik} &= \frac{1}{8\pi} (-g)^{1/2} \frac{\delta (-g)^{-1/2} L}{\delta g^{ik}} = \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta L}{\delta g^{ik}} - \frac{1}{2} g_{ik} L \right) \end{aligned} \quad (85)$$

и в более общем случае, для спинорных полей, из уравнения

$$\int T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (-g)^{1/2} d^4x = \frac{1}{8\pi} \delta \int L (-g)^{1/2} d^4x. \quad (86)$$

Процедура нахождения этой вариации для спинорных полей является несколько более тонкой, чем для некантованных полей. Вариация величин g_{ik} сказывается не только там, где последние образуют инварианты, но также и на вариациях спиноров, которые необходимо должны иметь место, чтобы сохранить фундаментальное соотношение (1): мы должны иметь

$$[\delta\gamma_i, \gamma_j]_+ + [\gamma_i, \delta\gamma_j]_+ = 2\delta g_{ij} \mathbf{1}. \quad (87)$$

Одно решение имеет вид [25]:

$$\delta\gamma^i = \frac{1}{2} \gamma_\alpha \delta g^{\alpha i}. \quad (88)$$

Так как любое другое решение может быть получено из него путем преобразования подобия, то приведенное выше решение является достаточно общим для наших целей. Эта вариация величин γ^i влечет за собой, согласно (2), вариацию величин Γ_k :

$$\delta\Gamma_k = \frac{1}{8} (g_{\nu\sigma} \delta\Gamma_{\mu k}^\sigma - g_{\mu\sigma} \delta\Gamma_{\nu k}^\sigma) s^{\mu\nu}, \quad (89)$$

где через s^{ij} сокращенно обозначено выражение $1/2 (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i)$. Для лагранжиана (12), который обращается в нуль, если выполняются уравнения поля, находим вариацию

$$\begin{aligned} \delta \int L (-g)^{1/2} d^4x &= \int \delta L (-g)^{1/2} d^4x = \\ &= \int [\psi^\dagger \delta\gamma^k \nabla_k \psi + \psi^\dagger \gamma^k \delta\Gamma_k \psi] (-g)^{1/2} d^4x = \end{aligned}$$

$$= \int \left[\frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_\nu \nabla_\mu \psi \delta g^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{8} (g^{qv} s^\mu - g^{qv} s^\nu) (g_{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma - g_{\nu\sigma} \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma) \right] (-g)^{1/2} d^4x, \quad (90)$$

где s^k — ранее определенный 4-вектор тока. Вариации $\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\sigma$ выражаются через $\delta g^{\mu\nu}$ и их производные. Производные устраняются интегрированием по частям, и различные выражения во второй части подынтегрального выражения приводятся к форме ковариантной производной от компоненты вектора тока s^k :

$$\delta \int L (-g)^{1/2} d^4x = \int \left[\frac{1}{2} \psi^\dagger \gamma_\nu \nabla_\mu \psi - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \nabla_\mu s_\nu \right] \delta g^{\mu\nu} (-g)^{1/2} d^4x. \quad (91)$$

Сравнивая (91) и (86), мы находим тензор энергии-импульса

$$T_{ik} = \frac{\hbar c}{4} [\psi^\dagger \gamma_i \nabla_k \psi - (\nabla_k \psi^\dagger) \gamma_i \psi + \psi^\dagger \gamma_k \nabla_i \psi - (\nabla_i \psi^\dagger) \gamma_k \psi]. \quad (92)$$

В случае специальной теории относительности, когда $\nabla_k = \partial/\partial x^k$, это выражение, которое справедливо как для электрона, так и для нейтрино, сводится к тензору энергии-импульса, введенному Паули [23]. След тензора энергии-импульса с учетом уравнений поля приводится к виду

$$T_\alpha^\alpha = \mu \hbar c \psi^\dagger \psi. \quad (93)$$

Следует отметить, что для нейтринного поля ($\mu = 0$) этот след обращается в нуль точно так же, как это имеет место для электромагнитного поля¹⁾.

Этот результат можно использовать для получения уже приведенных нами выражений для плотности энергии нейтрино в условиях термодинамического равновесия.

§ 9. Взаимодействие между двумя пучками нейтрино

Рассмотрим второе применение тензора энергии-импульса. Представим себе направленный пучок нейтрино

¹⁾ Мы признательны проф. Г. Бухдалу, указавшему нам, что след тензора энергии-импульса обращается в нуль для полей с нулевой массой покоя и любым значением спина, кроме спина 0.

в пространстве, которое в других отношениях является почти плоским. Пусть для простоты этот пучок движется в направлении оси x . Положим $k_1 = -k_4 = k^4 = k = E/\hbar c$. Тогда нейтринная волна будет иметь вид

$$\psi = u \exp [ik(x^1 - x^4)]. \quad (94)$$

Здесь u — медленно меняющаяся спинорная функция координат, которая: 1) приблизительно постоянна в области, занятой пучком радиации (очень большой по сравнению с $\lambda = 1/k$) и 2) гладко и быстро спадает вне этой области. Градиент ψ содержит члены, происходящие от градиента u и от градиента экспоненты; последние значительно более важны, чем первые. Мы приходим к заключению, что все компоненты T_{ik} с i или k , равными 2 или 3, пренебрежимо малы. Существенные компоненты T_{ik} имеют вид

$$T_{14} = T_{44} = T_{11} = \hbar ck |\psi|^2, \quad (95)$$

поскольку 4-вектор тока является изотропным. Толмен [26] и Эренфест исследовали метрику, обусловленную такого же вида пучком электромагнитного излучения. Поэтому результаты, полученные ими для света, справедливы также и для нейтрино. Два фотона или два нейтрино, или один электрон и одно нейтрино притягиваются с силой, в два раза большей ньютоновской, если их волновые векторы антипараллельны, и вовсе не притягиваются, если их волновые векторы параллельны. Следовательно, нейтрино в тороидальном нейтринном геоне образуют наиболее устойчивую конфигурацию в том случае, когда половина частиц движется по одному пути, а другая половина — по другому.

§ 10. Натяжение, импульс и энергия нейтрино в квазистационарном состоянии

В качестве третьего применения тензора энергии-натяжений рассмотрим движение нейтрино по почти связанной орбите в центральном поле, как в § 5. Будем считать, что зависимость волновой функции от времени описывается множителем $\exp(-iET/\hbar c)$ и будем пренебрегать всеми малыми мнимыми частями E , которые описывают

медленное просачивание частицы из зоны, ограниченной барьером. Тогда тензор энергии-натяжений будет иметь вид

$$T_r^r = \frac{i\hbar c}{2} e^{-\frac{1}{2}\lambda} \left[\frac{\partial \psi^*}{\partial r} \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_1 \psi - \psi^* \tilde{\gamma}_4 \tilde{\gamma}_1 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right], \quad (96)$$

$$T_T^T = -e^{-\frac{1}{2}\nu} E \psi^* \psi, \quad T_\theta^0 + T_\phi^0 = -[T_r^r + T_T^T].$$

Потребуем, чтобы волновая функция ψ была собственной функцией состояния с определенной z -компонентой полного момента количества движения. Тогда эти выражения не зависят от ϕ . Поэтому не представляет труда просуммировать или усреднить их по различным ориентациям орбиты при условии, что их вклады входят некогерентно. Легко найти условия, при которых становится законным такое некогерентное сложение [14]. В результате суммирования или усреднения единственными отличными от нуля компонентами остаются $\langle T_r^r \rangle$, $\langle T_T^T \rangle$, $\langle T_\theta^0 \rangle$ и $\langle T_\phi^0 \rangle$ и устраняется зависимость от угла. Тогда эти оставшиеся компоненты усредненного тензора энергии-импульса зависят только от радиальных компонент волновой функции нейтрино. Если эта волновая функция имеет вид (36), то, используя волновое уравнение (32), получаем следующие формулы для этих средних значений:

$$\langle T_r^r \rangle = \frac{e^{-\frac{1}{2}\nu}}{r^2} \left[e^{-1/2\nu} E R^* R - \frac{\hbar k}{r} R^* \tilde{\gamma}_1 R \right],$$

$$\langle T_T^T \rangle = -\frac{e^{-\nu}}{r^2} E R^* R, \quad (97)$$

$$\langle T_\theta^0 \rangle = \langle T_\phi^0 \rangle = \frac{\hbar k}{r^2} e^{-\frac{1}{2}\nu} R^* \tilde{\gamma}_1 R.$$

Однако эти формулы применимы только к дираковскому нейтрино. Волновая функция (36) нормирована таким образом, что интеграл от четвертой компоненты 4-вектора тока равен единице:

$$1 = \int s^4 d(\text{объем}) = - \int \left[\frac{\langle T_T^T \rangle}{E} \right] d(\text{объем}) =$$

$$= \int_0^\infty R^* R e^{\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu} dr \int \frac{\Theta^* \Theta}{\sin \theta} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (98)$$

Здесь и в дальнейшем радиальная и угловая части по отдельности нормированы на единицу.

Волновая функция для правовинтового нейтрино, как уже отмечалось, имеет не форму ω вида (36), но, скорее, форму $2^{-1/2}(1-i\gamma_5)\omega$ линейной комбинации двух функций. Каждая из них в отдельности может быть представлена в виде произведения, однако для их суммы это не имеет места. Пусть R по-прежнему означает радиальную часть первой из этих двух функций. Тогда нормировка (98) остается в силе. Для тензора энергии-натяжений для отдельного состояния нейтрино выражения (97) неприменимы: должны быть добавлены новые, интерференционные члены. Однако если, как и прежде, проведено усреднение по всем ориентациям орбит и использованы свойства угловой зависимости функций, согласно Шредингеру, то эти интерференционные члены обращаются в нуль и (97) остается в силе для нейтрино Ли — Янга.

§ 11. Нейтринный геон

Насколько известно, геоны не имеют отношения ни к физике элементарных частиц, ни к астрофизике. Они представляют интерес по совсем иной причине. Гравитационные поля имеют нелинейный характер, который приводит к целому ряду следствий, еще не изученных в достаточной мере. Анализ геона проливает свет на некоторые из этих следствий¹⁾. Некоторое скопление не связанной с массой покоя энергии удерживается в равновесии благодаря собственному гравитационному притяжению. Анализ такого рода объекта, или «геона», сочетает в себе два главных вопроса настоящей работы: поведение нейтрино в гравитационных полях и образование гравитационных полей нейтрино.

По-видимому, геоны тороидальной формы в принципе более устойчивы, чем сферические геоны, по крайней мере в том случае, когда сравнимые числа квантов движутся в двух противоположных направлениях. Случай, когда момент количества движения равен нулю, был проанализирован Эрнстом [28].

¹⁾ Дальнейшее обсуждение, особенно вопроса о неисследованной аналогии между физикой тяготения и гидродинамикой, имеется в работе [27].

В противоположном предельном случае, когда все нейтрино движутся по одному и тому же пути, правовинтовой характер нейтрино приводит к тому, что тороидальная система в целом не будет зеркально-симметричной по отношению к отражениям в ее собственной плоскости. Было бы интересно проанализировать следствия этой асимметрии, чтобы выяснить, не сказывается ли она на гравитационном поле вблизи тороидального геона.

Из сферически-симметричных геонов наиболее простым для рассмотрения является, по-видимому, тепловой геон [27]. Тепловой нейтринный и тепловой электромагнитный геоны имеют лишь тривиальное различие. Плотность энергии фотонов в тепловом геоне дается формулой

$$T_T^T = \frac{\pi^2}{15} \frac{T^4}{\hbar^3 c^3} e^{-2\nu} \frac{\omega}{4\pi}, \quad (99)$$

где T — температура (в энергетических единицах), $-e^{-\nu(r)} = -g_{44}$ — известный коэффициент в метрике и $\omega/4\pi$ — телесный угол, внутри которого распространяются «уловленные» фотоны. Подобным образом плотность энергии нейтрино в тепловом нейтринном геоне имеет вид

$$T_T^T = \frac{\pi^2}{15} \frac{T^4}{\hbar^3 c^3} e^{-2\nu} \frac{\omega}{4\pi} f(\eta). \quad (100)$$

Здесь безразмерный множитель

$$f(\eta) = \frac{15}{2\pi^4} \left[\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1+e^{x-\eta}} + \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{1+e^{x+\eta}} \right] \quad (101)$$

однозначно определяется энергией Ферми $E_F = \eta T$ «уловленных» нейтрино. Все исследования тепловых электромагнитных геонов непосредственно переносятся на случай тепловых нейтринных геонов. Для этой цели необходимо лишь переопределить характеристический масштаб длины R_T :

$$R_T = \left(\frac{15\hbar^3 c^7}{8\pi^3 f(\eta) G T^4} \right)^{1/2} \quad (102)$$

и характеристическую единицу массы:

$$M_T = \left(\frac{15\hbar^3 c^{11}}{8\pi^3 f(\eta) G^3 T^4} \right)^{1/2}. \quad (103)$$

Тогда все диаграммы, рассчитанные в работе [28], можно применять непосредственно, так что в нашем распоряжении имеется полное описание метрики и распределения энергии для теплового нейтринного геона.

В другом простом предельном случае сферического нейтринного геона вся энергия сконцентрирована в тонком сферическом слое. Иначе говоря, все нейтрино описывают круговые орбиты одного и того же радиуса. Все ориентации орбит равновероятны. Будут ли нейтрино занимать орбиты с различными энергиями или же будут заполнены только состояния с некоторой одной энергией — это дело выбора, т. е. зависит от начальных условий. Мы выберем вторую возможность, чтобы упростить анализ, хотя это и потребует большей энергии, приходящейся на одно нейтрино, чтобы обеспечить данную полную массу. Длина волны нейтрино будет тогда очень малой по сравнению с радиусом геона, и, следовательно, квантовое число k будет очень большим.

Чтобы сформулировать уравнения для самосогласованной метрики, поступим так же, как это делалось в работе [14], введя следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{E}{\hbar c}, \\ \varrho &= \Omega r, \\ d\varrho^* &= e^{\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu} d\varrho, \\ e^{-\lambda} &= 1 - 2\varrho^{-1}L(\varrho),\end{aligned}\tag{104}$$

где $L(\varrho)$ — параметр, характеризующий массу, заключенную внутри сферы радиуса r ;

$$e^{\lambda + \nu} = Q^2(\varrho)$$

и

$$\begin{pmatrix} f(\varrho) \\ g(\varrho) \end{pmatrix} = \left[\frac{8\pi G(2k-1)E}{c^4} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix},\tag{105}$$

где радиальные функции F и G нормированы следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\nu} (F^2 + G^2) dr = 1.\tag{106}$$

Тогда волновое уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dQ^{*2}} + \left[1 - \frac{e^{\nu} k^2}{\varrho^2} + \frac{d}{dQ^*} \left(\frac{e^{\frac{1}{2}\nu} k}{\varrho} \right) \right] f = 0, \quad (107)$$

и эйнштейновские уравнения поля приводят к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dQ^*} &= \frac{1}{2Q} (f^2 + g^2) = \frac{1}{2Q} \left[f^2 + \left(\frac{df}{dQ^*} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{\nu} k^2}{\varrho^2} f^2 - \frac{e^{\frac{1}{2}\nu} k}{\varrho} \frac{df}{dQ^*} \right], \\ \frac{dQ}{dQ^*} &= (\varrho - 2L)^{-1} \left[f^2 + \left(\frac{df}{dQ^*} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Эти уравнения для самосогласованного поля теплового геона очень мало отличаются от уравнений (38), (40) и (41) работы [14] для электромагнитных геонов. Если мы пренебрежем членами порядка k по сравнению с членами порядка k^2 , то обе системы уравнений становятся совершенно одинаковыми. Решение для случая больших моментов количества движения [14] приводит к метрике геона, которая уже использовалась ранее [соотношение (43)] при обсуждении поведения нейтрино в заданном гравитационном поле. Итак, геоны в принципе могут быть образованы из нейтрино почти таким же путем, как они в принципе могут быть образованы из фотонов.

§ 12. Заключение

Из нашего анализа некоторых конкретного вида взаимодействий нейтрино с гравитационным полем мы заключаем, что физика нейтрино интересна и сама по себе, даже если отвлечься от всех β -превращений. Поведение нейтрино стало более ясным, однако актуальный вопрос о том, почему спиноры вообще встречаются в природе, остается открытым. Имеются ли какие-либо свойства геометрии пространства, описание которых не исчерпывается адекватно скалярами, векторами и тензорами обычного тензорного анализа? На этот вопрос теория спинорных полей дает известный ответ: спиноры позволяют опи-

сать вращения в одной точке пространства совершенно независимо от вращений во всех других точках пространства — вращения, не имеющие никакого отношения к координатным преобразованиям, которые рассматриваются в обычном тензорном анализе. Чтобы наиболее полно выявить этот механизм независимых вращений в каждой точке пространства, лучше всего рассмотреть спинорное поле в общем случае искривленного пространства, что и сделано в настоящей работе. Однако более глубокая роль таких вращений в описании природы остается пока неясной.

Авторы признательны проф. В. Баргману за его интерес к настоящей работе и за ряд полезных дискуссий, а также проф. Ян Чжень-нину за обсуждение эквивалентности дираковского и двухкомпонентного спинорного формализма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
2. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1119 (1957) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
3. Wu, Ambler, Hayward, Hoppes, Hudson, Phys. Rev., **105**, 1413 (1957) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
4. Garwin, Lederman, Weinrich, Phys. Rev., **105**, 1415 (1957) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
5. Bade W. L., Jehle H., Rev. Mod. Phys., **25**, 714 (1953).
6. Riesz M., Lund Univ. Math. Sem., **12** (1954).
7. Belinfante F. J., Physica, **7**, 305 (1940).
8. Bergmann P. G., Phys. Rev., **107**, 624 (1957).
9. Klein O., Arch. Math. Astr. Phys., **34**, 1 (1947).
10. Kofink W., Math. Zs., **51**, 702 (1949).
11. Bethe H. A., Handbuch der Physik, Berlin, Bd. 24, Teil 1, 1953.
12. Schrödinger E., Commentationes Pontif. Acad. Sci., **2**, 321 (1938).
13. Schiff L., Quantum Mechanics, New York, 1955 (см. перевод: Шифф Л., Квантовая механика, ИЛ, 1958).
14. Wheeler J. A., Phys. Rev., **97**, 511 (1955).
15. Gamow G., Schoenberg M., Phys. Rev., **59**, 539 (1941).

16. Reines F., Cowan C., Phys. Rev., **92**, 830 (1953).
17. Fermi E., Zs. f. Phys., **36**, 902 (1926).
18. Breit G., Wheeler J. A., Phys. Rev., **46**, 1087 (1934).
19. Williams E. J., Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Mat.-fys. Medd., **13**, 44 (1935).
20. Bohr N., Rosenfeld L., Phys. Rev., **78**, 794 (1950).
21. Toll J. S., The dispersion relation for light and its application to problems involving electron pairs, Thesis, Princeton, 1952, не опубликовано.
22. Toll J. S., Wheeler J. A., Phys. Rev., **81**, 654 (1951).
23. Pauli W., Handbuch der Physik, Bd. 24, Teil 1, 1920, S. 235 (см. перевод: Паули В., Теория относительности, М.—Л., 1947).
24. Rosenfeld L., Acad. roy. Belg., **18**, No. 6 (1940).
25. Pauli W., Ann. d. Phys., **18**, 337 (1933).
26. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, New York, 1934, p. 272.
27. Power E., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **29**, 480 (1957).
28. Ernst F., Rev. Mod. Phys., **29**, 496 (1957).

16. ГРАВИТАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА АНТИМАТЕРИИ

Л. Шифф

L. Schiff, Proc. Nat. Acad. Sci., 45, 69—80 (1959)

§ 1. Эксперименты Этвеша и принцип эквивалентности

С 1890 по 1922 гг. Этвешем и его сотрудниками была выполнена серия очень точных экспериментов, относящихся к гравитации (см. обзор [1]). Эти эксперименты ставились с целью выяснения возможной зависимости отношения гравитационной массы к инертной от вида вещества. Под «гравитационной массой» мы понимаем здесь то, что Бонди [2] называет «пассивной гравитационной массой», т. е. величину, пропорциональную силе, действующей на тело со стороны внешнего гравитационного поля (например, гравитационного поля Земли или Солнца). В противоположность этому, можно говорить также об активной гравитационной массе, которая пропорциональна силе, действующей со стороны гравитирующего тела. К обсуждению этой величины мы вернемся в последнем разделе настоящей статьи. Под «инертной массой» мы понимаем отношение некоторой не зависящей от массы силы (например, электромагнитной), действующей на тело, к ускорению тела. Мы выберем единицы таким образом, чтобы отношение, измеренное Этвешем, для «нормальной» материи было равно единице.

Эксперименты были выполнены с разной степенью точности для большого числа веществ, из которых три вещества — магналий (90% алюминия, 10% магния), медь и платина — особенно удобны для наших целей, поскольку они представляют собой почти чистые элементы и относятся к различным частям периодической системы; кроме того, эти три вещества принадлежат к числу тех, для которых упомянутое выше отношение было измерено с наибольшей точностью.

Сравнение данных для магнелия и платины показало, что разница в отношении гравитационной массы к инертной равна $(0,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-8}$; для меди и платины эта разность равна $(0,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-8}$. Авторы не считали эти небольшие отклонения существенными. Мы будем придерживаться такой же интерпретации их работ. Поэтому мы можем утверждать, что для этих трех веществ нет разницы в отношении гравитационной массы к инертной с точностью до $0,5 \cdot 10^{-8}$.

Предположение, что нет никакой разницы в отношении гравитационной массы к инертной для любого вещества приводит к принципу эквивалентности и является основой эйнштейновской теории гравитации. Однако, важно представлять себе, что, несмотря на большую точность, выполненные эксперименты не являются совершенно точными, и мы не можем утверждать, что принцип эквивалентности проверен экспериментально. Это обстоятельство было подчеркнуто Дике [3], который отметил, что энергии β -распада и гравитационного самодействия тела лабораторных размеров были бы даже в случае нарушения принципа эквивалентности слишком малы, чтобы повлиять на результаты опытов Этвеша. Во всяком случае мы будем считать справедливой специальную теорию относительности, в соответствии с которой инертная масса и энергия равнозначны.

Опыты Этвеша достаточно точны, чтобы показать, что основные факторы, которые дают вклад в инертную массу тела, дают также равный или приблизительно равный вклад в его гравитационную массу [3, 4]. В этой связи мы прежде всего приведем формулы для величины $M\delta A$, определяющей превышение инертной массы атома над гравитационной, если бы тот или иной из этих факторов не давал вклада в гравитационную массу. Здесь Z и A — соответственно атомный номер и массовое число рассматриваемого атома, который практически электрически нейтрален, δA — разность между «инертным массовым числом» и «гравитационным массовым числом», e и m — заряд и масса покоя электрона, M — атомная единица массы ($931 \cdot 10^6$ эв/ c^2), R — радиус ядра, c и \hbar скорость света и постоянная Планка, деленная на 2π . Приведем здесь следующие формулы.

Массы покоя электронов в атоме:

$$M\delta A = mZ. \quad (1)$$

Кинетическая энергия электронов вместе с электромагнитной энергией взаимодействия между электронами и ядром, определяющая энергию связи атома (для Z не очень малых) [5]¹⁾:

$$M\delta A \approx -15,6Z^{7/3} \text{ эв}/c^2. \quad (2)$$

Кулоновская энергия ядра [7]:

$$M\delta A \approx 0,6Z(Z-1) \frac{e^2}{R}. \quad (3)$$

Кинетическая энергия нуклонов вместе с энергией мезонного и электростатического [см. (3)] взаимодействия нуклонов, определяющая энергию связи ядра [7]:

$$M\delta A = -B(Z, A). \quad (4)$$

Сравнивая эти формулы с экспериментом, мы получаем достаточно хорошее согласие при использовании значений Z и A для изотопа наибольшего содержания для каждого из упомянутых выше веществ: магнелия, меди и платины. В табл. 1 приведены значения $|\delta A/A|$ в единицах 10^{-8} , вычисленные с помощью формул (1)—(4) для каждого из этих изотопов. Радиус ядра R [9] определяется формулой

$$R = 1,24A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (5)$$

Из табл. 1 видно, что различия для магнелия — платины и меди — платины в каждом столбце много больше, чем экспериментальное значение $\frac{1}{2}$. В самом деле, если мы игнорируем маловероятную возможность случайного совпадения, мы можем сделать вывод, что гравитационная масса электрона равна его инертной массе с точностью до

¹⁾ Следует также отметить, что согласие между предсказанием Эйнштейна и экспериментальными данными для гравитационного отклонения светового луча показывает, что электромагнитная энергия ведет себя в соответствии с принципом эквивалентности. Однако, по-видимому, имеется расхождение между теорией с экспериментом порядка 10—20%. Обзор этих работ см. в [6].

Таблица 1

Значения Z , A и $\delta A/A$, вычисленные с помощью формул (1)—(4), для изотопа наибольшего содержания каждого из упомянутых здесь веществ

Вещество	Z	A	$ \delta A/A \cdot 10^8$			
			из формулы (1)	из формулы (2)	из формулы (3)	из формулы (4)
Магний . . .	13	27	26 400	25	144 000	890 000
Медь	29	63	25 200	68	242 000	923 000
Платина . . .	78	195	21 900	223	397 000	838 000

10^{-4} , что энергия связи атома дает одинаковый вклад в обе массы с точностью $(1/4)\%$, что электростатическое отталкивание между протонами ядра повышает вес, согласующийся с принципом эквивалентности с точностью до $2 \cdot 10^{-6}$ и что энергия связи ядра уменьшает вес атома на ожидаемую величину в пределах 10^{-5} .

Доводы такого же рода могут быть использованы для доказательства того, что позитроны имеют такую же или примерно такую же (и с тем же самым знаком) гравитационную массу, что и электроны. Это доказательство имеет определенный интерес, поскольку некоторые физики предполагают (главным образом в связи с космологией), что антиматерия может иметь обратный знак гравитационной массы по отношению к обычной материи (см., например, [10—12]). Под «антиматерией» понимается вещество, в котором обычные элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны) заменены на античастицы (позитроны, антипротоны, антинейтроны). Реальные позитроны в обычной материи отсутствуют, так что необходимо использовать виртуальные позитроны, которые возникают вследствие поляризации вакуума кулоновским полем атома. Так как амплитуда вероятности наличия виртуальной электрон-позитронной пары имеет порядок $Ze^2/\hbar c = Z/137$ (для не очень больших Z), мы можем предположить, что

разность масс запишется в виде

$$M\delta A \approx m \left(\frac{Z}{137} \right)^2, \quad (6)$$

если позитроны имеют отрицательную гравитационную массу покоя. Количественный расчет этой разности масс приведен в следующем параграфе данной статьи, где показано, что выражение (6) дает правильный порядок величины; сравнение с экспериментами Этвеша указывает на то, что позитрон имеет нормальную гравитационную массу [13].

Аналогичные аргументы могут быть приведены и в случае антинуклонов [13]¹⁾. Как и в предшествующем случае, виртуальные антипротоны и антинейтроны могли бы образоваться вследствие поляризации нуклон-антинуклонного вакуума мезонным полем ядра. Если бы антинуклоны обладали аномальной гравитационной массой, соответствующая величина $M\delta A$ была бы значительно больше, чем для виртуальных позитронов. Однако эти рассуждения покоятся на менее надежном экспериментальном и теоретическом основании. В этом случае ожидается более сильный эффект потому, что, во-первых, амплитуда вероятности появления в виртуальном состоянии нуклон-антинуклонной пары была бы скорее порядка единицы, чем $Z/137$, и, во-вторых аномалия массы была бы порядка M , а не m . С другой стороны, структура теории мезон-нуклонного поля изучена значительно хуже, чем квантовая электродинамика, так что в настоящее время вряд ли можно сделать надежные вычисления. Кроме того, нет прямого экспериментального подтверждения существования поляризации нуклон-антинуклонного вакуума, как это имеет место для случая поляризации электрон-позитронного вакуума. Последняя проявляется в лэмбовском сдвиге уровней,

¹⁾ О возможности использования виртуальных пар в связи с обсуждением гравитационной массы античастиц с помощью экспериментов Этвеша было впервые предложено Ф. Моррисоном [11]. Он провел также некоторые качественные рассуждения для антинуклонов. Аналогичные качественные рассуждения и результаты количественных расчетов для случая позитрона см. в нашей работе [13]; выполняя эту работу, мы не были осведомлены об указанной работе Моррисона. Позднее Моррисон информировал автора (частное сообщение), что он независимо получил оценку порядка величины [6].

где вклад поляризации вакуума может быть вычислен количественно [14]. По этим причинам мы не будем пытаться рассчитывать эффект аномальной гравитационной массы антинуклона на основе экспериментов Этвеша, хотя представляется, что этот эффект был бы большим, и посвятим следующий параграф количественному рассмотрению случая с позитроном.

Наконец, как было замечено рядом физиков (частные сообщения; см. также [10, 11]), нарушение принципа эквивалентности приводит, вообще говоря, к нарушению закона сохранения энергии (или инертной массы). Предположим, например, что может иметь место обратимая реакция (ядерная или какая-либо другая), в которой совокупность частиц A в одной части уравнения реакции имеет меньшее отношение гравитационной массы к инертной, чем совокупность частиц B в другой части.

Предположим пока, что энергия сохраняется; тогда, поскольку реакция может иметь место, инертные массы частиц A и B должны быть одинаковыми. Пусть теперь реакция $A \rightarrow B$ протекает в гравитационном поле Земли на большей высоте, чем реакция $B \rightarrow A$. Тогда мог бы иметь место циклический процесс, в котором B падает, а A поднимается. При этом энергия могла бы постоянно отбираться у системы.

Моррисон [10, 11] показал, что в частном случае, когда A есть нуклон-антинуклонная пара, а B — пара фотонов, закон сохранения энергии может быть подтвержден, если потребовать, чтобы инертная масса (или энергия) B внизу была больше, чем наверху, как только реакция $B \rightarrow A$ имеет место. Это возрастание инертной массы предполагается эквивалентным по величине энергии, отбираемой от системы. Таким образом, это значит, что либо инертная масса A больше внизу, чем вверху, либо инертная масса B больше вверху, чем внизу (по отношению к поверхности Земли). Мы скорее предпочтем принять закон сохранения энергии на тех же основаниях, что и принцип эквивалентности, чем допустим такую зависимость инертной массы от потенциала тяготения, поскольку эта зависимость с необходимостью была бы различна для разных веществ. И закон сохранения энергии, и принцип эквивалентности выполняются с очень большой точностью.

Однако в настоящее время нет еще полной уверенности, что эта точность абсолютна. Идея о неточном сохранении энергии не нова и является центральной идеей, связанной с гипотезами непрерывного рождения в космологии [15].

§ 2. Гравитационная масса позитрона

Система, к рассмотрению которой мы переходим, состоит из электрически нейтрального атома, взаимодействующего с полем электрон-позитронных пар и гравитационным полем Земли. В отсутствие гравитации гамильтониан имеет вид

$$H_0 = H_A + H_P + H_C, \quad (7)$$

где H_A , H_P и H_C — гамильтонианы атома, поля электрон-позитронных пар и взаимодействия (в основном кулоновского) между атомом и полем пар соответственно. Для наших целей гравитационный потенциал Земли можно рассматривать как статический и почти не зависящий от пространственных координат (масштаб расстояния имеет порядок радиуса Земли). Обозначим этот потенциал через φ и выберем единицу его измерения так, чтобы полная энергия (или масса покоя, умноженная на c^2) атома в его основном состоянии менялась от E_0 (вдали от гравитирующих тел) до $E_0(1 + \varphi)$ (в условиях земной лаборатории). При таком выборе единиц гравитационная и инертная энергии (соответствующие массы, умноженные на c^2) системы в некотором конкретном состоянии представляют собой просто коэффициент при φ для соответствующего собственного значения энергии и независящую от φ часть этого собственного значения соответственно.

Рассмотрим здесь три случая, соответствующие различным предположениям относительно действия гравитационного поля на позитрон: а) Позитрон ведет себя так же, как и электрон. б) Полная гравитационная энергия (энергия покоя и кинетическая энергия) позитрона равна полной гравитационной энергии электрона с обратным знаком. в) Гравитационная масса покоя позитрона равна гравитационной массе покоя электрона с обратным знаком, но его кинетическая энергия ведет себя в гравитационном поле обычным образом.

Случай «а» соответствует принципу эквивалентности. В этом случае гамильтониан (7) заменяется на

$$H_a = H_0(1 + \varphi), \quad (8)$$

где предполагается, что изменением φ на протяжении атомных размеров можно пренебречь. Тогда собственные значения (8) в точности равны умноженным на $(1 + \varphi)$ собственным значениям (7) и гравитационная масса атома в точности равна инертной.

Однако, как известно, самое низкое собственное значение E_0 гамильтониана H_A , вследствие наличия $H_P + H_C$, представляет собой логарифмически расходящуюся величину. Эта величина должна рассматриваться как часть перенормируемой массы атома. Перенормировка, разумеется, одинакова для гравитационной и инертной масс, так что эти массы остаются равными.

Простейший гамильтониан, соответствующий случаю «б» имеет вид

$$H_b = (H_A + H_C)(1 + \varphi) + H_P + \varphi H'_P, \quad (9)$$

где член H'_P — выбран так, что обеспечивается положительное значение энергии для каждого заполненного состояния с положительной энергией (электрона) и отрицательное значение для каждого незаполненного состояния с отрицательной энергией (позитрона). В импульсном представлении

$$H_P = \sum^{(+)} E_k a_k^* a_k - \sum^{(-)} E_k a_k a_k^*, \quad (10)$$

где суммирование ведется по состояниям с положительной (в первом члене) и отрицательной (во втором члене) энергией E_k , а a_k и a_k^* — соответственно операторы уничтожения и рождения электронов. Простейшее выражение для H'_P можно записать в виде

$$H'_P = \sum^{(+)} E_k a_k^* a_k + \sum^{(-)} E_k a_k a_k^*. \quad (11)$$

Нас интересует отличие собственного значения гамильтониана H_b от собственного значения E_0 гамильтониана H_A второго порядка малости по H_C и первого порядка малости по φ . Непосредственные вычисления методом возмущений показывают, что в этом приближении (для не очень больших Z)

$$E_b \approx E_0(1 + \varphi) - (1 + 2\varphi) \sum E_P^{-1} |\langle P | H_C | 0 \rangle|^2, \quad (12)$$

где суммирование проводится по всем состояниям P электрон-позитронных пар с полной энергией E_P , а матричный элемент H_C берется между состоянием вакуума и состояниями с электрон-позитронными парами.

Как отмечено выше, эта сумма логарифмически расходится. Часть, не зависящая от φ в (12), очевидно, представляет собой перенормированную полную энергию (инертную массу, умноженную на c^2) атома, поскольку H_a и H_b отличаются только членами, зависящими от φ . Однако разница между инертной и гравитационной энергиями (т. е. часть E_b , не зависящая от φ , меньше коэффициента при зависящей от φ части) больше не равна нулю, как это было в случае «а», а имеет вид

$$\sum E_P^{-1} |\langle P | H_C | 0 \rangle|^2, \quad (13)$$

и, следовательно, логарифмически расходится. Она не может быть перенормирована и может интерпретироваться лишь с помощью каким-либо образом осуществленного обрезания импульсов для электрон-позитронных пар. Мы вернемся к (13) при обсуждении случая «в».

Простейший гамильтониан, соответствующий случаю «в», имеет вид

$$H_c = (H_A + H_C) (1 + \varphi) + H_P + \varphi H_P'', \quad (14)$$

где

$$H_P'' = H_P - 2mc^2 \sum^{(-)} a_k a_k^*. \quad (15)$$

Вычисления по методу возмущений дают для этого случая

$$E_c \approx E_0 (1 + \varphi) - (1 + \varphi) \sum E_P^{-1} |\langle P | H_C | 0 \rangle|^2 - 2mc^2 \varphi \sum E_P^{-2} |\langle P | H_C | 0 \rangle|^2. \quad (16)$$

Величина $M\delta A$, определяющая превышение инертной массы над гравитационной, равна как раз последнему члену в (16) с обратным знаком, деленному на $c^2\varphi$:

$$M\delta A \approx 2m \sum E_P^{-2} |\langle P | H_C | 0 \rangle|^2. \quad (17)$$

Эта величина оказывается конечной, и мы перейдем теперь к вычислению ее значения.

Подставим в выражение (17) гамильтониан взаимодействия $H_C = e \int \psi^* V \psi d^3x$, где V — электростатический потенциал атома, а ψ — оператор электронного поля, и проведем суммирование по спинам. В результате получим

$$M\delta A \approx \left[\frac{2m}{(2\pi)^6} \right] \int d^3k_1 \times \\ \times \int \frac{d^3k_2 |U(\mathbf{q})|^2 \left[E_1 E_2 - h^2 c^2 \left(k^2 + \mu^2 - \frac{q^2}{4} \right) \right]}{E_1 E_2 (E_1 + E_2)^2}, \quad (18)$$

где hk_1 и hk_2 — импульсы электрона и позитрона, $\mu = mc/h$, $E_{1,2} = hc(k_{1,2}^2 + \mu^2)^{1/2}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, $\mathbf{k} = 1/2(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, а U — фурье-образ eV . Вводя формфактор распределения заряда в атоме F , можно записать $U(\mathbf{q})$ в следующем виде:

$$U(\mathbf{q}) = - \left(\frac{4\pi Z e^2}{q^2} \right) F(\mathbf{q}). \quad (19)$$

Соотношение (19) между U и F выбрано так, чтобы F равнялось единице, когда q сколько-нибудь превышает величину, обратную радиусу атома, или когда q меньше величины, обратной радиусу соответствующего ядра, и обращалось в нуль, когда q лежит вне этой области. В формуле (18) удобно перейти от \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 к \mathbf{q} , x и y , определенным следующим образом:

$$x = \frac{k_1^2 + k_2^2 + 2\mu^2}{q^2} = \frac{2k^2}{q^2} + \frac{1}{2} \alpha, \\ y = \frac{k_1^2 - k_2^2}{q^2} = \frac{2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{k})}{q^2}, \quad (20) \\ \alpha = 1 + \frac{4\mu^2}{q^2}.$$

Шестой независимой переменной является азимутальный угол между \mathbf{k} и \mathbf{q} (\mathbf{q} играет роль полярной оси). Интегрирование по нему дает множитель 2π . Затем выполняется интегрирование по x и y в пределах от $-(2x - \alpha)^{1/2}$ до $+(2x - \alpha)^{1/2}$ по y и от $1/2\alpha$ до ∞ — по x . Интегрирование по \mathbf{q} с учетом формфактора атома уже проведено. С помощью (19) и (20) формула (18) может быть

записана в виде

$$M\delta A \approx \left(\frac{4m}{3\pi^2}\right) \left(\frac{Z}{137}\right)^2 \int_0^\infty |F(q)|^2 f(\alpha) \frac{dq}{q}, \quad (21)$$

$$f(\alpha) = \frac{3}{4} \int_{1/2\alpha}^\infty dx \int_0^{(2x-\alpha)^{1/2}} dy \frac{(x^2-y^2)^{1/2} + 1-x}{(x^2-y^2)^{1/2} [x+(x^2-y^2)^{1/2}]}, \quad (22)$$

где небольшие упрощения были сделаны путем предположения сферической симметрии $F(q)$. Интегрирование по y в (22) может быть выполнено аналитически; тогда получим

$$f(\alpha) = \frac{3}{4} \int_{1/2\alpha}^\infty dx \frac{(x-1)[2x^2-2x+\alpha-2x(x^2-2x+\alpha)^{1/2}]}{x(2x-\alpha)^{1/2}(x^2-2x+\alpha)^{1/2}}. \quad (23)$$

Желательно оценить функцию $f(\alpha)$, определенную выражением (23), в пределах от $\alpha = 1$ ($q = \infty$) до $\alpha = \infty$ ($q = 0$). Вычислить интеграл (23) в замкнутом виде оказывается невозможным, но может быть получена хорошая аппроксимация для всей области изменения α . Для больших α первые четыре члена асимптотического разложения $f(\alpha)$ имеют вид

$$f(\alpha) \approx \left(\frac{9\pi}{32\alpha^{1/2}}\right) \left[1 + \frac{1}{12\alpha} + \frac{3}{128\alpha^2} + \frac{5}{512\alpha^3}\right]. \quad (24)$$

Интеграл (23) может быть вычислен для $\alpha = 1$ точно. При этом получается, что $f(1) = 1$. Наконец, поведение $f(\alpha)$ для α , несколько превышающих единицу, может быть найдено с помощью более сложной вычислительной процедуры. Зависимость $f(\alpha)$ от α при этом оказывается линейной; тангенс угла наклона прямой, представляющей график $f(\alpha)$, равен $-3/4$. Таким образом, для α , несколько бóльших или равных единице, мы имеем

$$f(\alpha) \approx 1 - \frac{3(\alpha-1)}{4}. \quad (25)$$

Основной член в (24) представлен на графике (см. фиг. 1) штриховой прямой линией; полное же выражение — сплошной линией. Пунктирная кривая в верхнем левом углу на фиг. 1 соответствует расчету по формуле (25) и сливается со сплошной линией, согласуясь с рассчитан-

ной численным путем точкой при $\alpha = 2$. Этот прием дает хорошее представление о $f(\alpha)$. Анализ графика $f(\alpha)$ приводит к следующей формуле, имеющей вид асимптотического разложения

$$f(\alpha) = \alpha^{-1/2} \left[0,884 + \frac{0,118}{\alpha} - \frac{0,137}{\alpha^2} + \frac{0,135}{\alpha^3} \right]. \quad (26)$$

Первый член в (26) совпадает с первым членом в (24), а остальные три коэффициента подобраны так, чтобы для $f(\alpha)$ и наклона прямой получались значения, полученные с помощью (25) для $\alpha = 1$ и найденные численно для $\alpha = 2$.

Подстановка основного члена из (24) или (26) в (21) дает хорошую аппроксимацию для разности масс:

$$M\delta A \approx \left(\frac{3m}{8\pi} \right) \left(\frac{Z}{137} \right)^2 \int_0^{\infty} |F(q)|^2 \frac{dq}{(q^2 + 4\mu^2)^{1/2}}. \quad (27)$$

Из фиг. 1 видно, что формула (27) дает для разности масс меньшее значение, чем формула (1) в работе [13]; однако разница не превышает 12%.

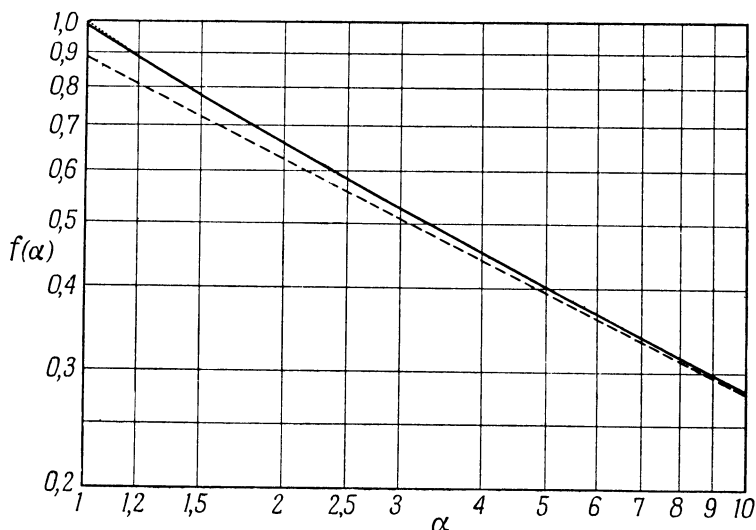
Подставляя выражение (26) для $f(\alpha)$ в (21) и выбирая в качестве $F(q)$ фурье-образ формфактора, соответствующего равномерно заряженной по объему сфере радиуса R , где R определяется из (5), мы получаем более точные результаты, чем в работе [13]. Простое выражение для интеграла, входящего в (21), полученное при пренебрежении членами порядка $(\mu R)^2$ и $1/\mu a$ (a — радиус экрановки атома) по сравнению с единицей, имеет вид

$$\int_0^{\infty} |F(q)|^2 f(\alpha) \frac{dq}{q} \approx \ln \left(\frac{1}{\mu R} \right) + 0,338. \quad (28)$$

Подстановка (28) в (21) при соответствующем выборе численных значений параметров приводит для $\delta A/A$ к значениям 12, 25 и 53 (в единицах 10^{-8}) соответственно для магния, меди и платины. Эти числа несколько больше, чем соответствующие значения, найденные в работе [13]. (Там мы имели соответственно 10, 20 и 43.) Это отчасти связано с тем, что основной член в (24) занижает $f(\alpha)$ и тем, что сделанные в работе [13] пред-

положения относительно $F(q)$ занижают роль фурье-компонент распределения заряда в ядре для больших q .

Таким образом, из рассмотрения случая «в» следует, что разности отношений гравитационной массы к инертной для магналия — меди, меди — платины и магналия — платины должны соответственно принимать значения 13,



Ф и г. 1. Графическое изображение главного члена в выражении (24) (штриховая линия) и суммы всех четырех членов (сплошная линия). Пунктирная линия в левом верхнем углу графика соответствует формуле (25); она сливается со сплошной линией, проходя через найденную численным способом точку при $\alpha = 2$.

28 и $41 \cdot 10^{-8}$. Поскольку эксперименты показывают, что эти разности меньше $0,5 \cdot 10^8$, мы можем сделать заключение, что гравитационная масса покоя позитрона с точностью до 1% равна гравитационной массе покоя электрона и обе массы имеют одинаковый знак. Таким образом, представленные здесь более точные расчеты, не меняют основного результата, полученного в работе [13]. Использование приближения, при котором пренебрегается $(\mu R)^2$ и $1/\mu\alpha$ по сравнению с единицей, простой выбор $F(q)$ и пренебрежение высшими степенями $Z/137$ при учете кулоновского поля

атома не изменяет сколько-нибудь значительно наши выводы. Далее, поскольку $E_p \geq 2mc^2$, сравнение (13) и (17) показывает, что независимо от интерпретации значение $M\delta A$ для случая «б» всегда получается более высоким, чем для случая «в».

Изложенные выше результаты связаны со специальными предположениями, сделанными в формулах (9) — (11), (14) и (15) относительно вида H_b и H_c . Несмотря на простоту H_b и H_c , выбор их неоднозначен. Например, можно было бы модифицировать член φH_c так, чтобы части, соответствующие рождению и аннигиляции электрон-позитронных пар, приняли другой вид, а части, соответствующие электронному и позитронному рассеянию, остались прежними. Это последнее означает, что электростатическая энергия связи атома, даваемая формулой (2), не дает вклада в разность между гравитационной и инертной массами. Кроме того, можно было бы добавить к H_p и $H_{\bar{p}}$ члены, соответствующие рождению и аннигиляции пар. При этом действие гравитационного поля на свободный позитрон не изменилось бы. Возможно, такие члены маскировали бы предполагаемые аномальные гравитационные свойства позитрона; таким образом подтверждались бы сделанные в последнем параграфе заключения¹⁾.

Если умножить часть φH_c , соответствующую рождению пар, на некоторое число β , а часть, соответствующую аннигиляции пар, на $\bar{\beta}$ (для сохранения эрмитовости гамильтониана), то легко показать, что (12) запишется в виде

$$E'_b \approx E_0(1 + \varphi) - [1 + 2\varphi \operatorname{Re}(\beta)] \Sigma E_{\bar{p}}^{-1} |\langle P | H_c | 0 \rangle|^2 \quad (29)$$

и (16) примет форму

$$E'_c \approx E_0(1 + \varphi) - \{1 + \varphi [2 \operatorname{Re}(\beta) - 1]\} \Sigma E_{\bar{p}}^{-1} |\langle P | H_c | 0 \rangle|^2 - 2mc^2 \varphi \Sigma E_{\bar{p}}^{-2} |\langle P | H_c | 0 \rangle|^2, \quad (30)$$

где $\operatorname{Re}(\beta)$ означает вещественную часть β . Сравнение (12) и (29) показывает, что, выбирая $\operatorname{Re} \beta = \frac{1}{2}$, мы могли бы полностью «замаскировать» гравитационные аномалии позитрона, предположенные в случае «б». С другой стороны,

¹⁾ На эту возможность указал С. Дрелл (частное сообщение).

вид уравнения (30) показывает, что такая маскировка невозможна для случая «в».

Другая модификация, упомянутая выше, — добавление членов рождения и аннигиляции пар к H'_p и H''_p — приводит к более сложным расчетам. Здесь можно ожидать вклады порядка φZ и φZ^2 . Однако оказывается, что если эти члены имеют простую форму сумм произведений оператора рождения с положительной энергией и оператора уничтожения с отрицательной энергией для одинаковых импульсов и спинов (вместе с эрмитов-сопряженными), то формулы (12) и (16) не меняют своего вида. Это непосредственно приводит к предположению об отсутствии передачи импульса во вновь добавленных процессах для электрон-позитронных пар. Если же принимать во внимание изменение φ в пространстве, то должна иметь место передача импульса. Тогда зависимость от радиуса Земли могла бы привести к появлению малых и не влияющих на маскировку членов.

Другие возможности маскировки предполагаемого аномального гравитационного поведения позитрона не были исследованы. Однако на основании проведенного рассмотрения представляется вероятным, что они имеют место лишь при случайном выборе предположений об аномальных свойствах позитрона и при довольно специальных изменениях в некоторых других пунктах теории.

Упрощенные рассмотрения, проведенные в этом параграфе, приводят нас к заключению, что позитроны, вероятнее всего, имеют обычные гравитационные свойства.

§ 3. Пассивная и активная гравитационные массы

В первых двух параграфах мы имели дело с пассивными гравитационными и инертными массами частиц и античастиц. С большой достоверностью мы можем утверждать, что инертные массы позитрона и антинуклона положительны по той простой причине, что энергия, необходимая для их рождения, освобождается при их аннигиляции. Кроме того, эксперименты по рождению и аннигиляции реальных электрон-позитронных пар с достоверностью показывают, что электрический заряд в этих процессах сохраняется. Тогда отклонение позитронов в магнитных полях

показывает, что позитроны имеют положительную инертную массу.

На основании рассмотрений, проведенных в предыдущем параграфе, может быть сделано несколько менее определенное утверждение, что гравитационные массы античастиц также положительны. Тогда, естественно, возникает вопрос: возможно ли отделение материи от антиматерии в космических масштабах посредством гравитации [10—12]? Эта возможность имеет место, если допустить, что активная гравитационная масса античастиц отрицательна.

Как показал Бонди [2], такая ситуация не противоречит принципу эквивалентности и общей теории относительности, если инертная и пассивная гравитационные массы в точности равны. Все пробные тела в этом случае будут притягиваться частицами и отталкиваться античастицами. Но тогда возникает аномальная ситуация при рассмотрении движения пар частиц — античастиц при их внутреннем гравитационном взаимодействии. Этот случай подробно обсуждался Бонди. Однако для наших целей достаточно указать, что объединение античастиц друг с другом вело бы себя обычным образом, но было бы нестабильным, в полной аналогии с системой электрически заряженных частиц одинакового знака.

Таким образом, космологическое разделение материи и антиматерии с помощью гравитации требует, чтобы пассивные гравитационные массы, по крайней мере некоторых типов античастиц, были отрицательными. Тогда принцип эквивалентности оказывается неверным, и общая теория относительности не может применяться. Однако, несмотря на то, что обсуждавшаяся в настоящей статье интерпретация экспериментов Этвеша, вероятно, устраняет эту возможность, представляется интересным исследовать в дальнейшем, к чему это может привести. Когда объекты разного знака гравитационной массы находятся во взаимодействии, их аномальное поведение, рассмотренное Бонди, может быть устранено с помощью предположения о том, что справедлив третий закон Ньютона. Для положительной инертной массы это эквивалентно допущению, что активная и пассивная гравитационные массы каждого объекта равны по величине и имеют одинаковый знак. Тогда, если по крайней мере наиболее тяжелые

античастицы имеют отрицательную гравитационную массу, материя и антиматерия будут стремиться отделиться друг от друга.

Интересное следствие такой модели состоит в том, что гравитационные эксперименты, выполненные в области Вселенной, где все частицы заменены на античастицы (в антилаборатории), приведут к результатам, отличным от результатов, полученных в экспериментах в обычной области Вселенной (в лаборатории).

Это является следствием того, что, как это было показано в § 1, электромагнитная и ядерная энергии связи имеют положительную гравитационную массу. Заметим, что фотоны, связанные с электромагнитными процессами, и π -мезоны, ответственные за ядерные процессы, являются одновременно и своими античастицами. Следовательно, даже в случае, если позитрон, антипротон и антинейтрон имели бы отрицательную гравитационную массу, симметрия между ситуациями в лаборатории и антилаборатории имела бы место.

Полную симметрию между лабораторией и антилабораторией можно сохранить, несмотря на наличие гравитационного отталкивания, с помощью сильно видоизмененных теорий гравитационного поля или принятия концепции дальнего действия в теории гравитации. Можно было бы постулировать, что фотоны, античастицы, π -мезоны притягиваются, а все частицы отталкивают античастицы¹⁾. Однако нет никакой необходимости пытаться обсуждать такую модель, поскольку в предыдущем параграфе строго доказано, что частицы и античастицы на самом деле притягиваются друг к другу.

Представляется весьма правдоподобным, что все частицы и античастицы имеют положительную инертную и пассивную гравитационные массы и что принцип эквивалентности справедлив по крайней мере с очень большой точностью. Активная гравитационная масса античастиц осталась пока неисследованной. Однако разделение с помощью гравитации стабильных систем материи и антиматерии в космологических масштабах оказывается не-

¹⁾ Подобное допущение было сделано Моррисоном и Голдом [10].

возможным, если предположить, что массы античастиц отрицательны; справедливость третьего закона Ньютона требовала бы, чтобы они были положительными.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. E ö t v ö s R., P e k á r D., F e k e t e E., *Ann. d. Phys.*, **68**, 11 (1922).
2. B o n d i H., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 423 (1957); статья 11 настоящего сборника.
3. D i c k e R. H., *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 355 (1957).
4. W a p s t r a A. H., N i j g h G. J., *Physica*, **21**, 796 (1955).
5. C o n d o n E. U., S h o r t l e y G. H., *Theory of Atomic Spectra*, Cambridge, 1953, p. 338, 339 (см. перевод с 1-го издания: Кондон Е., Шортли Г., Теория атомных спектров, ИЛ, 1948).
6. W h i t t a k e r E. T., *History of the Theories of Aether and Electricity*, London, 1953, p. 2, 180.
7. B l a t t J. M., W e i s s k o p f V. F., *Theoretical Nuclear Physics*, New York, 1952, p. 216 (см. перевод: Блатт Дж., Вайскопф В., Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
8. H o f s t a d t e r R., *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **7**, 309 (1957).
9. G r e e n A. E. S., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 569 (1958).
10. M o r r i s o n P., G o l d T., *Essays on Gravity*, New Boston, 1957, p. 45.
11. M o r r i s o n P., *Am. Journ. Phys.*, **26**, 358 (1958).
12. M a t z D., K a e m p f f e r F. A., *Bull. Am. Phys. Soc.*, **3**, 317 (1958).
13. S c h i f f L. I., *Phys. Rev. Lett.*, **1**, 254 (1958).
14. S c h w e b e r S., B e t h e H., d e H o f f m a n n F., *Mesons and Fields*, Evanston, 1955, p. 1, 299 (см. перевод: Швебер С., Бете Г., Гоффман Ф., Мезоны и поля, ИЛ, 1957).
15. B o n d i H., *Cosmology*, Cambridge, 1952, Ch. XII.

III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

17. НАБЛЮДЕНИЕ И ГЕНЕРАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Дж. Вебер

J. Weber, Phys. Rev., 117, 306—313 (1960)

Предлагаются методы для измерения тензора Римана и обнаружения гравитационных волн. При этом используется тот факт, что относительное движение точечных масс или деформаций в кристалле могут вызываться вторыми производными гравитационных полей. Напряжения в кристалле могут вызвать электрическую поляризацию вследствие пьезоэлектрического эффекта. Тогда, измеряя электрическую разность потенциалов, оказывается возможным найти определенные компоненты тензора Римана. Дается анализ пределов применимости этих методов. Предлагаются устройства для обнаружения гравитационного излучения.

Обсуждается вопрос о возможности генерации гравитационных волн в лабораторных условиях. Предлагаются новые методы, которые используют напряжения в кристалле, индуцируемые электрическим воздействием. Излучение, получаемое такими способами, приблизительно на семнадцать порядков больше, чем в случае вращающегося стержня той же длины, что и кристалл. При одинаковой частоте кристалл дает излучение, приблизительно на тридцать девять порядков превышающее излучение вращающегося стержня.

§ 1. Введение

Вопрос о гравитационном излучении всегда был центральным в общей теории относительности. Много лет назад Эйнштейн [1] и Эддингтон [2] изучили эту проблему и предсказали, что вращающийся стержень или двойная звезда должны излучать очень малое количество энергии. За последние четыре десятилетия появилось много теоретических работ по проблеме излучения.

В настоящее время представляется возможными осуществить некоторые экспериментальные работы в этом направлении. Будут рассмотрены два подхода к этой проб-

леме¹⁾. Во-первых, мы хотим обнаружить уже имеющееся гравитационное излучение, приходящее на Землю от Солнца или из областей вне солнечной системы. Во-вторых, было бы в высшей степени желательным, если бы мы смогли генерировать и обнаруживать это излучение в небольшой лаборатории.

Проекты устройств для обнаружения излучения связаны, по существу, с измерением фурье-образа тензора Римана. Они и будут рассмотрены в первую очередь. Далее предлагаются методы для генерации гравитационного излучения, которые могут дать излучение, на много порядков большее, чем в случае вращающегося стержня.

§ 2. Обнаружение гравитационного излучения

Представим себе, что мы имеем некоторую систему масс, которые могут взаимодействовать друг с другом. Мы исходим из принципа наименьшего действия

$$\delta I = \delta \left[- cm \int ds + W \right] = 0. \quad (1)$$

Здесь m — масса покоя, W — та часть функции действия, которая связана с силами, возникающими при движении данной массы относительно других масс, с которыми она взаимодействует. Интервал ds дается выражением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что δW имеет следующий вид:

$$- c \delta W = \int F_\mu \delta x^\mu ds. \quad (3)$$

Соотношение (3) определяет F_μ как четырехмерную силу. Уравнения Лагранжа — Эйлера, вытекающие из (1), дают [3]:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{F^\mu}{mc^2}. \quad (4)$$

¹⁾ Некоторые из обсуждаемых здесь результатов были сообщены автором в 1958 г. и в докладе на конференции по релятивистским теориям гравитации в Руайомоне—Париже в 1959 г.

Здесь $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ — символ Кристоффеля 2-го рода. Уравнение (4), будучи выражено через четырехмерный вектор скорости $p^{\mu} = dx^{\mu}/ds$, может быть записано в следующей форме:

$$\frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{dx^{\mu}}{ds} \right) = \frac{\delta p^{\mu}}{\delta s} = \frac{F^{\mu}}{mc^2}. \quad (5)$$

Символ $\delta/\delta s$ обозначает ковариантную производную по s .

Следуя в основном методу Синга и Шилда [4], получаем теперь из (5) некоторое уравнение, подобное уравнению геодезического отклонения. Мы вводим некоторый параметр v таким образом, что каждая мировая линия соответствует заданному значению v . Взяв ковариантную производную от (5) по v , имеем

$$\frac{\delta^2 p^{\mu}}{\delta v \delta s} = \frac{\delta F^{\mu}/m}{c^2 \delta v}. \quad (6)$$

Использование правила коммутации для ковариантного дифференцирования дает возможность представить (6) в следующей форме:

$$\frac{\delta^2 p^{\mu}}{\delta v \delta s} = \frac{\delta^2 p^{\mu}}{\delta s \delta v} - R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} p^{\alpha} p^{\beta} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v}. \quad (7)$$

В формуле (7) $\partial x^{\gamma}/\partial v$ является единичным вектором, нормальным к мировой линии, и 4-скорость p^{μ} — единичным вектором, касательным к ней. Вектор n^{γ} , определяемый соотношением

$$n^{\gamma} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v} dv \quad (8)$$

представляет собой бесконечно малый вектор, соединяющий точки с одинаковым значением s , лежащие на соседних мировых линиях, соответствующих значениям v , различающимся на dv . Ковариантная производная от dx^{γ}/dv по s может быть записана в следующих формах:

$$\frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial v} \right) = \frac{\delta}{\delta v} \left(\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial s} \right) = \frac{\delta p^{\gamma}}{\delta v}. \quad (9)$$

Используя соотношения (6) — (9), получаем следующее уравнение:

$$\frac{\delta^2 n^{\mu}}{\delta s^2} + R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} p^{\alpha} n^{\beta} p^{\gamma} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta F^{\mu}/m}{\delta v} dv. \quad (10)$$

§ 3. Квадрупольный масс-детектор

Чтобы обсудить детектор¹⁾, схематически изображенный на фиг. 1, представим себе две мировые линии, соответствующие двум массам. Пусть n^ν дается выражением

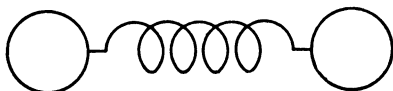
$$n^\nu = r^\nu + \xi^\nu, \quad (11)$$

причем r^ν определяется условиями:

$$\frac{\delta r^\nu}{\delta s} = 0 \text{ для всех } s, \quad (12)$$

$$r^\nu \rightarrow n^\nu$$

в предельном случае, когда внутреннее трение велико



Ф и г. 1. Гармонический осциллятор, возбуждаемый гравитационными волнами.

и все компоненты $R_{\alpha\beta\delta}^\mu = 0$. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2} + R_{\alpha\beta\gamma}^\mu p^\alpha p^\gamma [r^\beta + \xi^\beta] = \frac{f^\mu}{mc^2}. \quad (13)$$

Здесь мы обозначили через f^μ разности (негравитационных) сил, действующих на две массы. Под f^μ мы понимаем возвращающую силу $-k_{\alpha}^{\mu}\xi^{\alpha}$ и силу торможения $-cD_{\alpha}^{\mu}(\delta\xi^{\alpha}/\delta s)$. Наконец, k_{α}^{μ} и D_{α}^{μ} — некоторые тензоры, характеризующие пружину. Тогда (13) принимает вид

$$\frac{\delta^2 \xi^\mu}{\delta s^2} + \frac{D_{\alpha}^{\mu}}{cm} \delta \xi^{\alpha} + \frac{k_{\alpha}^{\mu} \xi^{\alpha}}{mc^2} = -R_{\alpha\beta\gamma}^{\mu} p^{\alpha} p^{\gamma} [r^{\beta} + \xi^{\beta}]. \quad (14)$$

Пусть время отсчитывается в направлении касательных к мировым линиям. Центр масс осциллятора находится в состоянии свободного падения. Используя систему координат

¹⁾ Устройство, подобное этому, было независимо предложено Г. Бонди на Руайомонской конференции (Франция) в 1959 г. (не опубликовано).

нат, в которой символы Кристоффеля обращаются в нуль, уравнение (14) можно записать в приближенной форме (предполагая, что $\xi \ll r$)

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{dt^2} + \frac{D_\alpha^\mu}{m} \frac{d \xi^\alpha}{dt} + \frac{k_\alpha^\mu \xi^\alpha}{m} = -c^2 R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha. \quad (15)$$

Из последнего уравнения мы видим, что роль движущей силы для гармонического осциллятора играет тензор Римана. Измерение амплитуды смещения или поглощаемой мощности дает возможность вычислить определенные компоненты тензора Римана¹⁾.

Предположим теперь, что имеются падающие синусоидальные (в приближении слабого поля) гравитационные волны с частотой ω . Будем использовать ортогональную сопутствующую систему координат, ось x^1 которой ориентирована вдоль осциллятора. Будем считать, что k_α^μ и D_α^μ имеют только одну компоненту $k_1^1 = k$ и $D_1^1 = D$. Производя фурье-преобразование (15), приходим к формуле

$$\xi^\mu(\omega) = \frac{-mc^2 R_{0\alpha 0}^\mu(\omega) r^\alpha}{-\omega^2 m + i\omega D \delta_1^\mu + k \delta_1^\mu}. \quad (16)$$

Выражение (16) имеет максимум при резонансе, когда $-\omega^2 m + k = 0$. Полное поглощение энергии $D = D_{\text{внешн.}} + D_{\text{внутр.}}$, причем $D_{\text{внутр.}}$ связано с необратимыми процессами в антенне. Мощность, которая может быть передана вспомогательному аппарату с $D_{\text{внешн.}}$, будет

$$\frac{1}{2} \omega^2 D_{\text{внешн.}} \xi^2 = \frac{m^2 c^4 (R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha)^2 D_{\text{внешн.}}}{2(D_{\text{внешн.}} + D_{\text{внутр.}})^2}, \quad (17)$$

¹⁾ Измерение компонент тензора Римана путем сравнения ускорений свободных пробных частиц было рассмотрено Пирани [5, 6]. В то время как свободные частицы удобны для некоторых мысленных экспериментов, на практике, при низких энергиях, приходится иметь дело с взаимодействующими частицами. Соотношение между электрическим напряжением в пьезоэлектрическом кристалле и некоторыми компонентами тензора Римана, которое обсуждается в следующем параграфе настоящей статьи, может служить основой для рассмотрения проблемы измерения в квантованной общей теории относительности. В принципе можно использовать кристалл очень малых размеров, так как акустические резонансные колебания имеют длину волны приблизительно на пять порядков меньшую, чем длина гравитационной волны, которая возбуждает эти колебания.

Выражение (17) имеет максимум, когда $D_{\text{внешн.}} = D_{\text{внутр.}}$ и максимальная мощность P_M равна

$$P_M = \frac{m^2 c^4 (R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha)^2}{8D_{\text{внутр.}}} \quad (18)$$

Допустим теперь, что синусоидальные гравитационные волны излучаются некоторым линейным осциллятором с квадрупольным распределением масс. Законы преобразования показывают, что в хорошем приближении $R_{0\alpha 0}^\mu$ имеют в системе отсчета, связанной с центром масс излучателя, тот же вид, что и в системе, связанной с центром масс детектора, при малых скоростях. Используя известное [7, 8] решение для линейного квадрупольного осциллятора, рассчитывается среднее квадратичное значение величины $R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha$ и затем усредняется по всем возможным ориентациям приемной антенны. Пусть t_{0r} — мощность, излучаемая линейным квадрупольным осциллятором, приходящаяся на единицу поверхности некоторой сферы при усреднении по последней. Тогда полная излучаемая мощность P дается формулой

$$P = 4\pi r^2 t_{0r} = \frac{GI_0^2 \omega^6}{60 \pi c^5}, \quad (19)$$

где I_0 — амплитуда тензора квадрупольного момента. Формула (19) и известные выражения для напряженностей полей дают в этом случае следующее выражение для среднего квадрата величины $R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha$ в направлении, перпендикулярном к оси квадрупольного излучателя:

$$[R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha]_{\text{ср.}}^2 = \frac{4\pi \beta^2 |r|^2 G}{c^5} t_{0r}. \quad (20)$$

В этой формуле β представляет собой волновой вектор гравитационной волны. Из (18) и (20) имеем

$$P_M = \frac{\pi m^2 \beta^2 |r|^2 G t_{0r}}{2cD_{\text{внутр.}}} \quad (21)$$

Рассмотрим теперь влияние внутренней диссипации $D_{\text{внутр.}}$. Предположим, во-первых, что в самой антенне не происходит необратимых процессов и что $D_{\text{внутр.}}$ вызвано исключительно радиационным торможением в детекторе. Изве-

стное решение для линейного квадрупольного осциллятора дает нам возможность рассчитать радиационное сопротивление детектора $D_{\text{внутр.}}$:

$$D_{\text{внутр.}} = \frac{2G\omega^4 m^2 |r|^2}{15c^5}. \quad (22)$$

Выражая (21) и (22) через длину волны λ , имеем для мощности $P_M^{(\text{рад.})}$, поглощаемой только за счет радиационного сопротивления:

$$P_M^{(\text{рад.})} = \frac{15\lambda^2}{16\pi} t_{0r}. \quad (23)$$

Смысл (23) состоит в том, что среднее сечение поглощения S_A для детектора, в котором затухание происходит только благодаря его собственному вторичному излучению, равно

$$S_A = \frac{15}{16\pi} \lambda^2. \quad (24)$$

Из формулы (24) видно, что при этих условиях среднее сечение поглощения грубо равно квадрату длины волны и не зависит от гравитационной постоянной. К сожалению, на практике условие, что внутреннее затухание вызывается только излучением, не может быть выполнено, так как другие необратимые явления в антенне на много порядков больше, чем радиационное затухание. Чтобы пояснить это, вычислим добротность Q , которая определяется отношением

$$Q = \frac{\omega \times (\text{Максимальная накопленная энергия})}{\text{Рассеянная мощность}}.$$

Добротность, связанная с радиационным торможением, которую мы обозначим через Q_R , имеет вид

$$Q_R = \frac{15c^5}{2G\omega^3 m |r|^2}. \quad (25)$$

Для антенны с разумным значением величины $mr^2 = 10 \text{ г} \cdot \text{см}^2$ для $\omega = 2\pi \cdot 10^7$ формула (25) дает $Q_R \sim 10^{34}$. Для реальной антенны можно ожидать, что $Q \sim 10^6$.

Следовательно, мы вынуждены иметь дело с системами, у которых внутреннее трение на много порядков больше, чем гравитационное радиационное трение; при

этих условиях средняя поглощаемая мощность уже не будет зависеть от вида антенны. Для некоторой ориентации антенны, обеспечивающей максимум приема,

$$(R_{0\alpha 0}^\mu r^\alpha)^2 = \frac{15\pi G\beta^2 |r|^2}{c^5} t_{0r}. \quad (26)$$

Из (26) и (18) приходим к следующему выражению для поглощаемой мощности P_A :

$$P_A = \frac{(15/8)\pi G m^2 \beta^2 |r|^2}{c D_{\text{внутр.}}} t_{0r} = \frac{(15/8)\pi G m Q_{\text{внутр.}} \beta^2 |r|^2}{\omega c} t_{0r}. \quad (27)$$

В этой формуле $Q_{\text{внутр.}}$ представляет собой добротность, связанную с внутренними необратимыми процессами, $Q_{\text{внутр.}} = \omega t / D_{\text{внутр.}}$. Соответствующее (27) сечение S имеет вид

$$S = \frac{(15/8)\pi G m Q_{\text{внутр.}} \beta^2 |r|^2}{\omega c}. \quad (28)$$

В случае непрерывного спектра поглощаемая мощность имеет вид

$$P_A = \frac{1}{T} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 c^4 D_{\text{внешн.}} \omega \omega' R_{0\alpha 0}^\mu(\omega) R_{0\beta 0}^\mu(\omega') r^\alpha r^\beta e^{i(\omega - \omega')t}}{2(-\omega^2 m + i\omega D + K)(-\omega'^2 m - i\omega' D + K)} d\omega d\omega' dt \approx \\ \approx \pi^2 G m c^{-1} \beta^2 |r|^2 t_{0r}(\omega_0). \quad (29)$$

Здесь $t_{0r}(\omega_0)$ представляет собой спектральную мощность t_{0r} вблизи резонансной частоты ω_0 .

Для дальнейшего обсуждения этих результатов рассмотрим возбуждение сплошной среды гравитационной волной. Это необходимо сделать, чтобы учесть взаимодействие массы пружины с волной и эффекты, связанные с конечной скоростью распространения упругих сил пружины.

§ 4. Взаимодействие кристалла с гравитационной волной

Исходным пунктом нашего рассмотрения является уравнение (10). Бесконечно малый вектор n^μ проведен из некоторой рассматриваемой точки в кристалле в соседнюю точку. Под m подразумевается масса, заключенная в бес-

конечно малом объеме, окружающем эту соседнюю точку. В правую часть уравнения (10) мы должны теперь ввести упругие и диссипативные силы. Представим n^μ в виде

$$n^\mu = r^\mu + \varepsilon_\alpha^\mu r^\alpha, \quad (30)$$

где r^μ определяется условиями

$$\frac{\delta r^\mu}{\delta s} = 0 \text{ для всех } s, \quad (31)$$

$$r^\mu \rightarrow n^\mu$$

в пределе большого внутреннего трения и плоского пространства. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$r^\mu \frac{\delta^2 \varepsilon_{\mu\nu}}{\delta s^2} + r^\mu B_\nu^\alpha \frac{\delta \varepsilon_{(\alpha\mu)}}{\delta s} + r^\mu Y^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \varepsilon_{(\mu\nu)}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} +$$

$$+ R_{\nu\alpha\mu\beta} [r^\mu + \varepsilon_\nu^\mu r^\nu] p^\alpha p^\beta = 0. \quad (32)$$

Здесь величина $\varepsilon_{(\mu\nu)}$ является симметричной частью $\varepsilon_{\mu\nu}$ и, следовательно, представляет собой тензор деформаций кристалла. Второй член характеризует внутреннее торможение, третий — упругие силы. Величины B_ν^α и $Y^{\alpha\beta}$ нормированы на единичную плотность массы. Как и прежде, p^α представляет собой единичный вектор, касательный к мировым линиям. Пользуясь произволом в определении r^μ , мы можем написать

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_{\mu\nu}}{\delta s^2} + B_\nu^\alpha \frac{\delta \varepsilon_{(\alpha\mu)}}{\delta s} + Y^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \varepsilon_{(\mu\nu)}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} +$$

$$+ R_{\nu\alpha\mu\beta} p^\alpha p^\beta + R_{\nu\alpha\gamma\beta} p^\alpha p^\beta \varepsilon_\mu^\gamma = 0. \quad (33)$$

Четвертый член в (33), очевидно, симметричен по индексам ν и μ . Последним членом в (33) можно, вообще говоря, пренебречь, так как он на много порядков меньше, чем предшествующий. Поэтому мы можем написать следующее уравнение для тензора деформаций:

$$\frac{\delta^2 \varepsilon_{(\mu\nu)}}{\delta s^2} + B_\nu^\alpha \frac{\delta \varepsilon_{(\alpha\mu)}}{\delta s} + Y^{\alpha\beta} \frac{\delta^2 \varepsilon_{(\mu\nu)}}{\delta x^\alpha \delta x^\beta} \approx -R_{\nu\alpha\mu\beta} p^\alpha p^\beta. \quad (33A)$$

Рассмотрим теперь уравнение (33A) для частного случая, когда возбуждается продольная волна в изотропной среде. При рассмотрении этого случая для волны, рас-

пространяющейся в направлении x^1 некоторой ортогональной системы координат (с направлением времени, касательным мировым линиям), можно воспользоваться следующей приближенной формой уравнения (33А):

$$y \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (x^1)^2} - \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - b \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c^2 \rho R_{010}^1. \quad (34)$$

Здесь ρ — плотность, y — соответствующий модуль, b — постоянная затухания. Предположим, что R_{010}^1 соответствует падающим синусоидальным волнам, так что

$$-c^2 R_{010}^1 = f \exp [i(\omega t - \beta_j x^j)]. \quad (35)$$

В этой формуле индекс j пробегает значения от 1 до 3. Пусть v_s — скорость звука $\sqrt{y/\rho}$, λ_s — длина звуковой волны; пусть, далее, $k_s = 2\pi/\lambda_s$, $\alpha = b/\rho v_s$, $\gamma = \alpha + ik_s$. Тогда, в хорошем приближении, решение уравнения (34) можно записать в форме

$$\varepsilon = [A \gamma \operatorname{ch} \gamma x^1 - f \omega^{-2} \exp(-i\beta_j x^j)] e^{i\omega t}. \quad (36)$$

Используя граничное условие, согласно которому ε обращается в нуль на концах, находим

$$A = - \frac{f \lambda_s \cos \beta_1 l}{2\pi \omega^2 (\alpha l \sin k_s l + \cos k_s l)}, \quad (37)$$

где l представляет собой половину длины кристалла. Первый член в (36) соответствует вкладу акустической волны, второй — деформациям, которые имели бы место, если бы вообще не было никаких внутренних сил¹⁾. Если кристалл обладает пьезоэлектрическими свойствами, то выражение (37) должно быть изменено.

Выражение (37) имеет максимумы, когда $k_s l$ равно нечетному числу $\pi/2$; однако из знаменателя видно, что наибольшим из них является первый, который соответствует случаю, когда длина кристалла равна половине длины акустической волны. Система, состоящая из двух масс

¹⁾ Интегрирование выражения (36) дает относительные смещения. Если этот результат применить к воздействиям гравитационных волн, взаимодействующих с Землей, то вклад первого члена из (36) оказывается чрезвычайно малым. Следовательно, поскольку речь идет о волнах, аппарат на земной поверхности ведет себя так, как если бы он свободно падал. Это обстоятельство является следствием того факта, что скорость звука намного меньше скорости света,

и пружины (фиг. 1), должна описываться уравнением типа (34), если расстояние между массами приближается к половине длины звуковой волны. Наибольшее значение, которое мы можем ожидать для сечения (28), реализуется, когда r равно половине длины акустической волны в пружине. Это — важное ограничение, так как скорость акустических волн приблизительно на пять порядков меньше скорости света, так что сечения, определяемые формулой (28), ограничены значениями на десять порядков меньшими, чем в том случае, если бы упругие силы пружины распространялись со скоростью света. Такое ограничение можно было бы преодолеть несколькими путями. Можно было бы использовать возвращающие силы, переносимые электрическим и магнитным полями и тем самым распространяющиеся со скоростью света. Можно использовать пьезоэлектрический эффект, в случае которого заряды на поверхностях кристалла, возникающие вследствие поляризации, могут обусловить некоторые компоненты напряжений, не изменяющие знака через каждую половину длины акустической волны.

В пьезоэлектрическом кристалле деформация приводит к электрической поляризации P_μ , которая дается формулой

$$P_\mu = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{E}_\mu^{\alpha\beta}.$$

Здесь $\mathcal{E}_\mu^{\alpha\beta}$ — тензор пьезоэлектрических напряжений. Электрическая поляризация вызывает электрическое поле в кристалле. Интеграл от этой напряженности поля дает некоторую разность потенциалов, достаточно большую, чтобы ее можно было зарегистрировать радиоприемником с низким уровнем шумов. Измерение этой разности потенциалов дает компоненты $R_{\alpha 0 \beta 0}$ тензора Римана, если использовать кристалл с соответствующими характеристиками.

Система напряжений в кристалле существенным образом изменяется, если он обладает пьезоэлектрическими свойствами. В этом случае в уравнение (33) необходимо ввести дополнительные выражения, содержащие пьезоэлектрические постоянные. Рассмотрим очень простой пример. Предположим, что возбуждается только одна продольная волна, которая распространяется со скоростью света в направлении x^1 . Предположим далее, что тол-

щина кристалла в направлении x^2 мала и что поверхности кристалла, перпендикулярные к оси x^2 , покрыты проводящим веществом. Тогда соотношения для пьезоэлектрических характеристик имеют вид (см., например, [9]):

$$\begin{aligned} -T &= \epsilon Y_0 + \frac{DH}{4\pi}, \\ E &= \frac{D}{K} + H\epsilon. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь T — напряжение, K — диэлектрическая проницаемость, ϵ — деформация, Y_0 — модуль упругости, E — напряженность электрического поля и D — электрическая индукция. Мы допускаем, что D и E имеют только компоненты в направлении x^2 . Наконец, H есть пьезоэлектрическая постоянная, связывающая электрическое напряжение внешней цепи с механическим напряжением в кристалле. Рассмотрение соотношений (38) и уравнений движения элементов массы кристалла приводит к волновому уравнению, подобному (34), где

$$y = Y_0 \left[1 - \frac{H^2 K}{4\pi} \right].$$

Так как поверхности кристалла, перпендикулярные оси x^2 , покрыты проводящим веществом, то $\partial E / \partial x^1 = 0$. На свободных концах кристалла $T = 0$. Если кристалл присоединен к некоторой внешней цепи с импедансом Z , то мы можем записать

$$-\int E dx^1 = Z \frac{\partial}{\partial t} \int D dx^1 dx^3.$$

Эти граничные условия и волновое уравнение (34) приводят к следующему результату:

$$\epsilon = [A_1 \gamma \operatorname{ch} \gamma x^1 - f \omega^{-2} \exp(-i\beta_j x^j)] e^{i\omega t}, \quad (36A)$$

где γ , β и f уже были определены ранее. Эта формула имеет тот же вид, что и (36), но теперь постоянная A_1 выражается через длину l_1 в направлении x^1 , длины l_2 и l_3 в направлениях x^2 и x^3 , а также емкость «зажатого»

кристалла $C/4\pi$ следующим образом:

$$A_1 = \frac{f}{\beta_1 \omega^2} \left[2\pi\beta_1 l_2 \left(1 + i\omega CZ \right) \left(Y_0 - \frac{H^2 K}{4\pi} \right) \cos \left(\frac{\beta_1 l_1}{2} \right) + \right. \\ \left. + iH^2 K^2 l_3 \omega Z \sin \left(\frac{\beta_1 l_1}{2} \right) \right] \times \\ \times \left\{ 2\pi l_2 \left(Y_0 - \frac{H^2 K}{4\pi} \right) \left[\gamma \operatorname{ch} \left(\frac{\gamma l_1}{2} \right) \right] (1 + i\omega CZ) + \right. \\ \left. + i\omega Z H^2 K^2 l_3 \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma l_1}{2} \right) \right\}^{-1}, \quad (39)$$

и электрическое напряжение, которое возникает на обкладках кристалла при наличии импеданса Z , имеет вид

$$V_Z = \frac{2i\omega Z H K l_3}{1 + i\omega CZ} \left[A_1 \operatorname{sh} \left(\frac{\gamma l_1}{2} \right) - \frac{f}{\beta_1 \omega^2} \sin \left(\frac{\beta_1 l_1}{2} \right) \right]. \quad (40)$$

Законы электрических цепей дают теперь возможность непосредственно рассчитать мощность, которую детектор может передать радиоприемнику. Для кристалла с константами, подобными поляризованному титанату бария, на который падают синусоидальные гравитационные волны, мощность, которая может быть передана приемнику, приближенно имеет вид:

$$P_A \approx 10^{-19} \omega^{-1} V Q_t t_{or} \text{ эрг/сек.} \quad (41)$$

В этой формуле, как и прежде, ω — угловая частота, t_{or} — поток мощности падающей гравитационной волны в эргах на 1 см^2 в 1 сек , V — объем кристалла, Q_t представляет собой добротность Q кристалла и присоединенной электрической цепи. Для кристалла объемом 1 м^3 при $\omega \sim 10^3$ сечение поглощения оказывается $\sim 10^{-10} \text{ см}^2$. Хотя это и малая величина, она, по-видимому, достаточна, чтобы можно было приступить к некоторым экспериментам. В случае непрерывного спектра гравитационного излучения, создающего поток гравитационной энергии со спектральной плотностью $t_{or}(\omega)$, поглощаемая мощность будет

$$P_A \approx 10^{-19} V t_{or}(\omega_0) \text{ эрг/сек.} \quad (42)$$

Формулы (41) и (42) могут служить основой для обсуждения чувствительности. Как известно в микроволновой спектроскопии, все ложные эффекты, отличные от

случайных флуктуаций, могут быть распознаны. Мы сделаем здесь такое же допущение. Случайные флуктуации частью имеют тепловое происхождение, частью являются результатом процессов спонтанного излучения. Для синхронного обнаружения синусоидальных волн выходная мощность детектора должна превышать мощность шумов P_{N1} [10], которая дается выражением

$$P_{N1} = \frac{N\hbar\omega}{8\tau_A [e^{\hbar\omega/kT} - 1]}.$$

Здесь k — константа Больцмана, T — температура гравитационной антенны, N — шумовой коэффициент приемника, для которого можно предполагать, что он больше 1 и меньше 25, τ_A — время, по которому проведено усреднение. Для исследования излучения с непрерывным спектром требуется иное выражение. В этом случае мощность, поставляемая детектором, должна превышать [10]

$$P_{N2} = \left(\frac{\pi^3\omega}{64\tau_A Q} \right)^{1/2} \frac{N\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Планируются эксперименты для обнаружения гравитационного излучения, приходящего из межзвездного пространства¹⁾, основывающиеся на описанных здесь методах²⁾.

¹⁾ Уилер отметил [11], что плотность гравитационного излучения могла бы быть $\sim 10^{-29} - 10^{-28}$ $г/см^3$ ($\sim 10^3$ $эрг/см^2 \cdot сек$), оставаясь в согласии с имеющимися сведениями относительно скорости расширения Вселенной. Он и М. Шварцшильд (частное сообщение) впоследствии отметили, что если это излучение было испущено благодаря тем же процессам, которые вызвали неравномерное распределение вещества в форме галактик, то оно характеризовалось бы в каждую эпоху (и, следовательно, также в нашу эпоху) той же шкалой длин, порядка 10^{24} $см$ в настоящее время (период колебания 10^6 лет).

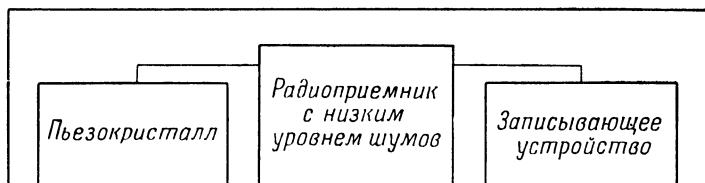
$$\left(\frac{\delta g_{\text{типич.}}}{\delta x} \right)^2 \sim \rho G c^{-2} \sim 0,2 \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2},$$

$$\delta g_{\text{типич.}} \sim (0,5 \cdot 10^{-28} \text{ см}^{-1}) \cdot (10^{24} \text{ см}) \sim 10^{-4}.$$

Эти величины, по-видимому, не являются слишком малыми, но меняются слишком медленно, чтобы их измерить рассматриваемыми методами.

²⁾ Экспериментальные исследования в этом направлении начались недавно. Эти исследования ведут д-р Д. Зипой и Р. Форвард в сотрудничестве с автором. Пьезоэлектрический эффект дает повышение чувствительности, если использовать массу с размерами порядка многих длин акустических волн. При низких частотах это не существенно,

Для первого метода сама Земля представляет собой блок вещества, служащий в качестве антенны. Нормальные гармоники Земли (приблизительно одно колебание в 1 час) возбуждаются падающими гравитационными волнами. Этот метод ограничен относительно малым Q для Земли и высокой температурой шумов ее ядра.

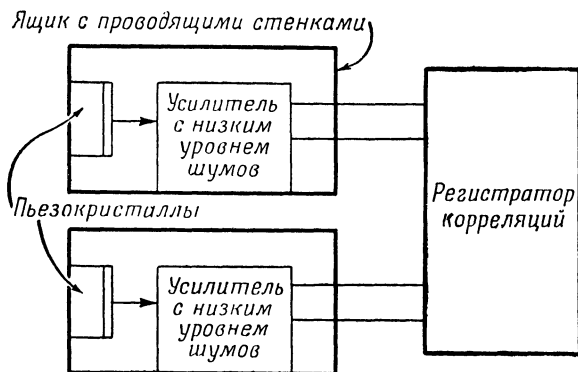


Ф и г. 2. Схема пьезоэлектрического кристалла для обнаружения гравитационных волн.

Во втором методе, в котором используются деформации, возникающие в кристалле, применяется схема, изображенная на фиг. 2. Проектируется исследование при частотах $\sim 10^3$ герц. Прибор вращается вместе с Землей. Если излучение приходит с некоторого определенного направления, то оно может быть обнаружено по ежесуточному изменению в уровне шумов на выходе усилителя. Устройство, изображенное на фиг. 3, не требует вращения. Если падает излучение, то оно приведет к корреляции на выходе установки. Все источники внутренних флуктуаций будут некоррелированы. В качестве усилителей с низким уровнем шумов можно использовать мазеры (см., например, обзор [12]).

Проведенное здесь рассмотрение предсказывает, что можно было бы обнаружить потоки гравитационной энергии со спектральной плотностью $t_{0r}(\omega) \sim 10^{-4}$ эрг/см²·сек.

так как блок, имеющий длину в половину длины акустической волны, уже достаточно велик и не может использоваться как пьезоэлектрический кристалл. При помощи схем, изображенных на фиг. 2 и 3, рассматривается возбуждение резонансных акустических колебаний в металлическом блоке в соответствии с выражениями (36) и (37). Движение концов кристалла фиксируется по изменению емкости по отношению к некоторому расположенному поблизости электроду.



Ф и г. 3. Схема обнаружения гравитационных волн методом перекрестной корреляции.

§ 5. Вращения, вызываемые гравитационным излучением

Дирак ¹⁾ высказал предположение, что астрономические аномалии могут быть связаны с воздействиями гравитационного излучения. Чтобы обсудить это соображение и рассмотреть обнаружение гравитационного излучения посредством наблюдения вращений, вернемся к уравнению (5). Пусть группа масс находится вблизи начала пространственных координат некоторой координатной системы и пусть бесконечно малый вектор r^μ является радиус-вектором одной из этих масс. Пусть $v_{\mu\alpha\nu\kappa}$ — плотность тензора Леви-Чивиты. Умножая (5) на $v_{\mu\alpha\nu\kappa}r^\beta$, получаем

$$v_{\mu\alpha\nu\kappa}r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^a}{ds} = \frac{d}{ds} v_{\mu\alpha\nu\kappa}r^\beta \frac{dx^a}{ds} + v_{\mu\alpha\nu\kappa}r^\beta \Gamma_{\gamma\delta}^a \rho^\gamma \rho^\delta = \frac{v_{\mu\alpha\nu\kappa}r^\beta F^a}{mc^2}. \quad (43)$$

Здесь снова ρ^δ — единичный вектор, касательный к мировой линии; во втором члене в (43) мы использовали тождество $v_{\mu\alpha\nu\kappa}\rho^\alpha\rho^\beta = 0$. Пусть мировая линия начала пространственных координат является траекторией, для которой символы Кристоффеля обращаются в нуль. Тогда (43)

¹⁾ Р. А. М. Dirac, частное сообщение.

можно записать в виде

$$v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} + v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha}{\partial x^\omega} p^\gamma p^\delta r^\omega. \quad (44)$$

В этих координатах $R_{\gamma\omega\delta}^\alpha = \partial \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha / \partial x^\omega$, так что (44) принимает вид

$$v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{\delta}{\delta s} \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{d}{ds} v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} - v_{\mu\alpha\beta\kappa} R_{\gamma\omega\delta}^\beta p^\gamma p^\delta r^\alpha r^\omega. \quad (45)$$

Используя теперь (43) и (45) и суммируя по всем массам, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Массы}} \frac{d}{ds} v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} &= \sum_{\text{Массы}} v_{\mu\alpha\beta\kappa} R_{\gamma\omega\delta}^\beta p^\gamma p^\delta r^\alpha r^\omega - \\ &- \sum_{\text{Массы}} \frac{v_{\mu\alpha\beta\kappa} r^\alpha F^\beta}{mc^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Это соотношение представляет собой обобщение соотношения между моментом сил и изменением момента количества движения. Если не действуют никакие негравитационные силы и если ось времени направлена вдоль мировых линий, то (46) примет следующий вид:

$$\sum_{\text{Массы}} \frac{d}{ds} v_{\mu\alpha\beta 0} r^\beta \frac{dx^\alpha}{ds} = \sum_{\text{Массы}} v_{\mu\alpha\beta 0} R_{0\omega 0}^\beta r^\alpha r^\omega. \quad (47)$$

Применим (47) к расчету случайных флуктуаций в периоде обращения Земли, вызываемых падающим гравитационным излучением, обладающим непрерывным спектром. При этих условиях прямой расчет приводит к следующему результату:

$$\frac{\langle I^2 \rangle_{\text{ср.}}}{I_a^2} \approx 25\pi G t_{0r} \omega^{-2} c^{-3}. \quad (48)$$

Здесь $\langle I^2 \rangle_{\text{ср.}}$ — средняя квадратичная флуктуация момента Земли, I_a — момент вращения, t_{0r} — полный поток гравитационных волн (в $\text{эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{сек}$), причем предполагается, что его фурье-образ сконцентрирован около нулевой частоты; ω — угловая частота вращения. Если мы совершенно произвольно предположим, что все аномалии во вращении Земли вызваны падающими гравитационными волнами,

то расчеты дают для t_{or} величину $\sim 5 \cdot 10^8$ эрг/см²·сек. Отсюда ясно, что вращение Земли нельзя использовать как детектор во всяком случае до тех пор, пока не будет уменьшена величина аномалии. Другие астрономические аномалии ведут к еще большим значениям.

§ 6. Генерация гравитационных волн

Было бы весьма желательным генерировать гравитационные волны с энергией, достаточной для их обнаружения в лаборатории. Можно было бы осуществить ряд важных экспериментов.

Для вращающегося стержня Эйнштейн [1] и позже Эддингтон [2] дали следующую формулу для излучаемой мощности P_R :

$$P_R = 1,73 \cdot 10^{-59} I_m^2 \omega^6 \text{ эрг/сек.} \quad (49)$$

Здесь I_m — момент инерции и ω — угловая частота. Частоту ω можно увеличивать до тех пор, пока стержень не разрушится. Если мы запишем максимальное значение ω через растягивающее усилие и выразим результат через модуль упругости и напряжение, то получим следующую формулу для длины l :

$$l = \frac{\lambda_s \sqrt{2\delta}}{\pi}. \quad (50)$$

В этой формуле δ — максимально допустимое напряжение для данного материала и λ_s — длина звуковой волны в стержне при угловой частоте, соответствующей разрыву стержня. Из формулы (50) следует, что длина гравитационных волн, которые могут излучаться стержнем, по крайней мере в 10^6 раз больше длины стержня. Момент инерции также ограничен значениями, меньшими величины

$$\frac{10^{-3} \rho \lambda_s^5 \delta^{5/2}}{12\pi^6}, \quad (51)$$

где ρ — плотность; при этом рассматривается достаточно тонкий стержень, длина которого на порядок больше поперечных размеров. При учете условия (51) из формулы (49)

получаем

$$P_R < 4 \cdot 10^{-63} \varrho^2 v_s^{10} \delta^5 \omega^{-4} \text{ эрг/сек.} \quad (52)$$

Неравенство (52) показывает, что вопреки тому, что, казалось бы, следовало ожидать по формуле (49), вращение с меньшими частотами, но с большими стержнями дает большее излучение, чем вращение с высокой частотой стержней малых размеров. Так, стержень длиной 1 м может излучать около 10^{-30} эрг/сек.

Уравнения поля общей теории относительности подсказывают другой метод генерации гравитационных волн. Источником гравитационного поля является тензор энергии-натяжений. В пьезоэлектрическом кристалле можно создавать зависящие от времени напряжения, которые вызывают излучение. Для нашего рассмотрения вполне достаточны решения для случая слабого поля, так как ожидаемые отклонения метрики от метрики Минковского, вероятно, порядка 10^{-30} . Эти решения в случае слабого поля имеют вид

$$\psi_\mu^\nu = h_\mu^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu^\nu h = \frac{4G}{c^4} \int r^{-1} (T_\mu^\nu)_{\text{запазд.}} d^3x. \quad (53)$$

В формуле (53) T_μ^ν — тензор энергии-натяжений, r — расстояние от источника до наблюдателя и h_μ^ν определены соотношением

$$g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu + h_\mu^\nu,$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — метрический тензор Минковского. Координатные условия, при которых получено (53), имеют вид $\psi_{\mu,\nu}^\nu = 0$.

Чтобы применить формулу (53) к задаче излучения кристаллом, допустим прежде всего, что используется акустический резонанс и что возбуждаются одномерные волны сжатия. В этом случае компоненты T_μ^ν имеют вид:

$$T_0^0 \approx -\varrho c^2 \left[1 - \frac{V_p}{v_s} \cos \omega t \cos(k_s x^3) \right] \times \\ \times [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)], \quad (54)$$

$$T_0^3 = \varrho V_p c \sin \omega t \sin k_s x^3 [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - \\ - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)], \quad (55)$$

$$T_3^3 = -\varrho V_p v_s \cos \omega t \cos k_s x^3 [1 - U(x^3 - l - A_0 \cos \omega t) - \\ - U(-x^3 - l - A_0 \cos \omega t)]. \quad (56)$$

В этих выражениях предполагается, что волны распространяются в направлении x^3 ; V_p — скорость частицы, v_s — скорость звука, U — ступенчатая функция, определенная следующим образом:

$$U(x) = 0 \text{ при } x < 0,$$

$$U(x) = 1 \text{ при } x > 0.$$

При этом A_0 является амплитудой колебания свободного конца. Использование этих выражений в уравнении (46) и применение псевдотензора энергии-натяжений в форме Эйнштейна дает возможность рассчитать полную мощность излучения. Максимальное значение A_0 определяется максимально допустимой деформацией, после которой наступает разрыв. Максимальная деформация соответствует значению A_0 , примерно на четыре порядка меньшему акустической длины волны λ_s .

Для кварца при акустическом резонансе приходим к следующему результату:

$$P < \left[\frac{16}{15} G Q^2 S^2 v_s \left(\frac{v_s}{c} \right)^5 \cdot 10^{-6} \right]_{\omega} + \\ + \left[\frac{\pi}{15} G Q^2 S^2 n_{\lambda}^2 v_s \left(\frac{v_s}{c} \right)^5 \cdot 10^{-12} \right]_{2\omega} \text{ эрг/сек.} \quad (57)$$

Здесь S означает площадь поперечного сечения, выражение с индексом ω внизу дает мощность излучения с основной частотой, второе же выражение дает мощность, излучаемую с вдвое большей частотой. Резонатор должен быть кратным n_{λ} половине длины акустической волны. Первый член в формуле (57) не зависит от n_{λ} . Это имеет место потому, что при $n_{\lambda} > 1$ кристалл представляет собой по существу совокупность электрических квадрупольей, где каждый данный квадруполь смещен по фазе по отношению к своим ближайшим соседям. Результирующее излучение с основной частотой приблизительно соответствует излучению отдельного квадруполя. Каждый полуволновый участок имеет эквивалентный момент $\sim M A_0 \lambda_s / 2\pi$, где M — масса отдельного полуволнового (акустического) резонатора; A_0 и λ_s определены соотношениями (54) — (56).

Если в области, линейные размеры которой меньше половины длины гравитационной волны, расположено большое число отдельных резонаторов, то излучаемая мощность будет пропорциональна квадрату полного числа кристаллов. Зависимость (57) от частоты осуществляется посредством требования, чтобы каждый резонатор был кратным половине длины акустической волны. Чтобы излучать мощность 10^{-15} эрг/сек с основной частотой, понадобилось бы 10^6 кристаллов, причем каждый с толщиной, равной половине длины акустической волны, и с площадью поперечного сечения 50 см^2 . Понадобилось бы сложное устройство, регулирующее фазы, чтобы надлежащим образом управлять системой.

По-видимому, более целесообразно исключить резонанс в акустических колебаниях и породить, используя пьезоэлектрический эффект или электрострикцию, компоненты механического напряжения, которые не меняют знака через каждую половину длины акустической волны. Чтобы убедиться в возможности этого, необходимо лишь исследовать решение для компоненты T_{11} натяжения в кристалле под действием продольных колебаний, когда кристалл расположен так, что его наибольшие грани с проводящим покрытием перпендикулярны к оси x^3 [13]. Для простоты предполагается, что толщина кристалла мала и он возбуждается внешним электрическим полем, параллельным оси x^3 . Тогда компонента T_{11} имеет вид

$$T_{11} = (d_{131}E_3 \sin \omega t) \left[\frac{\sin\left(\frac{\omega(L-x)}{v_s}\right) + \sin\left(\frac{\omega x}{v_s}\right) - \sin\left(\frac{\omega L}{v_s}\right)}{\sin\left(\frac{\omega L}{v}\right)} \right], \quad (58)$$

где d_{ijk} — тензор, связывающий механическое напряжение и электрическое поле, E_3 — электрическое поле, L — полная длина. При резонансе $(\omega L/v_s) = \pi$ и в (58) должны быть учтены потери с помощью гиперболической функции в знаменателе. Однако вне резонанса, например при $\omega L/v_s = \pi/2$, (58) принимает вид

$$T_{11} = d_{131}E_3 \left[\cos\left(\frac{\omega x}{v}\right) + \sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) - 1 \right] \sin \omega t. \quad (59)$$

Из (59) видно, что величина T_{11} содержит член $-d_{131}E_3 \sin \omega t$, который не меняет знака через каждую половину длины акустической волны. Отдельный большой кристалл, возбуждаемый подобным образом, дает тогда проинтегрированные по объему компоненты напряжения, имеющие большую величину. Следует ожидать, что излучаемая мощность будет равна

$$P_R \approx \frac{GP_{\text{макс}}^2 \lambda^4 \pi^2}{120c^3}. \quad (60)$$

Здесь $P_{\text{макс}}$ — эффективное растягивающее усилие, а λ — снова длина гравитационной волны.

Волны длиной 1 м могли бы излучаться кристаллом со стороной, равной 50 см. Каждый кристалл, если его возбуждать как раз вблизи предела разрушения, будет излучать $\sim 10^{-13}$ эрг/сек, если для $P_{\text{макс}}$ принять его значение, вычисленное в статическом случае.

Монокристаллические детекторы рассмотренного ранее типа могут обнаружить мощность около 10^{-3} эрг/сек при этих длинах волн. Поэтому пока еще существует большой разрыв между тем, что может быть генерировано, и тем, что может быть обнаружено в небольшой лаборатории. Сложные регистрирующие и генерирующие устройства могут уменьшить этот разрыв. Для кристаллов, возбуждаемых вблизи предела разрушения, понадобилось бы большое количество электрической энергии (примерно 10^8 вт для кристалла со стороной 50 см). Эта мощность могла бы быть значительно уменьшена, если бы оказалось возможным проводить эксперименты при низких температурах. Можно также надеяться, что применение высоких частот при низкой температуре сможет поднять эффективные растягивающие усилия. Все это нуждается в тщательном экспериментальном исследовании. Если цифры, приведенные ранее, не могут быть улучшены, то потребовался бы кристалл со стороной приблизительно в сотню метров и большая детектирующая система, чтобы генерировать и обнаружить гравитационное излучение. Мы не предлагаем делать это, но рекомендуем изучение некоторых свойств кристаллов при низких температурах с целью исследования возможных усовершенствований.

§ 7. Заключение

Предложенные детекторы достаточно удовлетворительны для исследования межзвездного гравитационного излучения. Необходимо дальнейшее исследование, чтобы генерировать и обнаруживать гравитационные волны в лаборатории. Если мы сравним кристалл, который возбуждается, как описано выше, с вращающимся стержнем тех же самых линейных размеров, то найдем, что излучение кристалла на семнадцать порядков больше и частота, излучаемая кристаллом, больше приблизительно в миллион раз. Если и стержень, и кристалл излучают одну и ту же частоту, то излучение кристалла приблизительно на тридцать девять порядков больше, чем излучение стержня.

Автор благодарит за полезную критику Ф. А. Е. Пирани, П. Дж. Бергмана и Дж. А. Уилера, а также Р. Г. Дике за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Berlin. Sitzungsber., 1916, S. 688; 1918, S. 154.
2. Eddington A. S., Proc. Roy. Soc., A102, 268 (1923).
3. Pauli W., Theory of Relativity, New York, 1958 (см. перевод со 2-го издания: Паули В., Теория относительности, М.—Л., 1947).
4. Synge J. L., Schild A., Tensor Calculus, Toronto, 1952, Ch. 3. Pirani F. A. E., Helv. Phys. Acta, Suppl. IV, p. 198.
5. Pirani F. A. E., Proceedings of Chapel Hill Conference on the Role of Gravitation in Physics, 1957, p. 61.
6. Pirani F. A. E., Acta Phys. Polon., XV, 6, 389 (1956).
7. Rosen N., Shamir H., Rev. Mod. Phys., 29, 429 (1957).
8. Bonnor W. B., Phil. Trans. Roy. Soc., A251, 233 (1959).
9. Mason W. P., Electromechanical Transducers and Wave Filters, Princeton, 1948.
10. Dicke R. H., Rev. Sci. Instr., 17, 268 (1946).
11. Wheeler J. A., Onzième Conseil de l'Institut International de Physique Solvay, La Structure et l'Evolution de l'Univers, Brussels, 1958, p. 112.
12. Weber J., Rev. Mod. Phys., 31, 681 (1959).
13. Mason W. P., Piezoelectric Crystals and Their Applications to Ultrasonics, Princeton, 1950, p. 64 (см. перевод: Мэзон У., Пьезоэлектрические кристаллы и их применение к ультразвуку, ИЛ, 1952).

18. ГРАВИТАЦИОННОЕ СМЕЩЕНИЕ В ЯДЕРНОМ РЕЗОНАНСЕ

Р. Паунд и Г. Ребка

R. Pound and G. A. Rebka, Phys. Rev. Lett., 3, 439—440 (1959)

Нет необходимости доказывать, сколь желательной является экспериментальная проверка того обстоятельства, что частоты электромагнитного излучения атомов чувствительны к гравитационному потенциалу в точке, где находится излучающая система. Некоторые варианты теории относительности предсказывают линейную зависимость частоты от гравитационного потенциала. Предложен ряд экспериментов с целью сравнения хода «часов», реализуемых внутриатомными или молекулярными переходами и помещенных на искусственном спутнике, с ходом аналогичных «часов», расположенных на поверхности Земли. Частота ν_h (и, следовательно, ход времени) на высоте h связана с соответствующей частотой ν_0 на земной поверхности соотношением

$$\Delta\nu_i = \nu_h - \nu_0 = \nu_0 \frac{gh}{c^2(1+h/R)} \approx \nu_0 h \cdot 1,09 \cdot 10^{-18},$$

где R и h — соответственно радиус Земли и высота (в см). От часов требуется исключительно высокая точность даже для высот, доступных для искусственных спутников. Хотя имеется ряд обнадеживающих способов получения необходимой стабильности частоты, дело обстоит бы проще, если бы удалось найти способ осуществить эксперимент между фиксированными точками на земной поверхности. В частности, если бы оказалось возможным получить степень точности, позволяющую измерять смещение между точками, разделенными по высоте на 1—10 км, можно было бы осуществить эксперимент между вершиной

и подножьем горы, в угольной шахте или в буровой скважине.

Недавно Мёссбауэр [1] открыл новый эффект излучения и рассеяния γ -лучей ядрами в твердых телах. Определенная доля f γ -лучей, испускаемых ядрами атомов твердого тела, излучается практически без отдачи; при этом импульс отдачи принимает на себя не индивидуальное ядро, а кристаллическая решетка как целое, в результате чего имеет место пренебрежимо малое доплеровское смещение. Такие γ -лучи находятся в резонансе с ядрами, аналогичным образом связанными в решетке, и с рассеянием связана та же доля f сечения электромагнитного резонанса

$$\sigma_R = 2\pi\lambda^2 \left(\frac{2I_e + 1}{2I_g + 1} \right) \frac{1}{1 + \alpha},$$

где I_e и I_g — спины соответственно возбужденного и основного состояний и α — коэффициент внутренней конверсии. Расчеты, опирающиеся на дебаевскую модель колебаний решетки кристалла, дают при температурах T , значительно меньших дебаевской температуры Θ_D , следующее выражение для f :

$$f = \exp \left\{ -\frac{3}{2} \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2 k_B \Theta_D} \left[1 + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi T}{\Theta_D} \right)^2 \right] \right\},$$

где E_γ — энергия γ -кванта, M — масса ядра, k_B — постоянная Больцмана. Множитель $E_\gamma^2 / 2Mc^2 k_B \Theta_D$ представляет собой отношение энергии отдачи, которая имела бы место для свободных ядер к $k_B \Theta_D$. Для γ -лучей с энергией около 129 кэв, использованных Мёссбауэром, величина f очень мала даже при абсолютном нуле. Наиболее ярким доказательством существования этого эффекта является тот факт, что ослабление пучка γ -лучей $\text{I}r^{101}$ с энергией 129 кэв в результате их прохождения через иридиевый поглотитель уменьшается, если источник движется. Было найдено, что скорость, необходимая для того, чтобы уменьшить ту часть ослабления пучка, которая вызвана резонансным рассеянием, до половины своей максимальной величины, равна приблизительно 1,5 см/сек. Отсюда для времени жизни возбужденного состояния получается значение 0,1 мксек. Этот эксперимент был повторен в других лабораториях, причем при гелиевых температу-

рах [2, 3]. Сообщалось об измерениях на изотопе W^{182} , для которого по доплеровской ширине резонанса было вычислено время жизни в 0,6 мксек. Это значение составляет половину обычно принимаемого времени жизни, измеряемого методом запаздывающих совпадений. Не ясно, связано ли это расхождение с принципиальными возможностями экспериментальной методики или это, как предполагают авторы, связано в значительной степени с несовершенством конструкции аппаратуры, усугубляемой сложным спектром γ -лучей Ta^{182} .

Конечно, можно было бы, как указывалось, ожидать эффекты, обусловленные сверхтонкой структурой в этих спектрах, если времена жизни достаточно велики, чтобы эти эффекты были ощутимы. Все эти эффекты, рассмотренные в связи с угловой корреляцией в каскаде γ -лучей, должны оказывать определенное влияние. Например, желательно использовать источник, который в момент испускания соответствующих γ -лучей с большой вероятностью находился бы в кристаллической решетке в нормальном положении и в основном электронном состоянии. Могли бы иметь место важные вторичные эффекты вследствие β -распада, предшествующего испусканию γ -лучей высокой энергии или захвата электрона, так же как уширение за счет дефектов в кристаллической решетке или короткого времени спин-решеточной релаксации.

Однако, если даже дальнейшее развитие экспериментальной техники и не даст возможности получить более узкие резонансы, уже наблюдаемые имеют относительные ширины по частоте, значительно меньшие ширины всех других линий, предлагаемых в качестве «атомных часов».

Если рассеяние уменьшается до половины своей максимальной величины в результате относительного движения источника и рассеивателя со скоростью v , то величина Q , представляющая собой отношение частоты к полной ширине на половине высоты наблюдаемого резонансного максимума, будет $c/2v$. В экспериментах Мёссбауэра Q приблизительно равно $1 \cdot 10^{10}$, а в случае эксперимента с W^{182} — $7 \cdot 10^{10}$. В общем случае $Q = 1,10 \cdot E_{\gamma} (Mэв) \cdot \tau_{1/2} (мксек) \cdot 10^{12}$.

Измерение гравитационного красного смещения можно осуществить путем исследования рассеяния γ -лучей, когда источник и рассеиватель, расположенные на разных высо-

тах, отличающихся на h , дадут при наблюдении относительной скорости максимальное рассеяние. Чтобы предсказываемое смещение было равно (полной) полуширине линии, необходима разность высот

$$h_{1/2} = \left[\frac{4,18}{E_{\gamma} (\text{Мэв}) \tau_{1/2} (\text{м.мксек})} \right] \text{ км.}$$

Следовательно, в случае ширины, которая приводится для W^{182} , потребовалась бы высота 66 км.

Это наводит на мысль о том, какие возможности открылись бы, если бы удалось найти источники γ -лучей с меньшей шириной. Например, для ядра Fe^{57} , у которого $E_{\gamma} = 0,0144 \text{ Мэв}$ и $\tau_{1/2} = 100 \text{ м.мксек}$, потребовалась бы разность высот лишь в 2,9 км, чтобы получить смещение, соответствующее естественной ширине. Другим примером мог бы служить Zn^{67} , возбужденный уровень которого с энергией 0,093 Мэв имеет время жизни 9400 м.мксек. Чтобы получить естественную ширину для этого ядра, $h_{1/2}$ должно составлять 4,74 м. Эти возможности значительно выходят за рамки того, чем мы располагаем в настоящее время. Сейчас мы предпринимаем изучение этих и некоторых других изотопов в различных условиях с целью выделить изотоп, пригодный для гравитационного эксперимента. Помимо всего прочего, было бы желательно совпадение сверхтонкой структуры у источников и рассеивателей или ее отсутствие у тех и других.

Очевидно, одна из трудностей, связанных с большим расстоянием между источником и рассеивателем, связана с тем обстоятельством, что интенсивность убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Как следствие участия большого числа тождественных ядер в индивидуальном процессе рассеяния без отдачи, можно ожидать возникновение интенсивной брэгговской дифракции от тонких кристаллов. Тем самым имеется возможность некоторой фокусировки при помощи изогнутого кристалла. Кроме того, можно использовать брэгговское отражение от тонких кристаллов, чтобы отделить γ -лучи, испущенные без отдачи от всех прочих γ -лучей. Этим путем можно учесть фон γ -лучей.

Полное внешнее отражение γ -лучей низкой энергии при крайне малых углах падения открывает возможность своего

рода «световой трубы», что увеличит эффективный телесный угол, под которым виден рассеиватель из источника. В пределах, ограниченных малым углом полного отражения, эта труба не обязательно должна быть оптически прямолинейной¹⁾.

Согласно фундаментальной идее, на которой основываются эксперименты такого рода, нежелательные доплеровские смещения рассматриваются лишь как результат тепловых, сейсмических и подобных им возмущений. Чтобы скомпенсировать предсказываемое гравитационное смещение, потребуется относительное изменение в разности высот в $3,27 \cdot 10^{-8}$ в 1 сек.

Возмущающие влияния должны быть значительно меньшими этого значения, впрочем, это справедливо и для других методов измерения красного смещения. Можно было бы отделить относительное движение от красного смещения путем одновременного наблюдения пучков, распространяющихся в противоположных направлениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mössbauer B. L., Zs. f. Phys., 151, 124 (1958); Naturwiss., 45, 538 (1958); Zs. Naturforsch., 14a, 211 (1959).
2. Craig, Dash, McQuire, Nagle, Reisswig, Phys. Rev. Lett., 3, 221 (1959).
3. Lee, Meyer-Schutzmeister, Schiffer, Vincent, Phys. Rev. Lett., 3, 223 (1959).

¹⁾ Мы признательны Е. Парселлу за эту идею.

19. ЭФФЕКТИВНЫЙ ВЕС ФОТОНА

Р. Паунд и Г. Ребка

R. Pound and G. Rebka, Phys. Rev. Lett., 4, 337—340 (1960)

В осуществление наших предложений, сделанных несколько месяцев тому назад [1], нами измерено предсказанное впервые Эйнштейном [2] влияние гравитационного потенциала на воспринимаемую частоту электромагнитного излучения. При этом использовался метод резонансного рассеяния почти монохроматических γ -лучей, испускаемых и поглощаемых в твердых телах, когда эффект отдачи практически отсутствует, как было указано Мессбауэром [3].

Мы уже сообщили [4] результаты детального изучения формы и ширины линии, получаемой при комнатной температуре для уровня Fe^{57} с энергией 14,4 кэв и $\tau_{1,2}=0,1$ мксек. Основное внимание было уделено нахождению условий, необходимых для получения узкой линии. Нами установлено, что линия имеет лоренцову форму с относительной шириной на половине высоты $1,13 \cdot 10^{-12}$ при условии, что источник тщательно приготовлен в соответствии с предписаниями, выявившимися из эксперимента. Мы также исследовали уровень Zn^{67} с энергией 93 кэв и $\tau_{1/2}=9,4$ мксек при температурах жидкого гелия и жидкого азота, используя несколько различных расположений источника и поглотителя, однако не наблюдали какого-либо заметного резонансного поглощения. О результатах этой работы мы сообщим позже. Относительная ширина и интенсивность поглощения в Fe^{57} оказывается достаточной для того, чтобы измерить гравитационное смещение в лаборатории.

В порядке подготовки к эксперименту мы искали возможные источники систематических ошибок, которые бы

могли влиять на результаты измерений малых изменений в частоте. Уже раньше при подготовке необходимых для этого эксперимента приборов мы пришли к выводу, что имеют место асимметрии в линиях (или между разностями частот) при данных комбинациях источника и поглотителя, которые изменяются при переходе от одной комбинации к другой. Следовательно, совершенно необходимо измерять *изменение* относительной частоты, которое вызывается изучаемым возмущением. Наблюдаемые разности частот между данным источником и поглотителем не могут быть однозначно приписаны этому возмущению. Совсем недавно нами обнаружено и объяснено изменение частоты с температурой как источника, так и поглотителя [5]. Мы заключаем, что должна быть точно известна разность температур между источником и поглотителем и учтено ее влияние, прежде чем могут быть сделаны какие-либо выводы из некоторого наблюдаемого изменения, при изменении возмущения.

Основными элементами установки для измерения гравитационного смещения частоты в ее окончательном виде были тщательно подготовленный источник, содержащий 0,4 *кюри* Co^{57} с временем жизни 270 *дн* и тщательно подготовленный, жестко закрепленный поглотитель в виде железной фольги.

На основе результатов наших предварительных экспериментов мы пришли к выводу о необходимости вновь очистить никелевую мишень, облученную на циклотроне, путем ионного обмена, чтобы уменьшить примесь кобальта, что было выполнено в Ньюклар Сайенс энд Инджиниринг Корпорейшн. После бомбардировки в пучке протонов высокой энергии при специальном запуске циклотрона с большой плотностью тока Ок-Риджской лаборатории из мишени был выделен Co^{57} , который был осажден на одной из сторон диска из железа Армо диаметром 51 *мм* и толщиной 0,125 *мм* в соответствии с нашим предписанием. После того как мы получили этот диск, он прогревался до 900—1000° C в течение 1 часа в атмосфере водорода, чтобы в результате диффузии кобальт проник в железную фольгу на глубину $\sim 3 \cdot 10^{-5}$ *см*.

Поглотитель, изготовленный Ньюклар Металз Корпорейшн, был составлен из семи отдельных блоков. Каждый

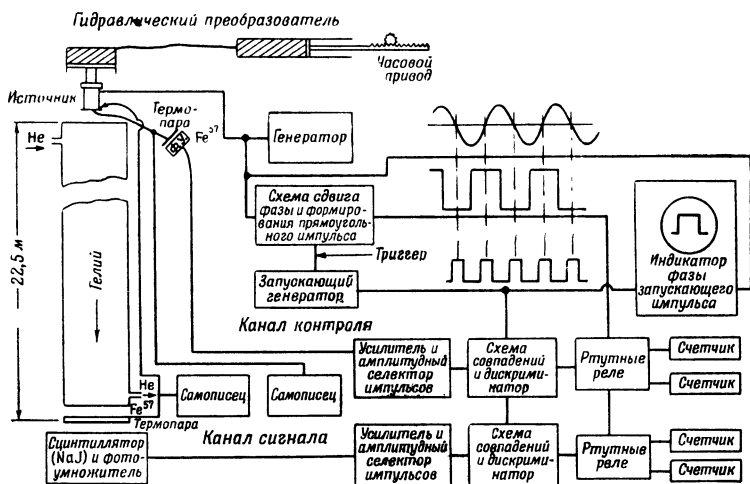
агрегат состоял приблизительно из 80 мг железа, обогащенного Fe^{57} до 31,9% и осажденного на полированной стороне бериллиевого диска с диаметром в ~ 76 мм и толщиной $\sim 1,02$ мм. Техника гальванического осаждения потребовала существенного усовершенствования, чтобы создать пленки с линиями поглощения, имеющими удовлетворительную для наших опытов ширину и интенсивность. В конце концов мы получили пленки, поглощающие при резонансе около $1/3$ свободных от отдачи γ -лучей от нашего источника. Блоки поглотителя были установлены напротив окошка размерами $76 \times 6,3$ мм² из алюминиевой фольги толщиной 0,025 мм. Сцинтилляционный кристалл NaJ(Tl) монтировался на фотоумножителе Дюмонт 6363. Подаваемые на умножитель напряжения были подобраны в отдельности таким образом, чтобы уравнивать их коэффициенты усиления и их выходные сигналы смешивались.

Необходимым стабильным условиям для осуществления эксперимента удовлетворяла закрытая, изолированная башня Джефферсоновской физической лаборатории [6]. Статистические соображения говорят о том, что точность измерения гравитационного смещения частоты не должна зависеть от высоты. Нестабильность аппаратуры и в еще большей степени упомянутые выше источники систематических ошибок менее чувствительны к высоте по сравнению с большими относительными смещениями, возрастающими с высотой. Вся установка высотой 22,5 м требовала лишь удобно реализуемого контроля над этими источниками ошибок.

Поглощение γ -лучей с энергией 14,4 кэв атмосферным воздухом на пути их следования было уменьшено путем применения цилиндрического баллона из милара диаметром 40 см с тонкими окошками на концах, наполненного гелием, который занимал почти все пространство между источником и поглотителем. Чтобы избавиться от проникновения атмосферного воздуха путем диффузии в баллон, через него пропускался гелий со скоростью около 30 л/сек.

Схема эксперимента представлена на фиг. 1. Источник приводился в синусоидальное движение посредством сегнетоэлектрического или магнитоэлектрического преобразователя. В течение четверти периода модуляции, примыкающей

к моменту, соответствующему максимальной скорости, импульсы от сцинтилляционного спектрометра, настроенного таким образом, чтобы выделить линию γ -лучей с энергией 14,4 кэв, подавались на один счетчик, а в течение противоположной четверти цикла — на другой.



Фиг. 1. Блок-схема экспериментальной установки.

Источник и поглотитель-детектор часто менялись местами. Иногда использовался сегнетоэлектрический преобразователь, иногда — магнитоэлектрический преобразователь, в интервале частот 10—50 ц.

Регистрируемая разница в скорости счета являлась мерой асимметрии излучаемой линии по отношению к поглощаемой (или сдвига частоты). В качестве меры предосторожности постоянно наблюдалась относительная фаза отпирающих импульсов и синусоидального модулирования. Было найдено, что экспериментальные данные нечувствительны к изменениям фазы в значительно больших пределах, чем наблюдаемые сдвиги фазы.

Другая в точности такая же электронная система, контролируемая теми же самыми отпирающими импульсами, регистрировала сведения от сцинтилляционного счетчика, представляющего собой кристалл NaJ(Tl) диаметром 25,4 мм и толщиной $\sim 0,37$ мм, покрытый поглотителем,

аналогичным основному поглотителю. Этот патрон с поглотителем и кристаллом был смонтирован так, что он мог реагировать на источник только на расстоянии ~ 92 см. Этот канал контролировал стабильность всей системы модуляции и вследствие ее высокой скорости счета имел малую статистическую погрешность. Соотношение между разностью скорости счета и относительными сдвигами частот между линиями испускания и поглощения измерялось непосредственно путем добавления к линии испускания доплеровского смещения, в несколько раз большего величины гравитационного смещения. Необходимая постоянная скорость осуществлялась благодаря соединению гидравлического цилиндра с большим внутренним диаметром, несущего на себе преобразователь и источник, с ведущим цилиндром с малым диаметром, который был связан с кремальерой, приводимой в движение часами.

Сопоставление данных измерений от двух периодов, дающих доплеровские смещения равной величины, но противоположного знака, давало возможность измерить чувствительность и относительный сдвиг частоты. Без всякого ущерба для наблюдаемых величин чувствительность проверялась в течение приблизительно $\frac{1}{3}$ рабочего времени, когда это было удобно, без автоматической регистрации.

При таком способе мы были в состоянии устранять ошибки, вызванные изменением чувствительности, которые можно было ожидать, например, от дрейфа усилителя или дискриминатора, изменений фона или изменений в режиме модуляции.

Доплеровское смещение второго порядка, возникающее вследствие колебаний решетки, требовало устранения или контроля разности температур между источником и поглотителем. Разность температур в 1°C вызвала бы сдвиг того же порядка величины, что и искомый, так что регистрировалась разность потенциалов термопары, один конец которой был соединен с источником, а другой — с основным поглотителем. Точно такой же системой была снабжена контрольная система. Данные о температуре усреднялись по периоду измерений и дали среднее значение с точностью до $0,03^\circ\text{C}$. Температурный коэффициент для частоты, которым мы пользовались при

Таблица 1

Данные за первые четыре дня измерений

Данные, полученные при соответствующей калибровке чувствительности, представлены в виде относительных разностей частот между источником и поглотителем, умноженных на 1015. Отрицательные знаки означают, что частота γ -лучей меньше, чем частота, соответствующая максимуму поглощения в поглотителе.

Время эксперимента	Наблюдаемое смещение	Поправка на температуру	Результирующее смещение
Источник вниз			
22 февраля, 17 час.	$-11,5 \pm 3,0$	$-9,2$	$-20,7 \pm 3,0$
	$-16,4 \pm 2,2$ ¹⁾	$-5,9$	$-22,3 \pm 2,2$
	$-13,8 \pm 1,3$	$-5,3$	$-19,1 \pm 1,3$
	$-11,9 \pm 2,1$ ¹⁾	$-8,0$	$-19,9 \pm 2,1$
23 февраля, 22 час.	$-8,7 \pm 2,0$ ¹⁾	$-10,5$	$-19,2 \pm 2,0$
	$-10,5 \pm 2,0$	$-10,6$	$-21,0 \pm 2,0$
			Среднее взвешенное смещение $-19,7 \pm 0,8$
Источник вверх			
24 февраля, 12 час.	$-12,0 \pm 4,1$	$-8,6$	$-20,6 \pm 4,1$
	$-5,7 \pm 1,4$	$-9,6$	$-15,3 \pm 1,4$
	$-7,4 \pm 2,1$ ¹⁾	$-7,4$	$-14,8 \pm 2,1$
	$-6,5 \pm 2,1$ ¹⁾	$-5,8$	$-12,3 \pm 2,1$
	$-13,9 \pm 3,1$ ¹⁾	$-7,5$	$-21,4 \pm 3,1$
25 февраля, 18 час.	$-6,6 \pm 3,0$	$-5,7$	$-12,3 \pm 3,0$
	$-6,5 \pm 2,0$ ¹⁾	$-8,9$	$-15,4 \pm 2,0$
	$-10,0 \pm 2,6$	$-7,9$	$-17,9 \pm 2,6$
			Среднее взвешенное смещение $-15,5 \pm 0,8$
			Среднее сме- щение $-17,6 \pm 0,6$
			Разность средних взвешенных смещений $-4,2 \pm 1,1$

1) Эти данные получены одновременно с калибровкой чувствительности.

внесении поправок в данные наблюдений, был рассчитан из удельной теплоемкости решетки, имеющей дебаевскую температуру, равную 420°K . Хотя при комнатной температуре этот коэффициент слабо зависит от дебаевской температуры, остающаяся ошибка в поправке на разность температур ограничивает возможности измерения сдвигов частоты и делает желательным использование в гравитационном эксперименте больших высот.

В табл. 1 приведены типичные полученные данные. В правом столбце приведены данные с учетом поправки на разность температур. Все данные выражены как относительный сдвиг частоты, умноженный на 10^{15} . Разность между смещением, наблюдаемым в случае γ -лучей, распространяющихся снизу вверх, и смещением γ -лучей, распространяющихся сверху вниз, должна быть результатом тяготения. Среднее же значение для этих двух направлений распространения должно измерять некоторое эффективное смещение другого происхождения, которое оказывается примерно в 4 раза больше разности между смещениями. Это смещение являлось специфическим свойством, присущим данной комбинации источника и поглотителя, в чем мы убедились, измеряя смещение для каждого блока поглотителя по очереди с поправкой на температуру на расстоянии $\sim 15,2 \text{ см}$ от источника. Хотя эта проверка была не точна, так как использовалась только половина площади каждого поглотителя, среднее взвешенное значение смещения для комбинации всех блоков поглотителя из этого опыта хорошо согласовалось со смещением, наблюдавшимся в основном эксперименте. Индивидуальные относительные смещения частоты, найденные для этих блоков, для контрольного поглотителя и для фольги толщиной $11,7 \text{ мг/см}^2$ из железа Армко, указаны в табл. 2. Значительное расхождение в их значениях столь же примечательно, как и значение среднего взвешенного смещения. Такие смещения могли бы быть следствием различия в пределах около 11% в эффективной дебаевской температуре, что привело бы к различиям в эффекте Доплера второго порядка. Правдоподобны и другие объяснения, основывающиеся на сверхтонкой структуре, включая электрические квадрупольные взаимодействия. Хотя можно было бы ожидать, что термическая обработка изменит эти смещения для

Таблица 2

**Данные по асимметрии относительного смещения частоты
для различных поглотителей**

В третьем столбце приведено возрастание дебаевской температуры поглотителя по сравнению с дебаевской температурой источника, необходимое для объяснения наблюдаемого смещения.

Поглотитель	$(\Delta\nu/\nu) \cdot 1015$	$\Delta\theta_D, \text{ }^\circ\text{K}$
Номер образца:		
1	$-8,4 \pm 2,5$	$+15 \pm 4$
2	$-24 \pm 3,5$	$+41 \pm 6$
3	$-28 \pm 3,5$	$+48 \pm 6$
4	$-19 \pm 3,5$	$+33 \pm 6$
5	$-24 \pm 3,5$	$+41 \pm 6$
6	$-17 \pm 2,5$	$+29 \pm 4$
7	$-19 \pm 3,5$	$+33 \pm 6$
Среднее взвешенное для образцов 1—7	$-19 \pm 3,0$	$+33 \pm 5$
Контрольный погло- титель	$+0,55 \pm 0,15$	$-0,95 \pm 0,26$
Фольга из железа Армко	$+10 \pm 3,5$	-17 ± 6

покрытого слоем железа бериллиевого поглотителя, опыт показывает, что ширина линии при такой обработке существенно увеличивается, возможно, вследствие внутренней диффузии. Наличие существенного смещения даже для фольги из железа Армко по отношению к источнику, когда фольга и источник подвергались термической обработке, говорит о том, что мы вряд ли будем иметь такого рода неконтролируемое смещение, меньшее, чем гравитационный эффект, ожидаемый даже в нашем эксперименте, в котором эффективная длина пути γ -квантов равна удвоенной высоте и составляет 45 м. Малость смещения контрольного поглотителя по отношению к источнику (по-видимому, случайная) соответствует смещению, которое ожидается для разности высот в 9,1 м.

Недавно Крэншоу, Шиффер и Уайтхед [7] сообщили, что они измерили гравитационное смещение, используя γ -лучи от Fe^{57} . По их мнению, статистическая погрешность 43% представляет собой основную ошибку.

Очевидно, не были рассмотрены два значительно более важных источника ошибок: 1) различие температур источника и поглотителя и 2) разность частот, присущая данной комбинации источника и поглотителя. Согласно проведенному выше рассмотрению, разность температур уже в $0,6^\circ\text{C}$ привела бы к смещению той же величины, что и весь наблюдавшийся эффект. Их дополнительный эксперимент при уменьшенной до 3 м разности высот без соответствующих температурных измерений не позволяет решить вопрос о разности частот, присущей рассматриваемой системе источник — поглотитель. Полученное ими расхождение наблюдаемой полной ширины линии от ожидаемой, по-видимому, говорит в пользу наличия такого рода смещения. Они упоминают об этом уширении в связи с его возможным влиянием на чувствительность (скорее вычисленным, нежели измеренным) вследствие отклонения от лоренцевой формы. Ясно, что такого рода отклонение даже более важно в допустимой асимметрии.

Наше исследование показывает, что из эксперимента Крэншоу вообще нельзя сделать никаких заключений.

Если частотный сдвиг, присущий использованной нами комбинации источник — поглотитель, не изменяется при их взаимной перестановке, то разность между смещениями, наблюдаемыми для идущих вверх и идущих вниз γ -лучей, измеряет влияние тяготения. Все полученные данные после внесения необходимых поправок на температуру дают результирующее относительное смещение — $(5,13 \pm 0,51) \cdot 10^{-15}$. Указанная ошибка представляет собой среднеквадратичное статистическое отклонение, включая отклонение значений чувствительности при контрольных опытах, характеризующих соответствующие периоды работы.

Это полученное смещение согласуется с предсказанным значением — $4,92 \cdot 10^{-15}$ гравитационного смещения для разности высот, равной пути распространения γ -кванта вверх и вниз, т. е. удвоенной использованной нами разности высот. Таким образом, мы пришли к следующему результату:

$$\frac{(\Delta\nu)_{\text{эксп.}}}{(\Delta\nu)_{\text{теор.}}} = +1,05 \pm 0,10,$$

где знак плюс означает, что имеет место «красное» смещение частот в поле тяготения, как и ожидалось.

Эти данные были получены примерно за 10 дней работы. Мы намерены продолжить измерения при некоторых усовершенствованиях чувствительности и рассчитываем почти в 4 раза уменьшить статистическую погрешность. При нашей существующей экспериментальной установке это привело бы к значительному уменьшению ошибки измерений, так как мы уверены, что сможем осуществить соответствующие усовершенствования, чтобы исключить систематические ошибки в окончательных результатах. Чтобы увеличить точность в значительно большее число раз, по-видимому, потребуется более высокая база установки или, возможно, использование γ -лучей с более узкими линиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. P o u n d R. V., R e b k a G. A., Phys. Rev. Lett., 3, 439 (1959); статья 18 настоящего сборника.
2. E i n s t e i n A., Ann. d. Phys., 35, 898 (1911).
3. M ö s s b a u e r R. L., Zs. f. Phys., 151, 124 (1958); Naturwiss., 45, 538 (1958); Zs. Naturforsch., 14a, 211 (1959).
4. P o u n d R. V., R e b k a G. A., Phys. Rev. Lett., 3, 554 (1959).
5. P o u n d R. V., R e b k a G. A., Phys. Rev. Lett., 4, 274 (1960).
6. H a l l E. H., Phys. Rev., 17, 245 (1903), § 1.
7. C r a n s h a w T. E., S c h i f f e r J. P., W h i t e h e a d A. B., Phys. Rev. Lett., 4, 163 (1960).

20. ВЕРХНИЙ ПРЕДЕЛ АНИЗОТРОПИИ ИНЕРЦИИ ИЗ ЭФФЕКТА МЁССБАУЭРА

Дж. Коккони и Е. Салпетер

G. Cocconi, E. Salpeter, Phys. Rev. Lett., 4, 176—177 (1960)

Вопрос об анизотропии инерции был довольно обстоятельно обсужден в нашей предыдущей работе [1]. Здесь же мы напомним лишь одно из следствий принципа Маха, связанное с тем обстоятельством, что значение инертной массы M тела будет зависеть от того, направлено ли ускорение этого тела к центру нашей Галактики или оно перпендикулярно этому направлению. Было показано, что изменение ΔM массы в зависимости от направления, если оно существует, должно удовлетворять условию $\Delta M/M < 10^{-9}$.

Недавно открытый эффект Мёссбауэра [2] дает возможность с чрезвычайно высокой точностью сравнивать частоты γ -лучей, излучаемых ядрами в долгоживущих состояниях. Безотдачное резонансное поглощение ядерных γ -лучей Fe^{57} с энергией 14 кэв уже изучено настолько, что можно наблюдать расщепление сверхтонкой структуры в возбужденном состоянии. Эффект Мёссбауэра был предложен как отличное средство для наблюдения гравитационного красного смещения и для многих других целей.

В настоящей заметке мы предлагаем использовать этот эффект для обнаружения анизотропии инерции. Для этой цели достаточно, например, точно изучить формы линий перехода в Fe^{57} , в случае одинаково ориентированных атомных спинов излучателя и поглотителя и изменять ориентацию спинов относительно направления к центру Галактики.

Пусть ядро Fe^{57} находится в ядерном состоянии с квантовым числом J полного момента в некотором ферромаг-

нитном образце с атомными спинами, ориентированными вдоль внешнего магнитного поля. В этом случае эффект анизотропии инерции очень похож на эффект, рассмотренный в цитированной работе [1] для атомного эффекта Зеемана, с той лишь разницей, что теперь переход, вызывающий испускание γ -кванта, обуславливается движением нуклона в Fe^{57} (по крайней мере согласно модели оболочек), а не движением электрона. Пусть m — магнитное квантовое число относительно оси, направленной вдоль магнитного поля. Взаимодействие состояний с различными значениями m с магнитным полем атома приводит к расщеплению уровня энергии ядра на $(2J + 1)$ эквидистантные компоненты. Если имеет место какая-либо анизотропия инерции, то каждая компонента испытывает дополнительное смещение на величину

$$\left(\frac{\Delta M}{M}\right) \bar{T} \bar{P}_2,$$

где \bar{T} — средняя кинетическая энергия нуклона (примерно, порядка 10 Мэв) и \bar{P}_2 — некоторый коэффициент, значение которого зависит от J , $|m|$ и ориентации магнитного поля относительно направления к центру Галактики. Для основного состояния ядра Fe^{57} мы имеем $J = \frac{1}{2}$ и $\bar{P}_2 = 0$. Для возбужденного состояния с энергией 14 кэв ($J = \frac{3}{2}$ и \bar{P}_2 не равно нулю¹⁾) для $|m| = \frac{3}{2}$, отличаясь лишь знаком от случая $|m| = \frac{1}{2}$, причем \bar{P}_2 изменяет знак при изменении магнитного поля от направления к центру Галактики (или от него) к перпендикулярному направлению.

Резонансное поглощение в эффекте Мёссбауэра только сравнивает частоты перехода в излучателе и поглотителе. Если мы пренебрежем магнитным моментом основного состояния Fe^{57} (по сравнению с магнитным моментом возбужденного состояния с $J = \frac{3}{2}$), то наблюдаемый спектр будет состоять из некоторой центральной линии, имеющей по три побочных равноотстоящих сателлита с каждой стороны.

Если магнитные поля в излучателе и поглотителе параллельны друг другу, то наличие анизотропии инерции при-

¹⁾ $\bar{P}_2 = \frac{1}{5}$ для одного нуклона в состоянии $p_{3/2}$.

ведет к расщеплению первого сателлита с образованием симметричного триплета и второго сателлита — с образованием симметричного дублета; центральная же линия и крайний сателлит останутся нерасщепленными. Если же два магнитных поля перпендикулярны друг другу, то главная линия также расщепится в симметричный дублет. Во всех случаях эти расщепления максимальны, когда магнитные поля параллельны или перпендикулярны к направлению к центру Галактики и обращаются в нуль в промежуточных направлениях.

Если атомные магнитные поля в источнике и поглотителе ориентированы беспорядочным образом, то анизотропия инерции скажется только в уширении линий. Осуществленные до настоящего времени эксперименты [3, 4], по-видимому, ограничивают это уширение величиной $\sim 10^{-8}$ эв, что уже давало бы верхнюю границу $\sim 10^{-14}$ для величины $\Delta M/M$, характеризующей анизотропию. При малых расстояниях между источником и поглотителем форма линий может быть измерена с большой точностью, и эксперименты, выполненные с ориентированными атомными магнитными полями и основанные на изменении ориентации по отношению к центру Галактики, могли бы значительно улучшить оценку $\Delta M/M$.

По-видимому, прецизионные измерения, в значительной мере подобные описанным, будут проводиться в будущем многими экспериментаторами в совершенно иных целях. Предлагаемая заметка имеет целью призвать этих экспериментаторов рассмотреть также и упомянутый выше эффект.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cocconi G., Salpeter E., Nuovo Cimento, 10, 646 (1958).
2. Mössbauer R. J., Zs. Naturforsch., 14a, 211 (1959).
3. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev. Lett., 3, 554 (1959).
4. Hanna S. S. et al., Phys. Rev. Lett., 4, 28 (1960).
5. Pound R. V., Rebka G. A., Phys. Rev. Lett., 3, 439 (1959); статья 18 настоящего сборника.
6. Schiffer J. P., Marshall W., Phys. Rev. Lett., 3, 556 (1959).

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Вступительная статья. Основные проблемы гравитации	5
I. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ	
1. Х. Мёллер. Энергия незамкнутых систем в общей теории относительности (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	65
2. Х. Мёллер. Комплекс энергии-импульса в общей теории относительности (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	85
3. П. Дирак. Обобщенная динамика в гамильтоновой форме (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	128
4. П. Дирак. Теория гравитации в гамильтоновой форме (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	139
5. Л. Инфельд. Уравнения движения в общей теории относительности и принцип действия (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	159
6. Л. Инфельд. Уравнения движения и гравитационное излучение (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	200
7. А. Папапетру, Д. Гейслер и Г. Тредер. Гравитационное излучение временно нестационарной системы. (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	236
8. Б. Финци. Разрыв гравитационного действия на фронте волны (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>)	247
9. Ф. Пирани. Инвариантная формулировка теории гравитационного излучения (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>)	257
10. Дж. Вебер и Дж. Уилер. Реальность цилиндрических гравитационных волн Эйнштейна—Розена (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	289
11. Г. Бонди. Отрицательная масса в общей теории относительности (<i>Перевод Д. В. Белова</i>)	309

II. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

- | | |
|--|-----|
| 12. С. Гупта. Квантование гравитационного поля. Линейное приближение (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>) | 325 |
| 13. С. Гупта. Квантование гравитационного поля. Общая теория (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>) | 341 |
| 14. П. Бергман и А. Комар. О квантовании гравитационного поля (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>) | 361 |
| 15. Д. Бриль и Дж. Уилер. Взаимодействие нейтрино с гравитационным полем (<i>Перевод Д. В. Белова</i>) | 381 |
| 16. Л. Шифф. Гравитационные свойства антиматерии (<i>Перевод Б. Т. Вавилова</i>) | 386 |

III. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

- | | |
|---|-----|
| 17. Дж. Вебер. Наблюдение и генерация гравитационных волн (<i>Перевод Д. В. Белова</i>) | 446 |
| 18. Р. Паунд и Г. Ребка. Гравитационное смещение в ядерном резонансе (<i>Перевод Д. В. Белова</i>) | 469 |
| 19. Р. Паунд и Г. Ребка. Эффективный вес фотона. (<i>Перевод Д. В. Белова</i>) | 474 |
| 20. Дж. Коккони и Е. Салпетер. Верхний предел анизотропии инерции из эффекта Мёссбауэра (<i>Перевод Д. В. Белова</i>) | 484 |

НОВЕЙШИЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ

Редактор *С. И. Ларин*. Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *В. А. Доценко*. Корректор *Т. С. Бухтина*

Сдано в производство 1/XII 1960 г. Подписано к печати 6/IV 1960 г.
Бумага 84×108¹/₃₂ = 7,6 бум. л. 25 печ. л. Уч-изд. л. 22,2. Изд. № 2/0213
Цена 1 р. 75 к. Зак. 738

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 5 Мосгоссовнархоза. Москва, Трехпрудный пер., 9.

О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
160	1 сн.	$\eta_{00} = 0$	$\eta_{00} = 1$
239	8 св.	Стационарное	Стационарная
264	10 сн.	каждой	в каждой
285	9 св.	типа Ic	типа I с
400	10 св.	областью (областью,
	10 св.	барьера)	барьера
417	10 св.	гравитационного по-	гравитационное по-
		ля	ле
453	1 св.	уже не	уже