

Настоящий сборник составлен из лекций, докладов и оригинальных статей ряда видных зарубежных ученых, занимающихся узловыми проблемами в той области современной теоретической физики, основу которой составляет общая теория относительности и примыкающие к ней вопросы построения единой теории поля, астрономии, гравитационной физики, космологии.

Большая часть вошедших в сборник статей носит обзорный обобщающий характер и содержит как изложение основных результатов, полученных в указанной области за последний период, так и анализ проблем, стоящих перед исследователями в настоящий момент.

В сборнике освещено современное состояние проблемы локализуемости энергии в общей теории относительности и проблемы гравитационных волн с позиций тетрадного формализма (Мёллер, статьи 1, 2), проблемы квантования гравитационного поля (Швингер, статья 3), общие вопросы гравитационного излучения (Сакс, статья 4), проблемы, связанные с топологическими аспектами теории (Пенроуз, статья 5), (Фридман, статья 6), (Мизнер, статья 7) и вопросы релятивистской астрофизики (Фаулер, статья 8) и космологии (Йордан, статья 9; Мак-Витти, статья 10). Во вступительной статье дан обзор проблем гравитации как в области теории, так и эксперимента; особое внимание уделено новейшим проблемам астрофизики и связи гравитации с физикой элементарных частиц.

В связи с расширением фронта исследований в этой области за последние годы сборник представляет большой интерес для физиков, занимающихся проблемами общей теории относительности, теорией поля, теорией элементарных частиц, а также для специалистов смежных областей — астрономов, математиков, философов и др. Сборник будет также полезен для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теоретической физики или астрономии и желающих ознакомиться с новейшими успехами и проблемами теории по лекционным курсам теоретических школ.

---

# ГРАВИТАЦИЯ И ТОПОЛОГИЯ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

СБОРНИК СТАТЕЙ

*Перевод с английского*  
В. Н. ФРОЛОВА

*Под редакцией*  
Д. ИВАНЕНКО



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва 1966

УДК 531.51+523.11

*Редакц*

# АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГРАВИТАЦИИ

*Д. Иваненко*

## И. В в е д е н и е

Проблемы современной теории гравитации продолжают в последние годы привлекать все более пристальное внимание физиков и астрономов, математиков, геологов, философов. При этом параллельно с дальнейшей разработкой классической гравидинамики, основу которой составляет эйнштейновская общая теория относительности (ОТО), усиленным анализом проблемы энергии и гравитационных волн и изучением топологических аспектов теории в последние годы, с одной стороны, наметились обобщения теории в виде тетрадной, компенсационной и групповой трактовки, а с другой стороны, продолжались развиваться исследования в трудном направлении квантового обобщения теории и ее сближения с физикой элементарных частиц. Продолжались также экспериментальные поиски гравитационных волн, вращательных и других общерелятивистских эффектов.

В последнее время начали приобретать первостепенное значение проблемы релятивистской астрофизики, главным образом в связи с замечательным открытием кваэизвезд, излучающих огромные количества энергии. Столкновение этих объектов требует общерелятивистского подхода, привлечения теории коллапса, а возможно, даже выхода за рамки эйнштейновской гравидинамики в сторону каких-то классических или квантовых обобщений. Большой интерес представляет также открытие рентгеновского излучения, исходящего из сравнительно небольших областей; не исключено, что некоторые из подобных источников являются нейтронными звездами, изучение которых требует общерелятивистской трактовки. Открытие взрывов

галактик и других динамических процессов в астрономии со своей стороны содействовало обострению интереса к релятивистской (или, точнее, общерелятивистской) астрофизике. Сведения о космологии, т. е. структуре всей известной Вселенной, также продолжали пополняться благодаря новейшим оптическим и радиоастрономическим наблюдениям. Уже сделала первые шаги  $\gamma$ -астрономия [1—3], а недавно удалось уловить первые нейтрино нелабораторного происхождения [4]. Продолжалось рассмотрение гипотезы Дирака об уменьшении гравитационной постоянной, в частности, в связи с возможным расширением Земли. Таковы в общих чертах тенденции исследований на фронте гравитации примерно за последние три года. Настоящий сборник имеет целью ознакомить советских читателей с рядом указанных новейших наиболее важных результатов в области гравитации, касающихся проблемы теории гравитационного излучения, классических и квантовых обобщений ОТО, а также ее применений к релятивистской астрофизике и космологии. Поскольку топологические аспекты теории начинают играть все большую роль в теории, то мы включили в сборник ряд статей, посвященных топологическому подходу к римановой геометрии и содержащих ценный анализ ряда топологических сторон теории.

Подобно трудам французской теоретической школы 1963 г. «Релятивизм, группы и топология», мы также решили подчеркнуть эту сторону дела в самом названии сборника.

Сохраняя независимость, этот сборник в известной мере продолжает серию вышедших в предыдущие годы переводных книг и сборников [5—11].

Большинству из них предпосланы вступительные статьи, содержащие библиографию по новейшей литературе (в общей сложности несколько сот названий). Вся серия составляет относительно полное введение в современную проблематику. Во избежание повторений мы не будем останавливаться на рассмотренных ранее вопросах и приводить повторных ссылок.

Интерес к гравитации вызвал созыв ряда конференций. Вслед за первой большой гравитационной конференцией в Париже — Руаймоне в 1959 г. [12], посвященной гра-

витационным волнам, классификации решений, квантованию и геометродинамике (см. также [11, 13]), по рекомендации организованной тогда Международной гравитационной комиссии была созвана конференция в Варшаве — Яблонне в 1962 г. [14]. Она была посвящена волнам, энергии, квантованию. Из материалов этой конференции в настоящий сборник вошел доклад Мёллера о псевдотензоре энергии — импульса (*статья 1*); квантованию гравитационного поля в рамках тетрадного формализма посвящена статья Швингера (*статья 3*). Из материалов юбилейной галилеевской конференции (Италия, 1964 г.) [15] мы включили сюда, во-первых, еще одну работу Мёллера, посвященную проблеме энергии (*статья 2*), а также доклад Мак-Витти (*статья 10*) с ценными сведениями о космологии и продолжением довольно резкой критики модели стационарной Вселенной Бонди — Хойла. Труды последней Международной гравитационной конференции (Лондон, июль 1965 г.) еще не опубликованы, но мы ссылаемся на некоторые доклады [16] в настоящей вступительной статье.

Гравитации были посвящены занятия летних школ в Италии (Комо, 1961 г.) [17] и во Франции (Лез-Уш, 1963 г.) [18]. Из материалов последней в настоящий сборник вошли переводы лекций Сакса (*статья 4*), Пенроуза (*статья 5*) и Мизнера (*статья 7*) по гравитационному излучению и топологическим проблемам в ОТО.

В ряде стран состоялись симпозиумы и национальные конференции: Япония, 1962 г.; Англия, 1963 г.; ГДР, 1963 г. (симпозиум по вариациям гравитационной постоянной); США (симпозиум по гравитационным экспериментам и две «техасские» конференции по релятивистской астрофизике — в Далласе в 1963 г. и в Остине в 1964 г.; симпозиум по проблеме погружений риманова пространства в псевдоевклидово пространство высшей мерности в 1964 г.). Из материалов этого последнего симпозиума в сборник включен доклад Фридмана (*статья 6*). Проблеме квантования гравитационного поля посвящена работа Швингера (*статья 3*). Наконец, приобретая известность работа Фаулера из юбилейного «Оппенгеймеровского» номера *Reviews of Modern Physics* (*статья 8*) дает хорошее введение в общерелятивистскую трактовку

звездных объектов, а работа Йордана (*статья 9*) дает живое изложение проблемы расширения Земли, примыкающей к важным общерелятивистским вопросам изменения гравитационной константы.

В Советском Союзе была организована гравитационная комиссия и созданы две конференции (в Москве в 1961 г. [19] и в Тбилиси в 1965 г. [20]). На Тбилисской конференции в центре внимания были общие проблемы классической и квантовой гравитации, релятивистская астрофизика, тетрадный формализм, гравитационные эксперименты. Состоялись симпозиумы по смежным вопросам гравитации и геологии (Москва, 1963 г.), по философским вопросам гравитации (Киев, 1964 г.). В Тарту в 1963 г. была организована теоретическая школа, посвященная проблемам гравитации.

Дадим теперь пояснения по ряду главных проблем, дополняя и комментируя статьи сборника.

## II. Проблема энергии и другие вопросы классической ОТО

Трудности отыскания выражения для энергии гравитационного поля привели Мёллера к использованию тетрад, которые мы со своей стороны всегда считали необходимыми для переформулировки ОТО ввиду того, что описание взаимодействия спинорных полей, характеризующих фермионы (т. е. электроны, нейтрино, протоны и т. д.), с гравитационным полем требует применения тетрад [21] (см. также [22—24]).

Напомним, что в каждой точке наряду с вектором  $h_\nu$ , характеризующим криволинейные координаты, вводится ортогональный репер с тетрадными компонентами  $h(a)$ . Из их взаимных проекций, т. е. коэффициентов Ламэ  $h_\nu(a)$ , строится метрический тензор

$$g_{\mu\nu} = h_\mu(a) h_\nu(a)$$

и символы Кристоффеля

$$\Gamma_{\sigma\lambda}^\mu = \bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu + \Delta_{\sigma\lambda}^\mu,$$

где  $\bar{\Gamma}_{\sigma\lambda}^\mu = h^\mu(a) [\partial h_\nu(a) / \partial x^\sigma]$  — связность абсолютного параллелизма, а  $\Delta_{\sigma\lambda}^\mu$  — коэффициенты вращения Риччи,

выражающиеся через производные от  $h_\nu(a)$ . В работах [25—29] развита тетрадная формулировка ОТО, в которой за потенциалы поля берутся  $h_\nu(a)$ . Наряду с необходимостью тетрадного формализма в общерелятивистской теории фермионов использование его диктуется также мощной «компенсационной» трактовкой гравитационного поля в духе полей Янга — Миллса (см. работы [30—33], а также [34—37, 20]).

Речь идет при этом о преобразованиях Лоренца с локализованными параметрами, когда коэффициенты преобразования являются функциями координат и гравитационное поле вводится как некоторое компенсирующее поле.

Ввиду наличия лишних тетрадных компонент существенны дополнительные условия, например, Мёллера (*статья 1*) или Родичева [25]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (V^{-g} h^\sigma(a)), \sigma = 0,$$

или Швингера (*статья 3*). «Квазигармонические» условия Родичева, выражающие некоторую непрерывность преобразований, в случае голономных преобразований переходят в гармонические условия де Дондера

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (V^{-g} g^{\mu\nu}), \nu = 0.$$

Как известно, гармонические координаты, выделенные этими условиями, удобны в ряде задач, однако их применение подразумевает нормировку на идеализированную статическую галилееву метрику на бесконечности вместо реальной фридмановской. Ввиду этого и других соображений [12, 38, 156] гармоническим координатам, по-видимому, не следует придавать какого-то особого значения.

Мёллер в связи с отсутствием однозначности в выборе дополнительных условий и, по его мнению, трудностей с измеримостью тетрадных компонент склонился было к их использованию только как сугубо вспомогательных величин, имея в виду, что только интегральные выражения будут иметь смысл; тогда дополнительных условий можно избежать. Однако в результате дискуссии по нашему галилеевскому докладу во Флоренции [39] Мёллер согласился, что признание тетрад как реальных грави-



тационных потенциалов, возможно, окажется более плодотворным. Вопросы квантования тетрад рассмотрены в работе Швингера (статья 3).

Аналогично тому как в ОТО формализм Нетер, примененный к скаляру  $R$  или к усеченной величине  $G$ , приводил к выражениям энергии Мёллера — Мицкевича или Эйнштейна, теперь мы также получим две величины, используя вариации по  $\hbar_\nu(a)$ . Применяя формализм Нетер к 4-вращениям, получаем момент поля. Так или иначе представляется несомненно плодотворным, а для спиноров и необходимым дальнейшее развитие общерелятивистского тетрадного формализма.

Тетрадная и компенсационная трактовки и групповой подход естественным образом приводят к обобщению ОТО на закрученное, а не только искривленное пространство. Рассматривая прецессию волчка в гравитационном поле, Смородинский [40] показал, что в закрученном пространстве получается несохранение пространственной или, в другом варианте, временной четности, что несомненно любопытно в связи с теорией внутренних симметрий частиц. Как прецессия волчка в поле тяготения, так и прецессия перигелия оказываются частными случаями томасовской прецессии [40]. Многочисленным результатом остается теорема Родичева, показавшего, что параллельный перенос спиноров в закрученном пространстве приводит к добавлению нелинейного члена в уравнении Дирака. Со своей стороны нелинейная спинорная теория поля, обогащенная учетом новых внутренних симметрий частиц, хорошо описываемых группой  $SU_3$  и ее обобщениями, продолжает оставаться перспективной базой построения единой теории [39, 41—43].

В последнее время в физике элементарных частиц стали широко применяться некоторые методы теории групп и возникла мысль об их перенесении на гравитинамику. Ткаченко [44] в качестве тензора гравитационного поля выбирает тензор, преобразующийся по неприводимому представлению группы Лоренца  $D(2, 0) \oplus D(0, 2)$ . Тогда это поле, наглядно говоря, соответствующее частицам спина 2, можно рассматривать как в пространстве Минковского, так и в римановом пространстве; в последнем случае уравнения поля совпадают с эйнштейновскими.

Близкий по духу анализ, но для линеаризованной теории, был проделан Траутманом [45]. При этом фундаментальная алгебраическая классификация решений Петрова [46] приобретает довольно наглядный физический смысл. За подробностями относительно современного развития подхода Петрова, играющего важную роль особенно при рассмотрении проблемы излучения, отсылаем к лекциям Сакса (статья 4). Плодотворным при этом оказалось локальное рассмотрение тензора конформной кривизны Вейля, именно его спинорного эквивалента, в работах Пенроуза [47]. Особый групповой подход к спинорам в теории тяготения развивают Огиевецкий и Полубаринов [48]. В других работах [49] они применяют к полям спина 2 свою теорию взаимодействующих полей определенного спина, рассчитывая таким путем получить интерпретацию эйнштейновских уравнений в плоском пространстве — времени.

Грановский и Пантюшин [50] проанализировали приближенный лагранжиан системы вращающихся протяженных, но абсолютно твердых тел с точностью до  $\varphi/c^2 (l/R)^2 \approx 5 \cdot 10^{-13}$  (для солнечной системы) по отношению к ньютоновскому приближению, исправив предыдущие результаты [51]. Представляет интерес применение пост-ньютоновских, приближенно общерелятивистских поправок в небесной механике [52] (см. также [53]).

Анализируя эффекты ОТО, Абдильдин [54] приходит к выводу, что они могут существенным образом определить структуру солнечной системы (где такие основные факты, как почти круговой характер орбит, находящихся почти в одной плоскости, и вращение в одном направлении как Солнца, так и планет, до сих пор не имеют удовлетворительного объяснения). Следует, однако, согласиться с замечанием Грановского и Озерного на Тбилисской конференции, что в космогонии важную роль играют также начальные условия происхождения планет и учет электромагнитных эффектов.

Следует признать, что топологическим аспектам ОТО раньше не уделялось должного внимания. Положительную роль в этом отношении сыграли и работы Уилера, который проанализировал с топологической точки зрения решение Шварцшильда и попытался в своей геометро-

динамике сопоставить горловины ручек и поток силовых линий через горловины зарядам и высказал надежду подойти к элементарным частицам в квантовом варианте теории. Уилер подчеркнул роль флуктуаций теории на расстояниях порядка  $10^{-33}$  см, когда топология теряет евклидов характер (на наш взгляд с этой стороны можно подойти к тому или иному варианту дискретного пространства).

Топологический анализ решений ОТО представляет особый интерес в теории гравитационных волн (статья 4). Топологический анализ необходим для космологии, где речь идет о многообразиях в целом, являющихся предметом изучения не столько дифференциальной геометрии, сколько дифференциальной топологии (статьи 5 и 7). По-видимому, теория элементарных частиц также потребует применения топологии, например, в рамках проблемы изометрического погружения римановых многообразий в евклидовы пространства большого числа измерений (статья 6). Следует отметить, что в публикуемых лекциях Мизнера содержится ценное введение в некоторые новейшие проблемы топологии, связанные с теорией когомологии де Рама и специально клеточной когомологии, представляющее независимый интерес.

### III. Новейшие эксперименты

Сравнительно недавно было замечено, что малость гравитационного излучения обусловлена не только величиной гравитационной постоянной, но также его квадратичным характером вследствие того, что отношение гравитационного заряда к массе, т. е. отношение гравитационной и инертной масс, постоянно для всех тел положительной массы [55]. В качестве детектора ожидаемых гравитационных волн Вебер предложил использовать возбуждение колебаний твердого тела. Вся установка [56] представляет собой алюминиевый цилиндр, деформации которого ( $\geq 10^{-14}$  см) регистрируются пьезоэлектрическим путем. Ожидались суточные вариации, если в потоке падающих на Землю гравитационных волн имелась компонента с характерной для данного случая частотой  $1657 \text{ сек}^{-1}$ . Отрицательный результат наблюде-

ний (с 1962 г.) позволил дать пока только верхнюю границу возможного потока мощности:  $P < 3000 \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1} \times \times \text{см}^{-2}$  или для соответствующей фурье-компоненты тензора Римана  $R(\omega) < 10^{-67} \text{ см}^{-4} \cdot \text{радиан}^{-1} \cdot \text{сек}$  [57]. С другой стороны, можно попытаться использовать в качестве детектора весь земной шар, учитывая прежде всего его характерную частоту с периодом порядка одного колебания в час (точнее, 54 мин).

Обнаружение квадрупольных колебаний при отсутствии сферически симметричных (последние могли бы иметь место не в ОТО, но, например, во вспомогательном варианте скалярной теории Дикке — Бранса [18]) доказало бы влияние падающих из космоса гравитационных волн на раскачку Земли. Однако сверх уровня шумов пока что ничего не было найдено, что опять-таки дает верхнюю границу  $R(\omega) < 2 \cdot 10^{-80} \text{ см}^{-4} \cdot \text{радиан}^{-1} \cdot \text{сек}$ . В дальнейшем предлагается использовать как детекторы Луну, планеты, проделать одновременные наблюдения в разных точках Земли, исследовать возможное влияние гравитационных волн на флуктуации потока света от далеких источников и на определения расстояний до планет.

Брагинский [58] недавно дал обзор возможностей обнаружения гравитационных волн от внеземных источников (двойные звезды, тормозное гравитационное излучение при кулоновском рассеянии электронов) и от земных источников (вращающиеся стержни, механические колебания, ядерные взрывы и др.). Для ряда двойных звезд, относительно близко расположенных к солнечной системе, имеем следующие любопытные данные о потерях энергии на гравитационное излучение  $d\epsilon/dt$ :

Звезда	Период обращения, $\tau$	$m_1$	$m_2$	Взаимное расстояние $R$ , см	$\frac{d\epsilon}{dt}$ , эрг · сек <sup>-1</sup>
44 Eri	0,321 суток	0,76	0,50	$1,3 \cdot 10^{20}$	$2,6 \cdot 10^{29}$
WZSge	81 мин	~1	~1	$3,10^{20}$	$7 \cdot 10^{32}$

где  $m_1$  и  $m_2$  — массы компонент в единицах массы Солнца. Особенно интересная для нас звезда WZ созвездия Стрелы

имеет большую частоту обращения; интегральный поток мощности гравитационных волн в таком случае может даже превосходить мощность видимого излучения. Земные приемники гравитационного излучения двойных звезд должны регистрировать потоки порядка  $10^{-3} - 10^{-10} \text{ эрг} \times \text{сек}^{-1}$ . Довольно многозначительным образом выясняется, что среди двойных звезд нет объектов с относительно большими массами (в несколько раз больше солнечной) и с малыми периодами обращения. Не свидетельствует ли это о том, что сравнительно интенсивное гравитационное излучение подобных звезд сделало невозможным их длительное существование? При коллапсе двойной нейтронной звезды энергия гравитационных волн может достигнуть  $10^{50} \text{ эрг}$  [59].

Общий вывод говорит в пользу желательности исследования прежде всего внеземных источников, однако запретов для конструирования земных генераторов излучения также нет. Существенный прогресс может быть достигнут благодаря статистическим методам выделения слабых сигналов на фоне шумов за большие промежутки времени [60—69]. Конечно, сейчас пока невозможно говорить о регистрации квантовых процессов, связанных с гравитонами.

Отметим предложенный на Тбилисской конференции 1965 г. новейший проект Рукмана и Юхвидина проверить спецрелятивистское отставание времени путем сравнения показаний двух атомных часов, которые в начальный момент были согласованы по частоте и фазе колебаний, а затем одни из часов путешествовали на движущемся объекте (самолет, спутник). Например, при движении на спутнике со скоростью  $8 \text{ км/сек}$  для получения эффекта, заметно превышающего погрешности, требуется около 3 суток.

При этом отставание составит  $97 \text{ мксек}$ , тогда как погрешность можно свести до  $1 \text{ мксек}$ . Водородные мазеры [70] будучи использованы в качестве ведущих генераторов атомных часов способны обеспечить еще более высокую точность измерений. Важность подобного опыта ввиду путаницы, существующей еще вокруг теории «парадокса часов», подчеркнул Галкин [71] (см. также [72]). Укажем еще на интерес к оценке влияния поля тяготы-

ния Солнца на скорость распространения радиосигналов, например, при радиолокации Венеры и т. д. [73, 74].

#### IV. Релятивистская астрофизика

Перейдем теперь к главным проблемам новейшей релятивистской астрофизики, связанным прежде всего с открытием квазизвезд (в другой терминологии — суперзвезды, сверхзвезды, квазары, квазизвездные радиосточники, QSS). (См. [20, 75—84], а также статью 8 в настоящем сборнике.)

Речь идет о некоторых компактных объектах, излучающих огромные потоки энергии как в радиодиапазоне, так и в оптической области, во многие сотни миллиардов раз превосходящие излучение обычных звезд. К концу 1964 г. было известно более 30 квазизвезд (в частности, радиообъекты по 3-му Кэмбриджскому каталогу 3С с номерами: 9, 47, 48, 93, 147, 196, 208, 245, 273, 286, 287 и др.) и обнаружение их продолжается.

Квазизвезды характеризуются также вариациями яркости, притом как регулярными (с периодами порядка 1—10 лет), так и спорадическими. Открытые впервые как радиообъекты, позднее практически все они были отождествлены оптически, что и позволило проследить за вариациями яркости за много десятков лет. Удалось определить структуру некоторых квазизвезд: например, 3С273 по измерениям австралийских астрономов, наблюдавших в радиодиапазоне покрытие этого объекта Луной, состоит из компоненты В, компоненты А (невидимой) на угловом расстоянии  $19,5''$  от В и слабой (видимой) струи, соединяющей А и В.

Весьма значительное для всех квазизвезд красное смещение указывает на высокую скорость удаления (космологический эффект), например для 3С273 равную  $47\,000$  км/сек, и на расстояние от Земли порядка  $1,5 \cdot 10^9$  световых лет.

Приведем интересные данные относительно оптической и радиосветимости некоторых ярких объектов, выделив отдельно квазизвезды:

Источник	$M_v$ (видимая величина)	$\lg L_R$ , $\text{эрг} \cdot \text{сек}^{-1}$ (логарифм радиосветимости)	$L_v$
Cygn A	-22,5	44,96	
Virgo A	-22,1	41,92	
3C295	-22,1	45,55	
Квазизвезды:			
3C47	-23,1	44,46	$8 \cdot 10^{43}$
3C273	-26,3	44,74	$2 \cdot 10^{45}$

Здесь  $L_v$  есть абсолютный оптический поток в области длин волн 5000—6000 Å; причем Солнце, принимаемое за стандарт, имеет абсолютную звездную величину +4,79 и обладает в тех же границах длин волн потоком энергии  $5,7 \cdot 10^{32}$  эрг/сек<sup>-1</sup> при полном потоке  $4 \cdot 10^{33}$  эрг/сек<sup>-1</sup>;  $L_R$  есть радиосветимость в области частот  $10^7 - 10^{11}$  гц. Важно, что квазизвезды отличаются от радиогалактик скорее в оптическом, чем в радиодиапазоне.

Открытие квазизвезд привело к возрождению теории гравитационного коллапса, поскольку звездные объекты с массами, превышающими некоторую критическую, не могут быть стабильными. Поскольку энергия, излучаемая квазизвездами, значительно превосходит выход термоядерных процессов, обуславливающих горение обычных звезд (при этих последних в энергию излучения превращается лишь ~1% массы), то основная задача заключалась в отыскании каких-то новых источников энергии. Поскольку энергия системы гравитирующих частиц пропорциональна квадрату их числа, тогда как ядерная энергия пропорциональна числу частиц, то гравитация способна перекрыть другие взаимодействия. Возникла надежда подойти к пониманию квазизвезд, опираясь на коллапс, при котором в энергию излучения может конвертироваться значительная доля массы.

Однако построить убедительную модель квазизвезд на базе общерелятивистского коллапса, теория которого сама по себе требует развития, до сих пор не удалось. Существенную трудность представляет объяснение и второй характеристики квазизвезд, именно колебаний яркости.

Наряду с квазизвездами требуют объяснения другие недавно открытые астрономические процессы, характеризующиеся столь же гигантскими энергиями, именно взрывы галактик, например M82 [85, 86], а также и более скромные по величине выделяемой энергии процессы в радиогалактиках.

Уже после классических работ Эмдена [87], исследовавшего равновесие больших масс с учетом гравитационного притяжения при задании определенного уравнения состояния (связывающего давление с плотностью), был поставлен вопрос о возможности противодействия коллапсу при возрастании массы системы. В последнее время анализировалось сжатие некой гипотетической звезды с массой порядка  $10^8 M_{\odot}$  ( $M_{\odot}$  — масса Солнца) [88—90]. С другой стороны, рассматривалась эволюция большого числа звезд обычной массы, распределенных весьма плотно в некоторой области [91]. В одном варианте теории Хойла и Фаулера более детально рассматривалась вращающаяся масса порядка  $10^8 M_{\odot}$ , которая в какой-то момент распадается на отдельные части, в дальнейшем коллапсирующие.

Ряд авторов концентрирует внимание на конечном состоянии системы  $A$  барионов, задаваясь, в частности, вопросом о возможности коллапса не только для огромных систем с  $10^{56} - 10^{57} A$ , в которых гравитационные силы приводят к высокому давлению и соответственно релятивистским энергиям частиц, но даже для систем с малыми значениями  $A$  (Уилер, Зельдович). Ввиду роли, которую будут играть квантовые элементарные процессы на конечной стадии коллапса, вся эта проблема вырастает, пожалуй, до одной из самых значительных во всей истории физики [12, 18, 80—82].

Еще в 1935 г. Чандрасекар [93], а затем в 1956 г. Шацман [94] определили равновесные конфигурации в случае, когда главную роль играет давление вырожденного электронного газа, что пригодно при довольно высоких (по сравнению с обычными звездными) плотностях  $10^4 - 10^7 \text{ г/см}^3$ . Данная ситуация соответствует белым карликам.

В 1938—1939 гг. Оппенгеймер, Сербер, Волков [95, 96] (см. также [97, 98]) проанализировали модель вырож-



денного нейтронного газа, определяющего следующую стадию эволюции звезд при сжатии, и нашли второе критическое состояние неустойчивости по отношению к коллапсу (при очень высокой центральной плотности  $\sim 10^{15}$  г/см<sup>3</sup>). Впоследствии удалось описать оба критических состояния единственным общерелятивистским уравнением состояния гидростатического равновесия (см. [6, 80, 81, 99]). При этом масса, барионное число и радиус звездной конфигурации при росте центральной плотности до бесконечности изменяются своеобразным затухающим периодическим образом [81, 100].

При числе барионов, большем некоторого критического ( $A_c \approx 10^{57}$ ), не существует барьера по отношению к гравитационному коллапсу для холодной материи, образовавшейся в результате термоядерной эволюции.

Качественно значение  $A_c$  получим сразу, приравняв гравитационную энергию  $\sim Am^2$  к энергии ферми-газа  $A^{1/3}L_0^3$ , где  $L_0$  — планковская длина ( $\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$  см) и  $m$  — масса бариона, выраженная в см ( $\sim 10^{-52}$ ). Эта критическая масса будет порядка  $0,7 M_\odot$  (Солнце, однако, со своей высокой температурой, конечно, никак не соответствует холодной материи рассматриваемого типа) в приближении расчета идеального газа; для реального газа [101, 102] имеем  $(1,6-2) M_\odot$ . При меньших  $A$  будет иметь место барьер для коллапса по отношению к подобному сжатию, высота которого, конечно, увеличивается при уменьшении  $A$ , достигая максимума при  $A/4$ . При меньших взаимных расстояниях необходимо применять квантовые соображения.

В условиях сильно сжатого вещества и очень большого значения кривизны, так же как при сверхвысоких температурах, система элементарных частиц будет смешана с газом гравитонов ввиду предсказываемой нами и Уилером [103, 99] возможности взаимных трансмутаций (см., кроме того, работы [104-107] и книгу Станюковича [108], где с новых точек зрения рассмотрены и другие проблемы гравитинамики). При этом на гравитоны, как и на фотоны, в состоянии равновесия приходится одинаковая доля энергии, примерно равная энергии ферми-частиц или отдельно античастиц. Например, для газа

электронов, позитронов и фотонов имеем известное соотношение:  $7 : 7 : 8$  [55, 109, 110].

Анализируя коллапс, Уилер вновь настаивает на возможности изменения числа барионов. Тем самым предсказывается новый вид естественной радиоактивности, связанный со спонтанным изменением числа барионов. Что касается уничтожения барионов, то мы повторно обратим внимание на формализм аномальных спиноров [37, 111], который приводил к возможности уничтожения четверок барионов и на который ссылался Уилер в качестве формального обоснования своей гипотезы.

Интерес к коллапсу привел к необходимости построения общерелятивистской гидродинамики и статистической физики (об основах последней см. работу Черникова [102].) Ливдквист [112] находит общерелятивистский аналог больцмановского уравнения переноса, обобщая уравнения переноса излучения в астрофизике и теорию диффузии нейтронов. Ранее был рассмотрен сферически-симметричный коллапс при наличии потока нейтрино, но перенос трактовался макроскопически [113].

Возвращаясь к моделям квазизвезд, укажем, что одно из возможных объяснений мощных источников энергии предлагает Терлецкий, допуская существование частиц с отрицательной массой [114] (см. также [78]). Это предсказание связывается с новой трактовкой причинности, понимаемой как следствие или последовательное выражение закона возрастания энтропии. Позднее возможную связь квазизвезд и частиц отрицательной массы отметил Гоффман [16].

Мы с Курдгелаидзе [115] обращаем внимание на то, что внутри сверхплотных звезд могут находиться области гипотетических субчастиц дробного электрического и барионного зарядов, по массе превышающих гипероны («кварки» Гелл-Манна и Цвейга, или, в иной трактовке, «трионы»). Ввиду флуктуаций подобные области будут нестабильны, и в результате превращений может выделяться большая энергия.

Было рассмотрено взаимное проникновение галактик, состоящих из вещества и антивещества, с последующей аннигиляцией (учитывая время проникновения  $10^7$  лет при размерах галактик  $10^5$  световых лет). Здесь,

однако, как и для многих других гипотез, трудностью является объяснение вариаций интенсивности.

Предлагалось объяснить излучение квазизвезд огромным увеличением напряженности магнитного поля при гравитационном коллапсирующем сжатии и связанными с этим процессами синхротронного излучения [117]. Озерной [118, 119] пытается объяснить на этой базе также колебания светимости. Рядом авторов была указана заслуживающая большого внимания аналогия между расширением (и возможным сжатием) Вселенной и процессами в квазизвездах. Новиков [120] развивает идею о квазизвездах как задержавшихся в расширении частях Вселенной, когда столкновения с падающим снаружи веществом могут привести к выделению огромной энергии. Хойл и Нарликар [121] применяют к квазизвездам метрику стационарной Вселенной с добавочным членом «творения» материи, надеясь обеспечить характерные пульсации.

Связывая высокую оптическую светимость с крайне быстрым образованием звезд после недавнего коллапса галактики, Филд [122, 123] пытается показать, что коллапс и образование звезд могут привести к наблюдаемому значению светимости. Калицын [124] применяет к квазизвездам, рассматриваемым как нестационарные объекты огромной массы, известные соотношения между массами, радиусами и светимостями звезд. Например, по Киперу

$$\lg \left( \frac{L}{L_{\odot}} \right) = 4 \lg \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right).$$

Для радиусов Шацман и Пеккер дают (см. [94])

$$\frac{R}{R_0} = \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{0,75}.$$

Не обсуждая здесь законности подобной экстраполяции, для квазизвезд отсюда получаем

$$M = 3 \cdot 10^4 M_{\odot}, \quad R = 1,6 \cdot 10^3 R_{\odot}.$$

Калицын [124], Калинин и Недялков [125] присоединяются к группе авторов «сцинтилляционных» гипотез,

с точки зрения которых речь идет о ряде последовательных взрывов (порядка сотни в год). Энергия одного взрыва будет  $\sim 10^{50}$  эрг, как для обычной сверхновой.

Было обращено внимание на возможную роль гравитационного излучения в квазизвездах и излучения нейтрино в условиях коллапса, а также на роль нейтронизации атомов [126].

Отметим еще недавнее открытие рентгеновских лучей, испускаемых отдельными локализованными источниками: в созвездии Скорпиона, из знаменитой Крабовидной туманности, являющейся также интенсивным источником радиоволн синхротронного типа, и др. — всего около 10 объектов (к весне 1965 г.). Речь идет об области  $0,1$ — $100$  Å, исследованной с помощью ракет, снабженных специальными счетчиками Гейгера, начиная с июня 1962 г., когда Гурский и Росси открыли довольно интенсивное излучение из центра нашей Галактики (около  $3$  Å).

Речь может идти о нейтронных звездах, являющихся давно предсказанными гипотетическими стадиями эволюции ряда звезд. Их ядра будут иметь примерно в 100 миллионов раз большую плотность, чем ядра белых карликов. Температура в центре будет достигать  $6 \cdot 10^9$  °К, а на поверхности — около  $10^6$  °К, поэтому по законам черного излучения  $n$ -звезда будет излучать в области рентгеновских лучей примерно в  $10^{10}$  раз больше энергии, чем в оптической области.

Прямого подтверждения существования  $n$ -звезд еще нет; напротив, наблюдение покрытия интенсивного источника в Sc Луной в июле 1964 г. показало, что здесь имеется сравнительно протяженный источник рентгеновских лучей [127]. Конечно, не исключена возможность не теплового, а синхротронного или иного объяснения подобных рентгеновских лучей.

Наличие космических рентгеновских лучей представляет значительный интерес и для космологии, в частности, в связи с предсказаниями стационарной модели порождения материи.

Отметим еще ряд пунктов интересной теории сверхплотных гиперонных конфигураций Амбарцумяна — Саакяна, являющейся развитием теории нейтронных звезд

[115, 128—130]. При огромных плотностях, превышающих ядерную ( $\sim 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>), вещество будет состоять из вырожденного газа различных барионов (гиперонов и нуклонов) и лептонов (к которым разумно добавить возбужденные состояния барионов, т. е. резонаны, а также гипотетические субчастицы — кварки; следует учесть еще бозоны, т. е. пионы и фотоны. При понижении плотности (по мере того, как она будет становиться ниже пороговой для рождения этого вида частиц) будут последовательно исчезать разные барионы и возникать зародыши атомных ядер.

При плотностях  $\rho = 2,49 \cdot 10^{11}$  г/см<sup>3</sup> исчезнут нейтроны и мы вступим в фазу «eA», характеризующую белые карлики и, наконец, при дальнейшем понижении плотности перейдем в область обычных звезд (см. [20, 102, 131]). При расчете по ОТО возникают конфигурации с обратным знаком дефекта массы, когда масса оказывается больше (а не меньше) суммы масс частиц.

В заключение снова подчеркнем крайнюю актуальность проблем релятивистской астрофизики, тесно связанных с физикой элементарных частиц, астрономией, космологией и всей теорией гравитации. Подробный обзор новейших идей и результатов в этой области дан в работе [82].

## V. Гравитация, космология и элементарные частицы

Важнейшими проблемами являются квантование гравитационного поля и учет гравитации в новейшей теории частиц, характеризующихся различными симметриями. Не исключено, что мы придем к какому-то типу дискретного пространства на самых малых расстояниях [132].

Исходным пунктом Комара [16, 133] по включению внутренних симметрий элементарных частиц в общерелятивистскую схему является рассмотрение решений эйнштейновских уравнений, удовлетворяющих тем граничным условиям на бесконечности, которые допускают гравитационное излучение. Это приводит к обобщенной группе Бонди — Мещнера (*GBM*) (см. [134]). Неоднородная группа Пуанкаре *P* (группа Лоренца *L* с трансляциями) является ее подгруппой. Группа *BM* имеет две

абелевы нормальные подгруппы: четырехмерную группу  $I$ , связанную с трансляциями, и бесконечномерную группу супертрансляций  $ST$ , по отношению к которой трансляции образуют нормальную подгруппу.

Группа Лоренца входит в  $P$  двумя путями:

а) она является подгруппой  $P$ , хотя и не будет нормальной подгруппой; б) она является фактор-группой  $P$ , именно  $L = P/T$ . Отсюда возникают два типа законов сохранения, связанных с  $L$ : для полного момента (через  $a$ ) и для спина (через  $b$ ).

Возникает гипотеза, что наряду с  $L = GBM/ST$  следует рассматривать также  $I = GBM/T$  и что с  $I$  могут быть связаны внутренние симметрии типа изоспина [135].

Другая недавняя попытка связать внутренние симметрии с геометрическими и общерелятивистскими соображениями принадлежит Нееману [136]. Она перекликается с предложениями де Бройля и нашими — объединить обычное 4-пространство с внутренним изотопическим пространством [111, 137—141, 37].

На языке современной теории речь идет, во-первых, о релятивизации группы  $SU_3$ , оказавшейся столь успешной для описания гадронов (сильно взаимодействующих частиц), или же некоторых ее обобщений типа  $SU_6$ , и, во-вторых, относительно ее объединения с группой Пуанкаре, или даже, на наш взгляд, с теми или иными группами, характеризующими эйнштейновскую гравитационную динамику и фридмановскую космологию (например, хотя бы с группой де Ситтера, Бонди — Мецнера и др.).

Интересный анализ космологических моделей с точки зрения особого конформного формализма проводит Пенроуз (*статья 5*); физическое 4-пространство  $M$  конформно отображается во внутреннюю область вспомогательного многообразия  $M'$ , так что «бесконечность»  $M$  представляется некоторой «конечной» гиперповерхностью. Важно, что уравнения поля безмассовых частиц являются конформно инвариантными.

Анализ граничных условий в связи с трактовкой бесконечно далекой гиперповерхности и группой Бонди — Мецнера дается в лекциях Сакса (*статья 4*). Эти важные вопросы со своей стороны связаны с топологическими сторонами теории.

В данной связи вновь приобрело интерес вложение искривленного пространства в плоское пространство, также связанное с топологическими соображениями (см., например, статью Фридмана — статья 6).

Относясь серьезно к учету космологических обстоятельств, мы должны последовательно использовать в качестве граничных условий метрику расширяющейся Вселенной, а не обычную нормировку на метрику статического мира Минковского на бесконечности. Возникает, в частности, задача получения обобщенного шварцшильдовского решения, погруженного в расширяющееся пространство [116, 142—145].

Задавая в сферически-симметричном случае метрику в обычном виде

$$ds^2 = c^2 e^{\nu} dt^2 - e^{\mu} \delta_{ij} dx^i dx^j,$$

ищем точное решение, комбинируя формы Шварцшильда и Фридмана:

$$e^{\nu} = \left( \frac{1 - \frac{m}{2\sigma}}{1 + \frac{m}{2\sigma}} \right)^2, \quad e^{\mu} = \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{k_0}{4} r^2\right)^2} \left(1 + \frac{m}{2\sigma}\right)^4. \quad (\text{A})$$

Оказывается

$$\sigma = R(t) \sqrt{a + \bar{r}^2}, \quad \bar{r} = \frac{r}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{4} r^2}},$$

где  $a$  — постоянная интегрирования. При  $a = 0$  эта метрика Мак-Витти — Пахнера — Брежнева описывает поле сингулярной частицы в пространстве Фридмана.

Фролов [146] нашел метрику, обобщающую в указанном направлении внутреннюю метрику Шварцшильда:

$$e^{\nu} = \left( \frac{1 - \frac{k}{4} \sigma^2}{1 + \frac{k}{4} \sigma^2} \right)^2, \quad e^{\mu} = \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{k_0}{4} r^2\right)^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} \sigma^2\right)^2}. \quad (\text{B})$$

Обе метрики являются точными решениями уравнений Эйнштейна. В случае слабого поля метрика (A) при  $a = 0$  дает

$$e^{\nu} = 1 - \frac{2\bar{G}M}{c^2 r R(t)},$$

где эффективная гравитационная постоянная

$$\bar{G} = \frac{G}{R(t)}$$

будет уменьшаться вековым образом благодаря расширению Вселенной, что соответствует гипотезе Дирака. Не забывая о различных упрощениях, мы все же склонны придать значение полученному результату и можем попытаться применить его к остро дискутируемой проблеме расширения Земли. В данной связи приобретает интерес анализ геодезических и планетных орбит в указанной неоднородной модели Вселенной. Как бы то ни было, далеко еще не решенная проблема расширения Земли несомненно должна рассматриваться также и с точки зрения новейшей теории гравитации. Гипотеза расширения Земли рассматривается Йорданом (*статья 9*). (См. также [18, 108, 147—153].)

Связь космологии с элементарными частицами можно искать и в других направлениях. Обобщая эмпирическое правило, связывающее массы электрона и протона с соответствующими константами связи, получаем

$$\frac{m_e}{M} \sim \frac{e^2}{g^2},$$

где  $m_e = \alpha \alpha_e$ ,  $M = \alpha \alpha_g$ . Курдгелаидзе [154] получил для массы гравитона

$$m_g \sim \alpha \alpha_{gr} \sim 10^{-66} \text{ г} \quad (\alpha_{gr} = 2 \cdot 10^{-33}).$$

К тому же значению приходят из других соображений Гомиде [155] и Станюкович [108]. Величину того же порядка можно получить, исходя из эйнштейновских уравнений с эмпирическим значением космологического члена, который можно сопоставить массе гравитона, поскольку в приближении слабого поля имеем уравнение типа Клейна — Гордона

$$\left[ \square - \left( \frac{m_g c}{b} \right)^2 \right] \eta_{\mu\nu} = 0, \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} = \delta(h_{\mu\nu}),$$



космологический же член  $\lambda$  определяется через постоянную Хаббла

$$H^2 =: \lambda, \quad H = \frac{m_{gr}c^2}{h}.$$

Отметим кстати, что сейчас все большее число авторов убеждается в необходимости покончить с недоразумениями относительно космологического члена; его, очевидно, следует, как правило, вводить из общих соображений, а опускать лишь оговорив это как специальное приближение (см. оценки у Мак-Витти [142, 143, 156]).

Недавно наметился еще один неожиданный путь возможной связи космологии, т. е. в конечном счете общего гравитационного поля Вселенной, с физикой элементарных частиц. Опыты Фича — Кронина (см. [157]) обнаружили аномальный распад  $K_2^0$ -мезонов на два  $\pi$ -мезона (в 0,2% случаев) вместо обычного распада на три  $\pi$ -мезона. Это впервые указывает на несохранение комбинированной  $CP$ -четности, а следовательно, согласно теореме Людерса, и временной четности  $T$ . До сих пор еще нет общепризнанного объяснения этой аномалии, несмотря на множество предложений. Не останавливаясь здесь на перечислении всех гипотез, использующих, например, идею о двух промежуточных бозонах или примеси различных «обычных» сил, нарушающих  $CP$ -четность, отметим гипотезы гравитационного, астрономического и космологического типа [158—162]. В работе Бернштейна, Каббиво и Ли [159] вводится новое векторное поле, порождаемое гиперзарядом  $Y$  (т. е. барионным числом) Галактики и действующее по-разному на  $K^0$ - и  $\bar{K}^0$ -мезоны, обладающие разными по знаку гиперзарядами  $Y$  (т. е. по существу разной странностью). Поскольку  $K_2^0$  и  $K_1^0$  являются смесями  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , это приводит к «аномальному» распаду  $K_2^0$ . Тогда, сравнивая вероятность распада, вычисленную из закона взаимодействия ньютон-кулоновского типа  $V = f^2 Y_1 Y_2 / r$ , с экспериментальными данными, можно определить константу связи  $f^2$ , которая укажет на ультраслабое взаимодействие, еще менее интенсивное, чем гравитационное. Хотя эксперименты не подтвердили ожидавшейся энергетической зависимости, идея допущения каких-то астрономических сил представляется интересной.

Однако на наш взгляд необходимо учесть взаимодействие со всеми галактиками, притом разбегающимися, и тем самым приблизиться к точке зрения Курдгелайдзе и нашей, подчеркивающей необходимость выделения оси времени во всех вообще процессах, ввиду расширения Вселенной [20, 39]. Согласно этой гипотезе, волновые функции частиц (античастиц) приобретают дополнительные множители  $(1 \pm F)$ , где фридмановский фактор  $F$  определяет космологическую метрику

$$ds^2 = (1 + F)^4 (c^2 dt^2 - dr^2),$$

$$F = \frac{\alpha}{\tau} = \frac{1}{4} \frac{\rho}{\rho_c},$$

где  $\rho$  — наблюдаемая плотность вещества  $\sim 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_c$  — критическая плотность

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 10^{-29} \text{ г/см}^3.$$

(Здесь, однако, не учтены еще нейтрино, возможные гравитационные волны и потухшие звезды, см. [168].) Тогда реальные  $K_2^0$ - и  $K_1^0$ -мезоны окажутся смесью  $(K_2^0)_0$  и  $(K_1^0)_0$ , определенных в плоской метрике:

$$K_2^0 = (K_2^0)_0 + F (K_1^0)_0,$$

что и приводит к возможному объяснению аномального распада  $K_2^0$ . Окубо и Лейтнер [160] выдвинули предположение о различном гравитационном взаимодействии  $K^0$  и  $\bar{K}^0$  (однако эксперименты [163] показали равенство масс  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ ). Гипотеза Нишиджимы [161] о существовании «теневого» мира со своими звездами и частицами, слабо связанного с нашим, также перекликается с попытками связать аномальный распад  $K_2^0$  с необычными, неэлементарными, например, «космологическими» силами.

Идея связей локальных свойств материи с космологией в известной мере близка к тем или иным вариантам принципа Маха. Используя трактовку последнего в гравитинамике Дикке [148], Роман пытается даже вывести массу бариона и сохранение числа барионов [164]. Уилер [14] и Хенль — Денен [165, 166] предлагают отбирать из всех возможных только маховские решения.

Во всяком случае, как необходимость учета гравитации в квантовой теории поля, развитие теории взаимных трансмутаций частиц и гравитонов, так и намечаемые связи с космологией подсказывают, что в настоящее время уже нельзя оторвать физику элементарных частиц от гравитации — космологии. Складывается даже впечатление, что единая теория частиц, т. е. обычной материи, не сможет быть построена без учета гравитации и реальных космологических факторов, таких, как расширение Вселенной и огромная преимущественная концентрация частиц по сравнению с античастицами [158, 167].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S c h a t z m a n E., Space Sci. Revs., 1, 774 (1963).
2. Annuario per il 1964, Osservatorio Astrofis. Arcetri, Firenze, 1963.
3. V e t t e J. I., C a s a l F. G., Phys. Rev. Lett, 6, 334 (1963).
4. R e i n e s F., Neutrino, preprint, 1965; Phys. Rev. Lett., 14, 20 (1965).
5. «Новейшие проблемы гравитации», сборник статей под ред. Д. Иваненко, ИЛ, 1961.
6. У и л е р Дж. А., Гравитация, нейтрино, Вселенная, ИЛ, 1962.
7. И н ф е л ь д Л., П л е б а н ь с к и й Е., Релятивизм и движение, ИЛ, 1962.
8. В е б е р Дж., Общая теория относительности и гравитационные волны, ИЛ, 1963.
9. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», сборник статей под ред. Д. Иваненко, изд-во «Мир», 1964.
10. С и н г Дж., Общая теория относительности, ИЛ, 1963.
11. Гравитация и относительность, сб. статей под ред. А. З. Петрова, изд-во «Мир», 1965.
12. Les Théories relativistes de la Gravitation, Paris — Royaumont, 1959, CNRS, Paris, 1962.
13. B r i l l D. R., Nuovo Cimento (Suppl.), 2, 3 (1964).
14. Reports of the International Gravitational Conference (Jablonna — Warszawa, 1962), Paris — Warszawa, 1962.
15. Atti del Convegno sulla Relativita generale, Nuovo Cimento (Suppl.) Firenze (1964).
16. Proceedings of the 4-th International Gravitational Conference, London, 1965.
17. Школа им. Э. Ферми в Комо, 20 курс, Италия, 1961.
18. Relativity, Groups and Topology, ed. C. DeWitt, B. DeWitt, New York — London, 1964.
19. Тезисы Первой Советской гравитационной конференции, изд-во МГУ, М., 1961.

20. Проблемы гравитации. Тезисы Второй Советской гравитационной конференции, Тбилиси 1965 г., изд-во ТГУ, Тбилиси, 1965.
21. Фок В. А., Иваненко Д., *Compt. Rend.*, 188, 1470 (1929).
22. Brill D., Cohen J., preprint, Yale University, 1965.
23. Schmutzer E., *Zs. Naturforsch.*, 16a, 8 (1961).
24. Саp F., Majerottow, Roob W., Unteregger P., *Spinor Calculus in Riemannian Manifolds*, preprint, University of Innsbruck, Austria, 1965.
25. Родичев В. И., *ЖЭТФ*, 40, 1469 (1961); *Изв. вузов, сер. физ.*, № 2, 122 (1963); № 1, 142 (1965); см. также [20], стр. 132.
26. Левашев А. Е., Иванецкая О. С., *Acta Physica Polonica*, 23, № 5 (1963).
27. Möller C., *Ann. of Phys.*, 12, 118 (1961); *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, 1, № 10 (1961).
28. Plebanski E., Pellegrini C., *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, 2, № 4 (1962).
29. Sciama D. W., *Journ. Math. Phys.*, 2, 472 (1961).
30. Utiyama R., *Phys. Rev.*, 101, 1597 (1956) (См. перевод в сборнике [9].); см. также [158].
31. Бродский А. М., Иваненко Д., Соколик Г. А., *ЖЭТФ*, 41, 1327 (1961).
32. Kibble T. W., *Journ. Math. Phys.*, 2, 212 (1961). (См. перевод в сборнике [9].)
33. Фролов Б. Н., *Вестник МГУ, сер. физ. астроном.*, № 6 (1963); № 2 (1964); см. также [20], стр. 154, 160.
34. Соколик Г. А., *ДАН СССР*, 148, 549 (1963).
35. Арифов Л. Я., Гутман И. И., см. [20], стр. 40.
36. Иванецкая О. С., см. [20], стр. 143.
37. Соколик Г. А., *Групповые методы в теории элементарных частиц*, Атомиздат, 1965.
38. Trautman A., в книге *Les Theories relativistes de la Gravitation*, Paris, 1962.
39. Иваненко Д., *Gravitation and Unified Field Theory*, *Atti del Convegno sulla Relativita generale*, Firenze, 1964; *Изв. вузов, сер. физ.*, № 3 (1965).
40. Смородинский А. Я., см. [20], стр. 70, 74.
41. Dügg H. P., Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий (Дубна, СССР, 1964), в печати.
42. Marshak R., Okubo S., Доклад на XII Международной конференции по физике высоких энергий (Дубна, СССР, 1964), в печати.
43. Наумов А. И., *Изв. вузов, сер. физ.*, № 3 (1965).
- 43а. Курдгеладзе Д. Ф., *Изв. вузов, сер. физ.*, № 6 (1964).
44. Ткаченко А. А., см. [20], стр. 114.
45. Trautman A., в сборнике «Gravitation», ed. L. Witten, New York, 1960.
46. Петров А. З., *Пространства Эйнштейна*, М., 1961.
47. Penrose R., *Ann. Phys.*, 10, 171 (1961); *Phys. Rev. Lett.*, 10, 66 (1963).
48. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В., *препринт ОИЯИ*, Дубна 1964; см. также [20], стр. 147, 174.

49. О г н е в е ц к и й В. И., П о л у б а р и н о в И. В., пре-  
принт ОИЯИ, P206, Дубна, 1965.
50. Г р а н о в с к и й Я. И., П а н т ю ш и н А. А., Изв.  
АН Казах. ССР, сер. физ., № 1 (1965): см. также [20], стр. 87.
51. Ф о к В. А., Теория пространства, времени и тяготения, М.,  
1961.
52. Б и н д е р Г. М., Дипломная работа, Казахский универси-  
тет, 1964.
53. Н а в а с Р., Journ. Math. Phys., 5, 373 (1964).
54. А б д и л д и н М., Вестник ЛГУ, сер. физ., № 4 (1964)  
(см. также [20], стр. 222).
55. И в а н е н к о Д., С о к о л о в А., Классическая теория  
поля, М., 1961.
56. W e b e r J., в сборнике [18], стр. 863.
57. W e b e r J., Доклад на Четвертой Международной гравита-  
ционной конференции (Лондон, 1965).
58. Б р а г и н с к и й В. Б., УФН, 86, 433 (1965) (см. также [20],  
стр. 259).
59. Д у с о н Ф., Gravity, Fondation Prize Essay (1962).
60. М и р о н о в с к и й В. Н., ЖЭТФ, 48, 358 (1965).
61. З е л д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., ДАН СССР, 155,  
1033, 1083 (1964).
62. Ш к л о в с к и й И. С., К а р д а ш е в Н. С., ДАН СССР,  
155, 1037 (1964).
63. W e b e r J., в сборнике [11].
64. Б р а г и н с к и й В. Б., Р у д е н к о в В. Н., Р у к м а н Г. И.,  
ЖЭТФ, 43, 52 (1962).
65. Б р а г и н с к и й В. Б., Р у д е н к о в В. Н., Ученые записки  
Казанского университета, 123, 96 (1963).
66. Г е р ц е н ш т е й н М. Е., П у с т о в о й т В. И., ЖЭТФ,  
43, 605 (1962).
67. W e b e r J., Nuovo Cimento, 29, 130 (1963).
68. К о п в и л л е м У. Х., Щ у к и н а Р. В., Изв. вузов, сер.  
физ., № 5, 6 (1963).
69. К е с с е л ь А. Г., К о п в и л л е м У. Х., ФТТ, 5, 667 (1963).
70. R a m s e y N., IRE, 11, 177 (1962).
71. Г а л к и н С. Л., Изв. вузов, сер. физ., № 3 (1963) (см. также  
[20], стр. 97).
72. С т р а х о в с к и й Г. М., У с п е н с к и й А. В., УФН,  
86, 421 (1965).
73. S a d e h F., preprint, 1964.
74. S h a p i r o I. J., Phys. Rev., Lett. 13, 789 (1964).
75. G r e e n s t e i n J., Sci. Am., 209, 54 (1963). [См. перевод:  
УФН, 83, 549 (1964).]
76. S a n d a g e A., Astrophys. Journ., 139, 416 (1964).
77. C h i u H. J., Ann. Phys., 26, 364 (1964).
78. Quasi-Stellar Sources and Gravitational Collapse, ed. J. Robin-  
son, E. Shucking, A. Shields, Chicago, 1965.
79. Proceedings of the Second Texas Conference on Relativistic  
Astrophysics, Austin, December, 1964.

80. Greenstein J., Доклад на IV Международной гравитационной конференции, Лондон, 1965.
81. Wheeler J., Harrison B., Thorne K., Wakano M., Gravitation Theory and Gravitational Collapse, Chicago, 1965.
82. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д., УФН, 84, 377 (1954); 86, 447 (1965).
83. Burbidge G. R., Burbidge E. M., Sandadge A., Astrophys. Journ., 137, 1005 (1963).
84. Hoyle F., Fowler W. A., Burbidge G. R., Burbidge E. M., Astrophys. Journ., 139, 909 (1964).
85. «Наблюдательные основы космологии», сборник статей, изд-во «Мир», 1965.
86. Sandadge A., Sci. Am., 00, 38 (1964).
87. Emden R., Gaskugeln, Leipzig, 1907.
88. Iben I., Astrophys. Journ., 138, 1090 (1963).
89. Hoyle F., Fowler W. A., Month. Not., 125, 169 (1963). Nature, 197, 533 (1963).
90. Michel F. G., Astrophys. Journ., 138, 1097 (1963).
91. Ulam S. M., Welden W. E., Nature, 201, 1202 (1964).
92. Сахаров А. Д., ЖЭТФ, 49, 345 (1965).
93. Chandrasekhar S., Introduction to the Study of Stellar Structure, Chicago, 1939 (имеется перевод: С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950).
94. Schatzman E., Handbuch der Physik, Bd. 51, Berlin, 1958.
95. Oppenheimer J. R., Serber R., Phys. Rev., 54, 530 (1938).
96. Oppenheimer J. R., Volkoff G., Phys. Rev., 55, 374 (1959).
97. Ландау Л. Д., Phys. Zs. USSR, 1, 285 (1932).
98. Tauber G. E., Weinberg J. W., Phys. Rev., 122, 1342 (1961).
99. Wheeler J., в сборнике [18].
100. Дмитриев Н. А., Холин С. А., Вопросы космологии, 9, 254 (1962).
101. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астроном. журн., 38, 785 (1961).
102. Черников Н. А., ДАН СССР, 114, 89, 544 (1962); Acta Physica Polonica, 23, 629 (1963) (см. также [20], стр. 71).
103. Иваненко Д., Соколов А. А., Вестник МГУ, № 8 (1947).
104. Соколов А. А., Вестник МГУ, № 9 (1952).
105. Владимиров Ю. С., ЖЭТФ, 43, 89 (1962).
106. Коркина М. П., Украинский физ. журнал, 5, 762 (1960).
107. Пийр И., Теоретические записки Института физики Эстонской АН, Тарту, 1957.
108. Станюкович К. П., Гравитационное поле и элементарные частицы, М., 1965.
109. Ватагин Т., Nuovo Cimento, 36, 300 (1965).

110. Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, М., 1952.
111. Бродский А. М., Иваненко Д., ЖЭТФ, 36, 1279 (1959) (см. также [20], стр. 195).
112. Lindquist R. W., preprint, Austin University, Texas, 1965.
113. Misner C. W., Shari F., preprint, 1965.
114. Терлецкий Я. П., Парадоксы теории относительности, изд-во Университета Дружбы Народов, М., 1965 (см. также [20], стр. 238).
115. Иваненко Д., Курдгелайдзе Д. Ф., Астрофизика, Ереван, 1965, в печати.
116. Rашнер J., Phys. Rev., 137B, 1379 (1965).
117. Гинзбург В. Л., Озерной Л. М., Сыроватский С. И., ДАН СССР, 154, 557 (1964).
118. Озерной Л. М., ДАН СССР, 163, 50 (1965).
119. Озерной Л. М., Астроном. журн., 43, № 2 (1966).
120. Новиков И. Д., Астроном. журн., 41, 1075 (1964).
121. Hoyle F., Narlikar S., Proc. Roy. Soc., A273, 1 (1963).
122. Field G., Astrophys. Journ., 140, 1434 (1964); 141, 1155 (1965).
123. Field G., Nature, 202, 786 (1964).
124. Калицын Н. С., см. [20], стр. 34, 253.
125. Nedelkov I., Kalinkov M., Compt. Rend., Bulg. Acad. Sci., в печати.
126. Зельдович Я. Б., Гусейнов О., Письма ЖЭТФ, 1, 11 (1965).
127. Friedman G., Journ. Sci. Am., 210, № 6, 36 (1964).
128. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астроном. журн., 37, 193 (1960).
129. Саакян Г. С., Чубарян Э. В., Сообщения Бюраканской обсерватории, 34, 99 (1963).
130. Salpeter E. E., Appl. Journ., 134, 669 (1961).
131. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Астроном. журн., 49, 193 (1963).
132. Вяльцев А. Н., Дискретное пространство — время, изд-во «Наука», М., 1965.
133. Комар А., preprint, Jeshiva University, 1965.
134. Sachs R., Phys. Rev., 128, 285 (1962).
135. O'Raifeartaigh L., Phys. Rev. Lett., 14, 575 (1965).
136. Ne'eman Y., Rev. Mod. Phys., 37, 227 (1965).
137. Melvin M. A., Roskies R., Spacetime and elementary particle groups (Report Conferences Ohio University, preprint, 1965).
138. Иваненко Д., Соколик Г., ДАН СССР, 97, 635 (1954).
139. De Broglie L., Theorie des particules élémentaires, Paris, 1964.
140. De Broglie L., Bohm D., Hillion P., Halbwachs F., Takabayasi T., Vigier J., Phys. Rev., 129, 438, 451 (1963).
141. Kursunoglu B., Rep. of Miami Conference, 1965.
142. McVittie B. C., Month Not., 93, 325 (1933).

143. Мак-Витти Дж., Общая теория относительности и космология, ИЛ, 1961.
144. Rашнер J., Zs. Phys., 164, 574 (1961).
145. Брежнев В. С., Фролов Б. Н., Иваненко Д., Изв. вузов, сер. физ., 1965, в печати.
146. Фролов Б. Н., Известия вузов, сер. физ., в печати.
147. Dicke R., Science, 138, 653 (1962).
148. Brans C., Dicke R., Phys. Rev., 124, 985 (1961).
149. Jordan P., Schwerkraft und Weltall, 2 Aufl., 1952.
150. Egjed L., Acta Geologica, № 6 (1956); Trans. Acad. Sci., 23, 424 (1961).
151. Иваненко Д., Сагитов М. У., Вестник МГУ, сер. физ., № 6, 83 (1961).
152. Буланже Ю. Д., см. [19].
153. Буланже Ю. Д., Земля и Вселенная, № 2 (1965).
154. Курдгелайдзе Д. Ф., ЖЭТФ, 47, 2313 (1964).
155. Gomide F. M., Nuovo Cimento, 30, 672 (1963).
156. Фок В. А., УФН, 80, 353 (1963).
157. Тезисы XII Международной конференции по физике высоких энергий, Дубна, СССР, 1964.
158. Problems on Fundamental Physics, Kyoto, 1965 (юбилейный сборник в честь 30-летия теории Юкавы).
159. Bernstein J., Cabibbo N., Lee T. D., Phys. Lett., 12, 2, 146 (1964).
160. Okubo S., Leitner, Phys. Rev., 136, B1542 (1964).
161. Nishijima R., Phys. Rev., Lett., 14, 205 (1965).
162. Иваненко Д., Курдгелайдзе Д., Симметрии элементарных частиц и космология, препринт, Ужгородский университет, 1965; см. также в [158] статьи Д. Иваненко и С. Хайякавы.
163. Оконов Э. О., Подгорецкий М. И., Хрусталев О. А., ЖЭТФ, 35, 1305 (1958); Любошиц В. Л., Оконов Э. О., Подгорецкий М. И., см. [20], стр. 251.
164. Roman P., Nuovo Cim., 37, 396 (1965).
165. Hönl H., Dehnen H., Ann. d. Phys., 14, 271 (1964).
166. Hönl H., Wiss. Ber. (E. Mach. Inst., Freiburg), № 3, 63 (1962).
167. Развитие и перспективы теории Эйнштейна. Труды юбилейного эйнштейновского симпозиума, Берлин, 1965 (в печати).
168. Gunn T. E., Peterson V. A., Astrophys. Journ., 142, 1633 (1965).
169. Озерной Л. М., Переменные звезды и звездная эволюция, изд-во «Наука», 1965.



# 1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕТРАДНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

*Х. Мёллер*

C. M ø l l e r, «Proceedings of the Conference on the Theory of Gravitation, Warszawa, 1962», Paris, Warszawa, 1964, p. 31.

## 1. Введение

В последние годы старый вопрос о локализуемости энергии гравитационного поля рассматривался с новых точек зрения в целом ряде работ различных авторов; в недавней работе [1] было наконец показано, что удовлетворительное решение этого вопроса может быть получено в рамках тетрадного описания гравитационного поля. Вывод предшествующих исследований состоял в том, что для удовлетворительного решения проблемы энергии нужно, чтобы существовал «комплекс энергии — импульса»  $\Gamma_i^k$ , причем удовлетворяющий следующим свойствам:

I. Величина  $\Gamma_i^k$  есть аффинная тензорная плотность, зависящая алгебраически от переменных гравитационного поля и их производных и удовлетворяющая дивергенциальному закону

$$\Gamma_i^k{}_{,k} \equiv \frac{\partial \Gamma_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (1.1)$$

II. Для замкнутых систем в пространстве — времени, имеющем плоскую на пространственной бесконечности асимптотику, где, следовательно, можно использовать асимптотически прямоугольные координаты, величины

$$P_i = \frac{1}{c} \int \int \int_{x^4=\text{const}} \Gamma_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (1.2)$$

постоянны во времени и преобразуются как ковариантные компоненты свободного вектора при линейных пространственно-временных преобразованиях.

Это свойство весьма существенно для интерпретации вектора  $P_i = \{P_i, -H/c\}$  как вектора полного импульса — энергии.

III. Величина  $\Gamma^k \equiv \Gamma_4^k$  преобразуется как 4-мерная векторная плотность относительно группы чисто пространственных преобразований

$$\bar{x}^i = f^i(x^\alpha), \quad \bar{x}^4 = x^4. \quad (1.3)$$

Это последнее свойство необходимо для того, чтобы количество энергии, содержащееся в конечном объеме пространства  $V$ , именно

$$H_V = - \int \int \int_V \Gamma_4^4 dx^1 dx^2 dx^3, \quad (1.4)$$

не зависело от выбора пространственных координат, используемых при вычислении интеграла (1.4). Таким образом, свойство III есть условие локализуемости энергии в гравитационном поле.

Далее мы должны иметь

$$\Gamma_i^k = \mathfrak{S}_i^k + t_i^k, \quad (1.5)$$

где  $\mathfrak{S}_i^k$  — тензорная плотность материи, фигурирующей в качестве источника гравитационного поля в эйнштейновских уравнениях поля

$$\mathfrak{G}_{ik} = -\kappa \mathfrak{S}_{ik}, \quad (1.6)$$

а  $t_i^k$  — комплекс энергии — импульса гравитационного поля, исчезающий в пределе специальной теории относительности.

Выражение для комплекса энергии — импульса, данное Эйнштейном более чем 40 лет тому назад, имеет вид

$$\Theta_i^k = \mathfrak{S}_i^k + \theta_i^k, \quad (1.7)$$

$$\theta_i^k = \frac{1}{2\kappa} \left( \frac{\delta \mathfrak{L}_E}{\delta g^{lm, k}} g^{lm, i} - \delta_i^k \mathfrak{L}_E \right), \quad (1.8)$$

где

$$\mathfrak{L}_E = \mathfrak{L}_E(g^{ik}, g^{ik}, l) \quad (1.9)$$

есть обычный лагранжиан гравитационного поля. Он отличается от скалярной плотности кривизны

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(g^{ik}, g^{ik}, l, g^{ik}, l, m) \quad (1.10)$$

на некоторую дивергенцию. Поэтому уравнения поля могут быть получены из вариационного принципа варьированием либо  $\mathfrak{H}$ , либо  $\mathfrak{L}_E$ , т. е. мы имеем

$$\mathfrak{G}_{ik} = \frac{\delta \mathfrak{H}}{\delta g^{ik}} = \frac{\delta \mathfrak{L}_E}{\delta g^{ik}}, \quad (1.11)$$

где  $\delta/\delta g^{ik}$  означает вариационную производную соответственно от  $\mathfrak{H}$  или  $\mathfrak{L}_E$ . В отличие от  $\mathfrak{H}$ , которая является истинной скалярной плотностью,  $\mathfrak{L}_E$  есть только аффинная скалярная плотность. С другой стороны,  $\mathfrak{L}_E$  имеет то преимущество, что эта величина есть однородная квадратичная функция только от производных первого порядка.

Используя тождества Бианки, которые с помощью уравнений (1.6) можно записать как

$$\mathfrak{L}_{i^k, k} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{lm} g^{lm},_{i} = 0, \quad (1.12)$$

мы обычным путем придем к эйнштейновскому выражению для  $\Theta_i^k$ , вычисляя  $\mathfrak{L}_{lm}$  в последнем члене в (1.12) при помощи уравнений поля и второго из выражений (1.11) для  $\mathfrak{G}_{lm}$ . Уравнение (1.12), как легко видеть, принимает тогда вид

$$\Theta_i^k,_{k} = 0, \quad (1.13)$$

где  $\Theta_i^k$  есть комплекс, определяемый соотношениями (1.7) и (1.8). Хорошо известно, что эйнштейновское выражение для комплекса энергии — импульса удовлетворяет вышеприведенным свойствам I и II, но не удовлетворяет свойству локализуемости III. Здесь важно отметить, что выполнение свойства II зависит от того, что  $\mathfrak{L}_E$ , а потому и  $\Theta_i^k$  суть однородные квадратичные функции производных первого порядка от полевых переменных  $g^{ik}$ . С другой стороны, тем обстоятельством, что  $\mathfrak{L}_E$  не является истинной скалярной плотностью, объясняется нелокализуемость энергии в эйнштейновской теории.

Во время последней конференции по теории относительности в Ройомоне я отстаивал другое выражение  $\check{\Theta}_i^k$  для комплекса энергии — импульса [2]; его преимущество заключалось в том, что оно удовлетворяет свойству локализуемости III. Получить его можно из (1.12) тем же

путем, что описан выше, но взяв для  $\mathfrak{G}_{lm}$  первое из выражений (1.11) вместо второго [3]. При этом (1.12) примет вид

$$\check{\Theta}_{i^k, k} = 0, \quad (1.14)$$

где

$$\check{\Theta}_i^k = \mathfrak{Z}_i^k + \check{\theta}_i^k, \quad (1.15)$$

а  $\check{\theta}_i^k$  — алгебраическая функция от  $g^{ik}$  и его первых и вторых производных. Комплекс  $\check{\Theta}_i^k$  можно получить также, применив «метод инфинитезимальных координатных преобразований» к скалярной плотности  $\mathfrak{R}$  [4], причем тот факт, что  $\mathfrak{R}$  есть истинная скалярная плотность, будет существенным для свойства III. Согласно (1.4),  $\check{\Theta}_i^k$  также удовлетворяет свойству I, но, как было выяснено в последующей работе [5], зависимость  $\check{\theta}_i^k$  от вторых производных метрического тензора в общем случае нарушает свойство II.

Таким образом, мы находимся в довольно затруднительной ситуации, поскольку имеем два различных выражения для комплекса энергии — импульса  $\Theta_i^k$  и  $\check{\Theta}_i^k$ , но ни то, ни другое не имеют всех трех свойств I—III. Первое выражение удовлетворяет свойствам I и II, но не III, второе же удовлетворяет свойствам I и III, но не удовлетворяет, вообще говоря, свойству II. Можно даже показать, что если не учитывать высших производных метрического тензора, т. е. производных второго порядка, то выражение Эйнштейна  $\Theta_i^k$  — единственное, удовлетворяющее свойствам I и II [5], а  $\check{\Theta}_i^k$  — единственное удовлетворяющее свойствам I и III [6]. Как сказал один из моих студентов в летней школе в Брандайском университете в 1960 г.: «Дело выглядит так, как будто природа хочет нам что-то сказать». Как показало последующее развитие [1, 10], природа хотела сказать нам, что гравитационное поле есть не просто метрическое поле, но в основе своей тетрадное поле. Это означает, что пространство — время представляет собой не просто риманово пространство, но пространство именно того типа, которое впервые рассмотрел Вайценбек [7], и которое можно понимать как риманово пространство с внесенной в него тетрадной структурой.

Результат исследований последних лет мы можем сформулировать как утверждение, что удовлетворительное решение проблемы энергии возможно только в том случае, если уравнения гравитационного поля допускают вывод из вариационного принципа, в котором лагранжева плотность  $\mathcal{L}$  обладает следующими свойствами:

а)  $\mathcal{L}$  зависит алгебраически от переменных гравитационного поля и их первых производных, причем является однородной квадратичной функцией последних;

б)  $\mathcal{L}$  есть истинная скалярная плотность относительно произвольных преобразований пространства — времени.

Но если в качестве переменных гравитационного поля брать компоненты метрического тензора, то подобной функции  $\mathcal{L}$  просто не существует. Однако, как показано в работе [1], ситуация оказывается совершенно иной, если принять, что истинными гравитационными переменными являются компоненты тетрадного поля. Это предположение подкрепляется также тем хорошо известным фактом, что влияние гравитационного поля на фермионное поле материи описывается через тетрадное, а не непосредственно через метрическое поле.

## II. Тетрадная теория гравитации

Пусть  $h_{(a)}{}^i$ ,  $h_{(a)i}$  обозначают соответственно контрвариантные и ковариантные компоненты тетрады, отличаемой индексом  $(a)$ , который принимает значения от 1 до 4, и допустим, что  $h_{(a)}{}^i$  временноподобен, а остальные три тетрадных вектора соответственно пространственноподобны. В обозначениях

$$h^{(a)i} = \eta^{(ab)} h_{(b)}{}^i, \quad h_{(a)i} = \eta_{(ab)} h^{(b)i}, \quad (2.1)$$

где  $\eta_{(a), (b)} = \eta^{(ab)}$  — постоянная  $4 \times 4$ -матрица с диагональными элементами  $\{1, 1, 1, -1\}$ , связь между тетрадным полем и метрическим полем  $g_{ik}(x)$  дается соотношениями

$$h_{(a)i} h^{(a)}{}_k = g_{ik}, \quad \text{или} \quad h_{(a)}{}^i h^{(a)k} = g^{ik}, \quad \text{или} \quad h_{(a)}{}^i h^{(a)}{}_k = \delta^i{}_k. \quad (2.2)$$

Формулы (2.2) определяют метрическое поле, соответствующее данному тетрадному полю. Однако для данного

метрического поля  $g_{ik}(x)$  тетрадное поле определяется этими формулами лишь с точностью до произвольного лоренц-поворота тетрад, ибо если некоторое  $h_{(a)i}$  удовлетворяет формулам (2.2) при данном  $g_{ik}(x)$ , то тогда и всякое

$$\lambda_{(a)i} = \Omega_{(a)}^{(b)}(x) h_{(b)i} \quad (2.3)$$

будет удовлетворять им при условии, что функции  $\Omega_{(a)}^{(b)}(x)$  в каждой точке  $x$  подчиняются обычным требованиям ортогональности. Любую функцию метрического тензора и его производных можно с помощью (2.2) записать как функцию тетрад и их производных, причем подобная функция будет инвариантной относительно произвольных поворотов типа (2.3).

Предположим теперь, что уравнения гравитационного поля могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta \int (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}^{(m)}) dx = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mathfrak{L}$  — гравитационный лагранжиан, обладающий свойствами  $a$  и  $b$ , а  $\mathfrak{L}^{(m)}$  — лагранжиан материи, являющийся функцией переменных тетрадного поля и переменных поля материи и их первых производных. Рассмотрим прежде всего общие следствия этого предположения.

Уравнения поля, следующие из принципа (2.4), имеют вид

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h^{(a)}_k} + \frac{\delta \mathfrak{L}^{(m)}}{\delta h^{(a)}_k} = 0. \quad (2.5)$$

Если положить

$$\frac{\delta \mathfrak{L}^{(m)}}{\delta h^{(a)}_k} = -\mathfrak{T}_{(a)}^k, \quad \mathfrak{T}_i^k = h^{(a)}_i \mathfrak{T}_{(a)}^k, \quad (2.6)$$

то их можно переписать в виде

$$\frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h^{(a)}_k} = \mathfrak{T}_{(a)}^k, \quad \text{или} \quad h^{(a)}_i \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta h^{(a)}_k} = \mathfrak{T}_i^k. \quad (2.7)$$

Величина  $T_{ik} = \mathfrak{T}_{ik} / \sqrt{-g}$  есть тензор материи, проявляющий себя как источник гравитационного поля в уравнениях (2.7). В общем случае  $T_{ik} = T_{ki}$  — симметричный тензор. Это, безусловно, верно в случае, когда материя представлена электромагнитным полем или обычным упругим телом; кроме того, это выполняется для

фермионного поля, если только соответствующий лагранжиан  $\mathcal{L}^{(m)}$  выбрать так, чтобы он был инвариантным относительно произвольных тетрадных поворотов (2.3) [8, 9].

Следствием свойства б, требующего, чтобы  $\mathcal{L}$  был истинной скалярной плотностью, является тождество (см., например, [4])

$$\left( h_i^{(a)} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_k^{(a)}} \right)_{,k} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_l^{(a)}} h_l^{(a)}{}_{,i} = 0, \quad (2.8)$$

которое при учете уравнений (2.7) приводит к закону сохранения

$$\mathfrak{T}_i{}^k{}_{,k} - \mathfrak{T}_{(a)}{}^l h_l^{(a)}{}_{,i} = 0. \quad (2.9)$$

Если ввести тензор

$$\gamma_{ikl} = h_{(a)} i h_{k;l}^{(a)} = -\gamma_{kil}, \quad (2.10)$$

где использовано принятое обозначение для ковариантного дифференцирования, то закон (2.9) можно переписать в форме тензорного уравнения

$$T_i{}^k{}_{;k} + T^{lm} \gamma_{lmi} = 0. \quad (2.11)$$

В случае симметричного тензора материи уравнение (2.11) сводится к обычному закону сохранения из теории Эйнштейна.

Чтобы найти выражение для комплекса энергии импульса, мы будем действовать таким же образом, как и в разделе I, а именно вычислим  $\mathfrak{T}_{(a)}{}^l$  в (2.9) с помощью уравнений поля (2.7). При этом уравнение (2.9) приобретает вид

$$\Gamma_i{}^k{}_{,k} = 0, \quad (2.12)$$

где в аналогии с (1.7) и (1.8)

$$\begin{aligned} \Gamma_i{}^k &= \mathfrak{T}_i{}^k + t_i{}^k, \\ t_i{}^k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{(a)}{}_{l,k}} h_l^{(a)}{}_{,i} - \delta_i{}^k \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Как  $\mathcal{L}$ , так и  $t_i{}^k$  представляют собой однородные квадратичные функции от первых производных тетрадных функций. Дальнейшим следствием свойства б является наличие суперпотенциала (см. [4])

$$\mathfrak{u}_i{}^{kl} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{(a)}{}_{k,l}} h_l^{(a)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^{(a)}{}_{l,k}} h_k^{(a)} = -\mathfrak{u}_i{}^{lk}, \quad (2.14)$$

при помощи которого комплекс  $\Gamma_i^k$  представляется в виде

$$\Gamma_i^k = \mathfrak{U}_i^{kl}, \quad (2.15)$$

Из свойств  $a$  и  $b$  лагранжевой плотности  $\mathfrak{L}$  следует, что  $\mathfrak{U}_i^{kl}$  есть истинная тензорная плотность; легко проверить, что комплекс, задаваемый соотношениями (2.15) и (2.13), удовлетворяет всем трем свойствам I—III, сформулированным в разделе I.

Если умножить (2.14) на  $h^i_{(a)}$ , то вследствие (2.2) мы получим

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h^i_{(a)k,l}} = -h^i_{(a)} \mathfrak{U}_i^{kl} = -\mathfrak{U}_{(a)}^{kl}, \quad (2.16)$$

так что уравнения поля (2.7) приобретут вид

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_k^{(a)}} + \mathfrak{U}_{(a)}^{kl}, l = \mathfrak{F}_{(a)}^k. \quad (2.17)$$

Каждый член здесь является векторной плотностью. Из антисимметрии  $\mathfrak{U}_{(a)}^{kl}$  по индексам  $k$  и  $l$  следует, что векторная плотность

$$\mathfrak{U}_{(a)}^k \equiv \mathfrak{F}_{(a)}^k - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_k^{(a)}} = \mathfrak{U}_{(a),l}^{kl} \quad (2.18)$$

имеет исчезающую дивергенцию

$$\mathfrak{U}_{(a),k}^k = 0. \quad (2.19)$$

Тензорная плотность

$$\mathfrak{U}_i^k \equiv h_i^{(a)} \mathfrak{U}_{(a)}^k = \mathfrak{F}_i^k - h_i^{(a)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_k^{(a)}} = h_i^{(a)} \mathfrak{U}_{(a)}^{kl}, l \quad (2.20)$$

тесно связана с комплексом энергии—импульса  $\Gamma_i^k$ . Действительно, она равна тензорной части  $\Gamma_i^k$ . Вследствие (2.15) тензорную плотность (2.20) можно записать в виде

$$\mathfrak{U}_i^k = \mathfrak{U}_i^{kl}, l - \mathfrak{U}_{(a)}^{kl} h_i^{(a)}, l = \Gamma_i^k - \mathfrak{U}_m^{kl} h_{(a)}^{(m)} h_i^{(a)}, l.$$

Отсюда

$$\Gamma_i^k = \mathfrak{U}_i^k + \mathfrak{U}_m^{kl} \Delta^m_{il}, \quad (2.21)$$

где

$$\Delta^i_{kl} = h^i_{(a)} h^{(a)}_{k,l}. \quad (2.22)$$



Далее, сопоставляя первое из равенств (2.13) с (2.21) и (2.20), получаем для гравитационного комплекса  $t_i^k$  выражение

$$t_i^k = -h_i^{(a)} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_k^{(a)}} + \mathfrak{U}_m^{kl} \Delta^m_{il}. \quad (2.23)$$

Последние члены в (2.21) и (2.23) не имеют тензорных свойств, так как  $\Delta^i_{kl}$  не тензор.

Выводя явное выражение для  $\mathfrak{L}$  в работе [1], мы начали с замечания, что скалярная плотность кривизны  $\mathfrak{K}$ , будучи записана через тетрадные полевые функции, имеет вид

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{b}^l_{,l}, \quad (2.24)$$

где последний член представляет собой дивергенцию векторной плотности  $\mathfrak{b}^l$ , а  $\mathfrak{L}_1$  обладает свойствами  $a$  и  $b$ , указанными в разделе I. Явное выражение для  $\mathfrak{L}_1$  следующее:

$$\mathfrak{L}_1 = |h| [\gamma_{rst} \gamma^{tsr} - \Phi_r \Phi^r], \quad (2.25)$$

где  $h$  есть детерминант

$$h = \det \{h_{(a) i}\}, \quad (2.26)$$

абсолютная величина которого равна

$$|h| = \sqrt{-g}, \quad (2.26')$$

а вектор  $\Phi_r$  определен как

$$\Phi_k = \gamma^i_{ki}. \quad (2.27)$$

Вследствие (2.2) и первого уравнения (1.11) мы получаем из (2.24)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathfrak{L}_1}{\delta h_k^{(a)}} &= \frac{\delta \mathfrak{K}}{\delta h_k^{(a)}} = \frac{\delta \mathfrak{K}}{\delta g^{rs}} \frac{\partial g^{rs}}{\partial h_k^{(a)}} = \\ &= -\mathfrak{G}_{rs} [h^r_{(a)} g^{st} + h^s_{(a)} g^{rt}] = -2\mathfrak{G}_{(a)}^k. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким образом, если выбрать в качестве лагранжиана

$$\mathfrak{L} = k_1 \mathfrak{L}_1, \quad (2.29)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2\kappa}, \quad (2.30)$$

то уравнения поля (2.7), как легко видеть, будут совпадать с уравнениями Эйнштейна (1.6). Далее, при  $\mathcal{L}$ , определенном по (2.25) и (2.29), суперпотенциал (2.14) принимает вид [1]

$$\mathfrak{H}_i{}^{kl} = \frac{|h|}{\kappa} [\gamma^{kl}{}_{;i} - \delta_i^k \Phi^l + \delta_i^l \Phi^k] \equiv \mathfrak{H}_i{}^{kl}. \quad (2.31)$$

Существенным свойством лагранжиана  $\mathcal{L}$ , определяемого выражениями (2.25) и (2.29), является то, что он инвариантен относительно тетрадных поворотов (2.3) при *постоянных* коэффициентах  $\Omega_{(a)}{}^{(b)}$ , но не инвариантен относительно полной группы вращений (2.3). То же самое относится и к величинам  $\mathfrak{H}_i{}^{kl}$  и  $\mathfrak{T}_i{}^k$ , заданным по (2.31) и (2.15). С другой стороны, уравнения поля (2.7), которые в этом случае совпадают с уравнениями Эйнштейна, инвариантны относительно полной группы вращений (2.3) и поэтому будут определять тетрадное поле не настолько точно, чтобы через (2.15) и (2.31) единственным образом задавать распределение энергии. Таким образом, к этим уравнениям поля, определяющим только метрику, должно быть добавлено еще шесть уравнений, которые в работе [1] были записаны как

$$\varphi_{ik} = 0, \quad (2.32)$$

где  $\varphi_{ik}$  — антисимметричный тензор, построенный из функций тетрадного поля и их первых и вторых производных.

Требование общековариантности для уравнений (2.32) не обеспечивает единственности выражения их левых частей. Однако дальнейшее требование, заключающееся в том, что условия (2.32) совместно с уравнениями Эйнштейна и надлежащими граничными условиями должны полностью определять тетрадное поле (с точностью до поворотов тетрад с постоянными коэффициентами), позволяет выделить определенный ограниченный класс выражений  $\varphi_{ik}$ , таких, с которыми уравнения (2.32) дают единственным образом определенные выражения для тетрадного поля в двух наиболее важных случаях — в общем случае слабого поля и в случае «сильного» статического сферически симметричного поля. Фактически это единственные практически важные случаи.

Рассматривая статическую сферически симметричную систему, удобно перейти к системе изотропных координат,

в которых

$$g_{ik} = g_{ii}{}^{(r)}\delta_{ik}, \quad r = \sqrt{\sum_i (x^i)^2}.$$

В этой системе решение наших уравнений, как было установлено в работе [1], имеет вид

$$h_i^{(a)} = \sqrt{|g_{aa}|}\delta_i^a, \quad (2.33)$$

а выражение для  $\Gamma_i^k$ , вытекающее из этого решения, оказывается тождественным выражению Эйнштейна  $\Theta_i^k$ . Эта тождественность  $\Gamma_i^k$  и  $\Theta_i^k$  сохраняется во всех системах координат, которые можно получить из изотропной посредством линейных преобразований. Однако во всех других координатных системах  $\Theta_i^k$  будет отличаться от  $\Gamma_i^k$  и  $\Theta_i^k$  нельзя будет интерпретировать как плотность энергии, ибо  $\Theta_i^k$  в отличие от  $\Gamma_i^k$  не удовлетворяет свойству III. Так обстоит дело, в частности, в системе гармонических координат, которая получается из изотропной с помощью нелинейного преобразования типа (1.3) [1].

В общем случае слабого поля

$$g_{ik} = \eta_{ik} + y_{ik}(x), \quad (2.34)$$

где  $y_{ik} = y_{ki}$  — величины первого порядка малости, мы получаем в системе гармонических координат решение

$$h_{(a)i} = \eta_{ai} + \frac{1}{2}y_{ai} \quad (2.35)$$

и с точностью до первого порядка вновь имеем  $\Gamma_i^k = \Theta_i^k$ . Фактически в этом приближении оба выражения равны тензору материи  $\mathfrak{T}_i^k$ , но, вообще говоря, совпадение  $\Gamma_i^k$  и  $\Theta_i^k$  имеет место только в приближении слабого поля [1].

Теория, развитая в работе [1], не вполне удовлетворительна, поскольку уравнения поля, следующие из лагранжиана (2.29), необходимо было дополнять некоторым числом добавочных уравнений (2.32), которые не были даже определены единственным образом. И хотя неопределенность в выражении для  $\Phi_{ik}$  не играла роли в случаях, которые рассматривались явно в работе [1], все же общее положение дела нельзя было считать удовлетворительным. Как указал Плебаньский, неопределенность в  $\Phi_{ik}$  на самом деле даже несколько больше, чем считалось

в работе [1], ибо мы рассмотрели тогда только ковариантные функции от  $\gamma_{ikl}$  и их производных. Однако легко видеть, что величина

$$\eta^{ihlm} = \frac{1}{h} \delta^{ihlm}, \quad (2.36)$$

где  $\delta^{ihlm}$  — обычный символ Леви-Чивитá, преобразуется под действием произвольных координатных преобразований как тензор ранга 4. Далее величина

$$\mu = \frac{\sqrt{-g}}{h} = \frac{|h|}{h} \quad (2.37)$$

есть постоянный псевдоскаляр. Это очевидным образом расширяет возможности построения ковариантных выражений  $\Phi_{ik}$ .

Чтобы ограничить произвол как можно более, естественно потребовать, чтобы все уравнения для тетрадного поля следовали из вариационного принципа. Это, очевидно, означает, что нужно найти другой лагранжиан, который, однако, должен содержать член (2.29) в качестве основной части. Кроме свойств *a* и *b* раздела I, лагранжиан, который мы ищем, должен удовлетворять следующим свойствам:

в)  $\mathcal{L}$  инвариантен относительно лоренц-поворотов тетрад с постоянными коэффициентами. Это означает, что тетрадный индекс *a* может фигурировать только как немой индекс;

г) вариационные уравнения совместно с надлежащими граничными условиями должны определять тетрадное поле полностью;

д) по отношению к метрическому тензору формализм должен давать те же самые результаты, что и теория Эйнштейна в тех случаях, в которых эта теория проверена экспериментально. В частности, из него должна следовать ньютонова теория тяготения в пределе слабых квазистационарных полей.

Свойства *a* — *d* могут служить путеводным принципом в поисках подходящего лагранжиана.

Эта программа была осуществлена Пеллегрини и Плебаньским в интересной работе, которая в настоящее время готовится к печати в трудах Датской академии наук

[10]<sup>1)</sup>. Авторы показали, что искомый лагранжиан имеет вид

$$\mathfrak{L} = k_1 \mathfrak{L}_1 + k_2 \mathfrak{L}_2, \quad (2.38)$$

где

$$\mathfrak{L}_2 = [h | \eta^{rst} \Phi_r \gamma_{stu}, \quad (2.39)$$

а  $k_1$  и  $k_2$  суть константы, из которых первая опять связана с эйнштейновской гравитационной постоянной соотношением (2.30).

Если положить

$$-\frac{\delta \mathfrak{L}_2}{\delta h_k^{(a)}} = \mathfrak{F}^{(a)k}, \quad \mathfrak{F}_i^k = h_i^{(a)} \mathfrak{F}^{(a)k} = \sqrt{-g} F_i^k, \quad (2.40)$$

то уравнения поля (2.7) можно при помощи (2.28) и (2.40) записать в виде

$$G_{ik} + \frac{k_2}{2k_1} F_{ik} = -\kappa T_{ik}. \quad (2.41)$$

Далее, если обозначить симметричную и антисимметричную части  $F_{ik}$  как

$$F_{\langle ik \rangle} = \frac{1}{2} (F_{ik} + F_{ki}), \quad F_{[ik]} = \frac{1}{2} (F_{ik} - F_{ki}), \quad (2.42)$$

то 16 уравнений (2.41) разбиваются на две группы, содержащие соответственно 10 и 6 уравнений

$$G_{ik} + \frac{k_2}{\kappa} F_{\langle ik \rangle} = -\kappa T_{ik}, \quad (2.43)$$

$$F_{[ik]} = 0. \quad (2.44)$$

Здесь мы использовали симметрию тензоров  $G_{ik}$  и  $T_{ik}$ .

Шесть уравнений (2.44) аналогичны дополнительным уравнениям (2.32), используемым в работе [1], и в приближении слабого поля совпадают с ними. Аналогично 10 уравнений (2.43) в пределе слабого поля совпадают с уравнениями Эйнштейна [10]. Таким образом, уравнения (2.41) или (2.43) и (2.44) содержат теорию Ньютона в пределе, указанном свойством  $\delta$ .

В общем случае уравнения поля (2.41) содержат дополнительную константу  $k_2/\kappa$ , которая пока не была заме-

<sup>1)</sup> Эта работа уже опубликована. При переводе ссылка на нее была уточнена.— *Прим. ред.*

чена в каких-либо гравитационных явлениях в пределах нашей Солнечной системы. Поэтому на первый взгляд могло бы показаться, что  $k_2$  должна быть малой по сравнению с  $\kappa$ . Однако это отнюдь не необходимо. Как было замечено выше, в приближении слабого поля константа  $k_2$  выпадает и решение уравнений (2.41) оказывается таким же, как было получено в работе [1], т. е. в гармонических координатах решение дается выражением (2.35). Но и в статическом сферически симметричном случае решение уравнений (2.41) или (2.43) и (2.44) совпадает с полученным в [1], именно получается решение (2.33), поскольку при  $h_i^{(a)} = \sqrt{|g_{aa}|} \delta_i^a$ , как можно показать, тензор  $\mathfrak{F}_{ik}$ , определяемый соотношениями (2.40) и (2.39), обращается в нуль [10]. Кроме того, поскольку упомянутые два случая являются единственными существенными в смысле эффектов, доступных пока что экспериментальной проверке, не удивительно, что члены, содержащие новую константу  $k_2$ , не были до сих пор обнаружены.

В этой связи может возникнуть мысль, что изменения обнаружатся в области космологических вопросов. Однако для однородной изотропной модели вселенной, как легко показать, уравнения (2.41) приводят к той же самой метрике, что и обычная теория Эйнштейна. Для однородной изотропной системы всегда возможно ввести систему координат, в которой линейный элемент имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= G^2(t) A^2(r) (dx^{12} dx^{22} + dx^{32}) - dx^{42} = \\ &= g_{(ii)} \delta_{ik} dx^i dx^k, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$A(r) = \frac{1}{1 + \lambda r^2}, \quad r^2 = \sum_i (x^i)^2.$$

Тогда, используя явное выражение для  $\mathfrak{F}_{ik}$ , данное Пеллегрини и Плебаньским [10], легко показать, что тетрадное поле

$$h_i^a = \sqrt{|g_{aa}|} \delta_i^a \quad (2.46)$$

дает

$$\mathfrak{F}_{ik} = 0, \quad (2.47)$$

так что (2.46) есть решение (2.43) и (2.44), если  $G(t)$  — функция временной переменной, отвечающая обычному решению Фридмана.

Соответствующий лагранжиану (2.38) суперпотенциал (2.14) теперь будет иметь вид

$$\mathfrak{U}_i^{kl} = \mathfrak{U}_i^{(1)kl} + \mathfrak{U}_i^{(2)kl}, \quad (2.48)$$

где  $\mathfrak{U}_i^{(1)kl}$  заданы соотношениями (2.31), а

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_i^{(2)kl} &= -\frac{\partial k_2 \mathfrak{L}_2}{\partial h^{(a)_{k,l}}} h_i^{(a)} = \\ &= k_2 |h| \{ (\delta_i^k \eta^{lrst} - \delta_i^l \eta^{krst}) \gamma_{rst} + g_{ir} \Phi_s \eta^{rskl} \}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

В статическом сферическом симметричном случае при помощи (2.33) находим

$$\mathfrak{U}_i^{(2)kl}, l = 0, \quad (2.50)$$

так что комплекс энергии — импульса сводится к комплексу

$$\mathfrak{T}_i^k = \mathfrak{U}_i^{(1)kl}, l, \quad (2.51)$$

который был получен в работе [1]. То же самое справедливо и в случае слабого поля в приближении первого порядка малости по переменным поля. В приближениях высших порядков данное Пеллегрини и Плебаньским [10] выражение для комплекса энергии — импульса несколько отличается от выражения, полученного в [1] (на члены, зависящие от константы  $k_2$ ).

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что тензор материи (2.6) симметричен, что обычно имеет место. В статье Пеллегрини и Плебаньского [10] отмечается, что уравнения поля (2.41) остались бы справедливы и в случае, когда  $\mathfrak{L}_{ik}$  не симметричен. В качестве примера они рассматривают фермионное поле с лагранжианом, инвариантным не относительно полной группы тетрадных вращений (2.3), а лишь относительно вращений с постоянными  $\Omega_{(a)}^{(b)}$ . В этом формализме, который, по-видимому, непротиворечив и более прост, чем обычная ковариантная теория фермионных полей,  $\mathfrak{L}_{ik}$  несимметричен. Антисимметричная часть  $\mathfrak{L}_{[ik]}$ , тесно связанная со спином системы, здесь фигурирует в качестве источника в правой части (2.44) аналогично тому, как симметричная часть  $\mathfrak{L}_{\langle ik \rangle}$ , т. е. тензор энергии — импульса — натяжений материи, является источником в уравнениях (2.43).

Остается выяснить, соответствует ли это обобщение формализма, дающее дополнительный член в «законе сохранения» (2.11), чему-либо существующему в природе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Møller C., Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, № 10 (1961).
2. Møller C., Ann. Phys., 4, 347 (1958).
3. Møller C., Selected Problems in General Relativity, Summer Institute in Theoretical Physics, Brandeis University, 1960.
4. Møller C., Nat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 31, № 14 (1959).
5. Møller C., Ann. Phys., 12, 118 (1961).
6. Magnusson M., Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 32, № 6 (1960).
7. Weitzenböck R., Invariantentheorie, Groningen, 1923, S. 317; Berl. Ber., 446 (1928).
8. Belinfante F., Physica, 6, 887 (1939).
9. Rosenfeld L., Mém. Acad. Roy. Belg., 18, 6 (1940).
10. Pellegrini C., Plebanski J., Mat. Phys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 2, № 4 (1963).



## 2. ЭНЕРГИЯ И ИМПУЛЬС, ПЕРЕНОСИМЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ

Х. Мёллер

C. M ø l l e r, Atti del convegno sulla relatività generale: problemi dell' energia e onde gravitazionali, v. II, Roma, 1964, t. 1, p. 21.

В общей теории относительности материя неразрывно связана с гравитационным полем через эйнштейновские уравнения поля. По этой причине нельзя ожидать, что законы сохранения энергии и импульса будут независимо строго выполняться для системы только материальных тел. Но, как на первых этапах развития теории показали Эйнштейн [1], Лоренц [2], Клейн [3] и другие, для полной системы, составленной из материи и гравитационного поля, строгие законы сохранения существуют и имеют вид

$$T_{i^k, k} \equiv \frac{\partial T_{i^k}}{\partial x^k} = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$T_{i^k} = \mathfrak{S}_{i^k} + t_{i^k} \quad (2)$$

является суммой тензорной плотности энергии — импульса материи  $\mathfrak{S}_{i^k}$  и величины  $t_{i^k}$ , которая зависит только от переменных гравитационного поля. Из формулы (1) видно, что  $\mathfrak{S}_{i^k}$  или в особенности гравитационная часть  $t_{i^k}$  не могут являться истинными тензорными плотностями. В самом деле,  $T_{i^k}$  будет только *аффинной* тензорной плотностью, которую Лоренц назвал *комплексом* энергии — импульса.

Впервые явное выражение для комплекса энергии — импульса через компоненты метрического тензора и его производных дал Эйнштейн. При этом Эйнштейн сумел показать, что оно приводит к удовлетворительным выражениям для полной энергии и полного импульса замкнутых систем в определенном классе координатных систем.

Относительно распределения энергии в пространстве Эйнштейн пришел к выводу, что оно не имеет точного физического смысла в рамках общей теории относительности, и это, по-видимому, находится в согласии с фактической ситуацией в вопросе измеримости гравитационной энергии внутри малой области физической системы.

Однако даже если ограничиться рассмотрением полной энергии системы и ее возможных изменений во времени (например, подсчетом излучения энергии некоторой островной системой), выражение Эйнштейна все же не вполне удовлетворительно. Во-первых, оно не согласуется с общим принципом относительности, согласно которому любое соотношение между измеримыми физическими величинами, такими, как полная энергия и компоненты метрического тензора, должно иметь один и тот же вид во всех системах пространственно-временных координат. Как впервые заметил Бауэр [4], это наиболее резко выявляется при рассмотрении тривиального случая совершенно пустого пространства с плоской метрикой, где эйнштейновское выражение, будучи вычислено в полярной системе координат, дает бесконечное значение для полной энергии в противоположность правильному нулевому значению, получаемому при использовании декартовых координат. Аналогичные лишние результаты получили при использовании большинства других систем координат. Таким образом, возникает необходимость выяснить вообще, в каких системах координат применимо эйнштейновское выражение, а для этой цели нужно фактически иметь общековариантное выражение, с которым можно было бы его сравнивать.

В двух недавних работах [5, 6] было предложено новое выражение для комплекса энергии — импульса, которое дает полные импульс и энергию произвольной островной системы, вполне согласуясь с общим принципом относительности. В противоположность старому эйнштейновскому выражению, являющемуся функцией метрического тензора и его производных, новое выражение для  $T_i^k$  (или  $t_i^k$ ) дано в виде функции от тетрад  $h^{(a)}_i$ , связанных с метрикой соотношением

$$h^{(a)}_i h_{(a)k} = g_{ik}. \quad (3)$$

(Индекс  $a$ , пробегающий значения 1—4, нумерует четыре тетрадных вектора в каждой точке пространства — времени. Поднятие и опускание его производится по правилу, введенному в специальной теории относительности для поднятия и опускания индексов.)

Если ввести тензоры

$$\begin{aligned} \gamma_{ikl} &= h^{(a)}_i h_{(a)k;l} = -\gamma_{hil}, \\ \Phi_h &= \gamma^i_{hi} = h^{(a)i} h_{(a)h;i} \end{aligned} \quad (4)$$

и символы

$$\Delta^i_{kl} = h^{(a)i} h_{(a)k;l}, \quad |h| = \sqrt{-g}, \quad (5)$$

то новый комплекс  $t_i^k$  может быть записан в форме

$$t_i^k = \frac{|h|}{\kappa} [\gamma^{km} \Delta^l_{mi} - \Phi^l \Delta^k_{il} + \Delta^l_{li} \Phi^k] - \frac{1}{2\kappa} \delta_i^k \mathfrak{Q}, \quad (6)$$

где

$$\mathfrak{Q} = |h| [\gamma_{rst} \gamma^{tsr} - \Phi_r \Phi^r] \quad (7)$$

есть новый лагранжиан гравитационного поля. Далее, если исключить  $\mathfrak{S}_i^k$  из (2) с помощью эйнштейновских уравнений поля

$$\mathfrak{G}_i^k \equiv \mathfrak{R}_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k \mathfrak{R} = -\kappa \mathfrak{S}_i^k, \quad (8)$$

то  $\Gamma_i^k$  примет вид

$$\Gamma_i^k = \mathfrak{U}_i^{kl}, \quad (9)$$

с суперпотенциалом

$$\mathfrak{U}_i^{kl} = -\mathfrak{U}_i^{lk} = \frac{|h|}{\kappa} [\gamma^{kl}_i - \delta_i^k \Phi^l + \delta_i^l \Phi^k]. \quad (10)$$

Существенной особенностью новой формулировки является то, что  $\mathfrak{U}_i^{kl}$  есть истинная тензорная плотность в противоположность суперпотенциалу Фрейда [7], который соответствует эйнштейновскому выражению и является лишь аффинной тензорной плотностью.

Кроме формул (2) — (10), нам понадобится еще одно допущение относительно поведения тетрадных полей в пространственной бесконечности. Форма этих граничных условий будет зависеть как от типа рассматриваемой материальной системы, так и от используемой системы

координат. Рассмотрим островную систему, т. е. случай, когда материя заключена в конечной части пространства (временноподобная трубка с конечным пространственным сечением в 4-пространстве). Для таких систем можно полагать, что на больших пространственных расстояниях от системы пространство — время становится плоским. В этом случае естественно потребовать, чтобы тетрады  $h^{(a)}_i$  асимптотически стремились к значению, которое соответствует пустому пространству, где тензор кривизны повсюду равен нулю.

Теперь нужно устранить упомянутые выше трудности, на которые натолкнулось эйнштейновское выражение в случае полностью пустого пространства. Мы должны, следовательно, потребовать обращения  $\Gamma_i^h$  в нуль во всем пространстве и в любой системе координат, что возможно, только если

$$\gamma_{ikl} = 0 \quad (11)$$

во всем пространстве. Таким образом, в случае полностью пустого пространства мы требуем обращения в нуль не только кривизны, но и «кручения» пространства (или тетрадной решетки). При использовании прямолинейной системы координат в совершенно пустом мире требование (11) означает, что компоненты тетрадных векторов должны быть постоянными.

В частности, в лоренцевой системе координат, где

$$g_{ik} = \eta_{ik}, \quad (12)$$

мы можем положить

$$h^{(a)}_i = \delta^a_i. \quad (13)$$

В случае островной системы мы можем взять асимптотически лоренцеву систему координат, в которой  $g_{ik}$  стремятся к  $\eta_{ik}$  по мере пространственного удаления от системы. Для тетрад мы будем тогда требовать асимптотического стремления к постоянным значениям (13). Естественно потребовать для граничных условий, чтобы разность  $h^{(a)}_i - \delta^a_i$  стремилась к нулю на бесконечности таким же образом, как и  $g_{ik} - \eta_{ik}$ . Во всех других отношениях выбор тетрадного поля вполне произволен, разумеется, при условии, что не нарушится соотношение (3).

Для данного метрического поля  $g_{ik}$  тетрадное поле определено соотношением (3) далеко не однозначно, так как независимые лоренц-вращения тетрад в различных пространственно-временных точках оставляют левую часть (3) неизменной. Следовательно, тетрады определяются метрикой лишь с точностью до произвольного лоренц-вращения

$$\check{h}^{(a)}_i = \Omega^{(a)}_{(b)}(x) h^{(b)}_i, \quad (14)$$

где коэффициенты  $\Omega^{(a)}_{(b)}$  суть произвольные скалярные функции, удовлетворяющие в каждой точке условиям ортогональности.

Комплекс  $\Gamma_i^h$  в общем случае не инвариантен относительно группы вращений (14), за исключением случая, когда все  $\Omega^{(a)}_{(b)}$  постоянны. Это можно понимать как указание на тот факт, что «плотность энергии» —  $\Gamma_4^4$  не является физически измеримой величиной. С другой стороны, как было показано в работе [6], полные импульс и энергия, содержащиеся в достаточно большом объеме  $V$ ,

$$P_i = \int_V \Gamma_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (15)$$

являются инвариантами относительно преобразований (14) при учете граничных условий, сформулированных выше. Все сказанное относится и к асимптотической форме  $\Gamma_i^h$ , определяющей распространение энергии и импульса. С этой точки зрения тетрады суть вспомогательные величины, играющие ту же роль, что и потенциалы в электродинамике, а преобразования (14) носят характер калибровочных преобразований, оставляющих измеримые физические величины неизменными.

Описание энергии — импульса в этой формулировке можно поставить в какой-то мере в аналогию случаю общековариантного уравнения Дирака, где необходимо (или по крайней мере удобно) описывать влияние гравитационного поля на фермионное с помощью тетрад. В этом случае такие измеримые физические величины, как заряд и плотность тока, инвариантны относительно преобразований (14), тогда как сами по себе эти волновые функции не инвариантны. Единственной особенностью нашего случая является то, что «допустимые» преобразования (14)

несколько ограничены сформулированными выше граничными условиями для тетрад на бесконечности.

Пусть  $F$  есть поверхность, ограничивающая объем  $V$  в (15), и пусть  $\Phi(F, t)$  обозначает 2-мерную поверхность в 4-пространстве, содержащую события, происшедшие в  $F$  в момент времени  $t$  в определенной системе координат. Используя (9) и теорему Стокса в 4-мерной форме, можно записать величины  $P_i$  в (15) как

$$P_i = -\frac{1}{2} \int_{\Phi(F, t)} u_i^{kl} dS_{kl} = -\frac{1}{2} \int_{\Phi(F, t)} A_i(x), \quad (16)$$

причем

$$dS_{kl} = \delta_{iklm} dx^i dx^m, \quad (17)$$

где  $dx^i$  и  $dx^m$  суть инфинитезимальные векторы, лежащие на поверхности  $\Phi$ .

В третьей работе автора [8] было показано, что для неизлучающей системы 4-импульс является истинным свободным 4-вектором, если только поверхность  $F$  выбрана столь большой, что  $\Phi$  полностью лежит в области, где пространство — время можно считать плоским. Это важное свойство проистекает из того факта, что  $u_i^{kl}$  является истинной тензорной плотностью, в силу чего

$$A_i(x) = u_i^{kl} dS_{kl} \quad (18)$$

есть истинный вектор в точке  $x$  на  $\Phi$ , и из того, что сумме векторов  $A_i(x)$  можно придать однозначный геометрический смысл с помощью параллельного переноса векторов  $A_i(x)$  к общей точке  $p$  в плоской области. В асимптотически лоренцевой системе координат компоненты 4-импульса  $P(p)$  не зависят от точки  $p$  и равны просто алгебраической сумме компонент  $A_i(x)$ , т. е. интегралов (16). В ограниченном классе асимптотически лоренцевых систем координат, т. е. таких, в которых  $g_{ih}$  стремятся достаточно быстро к  $\eta_{ih}$  при увеличении пространственных расстояний, эйнштейновское выражение  $P_i^{\text{Э}}$  для 4-импульса дает тот же результат, что и (16). Когда система координат не является асимптотически прямолинейной (например, во вращающейся системе отсчета), эйнштейновское выражение оказывается лишенным смысла, компоненты же  $P(p)$  в нашей

формулировке без труда находятся при помощи закона преобразования ковариантного вектора в точке  $p$ .

В работе [6] гравитационная энергия и импульс, излучаемые аксиально симметричной системой, были вычислены при помощи асимптотических решений эйнштейновских уравнений поля, полученных Бонди с сотр. [9]. В настоящей статье мы дадим набросок соответствующих вычислений для произвольной материальной системы, опираясь на асимптотические решения, полученные Саксом [10] для излучающей системы, лишенной какой-либо симметрии. В определенном классе асимптотических лоренцевых координат

$$x^i = \{x, y, z, t\}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (19)$$

метрический тензор  $g_{ik}$  на больших пространственных расстояниях представляется в виде ряда по степеням  $1/r$ . Если  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы и

$$n_i \equiv \frac{x_i}{r} = \{\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta\},$$

$$u = t - r, \quad (20)$$

то асимптотическое решение Сакса может быть записано в виде

$$g_{ik} = \eta_{ik} + y_{ik} + z_{ik} + O_3, \quad (21)$$

$$y_{ik} = \frac{\alpha_{ik}}{r}, \quad z_{ik} = \frac{\beta_{ik}}{r^2}, \quad (22)$$

где  $\alpha_{ik}(u, \theta, \varphi)$  и  $\beta_{ik}(u, \theta, \varphi)$  — функции только от  $u$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . Далее  $O_n$  означает выражение, стремящееся к нулю как  $r^{-n}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Если мы введем величины

$$n_i = \{n_i, 0\},$$

$$m_i = \{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta, 0\}, \quad (23)$$

$$l_i = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0\},$$

$$\mu_i = \eta_i^4 - n_i, \quad t_i = m_i - il_i,$$

то явными выражениями для  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  будут следующие:

$$\alpha_{ik} = 2\text{Re} \{ct_i t_k\} + \text{Re} \{\psi(t_i \mu_k + \mu_i t_k)\} + 2M \mu_i \mu_k, \quad (24)$$

$$\beta_{ik} = 2|c|^2(m_i m_k + l_i l_k) + \frac{1}{2}|c|^2(n_i \mu_k + \mu_i n_k) -$$

$$- \operatorname{Re} \left\{ \left( 2N + \frac{1}{2} \Delta |c|^2 \right) (t_i \mu_k + \mu_i t_k) \right\} + \\ + \operatorname{Re} \{ \Delta^* (N \sin \theta) \} \mu_i \mu_k. \quad (25)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (26)$$

— оператор,

$$\psi = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Delta^* (c \sin \theta), \quad (27)$$

$c(u, \theta, \varphi)$  и  $N(u, \theta, \varphi)$  — комплексные и  $M(u, \theta, \varphi)$  — действительная функции переменных  $u$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ , которые зависят от типа рассматриваемой материальной системы. Эти функции связаны между собой дополнительными соотношениями

$$M_0 = -|c_0|^2 + \frac{1}{2} A_0, \quad (28)$$

$$3N_0 = -\Delta M - (4c \cos \theta + \Delta c + 3c\Delta) c_0^*,$$

где

$$A = \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{Re} \{ \Delta^* \tau (N \sin \theta) \}, \quad (29)$$

а нулем в индексе помечены частные производные по запаздывающему времени  $u$ ; «звездочка» имеет смысл комплексного сопряжения, а  $\operatorname{Re} \{ \}$  обозначает вещественную часть комплексной функции. В противоположность аксиально симметричному случаю «функция информации»  $c_0$  будет здесь комплексной, т. е. мы имеем две «функции информации» в общем случае, рассмотренном Саксом.

Как и в случае аксиальной симметрии, исследованном в работе [6], мы должны теперь для больших  $r$  выбирать тетрады в виде

$$h_{(a)i} = \eta_{ai} + \frac{1}{2} y_{ai} + \frac{1}{2} \left( z_{ai} - \frac{1}{4} y_{ar} y_i^r \right) + O_3, \quad (30)$$

а вычисления комплекса  $\mathbb{T}_i^k$  и суперпотенциала  $\mathbb{H}_i^{kl}$  для больших  $r$  проводить точно так же, как в [6]. Для  $\mathbb{T}_i^k$  мы получим (ср. с формулой (4.37) работы [6])

$$\mathbb{T}_i^k = t_i^k = \frac{1}{4\chi r^2} (\alpha_{lm})_0 (\alpha^{lm})_0 \mu_i \mu^k + O_3 = \frac{2|c_0|^2}{\chi r^2} \mu_i \mu^k + O_3. \quad (31)$$



Различие между (31) и соответствующей формулой для аксиально симметричного случая сводится лишь к тому, что квадрат вещественной «функции информации» заменен у нас на квадрат комплексной величины  $c_0$ . При достаточно больших значениях  $r$  последним членом в выражении (30) можно пренебречь, и по аналогии с формулой (4.41) работы [6] мы получим для величины гравитационной энергии, испущенной через элемент поверхности  $d\theta d\varphi$  достаточно большой «сферы радиуса  $r$ », выражение

$$S d\theta d\varphi = -T_4^k n_k r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2|c_0|^2}{\kappa} d\Omega. \quad (32)$$

Полная энергия, излучаемая сферой в единицу времени, будет, следовательно, равна

$$-\frac{dH}{dt} = \int S d\theta d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi |c_0|^2 \sin \theta d\theta. \quad (33)$$

Для 4-импульса, заключенного в сфере достаточно большого радиуса  $r$  в момент времени  $t$ , получаем из (16)

$$P_i = \int \mathfrak{U}_i^{4\lambda} n_\lambda r^2 d\Omega = - \int \mathfrak{U}_i^{4l} \mu_l r^2 d\Omega. \quad (34)$$

Вычисления, аналогичные проведенным в приложении к работе [6], приводят для подынтегрального выражения в (34) к выражению

$$-\mathfrak{U}_i^{4l} \mu_l = \frac{1}{2\kappa r^2} [(-4M + \operatorname{Re}\{A\})\mu_i - \operatorname{Re}\{\Psi t_i\}] + O_3. \quad (35)$$

Отсюда, отбрасывая снова  $O_3$  для достаточно больших  $r$  и интегрируя по частям, легко получить равенство

$$\int A \mu_i d\Omega = \int \Psi t_i d\Omega = 0. \quad (36)$$

Следовательно,

$$P_i = -\frac{2}{\kappa} \int M \mu_i d\Omega = \{P_i, -H\}. \quad (37)$$

Таким образом, «полные» импульс и энергия определяются через функцию  $M(u, \theta, \varphi)$  соотношениями

$$P_i = \frac{2}{\kappa} \int M(u, \theta, \varphi) n_i d\Omega, \quad (38)$$

$$H = m(u) \equiv \frac{1}{2} \int_0^\pi M(u, \theta, \varphi) d\Omega.$$

Последнее находится в согласии с *определениями* Бонди и Сакса.

Доказательство инвариантности полного 4-импульса, так же как и доказательство инвариантности асимптотического выражения для  $T_i^k$  относительно всех «калибровочных преобразований» (14), которые удовлетворяют условиям, наложенным на тетрады, проводятся точно так же, как в аксиально симметричном случае (см. § 6 работы [6]).

Производная по времени от  $P_i$  определяется из (38), (28), (36) и (32):

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dt} &= \frac{2}{\kappa} \int M_0 n_i d\Omega = -\frac{2}{\kappa} \int |c_0|^2 n_i d\Omega = \\ &= -\int S n_i d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (39)$$

и показывает, что гравитационное излучение вызывает в системе отдачу той же величины, как если бы оно было электромагнитным.

Неизлучающие системы характеризуются обращением «функции информации»  $c_0$  в нуль. Это не означает с необходимостью, что система стационарна, но  $M_0$ , несомненно, должна обращаться в нуль в силу (28). Таким образом, в этом случае компоненты  $P_i$  в (37) не зависят ни от  $t$ , ни от  $r$  при условии, что  $r$  фактически достаточно велико. Таким образом,  $P_i$  оказывается не зависящим от формы поверхности  $F$ .

В асимптотически лоренцевой системе координат типа (19), где  $g_{ik}$  заданы в форме (21) — (25), эйнштейновский комплекс энергии—импульса дает то же значение для 4-импульса, что и комплекс (9), т. е. мы имеем для таких систем

$$P_i^\partial = P_i. \quad (40)$$

В более общих системах координат это не имеет места. Мы уже знаем, что равенство (40) не удовлетворяется в системах, не являющихся асимптотически прямолинейными, так как в них компоненты  $P_i^\partial$  становятся неоднозначными. Даже если определить асимптотически лоренцову систему координат как такую, в которой  $g_{ik}$  стремятся к  $\eta_{ik}$  при стремлении  $x^i$  к пространственной бесконечности, то и в таких системах равенство (40) не будет

иметь места. Действительно, перейдем от (19) к новой системе координат

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x). \quad (41)$$

Для того чтобы новая система была асимптотически лоренцовой, необходимо, чтобы

$$\xi^i_{,k} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (42)$$

Если далее предположить, что

$$\frac{\xi^i}{r} \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (43)$$

то новая радиальная координата  $\bar{r}$  определится из выражения

$$\bar{r}^2 \equiv \bar{x}^l \bar{x}^l = r^2 \left( 1 - \frac{2n_l \xi^l}{r} + \frac{\xi^l \xi^l}{r^2} \right), \quad (44)$$

которое стремится к  $r$  на бесконечности:

$$\bar{r} \rightarrow r \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Аналогично имеем

$$\bar{n}_l \equiv \frac{\bar{x}^l}{r} \rightarrow n_l \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (46)$$

Для вычисления 4-импульса в новой системе координат

$$\bar{P}_i = - \int \bar{u}_i{}^{4\lambda} \bar{n}_\lambda \bar{r}^2 d\bar{\Omega} \quad (47)$$

необходимо знать величину суперпотенциала на больших пространственных расстояниях, где (41) при условии (42) можно понимать как инфинитезимальные преобразования. Так как  $\bar{u}_i{}^{kl}$  является истинной тензорной плотностью и  $\bar{u}_i{}^{kl} = O_2$ , мы имеем

$$\bar{u}_i{}^{kl} = u_i{}^{kl} + O_2, \quad (48)$$

где  $O_2$  — величина, стремящаяся к нулю быстрее, чем  $r^{-2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Следовательно, при учете (45) и (46) разность  $\bar{P}_i - P_i$  стремится к нулю с возрастанием радиуса, откуда мы заключаем, что полный 4-импульс неизлучающей системы инвариантен относительно всех преобразований типа (41) — (43):

$$\bar{P}_i = P_i. \quad (49)$$

Теперь легко видеть, что эйнштейновское выражение  $P_i^{\partial}$ , вообще говоря, не обладает этим свойством, так как суперпотенциал Фрейда не является истинной тензорной плотностью. Возьмем для примера случай

$$\begin{aligned} \zeta^i(x) &= x^i f(r), \quad \zeta^4 = 0, \\ f(r) &\rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (50)$$

Тогда прямое вычисление метрики и суперпотенциала Фрейда на больших пространственных расстояниях дает для полной энергии в новой системе координат, согласно эйнштейновскому выражению,

$$\bar{H}^{\partial} = -\bar{P}_4^{\partial} = H^{\partial} + \frac{1}{2} r^3 (f'(r))^2 |_{r \rightarrow \infty}. \quad (51)$$

При  $r \rightarrow \infty$  последний член может принимать любые значения от нуля до бесконечности в зависимости от того, как именно  $f(r)$  стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ . Поскольку этот член не зависит от параметров материальной системы, то он будет присутствовать и в случае полностью пустого пространства, откуда ясно, что мы столкнулись здесь просто с новой формой давно известной трудности Бауэра. Выражение (51) стремится к нулю на пространственной бесконечности, только если  $f(r)$  стремится к нулю быстрее, чем  $r^{-1/2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы приходим к заключению, что эйнштейновское выражение для комплекса энергии — импульса дает правильное значение 4-импульса только в таких асимптотически лоренцовых системах координат, для которых разность  $g_{ik} - \eta_{ik}$  стремится к нулю быстрее, чем  $r^{-1/2}$ . Во всех других системах координат этот комплекс приводит к бессмысленному результату.

В противоположность неизлучающим системам, 4-импульс в которых является свободным вектором,  $P_i$  для излучающих систем преобразуется достаточно сложным образом даже относительно линейных пространственно-временных преобразований [6]. Это и не удивительно, так как уже в специальной теории относительности векторный характер 4-импульса тесно связан с его сохранением.

Исследуем теперь характер гравитационных волн, испускаемых произвольной материальной системой. Рассмотрим пространственный объем  $V$  с линейным размером

$l$ , удаленный на большое расстояние от материальной системы, так что

$$l \ll R. \quad (52)$$

Если объем  $V$  содержит точку  $x=R, y=z=0$  на положительной полуоси системы координат (19), то удобно ввести новые координаты

$$\bar{x}^i = \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}\} = \{x-R, y, z, t\}. \quad (53)$$

Так же как и в § 8 работы [6], легко видеть, что метрика (21)–(25) внутри  $V$  имеет вид разложения для слабого поля:

$$\bar{g}_{ik} = \eta_{ik}^{(0)} + y_{ik}^{(1)} + y_{ik}^{(2)} + \dots, \quad (54)$$

где первый член  $y_{ik}^{(1)}$  имеет характер плоской волны, т. е.  $y_{ik}$  суть функции только

$$\bar{u} \equiv \bar{t} - \bar{x}. \quad (55)$$

На самом деле, из (22)–(24) следует, что внутри объема  $V$  на достаточно больших расстояниях  $R$

$$y_{ik}^{(1)} = 2 \operatorname{Re} \{ \bar{c}(\bar{u}) \bar{t}_i \bar{t}_k \} + \operatorname{Re} \{ \bar{\psi}(\bar{u}) (\bar{t}_i \bar{\mu}_k + \bar{\mu}_i \bar{t}_k) \} + 2 \bar{M}(\bar{u}) \bar{\mu}_i \bar{\mu}_k, \quad (56)$$

где  $\bar{M}(\bar{u})$ ,  $\bar{c}(\bar{u})$  и  $\bar{\psi}(\bar{u})$  суть функции  $\bar{u}$ , полученные из  $M/r$ ,  $c/r$  и  $\psi/r$  в пределе. Далее,  $\bar{\mu}_i$  и  $\bar{t}_i$  — константы, которые получены из (23) при  $\theta = \pi/2$  и  $\varphi = 0$ , а именно:

$$\bar{\mu}_i = \{-1, 0, 0, 1\}, \quad (57)$$

$$\bar{t}_i = \{0, -i, -1, 0\}.$$

С точностью до первого порядка мы получаем для тетрад (30) внутри объема  $V$

$$h_{(a)i} = \eta_{ai} + \frac{1}{2} y_{ai}^{(1)}, \quad (58)$$

и формула (31) для  $T_i^k = t_i^k$  приобретает вид

$$t_i^k = \frac{2 |\bar{c}'|^2}{\kappa} \bar{\mu}_i \bar{\mu}^k, \quad (59)$$

где

$$\bar{c}' = \frac{d\bar{c}(\bar{u})}{d\bar{u}} \quad (60)$$

— производная от  $\bar{c}(\bar{u})$  по  $\bar{u}$ . Так как выражение (6) для  $t_i^k$  есть однородная квадратичная функция производных первого порядка от тетрад, то второе приближение для  $t_i^k$  (59) будет также получаться из (6) подстановкой выражений (58).

Граничные условия для тетрад, сформулированные выше, требуют, чтобы тетрады в области  $V$  отличались от соответствующих тетрад в полностью пустом пространстве на величины первого порядка малости, являющиеся функциями только  $\bar{u}$ . Таким образом, разрешимыми лоренцовыми вращениями, кроме вращений с постоянными коэффициентами, будут такие (14), для которых

$$\Omega_{(ab)} = \eta_{ab} + \bar{\omega}_{(ab)}(\bar{u}), \quad (61)$$

где  $\bar{\omega}_{(ab)}(\bar{u})$  — любая функция  $\bar{u}$ , являющаяся бесконечно малой первого порядка и антисимметричная по индексам  $a$  и  $b$ . Инвариантность приближения второго порядка в таких обозначениях устанавливается так же, как и в приложении к работе [6].

Далее, так же как в § 8 работы [6], из трансформационных свойств комплекса энергии — импульса следует его инвариантность с точностью до бесконечно малых второго порядка относительно всех инфинитезимальных преобразований координат

$$x'^i = \bar{x}^i + \xi^i, \quad (62)$$

где  $\xi^i(\bar{u})$  — функции только  $\bar{u}$ . С помощью преобразований этого типа метрики (54), (56) можно привести к стандартной форме [11]. Пусть  $\chi(\bar{u})$  и  $\Phi(\bar{u})$  — две функции  $\bar{u}$  с производными

$$\chi'(\bar{u}) = \bar{M}(\bar{u}), \quad \Phi'(\bar{u}) = \bar{\psi}(\bar{u}). \quad (63)$$

Выберем  $\xi^i$  в виде

$$\xi^i(\bar{u}) = \chi(\bar{u}) \bar{\mu}^i + \text{Re} \{ \Phi(\bar{u}) \bar{t}^i \} \quad (64)$$

с производными

$$\xi^i{}_{,k} = \frac{d\xi^i}{d\bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}^k} = \bar{M} \bar{\mu}^i \bar{\mu}_k + \text{Re} \{ \bar{\psi} \bar{t}^i \} \bar{\mu}_k. \quad (65)$$

Компоненты метрического тензора в новой системе координат определяются из (56) и (65):

$$g'_{ik} = g_{ik} - \xi_{i,h} - \xi_{h,i} = \eta_{ik} + y'_{ik}, \quad (66)$$

где

$$y'_{ik} = y_{ik} - \xi_{i,h} - \xi_{h,i} = 2 \operatorname{Re} \{ \bar{c} t_i \bar{t}_k \}. \quad (67)$$

Итак, ввиду равенств (57)  $g'_{ik}$  приобретает стандартную форму, в которой все компоненты  $y'_{ik}$  равны нулю, кроме

$$y'_{22} = -y'_{33} = -2 \operatorname{Re} \{ \bar{c} \}, \quad y'_{23} = y'_{32} = -2 \operatorname{Im} \{ \bar{c} \}. \quad (68)$$

В этой форме метрический тензор зависит только от физического смысла «функции информации», которая зависит от  $\bar{u}$ , или

$$u' \equiv x'^4 - x'^1 = \bar{x}^4 - \xi^4 - (\bar{x}^1 + \xi^1) = \bar{x}^4 - \bar{x}^1 = \bar{u}. \quad (69)$$

В системе  $\bar{x}^i$  компоненты тетрад  $h_{(a)i}$  в (58) симметричны по индексам  $a$  и  $i$ . В новой системе  $(x'^i)$ , определенной с помощью (62) — (64), компоненты  $h'_{(a)i}$  не симметричны. Однако с помощью подходящего «калибровочного преобразования» типа (61), не меняющего  $t_i^k$ , можно получить симметричную стандартную форму для компонент  $\check{h}'_{(a)i}$  вращающихся тетрад в штрихованной системе координат

$$\check{h}'_{(a)i} = \eta_{ai} + \frac{1}{2} y'_{ai}. \quad (70)$$

Легко видеть, что это достигается выбором

$$\bar{\omega}_{ab} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \bar{\psi} (\bar{\mu}_a \bar{t}_b - \bar{t}_a \bar{\mu}_b) \}. \quad (71)$$

Для волнового пакета, когда  $\bar{c}'$  ( $\bar{u}$ ) равно нулю вне некоторого интервала  $\bar{u}_1 < \bar{u} < \bar{u}_2$ , импульс и энергия, проходящие через единичную площадку, расположенную на плоскости  $\bar{y}\bar{z}$  системы  $\bar{x}^i$ , выразятся с помощью (57) и (59), как

$$\bar{p}_i = \int t_i^4 d\bar{x} = -\frac{2}{\kappa} \bar{\mu}_i \int_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} |\bar{c}'(\bar{u})|^2 d\bar{u}. \quad (72)$$

Поскольку  $t_i^h$  ведет себя как тензорная плотность относительно линейных преобразований, 4-импульс этого волнового пакета преобразуется как 4-вектор относительно лоренцовых преобразований координат. Так как  $\bar{\mu}_i \bar{\mu}^i = 0$ , то инвариантная норма этого вектора равна нулю:

$$\bar{p}_i \bar{p}^i = 0. \quad (73)$$

Следовательно, в смысле энергии и импульса пакет гравитационных волн аналогичен пакету электромагнитных волн. В системах координат  $\bar{x}^i$  и  $x'^i$  эйнштейновский комплекс энергии — импульса дает тот же результат, что и комплекс  $\bar{T}_i^h$ . Однако ввиду трудности Бауэра последнее в общем случае неверно в системах координат, получаемых более общим инфинитезимальным преобразованием (62), в которых эйнштейновское выражение может привести к лишенному смысла результату.

Достоинство новой тетрадной формулировки заключается в том, что она позволяет последовательно рассчитывать измеримые изменения энергии и импульса физических систем в полном согласии с общим принципом относительности. Кроме возможности установить условия, при которых в данной системе координат может быть корректным применение эйнштейновского комплекса энергии — импульса, новая формулировка проясняет некоторые вопросы, остававшиеся непонятными в старой формулировке. Например, в новой формулировке можно доказать, что полный 4-импульс микроскопической неизлучающей системы, т. е. «частицы», преобразуется как 4-вектор при произвольных пространственно-временных преобразованиях, получающихся переходом от инерциальной лоренцевой системы координат к произвольно ускоренной системе отсчета. Это и раньше считалось справедливым, но отсутствовала возможность доказать это строго, так как эйнштейновский комплекс энергии — импульса дает в ускоренной системе отсчета лишенный смысла результат. С этой точки зрения новая формулировка представляет собой некоторое заключение прекрасной гравитационной теории Эйнштейна, которая во многих отношениях может рассматриваться как завершающий этап развития той теории тяготения, которую заложил Галилей 400 лет назад.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A., Berl. Ber., 778 (1915); 167 (1916); 154, 448 (1918).
2. Lorentz H. A., Amsterdam Versl., 25, 468 (1916).
3. Klein F., Gött. Math. Phys. Kl., 394 (1918).
4. Bauer H., Phys. Zs., 19, 163 (1918).
5. Møller C., Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk., 1, № 10 (1961).
6. Møller C., Mat., Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 34, № 3 (1964).
7. von Freud Ph., Ann. Math. Journ., 40, 417 (1939).
8. Møller C., Nucl. Phys., в печати.
9. Bondi H., Van Der Burg M. G. I., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., A269, 21 (1962).
10. Sachs R. K., Proc. Roy. Soc., A270, 103 (1962).
11. Einstein A., Rosen N., Journ. Franklin Inst., 223, 43, (1937).

### 3. КВАНТОВАННОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

*Ю. Швингер*

J. Schwinger, Phys. Rev., 130, 1253 (1963)

Строится гравитационный оператор действия, инвариантный относительно общих преобразований координат и локальных лоренцевых (калибровочных) преобразований. Для интерпретации формализма необходимо ограничить произвол в описании, наложив калибровочные и координатные условия. Временная калибровка определяется тем, что оси времени локальных координатных систем закрепляются в направлении оси времени криволинейной системы координат. Получаемая в результате форма оператора действия, содержащая вклад бесспинового поля материи, позволяет выделить канонические пары переменных. Для четырех переменных поля в силу дифференциальных уравнений связи канонически сопряженные величины отсутствуют. Эти переменные могут быть интерпретированы как смещения пространственно-временных координат. В физически выделенном классе координатных систем переменные гравитационного поля не являются явными функциями от параметров координатных смещений. Остается свобода, связанная с преобразованиями Лоренца. Операторы пространственных сдвигов и поворотов имеют правильные коммутационные свойства. Вопрос о лоренц-инвариантности остается нерешенным, так как оператор плотности энергии задан только в неявной форме.

#### 1. В в е д е н и е

Для электродинамики характерно свойство калибровочной инвариантности — свобода изменять фазу любого заряженного поля произвольно в каждой точке пространства — времени, подвергая одновременно электромагнитные потенциалы соответствующему неоднородному преобразованию. Не удивительно, что Вейль, автор принципа электромагнитной калибровочной инвариантности, обнаружил [1], что гравитационное поле также может быть охарактеризовано некоторым калибровочным преобразованием. Оно заключается в возможности свободно

изменять в каждой точке ориентацию локальной лоренцевой системы координат при надлежащем преобразовании некоторых гравитационных потенциалов. Подобное преобразование совершенно отлично от более известного преобразования глобальных координат. Последовательно развивая эту концепцию, Янг и Миллс [2] ввели в каждой точке пространства — времени произвольно ориентированное трехмерное изотопическое пространство, тем самым связав гипотетическое векторное поле с изотопическим спином. (Поэтому встречающееся иногда замечание, что гравитационное поле можно рассматривать как поле Янга — Миллса, довольно анахронично.)

Огромный интерес к неабелевым векторным калибровочным полям как к возможной основе объяснения сильных ядерных взаимодействий обусловил также развитие формализма релятивистской квантовой теории взаимодействующих векторных полей. Мы намереваемся здесь положить некоторое начало использованию этого опыта в более трудной проблеме «квантования гравитационного поля». Так как эта статья исходит из квантового принципа действия, она имеет несколько точек соприкосновения с имеющим аналогичное основание, но иначе развитым квазиклассическим подходом Арновита, Дэзера и Мизнера [3].

## II. Принцип действия

В качестве полевых переменных для описания гравитационного поля мы будем использовать <sup>1)</sup>  $4 \times 4$ -матрицы  $e_a^\mu(x)$  и  $4 \times 6$ -матрицы  $\omega_{\mu ab}(x) = -\omega_{\mu ba}(x)$ . По отношению к общим преобразованиям координат эти переменные ведут себя как векторные поля

$$\bar{e}_a^\mu(\bar{x}) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} e_a^\nu(x),$$

$$\bar{\omega}_{\mu ab}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \omega_{\nu ab}(x);$$

<sup>1)</sup> В постановке вопроса и обозначениях мы следуем предыдущей статье [4]. — *Прим. ред.*

по отношению к локальным преобразованиям Лоренца — как

$$e_a{}^\mu(x) = l_a{}^b(x) e_b{}^\mu(x),$$

$$\bar{\omega}_{\mu ab}(x) = l_a{}^{a'}(x) l_b{}^{b'}(x) \omega_{\mu a' b'}(x) + l_b{}^{b'}(x) \partial_\mu l_{ab'}(x),$$

где

$$l_a{}^{a'}(x) g_{a'b'} l_b{}^{b'}(x) = g_{ab},$$

а  $g_{ab}$  — постоянный метрический тензор пространства Минковского.

Неоднородный член в калибровочном преобразовании  $\omega_{\mu ab}$  нужно каким-то образом устранить для того, чтобы построить ковариантную величину, которую можно было бы использовать при построении инвариантного оператора действия. Это осуществляется с помощью локального спинового преобразования

$$L(x)^{-1} \left[ \partial_\mu - \frac{1}{2} i \bar{\omega}_{\mu ab}(x) S^{ab} \right] L(x) = \partial_\mu - \frac{1}{2} i \omega_{\mu ab}(x) S^{ab},$$

где

$$L(x)^{-1} S^{ab} L(x) = l_a{}^{a'}(x) l_b{}^{b'}(x) S^{a'b'}.$$

Рассмотрим координатно-спиновый коммутатор (здесь не учитываются операторные свойства  $\omega_{\mu ab}$ )

$$\left[ \partial_\mu - \frac{1}{2} i \omega_{\mu ab} S^{ab}, \partial_\nu - \frac{1}{2} i \omega_{\nu cd} S^{cd} \right] = -\frac{1}{2} i R_{\mu\nu ab}(x) S^{ab},$$

где

$$R_{\mu\nu ab}(x) = \partial_\mu \omega_{\nu ab} - \partial_\nu \omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ac} \omega_{\nu}{}^c{}_b + \omega_{\nu ac} \omega_{\mu}{}^c{}_b =$$

$$= -R_{\nu\mu ab} = -R_{\mu\nu ba},$$

и заметим, что

$$\bar{R}_{\mu\nu ab}(x) = l_a{}^{a'}(x) l_b{}^{b'}(x) R_{\mu\nu a' b'}(x).$$

Таким образом,  $R_{\mu\nu ab}$  есть антисимметричный тензор по отношению к локальным преобразованиям Лоренца. Он является антисимметричным тензором также и относительно общих преобразований координат (в силу структуры ротатора). Из тождества Якоби для двойных коммутаторов вытекает дифференциальное тождество для

функции  $R_{\mu\nu ab}(x)$ . Наиболее компактно его можно записать с помощью дуальной тензорной плотности

$$*R^{\mu\nu}{}_{ab}(x) = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa ab}(x),$$

$$*R^{01}{}_{ab} = R_{23ab}, \dots$$

в виде

$$\partial_\mu *R^{\mu\nu}{}_{ab} - \omega_{\mu a}{}^c *R^{\mu\nu}{}_{cb} - \omega_{\mu b}{}^c *R^{\mu\nu}{}_{ac} = 0.$$

Термин «тензорная плотность» соответствует следующим свойствам относительно общих преобразований координат:

$$*\bar{R}^{\mu\nu}{}_{ab}(\bar{x}) = \left( \det \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\kappa} *R^{\lambda\kappa}{}_{ab}(x).$$

Существует также дважды дуальная тензорная плотность

$$**R^{\mu\nu ab} = \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa cd} \varepsilon^{abcd},$$

преобразующаяся при локальных преобразованиях Лоренца как

$$**\bar{R}^{\mu\nu ab}(x) = [\det l(x)] l^a{}_{a'}(x) l^b{}_{b'}(x) **R^{\mu\nu a'b'}(x).$$

Этот объект подчиняется дифференциальному тождеству

$$\partial_\mu **R^{\mu\nu ab} - \omega_\mu{}^a{}_c **R^{\mu\nu cb} - \omega_\mu{}^b{}_c **R^{\mu\nu ac} = 0.$$

Для построения инвариантного оператора действия

$$W = \int (dx) \mathfrak{L}$$

мы должны найти локальную функцию переменных гравитационного поля, являющуюся скалярной плотностью относительно общих преобразований координат и скаляром относительно собственных преобразований Лоренца. Двумя простейшими возможными являются конструкции

$$[\det e_\mu{}^a(x)] e^{\mu a}(x) e^{\nu b}(x) R_{\mu\nu ab}(x)$$

и

$$\frac{1}{4} **R^{\mu\nu ab}(x) R_{\mu\nu ab}(x),$$

обладающие тем общим свойством, что они меняют знак при несобственных преобразованиях Лоренца. Вторая

величина построена только из  $\omega_{\mu ab}$ . Однако она не дает эффективного вклада в оператор действия, поскольку из дифференциальных тождеств, которым подчиняются  $**R^{\mu\nu ab}$ , вытекает

$$\delta \left[ \frac{1}{4} **R^{\mu\nu ab} R_{\mu\nu ab} \right] = \partial_{\mu} [**R^{\mu\nu ab} \delta\omega_{\nu ab}] ,$$

откуда видно, что она не несет с собой никаких следствий, затрагивающих уравнения поля.

Примем предварительно в качестве гравитационного оператора действия величину

$$W = \int (dx) (\det e_{\mu}^a) \left( -\frac{1}{2\kappa} \right) R,$$

где

$$R = e^{\mu a} e^{\nu b} R_{\mu\nu ab} = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu},$$

а  $\kappa$  — константа с размерностью квадрата длины, и будем оперировать с ним в несколько эвристической манере безотносительно к его точным операторным свойствам. Тогда, опуская дивергенциальные члены, будем иметь

$$\delta W = \left( -\frac{1}{2\kappa} \right) \int (dx) [\det e \delta e_a^{\mu} (2R_{\mu}^a - e_{\mu}^a R) + \delta\omega_{\mu ab} K^{\mu ab}],$$

где

$$\begin{aligned} K^{\mu ab} = & \partial_{\nu} [\det e (e^{\mu a} e^{\nu b} - e^{\mu b} e^{\nu a}) - \\ & - \omega_{\nu}^a{}_c [\det e (e^{\mu c} e^{\nu b} - e^{\mu b} e^{\nu c})] - \\ & - \omega_{\nu}^b{}_c [\det e (e^{\mu a} e^{\nu c} - e^{\mu c} e^{\nu a})] \end{aligned}$$

и

$$R_{\mu}^a = R_{\mu\nu}{}^{ab} e_b{}^{\nu} = R_{\mu\nu}{}^{a\nu};$$

мы также положили

$$\det e = \det e_{\mu}^a.$$

Получаемые варьированием функции должны подчиняться дифференциальным тождествам вследствие инвариантности  $W$  относительно локальных преобразований Лоренца и преобразований координат. Так, бесконечно

малое локальное преобразование Лоренца

$$\delta e_a^\mu = \delta \omega_a^b e_b^\mu,$$

$$\delta \omega_{\nu ab} = \delta \omega_a^c \omega_{\nu cb} + \delta \omega_b^c \omega_{\nu ac} + \partial_\nu \delta \omega_{ab},$$

$$\delta \omega_{ab}(x) = -\delta \omega_{ba}(x)$$

приводит к тождеству

$$\partial_\nu K^{\nu ab} - \omega_\nu^a c K^{\nu cb} - \omega_\nu^b c K^{\nu ac} = -\det e e^{\mu a} e^{\nu b} (R_{\mu\nu} - R_{\nu\mu}),$$

где

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda = e_\nu^a e^{\lambda b} R_{\mu\lambda ab}.$$

Бесконечно малое преобразование координат

$$\delta e_a^\mu = -\delta x^\nu \partial_\nu e_a^\mu + e_a^\nu \partial_\nu \delta x^\mu,$$

$$\delta \omega_{\nu ab} = -\delta x^\lambda \partial_\lambda \omega_{\nu ab} - \omega_{\lambda ab} \partial_\nu \delta x^\lambda$$

дает тождество

$$\begin{aligned} \partial_\nu [\det e (2R_\mu{}^\nu - \delta_\mu{}^\nu R)] + \det e (2R_\nu{}^a - e_\nu^a R) \partial_\mu e_a{}^\nu = \\ = \partial_\nu (K^{\nu ab} \omega_{\mu ab}) - K^{\nu ab} \partial_\mu \omega_{\nu ab}. \end{aligned}$$

Эти тождества приобретают более привычный вид, если положить  $K^{\nu ab}$  равным нулю; тогда

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu},$$

в то время как

$$\delta W = \int (dx) (-g)^{1/2} \frac{1}{2} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{x}\right) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right),$$

где

$$g^{\mu\nu} = e_a{}^\mu g^{ab} e_b{}^\nu$$

и

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[ (-g)^{1/2} \left( R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2} \delta_\mu{}^\nu R \right) + (-g)^{1/2} \left( R_{\lambda\mu} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} g_{\lambda\nu} R \right) \right] \frac{1}{2} \partial_\mu g^{\lambda\nu} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,  $R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R$  есть тензор Эйнштейна.

Уравнения поля

$$K^{\mu ab} = 0$$

могут быть представлены в виде

$$\Omega^{\mu ab} - e^{\mu c} (\omega_{abc} - \omega_{bac}) + e_b{}^\mu \lambda_a - e_a{}^\mu \lambda_b = 0,$$

где

$$\Omega^{\mu}_{ab} = e_a^{\nu} \partial_{\nu} e_b^{\mu} - e_b^{\nu} \partial_{\nu} e_a^{\mu}$$

и

$$\lambda_a = (\det e)^{-1} \partial_{\nu} [(\det e) e_a^{\nu}] + \omega^b_{ba}.$$

Эквивалентно их можно представить в виде

$$\Omega_{cab} - \omega_{abc} + \omega_{bac} + g_{bc} \lambda_a - g_{ac} \lambda_b = 0,$$

причем как следствие этого последнего варианта получаем

$$-\Omega^b_{ba} - \omega^b_{ba} + 3\lambda_a = 0.$$

Но

$$\Omega^b_{ba} = \partial_{\nu} e_a^{\nu} - e_a^{\nu} e_{\mu}^b \partial_{\nu} e_b^{\mu} = (\det e)^{-1} \partial_{\nu} [(\det e) e_a^{\nu}],$$

поэтому

$$\lambda_a = 0.$$

Это свойство сохраняется и в окончательном уравнении

$$\omega_{abc} - \omega_{bac} = \Omega_{cab},$$

которое имеет решение

$$\omega_{abc} = \frac{1}{2} [\Omega_{bca} + \Omega_{cab} - \Omega_{abc}].$$

Последнее есть динамический вывод, основанный на уравнениях  $K^{\mu ab} = 0$ , требования

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{bac},$$

т. е. условия симметричности величин

$$\Gamma_{abc} = \omega_{abc} - (e_a^{\nu} \partial_{\nu} e_b^{\mu}) e_{\mu c}.$$

Инвариантность по отношению к произвольным локальным преобразованиям Лоренца и преобразованиям координат означает, что уравнения поля проявляют соответствующую незамкнутость в описании эволюции системы во времени. Для того чтобы получить ясную физическую интерпретацию формализма, необходимо сузить этот произвол, ограничивая выбор локальной лоренцевой системы и общей системы координат. Мы будем называть подобные ограничения соответственно калибровочными условиями и координатными условиями.



### III. Временная калибровка

Первая наша задача — придать временной координате физический смысл, что можно сделать, закрепляя оси времени локальных координатных систем вдоль временных осей общей координатной системы. Временная координата  $x^0$  может быть выделена тем требованием, что  $e_a^0(x)$  должен быть временноподобным вектором в локальных координатных системах

$$-e_a^0(x) g^{ab} e_b^{(0)}(x) > 0.$$

Тогда каждую локальную координатную систему можно выбрать так, чтобы пространственные компоненты  $e_a^0$  исчезали. В этом и состоит временная калибровка:

$$e_{(h)}^0(x) = 0.$$

Эквивалентная формулировка через обратную систему  $e_\mu^a$  записывается так:

$$e_k^{(0)}(x) = 0.$$

Заметим также, что

$$e_0^{(0)} = (e_{(0)}^0)^{-1}$$

и

$$e_{(m)}^k e_l^{(m)} = \delta_l^k = e_m^{(k)} e_{(l)}^m,$$

причем

$$e_0^{(k)} = -e_0^{(0)} e_l^{(k)} e_{(0)}^l.$$

Далее

$$\det e_\mu^a = e_0^{(0)} \det e_l^{(k)} = [e_{(0)}^0 \det e_{(l)}^k]^{-1}.$$

С использованием временной калибровки гравитационный оператор действия приобретает вид

$$W = \frac{1}{\kappa} \int (dx) \det_{(3)} e [e^{k(l)} R_{0k(0)(l)} - \\ - \frac{1}{2} e_0^{(0)} e^{k(m)} e^{l(n)} R_{kl(m)(n)} + e_0^{(0)} e^{k(m)} e_{(0)}^l R_{kl(m)(0)}],$$

где

$$R_{0k(0)(l)} = \partial_0 \omega_{k(0)(l)} - \partial_k \omega_{0(0)(l)} + \\ + \omega_{k(l)(m)} \omega_{0(0)(m)} + \omega_{k(0)(m)} \omega_0^{(m)}(l),$$

$$R_{kl(m)(0)} = -\partial_k \omega_{l(0)(m)} + \partial_l \omega_{k(0)(m)} + \\ + \omega_{k(m)}^{(n)} \omega_{l(0)(n)} - \omega_{l(m)}^{(n)} \omega_{k(0)(n)}$$

и

$$R_{kl(m)(n)} = (3)R_{kl(m)(n)} - \omega_{k(0)(m)} \omega_{l(0)(n)} - \omega_{l(0)(m)} \omega_{k(0)(n)}.$$

В последнем уравнении обозначение  $(3)R_{kl(m)(n)}$  означает, что этот тензор образован из трехмерных величин  $\omega_{k(m)(n)}$ . Мы также положили

$$\det_{(3)} e = \det e_l^{(k)}.$$

Можно заметить, что  $\omega_{k(0)(l)}$  и  $\det_{(3)} e e^{k(l)}$  удовлетворяют уравнениям движения. Но для  $\omega_{0(0)(l)}$ ,  $\omega_{0(l)(m)}$ ,  $\omega_{k(l)(m)}$ ,  $e_{(0)}^l$  или  $e_{(0)}^0$  нет соответствующих уравнений движения. Если рассматривается только гравитационное поле, то варьирование по первым трем из этих переменных дает уравнения связей, имеющие вид

$$\partial_k \det_{(3)} e e_{(l)}^k - \omega_{k(l)}^{(m)} (\det_{(3)} e e_{(m)}^k) = 0,$$

$$\omega_{(l)(0)(m)} = \omega_{(m)(0)(l)},$$

где

$$\omega_{(l)(0)(m)} = e_{(l)}^k \omega_{(k)(0)(m)},$$

$$(3)K^{k(n)(n)} = \det_{(3)} e [e^{k(m)} (\omega_{(0)(0)}^{(n)} - e^{l(n)} \partial_l \ln e_0^{(0)}) - \\ - e^{k(n)} (\omega_{(0)(0)}^{(m)} - e^{l(m)} \partial_l \ln e_0^{(0)})],$$

причем

$$\omega_{(0)(0)}^{(m)} = e_{(0)}^l \omega_{l(0)}^{(m)} + e_{(0)}^{(0)} \omega_{0(0)}^{(m)},$$

а  $(3)K^{k(m)(n)}$  образован из трехмерных величин так же, как  $K^{iabc}$  из четырехмерных.

Если первое уравнение связи

$$\partial_k (\det_{(3)} e e_{(l)}^k) + \det_{(3)} e \omega_{(m)(l)}^{(m)} = 0$$

скомбинировать с выражением для  $(3)K^k_{(m)(n)}$ , то последнее упрощается до

$$(3)K^k_{(m)(n)} = -\det_{(3)} e [(3)\Omega^k_{(m)(n)} - \\ - e^{k(p)} (\omega_{(m)(n)(p)} - \omega_{(n)(m)(p)})];$$

повторное применение того же уравнения связи дает

$$e_k^{(m)} (3)K^k_{(m)(n)} = -\det_{(3)} e [(3)\Omega^{(m)}_{(m)(n)} + \omega^{(m)}_{(m)(n)}] = 0.$$

Соответственно

$$\omega_{(0)(0)(m)} = e_{(m)}^l \partial_l \ln e_0^{(0)}$$

и

$${}_{(3)}K^k{}_{(m)(n)} = 0,$$

или

$$\omega_{(k)(l)(m)} = \frac{1}{2} [{}_{(3)}\Omega_{(l)(m)(k)} + {}_{(3)}\Omega_{(m)(k)(l)} - {}_{(3)}\Omega_{(k)(l)(m)}].$$

Все эти соотношения представляют собой трехмерную часть наших четырехмерных записей.

В силу свойств симметрии  $\omega_{(k)(0)(l)}$  член, соответствующий производной по времени в подынтегральном выражении в принципе действия, содержит шесть пар переменных. Особенно удобный выбор получается, если ввести

$$\omega_k^{(0)l} = -\omega_{k(0)(m)} e_l^{(m)} = \omega_l^{(0)k}$$

и трехмерный тензор

$${}_{(3)}g_{kl} = e_k^{(m)} e_{l(m)} = g_{kl}$$

вместе с его обращением

$${}_{(3)}g^{kl} = e^{k(m)} e_{(m)}^l \neq g^{kl}.$$

Таким образом,

$$\det {}_{(3)}e e^{k(l)} \partial_0 \omega_{k(0)(l)} = -g^{1/2} e^{k(l)} \partial_0 (\omega_k^{(0)m} e_{(l)m}),$$

где

$$g = \det {}_{(3)}g_{kl},$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} & -g^{1/2} {}_{(3)}g^{kl} \partial_0 \omega_k^{(0)l} - \frac{1}{2} g^{1/2} \omega_k^{(0)l} \partial_0 {}_{(3)}g^{kl} = \\ & = \frac{1}{2} g^{-1/2} \omega_k^{(0)l} \partial_0 (g {}_{(3)}g^{kl}) - \partial_0 [g^{1/2} {}_{(3)}g^{kl} \omega_k^{(0)l}]. \end{aligned}$$

Член с временной производной может быть опущен, так как оператор действия данной динамической системы может быть изменен добавлением граничных членов. Искомые пары переменных суть

$$q^{kl} = g {}_{(3)}g^{kl},$$

и

$$\Pi_{kl} = \frac{1}{2\kappa} g^{-1/2} \omega_k^{(0)l}.$$

Отметим, что остальные члены в  $R_{0k(0)l}$  по сути дела равны нулю вследствие уравнений связи, если только  $e_{(0)}^k$  и  $\partial_k e_{(0)}$  стремятся к нулю достаточно быстро на больших пространственных расстояниях.

Окончательная форма оператора действия следующая:

$$W = \int (dx) [\Pi_{kl} \partial_0 q^{kl} - e_0^{(0)} e_{(0)}^k \tau_k - e_0^{(0)} g^{-1/2} \tau^0],$$

где

$$\tau_k = -\Pi_{lm} \partial_k q^{lm} + \partial_k (2\Pi_{lm} q^{lm}) - \partial_l (2\Pi_{km} q^{lm})$$

и

$$\tau^0 = \left( \frac{1}{2\kappa} \right) g_{(3)} R - 2\kappa \Pi_{kl} (q^{kl} q^{mn} - q^{kn} q^{lm}) \Pi_{mn}.$$

Явная структура величины

$$g_{(3)} R = q^{hl}_{(3)} R_{kl}$$

дается выражением

$$q^{hl}_{(3)} R_{kl} = \partial_k \partial_l q^{hl} + Q,$$

где

$$Q = -\frac{1}{4} q^{mn} \partial_m q^{kl} \partial_n q_{kl} - \frac{1}{2} \partial_m q^{kl} q_{ln} \partial_k q^{mn} - \\ - \frac{1}{2} q^{kl} \partial_k \ln(q^{1/2}) \partial_l \ln(q^{1/2})$$

и

$$q = \det q^{hl} = g^2,$$

причем  $q_{kl} = g^{-1} g_{kl}$  есть матрица, обратная к  $q^{kl}$ .

#### IV. Поле материи

Мы будем рассматривать здесь только простейший пример материального поля. Оператор действия для поля со спином нуль в заданном метрическом поле  $g_{\mu\nu}$  может

быть записан в виде

$$W = \int (dx) \left[ \varphi^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{1}{2} \varphi^\mu (-g)^{-1/2} g_{\mu\nu} \varphi^\nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m^2 (-g)^{1/2} \varphi^2 \right],$$

где величина  $\varphi^\mu$  есть векторная плотность. Уравнение связи, получаемое варьированием по  $\varphi^k$ , имеет вид

$$0 = \partial_k \varphi + (-g)^{-1/2} g_{k\nu} \varphi^\nu$$

или, эквивалентно, при временной калибровке:

$$-e_{(l)}^k \partial_k \varphi = e_{(0)}^0 g^{-1/2} e_{\nu(l)} \varphi^\nu.$$

Возведение в квадрат этого локального векторного уравнения дает соотношение

$$\partial_k \varphi q^{kl} \partial_l \varphi = (e_{(0)}^0)^2 \varphi^\mu g_{\mu\nu} \varphi^\nu + (\varphi^0)^2.$$

Альтернативная конструкция, получаемая умножением на  $e^{k(l)} \partial_k \varphi$ , имеет вид

$$-e_0^{(0)} g^{-1/2} \partial_k \varphi q^{kl} \partial_l \varphi = \varphi^k \partial_k \varphi - e_0^{(0)} e_{(0)}^k \varphi^0 \partial_k \varphi.$$

В результате, исключив  $\varphi^k$ , получим для оператора действия следующий вид:

$$W = \int (dx) [\varphi^0 \partial_0 \varphi - e_0^{(0)} e_{(0)}^k T_k - e_0^{(0)} g^{-1/2} T^0],$$

где

$$T_k = -\varphi^0 \partial_k \varphi$$

и

$$T^0 = \frac{1}{2} [(\varphi^0)^2 + \partial_k \varphi q^{kl} \partial_l \varphi + q^{1/2} m^2 \varphi^2].$$

Одновременные коммутационные свойства этих операторов легко следуют из канонических перестановочных соотношений, которым подчиняются  $\varphi$  и  $\varphi^0$ . Так, имеем:

$$-i [T^0(x), T^0(x')] = -[q^{kl}(x) T_l(x) + \\ + q^{kl}(x') T_l(x')] \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

и

$$-i [T_k(x), T_l(x')] = -T_l(x) \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \\ - T_k(x') \partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

## V. Координатные условия

Оператор действия для системы, содержащей гравитационное поле и материальное поле, есть

$$W = \int (dx) [\Pi_{kl} \partial_0 q^{kl} + \varphi^0 \partial_0 \varphi - e_0^{(0)} e_{(0)}^k (\tau_k + T_k) - e_0^{(0)} g^{-1/2} (\tau^0 + T^0)].$$

Уравнения связей, получаемые варьированием по  $e_{(0)}^k$  и  $e_0^{(0)}$ , имеют вид

$$\tau_k + T_k = 0, \quad \tau^0 + T^0 = 0,$$

или, в другой форме,

$$2(\partial_l \Pi_{kl} - \partial_k \Pi_{ll}) = t_k + T_k = \theta_k$$

и

$$-\partial_k \partial_l q^{kl} = 2\kappa (t^0 + T^0) = 2\kappa \theta^0,$$

где

$$t_k = -\Pi_{lm} \partial_k q^{lm} + \partial_k [2\Pi_{lm} (q^{lm} - \delta_{lm})] - \partial_l [2\Pi_{km} (q^{lm} - \delta_{lm})]$$

и

$$t^0 = \left(\frac{1}{2\kappa}\right) Q + 2\kappa \Pi_{kl} (q^{kn} q^{ln} - q^{kl} q^{mn}) \Pi_{mn}.$$

В этой форме уравнения связей неявным образом задают некоторые линейные дифференциальные функции от полей  $q^{kl}$  и  $\Pi_{kl}$ .

Те же самые комбинации полевых переменных появятся в члене, соответствующем временной производной в операторе действия, если записать

$$q^{kl} = q^{klT} + \frac{1}{2} (\partial_k q_l + \partial_l q_k) - \delta_{kl} \partial_m q_m + \partial_k \partial_l q$$

и

$$\Pi_{kl} = \Pi_{klT} + \frac{1}{2} (\partial_k \Pi_l + \partial_l \Pi_k) - \delta_{kl} \partial_m \Pi_m + \partial_k \partial_l \Pi,$$

где, например, величины  $q^{klT}$ , равные поперечным имеющим нулевой след частям  $q^{kl}$ , таковы, что

$$\partial_k q^{klT} = 0, \quad q^{kkT} = 0.$$

Две независимые компоненты этого поля комбинируются с  $q_k$  и  $q$  так, что образуется представление шестиком-

понентного поля  $q^{kl}$ . Это представление таково, что при условиях, когда правомерно интегрирование по частям,

$$\int (dx) \Pi_{kl} \partial_0 q^{kl} = \int (dx) \left[ \Pi_{kl}^T \partial_0 q^{klT} - \left( \frac{3}{2} \partial_k \partial_l \Pi_l + \frac{1}{2} \nabla^2 \Pi_k \right) \partial_0 q_k + \Pi \partial_0 (\nabla^2)^2 q \right],$$

где

$$\frac{3}{2} \partial_k \partial_l \Pi_l + \frac{1}{2} \nabla^2 \Pi_k = \partial_l \Pi_{kl} - \partial_k \Pi_{ll} = \frac{1}{2} \theta_k,$$

$$(\nabla^2)^2 q = \partial_k \partial_l q^{kl} = -2\kappa \theta^0.$$

Оператор действия теперь можно представить как

$$W = \int (dx) \left[ \Pi_{kl}^T \partial_0 q^{klT} + \varphi^0 \partial_0 \varphi + \theta_k \partial_0 \left( -\frac{1}{2} q_k \right) - \theta^0 \partial_0 (-2\kappa \Pi) \right],$$

где мы также воспользовались свободой добавлять граничные члены. Операторы  $\theta_k$  и  $\theta^0$  должны быть построены из  $\varphi^0$ ,  $\varphi$  и  $\Pi_{kl}^T$ ,  $q^{klT}$  вместе с  $q_k$  и  $\Pi$ . Пары полевых переменных являются, очевидно, каноническими динамическими переменными, а  $q_k$  и  $\Pi$  есть численные параметры преобразования. Оператор действия построен аддитивно из операторов, описывающих бесконечно малые приращения  $x^0$ :

$$W_{dx^0} = \int (dx) \left[ \Pi_{kl}^T dq^{klT} + \varphi^0 d\varphi + \theta_k d \left( -\frac{1}{2} q_k \right) - \theta^0 d (-2\kappa \Pi) \right].$$

Данное здесь бесконечномерное параметрическое преобразование может быть отождествлено с локальным описанием физической эволюции системы в пространстве — времени. Так,  $d(-1/2 q_k)$  и  $d(-2\kappa \Pi)$  интерпретируются как бесконечно малые локальные смещения координат пространства и времени, а  $\theta_k$  и  $\theta^0$  оказываются соответственно плотностью импульса и плотностью энергии. При такой физической конкретизации смысла координатных параметров мы можем сделать дальнейший шаг в ограничении математического произвола относительно координатных пре-

образований с тем, чтобы определить физически выделенный класс координатных систем.

Когда величины  $q^{kl}$  не являются явными функциями от параметров смещения пространственных координат? Условие для этого имеет вид

$$\frac{1}{2} (\partial_k dq_l + \partial_l dq_k) - \delta_{kl} \partial_m dq_m = 0$$

или эквивалентно

$$\partial_k dq_l + \partial_l dq_k = 0,$$

откуда также вытекает, что

$$\nabla^2 dq_k = 0.$$

Как следствие этих ограничений  $-1/2 dq_k$  могут быть лишь линейными функциями пространственных координат:

$$-\frac{1}{2} dq_k = d\varepsilon_k(x^0) - d\omega_{kl}(x^0) x_l,$$

$$d\omega_{kl} + d\omega_{lk} = 0.$$

Мы имеем здесь описание жестких сдвигов и поворотов системы координат. Соответствующие инфинитезимальные операторы представляют полный импульс и полный момент

$$P_k = \int (dx) \theta_k,$$

$$J_{kl} = \int (dx) (x_k \theta_l - x_l \theta_k).$$

Аналогичным образом  $\Pi_{kl}$  не будет явной функцией от параметров смещения по времени, если

$$\partial_k \partial_l d\Pi = 0,$$

т. е. если  $d\Pi$  есть линейная функция пространственных координат,

$$-2x d\Pi = d\varepsilon^0(x^0) + d\omega_{0k}(x^0) x_k.$$

Соответствующие инфинитезимальные операторы представляют полную энергию

$$P^0 = \int (dx) \theta^0$$



и генератор группы преобразований Лоренца

$$J^0_k - x^0 P_k = - \int (dx) x_k \theta^0.$$

Этот член выделенного класса эквивалентных с точностью до преобразований Лоренца координатных систем характеризуется координатным условием

$$-\frac{1}{2} q_k = x_k, \quad -2\chi\Pi = x^0.$$

В этой координатной системе уравнения поля упрощаются до вида

$$q^{hl} = q^{hlT} + \partial_k \partial_l \left( q + \frac{3}{2} \mathbf{x}^2 \right) + \delta_{kl}$$

и

$$\Pi_{kl} = \Pi_{klT} + \frac{1}{2} (\partial_k \Pi_l + \partial_l \Pi_k) - \delta_{kl} \partial_m \Pi_m.$$

Пространственное граничное условие, налагаемое тем самым в точках, удаленных от областей, которые заняты энергией:

$$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \partial_k \partial_l \left( q + \frac{3}{2} \mathbf{x}^2 \right) \rightarrow 0$$

совместно с дифференциальным уравнением четвертого порядка, которому подчиняется  $q$  или  $q + \frac{3}{2} \mathbf{x}^2$ .

Операторы импульса и момента содержат в явном виде только канонические переменные

$$P_k = \int (dx) [-\varphi^0 \partial_k \varphi - \Pi_{lm}^T \partial_k q^{lmT}]$$

и

$$J_{kl} = \int (dx) [-\varphi^0 (x_k \partial_l - x_l \partial_k) \varphi - \Pi_{mn}^T (x_k \partial_l - x_l \partial_k) q^{mnT} + 2\Pi_{lm}^T q^{kmT} - 2\Pi_{km}^T q^{lmT}].$$

Все ожидаемые коммутационные свойства этих операторов можно получить из канонических перестановочных соотношений в равные моменты времени

$$\begin{aligned} -i [\varphi(x), \varphi^0(x')] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ -i [q^{klT}(x), \Pi_{mn}^T(x')] &= [\delta_{mn}^{kl} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^T, \\ \delta_{mn}^{kl} &= \frac{1}{2} (\delta_m^k \delta_n^l + \delta_n^k \delta_m^l), \end{aligned}$$

включая

$$[q^{lmT}(x), P_k] = -i\partial_k q^{lmT}(x)$$

и

$$[q^{mnT}(x), J_{kl}] = -i(x_k\partial_l - x_l\partial_k)q^{mnT}(x) + \\ + i(\delta_l^n q^{kmT} + \delta_l^m q^{knT} - \delta_k^n q^{lmT} - \delta_k^m q^{lnT}).$$

Эти результаты показывают, что квантовомеханический формализм, связанный с каноническими перестановочными соотношениями, удовлетворяет требованию инвариантности относительно трехмерных сдвигов и поворотов. Вопрос о лоренц-инвариантности зависит от интегральных свойств коммутатора для плотности энергии в равные моменты времени. Именно в этом пункте гравитационное поле отличается от всех других физических систем, так как для него не существует явного выражения  $\theta^0$  через фундаментальные переменные, но лишь неявное определение через уравнения связей. В классической теории это отсутствие явной формы привело бы к вычислительным трудностям; в квантовой же теории оно может оказаться даже непреодолимым барьером при проверке внутренней непротиворечивости формализма.

Мы рассмотрим ряд сторон этой важной проблемы в отдельной работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Weyl H., Zs. Phys., 56, 330 (1929).
2. Yang C. N., Mills R. L., Phys. Rev., 96, 191 (1954) (См. перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964.)
3. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., Phys. Rev., 117, 1596 (1960).
4. Schwinger J., Phys. Rev., 130, 800 (1963). (См. перевод в сборнике «Элементарные частицы и компенсирующие поля», изд-во «Мир», 1964.)

## 4. ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

*Р. Сакс*

(Лекции, прочитанные в 1963 г. в летней школе по теоретической физике при Гренобльском университете, Лез-Уш, Франция)

R. Sachs, in «Relativity, Groups and Topology», ed. by C. DeWitt, B. DeWitt, New York — London, 1964

### *Условные обозначения*

Тождественно равно, или «по определению»:  $\equiv$ .

Тензорные индексы: обычно  $a, b, c, \dots \equiv 1, \dots, 4$ ; в лекциях IV — VI  $a, b, \dots \equiv 0, \dots, 3$ .

Спинорные индексы:  $A, B, \dot{A}, \dot{B}, \dots \equiv 1, 2$ .

Прочие индексы:  $\alpha, \beta, \dots \equiv 1, 2, 3$ , или  $\equiv 2, 3$ , или  $\equiv 1, \dots, N$ .

Симметризация:  $(\quad)$ , например  $F_{(ab)} \equiv \frac{1}{2}(F_{ab} + F_{ba})$ .

Антисимметризация:  $[\quad]$ , например  $F_{[ab]} \equiv \frac{1}{2}(F_{ab} - F_{ba})$ .

Метрический тензор:  $g_{ab}$ ; сигнатура: обычно  $+++ -$ ; в лекциях IV — VI  $+----$ .

Частные производные: например  $e_{a, b}$ .

Тензорные или спинорные ковариантные производные: например  $e_{a; b}$ ,  $u_{A; b}$ ,  $v^{\dot{c}}$ .

Ковариантные производные в трехмерном пространстве:  $\parallel$ , например  $e_{\alpha \parallel \beta}$ .

Знак тензора Римана:  $e_{a; [b; c]} \equiv (1/2)e_i R_{ab}^i$ .

Тензор Риччи:  $R_{ab} \equiv R^i_{aib}$ ;  $R \equiv R^i_i$ ;  $G_{ab} \equiv R_{ab} - (1/2)g_{ab}R$ .

Конформный тензор (Вейля):  $C_{abcd}$ .

### **И. Введение**

Общая теория относительности является полноправной, хотя и сравнительно небольшой частью современной теоретической физики. Она представляет интерес, потому

что является лучшей из существующих теорий гравитации, а также лучшей из существующих теорий структуры пространства — времени; роль ее в настоящее время сравнительно невелика, поскольку она пока мало связана с остальной физикой.

Одной из интереснейших проблем в общей теории относительности является проблема излучения. Ускоренные массы излучают гравитационные волны, которые в принципе можно было бы обнаружить подходящим приемником, хотя они столь слабы, что едва ли есть реальная надежда в ближайшем будущем наблюдать их на эксперименте. Возможно, основной интерес к изучению этих волн обязан широко разделяемому мнению, что адекватное понимание их в классической теории помогло бы при построении самосогласованной квантовой теории гравитационного поля.

В настоящее время мы понимаем три основные особенности гравитационного излучения. Во-первых, мы можем описать излучение на больших расстояниях от источников в асимптотически плоской вселенной; это описание геометрически изящно и достаточно детально для того, чтобы проанализировать все мысленные эксперименты, касающиеся поведения пробных частиц или пробных поглотителей в асимптотическом поле (волновой зоне). Во-вторых, мы понимаем *в принципе*, более или менее, как в точной теории связаны поля на больших расстояниях от источников с полями на близких расстояниях и с самими источниками или полями негравитационного происхождения. В-третьих, мы имеем приближенные методы, позволяющие получать фактические численные количества излучения, испускаемого в той или иной конкретной ситуации, или сечения рассеяния и т. д. Эти приближенные методы антигеометричны, или в лучшем случае негеометричны, и поэтому довольно непопулярны; у них, конечно, есть довольно уродливые черты, но, быть может, стоит не забывать, что если какой-нибудь упрямый экспериментатор возьмется и получит определенный результат, то нам несомненно придется обратиться к приближенным методам, чтобы сравнить его с теорией. В действительности если мы рассматриваем простую задачу саморассеяния гравитационных волн, то, как сказано выше, у нас есть изящные гео-

метрические методы описания входящих и исходящих волн; но в настоящее время эти методы безнадежно недостаточны для того, чтобы разобраться в вопросе: как исходящие волны связаны с входящими?

В этих лекциях я вначале уделю некоторое время обсуждению вопроса о том, как в принципе уравнения гравитационного поля определяют эволюцию волн, затем дам геометрический анализ асимптотического поля и наконец слегка коснусь приближенных методов.

## II. Проблема начальных значений

Для того чтобы понять, как в принципе возникает излучение, рассмотрим задачу начальных значений. Гравитационное поле описывается десятью метрическими коэффициентами  $g_{ab}$ , эволюция которых во времени определяется, в отсутствие источников, десятью дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка  $R_{ab} = 0$ . Это выглядит так, как если бы мы могли просто задать в один «момент времени» (скажем, вдоль выбранной пространственноподобной трехмерной гиперповерхности  $t = 0$ ) метрический тензор и его первые производные по времени, и тем самым определилось бы будущее развитие. В действительности же ситуация более сложна: мы увидим, что вместо десяти степеней свободы, как следовало бы ожидать на первый взгляд, у гравитационного поля на самом деле только две степени свободы. Основные моменты рассуждений, которые я изложу, были ясны Эйнштейну и Гильберту уже около 1920 г.; детали разрабатывались все подробнее Дармуа, Штельмахером, Лишнеровицем, Шоке, Штахелем и другими. Бергман установил взаимосвязь между общей теорией относительности и другими теориями, такими, как электродинамика и теория Янга — Миллса, в которых имеют место аналогичные явления.

Задание  $g_{ab}$  и его первых производных по времени в какой-то один момент времени, очевидно, еще не определяет форму  $g_{ab}(x^c)$  во все будущие времена: ведь всегда можно осуществить координатное преобразование, никак не изменяющее начальной гиперповерхности или начальных значений, но меняющее функциональную форму

$g_{ab}(x^c)$ . Фактически функциональная форма  $g_{ab}(x^c)$  содержит информацию не только о физической ситуации, но также и о конкретных особенностях используемой системы координат.

Бесспорно, физическая ситуация в данный момент полностью определяет развитие физической картины в будущем, как того и следовало ожидать; но, чтобы выявить этот факт, мы должны каким-то образом избавиться от посторонних моментов, возникающих вследствие произвола в выборе координатной системы. Наша процедура будет аналогична введению кулоновской калибровки в электродинамике.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые сведения из геометрии.

**ЛЕММА 1.** Если дано произвольное временноподобное векторное поле  $e^a(x^b)$ , то всегда можно найти по крайней мере одну систему координат, такую, в которой  $e^a = \delta_4^a$ .

Действительно, проводя линии, к которым  $e^a(x^b)$  касательно, можно положить  $e^a \sim \delta_4^a$ , просто выбирая в качестве первых трех координат величины, постоянные вдоль каждой линии. Например, первые три координаты могут быть числами, нумерующими линии в семействе; соответствующим преобразованием четвертой координаты  $t = x^4$  можно тогда получить  $e^a = \delta_4^a$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Производная Ли от некоторой тензорной плотности  $T$  (индексы не пишем) по отношению к  $e^a$ , обозначаемая как  $L_e(T)$ , есть величина, обладающая двумя свойствами:

1) в любой координатной системе, удовлетворяющей лемме 1, имеем  $L_e T = \partial T / \partial t$ ;

2) под действием общих преобразований координат  $L_e(T)$  преобразуется как тензорная плотность того же рода, что и  $T$ .

Таким образом, если мыслить линии, касательные к  $e^a$ , как линии времени, то  $L_e$  будет естественным аналогом производной по времени.

Необходимо проверить самосогласованность данного определения, показав, что при переходе от одной из координатных систем, определенных в лемме 1, к любой другой такой системе,  $L_e(T)$  автоматически имеет пра-

вильные трансформационные свойства. На основании данной нами геометрической картины заметим, что допустимые преобразования суть

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^{\beta}), \quad t' = t + g(x^{\alpha}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

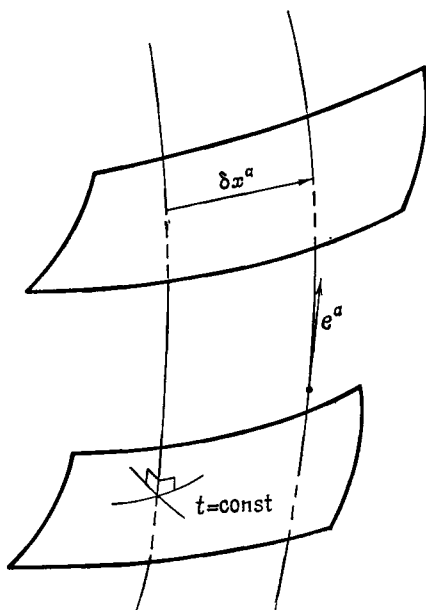
с произвольными  $f^{\alpha}$  и  $g$ ; небольшое вычисление теперь докажет, что самосогласованность имеет место. Как показал в своих лекциях профессор Гюрши<sup>1)</sup>, для тензора  $T^{ab\dots cd\dots}$  имеем

$$\begin{aligned} L_e(T^{a\dots c\dots}) &= T^{a\dots c\dots};_f e^f - T^{f\dots c\dots} e^a;_f - \dots + \\ &+ T^{a\dots f\dots} e^f;_c + \dots \equiv T^{a\dots c\dots};_f e^f - T^{f\dots c\dots} e^a;_f - \\ &- \dots + T^{a\dots f\dots} e^f;_c + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Введем затем понятие гауссовых нормальных координат. Пусть мы имеем трехмерную пространственноподобную гиперповерхность  $H$ . Проведем геодезические перпендикулярно  $H$  (они определены единственным образом). Пусть  $e^{\alpha}$  — единичные векторы, касательные к этим геодезическим. Тогда координаты, определенные леммой 1, называются «гауссовыми нормальными» координатами для данной гиперповерхности  $H$  (мы, конечно, требуем дополнительно, чтобы  $H$  была гиперповерхностью  $t = 0$ ; тогда в уравнении (2.1)  $g = 0$ ). Таким образом, гиперповерхность  $t = \text{const}$  единственным образом определяется гиперповерхностью  $H$ . Отметим, что гауссовы нормальные координаты жестко фиксированы во времени; по этой причине они удобны при анализе уравнений поля.

В каждой точке  $H$  линии, к которым  $e^{\alpha}$  касательны, ортогональны к  $H$ . Мы теперь покажем, что то же самое справедливо для гиперповерхности  $t = \text{const}$ , отвечающей более позднему моменту времени  $t$ . Действительно, рассмотрим какой-либо вектор  $\delta x^{\alpha}$ , лежащий на гиперповерхности  $t = \text{const} \neq 0$ . Интерпретируем его геометрически как вектор, соединяющий две  $e^{\alpha}$ -линии, выделяемые  $x^{\alpha}$  и  $x^{\alpha} + \delta x^{\alpha}$ . Рассмотрим теперь векторы  $\delta x^{\alpha}(t)$ , лежащие на гиперповерхностях  $t = \text{const}$  и соединяющие те же самые  $e^{\alpha}$ -линии (фиг. 1).

<sup>1)</sup> Речь идет о лекциях Гюрши в летней школе в Лез-Уш (см. сборник [29]).— *Прим. ред.*



Ф и г. 1.

На основании геометрического определения производной Ли, рассмотренного Гюрши, имеем

$$L_e(\delta x^a) = 0 \Rightarrow L_e(\delta x^a e_a) = 0. \quad (2.3)$$

С другой стороны, при  $t = 0$  имеем  $\delta x^a e_a = 0$  по построению. Комбинируя этот факт с (2.3), видим, что гиперповерхность  $t = \text{const}$  везде ортогональна  $e^a$ -линиям. В гауссовых нормальных координатах

$$\delta x^a e^b g_{ab} = \delta x^a g_{a4} = 0$$

(для произвольного  $\delta x^a$ ) и, кроме того,

$$e^a e^b g_{ab} = g_{44} = -1.$$

Таким образом, метрический тензор в этих координатах содержит только шесть неизвестных функций:  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - dt^2$ . В процессе устранения координатных



степеней свободы мы свели число переменных поля с десяти до шести; существуют многие другие виды координатных систем, обладающих аналогичным свойством жесткости, причем всегда обнаруживается, что удаление из допустимых координатных преобразований четырех произвольных функций от четырех переменных [пока не будем беспокоиться о функциях трех переменных, вроде фигурирующих в (2.1)] одновременно позволяет устранить четыре компоненты метрического тензора.

Существует еще одно важное свойство гауссовых нормальных координат, присущее, на мой взгляд, также и другим таким же жестким координатным системам (многие из моих коллег не согласны с этим мнением). Возьмем некоторое пространство — время. В нем мы ищем наиболее гладкую (в некотором интуитивном смысле) гиперповерхность  $H$ , какую только можно найти, и строим соответствующие гауссовы координаты; они сами гладки в том смысле, что для плоской  $H$  в плоском пространстве гауссовы координаты определяют как раз лоренцеву систему. Райчадхури и Комар показали, что, несмотря на эту гладкость, гауссовы координаты будут, вообще говоря, порождать координатные сингулярности — точки, где пространство — время остается гладким, но линии, к которым касательны векторы  $e^a$ , начинают пересекаться. Я полагаю, что в общем случае рассматриваемого типа любая жесткая координатная система будет давать аналогичные патологии; например, я бы предположил (хотя это и не доказано), что гармонические координаты, а также и координаты Арновита — Дезэра — Мизнера где-то ведут к аналогичному затруднению.

Гиперповерхности  $t = \text{const}$  имеют внутреннюю метрику

$$h_{ab} = g_{ab} + e_a e_b,$$

записывающуюся в гауссовых координатах как

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad h_{a4} = 0. \quad (2.4)$$

Заметим, что  $h_{ab}$  и  $-e_a e_b$  суть операторы проектирования для  $3+1$ -мерного расщепления, определяемого гауссовыми координатами:

$$h_b^a - e^a e_b = \delta^a_b, \quad h^2 = h, \quad (-ee)^2 = (-ee), \quad h(ee) = 0. \quad (2.5)$$

Величина

$$K_{ab} = - \left( \frac{1}{2} \right) L_e (h_{ab}) = - \left( \frac{1}{2} \right) (e_{a; b} + e_{b; a}) = - e_{a; b} \quad (2.6)$$

в гауссовых координатах имеет вид

$$K_{\alpha\beta} = - \left( \frac{1}{2} \right) \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t}, \quad K_{a4} = 0, \quad (2.7)$$

и носит название второй фундаментальной формы гиперповерхности  $t = \text{const.}$  На основании уравнения (2.1) мы отметим, что  $K_{\alpha\beta}$  ведет себя как тензор в 3-пространстве.

После этих предварительных замечаний вернемся к уравнениям поля. [Начиная с этого момента, я буду все выкладки и формулы записывать в гауссовых нормальных координатах; результаты можно легко перевести обратно на четырехмерный язык так же, как (2.7) преобразуется в форму (2.6).] Согласно классической теореме дифференциальной геометрии (см. книгу Схоутена [6]), тензор Римана  $R_{bcd}^a$  для четырехмерного пространства следующим образом связан с тензором Римана  $S_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$  вложенного трехмерного пространства:

$$R_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = S_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + 2K_{[\mu}^{\alpha} K_{\nu]}^{\beta}, \quad (2.8a)$$

$$R^{4\beta}_{\mu\nu} = + 2K^{\beta}_{[\mu} \parallel_{\nu]}, \quad (2.8б)$$

$$- R^{4\beta}_{4\nu} = + \frac{\partial K_{\nu}^{\beta}}{\partial t} - K^{\beta}_{\alpha} K^{\alpha}_{\nu}. \quad (2.8в)$$

Здесь символ  $\parallel$  в индексе означает ковариантное дифференцирование по отношению к метрическому тензору трехмерного пространства, а квадратные скобки — полную антисимметризацию, например

$$T_{[abc]} = \left( \frac{1}{6} \right) (T_{abc} - T_{bac} + \text{Цикл. перестановки } abc).$$

Уравнения (2.8) можно проверить, например, в лоб, используя уравнение (2.5); можно также использовать другие методы. Для примера мы выведем уравнение (2.8в). Из основного определения тензора Римана следует, что

$$e^{\alpha} R_{abcd} = 2e_{b; [c; d]}.$$

Поэтому, используя равенство  $e^a;_b e^b = 0$ , получаем

$$R_{dabc} e^d e^c = e_{a; b; c} e^c - e_{a; c; b} e^c = \quad (2.9)$$

$$= L_e(e_{a; b}) - 2e_{a; c} e^c;_b + e_{a; c} e^c;_b = L_e(e_{a; b}) - e_{a; c} e^c;_b. \quad (2.10)$$

Если теперь ввести гауссовы нормальные координаты, то из уравнений (2.9) и (2.10) и выписанных ранее соотношений найдем

$$R_{4\alpha 4\beta} = + \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial t} + K_{\nu}^{\alpha} K_{\beta}^{\nu}, \quad (2.11)$$

что и требовалось доказать.

Пусть  $G_{ab} = R_{ab} - (1/2)R$  есть тензор Эйнштейна четырехмерного пространства ( $R$  — скаляр Риччи). Тогда в силу (2.7) и (2.8) уравнение  $G_b^a = 0$  означает, что

$$\left. \begin{aligned} G_{\mu}^4 &\equiv K^{\nu}_{\mu}{}_{;\nu} - K^{\nu}_{\nu}{}_{;\mu} = 0, \\ G_4^4 &\equiv \frac{1}{2}(K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} - K^{\nu}_{\nu} K_{\mu}^{\mu} - S) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$G_{\nu}^{\mu} \equiv - \frac{\partial K_{\nu}^{\mu}}{\partial t} + S_{\nu}^{\mu} + K_{\rho}^{\rho} K_{\nu}^{\mu} - \delta_{\nu}^{\mu} \left( \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} K_{\alpha}^{\alpha} K_{\beta}^{\beta} + \frac{1}{2} K^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma} - \frac{\partial K_{\alpha}^{\alpha}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.13)$$

$$K_{\mu\nu} \equiv - \left( \frac{1}{2} \right) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

где  $S_{\alpha\beta}$  и  $S$  — соответственно тензор и скаляр Риччи трехмерного пространства.

Рассмотрим сначала уравнения (2.13) и (2.14), совершенно игнорируя пока уравнения (2.12). Предположим, что  $g_{\alpha\beta}$  допускает разложение в ряд Тейлора по степеням  $t$  вблизи гиперповерхности  $H$ , задаваемой уравнением  $t = 0$ , и что значения  $g_{\alpha\beta}$  и  $K_{\alpha\beta}$  при  $t = 0$  заданы. Тогда уравнение (2.13) позволяет выразить вторую производную по времени от  $g_{\alpha\beta}$  через известные величины; дифференцируя это выражение еще раз, найдем третью производную по времени и т. д. Другими словами, уравнения (2.13) — (2.14) сами по себе образуют так называемую задачу Коши—Ковалевской. Посредством сложного и очень изящного анализа Шоке-Брюа показала, что уравнения (2.13) — (2.14) на ограниченных  $H$  и при достаточно малых  $t$  имеют

единственные конечные решения, удовлетворяющие данным начальным значениям. При этом она не опиралась на предположение об аналитичности, как пришлось сделать выше нам. Конечно, решения в общем случае не остаются ограниченными для бесконечно больших промежутков времени: как упоминалось выше, система координат вызывает появление особенностей при больших  $t$ . Известны примеры, когда в начальной области гладкое решение дает *физические* (неустранимые) сингулярности в области больших, но конечных  $t$ .

Рассмотрим теперь уравнения (2.12); они называются уравнениями связи, потому что связывают начальные значения  $g_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\alpha\beta}$ . Предположим, что уравнения (2.13) — (2.14) выполняются везде и что на начальной гиперповерхности  $H$  уравнения (2.12) тоже выполняются. Тогда (2.12) сохраняют силу также и в последующие моменты времени. Действительно, тождества Бианки  $G^a_{b;a} \equiv 0$  теперь запишутся в виде

$$\frac{\partial G^a_a}{\partial t} = f^b_a G^a_b, \quad (2.15)$$

где  $f^b_a$  — некоторые величины, связанные с символами Кристоффеля. Соотношения (2.15) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль каждой  $e^a$ -линии в отдельности; поэтому решение этих уравнений единственным образом определяется заданием  $G^a_a(x^a, 0)$  и  $g_{\alpha\beta}(x^\nu, t)$  во всех точках. Но в действительности  $G^a_a(x^a, 0) = 0$ , и единственное решение системы (2.15) поэтому есть  $G^a_a = 0$ . Собирая вместе результаты, мы получаем теорему:

**ТЕОРЕМА.** Пусть  $H$  — трехмерное пространство с положительно определенной метрикой  $g_{\alpha\beta}$ , а  $K_{\alpha\beta}$  — симметричный тензор, определенный в этом 3-пространстве и подчиняющийся уравнениям связей (2.12). Тогда существует одно и только одно пространство — время с  $G^a_b = 0$ , которое имеет изометричное  $H$  трехмерное подпространство с  $K_{\alpha\beta}$  в качестве его второй фундаментальной формы.

Отметим, что в окончательной формулировке исчезли все ссылки на гауссовы нормальные координаты — они использовались только для упрощения доказательства.

Мы теперь можем, по крайней мере грубо, подсчитать число степеней свободы. Действительно, на  $H$  заданы 12 функций от трех переменных  $g_{\alpha\beta}$  и  $K_{\alpha\beta}$ . Они, однако, подчиняются четырем уравнениям связей (2.12), уменьшающим их число до восьми [конечно, при интегрировании уравнений (2.12) в решения проникнут некоторые произвольные функции от двух переменных, но в данный момент нас беспокоят не они, а произвольные функции трех переменных]. Из восьми оставшихся величин три (скажем, три недиагональных элемента тензора  $g_{\alpha\beta}$ ) можно было бы привести к некоторым стандартным значениям (например, к нулю) с помощью координатного преобразования (2.1). Из оставшихся пяти величин одну (например,  $K_{\alpha}^{\alpha}$ ) можно обратить в нуль или привести к некоторому выбранному значению посредством подходящего выбора  $H$ . Это оставляет нам для дальнейшего анализа только четыре независимые функции трех переменных — в этом смысле гравитационное поле имеет две степени свободы. Такого результата и следовало ожидать, поскольку в лоренц-ковариантной теории любое свободное поле с нулевой массой покоя (исключая скалярное поле) имеет две степени свободы.

Изложенные соображения показывают в принципе, как волны эволюционируют во времени, но оставляют еще неясными многие моменты. В частности, нетрудно решить уравнения (2.12). Профессор Уилер как раз обсудил<sup>1)</sup> некоторые очень интересные работы Принстонской группы по уравнениям связей. Но несмотря на то что степеней свободы всего две, естественное геометрическое и физическое определение того, какие именно элементы начальных данных независимы, очень трудно. По аналогии с электродинамикой хотелось бы расщепить поле на две поперечные компоненты и некоторые дополнительные продольные временноподобные компоненты. Такое расщепление действительно было проведено, но оно не локально и поэтому с геометрической точки зрения довольно неуклюже.

Из множества полученных в последнее время важных результатов по обычной проблеме начальных

<sup>1)</sup> Речь идет о лекциях Уилера в летней школе в Лез-уш (см. сборник [29]).— *Прим. ред.*

значений три представляют особый интерес для теории излучения. Во-первых, Брилл показал, что в некоторых специальных случаях асимптотически плоских полей, всюду лишенных источников, полная энергия поля, оцененная по (активной) гравитационной массе, положительно определена на бесконечности. Арновит, Дэзер и Мизнер обобщили его результаты на наиболее общее асимптотически плоское лишенное источников поле с повсюду евклидовой топологией. Эти результаты были получены путем анализа уравнений связей в один момент времени.

Аналогичные результаты были получены Бриллом и другими даже в некоторых неевклидовых топологиях. Во-вторых, расщепление, данное Арновитом, Дэзером и Мизнером для начальных значений в асимптотически плоском топологически евклидовом случае, «асимптотически локально», т. е. асимптотические значения расщепленных величин зависят только от асимптотических значений начальных данных. В-третьих, ряд авторов (среди них Дирак, Андерсон, Арновит, Дэзер и Мизнер, Бергман и Комар и другие) развили канонический формализм для гравитационного поля, показывающий, хотя и несколько нечетко, как гравитацию можно включить в обычную лоренц-ковариантную теорию полей.

Во всех этих исследованиях поле анализируется на пространственноподобной гиперповерхности  $t = 0$  или вблизи от нее. В последующих лекциях мы будем иметь дело главным образом со светоподобными <sup>1)</sup> гиперповерхностями, особенно со светоподобной «гиперповерхностью на бесконечности». Одна из наиболее трудных, интересных и мало разработанных математически проблем классической теории поля заключается в том, как связать различные результаты, полученные для обычной проблемы начальных значений, с результатами, касающимися светоподобных гиперповерхностей.

---

<sup>1)</sup> Р. Сакс пользуется термином *светоподобный* (lightlike) вместо обычного *изотропный*, или *нулевой*. Мы сохранили эту особенность в переводе, поскольку смысл термина совершенно прозрачен.—  
*Прим. ред.*

### III. Геометрия конгруэнций изотропных геодезических

Слабые гравитационные волны, подобно свету, распространяются с локальной скоростью света. Поэтому разумно предположить, что окажется удобно оперировать геометрическими объектами — линиями и гиперповерхностями, касательными к локальному световому конусу. Здесь мы рассмотрим некоторые предварительные положения, которые послужат основой дальнейшего изложения.

Рассмотрим светоподобную геодезическую  $x^a = x^a(v)$ . Касательный вектор

$$k^a = \frac{dx^a}{dv} \quad (3.1)$$

подчиняется условию

$$k^a k_a = 0. \quad (3.2)$$

При надлежащем выборе  $v$  мы имеем также

$$k^a ;_b k^b \equiv \frac{dk^a}{dv} + \Gamma_{bc}^a k^b k^c = 0. \quad (3.3)$$

Если теперь перейти к другому параметру  $v'$ , то условие (3.3) останется в силе, если и только если  $(d^2v'/dv^2) = 0$ , т. е.

$$v' = \left( \frac{v}{A} \right) + D, \quad (3.4)$$

где  $A$  и  $D$  — константы. Параметры  $v'$ , задаваемые уравнением (3.4), носят название канонических аффинных параметров.

Рассмотрим теперь конгруэнцию (заполняющее все пространство — время множество) таких геодезических, задаваемую уравнениями

$$x^a = x^a(y^\alpha, v) \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Отдельные кривые задаются уравнениями  $y^\alpha = \text{const}$  и будут называться лучами;  $v$  — аффинный параметр вдоль каждой кривой. При допустимых заменах параметра имеем

$$v' = \underset{0}{A}^{-1}(y^\alpha) V + \underset{0}{D}(y^\alpha), \quad k'^a = \underset{0}{A} k^a, \quad (3.5)$$

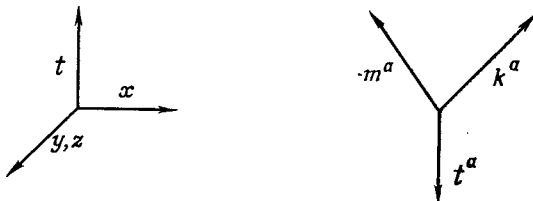
$$y'^\alpha = y'^\alpha(y^\beta),$$

где индекс «0» под буквами означает величину, (ковариантно) сохраняющуюся вдоль каждого луча.

Кроме вектора  $k^a$ , полезно иногда рассматривать другой действительный светоподобный вектор  $m^a$  и комплексный вектор  $t^a = (1/2)^{1/2} (q^a + ir^a)$ , где  $q^a$  и  $r^a$  — действительные пространственноподобные векторы, ортогональные друг другу и векторам  $k^a$  и  $m^a$ . Вектор  $m^a$  можно нормировать таким образом, чтобы  $m^a k_a = 1$ ; тогда  $k^a m_a = t^a \bar{t}_a = 1$  (остальные произведения дают нуль), (3.6a)

$$\left(\frac{1}{2}\right) g_{ab} = m_{(a} k_{b)} + t_{(a} \bar{t}_{b)}, \quad (3.6b)$$

где черта над буквой означает комплексное сопряжение, а круглые скобки в индексах — симметризацию. [Уравнения (3.6a) и (3.6b) взаимно вытекают друг из друга.]



Ф и г. 2.

Набор векторов  $(k^a, m^a, t^a)$  носит название квазиортогональной тетрадной системы (фиг. 2). Уравнения (3.6) и условие, что векторы  $k^a$  направлены вдоль данного множества лучей, фиксируют квазиортогональные тетрады с точностью до следующих преобразований:

1) пространственноподобные вращения в  $(q, r)$ -плоскости

$$t'^a = C t^a (C\bar{C} = 1), \quad (3.7)$$

2) временноподобные вращения в  $(k, m)$ -плоскости

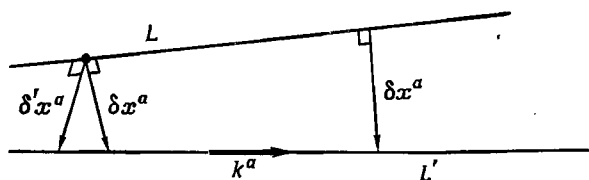
$$k'^a = A k^a, \quad m'^a = A^{-1} m^a, \quad (3.8)$$

3) так называемые изотропные (или светоподобные) вращения

$$\begin{aligned} m'^a &= m^a + B t^a + \bar{B} \bar{t}^a - B \bar{B} k^a, \\ t'^a &= t^a - \bar{B} k^a, \\ k'^a &= k^a. \end{aligned} \quad (3.9)$$



Преобразования (3.7) и (3.8) образуют однопараметрические группы; преобразования (3.9) образуют двухпараметрическую абелеву группу; преобразования (3.7) и (3.8)



Ф и г. 3.

коммутируют друг с другом, но не с преобразованиями (3.9).

Чтобы выяснить геометрические свойства нашей конгруэнции, построим в некоторой точке вектор

$$\delta x^a = \left( \frac{\partial x^a}{\partial y^a} \right) \delta c^a,$$

соединяющий некоторый выделенный луч  $L$

$$y^a = c^a,$$

и соседний луч (фиг. 3)

$$y^a = c^a + \delta c^a.$$

Если произвести одно из допустимых преобразований (3.4), то получим

$$\delta' x^a = \delta x^a + b k^a, \quad (3.10)$$

где величина  $b = v \delta \left( \ln A \right) - A \delta D$  произвольна в данной точке. Таким образом, в противоположность двум соседним временноподобным кривым две соседние изотропные геодезические не определяют в точке  $\ddagger$  единственного соединяющего их вектора. Однако из равенства (3.10) видно, что соотношение  $k^a \delta x_a = 0$  выполняется либо для каждого такого соединительного вектора, либо ни для одного из них. В действительности верно даже более общее положение.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Величина  $k^a \delta x_a$  одинакова для любых двух векторов, соединяющих луч  $L$  и фиксирован-

ный соседний луч, независимо от того, в какой точке на  $L$  мы ее вычисляем.

В самом деле, пользуясь основным геометрическим определением производной Ли, или равенством смешанных частных производных

$$\frac{\partial^2 x^a}{\partial v \partial y^a} \equiv \frac{\partial^2 x^a}{\partial y^a \partial v},$$

мы заметим, что

$$L_k(\delta x^a) \equiv \delta x^a;_b k^b - k^a;_b \delta x^b = 0. \quad (3.11)$$

С другой стороны,  $L_k(k_a) = 0$ , так что  $L_k(k_a \delta x^a) = 0$ , и это произведение сохраняется вдоль  $L$ , что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим два различных луча  $L'$  и  $L''$ , оба соседних к лучу  $L$ . Предположим, что векторы, связывающие  $L$  с каждым из этих лучей, ортогональны вектору  $k^a$  (и поэтому пространственноподобны). В некоторой выделенной точке луча  $L$  длина векторов, связывающих  $L$  с  $L'$  и  $L''$ , определяется единственным образом, так как эта длина остается инвариантной при преобразованиях (3.10); определен также и угол между векторами. Нам предстоит выяснить, как эти длины и углы изменяются при перемещении точки вдоль луча  $L$ . Для удобства мы введем оператор проектирования  $h_b^a = t^a \bar{t}_b + \bar{t}^a t_b$ , имеющий обычные свойства:  $h_b^a$ , действуя на некоторый вектор, проектирует его в двумерное пространство, ортогональное вектору  $k^a$ ; это 2-пространство определено не единственным образом, так как  $h_b^a$  еще может изменяться при изотропных поворотах (3.9). На основании (3.9) мы замечаем, что эта произвольность соответствует как раз произвольности (1.10) ортогональных соединительных векторов в фиксированной точке луча  $L$ , например  $h_b^a s^b = h_b^a s^b + b k^a$ . Из предыдущего ясно, что можно смело использовать  $h_b^a$  при вычислениях длин и углов между различными соединительными векторами, если они ортогональны вектору  $k^a$ .

Вследствие (3.11) имеем:

$$\begin{aligned} h_b^a(\delta_{\perp} x^b);_c k^c &= A^a_b \delta_{\perp} x^b \\ (\delta_{\perp} x^a = h_b^a \delta x^b, \quad A_b^a &= h_a^c h_b^c k^d;_c). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Бесконечно малое линейное преобразование

$$\delta_{\perp} x^a \rightarrow \delta_{\perp} x^a + A_b^a \delta_{\perp} x^b dv$$

можно разложить, как и в гидродинамике, на бесконечно малые повороты, растяжение и сдвиг:

$$A_{ab} = A_{[ab]} + \frac{1}{2} A_c^c h_{ab} + \left[ A_{(ab)} - \frac{1}{2} A_c^c h_{ab} \right]. \quad (3.13)$$

Следующие три скаляра:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{2} A_{[ab]} A^{ab}} = \sqrt{\frac{1}{2} k_{[a; b]} k^{a; b}}, \quad \varrho = \frac{1}{2} A_c^c = \frac{1}{2} k^c{}_{; c}, \quad (3.14)$$

$$|\sigma| = \sqrt{\frac{1}{2} [A_{(ab)} A^{ab} - 2\varrho^2]} = \sqrt{\frac{1}{2} [k_{(a; b)} k^{a; b} - 2\varrho^2]}$$

называются соответственно модулями поворота, растяжения и сдвига. Сдвиг мы будем в дальнейшем рассматривать как комплексную величину с модулем (3.14). Из предыдущих рассуждений ясно, что  $\omega dv$ ,  $\varrho dv$ ,  $|\sigma| dv$  определяются единственным образом данной конгруэнцией. Поэтому и  $\omega$ , и  $|\sigma|$ , и  $\varrho$  приобретают при преобразовании (3.5) множитель  $A$ .

Чтобы получить более явные выражения для  $\omega$ ,  $\sigma$  и  $\varrho$ , разложим  $k_{a; b}$  по нашим квазиортогональным тетрадам. Вследствие равенства

$$k_{a; b} k^b = k_{a; b} k^a = 0$$

находим, что  $k_{a; b}$  имеет вид

$$k_{a; b} = z t_a \bar{t}_b + \sigma t_a t_b + \Omega t_a k_b + \zeta k_a t_b + \text{к. с.} + \xi k_a k_b, \quad (3.15)$$

где

$$z = k_{a; b} \bar{t}^a t^b = \varrho + i\omega, \quad (3.16)$$

$$\sigma = k_{a; b} \bar{t}^a \bar{t}^b.$$

Из этих уравнений можно непосредственно видеть, что величины  $\omega$ ,  $\sigma$  и  $\varrho$  имеют определенный физический смысл, поскольку они инвариантны относительно нулевых вращений (3.9) и имеют простые трансформационные свойства относительно вращений (3.7) и (3.8).

Кроме аффинных параметров  $v$ , существуют еще параметры двух видов, которые часто вводятся на изотропных

геодезических, когда  $q \neq 0$ : это «параллакс»

$$r_p = q^{-1}, \quad (3.17)$$

и «яркостный параметр»  $r_A$ , определяемый как любое решение уравнения

$$\frac{dr_A}{dv} = qr_A. \quad (3.18)$$

Последнее название связано со следующим обстоятельством. Пусть  $\delta F$  — бесконечно малый элемент пространства, вырезаемый некоторым выделенным пучком лучей, соседних к лучу  $L$ , каждый из которых имеет соединительный вектор, ортогональный  $k^a$ ; как и раньше, это 2-пространство не единственно, но величина площади  $\delta F$  определяется единственным образом. Если теперь найти скорость изменения  $\delta F$  вдоль  $L$ , то тривиальное обобщение предыдущих соображений приведет к выводу, что вдоль  $L$  справедливо соотношение

$$\delta F = \text{const} \cdot r_A^2.$$

Теперь, если в поле существует поток фотонов, распространяющихся вдоль лучей, то интенсивность потока уменьшается обратно пропорционально  $\delta F$ . Наоборот, фотоны можно использовать для измерения  $r_A$ , приняв, что отношение интенсивности потока фотонов в некоторой точке луча  $L$  к интенсивности в какой-либо другой точке равно соответствующему отношению  $r_A^2/r_A'^2$ . Ясно, что  $r_A$  при этом определяется вдоль  $L$  только с точностью до множителя, постоянного вдоль  $L$ , что можно и непосредственно увидеть из уравнения (3.17). Как нетрудно убедиться, в общем случае это лучшее, что могут дать измерения яркостного параметра (конечно, если не определены абсолютная интенсивность источника фотонов и угловое распределение излучения).

В заключение этого рассмотрения я приведу несколько результатов относительно светоподобных гиперповерхностей. Пусть  $u = \text{const}$  образуют систему светоподобных гиперповерхностей, т. е.

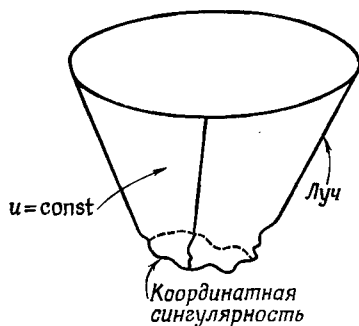
$$u_{,a}u_{,b}g^{ab} = 0. \quad (3.19)$$

Вектор  $k_a = u_{,a}$  есть вектор, нормальный к этим гиперповерхностям; вследствие (3.19)  $k_a$  светоподобен, а

ковариантное дифференцирование равенства (3.19) дает

$$k^a_{;b} k^b = 0. \quad (3.20)$$

Заметим, что  $k^a$  лежит на гиперповерхности, к которой он ортогонален, ибо он самоортогонален. Поэтому отдельная светоподобная гиперповерхность  $u = 0$  определяет внутри себя конгруэнцию лучей (фиг. 4), и на  $u = 0$  все векторы, соединяющие соседние лучи, ортогональны  $k^a$ . Можно задаться обратным вопросом: когда данная конгруэнция



Ф и г. 4.

изотропных геодезических может быть собрана в (однопараметрическое) семейство гиперповерхностей  $u = \text{const}$ , к которым  $k^a$  ортогонален. Тривиальная возможность такого рода существует всегда, когда  $k_{[a, b]} = 0$ , так как в этом случае  $k_a$  есть градиент,  $k_a = u_{,a}$ , и искомые гиперповерхности суть  $u = \text{const}$ . Однако, даже если вектор  $k_a$  только пропорционален градиенту,  $k_a = q(x^b) u_{,a}$ , он

все еще ортогонален гиперповерхностям  $u = \text{const}$ . Чтобы установить, пропорционально ли данное векторное поле  $k_a$  градиенту, можно использовать следующую классическую теорему теории дифференциальных уравнений: произвольный вектор  $r_a$  ортогонален некоторой гиперповерхности (читай — «пропорционален градиенту»), если и только если  $r_{[a, b} r_{c]} = 0$ . Сопоставляя этот факт с уравнением (3.14), находим, что данная конгруэнция изотропных геодезических ортогональна некоторой гиперповерхности тогда и только тогда, когда она безвихревая. Величину  $u$  часто называют запаздывающим временем; мы вскоре увидим, откуда произошло это название.

Предположим, что гиперповерхность  $H$ , задаваемая уравнением  $u = 0$ , изотропна. Выберем на  $u$  две координаты  $x^a$ , постоянные вдоль лучей (в дальнейшем будет удобно считать  $\alpha = 2, 3$ ); в качестве третьей координаты

возьмем любой параметр  $r$  вдоль лучей гиперповерхности  $H$ . Тогда расстояние между соседними точками в  $H$  будет задаваться через

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^a, r) dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.21)$$

так как направление лучей ортогонально всем остальным направлениям в  $H$ ; (3.21) мы будем называть «поперечной» метрикой гиперповерхности  $H$ . «Конформно-поперечная» метрика на  $H$  определяется следующим образом. Вообще говоря, конформное пространство — одно из пространств, в которых хорошо определены отношения расстояний и углов, но не определены абсолютные значения расстояний. С формальной стороны это означает, что в пространстве существует метрический тензор, но он определен лишь с точностью до произвольного множителя. Поэтому конформно-поперечную метрику на  $H$  можно задавать, выбирая  $g_{\alpha\beta}$ , но имея в виду, что  $g_{\alpha\beta}$  и  $g(x^\nu, r) g_{\alpha\beta}$  представляют одну и ту же конформно-поперечную метрику. Или альтернативно можно задать тензор

$$h_{\alpha\beta} = [\det(g_{\alpha\beta})]^{-1/2} g_{\alpha\beta}, \quad (3.22)$$

который на самом деле обладает только двумя компонентами, так как его детерминант тождественно равен 1.

Изотропные конгруэнции и светоподобные поверхности кажутся, конечно, очень странными «птицами» — это объясняется в основном тем, что они, будучи подпространствами метрического пространства, не имеют невырожденной метрики. Практически именно изотропные повороты (3.9) делают их столь эксцентричными. В частности, отдельная изотропная гиперповерхность не определяет какого-либо обыкновенного или необыкновенного семейства изотропных гиперповерхностей в отличие от поверхностей гауссовых нормальных координатных систем. Гораздо хуже обстоит дело со следующей проблемой. Уравнения (2.8) выглядят довольно привлекательно, поскольку мы можем выразить их через тензор Римана, вторую фундаментальную форму и ковариантные производные, определенные на трехмерной гиперповерхности  $t = \text{const}$  (правда, если бы пришлось выписать это в явной форме, то уравнения выглядели бы ужасно громоздко). Позднее нам понадобятся для изотропных гиперповерхностей урав-

нения, аналогичные (2.8), и мы тогда увидим, что они на самом деле крайне громоздки; в этом случае мы не знаем адекватного определения ковариантной производной и кривизны 3-пространства.

#### IV. Проблема начальных характеристик

Теперь мы располагаем геометрическими сведениями, необходимыми для изучения проблемы начальных характеристик. Мы выясним один вопрос, который остался непонятным в лекции II: если гравитационное поле имеет две поперечные степени свободы, то какова их геометрическая интерпретация? Мы найдем, что они являются двумя компонентами поперечной конформной метрики светоподобной гиперповерхности. Интересно отметить, что этот результат можно было полностью усмотреть из лоренц-ковариантной теории поля спина 2, представляющего предельно слабое гравитационное поле. Действительно, в этой теории поперечные степени свободы соответствуют поперечным бесшпуровым частям потенциалов (примерно так же, как в обычной электродинамике). Далее для предельно слабого гравитационного поля детерминант метрического тензора переходит в его след, так что конформная метрика (с исключенным детерминантом) является естественным конечным аналогом бесшпуровых потенциалов.

Простейшим гиперболическим уравнением в частных производных является уравнение

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1)$$

В обычной проблеме начальных значений решение определяется заданием  $A$  и  $\dot{A}$  при  $t = 0$ . Но так как общее решение этого уравнения есть  $A = f(x + t) + g(x - t)$ , то легко также конкретизировать профили волн  $f$  и  $g$ , распространяющихся соответственно вправо и влево. Это сводится к заданию  $A$  (без задания каких-либо производных от  $A$ ) на двух пересекающихся линиях, касательных к звуковому конусу, скажем на линиях  $x \pm t = 0$ . В общей теории относительности точно так же проблема начальных характеристик заключается в выделении

решений посредством задания данных на гиперповерхностях, касательных к световому конусу. Эту проблему впервые рассмотрели Дармуа и Штельмахер; в течение последних двух лет она вновь интенсивно исследовалась. В этих лекциях я буду в основном следовать трактовке, данной Бонди.

Рассмотрим некоторую четырехмерную область пространства — времени и в ней выберем семейство светоподобных гиперповерхностей  $u = \text{const}$ . Предполагается, что для соответствующей конгруэнции лучей с касательными векторами  $k_a = u_{,a}$  растяжение  $\rho \neq 0$ , что всегда может выполняться в некоторой окрестности пространства — времени; вне такой окрестности лучи начинают пересекаться, так что глобально наша конструкция неприменима.

Уравнения поля  $G_a^b = 0$  тогда допускают расщепление, аналогичное расщеплению на  $G_a^a$ ,  $R_\beta^\alpha$ , с которым мы встретились при обсуждении обычной проблемы начальных значений. Чтобы увидеть это, дополним направление  $k^a$  до квазиортогональной тетрадной системы  $(k, m, t)$  и примем следующие определения:

1. Основные уравнения (6 уравнений):  $k^a G_{ab} = 0$ ,  $G_{ab} t^a t^b = 0$ .

2. Тривиальное уравнение (1 уравнение):  $G_{ab} t^a \bar{t}^b = 0$ .

3. Дополнительные условия (3 уравнения):  $G_{ab} m^a t^b = 0$ ,  $G_{ab} m^a m^b = 0$ . (Здесь одно комплексное уравнение считалось за два действительных.)

Справедлива следующая лемма:

ЛЕММА. Пусть основные уравнения везде выполняются. Тогда

1) тривиальные уравнения также справедливы всюду и

2) дополнительные условия справедливы всюду, если они справедливы хотя бы в одной точке каждого луча.

Докажем утверждение 1. Прежде всего имеем:  $G_{b;a}^b \equiv \equiv 0$ . Используя тот факт, что основные уравнения удовлетворяются, а также данное в лекции III расщепление  $k_a; b$ , находим, что

$$0 = k^a G_{a;b}^b = -k_a; b G^{ab} = -2\rho G_{ab} t^a \bar{t}^b. \quad (4.2)$$



Но поскольку мы предполагаем, что  $q \neq 0$ , тривиальное уравнение, следовательно, тождественно удовлетворяется. Аналогично можно доказать утверждение 2. Таким образом, мы опять можем начинать с интегрирования основных уравнений и лишь затем переходить к вопросу о дополнительных условиях.

Чтобы идти дальше, мы можем вновь построить подходящую жесткую координатную систему. Выберем в качестве координаты  $x^0$  запаздывающее время  $x^0 = u$ . Пусть  $r = x^1$  — яркостный параметр вдоль лучей, и пусть  $x^\alpha$  ( $\alpha = 2, 3$ ) — любые другие две координаты, постоянные вдоль лучей. Опираясь на изложенные выше геометрические соображения, мы заключаем, что метрика в этих координатах принимает вид

$$ds^2 = W du^2 + 2e^{2\beta} du dr - r^2 h_{\alpha\gamma} (dx^\alpha - U^\alpha du) (dx^\gamma - U^\gamma du),$$

$$W, \beta, h_{\alpha\gamma}, U^\alpha = \text{Функции } x^\alpha. \quad (4.3)$$

Поскольку  $r$  — яркостный параметр, детерминант  $h_{\nu\mu}$  должен не зависеть от  $r$ . А так как яркостный параметр определен лишь с точностью до множителя, постоянного вдоль каждого луча, то без нарушения общности можно потребовать, чтобы

$$2h_{\nu\mu} dx^\mu dx^\nu = (e^{2\gamma} + e^{2\delta}) d\theta^2 + 4 \operatorname{sh}(\gamma - \delta) d\theta d\varphi \sin\theta +$$

$$+ (\sin\theta)^2 (e^{-2\gamma} + e^{-2\delta}) d\varphi^2, \quad \theta \equiv x^2, \quad \varphi \equiv x^3. \quad (4.4)$$

Таким образом, метрика (4.3) содержит всего шесть неизвестных функций от четырех переменных, и координатная система оказывается достаточно жесткой для наших целей.

Поле анализируют либо в окрестности некоторой точки, либо «вблизи бесконечности» в асимптотически плоском пространстве. Мы выполним анализ поля на бесконечности и затем изложим без доказательств результаты локального анализа, как они приводятся в литературе. Еще со времени оригинальных работ Фока и Траутмана вызывал определенные затруднения вопрос о том, как достаточно ясным и изящным образом ввести условия того, что пространство — время в асимптотике приближается к пространству Минковского. Этот вопрос теперь наконец разрешен Пенроузом [19]. Мы используем условия, более явные, менее изящные и более жесткие, чем условия Пен-

роуза. Однако они воспроизводят его основные идеи и результаты. Если в пространстве Минковского использовать запаздывающее время  $u = t - r$  и сферические координаты  $r, \theta, \varphi$ , то линейный элемент будет иметь вид

$$ds^2 = du^2 + 2 du dr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.5)$$

Таким образом, естественно потребовать, чтобы для асимптотически плоских полей выполнялись требования

$$\lim W = 1, \quad \lim (rU^\alpha) = \lim \beta = \lim \delta = \lim \gamma = 0, \quad (4.6)$$

где знак  $\lim$  означает предел  $r \rightarrow \infty$  при фиксированных  $u, \theta, \varphi$ . Менее естественным и в действительности излишним ограничивающим выбор является второе требование, именно, чтобы все представляющие интерес величины допускали разложение в ряд по  $(1/r)$ , например

$$(1 - i) \frac{\delta + i\gamma}{2} = \frac{c(u, \theta, \varphi)}{r} + \frac{d(u, \theta, \varphi)}{r^2} + \dots \quad (4.7)$$

(где комплексная комбинация слева введена из соображений последующего удобства). Я упомяну два вывода из чрезвычайно обширного обсуждения этого второго требования в литературе: во-первых, оно может быть сильно ослаблено, но не исключено полностью; во-вторых, оно тесно связано с условием Зоммерфельдовского типа для расходящихся волн. Разумеется, все эти требования и соглашения теряют силу, когда  $r$  становится малым и лучи начинают пересекаться.

Теперь предстоит решить в лоб уравнения поля; конечные результаты столь громоздки, что мы приведем здесь только частный их вид для случая, когда имеют место аксиальная симметрия и симметрия относительно отражений. В этом случае, рассмотренном Бонди,

$$\delta = \gamma, \quad U^3 = 0, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial \varphi} = 0,$$

и направление  $\varphi$  есть ортогональное к некоторой гиперповерхности направление Киллинга. Метрика упрощается до вида

$$ds^2 = \left( \frac{Ve^{2\beta}}{r} \right) du^2 + 2e^{2\beta} du dr - r^2 [e^{2\gamma} (d\theta - U du)^2 + e^{-2\gamma} \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.8)$$

где специальная форма первого коэффициента выбрана из соображений дальнейшего удобства.

Два из основных уравнений обращаются в нуль тождественно, а остальные четыре являются линейными комбинациями выражений

$$R_{11} = -\left(\frac{4}{r}\right) \left(\beta_1 - \frac{1}{2} \gamma_1^2\right) = 0, \quad (4.9)$$

$$-2r^2 R_{12} = [r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_{11}]_1 - 2r^2 \left(-\gamma_{12} + 2\gamma_1 \gamma_2 - 2\gamma_1 \operatorname{ctg} \theta + \beta_{12} - \frac{2\beta_2}{r}\right) = 0, \quad (4.10)$$

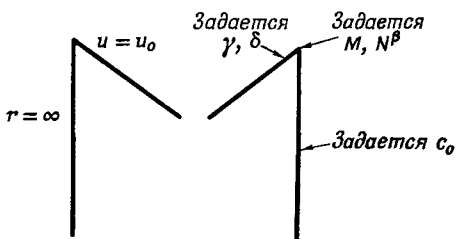
$$R_{22} e^{2(\beta-\gamma)} - r^2 R_3^3 e^{2\beta} = 2V_1 + \frac{1}{2} r^4 e^{2(\gamma-\beta)} U_1^2 - r^2 U_{12} - 4r U_2 - r^2 U_1 \operatorname{ctg} \theta - 4r U \operatorname{ctg} \theta + 2e^{2(\beta-\gamma)} [\beta_{22} + \beta_2^3 - 1 - (3\gamma_2 - \beta_2) \operatorname{ctg} \theta + 2\gamma_2 (\gamma_2 - \beta_2)] = 0, \quad (4.11)$$

$$-r^2 R_3^3 e^{2\beta} = r2 (r\gamma)_{01} + (1 - r\gamma_1) V_1 - (r\gamma_{11} + \gamma_1) V - r(1 - r\gamma_1) U_2 - r^2 (\operatorname{ctg} \theta - \gamma_2) U_1 + r(2r\gamma_{12} + 2\gamma_2 + r\gamma_1 \operatorname{ctg} \theta - 3 \operatorname{ctg} \theta) U + e^{2(\beta-\gamma)} [-1 - (3\gamma_2 - 2\beta_2) \operatorname{ctg} \theta - \gamma_{22} + 2\gamma_2 (\gamma_2 - \beta_2)] = 0. \quad (4.12)$$

Первые три из них, поскольку они не содержат производных по  $u$ , носят название уравнений гиперповерхности, а последнее называется стандартным уравнением.

Предположим теперь, что величина  $\gamma$  задана для некоторого значения  $u$ . Тогда уравнение (4.9) и граничные условия (4.6) определяют  $\beta$  единственным образом. Затем уравнение (4.10) и граничные условия определяют  $U$  с точностью до появляющейся при интегрировании произвольной функции  $-6N(u, \theta)$ , которую можно добавить к  $r^4 e^{2(\gamma-\beta\gamma)} U_1$ . Уравнение (4.11) определяет  $V$  с точностью до аддитивной функции  $-2M(u, \theta)$ ; наконец, уравнение (4.12) определяет  $\gamma_0$  с точностью до аддитивной функции  $c_0(u, \theta)/r$ . Мы можем затем продифференцировать уравнения (4.9)–(4.12) по  $u$  и повторить всю процедуру снова. Другими словами, при заданном в некоторый момент  $\gamma$  основные уравнения позволяют определить будущее (или прошедшее) с точностью до указанных трех произвольных функций интегрирования. Вернемся

теперь к общему случаю. Оказывается, что результаты в общем случае полностью аналогичны полученным нами. Для некоторого значения  $u$  следует задать две функции  $\gamma$  и  $\delta$ . Тогда будущее определяется с точностью до пяти произвольных функций интегрирования: члена  $-2M(u, \theta, \varphi)/r$ , добавляемого к  $W$ , двух функций



Ф и г. 5.

$N^\alpha(u, \theta, \varphi)$ , появляющихся в члене порядка  $1/r^3$  в  $U$ , и двух «функций информации»  $c_0(u, \theta, \varphi)$ , где комплексная функция  $c$  дается уравнением (4.7).

Затем нужно вычислить три дополнительных условия. Ввиду сформулированной выше леммы интуитивно ясно, что добавочные условия должны включать только функции  $M$ ,  $N$  и  $c_0$ ; после долгих вычислений получаем:

$$M_0 = -|c_0|^2 + \frac{1}{2}(\sin \theta)^{-1} R \left\{ \bar{\nabla} \left[ \left( \frac{1}{\sin \theta} \right) \bar{\nabla} (c_0 \sin^2 \theta) \right] \right\}, \quad (4.13)$$

$$3(N^2 + i \sin \theta N^3) = -\nabla M - [4c \operatorname{ctg} \theta + (\nabla c) + 3c \nabla] \bar{c}_0, \quad (4.14)$$

где

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + i(\sin \theta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \mathcal{R} \equiv \text{Действительная часть.}$$

Таким образом,  $M$  и  $N^\alpha$  можно определить, задавая  $c(u, \theta, \varphi)$  и некоторые начальные значения (фиг. 5).

В аксиально симметричном случае эти уравнения приобретают более простой вид

$$M_0 = -c_0^2 + \frac{1}{2}(c_{22} + 3c \operatorname{ctg} \theta - 2c)_0, \quad (4.15)$$

$$3N_0 = -M_2 + 3cc_{02} + 4cc_0 \operatorname{ctg} \theta + c_0 c_2. \quad (4.16)$$

Теперь можно подсчитать степени свободы. Величины  $\gamma$  и  $\delta$ , заданные на начальной гиперповерхности  $u = \text{const}$ , совместно с двумя функциями информации  $c_0$ , заданными при  $r = \infty$ , служат двумя поперечными степенями свободы. Кроме того, следует конкретизировать  $M$  и  $N$  в начальный (или конечный) момент запаздывающего времени; эти три функции двух переменных, очевидно, должны быть связаны с продольными временноподобными степенями свободы поля. Особенно изящная черта проблемы начальных характеристик состоит в том, что независимые данные фигурируют в результатах в этом явном виде. Теперь мы уделим некоторое время геометрической и физической интерпретации полученных результатов.

Быть может, наиболее ясную геометрическую интерпретацию позволяет получить переход от асимптотически плоского случая к следующему варианту локальной проблемы начальных характеристик: какие данные нужно задать на двух пересекающихся светоподобных гиперповерхностях  $H$  и  $H'$  для того, чтобы определить поле в некоторой малой области, ограниченной этими двумя гиперповерхностями? Оказывается, что на  $H$  задаются  $\gamma$  и  $\delta$ ; из (4.4) видно, что это равносильно заданию поперечной конформной метрики на этой гиперповерхности. Вместо задания функций информации на  $H'$  можно также задать поперечную конформную метрику. На пересечении  $H$  и  $H'$ , автоматически двумерном и пространственноподобном, задаются некоторые другие величины; эти функции только двух переменных соответствуют, грубо говоря, продольным временноподобным степеням свободы. Доуткорт [21] подробно исследовал смысл этих продольных временноподобных степеней свободы, опираясь на аналогию с электродинамикой, но мне не довелось ознакомиться подробно с результатами. В отношении же поперечных степеней свободы соответствие между геометрической картиной и результатами лоренц-ковариантной теории вполне удовлетворительно.

В заключение этой лекции скажем еще несколько слов относительно асимптотически плоского случая. Допустим, имеется поле, которое в момент  $u = 0$  и некоторое время до него не зависело от времени. Тогда единственной воз-

возможностью, при которой система может начать изменяться со временем, будет случай, когда произвольная функция  $c_0$  выбрана отличной от нуля при  $u \geq 0$ . Это можно использовать как утверждение, что  $c_0$  описывает излучение, испущенное на бесконечность первоначально статическим источником; наше последующее обсуждение тензора Римана подтвердит эту интерпретацию самым детальным образом. Теперь мы можем интерпретировать уравнение (4.13). В начальном не зависящем от времени положении функция  $M$  в силу уравнения (4.14) не зависит от углов. Поскольку не зависящие от времени асимптотически плоские поля хорошо исследованы, нетрудно показать, что в этом случае  $M$  есть просто активная гравитационная масса всего поля (включающая массу и источников и гравитационного поля), как ее дают измерения с помощью пробных тел на бесконечности.

Допустим теперь, что функция  $c_0$  в течение некоторого времени отлична от нуля, а затем спадает до нуля таким образом, что  $M$  опять становится сферически симметричной [и, конечно, не зависящей от времени в силу (4.13)]. Интегрируя уравнение (4.13) по сфере, находим, что при этих условиях масса уменьшается на величину

$$\Delta M = - \int du d\theta \sin \theta d\varphi |c_0|^2. \quad (4.17)$$

Потерянная масса это просто масса, уносимая на бесконечность волнами. Виникур и Морган и (независимо) Пенроуз показали, что электромагнитное излучение вызывает дополнительное уменьшение массы, связанное с энергией, уносимой электромагнитным полем. В общем случае  $M$  зависит и от времени и от углов, и поэтому носит название аспекта массы; предпринимались также попытки, отчасти успешно, отождествить  $N^a$  с аспектом дипольного момента, связанного с моментом импульса, и отождествить уравнения (4.14) с законом сохранения момента, но здесь пока еще есть непреодоленные затруднения.

Один из нерешенных вопросов в проблеме начальных характеристик состоит в том, появится ли что-нибудь новое, если данные и (или) решение не будут аналитическими функциями надлежащим образом выбранных координат. Действительно, при анализе уравнений (4.9) —

(4.12) мы не только предполагали аналитичность по  $1/r$ , но, кроме того, неявно предполагали и аналитичность по  $u$ . Я не подчеркивал этого момента, потому что его считают неинтересным. Принято думать, что в неаналитическом случае не произойдет ничего катастрофического. Однако было бы спокойнее, если бы кто-нибудь выполнил для проблемы начальных характеристик анализ, который Шоке дал для обычной проблемы начальных значений.

### V. Гиперповерхность на бесконечности и обобщенная группа Бонди — Метцнера

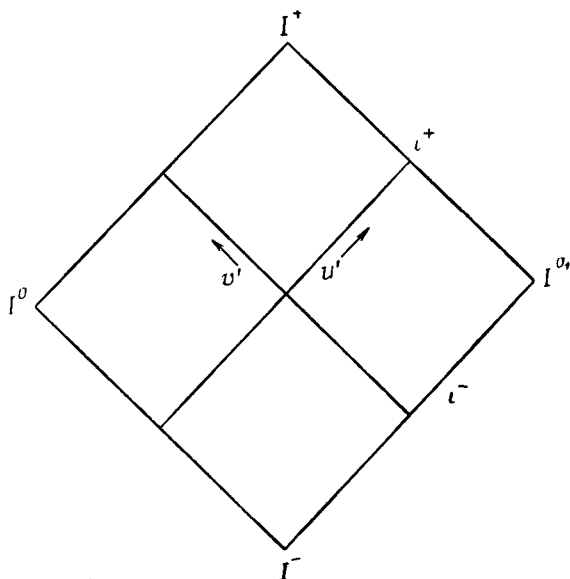
В асимптотически плоском случае дополнительные условия, рассмотренные в предыдущей лекции, имеют некоторые своеобразные черты. В исходном виде они задаются соотношениями, содержащими функции четырех переменных. Однако после интегрирования основных уравнений с использованием граничных условий они вследствие доказанной нами леммы каким-то образом превратились в соотношения на гиперповерхности  $r = \text{const}$ , т. е. соотношения между функциями трех переменных  $u$ ,  $\theta$  и  $\varphi$ . Поскольку в наших рассуждениях единственной выделенной из всех гиперповерхностей  $r = \text{const}$  является гиперповерхность  $r = \infty$ , хотелось бы как-то выразить тот факт, что эти соотношения должны удовлетворяться только на «гиперповерхности на бесконечности». В уже упоминавшейся статье Пенроуз систематизировал эти представления. Не входя полностью в детали его исследования, мы дадим очерк основных моментов, посвятив этому настоящую лекцию.

Рассмотрим пространство Минковского. Примем идею, что точки «на бесконечности» следует понимать как предельные точки прямых линий — в том смысле, что каждая прямая линия оканчивается где-то на бесконечности. Чтобы далее конкретизировать картину, введем следующее требование: за исключением некоторых определенных отождествлений, все пространство Минковского (включая бесконечность) должно быть конформно инвариантно относительно инверсии

$$x'^a = \frac{x^a}{x_b x^b}. \quad (5.1)$$

Эта идея заимствована из элементарной геометрии. Если мы хотим включить бесконечность в конечную картину, то нужно как-то сжать геометрию, а это предполагает, что ее следует рассматривать только конформно.

Чтобы представить себе, что это означает, рассмотрим простой случай двумерного пространства Минковского



Ф и г. 6.

с метрикой  $ds^2 = dt^2 - dx^2$ . Если ввести новые координаты  $u, v$  соотношениями  $u = t + x, v = t - x$ , то метрика приведет к виду  $ds^2 = dudv$ . Теперь конформные преобразования в двух измерениях даются просто аналитическими функциями комплексного переменного; в нашем случае это значит, что преобразования конформны тогда и только тогда, когда  $u' = f(u), v' = g(v)$ , где  $f$  и  $g$  — любые гладкие функции. Если, в частности, выбрать  $u = \operatorname{tg} u'$  и  $v = \operatorname{tg} v'$ , то все двумерное пространство Минковского с конформной метрикой  $du'dv'$  можно изобразить (с точностью до произвольного множителя) на конечном чертеже (фиг. 6). Легко проверить следующее



свойство этого чертежа. Светоподобные прямые остаются прямыми и на фиг. 6; все они начинаются на  $t^-$  и кончаются на  $t^+$ . Временноподобные прямые переходят в кривые, начинающиеся в  $I^-$  и оканчивающиеся в  $I^+$ . Четырехмерная картина, как мы скоро увидим, совершенно аналогична, но в случае четырех измерений конформные преобразования находятся с трудом, и одним из следствий их редкости является то, что в случае четырех измерений нельзя найти какую-либо одну координатную систему (вроде рассмотренной выше системы  $u', v'$ ), покрывающую гладко все пространство. Обычные координаты покрывают лишь конечные области пространства — времени; штрихованные координаты переводят большую часть точек, лежащих на бесконечности (но не все) в области, где мы можем их рассматривать, но соответственно переносят на бесконечность некоторые конечные области. Разумеется, тот факт, что пространство невозможно гладко покрыть какой-либо одной координатной системой, вовсе не означает сингулярности пространства. (Двумерную поверхность сферы тоже невозможно гладко покрыть какой-либо одной системой координат, тем более парой координат, ограниченных некоторыми добавочными свойствами конформной однородности.) Стоит напомнить еще один момент двумерной картины, именно, что в бесконечности мы имеем:  $dudv = \infty du'dv'$ . Интуитивно это очевидно: для того чтобы бесконечность вместить в конечную картину, на бесконечности требуется бесконечное сжатие.

Преобразование (5.1) является конформным, так как

$$\frac{(dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{x^4} = dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \quad (5.2)$$

Заметим прежде всего, что под действием (5.1) световой конус, проходящий через начало координат, переходит на бесконечность; поэтому бесконечность должна быть светоподобной. Рассмотрим затем направленную в будущее временноподобную бесконечную полупрямую, заканчивающуюся в некоторой точке, скажем  $I^{+'}$ , на бесконечности. Ее уравнение имеет вид

$$x^a = c^a + e^a s, \quad e^a e_a = 1, \quad s \rightarrow \infty. \quad (5.3)$$

Мы видим, что образ  $I^{+'}$ , полученный преобразованием (5.1), представляет как раз начало координат,  $x'^a = 0$ .

Поэтому все направленные в будущее временноподобные линии заканчиваются в *одной и той же* точке  $I^+$ . Аналогично все пространственноподобные линии оканчиваются в одной точке  $I^0$ , а все направленные в прошлое временноподобные линии оканчиваются в точке  $I^-$ . На самом деле, согласно построению, все три точки  $I^+$ ,  $I^0$  и  $I^-$  переходят под действием (5.1) в начало координат, так что все их можно было бы считать одной. Однако это неудобно. Мы будем считать их тремя различными точками; именно это понималось под словами «за исключением некоторых определенных отождествлений» в приведенном выше основном требовании конформной инвариантности.

Нетривиален случай светоподобной линии. На основании (5.1) легко видеть, что образы конечных точек светоподобных бесконечных полупрямых лежат где-то на световом конусе, проходящем через начало координат. Здесь вновь существуют определенные отождествления: два конца бесконечной светоподобной линии имеют фактически один и тот же образ.

Посредством некоторых ухищрений возможно (и удобно) снять отождествление. При этом нужно следовать такой схеме: концы всех направленных в будущее светоподобных линий лежат на одной части бесконечности, скажем  $\iota^+$ , а концы светоподобных линий, направленных в прошлое, лежат на другой части бесконечности,  $\iota^-$ . Легко затем показать, что две направленные в будущее светоподобные прямые оканчиваются в одной и той же точке, если и только если

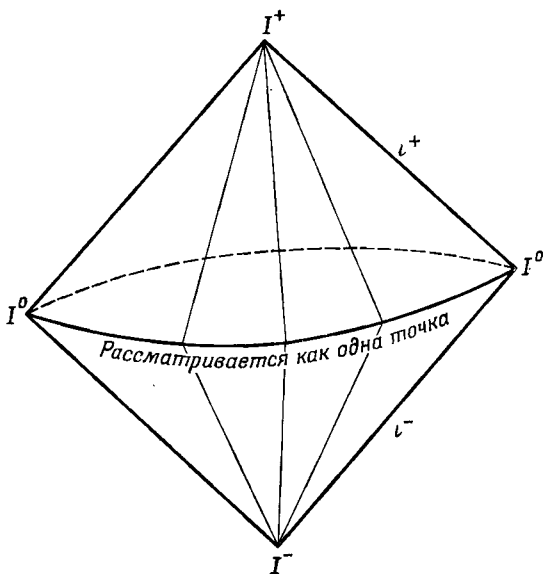
- 1) их касательные векторы пропорциональны и
- 2) они обе лежат на одной и той же светоподобной гиперповерхности.

Таким образом, мы приходим к следующей картине бесконечности в пространстве Минковского. Она состоит из трех точек  $I^0$ ,  $I^-$  и  $I^+$ , светоподобной трехмерной гиперповерхности  $\iota^+$  между  $I^0$  и  $I^+$  и другой светоподобной трехмерной гиперповерхности  $\iota^-$  между  $I^-$  и  $I^0$  (фиг. 7).

Затем Пенроуз в качестве определения того, что искривленное пространство асимптотически плоско, берет положение, что пространство, рассматриваемое конформно, обладает бесконечностью той же самой структуры, которая только что была охарактеризована. Гиперповерхно-

сти  $\iota^+$  и  $\iota^-$  должны быть несингулярными, но  $I^-$ ,  $I^0$  и  $I^+$  в любом разумном общем случае, по-видимому, сингулярны. Замечательно, что этого явно слабого и вполне геометрического требования оказалось достаточно для получения всех стандартных свойств асимптотически плоских пространств.

Следующее замечание устанавливает соответствие этих представлений с нашими предыдущими рассуждениями.



Ф и г. 7.

При  $r = \infty$   $u$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  можно считать гладкими координатами гиперповерхности  $\iota^+$ , где  $I^+$  соответствует  $u = \infty$ , а  $I^0$  соответствует  $u = -\infty$ . Гиперповерхность  $\iota^-$  и  $I^-$  мы не будем рассматривать в явном виде.

Отметим, что в этом описании любое слабое поле с нулевой массой покоя (включая гравитационные волны) входит в пространство через гиперповерхность  $\iota^-$  и покидает его через гиперповерхность  $\iota^+$ . Поля с ненулевой массой покоя, напротив, входят в пространство через  $I^-$  и покидают его через  $I^+$ .

Это наводит на мысль, что можно было бы квантовать поля, образуя коммутаторы на  $\iota^-$  и  $I^-$ . Для полей с нулевой массой покоя, включая гравитационное, эта схема, по-видимому, работает; поля же с ненулевой массой покоя подобным образом не рассматривались.

Легко вычислить поперечную конформную метрику гиперповерхности  $\iota^+$  в пространстве Минковского. На самом деле любая гиперповерхность  $r = \text{const}$  в силу уравнения (4.5) имеет метрику

$$ds^2 = du^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.4)$$

Рассматривая метрику только конформно, можно разделить  $ds^2$  на  $r^2$  и затем перейти к пределу при  $r = \infty$ ; для  $\iota^+$  мы найдем поперечную конформную метрику в виде

$$d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.5)$$

Исходя из требований (4.6), мы видим, что выражение (5.5) остается справедливым даже в асимптотически плоском пространстве, за исключением, быть может, точек  $I^+$  и  $I^0$ ; эти две точки все еще принадлежат бесконечному значению координаты  $u = \pm \infty$ , так что исследование их в наших координатах затруднено. О качественном поведении поля вблизи этих точек в настоящее время известно очень мало.

Для дальнейших ссылок удобно выяснить теперь, как действуют на  $\iota^+$  преобразования Лоренца в пространстве Минковского. Допустим, что координаты пространства Минковского подвергаются однородному преобразованию Лоренца  $x'^a = \Lambda_b^a x^b$ , где

$$\Lambda_c^a \Lambda_d^b \eta_{ab} = \eta_{cd} \quad (5.6)$$

( $\eta_{ab}$  — метрика Минковского). Мы можем вычислить действие этих преобразований на  $\iota^+$ , вводя изотропные сферические координаты  $r, u, \theta, \varphi$  и переходя к пределу при  $r \rightarrow \infty$ . Тогда на  $\iota^+$  найдем (обозначив  $Z \equiv \text{ctg}(\theta/2) e^{i\varphi}$ )

$$Z' = \frac{\kappa Z + \lambda}{\mu Z + \nu}, \quad u' = K^{-1}(\theta, \varphi) u, \\ \Lambda \equiv \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \text{const}, \quad \det \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = 1. \quad (5.7)$$

Здесь  $K$  — функция от  $\theta$  и  $\varphi$ , полностью определяемая значением комплексной матрицы  $\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ ; ее точная форма, которую можно найти в литературе к этой лекции, не существенна для нашего изложения. Восемь действительных величин  $\begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ , подчиняющихся двум заданным действительным условиям, полностью описывают шестипараметрическое множество однородных лоренцевых преобразований (и представляют, как мы увидим позднее, спинорную форму преобразований Лоренца). В более общем случае неоднородных преобразований Лоренца

$$x'^a = \Lambda_b^a x^b + \varepsilon^a \quad (5.8)$$

найдем описанным выше путем, что на  $\iota^+$

$$Z' = \frac{\kappa Z + \lambda}{\mu Z + \nu},$$

$$u' = K^{-1}(u + \varepsilon^0 - \varepsilon^3 \cos \theta - \varepsilon^1 \sin \theta \cos \varphi - \varepsilon^2 \sin \theta \sin \varphi). \quad (5.9)$$

В дальнейшем нам понадобится рассматривать следующее более общее преобразование гиперповерхности  $\iota^+$ :

$$Z' = \frac{\kappa Z + \lambda}{\mu Z + \nu}, \quad u' = K^{-1}(u + \alpha(\theta, \varphi)), \quad (5.10)$$

где  $\alpha$  — произвольная функция своих аргументов.

Группа (5.10) носит название обобщенной группы Бонди — Метцнера. Небольшое вычисление показывает, что и преобразования (5.10) и преобразования (5.9) оставляют поперечную конформную метрику гиперповерхности  $\iota^+$  конформно инвариантной.

## VI. Асимптотические симметрии

Теперь нам предстоит исследовать преобразования, связанные с «асимптотическими симметриями». Они определяются как преобразования, сохраняющие координатные и граничные условия, данные в лекции IV для асимптотически плоского пространства. Сперва мы дадим набросок доказательства следующей теоремы:

1) любое преобразование асимптотической симметрии единственным образом характеризуется своим значением на  $\iota^+$ ;

2) более того, на этой гиперповерхности преобразования асимптотической симметрии принадлежат обобщенной группе Бонди — Метцнера.

В настоящий момент факт, что в асимптотике мы имеем дело не с неоднородной группой Лоренца, а со значительно более широкой обобщенной группой Бонди — Метцнера, выглядит озадачивающе. Вообще в работе с асимптотически плоскими пространствами есть нечто сомнительное, так как действительная Вселенная (предположительно) не является асимптотически плоской. Но существовала надежда, что, рассматривая систему, границы которой достаточно велики по сравнению с неоднородностями и достаточно малы по сравнению с радиусом кривизны Вселенной, удастся найти разумные аналоги лоренц-ковариантных результатов в рамках теории гравитации — прежде всего законов сохранения энергии — импульса и момента, а также того факта, что в пределе исчезающе малых гравитационных полей представления неоднородной группы Лоренца управляют миром элементарных частиц. Если же неоднородная группа Лоренца не является группой асимптотической симметрии для асимптотически плоских пространств, то все такие усилия, по-видимому, обречены на провал. Можно и нужно надеяться, что дело удастся как-то поправить, используя другие построения, — может быть, другие координатные условия или более полные граничные условия. Но я хотел бы заметить, что по моему мнению (а вопрос этот — крайне спорный) все предложенные до настоящего времени конструкции подобного рода совершенно не удовлетворительны.

Не исключено также, что более тщательное исследование точки  $I^0$  на пространственной бесконечности приведет нас обратно к неоднородной группе Лоренца.

Для доказательства первой части теоремы мы прежде всего заметим, исходя из геометрического определения производной Ли, что при бесконечно малых преобразованиях координат  $x'^a = x^a + \epsilon e^a$  функциональное изменение любого тензора  $T$  дается величиной  $\epsilon L_e(T)$ . В частности, для метрического тензора

$$L_e(g_{ab}) = 2e_{(a;b)}. \quad (6.1)$$

Чтобы сохранить координатные и граничные условия лекции IV, мы поэтому должны иметь

$$e_{1;1} = e_{(1;\alpha)} = e_{\alpha;\beta} g^{\alpha\beta} = 0, \quad (6.2)$$

$$e_{0;0} = 0(r^{-1}), \quad e_{(0;\alpha)} = 0(1), \quad e_{(0;1)} = 0(r^{-2}), \quad e_{(\alpha;\beta)} = 0(r). \quad (6.3)$$

Таким образом, для  $e_{\alpha}$  асимптотически должны выполняться уравнения Киллинга. Теперь можно явным образом проинтегрировать уравнения (6.2). Например,

$$e_{1;1} = e_{1;1} - e_i \Gamma_{11}^i = e_{1;1} - 2\beta_{,1} = 0, \quad (6.4)$$

и интеграл уравнений (6.4) есть

$$e_1 = f(u, \theta, \varphi) e^{2\beta}, \quad (6.5)$$

где  $f(u, \theta, \varphi)$  — произвольная функция интегрирования. В пределе  $r \rightarrow \infty$  имеем

$$e_1 = f. \quad (6.6)$$

Таким образом,  $e_1(r, u, \theta, \varphi)$  единственным образом определяется своим значением на  $\iota^+$ . Поступая аналогичным образом с другими уравнениями (6.2), мы приходим к доказательству первой части теоремы в случае бесконечно малых преобразований. Если теперь учесть также условия (6.3), то мы найдем, что на  $\iota^+$  инфинитезимальные преобразования должны иметь форму (5.10) с бесконечно малыми  $\alpha$  и  $\Lambda$  (что подробно обсуждается в литературе к этой лекции). Этим завершается доказательство для инфинитезимальных преобразований; конечные преобразования можно затем построить из инфинитезимальных (первоначально были непосредственно получены конечные преобразования, но этот путь требует чрезвычайно громоздких вычислений).

Интуитивное основание того, почему в асимптотике мы приходим к обобщенной группе Бонди — Метцнера, довольно просто. В любом асимптотически плоском пространстве инфинитезимальное преобразование из обобщенной группы Бонди — Метцнера, заданное на  $\iota^+$ , можно спроектировать обратно к конечным значениям  $r$  при помощи уравнений, подобных (6.5) и (6.6). При этом, если в пространстве Минковского данное преобразование Бонди — Метцнера не является лоренцовым, то, конечно, окажется, что получающиеся в результате значения  $e^{\alpha}$  син-

гулярны при некоторых конечных  $r \neq 0$ . Но в искривленном пространстве — времени нельзя подобным образом выделить лоренцовы преобразования, так как в этом случае даже преобразования Лоренца на  $\iota^+$ , будучи спроектированы обратно к малым  $r$ , порождают сингулярности. Добавочные координатные сингулярности, которые мы вносим с произвольными преобразованиями обобщенной группы Бонди — Метцнера, ничуть не хуже тех, которые неизбежно вносит общая геометрия. Вряд ли можно надеяться, что положение удастся поправить путем перехода к другим координатным соглашениям. Например, часто утверждается в качестве естественной теоремы, что гармонические координаты с надлежащими граничными условиями в надлежащем асимптотически плоском пространстве определены единственным образом с точностью до преобразования Лоренца. В двух частных случаях — как раз в тех, для которых эта теорема считается естественной, — именно, в отсутствие гравитационного излучения, проходящего через  $\iota^-$ , и в отсутствие излучения, уходящего через  $\iota^+$ , теорема действительно довольно разумна. Но никто не утверждает, что она справедлива в общем случае, когда присутствуют как входящие, так и исходящие гравитационные волны; в этом общем случае, я думаю, она совершенно невероятна.

Так как обобщенная группа Бонди — Метцнера задается в явном виде своим действием (5.10) на  $\iota^+$ , то нетрудно детально проанализировать ее структуру. При этом получим следующие результаты. Четырехпараметрическое множество трансляций

$$\theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi,$$

$$u' = u + \varepsilon^0 - \varepsilon^3 \cos \theta - \varepsilon^2 \sin \theta \sin \varphi - \varepsilon^1 \sin \theta \cos \varphi \quad (6.7)$$

является нормальной подгруппой всей группы; на самом деле оно оказывается даже единственной четырехпараметрической нормальной подгруппой. Ни десятипараметрическое множество преобразований Лоренца (5.9), ни шестипараметрическое множество однородных преобразований Лоренца (5.7) не образуют инвариантной (нормальной) подгруппы, хотя, конечно, они образуют подгруппу. Для того чтобы выяснить физические следствия этих теоретико-групповых результатов, рассмотрим пока



только неоднородную группу Лоренца. В рамках этой группы четыре трансляции образуют нормальную подгруппу, но шесть вращений таковой не образуют. Как следствие этого, четыре компоненты энергии — импульса, скажем  $P_a$ , вполне определены, а шесть компонент момента  $M_{ab} = -M_{ba}$  не определены таким единственным образом. При преобразовании координат  $x'^a = x^a + c^a$  имеем для момента:

$$M'_{ab} = M_{ab} + 2P_{[acb]}. \quad (6.8)$$

Теперь ясны следствия приведенных выше результатов по структуре обобщенной группы Бонди — Метцнера. Следует ожидать, что удастся ввести хорошо определенную полную величину энергии — импульса  $P_a$  единственным с точностью до преобразований Лоренца образом.

С другой стороны, нужно ожидать, что момент в общем случае всегда будет определен не единственным образом:  $M_{ab}$  будут преобразовываться по закону, аналогичному (6.8), но гораздо более сложному. Оказалось, что функции информации  $c_0$  имеют очень простые трансформационные свойства относительно (конечных) обобщенных преобразований Бонди — Метцнера. Как результат этого четыре интеграла, содержащих сферические гармоники  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} P_0 &= \int |c_0|^2 du d\theta \sin \theta d\varphi, \\ -P_\alpha &= \int |c_0|^2 du d\theta \sin \theta d\varphi Y_{1\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (6.9)$$

обладают всеми основными свойствами  $P_a$  и определены единственным с точностью до однородных преобразований Лоренца образом. Но соответствующего результата для  $M_{ab}$  не существует.

Такова стадия, которой можно достичь на основе описанных выше рассуждений, и текущее состояние дела несколько озадачивающее. Мне думается, следующее, что нужно сделать, это попытаться найти теоремы, позволяющие качественно выяснить поведение в общем случае асимптотически плоского поля в окрестности точки  $I^0$ ; однако необходимые вычисления далеко не тривиальны.

### VIIa. Тензор Римана в общей теории относительности

До сих пор я едва упоминал тензор Римана. Однако ясно, что в общей теории относительности этот тензор должен играть очень важную роль: он является простейшим нетривиальным объектом, который можно построить в точке, а его обращение в нуль есть критерий отсутствия истинных гравитационных полей; его структура, кроме того, определяет относительное движение соседних пробных частиц в соответствии с уравнением девиации геодезических, которое рассмотрел Синг.

Пять лет назад Пирани физически интерпретировал алгебраическую структуру тензора Римана в точке, ранее исследованную Петровым и другими. Вскоре вслед за этим Лишнеровиц, Бель и другие показали, что рассмотренные Пирани алгебраические соотношения тесно связаны с поведением поля при распространении его от точки к точке. С тех пор теория «чистого излучения» Петрова — Пирани интенсивно исследовалась; сейчас она приведена почти в замкнутую форму. В течение этого периода строгие и геометрически ясные результаты теории чистого излучения служили ключом к пониманию поведения общих полей излучения, особенно в асимптотически плоских пространствах. Теперь мы уделим некоторое время основным результатам этой теории.

### VIIb. Алгебра двухкомпонентных спиноров

Прежде всего рассмотрим алгебру двухкомпонентных спиноров. Грешно, конечно, вводить целый багаж новых формальных соотношений, но спинорный аппарат не только наиболее удобен для наших целей, но имеет также важные применения в лоренц-ковариантных теориях.

Пусть  $u^A$  — комплексная величина с двумя компонентами, и пусть  $\varepsilon_{AB}$  — двумерный символ альтернирования  $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{[AB]}$ ,  $\varepsilon_{12} = 1$ .

Пусть допустимыми преобразованиями  $u^A$  будут такие линейные преобразования  $u'^A = \Lambda_B^A u^B$ , при которых сохраняется «скалярное произведение»  $u^A v^B \varepsilon_{AB}$ . Тогда  $\Lambda_B^A$  должна быть комплексной матрицей с детерминантом, равным единице. Комплексно сопряженная  $u^A$

величина будет преобразовываться с матрицей, комплексно сопряженной  $\Lambda^A_B$ ; этот факт мы будем обозначать индексами с точками, например  $\overline{u^A} = \overline{u^{\dot{A}}}$ . Мы будем использовать  $\varepsilon_{AB}$  для поднимания и опускания индексов:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon^{AB} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}},$$

$$u^A = -\varepsilon_{AB}u^B \iff u^A = \varepsilon^{AB}u_B \quad (\text{и соответственно для индексов с точкой}). \quad (7.1)$$

Так как  $\varepsilon_{AB}$  антисимметричен, необходимо следить за порядком индексов в соотношениях (7.1). Приведем несколько простых алгебраических следствий из этих определений:

$$v_{[AB]} = \frac{1}{2}v_C \varepsilon_{AB}^C, \quad \varepsilon^{AB}\varepsilon_{BC} = -\delta_C^A, \\ u_A \sim v_A \iff v_A u^A = 0, \quad v_A u^A = -v^A u_A. \quad (7.2)$$

Теперь предположим, что  $u^A$  и  $v^A$  образуют «базис» в 2-пространстве, т. е.  $-u_B v^B = 1$ ; тогда справедливо условие «полноты»  $\varepsilon_{AB} = -u_{[A} v_{B]}$ . Двухиндексные спиноры  $x^{A\dot{B}}$  можно получить как произведения спиноров с одним индексом; следующие четыре величины образуют базис в соответствующем пространстве:

$$k^{A\dot{B}} = v^A v^{\dot{B}}, \quad m^{A\dot{B}} = -u^A \overline{u^{\dot{B}}}, \quad t^{A\dot{B}} = u^A \overline{v^{\dot{B}}}, \quad \bar{t}^{A\dot{B}} = \overline{u^{\dot{B}} v^A}. \quad (7.3)$$

Для подобных спиноров мы будем использовать естественное скалярное произведение, определенное с точностью до знака:

$$x \cdot y \equiv -x^{A\dot{B}} y_{\dot{A}B}. \quad (7.4)$$

Отсюда вытекает, что для наших базисных векторов справедливы следующие соотношения:

$$k \cdot m = t \cdot \bar{t} = 1, \text{ а остальные произведения равны нулю.} \quad (7.5)$$

Но это и есть как раз соотношения квазиортогональности, приведенные в лекции III. Поэтому разумно отождествить величины (7.3) с квазиортогональной тетрадой  $(k, m, t)$ .

Таким образом, мы усматриваем следующее правило: каждому вектору  $x^a$  единственным образом соответствует двухиндексный спинор

$$x_{\dot{A}\dot{B}} \equiv x_a \sigma_{\dot{A}\dot{B}}^a \equiv x_a (t^{\dot{a}\dot{t}} \dot{t}_{\dot{A}\dot{B}} + \bar{t}^{\dot{a}\dot{t}} \dot{t}_{\dot{A}\dot{B}} + m^{\dot{a}k} \dot{k}_{\dot{A}\dot{B}} + k^{\dot{a}m} \dot{m}_{\dot{A}\dot{B}}) \iff x_a = -\sigma_a^{\dot{A}\dot{B}} x_{\dot{A}\dot{B}}, \quad (7.6)$$

и наоборот. При этом  $x^a$  действителен, если и только если  $x^{\dot{A}\dot{B}}$  — «эрмитов», т. е.

$$\overline{x^{\dot{A}\dot{B}}} \equiv \bar{x}^{\dot{B}\dot{A}} = x^{B\dot{A}} \equiv x^{\dot{A}B}. \quad (7.7)$$

В тождествах (7.7) мы положили  $x^{\dot{A}\dot{B}} \equiv x^{\dot{B}\dot{A}}$ ; начиная с этого момента, мы всегда будем считать, что это так, т. е. если спинор имеет индексы и с точкой, и без точки, то относительный порядок их несуществен. Главное преимущество этого обозначения заключается в том, что преобразования Лоренца теперь описываются матрицами  $\Lambda_{\dot{A}}^{\dot{B}}$  — четырьмя комплексными величинами, подчиняющимися одному алгебраическому соотношению  $\det(\Lambda) = 1$ , а не шестнадцатью действительными числами  $\Lambda_b^a$ , подчиняющимися десяти соотношениям связей.

Так как тензор с несколькими индексами можно представить в виде суммы произведений векторов, то, следовательно, любой тензор  $T_{a\dots b}$  единственным образом представляется эрмитовым спинором  $T_{\dot{A}\dot{B}\dots\dot{C}\dot{D}}$ , для которого

$$\overline{T_{\dot{A}\dot{B}\dots\dot{C}\dot{D}}} \equiv \bar{T}_{\dot{B}\dot{A}\dots\dot{D}\dot{C}} = T_{B\dot{A}\dots\dot{D}\dot{C}} \equiv T_{B\dots\dot{D}\dot{A}\dots\dot{C}} \quad (7.8)$$

Переходы от тензоров к спинорам и обратно можно производить совершенно свободно при условии аккуратного учета знака в уравнении (7.4): каждое тензорное свертывание приносит множитель  $(-1)$  в соответствующее спинорное свертывание.

Каждому одноиндексному спинору  $x^A$  соответствует вектор  $x^a$

$$x^a = -\sigma_a^{\dot{A}\dot{B}} x_{\dot{A}\dot{B}}, \quad x^{\dot{A}\dot{B}} \equiv x^A \bar{x}^{\dot{B}}, \quad (7.9)$$

причем вектор  $x^a$  действителен и светоподобен; обратно, каждый действительный светоподобный вектор опреде-

ляет спинор, правда, лишь с точностью до фазового множителя.

Возьмем теперь действительный антисимметричный тензор  $F_{ab} = -F_{ba}$ . Для его спинорного представления справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\bar{F}_{ABCD} &= F_{ABCD}, \\ F_{CDA\dot{B}} &= -F_{AB\dot{C}D}.\end{aligned}\quad (7.10)$$

Поэтому

$$F_{ABCD} = \frac{1}{2} (\varphi_{AC} \varepsilon_{BD} + \bar{\varphi}_{BD} \varepsilon_{AC}), \quad (7.11)$$

где  $\varphi_{AB} = \varphi_{BA}$  единственным образом определяется тензором  $F_{ab}$  и может быть поэтому использован в качестве его спинорного эквивалента.

Если ввести представление о дуальности

$$\bar{F}^*_{ab} = \frac{1}{2} \eta_{abcd} F^{cd}, \quad (7.12)$$

где

$$\eta_{abcd} = \eta_{[abcd]}, \quad \eta_{1234} = -(-g)^{1/2} < 0 \quad (7.13)$$

есть тензор альтернирования (но не тензорная плотность), то мы получаем (после утомительных вычислений)

$$\bar{F}^*_{ab} \equiv F_{ab} + i\bar{F}^*_{ab} \leftrightarrow \varphi_{AC} \varepsilon_{BD}. \quad (7.14)$$

Возьмем теперь  $N$ -индексный спинор  $u_{A\dots B}$ , имеющий только индексы без точек и по всем индексам симметричный; такой спинор единственным образом определяется следующим полиномом:

$$F(x, y) \equiv u_{A\dots B} v^A \dots v^B, \quad v^1 \equiv x, \quad v^2 \equiv y. \quad (7.15)$$

Согласно фундаментальной теореме алгебры,  $F(x, y)$  может быть расщеплен на произведение  $N$  линейных множителей  $\overset{a}{F}$ , каждый из которых определен единственным образом с точностью до постоянного коэффициента  $\overset{a}{c}$ , причем  $\prod_{a=1}^N \overset{a}{c} = 1$ . Тогда

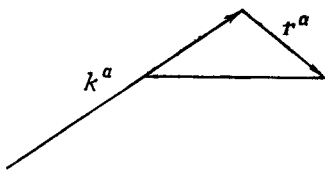
$$u_{A\dots B} = \overset{1}{k}_{(A\dots B)}, \quad (7.16)$$

где спиноры  $k_A^a$  определяются с точностью до коэффициентов  $\alpha$  как нули выражения (7.15). В частности, для  $\varphi_{AB}$  имеем

$$\varphi_{AB} = u_{(A} v_{B)}. \quad (7.17)$$

Тензор  $F_{ab}$  называется невырожденным, если  $u_A$  не выражается линейно через  $v_A$ . При этом действительные светоподобные направления  $k_a$  и  $m_a$ , определяемые, согласно равенствам (7.9), спинорами  $u_A$  и  $v_A$ , носят название главных изотропных направлений  $F_{ab}$ ; на основании изложенного выше мы имеем

$$\begin{aligned} F_{ab}^+ k^b &= \kappa k_a, \\ F_{ab}^+ m^b &= +\kappa m_a. \end{aligned} \quad (7.18)$$



Фиг. 8.

Комплексное число  $\kappa$  называется собственным значением тензора  $F_{ab}$  и является скаляром. Обратно, если векторы  $k^a$  и  $m^a$  действительны и удовлетворяют соотношениям (7.18), где  $F_{ab} \neq 0$ , то они светоподобны и являются главными изотропными направлениями  $F_{ab}$ .

Возможен один вырожденный случай, именно  $k_a = m_a$ , или, эквивалентно,  $u_A = v_A$ . Тогда  $\kappa = 0$  и тензор  $F_{ab}$  называется «изотропным» или «вырожденным». В этом случае мы имеем, согласно проделанным выше вычислениям,

$$\varphi_{AB} = u_A u_B \Rightarrow F_{ab} = k_{[a} r_{b]}, \quad (7.19)$$

где  $k_a$  — главное изотропное направление, а  $r_a$  — (действительный) пространственноподобный вектор, ортогональный  $k_a$ . В этом случае  $F_{ab}$  имеет следующую геометрическую интерпретацию: это есть малый «флажок», причем флажок направлен вдоль вектора  $k^a$ , а сам флажок образован элементом поверхности, натянутым на векторы  $k^a$  и  $r^a$ . Таким образом, любой спинор через уравнения (7.19) и (7.14) определяет подобный флажок и сам определяется флажком с точностью до знака. Мы пришли к геометрической интерпретации спиноров, предложенной Пенроузом: спиноры суть просто малые «флажки» в 4-про-

странстве, флажки которых направлены вдоль некоторых светоподобных направлений, а сами флажки ортогональны флажкам; флажок содержит (самоортогональное) направление флажка (фиг. 8).

### VIII. Алгебра тензора Вейля

Пусть  $R_{abcd}$  — тензор Римана; в общем случае он имеет 20 независимых компонент. Вычитая все шпурь, мы можем из тензора Римана выделить так называемый конформный тензор Вейля  $C_{abcd}$ :

$$C_{\dots cd} = R_{\dots cd}^{ab} - 2\delta_{[c}^{[a} R_{d]}^{b]} + \left(\frac{1}{3}\right) \delta_{[c}^{[a} \delta_{d]}^{b]} R. \quad (8.1)$$

Из (8.1) вытекает, что  $C_{abcd}$  имеет десять независимых компонент и след, равный нулю:

$$C^i{}_{.bid} = 0. \quad (8.2)$$

Если  $R_{ab} = 0$ , то  $C_{abcd} = R_{abcd}$ .

Спинорная форма конформного тензора имеет вид

$$C_{\dot{A}\dot{E}\dot{B}\dot{F}\dot{C}\dot{G}\dot{D}\dot{H}} = \frac{1}{2} (\Psi_{ABCD} \varepsilon_{\dot{E}\dot{F}} \varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} + \text{Эрм. сопр.}), \quad (8.3)$$

где  $\Psi_{ABCD}$  симметричен по всем индексам. Чтобы установить это, заметим сперва, что спинор в правой части (8.3) обладает всеми алгебраическими свойствами тензора Вейля, включая (8.2) (отсутствие следа); более того, спинор  $\Psi_{ABCD}$  имеет пять алгебраически независимых комплексных компонент (именно  $\Psi_{1111}$ ,  $\Psi_{1112}$ ,  $\Psi_{1122}$  и т. д.). Таким образом, спиноры, определяемые равенством (8.3), можно использовать для представления конформных тензоров.

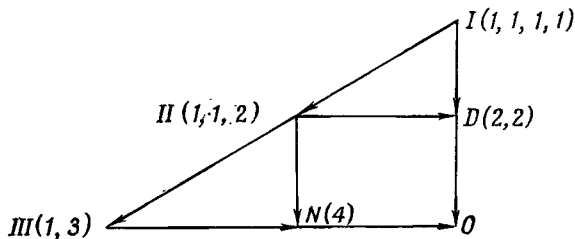
Согласно нашим предыдущим теоремам, при  $C_{abcd} \neq 0$  существует от одного до четырех решений  $k^A$  уравнения

$$\Psi_{ABCD} k^A k^B k^C k^D = 0, \quad (8.4)$$

а соответствующие действительные светоподобные векторы  $k^a$  носят название главных изотропных направлений конформного тензора.

В общем случае все четыре изотропных направления различны; этот случай называется, по Петрову, невыро-

жденным классом I;  $C_{abcd}$  в этом случае будет обозначаться как  $\Gamma_{abcd}$  или (без указания индексов) просто как I. Другая возможность состоит в том, что только два главных изотропных направления совпадают; этот случай называется, по Петрову, невырожденным классом II и обозначается как II. Далее, четыре главных изотропных направления могут совпадать парами; этот случай Петров называет вырожденным классом I и обозначает



Ф и г. 9.

как D. Могут также совпадать три изотропных направления; этот случай называется классом III и обозначается как III; наконец, могут оказаться одинаковыми все четыре главных изотропных направления; этот случай называется вырожденным классом II или «нулевым» и обозначается N. Класс I называется также «алгебраически общим»; остальные четыре случая носят название «алгебраически специальных». Соотношения между различными классами удобно изобразить на диаграмме Пенроуза (фиг. 9). Здесь O соответствует тривиальному случаю равенства конформного тензора нулю; стрелки обозначают направления возрастающей специализации вследствие совпадения главных изотропных направлений друг с другом. [Обозначение (1, 1, 2), например, указывает, что только два изотропных направления совпадают и т. д.]

Существует лишь несколько тензорных форм для вышеприведенных спинорных соотношений. Я приведу здесь две из них, часто встречающиеся в литературе. Обе можно с удобством представить при помощи комплексного тензора

$$\overset{+}{C}_{abcd} = C_{abcd} + \left(\frac{i}{2}\right) \eta_{abij} C^{ij}{}_{..cd}, \quad (8.5)$$



спиновая форма которого имеет вид

$$C_{AEBFCGDH}^+ = \Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \varepsilon_{GH} \quad (8.6)$$

Таким образом  $\Psi_{ABCD}$  можно рассматривать как спиновую форму конформного тензора. Небольшое вычисление показывает, что при  $C_{abcd} \neq 0$  действительный вектор  $k^a$  является главным изотропным направлением соответственно кратности 1, 2, 3 и 4 тогда и только тогда, когда

$$k_{[i} C_{j]ab} k_{[u} k_{v]} k^a k^b = 0, \quad (8.7)$$

$$C_{abc[i} k_{j]} k^c k^b = 0, \quad (8.8)$$

$$C_{abc[i} k_{j]} k^c = 0, \quad (8.9)$$

$$C_{abcd} k^d = 0; \quad (8.10)$$

при этом  $k^a$  автоматически оказывается светоподобным. Таким образом, если тензор  $C_{abcd}^+$  допускает одно решение уравнения (8.8), то он алгебраически специален; если он допускает два независимых решения (8.8), то относится к типу  $D$ . Если он допускает решение уравнения (8.9), то относится либо к классу III, либо к  $N$ , соответственно тому, допускает ли он решение уравнения (8.10), или нет.

Другой критерий дают так называемые «минимальные уравнения». Если взять конечную матрицу, возвести ее в квадрат, затем в куб и т. д., то в конце концов получится столько матриц, что они будут линейно зависимыми. Уравнение наименьшей степени, которому подчиняется данная матрица, носит название ее минимального уравнения. Как известно, это уравнение единственно с точностью до числового множителя (являющегося также множителем характеристического уравнения). Если понимать пары индексов тензора  $C_{\dots cd}^{+ab}$  как один индекс, то этот тензор можно рассматривать как матрицу; роль единичной матрицы тогда будет играть величина

$$\delta_{cd}^{[ab]} + \frac{1}{2} i \eta_{\dots cd}^{ab}. \quad (8.11)$$

Используя это соглашение, все классы можно охарактеризовать при помощи минимальных уравнений следующим образом:

$$\overset{+}{N}^2 = 0 \quad (\text{т. е. } \overset{+}{N}{}^{ab}{}_{..ij} \overset{+}{N}{}^{ij}{}_{..cd} = 0), \quad (8.12)$$

$$\overset{+}{III}^3 = 0, \quad (8.13)$$

$$(\overset{+}{D} - \kappa)(\overset{+}{D} + 2\kappa) = 0, \quad (8.14)$$

$$(\overset{+}{II} - \kappa)^2 (\overset{+}{II} + 2\kappa) = 0, \quad (8.15)$$

$$(\overset{+}{I} - \kappa)(\overset{+}{I} - \kappa')(\overset{+}{I} + \kappa + \kappa') = 0. \quad (8.16)$$

(Уходя несколько в сторону, заметим, что, как известно, минимальное уравнение для матрицы тесно связано с ее жордановой нормальной формой; именно на основе рассмотрения жордановых нормальных форм были первоначально открыты классы Петрова.)

Здесь величины  $\kappa$  и  $\kappa'$  суть комплексные числа, единственным образом определяемые конформным тензором; они носят название скалярных инвариантов или собственных значений конформного тензора.

Пользуясь уравнениями (8.7)–(8.10), можно тривиально объяснить так называемые «теоремы сложения». Если при фиксированных  $g_{ab}$  и  $k^a$  складываются два конформных тензора, то сумма по крайней мере столь же специальна (в смысле диаграммы Пенроуза), как наиболее общий из двух слагаемых. Таким образом, сложение тензоров классов  $N + III$  с одинаково кратными изотропными направлениями дает другой тензор класса  $III$  с теми же трехкратными изотропными направлениями и т. д.

Может возникнуть впечатление, что эти теоремы сложения представляют чисто алгебраический интерес; в действительности, однако, они служат алгебраической основой теоремы расщепления, которая будет рассмотрена в следующей лекции.

В своей оригинальной работе Пирани, основываясь на аналогии с электромагнитной теорией, высказал предположение, что поле гравитационного излучения имеет конформный тензор класса  $N$  (четырекратное выро-

ждение главных изотропных направлений). Как было затем показано, плоским гравитационным волнам действительно соответствует конформный тензор класса  $N$ . Однако впоследствии выяснилось, что в любом достаточно общем случае конформный тензор является алгебраически общим (без вырождения по главным изотропным направлениям). Взаимосвязь между алгебраическим классом конформного тензора и излучением справедлива, как правило, только асимптотически в асимптотически плоском пространстве. В таком пространстве различные алгебраически специальные классы появляются как доминирующие члены при разложении тензора Римана в ряд по степеням  $1/r$ . В частности, первый, порядка  $1/r$ , член всегда относится к классу  $N$ .

Для описания члена порядка  $1/r^4$  в подобном разложении искусственно создается дополнительный класс: говорят, что конформный тензор имеет геодезические лучи (и обозначают его как  $G$ ), если по крайней мере одно из его главных изотропных направлений касательно конгруэнции изотропных геодезических. Как мы увидим, конформные тензоры с геодезическими лучами промежуточны по общности между конформными тензорами класса  $I$  и алгебраически специальными конформными тензорами всегда, когда  $R_{ab} = 0$ .

Интересно проанализировать уравнение геодезического отклонения в специальном случае

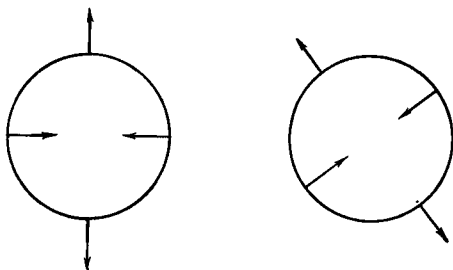
$$R_{ab} = 0, \quad C_{abcd} = N_{abcd}.$$

Дело в том, что подобный анализ предельно ясно показывает, в каком смысле асимптотическое поле от ограниченных источников состоит из поперечного излучения. Допустим, что мы имеем пробную частицу, движущуюся по геодезической с мировой скоростью  $e^a$ , причем  $e^a e_a = -1$ . Относительное ускорение соседнего пробного тела, удаленного от первого на бесконечно малый интервал  $y^a$  (причем  $y^a e_a = 0$ ), оказывается равным

$$(y^a;{}^b e^b);{}_c e^c \equiv \ddot{y}^a = R^a{}_{ijk} e^i y^j e^k. \quad (8.17)$$

При указанных выше ограничениях существует некоторое направление луча  $k^a$ , определяемое как квадрупольное главное изотропное направление. Пусть  $z^a = [k^a +$

$+ e^a (e^a k_b) / (e^c k_c)$  — единичная проекция направления луча на систему, свободно падающую вместе с первой частицей. Исходя из установленных раньше соотношений, найдем, что в такой свободной системе относительное ускорение в направлении оси  $z$  равно нулю; с другой стороны, в (поперечной) плоскости  $x, y$  мы имеем



Фиг. 10.

в общем случае суперпозицию двух состояний (фиг. 10). В асимптотически плоских полях амплитуды этих двух состояний даются действительной и мнимой частями  $\epsilon_{00}$ .

### IX. Теорема расщепления и алгебраически специальные поля

Теперь мы рассмотрим, как алгебраическая структура конформного тензора связана с поведением полей при перемещении от точки к точке в пространстве — времени. Главный результат, к которому мы придем, это так называемая теорема расщепления.

В наиболее общей форме, применимой к асимптотически плоским полям, рассмотренным в лекции IV, теорема расщепления утверждает, что тензор Римана таких полей (равный ввиду соотношения  $R_{ab} = 0$  конформному тензору) имеет вид

$$C = \underset{0}{N}/r + \underset{0}{III}/r^2 + \underset{0}{II}/r^3 + \underset{0}{G}/r^4 + \underset{0}{I}/r^5 + 0 (r^{-6}). \quad (9.1)$$

Индексы здесь не указаны; символы обозначают алгебраические классы, а индексы «0» под ними указывают тензоры, ковариантно постоянные вдоль лучей. Можно представлять себе поведение (9.1), говоря, что все четыре главных

изотропных направления совпадают в приближении порядка  $1/r$ , а затем отщепляются одно за другим. Член  $N$  пропорционален  $c_{00}(u, \theta, \varphi)$ , что явным образом характеризует связь функции информации  $c_0$  с асимптотическим полем излучения. Аналогичные результаты справедливы для алгебраически специальных полей, причем их можно получить локально без каких-либо хитроумных граничных условий, вроде использованных в лекции IV; именно локальное исследование алгебраически специальных полей первоначально привело к пониманию асимптотически плоских полей. Теорема расщепления оказалась полезной также при сравнении различных подходов к асимптотически плоским полям.

Нам понадобятся для дальнейшего спинорные ковариантные производные. Различные явные формы ковариантной производной спиноров можно найти в литературе к этой лекции. Здесь нам потребуются только следующие свойства такой производной; спинорная ковариантная производная, обозначаемая как  $u_{A\dots; B\dot{C}}$ , определяется (единственным образом) следующими требованиями:

1. Она удовлетворяет обычным правилам для суммы и произведения.

2. Ковариантные производные тензора  $\varepsilon_{AB}$  и т. д. равны нулю, так что операция спинорного ковариантного дифференцирования коммутирует с операцией свертывания по паре спинорных индексов.

3. Производная действительна, т. е.

$$\overline{u_{A\dots B\dots; C\dot{D}}} \equiv (\overline{u_{A\dots B\dots}})_{; \dot{C}D}$$

4. Для эрмитова спинора (соответствующего таким образом некоторому тензору) спинорная ковариантная производная совпадает с тензорной ковариантной производной.

В любом пространстве справедливы тождества Бианки  $R_{ab[cd; e]} = 0$ . Если свернуть их по одной паре индексов и принять, что  $R_{ab} = 0$ , то получим  $C_{; a}^{abcd} = 0$ . Аналогично  $C_{; a}^{+abcd} = 0$ . В спинорной форме тождества Бианки имеют вид

$$\psi^{ABCD}_{; D\dot{E}} = 0. \quad (9.2)$$

Теперь мы можем дать набросок доказательства следующей теоремы.

**ТЕОРЕМА.** Если  $R_{ab} = 0$  и  $C_{abcd} \neq 0$ , то  $C_{abcd}$  относится к алгебраически специальному типу, если и только если пространство содержит конгруэнцию изотропных геодезических со сдвигом, равным нулю. В последнем случае вектор, касательный к такой конгруэнции, является главным изотропным вектором кратности больше 1.

Действительно, допустим, что конформный тензор алгебраически специален. Тогда он имеет вид

$$\psi_{ABCD} = v_{(A} w_{B} u_{C} u_{D)}, \quad (9.3)$$

где  $v_A$  и  $w_A$  могут, но не обязаны совпадать с  $u_A$ . На основании (9.2) и (9.3) имеем

$$u_C u^C;_{AB} u^A = 0 \Rightarrow u^A (u_A \bar{u}_B);_{CD} u^C = \bar{u}^B (u_A \bar{u}_B);_{CD} u^C = 0. \quad (9.4)$$

В тензорной форме соотношения (9.4) приобретают вид

$$k_{a;b} \bar{t}^a \bar{t}^b = 0, \quad (9.5a)$$

$$k_{a;b} \bar{t}^a k^b = 0, \quad (9.5b)$$

где  $k_a$  — изотропный вектор, описываемый  $u_A$ , а  $k, m, t$  образуют квазиортогональную тетрадную систему. Теперь если  $k_a$  удовлетворяет соотношению (9.5b), то, выбрав для него подходящий множитель, мы можем (и будем) требовать, чтобы

$$k^a;_b k^b = 0. \quad (9.6)$$

Вследствие этого соотношение (9.5a) приобретает смысл условия отсутствия сдвига для данной конгруэнции, чем и завершается доказательство второй половины теоремы.

Теперь мы должны показать, то пространство, для которого  $R_{ab} = 0$  и сдвиг конгруэнции изотропных геодезических также равен нулю, является алгебраически специальным. Для этого мы прежде всего покажем, что вектор, касательный к такой конгруэнции, есть главный изотропный вектор тензора Римана. Действительно, на основании соотношений (9.5), выбирая без потери

общности  $\bar{t}_{a;b} k^b = 0$ , имеем

$$\psi \equiv C_{abcd} k^a k^{\bar{c}} \bar{t}^b \bar{t}^d \equiv 2k_{b; [c; a]} \bar{t}^b \bar{t}^c \bar{t}^d = -\sigma, {}_c k^c - 2\sigma \varrho = 0. \quad (9.7)$$

С другой стороны, если  $\psi$ , определенный таким образом, перевести в спинорную форму, то окажется, что  $\psi \sim \psi_{ABCD} u^A u^B u^C u^D$ , где  $k^a \leftrightarrow u_{A\bar{B}}$  — задаваемый  $u_A$  изотропный вектор; сопоставляя этот результат с выводами предыдущей лекции, мы видим, что  $k^a$  есть главное изотропное направление. Труднее показать, что  $k^a$  есть кратное главное изотропное направление; по поводу остальной части доказательства отошлем к литературе.

Нам понадобятся некоторые леммы о конгруэнциях с равным нулю сдвигом. Для любой изотропной конгруэнции мы имеем на основании предыдущих соотношений

$$\frac{1}{2} R_{ab} k^a k^b \equiv \frac{1}{2} k^i{}_{[b; i]} k^b = z, {}_a k^a + z^2 + \sigma\bar{\sigma}. \quad (9.8)$$

Предположим теперь, что  $R_{ab} = 0$  и  $\sigma = 0$ ; при подстановке этого в уравнение (9.8) последнее перейдет в уравнение Риккати и может быть проинтегрировано через аффинный параметр вдоль лучей. Существуют возможности

$$\begin{aligned} \text{а) } & z = 0, \\ \text{б) } & z = \frac{1}{v - i\chi}, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где  $\chi$  можно выбрать действительным подходящим образом, подобрав начало отсчета для  $v$ . Поэтому, в частности, из  $\varrho = 0$  вытекает, что  $\omega = 0$ . Предположим теперь, что у нас имеется произвольная величина  $x$ , удовлетворяющая уравнению

$$x, {}_a k^a + Nz x = 0 \quad (N > 0, \text{ целое}); \quad (9.10)$$

тогда возможны два результата

$$\begin{aligned} \text{а) } & x = \underset{0}{x}, \\ \text{б) } & x = \underset{0}{xzN} \end{aligned} \quad (9.11)$$

соответственно тому, какая возможность осуществляется,  $z = 0$  или  $z \neq 0$ .

Вернемся к свойствам теоремы расщепления. Рассмотрим сперва простейший случай конформного тензора типа  $N$ . В этом случае спинорная форма конформного тензора есть

$$\Psi_{ABCD} = u_A u_B u_C u_D, \quad (9.12)$$

откуда получаем тензорную форму

$${}^{\dagger}C_{abcd} = k_{[a} t_{b]} k_{[c} t_{d]}, \quad (9.13)$$

где  $k^a$  — главное изотропное направление и  $k, m, t$  — тетрада. Предположим теперь, что  $R_{ab} = 0$ ; тогда  $k^a$  удовлетворяет соотношению (9.5б). Изменим его масштаб так, чтобы он удовлетворял уравнению (9.6); в результате конформный тензор можно будет переписать в виде

$${}^{\dagger}C_{abcd} = x k_{[a} t_{b]} k_{[c} t_{d]}, \quad (9.14)$$

где  $x$  — некоторая комплексная функция точки.

Без потери общности можно выбрать  $t^a$  допускающим параллельный перенос вдоль луча, поскольку форма (9.14) инвариантна относительно всех допустимых преобразований тетрады  $k, m, t$ . Применяя тождества Бианки (9.2) к форме (9.14) и умножая на  $\bar{t}^a m^b \bar{t}^c$ , находим

$$x, {}_a k^a + zx = 0. \quad (9.15)$$

Таким образом,  $x$  подчиняется уравнению (9.10) с  $N = 1$ . Подставляя это обратно в тензор Римана, находим

$$\begin{aligned} {}^{\dagger}C_{abcd} &= \underset{0}{C}_{abcd} & (z = 0), \\ {}^{\dagger}C_{abcd} &= z \underset{0}{C}_{abcd} & (z \neq 0). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Для остальных классов вывод в основном сходен, но более сложен. Систематически применяя тождества Бианки (наиболее удобно это делать в спинорной форме) и при необходимости дифференцируя их до получения



уравнений вида (9.10), получим (индексы опущены)

$$\dot{C} = \overset{+}{\underset{0}{\text{II}}} + v \overset{+}{\underset{0}{\text{III}}} + v^2 \overset{+}{\underset{0}{N}} \quad (z = 0), \quad (9.17a)$$

$$\dot{C} = \overset{+}{\underset{0}{N}}/v + \overset{+}{\underset{0}{\text{III}}}/v^2 + \overset{+}{\underset{0}{\text{II}}}/v^3 \quad (z = \bar{z} \neq 0) \quad (9.17b)$$

[что следовало бы сравнить с выражением (9.1), имея в виду, что в этой метрике  $r = v$ ] и, наконец,

$$\dot{C} = z \overset{+}{\underset{0}{N}} + z^2 \overset{+}{\underset{0}{\text{III}}} + z^3 \overset{+}{\underset{0}{\text{II}}} + z^4 \overset{+}{\underset{0}{\text{III}'}} + z^5 \overset{+}{\underset{0}{N'}} \quad (z \neq \bar{z}). \quad (9.17b)$$

Изложенный вывод несколько несистематичен. Так, в нем используются тождества Бианки в форме, являющейся следствием уравнений поля  $R_{ab} = 0$ , но нет попытки систематически использовать сами уравнения поля. В некоторых из недавних весьма талантливых работ гораздо шире используются сами уравнения поля. Отправной точкой является выбор координатной системы (как и в лекции IV), приспособленной для конгруэнции лучей с равным нулю сдвигом; при этом известно, что такая конгруэнция существует. Затем интегрируются уравнения поля, начиная с основных уравнений. На этом пути Робинсон и Траутман сумели получить по существу явные решения для всех алгебраически специальных полей с  $R_{ab} = 0$  в случае  $z = \bar{z} \neq 0$ . Исчерпывающее резюме случаев  $z = 0$  и  $z = \bar{z} \neq 0$  дали Кундт и Трумер, которые учли также многие результаты, касающиеся случая  $R_{ab} \neq 0$ . Таким образом, законченного анализа недостает только для случая  $z \neq \bar{z}$ . Но, судя по неопубликованным работам Керра и Демьянского, этот последний случай тоже скоро будет исчерпан.

## Х. Теория возмущений и линеаризованная теория

В заключение я приведу некоторые сведения об основном приближенном методе, с помощью которого собственно и получают численные результаты для различных процессов. Я рассмотрю самое первое приближение этого метода — «линеаризованную теорию», в которой все вели-

чины разлагаются в ряд около своих значений для пространства Минковского по некоторому формальному параметру разложения и при вычислениях удерживаются только первые члены после тех, которые относятся к пространству Минковского. Линеаризованная теория в большинстве отношений весьма тривиальна, но в некоторых случаях она позволяет получить определенное представление об интересных сторонах дела. Второе и более высокие приближения до сих пор рассматривались почти исключительно в связи с проблемой квантования поля; о них расскажет в своих лекциях проф. Де-Витт<sup>1)</sup>.

Прежде чем перейти к линеаризованной теории как таковой, полезно ввести одну лемму о линейных возмущениях в произвольном пространстве — времени.

Пусть  $M$  есть невозмущенное многообразие, определяемое своей топологией и метрикой  $ds^2$ . Последняя обычно задается тензором  $g_{ab}(x^c)$  как функцией координат, введенных в каждой из координатных окрестностей, в своей общности покрывающих  $M$  целиком. В лемме рассматривается только некоторая отдельная координатная окрестность. Предположим, что  $M(q)$  есть однопараметрическое семейство многообразий, для которого  $M(0) = M$ . Предположим также, что в подходящих координатах метрический тензор  $g_{ab}(x^c; q)$  является аналитической функцией переменной  $q$  вблизи  $q = 0$ . Мы можем произвести разложение

$$g_{ab} = g_{ab} + qg_{ab} + O(q^2) \equiv g_{ab}(x^c; 0) + q \left( \frac{\partial g_{ab}}{\partial q} \right)_{q=0} + O(q^2). \quad (10.1)$$

Аналогичные обозначения будут использоваться для всех остальных величин.

Общее преобразование координат в нашем случае имеет вид  $x'^a = f^a(x^b; q)$ ; удобно рассматривать такое преобразование как составленное из двух преобразований существенно различной природы: 1) преобразования  $x'^a = f^a(x^b)$  и 2) преобразования  $x'^a = f^a(x^b; q)$ , для

<sup>1)</sup> Имеются в виду лекции Де-Витта в летней школе в Лез-Уш (см. [29]).— *Прим. ред.*

которого  $f^a(x^b; 0) = x^a$ . Преобразования первого рода можно интерпретировать как координатные преобразования на невозмущенном многообразии; они не вызывают каких-либо необычных трудностей. Интерпретация преобразований второго рода имеет более тонкий характер: допустим, мы приняли, что точка на возмущенном многообразии является «той же самой» точкой, что и точка на невозмущенном многообразии, всякий раз, когда эти две точки соответствуют одним и тем же значениям координат; тогда преобразования 1 оставляют это отождествление инвариантным, но преобразования 2 изменяют его совершенно беспорядочным образом.

Предположим теперь, что мы вычисляем возмущение тензора Римана, или любой его ковариантной производной, или, наконец, любой величины, построенной из таковых посредством рациональных алгебраических операций (включая, быть может, свертывание индексов). Пусть тензор  $T$  (индексы, если они имеются, опущены) есть подобная величина. Тогда наша лемма утверждает, что при преобразовании второго рода

$$T \xrightarrow{1} T + L_g(T), \quad (10.2)$$

где  $g^a \equiv [\partial f^a / \partial q]_{q=0}$  есть произвольное векторное поле на  $M$ . Таким образом, возмущение  $T$  единственно (и по этому имеет смысл), только если добавочный член в уравнении (10.2) исчезает для всех векторных полей  $g^a$ . Для доказательства формулы (10.2) мы прежде всего заметим, что она справедлива для метрического тензора, в чем можно убедиться прямым вычислением. На основании общих свойств производной Ли и того факта, что  $T$  есть функция только метрического тензора и его производных по координатам, формула (10.2) затем автоматически оказывается справедливой для всех  $T$ .

Теперь на основании явной формулы для производной Ли, данной в лекции II, непосредственно следует, что  $L_g(T) = 0$  для всех  $g^a$  только в двух случаях: 1)  $T = 0$ ; 2)  $T$  есть скаляр и  $T = \text{const}$ . На практике можно поэтому получить имеющие смысл результаты, только прибегая к специальным уловкам: либо оперируя исключительно

тензорами, возмущенное значение которых равно нулю, либо работая с объектами, более сложными, чем  $T$ , либо, наконец, как-то ограничивая разнообразие допустимых преобразований.

Если теперь вернуться к линеаризованной теории, то мы заметим, что невозмущенные значения всех рассмотренных выше тензоров, за исключением самого метрического тензора, равны нулю, так что в этом особом случае линеаризованные возмущения все имеют смысл. Начиная с этого момента, ниже будет предполагаться, что невозмущенное многообразие есть пространство Минковского с введенной в качестве координат лоренцовой системой, так что единственными допустимыми преобразованиями первого рода будут лоренцовы преобразования. Пусть

$$(-g)^{1/2} g_{ab} = \eta_{ab} + q\gamma_{ab} + O(q^2). \quad (10.3)$$

Так как невозмущенные значения всех других величин равны нулю, то мы впредь будем опускать индекс 1; так,  $G_{ab} \equiv G_{ab}^1$  будет означать первое возмущение тензора Эйнштейна и т. д. Чтобы сохранить согласие с обычной терминологией, мы будем называть координатные преобразования второго рода на протяжении всего обсуждения линеаризованной теории «калибровочными преобразованиями».

Во многих специальных случаях параметр разложения  $q$  удобно выбрать так, чтобы он имел размерность длины. Например, область вне «сингулярности»  $r = 2m$  в метрике Шварцшильда — Крускала обладает всеми требуемыми выше свойствами, если выбрать в качестве параметра разложения  $q = m$ , имеющего в абсолютных единицах размерность длины. Когда размерность  $q$  есть длина, нужно ожидать, что линеаризованная теория не дает одинаково хорошего приближения на всем протяжении пространства — времени; обычно результаты линеаризованной теории оказываются удовлетворительными вблизи бесконечности в асимптотически плоском пространстве — времени, но не в других точках и не в других случаях.

Линеаризованные уравнения поля имеют вид

$$\frac{1}{2} G_{ab} = \gamma_{a[b, c]}^c + \frac{1}{2} \gamma_{, cd}^{cd} \eta_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{bc, a}^c = 0. \quad (10.4)$$

Отметим, что вследствие принятых выше условий все индексы поднимаются и опускаются при помощи лоренцова метрического тензора  $\eta_{ab}$  и все ковариантные производные можно заменить обычными производными. В силу устанавливаемой соотношением (10.2) леммы,  $G_{ab}$  калибровочно инвариантен. Тожества Бианки после двух свертываний приобретают вид

$$G_{b, a}^a \equiv 0. \quad (10.5)$$

Тожества (10.5) оказываются самоочевидными, если переписать  $G_b^a$  через линеаризованный «суперпотенциал»  $U_a^{bc} = -U_a^{cb}$ :

$$G_a^b \equiv U_a^{bc}, \quad \frac{1}{2} U_a^{bc} \equiv \gamma_a^{[b, c]} + \delta_a^{[b} \gamma^{c]d}. \quad (10.6)$$

При обсуждении решений линеаризованных уравнений ключевую роль играют десять «сильных» законов сохранения, являющихся аналогами закона сохранения заряда в классической электродинамике. Пусть источники гравитационного поля локализованы — например возьмем некоторую четырехмерную трубку с временноподобной границей, внутри которой  $G_{ab} = T_{ab} \neq 0$ , тогда как вне трубки  $G_{ab} = 0$ . Обозначим внешнюю область через  $R$ . Рассмотрим пространственноподобную гиперповерхность  $H$  с элементом объема  $dS_a$ , полагая, что граница  $DH$  гиперповерхности  $H$  полностью лежит в  $R$  и элемент ее площади есть  $dS_{ab} = -dS_{ba}$ . Полная величина энергии — импульса  $P^a$  и момента  $M^{ab}$  источников определяется (в нашем приближении) как

$$P^a = \int_H dS_b G^{ab},$$

$$M^{ab} = 2 \int_H dS_c G^{c[a} x^{b]}, \quad (10.7)$$

где  $x^a$  — лоренцовы координаты невозмущенного пространства Минковского. Эти величины очевидным образом лоренц-ковариантны; кроме того, они калибровочно инвариантны в силу нашей леммы и независимы от  $H$  вследствие законов сохранения (10.5).

Используя уравнения (10.6), можно выразить  $P^a$  и  $M^{ab}$  только через асимптотическое гравитационное поле:

$$\begin{aligned}
 P^a &= \oint_{DH} dS_{bc} U^{abc}, \\
 M^{cd} &= \oint_{DH} 2dS_{ab} \{x^{[d} U^{c]ab} - \eta^{b[c} \gamma^{d]a}\}.
 \end{aligned}
 \tag{10.8}$$

Таким образом, основное содержание законов сохранения для материи эквивалентно утверждению, что интегралы (10.8) не зависят от поверхности  $DH$  до тех пор, пока  $DH$  не перемещается через область, где  $G_{ab} \neq 0$ . То, что интегралы (10.8) калибровочно инвариантны и не зависят от выбора поверхности интегрирования, в первую очередь следует из эквивалентных равенств (10.7); однако небольшое вычисление позволяет показать, что можно непосредственно использовать уравнения поля для вывода независимости интегралов (10.8) от поверхности  $DH$  и доказательства того, что добавочный член, который подынтегральные выражения в (10.8) приобретают под действием калибровочных преобразований, при интегрировании исчезает. Таким образом,  $P^a$  и  $M^{ab}$  калибровочно инвариантны и не зависят от поверхности  $DH$  также и в случае, когда линеаризованная теория служит хорошим приближением лишь вне некоторой мировой трубки. При этом гравитационное поле внутри мировой трубки будет, конечно, давать вклад в  $P^a$  и  $M^{ab}$ , так что эти величины следует мыслить как суммарную энергию поля и источников.

Даже в точной теории существуют соотношения, которые можно было бы назвать сильными законами сохранения. Например, дополнительные условия, приведенные в лекции IV, будучи проинтегрированы с надлежащим весовым множителем, обладают такими свойствами. Однако нелегко понять смысл ситуации иначе, как в рамках линеаризованной теории, где все прозрачно.

Рассмотрим теперь вопрос определения в явном виде общих решений линеаризованных уравнений поля. В весьма сходном случае электродинамики часто вводят калибровку Лоренца,  $A^a_{,a} = 0$ , и затем ищут решения уравнений  $\square A^a = 0$ . Затем из этих решений выбирают те, для которых  $A^a_{,a} = 0$ . Чтобы обойти этот последний

этап, можно ввести суперпотенциал Герца  $H^{ab}$ . В этом случае ищут общее решение уравнения  $\square H^{ab} = 0$ , и, полагая  $A^a = H^{ab},_{,b}$ , получают (ввиду антисимметрии  $H^{ab}$ ) решение уравнений Максвелла. Но важно отметить, что с помощью этого приема, прибегая к суперпотенциалу Герца, можно найти не полностью все решения уравнений Максвелла. Действительно, предположим, как и выше, что ток локализован; тогда  $\square H^{ab} = 0$  только во внешней области  $R$ . Но если подставить получающееся в результате внешнее решение  $A^a$  в интеграл для заряда

$$e = \oint_{DH} dS_{ab} F^{ab}, \quad (10.9)$$

то на основании  $A^a = H^{ab},_{,b}$  и  $\square H^{ab} = 0$  (в области  $R$ ) можно заключить, что  $e = 0$ . Однако эта трудность оказывается не очень серьезной. Все, что нужно сделать для получения общих решений в области  $R$ , — это подсчитать результирующий заряд источников, подобрать потенциал Лиенара — Вихерта для этого заряда на некоторой временноподобной мировой линии внутри мировой трубки источника и затем прибавить сюда общее решение, полученное при помощи суперпотенциала.

Совершенно аналогичная ситуация имеет место и в линеаризованной теории. Действительно, предположим, что мы ввели «суперметрику»  $M^{abcd}$ , обладающую симметрией конформного тензора:

$$M^{abcd} = M^{[ab][cd]} = M^{cdab}, \quad M^{a[bcd]} = M^{ai,ib} = 0, \quad (10.10)$$

и записали

$$\square M^{abcd} = 0 \text{ в } R, \quad \gamma^{ac} = M^{abcd},_{,bd}. \quad (10.11)$$

Тогда справедливы следующие три положения: 1)  $\gamma^{ab}$  есть решение линеаризованных уравнений поля в  $R$ ; 2) энергия — импульс и момент (10.8) для этого решения тождественно равны нулю; 3) если к решению (10.11) добавить линеаризованное поле Шварцшильда (обладающее ненулевой энергией) и некоторые известные в явном виде поля, обладающие моментом, то вместе такая сумма образует общее решение в области  $R$ . Первые два утверждения легко проверить явной подстановкой в (10.5)

и (10.8). Доказательство последнего, третьего утверждения довольно трудно, и я сошлюсь просто на соответствующую литературу.

Можно, конечно, пойти дальше, раскладывая суперметрику в ряды мультиполей и получая таким путем явные выражения  $\gamma^{ab}$  и  $R_{abcd}$  для квадрупольных, октупольных и т. д. волн. При этом обнаружится, что, как и в электродинамике, существуют поля мультипольного излучения «магнитного типа» и «электрического типа». Можно, кроме того, детально проверить теорему расщепления для запаздывающего излучения ограниченного источника. Мы не будем останавливаться на деталях этих вычислений, поскольку они весьма сходны с соответствующими вычислениями в электродинамике. В широком смысле слова любое вычисление, которое можно проделать в электродинамике, имеет аналог в линеаризованной теории; всякий раз, когда электродинамический расчет калибровочно инвариантен, соответствующий аналог в линеаризованной теории также калибровочно инвариантен. Конечно, в выражениях линеаризованной теории иногда фигурирует несколько добавочных индексов: так, аналогом одного интеграла для заряда служат десять интегралов (10.8), суперметрика имеет на два индекса больше, чем суперпотенциал Герца, а понятие ускорения заряда переходит в понятие относительных ускорений соседних пробных масс. Однако небольшой практики в линеаризованной теории достаточно, чтобы научиться угадывать нужные модификации. Пока мы удовлетворяемся линеаризованным приближением, теория излучения совершенно тривиальна.

### З а д а ч и

Задачи, отмеченные звездочкой, — трудные; отмеченные тремя звездочками не были, насколько мне известно, решены вообще, и их решение (если оно существует) составило бы, вероятно, солидную работу. Латинские цифры относятся к номеру лекции.

II.1. Допустим, что  $f^a$  лежит на гиперповерхности  $t = \text{const}$ . Показать, что ее трехмерная ковариантная дивергенция имеет вид

$$f_{||b}^a \equiv f^c_{;d} h_c^a h_b^d.$$



\* II.2. Используя результат задачи II.1, вывести связь (2.8) между тензором Римана 4-пространства и тензором Римана и второй фундаментальной формой 3-пространства.

II.3. Вычислить  $(L_e f^a)_{||b} - L_e (f^a_{||b})$  для  $f^a$ , если  $f^a h^b_a = f^b$  такова, как в задаче II.1.

III.1. Показать, что преобразования Лоренца, оставляющие фиксированным данное светоподобное направление, образуют четырехпараметрическую группу, описанную в лекции III.

\*\* III.2. Найти разложение  $k_{a;b;c}$ , аналогичное данному в лекции III для  $k_{a;b}$ ; какие части этого тензора имеют простые трансформационные свойства при изотропных поворотах [заметьте, что существенную роль играют только  $k_{a;(b;c)}$ ]?

\*\*\* III.3. Ввести естественное понятие ковариантной производной на изотропной гиперповерхности и использовать его для выражения уравнений поля  $R_{ab} = 0$  в изящном виде.

IV.1. Показать, что дополнительные условия выполняются всюду, если известно, что основные уравнения выполняются всюду, а дополнительные условия — на гиперповерхности  $r = \text{const}$ .

\*IV.2. Найти координатные преобразования, оставляющие координатные условия (но не обязательно граничные условия) инвариантными, имея в виду случай инфинитезимальных преобразований; найти трансформационные свойства величины  $V$  и других пяти переменных поля относительно допустимых преобразований.

V.1. Показать, 1) что две направленные в будущее светоподобные прямые в пространстве Минковского встречаются в одной и той же точке в бесконечности, если и только если расстояние  $d(A; B)$  между  $A$  на одной прямой и  $B$  на другой ограничено; 2) что в этом случае  $d(A, B)$  не зависит от  $A$  и  $B$ .

\* V.2. Используя асимптотическую форму функции Грина для уравнения Шредингера — Клейна — Гордона, построить на некоторой окрестности точки  $I^-$  начальные данные, определяющие единственное решение этого уравнения; проквантовать поле, задавая коммутаторы в точке  $I^-$ .

\* V.3. Повторить задачу V.2 для поля с нулевой массой покоя в пространстве Минковского, работая на гиперповерхности  $\iota^-$ .

\*\*\* V.4. Обобщить задачи V.3 и V.4 на общерелятивистский случай.

\*\*\* V.5. Проанализировать подробно геометрическую структуру точек  $I^-$ ,  $I^0$  и  $I^+$  для метрики Шварцшильда — Крускала и асимптотически плоских метрик, которые предложили Вейль и Леви-Чивита.

VI.1. Показать, что четырехпараметрическая группа лоренцевых трансляций является инвариантной подгруппой обобщенной группы Бонди — Метцнера.

\* VI.2. Показать подробно, что допустимые преобразования даются обобщенной группой Бонди — Метцнера, действующей на  $\iota^+$ .

\* VI.3. Найти трансформационные свойства начальных данных относительно обобщенных преобразований Бонди — Метцнера. Показать, что  $c_0$  преобразуется так же, как она преобразовывалась бы в лоренц-ковариантной теории.

\*\*\* VI.4. Найти неприводимые эрмитовы представления алгебры Ли обобщенной группы Бонди — Метцнера.

VII.1. Доказать, что любой спинор  $u_A$  единственным образом определяет светоподобный вектор со спинорными компонентами  $u_A u_B$ ; обратно, любой действительный светоподобный вектор  $k_a$  можно представить в такой форме.

VII.2. Представить в спинорной форме поворот в плоскости  $x, y$ ; поворот в плоскости  $t, z$ ; изотропный поворот.

\* VII.3. Повторить вывод всех алгебраических соотношений, приведенных в лекции III, используя спиноры.

VII.4. Спинорные компоненты действительного антисимметричного тензора  $F_{ab}$  суть  $F_{ABCD} = \frac{1}{2} (\varphi_{AC} \varepsilon_{BD} + \text{Эрм. сопр.})$  при подлежащем выборе  $\varphi_{AB} = \varphi_{BA}$ . В таком случае  $\tilde{F}_{ABCD} = \varphi_{AC} \varepsilon_{BD}$ . Доказать это.

VII.5. Любой симметричный спинор  $\varphi_{AB}$  может быть представлен в форме  $\varphi_{AB} = \frac{1}{2} (u_A v_B + u_B v_A)$ , где  $u_A$  и  $v_B$  определены единственным образом (с точностью

до численного множителя) как решение уравнения  $\varphi_{AB} x^A x^B = 0$ . Таким образом,  $\varphi_{AB}$  определяет единственный комплексный скаляр  $x$ . Доказать это.

VII.6. Используя тетраду  $k^a, m^a, t^a$ , найти аналогично тому, как это было сделано в лекции II, три антисимметричных тензора, образующих базис пространства тензоров  $\overset{\dagger}{F}_{ab}$ . (Указание: показать, что в качестве одного из этих трех тензоров можно взять тензор  $k_{[a} t_{b]}$ .) Используя эти результаты, найти тензорные аналоги всех результатов задачи VII.5.

VII.7. Выписать спинорную форму электромагнитного тензора натяжений.

\*\* VII.8. Найти естественные аналоги результатам, полученным в задачах VII.4—VII.7, для тензора Римана  $R_{abcd}$ , тензор Риччи которого  $R^i{}_{bic}$  равен нулю. (Эта задача содержит алгебраическую часть теории чистого излучения Петрова — Пирани и теории тензора Беля — Робинсона.)

VIII.1. Выразить при помощи тетрады  $k, m, t$  пять комплексных тензоров, образующих базис в пространстве тензоров  $\overset{\dagger}{C}_{abcd}$ .

VIII.2. Выразить скалярные инварианты тензора Вейля в спинорной форме.

VIII.3. Проанализировать уравнение геодезического отклонения в случае, когда тензор Вейля относится к типу  $N$  и  $R_{ab} = 0$ . В каком смысле относительное ускорение является поперечным?

\*\*\* VIII.4. Провести естественным образом разделение тензора Вейля класса I на подклассы и, задавшись условием  $R_{ab} = 0$ , систематизировать способы интегрирования для поля каждого подкласса.

\* IX.1. Завершить доказательство теорем, приведенных в лекции IX.

IX.2. Показать, что метрическая форма

$$ds^2 = \text{Re} \{ A (x + iy)^2 du^2 + 2du dv + dx^2 + dy^2 \},$$

где  $A(u)$  — произвольная комплексная функция, есть решение уравнений поля типа  $N$ . Это решение носит название плоской волны; почему?

IX.3. Найти преобразования координат, оставляющие инвариантной метрическую форму, приведенную в задаче IX.2. Исследовать связь этих преобразований с преобразованиями Лоренца и обобщенными преобразованиями Бонди — Метцнера.

IX.4. Найти закон преобразования функций информации при бесконечно малых обобщенных преобразованиях Бонди — Метцнера и сравнить его с результатами задачи IX.3.

\*\* IX.5. Повторить вычисления Робинсона и Траутмана, найдя все алгебраически специальные решения уравнений поля, для которых конгруэнция лучей с равным нулю сдвигом ортогональна некоторой гиперповерхности и имеет не равную нулю расхожимость. (Указание: начните с выбора приспособленной к конгруэнции координатной системы; затем проинтегрируйте некоторые из основных уравнений и произведите дальнейшую специализацию координат для упрощения метрики; действуйте таким образом шаг за шагом до тех пор, пока все дополнительные условия, за исключением последнего, не будут в явном виде проинтегрированы.)

\* X.1. Проверить теорему расщепления в линеаризованной теории.

\* X.2. Два белых карлика в нашей Галактике вращаются друг относительно друга, едва не задевая поверхности друг друга; используя законы Ньютона, вычислить их движение и, используя линеаризованную теорию, вычислить их поле; какое относительное ускорение вызывает их поле между двумя точками на расстоянии 1 м от Земли?

X.3. Объект с массой, равной  $10^{-6}$  земной, сталкивается с Землей на скорости 40 км/сек и останавливается в течение 1 сек. Какое относительное ускорение будет обнаружено в пробном устройстве длиной 1 м, удаленном на расстояние 400 км от катастрофы?

X.4. Показать, что точечный источник имеет пять квадрупольных моментов электрического типа и пять квадрупольных моментов магнитного типа. Обобщить результат на моменты любого порядка. Как могло случиться, что не существует гравитационных моментов других типов кроме электромагнитного?

## ЛИТЕРАТУРА

Литература весьма обширна; здесь приводятся ссылки на некоторые недавние работы, подводящие итог более ранним исследованиям. Восемь отмеченных звездочками работ содержат (в явном или неявном виде), по существу, все необходимые сведения для того, чтобы быть в курсе ситуации на январь 1963 г. во всех вопросах, затронутых в настоящих лекциях.

## Лекция I

- 1\*. Pirani F. A. E., in *Recent Developments in General Relativity*, London — Warszawa, 1962.
2. Brill D., *Lectures on General Relativity* (Mimeographed Notes), State University of Iowa, 1961.
3. Pirani F. A. E., in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, New York, 1962.

## Лекция II

4. Bruhat Y., in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, New York, 1962.
- 5\*. Lichnerowicz A., Bruhat Y., in *Recent Developments in General Relativity*, London — Warszawa, 1962.
6. Schouten J. A., *Ricci Calculus*, Berlin, 1954. [См. также И. Схоутен, Д. Стройк, Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1, М., 1939; т. 2, 1948.— *Прим. ред.*]
7. Bergmann P. G., *Phys. Rev.*, 75, 680 (1949).
8. Arnowitt R., Deser S., Misner C. W., in *Recent Developments in General Relativity*, London — Warszawa, 1962.
9. Stachel J., Ph. D. Thesis, Stevens, 1963 (будет опубликовано).

## Лекция III

- 10\*. Jordan P., Ehlers J., Sachs R., *Acad. Wiss. Mainz.*, 1 (1961).
11. Sachs R., *Proc. Roy. Soc.*, A264, 309 (1961).
12. Penrose R., *Null Hypersurface Initial Data*, 1961, в печати.

## Лекции IV — VI

13. Penrose R., *Ann. Phys.*, 10-2, 171 (1961).
- 14\*. Bondi H., van der Burg M., Metzner A., *Proc. Roy. Soc.*, A269 (1962).
15. Newman E., Unti T., *Journ. Math. Phys.*, 3, 896 (1962).
16. Sachs R., *Proc. Roy. Soc.*, A270, 103 (1962).
17. Sachs R., *Journ. Math. Phys.*, 3, 908 (1962).
18. Sachs R., *Phys. Rev.*, 128, 2851 (1962).
- 19\*. Penrose R., *Phys. Rev. Letters*, 10, 66 (1963).
20. Trautman A., *Lectures on General Relativity* (Mimeographed Notes), 1958.
21. Dautcourt G., Ph. D. Thesis, Humboldt Universität, Berlin, 1961.

22. Penrose R., Report to the Warszawa Conference, 1962.  
23. Morgan T., Winicour J., в печати.

*Лекции VII — VIII*

24. Pirani F. A. E., Phys. Rev., 105, 1089 (1957). См. также работы [1, 6, 10, 11, 13, 19, 21].

*Лекция IX*

- 25\*. Robinson I., Trautman A., Proc. Roy. Soc., A265, 463 (1962).  
26\*. Kundt W., Trümper M., Acad. Wiss. Mainz, 12 (1962).  
27\*. Kerr R., Report to the Stevens Conference, 1963, в печати.  
28\*. Goldberg J., Kerr R., Journ. Math. Phys., 2, 327 (1961).

*Лекция X*

См. «Приложение» в статье [16].

Кроме того, при переводе добавлено:

29. Relativity, Groups and Topology, ed. C. DeWitt, B. DeWitt, New York — London, 1964.

## 5. КОНФОРМНАЯ ТРАКТОВКА БЕСКОНЕЧНОСТИ

*Р. Пенроуз*

(Лекции, прочитанные в 1963 г. на летней школе теоретической физики при Гренобльском университете, Лез-Уш, Франция)

R. Penrose, in «Relativity, Groups and Topology», ed. by C. DeWitt, B. DeWitt, New York — London, 1964, p. 565

### *Лекция I*

Пусть  $\tilde{M}$  обозначает физическое пространство — время с метрикой  $\tilde{ds}$ . Наша основная идея заключается в построении другого «нефизического» многообразия  $M$  с границей  $\mathcal{U}$  и метрикой  $ds$ , такого, что  $\tilde{M}$  конформно внутренности  $M$  и  $ds = \Omega \tilde{ds}$ , так что «бесконечность» многообразия  $\tilde{M}$  изображается «конечной» гиперповерхностью  $\mathcal{U}$  (фиг. 1). Это последнее свойство выражается условием, что  $\Omega = 0$  на  $\mathcal{U}$ ; иными словами, метрика на  $\mathcal{U}$  растягивается благодаря бесконечному множителю, возникающему при переходе от  $M$  к  $\tilde{M}$ , таким образом, что  $\mathcal{U}$  оказывается отображенной на бесконечность. Асимптотические свойства  $\tilde{M}$  и полей в  $\tilde{M}$  теперь можно исследовать, анализируя  $\mathcal{U}$  и локальное поведение полей на  $\mathcal{U}$  при условии, что все необходимые для этого понятия могут быть сформулированы в конформно инвариантном виде.

Плодотворность этой идеи опирается на тот факт, что уравнения свободных полей любого спина с нулевыми массами покоя при надлежащей интерпретации конформно инвариантны; например, для поля со спином 0 из волнового уравнения, записанного в виде

$$\left\{ \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} + \frac{R}{6} \right\} \varphi = 0,$$

где  $R$  — скалярная кривизна, а  $\nabla_{\mu}$  — оператор ковариантного дифференцирования (и то и другое относительно

метрики  $g_{\mu\nu}$  многообразия  $\mathcal{M}$ ), следует:

$$\left\{ \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu + \frac{\tilde{R}}{6} \right\} \tilde{\varphi} = 0,$$

где  $\tilde{\nabla}_\mu$  и  $\tilde{R}$  относятся к метрике  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} g_{\mu\nu}$  многообразия  $\tilde{\mathcal{M}}$  и  $\tilde{\varphi} = \Omega\varphi$ . В случае поля со спином 1 мы имеем уравнения свободного максвелловского поля

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0,$$

где  $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}$ . Для конформной инвариантности нужно положить просто

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}.$$

Для поля со спином 2 можно использовать тензор  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$ , который имеет следующие свойства:

$$K_{\mu\nu\rho\sigma} = K_{[\rho\sigma][\mu\nu]}, \quad K_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0, \quad K_{\nu\mu\sigma}^\mu = 0$$

и удовлетворяет уравнению

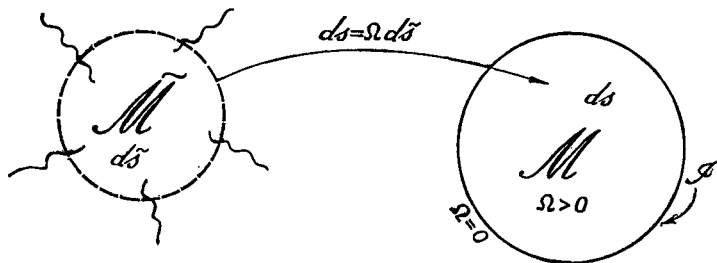
$$\nabla_{[\gamma} K_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0$$

или, эквивалентно, уравнению

$$\nabla^\mu K_{\mu\nu\rho\sigma} = 0.$$

Конформная инвариантность будет иметь место, если

$$\tilde{K}_{\mu\nu\rho\sigma} = \Omega^{-1} K_{\mu\nu\rho\sigma}.$$



Ф и г. 1. Бесконечное физическое пространство — время  $\tilde{\mathcal{M}}$  отображается в нефизическое «конечное» конформно эквивалентное ему многообразие  $\mathcal{M}$  с границей  $\mathcal{I}$ , соответствующей «бесконечности» пространства — времени  $\tilde{\mathcal{M}}$ .



Результаты для полей произвольного спина наиболее легко формулируются (и доказываются) в рамках формализма двухкомпонентных спиноров. Поле спина  $s$  ( $s > 0$ ) может быть представлено полностью симметричным спинором  $\varphi_{AB\dots K}$ , имеющим  $2s$  индексов и удовлетворяющим уравнению

$$\nabla^{A\dot{P}}\varphi_{AB\dots K} = 0$$

в качестве уравнения свободного поля. Для конформной инвариантности нужно, чтобы

$$\tilde{\varphi}_{AB\dots K} = \Omega^{s+1}\varphi_{AB\dots K}.$$

В случаях спина 1 и 2 связь между  $\varphi_{A\dots K}$  и соответствующими тензорными величинами дается соотношениями

$$F_{\mu\nu} = \{\varphi_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \varepsilon_{AB}\bar{\varphi}_{\dot{C}\dot{D}}\}\sigma_{\mu}^{A\dot{C}}\sigma_{\nu}^{B\dot{D}},$$

$$K_{\mu\nu\rho\tau} = \{\varphi_{ABCD}\varepsilon_{\dot{E}\dot{F}}\varepsilon_{\dot{G}\dot{H}} + \varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}\bar{\varphi}_{\dot{E}\dot{F}\dot{G}\dot{H}}\}\sigma_{\mu}^{A\dot{E}}\sigma_{\nu}^{B\dot{F}}\sigma_{\rho}^{C\dot{G}}\sigma_{\tau}^{D\dot{H}}.$$

Конформная инвариантность легко доказывается на основании следующего соотношения для произвольного спинора:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{X\dot{Y}}\tilde{\xi}_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}} &= \Omega^{m+1}\nabla_{X\dot{Y}}\xi_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}} + \\ &+ \Omega^m \left\{ \left(m - \frac{1}{2}r\right)\xi_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}}\nabla_{X\dot{Y}}\Omega + \xi_{X\dots K\dot{P}\dots\dot{S}}\nabla_{A\dot{Y}}\Omega + \dots \right. \\ &\dots + \xi_{A\dots X\dot{P}\dots\dot{S}}\nabla_{K\dot{Y}}\Omega + \xi_{A\dots K\dot{Y}\dots\dot{S}}\nabla_{X\dot{P}}\Omega + \dots \\ &\left. \dots + \xi_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{Y}}\nabla_{X\dot{S}}\Omega \right\}, \end{aligned}$$

где  $\xi_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}}$  имеет  $r$  индексов обоих сортов, а

$$\tilde{\xi}_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}} = \Omega^{m\xi}\xi_{A\dots K\dot{P}\dots\dot{S}}.$$

Конформная инвариантность для тензорного варианта тогда следует из результата для спиноров. Предполагается, что величины  $\sigma_{\mu}^{A\dot{B}}$  (эрмитовы  $2 \times 2$ -матрицы для каждого  $\mu$ ) преобразуются как

$$\tilde{\sigma}_{\mu}^{A\dot{B}} = \Omega^{-1}\sigma_{\mu}^{A\dot{B}},$$

поскольку это преобразование оставляет инвариантным основное уравнение

$$\sigma_{\mu}^{AB} \sigma_{\nu}^{CD} \varepsilon_{AC} \varepsilon_{BD} = g_{\mu\nu}.$$

В качестве первого примера пространства — времени  $\tilde{\mathcal{M}}$  с конечным образом  $\mathcal{M}$  рассмотрим пространство — время Минковского. Используя изотропные координаты  $u, v$  (опережающее и запаздывающее время), физическую метрику можно представить в виде

$$d\tilde{s}^2 = du dv - \frac{1}{4} (u - v)^2 \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\}, \quad u \geq v.$$

Подходящий конформный множитель (conformal factor — англ.) дается формулой

$$\Omega = (1 + u^2)^{-1/2} (1 + v^2)^{-1/2}.$$

После замены координат

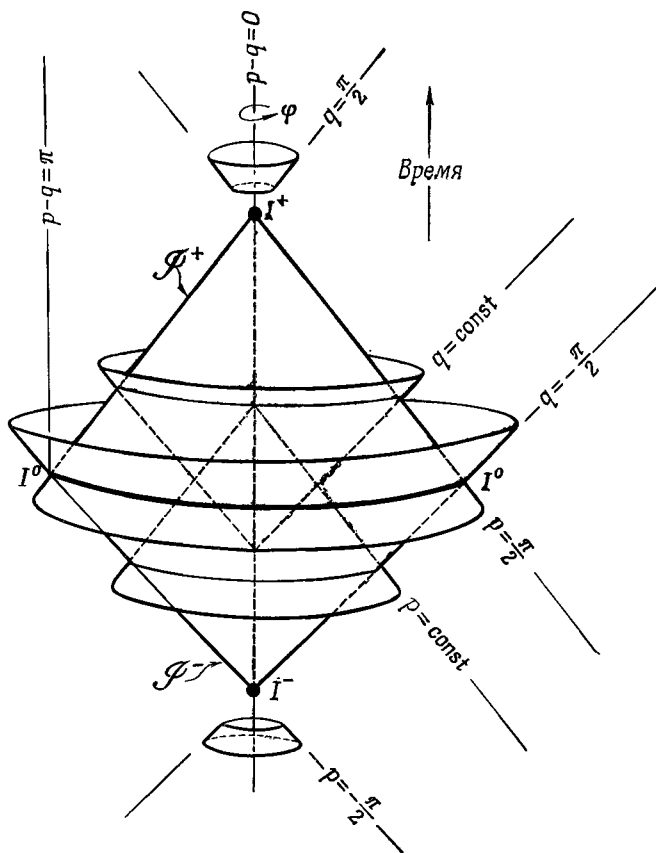
$$u = \operatorname{tg} p, \quad v = \operatorname{tg} q$$

нефизическая метрика принимает вид

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2 = dp dq - \frac{1}{4} \sin^2 (p - q) \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\},$$

где  $p$  и  $q$  изменяются от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , причем  $p \geq q$ . Граничная гиперповерхность  $\mathcal{Y}$  многообразия  $\mathcal{M}$  определяется значениями  $q = -\pi/2$  или  $p = \pi/2$ , так как эти значения соответствуют бесконечности ( $v = -\infty$  или  $u = \infty$ ) для  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Обозначим область, задаваемую значениями  $q = -\pi/2, -\pi/2 < p < \pi/2$ , через  $\mathcal{Y}^-$ . Аналогично пусть область  $\mathcal{Y}^+$  задается значениями  $p = \pi/2; -\pi/2 < q < \pi/2$ . Точку  $p = q = -\pi/2$  обозначим через  $I^-$ , точку  $p = q = \pi/2$  — через  $I^+$  и точку  $p = -q = \pi/2$  — через  $I^0$  (фиг. 2). Тот факт, что  $I^-, I^+$  и  $I^0$  являются отдельными точками, следует из того, что в этих точках  $\sin (p - q) = 0$ . Это координатные сингулярности типа полюсов полярных координат. Многообразие  $\mathcal{M}$  в этих точках регулярно. Фактически метрика  $ds$  есть метрика статической вселенной Эйнштейна, т. е. цилиндрического  $(S^3 \times E^1)$ -пространства, изображающего трехмерное сферическое пространство, постоянное во времени. Много-

образе  $\mathcal{M}$  является только конечной частью этого цилиндра (фиг. 3). Гиперповерхность  $\mathcal{Y}^-$  представляет собой изотропный конус будущего с вершиной  $I^-$ . Этот конус



Фиг. 2. Координаты для  $\mathcal{M}$  в случае пространства — времени Минковского. Координата  $\theta$  опущена ( $\theta = \pi/2$ ).

перифокусируется в точку  $I^0$ , которая пространственно диаметрально противоположна  $I^-$ . Нулевой конус будущего точки  $I^0$  есть  $\mathcal{Y}^+$ , который в свою очередь перифокусируется в точку  $I^+$ . Область, заключенная между  $\mathcal{Y}^-$  и  $\mathcal{Y}^+$ ,

конформна полному пространству — времени Минковского.

Смысл  $I^-$ ,  $\mathcal{I}^-$ ,  $I^0$ ,  $\mathcal{I}^+$ ,  $I^+$  можно понять, рассматривая поведение кривых в  $\mathcal{M}$ , соответствующих прямым линиям в  $\tilde{\mathcal{M}}$  (фиг. 4.) Кривая, являющаяся образом временноподобной прямой, начинается в точке  $I^-$  и оканчивается в точке  $I^+$ ; образ пространственноподобной прямой начинается и оканчивается в  $I^0$ ; образ изотропной прямой начинается в точке гиперповерхности  $\mathcal{I}^-$  и оканчивается в точке гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$ . Таким образом,  $I^-$  изображает бесконечность прошлого,  $I^0$  — пространственную бесконечность,  $I^+$  — бесконечность будущего;  $\mathcal{I}^-$  изображает изотропную бесконечность в прошлом,  $\mathcal{I}^+$  — изотропную бесконечность в будущем. Мы поэтому ожидаем, что поля с нулевой массой покоя должны быть существенны на  $\mathcal{I}^-$  и  $\mathcal{I}^+$ , а поля с конечной массой покоя — в точках  $I^-$  и  $I^+$ , но не на  $\mathcal{I}^-$  и  $\mathcal{I}^+$ .

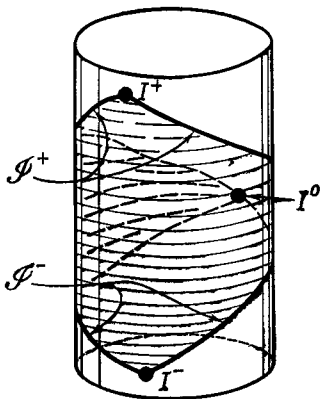
Рассмотрим теперь метрику Шварцшильда

$$\begin{aligned} \tilde{ds}^2 = & du^2 \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) + \\ & + dr du - r^2 \{ d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \}, \end{aligned}$$

где используется одна изотропная координата  $u$  (запаздывающее время). Вводя  $ds = \Omega \tilde{ds}$  с  $\Omega = r^{-1}$  и выбирая новую координату в виде  $l = r^{-1}$ , мы получаем:

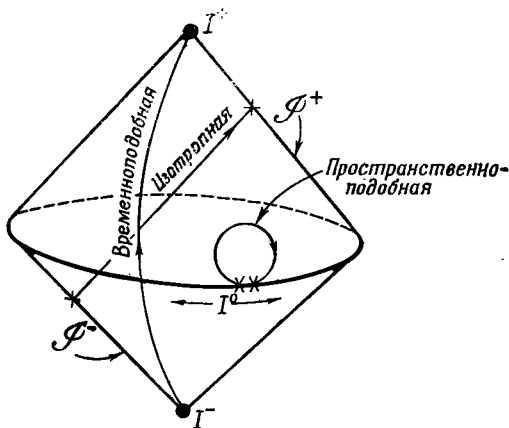
$$ds^2 = du^2 (l^2 - 2ml^3) - dl du - d\theta^2 - \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Эта метрика регулярна (в классе  $C^\infty$ ) на гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$ , определяемой значениями  $l = 0$ ,  $t$  — конечно. Аналогично, выражая метрику через опережающий параметр  $v$  вместо запаздывающего параметра  $u$ , найдем, что



Ф и г. 3. Цилиндр представляет вселенную Эйнштейна. Две пространственные координаты  $\theta$ ,  $\varphi$  опущены; изображены только одно пространственное и одно временное измерения. Затрихованная область соответствует многообразию  $\mathcal{M}$ .

метрика регулярна (в классе  $C^\infty$ ) на  $\mathcal{Y}^-$ . В обоих случаях  $\mathcal{Y}^+$  и  $\mathcal{Y}^-$  топологически будут трехмерными открытыми цилиндрами ( $S^2 \times E^1$ ). Ситуация в точности идентична случаю пространства Минковского, если в нем исключить точки  $I^-$ ,  $I^0$  и  $I^+$ . Однако если включить эти точки в многообразие  $\mathcal{M}$  в случае метрики Шварцшильда, то возникает



Ф и г. 4. Образы прямых линий в  $\tilde{\mathcal{M}}$  (одно пространственное измерение опущено).

новая ситуация. Именно, каждая из точек  $I^-$ ,  $I^0$ ,  $I^+$ , очевидно, должна с необходимостью быть *сингулярной* точкой для  $\mathcal{M}$ . То, что  $I^-$  и  $I^+$  сингулярны, не удивительно, ибо вся материя оказывается сконцентрированной в этих точках при достижении границы. Однако точка  $I^0$ , по-видимому, также должна быть сингулярной в любом асимптотически плоском случае, когда *полная масса* отлична от нуля, т. е. во всех представляющих интерес асимптотически плоских случаях, за исключением пространства — времени Минковского. Тот факт, что эти точки сингулярны в  $\mathcal{M}$ , становится важным в связи с вопросом о группах асимптотических симметрий. Этот вопрос мы коротко обсудим в лекции III.

Метрика Шварцшильда, приведенная выше, представляет собой частный случай метрики

$$d\tilde{s}^2 = r^{-2} A dr^2 - 2B_i dx^i dr + r^2 C_{ij} dx^i dx^j \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где при  $r^{-1} = x^0$  величины  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_{ij}$  должны быть достаточно гладкими функциями  $x^\mu$  ( $\mu = 0, \dots, 3$ ), особенно на гиперповерхности  $\mathcal{Y}$ . Тогда, если соответствующие якобианы в  $A$ ,  $B_i$ ,  $C_{ij}$  не равны нулю, то метрика  $ds = \Omega d\tilde{s}$ , где  $\Omega = r^{-1}$ , достаточно регулярна на  $\mathcal{Y}$ . Отметим, что для этой метрики  $\nabla_\mu \Omega \neq 0$ . Это условие играет важную роль в некоторых применениях. Записанная метрика включает в качестве частных случаев многие метрики, предлагавшиеся для описания гравитационного излучения в асимптотически плоском пространстве — времени, такие, например, как метрики Бонди, Робинсона — Траутмана, Сакса и, вероятно, также Ньюэна — Унти. Сюда же можно включить пространство — время де Ситтера и изученные Демьянским варианты асимптотической метрики де Ситтера, представляющие собой обобщение метрик Робинсона — Траутмана на случай отличной от нуля космологической постоянной.

## Л е к ц и я II

Теперь мы несколько уточним понятие рассматриваемого типа пространства — времени  $\tilde{\mathcal{M}}$ . В обозначениях лекции I потребуем, чтобы

а)  $\mathcal{M}$ ,  $g_{\mu\nu}$  были достаточно гладкими;

б)  $\Omega$  была достаточно гладкой на всем  $\mathcal{M}$ , причем

$\Omega = 0$  на  $\mathcal{Y}$  и  $\nabla_\mu \Omega \neq 0$  на  $\mathcal{Y}$  ( $= \mathcal{M}$ );

в) каждая изотропная геодезическая в  $\mathcal{M}$  начинается и оканчивается на  $\mathcal{Y}$ .

Если  $\tilde{\mathcal{M}}$  удовлетворяет требованиям а — в, то его называют *асимптотически простым*. В случаях асимптотически плоского и асимптотически деситтеровского пространства — времени эти требования обязательны, но во многих других применениях условие в следовало бы заменить некоторым более слабым локальным требованием. В частности, чтобы обеспечить асимптотическую простоту в случае Шварцшильда, массовую сингулярность нужно будет заменить достаточно протяженной областью, в которой  $R_{\mu\nu} \neq 0$ , поскольку иначе будут существовать круговые изотропные орбиты (например, при  $r = 3m$ ), которые не уходят на  $\mathcal{Y}^+$ . Точки  $I^-$ ,  $I^0$  и  $I^+$  в данном случае исключаются из точного определения  $\mathcal{M}$ . Смысл требования в

заключается в том, чтобы гарантировать включение *всей* изотропной бесконечности в  $\mathcal{U}$ . В связи с условием *в* следует уяснить одно важное свойство конформных преобразований, именно, что любая изотропная геодезическая из  $\mathcal{M}$  переходит в изотропную геодезическую в  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Понятие *изотропной геодезической* (в противоположность понятиям пространственноподобной и временноподобной геодезических) *конформно инвариантно*. В силу этого любая бесконечно удаленная в прошлое или в будущее точка любой изотропной геодезической из  $\tilde{\mathcal{M}}$  изображается в  $\mathcal{M}$  точками  $\mathcal{U}$ .

В лекции III мы рассмотрим некоторые случаи, в которых не выполняется требование б. Однако в определенных ситуациях условие  $\nabla_{\mu}\Omega \neq 0$  может быть *выведено* из других допущений асимптотической простоты. Одной из таких ситуаций является выполнение (в  $\tilde{\mathcal{M}}$ ) уравнений Эйнштейна для пустого пространства в окрестности  $\mathcal{U}$ . Другая такая ситуация возникает всегда, когда присутствует космологическая постоянная  $\lambda$ , если только предположить, что при  $\lambda > 0$  плотность энергии неотрицательно-определенна, а при  $\lambda < 0$  неотрицательно-определенно давление. При этих условиях можно также показать, что *из факта  $\lambda > 0$  следует, что  $\mathcal{U}$  пространственноподобна, из факта  $\lambda < 0$  следует, что  $\mathcal{U}$  временноподобна, и, более того, при  $\nabla_{\mu}\Omega \neq 0$  показать, что из  $\lambda = 0$  следует, что  $\mathcal{U}$  изотропна.*

Излучение различных полей с нулевой массой покоя в  $\tilde{\mathcal{M}}$  можно изучить, исследуя поведение конформно преобразованных полей в точках  $\mathcal{U}$ . Чтобы осуществить это в случае гравитационного поля, необходимо представить его как поле со спином 2, т. е. поле типа рассмотренного в лекции I. Нетрудно заметить, что если уравнения Эйнштейна для пустого пространства выполняются — с космологической постоянной или без нее, — то конформный тензор Вейля  $\tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma}$  для  $\tilde{\mathcal{M}}$  (определенный д-ром Саксом в его лекциях<sup>1)</sup>) удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\nabla}_{[\lambda}\tilde{C}_{\mu\nu]\rho\sigma} = 0$$

<sup>1)</sup> См. перевод лекций Сакса в настоящем сборнике (стр. 84—151). — Прим. ред.

и обладает следующими свойствами:

$$\tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \tilde{C}_{[\rho\sigma][\mu\nu]}, \quad \tilde{C}_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0, \quad \tilde{C}_{\nu\mu\sigma}^{\mu} = 0.$$

Спинорный эквивалент  $\Psi_{ABCD}$  тензора  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  определяется соотношением

$$C_{\mu\nu\rho\tau} = \{ \Psi_{ABCD} \varepsilon_{EF} \cdot \varepsilon_{GH} + \varepsilon_{AB} \varepsilon_{CD} \bar{\Psi}_{EFGH} \} \sigma_{\mu}^{A\dot{E}} \sigma_{\nu}^{B\dot{F}} \sigma_{\rho}^{C\dot{G}} \sigma_{\tau}^{D\dot{H}}$$

и в пустом пространстве удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\nabla}^{A\dot{P}} \tilde{\Psi}_{ABCD} = 0.$$

В присутствии материи это уравнение (в общем случае) имеет также ненулевую правую часть. Мы можем, таким образом, отождествить поле спина 2  $\tilde{\Psi}_{ABCD}$  в  $\tilde{\mathcal{M}}$  со спинорным полем  $\Psi_{ABCD}$

$$\tilde{\Psi}_{ABCD} = \tilde{\Psi}_{ABCD}, \quad \text{или} \quad \tilde{K}_{\mu\nu\rho\sigma} = \tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Однако при конформном преобразовании мы имеем

$$\tilde{\Psi}_{ABCD} = \Omega^{+2} \Psi_{ABCD}, \quad \tilde{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \Omega^{-2} C_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Сравнивая коэффициенты в этих выражениях и в выражениях, полученных нами ранее (лекция I), находим

$$\Psi_{ABCD} = \Omega^{-1} \tilde{\Psi}_{ABCD}, \quad K_{\mu\nu\rho\sigma} = \Omega^{-1} C_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

Разница между конформным поведением тензоров  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$  и  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  на самом деле не удивительна, если учесть, что (в общем случае) тензор Риччи в пространстве  $\mathcal{M}$  не будет исчезать (и не будет пропорционален  $g_{\mu\nu}$ ), когда область  $\tilde{\mathcal{M}}$  вблизи  $\mathcal{Y}$  пуста. Таким образом, тензор  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  для пустого пространства — времени  $\tilde{\mathcal{M}}$  в общем случае не будет удовлетворять уравнению свободного поля с нулевой массой покоя, тогда как тензор  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$  будет удовлетворять этому уравнению.

Коль скоро поле гравитационного излучения следует изучать, рассматривая компоненты тензора  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$  в точках  $\mathcal{Y}$ , то  $K_{\mu\nu\rho\sigma}$  должен быть конечным (и, скажем, непрерывным) на  $\mathcal{Y}$ . Пока не ясно, будет ли это выполняться в общем случае, ибо отсюда следовало бы требование  $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$  на  $\mathcal{Y}$ . На настоящей стадии мы знаем только,



что  $C_{\mu\nu\rho\sigma}$  достаточно регулярно на  $\mathcal{U}$  вследствие требования *a*. Однако же мы имеем

$$\nabla^{A\dot{P}} \{\Omega^{-1}\Psi_{ABCD}\} = 0.$$

Отсюда следует, что на  $\mathcal{U}$

$$n^{A\dot{P}}\Psi_{ABCD} = \Omega\nabla^{A\dot{P}}\Psi_{ABCD} = 0,$$

где  $n^\mu = \nabla^\mu\Omega$  есть нормаль к  $\mathcal{U}$ , по предположению не равная нулю. Теперь, если космологическая постоянная в уравнениях Эйнштейна присутствует, то  $\mathcal{U}$  пространственноподобна или временноподобна. Тогда  $n^{A\dot{P}}$  не сингулярна, откуда следует, что  $\Psi_{ABCD} = 0$  на  $\mathcal{U}$  (и, следовательно,  $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$  на  $\mathcal{U}$ ). Из  $C^1$ -дифференцируемости  $\Psi_{ABCD}$  вытекает, что  $\Phi_{ABCD} = \Omega^{-1}\Psi_{ABCD}$  непрерывна на  $\mathcal{U}$ . С другой стороны, если космологическая постоянная равна нулю, то  $\mathcal{U}$  — изотропная гиперповерхность. Поэтому  $n^{A\dot{P}}$  сингулярна, и мы получаем только

$$\iota^A\Psi_{ABCD} = 0,$$

где  $n^{A\dot{P}} = \pm \iota^A\bar{\iota}^{\dot{P}}$ . Дифференцируя уравнение для  $\Omega^{-1}\Psi_{ABCD}$  еще раз, найдем, что на  $\mathcal{U}$

$$\iota^E\nabla_{E\dot{P}}\Psi_{ABCD} = 0,$$

если только на  $\mathcal{U}$

$$\nabla_{(A}\dot{C}\nabla_{B)}\dot{D}\Omega = 0.$$

Это последнее уравнение действительно вытекает из формулы для беспшуровой части тензора Риччи на многообразии  $\mathcal{M}$ , когда в  $\tilde{\mathcal{M}}$  (вблизи  $\mathcal{U}$ ) выполняются уравнения Эйнштейна для пустого пространства. Можно затем показать из глобальных соображений, что если топология гиперплоскости  $\mathcal{U}$  та же, что и в случаях Минковского и Шварцшильда, то  $\Psi_{ABCD} = 0$  на  $\mathcal{U}$ , а, следовательно,  $\Phi_{ABCD}$  непрерывна, как и ранее.

На самом деле можно показать, что когда  $\mathcal{U}$  изотропна, ее топология с необходимостью имеет вид  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^- \cup \mathcal{U}^+$ , где  $\mathcal{U}^- \approx \mathcal{U}^+ \approx S^2 \times E^1$ , как и в случае пространства — времени Минковского ( $I^-$ ,  $I^0$ ,  $I^+$  исключены). Доказательство несколько тяжеловесно и существенно опирается на требование *v*, связанное с асимптотической простотой.

Если предположить, что в окрестности  $\mathcal{U}$  выполняются уравнения Эйнштейна — Максвелла, то изложенное выше рассуждение можно провести как для гравитационного, так и для электромагнитного полей при условии, что космологическая постоянная либо положительна, либо равна нулю, и что исключены отклонения от нормального положения вещей. В результате оказывается при этом, что на  $\mathcal{U}$  гравитационный спинор  $\varphi_{ABCD}$  непрерывен, а электромагнитный спинор  $\varphi_{AB}$  (по крайней мере) ограничен. Эти выводы можно, конечно, несколько усилить.

Важная роль, которую играет факт конечности  $\varphi_{ABCD}$  и  $\varphi_{AB}$  на  $\mathcal{U}$ , обусловлена связью между этим фактом и так называемым свойством «расщепления» (его рассмотрел д-р Сакс в своих лекциях<sup>1)</sup>). По существу оно означает, что различные комплексные компоненты спиноров  $\tilde{\varphi}_{ABCD}$  и  $\tilde{\varphi}_{AB}$  спадают как последовательные отрицательные степени аффинного (или яркостного) параметра  $r$  в запаздывающих или опережающих изотропных направлениях в  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Это в свою очередь связано с асимптотическим поведением главных изотропных направлений полей.

Пусть симметричный спинор  $\varphi_{A\dots k}$  с  $2s$  индексами ограничен вблизи  $\mathcal{U}$ , и пусть  $g$  — изотропная геодезическая в  $\mathcal{M}$ , пересекающая  $\mathcal{U}$  в точке  $G$ , а  $\xi_A$  — спинор, связанный с касательным направлением к  $g$  и выбранный так, что он параллельно переносим вдоль  $g$ . При конформных преобразованиях эта картина будет сохраняться, если

$$\tilde{\xi}_A = \Omega^{1/2} \xi_A.$$

Пусть  $\eta_A$  выбран так, что он параллельно переносим вдоль  $g$ , причем  $\xi_A \eta^A = 1$ , так что в точке  $G$  нормаль к  $\mathcal{U}$  линейно зависит от двух изотропных направлений, представленных спинорами  $\xi_A$  и  $\eta_A$ . Тогда можно выбрать  $\tilde{\xi}_A \tilde{\eta}^A = 1$ , причем  $\tilde{\eta}_A$  параллельно переносим вдоль  $\tilde{g}$  в  $\tilde{\mathcal{M}}$  и

$$\tilde{\eta}_A = \Omega^{-1/2} \eta_A + O(\Omega^{1/2} \ln \Omega) \cdot \xi_A.$$

1) См. стр. 133 настоящего сборника.— Прим. ред.

В силу конечности каждой компоненты  $\varphi_{A\dots CD\dots k}\eta^A\dots$   
 $\dots \eta^C\xi^D\dots \xi^K$  будем иметь

$$\tilde{\varphi}_{A\dots CD\dots k}\tilde{\eta}^A\dots \tilde{\eta}^C\tilde{\xi}^D\dots \tilde{\xi}^K = O(\Omega^{k+1}),$$

где слева стоит произведение  $k$  спиноров  $\tilde{\xi}$ , а  $\tilde{\varphi}_{A\dots K} = \Omega^{s+1}\varphi_{A\dots K}$ , как и в лекции I. Кроме того,  $\Omega^{-1} \sim \sim ar$ , где  $r$  — аффинный (или яркостный) параметр вдоль  $g$ , а  $a$  — некоторая постоянная. Это в свою очередь позволяет получить свойства «расщепления» для поля  $\tilde{\varphi}_{A\dots K}$  в  $\tilde{\mathcal{M}}$ . В частности, интересно отметить описывающую *излучение* компоненту (или «изотропную часть») спинора  $\varphi_{A\dots k}$ , которая получается при  $k = 0$ . Из предыдущего ясно, что она спадает как  $r^{-1}$ .

Остальные компоненты также представляют интерес; в частности, в случае гравитации пропорциональная  $r^{-3}$  компонента входит в определение полной энергии — импульса системы. Пусть  $\mathcal{S}$  — гиперповерхность в  $\mathcal{M}$ , содержащая некоторое двумерное сечение  $S$  гиперповерхности  $\mathcal{Y}^+$ . Другими словами,  $S = \dot{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{Y}^+$ , где  $S$  пересекает каждую образующую гиперповерхности  $\mathcal{Y}^+$  в одной точке и каждая точка  $S$  лежит на образующей гиперповерхности  $\mathcal{Y}^+$ . Гиперповерхность  $\mathcal{S}$  будет *асимптотически изотропной* в  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Двумерная поверхность  $S$  должна быть пространственноподобной и будет иметь топологию сферы  $S^2$ . Такую поверхность всегда можно преобразовать при соответствующем конформном множителе в метрическую сферу, скажем, единичного радиуса. Предположим, что это сделано. Тогда *полная величина энергии — импульса*, выделенная гиперповерхностью  $\mathcal{S}$ , равна следующему интегралу по  $S$ :

$$P_\mu = \frac{1}{4\pi} \int (\sigma N - \psi_2) W_\mu dS,$$

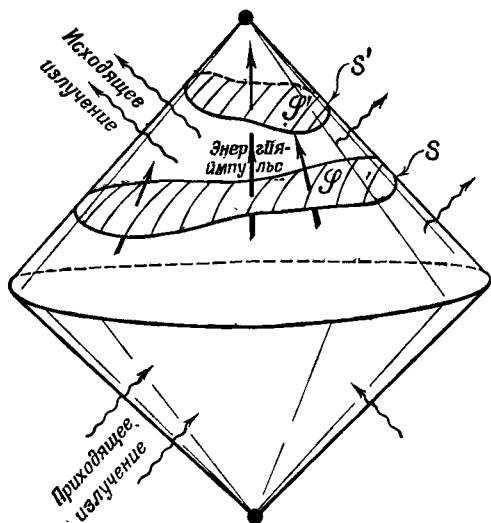
где  $dS$  — элемент площади поверхности  $S$ ,

$$\psi_2 = \varphi_{ABCD}\eta^A\eta^B\xi^C\xi^D,$$

$$N = -\frac{1}{2}R_{\mu\nu}\sigma_{AB}^{\mu\nu}\sigma_{CD}^{\nu\mu}\eta^A\xi^B\eta^C\xi^D,$$

$$\sigma = \xi^A\eta^B\xi^C\nabla_{AB}\dot{\xi}_C,$$

причем  $\eta^A$  соответствует изотропному направлению в  $\mathcal{U}^+$ , а  $\xi^A$  соответствует остальным изотропным направлениям, которые ортогональны элементу  $dS$  и нормированы так, что  $\xi_A \eta^A = 1$ . Тогда  $N$  представляет собой по существу «функцию новостей» Бонди — Сакса. Величина  $\sigma$  определяет модуль сдвига изотропной гиперповерхности,



Ф и г. 5. Энергия — импульс, выделенные гиперповерхностью  $\mathcal{S}$ , измеряются интегралом по  $S$ . Соответствующий интеграл по  $S'$  меньше на величину, равную энергии — импульсу, уносимым излучением между  $S$  и  $S'$ .

пересекающейся с  $\mathcal{U}^+$  в  $S$  ( $c$  в обозначениях Бонди — Сакса). Величина  $W_\mu$  — действительный весовой множитель, который ведет себя как 4-вектор. Мы можем выбрать  $W_0 = 1$  для энергии и  $W_1 = \cos \theta$ ,  $W_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $W_3 = \sin \theta \cos \varphi$  для трех компонент импульса, где  $\theta$  и  $\varphi$  — сферические полярные координаты на  $S$ .

Это выражение для энергии — импульса по существу представляет собой запись в принятой нами форме результатов Бонди — Сакса. Однако в рамках нашего формализма можно дать независимый вывод их закона сохра-

нения. Фактически может быть получен даже несколько более общий закон сохранения. Пусть  $S'$  — другое (скажем, более позднее) сечение  $\mathcal{J}^+$  (фиг. 5). Тогда можно построить соответствующий интеграл энергии — импульса  $P'_\mu$ , представляющий полную величину энергии — импульса, выделенную гиперповерхностью  $\mathcal{S}'$ . Разность  $P_\mu - P'_\mu$  можно выразить как интеграл по части гиперповерхности  $\mathcal{J}^+$ , заключенной между  $S$  и  $S'$ , от величин  $N\bar{N}W_\mu$  и  $|\Phi_{AB}\eta^A\eta^B|^2 W_\mu$  (определяющих соответственно потоки энергии гравитационного и электромагнитного полей). Поэтому если сечение  $S'$  — более позднее, чем  $S$ , то  $P_0 \geq P'_0$  и  $P_\mu - P'_\mu$  есть временноподобный вектор. В присутствии нейтрино распределение их энергии — импульса дается выражением  $(ivDv - i\bar{v}Dv) W_\mu$ , где  $v = \Phi_A\eta^A$ , а  $D$  означает производную по изотропному направлению в  $\mathcal{J}^+$ . Отметим, что  $DN = \Phi_{ABCD}\eta^A\eta^B\eta^C\eta^D$ , так что во всех случаях поток энергии — импульса может быть выражен через поле излучения. Но в случае поля со спином 2 он определяется квадратом интеграла по времени от поля излучения. В случае же спина  $1/2$  он содержит производную по времени.

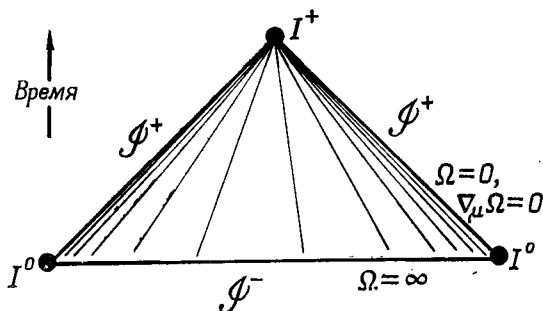
### Лекция III

Интересно рассмотреть природу бесконечности в различных космологических моделях. Это позволяет сделать конформная техника, описанная в лекциях I и II. Природу гиперповерхности  $\mathcal{J}$  можно сопоставить с существованием горизонта видимости и с вопросом об опережающих и запаздывающих полях на космологическом фоне. Правда, типы пространства — времени, с которыми при этом придется иметь дело, будут, как правило, асимптотически простыми.

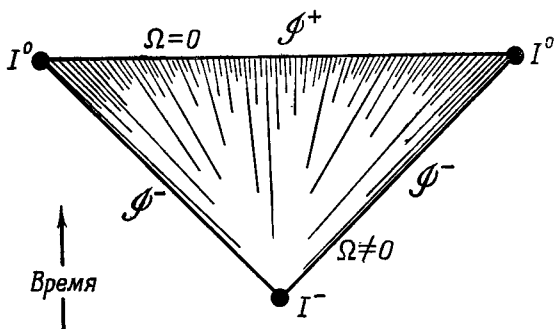
Например, как мне заметил Д. Норман, в случае вселенной Эйнштейна — де-Ситтера мы с необходимостью имеем:  $\nabla_\mu \Omega = 0$  на  $\mathcal{J}^+$ . Для этой модели можно построить и  $\mathcal{J}^-$ , если принять, что  $\Omega = \infty$  на  $\mathcal{J}^-$ . Модель Эйнштейна — де-Ситтера есть расширяющаяся вселенная, развивающаяся из первоначальной точечной сингулярности. Последнюю все же можно представить как несингуляр-

ную граничную гиперповерхность многообразия  $\mathcal{M}$ ; это операция, в некотором роде обратная рассмотренной нами выше. Вместо бесконечного сжатия ( $\Omega = 0$ ), стягивающего бесконечность в конечную границу, здесь нужно бесконечное расширение ( $\Omega = \infty$ ), растягивающее сингулярную точку в несингулярную гиперповерхность. Эта первоначальная гиперповерхность оказывается пространственноподобной. Напротив,  $\mathcal{J}^+$  оказывается изотропной, как в случае пространства Минковского, причем вершина будущего  $I^+$  и вершина прошлого  $I^0$  лежат на  $\mathcal{J}^-$ . Мировые линии галактик («фундаментальных наблюдателей») — это линии, начинающиеся в точках гиперповерхности  $\mathcal{J}^-$  и оканчивающиеся в точках  $I^+$  (фиг. 6).

В модели стационарной вселенной нет начального взрыва. Однако в этом случае  $\mathcal{J}^-$  также не изображает области, находящейся собственно на бесконечности. Модель *не полна* относительно прошлого в том смысле, что существуют временноподобные геодезические, которые не могут быть продолжены в прошлое до бесконечности. Стационарная вселенная представляет только *половину* полного гиперболоида де-Ситтера (который не следует смешивать с моделью Эйнштейна — де-Ситтера). Граница  $\mathcal{J}^-$  есть обычная изотропная гиперповерхность по отношению к *физической* метрике. Поэтому  $\Omega$  конечна (и не равна нулю) на  $\mathcal{J}^-$ . С другой стороны, модель асимптотически проста по отношению к направлениям *в будущее*:  $\mathcal{J}^+$  пространственноподобна, причем  $\Omega = 0$  и  $\nabla_\mu \Omega \neq 0$ . Далее,  $\mathcal{J}^-$  имеет вершину прошлого  $I^-$ , в которой  $\Omega = 0$ , и вершину будущего  $I^0$ , лежащую на  $\mathcal{J}^+$ . Конформное многообразие  $\mathcal{M}$  с границей фактически тождественно многообразию, отвечающему модели Эйнштейна — де-Ситтера, с той лишь разницей, что направление времени обращено (фиг. 7). Эта модель также изображает расширяющуюся вселенную. Мировые линии галактик представляются (вследствие непрерывного творения материи) линиями, начинающимися внутри  $\mathcal{M}$  и *заканчивающимися* на  $\mathcal{J}^+$ . Плотность этих линий бесконечна на  $\mathcal{J}^+$  (и на  $\mathcal{J}^-$ ), но не внутри  $\mathcal{M}$ . Каждая из таких линий, будучи продолжена в прошлое, прошла бы через  $I^-$  (в предположении отсутствия собственного движения).



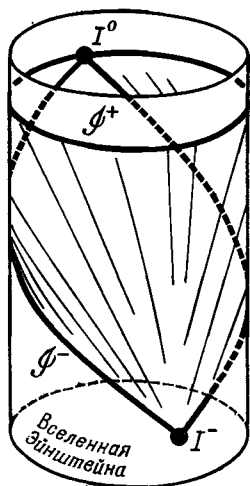
Ф и г. 6. Многообразие  $\mathcal{M}$  для модели Эйнштейна—де-Ситтера ( $\lambda = 0$ ,  $k = 0$ ). Показаны мировые линии галактик.  $I^0$  должна быть одной точкой. Начальная сингулярность изображается гиперповерхностью  $\mathcal{I}^-$ . Релятивистская космология в случае  $\lambda = 0$ ,  $k < 0$  аналогична, за исключением того, что роль  $I^0$  играет  $S^2$ . Соответствующие случаи  $\lambda \neq 0$  выглядят так же, с той разницей, что  $\mathcal{I}^+$  — пространственноподобна, а  $I^+$  отсутствует.



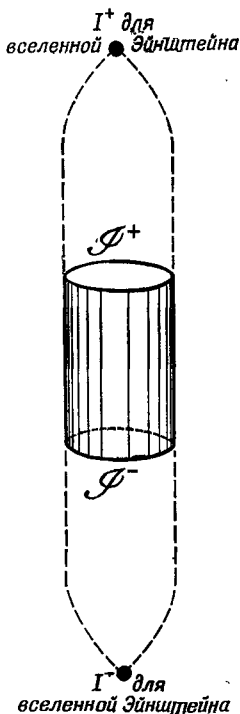
Ф и г. 7. Многообразие  $\mathcal{M}$  для модели стационарной вселенной с мировыми линиями галактик.  $I^0$  опять представляет собой единственную точку.

Как и в случае пространства Минковского, рассмотренном в лекции I, каждую из этих моделей можно конформно представить как часть статической вселенной Эйнштейна (фиг. 8). Она займет в точности половину

области, изображающей пространство — время Минковского. Чтобы представить асимптотически простое пространство — время де-Ситтера целиком (сжимающуюся и расширяющуюся модель), нужно две такие части соединить вдоль их изотропной границы, причем одна должна быть



Фиг. 8. Конформное представление модели стационарной вселенной как части вселенной Эйнштейна. Отсюда ясно, что  $I^0$  представляет собой единственную точку. Представление модели Эйнштейна — де-Ситтера аналогично, но перевернуто. Для релятивистских моделей с  $k < 0$   $I^0$  не есть точка, потому что  $\mathcal{M}$  не оборачивается полностью вокруг цилиндра.



Фиг. 9. Полное пространство — время де-Ситтера представлено на вселенной Эйнштейна (показанной пунктиром). Эта модель может быть получена соединением двух копий модели, изображенной на фиг. 8 (одну из них нужно перевернуть). За исключением моделей, асимптотически сводящихся к вселенной Эйнштейна, любая релятивистская модель с  $k > 0$  имеет такое же представление.

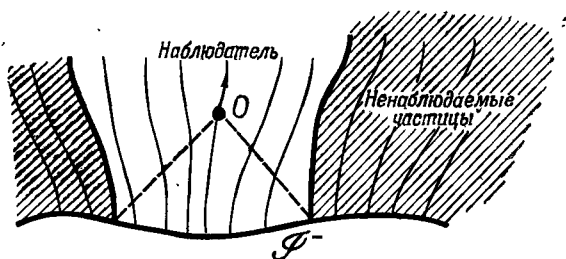


перевернута. В результате получится просто конечное сечение бесконечного цилиндра, изображающего статическую вселенную Эйнштейна (фиг. 9). Граничные гиперповерхности  $\mathcal{Y}^-$  и  $\mathcal{Y}^+$  будут при этом разделены и несингулярны, каждая из них будет трехмерной сферой  $S^3$ . На самом деле это специальное представление применимо также ко всем остальным релятивистским (с нулевым давлением) моделям Робертсона — Уолкера с *положительной* пространственной кривизной  $k$  (например, к модели Леметра). Разница заключается лишь в том, что цилиндр становится полубесконечным в случае двух моделей (именно моделей Эддингтона — Леметра), которые асимптотически переходят во вселенную Эйнштейна. Сама вселенная Эйнштейна является примером *максимального* универсального конформно плоского пространства — времени. Другими словами, каждая конформно плоская модель конформна части вселенной Эйнштейна. Бесконечность вселенной Эйнштейна не может быть представлена в виде несингулярной гиперповерхности. Любой конформный множитель, который делает «концы» цилиндра конечными, также должен сжать цилиндр в каждом конце в точку. Сжатие во временном направлении должно сопровождаться соответствующим сжатием в пространственных направлениях. Поэтому в этом случае существует просто начальная сингулярная точка  $I^-$  и конечная сингулярная точка  $I^+$ .

Модель Эйнштейна — де-Ситтера представляет собой простейшую расширяющуюся вселенную в релятивистской космологии, поскольку в этом случае  $k = 0$  и  $\lambda = 0$ . Соответствующие модели с  $k = 0$  и  $\lambda < 0$  или  $\lambda > 0$  имеют весьма похожие конечные конформные представления с той лишь разницей, что в этих случаях *обе* гиперповерхности  $\mathcal{Y}^+$  и  $\mathcal{Y}^-$  пространственноподобны. Они соединены друг с другом одной точкой  $I^0$ . Случай  $k < 0$  очень близки к случаям  $k = 0$ . Их конечные конформные представления отличаются лишь тем, что  $I^0$  здесь уже не точка, а пространственноподобная сферическая поверхность  $S^2$ . К этому же сводится и различие между представлением модели Милна и представлением пространства — времени Минковского. Будучи изображены на вселенной Эйнштейна, эти вселенные в отличие от тако-

вых с  $k = 0$  не обертываются полностью вокруг цилиндра.

В наиболее интересных с физической точки зрения случаях каждая из гиперповерхностей  $\mathcal{U}^-$  и  $\mathcal{U}^+$  оказывается либо пространственноподобной, либо изотропной. (Примером вселенной, для которой  $\mathcal{U}$  временноподобна, является модель де-Ситтера с отрицательной  $\lambda$ .) Пространственноподобный характер гиперповерхности  $\mathcal{U}^-$  или  $\mathcal{U}^+$



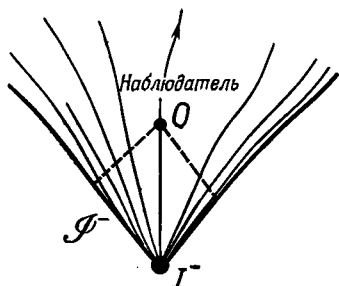
Ф и г. 10. Если  $\mathcal{U}^-$  — пространственноподобна, то существует горизонт частиц. Наблюдатель может видеть только некоторые из частиц во вселенной. По мере течения его времени все больше и больше частиц становятся видимыми.

во многих из этих моделей тесно связан с существованием того или иного из двух типов горизонта видимости, исследованных в статье Риндлера.

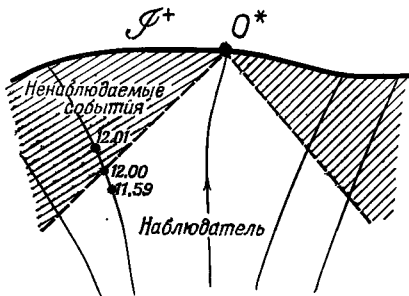
Предположим сначала, что  $\mathcal{U}$  пространственноподобна. Мировые линии частиц или «фундаментальных наблюдателей» не все будут пересекать  $\mathcal{U}^-$  в одной и той же точке. (Ведь если бы это имело место, то пространство — время вне изотропного конуса этой точки нельзя было бы оправданно считать частью вселенной. Гиперповерхность  $\mathcal{U}^-$  тогда следовало бы переопределить либо как этот изотропный конус, либо, возможно, как временноподобную гиперповерхность внутри него.) Рассмотрим отдельного наблюдателя и точку  $O$  на его мировой линии, достаточно близкую к  $\mathcal{U}^-$ . Изотропный конус прошлого, соответствующий событию  $O$ , прежде чем пересечь  $\mathcal{U}^-$ , охватывает мировые линии некоторых (но не всех) частиц во вселенной (фиг. 10). По мере того как точку  $O$  пере-

мещать в будущее вдоль мировой линии наблюдателя, все больше и больше частиц попадет в поле зрения. Это разделение частиц на видимые и невидимые осуществляет так называемый *горизонт частиц*.

Пусть теперь  $\mathcal{J}^-$  изотропна. Тогда можно ожидать, что все мировые линии фундаментальных наблюдателей пройдут через вершину прошлого  $I^-$  гиперповерхности



Фиг. 11. Если  $\mathcal{J}^-$  — изотропная гиперповерхность, то горизонт частиц отсутствует, так как наблюдатель всегда может видеть все частицы (коль скоро нет непрерывного творения).



Фиг. 12. Если  $\mathcal{J}^+$  — пространственноподобна, то существует горизонт событий. События вне изотропного конуса прошлого точки  $O^*$  наблюдатель никогда не увидит.

$\mathcal{J}^-$ . Ясно, что изотропный конус прошлого, соответствующий любому событию  $O$  вблизи  $I^-$ , охватит все эти мировые линии и горизонт частиц будет отсутствовать (фиг. 11).

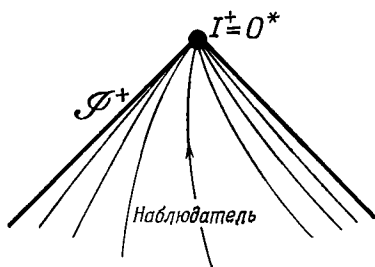
Итак, будем считать  $\mathcal{J}^+$  пространственноподобной. Пусть мировая линия некоторого наблюдателя оканчивается в точке  $O^*$  на  $\mathcal{J}^+$ . Изотропный конус прошлого, соответствующий событию  $O^*$ , разделяет вселенную на события, которые наблюдатель сможет увидеть на некоторой стадии своей истории, и события, которых он никогда не увидит, сколько бы он ни ждал (фиг. 12). Предположим, что часы пересекают изотропный конус прошлого, соответствующий событию  $O^*$ , в некоторой точке пространства — времени, в которой часы показывают 12 час. 00 мин. Наблюдатель видит показания часов 11.30, 11.55, 11.59, . . . Но он никогда не увидит часы,

показывающие 12.01. Однако для наблюдателя, связанного с самими часами, ничего особенного в 12.00 не произойдет. Это разделение событий на такие, которые в конце концов можно увидеть, и такие, которые нельзя увидеть никогда, выражает существование *горизонта событий*. Если  $\mathcal{U}^+$  изотропна, следует ожидать, что все мировые линии фундаментальных наблюдателей пройдут через вершину будущего  $I^+$  гиперповерхности  $\mathcal{U}^+$ . В этом случае  $O^* = I^+$  и изотропный конус прошлого, построенный в этой точке, является границей будущего для вселенной. Поэтому горизонт событий не существует (фиг. 13). Мы, таким образом, получаем следующий результат:

1. *Горизонт частиц соответствует пространственноподобной  $\mathcal{U}^-$ .*

2. *Горизонт событий соответствует пространственноподобной  $\mathcal{U}^+$ .*

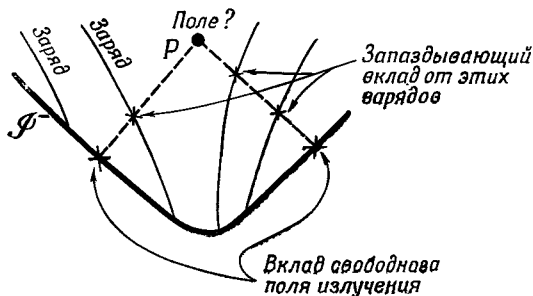
Исследуем теперь связь между этими двумя возможными ситуациями и вопросом об опережающих и запаздывающих полях в космологии. Хорошо известно, что решения уравнений Максвелла, совместные с заданным распределением заряда и заданными движениями, определены единственным образом лишь с точностью до произвольного решения уравнений без источников. Получаемый при этом класс решений обычно разделяют на (единственное) запаздывающее решение, не содержащее волн, приходящих из бесконечности в прошлом, (единственное) опережающее решение, не содержащее волн, уходящих на бесконечность в будущее, и смешанные решения, которые содержат как приходящее, так и исходящее излучение. Поэтому, чтобы эти идеи можно было последовательно использовать в космологии, требуется адекватное определение поля приходящего и исходящего излучений. Здесь можно опереться на соображе-



Ф и г. 13. Если  $\mathcal{U}^+$  — изотропная гиперповерхность, то горизонт событий не существует, так как изотропный конус прошлого точки  $O^*$  совпадает с  $\mathcal{U}^+$ .

ния, изложенные в лекции II. Однако ради большей ясности и в целях лучшей мотивировки суждений в случаях, когда  $\mathcal{M}$  не является асимптотически плоским, рассмотрим сначала, как решения уравнений Максвелла могут быть построены на основании начальных данных.

Любое однородное пространство — время, к счастью, конформно плоско. Это чрезвычайно облегчает анализ в случае рассматриваемых космологических моделей,



Фиг. 14. Если бы  $\mathcal{M}$  было подобно пространству Минковского, то можно было бы выразить максвелловское поле в точке  $P$  через запаздывающие вклады от зарядов, мировые линии которых пересекают изотропный конус прошлого точки  $P$ , плюс вклад свободного поля, порождаемого полем на  $\mathcal{I}^-$ .

поскольку можно считать, что метрика  $\mathcal{M}$  (по крайней мере вблизи  $\mathcal{I}^-$  или  $\mathcal{I}^+$ ) в точности совпадает с метрикой пространства — времени Минковского. Пусть  $P$  — точка многообразия  $\mathcal{M}$ , не слишком удаленная, скажем, от  $\mathcal{I}^-$ . Тогда можно надеяться, что удастся выразить (конформно инвариантное) поле в точке  $P$  в виде суммы вкладов от зарядов, получающихся как точки пересечения ряда мировых линий зарядов с изотропным конусом прошлого, построенным в точке  $P$ , плюс интеграл по области, вырезаемой пересечением гиперповерхности  $\mathcal{I}^-$  с этим изотропным конусом (фиг. 14). Поле в точке  $P$  определялось бы суммой «запаздывающих» полей, обусловленных зарядами, и вклада свободного поля, приходящего от  $\mathcal{I}^-$ , т. е. поля приходящего излучения. Проблема

здесь состоит в том, как выразить запаздывающее поле зарядов. Один из возможных путей ее решения мог бы состоять в том, чтобы, найдя частные решения уравнений Максвелла для каждого заряда, вычесть затем из полученного поля вклад свободного поля, приходящего от  $\mathcal{U}^-$ . Очевидно, дело зависит от того, как ведет себя *свободное поле* в зависимости от своих значений на гиперповерхности  $\mathcal{U}^-$ .

Для большей общности рассмотрим свободное поле произвольного спина  $s$  в пространстве — времени Минковского. Так же как и в лекции I, мы можем представить его симметричным спинором  $\varphi_{A\dots K}$  с  $2s$  индексами, который подчиняется уравнению  $\nabla^{A\dot{P}}\varphi_{A B\dots K} = 0$  (или  $\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = 0$  при  $s = 0$ ). Поле в точке  $P$  можно выразить как интеграл по величинам, определенным на пересечении  $\Sigma$  изотропного конуса точки  $P$  и начальной гиперповерхности  $\mathcal{S}$ :

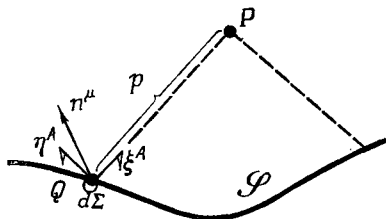
$$\varphi_{AB\dots K}(P) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{r} \xi_A \xi_{\dot{B}} \dots \xi_K \{D\varphi - (2s + 1) \varrho\varphi\} d\Sigma.$$

Если  $Q$  — произвольная точка  $\Sigma$ , то фигурирующие выше величины определяются, как показано на фиг. 15. Спинорный эквивалент 4-вектора  $\vec{QP}$  есть  $r \xi_A \xi_{\dot{B}}$ , так что спинор  $\xi_A$  соответствует изотропному направлению вектора  $\vec{QP}$ , а  $r$  измеряет протяженность  $\vec{QP}$ . Элемент площади поверхности в точке  $Q$  есть  $d\Sigma$ . Пусть спинор  $\eta^A$  определен в точке  $Q$  так, что соответствующие ему и спинору  $\xi_A$  изотропные направления копланарны друг другу и нормали  $n^\mu$  к гиперповерхности  $\mathcal{S}$  в точке  $Q$ . Другими словами, пусть произведение  $\eta^A \eta^{\dot{B}}$  линейно зависимо от  $n^{A\dot{B}}$  ( $= n^\mu \sigma_\mu^{A\dot{B}}$ ) и  $\xi^A \xi^{\dot{B}}$ . Норма  $\eta^A$  фиксируется условием  $\xi_A \eta^A = 1$ . Комплексная величина  $\varphi$  определяется как

$$\varphi = \varphi_{AB\dots K}(Q) \eta^A \eta^{\dot{B}} \dots \eta^K.$$

Выражение  $D\varphi$  означает производную этой компоненты  $\varphi_{A\dots K}$  в изотропном направлении, отвечающем спинору  $\eta^A$ , т. е.  $D = \eta^A \eta^{\dot{B}} \nabla_{A\dot{B}}$ . Величина  $-\varrho$  измеряет расходимость этих изотропных направлений в точке  $Q$ , именно,  $\varrho \parallel \xi_A \eta^{\dot{B}} \eta^{\dot{C}} \nabla^{A\dot{B}} \eta^{\dot{C}}$ .

Сравнивая это выражение для  $\phi$  с результатами, полученными в лекции II, мы видим, что если  $\mathcal{S} = \mathcal{J}^-$  и пространство — время асимптотически плоско, то  $\phi$  измеряет поле приходящего излучения. Если  $\mathcal{S} = \mathcal{J}^+$ , то  $\phi$  дает поле исходящего излучения. В том и в другом случаях  $\phi$  есть часть поля, отвечающая степени  $r^{-1}$ ,



Фиг. 15. В пространстве — времени Минковского свободное поле в точке  $P$  можно просто выразить через величины, определенные на начальной гиперповерхности  $\mathcal{S}$ . Соответствующая компонента поля (и ее производная), знание которой необходимо на  $\mathcal{S}$ , есть поле, полностью свернутое с  $\eta^A$ . Нормаль  $n^\mu$  к  $\mathcal{S}$  в точке  $Q$  компланарна с изотропными направлениями  $\eta^A$  и  $\xi^A$ , где  $\xi^A$  определяет направление вдоль  $QP$ . Таким образом, только когда  $\mathcal{S}$  — изотропная гиперповерхность,  $\eta^A$  может не зависеть от положения  $P$ .

где  $r$  — аффинный параметр на изотропной геодезической, проходящей через точку  $P$ . Если пространство — время не является асимптотически простым на  $\mathcal{J}^+$  или  $\mathcal{J}^-$  вследствие того, что там  $\nabla_\mu \Omega = 0$ , то, как показал Д. Норман, нужно просто заменить аффинный параметр  $r$  яркостным параметром  $r^*$  ( $\sim \Omega^{-1}$ ), и свойства расщепления все равно сохранятся. Поэтому  $\phi$  измеряет тогда часть поля, отвечающую степени  $r^{*-1}$ . Если  $\Omega \neq 0$  (скажем,  $\Omega = \infty$ ) на  $\mathcal{J}^-$  или  $\mathcal{J}^+$ , то интерпретация  $\phi$  как величины, измеряющей поле излучения, проводится не столь непосредственно. Однако, как правило,  $\phi$  действительно оказывается той величиной в интеграле свободного поля для  $\Phi_{A\dots k}$ , которая подсказывает такую интерпретацию.

На этом этапе следует отметить одно важное свойство величины  $\phi$ . Если начальная гиперповерхность  $\mathcal{S}$  является изотропной, то в любой точке  $Q$  гиперповерхности  $\mathcal{S}$  спинор  $\eta^A$  по существу не зависит от положения точки  $P$ ,

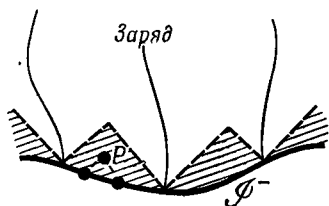
так как направление  $\eta^A$  — это изотропное направление в  $\mathcal{S}$ , нормальное к  $\mathcal{S}$ . Если же  $\mathcal{S}$  пространственноподобна, то направление  $\eta^A$  зависит от направления  $\xi^A$ ; иначе говоря,  $\eta^A$  существенно зависит от положения точки  $P$ . Поэтому поле излучения  $\phi$  представляет собой зависящее от точки наблюдения понятие в случае пространственноподобной  $\mathcal{J}$ , и понятие, не зависящее от точки наблюдения, в случае изотропной  $\mathcal{J}$ .

Пусть мы требуем, чтобы поле приходящего излучения было равно нулю по отношению ко *всем* точкам наблюдения (чисто запаздывающее поле). Тогда в случае изотропной  $\mathcal{J}^-$  это требование изобразится одним комплексным уравнением  $\phi = 0$  на  $\mathcal{J}^-$ . В случае же пространственноподобной  $\mathcal{J}^-$  на ней должны независимо исчезать все компоненты спинора:  $\phi_{A\dots K} = 0$  на  $\mathcal{J}$ . Это дает  $2s + 1$  комплексных уравнений. Но на пространственноподобной гиперповерхности только четыре действительные переменные могут быть выбраны произвольно в качестве начальных данных для  $\phi_{A\dots K}$ . Поэтому для полей с  $s > 1/2$  при любом заданном распределении источников в общем случае нельзя надеяться, что удастся сделать все  $\phi_{A\dots K} = 0$  на  $\mathcal{J}^-$ . На изотропной гиперповерхности две действительные величины, определяемые полем  $\phi$ , можно выбрать произвольно в качестве начальных данных для  $\phi_{A\dots K}$ . Поэтому если  $\mathcal{J}^-$  — изотропная гиперповерхность, то всегда можно удовлетворить равенству  $\phi = 0$  на  $\mathcal{J}^-$ , каково бы ни было расположение источников. В результате имеем, что поле приходящего излучения можно сделать равным нулю при любом распределении источников и относительно всех точек наблюдения тогда и ( $s > 1/2$ ) только тогда, когда  $\mathcal{J}^-$  есть изотропная гиперповерхность. Столь же справедлив соответствующий результат и для  $\mathcal{J}^+$  и исходящего излучения.

Отрицательный вывод в случае пространственноподобных гиперповерхностей  $\mathcal{J}^-$ , может быть, выступит более зримо, если рассмотреть дискретное множество зарядов и достаточно близкие к  $\mathcal{J}^-$  точки  $P$ , изотропные конусы прошлого которых не пересекаются с мировой линией какого-то заряда (фиг. 16). Если приходящее излучение (как мы его определили выше) должно исчезать в точке  $P$ , то в этой точке должно быть равно нулю максвеллов-



ское поле. Мы можем окружить начальную точку мировой линии заряда подобными точками  $P$ . Но (сохраняющийся) заряд может быть измерен интегралом от максвелловского поля по любой сфере, окружающей мировую линию этого заряда. Поэтому максвелловское поле *не может* исчезать во всех подобных точках  $P$  и приходящее излучение [должно присутствовать].



Фиг. 16. Если  $\mathcal{S}$ -пространственноподобна и заряды пересекают ее в дискретном множестве точек, то вблизи  $\mathcal{S}$  будут существовать области из точек  $P$ , изотропные конусы прошлого которых вообще не пересекают мировые линии зарядов. Если приходящее поле отсутствует, то можно ожидать, что поле в точке  $P$  будет равно нулю. Однако это приводит к противоречиям.

Подводя итоги, сформулируем следующий результат:

3. Если существует горизонт частиц, то при общем распределении источников невозможны чисто запаздывающие поля спина  $> 1/2$ .

4. Если существует горизонт событий, то при общем распределении источников невозможны чисто опережающие поля спина  $> 1/2$ .

5. Если существует горизонт событий, то при общем распределении источников невозможны чисто запаздывающие поля спина  $> 1/2$ .

Необходимо подчеркнуть, что заключения 3—4 базируются на данном нами определении опережающих и запаздывающих полей. Вполне вероятно, что можно найти другое определение, ведущее к другим результатам. Отнюдь не ясны также пути применения наших результатов к действительным физическим моделям.

Например, если во взрывающейся модели на начальной стадии ее существования всю материю считать состоящей из нейтральных частиц, то стали бы возможны чисто запаздывающие поля. В этом смысле интересен случай поля со спином 2, так как гравитационно-нейтральные частицы невозможны. (Поле спина 2,  $\varphi_{ABCD}$ , не связанное с кривизной пространства  $\tilde{M}$ , представляет собой слабое гравитационное возмущение в пространстве  $\tilde{M}$ .)

Другим вопросом, связанным с геометрией гиперповерхности  $\mathcal{S}$ , является вопрос о группах асимптотической

симметрии для пространства  $\tilde{M}$ . Ясно, что любому движению, переводящему  $\tilde{M}$  в себя, будет соответствовать конформное перемещение многообразия  $M$  в себя. Тем самым вызывается конформное движение границы  $\mathcal{U}$  в себя. Для общего пространства — времени  $\tilde{M}$  с детализированной структурой не существует точных движений, переводящих  $\tilde{M}$  в себя. Однако конформные перемещения  $\mathcal{U}$  в себя могут по-прежнему существовать. Они порождают группу асимптотической симметрии. Если  $\mathcal{U}^+$  пространственноподобна, то она представляет собой обычное конформное риманово 3-многообразие, так что постановка вопроса, относительно чего происходит его конформное движение, является вполне ясной. Но, например, в случае асимптотически плоского пространства — времени  $\mathcal{U}$  есть изотропная гиперповерхность. Внутренняя метрика  $\mathcal{U}$  имеет исчезающий детерминант. Следовательно, понятие конформной геометрии гиперповерхности  $\mathcal{U}$  допускает больше, чем одну возможную интерпретацию. Одна внутренняя конформная метрика гиперповерхности  $\mathcal{U}$  сама по себе наделяет ее, по-видимому, слишком бедной структурой, чтобы породить интересную с физической точки зрения группу симметрии. Однако конформную геометрию гиперповерхности  $\mathcal{U}$  можно усилить, если учесть ряд конформно инвариантных понятий, вытекающих из факта погружения  $\mathcal{U}$  в  $M$ . Мы обсудим этот вопрос только применительно к случаю асимптотически плоского пространства — времени  $\tilde{M}$ .

Одно из возможных определений конформных преобразований состоит в том, что это преобразования, сохраняющие углы. Применим эту идею к конформной геометрии изотропной гиперповерхности  $\mathcal{U}^+$  в случае асимптотически плоского пространства — времени. На  $\mathcal{U}^+$  должны быть определены два типа углов, именно обычные конечные углы и *изотропные* (нулевые) углы. Конечный угол образуют в некоторой точке на  $\mathcal{U}^+$  два различных направления в  $\mathcal{U}^+$ , которые не компланарны изотропному направлению  $\iota$  в  $\mathcal{U}^+$ . Два направления в точке  $\mathcal{U}^+$ , отличные от  $\iota$  и компланарные  $\iota$ , определяют изотропный угол на  $\mathcal{U}^+$ . Численная величина изотропного угла с необходимостью равна нулю, но тем не менее имеет смысл говорить, что

один изотропный угол больше другого, если он включает этот другой как свою часть. Чтобы сделать эту идею совместной глобально, необходимо установить правило эквивалентности между изотропными углами по всей гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$ . Это можно проделать следующим образом. Выберем специальную метрику для  $\mathcal{M}$ , такую, что расходимость  $\mathcal{I}^+$  исчезает. Это всегда возможно, когда  $\tilde{\mathcal{M}}$  асимптотически плоско, ибо тогда сдвиг  $\mathcal{I}^+$  также должен исчезать. Если же и сдвиг и расходимость  $\mathcal{I}^+$  исчезают, то можно определить параллельный перенос векторов в  $\mathcal{I}^+$  с помощью определенных на  $\mathcal{M}$  символов Кристоффеля. Понятие параллельного переноса векторов определяет параллельный перенос изотропных углов. Теперь можно доказать два свойства этого параллельного переноса. Во-первых, он устанавливает *интегрируемую эквивалентность* между изотропными углами, и, во-вторых, эта эквивалентность не зависит от частного выбора метрики в  $\mathcal{M}$  (о котором уже говорилось выше). Таким образом, устанавливается *сильная конформная геометрия* на  $\mathcal{I}^+$ . Автопреобразования гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$ , сохраняющие эту сильную конформную геометрию (и не изменяющие направления времени), определяют *группу асимптотической симметрии Бонди — Метцнера — Сакса* для асимптотически плоского пространства — времени. (Точное определение того, что следует понимать под «асимптотически плоским» пространством, мы здесь не давали. Если  $\tilde{\mathcal{M}}$  асимптотически простое и  $R_{\mu\nu} = 0$  в окрестности  $\mathcal{I}$ , то этого достаточно. Включение электромагнитных полей с разумными свойствами вблизи  $\mathcal{I}$  не вносит существенных изменений.)

Когда  $\tilde{\mathcal{M}}$  — пространство — время Минковского, то можно выделить неоднородную лоренцеву подгруппу группы Бонди — Метцнера — Сакса. Это можно сделать, выделяя только такие автопреобразования гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$  (сохраняющие сильную конформную геометрию), которые регулярны в точке  $I^+$  или, что эквивалентно, в точке  $I^0$ . Это исключает «супертрансляционную» часть полной группы Бонди — Метцнера — Сакса, в которой различные генераторы гиперповерхности  $\mathcal{I}^+$  могут смещаться независимо. Если бы  $\tilde{\mathcal{M}}$  было бы только

асимптотически плоским, то  $I^+$  могла бы быть сингулярной. Такой ситуации следовало бы ждать в любом случае, когда материя присутствует на бесконечности в будущем. Иначе говоря,  $I^+$  была бы не сингулярной, только если вся материя, присутствовавшая когда-либо в системе, в конечном счете излучалась бы в виде полей с нулевой массой покоя. В отношении  $I^0$  положение еще хуже. Так как  $I^0$  сингулярна в случае решения Шварцшильда, она оказалась бы сингулярной для любой асимптотически плоской системы с ненулевой массой. Таким образом, неоднородная группа Лоренца, по-видимому, в общем случае не может фигурировать в качестве группы асимптотической симметрии для асимптотически плоского пространства — времени.

## ЛИТЕРАТУРА

- Bateman H., Proc. Lond. Math. Soc., 8, 223 (1910).  
 Bergmann P. G., Phys. Rev., 124, 274 (1961).  
 Bondi H., Cosmology, Cambridge, 1952.  
 Bondi H., van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K., Proc. Roy. Soc., A269, 21 (1962).  
 Buchdahl H. A., Nuovo Cimento, 11, 496 (1959).  
 Cunningham E., Proc. Lond. Math. Soc., 8, 77 (1910).  
 Fierz M., Helv. Phys. Acta, 13, 45 (1940).  
 Hogarth J. E., Proc. Roy. Soc., A267, 365 (1962).  
 McLennan J. A., Jr., Nuovo Cimento, 10, 1360 (1956).  
 Newman E. T., Penrose R., Journ. Math. Phys., 3, 566 (1962).  
 Newman E. T., Unti T. W., Journ. Math. Phys., 3, 891 (1962).  
 Penrose R., Ann. of Phys., 10, 171 (1960).  
 Penrose R., Null Hypersurface Initial Data for Classical Fields of Arbitrary Spin and for General Relativity, preprint 1961 (будет напечатано в расширенном виде).  
 Penrose R., Proceedings of the Conference on Theory of Gravitation (1962), Warszawa, 1964.  
 Penrose R., Phys. Rev. Lett., 10, 66 (1963).  
 Penrose R., Report to the Cornell «Nature of time» Meeting (будет опубликовано).  
 Rindler W., Month. Nat. Roy. Astr. Soc., 116, 662 (1956).  
 Robinson I., Trautman A., Proc. Roy. Soc., A265, 463 (1962).  
 Sachs R. K., Proc. Roy. Soc., A264, 309 (1961).  
 Sachs R. K., Proc. Roy. Soc., A270, 103 (1962).  
 Sachs R. K., Phys. Rev., 128, 2851 (1962).  
 Schrodinger E., Expanding Universes, Cambridge, 1956.  
 Sciamma D. W., Proc. Roy. Soc., A273, 484 (1963).  
 Trautman A., Bull. Acad. Polon. Sci., 6, 403, 407 (1958).

# 6. ИЗОМЕТРИЧЕСКОЕ ПОГРУЖЕНИЕ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

А. Ф р и д м а н

A. F r i e d m a n, Rev. Mod. Phys., 37, 201 (1965)

Дается обзор результатов дифференциальной геометрии, касающихся проблемы погружения искривленного пространства — времени в псевдоевклидово пространство.

## I. В в е д е н и е

Недавние работы в физике элементарных частиц связывают внутренние симметрии элементарных частиц относительно несильных взаимодействий с симметриями обобщенной кривизны пространства — времени. Математический аспект этой проблемы состоит, таким образом, в том, чтобы получить информацию относительно класса погружений различных четырехмерных релятивистских метрик; рассматриваемые погружения являются изометрическими и гладкими и имеют либо локальный, либо глобальный характер.

Математическая литература содержит многочисленные результаты по локальным (изометрическим) погружениям, но лишь немногие из них могут представлять интерес в связи с проблемой определения класса погружений для метрик рассматриваемого типа. Что касается глобальных погружений, то здесь есть несколько совсем свежих результатов, но они относятся только к положительно определенным метрикам.

В этом сообщении я дам обзор большинства известных результатов по глобальным погружениям, а также некоторых результатов по локальным погружениям, которые, может быть, окажутся полезными в применении к релятивистским метрикам.

## II. Глобальное изометрическое погружение

В этом разделе мы рассмотрим изометрическое погружение риманова многообразия  $V_n$  размерности  $n$  в эвклидово пространство  $E_m$  размерности  $m$  с метрикой  $ds^2 =$

$= dx_1^2 + \dots + dx_m^2$ . Мы говорим, что  $V_n$  принадлежит классу  $C^p$  ( $p \geq 1$ ), если локальные координаты  $V_n$  связаны друг с другом  $p$  раз непрерывно дифференцируемыми функциями. Говорят, что метрика  $V_n$  принадлежит классу  $C^p$ , если в локальных координатах компоненты метрического тензора ( $p - 1$ ) раз непрерывно дифференцируемы. Наконец, если многообразию  $V_n$  принадлежит классу  $C^p$  и если его метрика также принадлежит классу  $C^p$ , то мы говорим, что  $V_n$  есть риманово многообразие класса  $C^p$ . Говорят, что погружение принадлежит классу  $C^p$ , если определяющие его функции  $p$  раз непрерывно дифференцируемы.

В случае погружений класса  $C^p$  ( $p \leq 2$ ) риманов тензор кривизны для исходного многообразия не определен и на самом деле может не существовать (поскольку для его определения необходимы производные первого и второго порядков от метрического тензора). По этой причине естественно рассматривать только погружения класса  $C^p$  с  $p \geq 3$ . Однако я упомяну некоторые результаты относительно погружений класса  $C^1$  по той причине, что размерность вмещающего (или объемлющего) пространства удивительно мала.

**ТЕОРЕМА 1.** Любое компактное риманово многообразие  $V_n$  класса  $C^1$  (с границей или без границы) допускает изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_{2n}$ . Любое некомпактное риманово многообразие класса  $C^1$  допускает изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_{2n+1}$ .

Фактически справедливы более общие результаты. Прежде чем установить их, введем два понятия. „Короткое погружение“ (*short embedding*) есть погружение, которое в каждой точке не удлиняет линейный элемент. Точка  $P$  во вмещающем пространстве принадлежит предельному множеству погружения многообразия  $V_n$  тогда и только тогда, когда в  $V_n$  существует расходящаяся последовательность, отображение которой сходится к  $P$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Если компактное риманово многообразие  $V_n$  класса  $C^1$  (с границей или без границы) допускает погружение класса  $C^1$  в  $E_k$  при  $k \geq n + 1$ , то оно также допускает изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_k$ .

Если некомпактное риманово многообразие  $V_n$  класса  $C^1$  допускает короткое погружение класса  $C^1$  в  $E_k$ ,  $k \geq \geq n + 1$ , не пересекающее свое предельное множество, то оно допускает также изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_k$ .

Согласно известным теоремам Уитни о погружениях [22], посылки теоремы 2 всегда выполняются при  $k = 2n$  и  $k = 2n + 1$  соответственно в компактном и некомпактном случаях. Таким образом, теорема 1 вытекает из теоремы 2.

Теорему 1 установил Нэш [1], а теорему 2 Нэш доказал [1] в более слабой форме  $k \geq n + 2$ ; в приведенной здесь форме ее доказал Куипер [2]. Из теоремы 2 вытекает:

**СЛЕДСТВИЕ 1.** Для каждой точки риманова многообразия  $V_n$  класса  $C^1$  существует окрестность, допускающая изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_{n+1}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 2.** Плоский  $n$ -тор (т. е. метрическое произведение  $n$ -окружностей) допускает изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_{n+1}$ .

**СЛЕДСТВИЕ 3.** Гиперболическое пространство  $H_n$  [т. е. пространство  $E_n$ , снабженное метрикой  $ds^2 = = \frac{4}{3} (dq^2 + \varphi(q) d\sigma^2)$ , где  $d\sigma$  — евклидов элемент поверхности на единичной сфере в пространстве  $E_n$ ,  $q$  — радиальное расстояние и  $\varphi(q) = (\text{sh } cq)^2/c^2$ ] допускает изометрическое погружение класса  $C^1$  в  $E_{n+1}$ .

Обратимся к погружениям класса  $C^p$  ( $p \geq 3$ ).

**ТЕОРЕМА 3.** Любое компактное риманово многообразие класса  $C^p$  ( $p \geq 3$ ) допускает изометрическое погружение класса  $C^p$  в  $E_m$ , где  $m = \frac{1}{2}n(3n + 11)$ . То же самое верно и для некомпактных многообразий, но с  $m = \frac{1}{2}n(n + 1) \times \times (3n + 11)$ .

Эта теорема установлена Нэшем [3]. Величина  $m$  кажется слишком высокой, но до настоящего времени не известно успешных попыток понизить эту верхнюю границу в общем случае. Для частного случая гиперболического пространства  $H_n$  Блансула [4] получил в явном

виде изометрическое погружение класса  $C^\infty$  в  $E_{6n-5}$  при  $n > 2$  и в  $E_6$  при  $n = 2$ .

Теперь приведем в некотором смысле противоположный результат, т. е. дающий нижнюю границу для  $m$ .

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть компактное риманово многообразие  $V_n$  класса  $C^4$  обладает следующими свойствами: в каждой точке  $V_n$  существует  $q$ -плоскость, такая, что в ней все кривизны по всем двумерным направлениям  $\leq 0$ . Тогда  $V_n$  не допускает изометрического погружения класса  $C^4$  в любое  $E_m$  с  $m \leq n + q - 1$ .

Так, в частности, плоский  $n$ -тор не допускает изометрического погружения  $C^4$  в  $E_{2n-1}$  (он, конечно, допускает изометрическое погружение класса  $C^\infty$  в  $E_{2n}$ ). Полезно сравнить этот результат со следствием 2.

Теорему 4 установили Черн и Куипер [5] для случая  $q = 2, 3$  и Отзуки [6] для общего случая любого  $q$ . Частный случай плоского  $V_n$  был ранее доказан Томпкинсом [7]. Отзуки [8, 9] получил также некоторые другие связанные с этой проблемой результаты. Так, для  $n = q = 2$  он дал пример компактной поверхности с везде отрицательной гауссовой кривизной, допускающей изометрическое погружение в  $E_m$  с  $m = n + q = 4$ . Он также показал, что если условие, наложенное на кривизну (в теореме 4), распространяется только на одну точку, а  $q = n$ , то существует изометрическое погружение класса  $C^4$  в  $E_{2n-2}$ .

В доказательствах всех предыдущих теорем необходима положительная определенность метрики; теоремы теряют силу, если метрика неопределенна. Мы проиллюстрируем это как раз на примере теоремы 4. Доказательство ее опирается на следующую геометрическую идею.

Пусть  $V_n$  есть подмногообразие  $E_m$ , и пусть  $O$  — фиксированная точка в  $E_m$ . При перемещении точки  $P$  по  $V_n$  евклидово расстояние  $\overline{OP}$  достигает максимума в некоторой точке  $P_0$ . Следовательно, в точке  $P_0$  многообразии должно быть «вогнутым в сторону точки  $O$ », и это будет налагать некоторое «условие положительности» на риманов тензор кривизны в точке  $P_0$ . Чтобы это условие не противоречило допущению об отрицательности



кривизн по двумерным направлениям в  $P_0$ , размерность  $m$  должна быть достаточно велика (т. е.  $m \geq n + q - 1$ ).

Ясно, что в случае индефинитной метрики, даже если в некоторой точке  $P_0$  будет существовать локальный максимум  $\overline{OP}$ , многообразие не обязательно должно быть «вогнутым» в точке  $P_0$ , как раньше.

### III. Локальное изометрическое погружение

В этом разделе имеются в виду исключительно локальные погружения.

**ТЕОРЕМА 5.** Любое риманово многообразие  $V_n$  с аналитической положительно определенной метрикой допускает аналитическое и изометрическое погружение в  $E_m$ , где  $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ .

Эта теорема установлена Жане [10], Картаном [11] и Бурстиним [12]. Рассмотрим теперь  $V_n$  с неопределенной метрикой. Обозначение  $V_n(p, q)$  здесь указывает, что метрический тензор имеет  $p$  положительных и  $q$  отрицательных собственных значений ( $p + q = n$ ). Евклидово пространство с метрикой  $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \dots - dx_n^2$  обозначается как  $E_n(p, q)$ , где  $q = n - p$ . Наконец, положим  $V_n(n, 0) = V_n$ .

**ТЕОРЕМА 6.** Любое риманово многообразие  $V_n(p, q)$  с аналитической метрикой допускает аналитическое и изометрическое погружение в  $E_m(r, s)$ , где  $m = \frac{1}{2}n(n+1)$ , а  $r, s$  — любые заданные целые числа, удовлетворяющие условию  $r \geq p, r \geq q$ .

Эта теорема установлена Фридманом [13].

Начиная с этого момента, мы рассматриваем только изометрические и достаточно гладкие погружения. Полезно ввести следующие понятия.

Пусть  $k_0$  — наименьшее неотрицательное целое число, такое, что  $V_n(p, q)$  допускает погружение в  $E_{n+k_0}(p, q + k_0)$ . Для каждого  $k$  из  $0 \leq k \leq k_0$  мы определим  $k$ -й класс погружения многообразия  $V_n(p, q)$  как наименьшее число  $N_k$ , такое, что  $V_n(p, q)$  допускает погружение в  $E_{n+Nk}(p + a_k, q + k)$ , где  $a_k + k = N_k$ . Класс погружения многообразия  $V_n(p, q)$  определяется как  $\min_{0 \leq k \leq k_0} N_k$ .

Согласно теореме 6,  $N_k \leq \frac{1}{2}n(n-1)$  для всех  $k$ .

ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА. *Определить  $N_k$  для данного  $V_n(p, q)$ .*

Во многих случаях специальных релятивистских метрик ( $n = 4$ ) верхние границы известны (и не превышают 6). По поводу последних результатов и обсуждений, а также для ссылок см. диссертацию Розена [14]. Кроме того, Фуджитана, Икеда и Матсумото [15] рассмотрели погружение обобщенных шварцшильдовских полей в  $E_6(p, q)$ .

Чтобы определить, имеет место или нет равенство  $N_k = 0$ , достаточно проверить, равен риманов тензор кривизны тождественно нулю или нет (см., например, [16]).

Для случая определенных метрик Томас [17] и Розенскон [18] дали алгебраический критерий, позволяющий установить, равен или не равен класс погружения 1. Пользование этим критерием, однако, сопряжено с довольно пространными выкладками (вычислением большого числа детерминантов). С минимальными изменениями их метод обобщается на случай неопределенных метрик. Таким образом, всегда есть надежный (хотя и утомительный) способ выяснить, имеет место равенство  $N_k = 1$  или нет. Но в ряде случаев существуют некоторые крайне простые необходимые (или достаточные) условия, позволяющие сразу узнать это. Мы приведем результат Схоттена и Стройка [19], который может служить примером на подобные необходимые условия.

**ТЕОРЕМА 7.** *Если тензор Риччи для  $V_n(p, q)$  равен нулю, то  $N_k \neq 1$ .*

Некоторое обобщение работ Томаса на классы погружения  $> 1$  дал Аллендорфер [20]. Он рассматривал только  $V_n$ , но его результат несомненно допускает обобщение и на  $V_n(p, q)$ . Он доказал следующую теорему:

**ТЕОРЕМА 8.** *Если в каждой точке в  $V_n$  первое нормальное пространство имеет размерность  $q$ , а  $\text{тип} \geq 3$ , то  $V_n$  допускает погружение в  $E_{n+q}$ .*

Первое нормальное пространство определяется следующим образом. Предположим, что  $V_n$  уже погружено в некоторое  $E_{n+p}$  ( $p > q$ ) [это всегда возможно при  $p = \frac{1}{2}n(n-1)$ ] и задается там уравнениями  $y^i = y^i(x^\alpha)$ . Тогда первое нормальное пространство есть векторное пространство, образуемое векторами  $Y_{\alpha\beta}$  с компонентами

$$Y_{\alpha\beta}^i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial y^i}{\partial x^\gamma}.$$

Определение типа довольно сложно. Тип всегда  $\leq [n/q]$ . Так как в теории относительности  $n = 4$ , то теорему 8 можно применить только в случае  $q = 1$ . Таким образом, ее полезность сводится просто к достаточному условию для равенства класса погружения единице.

Мы закончим примером, когда  $N_k \neq N_h$  при  $k \neq h$ . Напомним сначала следующий факт (см. [16]).

Если  $V_n(p, q)$  имеет постоянную кривизну, то его класс погружения равен 1, т. е. существует пространство  $E_{n+1}(r, s)$  с  $r \geq p$ ,  $s \geq q$ , такое, что  $V_n(p, q)$  (локально) изометрично части гиперсферы в  $E_{n+1}(r, s)$ . Поэтому  $N = \min_{0 \leq h < h_0} N_h = 1$ .

Возьмем теперь  $V_n$  с постоянной отрицательной кривизной. Как доказал Либер [21],  $V_n$  допускает погружение в  $E_{2n-1}$ , но не в  $E_{2n-2}$ , т. е.  $N_0 = n - 1$ , тогда как  $N = 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nash J., Ann. Math., 60, 383 (1954).
2. Kuiper N. H., Ned. Acad. Wetensch. Proc. Ser., A58-Indig. Math., 17, 546, 683 (1955) [перевод см. в сборнике «Математика», 1, 3, 17 (1957)].
3. Nash J., Ann. Math., 63, 20 (1955).
4. Blansula D., Monatsh. Math., 59, 217 (1955).
5. Chern S. S., Kuiper N. H., Ann. Math., 56, 422 (1952).
6. Otsuki T., Proc. Japan. Acad., 29, 99 (1953).
7. Tompkins C., Duke Math. Journ., 5, 58 (1939).
8. Otsuki T., Math. Journ. Okayama Univ., 3, 95 (1954).
9. Otsuki T., Math. Journ. Okayama Univ., 5, 95 (1956).
10. Janet M., Ann. Soc. Polon. Math., 5, 38 (1926).
11. Cartan E., Ann. Soc. Polon. Math., 6, 1 (1927).
12. Бурстин С., Мат. сборник, 38, 74 (1931).
13. Friedman A., Journ. Math. Mech., 10, 625 (1961).
14. Rosen J., Ph. D. Thesis, Hebrew Univ., Jerusalem, 1964 (будет опубликовано).
15. Fujitana T., Ikeda M., Matsumoto M., Journ. Math. Kyoto Univ., 1, 43, 63, 255 (1961—1962).
16. Эйзенхарт Л., Риманова геометрия, ИЛ, 1952.
17. Thomas T. Y., Acta Math., 67, 169 (1936).
18. Розенсон Н. А., Известия АН СССР, 7, 253 (1943).
19. Schouten J. A., Struik D. J., Am. Journ. Math., 43, 213 (1921).
20. Allendoerfer C. B., Am. Journ. Math., 61, 633 (1939).
21. Либер Е., ДАН СССР, 55, 291 (1947).
- 22\*. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1957.

# 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

Ч. Мизнер

(Лекции, прочитанные в 1963 г. в летней школе теоретической физики при Гренобльском университете, Лез-Уш, Франция)

Ch. Misner, in «Relativity, Groups and Topology»,  
ed by C. DeWitt, B. DeWitt, New York — London, 1964, p. 881

## Введение

Мои лекции будут посвящены главным образом изложению с несколько новой точки зрения начал дифференциальной геометрии и в простейшей форме — некоторых сведений по алгебраической топологии. Элементы алгебраической топологии появляются в лекции VI, § 6, при изучении методами алгебры вопросов, связанных с дифференциальными уравнениями. В частности, мы докажем тот факт, что в отсутствие источников из уравнения Максвелла для  $F_{\mu\nu}$  следует (в топологически евклидовом пространстве) возможность получить  $F_{\mu\nu}$  из векторного потенциала.

## О литературе

По теме моих лекций в качестве основных пособий целесообразно взять книги Уилмора [1], Ауслендера и МакКензи [2] и Хокинга и Янга [3]<sup>1)</sup>. Рекомендуется начать чтение первой из них с главы V. Прочитав главы V — VIII, вы найдете очень интересной главу IV, посвященную глобальным теоремам о 2-поверхностях в 3-пространстве. Первые три главы, посвященные локальной теории, трудны для чтения, поскольку в них не используются тензорные обозначения. Нужно отметить, что в книге Хокинга и Янга излагается как теоретико-множественная топология, так и алгебраическая топология.

<sup>1)</sup> Поскольку этих книг нет в русском переводе, мы со своей стороны рекомендуем имеющиеся на русском языке монографии [9—23].— *Прим. ред.*

Было бы логично изучать эти книги не в том порядке, как они перечислены, а в противоположном. Однако многим будет легче начать с римановой геометрии, математический аппарат которой более знаком, а затем уже перейти к подробному изучению дифференцируемых многообразий, к которым этот аппарат относится, и только после этого разобраться, как бесконечность и сходимость могут иметь смысл даже тогда, когда не используются локальные координатные системы и дифференцируемые функции. Но при таком порядке нужно быть готовым встретиться с дифференцируемыми многообразиями и окрестностями прежде, чем эти понятия будут аксиоматизированы. Я буду излагать материал именно в таком нелогичном порядке.

## 1. Примеры

Мы начнем с определения нескольких дифференцируемых многообразий (аксиомы будут изложены позднее), использующихся в дальнейшем для иллюстрации различных идей по мере их появления.

Структура дифференцируемого многообразия определяется в основном двумя объектами: точечным множеством  $M$  и определенным на  $M$  множеством действительных функций  $\mathcal{F}$ , которое называется множеством дифференцируемых функций. Аксиомы для дифференцируемого многообразия обеспечивают для  $M$  и  $\mathcal{F}$  разумные свойства.

Нашим первым примером является тор  $T^2$ , или «поверхность пончика». Пусть  $x = (x_1, x_2)$  есть пара действительных чисел, т. е. точка в евклидовой плоскости  $E^2$ . Тогда  $x$  можно использовать для определения квадратной решетки  $[x]$ , являющейся множеством всех точек  $y = (y_1, y_2)$ , таких, что и  $y_1 - x_1$  и  $y_2 - x_2$  есть целые числа. Точечным множеством для тора является множество, типичный элемент которого есть как раз подобная решетка  $[x]$ . Символически мы записываем это так:

$$T^2 = \{[x] \mid x \in E^2\},$$

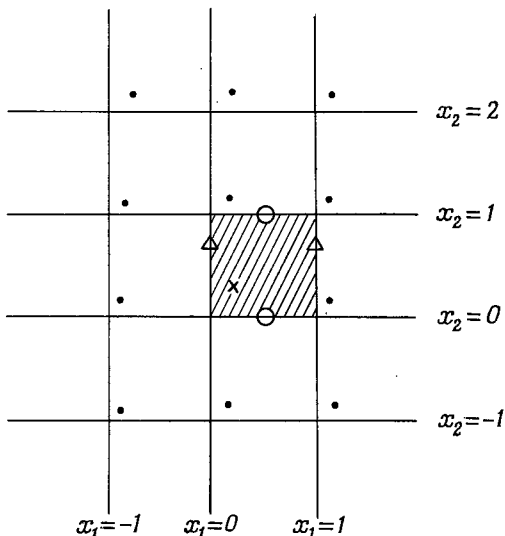
где

$$[x] = \{y \in E^2 \mid (y_1 - x_1, y_2 - x_2) = (m, n); \\ m, n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Данное определение  $T^2$  позволяет также определить отображение

$$\pi : E^2 \rightarrow T^2 : x \rightarrow [x]. \quad (1.1)$$

Эта строка символов означает, что  $\pi$  есть функция, определенная на  $E^2$  [так что  $\pi(x)$  определена для каждой



Фиг. 1. Отображение  $\pi$  ставит в соответствие точке  $x$  в плоскости множество точек, включающее, кроме  $x$ , также все отмеченные в каждом квадрате точки. Тор  $T^2$  содержит ровно одну точку для каждого подобного множества. Этим свойством обладают все точки заштрихованного квадрата, кроме тех, которые лежат на его границе, но мы можем склеить граничные точки  $\Delta$  на квадрате [принадлежащие одной и той же структуре  $\pi(\Delta)$ ] и аналогично точки  $\circ$ , сворачивая таким образом квадрат в тор (см. фиг. 2).

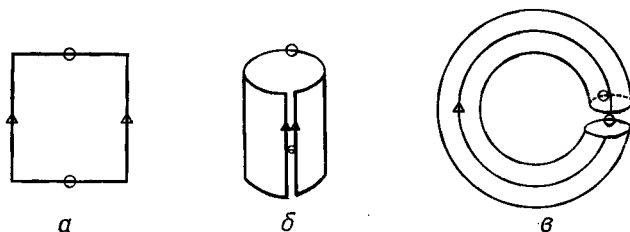
точки  $x$  из  $E^2$ ] со значениями, заключенными в  $T^2$  [так что  $\pi(x)$  при любом  $x$  из  $E^2$  должна быть некоторой точкой из  $T^2$ ], именно, функция, которая точке  $x \in E^2$  ставит в соответствие величину  $\pi(x) = [x] \in T^2$  (фиг. 1).

В таких обозначениях на торе можно было бы определить постоянную функцию  $f(p) = 0$ , записав ( $R$  — множество действительных чисел)

$$f: T^2 \rightarrow R: p \rightarrow 0.$$

Самими обозначениями подразумевается, что  $p$  есть точка  $[x]$  из  $T^2$ .

Теперь мы можем проиллюстрировать примером тензорный закон преобразования, показав, как преобразуются

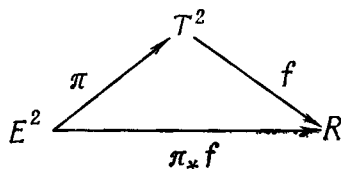


Ф и г. 2. Квадрат после надлежащего склеивания его границ становится тором.

скаляры при отображении  $\pi: E^2 \rightarrow T^2$  (фиг. 2). Пусть  $f$  — действительная функция, определенная на  $T^2$ ,  $f: T^2 \rightarrow R$ . Тогда можно определить новую функцию  $\pi_* f$  как

$$\pi_* f: E^2 \rightarrow R: x \rightarrow f(\pi(x)).$$

Это определение можно также представить просто в виде диаграммы



так как по принятому соглашению каждая диаграмма считается коммутативной: именно, любые два пути между одними и теми же двумя множествами отвечают одному и тому же преобразованию. В применении к нашей диаграмме это означает, что  $\pi_* f = f \circ \pi$ . Кружок обозначает

функцию от функции:  $f \circ g : x \rightarrow f(g(x))$ . Поскольку на приведенной диаграмме  $f$  есть произвольная действительная функция, то мы имеем правило  $\pi_*$ , ставящее в соответствие каждой (скалярной) функции  $f$  на  $T^2$  функцию  $\pi_* f$  на  $E^2$ ;  $\pi_*$  есть закон преобразования скаляров, соответствующий  $\pi$ -отображению многообразия  $E^2$  на многообразии  $T^2$ .

В действительности  $T^2$  пока что не является дифференцируемым многообразием, поскольку мы еще не знаем, как выделить дифференцируемые функции на  $T^2$ . На  $E^2$  дифференцируемые функции  $\mathcal{F}(E^2)$  есть функции класса  $C^\infty$ , известные из элементарного анализа:  $f \in \mathcal{F}(E^2)$  означает, что  $f(x_1, x_2)$  обладает непрерывными частными производными любого порядка. Определим множество дифференцируемых функций на  $T^2$  следующим образом:

$$\mathcal{F}(T^2) = \{f \mid \pi_* f \in \mathcal{F}(E^2)\}.$$

Хотя мы позднее и сможем убедиться, что это определение удовлетворяет аксиомам для дифференцируемого многообразия, все же подобный метод введения дифференцируемых функций не является типичным. [Например, если бы мы попытались использовать его для определения комплексной аналитической структуры на  $T^2$ , то  $\mathcal{F}(T^2)$  содержало бы только постоянные, поскольку  $\pi_* f$  периодична, а постоянные являются единственными дважды периодическими аналитическими функциями.]

Закон преобразования скаляров может быть получен соответственно для любого отображения  $\varphi : M \rightarrow N$  одного многообразия на другое; снова в виде диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \\
 \varphi \nearrow & & \searrow f \\
 M & & R \\
 & \varphi_* f & 
 \end{array} \tag{1.2}$$

Так как  $M$  и  $N$  оба есть дифференцируемые многообразия, то тем самым определены соответствующие множества дифференцируемых ( $C^\infty$ ) функций  $\mathcal{F}(M)$  и  $\mathcal{F}(N)$ .



Отображение  $\varphi : M \rightarrow N$  дифференцируемо, если для каждой  $f \in \mathcal{F}(N)$  имеем  $\varphi^*f \in \mathcal{F}(M)$ . Это определение сводит понятие дифференцируемых отображений на многообразиях к понятию дифференцируемых действительных функций.

Заметим, что закон преобразования  $\varphi^*$  действует в направлении, обратном отображению  $\varphi$ , которое его индуцирует:

$$M \xrightarrow{\varphi} N,$$

$$\mathcal{F}(M) \xleftarrow{\varphi^*} \mathcal{F}(N).$$

По историческим причинам подобное обратное поведение закона преобразования названо *ковариантным*; функции преобразуются ковариантно. В качестве примера объекта, подчиняющегося контравариантному закону преобразования, рассмотрим кривую

$$c : R \rightarrow M : t \rightarrow x = c(t).$$

Эта кривая в  $M$ , очевидно, индуцирует кривую  $\varphi^*c = \varphi \circ c$  в  $N$  согласно диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 c \nearrow & & \searrow \varphi \\
 R & & N \\
 & \varphi^*c &
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

Таким образом, если  $\mathcal{C}_M$  — множество кривых в  $M$ , т. е. множество всех дифференцируемых отображений многообразия  $R$  действительных чисел на многообразии  $M$ , то мы можем добавить к нашему перечню также *контравариантный* закон преобразования

$$M \xrightarrow{\varphi} N,$$

$$\mathcal{F}(M) \xleftarrow{\varphi^*} \mathcal{F}(N),$$

$$\mathcal{C}_M \xrightarrow{\varphi^*} \mathcal{C}_N.$$
(1.4)

Подобная противоположная терминология вызвана тем, что в качестве стандарта определения взято преобразо-

вание координат, являющихся функциями, вместо того, чтобы взять в качестве основы закон преобразования точек.

После этого экскурса в законы преобразования рассмотрим другой пример: 2-сферу  $S^2$ . Она определяется как поверхность в трехмерном евклидовом пространстве  $E^3$

$$S^2 = \{x \in E^3 \mid \|x\|^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Дифференцируемые функции на  $S^2$  могут быть определены тем же методом, что и таковые на  $T^2$ . Пусть  $M$  будет  $E^3$  с выколотой точкой  $(0, 0, 0)$ ; тогда дифференцируемые на  $M$  функции определены в элементарном анализе. Определим проектирование

$$\pi : M \rightarrow S^2 : x \rightarrow \frac{x}{\|x\|}, \quad (1.5)$$

которое отображает выходящий из начала координат луч в  $E^3$  на точку, в которой этот луч пересекает  $S^2$ . Функция  $f$  на  $S^2$  называется дифференцируемой тогда и только тогда, когда  $\pi_* f$  есть дифференцируемая функция класса  $C^\infty$  на  $M$ . В точности так же  $n$ -мерная сфера  $S^n$  может быть определена как геометрическое место точек  $x$  в евклидовом  $(n + 1)$ -пространстве, удаленных на единичное расстояние  $\|x\| = 1$  от начала координат.

Трехмерная сфера представляет особый интерес, поскольку на ней можно определить структуру группы Ли, которую я опишу в терминах кватернионов. Кватернионом  $q$  называется четверка действительных чисел  $w, x, y, z$ , которые обычно располагаются следующим образом:

$$q = w + ix + jy + kz.$$

Величины  $i, j, k$  отмечают расположение чисел в этой строке и позволяют свести алгебраические операции над кватернионами к нескольким основным правилам вдобавок к таким очевидным условиям, как

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Сопряженный к  $q$  кватернион определяется следующим образом:

$$q^* = w - ix - jy - kz; \quad (1.6)$$

с его помощью находят действительную часть кватерниона

$$\operatorname{Re} q \equiv w = \frac{1}{2} (q + q^*)$$

и определяют его модуль  $|q|$

$$|q|^2 \equiv w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = qq^* = q^*q.$$

Каждый ненулевой кватернион имеет обратный, определяемый как  $q^{-1} = q^*/|q|^2$  и удовлетворяющий соотношению  $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ . Произведение кватернионов вообще говоря не коммутативно, например,  $ij = -ji$ ; поэтому величину, сопряженную произведению двух кватернионов, определяют правилом

$$(pq)^* = q^*p^*.$$

Трехмерная сфера  $S^3$ , очевидно, является геометрическим местом точек, удовлетворяющих требованию

$$S^3 = \{q \mid |q| = 1\}.$$

Пусть  $p, q \in S^3$ , тогда

$$|pq|^2 = pq(pq)^* = pqq^*p^* = p|q|^2|p^*| = |q|^2|p|^2 = 1,$$

так что  $pq \in S^3$ . (любое действительное число, и тем самым  $|q|^2$  коммутирует со всеми кватернионами:  $p|q|^2 = |q|^2p$ ). Кроме того, поскольку  $q^{-1} = q^*$ , так что  $|q^{-1}| = |q| = 1$ , то и  $q^{-1} \in S^3$ . Таким образом, правило умножения кватернионов определяет на  $S^3$  структуру группы. Мы теперь получим группу вращений  $SO(3)$  как представление этой  $S^3$ -группы. отождествим евклидово 3-пространство  $E^3$  с множеством чисто мнимых кватернионов:

$$E^3 = \{q \mid \operatorname{Re} q = 0\}.$$

Заметим, что для  $q \in E^3$  квадрат модуля  $|q|$  есть как раз евклидова норма:

$$|q|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad q \in E^3.$$

Теперь поставим в соответствие каждой точке  $p \in S^3$  преобразование

$$A(p) : q \rightarrow pqp^{-1}. \quad (1.7)$$

Заметим, во-первых, что это преобразование *линейно* по  $q$ ; затем убедимся, что оно отображает  $E^3$  на себя: имеем

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(pqp^{-1}) &= pqp^{-1} + (pqp^{-1})^* = pqp^* + (pqp^*)^* = \\ &= pqp^* + pq^*p^* = p(2\operatorname{Re} q)p^* = 0, \end{aligned}$$

коль скоро  $q \in E^3$ . Далее  $A(p)$  сохраняет длину в  $E^3$ , ибо  $|pqp^{-1}| = |p| \cdot |q| \cdot |p^{-1}| = |q|$ , поскольку  $|p| = 1$ . Преобразование  $A(p)$  линейно и сохраняет длину в пространстве  $E^3$ . Следовательно,  $A(p)$  есть ортогональное преобразование  $A(p) \in O(3)$ . Очевидно, что любую точку  $p \in S^3$  можно соединить с точкой 1 кривой  $c(t)$ , но тогда  $A(c(t))$  является кривой, соединяющей  $A(p)$  с тождественным преобразованием, так что действительно  $A(p) \in SO(3)$ , т. е.  $\det A(p) = 1$ . Простое вычисление, именно

$$(p_1 p_2) q (p_1 p_2)^{-1} = p_1 (p_2 q p_2^{-1}) p_1^{-1},$$

показывает, что отображение

$$A : S^3 \rightarrow SO(3) : p \rightarrow A(p)$$

является гомоморфизмом

$$A(p_1 p_2) = A(p_1) A(p_2).$$

Если мы убедились, что  $A(S^3) = SO(3)$ , т. е. что  $A$  отображает  $S^3$  на  $SO(3)$ , то, заметив, что только точкам  $p = \pm 1$  сферы  $S^3$  соответствует тождественный элемент группы  $SO(3)$ , мы тем самым докажем, что  $S^3$  является двулистным покрытием  $SO(3)$ . Для того чтобы найти кватернион  $p$  в  $S^3$ , соответствующий данному вращению из  $SO(3)$ , рассмотрим операцию  $A(p)$ , где

$$p = e^{i\alpha/2} = \cos \frac{1}{2} \alpha + i \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

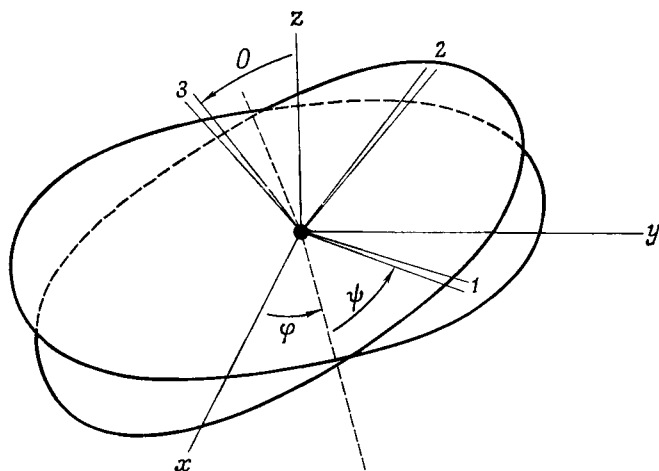
(Эти функции определены своими разложениями в ряд.) Очевидно,  $A(p)i = i$ , так что ось  $x$  в  $E^3$  остается инвариантной при этом преобразовании. Для  $j$  и  $k$  найдем:

$$\begin{aligned} A(p)j &= \left( \cos \frac{1}{2} \alpha + i \sin \frac{1}{2} \alpha \right) j \left( \cos \frac{1}{2} \alpha - i \sin \frac{1}{2} \alpha \right) = \\ &= \left( \cos \frac{1}{2} \alpha + i \sin \frac{1}{2} \alpha \right)^2 j = (\cos \alpha + i \sin \alpha) j = \\ &= j \cos \alpha + k \sin \alpha, \end{aligned}$$

аналогично

$$A(p)k = -j \sin \alpha + k \cos \alpha,$$

так что  $A(p)$  при  $p = \exp(i\alpha/2)$  есть поворот на угол  $\alpha$  вокруг оси  $x$ . Ясно, что  $p = \exp(k\alpha/2)$  дает поворот на угол  $\alpha$  относительно оси  $z$ . Произвольный поворот



Фиг. 3. Углы Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  описывают поворот, который переведет оси  $x y z$  в положение  $1 2 3$ .

можно описать углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ; на фиг. 3 изображена тройка координатных осей  $x y z$ , повернутая в положение  $1 2 3$ , описываемое углами Эйлера  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Этот поворот будет порождаться кватернионом

$$p = \exp \left\{ \frac{1}{2} k\varphi \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} i\theta \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} k\psi \right\} \quad (1.8)$$

или тремя последовательными поворотами: на угол  $\psi$  относительно (фиксированной) оси  $z$ , на угол  $\theta$  относительно оси  $x$  и на угол  $\varphi$  относительно оси  $z$ .

Рассмотрим кривую

$$c: R \rightarrow S^3: t \rightarrow \exp \left\{ -\frac{1}{2} kt \right\}, \quad (1.9)$$

проходящую при  $t = 0$  через точку  $1 \in S^3$  и удовлетворяющую условию  $c(t + 4\pi) = c(t)$ . При отображении  $p \rightarrow q_0 p$  сферы  $S^3$  на себя эта кривая преобразуется в кривую, проходящую через  $q_0$ , именно в  $p(t) = q_0 \exp(-kt/2)$ . Беря различные  $q_0$  на  $S^3$ , мы получим семейство кривых, причем через каждую точку  $S^3$  проходит по крайней мере одна из них. Одним из интересных свойств этого семейства кривых является то, что оно *левоинвариантно*, т. е. если каждую кривую  $p(t)$  преобразовать посредством умножения слева,  $p(t) \rightarrow qp(t)$  с фиксированным  $q \in S^3$ , то мы вновь получим то же самое семейство. Еще более удивительным свойством является то, что никакие две прямые семейства не пересекаются; самое большее, чего можно добиться, это того, что они совпадут после подгонки значения параметра ( $t \rightarrow t - t_0$ ). Доказать это можно, опираясь на тот факт, что каждая кривая  $p(t) = q_0 \exp(-kt/2)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{2}pk, \quad (1.10)$$

решения которого, как известно, определяются единственным образом начальными условиями  $p = q_0$  при  $t = t_0$ .

Для того чтобы лучше представить себе это семейство, отождествим элементы группы  $SO(3)$  с теми ориентациями твердого тела (ориентация, характеризуемая осями 123, фиг. 3), которые тело приобретет в результате соответствующих поворотов из некоторой исходной ориентации. Тогда, если  $p$  движется по кривой  $p = p_0 \exp(-kt/2)$  ( $t$  возрастает), то соответствующее вращение  $A(p)$  движется по  $SO(3)$  таким образом, что на фиг. 3 меняется только  $\psi$  [ср. с (1.8)]. Когда  $t$  изменяется на  $2\pi$ ,  $A(p)$  возвращается к своему первоначальному значению  $A(-p_0) = A(p_0)$ , а когда  $t$  возрастает на  $4\pi$ ,  $p$  завершает петлю в начальной точке  $p_0$ . Поскольку углы Эйлера  $\theta$  и  $\varphi$  не меняются вдоль этой кривой, то различные петли в  $S^3$  можно задавать расположением 3-репера на фиг. 3, т. е. точкой на  $S^2$ . Каждая точка  $p$  на  $S^3$  соответствует определенному повороту  $A(p)$  и определенной ориентации осей 123 на фиг. 3, в частности определенному положению

$q \in S^2 \subset E^3$  единичного вектора, направленного вдоль оси  $Z$ . Таким образом, мы определили дифференцируемое отображение

$$\pi : S^3 \rightarrow S^2 : p \rightarrow q = p k p^{-1}. \quad (1.11)$$

Для каждого фиксированного  $q \in E^2$  множеством точек  $\pi^{-1}(q)$  на  $S^3$ , отображающихся в  $q$ , является окружность  $S^1$ . (Это отношение можно описать, сказав, что  $\pi$  представляет  $S^3$  как пучок над  $S^2$  со слоем  $S^1$ .)

До сих пор мы не вводили каких-либо координат на рассматриваемых многообразиях; однако возможность покрытия любой достаточно малой области многообразия некоторой системой локальных координат является существенной и характерной чертой дифференциального многообразия. Я проиллюстрирую понятие локальных координат на  $S^2$ . Во-первых, заметим, что в общем случае невозможно ввести одну координатную систему на всем многообразии сразу. Точки сферы  $S^2$  часто определяют с помощью угла широты  $\theta$  и угла долготы  $\varphi$ , так что стандартная метрика на  $S^2$  записывается в виде

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.12)$$

Эта попытка обойтись всего одной координатной системой удобна, когда геометрия многообразия настолько хорошо знакома, что можно не обращать внимания на очевидные формальные трудности, такие, как сингулярности

$$g^{\varphi\varphi} = (\sin \theta)^{-2} \rightarrow \infty$$

при

$$\theta \rightarrow 0; \pi.$$

Но когда в разрешении трудностей, связанных с вопросами дифференцируемости, приходится полагаться в большей мере на формальную математику, чем на интуицию, мы должны ограничить понятие координатной системы таким образом, чтобы компоненты дифференцируемого тензорного поля всегда были дифференцируемыми функциями. Тогда первейшим требованием к выбору координат будет дифференцируемость функций, что не имеет места ни для  $\theta$ , ни для  $\varphi$  в полюсах сферы,  $\theta = 0, \pi$ .

Так как точка  $x \in S^2$  есть тройка  $x_1, x_2, x_3$  действительных чисел, то мы можем определить три действи-

тельные функции правилами

$$x(\mathbf{x}) = x_1, \quad y(\mathbf{x}) = x_2, \quad z(\mathbf{x}) = x_3.$$

Поскольку каждая из этих функций дифференцируема во всех точках  $\mathbf{x}$  из  $E^3$ , то это верно и для  $\mathbf{x} \in S^2$ . В подходящих областях можно взять пары этих функций в качестве локальных координат на  $S^2$ . Например, пусть

$$N = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid z(\mathbf{x}) > 0\}.$$

Тогда каждой точке  $\mathbf{x}$  на этой «северной» полусфере  $N$  соответствует единственная точка  $(x, y) \in E^2$  в соответствии с правилом

$$(x, y) \leftrightarrow \mathbf{x} = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Таким образом, пара функций  $x, y$  на  $N$  определяет однозначное соответствие между  $N$  и областью  $(x_1^2 + x_2^2 < 1)$  в  $E^2$ . Для каждой функции  $f$ , определенной на  $S^2$  или  $N$ , существует соответствующая функция  $f_N$ , определенная на этой части  $E^2$  по правилу

$$f_N(x, y) = f(\mathbf{x}).$$

Допустимые координатные системы и дифференцируемые функции на многообразиях должны всегда быть совместны в том смысле, что  $f(\mathbf{x})$  дифференцируема тогда и только тогда, когда ее представление в локальной координатной окрестности  $U$ ,  $f_U(x^1, x^2, \dots, x^n)$  есть функция класса  $C^\infty$ , заданная в соответствующей области  $E^n$ . Но это налагает условия совместности на различные координатные окрестности. На  $S^2$  мы могли бы определить другую координатную окрестность, используя  $x$  и  $z$  в качестве координат в области

$$E = \{\mathbf{x} \in S^2 \mid y(\mathbf{x}) > 0\}.$$

При этом точке  $(x, z) \in E^2$  ставится в соответствие точка

$$\mathbf{x} = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z)$$

из  $E \subset S^2$ . Каждая функция  $f$  на  $S^2$  имеет соответствующее представление в координатной окрестности  $E$

$$f_E(x, z) = f(\mathbf{x}).$$



В частности, там, где  $E$  и  $N$  перекрываются,  $N$ -координаты обладают  $E$ -представлениями

$$\begin{aligned}x_N &= x_E, \\y_N &= \sqrt{1 - x_E^2 - z_E^2},\end{aligned}$$

и обратно,

$$\begin{aligned}x_E &= x_N, \\z_E &= \sqrt{1 - x_N^2 - y_N^2}.\end{aligned}$$

Эти уравнения, таким образом, определяют одно-однозначное дифференцируемое преобразование некоторой области евклидова пространства  $E^2$

$$(x_E, z_E) \rightarrow (x_N, y_N)$$

и его дифференцируемое обращение. Дифференцируемую структуру многообразия  $M$  обычно определяют, покрывая его координатными окрестностями  $(U, x^i)$ . Координаты  $x^i$  на окрестности  $U \subset M$  должны давать одно-однозначное отображение  $x \rightarrow (x^1(x), x^2(x), \dots, x^n(x))$  окрестности  $U$  на некоторую область  $E^n$ . Там, где две окрестности  $(U, x^i)$  и  $(V, y^i)$  перекрываются, на  $U \cap V$  определено преобразование между областями  $E^n$

$$(x^1(x), x^2(x), \dots, x^n(x)) \leftrightarrow (y^1(x), y^2(x), \dots, y^n(x)).$$

Это преобразование должно быть дифференцируемым в обоих направлениях, т. е. все функции  $x^i(y^1, \dots, y^n)$  и  $y^i(x^1, \dots, x^n)$  должны быть функциями класса  $C^\infty$ . Поскольку преобразование обратимо, якобиан  $\partial x^i / \partial y^j$  будет иметь отличное от нуля значение. Очевидным следствием этих условий совместности является тот факт, что если функция  $f(x)$  на  $M$  представлена в некоторой окрестности  $(U, x^i)$  функциями класса  $C^\infty$ :

$$f(x) = f_U(x^1, x^2, \dots, x^n) \text{ на } U,$$

то она представлена в  $(V, y^i)$  функциями  $f_V(y^1, y^2, \dots, y^n)$ , принадлежащими классу  $C^\infty$  по крайней мере на той части  $E^n$ , которая соответствует в координатах  $y^i(x)$  пересечению  $U \cap V$ . Таким образом, дифференцируемые функции на  $M$  можно определить как такие функции  $f(x)$ , представимые в каждой координатной

окрестности некоторыми функциями  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , которые дифференцируемы в соответствующей области  $E^n$ .

Покрывание множества  $M$  множеством перекрывающихся координатных окрестностей, которые в областях перекрытия удовлетворяют условиям совместности, определяет дифференцируемую структуру на  $M$ , а также и топологию на  $M$ . Каждое подмножество множества  $M$ , которое лежит в отдельной координатной окрестности и соответствующий образ которого в  $E^n$  есть открытое подмножество множества  $E^n$ , считается открытым в  $M$ . Эти множества образуют базис для открытых множеств многообразия  $M$  и позволяют определить непрерывные функции на  $M$  и другие топологические понятия. Все дифференцируемые функции будут непрерывными.

## II. Контравариантные векторы

Ниже я всегда буду предполагать, что нам дано некоторое дифференцируемое многообразие  $M$  и что все функции, отображения, кривые и т. д. дифференцируемы. Так как каждая точка  $x \in M$  принадлежит какой-либо координатной окрестности, то в каждой точке можно ввести координаты  $x^i(x)$  для локальных вычислений. Однако лучше избегать использования координат в основных определениях, чтобы не приходилось явным образом вводить полную систему частично перекрывающихся координатных окрестностей всякий раз, когда речь пойдет о каком-либо глобальном понятии, например о векторном поле, определенном на всем многообразии.

Весьма важное понятие касательного вектора возникает из рассмотрения двумерной поверхности, погруженной в трехмерное евклидово пространство. В этом случае стрелка, направленная по касательной к поверхности в какой-то точке, дает такое же независимое от координат представление о векторе, как, например, в ньютоновской механике, когда мы говорим об импульсе частицы.

Чтобы не представлять себе многообразия только как погруженные в евклидовы пространства, мы стремимся сделать эту стрелку бесконечно малой, так чтобы она не выходила за пределы многообразия во вмещающее пространство. Два эквивалентных определения, даваемые

ниже, оба исходят из стремления представить касательный вектор как некоторый особый математический объект, независимый от выбора координат и в определенном смысле ассоциируемый с той стрелкой, о которой мы только что говорили. В первом определении кривая на многообразии задает некоторое направление-стрелку, а затем сводит ее к бесконечно малому направленному отрезку с помощью перехода к инфинитезимальным свойствам кривой, которые определяются производными первого порядка.

**ОПРЕДЕЛЕНИЯ.** *Кривая, проходящая через точку  $x_0$  многообразия  $M$ , есть отображение  $c: R \rightarrow M: t \rightarrow c(t)$ , такое, что  $c(0) = x_0$ .*

*Производная функции  $f$  вдоль кривой  $c$  есть число*

$$c[f] \equiv \left\{ \frac{d}{dt} f(c(t)) \right\}_{t=0}. \quad (2.1)$$

Две кривые  $c_1$  и  $c_2$ , проходящие через точку  $x_0$ , имеют одну и ту же касательную  $c_1 \equiv c_2$  тогда и только тогда, когда для всех функций  $f$ , определенных в некоторой окрестности точки  $x_0$ , имеет место равенство

$$c_1[f] = c_2[f]. \quad (2.2)$$

После этих предварительных определений определим касательный вектор в точке  $x_0$  как общее свойство всех кривых, проходящих в одном и том же направлении и с одинаковой скоростью через точку  $x_0$  (как то определяется функциями  $f$ ). (Математический прием, применяемый для обобщения некоторого общего свойства на основе многочисленных примеров, представляет собой отношение эквивалентности, такое, как  $c_1 \equiv c_2$ , данное выше.)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Касательный вектор  $v$  в точке  $x_0$  есть класс эквивалентности кривых, проходящих через  $x_0$  и имеющих одну и ту же касательную, т. е.*

$$v = \{c \mid c \equiv c_1 \text{ для некоторой фиксированной } c_1\}.$$

Если  $c \in v$ , то мы говорим, что  $v$  касателен к кривой  $c$  в точке  $x_0$ . Касательный вектор  $v$  может быть использован в качестве дифференциального оператора для функции  $f$ , если определить  $v[f]$ , производную от  $f$  вдоль  $v$ , уравнением

$$v[f] = c[f], \quad c \in v. \quad (2.3)$$

В силу уравнения (2.2) здесь можно иметь в виду любую кривую, касательная к которой есть  $\mathbf{v}$ .

Связь приведенного определения с предложенным раньше (компонентно-координатным) можно усмотреть, записав (2.2) в локальной координатной системе  $x^i$ ; если  $x^i = c_1^i(t)$  и  $x^i = c_2^i(t)$  — две кривые, то эта запись будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} \left(\frac{dc_1^i}{dt}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{x_0} \left(\frac{dc_2^i}{dt}\right)_0. \quad (2.4)$$

Таким образом, все кривые с одной и той же касательной характеризуются одними и теми же значениями величин  $(dx^i/dt)_0$ ; эта совокупность чисел, связанных с координатной системой  $x^i$ , выделяет класс эквивалентности  $\mathbf{v}$ .

Как дифференциальный оператор тангенциальный вектор  $\mathbf{v}$  обладает следующими свойствами:

1) оператор  $\mathbf{v}$  — линейный,

$$\mathbf{v}[af + bg] = a\mathbf{v}[f] + b\mathbf{v}[g]; \quad (2.5a)$$

2)  $\mathbf{v}$  определяет «операцию дифференцирования»,

$$\mathbf{v}[fg] = f(x_0)\mathbf{v}[g] + g(x_0)\mathbf{v}[f]. \quad (2.5b)$$

Здесь  $a, b$  — действительные числа, а  $f, g$  — произвольные функции, определенные каждая в некоторой окрестности точки  $x_0$ . В следующем абзаце это последнее замечание упрощается до « $f, g \in \mathcal{F}(x_0)$ ».

Хотя область определения функции часто играет важную роль, нередко бывает удобным игнорировать это обстоятельство. Когда речь идет о локальных проблемах, такой подход становится корректным, если ввести следующее определение:

Две функции  $f_1$  и  $f_2$  имеют одно и то же ядро в точке  $x_0$ , если каждая определена в некоторой окрестности  $U_1, U_2$  точки  $x_0$  и если на окрестности  $U \subset U_1 \cap U_2$  имеем  $f_1 = f_2$ .

Получим теперь множество  $\mathcal{F}(x)$  ядер дифференцируемых функций в точке  $x$ , введя следующее определение:

*Ядро  $f$  дифференцируемой функции в точке  $x$*  есть класс эквивалентности функций, имеющих одно и то же ядро в точке  $x$ . (Мы намеренно используем то же обозначение для ядер, что и для функций, поскольку различие между ними, когда оно важно, будет ясно из контекста.)

Для дифференциальных операторов  $v$ , соответствующих касательным векторам, верны, очевидно, аксиомы линейности

$$(av_1 + bv_2)[f] = av_1[f] + bv_2[f]. \quad (2.6)$$

По этой причине удобно следующее определение:

*Касательный вектор  $v$*  определяет линейное дифференцирование на  $\mathcal{F}(x)$ , т. е. отображение  $v : \mathcal{F}(x) \rightarrow R$ , удовлетворяющее уравнениям (2.5). Из этого определения, которое, как мы убедимся, эквивалентно предыдущему, очевидно, что касательные в точке  $x$  векторы образуют векторное пространство над полем действительных чисел.

Чтобы установить эквивалентность наших определений, введем локальную координатную систему  $x^i$ . Тогда кривые, проходящие через точку  $x_0$  в направлении координатных линий, определяют касательные векторы

$$e_i : f \rightarrow \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{x_0}. \quad (2.7)$$

Мы хотим через эти дифференциальные операторы  $e_i$  вычислить  $v[f]$  для некоторого данного  $v$ , удовлетворяющего уравнениям (2.5). Сначала представим  $f(x)$  в форме, позволяющей использовать правило умножения (2.5б):

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + [f(x) - f(x_0)] = \\ &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0^i + t(x^i - x_0^i)) dt = \\ &= f(x_0) + (x^i - x_0^i) \int_0^1 f_{,i}(x_0 + t(x - x_0)) dt, \\ f(x) &= f(x_0) + (x^i - x_0^i) g_i(x). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь  $f_{,i}$  означает частную производную (в координатном представлении) функции  $f$  по ее  $i$ -му аргументу, а

$$g_i(x) = \int_0^1 f_{,i}(x_0^k + t(x^k - x_0^k)) dt$$

удовлетворяет условию

$$g_i(x_0) = f_{,i}(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_{x_0} = e_i[f]. \quad (2.9)$$

Действуя оператором  $v$  на уравнение (2.8), получаем

$$v[f] = v[x_0^i] e_i[f], \quad (2.10)$$

где были использованы (2.5), (2.9) и тот факт, что производная постоянной равна нулю:

$$v[a] = 0. \quad (2.11)$$

[Наш результат следует из уравнений (2.5), поскольку при  $b=0$  в (2.5а) мы имеем  $v[af] = av[f]$ , тогда как из (2.5б) при  $g=a$  следует, что

$$v[af] = f(x_0) v[a] + av[f] = av[f],$$

или  $f(x_0) v[a] = 0$ . Равенство (2.11) верно в силу того, что мы можем положить  $f(x_0) = 1$ .]

Чтобы доказать эквивалентность двух данных определений касательных векторов, мы должны показать, что любой оператор  $v$  касателен к некоторой кривой. Уравнение

$$x^i(t) = x_0^i + tv[x_0^i]$$

определяет такую кривую.

В уравнении (2.10) числа

$$v^i \equiv v[x_0^i] \quad (2.12)$$

есть компоненты вектора  $v$  относительно базиса  $e_i$ ; поскольку любой касательный вектор можно представить как линейную комбинацию (2.10) векторов  $e_i$ , мы видим, что векторное пространство  $T(x_0)$  касательных в точке  $x_0$  векторов является  $n$ -мерным. Используя для этих базисных векторов более конкретное обозначение

$$e_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}, \quad (2.13)$$

можно переписать уравнение (2.10) в виде

$$\mathbf{v} = v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}, \quad (2.14)$$

где подчеркивается операторный характер  $\mathbf{v}$ , тогда как запись

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \quad (2.15)$$

дает просто обычное разложение вектора по базису. Если решено перейти к некоторому другому базису  $\mathbf{b}_{k'}$ , то разложение

$$\mathbf{e}_k = A_k^{k'} \mathbf{b}_{k'} \quad (2.16)$$

после подстановки в (2.15) дает

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{e}_k = v^k A_k^{k'} \mathbf{b}_{k'} = v^{k'} \mathbf{b}_{k'},$$

определяя таким образом закон преобразования компонент вектора

$$v^{k'} = A_k^{k'} v^k. \quad (2.17)$$

Хотя базис для  $T(x_0)$  нет нужды вводить обязательно с помощью координатной системы, отметим, что в случае, когда  $\mathbf{e}_k = \partial/\partial x^k$  и  $\mathbf{b}_{k'} = \partial/\partial y^{k'}$  являются ортами координатных осей, (2.16) и (2.17) сводятся к классическому правилу

$$A_k^{k'} = \left( \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^k} \right)_{x_0}. \quad (2.18)$$

Предыдущий закон преобразования относился к случаю, когда имелось одно фиксированное многообразие и в точке  $x$  один фиксированный вектор  $\mathbf{v}$ , а преобразованию подвергались координатная система и (или) базис  $T(x)$ . Компоненты  $v^i$  вектора  $\mathbf{v}$  при этом изменялись, хотя сам вектор  $\mathbf{v}$  оставался постоянным. Теперь мы обратимся к совершенно иной ситуации: рассмотрим два многообразия и отображение между ними  $\varphi: M \rightarrow N$ . Задавая вектор  $\mathbf{v}$  в точке  $x \in M$ , мы определим соответствующий вектор  $\varphi_* \mathbf{v}$  в точке  $\varphi(x) \in N$ . Здесь вновь существуют два эквивалентных определения соответственно тому, на какое определение касательного вектора мы

будем опираться. Если  $c$  есть кривая, проходящая через точку  $\hat{x}$  и имеющая касательную  $v$ , то  $\varphi^*c \equiv \varphi \circ c$  есть кривая, проходящая через  $\varphi(x) \equiv \varphi\hat{x}$ ; мы определим ее касательную как  $\varphi^\#v$  и можем при желании убедиться, что  $\varphi^\#v$  не зависит от того, какая кривая  $c \in v$  была использована. Это определение  $\varphi^\#$  позволяет нам представить себе, как преобразуются векторы, вообразив, как преобразование  $\varphi : M \rightarrow N$  сдвигает точки кривой, вычерчивающей бесконечно малый направленный отрезок, который, как мы видели, изображает  $v$ . Несколько более элегантно определение дифференциального оператора  $\varphi^\#v$  уравнением

$$(\varphi^\#v)[f] = v[\varphi * f], \quad (2.19)$$

или эквивалентной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & \varphi^* & \\
 \mathcal{F}(x) & \longleftarrow & \mathcal{F}(\varphi x) \\
 & \searrow v & \swarrow \varphi^\#v \\
 & R & 
 \end{array} \quad (2.20)$$

которая сводит определение  $\varphi^\#$  к предыдущему случаю — определению  $\varphi^*$ . Ввиду того что преобразование  $\varphi^\#$  отвечает контравариантному закону преобразования, мы во избежание излишнего обилия символов, начиная с этого момента, будем в дальнейшем обозначать его как  $\varphi^*$ ; часто используется другое обозначение  $d\varphi_x$ , поскольку это отображение является бесконечно малым вариантом  $\varphi$ , отображающим только касательное в точке  $x$  пространство, а не все многообразие. Итак,

$$\varphi^* \equiv d\varphi_x : T(x) \rightarrow T(\varphi x). \quad (2.21)$$

Хотя в общей теории относительности довольно необычно рассматривать одновременно две вселенные с имеющими смысл отображениями между ними, такие преобразования, индуцированные отображениями многообразий, тем не менее возникают. Наиболее часто рассматривается отображение включения для пространственноподобной гиперповерхности. В качестве примера рассмотрим включение

$$i : S^2 \rightarrow E^3 : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_2, x_3),$$



которое указывает, что тройку чисел нужно понимать не как точку на  $S^2$ , а как точку  $E^3$ .

Хотя это отображение может показаться тривиальным, тем не менее отображения, которые оно индуцирует на тензоры различного ранга, позволяет выяснить, когда тензорное поле на многообразии индуцирует тензорное поле (естественным не зависящим от координат образом) на подмногообразии и наоборот. Общее правило состоит в том, что *ковариантное* тензорное поле на многообразии индуцирует соответствующие поля на подмногообразиях (мы до сих пор имели дело с этим только на примере функций).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Векторное поле  $\mathbf{v}$  на  $M$  есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке  $x$  касательный в точке  $x$  вектор  $\mathbf{v}_x$ :

$$\mathbf{v} : x \rightarrow \mathbf{v}_x \in T(x). \quad (2.22)$$

Мы говорим, что  $\mathbf{v}$  дифференцируемо, если и только если для каждой дифференцируемой функции  $f \in \mathcal{F}(M)$  функция

$$\mathbf{v}[f] : x \rightarrow \mathbf{v}_x[f] \quad (2.23)$$

дифференцируема. Множество дифференцируемых векторных полей на  $M$  обозначается как  $\mathcal{D}^1(M)$ . Заметим, что поскольку координаты  $x^i$  есть дифференцируемые функции, то и компоненты любого дифференцируемого векторного поля

$$v^i = \mathbf{v}[x^i] \quad (2.24)$$

также дифференцируемы. Векторные поля координатного базиса  $\mathbf{e}_i = (\partial/\partial x^i) \in \mathcal{D}^1(U)$  также дифференцируемы (поскольку  $\partial f/\partial x^i$  дифференцируемы), поэтому из равенства

$$\mathbf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.25)$$

ясно, что для дифференцируемости  $\mathbf{v}$  достаточно, чтобы его компоненты  $v^i$  были дифференцируемыми функциями.

Отметим, что векторное поле  $\mathbf{v}$  на  $M$  не индуцирует с необходимостью поле на  $\varphi(M)$ , если соответствие (2.21) точечное. В самом деле,  $\varphi(M)$  не обязательно должно быть подмногообразием  $N$ . Типичным примером такой задачи может служить случай кривой  $c : R \rightarrow M$ . На  $R$

существует стандартное векторное поле  $e = \partial/\partial t \equiv d/dt$ . Отображение  $\varphi_t^* = d\varphi_t$  индуцирует на  $c(t)$  вектор  $d\varphi_t(e)$ , касательный к  $c$  в этой же точке. Но если  $c$  самопересекается, так что  $c(t_1) = c(t_2)$ , то  $d\varphi_{t_1}(e)$  и  $d\varphi_{t_2}(e)$  не будут, естественно, совпадать.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Скобкой Ли, или коммутатором двух касательных векторных полей  $v_1$  и  $v_2$ , называется оператор  $[v_1, v_2]$ , определяемый как

$$([v_1, v_2])[f] = v_1[v_2[f]] - v_2[v_1[f]]. \quad (2.26)$$

Легко видеть, что этот оператор осуществляет линейное дифференцирование в смысле уравнения (2.5), так что мы получили способ комбинировать два векторных поля для образования третьего,  $[v_1, v_2]$ . Напротив, линейный оператор  $f \rightarrow v_1[v_2[f]]$  не удовлетворяет уравнению (2.5б).

**ЗАДАЧА.** Выразить компоненты  $w^i$  вектора  $w = [u, v]$  через  $u^j$  и  $v^h$  некоторой координатной системы [см. (2.25)] и показать снова, что  $w$  контравариантный вектор, проверив закон преобразования его компонент при изменении системы координат.

Для векторных полей  $e_i = \partial/\partial x^i$  в любой координатной окрестности имеем

$$[e_i, e_j] \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0, \quad (2.27)$$

так как частные производные коммутируют. В противоположность этому квантовомеханические операторы момента

$$iL_i = \varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (2.28)$$

образуют совокупность векторных полей на  $E^3$ , не коммутирующих друг с другом.

Существует сравнительно мало дифференциальных операций, которые можно выполнять над тензорами, не введя метрику или какую-либо другую структуру сверх той, которой обладает само по себе дифференцируемое многообразие. Можно ожидать, что в качестве одной из таких операций скобка Ли будет играть весьма важную роль. Помимо ее использования в теории групп Ли, скобка Ли

фигурирует в формулировке (теорема Фробениуса) условий интегрируемости, необходимых для существования подмногообразия, к которому касательны данные векторные поля  $u, v, \dots$ ; она измеряет изменение векторного поля, индуцированное движением многообразия, порождаемым каким-то другим векторным полем. Справедлива также следующая

**ТЕОРЕМА.** Если векторные поля  $v_1, v_2, \dots, v_k$  линейно независимы в каждой точке и удовлетворяют условиям

$$[v_i, v_j] = 0,$$

то каждая точка  $x$  содержится в некоторой координатной окрестности  $(U, x^i)$ , в которой

$$v_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \dots, k \leq n).$$

Эта теорема, доказывать которую мы сейчас не будем, показывает, что координатные системы характеризуются линейной независимостью и уравнениями (2.27).

**ПРИМЕР** на  $S^2$ . Пусть  $(\partial/\partial\varphi)_q$  — касательная к кривой

$$t \rightarrow e^{1/2kt} q e^{-1/2kt}$$

в точке  $q \in S^2$  (т. е.  $\operatorname{Re} q = 0, |q| = 1$ ). Легко видеть, что векторное поле  $\partial/\partial\varphi$  дифференцируемо, так как для этого требуется просто, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi} \equiv \left[ \frac{d}{dt} f(e^{1/2kt} q e^{-1/2kt}) \right]_{t=0} \quad (2.29)$$

была дифференцируемой функцией по  $q$  везде, где  $f$  дифференцируема. Заметим также, что при  $q = \pm k$  предыдущая формула дает  $\partial f/\partial\varphi = 0$ , так что  $\partial/\partial\varphi$  исчезает на полюсах сферы. Таким образом,  $\partial/\partial\varphi$  не может служить элементом какой-либо координатной системы (не является  $\partial/\partial x^i$  для какой-либо системы координат  $x^1 x^2$ ), покрывающей тот или другой полюс, так как нулевой вектор не может входить в какую бы то ни было линейно независимую совокупность векторов.

Мы получили векторные поля, исходя из систем кривых; теперь мы сделаем обратное. Пусть  $v$  — векторное поле. В локальных координатах оно представляется ком-

понентами  $v^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , являющимися функциями класса  $C^\infty$ . Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc^i}{dt} = v^i(c^1, c^2, \dots, c^n), \quad (2.30)$$

которая имеет единственное решение  $c^i(t; x_0^k, t_0)$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$c^i(t_0; x_0, t_0) = x_0^i. \quad (2.31)$$

Уравнения

$$x^i = c^i(t; x_0, t_0)$$

определяют кривую

$$t \rightarrow x = c(t; x_0, t_0), \quad (2.32)$$

касательный вектор которой есть  $v$ . Решения системы (2.30) могут существовать только для некоторых малых, но конечных значений  $t - t_0$ . Тем не менее кривая (2.32) может быть продолжена, если дифференциальные уравнения, справедливые в двух различных координатных окрестностях, на пересечении этих окрестностей определяют одну и ту же кривую (2.32). Это приводит для каждой точки  $x_0$  к единственной максимально связной кривой с касательным вектором  $v$ , начинающейся при  $t = t_0$  в точке  $x_0$ . Вообще говоря, эта кривая определена только для некоторого конечного интервала изменения переменной  $t$ , включающего  $t_0$ .

ПРИМЕРЫ.

1. С переменными  $x, y$  — стандартными координатами на  $E^2$  — связано векторное поле  $\partial/\partial x$ . На открытом подмногообразии  $M^2 = E^2 - (0, 0)$  кривые  $(x, y) = (-1 + t, 0)$ , касательные к  $\partial/\partial x$ , не могут быть продолжены за пределы интервалов  $-\infty < t < 1$  и  $1 < t < \infty$ .

2. На  $R = E^1$  стандартным векторным полем является  $d/dx$ . Пусть  $v = x^2(d/dx)$ . Тогда кривые

$$x = c(t; x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad (2.33)$$

касательные к  $v$ , продолжаютя от  $t=0$ , где  $x=x_0$ , только на интервал  $-\infty < t < 1/x_0$  (при  $x_0 > 0$ ) или  $1/x_0 < t < +\infty$  (при  $x_0 < 0$ ).

Семейство кривых  $c(t; x_0)$ , касательных к  $v$  и удовлетворяющих условию  $c(0; x_0) = x_0$ , можно использовать, чтобы определить отображения

$$\exp\{tv\}: x \rightarrow c(t; x) \quad (2.34)$$

на подмножествах многообразия  $M$  (здесь  $t$  не слишком велико). Обозначения через экспоненты оправданы ввиду того, что

$$\exp\{tv\} \cdot \exp\{t_0v\} = \exp\{(t+t_0)v\}. \quad (2.35)$$

Чтобы доказать это, найдем отображения точки  $x_0$ , следуя сначала левой, затем правой стороне равенства (2.35). Мы получим

$$c(t; c(t_0; x_0)) = c(t+t_0; x_0). \quad (2.36)$$

Обе стороны этой формулы удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению  $d/dt = v$ , компоненты которого даются уравнением (2.30), и одинаковым начальным условиям при  $t=0$ ; тем самым равенство установлено.

Зададимся на  $M$  некоторым векторным полем  $v$ , и пусть  $x = c(t; x_0)$  с  $c(0; x_0) = x_0$  есть семейство максимальных траекторий поля  $v$ . Обозначим через  $\tau(x_0)$  наименьшую верхнюю грань тех значений  $t$ , для которых определены оба значения  $c(\pm t, x_0)$ . Тогда или  $\tau(x_0)$  становится произвольно малой, когда  $x_0$  перемещается по  $M$ , или же  $\tau(x) = \infty$  для всех  $x$ . Для доказательства предположим противное, именно, что наибольшая нижняя грань  $\tau(x)$  есть

$$\inf \tau(x) = \tau > 0. \quad (2.37)$$

Тогда  $\exp\{tv\}$  определена везде на  $M$  при  $|t| < \tau$ . Но из равенства

$$\exp\left\{\frac{1}{2}tv\right\} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}tv\right\} = \exp\{tv\}$$

ясно, что  $\exp\{tv\}$  определена везде (в силу левой части) при  $|t| < 2\tau$ , что противоречит (2.37).

Векторные поля, траектории которых все допускают продолжение до бесконечных значений  $t$ , можно назвать *полными* векторными полями. Для такого векторного поля отображение  $\exp \{tv\}$  определено на всем многообразии  $M$ , причем для всех значений  $t$ . Так как  $\exp \{-tv\}$  благодаря (2.35) позволяет получить обратное отображение, то мы видим, что каждое полное векторное поле определяет группу автоморфизмов дифференцируемого многообразия. По этой причине иногда говорят, что векторные поля определяют «инфинитезимальные преобразования», и считают  $v$  инфинитезимальным оператором движения, при котором точки смещаются вдоль кривых касательных к  $v$ . Так, векторное поле  $\partial/\partial\varphi$  на  $S^2$ , о котором говорилось в приведенном выше примере, порождает повороты сферы  $S^2$  относительно оси  $z$ . Зная элементы теоретико-множественной топологии, можно было бы доказать, что любое векторное поле на компактном многообразии полно.

Возьмем два векторных поля  $u$  и  $v$  и определим  $\varphi_t = \exp \{-tu\}$ . Это отображение будет определено на достаточно малых окрестностях любой данной точки  $x$ , коль скоро  $t$  взято достаточно малым. Таким образом, векторное поле  $\varphi_t^*v - v$  будет определено в некоторой окрестности точки  $x$  опять-таки для достаточно малых  $t$ . Следовательно, векторное поле

$$\mathcal{L}_u v \equiv \left[ \frac{d}{dt} (\varphi_t^* v) \right]_{t=0} \quad (2.38)$$

определено всюду. Очевидно, что  $\mathcal{L}_u v$  измеряет изменения поля  $v$ , вызванные инфинитезимальными движениями вдоль  $u$ . Конструкция  $\mathcal{L}_u v$  называется *производной Ли* от поля  $v$  вдоль  $u$ . Вычисление правой части (2.38) в локальных координатах обнаруживает, что

$$\mathcal{L}_u v = [u, v]. \quad (2.39)$$

Выполняя это вычисление, мы должны будем подчеркнуть, что  $\varphi_t^*v$  означало у нас векторное поле, порождаемое  $v$ , и было определено только благодаря тому, что  $\varphi_t$  есть одно-однозначное отображение. Вектор  $(\varphi_t^*v)_{x_0}$  в точке  $x_0$  получается из вектора  $v_{x_t}$  в точке  $x_t = \varphi_{-t}(x_0)$  при помощи отображения  $\varphi^*$ , даваемого уравнением (2.21),

и единственность его проистекает из того факта, что  $x_t$  является *единственной* точкой  $x$ , удовлетворяющей условию  $\varphi_t(x) = x_0$ . Действуя на функцию  $f \in \mathcal{F}(x_0)$ , этот вектор дает

$$(\varphi_t^* \mathbf{v})_{x_0} [f] = \varphi_t^* \mathbf{v}_{x_t} [f] = \mathbf{v}_{x_t} [\varphi_t^* f] = \mathbf{v}_{x_t} [f \circ \varphi_t].$$

Мы можем, таким образом, написать

$$\begin{aligned} (\varphi_t^* \mathbf{v})_{x_0} [f] &= v^i(x_t) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_t} f(\varphi_t(x)) = \\ &= v^i(\varphi_{-t}(x_0)) \left[ f_{,k}(\varphi_t(x)) \frac{\partial \varphi_t^k(x)}{\partial x^i} \right]_{x=x_t=\varphi_{-t}(x_0)} = \\ &= v^i(\varphi_{-t}(x_0)) f_{,k}(x_0) \left[ \frac{\partial \varphi_t^k(x)}{\partial x^i} \right]_{x=\varphi_{-t}(x_0)}. \end{aligned}$$

После дифференцирования по  $t$  в точке  $t=0$ , учитывая, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_t^i(x)}{\partial t} \right|_{t=0} &= u^i(x), \\ \left. \frac{\partial \varphi_t^i(x)}{\partial x^j} \right|_{t=0} &= \frac{\partial \varphi_0^i(x)}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \end{aligned}$$

получаем уравнение (2.39).

### Теорема Фробениуса

Уравнение

$$\mathcal{L}_u \mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (2.40)$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{w}$  — данные векторные поля, представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка для  $\mathbf{v}$  вдоль каждой кривой, касательной к  $\mathbf{u}$ . Чтобы выделить отчетливее этот факт, перепишем его в локальных координатах:

$$(\mathcal{L}_u \mathbf{v})^i = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]^i = u^h v_{,k}^i - v^k u_{,k}^i \quad (2.41)$$

и затем подставим сюда уравнения  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$  кривой, касательной к  $\mathbf{u}$ :

$$\frac{dv^i}{dt} - u_{,k}^i(c^l(t)) v^k = w^i(c^l(t)). \quad (2.42)$$

Теперь предположим, что нам даны  $K$  линейно независимых в каждой точке векторных полей  $v_1, v_2, \dots, v_K$ , и мы хотим знать, существуют ли  $K$ -мерные гиперповерхности, для которых эти векторы являются касательными. Если бы подобная гиперповерхность существовала, то ее можно было бы рассматривать в свою очередь как образующую многообразие  $\sigma^K$  с  $v_i \in T(\sigma^K)$  и, следовательно,  $[v_i, v_j] \in T(\sigma^K)$ . Таким образом, необходимое условие существования гиперповерхности, касательные пространства которой натянуты на  $v_i$ , заключается в том, что выписанные нами скобки Ли являются линейными комбинациями  $v_i$ :

$$[v_i, v_j] = L_{ij}^k v_k. \quad (2.43)$$

Мы увидим, что это условие также достаточно. Для любой точки  $x_0$  и для  $(t^1, t^2, \dots, t^K) \in E^K$ , достаточно близкой к началу координат, мы можем определить

$$\sigma(t^1, t^2, \dots, t^K) = e^{t^K v_K} \circ \dots \circ e^{t^2 v_2} \circ e^{t^1 v_1} x_0, \quad (2.44)$$

что дает нам параметризованный элемент поверхности, проходящий через  $x_0$ . Согласно этой формуле, поверхность получают, перемещая  $x_0 \equiv \sigma^0$  вдоль кривой  $\sigma^1$ , касательной к  $v_1$ , затем смещая каждую точку этой кривой вдоль траекторий поля  $v_2$  и тем самым образуя 2-поверхность  $\sigma^2$ , затем полученную поверхность перемещая вдоль траекторий поля  $v_3$ , что дает  $\sigma^3$ , и т. д. Таким образом, мы определяем  $\sigma^p$  как  $p$ -мерную поверхность  $\sigma(t^1, t^2, \dots, t^p, 0, 0, \dots, 0)$ . Из уравнения (2.44) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t^p} = v_p \text{ на } \sigma^p, \quad (2.45)$$

где векторы  $\partial/\partial t^i$ , на которые натянуто  $T(\sigma^K)$ , определены в каждой точке  $\sigma^K$  соответствием

$$\frac{\partial}{\partial t^p} : f \rightarrow \frac{\partial}{\partial t^p} f(\sigma(t^1, t^2, \dots, t^K)) \quad (2.46)$$

и поэтому удовлетворяют условию  $[\partial/\partial t^i, \partial/\partial t^j] = 0$ . Мы докажем, что все  $v_i$  касательны к  $\sigma^K$ , методом индукции. Так как  $x_0 \equiv \sigma^0 \subset \sigma^1 \subset \sigma^2 \dots \subset \sigma^K$ , то в силу (2.45) на  $\sigma^0$  имеем  $v_i = \partial/\partial t^i$  для  $i = 1, 2, \dots, K$ ; таким образом, все  $v_i$  касательны к  $\sigma^K$  на  $\sigma^0$ .



ЛЕММА. Если все  $v_i$  касательны к  $\sigma^K$  в каждой точке  $\sigma^{p-1}$ , то они также касательны к  $\sigma^K$  на  $\sigma^p$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_p \mathbf{u}_i = L_{pi}^k \mathbf{u}_k, \quad (2.47)$$

где

$$\mathcal{L}_p \mathbf{u} \equiv [\mathbf{v}_p \mathbf{u}]. \quad (2.48)$$

Рассматриваемые как уравнения, которые должны выполняться вдоль кривых в  $\sigma^p$ , касательных к  $\mathbf{v}^p$ , эти уравнения хорошо определены в пределах многообразия  $\sigma^K$  и могли бы быть записаны через координаты  $t^i$  [см. уравнения (2.42)]. Таким образом, решения  $\mathbf{u}_i$  будут касательными к  $\sigma^K$ , если мы выберем в качестве начальных условий в  $t^p = 0$  (т. е. на  $\sigma^{p-1}$ ) значения  $\mathbf{u}_i = (\mathbf{v}_i)_{t^p=0}$ , которые по исходному предположению касательны к  $\sigma^K$ . Кроме этого решения  $\mathbf{u}_i$ , которое является касательным к  $\sigma^K$  на  $\sigma^p$ , существует в силу (2.43) другое решение  $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$ . Поскольку и то и другое решения имеют одинаковые начальные условия, они совпадают при всех значениях  $t^p$ , доказывая тем самым, что все  $v_i$  касательны к  $\sigma^K$  на  $\sigma^p$ . Это завершает доказательство локальной формулировки теоремы Фробениуса.

ТЕОРЕМА. Пусть  $V^K : x \rightarrow V^K(x)$  — дифференцируемое поле, ставящее в соответствие каждой точке  $x \in M$  некоторое  $K$ -мерное подпространство  $V^K(x)$  пространства  $T(x)$  и обладающее тем свойством, что для любой пары векторных полей  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  на  $V^K$  поле  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  также принадлежит  $V^K$ . Тогда для любой точки  $x_0 \in M$  существует проходящее через нее единственное максимально связанное подмногообразие  $N$ , касательное пространство которого в каждой точке  $x \in N$  есть  $V^K(x)$ .

В нашем доказательстве  $V^K$  представлено локально множеством  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_K$  дифференцируемых векторных полей, на которые натянуто  $V^K$ . Но любой другой базис в  $V^K$  также удовлетворял бы условию интегрируемости (2.43), которое является, таким образом, свойством самого  $V^K$ . Полуглобальные аспекты этой теоремы, устанавливающие, что элементы поверхности ти-

па (2.44) могут быть склеены, образуя многообразие  $N$ , продолжающееся так далеко от  $x_0$ , как это возможно, Аусландер и Маккензи рассматривают в § 8-8 своей книги [2]. Это рассмотрение существенно опирается на единственность ядер поверхностных элементов, касательных к  $V^K$ , которая в свою очередь следует из того факта, что любой такой элемент может быть в подходящей координатной системе  $t^i$  представлен уравнениями  $t^{K+1} = t^{K+2} = \dots = t^n = 0$ . Это последнее вытекает из доказательства, проведенного выше, ибо мы можем, определив поля  $v_{K+1}, v_{K+2}, \dots, v_n$ , дополнить совокупность полей  $v_1, v_2, \dots, v_K$  так, чтобы получить базис в  $T(x)$  для точки  $x$ , находящейся в некоторой окрестности  $U$  точки  $x_0$ . Затем определим координатную систему  $t^i$  соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi(t^1, t^2, \dots, t^n) &= (e^{t^K} v_K \circ \dots \circ e^{t^1} v_1) \circ e^{t^n} v_n \circ \dots \\ &\dots \circ e^{t^{K+1}} v_{K+1} x_0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Предыдущая конструкция, используемая вместе с элементом  $\varphi(0, \dots, 0, t^{K+1}, \dots, t^n)$ , заменяющим исходную точку  $x_0$ , показывает, что каждая поверхность  $t^{K+1} = k^{K+1}, \dots, t^n = k^n$  при (малых) постоянных  $k^i$  касательна к  $V^K$ , так что для каждого вектора  $v$  из  $V^K$  в этой координатной окрестности справедливо соотношение  $v^{K+1} = v^{K+2} = \dots = v^n = 0$ .

Теперь предположим, что  $\tau^K$  есть элемент другой поверхности, проходящей через точку  $x_0$ , с касательным пространством  $V^K$ . В достаточно малой окрестности точки  $x_0$  каждая точка  $x$  на  $\tau^K$  может быть связана с  $x_0$  кривой, лежащей в  $\tau^K \cap V$ , скажем кривой  $t^i(\lambda)$ . Касательная  $dt^i/d\lambda$  к этой кривой лежит в  $V^K$ , так что  $dt^i/d\lambda = 0$  и  $t^i(\lambda) = k^i$  для  $i = K+1, \dots, n$ . Но  $t^i(0) = 0$  и, таким образом,  $k^i = 0$ , откуда ясно, что каждая подобная точка  $x$  элемента  $\tau^K$  лежит также и на  $\sigma^K$ .

ПРИМЕР. Векторные поля  $v_j = iL_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), определенные на  $E^3$  уравнениями (2.28), удовлетворяют соотношениям

$$[v_i, v_j] = -\varepsilon_{ijk} v_k$$

и поэтому определяют интегрируемое касательное поле. Это поле двумерно, ибо  $v_i$  линейно зависимы:

$$x_i v_i = 0.$$

Мы можем легко найти интегральное подмногообразие, определяемое полем 2-плоскостей  $V^2$ , порождаемых  $v_i$ , поскольку, скажем,  $v_3$  можно понимать как оператор, соответствующий бесконечно малым поворотам вокруг оси  $z$ . Тогда операторы  $v_i$  определяют все возможные повороты, начинающиеся из точки  $x_0$ , и будут перемещать  $x_0$  по сфере  $\{x \mid |x| = |x_0|\}$ . Легко убедиться, что  $v_i$  касательны к каждой поверхности вида

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{const},$$

просто получив из (2.28)

$$v_i [r^2] = 2\varepsilon_{ijk} x_j x_k = 0.$$

### Расслоенные пучки

Точечному множеству

$$\mathcal{F}(M) = \{v_x \mid x \in M, v_x \in T(x)\} \quad (2.50)$$

можно придать структуру многообразия; тогда оно называется *касательным пучком* к  $M$ <sup>1)</sup>. Отображение (проектирование)

$$\pi : \mathcal{F}(M) \rightarrow M : v_x \rightarrow x \quad (2.51)$$

будет дифференцируемо. Прообраз точки  $x$  при этом проектировании представляет собой как раз касательное пространство в точке  $x$

$$\pi^{-1}(x) = T(x) \quad (2.52)$$

и является в данном пучке *слоем* над  $x$ . Все слои диффеоморфны друг другу, а в рассматриваемом случае также и  $E^n$ . (*Диффеоморфизм* есть одно-однозначное дифференцируемое отображение, обратное отображение которого также дифференцируемо).

<sup>1)</sup> Следует отметить, что в литературе наряду с термином *пучок* употребляется также термин *расслоенное пространство* (см., например, [16]).— *Прим. ред.*

Каждое векторное поле  $\mathbf{v}$  на  $M$  есть сечение касательного пучка, т. е. дифференцируемое отображение

$$\mathbf{v} : M \rightarrow \mathcal{T}(M), \quad (2.53)$$

удовлетворяющее тому условию, что

$$\pi \circ \mathbf{v} = 1 \quad (2.54)$$

есть тождественное отображение многообразия  $M$  на себя. Так как  $\pi$ , ограниченное до подмножества  $\mathbf{v}(M)$  пучка  $\mathcal{T}(M)$ , является дифференцируемым обращением отображения  $\mathbf{v}$ , то мы видим, что  $\mathbf{v}$  есть одно-однозначное и регулярное погружение многообразия  $M$  в  $\mathcal{T}(M)$ . Глобальные сечения расслоенных пучков часто не существуют, но касательный пучок, конечно, допускает сечение  $\mathbf{v} = 0$ .

Дифференцируемая структура пучка определяется так, что в любой координатной окрестности  $U$  базы  $M$  данный пучок есть прямое произведение. Пусть  $x^i(x)$  — локальные координаты на  $U \subset M$ , тогда любой вектор  $\mathbf{v}_x \in T(x)$  можно единственным образом представить в форме

$$\mathbf{v}_x = v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x ;$$

это дает нам координаты  $v^i$  на слое  $T(x)$ . Множество  $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{T}(M)$  становится координатной окрестностью на  $\mathcal{T}(M)$ , когда мы ставим в соответствие вектору  $\mathbf{v}_x$  координаты

$$\mathbf{v}_x \longleftrightarrow (x^1, x^2, \dots, x^n, v^1, v^2, \dots, v^n).$$

Таким образом,  $\mathcal{T}(M)$  есть  $2n$ -мерное многообразие. Условия перекрывания на  $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$  легко проверяются: они оказываются следствием закона преобразования  $x^i(y^{k'})$  на  $U \cap V$  и соответствующих преобразований координат  $v^i = (\partial x^i / \partial y^{k'}) v^{k'}$  в  $T(x)$ .

### III. Тензоры

Пространство  $T_1(x)$  ковариантных векторов или дифференциальных форм в точке  $x$  определяется как векторное пространство, дуальное касательному пространству  $T(x) \equiv T^1(x)$ . Ковариантный вектор  $\sigma$ , таким образом,

по определению, является линейным функционалом на  $T^1(x)$ :

$$\sigma : T(x) \rightarrow R : v \rightarrow \langle \sigma, v \rangle. \quad (3.1)$$

При этом линейность, конечно, означает, что

$$\langle \sigma, av_1 + bv_2 \rangle = a \langle \sigma, v_1 \rangle + b \langle \sigma, v_2 \rangle. \quad (3.2)$$

Следующие примеры существенны для теории.

**ПРИМЕР 1.** Задав какой-либо базис  $e_i$  пространства  $T^1(x)$ , получим для каждого  $v \in T^1(x)$  единственное разложение

$$v = v^i e_i, \quad (3.3)$$

и, следовательно, существуют  $n$  линейных функционалов  $\omega^i$ , определяемых как

$$\omega^i : v \rightarrow \langle \omega^i, v \rangle = v^i. \quad (3.4)$$

Эти векторы  $\omega^i \in T_1(x)$  фактически образуют базис в пространстве  $T_1(x)$ , так как вследствие линейности  $\sigma$  имеем

$$\begin{aligned} \langle \sigma, v \rangle &= \langle \sigma, v^i e_i \rangle = \langle \sigma, e_i \rangle v^i \equiv \\ &\equiv \sigma_i v^i = \sigma_i \langle \omega^i, v \rangle = \langle \sigma_i \omega^i, v \rangle, \end{aligned}$$

или

$$\sigma = \sigma_i \omega^i, \quad (3.5)$$

где введено определение

$$\sigma_i = \langle \sigma, e_i \rangle. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.5) показывает, что любой вектор  $\sigma$  есть линейная комбинация величин  $\omega^i$ , которые поэтому образуют базис. Соотношение

$$\langle \omega^i, e_j \rangle = \delta_j^i \quad (3.7)$$

характеризует связь между базисами  $\omega^i$  в  $T_1(x)$  и  $e_j$  в  $T^1(x)$ , которые называются *дуальными* друг другу. Все вышеприведенные соотношения носят чисто алгебраический характер; дифференциальная геометрия впервые появляется в следующем примере.

ПРИМЕР 2. Каждая функция  $f \in \mathcal{F}(x)$  определяет элемент  $df \in T_1(x)$  как функционал

$$df: \mathbf{v} \rightarrow \langle df, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}[f], \quad (3.8)$$

который называется дифференциалом или *градиентом* функции  $f$ . Поскольку его компоненты имеют более привычный вид в координатном базисе, отметим, что градиенты  $dx^i$  координатных функций  $x^i$  удовлетворяют вследствие (3.8) соотношению

$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i; \quad (3.9)$$

и образуют поэтому базис, дуальный к базису в  $T^1(x)$ ,

$$\mathbf{e}_i = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x. \quad (3.10)$$

Таким образом, компоненты  $df$  равны

$$(df)_i = \langle df, \mathbf{e}_i \rangle = \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_x, \quad (3.11)$$

так что в качестве следствия из (3.5) имеем равенство

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_x dx^i. \quad (3.12)$$

Операция построения градиента от функции или ядра функций оказывается, таким образом, линейным отображением

$$d: \mathcal{F}(x) \rightarrow T_1(x). \quad (3.13)$$

### Законы преобразования

Отображению  $\varphi: M \rightarrow N$  соответствует индуцированное отображение  $\varphi_*: T_1(x) \leftarrow T_1(\varphi x)$  *ковариантных* векторов в соответствующих точках. Это отображение определяется как

$$\langle \varphi_* \omega_{\varphi x}, \mathbf{v}_x \rangle = \langle \omega_{\varphi x}, \varphi^* \mathbf{v}_x \rangle, \quad (3.14)$$

или коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 T^1(x) & \xrightarrow{\varphi^*} & T^1(\varphi x) \\
 & \searrow \varphi_* \omega & \downarrow \omega \\
 & & R
 \end{array} \quad (3.15)$$

После того как было определено  $\varphi^*$  (теперь и для ковариантных векторов, так же как для скалярных функций), на диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(x) & \xleftarrow{\varphi_*} & \mathcal{F}(\varphi x) \\
 d_M \downarrow & & \downarrow d_N \\
 T_1(x) & \xleftarrow{\varphi_*} & T_1(\varphi x)
 \end{array} \quad (3.16)$$

определены уже все отображения, так что необходимо доказать коммутативность

$$\begin{aligned}
 d_M \circ \varphi_* &= \varphi_* \circ d_N, \\
 d_M(\varphi_* f) &= \varphi_*(d_N f).
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Имеем:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle d_M(\varphi_* f), \mathbf{v}_x \rangle & \stackrel{?}{=} & \langle \varphi_*(d_N f), \mathbf{v}_x \rangle \\
 \parallel & & \parallel \\
 \mathbf{v}_x[\varphi_* f] & & \langle d_N f, \varphi^* \mathbf{v}_x \rangle \\
 & \searrow & \parallel \\
 & & (\varphi^* \mathbf{v}_x)[f] \\
 & & \parallel \\
 & & \mathbf{v}_x[\varphi_* f]
 \end{array}$$

Для завершения доказательства коммутативности (3.17) диаграммы (3.16) достаточно теперь сказать, что  $d$  есть

естественное отображение (это модный сейчас способ высказать тот факт, что градиент есть тензорный оператор).

ПОЛЯ. Ковариантное векторное поле есть отображение  $\sigma : x \rightarrow \sigma_x \in T_1(x)$ . Если для каждого касательного векторного поля  $v \in \mathcal{D}^1(M)$  функция  $\langle \sigma, v \rangle : x \rightarrow \langle \sigma_x, v_x \rangle$  дифференцируема, то говорят, что поле  $\sigma$  дифференцируемо:  $\sigma \in \mathcal{D}_1(M)$ . Таким образом, поле  $\sigma$  дифференцируемо в окрестности  $U \subset M$  тогда и только тогда, когда в некотором базисе  $e_i$  пространства  $\mathcal{D}^1(U)$  (таком, например, как  $\partial/\partial x^i$ ) компоненты  $\sigma_i = \langle \sigma, e_i \rangle$  являются дифференцируемыми функциями. Можно также определить тензорный пучок  $\mathcal{T}_1(M)$ , элементами которого являются ковариантные векторы  $\sigma_x$  в точках  $x \in M$ . Тогда  $\mathcal{D}_1(M)$  есть множество дифференциальных сечений пучка  $\mathcal{T}_1(M)$ . Ясно, что  $d$  дает линейное отображение  $\mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{D}_1(M)$ .

### Тензоры

Взяв два ковариантных вектора  $\alpha, \beta \in T_1(x)$ , мы можем определить билинейную функцию  $\alpha \otimes \beta$  на парах касательных векторов  $(u, v)$  в точке  $x$  правилом

$$(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \langle \alpha, u \rangle \langle \beta, v \rangle. \quad (3.18)$$

Множество  $T_2(x) \equiv T_1(x) \otimes T_1(x)$  всех билинейных функций, построенных из пар касательных векторов в точке  $x$ , можно получить, образуя линейные комбинации простых произведений типа  $\alpha \otimes \beta$ ; это множество называется множеством ковариантных тензоров второй валентности (или ранга) в точке  $x$ . Так как эти тензоры можно складывать друг с другом и умножать на действительные числа, то  $T_2(x)$  является векторным пространством (размерности  $n^2$ ) над полем действительных чисел  $R$ . Базис, состоящий из всех произведений вида  $\omega^i \otimes \omega^j$ , получается соответственно выбранному базису  $e_i$  в  $T^1(x)$ . Разложение какого-либо тензора  $T \in T_2(x)$  по этому базису

$$T = T_{ij} \omega^i \otimes \omega^j \quad (3.19)$$

определяет компоненты  $T_{ij}$  тензора  $T$ . Рассматривая мультилинейные функции касательных векторов, полу-



чаем ковариантные векторы любого ранга, и разложение

$$S = S_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{i_1} \otimes \omega^{i_2} \otimes \dots \otimes \omega^{i_p} \quad (3.20)$$

позволяет получить компоненты  $S_{i_1 \dots i_p}$  ковариантного тензора  $S \in T_p(x)$  валентности  $p$

$$S : (v_1, v_2, \dots, v_p)_x \rightarrow S(v_1, v_2, \dots, v_p) \in R.$$

Мультилинейные функции  $p$  ковариантных векторных аргументов порождают контравариантные тензоры  $T^p(x)$  валентности  $p$ ; например,

$$v \otimes u : (\alpha, \beta) \rightarrow \langle \alpha, v \rangle \langle \beta, u \rangle \quad (3.21)$$

есть элемент  $T^2(x)$ . Смешанные тензоры, скажем  $R \in T_1^2(x)$ , с компонентным представлением

$$R = R_k^{ij} e_i \otimes e_j \otimes \omega^k \quad (3.22)$$

также являются мультилинейными функционалами

$$\begin{aligned} R : (\alpha, \beta, v) &\rightarrow R(\alpha, \beta, v) = \\ &= R_k^{ij} \langle \alpha, e_i \rangle \langle \beta, e_j \rangle \langle \omega^k, v \rangle = R_k^{ij} \alpha_i \beta_j v^k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Значение  $R(\alpha, \beta, v)$  функционала  $R$  от  $\alpha, \beta, v$  есть действительное число, называемое *сверткой* тензора  $R$  с векторами  $\alpha, \beta, v$ . Когда векторы, используемые в качестве аргументов тензора, имеют достаточно простые наименования, аргументы часто обозначают просто индексами, например

$$R(\alpha, \beta, v) = R_v^{\alpha\beta}; \quad (3.24)$$

в более распространенной записи

$$R(\omega^i, \omega^j, e_k) = R_k^{ij}, \quad (3.25)$$

или

$$R(dy^{i'}, dy^{j'}, b_{kr}) = R_k^{i'j'}. \quad (3.26)$$

Множество дифференцируемых  $p$  раз контравариантных и  $q$  раз ковариантных тензорных полей  $\mathcal{D}_q^p(M)$  определяется очевидным образом и состоит из всех дифференцируемых сечений соответствующего тензорного пучка  $\mathcal{T}_q^p(M)$ .

Компоненты  $R_k^{ij}$  тензора  $R$  образуются свертыванием  $R$  с подходящим образом выбранными базисными векторами. Поэтому они являются действительными числами (или функциями, когда речь идет о тензорных полях). Вопрос, следует ли считать скаляром (скалярной функцией) каждую компоненту  $R_k^{ij}$ , является довольно деликатным; ответ на него в большой мере зависит от субъективного предпочтения того или иного набора базисных векторов. Когда дело связано с особо предпочтительными (например, определенными глобально) базисными векторными полями, имеющими уникальные и ценные свойства, тогда скалярная терминология могла бы показаться привлекательной (хотя она и не принята в теории групп Ли, где всегда используются глобально определенные, трансляционно инвариантные базисы). Однако эта терминология ведет к недоразумениям в случае, когда мотивы, по которым был выбран тот или иной базис, не ясны выбирающему, так что в любой соседней координатной окрестности он может заменить этот базис другим. В этом смысле распространенная практика использования термина «скаляр» по отношению к  $R_k^{ij}$  всякий раз, когда базисные векторы  $\omega^i, \omega^j, e_k$  получены не из системы координат, едва ли заслуживает одобрения, и понятие мирового скаляра, если его нельзя избежать, следует сохранить скорее для функций и чисел, определение которых не зависит от выбора базиса, а не для величин, возникающих в результате этого выбора.

### Законы преобразования

При замене базиса  $e_i \rightarrow b_k$ , в касательном пространстве происходят, очевидно, и соответствующие изменения базисов во всех тензорных пространствах. Законы преобразования компонент тензоров при этом неявным образом содержатся в уравнениях типа (3.22) или (3.25).

Отображение  $\varphi: M \rightarrow N$  индуцирует различные отображения тензоров. В частности, для ковариантного тензорного поля имеем отображение

$$\varphi_*: \mathcal{D}_p(M) \leftarrow \mathcal{D}_p(N), \quad (3.27)$$

которое определяется требованием, чтобы тензорное произведение было естественной операцией, например

$$\varphi_*(\alpha \otimes \beta) = (\varphi_*\alpha) \otimes (\varphi_*\beta). \quad (3.28)$$

Таким образом, определение отображения  $\varphi_*$  для  $\mathcal{D}_p$  сводится к установлению этого отображения для  $\mathcal{D}_1$ , которое, по определению, есть отображение  $\varphi_*$  пространства  $T_1(x)$  для каждой точки  $x$ . Это точечное определение отображения  $\varphi_*$  для полей возможно только потому, что при определении  $(\varphi_*\alpha)_x$  существует единственная точка  $\varphi x \in N$ , в которой и берется значение определяющего поля  $\alpha$ . Напротив, отображение  $\varphi^* : T^1(x) \rightarrow T^1(\varphi x)$ , как правило, нельзя продолжить до отображения пространства  $\mathcal{D}^1(M)$ , так как для каждой точки  $x \in M$  существует вектор  $\varphi^*v \in T^1(y)$ , удовлетворяющий уравнению  $\varphi x = y$ . Таким образом, отображение  $\varphi^* : \mathcal{D}^1(M) \rightarrow \mathcal{D}^1(\varphi M)$  мы могли бы определить только тогда, когда отображение  $\varphi$  одно-однозначно. Но даже и в этом случае  $\varphi(M)$  должно было бы представлять собой подмногообразие многообразия  $N$  (если мы хотим получить определенные на нем дифференцируемые векторные поля  $\mathcal{D}^1[\varphi(M)]$ ). Это означает, что дополнительно к условию одно-однозначности нужно потребовать, чтобы  $\varphi$  было регулярным. (Доказательство этого факта мы опустим, как и определение подмногообразия; см. по этому поводу книгу Аусландера и Маккензи [2].)

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Отображение  $\varphi : M \rightarrow N$  регулярно в точке  $x \in M$ , если и только если индуцированное отображение  $d\varphi_x = \varphi^* : T^1(M) \rightarrow T^1(N)$  одно-однозначно. Если  $\varphi$  регулярно в каждой точке, то оно *регулярно*. Регулярное одно-однозначное отображение имеет определенное на  $\varphi(M)$  дифференцируемое обращение  $\varphi^{-1}$ , так как в локальных координатах  $d\varphi_x$  представляется матрицей и регулярность означает, что эта матрица имеет наибольший ранг в соответствии с известной теоремой о неявных функциях. Несмотря на существование этого обратного отображения  $\varphi^{-1}$ , никакое отображение вида  $T_M^1(x) \leftarrow \leftarrow T_N^1(\varphi x)$  не определено, поскольку не существует какого-либо естественного способа проектирования пространства  $T_N^1(\varphi x)$  на его подпространство  $T_{\varphi(M)}^1(\varphi x)$ ,

если только они не совпадают тождественно; в этом же последнем случае  $\varphi(M) = N$ . (При добавлении римановой метрики к дифференциальной структуре на  $N$  подобное проектирование, конечно, можно было бы определить. Но тогда и все тензоры можно отождествить с ковариантными тензорами и достаточно было бы отображения  $\varphi_*$ . Важным и полезным является, однако, специальный случай, когда отображение  $\varphi: M \rightarrow N$  однооднозначно и регулярно (погружение), а  $\mathbf{v}$  — такое векторное поле на  $N$ , для которого в каждой точке  $x$  подмногообразия  $\varphi(M) \subset N$  можно показать, что оно лежит в  $T_{\varphi(M)}^1(x)$ , и, следовательно, нет нужды в каком-либо проектировании. Тогда  $(\varphi^{-1})^*\mathbf{v}$  есть векторное поле на  $M$ . Подобным образом, например, поля  $iL_k$  [см. уравнения (2.28)], определенные на  $E^3$ , порождают поля касательных векторов на  $S^2$  при включении  $S^2 \rightarrow E^3$ . Эта операция, очевидно, и вызвала появление термина «касательный вектор». Индуцированное отображение для смешанных тензоров в точке может быть определено, только если  $d\varphi_x$  однооднозначно и имеет характер «отображения на», т. е. только если для него существует обращение на  $T^1(\varphi x)$ ; некоторая трудность, конечно, сопряжена с тем, что ковариантные и контравариантные тензоры отображают, естественно, в различных направлениях.

### Производная Ли

Задавшись векторным полем  $\mathbf{u}$  на  $M$ , можно на этом многообразии определить производную Ли

$$\mathcal{L}_u: \mathcal{D}^1(M) \rightarrow \mathcal{D}^1(M).$$

Правило для произведений

$$\mathcal{L}_u(f\mathbf{v}) = (\mathcal{L}_u f)\mathbf{v} + f\mathcal{L}_u\mathbf{v}, \quad (3.29)$$

где

$$\mathcal{L}_u f \equiv \mathbf{u}[f], \quad (3.30)$$

легко проверяется при помощи (2.39). Другие очевидные правила для произведений, такие, как

$$\mathcal{L}_u \langle \sigma, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathcal{L}_u \sigma, \mathbf{v} \rangle + \langle \sigma, \mathcal{L}_u \mathbf{v} \rangle \quad (3.31)$$

и

$$\mathcal{L}_u(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\mathcal{L}_u \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v} \otimes \mathcal{L}_u \mathbf{w}, \quad (3.32)$$

обобщают определение до

$$\mathcal{L}_u : \mathcal{D}_q^p(M) \rightarrow \mathcal{D}_q^p(M).$$

Это аналитическое определение  $\mathcal{L}_u$  эквивалентно геометрическому вроде (2.38), так как на каждой достаточно малой окрестности  $U$  любой точки  $x$  поле  $\mathbf{u}$  определяет отображения

$$e^{t\mathbf{u}} : U \rightarrow e^{t\mathbf{u}}U : x \rightarrow e^{t\mathbf{u}}x$$

для всех достаточно малых  $t$ . Эти отображения однозначны и обратимы, поэтому индуцируют отображения всех тензорных полей. Поскольку тензорное произведение есть естественная операция (т. е. коммутирует с этими индуцированными отображениями), то правила для произведений будут следовать и из этого альтернативного определения. Очевидно, что производную Ли можно определить для любого типа полей, если только индуцированные отображения определены по крайней мере для всех обратимых  $\varphi$ .

#### IV. Внешние дифференциальные формы

Опираясь на операцию тензорного произведения, можно определить другое произведение двух векторов

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha. \quad (4.1)$$

Оно антисимметрично, или альтернировано. Вместо того чтобы распространять это произведение на тензоры более высоких рангов, определяя его как антисимметризацию соответствующих тензорных произведений, целесообразнее дать просто ряд аксиом, которые собственно и служат правилами работы с такими альтернированными произведениями.

Альтернированное ковариантное тензорное поле  $\mathcal{F}_p(M)$  степени  $p$  называется *внешней дифференциальной формой*. Если  $\alpha \in \mathcal{F}_p$ , то, как мультилинейная функция от касательных векторных полей,  $\alpha$  удовлетворяет соотношению

$$\alpha(\dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots) = -\alpha(\dots, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \dots). \quad (4.2)$$

Внешнее произведение  $\alpha^p \in \mathcal{F}_p$  и  $\beta_q \in \mathcal{F}_q$  есть

$$\alpha^p \wedge \beta_q \in \mathcal{F}_{p+q}. \quad (4.3)$$

Операция  $\wedge$ , по определению, обладает следующими свойствами:

1. Линейность по каждому из сомножителей

$$\alpha \wedge (f\beta + g\gamma) = f\alpha \wedge \beta + g\alpha \wedge \gamma, \quad (4.4)$$

где  $f, g \in \mathcal{F}(M) \equiv \mathcal{F}_0(M)$ .

2. Ассоциативность; кроме того, при  $f \in \mathcal{F}_0$ ,  $\sigma \in \mathcal{F}$  справедливо равенство  $f \wedge \sigma = f\sigma$ .

3. Альтернативность, т. е. для любых двух векторов  $\sigma, \varrho, \in \mathcal{F}_1(M) \equiv \mathcal{D}_1(M)$

$$\sigma \wedge \varrho = -\varrho \wedge \sigma. \quad (4.5)$$

Наиболее общая  $p$ -форма, образованная по этим правилам, есть линейная комбинация произведений векторов вида

$$\alpha = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_p + \varrho_1 \wedge \varrho_2 \wedge \dots \wedge \varrho_q. \quad (4.6)$$

Когда каждый из членов этой суммы есть произведение в точности  $p$  векторов, мы говорим, что  $\alpha$  есть  $p$ -форма,  $\alpha \in \mathcal{F}_p$ . Также говорят  $\alpha \in \mathcal{F}_\wedge$ , где  $\mathcal{F}_\wedge$  носит название алгебры Грассмана, присоединенной к  $\mathcal{F}_1$ . Очевидно, что  $\mathcal{F}_\wedge$ , рассматриваемая как векторное пространство, есть прямая сумма векторных пространств  $\mathcal{F}_p$  ( $p = 0, 1, \dots$ ), поскольку каждая  $\alpha$  представляет собой сумму вида (4.6). Легко проверяется перестановочное соотношение для любых  $\alpha^p \in \mathcal{F}_p$  и  $\beta^q \in \mathcal{F}_q$

$$\alpha^p \wedge \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \wedge \alpha^p. \quad (4.7)$$

Задавая на некоторой окрестности пространства  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{F}_1$  базис  $\omega^i$ , можно с помощью таких правил представить любую  $p$ -форму  $\alpha \in \mathcal{F}_p$  в виде единственного разложения

$$\alpha = \alpha_{(i_1 i_2 \dots i_p)} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}, \quad (4.8)$$

где  $\alpha_{(i_1 i_2 \dots i_p)}$  — дифференцируемые функции, а круглые скобки в индексах означают, что

$$i_1 < i_2 < \dots < i_p, \quad (4.9)$$

что соответственно модифицирует правило суммирования.

Компоненты же  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}$  (без этого ограничения) тогда определяются из требования антисимметрии по всем индексам, и мы можем эквивалентным образом писать

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}, \quad (4.10)$$

так как каждый отдельный набор индексов встречается с различными перестановками  $p!$  раз ввиду того, что теперь суммирование уже не ограничено указанным выше правилом. Эта формула позволяет также отождествить  $\alpha$  с антисимметричным тензором, имеющим компоненты  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}$ . Отметим, что при  $p = n$  разложение (4.8) состоит всего из одного члена, именно

$$\alpha^n = \alpha_{12 \dots n} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^n, \quad (4.11)$$

тогда как при  $p > n$  два множителя  $\omega^i$  в уравнении (4.8) должны быть равны и, поскольку  $\omega \wedge \omega = -\omega \wedge \omega$ , их произведение должно обращаться в нуль.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Внешняя  $p$ -форма  $\alpha \in \mathcal{F}_p$  называется *простой*, если в каждой точке  $x$  она может быть записана в виде произведения некоторых 1-форм  $\sigma_i \in T_1(x)$

$$\alpha = \sigma_1 \wedge \sigma_2 \wedge \dots \wedge \sigma_p. \quad (4.12)$$

Это определение полезно, потому что многие определения и выкладки, будучи заданными явным образом только для простых дифференциальных форм, очевидным образом обобщаются с помощью свойств линейности. Кроме того, простая  $p$ -форма обладает определенным геометрическим смыслом, именно, она определяет в каждой точке  $p$ -мерное подпространство пространства  $T_1(x)$ , что следует из следующей леммы:

**ЛЕММА.** Множество 1-форм  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$  в точке  $x$  линейно независимо, если и только если их внешнее произведение  $\alpha \in \mathcal{F}$  не обращается в нуль.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим, что указанные 1-формы линейно зависимы, например  $\sigma_1 = a_2 \sigma_2 + \dots + a_p \sigma_p$ . Подставляя это равенство в (4.12), найдем, что тогда каждый член содержит некоторый множитель  $\sigma_i$  дважды и поэтому обращается в нуль. Если все  $\alpha \neq 0$ , то между

$\sigma_i$  не может существовать подобной линейной связи, и поэтому  $\sigma_i$  линейно независимы. С другой стороны, если  $\sigma_1, \dots, \sigma_p$  являются линейно независимыми, то введем добавочные векторы так, чтобы получить базис  $\omega^i$  пространства  $T_1(x)$ , включающий  $\omega^a = \sigma_a$  ( $a = 1, 2, \dots, p$ ). Тогда  $\alpha \neq 0$ , так как мы имеем в качестве мультилинейного функционала

$$\alpha(e_1, e_2, \dots, e_p) = (\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^p)(e_1, e_2, \dots, e_p) = 1 \neq 0,$$

где  $e_i$  — дуальный базис пространства  $T^1(x)$ . Из этой леммы следует, что 1-форма  $\sigma$  в точке  $x$  лежит в подпространстве пространства  $T_1(x)$ , натянутом на  $\sigma_i$ , тогда и только тогда, когда  $\alpha \wedge \sigma = 0$ .

### Детерминанты

Пусть  $B$  — линейное преобразование пространства  $T_1(x)$  в себя:

$$B: \sigma \rightarrow \varrho = B\sigma.$$

Тогда  $B \in T_1^1(x)$ , поскольку в координатах это означает, что  $\varrho_i = B_j^i \sigma_j$ . Затем  $B$  расширяется до линейного отображения каждого ковариантного тензорного пространства в себя по правилам типа  $B(\sigma \otimes \varrho) = (B\sigma) \otimes (B\varrho)$ . Если  $\alpha^n$  — некоторая  $n$ -форма в точке  $x$ , то  $B\alpha^n$  должна быть кратной  $\alpha^n$ , и мы можем определить детерминант  $\det B$  преобразования  $B$  уравнением

$$B\alpha^n = (\det B) \alpha^n. \quad (4.13)$$

Обращаясь к записи в компонентах, возьмем  $\alpha^n = \alpha_{1\dots n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Тогда  $Bdx^i = B_j^i dx^j$ , так что

$$\begin{aligned} B\alpha^n &= \alpha_{1\dots n} (B_{j_1}^1 dx^{j_1}) \wedge (B_{j_2}^2 dx^{j_2}) \wedge \dots \wedge (B_{j_n}^n dx^{j_n}) = \\ &= \alpha_{1\dots n} B_{j_1}^1 B_{j_2}^2 \dots B_{j_n}^n dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_n}. \end{aligned}$$

Но

$$dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_n} = \varepsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

где  $\varepsilon^{ij\dots k} = \pm 1, 0$  есть сигнатура перестановки, приводящей последовательность  $ij\dots k$  к порядку  $1\ 2\dots n$ ; она обеспечивает справа как раз те знаки, которые появляются в обычном определении детерминанта.



Таким образом, мы находим

$$B\alpha^n = |B_j^i| \alpha_{1\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = |B_j^i| \alpha^n, \quad (4.14)$$

так что  $(\det B)$  находится в соответствии с классически определяемым детерминантом  $|B_j^i|$  всякой матрицы, представляющей преобразование  $B$ . В частности, если  $\varphi: E^p \rightarrow M$  есть параметризованный поверхностный элемент, то в локально-координатном представлении  $x^i = \varphi^i(t^1, t^2, \dots, t^p)$  имеет место  $\varphi_* dx^i = (\partial\varphi^i/\partial t^a) dt^a \wedge$ . Если теперь подставить эти выражения в разложение  $p$ -формы

$$\alpha = \alpha_{(i_1, i_2, \dots, i_p)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad (4.15)$$

то знаки, которые соответствуют отличию порядка сомножителей в произведениях  $dt^a$  от стандартного, будут совпадать со знаками в разложении якобиана, и мы получим:

$$\varphi_* \alpha = \alpha_{(i_1 i_2 \dots i_p)} (\varphi(t)) \frac{\partial(x^{i_1}, x^{i_2}, \dots, x^{i_p})}{\partial(t^1, t^2, \dots, t^p)} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \dots \wedge dt^p. \quad (4.16)$$

Поэтому  $p$ -формы можно мыслить как подынтегральные выражения интегралов по  $p$ -мерным поверхностям.

### Внешняя производная

Градиентный оператор  $d$  обобщается до операции

$$d: \mathcal{F}_p(x) \rightarrow \mathcal{F}_{p+1}(x) \quad (4.17)$$

над полями внешних дифференциальных форм  $\mathcal{F}_p(M)$  или их ядер  $\mathcal{F}_p(x)$ . Это обобщение достигается, если потребовать, чтобы выполнялось правило

$$d(\alpha^p \wedge \beta^q) = d\alpha^p \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge d\beta^q \quad (4.18)$$

для произведений и свойство

$$d(df) = 0 \quad (4.19)$$

для любой функции  $f \in \mathcal{F}_0$ . Опираясь на эти требования, мы можем для любой  $p$ -формы  $\alpha$  в координатном базисе

$$\alpha = \alpha_{(i_1 i_2 \dots i_p)} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad (4.20)$$

вычислять ее внешнюю производную

$$d\alpha = d\alpha_{(i_1 i_2 \dots i_p)} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \quad (4.21)$$

Очевидно, что

$$d(d\alpha) = 0 \quad (4.22)$$

для любой внешней дифференциальной формы  $\alpha$ . Для форм вида

$$A = A_i dx^i \quad (4.23)$$

внешняя производная совпадает с известной операцией ротора:

$$\begin{aligned} dA &= dA_i \wedge dx^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \\ &= -\frac{\partial A_i}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i \right) dx^i \wedge dx^j, \end{aligned} \quad (4.24)$$

или

$$(dA)_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}. \quad (4.25)$$

Если бы в уравнениях (4.21) и (4.25) мы не использовали координатной системы, то за счет производных от базисных векторов в результат вошли бы дополнительные члены.

## V. Риманова геометрия

Этот эскиз римановой геометрии имеет своей целью подготовить читателя к изучению методов Картана и идей Шевалле. Кроме того, проводимые здесь вычисления помогут читателю освоиться с внешними дифференциальными формами прежде, чем их придется использовать в качестве основы для довольно абстрактных алгебраических построений, составляющих содержание следующих лекций, посвященных теории когомологий. (Читая эти лекции, я наиболее близко следовал Г. Фландерсу [4]. В качестве примера того, как структурные уравнения Картана облегчают вычисления тензора кривизны в случае простых метрик, я приводил такое вычисление для метрики Шварцшильда. Это вычисление можно найти в работе [5] <sup>1)</sup>.)

<sup>1)</sup> Со своей стороны мы по теме этой лекции рекомендуем монографии [11—15].— *Прим. ред.*

Риманово многообразие есть дифференцируемое многообразие  $M$  с глобально определенным на нем невырожденным симметричным тензорным полем  $ds^2 \in \mathcal{D}_2(M)$ . В локальной координатной системе

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j. \quad (5.1)$$

С обычной точки зрения  $dx^i$  — малые смещения, а  $ds^2$  считается скаляром, поскольку у него отсутствуют индексы. Однако  $dx^i$  не указывают никакого определенного направления, а по сути дела просто служат мерой некоторого свойства кривой, когда кривая эта задана. Поэтому мы предпочитаем явно признать тот факт, что  $dx^i$  обладают потенциальной возможностью порождать числа, но сами не являются числами. Они представляют собой (линейные) функции кривых или их касательных векторов  $v$ , т. е. ковариантные векторы, а  $ds^2$  есть тензор, билинейный функционал, определенный на касательных векторах. Значение этого функционала на паре векторов  $u, v$  есть число

$$u \cdot v \equiv ds^2(u, v) = g_{ij} \langle dx^i, u \rangle \langle dx^j, v \rangle = g_{ij} u^i v^j. \quad (5.2)$$

[Вспомните уравнения (3.4) и (3.18).] В произвольной системе  $e_i$  и дуальной ей  $\omega^i$  имеем снова

$$ds^2 = g_{ij}(x) \omega^i \otimes \omega^j \quad (5.3)$$

и

$$u \cdot v = g_{ij} \langle \omega^i, u \rangle \langle \omega^j, v \rangle = g_{ij} u^i v^j.$$

Задавшись, например, метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + \frac{dr^2}{f^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.4)$$

и опуская значки тензорных произведений, мы легко найдем базис, в котором  $g_{ij} = \eta_{ij}$ . Для этого нужно просто, записав (5.7) в виде

$$ds^2 = -(f dt)^2 + \left(\frac{dr}{f}\right)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2, \quad (5.5)$$

перейти к ортогональной системе

$$\omega^0 = f dt, \quad \omega^1 = \frac{1}{f} dr, \quad \omega^2 = r d\theta, \quad \omega^3 = r \sin \theta d\varphi \quad (5.6)$$

в качестве базиса.

Идея ковариантной производной становится очень наглядной, если вспомнить, что индексы векторных компонент  $v^i$  относятся к базисным векторам, и написать

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i. \quad (5.7)$$

Отсюда ясно, что любое разумное определение производной вектора должно удовлетворять условию

$$d\mathbf{v} = dv^i \mathbf{e}_i + v^i d\mathbf{e}_i, \quad (5.8)$$

тем самым учитывая движение базисных векторов. Когда приходится пользоваться вращающейся координатной системой в ньютоновской механике, мы вычисляем  $d\mathbf{e}_i$ , разлагая  $\mathbf{e}_i$  по базису  $\mathbf{b}_k'$  инерциальной системы отсчета, который удовлетворяет условию  $d\mathbf{b}_k' = 0$ . В общем же случае мы не имеем подобной фиксированной системы отсчета, так что правило вычисления  $d\mathbf{e}_i$  либо приходится задавать произвольно (аффинные многообразия), либо его находят из метрического тензора  $ds^2$  в римановом многообразии, опираясь на требование, чтобы выполнялись определенные разумные свойства, например такие, как

$$d(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (d\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot (d\mathbf{v}). \quad (5.9)$$

Эти идеи уточняются и развиваются в работах [4, 5], на которые мы ссылались в начале этой лекции, так что остальную часть изложения мы здесь опустим <sup>1)</sup>.

## VI. Когомология

Когомология относится к весьма сложным математическим структурам, связанным с топологическими пространствами и непрерывными отображениями между этими пространствами. Точнее, мы имеем дело с когомологиями в дифференциальной топологии, именно с когомологиями, относящимися всегда к дифференцируемым многообразиям и дифференцируемым отображениям. Соответствующая алгебра—это алгебра линейного оператора внешнего дифференцирования  $d$ , векторных пространств, на которых определен  $d$ , и тех линейных отображений этих пространств,

<sup>1)</sup> См. примечание 1 на стр. 235.— *Прим. ред.*

которые оператор  $d$  порождает. Ввиду того что  $d$  есть «тензорный оператор» [см. уравнения (3.16) и (3.17)], определенный безотносительно к чему-либо, кроме дифференцируемой структуры рассматриваемого многообразия, то, как выяснится в дальнейшем, вся алгебра, которую мы построим, исходя из этого многообразия, также будет зависеть только от дифференцируемой структуры многообразия, или, короче, будет топологически инвариантной.

В этом заключается огромное упрощение той конкретной когомологии (де Рама), которую мы построим, так как во многих теориях топологическая инвариантность теряется при определении коцепных групп, и необходимо доказывать, что она восстанавливается снова при переходе к группам когомологий. Приставка «ко» в слове «когомология» имеет смысл ссылки на теорию двойственной гомологии, которая представляет собой алгебраическую структуру, основанную на кривых, поверхностях и т. д. и операторе, связывающем эти объекты посредством формирования их границ. Двойственность связана с возможностью интегрировать  $p$ -формы по  $p$ -мерным поверхностям, получая действительные числа; таким образом,  $p$ -поверхности проявляют себя как линейные функционалы над  $p$ -формами. Хотя гомология и связана с объектами (поверхностями), обладающими более непосредственным топологическим смыслом, однако технически доказывать основные теоремы здесь гораздо труднее, так что мы ограничимся когомологией дифференциальных форм. Важность когомологии как рабочего метода топологии полностью выяснится только к концу лекций, где станет ясно на нескольких примерах, что некоторые из вводимых нами векторных пространств конечномерны. Их размерности позволяют получить некоторые целые числа (числа Бетти), несущие информацию о топологии многообразия.

Поля  $p$ -форм  $\mathcal{F}_p(M)$ , определенные глобально на  $M$ , образуют (бесконечномерное) векторное пространство над полем действительных чисел, а поэтому также абелеву группу относительно векторного сложения. Алгебраическая система полей  $\mathcal{F}_p(M)$  вместе с линейным отображением  $d$ , удовлетворяющим условию  $d^2 = 0$ , есть пример

коцепного комплекса

$$\mathcal{F}_0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{F}_1(M) \xrightarrow{d} \dots \mathcal{F}_{p-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{F}_p(M) \xrightarrow{d} \dots \quad (6.1)$$

[Стандартное обозначение для коцепного комплекса следующее:

$$C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \dots C^n \xrightarrow{\delta} C^{n+1} \xrightarrow{\delta} \dots, \quad (6.2)$$

где оператор  $\delta$ , удовлетворяющий условию  $\delta^2 = 0$ , носит название кограничного оператора, а  $C^n$  — группа  $n$ -коцепей. Каждая  $C^n$  представляет собой абелеву группу или модуль над кольцом; в частности, как в нашем случае, она может быть векторным пространством над некоторым полем.] Образ  $d \mathcal{F}_{p-1}(M)$  системы  $\mathcal{F}_{p-1}(M)$  при отображении  $d$  есть подгруппа системы  $\mathcal{F}_p(M)$ , называемая группой кограниц и обозначаемая через  $\mathcal{B}_p(M)$ . Таким образом,  $p$ -форма  $\alpha$  есть кограница,  $\alpha \in \mathcal{B}_p(M)$ , если и только если она является внешней производной некоторой  $(p-1)$ -формы  $\beta$ , т. е. если  $\alpha = d\beta$ . (В другой терминологии:  $\alpha$  есть *точная дифференциальная форма*, или  $\alpha$  является точной, если и только если  $\alpha = d\beta$  для некоторой формы  $\beta$ .) Для каждой кограницы  $\alpha$  справедливо равенство  $d\alpha = 0$ , ибо  $d(d\beta) = 0$ ; поэтому  $\mathcal{B}_p(M)$  также является подгруппой группы  $\mathcal{Z}_p(M)$  всех  $p$ -форм  $\alpha$ , удовлетворяющих условию  $d\alpha = 0$ . Если  $d\alpha = 0$ , то  $p$ -форма  $\alpha$  называется *коциклом* или *замкнутой дифференциальной формой*. (Циклы в теории гомологий не имеют границ и, таким образом, относятся к замкнутым поверхностям — соответственно для когомологий «коцикл» и «козамкнутость».) Теперь мы поставим вопрос: является ли уравнение  $d\alpha = 0$  [означающее, что  $\alpha \in \mathcal{Z}_p(M)$ ] условием интегрируемости, гарантирующим существование такой формы  $\beta$ , что  $\alpha = d\beta$  [т. е.  $\alpha \in \mathcal{B}_p(M)$ ]; иначе говоря, действительно ли  $\mathcal{Z}_p$  и  $\mathcal{B}_p$  совпадают? Если бы это было так, то факторгруппа

$$H^p(M) = \frac{\mathcal{Z}_p(M)}{\mathcal{B}_p(M)} \quad (6.3)$$

исчезала бы. Таким образом, факторгруппа (6.3) характеризует меру неприменимости этой теоремы к многообразию  $M$ .

Группа  $H^p(M)$  носит название  $p$ -мерной группы когомологии де Рама многообразия  $M$ , так как де Рама первый доказал, что она изоморфна более классическим группам когомологий, определяемым комбинаторными методами. На компактных многообразиях группа  $H^p(M)$  конечномерна, и ее размерность носит название  $p$ -го числа Бетти для многообразия  $M$ . Я не буду доказывать какого-либо из этих утверждений, но надеюсь, что по ходу дела конечномерность группы  $H^p$  станет достаточно ясной.

Определению (6.3) можно придать более развернутую форму. Будем говорить, что две  $p$ -формы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  *когомологичны*:

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \quad (6.4)$$

в том и только в том случае, если они отличаются на точный дифференциал (кограницу)  $d\beta$ :

$$\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta. \quad (6.5)$$

Тогда группа  $\mathcal{F}_p(M)$  состоит из тех  $p$ -форм  $\alpha$ , которые когомологичны нулю:  $\alpha \sim 0$ . Элемент  $[\alpha] \in H^p(M)$  есть класс эквивалентности (для отношения эквивалентности « $\sim$ ») замкнутых дифференциалов  $\alpha$ , называемый когомологическим классом. Тогда размерность  $H^p(M)$  представляет собой число (линейно независимых) нетривиальных когомологических классов замкнутых дифференциальных форм.

**ПРИМЕР.** На многообразии  $M^2 = E^2 - \{0\}$  (проколота плоскость) полярный угол  $\varphi$  не является дифференцируемой функцией ввиду многозначности. Однако  $d\varphi = d(\varphi + 2\pi)$ , так что  $d\varphi \in \mathcal{F}_1(M^2)$ . А так как  $d(d\varphi) = 0$ , то  $d\varphi \in \mathcal{Z}_1(M^2)$ . Ясно, что  $d\varphi$  не точный дифференциал, но я повторю известное доказательство. Пусть  $f \in \mathcal{F}_0(M^2)$ , и пусть  $c: [0, 1] \rightarrow M^2$  — замкнутая кривая. Тогда

$$\int_c df = \int_0^1 \frac{df}{dt} dt = f(c(1)) - f(c(0)) = 0,$$

так как  $c(1) = c(0)$ . Но если  $c$  окружает начало координат, то

$$\int_c d\varphi = 2\pi \neq 0.$$

Обратим внимание, в частности, что для любой 1-формы  $\sigma$ , когомологичной  $d\varphi$ , получается

$$\int_c \sigma = \int_c d\varphi,$$

поскольку для всех замкнутых кривых  $c$

$$\int_c (\sigma - d\varphi) = \int_c df = 0.$$

Таким образом, значение интеграла по замкнутой кривой зависит только от когомологического класса подынтегрального выражения. Теорема Стокса позволяет обобщить этот результат:

$$\int_c d\alpha = \int_{\text{гран. } c} \alpha, \quad (6.6)$$

где  $p$ -форма  $\alpha$  интегрируется по  $p$ -мерной поверхности  $\text{гран. } c$ , являющейся границей  $(p + 1)$ -мерной поверхности  $c$ . Если  $c$  замкнута, то  $\text{гран. } c = 0$ , и тогда

$$\int_c d\alpha = 0.$$

Таким образом,  $\alpha \sim 0$  означает, что интеграл от формы  $\alpha$  по всякой замкнутой поверхности исчезает, а  $\alpha_1 \sim \alpha_2$  означает, что интегралы форм  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по любой замкнутой поверхности  $c$  равны.

**Пример.** Обычные дифференциалы координат  $dx$  и  $dy$  на  $E^2$  инвариантны относительно группы трансляций и поэтому определяют 1-форму на торе  $T^2$ . В качестве базисов для групп когомологий  $H^p(T^2)$  можно взять следующие когомологические классы:  $f = 1$  для  $H^0$ ;  $dx$  и  $dy$  для  $H^1$ ;  $dx \wedge dy$  для  $H^2$ . Выбор  $dx$  и  $dy$  в качестве базисных элементов вовсе не является единственным; можно было бы с одинаковым успехом взять, скажем,  $dx$  и  $(dx + dy)$ , и действительно отображение  $(x, y) \rightarrow (x, x + y)$  пространства  $E^2$  на себя определяет диффеоморфизм  $T^2$  в себя, переводящий один базис в другой.

Вернемся теперь к формальной алгебраической структуре теории когомологий. Наша первая задача — разо-



браться в индуцированных отображениях. Задавая отображение  $\varphi: M \rightarrow N$ , мы уже тем самым определяем все отображения  $\varphi^*$  на диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}_0(M) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_p(M) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_{p+1}(M) & \xrightarrow{d} & \dots \\ \varphi^* \uparrow & & & & \varphi^* \uparrow & & \varphi^* \uparrow & & \\ \mathcal{F}_0(N) & \xrightarrow{d} & \dots & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_p(N) & \xrightarrow{d} & \mathcal{F}_{p+1}(N) & \xrightarrow{d} & \dots \end{array} \quad (6.7)$$

и знаем, что каждый квадрат на этой диаграмме коммутативен, т. е.  $d\varphi^* = \varphi^*d$ . Следовательно,  $\varphi^*$  отображает  $\mathfrak{Z}_p(N)$  в  $\mathfrak{Z}_p(M)$ , так как если  $d\alpha \sim 0$ , то  $d(\varphi^*\alpha) = \varphi^*d\alpha = 0$ ; другими словами,  $\alpha \sim 0$  означает, что  $\varphi^*\alpha \sim 0$ . Следовательно,  $\varphi^*$  отображает кохомологический класс на  $N$  в гомологический класс на  $M$ :

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \Leftrightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = d\beta \Rightarrow \varphi^*\alpha_1 - \varphi^*\alpha_2 = d(\varphi^*\beta) \Rightarrow \varphi^*\alpha_1 \sim \varphi^*\alpha_2.$$

Отображение  $\varphi^*$  коцепных комплексов, таким образом, определяет гомоморфизм (линейное отображение) групп кохомологий:

$$\varphi^\#: H^p(M) \leftarrow H^p(N). \quad (6.8)$$

(Поскольку мы теперь находимся на стадии, когда алгебра преобладает над дифференциальной геометрией, то различные индексы, такие, как  $p$  и  $\#$ , поднимаются вверх ради большего согласования с условиями именно алгебраической топологии, а не дифференциальной геометрии.) Далее, все эти отображения соответствующим образом связаны друг с другом; именно, задавшись

$$L \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} N \quad (6.9)$$

и имея в виду, что

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_p(L) & \xleftarrow{\psi^*} & \mathcal{F}_p(M) \xleftarrow{\varphi^*} \mathcal{F}_p(N), \\ H^p(L) & \xleftarrow{\psi^\#} & H^p(M) \xleftarrow{\varphi^\#} H^p(N), \end{array}$$

мы найдем:

$$\psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^*, \quad (6.10)$$

$$\psi^\# \circ \varphi^\# = (\varphi \circ \psi)^\#. \quad (6.11)$$

Это обращение порядка композиции характерно для ковариантного закона преобразования. Так как тожде-

ственное отображение  $1 : M \rightarrow M$ , очевидно, индуцирует тождественные отображения, то любой диффеоморфизм  $\varphi : M \rightarrow N$  индуцирует изоморфизм  $\varphi^\# : H^p(N) \cong (H^p M)$  вследствие соотношения  $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1$  и уравнения (6.11).

Еще интереснее тот факт, что даже отображения, гораздо более грубые, чем диффеоморфизмы, могут индуцировать изоморфизмы групп когомологий, именно гомотопические эквивалентности. Два отображения  $\varphi, \psi : M \rightarrow N$  гомотопны, если существует дифференцируемое отображение произведения  $I \times M$  в  $N$

$$h : I \times M \rightarrow N, \tag{6.12}$$

такое, что

$$h(1, x) = \varphi(x)$$

и

$$h(0, x) = \psi(x). \tag{6.13}$$

Здесь  $I = [0, 1]$  — единичный интервал<sup>1)</sup> на действительной оси, а  $I \times M$  — множество пар  $(t, x)$  с  $t \in I$ ,  $x \in M$ , построенных при помощи координатных систем  $(t, x^1, x^2, \dots, x^n)$  на  $I \times U$  над координатными окрестностями  $(U, x^i)$  многообразия  $M$ . [В обычном своем смысле гомотопия включает только непрерывность, но не дифференцируемость.] Таким образом, два отображения  $\psi$  и  $\varphi$  гомотопны, если одно можно гладко деформировать в другое (эта идея выступает нагляднее в специальном случае, когда оба отображения являются вложением  $M$  в  $N$ : по мере того как  $t$  изменяется от 0 до 1, мы можем наблюдать, как один образ  $M$  деформируется в другой).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Два многообразия  $M$  и  $N$  принадлежат одному и тому же гомотопическому типу (гомотопически эквивалентны), если существуют отображения  $\varphi : M \rightarrow N$  и  $\psi : N \rightarrow M$ , такие, что сложные отображения  $\psi \circ \varphi : M \rightarrow M$  и  $\varphi \circ \psi : N \rightarrow N$  гомотопны соответственно тождественным отображениям  $1 : M \rightarrow M$  и  $1 : N \rightarrow N$ .

Вскоре мы докажем, что  $\varphi^\#$  зависит только от гомотопического класса, к которому принадлежит  $\varphi$ , т. е.

<sup>1)</sup> Поскольку конечные точки  $0, 1 \in I$  не имеют окрестностей на  $I$ , гомеоморфных открытому множеству действительной оси  $E^1$ , то ни  $I$ , ни  $I \times M$  не есть многообразие. Они представляют собой примеры многообразий с границами.

что  $\varphi^\#$  не изменяется, если  $\varphi$  заменить отображением, гомотопным  $\varphi$ . Используя этот результат, мы видим, что для гомотопически эквивалентных пространств (определенных выше)  $\varphi^\# \circ \psi^\# = (\psi \circ \varphi)^\# = 1$  и  $\psi^\# \circ \varphi^\# = (\varphi \circ \psi)^\# = 1$ , так что  $\varphi^\#$  и  $\psi^\#$  есть взаимно обратные изоморфизмы, и мы можем установить *теорему гомотопической инвариантности*:

**ТЕОРЕМА.** Если  $M$  и  $N$  гомотопически эквивалентны, то  $H^p(M)$  и  $H^p(N)$  изоморфны.

Решающее утверждение здесь, в большей своей части, доказывается одинаково во всех теориях когомологий: именно, гомотопия  $h$  между двумя отображениями  $\varphi, \psi: M \rightarrow N$  используется для определения *цепной гомотопии*, именно множества отображений  $\mathcal{D}: \mathcal{F}_p(M) \leftarrow \leftarrow \mathcal{F}_{p+1}(N)$ , обладающих характеристическим свойством

$$d\mathcal{D} = \varphi_* - \psi_* - \mathcal{D}d. \quad (6.14)$$

Теперь нужно доказать утверждение, формулируемое ниже, разбивая доказательство на две леммы.

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Если отображения  $\varphi, \psi: M \rightarrow N$  гомотопны, то они индуцируют одинаковое отображение  $\varphi^\# = \psi^\#: H^p(M) \leftarrow H^p(N)$ .

**ЛЕММА 1.** Если отображения  $\varphi, \psi: M \rightarrow N$  гомотопны, то существуют отображения

$$\mathcal{D}: \mathcal{F}_p(M) \leftarrow \mathcal{F}_{p+1}(N), \quad (6.15)$$

удовлетворяющие уравнению (6.14).

**ЛЕММА 2.** Если два множества отображений  $\varphi_*, \psi_*: \mathcal{F}_p(M) \leftarrow \mathcal{F}_p(N)$  связаны свойством (6.14), то  $\varphi^\# = \psi^\#$ .

Утверждение очевидным образом вытекает из лемм, но было бы грешно перейти к ним, не отметив исключительной элегантности этого доказательства. Оно могло бы показаться, конечно, даже более замечательным, если бы и другие стандартные доказательства основных моментов теории гомологий не приобрели известной грациозности и силы после почти векового развития. Содержание утверждения действительно необычно, поскольку оно означает, что чисто алгебраическое соотношение (6.14) оказывается довольно удовлетворительным переводом того

глубоко геометрического суждения, что, скажем, два погружения не очень сильно различаются, если они связаны гомотопией [уравнения (6.12) и (6.13)].

Мы подготовимся к доказательству леммы 2, проверив, что уравнение (6.14) совместно со свойством  $d^2 = 0$ . Имеем:

$$d(d\mathcal{D}) = d\varphi^* - d\psi^* - d\mathcal{D}d = d\varphi^* - d\psi^* - \\ - (\varphi^* - \psi^* - \mathcal{D}d)d = (d\varphi^* - \varphi^*d) - (d\psi^* - \psi^*d) = 0.$$

Здесь существенную роль сыграла коммутативность диаграммы (6.7). Теперь допустим, что  $\alpha \in \mathcal{Z}_{p+1}(N)$  принадлежит гомологическому классу  $[\alpha] \in H^{p+1}(N)$ , и подвергнем  $\alpha$  операции (6.14). Поскольку  $d\alpha = 0$ , мы видим, что

$$\varphi^*\alpha - \psi^*\alpha = d\mathcal{D}\alpha,$$

или  $\varphi^*\alpha \sim \psi^*\alpha$ , или  $[\varphi^*\alpha] = [\psi^*\alpha] \in H^{p+1}(M)$ , или, наконец,  $\varphi^\#[\alpha] = \psi^\#[\alpha]$ , что и требовалось доказать.

Пока все эти доказательства, ведущие к теореме гомотопической инвариантности, были чисто алгебраическими.

Лемма 1 как раз и есть тот момент доказательства, когда дифференциальную геометрию нужно переложить на язык алгебры, а это делается по-разному в различных теориях когомологий. Однако задача столь четко сформулирована, что не представляет труда ее решить. Мы знаем, что  $\mathcal{D}$  есть отображение  $\mathcal{F}_p(M) \leftarrow \mathcal{F}_{p+1}(N)$  и что оно должно быть каким-то образом получено из гомотопии  $h: I \times M \rightarrow N$ . Первое приходящее на ум отображение — это  $h_*: \mathcal{F}_{p+1}(I \times M) \leftarrow \mathcal{F}_{p+1}(N)$ ; вопрос заключается в том, как, задавшись  $h_*\alpha$  на  $I \times M$ , можно

а) свести эту  $(p+1)$ -форму к  $p$ -форме и

б) спроектировать форму, заданную на  $I \times M$ , в форму на  $M$ ? Ответ на а без труда дает свертывание, так как на  $I \times M$  существует естественное векторное поле  $\partial/\partial t$ , определяемое структурой произведения  $I \times M$  и касательное к каждому слою  $I \times \{x\} \subset I \times M$ . В координатах  $tx^i$  это свертывание имеет просто вид

$$\langle \beta_{i_0 i_1 \dots i_p} \rangle \in \mathcal{F}_{p+1}(I \times M) \rightarrow \langle \beta_{0 i_1 \dots i_p} \rangle \in \mathcal{F}_p(I \times M).$$

Более общее определение для свертывания любой  $(p+1)$ -формы  $\gamma$  с векторным полем  $\mathbf{v}$  — следующее:

$$\langle \mathbf{v}, \gamma \rangle = v^i \gamma_{i(j_1 j_2 \dots j_p)} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}. \quad (6.16)$$

Таким образом, мы получили  $p$ -форму

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, h * \alpha \right\rangle,$$

но пока только на  $I \times M$ . Естественное проектирование

$$\pi: I \times M \rightarrow M: (t, x) \rightarrow x$$

не поможет свести ее на  $M$ , поскольку оно индуцирует отображения  $\pi^*: \mathcal{F}_p(I \times M) \leftarrow \mathcal{F}_p(M)$ , действующие в неправильном направлении: Поэтому мы рассмотрим отображения вложения

$$\mu_t: M \rightarrow I \times M: x \rightarrow (t, x). \quad (6.17)$$

Для каждой  $(p+1)$ -формы  $\alpha$  на  $N$  они дают полное семейство  $p$ -форм на  $M$ :

$$\mu_t * \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, h * \alpha \right\rangle.$$

Вместо того чтобы выбирать какую-либо одну из них, мы возьмем среднее, определив его как

$$\mathcal{D}\alpha = \int_0^1 dt \mu_t * \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, h * \alpha \right\rangle. \quad (6.18)$$

Чтобы доказать лемму 1 при таком определении отображения  $\mathcal{D}$ , мы должны вычислить  $d\mathcal{D}\alpha$  и убедиться в справедливости уравнения (6.14). Первый шаг, при котором мы воспользуемся только линейностью  $d$  и перестановочным соотношением  $d\mu * = \mu * d$ , состоит поэтому в следующем:

$$d\mathcal{D}\alpha = \int_0^1 dt \mu_t * d \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, h * \alpha \right\rangle. \quad (6.19)$$

Теперь нужно знать, как вычислить

$$d \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \beta^{p+1} \right\rangle$$

для  $(p+1)$ -формы  $\beta^{p+1}$  на  $I \times M$ . Используя локальные координаты  $z^i = (t, x^k)$  и разложение

$$\beta = \beta_{(i_0 i_1 \dots i_p)} dz^{i_0} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p},$$

мы получаем

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \beta \right\rangle = \beta_{0(k_1 \dots k_p)} dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p},$$

так что

$$\begin{aligned} d \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \beta \right\rangle &= \frac{\partial \beta_{0(k_1 \dots k_p)}}{\partial t} dt \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} + \\ &+ \frac{\partial \beta_{0(k_1 \dots k_p)}}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Для сравнения вычислим  $d\beta$ :

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{\partial \beta_{0(k_1 \dots k_p)}}{\partial x^l} dx^l \wedge dt \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} + \\ &+ \frac{\partial \beta_{(k_0 k_1 \dots k_p)}}{\partial t} dt \wedge dx^{k_0} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} + \\ &+ \frac{\partial \beta_{(k_0 k_1 \dots k_p)}}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{k_0} \wedge \dots \wedge dx^{k_p}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, d\beta \right\rangle &= - \frac{\partial \beta_{0(k_1 \dots k_p)}}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} + \\ &+ \frac{\partial \beta_{(k_0 k_1 \dots k_p)}}{\partial t} dx^{k_0} \wedge \dots \wedge dx^{k_p}. \end{aligned}$$

Таким образом, записываем

$$\begin{aligned} d \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \beta \right\rangle &= \frac{\partial \beta_{0(k_1 \dots k_p)}}{\partial t} dt \wedge dx^{k_1} \wedge \dots \wedge dx^{k_p} - \\ - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, d\beta \right\rangle &+ \frac{\partial \beta_{(k_0 k_1 \dots k_p)}}{\partial t} dx^{k_0} \wedge \dots \wedge dx^{k_p}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Последний член здесь равен  $\partial(\mu_t * \beta)/\partial t$ , а первый член отобразится в нуль под действием  $\mu_t^*$ , поскольку  $\mu_t^* dt = 0$ . Мы имеем, следовательно,

$$\begin{aligned} d\mathcal{D}\alpha^{p+1} &= \int_0^1 dt \frac{\partial}{\partial t} (\mu_t^* h^* \alpha^{p+1}) - \\ &- \int_0^1 dt \mu_t^* \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, h^* d\alpha^{p+1} \right\rangle = \\ &= \mu_1^* h^* \alpha^{p+1} - \mu_0^* h^* \alpha^{p+1} - \mathcal{D}d\alpha^{p+1}, \end{aligned}$$

Но так как  $h \circ \mu_1 = \varphi$  и  $h \circ \mu_0 = \psi$ , то это дает

$$d\mathcal{D}\alpha^{p+1} = \varphi * \alpha^{p+1} - \psi * \alpha^{p+1} - \mathcal{D}d\alpha^{p+1}, \quad (6.22)$$

что и требовалось доказать.

### Вычисления когомологий

Как мы отмечали выше, на  $n$ -мерном многообразии не существует исчезающих форм порядка  $(n + 1)$  и выше, поэтому не существует также и замкнутых форм высоких порядков, откуда вытекает следующий результат.

Если  $M$  есть  $n$ -мерное многообразие, то для  $p > n$

$$H^p(M) = 0. \quad (6.23)$$

Легко также вычислить группу  $H^0(M)$  для любого многообразия. Действительно, предположим, что  $f \in \mathcal{Z}_0(M)$ , т. е. пусть  $f$  — функция, удовлетворяющая условию  $df = 0$ . Тогда в любых двух точках, соединенных кривой  $c: I \rightarrow M$ , функция  $f$  имеет одно и то же значение, ибо

$$0 = \int_c df = f[c(1)] - f[c(0)].$$

В частности, если  $M$  — связное многообразие, то

$$H^0(M) = R, \quad (6.24)$$

где  $R$  — одномерное векторное пространство действительных чисел. Если  $M$  состоит из  $l$  связных компонент, то  $H^0(M) = R^l$  есть  $l$ -мерное векторное пространство. Базис для  $H^0$  в этом случае состоит из дифференцируемых функций  $f_j$  ( $j = 1, 2, \dots, l$ ), определяемых как  $f_j(x) = 1$ , если  $x$  находится в  $j$ -й связной компоненте многообразия  $M$ , и  $f_j(x) = 0$  на других компонентах.

Взятые вместе, результаты (6.23) и (6.24) дают все группы когомологий нульмерного многообразия  $\{p\}$ , состоящего из отдельной точки  $p$ . Это очень полезное замечание, потому что отображение

$$h: I \times E^n \rightarrow E^n: (t, x) \rightarrow tx \quad (6.25)$$

есть дифференцируемая гомотопия между тождественным отображением  $E^n \rightarrow E^n$  и отображением  $E^n \rightarrow E^n$ ,

при котором  $x \rightarrow 0$ . Поэтому  $\varphi : E^n \rightarrow \{p\} : x \rightarrow p$  и  $\psi : \{p\} \rightarrow E^n : p \rightarrow 0$  представляют собой пару отображений, показывающих, что  $E^n$  и  $\{p\}$  гомотопически эквивалентны, и поэтому имеют изоморфные группы когомологий. Мы доказали таким образом следующую лемму:

**ЛЕММА ПУАНКАРЕ.** Группы когомологий де Рама для  $E^n$  есть

$$H^0(E^n) = R, \quad H^p(E^n) = 0 \quad (p > 0). \quad (6.26)$$

Это, как известно, весьма сильная теорема. Она гласит, что каждый  $p$ -коцикл гомологичен нулю ( $p > 0$ ), т. е. если  $\alpha$  — любое дифференцируемое поле  $p$ -форм на  $E^n$ , удовлетворяющей условию  $d\alpha = 0$ , то  $\alpha = d\beta$ , где  $\beta$  — некоторое дифференцируемое поле  $(p - 1)$ -форм.

Элементарное рассуждение типа того, с помощью которого в механике выясняют, когда силу  $F = F^i dx^i$  можно получить из потенциала  $F = -dV$ , достаточно для вычисления групп  $H^p(S^1)$ , среди которых только группа  $H^1(S^1)$  не задается уравнениями (6.23) или (6.24). Пусть  $\varphi$  (заданное по модулю  $2\pi$ ) рассматривается как координата на  $S^1$ . Тогда если  $F$  есть некоторая 1-форма на  $S^1$ ,  $F = f d\varphi$ , то можно попытаться определить

$$V = - \int_0^\varphi F.$$

Если  $\oint F = 0$ , то  $V$  дифференцируемо и  $F = -dV$ .

В противном случае положим

$$a = \frac{\oint F}{\oint d\varphi} = \frac{1}{2\pi} \oint F,$$

откуда будет следовать

$$\oint (f - a d\varphi) = 0,$$

так что  $F = a d\varphi - dV$  для некоторого  $V$ . Таким образом, каждая 1-форма  $F$  на  $S^1$  гомологична (постоянному) множителю при  $d\varphi$ , т. е.

$$H^1(S^1) = R. \quad (6.27)$$



Этот результат можно в свою очередь обобщить с помощью теоремы гомотопической инвариантности на другие многообразия. Рассмотрим несколько подобных соотношений между многообразиями.

Полупрямую  $\{t \in E^1 \mid t > 0\}$  можно диффеоморфно отобразить на прямую  $E^1$  отображением  $t \rightarrow \ln t$ . Поэтому же любое полупространство  $\{x \in E^n \mid x^1 > 0\}$  имеет дифференцируемую структуру, изоморфную структуре  $E^n$ .

Далее, открытый шар или диск

$$D^n = \{x \in E^n \mid \|x\| < 1\} \quad (6.28)$$

диффеоморфен  $E^n$  ввиду преобразования

$$D^n \rightarrow E^n : x \rightarrow y = \frac{x}{1 - \|x\|}, \quad (6.29)$$

которое имеет дифференцируемое обращение

$$E^n \rightarrow D^n : y \rightarrow x = \frac{y}{1 + \|y\|}.$$

Эти пространства поэтому гомотопически эквивалентны точке  $\{p\}$ . Евклидово 3-пространство с вынутой осью  $z$  в цилиндрических координатах  $z, \varrho, \varphi$  представляет собой, очевидно, произведение полуплоскости  $(z, \varrho > 0)$  на окружность  $S^1$  с координатой  $\varphi$ . Оно поэтому гомотопически эквивалентно окружности  $S^1$ , так что на этом многообразии всякая замкнутая форма  $\alpha$  степени 2 или 3 является точной  $\alpha = d\beta$ . Ясно, что любое евклидово пространство  $E^n$  с вынутой  $(n - 2)$ -мерной осью вращения  $x_1 = x_2 = 0$  имеет опять те же самые группы когомологий, как и  $S^1$ , так что неточными могут оказаться замкнутые формы только степеней 0 и 1.

Несколько труднее показать, что

$$H^1(S^n) = 0 \quad (n \geq 2), \quad (6.30)$$

однако это вычисление демонстрирует связь между группой  $H^1(M)$  и  $\pi_1(M)$  для произвольного многообразия. Здесь  $\pi_1(M)$  — «фундаментальная группа» многообразия  $M$ , представляющая собой множество всех гомотопически эквивалентных классов замкнутых кривых в  $M$ , причем произведение двух замкнутых кривых, исходящих из одной точки, определяется как кривая, получаемая,

когда мы последовательно проходим эти кривые одну за другой. Пусть  $F = F_i dx^i$  — замкнутая 1-форма на  $M$ , так что  $dF = 0$ . Чтобы доказать справедливость  $H^1(M) = 0$ , мы должны убедиться, что  $F = -dV$ . Но

$$V(x) = - \int_{x_0}^x F \equiv - \int_{x_0}^x F_i dx^i \quad (6.31)$$

дает дифференцируемую функцию  $V$ , только если интеграл не зависит от выбора кривой, соединяющей точки  $x_0$  и  $x$ , или, что то же самое, если на всех замкнутых кривых

$$\int F = 0.$$

Доказывается, что для всех замкнутых кривых, гомотопных нулю, т. е. деформируемых в точку,

$$\int F = 0;$$

тогда равенство  $H^1(M) = 0$  следует из условия, что  $\pi_1(M) = 0$ , т. е. что все замкнутые кривые гомотопны нулю. Если  $c_1 : I \rightarrow M$  — замкнутая кривая, так что  $c_1(0) = c_1(1)$ , то утверждение, что  $c_1$  как замкнутая кривая гомотопна нулю, означает, что существует отображение стандартного 2-куба  $I^1 \times I^1$  в  $M$

$$c_2 : I^2 \rightarrow M,$$

такое, что  $c_2(1, t^2) = c_1(t^2)$ ,  $c_2(0, t^2) = x_0$  «нулевой кривой» и  $c_2(t^1, 0) = c_2(t^1, 1)$ . Тогда по теореме Стокса<sup>1)</sup> имеем:

$$\int_{c_1} F = \int_{c_2} dF = 0, \quad (6.32)$$

поскольку  $dF = 0$ . Итак, чтобы закончить вывод уравнения (6.30), мы должны показать, что  $\pi_1(S^n) = 0$  при  $n \geq 2$ , т. е. что « $n$ -сфера просто связна при  $n \geq 2$ ». Пусть  $c_1$  — произвольная замкнутая кривая в  $S^n$ . Тогда при  $n \geq 2$  будет существовать какая-нибудь точка  $x \in S^n$ , не

1) По поводу доказательства теоремы Стокса и определения теории кубических сингулярных гомологий см. работу Мизнера и Уилера [6], перепечатанную в «Геометродинамике» Уилера [7].

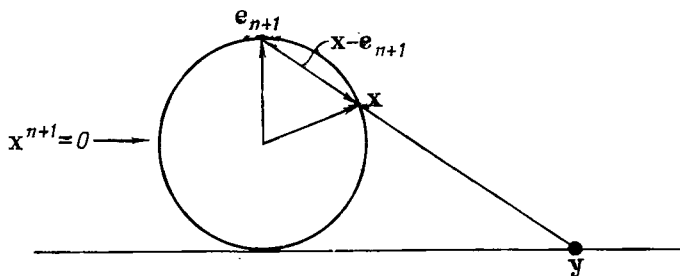
лежащая на кривой; пусть это будет северный полюс сферы,  $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ . Определим проектирование

$$S^n - \{e_{n+1}\} \rightarrow E^n : x \rightarrow y,$$

положив

$$y = e_{n+1} + 2 \frac{x - e_{n+1}}{1 - (e_{n+1} \cdot x)}, \quad (6.33)$$

где мы отождествили  $E^n$  с плоскостью  $y \cdot e_{n+1} = -1$  в  $E^{n+1}$  (фиг. 4). Это — диффеоморфизм  $S^n - \{e_{n+1}\}$



Фиг. 4. Это — диффеоморфизм  $S^n - \{e_{n+1}\}$  в  $E^n$ , так что  $S^n - \{e_{n+1}\}$  можно деформировать в точку [как  $E^n$  в (6.25)], вместе с  $c_1$ . Таким образом,  $c_1$  стягиваема в точку, и  $\pi_1(S^n) = 0$  ( $n \geq 2$ ).

в  $E^n$ , так что  $S^n - \{e_{n+1}\}$  может быть деформировано в точку [как  $E^n$  в (6.25)], увлекая вместе с собой и кривую  $c_1$ . Таким образом,  $c_1$  стягиваема в точку и  $\pi_1(S^n) = 0$  при  $n \geq 2$ .

## VII. Идеи клеточной когомологии

### Комбинаторная топология

Завершение вычисления групп когомологий для  $S^n$  представляет собой довольно фундаментальное предприятие и опирается на теорему, сравнимую по сложности с теоремой гомотопической инвариантности (именно, теорему о существовании и точности последовательностей относительных когомологий; см. ниже). В результате этого более полного развития теории когомологии мы приходим к *кограничному оператору*  $\delta$  (получаемому

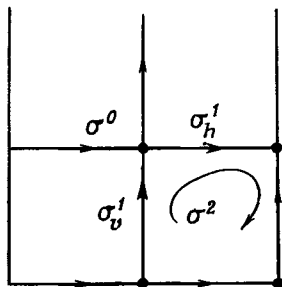
из  $d$ ). Оператор  $\delta$  допускает интуитивное истолкование и может быть использован для того, чтобы при помощи простых диаграмм представить систему гомоморфизмов между группами когомологий многообразия  $M$  и группами когомологий многообразий  $E^q$  и  $S^r$ , что в конечном счете позволяет вычислить  $H^p(M)$ .

Тор служит простым примером подобной процедуры. Разложим тор на четыре клетки,  $\sigma^2$ ,  $\sigma_h^1$ ,  $\sigma_v^1$  и  $\sigma^0$ , как показано на фиг. 5.

Будем  $n$ -клеткой  $\sigma^n$  в многообразии  $M$  называть подмногообразие многообразия  $M$ , диффеоморфное  $n$ -шару или диску  $D^n$ . Этот диффеоморфизм  $\varphi|D^n : D^n \rightarrow M$  является ограничением до  $D^n$  отображения  $\varphi : \bar{D}^n \rightarrow M$  замкнутого шара  $\bar{D}^n = \{x \in E^n \mid \|x\| \leq 1\}$  в  $M$  (отметим, что  $\varphi$  не обязательно должно быть одно-однозначно на границе  $S^{n-1}$  диска  $\bar{D}^n$ ). Отображение  $\varphi$  индуцирует отображения когомологий каждой из ячеек, лежащих на  $\varphi(\bar{D}^n)$  и  $\varphi(S^{n-1})$ , на группы когомологий многообразий  $\bar{D}^n$  и  $S^{n-1}$ . Чтобы формально получить гомоморфизм  $\delta$ , описывающий характер прикрепления  $D^n$  к  $S^{n-1}$  в  $\bar{D}^n$ , требуется определить группы относительных когомологий  $H^p(\bar{D}^n, S^{n-1})$ , которые будут описаны позднее. Это представление о прикреплении затем переносится (при помощи отображений  $\varphi$  для клеток, на которые разложено многообразие  $M$ ) на описание того, как любая  $(p-1)$ -клетка  $\sigma^{p-1}$  прикрепляется к различным  $p$ -клеткам  $\sigma^p$ , на замыкании которых они лежат. Это прикрепление описывается уравнением

$$\delta\sigma^{p-1} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \sigma_{\alpha}^p, \quad (7.1)$$

где  $a_{\alpha}$  — действительные числа. Таким путем доказывают, широко опираясь на алгебраические методы, что,



Фиг. 5. Если плоскость  $E^2$  спроектировать (вводя двойную периодичность) на тор  $T^2$ , то каждый квадрат плоскости будет соответствовать 2-клетке  $\sigma^2$ , каждый горизонтальный сегмент — 1-клетке  $\sigma_h^1$ , вертикальный сегмент — 1-клетке  $\sigma_v^1$ , а все вершины — 0-клетке  $\sigma^0$  на  $T^2$ .

отправляясь от теории кохомологий де Рама (или какой-либо другой), можно из нее получить другую теорию кохомологий, называемую *клеточной* кохомологией, которая порождает группы кохомологий, изоморфные группам исходной теории для каждого пространства, допускающего надлежащее разложение на клетки. Так как  $\sigma^p$  из уравнения (7.1) фигурируют в этой алгебре, то они означают там не подпространства  $\sigma^p$  многообразия  $M$ , а операторы, порождающие соответствующие группы кохомологий этих клеток. Выбор того или иного оператора может сводиться просто к выбору знака; этот знак на фиг. 5 указывают стрелки *ориентаций*. Вычисления в следующей лекции проводятся в рамках этой теории клеточных кохомологий; они послужат иллюстрацией того интуитивного геометрического смысла, который можно придать оператору  $\delta$ .

Задав разложение на клетки тора  $T^2$  или какого-либо другого многообразия, определяют *коцепь* как функцию, определяющую отображение от ячеек на группы коэффициентов (действительные числа в нашем случае или целые числа в более рафинированных исследованиях по топологии). Эта функция представляет собой  $p$ -коцепь  $c^p$ , если она исчезает везде, кроме  $p$ -клеток, и табулируется при помощи уравнения

$$c^p = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \sigma_{\alpha}^p, \quad (7.2)$$

которое указывает, что значение  $c^p$  на  $\sigma_{\alpha}^p$  равно  $a_{\alpha}$ , т. е. при помощи истолкования  $\sigma_{\alpha}^p$  как  $p$ -коцепи, значение которой на  $p$ -клетке  $\sigma_{\beta}^p$  равно  $\sigma_{\alpha}^p(\sigma_{\beta}^p) = \delta_{\alpha\beta}$ . Пусть  $C^p(M)$  — группа  $p$ -коцепей. Совместно с кограничным оператором  $\delta$ , удовлетворяющим, как будет показано, условию  $\delta^2 = 0$ , эти группы образуют коцепной комплекс

$$\overset{\delta}{\rightarrow} C^{p-1}(M) \overset{\delta}{\rightarrow} C^p(M) \overset{\delta}{\rightarrow} C^{p+1}(M) \overset{\delta}{\rightarrow}, \quad (7.3)$$

так что можно определить его группы кохомологий. Пусть  $B^p(M)$  есть  $\delta C^{p-1}(M)$ , т. е. группа всех  $p$ -коциклов  $c^p$ , являющихся кограницами,  $c^p = \delta c^{p-1}$ . Пусть  $Z^p(M)$  — ядро оператора  $\delta_p$ , т. е. группа всех  $p$ -коцик-

лов, для которых  $\delta c^p = 0$ . Определим

$$H^p(M) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}. \quad (7.4)$$

Главная теорема теории когомологий устанавливает, что для соответствующих  $M$  эта группа  $H^p(M)$  изоморфна группе  $H^p(M)$  исходной теории когомологий — в нашем случае теории де Рама. Мы переходим к вычислению группы  $H^p(T^2)$ . Из фиг. 5 видно, что  $\sigma_v^u$ , находясь на границах  $\sigma^2$  (левая и правая стороны квадрата, представляющего  $\sigma^2$ ), прикреплена к  $\sigma^2$  двумя различными способами: один раз с одинаковой, а другой — с противоположной ориентацией. Поэтому

$$\delta\sigma_v^1 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$$

Аналогично

$$\delta\sigma_h^1 = \sigma^2 - \sigma^2 = 0.$$

Таким образом,  $C^1(T^2)$  представляет собой двумерное векторное пространство, порождаемое при помощи  $\sigma_v^1$  и  $\sigma_h^1$ . Оно совпадает с  $Z^1(T^2)$ , поскольку каждая 1-коцепь есть 1-коцикл [имеет место равенство  $\delta c^1 = \delta(a\sigma_v^1 + b\sigma_h^1) = 0$ ]. В  $C^0(T^2)$ , порождаемой при помощи  $\sigma^0$ , вычисляем

$$\delta\sigma^0 = \sigma_v^1 - \sigma_v^1 + \sigma_h^1 - \sigma_h^1 = 0,$$

так что  $B^1(T^2) = \delta C^0(M) = 0$ , и поэтому  $H^1(T^2)$  есть двумерное векторное пространство, порождаемое гомологическими классами  $[\sigma_v^1]$  и  $[\sigma_h^1]$ . Аналогично  $H^0(T^2)$ , порождаемое при помощи  $[\sigma^0]$ , и  $H^2(T^2)$ , порождаемое при помощи  $[\sigma^2]$ , есть одномерные векторные пространства.

При выводе клеточной теории из теории де Рама в качестве одного из шагов вычисляют группы сфер  $S^n$ ; однако более поучительно вычислить  $H^p(S^n)$  из клеточных комплексов. Пусть  $S^n$  разложена на объединение нулевой клетки  $\sigma^0$ , состоящей из северного полюса  $e_{n+1}$  и  $n$ -клетки  $\sigma^n$ , покрывающей  $S^n - \{e_{n+1}\}$ . [Напомним диффеоморфизмы (6.29) и (6.33).] Затем, поскольку  $p$ -клеток при  $1 \leq p \leq n - 1$  нет, соответствующие группы  $C^p(S^n)$  и  $H^p(S^n)$  исчезают. Точно так же и  $B^n(S^n) = \delta C^{n-1}(S^n) = 0$ , так что  $\sigma^n$  не гомологична нулю

и порождает одномерное векторное пространство  $H^n(S^n)$ . Согласно уравнению (7.3), оператор  $\delta$ , действуя на  $p$ -цепь или  $p$ -клетку  $\sigma^p$ , производит только  $(p+1)$ -клетки, к которым  $\sigma^p$  прикреплена; тот факт, что  $p$ -клетка может находиться на границе некоторой  $(p+2)$ -клетки, игнорируется посредством алгебраизации этой идеи «прикрепления» в  $\delta$ . Таким образом,  $\delta\sigma^0 = 0$ , и группа  $H^0(S^n)$  также одномерна и имеет базис  $[\sigma^0]$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned} H^0(S^n) &= R = H^n(S^n), \\ H^p(S^n) &= 0 \quad (1 \leq p \leq n-1). \end{aligned} \tag{7.5}$$

### Относительная когомология

Для того чтобы найти кограничный оператор  $\delta$  в теории когомологий де Рама, мы должны определить группы  $H^p(X, A)$  для пар пространств с  $A \subset X$ . Некоторые предварительные замечания покажут, что размерности пространств  $X$  и  $A$  можно считать одинаковыми. Пусть  $A$  — замкнутое  $p$ -мерное подмногообразие некоторого  $n$ -многообразия  $X$ . Тогда локально  $A$  можно описать уравнениями  $x^{p+1} = x^{p+2} = \dots = x^n = 0$  в некоторой координатной окрестности  $U$  многообразия  $M$ , выбрав эту окрестность настолько малой, что в  $U$  не лежат никакие другие точки  $A$ . Тогда  $(x^{p+1})^2 + (x^{p+2})^2 + \dots + (x^n)^2 < \varepsilon^2$  локально определяет открытое подмногообразие многообразия  $X$  («растолстевшее»  $A$ ) и  $(t, x^i) \rightarrow tx^i$  есть гомотопия, стягивающая это  $n$ -мерное подмногообразие в  $U \cap A$ . Эти локальные конструкции составляют расслоенный пучок над  $A$ , являющийся открытым подмногообразием многообразия  $X$  и гомотопически эквивалентный многообразию  $A$ . Далее, замыкание такого «растолстевшего»  $A$  есть  $n$ -многообразие, границей которого,  $(x^{p+1})^2 + \dots + (x^n)^2 = \varepsilon^2$ , является замкнутое  $(n-1)$ -подмногообразие многообразия  $X$ . Поскольку группы гомологий сохраняются при отображениях в силу гомотопической эквивалентности, мы можем пользоваться «растолстевшим»  $A$  всегда, когда интересуемся группами многообразия  $A$ .

Пусть  $(X, A)$  — пара, состоящая из  $n$ -многообразия (или многообразия с границей)  $X$  и  $n$ -многообразия с гра-

ницей  $A$ , внутренность которого есть открытое подмногообразие, а граница — замкнутое  $(n - 1)$ -мерное подмногообразие многообразия  $X$ . Отображения пар

$$\varphi : (X, A) \rightarrow (Y, B) \quad (7.6)$$

есть отображения  $\varphi : X \rightarrow Y$ , которые, будучи ограниченными до  $A \subset X$ , дают отображения  $\varphi_A : A \rightarrow B$ . Аналогично имеем гомотопию  $h : (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$ . Легко проверить, что если  $\alpha$  есть  $(p + 1)$ -форма на  $Y$ , то цепная гомотопия  $\mathcal{D}_X$ , построенная из  $h$  в уравнении (6.18), и гомотопия  $\mathcal{D}_A$ , соответствующая ограничению  $h_{I \times A} : I \times A \rightarrow B$  гомотопии  $h$ , удовлетворяют соотношению

$$i^* \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_A j^*, \quad (7.7)$$

где  $i : A \rightarrow X$  и  $j : B \rightarrow Y$  — включения. Для этого необходимо только рассмотреть значение формы  $\mathcal{L}\alpha$  из уравнения (6.18) в точке  $x$  многообразия  $A$ ,  $i^* \mathcal{D}_X \alpha$ , и убедиться, что ее конструкция в правой части этого уравнения включает  $h$  как раз вблизи  $I \times \{x\} \subset I \times A$ , а поэтому  $\mathcal{D}_A$  и  $\alpha$  в точках вблизи  $h(I \times \{x\}) \subset B$ , и, таким образом,  $j^* \alpha$ . Следовательно, гомотопия пары дает пару надлежащим образом связанных цепных гомотопий  $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_A)$  в группах коцепей  $\mathcal{F}_p(X)$  и  $\mathcal{F}_p(A)$ .

Для пары  $(X, A)$  мы имеем не только коцепные комплексы

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{d} \mathcal{F}_p(X) \xrightarrow{d}, \\ & \xrightarrow{d} \mathcal{F}_p(A) \xrightarrow{d}, \end{aligned}$$

но можем также определить коцепной комплекс

$$\xrightarrow{d} \mathcal{F}_p(X, A) \xrightarrow{d} \mathcal{F}_{p+1}(X, A) \xrightarrow{d}, \quad (7.8)$$

где каждая коцепь  $\alpha \in \mathcal{F}_p(X, A)$  есть  $p$ -форма на  $X$ ,  $\alpha \in \mathcal{F}_p(X)$ , исчезающая на  $A$ . Для этого коцепного комплекса мы образуем группы  $H^p(X, A)$  относительных когомологий многообразия  $X$  по модулю  $A$ . Заметим, что  $p$ -форма  $\alpha$  в  $\mathcal{F}_p(X, A) \subset \mathcal{F}_p(X)$  может быть кограницей на  $X$ ,  $\alpha = d\beta$ , но не обязательно должна быть кограницей на  $X \bmod A$ . Для того чтобы  $\alpha \in B^p(X, A)$ , необходимо, чтобы мы могли выбрать  $\beta$  в  $\alpha = d\beta$  так, что  $\beta$  будет



обращаться в нуль на  $A$ . Эта возможность порождает гомоморфизм  $\delta$  в последовательности относительных когомологий

$$\rightarrow H^p(X) \xrightarrow{i^\#} H^p(A) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, A) \xrightarrow{j^\#} H^{p+1}(X) \rightarrow. \quad (7.9)$$

Отображения  $i^\#$  и  $j^\#$  индуцированы включениями

$$\begin{aligned} i &: A \rightarrow X, \\ j &: X \equiv (X, \varphi) \rightarrow (X, A), \end{aligned} \quad (7.10)$$

где  $\varphi$  — пустое множество. Кограничный оператор  $\delta$  определяется оператором  $d$  и процедурой расширения форм, определенных на  $A$ , до форм, определенных на  $X$ . Предположим, что  $[\alpha] \in H^p(A)$  и что мы хотим определить  $\delta[\alpha] \in H^{p+1}(X, A)$ . Выберем некоторое  $\alpha \in [\alpha]$ ; это будет  $p$ -форма, дифференцируемая на замкнутом множестве  $A$  и удовлетворяющая на нем условию  $d\alpha = 0$ . Мы распространим определение  $\alpha$  произвольным образом на форму  $\bar{\alpha}$  на  $X$ . Тогда, поскольку  $\alpha = \bar{\alpha}$  на  $A$ , то  $d\bar{\alpha}$  исчезает на  $A$ , т. е.  $d\bar{\alpha} \in \mathcal{F}_{p+1}(X, A)$ . Действительно,  $d(d\bar{\alpha}) = 0$ , так что  $d\bar{\alpha} \in Z^{p+1}(X, A)$ . Поскольку  $\bar{\alpha}$  не исчезает на  $A$  (если  $\alpha$  не исчезает), то нет необходимости в том, чтобы  $d\bar{\alpha}$  содержалось в  $B^{p+1}(X, A)$ , и определение

$$\delta[\alpha] = [d\bar{\alpha}] \in H^{p+1}(X, A) \quad (7.11)$$

оказывается нетривиальным (т. е. иногда  $\delta \neq 0$ ). В этом определении нужно проверить два обстоятельства: 1) независимость  $\delta[\alpha]$  от метода расширения  $\alpha$  на  $A$  до  $\bar{\alpha}$  на  $X$  и 2) независимость  $\delta[\alpha]$  от конкретного выбора  $\alpha \in [\alpha]$ , используемого в определении.

1. Предположим, что  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\alpha}'$  — две  $p$ -формы, определенные на  $X$  и удовлетворяющие на  $A$  условию  $\bar{\alpha} = \alpha = \bar{\alpha}'$ ; тогда  $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}'$  исчезает на  $A$  и поэтому лежит в  $\mathcal{F}_p(X, A)$ , так что  $d\bar{\alpha} - d\bar{\alpha}'$  находится в  $B^{p+1}(X, A)$  и  $[d\bar{\alpha}] = [d\bar{\alpha}'] \in H^{p+1}(X, A)$ .

2. Теперь допустим, что  $[\alpha_1] = [\alpha_2] \in H^p(A)$ , так что  $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$  на  $A$ . Мы должны убедиться, что

$[\overline{d\alpha}_1] - [\overline{d\alpha}_2] = [d\overline{d\beta}] = 0$ , но так как все расширения одинаково хороши, то расширим  $d\beta$  при помощи первоначального расширения формы  $\beta$ , заданной на  $A$ , до  $\overline{\beta}$ , заданной на  $X$ . Затем определим расширение  $\overline{d\beta}$  формы  $d\beta$  как  $\overline{d\beta} = d\overline{\beta}$ . Далее,  $d(\overline{d\beta}) = d^2\overline{\beta} = 0$  и  $[\overline{d\alpha}_1] = [\overline{d\alpha}_2]$ , что и требовалось показать.

В качестве *примера* рассмотрим пару  $[E^2, S^1]$ , причем здесь, используя гомотопическую эквивалентность, положим

$$S^1 = \{x \in E^2 \mid \|x\| \geq 1\}.$$

Если в качестве  $\alpha \in \mathcal{F}_1(S^1)$  выбрать форму

$$\alpha = d\varphi$$

( $r$  и  $\varphi$  — полярные «координаты»), то, очевидно,  $d\alpha = 0$ , и поэтому  $[\alpha] \in H^1(S^1)$ . Чтобы вычислить  $\delta[\alpha] \in H^2(E^2, S^1)$ , расширим определение  $\alpha$  до  $\overline{\alpha}$  на  $E^2$ . При этом на  $E^2$  нельзя выбрать  $\overline{\alpha} = d\varphi$ , так как  $d\varphi$  не дифференцируема в начале координат; поэтому положим

$$\overline{\alpha} = d\varphi \int(r),$$

где  $\int(r)$  — принадлежащая классу  $C^\infty$  функция, обращающаяся в нуль при  $r < 1/4$  и равная 1 при  $r > 3/4$ . Далее выберем из  $\delta[\alpha]$  элемент

$$\delta\alpha = d\overline{\alpha} = \Omega(r) dr \wedge d\varphi;$$

здесь  $\Omega(r) = \int'(r)$  — функция, обращающаяся в нуль при  $r < 1/4$  и  $r > 3/4$ , а следовательно, и на  $S^1$ , в силу чего  $\delta\alpha$  есть коцикл в  $Z^2(E^2, S^1)$ . Пытаясь найти  $\beta \in \mathcal{F}_1(E^2, S^1)$ , такую, что  $\delta\alpha = d\beta$ , можно взять для пробы

$$\beta = (\int(r) - 1) d\varphi,$$

которая обращается в нуль на  $S^1$  и дает  $\delta\alpha = d\beta$ , но тогда вблизи начала координат  $\beta = -d\varphi$  будет не дифференцируемой, и  $[\delta\alpha] = \delta[\alpha] \in H^2(E^2, S^1)$  не обращается в нуль.

Сформулируем основную теорему касательно групп  $H^p(X, A)$  (устанавливающую, что когомология де Рама удовлетворяет другим аксиомам теории когомологии).

**ТЕОРЕМА ТОЧНОСТИ.** Последовательность относительных когомологий (7.9) есть точная последовательность.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Последовательность групп и гомоморфизмов

$$\rightarrow G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \rightarrow \quad (7.12)$$

называется *точной* тогда и только тогда, когда для каждого  $n$  образ  $\varphi_{n-1}$  есть ядро  $\varphi_n$  (или, что эквивалентно, последовательность есть коцепной комплекс,  $\varphi^2 = 0$ , группы когомологий которого исчезают).

Доказательство теоремы точности предоставляется читателю в качестве упражнения. Мы будем использовать точность для вычисления групп когомологий сфер. Простейшие применения точных последовательностей заключаются в следующем:

1) точность последовательности

$$0 \rightarrow G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1}$$

означает, что отображение  $\varphi_n$  взаимно однозначно;

2) точность последовательности

$$G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \rightarrow 0$$

означает, что  $\varphi_n$  отображает  $G_n$  на  $G_{n+1}$ . Комбинируя 1 и 2, найдем, что из точности последовательности

$$0 \rightarrow G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \rightarrow 0$$

вытекает, что отображение  $\varphi_n$  есть изоморфизм.

Другое основное положение различных теорий когомологий, которому, как мы можем проверить, удовлетворяет теория де Рама, состоит в следующем.

**Теорема вырезания.** Если  $U$  — открытое подмногообразие многообразия  $X$ , замыкание которого содержится во

внутренности многообразия  $A$ , то отображение вложения

$$e: (X-U, A-U) \rightarrow (X, A)$$

индуцирует между соответствующими группами изоморфизмы

$$e\#: H^p(X-U, A-U) \xrightarrow{\cong} H^p(X, A). \quad (7.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $\alpha \in \mathcal{F}_p(X-U, A-U)$ . Тогда, поскольку  $\alpha$  исчезает на  $A-U$ , можно расширить  $\alpha$  до дифференцируемой формы  $\alpha \in \mathcal{F}_p(X, A)$ , если определить ее так, чтобы расширенная форма  $\alpha$  равнялась нулю на  $A$ . Это дает отображение

$$\mathcal{F}_p(X-U, A-U) \rightarrow \mathcal{F}_p(X, A),$$

которое индуцирует отображение

$$H^p(X-U, A-U) \rightarrow H^p(X, A),$$

обратное отображению  $e\#$ .

Теперь мы убедились, что теория когомологий де Рама удовлетворяет всем аксиомам Эйленберга — Стиррода.

### Когомология сфер

Разложим  $n$ -сферу  $S^n$  на три множества, которые мы обозначим при помощи гомотопически эквивалентных пространств: верхний колпак

$$E_+^n \approx \left\{ x \in S^n \subset E^{n+1} \mid x_{n+1} \geq -\frac{1}{2} \right\}, \quad (7.14)$$

нижний колпак

$$E_-^n \approx \left\{ x \in S^n \mid x_{n+1} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

и экватор

$$S^{n-1} \approx E_+^n \cap E_-^n = \left\{ x \in S^n \mid |x_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Множество

$$U = \left\{ x \in S^n \mid x_{n+1} < -\frac{1}{2} \right\} = S^n - E_+^n$$

может быть «вырезано» согласно

$$(S^n - U, E_-^n - U) = (E_+^n, S^{n-1}) \xrightarrow{e} (S^n, E_-^n),$$

чтобы получить изоморфизмы

$$e^\# : H^p(S^n, E_-^n) \approx H^p(E_+^n, S^{n-1}). \quad (7.15)$$

Эти изоморфизмы связывают две точные относительные кохомологические последовательности согласно диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \\ H^p(E_+^{n+1}) & \rightarrow & H^p(S^n) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(E_+^{n+1}, S^n) & \rightarrow & H^{p+1}(E_+^{n+1}) \\ & & & \nearrow \approx & & & \\ & & & e^\# & & & \\ H^p(E_-^{n+1}) & \xrightarrow{\delta} & H^{p+1}(S^{n+1}, E_-^{n+1}) & \xrightarrow{\approx} & H^{p+1}(S^{n+1}) & \rightarrow & H^{p+1}(E_-^{n+1}). \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & & & 0 \end{array} \quad (7.16)$$

Из уравнения (6.26), показывающего, какие группы евклидова пространства исчезают, вытекает, что выделенные отображения являются изоморфизмами. Таким образом, получаем изоморфизм

$$H^p(S^n) \approx H^{p+1}(S^{n+1}) \quad (p \geq 1). \quad (7.17)$$

Используя этот изоморфизм, мы вычислим все группы  $H^p(S^n)$ , выражая их через полученные ранее. На основании  $H^1(S^1) = R$  [см. (6.27)] находим, что

$$H^n(S^n) = R \quad (n \geq 1), \quad (7.18)$$

тогда как из уравнения (6.30), т. е. из

$$H^1(S^q) = 0 \quad (q \geq 2),$$

получим, что

$$H^p(S^{q+p-1}) = 0 \quad (p \geq 1, q-1 \geq 1),$$

или, что то же,

$$H^p(S^n) = 0 \quad (1 \leq p \leq n-1). \quad (7.19)$$

Конечно, мы уже знали, что  $H^{p+n}(S^n) = 0$  ( $p \geq 1$ ) и что  $H^0(S^n) = R$  ( $n \geq 1$ ). [Заметим, что  $S^0$  состоит из двух точек  $x_1 = \pm 1$ , поэтому  $H^0(S^0) = R^2$ .] Теперь же мы получили все гомотопические группы сфер.

КЛЕТКИ. Кограничный изоморфизм  $\delta$  в последовательности

$$0 \rightarrow H^{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} H^n(E_+, S^{n-1}) \rightarrow 0, \quad (7.20)$$

взятой из верхней линии диаграммы (7.16), отображает любой генератор  $\sigma^{n-1}$  одномерного векторного пространства  $H^{n-1}(S^{n-1})$  на генератор  $\sigma^n = \delta\sigma^{n-1}$  пространства  $H^n(E_+, S^{n-1})$ . В этом простейшем разложении на клетки он описывает, как граница  $S^{n-1}$  прикреплена к клетке  $(E_+, S^{n-1})$ . Кограничный оператор  $\delta$  в теории клеточных гомологий получается из этой модели при помощи отображений, описывающих вложение в  $X$  всех клеток разложения пространства  $X$ .

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ. Внешнее произведение  $\wedge$ , определенное на формах, порождает произведение  $\cup$ , определенное на кохомологических классах. Оно, по определению, для  $[\alpha^p] \in H^p(X, A)$  и  $[\beta^q] \in H^q(X, A)$  дает

$$[\alpha^p] \cup [\beta^q] \equiv [\alpha^p \wedge \beta^q] \in H^{p+q}(X, A). \quad (7.21)$$

Правило произведений (4.18) показывает, что это произведение полностью определено. Оно, конечно, сохраняется при всех гомоморфизмах  $\varphi^\#$ , индуцируемых отображениями (7.6).

#### Дальнейшие ссылки

Для более глубокого ознакомления с алгебраической топологией смотрите книгу Эйленберга и Стинрода [8]. Категориям и функторам, аксиомам и различным приложениям посвящена в ней последняя глава. Важны общие конструкции, получаемые из аксиом, такие, как последовательности Майера — Витора. Симплексы, как линейные, так и сингулярные, можно обойти. Гораздо предпочтительнее кубическая сингулярная теория ввиду двойственности кохомологии де Рама, связей с теорией гомотопий и, кроме того, как первый пример теории с целыми коэффициентами. Крайне важен вывод клеточной теории из аксиом: именно этим путем доказывается тот факт, что все теории согласуются на многих пространствах. Теория Чеха важна, поскольку она допускает связь с анализом

и дифференциальной геометрией. Библиографию по многим из этих тем, а также и предварительные сведения можно найти в книге Хокинга и Янга [3].

#### ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

1. Willmore T. J., Introduction to Differential Geometry, Oxford, 1959.
2. Auslander L., MacKenzie R. E., Introduction to Differential Manifolds, New York, 1963.
3. Hocking J. C., Young G. S., Topology, Reading, 1961.
4. Flanders H., Trans. Am. Math. Soc., 75, 311 (1953).
5. Misner C. W., Journ. Math. Phys., № 7 (1963), App. A.
6. Misner C. W., Wheeler J. A., Ann. Phys., 2, 564 (1957), secs. 3.3.5—3.3.7.
7. Wheeler J. A., J Geometrodynamics, New York, 1962.
8. Eilenberg S., Steenrod N., Foundation of Algebraic Topology, Princeton, 1952. (См. перевод.: Н. С т и н р о д, С. Э й л е н б е р г, Основания алгебраической топологии, М., 1953.)
- 9\*. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, М., 1964.
- 10\*. Схоутен И., Стройк Д., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. 1, М., 1939; т. 2, ИЛ, 1948.
- 11\*. Картан Э., Риманова геометрия в ортогональном репере, М., 1963.
- 12\*. Фавар Ж., Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, 1960.
- 13\*. Хелгасон С., Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964.
- 14\*. Лихнеровиц А., Теория связности в целом и группы голономии, ИЛ, 1960.
- 15\*. Де Рам Ж., Дифференцируемые многообразия, ИЛ, 1957.
- 16\*. Яно К., Бохнер С., Кривизна и числа Бетти, ИЛ, 1957.
- 17\*. С т и н р о д Н., Топология косых произведений, ИЛ, 1953.
- 18\*. Расслоенные пространства, сборник статей, ИЛ, 1958.
- 19\*. Г о д е м а н Р., Алгебраическая топология и теория пучков, ИЛ, 1961.
- 20\*. Бурбаки Н., Общая топология, М., вып. I, 1958; вып. II, 1959; вып. III, 1966.
- 21\*. Бурбаки Н., Векторные топологические пространства, ИЛ, 1959.
- 22\*. Александров П. С., Комбинаторная топология, М., 1947.
- 23\*. Куратовский К., Топология, т. 1, 2, изд-во «Мир», 1966.
- 24\*. Уилер Д., Гравитация, нейтрино, Вселенная, ИЛ, 1961.
- 25\*. Regge T., Nuovo Cimento, 19, 551 (1961).
- 26\*. Wheeler J. A., Geometrodynamics and the Issue of the Final State, in Relativity, Groups and Topology, ed. by C. DeWitt, B. DeWitt, New York, London, 1963.

<sup>1)</sup> Литература, отмеченная звездочкой, добавлена при переводе.  
 = Прим. ред.

# 8. МАССИВНЫЕ ЗВЕЗДЫ, РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ПОЛИТРОПЫ И ГРАВИТАЦИОННОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

*В. Фаулер*

W. A. F o w l e r, Rev. Mod. Phys., 36, 545 (1964)

## І. В в е д е н и е

Двадцать пять лет назад Роберт Оппенгеймер и его ученики Р. Сербер, Дж. Волков и Х. Снайдер [1—3] исследовали проблему равновесия и гравитационного сжатия массивных звезд на поздней стадии звездной эволюции, на которой ядерные источники энергии уже исчерпаны. Они сделали вывод, что «когда давление внутри звездной материи становится достаточно высоким, образуется новая фаза, состоящая из нейтронов... Для масс, превышающих  $\frac{3}{4}M_{\odot}$ , не существует устойчивых равновесных решений. Когда все термоядерные источники энергии исчерпаны, то достаточно тяжелая звезда будет коллапсировать. Если только деление звезды, обязанное вращению, или прямое излучение массы, или уменьшение массы в результате лучеиспускания не снизят массу звезды до величины порядка солнечной массы, то сжатие будет продолжаться неограниченно... Продолжительность коллапса для наблюдателя, движущегося вместе со звездной материей, будет конечной; внешний наблюдатель видит звезду асимптотически сжимающейся до ее гравитационного радиуса». Гению Р. Оппенгеймера мы обязаны тем, что эти несколько утверждений о массивных звездах входят в число тех немногих, которые сегодня считаются соответствующими истине.

В последнее время массивные звезды вновь возбудили интерес к себе в связи с замечанием Ф. Хойла и В. Фаулера [4] о том, что звезды с массой порядка  $10^8 M_{\odot}$  могут образовываться в центрах галактик или в межгалактическом пространстве и оказаться источниками гигантских



количеств энергии, которые мы связываем с излучением и энергетическими запасами *радиогалактик* и *радиозвезд*. (На нынешней стадии мы должны специально отмечать курсивом термины *галактики* и *звезды*, применяя их к радиоисточникам.) Анализ релятивистских и астрофизических аспектов всей ситуации был выполнен Фаулером и Хойлом в сотрудничестве с Джеффри и Маргарэт Бербидж [5].

Не существует убедительных данных в пользу того, что времена жизни *радиозвезд* больше чем  $10^5 - 10^6$  лет. Таким образом, полная энергия, испущенная ими, составляет  $\sim 10^{59}$  эрг по оценке, сделанной для ЗС 273 Шмидтом [6] и для ЗС 48 — Гринстейном и Мэтьюсом [7] в соответствии с наблюдаемой и теоретической светимостью этих источников, достигающей значений порядка  $10^{46}$  эрг/сек.

Следует отметить, что подобный выход энергии лежит вполне в пределах ядерных ресурсов звезды с массой  $M = 10^8 M_{\odot}$ , поскольку  $10^8 M_{\odot} c^2$  есть величина порядка  $10^{62}$  эрг, а на ядерное горение водорода идет примерно 1% энергии покоя. Превращение примерно 10% водорода в гелий в звезде с  $M = 10^8 M_{\odot}$  обеспечит наблюдаемые значения светимости *радиозвезд*. Отсюда возникает интересный вопрос относительно свойств массивных звезд в таких условиях, когда неприменимо упомянутое выше положение о том, что «ядерные источники энергии исчерпаны». В разделе II этой статьи мы рассмотрим частный, но важный аспект свойств массивных звезд, связанный с тем фактом, что гидростатическое равновесие в них требует, чтобы полная энергия их превышала энергию покоя составляющих звезду частиц или, говоря языком ядерной физики, чтобы «энергия связи» была отрицательна. Внутренняя структура массивных звезд будет описываться в приближении релятивистских политроп.

Следует подчеркнуть, что требование, налагаемое на общий запас энергии ( $\leq 10^{62}$  эрг), которое нашли Молдби, Мэтьюс и Моффет [8] для интенсивных протяженных радиоисточников, связанных с *галактиками*, не может быть удовлетворено одними ядерными запасами, так что при коллапсе массивных образований необходимо привлечь гравитационную энергию. В период ранних *звездных*

стадий радио- и оптическая светимости радиоисточников могут быть обеспечены ядерной энергией. Однако для источников, простирающихся далеко за границы *радиогалактик*, с которыми их отождествляют, необходимо обязательно учесть перенос гравитационной энергии от коллапсирующего ядра массивной звезды к ее оболочке и, возможно, к ее внешнему окружению. В разделе III мы рассмотрим возможный механизм подобного переноса энергии. Раздел IV отведен для резюме.

## II. Энергия связи массивной звезды в состоянии гидростатического равновесия

Фейнман<sup>1)</sup> и Айбен [9] показали, что если общерелятивистские члены в уравнении гидростатического равновесия играют заметную роль, то энергия связи массивной звезды должна быть отрицательной. Этот результат справедлив в некоторых случаях даже тогда, когда характерный релятивистский параметр  $2GM/Rc^2$  мал по сравнению с единицей. Мы попытаемся понять этот результат с самых простых позиций, рассматривая общерелятивистские эффекты в массивных звездах в первом порядке сверх классических ньютоновских членов.

Полная энергия звезды  $E$  за вычетом энергии покоя, если ее вещество окажется распыленным при нуле температуры, будет равна и противоположна по знаку энергии связи  $E_b$ :

$$E = -E_b = (M - M_0) c^2, \quad (1)$$

где масса звезды  $M$  выражена через радиус  $R$  и массу  $M_r$ , заключенную в соответственной части  $r$ :

$$M = \int_0^R dM_r = \int_0^R \rho dV = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr, \quad (2)$$

причем используются сферические координаты и  $r$ , как обычно, указывает «координатный» элемент объема  $dV$ . Заметим, что  $V = 4/3\pi r^3$  есть объем, заключенный внутри радиуса  $r$ . В последнем из равенств (2) использован

<sup>1)</sup> R. P. Feynman, частное сообщение (1963 г.).

тот факт, что

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (3)$$

где

$$\rho = \rho_0 + \frac{u}{c^2} \quad (4)$$

есть плотность массы — энергии, измеренная находящимся в той же точке наблюдателем и включающая как энергию покоя «атомов» звезды  $\rho_0$ , так и массовый эквивалент  $u/c^2$  плотности внутренней энергии атомных частиц и излучения. Масса покоя звезды равна

$$M_0 = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1/2} dV, \quad (5)$$

где теперь используется «собственный» элемент объема. Под «атомами» мы подразумевали выше ядра и то число электронов, которое необходимо для компенсации заряда ядер. Энергия покоя, так же как кинетическая энергия электрон-позитронных и других пар, порождаемых полем излучения, должна быть включена во внутреннюю энергию  $u$  в предположении, что пары аннигилируют при распылении до бесконечности. В принципе мы подсчитываем энергию связи атомных составляющих звезды в некоторый момент времени. Следовательно, она равна энергии, требуемой для распыления этих составляющих до бесконечности при нуле температуры без ядерных или атомных изменений. Несомненно, изменением атомной энергии при подобном распылении можно пренебречь; в большинстве случаев, хотя и не всегда, ядерные переходы при распылении также не будут происходить. Подобные изменения следует учесть, вычисляя энергию связи по отношению к ядрам, получившимся после распыления. В дальнейшем мы не будем явным образом касаться этой стороны дела.

Удобно исключить  $\rho_0$  при помощи (4), так что в дальнейшем мы будем пользоваться соотношением

$$E = \int_0^R u \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1/2} dV + \\ + \int_0^R \rho c^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1/2}\right] dV + E_{\text{дин.}} \quad (6)$$

Здесь мы учли динамическую часть энергии  $E_{\text{дин}}$ , обязанную макроскопическим движениям внутри звезды (ее можно было бы включить и в  $M$ ). В классическом приближении

$$E_{\text{дин}} = \int \frac{1}{2} \varrho r^2 dV.$$

В этом приближении можно пренебречь  $2GM_r/rc^2$  в первом, но не во втором интеграле. Таким образом,

$$E = \int_0^R u dV - \int_0^R \frac{GM_r}{r} \varrho dV + E_{\text{дин}} = \int_0^R 3\varepsilon p dV - \Omega + E_{\text{дин}}, \quad (7)$$

где  $\Omega$  — гравитационная энергия связи, которую мы считаем положительной величиной. Для политропы индекса  $n$ , как хорошо известно,  $\Omega$  задается в виде

$$\Omega = \frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} \rightarrow \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R} \quad (n=3). \quad (8)$$

В первом интеграле последнего из равенств (7) отношение  $\varepsilon = u/3p$  определяется состоянием материи и излучения в каждом слое звезды. Мы вычислили вклад в  $u$  и  $p$  от ядер, электронов, обязанных ионизации, электрон-позитронных пар и излучения в приближении невырожденного газа, справедливом для массивных звезд; в результате было найдено, что

$$\begin{aligned} \varepsilon - 1 &= \frac{u}{3p} - 1 = \\ &= \frac{\beta}{3} \left[ x - 3 - \frac{3}{2Z} \frac{n_0}{n_e} + z \left( 1 - \frac{n_0}{n_e} \right) \right] \left[ 1 + \frac{1}{Z} \frac{n_0}{n_e} \right]^{-1}, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $\beta$  есть отношение давления газа к общему давлению;  $x$  — средняя кинетическая энергия электронов и позитронов в единицах  $kT$ ;  $n_0$  — начальное число обязанных ионизации электронов в  $1 \text{ см}^3$ , необходимых для нейтрализации ядерного заряда  $Z$ ;  $n_e$  — полное число электронов и позитронов в единице объема и  $z = m_e c^2 / kT$ . Значения  $x$  за tabулированы Чандрасекаром [10] как  $U/PV$ . При температурах ниже  $10^9 \text{ }^\circ\text{K}$  и при достаточно высоких плотностях  $x = 3/2$ ,  $n_e = n_0$ , так что

$$\varepsilon - 1 = -\frac{1}{2} \beta \leq 0 \quad \text{при } T \leq 10^9 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (10)$$

При более высоких температурах и достаточно низких плотностях  $n_e \gg n_0$ , так что

$$\varepsilon - 1 = \frac{1}{3} \beta [x + z - 3] \geq 0. \quad (11)$$

При высоких температурах и высокой плотности может возникнуть ситуация, когда  $n_e \sim n_0$  и  $x \sim 3$ , так что  $\varepsilon - 1 \approx 0$ . Вообще говоря,  $\varepsilon$  возрастает от значения  $1/2$ , соответствующего очень низкой температуре, быстро достигает единицы в массивных звездах, затем вблизи  $T = 2 \cdot 10^9$  °К достигает максимума, равного  $\sim 1,2$ , и при еще более высоких температурах снова становится равным единице. Внутренняя энергия единицы объема  $u = 3\varepsilon p$  меняется внутри звезды прежде всего благодаря быстрому росту давления  $p$ , а не вследствие изменения  $\varepsilon$ . В дальнейшем мы будем пренебрегать изменением  $\varepsilon$  и используем среднее значение  $\bar{\varepsilon}$  для оценок порядков величин.

Перейдем теперь к классическому расчету  $E$  при помощи соотношения (7). Интегрирование  $3\varepsilon p dV$  можно выполнить, используя выражение для градиента давления в звезде. В классическом случае

$$\frac{dp}{dr} = -\varrho \left( g + \frac{dv}{dt} \right) = -f \varrho g = -f \varrho \frac{GM_r}{r^2}, \quad (12)$$

где  $\varrho$  — плотность,  $g = GM_r/r^2$  — ускорение силы тяжести и  $dv/dt$  — действительное ускорение вещества, измеряемое с положительным знаком во внешнем направлении, т. е. в направлении возрастания  $r$ . В данной статье мы не будем иметь дела с динамическими эффектами ( $dv/dt \neq 0$ ) иначе как через переменную  $f$ , введенную в градиент (12). При сжатии ( $dv/dt < 0$ ) будет  $f < 1$ , при взрыве ( $dv/dt > 0$ ) — напротив,  $f > 1$ . Так же, как и для  $\varepsilon$ , мы введем среднее значение  $\bar{f}$ .

Тогда классический расчет дает

$$\begin{aligned} \int_0^R 3\varepsilon p dV &= 3\varepsilon p V \Big|_{V=0}^{p=0} - \int_0^R 3\varepsilon V dp - \int_0^R 3pV d\varepsilon \approx \\ &\approx \int_0^R 4\pi r^3 \varepsilon f \varrho g dr \approx \bar{\varepsilon} \bar{f} \int \frac{GM_r}{r} \varrho dV = \bar{\varepsilon} \bar{f} \Omega, \end{aligned} \quad (13)$$

где легко заметить приближения, заключающиеся в отбрасывании вариаций  $\varepsilon$  и  $f$ , в частности приравнивание нулю  $d\varepsilon$ . Итак,

$$E \approx (\bar{\varepsilon}f - 1)\Omega + E_{\text{дин}} \sim (\bar{\varepsilon}\bar{f} - 1)\Omega + E_{\text{дин}}. \quad (14)$$

Отметим, что произведение  $\varepsilon f$  надо усреднить по  $p dV$  и что второе приближение следует применять с осторожностью. В случае гидростатического равновесия во всей звезде  $f = 1$ ,  $E_{\text{дин}} = 0$ ,

$$E_{\text{равновесн}} \approx (\bar{\varepsilon} - 1)\Omega \approx -\frac{1}{2}\bar{\beta}\Omega \quad \text{при } T \leq 10^9 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (15)$$

Таким образом, энергия связи классической звезды равна  $1/2\Omega$  при  $\bar{\beta} = 1$ , если можно пренебречь давлением излучения (небольшие звезды). С другой стороны, энергия связи исчезает при  $\bar{\beta} = 0$ , если давление излучения оказывается доминирующим (весьма массивные звезды). При температурах выше  $10^9 \text{ }^\circ\text{K}$  образование электрон-позитронных пар может привести к звездам, полная энергия которых положительна, т. е. энергия связи отрицательна, как это видно из соотношения (11). Если эта энергия не может быть приобретена после прохождения звездой связанных состояний квазигидростатического равновесия при низких температурах, то  $\varepsilon f$  будет оставаться меньше единицы. Это значит, что по крайней мере часть звезды должна сжиматься довольно быстро, причем внутренние области, где температура выше и  $\varepsilon$  имеет большее значение, будут наиболее склонны к быстрому сжатию.

В общерелятивистском случае мы заменяем (12) равенством

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = & -f\rho \frac{GM_r}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi p r^3}{M_r c^2}\right) \times \\ & \times \left(1 - \frac{2GM_r}{rc^2}\right)^{-1} \equiv -f\rho \frac{gM_r}{r^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что эффективная гравитационная постоянная  $g$  расходится в пределе  $(2GM_r/rc^2) \rightarrow 1$ . Таким образом, при подходящих обстоятельствах из наиболее слабого взаимодействия гравитация превращается в наиболее сильное. Под интегралом в (6) стоит  $\sqrt{1 - (2GM_r/rc^2)}$

в знаменателе, поэтому мы разделим равенство (16) на этот множитель и разложим обе стороны его в ряд:

$$dp \left( 1 + \frac{GM_r}{rc^2} \right) \approx -f\rho \frac{GM_r}{r^2} \left( 1 + \frac{p}{\rho c^2} + \frac{4\pi p r^3}{M_r c^2} + \frac{3GM_r}{rc^2} \right) dr. \quad (17)$$

Так же как и в классическом случае, мы используем (17) для вычисления первого интеграла в (6). Далее, разлагая второй интеграл в ряд, получаем окончательно

$$\begin{aligned} E = & (\overline{\varepsilon f} - 1) \Omega + \frac{4\pi G}{c^2} \overline{\varepsilon (f+1)} \int pr M_r dr + \\ & + \frac{16\pi^2 G}{c^2} \overline{\varepsilon (f-1)} \int \rho p r^4 dr + \\ & + \frac{12\pi G^2}{c^2} \overline{\left( \varepsilon f - \frac{1}{2} \right)} \int \rho M_r^2 dr + E_{\text{дин}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где различные средние  $\overline{\varepsilon f}$  и  $\overline{\varepsilon}$  берутся с различными весовыми функциями, но мы не будем останавливаться на этом пункте. Исследуем результат (18) в случае гидростатического равновесия, когда  $f = 1$ ,  $E_{\text{дин}} = 0$ . Можно принять приближение  $\overline{\varepsilon} = 1$  во всех членах, кроме первого, в котором  $\varepsilon - 1 = -\frac{1}{2}\overline{\beta}$ , причем  $\overline{\beta}$  является некоторым средним:

$$\beta \approx \left( \frac{\eta_n^{1/4}}{\mu} \right) \left( \frac{T}{T_c} \right)^{(n-3)(n+1)} \quad \text{при} \quad T \leq 10^9 \text{ }^\circ\text{K}. \quad (19)$$

Здесь  $\mu$  — средний молекулярный вес, одинаковый по всей звезде, и  $T_c$  — температура в центре. Уравнение (19), как можно показать, приближенно верно для больших звезд ( $M \geq 10^3 M_\odot$ ) при центральных температурах  $< 10^9$  °К. Величина  $\eta_n$  задается выражением

$$\eta_n = \frac{3}{4\pi} (n+1)^3 \frac{R^4}{aG^3} \left( \frac{M_n}{M} \right)^2, \quad (20)$$

$$\eta_n = 335 \left( \frac{M_\odot}{M} \right)^2 \quad \text{при} \quad n = 3, \quad (21)$$

где  $M_n$  есть постоянная интегрирования, определяющая шкалу масс для дифференциального уравнения второго порядка, описывающего политропу индекса  $n$ . Например,  $M_3 = 2,018$ . Вторая константа связана со шкалой радиусов. В дальнейшем она будет обозначаться через  $R_n$ ;

например,  $R_3 = 6,897$ . Для политропы индекса 3 внутри звезды  $\bar{\beta}$  будет постоянна, и мы имеем

$$\bar{\beta} = \beta \frac{4,3}{\mu} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2} \ll 1,$$

$$\beta \sim 10^{-2}, \quad M \sim 10^6 M_{\odot}, \quad \sim 10^{-4}, \quad M \sim 10^{10} M_{\odot}. \quad (22)$$

Для всех массивных политроп  $\bar{\beta} < 1$ . Во всяком случае, для состояния гидростатического равновесия уравнение (18) принимает вид

$$E_{eq} = -\frac{1}{2} \bar{\beta} \Omega + \frac{8\pi G}{c^2} \int p r M_r dr + \frac{6\pi G^2}{c^2} \int \rho M_r^2 dr. \quad (23)$$

В массивных звездах конвекция велика, а при значении  $\beta \sim 0$  это наиболее близко соответствует политропной структуре с индексом  $n=3$ . Для  $n=3$

$$\Omega = \frac{1}{R} \frac{3}{2} GM^2,$$

и интегралы в (23) можно подсчитать численно, используя табл. 6 книги Эддингтона [11]. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{E_{eq}}{Mc^2} &= -\frac{3}{4} \beta \left( \frac{GM}{Rc^2} \right) + 5,1 \left( \frac{GM}{Rc^2} \right)^2 = \\ &= -\frac{3}{8} \beta \left( \frac{R_g}{R} \right) + 1,3 \left( \frac{R_g}{R} \right) \quad (n=3), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $R_g = (2GM/c^2) = 3,0 \cdot 10^5 (M/M_{\odot})$  см является граничным гравитационным радиусом политропы.

Уравнение (24) дает первые два члена общего разложения через безразмерный параметр

$$\frac{R_g}{R} = \frac{2GM}{Rc^2} = \left( \frac{32\pi G^3}{3c^6} M^2 \bar{\rho} \right)^{1/3} = \left[ \frac{\bar{\rho} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^2}{1,8 \cdot 10^{16}} \right]^{1/3}. \quad (25)$$

Обычно полагают, что общерелятивистские эффекты становятся важными, когда значение этого параметра достигает порядка единицы, т. е. когда

$$\bar{\rho} = 1,8 \cdot 10^{16} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^2 \text{ г/см}^3. \quad (26)$$

Иначе говоря, для звезд с массой порядка солнечной критическая средняя плотность будет величиной



порядка  $10^{16}$  г/см<sup>3</sup>, что превосходит ядерные плотности ( $\sim 2 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>). Но для массивных звезд с  $M = 10^8 M_{\odot}$  средняя критическая плотность будет порядка единицы, в центре плотность будет составлять около  $100$  г/см<sup>3</sup>, и общерелятивистские эффекты будут существенны даже в тех интервалах, в которых атомные и ядерные свойства материи хорошо известны. Кроме того, уравнение (24) показывает, что общерелятивистский член второго порядка в энергии связи звезды будет сравним с нерелятивистским членом первого порядка тогда, когда

$$\frac{2G M}{Rc^2} \approx 0,3\beta \approx \frac{1,3}{\mu} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2},$$

$$\frac{2GM}{Rc^2} \approx 3 \cdot 10^{-4} \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad M = 10^8 \cdot M_{\odot}, \quad n = 3, \quad (27)$$

или

$$\bar{\rho} \approx \frac{4,0 \cdot 10^{16}}{\mu^3} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2} \text{ г/см}^3,$$

$$\approx 3,2 \cdot 10^{17} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2} \quad \text{для} \quad \mu = \frac{1}{2},$$

$$\approx 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ г/см}^3 \quad \text{для} \quad M = 10^8 \cdot M_{\odot}, \quad n = 3. \quad (28)$$

Величина  $E_{eq}/Mc^2$  достигает минимума при плотности, равной одной восьмой от указанной, т. е.  $2GM/Rc^2 = 0,15\beta$ . Отсюда можно видеть, что общерелятивистскими эффектами нельзя пренебречь даже на относительно ранних стадиях сжатия массивных звезд. Ясно также, что метод возмущений, применявшийся при нахождении членов второго порядка в (24), в этом случае достаточно точен. Структура звезды оказывается структурой классической политропы, В то же время классический результат для массивных звезд, удерживаемых посредством давления излучения, приводит к почти нулевой энергии связи. Поэтому при подсчете энергии связи в случае звезд аномально больших радиусов и малых плотностей доминирующим становится релятивистский член второго порядка.

Для многих целей, в частности, связанных с учетом скоростей ядерных процессов, бывает удобно заменить радиус  $R$  в параметре коллапса через центральную тем-

пературу. Это осуществить совсем нетрудно, поскольку радиус политропы индекса  $n$  связан с центральной температурой  $T_c$  соотношением

$$\begin{aligned} R &= \frac{GMR_n}{(n+1)M_n} \left( \frac{\mu\beta}{\mathfrak{R}T} \right)_c = \\ &= \left[ \frac{3G}{4\pi(n+1)a} \right]^{1/2} \left( \frac{M}{M_n} \right)^{1/2} \frac{R_n}{T_c} = \\ &= \frac{5,83 \cdot 10^9}{(T_g)_c} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \text{ см для } n=3. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (23), (29), получаем для трех политроп

$$\begin{aligned} \frac{E_{eq}}{Mc^2} &= -\frac{9}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)} \frac{\mathfrak{R}}{\mu c^2} T_c + \\ &+ \frac{19}{35} (2\pi)^{1/2} \frac{a^{1/2} G^{3/2} M}{c^4} T_c^2 = \\ &= -2,1 \cdot 10^{-13} T_c + 5,0 \cdot 10^{-27} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) T_c^2 \\ &\text{для } n=0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{eq}}{Mc^2} &= -3 \frac{M_3}{R_3} \frac{\mathfrak{R}}{\mu c^2} T_c + 3 \frac{M_3}{R_3} \frac{a^{1/2} G^{3/2} M}{c^4} T_c^2 = \\ &= -1,6 \cdot 10^{-13} T_c + 3,3 \cdot 10^{-27} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) T_c^2 \text{ для } n=3, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_{eq}}{Mc^2} &= -\frac{9}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} \frac{\mathfrak{R}}{\mu c^2} T_c + \\ &+ \frac{2}{15} (6\pi)^{1/2} \frac{a^{1/2} G^{3/2} M}{c^4} T_c^2 = \\ &= -1,3 \cdot 10^{-13} T_c + 2,2 \cdot 10^{-27} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) T_c^2 \text{ для } n=5. \end{aligned} \quad (32)$$

В численных выражениях мы положили здесь  $\mu = 1/2$ , поскольку при низких температурах — до того как начнется выгорание водорода — важную роль играет первый член. Из выражений (30) — (32) ясно, что отношение второго члена к первому мало зависит от структуры политропы.

Первые члены выражений (30) — (32) указывают на линейное уменьшение полной энергии звезды с центральной температурой (увеличение энергии связи) в процессе сжатия звезды из дисперсного состояния. Это соответствует классическому случаю (15). Второй член в каждом из соотношений (30) — (32) обусловлен общерелятивистскими поправками первого порядка. Этот член положителен. При достаточно высоких температурах присутствие его ведет к положительным значениям полной энергии и отрицательным значениям энергии связи, как это показал более точный анализ вопроса (Айбен [9]). Соотношения (30) — (32) воспроизводят численные результаты Айбена с хорошей точностью.

Минимум полной энергии достигается при температуре

$$T_c = 2,5 \cdot 10^{13} \frac{M_\odot}{M} \quad (\text{для } n = 3); \quad (33)$$

энергия вновь переходит через нуль и становится положительной в области

$$T_c = 5 \cdot 10^{13} \frac{M_\odot}{M} \quad (n = 3). \quad (34)$$

На фиг. 1 приведены эти зависимости для случаев  $M = 10^{+6} M_\odot$ ,  $M = 10^7 M_\odot$ ,  $M = 10^8 M_\odot$ .

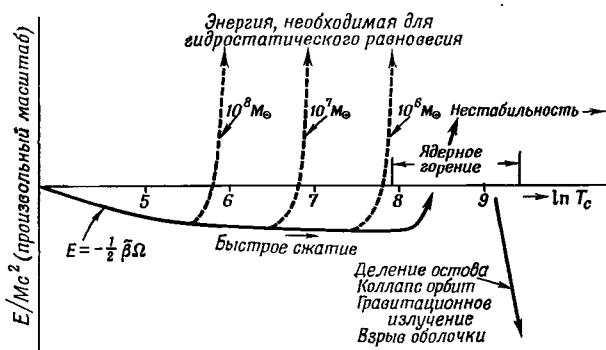
Во всех трех случаях энергия, необходимая для установления гидростатического равновесия, достигает больших и положительных значений до того, как начнется ядерное горение водорода при  $8 \cdot 10^7$  °К, как было установлено Хойлом и Фаулером [4]. Нулевой энергии отвечают температуры  $5 \cdot 10^7$ ,  $5 \cdot 10^6$ ,  $5 \cdot 10^5$  °К соответственно.

Члены второго порядка в (24) и (30) — (32) указывают, что для поддержания давления, обеспечивающего гидростатическое равновесие при общерелятивистских условиях ( $T_c > 5 \cdot 10^{13} (M_\odot/M)$  °К), необходимы большие количества внутренней энергии. Могут ли ядерные реакции обеспечить такую энергию? Превращение водорода в гелий освобождает 0,7% энергии, соответствующей массе покоя сгорающей части звезды. Верхний предел определяется концентрацией водорода в центральных областях звезды ( $\sim 0,3 M$ ), которые могут выгореть до того, как гравитационные красные смещения приостановят выделение энер-

гии (он составляет примерно 15%). Таким образом, выгорание водорода может дать  $10^{-3} Mc^2$  и, следовательно,

$$\frac{E_{eq}}{Mc^2} \approx 3,3 \cdot 10^{-27} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) T_c^2 \leq 10^{-3} \quad (n=3). \quad (35)$$

По оценке Хойла и Фаулера (1963 г.), выгорание водорода через CNO-цикл в массивных звездах, в которых



Ф и г. 1. Эволюция массивных звезд.

Энергия, необходимая для сохранения гидростатического равновесия в массивных звездах, изображена пунктирной кривой как функция центральной температуры во время сжатия. Изображен также возможный ход эволюции во время быстрого сжатия (до начала ядерного горения) и последующего (за ядерным горением) коллапса. Нестабильность в период ядерного горения акцентирована.

$\rho_c \sim 0,01 \div 0,1 \text{ г/см}^3$ , происходит при  $T_c \sim 8 \cdot 10^7 \text{ К}$ , так что

$$\frac{M}{M_{\odot}} \leq 10^8 \quad (4 \text{ } ^1\text{H} \rightarrow \text{}^4\text{He}). \quad (36)$$

Ядерное выгорание гелия и последующие изотермические реакции в недрах звезды освобождают энергию всего лишь порядка  $E = 3 \cdot 10^{-4} Mc^2$  и происходят при еще более высоких температурах, когда нужная для равновесия энергия действительно очень велика. Таким образом, из соотношения (35) следует, что в случае звезд с  $M \geq 10^8 M_{\odot}$  ядерные реакции не могут увеличить внутреннюю энергию до величины, необходимой для гидростатического равновесия.

Вдобавок возникает еще один вопрос: будет ли при  $M < 10^8 M_\odot$  гидростатическое равновесие устойчивым или неустойчивым? В рамках общей теории относительности эти проблемы весьма трудны, но обычный классический анализ [11] показывает, что при  $E_{eq} > 0$  находящаяся в равновесии звезда не устойчива по отношению к внезапным (адиабатическим) сжатиям или расширениям\*). При внезапном сжатии адиабатическое повышение давления недостаточно велико для установления нового состояния равновесия, так что сжатие будет продолжаться. Точно так же за внезапным расширением должно следовать дальнейшее расширение.

Как видно из фиг. 1, в случае звезд с  $M > 10^6 M_\odot$  сжатие начинается до начала ядерного горения. Таким образом, разумно предположить, что сжатие будет продолжаться и во время ядерного горения, хотя оно вполне может несколько замедлиться вследствие выделения ядерной энергии.

Учитывая эти обстоятельства, вернемся к результату (18) и положим  $f < 1$ . Тогда из (18) видно, что положительные релятивистские члены могут быть скомпенсированы первым членом и полная энергия останется постоянной, как и должно быть в случае, когда ядерная энергия мала по сравнению с энергией, нужной для равновесия. Положим теперь во всех членах (18)  $\bar{\epsilon} \sim 1$ .

Численный подсчет (для  $n=3$ ) дает

$$\frac{E}{Mc^2} = -\frac{3}{2}(1-\bar{f})\frac{GM}{Rc^2} + (9,2\bar{f}-4,1)\left(\frac{GM}{Rc^2}\right)^2 + \frac{E_{\text{дин}}}{Mc^2} \quad (37)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{E}{Mc^2} = & -3,8 \cdot 10^{-14}(1-\bar{f})\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2} T_c + \\ & + 6,0 \cdot 10^{-27}(\bar{f}-0,45)\left(\frac{M}{M_\odot}\right) T_c^2 + \frac{E_{\text{дин}}}{Mc^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

В случае  $M = 10^8 M_\odot$  первый и последний члены взаимно сокращаются, если взять  $\bar{f} = 0,7$  при  $T = 10^9$  °К и  $\bar{f} = 0,6$  при  $T = 2 \cdot 10^9$  °К. Отметим, что общерелятивистский второй член переходит через нуль и становится

\*) См. поправку автора в конце статьи, стр. 292.—Прим. ред.

отрицательным при  $\bar{f} \leq 0,45$ . Эти результаты показывают, что ситуация, промежуточная между гидростатическим равновесием ( $\bar{f} = 1$ ) и свободным падением ( $\bar{f} = 0$ ), может привести к постоянной полной энергии. Так как  $\bar{f}$  убывает, то необходимо лишь, чтобы  $E_{\text{дин}}$  возрастала, что, конечно, имеет место. Таким образом, как видно из фиг. 1, быстрое сжатие со скоростью в несколько долей от скорости свободного падения будет иметь место для массивных звезд с  $M \geq 10^6 M_{\odot}$  на ранних стадиях их эволюции.

Характерное время свободного падения для внешних слоев звезды, обладавшей вначале радиусом  $R$ , будет определяться выражением

$$\tau_{ff} = \left( \frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2} \approx 6 \cdot 10^{-14} R^{3/2} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/2} \text{ сек.} \quad (39)$$

Возьмем значение  $R$  в тот момент времени, когда  $E_{\text{eq}}/Mc^2$  достигает минимума:

$$R \approx \frac{1}{0,15\beta} R_g \approx 0,8 R_g \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \approx 2,5 \cdot 10^5 \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{3/2} \text{ см.} \quad (40)$$

Оно равно

$$2,5 \cdot 10^{14} \text{ см для } M = 10^6 M_{\odot},$$

$$2,5 \cdot 10^{17} \text{ см для } M = 10^8 M_{\odot},$$

$$2,5 \cdot 10^{20} \text{ см для } M = 10^{10} M_{\odot}.$$

Эти значения приближенно соответствуют политропным структурам с индексом 3; их можно несколько увеличить, когда индекс превосходит 3, например  $R \sim 10^{18}$  см для  $M \sim 10^8 M_{\odot}$ . Следовательно, время свободного падения для внешнего излучающего слоя звезды составит

$$\tau_{ff} \approx 2,5 \cdot 10^{-13} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^{7/4} \text{ (лет).} \quad (41)$$

Этот промежуток времени равен

$$7,5 \cdot 10^{-3} \text{ лет для } M = 10^6 M_{\odot},$$

$$25 \text{ лет для } M = 10^8 M_{\odot},$$

$$7,5 \cdot 10^4 \text{ лет для } M = 10^{10} M_{\odot}$$

и может оказаться несколько больше для политроп с индексами  $n > 3$ . Кроме того, в свете предыдущих соображений действительный промежуток времени будет несколько больше времени свободного падения, в особенности для внешних областей звезды, где  $f$  может лишь незначительно отличаться от единицы в начальной стадии сжатия, на которую приходится наибольшая доля всего времени. Однако даже при  $f = 0,99$  получается увеличение лишь в  $(1 - f)^{-1/2}$ , т. е. лишь в 10 раз. Учитывая все эти факты, найдем, что время коллапса, например, для  $M = 10^8 M_{\odot}$  может достигать  $10^3$  лет.

Таким образом, ясно, что только в случае самых больших рассматриваемых масс, именно порядка  $10^{10} M_{\odot}$ , периоды коллапса будут сравнимы с интервалами в  $10^5 - 10^6$  лет, которые приписываются звездным стадиям радиосточников [6, 7]. В случае меньших масс необходимо пожертвовать специфической симметрией, присущей механизму сферического коллапса, и обратиться к другим механизмам, которые могут вести к периоду квазиустойчивости для *радиозвезд*.

Одна из таких возможностей заключается в учете вращения. Большой начальный вращательный момент может привести к конфигурации типа плоского диска; такой диск может распасться на малые звезды, характеристические периоды устойчивой эволюции которых сравнимы с наблюдаемыми периодами жизни. Несколько более медленные вращения, несомненно, способны замедлить сжатие вдоль двух осей, перпендикулярных оси вращения. Сжатие внешних слоев вещества вдоль третьей координатной оси будет затруднено, если появится турбулентность, вызванная катастрофическим коллапсом центральных областей звезды, о чем будет сказано в разделе III.

Приняв, что вращение, турбулентность, конвекция или другие механизмы могут обеспечить для коллапса внешних областей массивных звезд такие периоды времени, какие предполагаются для *радиозвезд*, можно воспользоваться первоначальными оценками Хойла и Фаулера и показать, что ядерные запасы энергии звезды могут удовлетворить наблюдаемой светимости, если не условиям гидростатического равновесия. По этим оценкам светимость

массивной звезды равна

$$L \approx 5 \cdot 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} L_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{38} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ эрг/сек} \approx \\ \approx 2 \cdot 10^{46} \text{ эрг/сек для } M = 10^8 M_{\odot}, \quad (42)$$

если основываться на политропной структуре индекса 3; в противоположность оценке радиуса звезды оценка (42) мало зависит от индекса или, если об этом говорить, от более сложных особенностей внутренней структуры. Когда публиковались эти оценки [4], еще не были известны столь высокие оптические светимости, а обнаруженные радиосветимости не превышали  $10^{45}$  эрг/сек. Впоследствии было показано, что *радиозвезды* являются внегалактическими объектами и что их оптические светимости в самом деле достигают величин порядка  $10^{46}$  эрг/сек.

Поскольку энергию порядка  $10^{-3} M c^2 \approx 2 \cdot 10^{51} (M/M_{\odot})$  эрг может дать горение водорода, то из сравнения с уравнением (42) становится ясным, что продолжительность процесса не зависит от массы и дается соотношением

$$\tau (4^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}) \approx 10^{13} \text{ сек} \approx 3 \cdot 10^5 \text{ лет}. \quad (43)$$

Это значение хорошо согласуется с оценками времени жизни *радиозвезд*. Превращение водорода в центральных областях не обязательно должно происходить все это время. Реальное значение промежутка времени определяется размерами звезды, конвекцией тепла изнутри к поверхности и излучением энергии во внешнее пространство. В модели, обсуждаемой в разделе III, ядерная энергия, выделяемая при горении водорода, излучается в течение короткого времени. Однако в течение  $3 \cdot 10^5$ -летнего периода, когда сжатие затрудняется вращением и другими причинами, требования светимости должны удовлетворяться в целом скорее за счет энергии ядерных, чем гравитационных ресурсов звезды.

Другой интересный вопрос, связанный с квазиустойчивым звездным состоянием, касается классического периода пульсаций массивных звезд. Этот период равен

$$P \sim (G\bar{\beta}\bar{\rho})^{-1/2} \sim 10 \text{ лет} \quad (44)$$

при  $\bar{\beta} \sim 10^{-3}$  и  $\bar{\rho} \sim 10^{-7}$  г/см<sup>3</sup>. Указанное значение средней плотности  $\bar{\rho}$  достигается в случае  $M = 10^8 M_{\odot}$  как раз



после того момента сжатия, когда  $E_{eq} = 0$ . Смит и Хоффлит [12] сообщили о наблюдениях близких периодов флуктуаций светимости радиозвезды 3С 273.

### III. Выделение энергии при коллапсе ядра массивной звезды

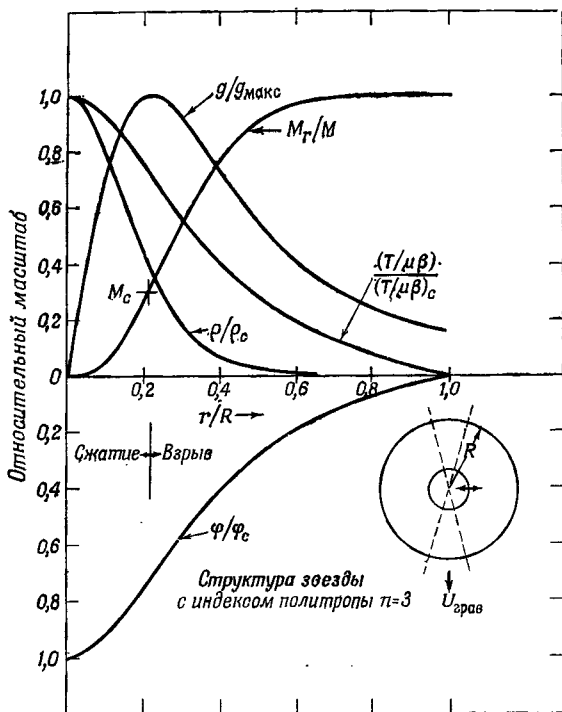
Мишель недавно рассмотрел коллапс массивных звезд после исчерпания ядерной энергии [13]. На основании общих соображений он высказал мнение, что центральное ядро звезды будет коллапсировать гораздо быстрее, чем внешние области, так что для такого процесса будет характерно отделение ядра от оболочки. Кроме того, если энергия каким-либо образом переносится от ядра к оболочке, как предполагали Хойл и Фаулер [4], то оболочка может в конце концов оторваться от ядра. Эти соображения можно пояснить фиг. 2, на которой изображено поведение ряда переменных: плотности  $\rho$ , эффективной температуры  $T/\mu\beta$ , массы  $M_r$ , заключенной внутри области радиусом  $r$ , и гравитационного потенциала  $\phi$  (все переменные берутся в классическом приближении). Фиг. 2 строилась для политропы с индексом  $n = 3$ , поскольку эта политропа будет отвечать, хотя бы приближенно, внутренней структуре звезды в период квазистатического состояния, когда сжатию препятствуют вращение, турбулентность и конвекция.

На фиг. 2 отчетливо видно уменьшение величин  $\rho$ ,  $T/\mu\beta$  и  $|\phi|$  и рост  $M_r$  при увеличении  $R$ .

Как видно из чертежа, при малых  $r$  гравитационное ускорение растет линейно, достигает максимума при  $r = 0,22R$  и затем начинает убывать.

При исчезновении внутреннего давления область, где гравитационное ускорение линейно, будет коллапсировать гомологически ( $\dot{r} \approx g \sim r$ ); отсюда можно заключить, что область внутри  $g = g_{\max}$  будет коллапсировать примерно сходным образом, но с большей быстротой, чем внешние области, где  $g$  меньше. Из фиг. 2 видно, что значению  $g_{\max}$  соответствует  $M_r \sim 0,3 M$ , так что ниже мы примем, что масса коллапсирующего ядра равна именно этой величине:  $M_c \sim 0,3 M$ .

Мишель предположил, что потеря энергии коллапсирующим ядром, например посредством нейтринного излучения, уменьшает также его гравитационную массу, ввиду



Ф и г. 2. Изменение переменных  $\rho$ ,  $T/\mu\beta$ ,  $\phi$ ,  $M_r$ ,  $g$  в зависимости от роста радиуса в политропе с индексом  $n = 3$ .

Масса ядра, содержащая все вещество внутри поверхности  $g = g_{\text{макс}}$ , как видно из чертежа, равна  $M_c = 0,3 M$ . Можно видеть также потери на гравитационное излучение, сопровождающее коллапс ядра и взрыв оболочки.

чего абсолютное значение гравитационного потенциала внутри оболочки в свою очередь оказывается сниженным. Если в давлении решающую роль играет излучение ( $\beta \ll 1$ ), то энергия связи оболочки в момент перед коллапсом ядра будет приближенно равна нулю, так что

уменьшение гравитационной потенциальной энергии при коллапсе ядра приводит к избытку энергии, который расходуется на взрыв оболочки.

С другой стороны, в работе [5] было показано, что потеря энергии даже посредством наиболее эффективного механизма — порождения пар нейтрино — антинейтрино:

$$e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}, \quad (45)$$

не дает существенного уменьшения запасов массы — энергии в ядрах звезд с  $M > 10^6 M_{\odot}$ . В случае столь больших масс расчет [5] можно несколько упростить. Для наблюдателя, движущегося вместе с выделенным элементом объема внутреннего вещества звезды, потеря энергии в результате процесса (45) составит

$$\frac{dU_{\nu}}{dt} \sim \frac{4,3 \cdot 10^{15}}{\rho} T_c^9 \text{ эрг} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{сек}^{-1} \text{ для } T_c > 2. \quad (46)$$

Для того же наблюдателя связь между плотностью и температурой окружающей среды весьма близка к адиабатической (как это показывает окончательный результат), именно

$$\rho \sim 2,8 \cdot 10^5 \left( \frac{M_{\odot}}{M_c} \right)^{1/2} T_c^3. \quad (47)$$

Градиент давления в веществе оказывается достаточным для компенсации классического гравитационного члена в уравнении (16). Однако в период коллапса релятивистские члены становятся сравнимыми по величине с классическими, а это нарушает баланс так, что ускорение, направленное к центру звезды, становится сравнимым со скоростью классического свободного падения. Это нетрудно видеть из уравнения (12), увеличив  $g$  до  $\sim 2g$  и положив  $dp/dr \sim -\rho g$ ; тогда получим  $dv/dt \sim -g$ , так же как в классическом случае мы получали  $dp/dr \sim 0$ . Следовательно, можно использовать формулу для классического свободного падения

$$dt \approx \frac{1}{(24\pi G \rho)^{1/2}} \cdot \frac{d\rho}{\rho}. \quad (48)$$

Полную потерю энергии можно вычислить, подставив оценку (47) в соотношение (46) и интегрируя  $dU_{\nu}/dt$  по  $dt$ ,

выраженному через (48). Можно возразить, что эту потерю энергии следует вычислять, используя временную координату внешнего наблюдателя. Однако красное смещение в  $du_v/dt$  и замедление времени  $dt$  компенсируют друг друга, по крайней мере в первом порядке. При этом необходимо только положить верхнюю границу  $t$  равной тому конечному значению, которое измерит сопутствующий наблюдатель к тому моменту, когда ядро звезды достигнет гравитационного радиуса  $2GM_c/c^2$ . Это значение времени можно вычислить через граничную плотность, задаваемую соотношением (26).

Следует напомнить, что до коллапса плотность в ядре по существу постоянна ( $0,4 < \rho/\rho_c < 1$ ) и остается постоянной во время гомологического сжатия. Таким образом, интегральная потеря энергии равна

$$\begin{aligned}
 E_v &= \int_0^{t_{\text{макс}}} \frac{dU_v}{dt} dt \sim \int_0^{\rho_{\text{макс}}} \frac{dU_v/dt}{(24\pi G\rho)^{1/2}} \frac{d\rho}{\rho} \sim \\
 &\sim 90 \left(\frac{M_c}{M_\odot}\right)^{3/2} \int_0^{\rho_{\text{макс}}} \rho^{1/2} d\rho \sim 1,5 \cdot 10^{26} \left(\frac{M_\odot}{M_c}\right)^{3/2} \text{ эрг/г.} \quad (49)
 \end{aligned}$$

Потеря энергии на единицу массы покоя имеет вид

$$\frac{\Delta M_c}{M_c} = \frac{E_v}{c^2} \sim 1,7 \cdot 10^5 \left(\frac{M_\odot}{M_c}\right)^{3/2}. \quad (50)$$

Отсюда найдем, что при  $M_c = 0,3M$ ,  $M = 10^8 M_\odot$  потеря массы в ядре составит в долях около  $10^{-6}$  от массы покоя, а для больших масс — даже еще меньше. Реакция (45) в предложенном Мишелем механизме переноса энергии от ядра к оболочке не будет эффективна. Хойл и Фаулер указали на гравитационное излучение как на возможный способ потери энергии, однако числовые оценки не были даны [4]. Гелл-Манн<sup>1)</sup> подчеркнул важность гравитационного излучения особенно в случае вращающихся звезд, когда вращение может привести к делению коллапсирующего ядра звезды. Мы не будем здесь подробно обсуждать промежуток времени, в течение которого развивается деформация ядра, приводящая в конце

<sup>1)</sup> M. G e l l - M a n n, частное сообщение (1963 г.).

концов к делению, и остановимся только на одном пункте. Именно в течение этого интервала времени, как полагают, ядерная энергия ядра переносится конвекцией и излучением к внутренним частям оболочки. Конвекция будет интенсивной, а температурные градиенты — велики и расстояния — незначительными по сравнению с предыдущим случаем передачи энергии на поверхность сферической невращающейся звезды в течение периода коллапса.

Величину потери энергии путем гравитационного излучения для вращающейся двойной звезды можно вычислить в первом приближении, используя известные соотношения, данные Ландау и Лифшицем [15]. Пусть деление дает две сферические компоненты с массами  $^{1/2}M_c$ , и пусть расстояние между их центрами равно  $R_f$ . Положим, что  $R_f$  существенно больше предельного гравитационного радиуса каждой компоненты  $GM_c/c^2$ . Допустим, что сразу после деления каждая компонента коллапсирует с быстротой свободного падения до этого значения радиуса. Для локального наблюдателя соответствующий промежуток времени примерно составит

$$\begin{aligned} \tau_{ff} &\sim \left(\frac{R_f}{R_g}\right)^{1/2} \left(\frac{R_f}{c}\right) \sim 6 \cdot 10^{-14} R_f^{3/2} \left(\frac{M_\odot}{M_c}\right)^{1/2} \text{ сек} \sim \\ &\sim \left(\frac{R_f}{R_g}\right)^{3/2} \left(\frac{R_g}{c}\right) \sim 10^{-5} \left(\frac{R_f}{R_g}\right)^{3/2} \left(\frac{M_c}{M_\odot}\right) \text{ сек}, \quad (51) \end{aligned}$$

где  $R_g$  теперь означает  $2GM_c/c^2$  и равно сумме гравитационных радиусов двух компонент. Поскольку при сферическом коллапсе квадрупольного момента нет, гравитационное излучение в этом случае отсутствует.

Из дальнейшего будет видно, что время свободного падения для каждой компоненты бинарной системы будет малым по сравнению с временем коллапса бинарной орбиты, так что мы получаем бинарную систему двух коллапсирующих звезд, вращающихся с той угловой скоростью, которую они имели во время деления. Квадрат этой угловой скорости равен

$$\omega_f^2 = \frac{GM_c}{R_f^3}. \quad (52)$$

Как известно, величина излученной гравитационной энергии есть

$$\frac{dU_g}{dt} = \frac{2G}{5c^5} M_c^2 r^4 \omega^6 = \frac{2}{5} G^4 M_c^5 / c^5 r^5. \quad (53)$$

Результирующая скорость сжатия орбиты равна

$$-\frac{dr}{dt} = \frac{2}{5} \left( \frac{2GM_c}{rc^2} \right)^3 c = \frac{2}{5} \left( \frac{R_g}{r} \right)^3 c, \quad (54)$$

а локальный промежуток времени для коллапса орбиты

$$\begin{aligned} \tau_{\text{orb}} &= \frac{5}{2c} \int_{R_g}^{R_f} \left( \frac{r}{R_g} \right)^3 dr \sim \frac{5}{8} \left( \frac{R_f}{R_g} \right)^3 \frac{R_f}{c} \sim \\ &\sim \frac{5}{8} \left( \frac{R_f}{R_g} \right)^4 \frac{R_g}{c} \sim 10^{-5} \left( \frac{R_f}{R_g} \right)^4 \left( \frac{M_c}{M_\odot} \right) \text{ сек.} \end{aligned} \quad (55)$$

В нашем приближении  $R_f > R_g$ . Если время коллапса орбиты должно соответствовать времени жизни *радиозвезд*  $\approx 10^{13}$  сек, то  $R_f$  будет величиной порядка

$$500R_g \text{ для } M_c = 0,3 \cdot 10^8 M_\odot.$$

Значение  $R_f$  определяется величиной угловой скорости  $\omega_0$  и радиусом  $R_0$  в тот момент времени, когда уплотняющаяся часть вещества отрывается от окружающей среды, так что ее угловой момент в дальнейшем остается постоянным. Итак, при  $\rho_0 = M / (4/3\pi R_0^3) \sim M_c / R_0^3$  получим

$$\omega_f^2 R_f^4 = GM_c R_f = \omega_0^2 R_0^4$$

или

$$\frac{R_f}{R_g} = \frac{2\omega_0^2 R_0^4}{c^2 R_g^2} = \frac{\omega_0^2 c^2}{2G^2 M_c^2 / 3 \rho_0^{4/3}} \sim 500. \quad (56)$$

При  $\rho_0 = 10^{-24}$  г·см<sup>-3</sup> и  $M_c = 0,3 \cdot 10^8 M_\odot$  из (56) получаем

$$\omega_0 = 3 \cdot 10^{-19} \text{ рад/сек.}$$

Это относительно низкое значение указывает, что первоначально угловая скорость конденсирующейся системы должна быть незначительной или система должна частично потерять скорость перед отрывом от окружающей среды.

Полная потеря энергии составит

$$\begin{aligned}
 U_g &= \int_{R_f}^{R_g} \frac{dU_g}{dt} dt = \frac{1}{8} GM_c^2 \int_{R_f}^{R_g} \frac{dr}{r^2} = \\
 &= \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{R_g}{R_f} \right) M_c c^2 \sim 0,02 M_c^2. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Здесь мы положили  $M_c = 0,3M$  и  $R_g < R_f$ .

Следует отметить, что половина потери энергии приходится на период коллапса от  $R_f$  до  $2R_g$ . Поэтому приведенный подсчет с точностью до первого порядка дает, по-видимому, верный по порядку величины результат. Мы видим, что главная доля гравитационного излучения (90% при  $10R_g > r > R_g$ ) испускается в течение короткого промежутка времени в конце коллапса бинарной орбиты. Это означает резкую инъекцию энергии как раз тогда, когда ядерная энергия оказалась исчерпанной вследствие излучения в течение квазизвездного периода. Можно предположить, что подобная инъекция энергии способна привести к образованию протяженного радиоисточника.

Следует отметить, что потеря энергии, даваемая формулой (57), как раз равна разности классических энергий связи двух компонент в промежутке радиусов  $R_g$  и  $R_f$ . Доступная энергия дается классической величиной, но механизм излучения носит релятивистский характер: энергию из ядра уносят гравитоны. Угловое распределение гравитационного излучения вращающейся бинарной системы имеет вид  $1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta$ , так что излучение в направлении полюса в 8 раз превышает излучение в экваториальном направлении. Взаимодействие гравитонов с оболочкой звезды очень сложно, но отрыв оболочки должен происходить в основном в направлении полюсов, как следует из только что сказанного. (Гравитационная сила имеет дальнедействующий характер.) Это наводит на мысль об определенном соответствии с тем известным фактом, что интенсивные протяженные радиоисточники состоят из двух компонент, которые сохранили импульс при разделении.

По оценкам [12], энергия, передаваемая оболочке, составляет примерно 40%, так что энергия взрыва обо-

лочка будет равна

$$E \sim 8 \cdot 10^{-3} M c^2 \sim 10^{52} \frac{M}{M_{\odot}} \text{ эрг},$$

$$\sim 10^{60} \div 10^{62} \text{ эрг при } M = 10^8 \div 10^{10} M_{\odot}. \quad (58)$$

В случае ядерных источников, как мы выяснили,  $E \sim 10^{-3} M c^2$ . Здесь доля переданной энергии оказывается почти в 10 раз большей, однако все же не вполне достигает 1% всей энергии покоя.

Этот результат удовлетворяет условиям, предъявленным к запасу энергии наиболее интенсивных из известных радиоисточников, только в случае, если масса первичной излучающей энергию области приближалась к  $10^{10} M$ . Вполне возможно, что гравитационное излучение играет главную роль в потере энергии массивными коллапсирующими звездами, поскольку оно в 10 раз эффективнее ядерных механизмов в период, предшествующий состоянию окончательного коллапса. Согласно обычной теории гравитации, после достижения гравитационного радиуса  $R_g$  невозможно никакое излучение. С другой стороны, Хойл и Нарликар [16] предложили теорию, в которой масса — энергия может излучаться даже после того, как массивная звезда достигла состояния окончательного коллапса. Только дополнительный анализ и наблюдения могут выяснить, необходимы ли какие-либо модификации ортодоксальной эйнштейновской теории гравитации.

В то же время остается открытым целый ряд важных вопросов. Каково происхождение рассматриваемых массивных образований? Образуются ли массивные звезды в центре галактик или в межгалактическом пространстве? Образуются ли они из облаков газа или из звездных систем? Превращаются ли радиозвезды в конце концов в протяженные радиоисточники (возможность чего отмечается в этой статье) или между ними нет связи? Дает ли расчет в первом порядке приближения, проводимый в рамках обычной теории, правильный порядок величины гравитационного излучения? Каким образом энергия взрывающейся оболочки превращается с высокой эффективностью в энергию магнитных полей и частиц высокой энергии, что необходимо, если радиоизлучение носит синхротронный характер? Связаны ли эти процессы с удар-



ными волнами или с физикой высоких энергий через высокоэнергичный распад какой-то не открытой еще частицы?

Двадцать пять лет назад Роберт Оппенгеймер начал со своими учениками исследования массивных звезд. Ныне интенсивные радиоисточники могут, возможно, служить доказательством того, что подобные звезды весьма большой массы действительно существуют. Если это так, то дальнейшее изучение этих своеобразных объектов может дать ответ на ряд трудных и интересных проблем.

#### IV. Р е з ю м е

Излагаемые ниже выводы относятся в основном к звездам с массой  $10^8 M_{\odot}$  и вообще к звездам с массами более  $10^6 M_{\odot}$ .

1. В невращающейся сферически симметричной массивной звезде становятся существенными общерелятивистские факторы, а гравитационный коллапс наступает при радиусе  $R \sim 10^{18}$  см и следующих условиях в центре: плотностью  $\rho \sim 4 \cdot 10^{-10}$  г/см<sup>3</sup>, температурой  $T_c \sim 2,5 \cdot 10^5$  К. Коллапс до размеров гравитационного радиуса  $R_g \sim 3 \cdot 10^{13}$  см происходит за локальный промежуток времени порядка  $\sim 10^3$  лет для внешних областей и порядка  $\sim 1$  года для внутренних областей. Эффекты типа красного смещения, достигающие большой величины, препятствуют выделению значительных количеств энергии из подобных быстро коллапсирующих систем.

2. Представляется вероятным предположение, что вращение вместе с внутренней турбулентностью и эффектами конвекции препятствуют быстрому гравитационному коллапсу в массивных звездах. Вращение может привести к делению быстро коллапсирующего ядра до того, как коллапс оболочки набирает достаточно большую скорость. Во время образования вытянутой деформации, приводящей к делению, в центре выделяется ядерная энергия порядка  $10^{-3} M c^2 \sim 10^{59}$  эрг, которая передается оболочке. Эта энергия достаточна для объяснения светимости радиозвезд в течение  $10^5 - 10^6$  лет. После деления обе компоненты бинарной системы коллапсируют за время  $\sim 0,1$  года до их гравитационных радиусов. Вращающаяся бинарная

система будет окружена турбулентной квазиустойчивой оболочкой излучающего вещества, в котором происходит значительная конвекция. Другие, более сложные несферические внутренние структуры могут, по-видимому, поддерживать излучающую оболочку.

3. Возможен такой подбор значений параметров, что время жизни бинарной системы также окажется в пределах  $10^5$ — $10^6$  лет. В течение сравнительно короткого промежутка времени ( $\sim 0,1$  года) в конце этого периода гравитационное излучение вращающейся бинарной системы, которая действительно обладает квадрупольным моментом, инжектирует в вещество оболочки энергию порядка  $\sim 10^{-2} M c^2 \sim 10^{60}$  эрг. Мы предполагаем, что результирующий взрыв в направлении полюсов может привести к образованию интенсивных протяженных радиоисточников, состоящих по крайней мере из двух компонент.

4. Из обсуждаемой модели следует, что гравитационные источники энергии массивной звезды превосходят ее ядерные запасы примерно лишь в десять раз. Только 1% энергии, связанной с массой покоя, может быть излучен в том или ином виде. Эта и некоторые другие проблемы кратко затронуты в конце раздела III.

В заключение автор выражает свою благодарность за дискуссию по данным вопросам ряду коллег — физикам и астрономам Калифорнийского технологического института и Вильсоновской и Паломарской обсерваторий. Особенно автор признателен проф. М. Гелл-Манну, который вновь поднял вопрос о гравитационном излучении, в частности излучении вращающихся бинарных систем, и в сотрудничестве с которым автор провел оценки роли гравитационного излучения в коллапсирующих системах.

Автор весьма обязан также Ф. Хойлу, Дж. Бэрбиджу и М. Бэрбиджу за постоянное сотрудничество на протяжении последнего года в изучении массивных звезд.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Oppenheimer J. R., Serber R., Phys. Rev., 54, 540 (1938).
2. Oppenheimer J. R., Volkoff G. M., Phys. Rev., 55, 374, 413 (1939).

3. Oppenheimer J. R., Snyder H., Phys. Rev., 56, 455 (1939).
4. Hoyle F., Fowler W. A., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 125, 169 (1963); Nature 197, 533 (1963).
5. Hoyle F., Fowler W. A., Burbidge G. R., Burbidge E. M., Astrophys Journ., 139, № 3, 909 (1964).
6. Schmidt M., Nature, 197, 1040 (1963).
7. Greenstein J. L., Matthews T. A., Nature, 197, 1041 (1963).
8. Maltby P., Matthews T. A., Moffet A. T., Astrophys. Journ., 137, 153 (1963).
9. Iben I., Jr., Astrophys. Journ., 138, 1090 (1963).
10. Chandrasekhar S., An Introduction to the Study of Stellar Structure, Chicago, 1938, p. 347, table 24 (имеется перевод: С. Чандрасекар, Введение в учение о строении звезд, М.—Л., 1950).
11. Eddington A. S., The Internal Constitution of the Stars, Cambridge, England, 1930.
12. Smith H. S., Hoffleit D., Nature, 198, 650 (1963).
13. Michel F. C., Astrophys. Journ., 138, 1097 (1963).
14. Hoyle F., New Scientist, 17, 681 (1963).
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, 1962.
16. Hoyle F., Narlikar J. V., Proc. Roy. Soc., A273, 1 (1963).

Поправка [Fowler W. A., Rev. Mod. Phys., 36, 1104 (1964)].

Отмеченное звездочкой утверждение автор предложил заменить на следующее: «В рамках общей теории относительности обычный классический анализ показывает, что находящаяся в равновесии звезда неустойчива по отношению к внезапным (адиабатическим) сжатиям или расширениям, если ее радиус меньше значения, соответствующего минимуму величины  $E_{eq}/Mc^2$ . Для политропы с индексом  $n = 3$  условие стабильности на основании уравнений (19), (24), (29) и (31) имеет вид

$$R \geq (3/\pi)^{1/2} (R_3/\beta) (2GM/c^2) = (6,8/\beta) (2GM/c^2),$$

что дает как раз вдвое большую величину, чем ошибочное условие  $E_{eq} > 0$ . Это условие можно переписать в виде

$$\beta/6 \approx \Gamma_1 - (4/3) \geq 1,12 (2GM/Rc^2),$$

где  $\Gamma_1 = d \ln p / d \ln \rho$ . В классическом случае величина  $\Gamma_1 - (4/3)$ , усредненная по звезде, для стабильности должна быть больше нуля; общая теория относительности накладывает на эту величину даже более жесткое требование».

## 9. ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕЗЫ ДИРАКА

*П. Йордан*

P. Jordan, Rev. Mod. Phys., 34, 596 (1962)

### I

Основные идеи геофизики, геологии и палеоклиматологии претерпевают сейчас настоящую революцию. Многие авторы внесли свой вклад в создание новых революционных представлений о нашей Земле и истории ее развития. Этот вклад составляют вновь открытые экспериментальные факты, новые толкования давно известных явлений и многие идеи новой теории, выдвинутые независимо рядом авторов. Среди них Бинге, Брилл, Кейри, Дикке, Эдъед, Юинг, Фишер, Гамов, тер-Хаар, Хизен, Иваненко, Йордан, Кириллов, Нейман, Сагитов, Теллер и Тарп.

Это новое понимание истории развития Земли тесно связано с обобщением физической теории тяготения. Начало ему положила идея Дирака [1] о том, что гравитационная «постоянная»  $\kappa = 8\pi G/c^2$  может быть в действительности переменной величиной. Обобщение теории тяготения Эйнштейна, исходящее из предположения, что  $\kappa$  соответствует переменному скалярному полю, исследовалось математически автором этой статьи с 1943 года. Над этим обобщением работали также Эйнштейн и Бергман, Тири, Дикке, а в связи с исследованиями автора — Людвиг, Фрикке, Кл. Мюллер, Гекман, Грессман, Шюкинг, Элерс, Кундт, Паули, Фирц, Юст, Фигуэрас и Брилл.

Эта обобщенная теория тяготения, основанная на гипотезе Дирака о том, что  $\kappa$  уменьшается со временем — приблизительно обратно пропорционально возрасту Вселенной, — приобретает реальный смысл в космологии и астрономии (в связи с изучением двойных звезд, происхождением планетных систем и астрофизическими опре-

делениями возраста небесных тел). В ближайшем будущем должны стать возможными точные эксперименты, особенно с использованием спутников.

Самые же близкие нам следствия теории, основанной на гипотезе Дирака, связаны с нашей Землей. Они и составляют предмет настоящей статьи. Разделы III—V посвящены обзору идей, уже опубликованных ранее [2]. Я попытаюсь показать, что современная наука о Земле располагает тем, что можно назвать подтверждением гипотезы Дирака.

## II

Обобщение теории тяготения Эйнштейна основывается на замене выражения вариационного принципа

$$\delta \int \left( R - \frac{\kappa}{2c^2} F_{ik} F^{ik} - \frac{\kappa}{c^2} L \right) d\tau = 0, \quad (1)$$

$$d\tau = (-g)^{1/2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

другим выражением,

$$\delta \int \left( \frac{R}{\kappa} - \zeta \frac{\kappa^{||j} \kappa_{||j}}{\kappa^3} - \frac{1}{2c^2} F_{ik} F^{ik} - \frac{1}{c^2} L \right) d\tau = 0, \quad (2)$$

где  $\zeta$  — безразмерная константа, вероятно порядка 10, а  $\kappa_{||j}$  — градиент скаляра  $\kappa$ . В первых статьях я пользовался другим вариантом принципа действия, который в случае гравитационного поля в пустоте становится эквивалентным (2) при замене  $\kappa$  на  $\kappa^{-1}$ . Дискуссии с Лихнеровичем, Фирцем и Паули убедили меня в правильности принципа (2); эта форма используется во втором издании моей книги «Тяготение и Вселенная» [3].

Уравнения Лагранжа, следующие из принципа (2), имеют вид

$$R - \zeta \left( 2 \frac{\kappa^{||j} \kappa_{||j}}{\kappa} - 3 \frac{\kappa^{||j} \kappa_{||j}}{\kappa^2} \right) = 0, \quad (3)$$

$$R_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} R - \frac{\kappa_{||k||l}}{\kappa} - (\zeta - 2) \frac{\kappa_{||k} \kappa_{||l}}{\kappa^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} g_{kl} \left[ 2 \frac{\kappa^{||j} \kappa_{||j}}{\kappa} - (\zeta - 4) \frac{\kappa^{||j} \kappa_{||j}}{\kappa^2} \right] = \frac{\kappa}{c^2} (E_{kl} + T_{kl}), \quad (4)$$

$$F^{hl}{}_{||l} = 0 \quad (5)$$

плюс уравнения поля для вещества, записываемые через волновые функции. В (4) входит тензор энергии вещества  $T_{kl}$  и тензор электромагнитной энергии  $E_{kl}$ . Обозначение в  $\kappa_{|k||l}$  имеет смысл ковариантного дифференцирования.

Для гравитационного поля в пустоте (т. е. в отсутствие вещества, электрических зарядов и токов) уравнения поля приводят к соотношениям

$$\theta_{k|l}^l = 0, \quad (6)$$

где (как любезно подсчитал Демиг)

$$\begin{aligned} \kappa\theta_k^l &= (\sqrt{-g}g^{jm})_{|k} (\delta_j^l \Gamma_{mh}^h - \Gamma_{jm}^l) + \\ &+ \sqrt{-g}\delta_k^l g^{jm} (\Gamma_{jm}^i \Gamma_{ih}^h - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{mh}^i) - \\ &- 2\sqrt{-g} \left[ \frac{\kappa^l{}_{|k}}{\kappa} + (\zeta - 2) \frac{\kappa^l \kappa_{|k}}{\kappa^2} \right] + \\ &+ \sqrt{-g} \left[ \frac{\kappa^l{}_{|j}}{\kappa} + (\zeta - 4) \frac{\kappa^l \kappa_{|j}}{\kappa^2} \right] \delta_k^l + A_k^{li} \frac{\kappa_{|i}}{\kappa}, \quad (7) \end{aligned}$$

$$A_k^{li} = 6\sqrt{-g}g^{m|j}\delta_k^l g^{i|h} g_{m|j} = \sqrt{-g} \begin{vmatrix} \delta_k^l & \delta_k^i & \delta_k^j \\ g^{ml} & g^{mi} & g^{mj} \\ \Gamma_{mj}^l & \Gamma_{mj}^i & \Gamma_{mj}^j \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Уравнение (6) показывает, что существует поток энергии извне, поглощаемый Землей, в то время как гравитационная потенциальная энергия Земли убывает вследствие убывания  $\kappa$ .

### III

Хорошо известно, что на дне океанов существуют глубокие узкие своеобразные трещины (рифты, разломы), в которых продолжают относительно быстрые процессы преобразования, что отчасти доказывается и изостатическими аномалиями. Работы Юинга, Хизена и Тарпа показали, что трещины образуют глобальную систему. Гибралтарский пролив является частью этой системы; соответствующая трещина проходит мимо Испании и Франции через северо-западную часть Германии к Скандинавии. Иваненко и Сагитов [4] обсуждали распространение этих рифтов в Сибири. По-видимому, ясно, что трещина должна быть особенно явно заметна в районе озера Байкал.

Вся система рифтов непосредственно указывает, что Земля претерпела расширение, а не сжатие, как считалось среди геофизиков в течение более столетия. Новейшие или старые разрывы, вызванные этим расширением, особенно отчетливо видны в тех частях системы, которые расположены на суше (разрыв, идущий вдоль Исландии, а также в северо-западной Германии и на востоке Африки).

Именно расширение следует считать основной причиной существования океанов и континентов. Эту точку зрения подтверждают следующие соображения:

1. Сейсмические данные совместно с изостатическими и петрографическими исследованиями указывают, что сиалическое вещество континентов отличается по плотности и химическому составу от более плотного вещества симы океанского дна, начинающегося за относительно тонким слоем океанических осадочных пород.

2. Существуют два отчетливых и хорошо определенных гипсографических уровня: уровень дна всех океанов и уровень поверхности континентов. Естественно, границы континентов должны определяться не береговой линией, но включать и континентальные прибрежные отмели (шельфы) там, где море неглубоко. Почти везде такие шельфы ограничены крутыми склонами, отделяющими их от глубокого моря. Таким образом континенты как целое образуют слой, покрывающий те части Земли, которые не входят в бассейны океанов, причем толщина этого слоя постоянна с высокой степенью точности.

3. Из п. 1 и 2 следует, что превращение континентальных областей в океанические (*absinken*, нем.) или обратное изменение, называемое «ростом континентов», невозможно.

4. Палеонтологические данные заставляют предположить, что Африка и Южная Америка когда-то раньше составляли единый гигантский материк, называемый «Гондвана». Идея, что эти два континента образовались в результате разделения единой массы суши, была первоначально выдвинута Вегенером на основании гораздо менее точного совпадения береговых линий.

5. Если принять, что разделение Африки и Южной Америки произошло уже в геологические времена, то из этого будет следовать, что причиной его было расширение Земли. То же толкование относится и к другим

океанам, поскольку нет оснований привлекать различные принципы, объясняя происхождение разных частей системы океанов. Вегенер в своей заложившей начало таким исследованиям работе опирался на идею континентального дрейфа и не рассматривал возможности расширения. Идея дрейфа была повсеместно оставлена, когда Джеффри показал, что силы, необходимые для этого, должны были бы быть гораздо больше, чем следует из физических причин вегенеровского дрейфа.

Некоторые геофизики полагают, что в мантии Земли существуют медленные конвективные потоки, но эта точка зрения не объясняет постоянства толщины континентов. Теория же расширения естественным образом истолковывает этот наблюдаемый факт, именно: во время формирования Земли силикатное вещество образовало законченный слой постоянной толщины, покрывающий всю сферу; затем в результате расширения этот внешний слой разорвался на несколько частей, причем части сохранили свою первоначальную толщину и общую площадь поверхности.

6. Кириллов показал, что существующие континенты могут быть размещены на сфере, площадь поверхности которой равна общей площади континентов. Хизен установил, что факты палеомагнетизма хорошо согласуются с теорией расширения. Предпринимались попытки объяснить эти факты предположением о миграции полюсов, но при сохранении близости магнитных и вращательных полюсов. Однако эта точка зрения не дала определенного вывода относительно предполагаемой траектории северного полюса.

Более того, сторонникам теории миграции, несмотря на многочисленные попытки, не удалось указать механических причин, достаточных для объяснения предполагаемой миграции. Ввиду этих обстоятельств я склоняюсь к мысли, что идея миграции должна быть отвергнута.

7. Еще две группы доказательств свидетельствуют в пользу теории расширения:

а) Площадь суши, как найдено, увеличилась за последние  $3 \cdot 10^6$  лет. Новейшие работы по исследованию истекших  $(3,0 \div 0,5) \cdot 10^6$  лет показали, что на ранних



этапах от воды были свободны лишь небольшие «щиты». Увеличение площади суши было названо ростом континентов. Для отрезка от  $0,5 \cdot 10^6$  лет тому назад до настоящего времени, как показал с помощью лучших из существующих геологических карт Эдвед, рост, продолжавшийся от кембрийской эпохи до наших дней, привел к современной ситуации, так что береговая линия близка к континентальному обрыву.

б) Явление островных дуг анализировалось как теоретически, так и эмпирически, но удовлетворительное объяснение оно нашло лишь на основе теории расширения.

#### IV

Теория расширения, исходящая из уменьшения  $\kappa$ , обеспечивает, согласно Бинге, основу для понимания вулканов и интрузий. Интрузии можно рассматривать как вулканы, которые не смогли прорваться на поверхность и лишь выдавили магматическое вещество в вышележащие слои.

Многие геофизики считают, что эти явления должны объясняться местным плавлением магмы в результате местной концентрации радиоактивных веществ. Однако Ритман в своих исследованиях вулканических явлений заметил, что взрывной характер этих процессов составляет при интерпретации их основную трудность. Весьма значительная вулканическая и интрузивная активность на всех континентах и во все геологические эпохи свидетельствует о том, что в глубоких слоях коры широко распространена неустойчивость.

Бинге объясняет эти факты на основе гипотезы Дирака. Бисмалиты — перемещающиеся в верхние слои большие массы магматического вещества — показывают, что противодействующий материал претерпел увеличение объема: он, должно быть, испытал фазовый переход от состояния под высоким давлением в состояние с низким давлением и малой плотностью. Бинге истолковывает известные факты вулканизма, опираясь на предположение, что значительная часть вещества в глубоких слоях все еще находится в состоянии с высоким давлением, которое к настоящему времени стало неустойчивым благодаря умень-

шению давления, обусловленному убыванием  $\kappa$  и соответствующим увеличением радиуса Земли.

Результатом работы Болдуина явился вывод, что Луна не обладает заметной вулканической активностью, а кратеры ее — скорее следы метеоритных столкновений. Наши знания об условиях на Марсе слишком неполны; похоже, что там также существует два гипсографических уровня, но они гораздо меньше разнятся по величине, чем земные, а относительная площадь «континентального» или высокого уровня на Марсе больше, чем на Земле. Поверхности марсианских континентов расчленены многочисленными трещинами, давшими повод к прежнему названию «каналов». Кажется, на Марсе отсутствует вулканическая активность и процессы горообразования.

По теории расширения основное различие между Марсом и Землей заключается в том, что на Марсе внешний, континентальный слой предположительно тоньше, чем на Земле, и, следовательно, в процессе расширения разделился на множество малых участков, тогда как на Земле континенты имеют слишком большую прочность и толщину, вследствие чего они и распались на несколько крупных участков. Эти крупные континенты были изогнуты во время расширения, что проясняет образование горных цепей, после чего результирующие локальные перепады давления привели к фазе взрывных преобразований, ведущих к вулканической активности.

## V

Идея миграции полюсов была также применена в палеоклиматологии, особенно к пермско-каменноугольному и девонскому оледенениям. Пермско-каменноугольное оледенение оставило свои следы во многих местах вдоль некоторого пояса близ экватора; отсюда вытекает требование, чтобы полюса мигрировали вдоль существующего экватора, если принять, что оледенения происходили только в полярных областях.

Потонье дал точное описание палеоклиматических характеристик каменноугольного периода. Опираясь на эти данные, автор пришел к заключению, что Земля на протяжении этой эры должна была быть покрыта облаками.

Влажный климат этой эпохи был поразительно постоянным и однородным, почти не зависящим ни от времени года, ни от географического положения. От Шпицбергена до экваториальной зоны и далее до Антарктики сохранялась практически постоянная температура  $10-12^{\circ}\text{C}$ . Растительность состояла только из приспособившихся к условиям постоянной тени растений. Вследствие низкой температуры Земля была на грани общего оледенения, которое действительно и началось со следующим, пермским геологическим периодом. Таким образом, мы можем понять, особенно если экваториальные облачные слои были толще, чем где-либо, почему максимальное оледенение имело место именно в экваториальном поясе. Как замечает Бинге, это не более парадоксально, чем тот факт, что сейчас температура стратосферы ниже над экватором, чем над полюсами.

Оледенения девонского периода, происходившие перед каменноугольным периодом, также имели, согласно нашим соображениям, характер, совершенно отличный от оледенений плейстоцена.

Эта новая палеоклиматологическая картина находится в согласии с предсказаниями, опирающимися на гипотезу Дирака об убывании  $\kappa$ .

В течение истории планетной системы радиусы орбит планет должны были быть обратно пропорциональны  $\kappa$ . При учете астрофизической формулы светимости

$$\Omega = M^{11/2} R^{-1/2} \kappa^{15/2}; \quad (9)$$

отсюда следует, что солнечная постоянная  $S$  должна быть пропорциональна примерно  $\kappa^{10}$ . Таким образом, во время каменноугольного периода солнечная постоянная была бы в 2—3 раза больше, чем сейчас, так что атмосферные условия на Земле могли тогда быть подобными условиям на Венере, постоянно покрытой облаками.

Представляется, что плейстоценское оледенение также можно понять с этих позиций. Если  $\kappa$  убывает в настоящее время со скоростью  $10^{-8}-10^{-9}$  долей в год, то пропорциональность солнечной постоянной  $S \sim \kappa^{10}$  означает, что за последние  $10^6$  лет  $\kappa$  уменьшилась на долю, составляющую от одной до десяти сотых своей величины. Как следствие, это могло бы повести к тому, что на протя-

жении последних  $10^6$  лет (но не ранее) климатические периоды с относительно холодным летом допускали бы, согласно Миланковичу, оледенения в полярных областях. В третичный период солнечная постоянная  $S$  была бы все еще слишком велика для подобных эффектов.

В заключение я выскажу мнение, что наши современные знания о Земле, истолкованные так, как описано выше, делают гипотезу Дирака доказанным фактом, включая также то вызывающее недоумение обстоятельство, что во время образования Земли  $\kappa$  должна была значительно превышать свою нынешнюю величину. Это обстоятельство (подчеркнутое Теллером в личных дискуссиях), вероятно, подтверждает идею автора [9] об образовании звезд из празвездной материи Амбарцумяна.

#### ЛИТЕРАТУРА<sup>1)</sup>

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A165, 199 (1938).
2. Jordan P., Abh. Akad. Wiss. Lit. (Mainz), 769 (1958); Naturwiss., 48, 417 (1961).
3. Jordan P., *Schwerkraft und Weltall*, Viena, 1955.
4. Иваненко Д. Д., Сагитов М. У., Вестник МГУ, сер. физ. астроном., № 6, 83 (1961).
5. Вегенер А., Происхождение материков и океанов, Берлин, 1933.
6. Hilgenberg O., *Vom wachsenden Erdball*, 1933.
7. Eged L., Acta geologica, № 6 (1956); Nature (1956); Trans. N. G. Acad. Sci., 23, 424 (1961).
8. Heesen B., Sci. American, 203, 98 (1960).
9. Jordan P., Recent Development in General Relativity, New York, 1962, p. 289.

---

<sup>1)</sup> Список литературы, за исключением первой ссылки в № 2 и ссылки № 9, составлен редактором. — *Прим. ред.*

## 10. АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ

*Г. Мак-Витти*

G. C. McVittie, Atti del Convegno sulla relativita generale, v. III, Roma, 1964.

[Доклад на юбилейной галилеевской конференции (Падуанский симпозиум)]

Несомненно, каждая научная теория воспитывается экспериментом и наблюдениями и каждое наблюдение опирается на теоретические основы. Тем не менее в области космологии акцент можно перенести либо преимущественно на теорию, либо преимущественно на наблюдения. Первый путь ведет к космологическому рационализму, где суждения в основном выводятся из космологических принципов, соображений единообразия, априорных определений расстояния и т. д. Второй путь — это путь эмпирической космологии, которая старается проверить теорию на всех стадиях сравнением с данными наблюдений и отвергает теории, не согласующиеся с такой проверкой. Космологический рационализм часто служит хорошей иллюстрацией к замечанию Демпера [1] в адрес учения Аристотеля: «Взяв несколько доступных ему фактов, он сразу же принимался за широчайшие обобщения». Я думаю, что великий Галилей, которому посвящены наши нынешние торжества, предпочел бы эмпирический подход в космологии.

Неплохим примером противоположности рационалистической и эмпирической точек зрения могут служить различные толкования тех фундаментальных данных, без которых понятие расширяющейся Вселенной никогда не было бы принято. Это — измерения красного смещения в спектрах галактик. Тридцать лет назад число результатов было мало и относились они лишь к ближайшим от нас галактикам и скоплениям галактик. Они сразу же были истолкованы как указание на то, что скорости

разбегания галактик пропорциональны расстояниям до них. Это заключение как универсально верное принимают по крайней мере некоторые из рационалистических космологий. Более поздние сведения, особенно относящиеся к галактикам, имеющим большое красное смещение, не подтвердили вывода о пропорциональности между скоростью разбегания и расстоянием. Эти данные объявлены неточными. Этот прием отчетливо выступает в работах по теории стационарной вселенной (Бонди [2]). Приверженцы теории отрицают ее рационализм, но при всем том неизменно становятся на рационалистические позиции в отношении к любым данным, идущим вразрез с их теорией: данные наблюдений объявляются просто неверными.

Эмпирический анализ сведений о красном смещении использует все данные, доступные на сегодняшний день. Тогда выясняются следующие моменты:

1. Измерения дают, с одной стороны, величины красного смещения  $z$ , с другой — видимые яркости галактик. Таким образом, ни скорости, ни расстояния непосредственно не измеряются.

2. Эйнштейновская общая теория относительности показывает, что для объектов с большим красным смещением возможно не единственное в операционном смысле определение расстояния  $r$ , следовательно, не единственное значение скорости (быстроты изменения расстояния со временем).

3. Красное смещение различным образом связано с каждым из возможных определений скорости.

4. Все определения расстояния, а следовательно, и значения скорости сводятся одно к другому только в случае малых красных смещений; в таком приближении скорости разбегания пропорциональны расстояниям. Если же речь идет не об этом специальном случае, то можно сказать только, что красное смещение представляет собой возрастающую функцию расстояния, как бы оно ни было определено, однако эта функция не просто линейная.

Непосредственно наблюдаемая связь между двумя явлениями, т. е. красным смещением и яркостью, в рамках эйнштейновской теории приводит к численным значениям двух параметров: «константы» Хаббла и фактора ускорения.

Оценка первой требует еще знания среднего значения собственной яркости галактик, которое и было использовано при определении этой «константы». Здесь есть некоторая неопределенность, поэтому значение «константы» Хаббла следует выбирать, насколько это известно в настоящее время, в пределах от 75 до 150 кмсек<sup>-1</sup>.мгпс<sup>-1</sup>. Величина фактора ускорения, как оказывается, отрицательна; это означает, что расширение Вселенной сейчас замедляется.

Позвольте мне напомнить некоторые из соображений по поводу неточности данных:

1. Трудно наблюдаемой величиной является видимая яркость галактики. Рассматриваемые объекты (скопления галактик) исследовались Сэндеджем [3] фотографическими методами, которые, как говорят, не точны. Но ряд объектов наблюдался с помощью более точных фотоэлектрических методов (Баум [4]).

Поразительная особенность этих измерений Баума, насколько можно видеть из того, что было опубликовано, заключается в обнаруживающемся при сравнении [5] хорошем совпадении с результатами Сэндеджа. Отрицательность фактора ускорения можно, следовательно, считать установленной, хотя его значение еще не известно более или менее точно. Ситуация сходна с положением дел в изучении Солнечной системы во времена Кеплера. Кеплеровы весьма неточные на современный взгляд данные оказались-таки достаточно точными, чтобы доказать, что орбиты планет суть не окружности, а эллипсы.

2. Говорят, что достаточно быстрое систематическое увеличение собственной светимости галактик сделало бы недействительным расчет фактора ускорения, что вполне справедливо. Но совершенно надежных доказательств величины этого предполагаемого эффекта (Шмидт [6], Оке [7]) не было получено, и мы вынуждены полагаться на произвольные оценки (Сэндедж [8]). С другой стороны, утверждают (Скотт [9]), что в данных о красном смещении присутствует побочный селективный эффект, который, если он существует, также сделает недействительными все выводы относительно фактора ускорения. Отмечается, что наблюдатели, ищущие большие красные смещения, должны исследовать все более слабые скопления галактик. При этом они стремятся выбрать скопле-

ния, включающие все более мощные по внутренней светимости галактики. Но здесь мы имеем утверждение, которому не дается никаких обоснований: ни одного опытного факта не выдвинуто в подтверждение того предположения, что галактики в скоплениях могут иметь какую-либо нужную светимость и, кроме того, выбор галактических скоплений для исследования вовсе не опирается исключительно на видимую яркость. Наиболее удаленное из известных скоплений, красное смещение для которого равно 0,46, было открыто благодаря тому, что оно содержало сильный радиоисточник 3С 295. Однако сведения об этом самом далеком скоплении вполне естественно укладываются в схему, установленную для менее удаленных скоплений (Мак-Витти [5]).

Таким образом, эмпирический подход приводит к выводу, что фактор ускорения отрицателен, а это исключает многие из моделей Вселенной, которые в свое время были популярны.

Некоторые из них принадлежат к космологическим моделям общей теории относительности, другие возникли на почве кинематического релятивизма, наконец, третьи связаны с теорией стационарной вселенной. Во всех этих моделях фактор ускорения либо положителен, либо равен нулю; иными словами, эти модели предсказывают, что расширение либо становится все более и более быстрым, либо, как в случае кинематического релятивизма, оно происходит с постоянной скоростью. Если придерживаться идеи, что теория должна согласовываться с наблюдениями, модели подобного типа нужно отвергнуть. Модели, которые предсказывают отрицательный фактор ускорения, образуют подгруппу среди моделей общей теории относительности. Насколько я осведомлен, в «рационалистических» космологических теориях нет ни одной модели с отрицательным фактом ускорения.

Обратимся теперь к подходу, который за неимением лучшего термина я назову «доказательством от неведения». Этот подход утверждает, что о существовании какого-либо явления можно обоснованно судить по *отсутствию* опровергающих его доказательств. В качестве примера рассмотрим утверждение: звезда Арктур имеет подобную Земле планету, обращающуюся вокруг нее. Из наблюде-



ний собственного движения звезды, ее радиальной скорости, спектральных характеристик, флуктуаций яркости, которые можно приписать затемнению посторонним телом, и т. д. никак не следует, что у Арктура имеется спутник какого-либо рода. Но *теоретический расчет* показывает, что если бы у Арктура была планета с массой и размерами Земли, то подобная планета не вызвала бы никаких наблюдаемых эффектов. Ведь наблюдения не беспредельно точны. Таким образом, не существует данных, которые *противоречили* бы допущению о наличии у Арктура малой планеты, откуда делается скачок к заключению, что такая планета есть.

Не велика беда, когда подобное «доказательство» практикуется как забавное упражнение; однако мы пришли бы к чисто вымышленной астрономии, если бы теория образования планет базировалась на утверждении, что у всякой звезды типа Арктура есть обращающаяся вокруг нее планета типа Земли. Следует заметить также, что в «доказательства от неведения» не входят случаи неправильной интерпретации наблюдений. В настоящее время дополнительное движение перигелия Меркурия интерпретируется как общерелятивистский эффект, а семьдесят лет назад его иногда приписывали возмущениям, вызываемым некоторой гипотетической планетой Вулкан, иначе никак себя не обнаруживавшей. «Доказательство от неведения» здесь не участвовало, поскольку на самом деле речь шла о наблюдаемых реальных фактах, которые требовали объяснения.

Средняя плотность материи в пространстве играет важную роль как одна из величин, дающих ключ к строению Вселенной. Подсчет числа галактик в оптическом диапазоне, имеющих видимые яркости до какого-то верхнего значения, приводит к оценке среднего числа подобных объектов в единице объема. С другой стороны, общие наблюдения вращения и внутренних движений в галактиках дают нам оценки их средней массы. Известно, что галактики содержат также неизлучающее вещество в виде межзвездных газовых облаков. По оценкам количества межзвездного газа это величины порядка нескольких сотых полной массы галактики (Вестерхут [11]). Возможно, в неправильных галактиках эта величина может

достигать тридцати сотых. Ради уверенности, что количество несветящегося вещества внутри галактик или между ними, если речь идет об относительно плотных скоплениях галактик, не занижено, можно взять массу средней галактики примерно в 20 раз больше, чем дают наблюдения. Тогда средняя масса с учетом числа галактик в единице объекта даст для средней плотности материи в пространстве величину  $3 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>. Даже если положить среднюю массу галактики в 200 раз большей, средняя плотность вещества в пространстве увеличивается всего в 10 раз. Эту величину  $3 \cdot 10^{-30}$  г/см<sup>3</sup> следует считать верхним пределом средней плотности материи. Она относится к материи, наблюдаемой либо в форме светящихся звезд, либо несветящихся газовых облаков.

Предположения о средних плотностях выше указанной основаны на «доказательствах от неведения». Например, утверждают, что можно допустить любое значение плотности, которое не приводит к наблюдаемым эффектам. Некоторые авторы пришли к заключению, что плотность может поэтому достигать величины  $10^{-25}$  г/см<sup>3</sup> (Бонди [2]). Эта школа берет среднюю плотность несколько выше  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup> (хотя и не оспаривается возможность открытия добавочного вещества). Например, в литературе встречается утверждение (Пальмер [12]), что попытки измерить количество водорода в областях между галактиками с помощью радиоастрономических методов дают для верхней границы его плотности  $3 \cdot 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Однако анализ подобных наблюдений обнаруживает, что наблюдавшие на самом деле ничего не наблюдали; верхняя граница указывала только, что прибор не давал беспредельной точности. Поэтому указанная оценка верхней границы свидетельствует лишь о том, что будь плотность еще выше, мы смогли бы заметить что-нибудь сверх приборного шума. Этот последний отнюдь не доказывает существования межгалактического водорода; оценка дает лишь ответ на гипотетический вопрос: если допустить присутствие водорода, то какова должна быть его плотность, чтобы он оставался ненаблюдаемым? Я думаю, Симпсон [13] сказал решающее слово в адрес «доказательств от неведения», заметив: «Любому разумному определению науки присуще положение, что утверждения, которые не могут

быть проверены наблюдениями, в действительности не утверждают ничего *ни о чем*». Я полагаю, Галилею доставила бы удовольствие эта реплика.

Почему настаивают на столь высоких плотностях? Причины, по-видимому, лежат в некоторых рационалистических допущениях. Например, среди общерелятивистских моделей Вселенной можно выделить подгруппу моделей, в которых космологическая постоянная полагается равной нулю. Тогда известные значения постоянной Хаббла и фактора ускорения автоматически ведут к высоким плотностям порядка  $10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Или можно принять необоснованное допущение теории стационарной вселенной о том, что повсюду в пространстве рождаются атомы водорода. Это рождение атомов водорода происходит в течение колоссального периода времени, поэтому в космосе должно присутствовать порядочное количество водорода, готового образовывать новые галактики. Наконец, бытует утверждение, что структура скоплений галактик должна удовлетворять предсказаниям теоремы вириала — теоретического положения, выводимого из классической ньютоновской механики.

Эмпирический подход совершенно иной: значения отрицательного фактора ускорения вместе с тем значением плотности вещества, которое подкреплено наблюдениями, т. е.  $10^{-30}$ — $10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>, можно подставить в эйнштейновские уравнения и найти значения двух неизвестных, именно космологической постоянной и радиуса кривизны пространства. Обе эти величины оказываются отрицательными. С физической точки зрения отрицательная космологическая постоянная указывает на существование во Вселенной универсальной силы вдобавок к обычному тяготению. Замедление темпа расширения пространства обязано отчасти гравитационному притяжению, а отчасти этой постоянной космологической силе. Второе заключение, что пространственная кривизна отрицательна, указывает на бесконечность пространства в геометрическом смысле, хотя это не гарантирует возможности наблюдать любой объект в данный момент времени, даже если точность приборов неограниченна.

Несколько слов можно также сказать о проблеме числа радиогалактик — одной из наиболее интересных

проблем в наблюдательной космологии. Можно подсчитать число радиогалактик, имеющих «радиояркости» до последовательных предельных значений, и установить соответствующую зависимость. Как оказалось, ни одна из моделей Вселенной не может объяснить результаты подсчета радиогалактик без дополнительных гипотез. Нужно допустить либо 1) что в прошлом на единицу объема приходилось действительно больше радиогалактик, чем в настоящее время, либо 2) что радиогалактики были в среднем «ярче», чем теперь, т. е. излучали больше энергии. Это простейшие попытки объяснить данные опыта, однако предлагалось и множество других. Только будущее раскроет причину этой трудности; я не решился бы зачеркнуть ее, как вызванную будто бы какими-либо невыявленными систематическими ошибками наблюдения.

Итак, мой вывод состоит в том, что космология все еще изобилует проблемами, возбуждающими интерес ученых. Как теоретик, которому нравится эмпирический подход в науке, я готов идти туда, куда ведут данные наблюдений в соединении с теорией. Я скептически отношусь к теориям, нуждающимся в подкреплении «доказательствами от неведения». Имеющиеся на сегодняшний день данные ведут меня к бесконечной Вселенной, расширение которой замедляется, что когда-нибудь вызовет сжатие Вселенной до состояния малого объема, из которого она начала свою современную историю. Подобная Вселенная может шокировать многих людей, имеющих наперед сложившиеся представления. Я сожалею об этом, но не вижу, что здесь можно сделать. Физическая Вселенная будет развиваться своим путем, относясь в высшей степени безразлично к одобрениям и неодобрениям людей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. D a m p i e r W. C., A History of Science, 3rd Ed., Cambridge, 1942, p. 39.
2. B o n d i H., Cosmology, Cambridge, 2nd Ed., 1960, p. 38, 45.
3. H u m a s o n M. L., M a y a l l N. V., S a n d a g e R., Astr. Journ., 61, 97 (1956).
4. B a u m W., in «Problems of Extra-galactic Research», Ed. G. C. McVittie, New York, 1962, p. 380.
5. M c V i t t i e, G. C. in «Fact and Theory in Cosmology», Ed. G. C. McVittie, New York, London, 1961, p. 135.

6. Schmidt M., in «Fact and Theory in Cosmology», Ed. G. C. McVittie, New York, London, 1961, p. 170.
7. Oke J. B., in «Fact and Theory in Cosmology», Ed. G. C. McVittie, New York, London, 1962, p. 34.
8. Sandage A., *Astrophys. Journ.*, **134**, 916 (1961).
9. Scott E. L., *Astronom. Journ.*, **62**, 248 (1957).
10. Neyman T., Scott E. L., *Handbuch der Physik*, Bd. 53, Berlin, 1959, S. 416.
11. Westerhout G. in «Problems of Extra-Galactic Research», Ed. G.C. McVittie, New York, 1962, p. 70.
12. Palmer H. P., Davies P. R., Large M. D., *Radio Astronomy Today*, Manchester, 1963, p. 230.
13. Simpson G. C., *Science*, **143**, 769 (1964).

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Вступительная статья.</i> Д. И в а н е н к о. Актуальные проблемы гравитации . . . . .	5
<i>Статья 1.</i> Х. М ё л л е р. Законы сохранения в тетрадной теории гравитации . . . . .	34
<i>Статья 2.</i> Х. М ё л л е р. Энергия и импульс, переносимые гравитационными волнами . . . . .	50
<i>Статья 3.</i> Ю. Ш в и н г е р. Квантованное гравитационное поле . . . . .	67
<i>Статья 4.</i> Р. С а к с. Гравитационное излучение . . . . .	84
<i>Статья 5.</i> Р. П е н р о у з. Конформная трактовка бесконечности . . . . .	152
<i>Статья 6.</i> А. Ф р и д м а н. Изометрическое погружение римановых многообразий в евклидовы пространства . . . . .	182
<i>Статья 7.</i> Ч. М и з н е р. Дифференциальная геометрия и дифференциальная топология . . . . .	189
<i>Статья 8.</i> В. Ф а у л е р. Массивные звезды, релятивистские политропы и гравитационное излучение . . . . .	265
<i>Статья 9.</i> П. Й о р д а н. Геофизические следствия гипотезы Дирака . . . . .	293
<i>Статья 10.</i> Г. М а к-В и т т и. Анализ космологических наблюдений . . . . .	302