

Д. ИВАНЕНКО и А. СОКОЛОВ

К Л А С С И Ч Е С К А Я Т Е О Р И Я П О Л Я

(НОВЫЕ ПРОБЛЕМЫ)

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Допущено Министерством высшего образования СССР в качестве учебного пособия для университетов

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД**

*Первое издание книги
удостоено Сталинской премии в 1950 г.*

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена классической (неквантовой) теории поля. Однако в ней используются математические методы, получившие своё развитие в квантовой механике. В частности показано, как с помощью δ -функции находить функцию Грина и получать этими методами решения ряда задач классической электродинамики, в том числе имеющих большое практическое значение.

Подробно освещён целый ряд новейших результатов, до сих пор отражённых только в журнальной литературе и в значительной части являющихся оригинальными исследованиями советских авторов. Так, изложены: проблемы теории «сверхсветового» электрона Черенкова, нелинейной электродинамики, собственной массы, теория λ -процесса и би-поля, теория светящегося электрона. Последняя глава посвящена разбору проблем классической мезодинамики и тяготения.

Во втором издании переработано несколько параграфов, сделан ряд уточнений и добавлены ссылки на новейшую литературу.

Книга предназначена для научных работников, аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	6
Предисловие к первому изданию	8
Глава I. Общая теория δ-функции	11
§ 1. Определение δ -функции	11
§ 2. δ -функция и интеграл Стильтьеса	13
§ 3. δ -функция как предельный случай непрерывной функции	15
§ 4. δ -функция и разложение Фурье	20
§ 5. δ -функция в пространстве n измерений	29
§ 6. Важнейшие формулы с δ -функциями	30
§ 7. Функция Грина	34
Глава II. Статические уравнения эллиптического типа	38
§ 8. Одномерное уравнение Лапласа	38
§ 9. Уравнение Лапласа-Пуассона на плоскости	41
§ 10. Трёхмерное уравнение Лапласа-Пуассона	45
§ 11. Простейшие задачи электростатики	49
а) Заряженная плоскость	49
б) Заряженный цилиндр	52
§ 12. Краевые задачи электростатики	55
§ 13. Краевые задачи теории кароттажа	60
а) Источник тока в скважине	62
б) Бесконечно тонкий пласт	64
§ 14. Обобщённое уравнение Пуассона	70
а) Теория ядерных сил и мезонов (классическая мезодинамика)	70
б) Теория гравитации Зеелигера	70
в) Теория сильных электролитов	71
г) Теория сверхпроводимости	72
Глава III. Уравнения, зависящие от времени	74
§ 15. Уравнение движения классической механики	74
§ 16. Уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа)	77
§ 17. Волновое уравнение Даламбера (уравнение гиперболического типа)	84
§ 18. Решение уравнения Даламбера в случае монохроматических колебаний	90

§ 19.	Нестационарные колебания	94
§ 20.	Интегрирование волнового уравнения Клейна . . .	99
§ 21.	Интегрирование волнового уравнения в n -мерном пространстве	107
§ 22.	Распространение электромагнитных волн в проводящей среде	115
Глава IV. Классическая электродинамика		119
§ 23.	Основы классической электродинамики	119
	а) Значение классической электродинамики в современной теории частиц и полей	119
	б) Инвариантность и трансформационные свойства	122
	в) Основные уравнения классической электродинамики	135
§ 24.	Интегрирование уравнений Максвелла-Лорентца	145
§ 25.	Потенциалы Льенара-Вихерта и формула Брейта	148
§ 26.	Поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно	151
§ 27.	«Сверхсветовой» электрон Черенкова	154
§ 28.	Тензор энергии	168
§ 29.	Импульс электромагнитного поля	171
§ 30.	Теория электромагнитной массы в электродинамике Максвелла-Лорентца	175
	а) Тензор энергии максвелловского поля	175
	б) Тензор момента количества движения поля	185
§ 31.	Вывод классического уравнения движения электромагнитной массы по методу Лорентца	193
§ 32.	Нелинейная электродинамика	199
§ 33.	Электродинамика полей с высшими производными	211
§ 34.	Теория неполевой массы	220
	а) Теория λ -процесса	224
	б) Теория би-поля	230
§ 35.	Интегрирование уравнения движения электрона	239
§ 36.	Рассеяние света свободными электронами	246
§ 37.	Когерентное колебание двух связанных электронов	251
§ 38.	Простейшая теория бетатрона	253
§ 39.	Излучение электромагнитных волн электронами, движущимися по окружности	261
§ 40.	Угловое распределение излучения	269
§ 41.	Зависимость интенсивности излучения от частоты	272
§ 42.	Асимптотическое приближение для бесселевых функций высокого порядка	273
§ 43.	«Светящийся» электрон	279
Глава V. Классическая мезодинамика		295
§ 44.	Проблема ядерных сил	295
	а) Модель атомного ядра	295
	б) Свойства ядерных сил	300
	в) Теория парных ядерных сил	315
	г) Мезон	319

§ 45. Скалярное мезонное поле	335
а) Скалярные ядерные силы	335
б) Общая теория скалярного поля	342
в) Комплексное скалярное поле	352
§ 46. Псевдоскалярное мезонное поле	357
а) Псевдотензоры	357
б) Псевдоскалярное поле	365
§ 47. Векторное мезонное поле	372
а) Основные уравнения	372
б) Общая теория векторного мезонного поля	375
в) Векторное мезонное поле при наличии нуклеонных источников	381
г) Векторные ядерные силы	386
§ 48. Псевдовекторное поле. Дипольные трудности	391
а) Псевдовекторное мезонное поле	391
б) Общая форма взаимодействия нуклеонов.	395
§ 49. Распространение плоских векторных мезонных волн в вакууме	404
§ 50. Интегрирование уравнений мезонного поля при помощи векторов Герца	406
§ 51. Излучение векторных мезонных волн квазиэлектрическим и квазимагнитным диполем	409
§ 52. Квазиэлектрическое рассеяние векторных мезонов	413
§ 53. Квазимагнитное рассеяние векторных мезонов	415
§ 54. Силы реакции мезонного поля	419
§ 55. Рассеяние векторных мезонных волн с учётом затухания	426
§ 56. Гравитация и элементарные частицы	436
Д о п о л н е н и е . Развитие теории вакуума	450
а) История вопроса	450
б) Сдвиг уровней	454
в) Сверхмноговременной формализм	462
г) Полевая масса фотона	464
д) Новые правила регуляризации	464
Предметный указатель	472

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Во втором издании общий план книги не подвергся существенному изменению. Наряду с исправлением замеченных опечаток, в некоторые параграфы был внесён ряд уточнений и добавлены ссылки на новейшую литературу. Однако физика элементарных частиц и полей, введением в теорию которых в значительной мере является наша книга, продолжает быстро развиваться, что побудило нас сделать более существенные дополнения в следующих пунктах.

Прежде всего, теория «светящегося» электрона дополнена рассмотрением сжатия орбит. Далее мы считали необходимым переработать материал, относящийся к происхождению и природе космического излучения и различных мезонов в связи с рядом работ, выполненных за последнее время в значительной мере советскими физиками. В частности, следует подчеркнуть, что открытие нейтральных мезонов (1950 г.) впервые подвело реальный фундамент под классическую мезодинамику, изложение которой занимает одно из центральных мест в нашей книге. Введённое прежде гипотетическое поле нейтральных мезонов получает теперь, во всяком случае с качественной стороны, экспериментальное подтверждение.

¹ В теории ядерных сил сделано добавление, касающееся нового варианта устранения дипольной трудности в теории псевдоскалярных сил. Кроме того, особое внимание было обращено на недавние эксперименты по рассеянию быстрых нуклеонов, позволяющие сделать важные выводы о характере ядерных сил.

Мы ввели также дополнительный параграф, посвящённый новейшему объяснению сдвига энергетических уровней

ней электронов в атомах, а также объяснению происхождения дополнительного магнитного момента электрона на основе квантовой теории вакуума, которая в некоторой степени проясняет также вопрос о природе собственной массы. Отметим ещё, что рассмотренное нами прежде в § 34 компенсирующее би-поле используется сейчас для устранения квантовых расходимостей. Этот пример ещё раз показывает значительную эвристическую силу предварительного исследования проблемы собственной массы при помощи классической теории.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить всех товарищей, которые сделали свои замечания по поводу первого издания. Авторы благодарны также редактору книги В. А. Лешковцеву за внимательное отношение к её второму изданию и за помощь при составлении указателя.

Физический факультет
Московского Государственного
Университета
им. М. В. Ломоносова

Ноябрь 1950 г.

Д. Иваненко
А. Соколов

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Появление книги, посвящённой классической, т. е. неквантовой трактовке различных полей и элементарных частиц, несомненно требует пояснения. Наличие большого числа монографий и курсов, посвящённых теории электромагнитного и гравитационного полей, делает, казалось бы, излишним новое изложение классической теории. Кроме того, рассмотрение процессов с элементарными частицами, в частности мезонами, обычно почти тривиальным образом представляется требующим непременно квантовой теории.

Предлагаемая вниманию читателей книга ни в какой мере не предполагает заменить обычный курс электродинамики.

Одна из наших задач заключается в использовании некоторых математических методов квантовой теории для исследования классических явлений.

В связи с этим мы систематически излагаем теорию δ -функции (гл. I), с помощью которой можно описать различные особенности, связанные с зарядами (точечный заряд, поверхностный заряд и т. д.), а также дать новую трактовку функции Грина. Во второй и третьей главах мы развиваем математический аппарат, позволяющий использовать δ -функцию при решении ряда задач математической физики и электродинамики. Например, особенно просто с помощью теории δ -функции формулируется так называемый принцип излучения.

В этих трёх главах мы показываем, в частности, каким образом новые методы могут быть использованы для решения многих старых проблем. При этом мы

предоставляем в руки читателей лишь рабочий аппарат, предлагая вниманию математиков более строгое обоснование всего нового формализма.

Классическая теория поля и элементарных частиц переживает за последние годы известное возрождение. Многие явления, открытые за последнее время: «сверхсветовой» электрон, «светящийся» электрон, а также другие эффекты, связанные с ускорением заряженных частиц, могут быть описаны в основном с помощью некантовой релятивистской теории. Наряду с этим анализ далеко ещё не разрешённой проблемы собственной массы с классической точки зрения способствует более глубокому проникновению в физическую сущность этого вопроса и может во всяком случае сыграть эвристическую роль при дальнейшем развитии теории элементарных частиц. Всем этим проблемам мы посвящаем четвертую главу нашей книги. Таким образом в этой главе читатель найдёт систематическое изложение ряда вопросов, которые были известны лишь по отрывочным журнальным статьям.

Наконец, пятая, последняя глава книги посвящена в основном проблемам, возникшим в связи с развитием классической теории мезонного поля. Хотя нейтральные мезоны, для которых непосредственно применима классическая трактовка, ещё с полной достоверностью не открыты, однако многие результаты и методы классической мезодинамики сохраняют силу также в строгой квантовой теории, трактующей как нейтральные, так и заряженные мезоны. Главное внимание мы обращаем здесь на вопрос о ядерных силах, представляющий одну из центральных проблем всей современной физики элементарных частиц. Сам по себе эффект взаимодействия частиц через поле имеет классическую природу, поэтому не удивительно, что многие результаты мезонной теории ядерных сил в основном могут быть получены уже из классической трактовки. Проблема рассеяния мезонов на нуклонах (протонах и нейтронах) с учётом затухания, которая также рассматривается в этой главе, оказалась важной не только в теории прохождения космических лучей через материю, но также для иссле-

дования общих вопросов, связанных с природой собственной массы. Проблемы гравитационного поля затронуты лишь незначительным образом, главным образом потому, что исследования по тяготению, связанные с выяснением его роли в теории элементарных частиц, находятся ещё в стадии разработки.

Значительная часть всех этих вопросов впервые была рассмотрена советскими авторами.

Хотя наше изложение посвящено классической теории поля, но во всех главных пунктах мы даём указания на дальнейшие результаты, полученные при квантовом обобщении.

Таким образом наша книга, с одной стороны, может служить дополнением к известным курсам электродинамики и теории поля, а с другой, является введением в современную теорию элементарных частиц, опирающуюся при дальнейшем исследовании на квантовую механику.

Физический факультет
Московского Государственного
Университета
им. М. В. Ломоносова

Сентябрь 1948 г.

Д. Иваненко
А. Соколов

ГЛАВА I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ δ -ФУНКЦИИ

§ 1. Определение δ -функции

В современной классической и квантовой физике, наряду с непрерывно распределёнными плотностями, часто рассматриваются точечные массы, заряды, диполи и т. п.

Если стремиться сохранить весьма удобное с физической и математической стороны понятие плотности масс или зарядов также для точечных величин, то приходится пользоваться так называемой δ -функцией, которая была введена Дираком в 1926 г. Например, при линейном распределении заряда e вдоль оси x плотность равняется

$$\rho = \frac{de}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta x}. \quad (1,1)$$

Отсюда видно, что в случае точечного заряда, расположенного, например, в начале координат, плотность ρ будет равняться нулю везде, кроме точки $x=0$, в которой она обращается в бесконечность.

Введём функцию $\delta(x' - x)$, равную нулю во всех точках, кроме особой точки $x' = x$, где она обращается в бесконечность, притом так, чтобы интеграл от этой функции по всему промежутку оставался конечным и равнялся бы единице:

$$\int \delta(x' - x) dx' = 1^* . \quad (1,2)$$

*) Здесь и в дальнейшем интеграл, написанный без пределов, берётся в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда δ -функция будет связана с плотностью заряда ρ точечного источника простым соотношением:

$$\rho(x) = e \delta(x). \quad (1,3)$$

Учитывая, что δ -функция во всех точках, кроме особой, равняется нулю, мы можем вместо равенства (1,2) написать для участка $a < b$:

$$\int_a^b \delta(x' - x) dx' = \begin{cases} 1; & b > x > a, \\ 0; & x > b \text{ или } x < a. \end{cases} \quad (1,4)$$

Точно так же для непрерывной в рассматриваемой области функции $f(x)$ легко получить соотношение*):

$$\int_a^b f(x') \delta(x' - x) dx' = \begin{cases} f(x); & b > x > a, \\ 0; & x > b \text{ или } x < a. \end{cases} \quad (1,5)$$

Действительно, применяя теорему о среднем значении, имеем при $b > x > a$:

$$\int_a^b f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x + \alpha\varepsilon) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \delta(x' - x) dx', \quad (1,6)$$

$$|\alpha| \leq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

откуда непосредственно следует равенство (1,5), если мы примем во внимание (1,4) и будем стремиться ε к нулю.

δ -функция, определённая подобным образом, выходит за рамки величин рассматриваемых в классическом анализе. Точно так же указанные интегралы нельзя понимать в смысле определения обычного интеграла.

Оказывается всё же, что интегралы с δ -функциями можно связать или с интегралом Стильтьеса или рассматривать их как результат некоторого предельного перехода от обычного интеграла.

*) Предельный случай $x = a$ или $x = b$ требует дополнительного исследования и зависит от конкретной конструкции δ -функции. Более подробно см. § 4, формулу (4,15).

§ 2. δ-функция и интеграл Стильтьеса

Интеграл Стильтьеса *) определяется как предел следующей суммы:

$$I = \int_a^b f(x) d\Phi(x) = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \Delta\Phi\left(a + k \frac{b-a}{n}\right). \quad (2,1)$$

Это выражение можно наглядно трактовать как обобщённый момент типа $f(x)$, обременённый распределению некоторых величин (например, масс, зарядов и т. д.), характеризуемых функцией $\Phi(x)$. При $f(x) = x$ имеем момент первого порядка, при $f(x) = x^2$, x^3 и т. д. — квадратичный момент и моменты высших порядков.

Если $\Phi(x)$ имеет интегрируемую производную

$$d\Phi(x) = \Phi'(x) dx, \quad (2,2)$$

то интеграл Стильтьеса будет сводиться к обычному интегралу:

$$I = \int_a^b f(x) \Phi'(x) dx. \quad (2,3)$$

Однако интеграл Стильтьеса имеет смысл и в таких случаях, когда функция распределения $\Phi(x)$ не является непрерывной, и, вообще говоря, может быть определён при весьма общих предположениях о характере разрывов функции $\Phi(x)$.

Например, возьмём случай разрывной функции:

$$\Phi(x) = \gamma(x) = \begin{cases} +\frac{1}{2}; & x > 0, \\ -\frac{1}{2}; & x < 0. \end{cases} \quad (2,4)$$

В этом случае приращение функции $\gamma(x)$ во всех точках равно нулю [$\Delta\gamma(x) = 0$], кроме точки $x = 0$, где это приращение обращается в единицу: $\Delta\gamma(0) = 1$.

*) Об интеграле Стильтьеса см. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1948.

Подставляя (2,4) в (2,1), получим:

$$\int_a^b f(x) d\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta\gamma(x_k), \quad (2,5)$$

где $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ и, кроме того, предполагается, что точка разрыва $x=0$ лежит внутри интервала a, b , т. е. $a < 0 < b$.

Переходя к пределу в выражении (2,5), получим:

$$\int_a^b f(x) d_I(x) = f(0); \quad a < 0 < b. \quad (2,6)$$

Сравнивая (2,6) с формулой (1,5) и полагая в последней особую точку x' лежащей в начале координат ($x'=0$), видим, что δ -функция в качестве подинтегрального фактора может быть определена как производная от разрывной функции:

$$\delta(x) = \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} = \gamma'(x). \quad (2,7)$$

Очевидно, такое определение вполне соответствует наглядному смыслу δ -функции, исчезающей везде, кроме точки разрыва.

Таким образом, если стремиться придерживаться известной и строго разработанной математической теории, то можно было бы δ -функцию вовсе не вводить, а пользоваться интегралом Стильтьеса. Однако это было бы в большинстве случаев чрезвычайно громоздко и примерно соответствовало бы систематическому использованию теории пределов и бесконечных сумм вместо дифференциального и интегрального исчисления. Кроме того, формализм δ -функции позволяет оставаться на почве более привычных приёмов классического анализа, допуская простые обобщения на пространство многих измерений, и даёт удобное описание сложных разрывов мультипольного типа, встречающихся в физике.

§ 3. δ -функция как предельный случай непрерывной функции

Всю теорию δ -функции можно построить, применяя предельный переход от известных непрерывных функций путём стремления некоторого параметра к определённом пределу.

Возьмём, например, вспомогательную функцию $\gamma(x, \alpha)$, которая при $\alpha > 0$ непрерывным образом зависит от x и в пределе принимает значения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}; & x > 0, \\ -\frac{1}{2}; & x < 0. \end{cases} \quad (3,1)$$

Этому требованию удовлетворяет, в частности, функция

$$\gamma(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \frac{\sin kx}{k} dk = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}. \quad (3,2)$$

Производная от $\gamma(x, \alpha)$ по x , которую обозначим через $\delta(x, \alpha)$, в данном случае равна

$$\delta(x, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha k} \cos kx dk = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}. \quad (3,3)$$

В пределе при α , стремящемся к нулю, легко показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(x, \alpha) = \begin{cases} 0; & x \neq 0, \\ \infty; & x = 0, \end{cases} \quad (3,4)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \delta(x, \alpha) dx = 1.$$

Сравнивая (3,4) с нашим определением δ -функции (см. § 1), мы можем рассматривать δ -функцию как предельное значение вспомогательной функции $\delta(x, \alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$, т. е.

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(x, \alpha). \quad (3,5)$$

Однако, если мы хотим брать интегралы в обычном понимании, то предельный переход $\alpha \rightarrow 0$ должен совершаться после вычисления интеграла. Иными словами, бесконечно малый параметр α должен иметь меньший порядок малости, чем бесконечно малое приращение Δx , т. е. интеграл с δ -функцией означает вычисление предела суммы, когда

$$\Delta x \rightarrow 0; \quad \alpha \rightarrow 0,$$

причём

$$\frac{\Delta x}{\alpha} \rightarrow 0.$$

Подобные интегралы относятся к классу несобственных. Аналогично в этом смысле равенство (1,5) следует трактовать как

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x') \delta(x' - x) dx' &= \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f(x') \delta(x' - x, \alpha) dx' = f(x); \quad a < x < b. \end{aligned} \quad (3,6)$$

Правильность последнего выражения легко проверить, если подставить в (3,6) конкретное значение для $\delta(x, \alpha)$ из равенства (3,3). Тогда мы получим известное из теории интеграла Фурье соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f(x') \delta(x' - x, \alpha) dx' &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_a^b f(x') \cos k(x' - x) dx' = f(x), \end{aligned} \quad (3,7)$$

совпадающее с результатом (3,6).

Производная вспомогательной функции $\delta(x, \alpha)$ определится соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(x, \alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k e^{-\alpha k} \sin kx dk = -\frac{2\alpha x}{\pi(\alpha^2 + x^2)^2}. \quad (3,8)$$

Интеграл, содержащий в качестве подынтегрального фактора величину $\frac{\partial \delta(x)}{\partial x}$, следует понимать как предел выражения

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^b f(x') \frac{\partial \delta(x' - x, \alpha)}{\partial x'} dx' = \int_a^b f(x') \frac{\partial \delta(x' - x)}{\partial x'} dx'. \quad (3,9)$$

Вычисляя последний интеграл по частям и прини-

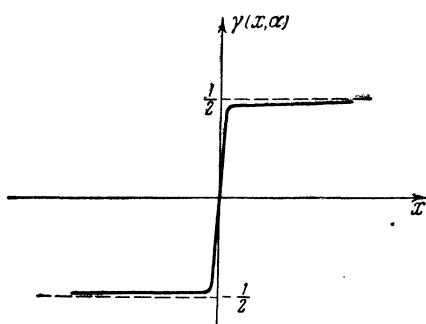


Рис. 1.

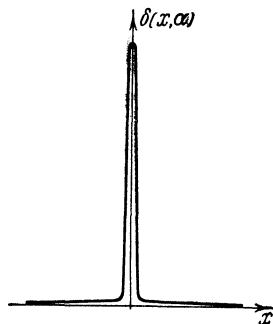


Рис. 2.

мая во внимание, что на границе области функция $\delta(x)$ обращается в нуль, получим:

$$\int_a^b f(x') \frac{\partial \delta(x' - x)}{\partial x'} dx' = -\frac{\partial f(x)}{\partial x}; \quad a < x < b. \quad (3,10)$$

Подобным образом мы можем обобщить понятие интеграла на случай, когда под интегралом стоят производные высшего порядка от δ -функции.

В этом случае

$$\int_a^b f(x') \delta^{(n)}(x' - x) dx' = (-1)^n f^{(n)}(x); \quad a < x < b. \quad (3,11)$$

Графики вспомогательных функций $\gamma(x, \alpha)$, $\delta(x, \alpha)$ и $\frac{\partial \delta(x, \alpha)}{\partial x} = \delta'(x, \alpha)$ изображены соответственно на рис. 1, 2 и 3. Они имеют весьма наглядный смысл и помогают

уяснить физическое значение предельных величин $\gamma(x)$, $\delta(x)$ и $\delta'(x)$.

При α , стремящемся к нулю, область крутого перехода функции $\gamma(x, \alpha)$ от нижнего к верхнему значению сужается, и в пределе мы имеем скачок в точке $x=0$ от $-1/2$ до $+1/2$ (рис. 1, пунктирная линия). Одновременно при $\alpha \rightarrow 0$ график функции $\delta(x, \alpha)$ сжимается возле точки $x=0$, стремясь по абсолютному значению

к бесконечности, соответственно, например, плотности точечного заряда.

График $\delta'(x, \alpha)$ беспредельно возрастает, принимая в двух соседних бесконечно близких точках равные по величине и противоположные по знаку значения, что физически соответствует, например, случаю электрического диполя. Действительно, по определению момента диполя имеем следующее значение для его плотности:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= e\delta(x-l) - e\delta(x) = \\ &= -p\delta'(x), \end{aligned} \quad (3,12)$$

где p является моментом диполя и равняется произведению положительного заряда e на расстояние между зарядами l .

Вместо рассмотренных выражений для вспомогательных функций $\gamma(x, \alpha)$ и $\delta(x, \alpha)$ за исходный пункт можно было выбрать бесчисленное множество других функций, удовлетворяющих предельным соотношениям (3,1), (3,4) и (3,10).

Таким образом конкретный вид вспомогательной функции является несущественным, и мы можем (подразумевая каждый раз необходимость совершения правильного предельного перехода) непосредственно использовать окончательные выражения для $\gamma(x)$, $\delta(x)$ и $\frac{\partial \delta(x)}{\partial x}$ при α , равных нулю.

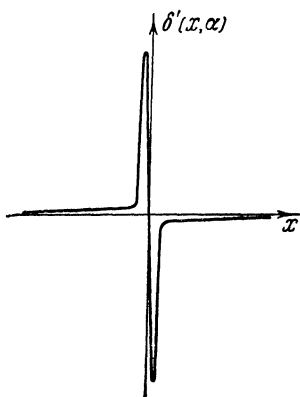


Рис. 3.

Следовательно, вместо вспомогательных функций (3,2) (3,3) и (3,8) напомним

$$\gamma(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{k} dk, \quad (3,13)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kx dk = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} dk \quad (3,14)$$

и

$$\delta'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} k \cdot \sin kx dk = \frac{1}{2\pi} \int ike^{ikx} dk. \quad (3,15)$$

В качестве другого примера функции $\gamma(x, \alpha)$ приведём выражение

$$f(x', x, \alpha) = \frac{1}{\frac{x'-x}{e^{-\alpha} + 1}}, \quad (3,16)$$

которое в пределе $\alpha \rightarrow 0$ даёт для $f(x', x, \alpha)$ два значения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x', x, \alpha) = \begin{cases} +1; & x' < x, \\ 0; & x' > x, \end{cases} \quad (3,17)$$

или

$$f(x', x, 0) = +\frac{1}{2} - \gamma(x' - x).$$

Поэтому производная от функции $f(x', x, \alpha)$ по x' будет иметь «дельтообразный» характер

$\frac{\partial f(x', x, \alpha)}{\partial x'} = -\delta(x', x, \alpha)$ (рис. 4). Подобного рода функция характеризует распределение частиц в статистике Ферми-Дирака. Предельный случай $\alpha \rightarrow 0$ соответствует закону распределения частиц при абсолютном нуле (полное вырождение).

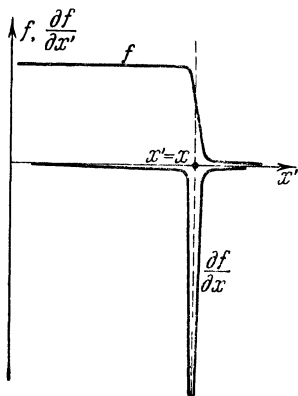


Рис. 4.

Известная предельная форма для интеграла Пуассона

$$f(\varphi) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r^2)}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(\varphi') d\varphi'}{1-2r \cos(\varphi' - \varphi) + r^2} \quad (3,18)$$

также может быть выражена через δ -функцию. В этом случае вспомогательная функция $\delta(\varphi, r)$ будет иметь вид

$$\delta(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \varphi + r^2}. \quad (3,19)$$

Легко показать, что

$$\lim_{r \rightarrow 1} \delta(\varphi, r) = \begin{cases} 0; & \varphi \neq 0, \\ \infty; & \varphi = 0 \end{cases} \quad (3,20)$$

и

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{+\pi} \delta(\varphi, r) d\varphi = 1.$$

Таким образом мы можем положить

$$\delta(\varphi' - \varphi) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r^2)}{2\pi} \frac{1}{1-2r \cos(\varphi' - \varphi) + r^2}. \quad (3,21)$$

§ 4. δ -функция и разложение Фурье

Пусть нам дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям разложимости по некоторой замкнутой системе ортогональных и нормированных функций $\varphi_n(x)$ в заданном промежутке a, b ($a < b$).

Тогда в случае дискретного спектра

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \varphi_n(x). \quad (4,1)$$

Умножим обе части равенства на $\varphi_{n'}^+(x)$ и проинтегрируем по всей области изменения x . Тогда, учитывая ещё условия ортонормированности

$$\int_a^b \varphi_{n'}^+(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{nn'}, \quad (4,2)$$

где символ Кронекера-Вейерштрасса

$$\delta_{nn'} = \begin{cases} 1; & n' = n, \\ 0; & n' \neq n, \end{cases} \quad (4,3)$$

найдем следующее значение для обобщенных коэффициентов Фурье *):

$$a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n^+(x) dx. \quad (4,4)$$

Отсюда, подставляя (4,4) в (4,1), имеем:

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_a^b f(x') \varphi_n^+(x') \varphi_n(x) dx'. \quad (4,5)$$

Заметим, что в равенстве (4,5) существенен порядок операций интегрирования и суммирования. Сперва необходимо произвести интегрирование по x' , а затем уже взять сумму бесконечного числа членов.

Однако, если мы хотим представить полученный результат с помощью формализма δ -функции, мы должны сперва ввести вспомогательную функцию, равную сумме конечного числа членов:

$$\delta_N(x' - x) = \sum_{n=n_0}^N \varphi_n^+(x') \varphi_n(x), \quad (4,6)$$

и представить (4,5) в виде предела:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=n_0}^N \int_a^b f(x') \varphi_n^+(x') \varphi_n(x) dx'. \quad (4,7)$$

Меняя теперь порядок интегрирования и суммирования, получим:

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b f(x') \delta_N(x' - x) dx'. \quad (4,8)$$

*) При вычислении коэффициентов Фурье a_n мы переменим порядок интегрирования и суммирования бесконечного числа членов. Законность этой операции, если угодно, можно рассматривать как условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Выражение (4,8) запишем в виде

$$f(x) = \int_a^b f(x') \delta(x' - x) dx', \quad (4,9)$$

где

$$\delta(x' - x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(x' - x). \quad (4,10)$$

Несобственный характер интеграла (4,9) заключается в том, что переход к пределу (4,10) мы должны совершить после вычисления интеграла.

Таким образом, как явствует из (4,9), δ -функция представляет собой ядро некоторого интегрального оператора Ω , превращающего в любой функции аргумент x' в x :

$$f(x) = \Omega f(x'). \quad (4,11)$$

Новое определение δ -функции (4,10), как предела выражения (4,6), является более общим, чем данное в предыдущем параграфе, ибо оно имеет место также для функций $f(x)$, обладающих разрывами первого рода, а также пригодно для крайних значений $x' = a$ или $x' = b$, если только функция $f(x)$ допускает разложение по ортонормированным функциям $\varphi_n(x)$ в крайних точках.

Разберём теперь ряд конкретных примеров представления δ -функции через различные системы ортонормированных функций, наиболее часто встречающихся в математической физике.

а) В качестве первого примера возьмём систему тригонометрических функций, записанных в показательной форме:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i \frac{\pi}{l} n x}, \quad (4,12)$$

определённых в интервале периодичности $-l \leq x \leq l$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Тогда согласно (4,6)

$$\delta_N(x' - x) = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2l} e^{-i \frac{\pi}{l} (x' - x) n}, \quad (4,13)$$

откуда

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{\pi}{l} (x' - x) n}. \quad (4,14)$$

Учитывая возможные разрывы функции $f(x)$, имеем согласно известной теореме Фурье

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x') \delta(x' - x) dx' = \\ = \frac{1}{2} \begin{cases} f(x+0) + f(x-0); & -l < x < l, \\ f(-l) + f(+l); & x = -l, x = l. \end{cases} \end{aligned} \quad (4,15)$$

Чтобы проделать переход к непрерывному спектру, т. е. к разложению $f(x)$ в интеграл Фурье, мы должны прежде всего положить

$$\frac{\pi n}{l} = k, \quad \frac{\pi}{l} \Delta n = \frac{\pi}{l} = \Delta k, \quad K = \frac{\pi N}{l}. \quad (4,16)$$

Затем, переходя к пределу: $l \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, K равно конечной величине, имеем

$$\delta(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \delta(x, K), \quad (4,17)$$

где вспомогательная функция

$$\delta(x, K) = \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K e^{-ikx} dk = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Kx}{x}. \quad (4,18)$$

Равенство (4,15) переходит в этом случае в выражение известного разрывного интеграла Дирихле:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int f(x') \frac{\sin K(x' - x)}{x' - x} dx' = \\ = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \end{aligned} \quad (4,19)$$

График вспомогательной функции (4,18), изображённый на рис. 5, ещё раз наглядно иллюстрирует несобственный характер δ -функции. Действительно, при стремлении K к бесконечности главный максимум в точке $x = 0$ беспредельно возрастает, побочными же уменьшающимися максимумами в пределе пренебрегаем.

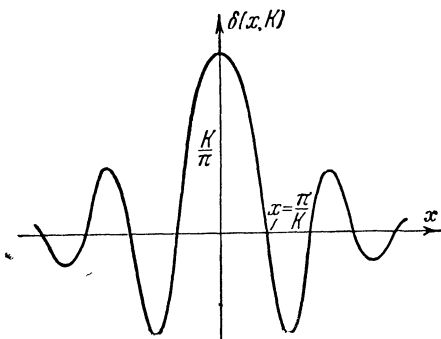


Рис. 5.

Согласно предыдущему мы будем писать

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx}, \quad (4,20)$$

подразумевая, что с точки зрения интеграла Римана переход к пределу ($K \rightarrow \infty$) необходимо

совершать после вычисления того интеграла, где в качестве подынтегрального множителя стоит $\delta(x' - x)$.

Условие ортонормированности для непрерывного спектра, т. е. для функций

$$\varphi(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{+ikx}, \quad (4,21)$$

$$\varphi^+(k', x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik'x},$$

будет иметь вид

$$\int \varphi^+(k', x) \varphi(k, x) dx = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i(k'-k)x} dx = \delta(k' - k). \quad (4,22)$$

Таким образом δ -функция, в частности, является обобщением символа Кронекера-Вейерштрасса [см. (4,3)] на непрерывный спектр.

В случае непрерывного спектра мы также можем сохранить формулу (4,6) для связи $\delta(x - x')$ с системой ортонормированных функций,

Для этой цели вместо функций (4,21) мы должны ввести

$$\tilde{\varphi}(k, x) = \sqrt{\frac{dk}{2\pi}} e^{ikx}, \quad \tilde{\varphi}^+(k, x') = \sqrt{\frac{dk}{2\pi}} e^{-ikx'},$$

после чего условие ортонормированности принимает вид:

$$\int \tilde{\varphi}^+(k', x) \tilde{\varphi}(k, x) dx = \frac{dk}{2\pi} \int e^{ix(k-k')} dx = dk \delta(k - k').$$

Тогда

$$\delta(x - x') = \sum_k \tilde{\varphi}^+(k, x') \tilde{\varphi}(k, x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-x')}. \quad (4,23)$$

Если отказаться от метода δ-функции, то приходится пользоваться для нормировки собственных функций в непрерывном спектре гораздо более громоздким приёмом Вейля. При этом за основу берётся так называемый «собственный дифференциал» от $\varphi(k, x)$, определяемый следующим образом:

$$\Delta f(k, x) = \int_{k-\frac{\Delta k}{2}}^{k+\frac{\Delta k}{2}} \varphi(k, x) dk,$$

где интеграл от рассматриваемой функции $\varphi(k, x)$ распространён по малому промежутку собственных значений Δk .

Тогда условие нормировки Вейля гласит *)

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta k} \int |\Delta f|^2 dx = 1. \quad (4,24)$$

Например, для случая (4,21) имеем

$$\Delta f^*(k, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-ikx} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta kx}{2}}{x},$$

$$\Delta f(k, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{+ikx} \cdot \frac{\sin \frac{\Delta kx}{2}}{x},$$

*) В. А. Фок, Начала квантовой механики, Кубуч, 1932, стр. 24—25, 36.

откуда

$$\frac{1}{\Delta k} \int |\Delta f|^2 dx = \frac{2}{\pi \Delta k} \int \frac{\sin^2 \frac{\Delta k x}{2}}{x^2} dx = 1,$$

т. е. более простой способ нормирования с помощью δ -функции (4,22) является совершенно эквивалентным способу Вейля (4,24). Приём Вейля сводится, очевидно, к сглаживанию несобственной δ -функции.

Отметим, что равенство (4,20) представляет собой разложение δ -функции в интеграл Фурье, причём все коэффициенты Фурье оказываются постоянными и равными $\frac{1}{2\pi}$.

Все полученные соотношения можно установить также для любых других систем ортонормированных функций.

б) При разложении по бесселевым функциям $J_m(x)$ в интервале $0 \leq r \leq R$ в случае дискретного спектра ортонормированными функциями являются *)

$$\varphi_n(r) = \frac{\sqrt{2r}}{R} \frac{J_m\left(s_n \frac{r}{R}\right)}{J'_m(s_n)}; \quad J'_m(x) = \frac{\partial J_m(x)}{\partial x}, \quad (4,25)$$

где $m > -1$, а s_n являются корнями уравнения

$$J_m(s_n) = 0.$$

Следовательно, δ -функция в данном случае будет иметь вид

$$\delta(r' - r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{rr'}}{R^2} \frac{J_m\left(s_n \frac{r'}{R}\right) J_m\left(s_n \frac{r}{R}\right)}{J_m'^2(s_n)}. \quad (4,26)$$

При переходе к непрерывному спектру мы должны положить: $s_n \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$, $\frac{s_n}{R} = k$ равное конечной вели-

*) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 104.

чине. Чтобы определить корни s_n , возьмём асимптотическое выражение для функции J_m :

$$J_m = \sqrt{\frac{2}{\pi s_n}} \cos \left(s_n - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} \right),$$

откуда $s_n - \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$, где n является целым числом, причём нас интересуют лишь большие значения n .

Из последних соотношений находим

$$J_m'^2 = \frac{2}{\pi s_n} = \frac{2}{\pi Rk}, \quad \Delta s_n = \pi \Delta n = \pi = R \Delta k.$$

Поэтому, переходя в (4,26) от суммирования к интегрированию, получим

$$\delta(r' - r) = \sqrt{rr'} \int_0^{\infty} k J_m(kr) J_m(kr') dk; \quad 0 \leq r, r' < \infty. \quad (4,27)$$

Это выражение при $r > 0$ эквивалентно равенству

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} r' f(r') J_m(kr) J_m(kr') dr' = \\ = \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{r'}{r}} f(r') \delta(r' - r) dr' = f(r), \end{aligned}$$

известному под названием интеграла Фурье-Бесселя, которое имеет место для функций f , удовлетворяющих условию Дирихле и для которых $\int_0^{\infty} \sqrt{r} f(r) dr \neq \infty$.

Заметим, что для предельного случая $r = 0$ (см. § 1), равенство (4,27) сохраняет силу, если $m = 0$, т. е.

$$\delta(r') = r' \int_0^{\infty} k J_0(kr') dk. \quad (4,28)$$

В самом деле, с помощью равенства

$$\delta(r', \alpha) = r' \int_0^{\infty} e^{-\alpha k} k J_0(kr') dk = \frac{r' \alpha}{(\alpha^2 + r'^2)^{3/2}}$$

легко показать, что:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta(r', \alpha) = 0; \quad r' \neq 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \delta(r', \alpha) dr' = 1,$$

или

$$\int_0^{\infty} \delta(r') f(r') dr' = f(0).$$

в) При разложении произвольной функции по полиномам Лежандра $P_n(x)$ в интервале $-1 \leq x \leq 1$ ортонормированными функциями являются

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x). \quad (4,29)$$

Поэтому в этом случае δ -функция примет вид

$$\delta(x' - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x') P_n(x). \quad (4,30)$$

г) Наконец, при разложении по эрмитовым функциям, когда собственные функции имеют вид

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (4,31)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита-Чебышева, δ -функцию можно представить в форме

$$\delta(x' - x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta(x' - x, N),$$

где вспомогательная функция

$$\delta(x' - x, N) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} e^{-\frac{x^2 + x'^2}{2}} H_n(x') H_n(x), \quad (4,32)$$

Последняя сумма может быть вычислена приближённо *):

$$\delta(x' - x, N) = \frac{\sin \sqrt{2(N+1)}(x' - x)}{\pi(x' - x)} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N+1}}\right). \quad (4,33)$$

При достаточно больших значениях N вспомогательные функции (4,33) и (4,18) будут отличаться на величину, обращающуюся в нуль в предельном случае ($N \rightarrow \infty$).

§ 5. δ-функция в пространстве n измерений

Теория δ-функции, развитая выше для случая одной переменной, без труда обобщается на n измерений.

За основу определения n -мерной δ-функции возьмём равенства:

$$\int_{a_1}^{b_1} dx'_1 \int_{a_2}^{b_2} dx'_2 \dots \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) = 1 \quad (5,1)$$

при $a_1 < x_1 < b_1$ и т. д.,

$$\delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) = 0 \quad \text{при } x_1 \neq x'_1 \text{ и т. д.} \quad (5,2)$$

Аналогично одномерному случаю на основании последних равенств можем написать

$$\int_{a_1}^{b_1} dx'_1 \int_{a_2}^{b_2} dx'_2 \dots \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) f(x'_1, x'_2, \dots) = f(x_1, x_2, \dots) \quad \text{при } a_1 < x_1 < b_1 \text{ и т. д.} \quad (5,3)$$

В качестве примера двумерной δ-функции можно привести интеграл

$$\delta(\theta' - \theta, \varphi' - \varphi) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{4\pi} \times \\ \times \frac{\sin \theta'}{1-2r[\cos \theta' \cdot \cos \theta + \sin \theta' \cdot \sin \theta \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2}. \quad (5,4)$$

$$0 \leq \varphi', \quad \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \theta', \quad \theta \leq \pi.$$

*) В. А. Ф о к, О несобственных функциях в квантовой механике, ЖРФХО (часть физическая), 61, 1, 1929; В. А. К р а в ц о в, О математических обоснованиях новой квантовой механики, ЖРФХО (часть физическая), 61, 9, 1929.

Легко проверить, что последнее выражение удовлетворяет равенствам (5,1) и (5,2).

Из (5,4) мы получаем соотношение

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \frac{\sin \theta' f(\theta', \varphi') d\theta'}{1-2r [\cos \theta' \cdot \cos \theta + \sin \theta' \cdot \sin \theta \cdot \cos(\varphi' - \varphi)] + r^2} = f(\theta, \varphi), \quad (5,5)$$

известное из теории решения трёхмерного уравнения Лапласа.

Особенно удобно произвести обобщение на n -мерный случай, положив в основу определения δ -функции кратный интеграл Фурье.

Ввиду простых свойств аддитивности показательных функций можно положить

$$\delta(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int dk_1 \int dk_2 \dots e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots)} = \delta(x_1) \delta(x_2) \dots \quad (5,6)$$

В частности, в трёхмерном случае *)

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x) \delta(y) \delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}), \quad (5,7)$$

где

$$(d\mathbf{k}) = dk_1 dk_2 dk_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{k}\mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z. \quad (5,8)$$

§ 6. Важнейшие формулы с δ -функциями

Приведём сводку основных формул с δ -функциями, наиболее часто встречающихся в приложениях.

Как легко проверить,

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (6,1)$$

т. е. δ -функция является чётной функцией.

*) В равенстве (5,7) мы имеем тройной интеграл, распространённый по всему пространству волновых чисел \mathbf{k} ($-\infty < k < \infty$ и т. д.). Для простоты мы будем писать при многократном интеграле один знак интеграла, подразумевая, что всюду число интегралов должно равняться числу дифференциалов.

Для производной δ -функции имеем

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \quad (6,2)$$

т. е. производная от δ -функции является нечётной функцией, причём штрих означает производную по тому аргументу, от которого зависит функция. Далее имеем ряд важных формул:

$$f(x') \delta(x' - x) = f(x) \delta(x' - x), \quad (6,3)$$

$$x \delta(x) = 0, \quad (6,4)$$

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|\varphi'(x)|} = \sum_s \frac{\delta(x - x_s)}{|(\varphi' x_s)|}. \quad (6,5)$$

Здесь x_s являются простыми корнями уравнения $\varphi(x) = 0$, лежащими в рассматриваемом интервале.

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad (6,6)$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|x|}. \quad (6,7)$$

В частности, при $a \rightarrow 0$ находим:

$$|x| \delta(x^2) = \delta(x), \quad (6,8)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) \delta(x_1 - x_2) dx_2 = \begin{cases} \int_{a_n}^{b_n} f(x, x) dx; & b_n > a_n, \\ 0; & b_n < a_n. \end{cases} \quad (6,9)$$

Здесь a_n является наибольшим значением из a_1 и a_2 , а b_n — наименьшим значением из b_1 и b_2 ($a_1 < b_1$; $a_2 < b_2$). Для функции, имеющей конечный разрыв в точке x_0 ,

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x); & x < x_0, \\ f_2(x); & x > x_0; \end{cases} \quad (6,10)$$

$$f_2(x_0) - f_1(x_0) = h,$$

$$f'(x) = h \delta(x - x_0) + \begin{cases} f'_1(x); & x < x_0, \\ f'_2(x); & x > x_0. \end{cases} \quad (6,11)$$

В частности,

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} - i\pi \delta(x). \quad (6,12)$$

Соотношения (6,1), (6,3) и (6,4) легко могут быть проверены с помощью соотношения (1,5). Так, например, выражение (6,1) эквивалентно равенству

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = \int_a^b f(x) \delta(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(-x) \delta(x) dx,$$

причём в нашем случае $b > 0 > a$, поэтому $-a > 0 > -b$. Справедливость последнего соотношения не вызывает сомнений, так как его левая и правая части равны $f(0)$, а функция $f(x)$ не должна обладать в интервале a, b бесконечными разрывами.

Подобным же образом с помощью равенства (3,10) проверяем соотношение (6,2).

Для вывода формулы (6,5) разобьём весь промежуток интегрирования на отдельные интервалы: $x_s - \varepsilon_s, x_s + \varepsilon_s$ ($\varepsilon_s > 0$), так, чтобы в каждом из них лежал только один корень [в случае кратных корней равенство (6,5) теряет смысл].

Затем, сделав замену переменных

$$\varphi(x) = u,$$

найдем для каждого интервала

$$F_s = \int_{x_s - \varepsilon_s}^{x_s + \varepsilon_s} f(x) \delta(\varphi(x)) dx = \int_{-u'_s \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2} u''_s}^{u'_s \varepsilon_s + \frac{\varepsilon_s^2}{2} u''_s} f(x) \frac{\delta(u)}{u'} du.$$

Здесь мы учли, что $u_s = \varphi(x_s) = 0$ и $u'_s = \varphi'(x_s) \neq 0$ (нет кратных корней).

Величину ε_s мы всегда можем выбрать таким образом, чтобы знаки верхнего и нижнего предела последнего интеграла определялись линейными членами относительно ε_s .

Тогда при $u'_s > 0$

$$F_s = \frac{f(x_s)}{u'_s} = \frac{f(x_s)}{|u'_s|}.$$

При $u'_s < 0$ мы должны поменять местами пределы интегрирования, чтобы нижний предел был меньше верхнего.

В этом случае

$$F_s = - \int_{u'_s \epsilon_s}^{-u'_s \epsilon_s} f(x) \frac{\delta(u)}{u'} du = - \frac{f(x_s)}{u'_s} = \frac{f(x_s)}{|u'_s|}.$$

Распространяя интегрирование на весь участок, получим равенство

$$\int_a^b f(x) \delta[\varphi(x)] dx = \sum_s F_s = \sum_s \frac{f(x_s)}{|\varphi'(x_s)|},$$

Символически записываемое в виде (6,5).

Полагая в (6,5) $\varphi(x) = ax$ и $\varphi(x) = x^2 - a^2$, находим формулы (6,6) и (6,7), выведенные ещё Дираком.

Особая точка ($x=0$) δ -функции, входящей в равенство (6,8), является крайней точкой интеграла, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \delta(x^2) dx = 2 \int_0^{\infty} x \delta(x^2) dx.$$

Точное значение интеграла зависит от конструкции δ -функции. Рассматривая $\delta(x^2)$ как предел выражения

$$\delta(x^2) = \delta(x^2 - \varepsilon); \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

и учитывая, что согласно (3,3) при $\alpha > 0$:

$$\delta(x^2 - \varepsilon) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi [\alpha^2 + (x^2 - \varepsilon)^2]},$$

найдем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |x| \delta(x^2 - \varepsilon) = \begin{cases} \delta(x); & \varepsilon > \alpha, \\ 0; & \varepsilon < -\alpha, \\ \frac{1}{2} \delta(x); & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Поэтому равенство (6,8) имеет место, для $\varepsilon > 0$. Для вывода формулы (6,11) функцию $f(x)$ представим в виде

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \gamma(x - x_0) \right) f_2(x) + \left(\frac{1}{2} - \gamma(x - x_0) \right) f_1(x).$$

Учитывая при дифференцировании последнего соотношения равенство (2,7) и (6,10), докажем справедливость формулы (6,11).

Наконец, соотношение (6,12) мы можем рассматривать как частный случай предыдущего равенства.

В самом деле, мы имеем

$$\ln x = \begin{cases} \ln |x|; & x > 0, \\ \ln |x| + i\pi; & x < 0, \end{cases}$$

или

$$\ln x = \ln |x| + i\pi \left(\frac{1}{2} - \gamma(x) \right),$$

откуда, взяв производную по x , получаем соотношение (6,12).

§ 7. Функция Грина

Одним из наиболее важных применений теории δ -функции является построение функции Грина линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*).

Пусть нам дано неоднородное уравнение

$$L\varphi(x_1, x_2, \dots) = -\rho(x_1, x_2, \dots), \quad (7,1)$$

в котором под аргументами x_1, x_2, \dots можно в общем случае подразумевать как пространственные $r(x, y, z)$, так и временную t координаты.

Здесь линейный оператор

$$L \equiv a_0 + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots, \quad (7,2)$$

а ρ является плотностью источника.

Решение уравнения (7,1) символически записывается в форме

$$\varphi = -L^{-1}\rho. \quad (7,3)$$

*) Вообще говоря, этим методом мы можем также воспользоваться, если коэффициенты, образующие оператор L , являются переменными; существенно, чтобы нам удалось составить δ -функцию из таких ортонормированных функций, для которых легко определить собственные значения λ оператора L (см. §§ 17, 18): $Lu_n = -\lambda^2 u_n$.

Представив правую часть уравнения (7,1) с помощью δ -функции в виде

$$\rho(x_1, x_2, \dots) = \int \rho(x'_1, x'_2, \dots) \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) dx'_1 dx'_2 \dots \quad (7,4)$$

и учитывая, что оператор L действует только на нештрихованные координаты x_1, x_2, \dots , имеем вместо уравнения (7,3)

$$\varphi(x_1, x_2, \dots) = - \int \rho(x'_1, x'_2, \dots) L^{-1} \delta(x'_1 - x_1, x'_2 - x_2, \dots) dx'_1 dx'_2 \dots \quad (7,5)$$

При этом решение уравнения (7,1) примет вид

$$\varphi(x) = \int \rho(x') G(x', x) (dx'); \quad (7,6)$$

вектор в n -мерном пространстве имеет составляющие x_1, x_2, \dots , $(dx') = dx'_1 dx'_2 \dots$, а G по определению есть функция Грина данного уравнения.

Следовательно, функция Грина может быть связана с δ -функцией при помощи следующего символического равенства *):

$$G(x', x) = -L^{-1} \delta(x' - x). \quad (7,7)$$

Умножая на оператор L , имеем

$$LG = -\delta(x' - x). \quad (7,8)$$

Строго говоря, деление на оператор является неоднозначным действием, и поэтому к правой части равенства (7,7) мы можем добавить несингулярную часть функции Грина G_0 , которая является решением однородного уравнения $LG_0 = 0$. Функция G_0 подбирается из дополнительных условий (граничных, начальных и т. д.).

*) Д. И в а н е н к о и А. С о к о л о в. Обобщённое волновое уравнение и классическая мезодинамика, ДАН, 36, 37, 1940; см. также А. С о к о л о в, Дельта-функция и её применение к решению некоторых математических задач геофизики, Свердловск, 1946.

Интегрируя (7,7), найдём, что ядро интегрального оператора, соответствующего обратному дифференциальному, является функцией Грина:

$$L^{-1} = - \int G(x', x) \dots (dx') \quad (7,9)$$

Представляя δ -функцию в виде разложения Фурье

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ik_\alpha(x_\alpha - x'_\alpha)} dk_1 dk_2 \dots \quad (7,10)$$

$$(k_\alpha x_\alpha = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots)$$

и замечая, что действие оператора L^{-1} на показательную функцию равняется

$$L^{-1} e^{+ik_\alpha x_\alpha} = \frac{e^{ik_\alpha x_\alpha}}{a_0 + ik_1 a_1 + ik_2 a_2 + \dots + (ik_1)^2 a_{11} + \dots}, \quad (7,11)$$

находим значение для функции Грина

$$G = G_1 + G_0,$$

где

$$G_1 = - \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{e^{ik_\alpha x_\alpha} dk_1 dk_2 \dots}{a_0 + ik_1 a_1 + ik_2 a_2 + \dots + (ik_1)^2 a_{11} + \dots}. \quad (7,12)$$

Это представление для G_1 соответствует известной теореме Мерсера*), согласно которой, например, в случае дискретного спектра,

$$G_1 = \sum_n \frac{\varphi_n^+(x') \varphi_n(x)}{\lambda_n},$$

где λ_n — собственные значения оператора L .

Из равенств (7,7) и (7,8) вытекают следующие свойства функции G :

а) Сингулярная часть G_1 , так же, как и δ -функция, симметрична относительно аргументов x' и x .

б) G_1 является решением однородного уравнения во всех точках, кроме точки $x'_1 = x_1$, и т. д. В этой точке особенности определяются через δ -функцию.

*) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, стр. 124, Гостехиздат, 1951.

Физический смысл уравнения (7,1) заключается в том, что источник ρ порождает данное поле. Гриновская функция даёт ту долю поля в точке x в момент времени t , которая порождается источником единичной интенсивности, находящимся в момент t' в точке x' . Полное поле φ получится в результате интегрирования по всему распределению источника и по всему промежутку времени, в течение которого он действовал.

Близкое определение гриновской функции даётся в так называемом операционном исчислении, где вместо разложения Фурье используется разложение Лапласа-Меллина *).

*) Основы операционного исчисления изложены, например, в книге А. И. Лурия «Операционное исчисление», Гостехиздат, 1950. Там же указана основная литература по операционному исчислению.

Г Л А В А И
СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

§ 8. Одномерное уравнение Лапласа

В настоящей главе мы рассмотрим решения линейных дифференциальных уравнений, не зависящих от времени. К их числу в первую очередь относится уравнение Лапласа-Пуассона

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad (8,1)$$

которое, как известно, играет весьма важную роль в самых различных разделах теоретической и математической физики: электродинамике, гидродинамике, теории тяготения и др.

Найдём гриновские функции уравнений Лапласа-Пуассона для случая одного, двух и трёх измерений.

В случае одного измерения уравнение Лапласа-Пуассона имеет вид

$$L\varphi = \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -4\pi\rho(x). \quad (8,2)$$

По общему правилу [см. (7,8)] гриновская функция оператора L определяется из уравнения

$$LG = -\delta(x-x') = -\frac{1}{2\pi} \int dk e^{ik(x-x')}, \quad (8,3)$$

откуда согласно правилу деления на оператор (7,11) имеем

$$G = -L^{-1}\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{e^{ik(x-x')} - 1}{k^2} + C_1x + C_2. \quad (8,4)$$

Здесь двучлен $C_1x + C_2$ является решением однородного уравнения

$$L\varphi = 0. \quad (8,5)$$

Кроме того, мы добавили к сингулярной части (чтобы сделать её конечной) постоянный бесконечный член вида

$$J = -\frac{1}{2\pi} \int dk \frac{1}{k^2}. \quad (8,6)$$

Интегрируя по частям, в (8,4) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int dk \frac{e^{ik(x-x')} - 1}{k^2} = -\frac{|x-x'|}{2}, \quad (8,7)$$

откуда окончательно гриновская функция уравнения Лапласа-Пуассона в одномерном случае равняется

$$G = -\frac{1}{2} |x-x'| + C_1x + C_2. \quad (8,8)$$

Неизвестные коэффициенты C_1 и C_2 должны определяться из дополнительных условий.

При помощи (8,8) найдём искомое решение уравнения (8,2):

$$\varphi = 4\pi \int dx' \rho(x') G(x-x'). \quad (8,9)$$

В частности, если мы имеем электрический заряд e , расположенный в начале координат, т. е.

$$\rho(x') = e \delta(x'), \quad (8,10)$$

то для φ получим

$$\varphi = -2\pi e |x| + 4\pi e x C_1 + 4\pi e C_2. \quad (8,11)$$

При определении потенциала постоянный член $4\pi e C_2$ можно отбросить, так как начало отсчёта не является существенным. Кроме того, в силу симметрии потенциала относительно знака x коэффициент C_1 , в данном случае следует принять равным нулю.

Поэтому окончательное решение имеет вид

$$\varphi = -2\pi e |x|. \quad (8,12)$$

С точки зрения трёхмерного случая это решение соответствует потенциалу плоскости, равномерно заряженной электричеством с поверхностной плотностью

$$\sigma = e. \quad (8,13)$$

В случае наличия граничных условий

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad (8,14)$$

или

$$G(0-x') = G(1-x') = 0, \quad (8,15)$$

найдем

$$C_2 = \frac{1}{2} |x'|, \quad C_1 = \frac{1}{2} |1-x'| - \frac{1}{2} |x'|. \quad (8,16)$$

Поэтому выражение для функции Грина примет вид

$$G(x, x') = -\frac{1}{2} (|x-x'| - x|1-x'| + x|x'| - |x'|),$$

или при $0 \leq x, x' \leq 1$

$$\begin{aligned} G(x, x') &= -\frac{1}{2} (|x-x'| - x - x' + 2xx') = \\ &= \begin{cases} +x'(1-x); & x > x', \\ +x(1-x'); & x < x'. \end{cases} \end{aligned} \quad (8,17)$$

Подставляя (8,17) в (8,9), имеем для $0 < x < 1$

$$\varphi = 4\pi \int_0^x x'(1-x) \rho(x') dx' + 4\pi \int_x^1 x(1-x') \rho(x') dx'. \quad (8,18)$$

Эту же задачу можно было решить также при другом выборе собственных функций, образующих δ -функцию.

За ортонормированные функции удобно взять

$$\varphi_n = \sqrt{2} \sin \pi n x, \quad (8,19)$$

где n — целые числа, изменяющиеся от 1 до ∞ .

Тогда

$$\delta(x' - x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x' \cdot \sin \pi n x. \quad (8,20)$$

Отсюда, повторяя предыдущие вычисления, найдём

$$G(x', x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x' \cdot \sin \pi n x}{\pi^2 n^2} + G_0. \quad (8,21)$$

Если мы введём ещё граничные условия (8,15), то несингулярное решение G_0 следует положить равным нулю и

$$G(x', x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n (x' - x) - \cos \pi n (x' + x)}{\pi^2 n^2}, \quad (8,22)$$

т. е. в данном случае нам удалось подобрать для образования δ -функции такие ортонормированные функции φ_n , которые удовлетворяют заданным граничным условиям (8,15), и поэтому мы могли отбросить несингулярное решение.

Воспользовавшись известным значением для суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n y}{\pi^2 n^2} = \frac{1}{6} + \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} |y|, \quad (8,23)$$

получим выражение для G , совпадающее с (8,17).

Этот пример особенно ясно показывает, что различный выбор систем ортогональных функций, применённый для конструирования δ -функции, приводит к одинаковым значениям гриновской функции. Иными словами, как уже неоднократно отмечалось в гл. I, конкретный выбор вида δ -функции является несущественным.

§ 9. Уравнение Лапласа-Пуассона на плоскости

По общему определению гриновскую функцию двумерного уравнения Лапласа-Пуассона найдём из уравнения

$$\begin{aligned} LG &= -\delta(x' - x) \delta(y' - y) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int e^{ik_1(x-x') + ik_2(y-y')} dk_1 dk_2, \end{aligned} \quad (9,1)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (9,2)$$

Отсюда, проделывая вычисления, указанные в § 7, имеем для сингулярной части гринавской функции

$$G = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{ik_1(x-x')} + e^{ik_2(y-y')} - e^{ik_1+ik_2}}{k_1^2 + k_2^2} dk_1 dk_2. \quad (9,3)$$

Для обеспечения конечности G , так же, как и в предыдущем случае, нами добавлен постоянный бесконечный член

$$G_0 = -\frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{ik_1+ik_2}}{k_1^2 + k_2^2} dk_1 dk_2. \quad (9,4)$$

Переходя к полярным координатам, имеем $k^2 = k_1^2 + k_2^2$; $dk_1 dk_2 = k dk d\varphi$;

$$k_1(x-x') + k_2(y-y') = k\rho \cos \varphi,$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Интегрируя по переменной φ , с помощью равенства

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\rho \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(k\rho), \quad (9,5)$$

где J_0 — бесселева функция, получим

$$G(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(k\rho) - J_0(k)}{k} dk.$$

Отсюда видно, что

$$G(1) = 0. \quad (9,6)$$

Дифференцируя функцию $G(\rho)$ по ρ и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial J_0(k\rho)}{\partial \rho} = \frac{\partial J_0(\xi)}{\partial \xi} k, \quad \text{где } \xi = k\rho, \text{ найдём}$$

$$\frac{dG(\rho)}{d\rho} = \frac{1}{2\pi\rho} \int_0^\infty d\xi \frac{dJ_0(\xi)}{d\xi} = -\frac{1}{2\pi\rho}.$$

Учитывая (9,6), имеем

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \rho = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad (9,7)$$

т. е. логарифмический потенциал удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 2\pi \delta(x) \delta(y). \quad (9,8)$$

Отсюда легко получить, что в случае точечного заряда e , когда правая часть уравнения имеет вид $4\pi\rho = 4\pi e\delta(x)\delta(y)$, потенциал φ будет определяться из равенства

$$\varphi = -2e \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

С точки зрения трёхмерного случая этот потенциал соответствует потенциалу прямой линии, равномерно заряженной электричеством с линейной плотностью $\kappa = e$.

Двумерная гриновская функция позволяет найти связь δ -функции с оператором Коши из теории функций комплексного переменного.

Для этой цели рассмотрим криволинейный интеграл

$$I = \oint \frac{\omega(x, y)}{z} dz, \quad (9,9)$$

взятый по некоторому замкнутому контуру l . Здесь $z = x + iy$, $\omega = u + iv$. Действительные функции u и v не должны обладать особенностями на контуре или внутри его.

Выражение (9,9) мы будем понимать как сумму двух контурных интегралов, один из которых является действительным, а другой мнимым.

Применим к интегралу (9,9) известную формулу преобразования линейного интеграла в поверхностный:

$$\oint (P dx + Q dy) = \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (9,10)$$

где интегрирование проводится по площади S , заключённой внутри контура l . Полагая

$$P = \frac{\omega}{z}, \quad Q = i \frac{\omega}{z}, \quad (9,11)$$

найдем

$$I = i \int \left[w \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w \right] dx dy. \quad (9,12)$$

Так как

$$\frac{1}{z} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \ln \sqrt{x^2+y^2}, \quad (9,13)$$

то

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{z} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln \sqrt{x^2+y^2} = 2\pi \delta(x) \delta(y). \quad (9,14)$$

При этом мы воспользовались формулой (9,8).

Подставляя последнее выражение в (9,12), получим

$$\oint \frac{w}{z} dz = 2\pi i \int w \delta(x) \delta(y) dx dy + \\ + i \int \frac{1}{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w dx dy. \quad (9,15)$$

Наконец, если w удовлетворяет условию Коши-Римана

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) w = 0, \quad (9,16)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (9,17)$$

то мы получаем известную формулу Коши из теории функций комплексного переменного

$$\oint \frac{w(x, y)}{z} dz = 2\pi i w(0, 0). \quad (9,18)$$

Таким образом имеет место следующее операторное соотношение:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\dots}{z} dz = \int \dots \delta(x) \delta(y) dx dy, \quad (9,19)$$

где вместо многоточия мы можем подставить любую аналитическую функцию.

§ 10. Трёхмерное уравнение Лапласа-Пуассона

По общему определению функцию Грина трёхмерного уравнения Лапласа-Пуассона найдём из формулы

$$LG = \nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} (d\mathbf{k}), \quad (10,1)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (d\mathbf{k}) = dk_1 dk_2 dk_3, \quad (10,2)$$

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = k_1 x + k_2 y + k_3 z.$$

Отсюда

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k} (d\mathbf{k}). \quad (10,3)$$

В случае «естественных» граничных условий, когда $G=0$, при $r \rightarrow \infty$ мы должны положить несингулярную часть G_0 равной нулю.

Интегрирование выражения (10,3) легко произвести, введя сферические координаты (k, θ, φ) в пространстве волновых чисел \mathbf{k} :

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2},$$

$$(d\mathbf{k}) = k^2 dk \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (10,4)$$

Направляя ось k_3 по вектору $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, получим

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \theta e^{ikR \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (10,5)$$

Интегрируя (10,5) по сферическим углам с помощью равенства

$$\int_0^\pi \sin \theta e^{ikR \cos \theta} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \frac{\sin kR}{kR}, \quad (10,6)$$

получим

$$G = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{\sin kR}{k} dk = \frac{1}{4\pi R}. \quad (10,7)$$

Отсюда решение уравнения Лапласа-Пуассона для трёхмерного случая

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r}) \quad (10,8)$$

имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} (d\mathbf{r}'). \quad (10,9)$$

Различные случаи распределения зарядов, обладающие особенностями того или иного типа (точечный заряд, поверхностный заряд и т. д.), которые без δ -функции требовали дополнительных исследований с помощью сложных предельных переходов, теперь могут быть весьма просто описаны с помощью формализма δ -функции.

Пусть весь заряд расположен в точке \mathbf{l} . Тогда его плотность равна

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}). \quad (10,10)$$

В самом деле,

$$\int \rho(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}) = e \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}) (d\mathbf{r}) = e,$$

а $\rho(\mathbf{r})$ всюду, кроме особой точки $\mathbf{r}=\mathbf{l}$, обращается в нуль.

Если \mathbf{r} , т. е. расстояние от начала координат до точки наблюдения, много больше l ($\frac{l}{r} \ll 1$), то выражение (10,10) может быть разложено в ряд:

$$e\delta(\mathbf{r}-\mathbf{l}) = e\delta(\mathbf{r}) - e(\mathbf{l} \cdot \nabla)\delta(\mathbf{r}) + \\ + \frac{e}{2}(\mathbf{l} \cdot \nabla)^2\delta(\mathbf{r}) + \dots + \frac{e}{s!}(-1)^s(\mathbf{l} \cdot \nabla)^s\delta(\mathbf{r}) + \dots$$

Плотность

$$\rho_0 = e\delta(\mathbf{r})$$

является плотностью точечного заряда; выражение

$$\rho_1 = -e \sum_{n=1,2,3} l_n \nabla_n \delta(\mathbf{r})$$

даёт плотность диполя; член

$$\rho_2 = \frac{e}{2} \sum_{n,k} l_n l_k \nabla_n \nabla_k \delta(\mathbf{r})$$

является плотностью квадруполья. Следующие члены разложения дают плотности точечных мультиполей высшего порядка.

Потенциалы плотности «точечных» мультиполей высшего порядка (точечный заряд, диполь и т. д.) могут быть найдены или с помощью формулы (10,9) или непосредственным образом. Представляя трёхмерную δ -функцию разложенной в интеграл Фурье [см. (10,1)]:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}),$$

имеем для потенциала заряда

$$\varphi_0 = -\frac{4\pi e \delta(\mathbf{r})}{\nabla^2} = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2} (d\mathbf{k}) = \frac{e}{r}, \quad (10,11)$$

для потенциала диполя

$$\varphi_1 = \frac{4\pi e \mathfrak{L}_n \nabla_n \delta(\mathbf{r})}{\nabla^2} = -\left(\mathbf{p} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right), \quad (10,12)$$

где $\mathbf{p} = e \cdot \mathbf{l}$ — момент диполя; наконец, для потенциала квадруполья мы найдём

$$\varphi = \frac{1}{3!} \sum_{n, n'} e (3l_n l_{n'} - l^2 \delta_{nn'}) \nabla_n \nabla_{n'} \frac{1}{r}, \quad (10,13)$$

где величины $p_{nn'} = e (3l_n l_{n'} - l^2 \delta_{nn'})$ являются компонентами квадрупольного момента, образующими симметричный тензор второго ранга. Он обладает пятью независимыми составляющими, так как между шестью компонентами симметрического тензора $p_{nn'} = p_{n'n}$ имеется одно тождественное соотношение:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 0. \quad (10,14)$$

Заметим, что к потенциалу (10,13) мы добавили член

$$\varphi' = -\frac{el^2}{6} \sum_{n, n'} \delta_{nn'} \nabla_n \nabla_{n'} \frac{1}{r} = -\frac{el^2}{6} \nabla^2 \frac{1}{r}, \quad (10,15)$$

равный нулю при $r \neq 0$. Благодаря этому нам удалось в наиболее простом виде написать соотношение (10,14) между компонентами квадрупольного момента.

Для случая заряда, распределённого по поверхности, заданной уравнением

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (10,16)$$

с поверхностной плотностью $\sigma(\mathbf{r})$, объёмная плотность определится выражением

$$\rho = \sigma(\mathbf{r}) \delta(f) |\text{grad } f|. \quad (10,17)$$

В самом деле, $\rho(\mathbf{r})$ будет равняться нулю везде кроме точек, лежащих на поверхности, определяемых уравнением (10,16). Полный же заряд равен

$$e = \int \rho(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}) = \int \sigma(\mathbf{r}) \delta(f) |\text{grad } f| (d\mathbf{r}). \quad (10,18)$$

Для того чтобы доказать соотношение (10,17), представим элемент объёма ($d\mathbf{r}$) равным произведению $dS dn$, где dS — элемент поверхности $f = \text{const}$, а dn — элемент линии, направленной по нормали к этой поверхности. Тогда

$$\int \sigma(\mathbf{r}) \left| \frac{\partial f}{\partial n} \right| \delta(f) dS dn = e. \quad (10,19)$$

Вычисляя далее последний интеграл по формуле (6,5), получим

$$e = \int \sigma dS. \quad (10,20)$$

В последнем выражении интегрирование должно совершаться по поверхности $f = 0$.

Таким образом мы приходим к обычной связи между величиной заряда e и поверхностной плоскостью σ .

В частности, если заряженной плоскостью является плоскость (x, y) , то

$$\rho = \sigma(x, y) \delta(z). \quad (10,21)$$

В случае же заряженной цилиндрической поверхности радиуса a

$$\rho = \sigma(z, \varphi) \delta(r - a). \quad (10,22)$$

Здесь r , z , φ представляют собою цилиндрические координаты.

Наконец, если заряженной поверхностью является сфера радиуса a , то

$$\rho = \sigma(\theta, \varphi) \delta(r - a), \quad (10,23)$$

где θ и φ являются сферическими углами.

§ 11. Простейшие задачи электростатики

Применим теперь полученные решения уравнения Лапласа-Пуассона к различным конкретным примерам.

а) З а р я ж е н н а я п л о с к о с т ь

Рассмотрим решение уравнения Лапласа-Пуассона для случая осевой симметрии, когда заряды, порождающие поле, распределены на плоскости $z = 0$.

В этом случае согласно (10,21) объёмная плотность зарядов ρ будет связана с поверхностной плотностью σ при помощи соотношения

$$\rho = \sigma(r) \delta(z), \quad (11,1)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Тогда уравнение Пуассона примет вид

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\sigma(r) \delta(z), \quad (11,2)$$

или

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \int_0^{\infty} \sigma(r') \delta(r' - r) \delta(z) dr'. \quad (11,3)$$

Подставим в (11,3) значение для $\delta(z)$ из (4,20):

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ixz} dx, \quad (11,4)$$

и используем весьма естественное для задачи с осевой симметрией представление $\delta(r' - r)$ через бесселевы функции [см. соотношение (4,27)]:

$$\begin{aligned} \delta(r' - r) &= \sqrt{rr'} \int_0^{\infty} k J_0(kr') J_0(kr) dk = \\ &= r' \int_0^{\infty} k J_0(kr') J_0(kr) dk. \end{aligned} \quad (11,5)$$

При этом из соотношения (6,3) следует

$$\delta(r' - r) = \sqrt{\frac{r'}{r}} \delta(r' - r),$$

откуда

$$\nabla^2 \varphi = -2 \int dx \int_0^{\infty} k dk \int_0^{\infty} r' \sigma(r') e^{ixz} J_0(kr') J_0(kr) dr'. \quad (11,6)$$

Здесь J_0 является бесселевой функцией нулевого порядка. Деление на оператор ∇^2 даёт

$$\frac{e^{ixz} J_0(kr)}{\nabla^2} = -\frac{e^{ixz} J_0(kr)}{k^2 + x^2}, \quad (11,7)$$

которое легко проверить путём непосредственного дифференцирования, замечая, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) J_0(kr) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) J_0(kr) = -k^2 J_0(kr). \quad (11,8)$$

Отсюда находим значение потенциала φ :

$$\varphi = 2 \int_0^{\infty} r' \sigma(r') dr' \int_0^{\infty} k dk J_0(kr') J_0(kr) \int dx \frac{e^{ixz}}{k^2 + x^2}. \quad (11,9)$$

Интеграл по x удобнее всего взять, применяя теорию вычетов.

В данном случае интеграл в границах от $-\infty$ до $+\infty$, дополненный интегралом по кругу бесконечно большого радиуса (рис. 6), который в пределе $x = i\infty$ даёт исчезающий добавок, должен равняться произведению $2\pi i$ на единственный вычет, получающийся в результате интегрирования вокруг точки $x = ik$.

$$\int \frac{e^{ixz}}{k^2 + x^2} dx = \int \frac{e^{ix|z|}}{k^2 + x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{e^{ix|z|}}{k^2 + x^2} = \pi \frac{e^{-k|z|}}{k}, \quad (11,10)$$

причём на рис. 6 путь интегрирования *) в комплексной

*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1949, стр. 226.

плоскости изображён замкнутой кривой. Тогда (11,9) переходит в

$$\varphi = \int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-|z|k} f(k) dk, \quad (11,11)$$

где

$$f(k) = 2\pi \int_0^{\infty} r' \sigma(r') J_0(kr') dr'. \quad (11,12)$$

В частном случае постоянной поверхностной плотности $\sigma = \text{const}$

$$f(k) = \frac{2\pi\sigma\delta(k)}{k}. \quad (11,13)$$

Подставляя (11,13) в (11,11) и производя интегрирование по k , имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi\sigma \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{-k|z|}}{k} = \\ &= 2\pi\sigma \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} - |z| \right), \end{aligned} \quad (11,14)$$

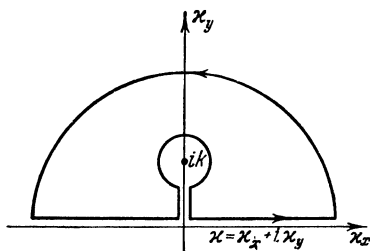


Рис. 6.

причём постоянный бесконечный член $\frac{1}{k}$ может быть отброшен.

В случае же точечного источника e , расположенного в начале координат:

$$\rho = e\delta(x)\delta(y) = \frac{e\delta(r)}{2\pi r}, \quad (11,15)$$

ибо согласно (4,28)

$$\int \delta(x)\delta(y) dx dy = 2\pi \int_0^{\infty} r \frac{\delta(r)}{2\pi r} dr = 1.$$

Отсюда

$$f(k) = e \quad (11,16)$$

и

$$\varphi = e \int_0^{\infty} J_0(kr) e^{-|z|k} dk. \quad (11,17)$$

Вычисляя интеграл (11,17) с помощью формулы Лишшица*), получим известное выражение для потенциала точечного источника

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (11,18)$$

б) З а р я ж е н н ы й ц и л и н д р

Найдём потенциал, вызванный зарядами, распределёнными на поверхности кругового цилиндра радиуса a . Направляя ось z по геометрической оси цилиндра и предполагая, что поверхностная плотность σ будет зависеть только от z , имеем

$$\rho = \sigma(z) \frac{\delta(r-a)}{2\pi a}. \quad (11,19)$$

Принимая во внимание (см. также предыдущий пример), что

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= \int \delta(z' - z) \sigma(z') dz' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dx \int \sigma(z') e^{ix(z-z')} dz', \quad (11,20) \\ \delta(r-a) &= a \int_0^\infty k J_0(ka) J_0(kr) dk, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -4\pi\rho = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int dx \int \sigma(z') e^{ix(z-z')} dz' \int_0^\infty k J_0(ka) J_0(kr) dk, \end{aligned}$$

откуда

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int dx \int e^{ix(z-z')} \sigma(z') dz' \int_0^\infty k \frac{J_0(ka) J_0(kr)}{x^2 + k^2} dk. \quad (11,21)$$

При интегрировании по переменной k предположим, что $r > a$, так как в силу симметрии интеграла относительно величин r и a в противоположном случае $r < a$ мы должны в окончательном результате просто переставить

*) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 143.

вить величины r и a . Интеграл, входящий в последнее равенство, преобразуем к виду

$$\int_0^{\infty} k \frac{J_0(ka) J_0(kr)}{x^2 + k^2} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} k \frac{H_0^{(1)}(kr) J_0(ka)}{x^2 + k^2} dk.$$

Последнее соотношение легко проверить, если написать значение для первой функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iN_0(x), \quad (11,22)$$

$$H_0^{(1)}(-x) = H_0^{(1)}(x) - 2J_0(x). \quad (11,23)$$

Замыкая далее путь интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ по кругу в комплексной плоскости бесконечно большого радиуса и учитывая, что при $k=i\infty$ имеем исчезающий добавок (сравни с рис. 6), а также, что знаменатель под-интегральной функции имеет в верхней полуплоскости единственный вычет в точке ix , получим

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{\infty} k \frac{J_0(ka) J_0(kr)}{x^2 + k^2} dk = \\ &= \begin{cases} K_0(|x|r) I_0(|x|a); & r > a \text{ (вне цилиндра),} \\ K_0(|x|a) I_0(|x|r); & r < a \text{ (внутри цилиндра),} \end{cases} \quad (11,24) \end{aligned}$$

где цилиндрические функции от мнимого аргумента определяются равенствами

$$I_0(x) = J_0(ix); \quad K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix). \quad (11,25)$$

Тогда для искомого потенциала φ находим

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int e^{ixz} f(x) F dx, \quad (11,26)$$

где

$$f(x) = \int e^{-ixz'} \sigma(z') dz'.$$

В частном случае постоянной поверхностной плотности ($\sigma = \text{const}$);

$$f(x) = 2\pi\sigma \delta(x), \quad (11,27)$$

и следовательно,

$$\varphi = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sigma \begin{cases} K_0(xr); & r > a, \\ K_0(xa); & r < a, \end{cases}$$

или

$$\varphi = 2\sigma \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln \frac{2}{x} - C \right) - 2\sigma \begin{cases} \ln r; & r > a, \\ \ln a; & r < a, \end{cases} \quad (11,28)$$

где $C = 0,577 \dots$ — постоянная Эйлера; кроме того, так же как и в предыдущем случае, постоянный бесконечный член $2\sigma \left(\ln \frac{2}{x} - C \right)$ может быть отброшен.

При стремлении радиуса цилиндра a к нулю мы получим потенциал заряженной нити:

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int e^{ixz} f(x) K_0(|x|r) dx. \quad (11,29)$$

Наконец, рассматривая точечный заряд как предельный случай заряженной нити, когда

$$\sigma(z') = e\delta(z'), \quad (11,30)$$

найдем для потенциала φ известное выражение

$$\varphi = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xz \cdot K_0(xr) dx = \frac{e}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (11,31)$$

Последний интеграл проще всего вычислить с помощью известного из теории цилиндрических функций соотношения*):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_m(bt) \frac{K_n(a\sqrt{t^2+x^2})}{(t^2+x^2)^{n/2}} t^{m+1} dt = \\ = \frac{b^m}{a^n} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{x} \right)^{n-m-1} K_{n-m-1}(x\sqrt{a^2+b^2}) \end{aligned} \quad (11,32)$$

($a > 0$, $b > 0$, $m > -1$), в котором необходимо положить $m = -\frac{1}{2}$, $n = 0$, $x = 0$.

*) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 151.

§ 12. Краевые задачи электростатики

Пусть нам заданы электрические заряды, распределённые с плотностью ρ в двух средах, обладающих диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 , между которыми имеется некоторая поверхность раздела. Требуется определить значение потенциалов в обеих средах. В дальнейшем все величины, относящиеся к первой и второй средам, будут отмечаться соответственно индексами 1 и 2.

На поверхности раздела должны иметь место обычные граничные условия:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \epsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \epsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \end{aligned} \quad (12,1)$$

где n является нормальной составляющей к поверхности раздела.

Метод решения будет заключаться в искусственном введении некоторых фиктивных зарядов: при нахождении потенциала φ_1 , кроме плотности зарядов ρ_1 , распределённых в первой среде, мы вводим фиктивную плотность зарядов ρ_1^* , распределённых во второй среде. Аналогично при определении φ_2 вводим фиктивную плотность ρ_2^* .

Тогда для потенциалов получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{\epsilon_1} \int \frac{\rho_1(r') + \rho_1^*(r')}{|r - r'|} (dr'), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\epsilon_2} \int \frac{\rho_2(r') + \rho_2^*(r')}{|r - r'|} (dr'). \end{aligned} \quad (12,2)$$

Неопределённые пока что фиктивные плотности ρ_1^* и ρ_2^* следует находить из граничных условий (12,1).

Рассмотрим некоторые конкретные случаи:

а) Если поверхность раздела является плоскостью $z = 0$, то для случая одного точечного заряда, расположенного в первой среде в точке $(x = y = 0, z = z_0 > 0)$ (рис. 7), имеем

$$\begin{aligned} \rho_1(r) &= e \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0), \\ \rho_2(r) &= 0. \end{aligned} \quad (12,3)$$

Значения для фиктивных плотностей будем искать так же, как и в классическом методе изображений, в виде

$$\begin{aligned}\rho_1^*(\mathbf{r}) &= e_1 \delta(x) \delta(y) \delta(z + z_0), \\ \rho_2^*(\mathbf{r}) &= e_2 \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_0).\end{aligned}\quad (12,4)$$

При этом на рис. 7,а изображено истинное расположение заряда и диэлектрических сред. На рис. 7,б и 7,в мы имеем изображение зарядов и диэлектрических сред

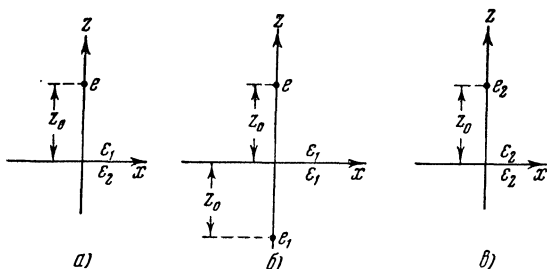


Рис. 7.

для нахождения потенциала соответственно в верхней ($z > 0$) и нижней ($z < 0$) средах.

Отсюда получим

$$\varphi_1 = \frac{e}{\epsilon_1 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{e_1}{\epsilon_1 \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}}, \quad (12,5)$$

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{\epsilon_2 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}}.$$

Подставляя (12,5) в (12,1), найдём для определения неизвестных фиктивных зарядов e_1 и e_2 следующие уравнения:

$$e + e_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} e_2, \quad (12,6)$$

$$e - e_1 = e_2,$$

откуда

$$e_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e, \quad e_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e. \quad (12,7)$$

Подставляя (12,7) в (12,5), находим искомые значения для потенциалов:

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right),$$

$$\varphi_2 = \frac{2e}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (12,8)$$

б) Пусть границей раздела двух сред является бесконечный круговой цилиндр радиуса a . Диэлектрическую постоянную внутренней части цилиндра ($r < a$) обозначим через ε_1 , внешнего же пространства ($r > a$) — через ε_2 . Найдём потенциалы, вызванные наличием точечного заряда, помещённого на оси цилиндра в начале координат (рис. 8).

Фиктивные вспомогательные заряды согласно только что изложенному методу расположим на поверхности цилиндра.

Тогда согласно формулам (11,26) и (11,31) имеем: для внутренней части цилиндра $r < a$

$$\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_1 \pi} \int e^{ixz} [K_0(|x|r) + f_1(x) K_0(|x|a) I_0(|x|r)] dx, \quad (12,9)$$

для внешней части цилиндра

$$\varphi_2 = \frac{e}{\varepsilon_2 \pi} \int e^{ixz} f_2(x) K_0(|x|r) I_0(|x|a) dx. \quad (12,10)$$

Как видно из (11,26), вместо фиктивных поверхностных плотностей мы ввели вспомогательные величины $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Используя граничные условия, имеем для нахождения f_1 и f_2

$$\frac{1}{\varepsilon_1} [K_0(|x|a) + f_1 K_0(|x|a) I_0(|x|a)] = \frac{f_2}{\varepsilon_2} K_0(|x|a) I_0(|x|a), \quad (12,11)$$

$$K_1(|x|a) - f_1 K_0(|x|a) I_1(|x|a) = f_2 K_1(|x|a) I_0(|x|a). \quad (12,12)$$

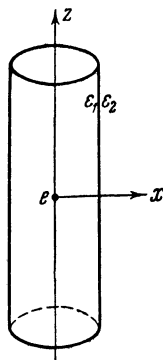


Рис. 8.

Определяя отсюда величины f_1 и f_2 , найдём иско-
мые значения для потенциалов:

$$\varphi_1 = \frac{2e}{\varepsilon_1 \pi} \int_0^{\infty} \cos xz \left(K_0(xr) + \frac{(\alpha-1) K_0(xa) K_1(xa) I_0(xr)}{\alpha K_0(xa) I_1(xa) + I_0(xa) K_1(xa)} \right) dx, \quad (12,13)$$

$$\varphi_2 = \frac{2e}{\varepsilon_2 \pi} \int_0^{\infty} \cos xz \frac{K_0(xr)}{xa [\alpha K_0(xa) I_1(xa) + I_0(xa) K_1(xa)]} dx. \quad (12,14)$$

При этих вычислениях мы учли следующие соотно-
шения:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad K_1(x) = -\frac{d}{dx} K_0(x), \quad I_1(x) = \frac{d}{dx} I_0(x), \quad (12,15)$$

$$I_1(x) K_0(x) + K_1(x) I_0(x) = \frac{1}{x}.$$

в) С помощью δ -функции можно описать также скачки потенциала и его градиента при наличии заряженных поверхностей.

Пусть на плоскости $z=0$ расположены поверхностные заряды с плотностью $\sigma(x, y)$, а также имеется двойной электрический слой интенсивности $\sigma^*(x, y)$.

Тогда значение для потенциала φ может быть найдено из следующего уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho - 4\pi\sigma\delta(z) - 4\pi\sigma^*\delta'(z). \quad (12,16)$$

Плотность заряда и потенциал верхней части полу-
плоскости обозначим через ρ_1 и φ_1 , а нижней—через ρ_2 и φ_2 , т. е. положим

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi\rho_1; \quad \nabla^2 \varphi_2 = -4\pi\rho_2. \quad (12,17)$$

С помощью разрывной функции (2,4) мы можем записать:

$$\rho = \rho_1 \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right), \quad (12,18)$$

$$\varphi = \varphi_1 \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \varphi_2 \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right).$$

Подставляя последние равенства в (12,16) и учитывая, что

$$\begin{aligned}\gamma'(z) &= \delta(z), \\ \gamma''(z) &= \delta'(z), \\ f(z)\delta(z) &= f(0)\delta(z),\end{aligned}\tag{12,19}$$

найдем

$$\begin{aligned}\delta(z) \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} + \delta'(z)(\varphi_1 - \varphi_2)_{z=0} = \\ = -4\pi\sigma\delta(z) - 4\pi\sigma^*\delta'(z),\end{aligned}\tag{12,20}$$

откуда автоматически получим искомые граничные условия:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0} = -4\pi\sigma, \\ (\varphi_1 - \varphi_2)_{z=0} = -4\pi\sigma^*.\end{aligned}\tag{12,21}$$

Наконец, пусть мы имеем уравнения

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi\rho + 4\pi\sigma\delta(z), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}\tag{12,22}$$

где σ является поверхностной плотностью зарядов, а поля в верхней (с индексами 1) и нижней (с индексами 2) части полупространства определяются из соотношений

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{D}_1 &= 4\pi\rho_1, \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_2 &= 4\pi\rho_2.\end{aligned}\tag{12,23}$$

Тогда полагая

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{D}_1 \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \mathbf{D}_2 \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right), \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \mathbf{E}_2 \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right), \\ \rho &= \rho_1 \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right),\end{aligned}\tag{12,24}$$

найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \operatorname{div} \mathbf{D}_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \\ &+ \operatorname{div} \mathbf{D}_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right) + \delta(z) (\mathbf{n} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)), \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \gamma(z) \right) + \\ &+ \operatorname{rot} \mathbf{E}_2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \gamma(z) \right) + \delta(z) [\mathbf{n} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)], \end{aligned}$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по оси z ; сравнивая (12,24) с (12,22), получим условие на граничной плоскости

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)) &= 4\pi\sigma, \\ [\mathbf{n} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= 0. \end{aligned}$$

§ 13. Краевые задачи теории кароттажа

Интересной областью для применения краевых задач теории электричества представляется «кароттаж» или один из методов геологической электроразведки. Как известно, основная задача теории кароттажа заключается в отыскании потенциала, вызванного током, в среде с проводимостью.

Нетрудно показать, что основные задачи кароттажа могут быть сведены к электростатике путём определённого сопоставления величин.

Действительно, исходя из уравнения непрерывности для плотности тока \mathbf{j} и заряда ρ

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (13,1)$$

и закона Ома

$$\mathbf{j} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi, \quad (13,2)$$

получим уравнение, связывающее потенциал φ с плотностью распределения зарядов ρ :

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (13,3)$$

При наличии неподвижного точечного источника, расположенного в точке \mathbf{r}' , имеем

$$\rho = e(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13,4)$$

Подставляя (13,4) в (13,3) и учитывая ещё определение тока

$$I = -\frac{\partial e}{\partial t}, \quad (13,5)$$

найдем основное дифференциальное уравнение теории электрического кароттажа:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{I}{\lambda} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (13,6)$$

При наличии двух сред с различными проводимостями λ_1 и λ_2 , необходимо ещё учесть граничные условия, выражающие равенство потенциалов и нормальных составляющих токов \mathbf{j}_n на поверхности раздела:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2, \\ \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}. \end{aligned} \quad (13,7)$$

Тем самым задача кароттажа будет сведена к задаче электростатики, если произвести следующее сопоставление:

$$I \rightarrow 4\pi e, \quad \lambda \rightarrow \varepsilon \quad (13,8)$$

(см. соответствующие формулы предыдущего параграфа).

Таким образом результаты предыдущего параграфа дают готовый ответ на аналогичные задачи кароттажа: отыскание в двух средах потенциала, вызванного током при наличии плоской или цилиндрической поверхности раздела.

Однако в случае электростатики соприкосновение диэлектрика с металлом приводит к граничному условию:

$$\varphi = 0, \quad (13,9)$$

т. е. к задаче Дирихле, поскольку в металле мы можем положить поле равным нулю. В то же время в теории кароттажа соприкосновение проводящей среды с

диэлектриком приводит к проблеме Неймана, когда на границе

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (13,10)$$

так как ток не может входить в диэлектрик.

Рассмотрим несколько типичных задач, сводящихся к задаче Неймана.

а) Источник тока в скважине

Найдём потенциал точечного источника тока, помещённого в начале координат в некоторой проводящей среде и отделённого от внешнего пространства, являющегося диэлектриком, цилиндрической поверхностью радиуса, равного единице ($a=1$), с осью, направленной по оси z (см. рис. 8, где необходимо положить $a=1$, $e = \frac{I}{4\pi}$, $\epsilon_1 = \lambda$, $\epsilon_2 = \lambda' = 0$). В данном случае применим только что изложенный метод, поскольку на границе диэлектрика с проводником

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (13,11)$$

Для решения этой задачи мы будем исходить из общего уравнения

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{I}{\lambda} \delta(r) = -\frac{I}{\lambda} \frac{\delta(r) \delta(z)}{2\pi r}. \quad (13,12)$$

В последнее выражение вместо $\delta(z)$ подставим обычное значение:

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ixz} dx. \quad (13,13)$$

При конструировании же $\delta(r)$ используем известное в теории бесселевых функций равенство [ср. также с (4,26)]:

$$\frac{2}{J_0^2(s_n)} \int_0^1 r J_0(rs_n) J_0(rs_{n'}) dr = \delta_{nn'}, \quad (13,14)$$

где s_n являются корнями уравнения

$$J_1(s_n) = 0, \quad (13,15)$$

равными

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 3,83, \quad s_2 = 7,02 \text{ и т. д.}$$

Согласно равенству (4,26) мы можем при $0 \leq r \leq 1$ написать соотношение

$$\frac{\delta(r-r')}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(s_n)} J_0(rs_n) J_0(r's_n),$$

сохраняющее силу также для предельного случая $r' \rightarrow 0$:

$$\frac{\delta(r)}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{J_0^2(s_n)} J_0(rs_n). \quad (13,16)$$

Подставляя эти выражения для δ -функции в (13,12) и учитывая равенство (11,7), найдём значения для потенциала

$$\varphi = \frac{I}{2\pi^2\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{J_0(rs_n)}{J_0^2(s_n)} \int \frac{e^{ixz} dx}{x^2 + s_n^2} \right) + \varphi_0. \quad (13,17)$$

Вычисляя значение последнего интеграла по формуле (11,10), получим*)

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\lambda} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{J_0(rs_n)}{s_n J_0^2(s_n)} e^{-s_n |z|} - \frac{1}{s_0} \right) \right). \quad (13,18)$$

Решение однородного уравнения выбирается равным $\varphi_0 = -\frac{I}{2\pi\lambda s_0}$, тогда потенциал φ останется во всех точках конечным. Данный выбор ортогональных функций для конструирования $\frac{\delta(r)}{r}$ автоматически приводит к выполнению граничного условия (13,11):

$$\left. \frac{dJ_0(rs_n)}{dr} \right|_{r=1} = -s_n J_1(s_n) = 0. \quad (13,19)$$

*) См. В. А. Фок, Теория кароттажа, ГТТИ, 1933.

Выделяя из суммы (13,18) член при $n=0$, найдём

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\lambda} \left(-|z| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(rs_n)}{s_n J_0^2(s_n)} e^{-s_n|z|} \right). \quad (13,20)$$

В частности, на больших расстояниях от источника тока ($|z| \gg 1$) можно ограничиться одним первым членом, т. е. потенциал φ будет зависеть только от z :

$$\varphi = -\frac{I}{2\pi\lambda} |z|. \quad (13,21)$$

Значение же для плотности тока вдоль оси z будет оставаться в этом случае постоянным и равным

$$|j| = \lambda \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right| = \frac{I}{2\pi a^2} = \frac{I}{2S}. \quad (13,22)$$

Напомним, что радиус скважины a положен у нас равным единице.

Коэффициент $\frac{1}{2}$ обусловлен разветвлением тока в обе стороны.

б) Бесконечно тонкий пласт

Найдём потенциал в точке B с координатами $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 0$, z , вызванный точечным источником тока I , расположенным по оси кругового отверстия радиуса $a=1$ на расстоянии $z_0 > 0$ от начала координат *) (рис. 9).

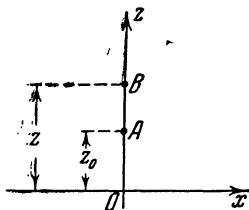


Рис. 9.

Обозначая проводимость среды через λ и считая бесконечно тонкий пласт идеальным изолятором ($\lambda' = 0$), мы должны решать основное уравнение (13,6) при условии, что на поверхности пласта $z = \pm 0$ $r > 1$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (13,23)$$

т. е. в предположении, что ток не проходит через пласт.

*) Не нарушая общности задачи, мы всегда можем выбрать такое направление оси z , при котором величина z_0 будет иметь положительное значение.

Разделим всё пространство на две области: $z > 0$ (соответствующие величины будем обозначать индексом 1) и $z < 0$ (соответствующие величины будем обозначать индексом 2).

Для решения задачи применим метод введения дополнительных фиктивных токов, определяемых затем из граничных условий, аналогично методу фиктивных зарядов, рассмотренному выше.

Искомые потенциалы будем определять из уравнений

$$\nabla^2 \varphi_1 = -\frac{I}{\lambda} \left[\delta(z - z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + \delta(z + z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi} \delta(z) \int_0^1 \sigma_1(r') \delta(r - r') dr' \right], \quad (13,24)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = -\frac{I}{\lambda} \frac{1}{2\pi} \delta(z) \int_0^1 \sigma_2(r') \delta(r - r') dr'.$$

Здесь в правой части уравнения для φ_1 введён, во-первых, фиктивный зеркальный источник тока в точке $-z_0$, равный

$$I \delta(z + z_0) \frac{\delta(r)}{2\pi r}, \quad (13,25)$$

и, во-вторых, фиктивные поверхностные токи

$$\frac{I}{2\pi} \delta(z) \int_0^1 \sigma_1(r') \delta(r' - r) dr' = \begin{cases} \frac{I}{2\pi} \delta(z) \sigma_1(r); & r < 1, \\ 0; & r > 1, \end{cases} \quad (13,26)$$

расположенные в отверстии пласта с поверхностной плотностью $\sigma_1(r)$.

В правой части уравнения для φ_2 достаточно ограничиться фиктивным поверхностным током в отверстии скважины.

Граничные условия примут в нашем случае вид

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0; \quad z = 0, \quad r > 1 \quad (13,27)$$

и

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}; \quad z = 0, \quad r < 1. \quad (13,28)$$

Подставим в (13,24) вместо $\delta(r-r')$ значение (4,27), согласно которому

$$\sqrt{\frac{r'}{r}} \delta(r-r') = r' \int_0^{\infty} k J_0(kr) J_0(kr') dk. \quad (13,29)$$

Кроме того, учтём, что последнее соотношение сохраняет силу для предельного случая [см. равенство (4,28)], т. е.

$$\frac{\delta(r)}{r} = \int_0^{\infty} k J_0(kr) dk. \quad (13,30)$$

Вместо $\delta(z)$ мы можем подставить значение (13,13). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 = & -\frac{I}{4\pi^2 \lambda} \int_0^{\infty} k J_0(kr) dk \int e^{ixz} dx \times \\ & \times [e^{-ixz_0} + e^{ixz_0} + \int_0^1 r' J_0(xr') \sigma_1(r') dr']. \end{aligned}$$

Воспользовавшись далее правилом деления на оператор ∇^2 , получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{I}{4\pi^2 \lambda} \int_0^{\infty} k J_0(kr) dk \int \frac{e^{ixz}}{x^2 + k^2} dx \times \\ & \times [e^{-ixz_0} + e^{ixz_0} + \int_0^1 r' J_0(xr') \sigma_1(r') dr']. \quad (13,31) \end{aligned}$$

При интегрировании по переменной x примем во внимание равенство (11,10):

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{I}{4\pi \lambda} \int_0^{\infty} J_0(kr) dk \times \\ & \times [e^{-k|z-z_0|} + e^{-k(z+z_0)} + e^{-kz} \int_0^1 r' J_0(kr') \sigma_1(r') dr']. \quad (13,32) \end{aligned}$$

Далее с помощью формулы (11,17) найдём

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}} + \int_0^\infty e^{-kz} J_0(kr) dk \int_0^1 r' J_0(kr') \sigma_1(r') dr' \right]. \quad (13,33)$$

Аналогичным путём получим

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \int_0^\infty e^{kz} J_0(kr) dk \int_0^1 r' J_0(kr') \sigma_2(r') dr'. \quad (13,34)$$

Для определения плотности поверхностных токов σ_1 и σ_2 найдём значение для потенциалов и их нормальных составляющих при $z=0$.

Учитывая соотношения (13,33) и (13,34), легко показать, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{z=0} &= -\frac{I}{4\pi\lambda} \int_0^\infty k J_0(kr) dk \int_0^1 r' J_0(kr') \sigma_1(r') dr' = \\ &= \begin{cases} -\frac{I}{4\pi\lambda} \sigma_1(r); & r < 1, \\ 0; & r > 1. \end{cases} \quad (13,35) \\ \left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right|_{z=0} &= \begin{cases} \frac{I}{4\pi\lambda} \sigma_2(r); & r < 1, \\ 0; & r > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что граничные условия (13,27) будут выполняться автоматически.

Соотношения же (13,28) приведут нас к следующим уравнениям для определения искомым значений поверхностных токов σ_1 и σ_2 :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\sigma_1 = \sigma, \\ \int_0^\infty J_0(kr) dk \int_0^1 r' J_0(kr') \sigma(r') dr' &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}}. \quad (13,36) \end{aligned}$$

Последнее уравнение при $z_0=0$ (т. е. когда источник A находится в начале координат) решается точно.

В этом случае

$$\sigma(r) = \frac{\delta(r)}{r}, \quad (13,37)$$

а для потенциалов φ_1 и φ_2 получаем значения

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (13,38)$$

которые также имели бы место при отсутствии диэлектрической прокладки.

В частности, в точке B , находящейся на оси цилиндра ($r=0$), имеем ($z_0=0$)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{1}{|z|}. \quad (13,39)$$

В дальнейшем полезно будет воспользоваться теоремой взаимности, согласно которой значение потенциала должно оставаться неизменным, если мы переменим местами точки A (источник тока) и B (точку наблюдения).

Поэтому, например, мы можем утверждать, что при любом положении источника A на оси скважины потенциал в начале координат будет определяться формулой

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} \frac{1}{|z_0|}. \quad (13,40)$$

Интегральное уравнение (13,36) решается приближённо, но с большой точностью при $|z_0| \gg 1$, т. е. когда источник тока находится от отверстия скважины на расстоянии, во много раз превышающем радиус скважины ($z_0 \gg a=1$). Полагая в этом случае

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z_0^2}} = \frac{1}{z_0} \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \right], \quad (13,41)$$

где символ $O\left(\frac{1}{z_0^2}\right)$ означает, что порядок отброшенных членов по сравнению с единицей достигает значения $\frac{1}{z_0^2}$, получим

$$\sigma = \frac{2}{\pi z_0 \sqrt{1-r^2}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \right]. \quad (13,42)$$

Последнее равенство легко проверить, если учесть из-

вестные из теории цилиндрических функций соотношения:

$$\int_0^1 \frac{r' J_0(kr')}{\sqrt{1-r'^2}} dr' = \frac{\sin k}{k}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin k}{k} J_0(kr) dk = \frac{\pi}{2}; \quad r < 1. \quad (13,43)$$

Подставляя (13,42) в равенства (13,33) и (13,34), найдём следующие значения для потенциала на оси скважины ($r=0$):

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi\lambda} \left[\frac{1}{|z-z_0|} + \frac{1}{z+z_0} - f(|z|, z_0) \right] \quad (13,44)$$

и

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi\lambda} f(|z|, z_0), \quad (13,45)$$

где

$$\begin{aligned} f(|z|, z_0) &= \frac{2}{\pi z_0} \int_0^\infty e^{-k|z|} \frac{\sin k}{k} dk \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{\pi z_0} \operatorname{arctg} \frac{1}{|z|} \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13,46)$$

Согласно теореме взаимности последнее выражение можно представить также в виде

$$\begin{aligned} f(|z|, z_0) &= f(z_0, |z|) = \\ &= \frac{2}{\pi |z|} \operatorname{arctg} \frac{1}{z_0} \left[1 + O\left(\frac{1}{z_0^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (13,47)$$

Формулой (13,46) мы должны пользоваться при $z_0 \gg 1$, т. е. когда источник A находится на большом расстоянии от границы раздела, а формулой (13,47) при $|z| \gg 1$, т. е. когда точка наблюдения B удалена на большое расстояние от границы раздела*).

Если же обе точки находятся на большом расстоянии от границы раздела ($|z| \gg 1$) и $z_0 \gg 1$), то, принимая во внимание, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{z_0} \Big|_{z_0 \gg 1} = \frac{1}{z_0},$$

*) В теории кароттажа случай $|z| \ll 1$ и $z_0 \ll 1$ интереса не представляет, так как расстояние между источником и точкой наблюдения должно всегда во много раз превышать радиус скважины, т. е. $|z-z_0| \gg 1$.

найдем для f в согласии с теоремой взаимности выражение, симметричное относительно $|z|$ и z_0 :

$$f = \frac{2}{\pi |z| z_0}.$$

Наконец, когда одна точка A или B пересекает пласт (например, $z_0 = 0$, а $z \gg 1$), то

$$f = \frac{1}{|z|},$$

откуда находим значение для потенциала, совпадающее с точным выражением (13,39).

§ 14. Обобщенное уравнение Пуассона

Простейшим линейным обобщением уравнения Пуассона является уравнение

$$\nabla^2 \varphi - k_0^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad (14,1)$$

имеющее весьма широкие применения в различных областях современной физики.

а) Теория ядерных сил и мезонов (классическая мезодинамика *)

В теории ядерных сил величина k_0 пропорциональна массе мезона m , т. е. массе частицы, переносящей ядерные силы. Тогда ρ является статической плотностью ядерных зарядов (нуклеонов: протонов, нейтронов), порождающих мезонное поле. Несмотря на то, что теория мезонных ядерных сил встретила с рядом трудностей и не может считаться законченной, всё же уравнение (14,1) выражает основные фундаментальные закономерности ядерных взаимодействий.

б) Теория гравитации Зеелигера

В теории тяготения Ньютона, где потенциал подчиняется уравнению Пуассона ($k_0^2 \rightarrow 0$), существует извест-

*) Более подробно классическая мезодинамика будет изложена в гл. V.

ная космологическая трудность: уравнение Пуассона не имеет конечного решения при равномерном распределении ρ во всём пространстве. Для устранения этой трудности Нейман и Зеелигер предложили дополнить уравнение Пуассона членом $-k_0^2\varphi$, приведя его к виду (14,1). Тогда при $\rho = \text{const}$ потенциал будет также иметь постоянное конечное значение, равное

$$\varphi = \frac{4\pi\rho}{k_0^2}. \quad (14,2)$$

При построении общей теории относительности, которая представляет собою обобщение теории тяготения Ньютона, мы встречаемся с аналогичной трудностью. Для её устранения Эйнштейн предполагал сначала дополнить свои уравнения тяготения космологическим членом, аналогичным поправке Зеелигера. Впрочем, как было показано А. А. Фридманом, даже без дополнительного космологического члена можно устранить указанную трудность, если перейти к геометрической структуре мира, зависящей от времени, иначе говоря, к компонентам метрического тензора $g_{\mu\nu}(t)$. Ввиду этого обстоятельства космологический член сейчас часто в теории не рассматривается. Здесь следует подчеркнуть сугубо предварительный характер каких бы то ни было космологических теорий, представляющих попытки описания известной части бесконечной вселенной в течение некоторого отрезка времени.

в) Теория сильных электролитов

Уравнение типа (14,1) лежит в основе теории сильных электролитов, где φ является потенциалом ионной атмосферы. Для простейшего случая бинарных электролитов, у которых плотности положительных и отрицательных ионов равны ($n_+ = n_- = n$), а сами ионы обладают одинаковыми валентностями, имеем $Z_+ = Z_- = Z$. При определении потенциала φ будем исходить из уравнения Пуассона:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho', \quad (14,3)$$

где ε — диэлектрическая постоянная раствора.

Плотность заряда ρ' Дебай и Хюккель задают по формуле Больцмана в виде

$$\rho' = \rho + eZ_+ n_+ e^{-\frac{\varphi e Z_+}{kT}} - eZ_- n_- e^{-\frac{\varphi e Z_-}{kT}}, \quad (14,4)$$

где ρ — плотность внешних зарядов.

Разлагая последнее выражение в ряд и ограничиваясь линейными относительно e членами, получим уравнение вида (14,1), где

$$k_0^2 = \frac{8\pi n}{3kT} (eZ)^2. \quad (14,5)$$

г) Теория сверхпроводимости

В теории сверхпроводимости Лондона, имеющей макроскопический феноменологический характер, электромагнитные потенциалы также подчиняются уравнению вида (14,1), причём постоянная k_0^2 равна:

$$k_0^2 = \frac{4\pi n e^2}{m c^2}, \quad (14,6)$$

где n — число электронов в единице объёма, e — заряд, а m — масса электрона.

Величина $\lambda = \frac{1}{k_0}$ определяет так называемую «глубину проникновения» полей в сверхпроводник.

Подставляя в (14,6) значения для заряда e и массы m электрона, а также экспериментально найденное значение для $\lambda \sim 10^{-5}$ см, получим для концентрации сверхпроводящих электронов значение $n = 10^{22}$.

Установим теперь функцию Грина G обобщённого уравнения Пуассона, которая может быть найдена из уравнения

$$\nabla^2 G - k_0^2 G = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\delta(R). \quad (14,7)$$

Повторяя вычисления § 10, найдём

$$G = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{k^2 + k_0^2} (d\mathbf{k}). \quad (14,8)$$

Интегрируя (14,8) по сферическим углам [см. формулу (10,6)], получим

$$G = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty k \frac{\sin kR}{k^2 + k_0^2} dk = \frac{1}{4\pi^2 i R} \int k \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}}{k^2 + k_0^2} dk, \quad (14,9)$$

где

$$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Беря последний интеграл при помощи теории вычетов [см. также (11,10)], находим для сингулярной части

$$G = \frac{e^{-k_0 R}}{4\pi R}. \quad (14,10)$$

Определив функцию Грина, мы можем записать решение уравнения (14,1) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{e^{-k_0 R}}{R} (d\mathbf{r}'). \quad (14,11)$$

В частности, в случае точечного источника единичной интенсивности, расположенного в начале координат:

$$\rho_0 = \delta(\mathbf{r}),$$

для искомого потенциала находим

$$\varphi = \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (14,12)$$

Отсюда видно, что поведение обобщенного потенциала характеризуется эффективной длиной:

$$r_0 = \frac{1}{k_0}. \quad (14,13)$$

Если $r \ll r_0$, то потенциал φ с точностью до членов порядка $\frac{r}{r_0}$ совпадает с потенциалом уравнения Пуассона:

$$\varphi = \frac{1}{r} \left[1 + O\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]. \quad (14,14)$$

С другой стороны, на больших расстояниях от источника ($r \gg r_0$) потенциал φ будет убывать с увеличением r по экспоненциальному закону.

Таким образом взаимодействие, характеризуемое уравнением (14,1), приводит к так называемым силам короткого действия, которые оказываются отличными от нуля практически лишь на расстояниях, не превышающих некоторого значения r_0 .

ГЛАВА III

УРАВНЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ВРЕМЕНИ

§ 15. Уравнение движения классической механики

Как известно, уравнение классической механики при прямолинейном движении имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = f(t), \quad (15,1)$$

где $f(t)$ является внешней силой, v — скоростью движения, а масса частицы положена равной единице.

Решение последнего уравнения, вообще говоря, хорошо известно. Однако мы хотим провести здесь анализ его решения с помощью формализма δ -функции. Согласно § 7 будем искать решение в виде

$$v = - \int G(t, t') f(t') dt'. \quad (15,2)$$

Функция Грина G равна

$$G = - \left(\frac{d}{dt} \right)^{-1} \delta(t - t') - C - \frac{1}{2},$$

где $G_0 = -C - \frac{1}{2} = \text{const}$, т. е. несингулярная часть функции Грина является решением однородного уравнения (15,1).

Подставляя вместо $\delta(t - t')$ выражение (4.20), найдём

$$G = - \frac{1}{2\pi} \int \frac{(e^{ik(t-t')} - 1) dk}{ik} - C - \frac{1}{2}.$$

Взяв главное значение для последнего интеграла, имеем

$$G = - \frac{1}{2} \frac{t-t'}{|t-t'|} - C - \frac{1}{2} = \begin{cases} -1 - C; & t > t', \\ -C; & t < t'. \end{cases} \quad (15,3)$$

Общее решение для v может быть представлено в виде

$$v = v^r + v^a,$$

где

$$v^r = \int_{-\infty}^t (1 + C) f(t') dt', \quad v^a = \int_t^{\infty} C f(t') dt'. \quad (15,4)$$

В первом решении (v^r) мы интегрируем по всем значениям времени t' , меньшим значения t . Наоборот, во втором решении (v^a) интегрирование производится по всем значениям времени t' , превышающим t . Иными словами, в первом случае мы учитываем «запаздывающее действие» силы на материальную точку, а во втором — «опережающее».

Для определения постоянной C задаём значение скорости, которую принимаем в некоторый момент времени t_0 равной нулю ($v_0 = 0$).

Пусть скорость задана в какой-то момент, предшествующий действию силы, например, $v = 0$ при $t = -\infty$. В этом случае $C = 0$, т. е. решение, соответствующее опережающему действию, исчезнет, и мы будем иметь

$$v = \int_{-\infty}^t f(t') dt'. \quad (15,5)$$

Точно так же, если скорость задана в какой-то момент времени после действия всех сил, например, $v = 0$ при $t = +\infty$, получим $C = -1$.

В этом случае решение, соответствующее запаздывающему действию, исчезает:

$$v = - \int_t^{\infty} f(t') dt'. \quad (15,6)$$

Таким образом следует учитывать запаздывающее, или соответственно опережающее действие силы на материальную точку в зависимости от того, задаём ли мы нулевое значение скорости в моменты времени до или после включения силы.

Найдём значение для координаты в том случае, когда начальная скорость v и координата x заданы, как обычно, в момент, предшествующий включению силы, т. е. $x = 0$, $v = 0$ при $t_0 = -\infty$.

Как видно из (15,5), в этом случае

$$x = \left(\frac{d}{dt}\right)^{-1} v = \int_{-\infty}^t (t-t') f(t') dt'. \quad (15,7)$$

Правильность последнего соотношения легко проверить, так как

$$\frac{dx}{dt} = v = \int_{-\infty}^t f(t') dt'$$

и при $t = -\infty$, $x = 0$.

С помощью δ -функции мы можем также задать силу, сообщаемую точке мгновенно конечную скорость v_0 , или даже конечное перемещение x_0 , например, в момент времени $t = 0$.

Для этой цели мы должны положить

$$f(t) = v_0 \delta(t) + x_0 \delta'(t). \quad (15,8)$$

Тогда согласно (15,7) имеем

$$x = \begin{cases} v_0 t + x_0; & t > 0, \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (15,9)$$

Таким образом мгновенная бесконечная сила $v_0 \delta(t)$ сообщает материальной точке конечную скорость.

Две бесконечные силы $x_0 \delta'(t)$, равные по величине и противоположные по направлению и действующие одна после другой через бесконечно малый промежуток времени [см. определение (3,12), данное для производной от δ -функции], сообщают материальной точке конечное перемещение.

Решение наиболее простой задачи механики, когда кроме действующей силы $F(t)$ заданы ещё начальные условия в виде значений координаты и скорости (x_0 и v_0 при $t = 0$), мы также можем получить при помощи формулы (15,7).

Полагая

$$f(t) = x_0 \delta'(t) + v_0 \delta(t) + F(t) \left(\frac{1}{2} + \gamma(t) \right), \quad (15,10)$$

найдем следующее выражение для искомой координаты:

$$x = \begin{cases} x_0 + v_0 t + \int_0^t (t-t') F(t') dt'; & t > 0, \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (15,11)$$

Аналогичным образом с помощью формализма δ -функции решается ряд других задач механики, сформулированных в виде линейных дифференциальных уравнений.

§ 16. Уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа)

Уравнения параболического типа не менее важны для физики, чем эллиптические и гиперболические. В самом деле, к ним относятся уравнение теплопроводности, диффузии, статистические уравнения типа Фоккера-Планка, а также основное уравнение Шредингера нерелятивистской квантовой механики (содержащее мнимый коэффициент при времени). Мы остановимся для простоты на типичном примере уравнения теплопроводности.

Уравнение теплопроводности, описывающее распространение тепла в стержне, имеет вид

$$Lu(x, t) = -\frac{1}{\kappa} Q(x, t), \quad (16,1)$$

где

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t},$$

u — искомая температура стержня, зависящая от координаты x и времени t , Q — внешний источник тепла, который характеризует количество тепла, сообщаемое в единицу времени единице длины стержня; κ и a^2 являются соответственно коэффициентами внутренней теплопроводности и температуропроводности.

Согласно (7,6) решение уравнения (16,1) следует искать в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{x} \int G(x, x'; t, t') Q(x', t') dx' dt'. \quad (16,2)$$

Как обычно, функцию Грина G мы находим из условия

$$G = -L^{-1} \delta(x - x') \delta(t - t') + G_0,$$

где G_0 является решением однородного уравнения (16,1).

Считая стержень простирающимся безгранично в обе стороны, мы вместо $\delta(x - x')$ и $\delta(t - t')$ можем подставить значение (4,20). Тогда получим

$$G = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{e^{ik(x-x') + ik_1(t-t')}}{k^2 + i \frac{k_1}{a^2}} dk_1 dk + G_0. \quad (16,3)$$

Интегрируя последнее выражение по переменной k_1 , получим [ср. с вычислением интеграла (11,10)]

$$G = \begin{cases} \frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2 a^2 (t-t')} \cos k(x-x') dk + G_0; & t > t', \\ G_0; & t < t'. \end{cases} \quad (16,4)$$

Несингулярная часть функции Грина G_0 может быть представлена в виде

$$G_0 = \frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2 a^2 (t-t')} \cos k(x-x') f(k) dk, \quad (16,5)$$

где $f(k)$ ограничено лишь требованием, чтобы последний интеграл имел смысл для всевозможных значений $t - t'$ и $x - x'$.

В случае запаздывающего действия мы должны положить $f(k) = 0$. Тогда

$$G^r = \begin{cases} \frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2 a^2 (t-t')} \cos k(x-x') dk; & t > t', \\ 0; & t < t'. \end{cases} \quad (16,6)$$

Наоборот, в случае опережающего действия мы имеем $f(k) = -1$. Тогда

$$G^a = \begin{cases} 0; & t > t', \\ -\frac{a^2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2 a^2 (t-t')} \cos k(x-x') dk; & t < t'. \end{cases} \quad (16,7)$$

Последний интеграл расходится. Поэтому в задаче теплопроводности функции Грина с одним лишь опережающим действием не существует, что связано с параболическим характером исходного уравнения*).

Вычисляя интеграл (16,6), находим окончательное выражение для функции Грина:

$$G^r = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{\pi(t-t')}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}; & t > t' \\ 0; & t < t'. \end{cases} \quad (16,8)$$

Подставляя (16,8) в равенство (16,2), найдём известное решение, которое находится обычно более громоздким способом:

$$u(x, t) = \frac{a}{2x\sqrt{\pi}} \int dx' \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2(t-t')}}}{\sqrt{t-t'}} Q(x', t') dt'. \quad (16,9)$$

Применим полученное решение к некоторым типичным случаям, которые особенно просто формулируются с помощью δ -функции.

а) Найдём распределение температуры в зависимости от времени t и положения x , когда мгновенный источник нагревает в момент $t = 0$ стержень до начальной температуры $f(x)$, которая является функцией координаты x .

*) Заметим, что для оператора $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t}$, наоборот, не существует решений с запаздывающим действием.

Вместо начальной температуры мы можем задать внешний источник с помощью формулы

$$Q(x', t') = \frac{x}{a^2} f(x') \delta(t'). \quad (16,10)$$

В самом деле, интегрируя по времени, получим известное соотношение между количеством тепла и температурой:

$$\int Q(x', t') dt' = \frac{x}{a^2} f(x'). \quad (16,11)$$

Формула (16,10) заменяет обычный способ задания начального условия.

Подставляя (16,10) в равенство (16,9), найдём

$$u = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2 t}} f(x') dx'; & t > 0, \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (16,12)$$

В частности, если внешний источник сообщает некоторое количество тепла q в момент $t=0$ одной лишь точке $x=0$, то

$$Q(x', t') = q\delta(x')\delta(t').$$

Тогда полученное выше решение для распределения температуры при $t > 0$ принимает вид

$$u = \frac{aq}{2x\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad (16,13)$$

б) В качестве следующего примера найдём распределение температуры в стержне, появляющейся благодаря движению с некоторой постоянной скоростью v точечного источника, отдающего в единицу времени количество тепла, равное q . В этом случае

$$Q(x', t') = q\delta(x' - vt'). \quad (16,14)$$

Подобная задача имеет, например, место при исследовании горения угольного пласта или при исследовании нагривания стержня при электросварке.

Подставляя (16,14) в общую формулу (16,9), получим после интегрирования по x'

$$u = \frac{aq}{2x\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi v}{2a^2}} I, \quad (16,15)$$

где

$$I = 2 \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 y^2} - \frac{v^2 y^2}{4a^2}} dy, \quad (16,16)$$

$$\xi = x - vt \text{ и } y = \sqrt{t - t'}.$$

Разбивая последний интеграл на два интеграла:

$$I = \frac{2a}{v} \left[e^{\frac{|\xi|v}{2a^2}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(\frac{v}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay^2} \right) e^{-\left(\frac{vy}{2a} + \frac{|\xi|}{2ay} \right)^2} dy + \right. \\ \left. + e^{-\frac{|\xi|v}{2a^2}} \int_0^{\sqrt{t}} \left(\frac{v}{2a} + \frac{|\xi|}{2ay^2} \right) e^{-\left(\frac{vy}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay} \right)^2} dy \right]$$

и вводя новые переменные:

$$\frac{vy}{2a} + \frac{|\xi|}{2ay} = z_1 \text{ и } \frac{vy}{2a} - \frac{|\xi|}{2ay} = z_2,$$

найдем

$$I = \frac{a\sqrt{\pi}}{v} \left\{ e^{\frac{v|\xi|}{2a^2}} [g(\xi_1) - 1] + e^{-\frac{v|\xi|}{2a^2}} [1 + g(\xi_2)] \right\}. \quad (16,17)$$

Здесь

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{t} \cdot v}{2a} \left(1 + \frac{|\xi|}{vt} \right), \\ \xi_2 = \frac{\sqrt{t} \cdot v}{2a} \left(1 - \frac{|\xi|}{vt} \right),$$

а функция Гаусса $g(\tau)$ определяется известным равенством:

$$g(\tau) = -g(-\tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{-z^2} dz. \quad (16,18)$$

Прежде всего определим температуру источника тепла. Подставляя в выражение (16,15) значение I при $\xi = 0$, имеем

$$u = \frac{qa^2}{\chi v} g\left(\frac{\sqrt{t} \cdot v}{2a}\right), \quad (16,19)$$

т. е. с увеличением времени температура источника постепенно возрастает, приближаясь при $t \gg \frac{4a^2}{v^2}$ к своему предельному значению

$$u_\infty = \frac{qa^2}{\chi v}.$$

Найдём распределение температуры в различных точках стержня, лежащих вблизи источника ($|\xi| < vt$) при больших значениях времени t ($t \gg \frac{4a^2}{v^2}$).

Формулы (16,15) и (16,17) дают в этом случае следующее выражение для температуры:

$$u = \begin{cases} \frac{qa^2}{\chi v} e^{-\frac{v\xi}{a^2}}; & \xi > 0 \quad (x > vt), \\ \frac{qa^2}{\chi v}; & \xi < 0 \quad (x < vt). \end{cases} \quad (16,20)$$

Таким образом температура тех точек стержня, через которые прошёл источник ($\xi < 0$, $x < vt$), оказывается постоянной и равной температуре источника. По направлению же движения источника ($x > vt$ или $\xi > 0$) температура спадает с увеличением расстояния по экспоненциальному закону.

В качестве последнего примера укажем на случай покоящегося источника, действующего неопределённо долгое время, начиная с момента $t = 0$.

Этот пример, очевидно, является частным случаем предыдущего, когда скорость источника стремится к нулю.

Полагая в равенствах (16,15) и (16,17) скорость $v = 0$, найдём распределение температуры вдоль стержня:

$$u = \frac{qa\sqrt{t}}{\chi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - \frac{q|x|}{2\chi} \left[1 - g\left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}}\right) \right]. \quad (16,21)$$

Отсюда, полагая $x = 0$, найдём температуру источника

$$u = \frac{qa \sqrt{t}}{x \sqrt{\pi}}, \quad (16,22)$$

которая будет возрастать пропорционально квадратному корню из времени.

Выражение (16,22) можно рассматривать также как предельное значение соотношения (16,19), в котором скорость движения v следует положить равной нулю.

При помощи последних формул мы можем найти полное количество тепла, которое выделяет источник в течение времени t .

Умножая (16,21) на $\frac{x}{a^2} dx$ ($\frac{x}{a^2}$ — коэффициент теплоёмкости) и интегрируя по всей длине стержня, найдём

$$\bar{Q} = \frac{2q \sqrt{t}}{a \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} dx - \frac{q}{a^2} \int_0^{\infty} x \left[1 - g \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) \right] dx. \quad (16,23)$$

Как известно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{\alpha}};$$

$$\int_0^{\infty} x [1 - g(\beta x)] dx = \frac{1}{4\beta^2},$$

откуда

$$Q = qt.$$

Это выражение равняется количеству тепла, выделенного внешним источником в течение времени t . Полагая в (16,14) $v = 0$ и интегрируя затем по времени (от 0 до t) и по длине стержня, содержащей источник, получим вновь аналогичное значение для \bar{Q} .

Метод, развитый нами в этом параграфе, допускает также простое обобщение на случай распространения тепла в плоском или в пространственном случае.

§ 17. Волновое уравнение Даламбера (уравнение гиперболического типа)

Как известно, уравнение Даламбера

$$L\varphi = -4\pi\rho, \quad (17,1)$$

где $L = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, имеет весьма большое применение во многих областях математической и теоретической физики, так как оно описывает распространение электромагнитных, гравитационных, звуковых волн и т. д. С точки зрения релятивистской квантовой теории поля, это уравнение применимо ко всем полям, не связанным с частицами, обладающими массой покоя.

Следуя общему правилу, решение уравнения Даламбера будем искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \rho(\mathbf{r}', t') (d\mathbf{r}') dt', \quad (17,2)$$

где $(d\mathbf{r}') = dx' dy' dz'$ является элементом объёма трёхмерного пространства, а функция Грина G может быть найдена из соотношения

$$G = -L^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (17,3)$$

Пусть искомая функция φ удовлетворяет некоторым заданным граничным условиям.

Постараемся подобрать систему ортонормированных функций, удовлетворяющих уравнению

$$Lv_n = -\lambda^2 v_n,$$

причём

$$\int v_n^+(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}) = \delta_{nn'}, \quad (17,4)$$

а величина λ^2 представляет собой собственное значение оператора L и является вещественной величиной; собственные же функции v_n , зависящие от трёх параметров \mathbf{n} (n_1, n_2, n_3) должны удовлетворять тем же граничным условиям, которым подчиняется искомая функция φ , наконец, трёхмерный символ Кронекера-Вейерштрасса равен

$$\delta_{\mathbf{n}\mathbf{n}'} = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'} = \begin{cases} 1; & n_1 = n_1', \quad n_2 = n_2', \quad n_3 = n_3', \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Выражение для δ -функций, входящих в равенство (17,3), мы представим в виде

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') &= \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^+(\mathbf{r}') v_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}), \\ \delta(t - t') &= \frac{c}{2\pi} \int e^{-icx(t-t')} dx. \end{aligned} \quad (17,5)$$

Здесь сумма по \mathbf{n} является тройной и берётся по всем значениям целых чисел n_1 , n_2 и n_3 .

Подставляя найденные соотношения в (17,3) и учитывая равенство (17,4), найдём

$$G = G_1 + G_0, \quad (17,6)$$

где сингулярная часть функции Грина G_1 равна*)

$$G_1 = \frac{c}{2\pi} \sum_{\mathbf{n}} \int \frac{v_{\mathbf{n}}^+(\mathbf{r}') v_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) e^{-icx(t-t')}}{\lambda^2 - x^2} dx, \quad (17,7)$$

или, интегрируя по переменной x , найдём

$$G_1 = \frac{c}{2} \frac{t-t'}{|t-t'|} \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^+(\mathbf{r}') v_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \frac{\sin c\lambda(t-t')}{\lambda}. \quad (17,8)$$

Несингулярная часть G_0 может быть представлена в форме

$$G_0 = \frac{c}{2} \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^+(\mathbf{r}') v_{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) \left(A \frac{\sin c\lambda(t-t')}{\lambda} + B \frac{\cos c\lambda(t-t')}{\lambda} \right), \quad (17,8a)$$

удовлетворяющей однородному уравнению

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_0 = 0.$$

Если задача требует ограничения одними запаздывающими потенциалами, то следует положить $A = 1$ и $B = 0$.

*) Здесь и в дальнейшем, когда полюсы лежат на вещественной оси, мы будем вычислять главное значение интеграла. Вообще же интеграл, у которого полюсы лежат на вещественной оси, не является однозначным. Эта неоднозначность будет компенсироваться нами путём прибавления к главному значению несингулярной части. В рассматриваемом случае этой несингулярной частью является решение G_0 .

В этом случае получаем

$$G^r = \begin{cases} c \sum_n v_n^+(r') v_n(r) \frac{\sin c \lambda (t-t')}{\lambda}; & t > t', \\ 0; & t < t', \end{cases} \quad (17,9)$$

т. е. для того, чтобы найти потенциал в данный момент времени t , следует учесть влияние источников только в предшествующие моменты времени.

Точно так же, если требуется решить задачу с опережающими потенциалами, следует положить $A = -1$ и $B = 0$.

Тогда функция Грина будет иметь следующий вид:

$$G^a = \begin{cases} 0; & t > t', \\ c \sum_n v_n^+(r') v_n(r) \frac{\sin c \lambda (t'-t)}{\lambda}; & t < t'. \end{cases} \quad (17,10)$$

Заметим, что несингулярная часть функции Грина при $A = 1$ и $B = 0$ может быть представлена также в виде

$$G_0 = \frac{ct}{2} \sum_n \int v_n^+(r') v_n(r) e^{-icx(t-t')} \frac{x}{|x|} \delta(x^2 - \lambda^2) dx.$$

Поэтому для функции Грина мы найдём формулу

$$G = \frac{c}{2\pi} \sum_n \int v_n^+(r') v_n(r) e^{-icx(t-t')} \left[\frac{1}{\lambda^2 - x^2} \pm \right. \\ \left. \pm i\pi \frac{x}{|x|} \delta(\lambda^2 - x^2) \right] dx, \quad (17,11)$$

причём для G^r мы должны взять при втором слагаемом верхний знак, а для G^a — нижний. Появление дополнительных членов типа $\pm i\pi \frac{x}{|x|} \delta(\lambda^2 - x^2)$ приводит к асимметрии решения относительно запаздывающих и опережающих потенциалов, иначе говоря, используя тот или иной знак у дополнительного члена, мы получим расходящиеся или сходящиеся волны*). Следовательно, мы

*) О принципе излучения см. А. С о к о л о в, Дельта-функция и её применение к решению некоторых математических задач геофизики, Свердловск, 1946; см. также А. Т и х о н о в и А. С а м а р с к и й, ЖЭТФ, 18, 243, 1948.

имеем излучение электромагнитных волн только в том случае, когда этот дополнительный член будет отличным от нуля (см. также § 27).

Найдём теперь функцию Грина в важном частном примере, когда на бесконечности источники отсутствуют и для потенциала имеют место «естественные» граничные условия (т. е. на бесконечности φ обращается в нуль). В этом случае для $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ целесообразно взять представление (5,7):

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(R) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} (d\mathbf{k}).$$

Собственные значения оператора ∇^2 будут равны $-k^2$, т. е. $\lambda = k$.

Отсюда найдём

$$G_1 = \frac{c}{16\pi^3} \frac{T}{|T|} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin ckT}{k} (d\mathbf{k}),$$

где

$$T = t - t', \quad \frac{T}{|T|} = 2\gamma(T),$$

причём $\gamma(T)$ будет равно $\pm \frac{1}{2}$ в зависимости от того, является ли $T \geq 0$. Для произвольного четырёхмерного временного вектора с $\gamma_0 > 0$

$$2\gamma(x_\nu) = \frac{\gamma_\nu x_\nu}{|\gamma_\mu x_\mu|}.$$

Точно так же для несингулярной части функции Грина G_0 имеем

$$G_0 = \pm \frac{c}{2} \Delta, \quad (17,12)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin ckT}{k} (d\mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{8\pi^4} \frac{T}{|T|} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - icxT} \frac{1}{k^2 - x^2} (d\mathbf{k}) dx \end{aligned} \quad (17,13)$$

является так называемой первой Δ -функцией, играющей важную роль при вторичном квантовании электромагнитного поля. В формуле (17,12) мы берём верхний или

нижний знак в зависимости от того, хотим ли мы взять запаздывающие или опережающие потенциалы.

Вторая Δ -функция имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ikR} \frac{\cos ckT}{k} (dk) = \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ikR - 4cxT} \delta(k^2 - x^2) (dk) dx \end{aligned} \quad (17,14)$$

и может быть получена из равенства (17,8а) при подстановке $A=0$ и $B=1$. Функции Δ и Δ_1 можно принять за два независимых релятивистски инвариантных решения, удовлетворяющих однородному уравнению Даламбера*).

Интегрируя последнее выражение по углам при помощи следующей формулы [см. также (10,6)]:

$$\int e^{ikhR} f(k) (dk) = \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty \sin hR \cdot f(h) k dk \quad (17,15)$$

и учитывая соотношение (6,7), получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{4\pi c} \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(T + \frac{R}{c}\right)}{R} = \frac{T}{2\pi |T|} \delta(R^2 - c^2 T^2), \\ G_1 &= \frac{c}{2 |T|} \Delta = \frac{1}{8\pi} \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right) + \delta\left(T + \frac{R}{c}\right)}{R} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \delta(R^2 - c^2 T^2). \end{aligned} \quad (17,16)$$

Отсюда видно, что в согласии с основными свойствами симметрии для функции Грина уравнения Даламбера, как для всякого самосопряжённого выражения, сингулярная её часть G_1 является чётной функцией координат

*) Заметим, что функции Δ и Δ_1 инвариантны относительно преобразований Лорентца, так как они составлены из инвариантных комбинаций: фазы $kR - cxT$, четырёхмерной длины $k^2 - x^2$ и четырёхмерного объёма $(dk) dx$.

Появление множителя $x/|x|$ в функции Δ связано с нечётной зависимостью Δ от времени T .

Заметим, что знаковую функцию $\frac{T}{|T|}$ можно также записать в виде $\frac{T}{|T|} = 2\gamma(T)$.

и времени, в то время как первая Δ -функция является лишь чётной функцией координат и нечётной функцией времени. Нечётный характер зависимости Δ от T связан с возможностью излучения, к которому ведёт несингулярная часть функции Грина G_0 , пропорциональная Δ .

Наконец, функция

$$\Delta_1 = \frac{1}{2\pi^2 (R^2 - c^2 T^2)} \quad (17,17)$$

является чётной функцией координат и времени. Необходимо ещё отметить, что особенности функций Δ и Δ_1 лежат на световом конусе.

Для решений с запаздывающими потенциалами находим

$$G^r = \frac{c}{2} \left(\frac{T}{|T|} + 1 \right) \Delta = \frac{1}{4\pi R} \delta \left(T - \frac{R}{c} \right). \quad (17,18)$$

В случае же опережающих потенциалов имеем

$$G^a = \frac{c}{2} \left(\frac{T}{|T|} - 1 \right) \Delta = \frac{1}{4\pi R} \delta \left(T + \frac{R}{c} \right). \quad (17,19)$$

Таким образом, функция Грина уравнения Даламбера может быть представлена в виде

$$G = \frac{c}{4\pi} \delta (R^2 - c^2 T^2) \left(1 + \varepsilon \frac{T}{|T|} \right), \quad (17,20)$$

причём в случае запаздывающих потенциалов $\varepsilon = 1$, для опережающих потенциалов $\varepsilon = -1$; наконец, для полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов $\varepsilon = 0$.

Ограничиваясь запаздывающими потенциалами, мы получаем известное выражение для решения уравнения Даламбера

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \frac{\delta \left(t' - t + \frac{R}{c} \right)}{R} \rho(\mathbf{r}', t') (d\mathbf{r}') dt' = \\ &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} (d\mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (17,21)$$

причём в последнем интеграле $t' = t - \frac{R}{c}$.

§ 18. Решение уравнения Даламбера в случае монохроматических колебаний

Особый интерес для многих проблем математической физики представляют исследования излучения точечного гармонического осциллятора. В этом случае изменение плотности заряда со временем описывается по закону

$$\rho(r', t') = a\delta(r' - r_0)e^{-i\omega t'}, \quad (18,1)$$

где ω — круговая частота колебаний, а r_0 — координата источника.

Ограничиваясь решениями с запаздывающими потенциалами, найдём для искомой волновой функции согласно равенствам (17,2) и (17,9)

$$\varphi = 4\pi c a \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^+(r_0) v_{\mathbf{n}}(t) \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega t'} \sin c\lambda(t-t') dt'. \quad (18,2)$$

Интегрируя последнее выражение по t' , получим

$$\begin{aligned} \varphi = 4\pi a \sum_{\mathbf{n}} v_{\mathbf{n}}^+(r_0) v_{\mathbf{n}}(t) e^{-i\omega t} \times \\ \times \left[\frac{1}{\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + i\pi\delta\left(\lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \right]. \quad (18,3) \end{aligned}$$

В случае опережающих потенциалов в последней скобке перед множителем (пропорциональным δ -функции), определяющим излучение, следует взять знак минус*).

*) Введём две функции:

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2} \delta(x) + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i.kx} dk,$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2} \delta(x) - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i.kx} dk,$$

$$\delta(x) = \delta_+(x) + \delta_-(x).$$

Разберём некоторые примеры распространения монохроматических волн, которые особенно просто решаются при помощи соотношения (18,3).

Как известно, простейшим источником электромагнитных волн является точечный диполь, электрический момент которого можно задать в виде

$$\mathbf{P} = p \delta(r - r_0) e^{-i\omega t}. \quad (18,4)$$

Вектор Герца выражается через момент диполя при помощи уравнения

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{Z} = -4\pi \mathbf{P}. \quad (18,5)$$

Электромагнитные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны с \mathbf{Z} при помощи соотношений

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}, \quad (18,6)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}. \quad (18,7)$$

Исследуем распространение электромагнитных волн в простейшем волноводном канале с диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1$, образованном двумя абсолютно проводящими плоскостями $x = 0$ и $x = l$.

Направляя диполь, находящийся в точке A , по оси x (вертикально направленный источник), имеем для цилиндрических координат $(x, r = \sqrt{y^2 + z^2}, \varphi)$ (рис. 10)

$$P_y = P_z = 0, \quad P_x = P = p \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-i\omega t} \delta(x - x_0), \quad (18,8)$$

$$Z_y = Z_z = 0; \quad Z_x = Z,$$

Полагая в последних равенствах $x = \lambda^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$, мы видим, что

функция $\delta_+(x)$ автоматически ведёт к расходящимся волнам, а $\delta_-(x)$ — к сходящимся. Выражение (18,3) может быть получено также из (17,11). См., например, П. А. М. Д и р а к, Основы квантовой механики, изд. 2-е, ГТТИ, 1937, стр. 213.

причём

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) Z = -2pe^{-i\omega t} \frac{\delta(r)}{r} \delta(x - x_0). \quad (18,9)$$

Далее согласно (18,6) и (18,7) находим

$$E_r = \frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial x}, \quad E_\varphi = 0, \quad E_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2},$$

$$H_r = H_x = 0, \quad H_\varphi = -\frac{\partial^2 Z}{c \partial r \partial t}.$$

На границах волноводного канала с абсолютным проводником, т. е. на плоскостях $x=0$ и $x=l$, тангенциальная составляющая вектора E должна обращаться в нуль ($E_r = 0$).

Таким образом, мы имеем два крайних условия:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \quad (18,10)$$

при $x=0$ и при $x=l$.

Для конструирования трёхмерной δ -функции составим систему ортонормированных функций, которые в

цилиндрических координатах могут быть найдены из условия $\nabla^2 v = -\lambda^2 v$. Поскольку в этой задаче мы имеем аксиальную симметрию, получаем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\lambda^2 v.$$

Полагая далее $v = v_1(r) v_2(x)$, найдём:

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} + k_2^2 v_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 v_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_1}{dr} + k^2 v_1 = 0, \quad (18,11)$$

при условии, что $\lambda^2 = k^2 + k_2^2$.

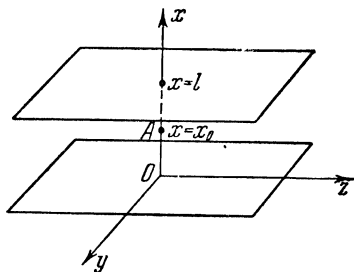


Рис. 10.

Для функций v_2 , удовлетворяющих граничному условию (18,10), имеем прерывный спектр

$$v_{2n} = \sqrt{\frac{2\alpha_n}{l}} \cos \frac{\pi n x}{l}$$

$$\left(\alpha_0 = \frac{1}{2}, \alpha_n = 1, \text{ если } n \neq 0 \right), \quad (18,12)$$

а для функции v_1 имеем непрерывный спектр (см. § 4):

$$v_{1k} = \sqrt{\frac{kdk}{2\pi}} J_0(kr).$$

Условия ортонормирования будут иметь вид

$$\int_0^l v_{2n}(x) v_{2n'}(x) dx = \delta_{nn'}, \quad (18,13)$$

$$\int_0^\infty v_{1k}(r) v_{1k'}(r) 2\pi r dr = dk \delta(k - k'). \quad (18,14)$$

Последнее равенство представляет собой условие нормирования для непрерывного спектра [см. также (4,22) и (4,23)], откуда для искомой трёхмерной дельта-функции (при азимутальной симметрии) мы находим

$$\frac{\delta(r)}{r} \delta(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{l} \alpha_n \int_0^\infty k dk \cos \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n x_0}{l} J_0(kr).$$

Подставляя последние соотношения в (18,3), а также принимая во внимание (18,8), получим для точечного источника

$$Z = \frac{4}{l} p e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n x_0}{l} F_n, \quad (18,15)$$

где

$$F_n = \int_0^\infty J_0(kr) \left[\frac{1}{k^2 + \frac{\pi^2}{l^2} n^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} + i\pi \delta \left(k^2 + \frac{\pi^2}{l^2} n^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right] k dk. \quad (18,16)$$

Воспользуемся теперь следующими соотношениями [см. также (11,24)]:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{k^2 + a^2} k dk = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(iar),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{k^2 - a^2} k dk = -\frac{\pi}{2} N_0(ar), \quad (18,17)$$

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) \delta(k^2 - a^2) k dk = \frac{1}{2} J_0(ar),$$

которые легко могут быть проверены, если принять во внимание, что

$$N_0(-x) = N_0(x) + 2iJ_0(x)$$

и

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(kr)}{k^2 \pm a^2} k dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(kr)}{k^2 \pm a^2} k dk. \quad (18,18)$$

Отсюда для искомого вектора Герпа находим формулу (см., например, работу Краснушкина*):

$$Z = \frac{i2\pi p}{l} e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l} \cos \frac{\pi n x_0}{l} H_0^{(1)} \left(r \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{l^2}} \right),$$

которая получается автоматически, поскольку в нашей основной формуле (18,16) учтены только запаздывающие потенциалы, ведущие в данном случае к расходящимся волнам.

§ 19. Нестационарные колебания

Прежде всего найдём общие формулы, с помощью которых мы можем исследовать распространение электромагнитных, упругих и других волн, исходящих от точечного источника (помещённого в точке r_0), начинающего

*) П. Е. К р а с н у ш к и н, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947, стр. 17.

с момента времени $t = 0$ колебаться с круговой частотой ω .

Внешний источник в этом простейшем нестационарном случае можно представить в виде

$$\rho = \begin{cases} a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}; & t > 0^*), \\ 0; & t < 0. \end{cases} \quad (19,1)$$

Согласно (18,2) имеем следующее выражение для искомого потенциала φ :

$$\varphi = 4\pi ca \sum_n v_n^+(\mathbf{r}_0) v_n(\mathbf{r}) \frac{1}{\lambda} \int_0^t e^{-i\omega t'} \sin c\lambda(t-t') dt', \quad (19,2)$$

откуда, интегрируя по t' , найдём

$$\varphi = 2\pi a \sum_n v_n^+(\mathbf{r}_0) v_n(\mathbf{r}) \frac{1}{\lambda} \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{-ic\lambda t}}{\lambda - \frac{\omega}{c}} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{ic\lambda t}}{\lambda + \frac{\omega}{c}} \right). \quad (19,3)$$

а) В качестве первого примера разберём распространение волн в одномерном безграничном пространстве (например, в безграничной струне) при естественных граничных условиях.

Пусть точечный источник помещён в начале координат ($x_0 = 0$). Ортонормированные функции для непрерывного спектра имеют вид

$$v_k = \sqrt{\frac{dk}{2\pi}} e^{ikx}, \quad (19,4)$$

а собственные значения для параметра λ будут равны

$$\lambda = |k|.$$

С помощью (19,3) находим

$$\varphi = a \int \frac{e^{ik|x|} + e^{-ik|x|}}{k} \cdot \frac{e^{-i\omega t} - e^{-ickt}}{k - \frac{\omega}{c}} dk. \quad (19,5)$$

*) Реальное значение имеет лишь вещественная часть плотности ρ , т. е.

$$\rho = \begin{cases} a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cos \omega t; & t > 0, \\ 0; & t < 0. \end{cases}$$

Вычисляя последний интеграл с помощью теории вычетов и отбрасывая минимую часть, получим

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2\pi ac}{\omega} \sin \omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right); & t > \frac{|x|}{c}, \\ 0; & t < \frac{|x|}{c}. \end{cases} \quad (19,6)$$

Таким образом, формула (19,3) автоматически приводит к расходящимся волнам, причём наряду с фазовой скоростью мы находим также скорость фронта волны, характеризующую распространение начала волнового процесса. В нашем случае обе скорости равны скорости света c .

б) Рассмотрим колебания закреплённой с обеих сторон струны длины $2l$, когда в середине её расположен точечный источник.

Помещая источник в начале координат ($x_0 = 0$), мы можем для решения нашей проблемы выбрать следующую систему ортонормированных функций:

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi n}{2l} (x + l) \quad (19,7)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$), которые удовлетворяют граничным условиям:

$$v_n(-l) = v_n(l) = 0. \quad (19,8)$$

Принимая во внимание, что собственные значения параметра λ равны

$$\lambda = \frac{\pi n}{2l}, \quad (19,9)$$

найдем с помощью (19,3)

$$\varphi = 2\pi ac^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\omega_0 l}{c} \sin \frac{n\omega_0 (x+l)}{c} \cdot \frac{1}{ln\omega_0} \times \\ \times \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{-in\omega_0 t}}{n\omega_0 - \omega} + \frac{e^{-i\omega t} - e^{in\omega_0 t}}{n\omega_0 + \omega} \right), \quad (19,10)$$

где $\omega_0 = \frac{\pi c}{2l}$ представляет собою собственную круговую частоту колебания струны.

Из (19,10) видно, что потенциал φ будет удовлетворять требуемым граничным условиям, т. е.

$$\varphi(l) = \varphi(-l) = 0.$$

Учитывая в дальнейшем соотношение

$$\sin \frac{n\omega_0 l}{c} \sin \frac{n\omega_0(x+l)}{c} = \frac{1}{2} [1 - (-1)^n] \cos \frac{n\omega_0 x}{c}, \quad (19,11)$$

а также отбрасывая мнимую часть, не имеющую реального значения, находим

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_0, \quad (19,12)$$

причём вынужденные φ_1 и собственные φ_0 колебания струны определяются соотношениями

$$\varphi_1 = \frac{4\pi a c^2}{l \omega_0^2} \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n-1)\omega_0 x}{c}}{(2n-1)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}, \quad (19,13)$$

$$\varphi_0 = -\frac{4\pi a c^2}{l \omega_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\omega_0 t \cos \frac{(2n-1)\omega_0 x}{c}}{(2n-1)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (19,14)$$

Форма вынужденных колебаний всегда может быть преобразована с помощью соотношения *)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)y}{(2n-1)^2 - \alpha^2} = \frac{\pi}{4\alpha} \frac{\sin \alpha \left(\frac{\pi}{2} - |y|\right)}{\cos \frac{\pi \alpha}{2}} \quad (0 \leq |y| \leq \pi) \quad (19,15)$$

к виду

$$\varphi_1 = \frac{2\pi a c \cos \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0} \left(1 - \frac{|x|}{l}\right)}{\omega \cos \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad (19,16)$$

так как в нашем случае:

$$0 \leq \frac{\omega_0 |x|}{c} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (19,17)$$

*) См., например, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1948, стр. 277.

Решение (19,16) является непригодным в случае резонанса

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1, 3, 5, \dots *),$$

т. е. когда знаменатель равенства (19,16) обращается в нуль. В этом случае, как и следовало ожидать, мы получаем вынужденные колебания с бесконечно возрастающей амплитудой.

В случае резонанса особенно сильно должно сказаться влияние диссипативных членов. Однако более подробно случай резонанса мы здесь исследовать не будем.

Что касается собственных колебаний, то при наличии диссипативных членов при $t \rightarrow \infty$ они должны, вообще говоря, исчезнуть, и мы будем иметь одни лишь вынужденные колебания, которые приводят к стоячим волнам.

Кроме того, представляет интерес разобрать колебания струны в течение времени, когда фронт волны ещё не дошёл до границы, т. е. рассмотреть случай, при котором $t < \frac{l}{c}$.

При вычислении φ_0 воспользуемся тождеством:

$$\begin{aligned} \cos \frac{(2n-1)\omega_0 x}{c} \cos (2n-1)\omega_0 t &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos (2n-1)\omega_0 \left(t + \frac{|x|}{c} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos (2n-1)\omega_0 \left(t - \frac{|x|}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19,18)$$

Так как в нашем случае $t < \frac{l}{c}$:

$$0 \leq \omega_0 \left| t \pm \frac{|x|}{c} \right| \leq \pi, \quad (19,19)$$

мы можем произвести суммирование по n с помощью соотношения (19,15). Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= - \frac{\pi a c}{\omega \cos \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}} \left\{ \sin \left[\frac{\pi \omega}{2 \omega_0} - \omega \left(t + \frac{|x|}{c} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[\frac{\pi \omega}{2 \omega_0} - \omega \left| t - \frac{|x|}{c} \right| \right] \right\}. \end{aligned} \quad (19,20)$$

*) Как видно из (19,14) и (19,13), при $\frac{\omega}{\omega_0} = 2, 4, 6, \dots$ мы не будем иметь условия резонанса.

Отсюда для искомой волновой функции φ легко получить выражение

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2\pi ac}{\omega} \sin \omega \left(t - \frac{|x|}{c} \right); & t > \frac{|x|}{c}, \\ 0; & t < \frac{|x|}{c}, \end{cases} \quad (19,21)$$

найденное нами также для безграничной струны. Совпадение обоих результатов является с физической точки зрения вполне понятным, поскольку значение для функции φ не может зависеть от граничных условий, пока волна не дойдёт до границы.

§ 20. Интегрирование волнового уравнения Клейна

Как будет показано ниже (см. гл. V), в современной релятивистской квантовой механике и, в особенности, в теории мезонов и ядерных сил особо важную роль играет простейшее квантовое релятивистское уравнение для де-бройлевских волн, связанных с массой покоя*):

$$L\varphi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = -4\pi\rho. \quad (20,1)$$

*) В квантовой механике было сначала установлено О. Клейном (1926) волновое уравнение для свободной частицы с покоящейся массой m :

$$(E^2 - c^2 p^2 - m^2 c^4) \varphi = 0,$$

где операторы энергии E и импульса p определяются равенствами:

$$E = -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}; \quad p = \frac{h}{2\pi i} \nabla;$$

h — постоянная Планка, c — скорость света.

■ Заменяя массу m через $\frac{hk_0}{2\pi c}$, мы после сокращения уравнения на $\frac{h^2 c^2}{4\pi^2}$ получаем левую часть уравнения (20,1). Клейн пришёл к своему уравнению как волновому уравнению во вспомогательном пространстве пяти измерений. Действительно, последний член в уравнении (20,1) эквивалентен второй производной по пятой координате при условии цикличности: $\frac{\partial^2}{\partial x_5^2} = -k_0^2$, если $\psi = \psi(x, y, z, t) e^{ik_0 x_5}$. Вскоре после этой работы уравнение (20,1) было установлено мно-

В уравнении (20,1) величину k_0^2 можно рассматривать как некоторую константу, независимо от её толкования как члена с массой покоя и вне связи с квантовой механикой, в рамках классической теории поля. Это уравнение описывает поле частиц с покоящейся массой $\frac{hk_0}{2\pi c}$,

создаваемое источником плотности ρ . Для определённости, имея в виду позднейшее обоснование (см. § 44), будем говорить об этих частицах как о скалярных мезонах.

Если в бесконечно удалённых точках источники отсутствуют, то мы можем решение уравнения (20,1) искать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \rho(\mathbf{r}', t') (d\mathbf{r}') dt'. \quad (20,2)$$

В полной аналогии с решением уравнения Даламбера функция Грина G будет складываться из двух частей: части сингулярной G_1 , по общему определению равной

$$\begin{aligned} G_1 &= -L^{-1} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \\ &= \frac{c}{16\pi^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - i\omega T}}{k^2 - \omega^2 + k_0^2} (d\mathbf{k}) d\omega = \\ &= \frac{c}{16\pi^3} \frac{T}{|T|} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \cdot \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2})}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (d\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (20,3)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$, и части несингулярной G_0 , которая является решением однородного уравнения (20.1) ($G = G_1 + G_0$).

В данном случае двумя независимыми решениями однородного уравнения оказываются релятивистски инва-

гами авторами обычным путём как результат действия релятивистского соотношения между энергией и импульсом, понимаемого как оператор, на волновую функцию φ .

Далее, в дискуссии одного из авторов (Иваненко) с В. А. Амбарцумяном была обсуждена возможность, по аналогии со случаем электромагнитного поля, написать в правой части равенства (20,1) член, характеризующий источник φ -волн.

риантные D -функции, по существу являющиеся «перестановочными» функциями*):

$$D = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ikR} \frac{\sin cT \sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (dk), \quad (20,4)$$

$$D_1 = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ikR} \frac{\cos cT \sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (dk).$$

Функция G_1 , как видно из (20,3), связана с D при помощи соотношения

$$G_1 = \frac{c}{2} \frac{T}{|T|} D. \quad (20,5)$$

Решение, соответствующее запаздывающим или опережающим потенциалам, мы получим, если положим

$$G_0 = \frac{c}{2} D \quad (20,6)$$

для запаздывающих потенциалов и

$$G_0 = -\frac{c}{2} D \quad (20,7)$$

для опережающих потенциалов.

Интегрируя по углам равенство (20,4) с помощью соотношения (17,15), получим

$$D = -\frac{1}{2\pi^2 R} \frac{\partial f}{\partial R}, \quad D_1 = -\frac{1}{2\pi^2 R} \frac{\partial f_1}{\partial R}, \quad (20,8)$$

где

$$f = \int_0^\infty \frac{\cos kR}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2}) dk, \quad (20,9)$$

$$f_1 = \int_0^\infty \frac{\cos kR}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \cos(cT \sqrt{k^2 + k_0^2}) dk.$$

Величины f_1 и $i \frac{T}{|T|} f$ являются соответственно действ-

*) Функции Δ и Δ_1 являются частными случаями функций (20,4), когда масса частиц (мезонов) равняется нулю, т. е. $\Delta = \lim_{k_0 \rightarrow 0} D$ и $\Delta_1 = \lim_{k_0 \rightarrow 0} D_1$. Релятивистская инвариантность функций D и D_1 доказывается тем же способом, как и для функций Δ и Δ_1 (см. § 17).

вительной и мнимой частью интеграла

$$S = f_1 + i \frac{T}{|T|} f = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikR}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} e^{i \sqrt{k^2 + k_0^2} c |T|} dk. \quad (20,10)$$

Введём замену переменных

$$k = k_0 \operatorname{sh} \varphi. \quad (20,11)$$

Кроме того, при $c|T| > R$ мы можем положить

$$c|T| = \alpha \operatorname{ch} \varphi_0, \quad R = \alpha \operatorname{sh} \varphi_0,$$

где φ_0 — постоянная величина, а $\alpha = \sqrt{c^2 T^2 - R^2}$.

Точно так же при $c|T| < R$ мы имеем

$$c|T| = \alpha_1 \operatorname{sh} \varphi_0, \quad R = \alpha_1 \operatorname{ch} \varphi_0,$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{R^2 - c^2 T^2}.$$

Тогда интеграл (20,10) примет вид

$$S = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 \alpha \operatorname{ch} \varphi} d\varphi, & c|T| > R, \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik_0 \alpha_1 \operatorname{sh} \varphi} d\varphi; & c|T| < R, \end{cases} \quad (20,12)$$

откуда, учитывая чётность или нечётность подинтегральных функций относительно переменной φ , находим

$$\begin{aligned} f &= \frac{T}{|T|} \int_0^{\infty} \sin(k_0 \alpha \operatorname{ch} \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{T}{|T|} \frac{\pi}{2} J_0(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & c|T| > R, \\ f &= 0; & c|T| < R. \end{aligned} \quad (20,13) *$$

*) Значение интегралов (20,13) и (20,14) можно найти в книге: Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 89—90.

Аналогичным способом для второй функции f_1 имеем

$$f_1 = \begin{cases} \int_0^{\infty} \cos(k_0 \alpha_1 \operatorname{ch} \varphi) d\varphi = \\ = -\frac{\pi}{2} N_0(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & c|T| > R, \\ \int_0^{\infty} \cos(k_0 \alpha_1 \operatorname{sh} \varphi) d\varphi = \\ = \frac{\pi}{2} i H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & c|T| < R. \end{cases} \quad (20,14)$$

Для вычисления D -функции, а также функции Грина мы должны выражение (20,13) продифференцировать по R . При этом необходимо учесть, что производная от разрывной функции равняется произведению δ -функции, описывающей особенность в точке разрыва, на амплитуду разрыва. Кроме того, при $c^2 T^2 - R^2 > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_0(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2})}{\partial R} &= -\frac{k_0 R}{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}} \frac{\partial J_0(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2})}{\partial (k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2})} = \\ &= \frac{k_0 R}{\sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$D = \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right) - \delta\left(T + \frac{R}{c}\right)}{4\pi R c} - \begin{cases} \frac{k_0}{4\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & \frac{R}{c} > T > -\frac{R}{c}, \\ -\frac{k_0}{4\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T < -\frac{R}{c}. \end{cases} \quad (20,15)$$

Как видно из формулы (20,4), функции D и D_1 можно также представить в виде

$$D = \frac{1}{8\pi^4} \frac{T}{|T|} \int \frac{e^{ikR-icxT}}{k^2 - x^2 + k_0^2} (dk) dx,$$

$$D_1 = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{ikR-icxT} \delta(k^2 - x^2 + k_0^2) (dk) dx.$$

С помощью формул

$$\frac{1}{k^2 - x^2 + k_0^2} = -\frac{i}{2} \int \frac{\alpha}{|\alpha|} e^{i\alpha(k^2 - x^2 + k_0^2)} d\alpha,$$

$$\delta(k^2 - x^2 + k_0^2) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\alpha(k^2 - x^2 + k_0^2)} d\alpha$$

легко преобразовать последние выражения

$$D = \frac{2}{c} \frac{T}{|T|} G_1 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \cos \left[\alpha (c^2 T^2 - R^2) + \frac{k_0^2}{\alpha} \right] d\alpha,$$

$$D_1 = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \sin \left[\alpha (c^2 T^2 - R^2) + \frac{k_0^2}{\alpha} \right] d\alpha. \quad (20,15a)$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение

$$\int_0^\infty e^{i\left(\alpha a + \frac{k_0^2}{\alpha}\right)} \frac{d\alpha}{\alpha} = \pi i H_0^{(1)}(k_0 \sqrt{a}),$$

для функции D вновь получаем выражение (20,15), а для функции D_1 находим соотношение, которое также можно получить из формулы (20,8) и (20,14):

$$D_1 = \begin{cases} \frac{k_0^2}{4\pi} \frac{N_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2})}{k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}}, & c^2 T^2 > R^2, \\ \frac{k_0}{2\pi^2} \frac{K_1(k_0 \sqrt{R^2 - c^2 T^2})}{k_0 \sqrt{R^2 - c^2 T^2}}, & c^2 T^2 < R^2. \end{cases}$$

В частности, при $k_0^2 = 0$ из формул (20,15a) легко получить значение функций $\Delta = \lim_{k_0^2 \rightarrow 0} D$ и $\Delta_1 = \lim_{k_0^2 \rightarrow 0} D_1$ для уравнения Даламбера [см. соотношения (17,16) и (17,17)].

Из (20,15) находим функцию Грина уравнения Клейна для решений с запаздывающими потенциалами:

$$G^r = \frac{c}{2} \left(\frac{T}{|T|} + 1 \right) D = \frac{\delta \left(T - \frac{R}{c} \right)}{4\pi R} - \begin{cases} \frac{ck_0}{4\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}, \end{cases} \quad (20,16)$$

и для случая опережающих потенциалов:

$$G^a = \frac{c}{2} \left(\frac{T}{|T|} - 1 \right) D = \frac{\delta \left(T + \frac{R}{c} \right)}{4\pi R} - \begin{cases} 0; & T > -\frac{R}{c}, \\ \frac{ck_0}{4\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}} J_1(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T < -\frac{R}{c}. \end{cases} \quad (20,17)$$

Окончательное выражение для потенциала φ с запаздывающими решениями согласно (20,2) будет иметь вид

$$\varphi(r, t) = \int \left[\frac{\rho \left(r', t - \frac{R}{c} \right)}{R} - k_0 \int_0^\infty \rho \left(r', t - \frac{1}{c} \sqrt{\xi^2 + R^2} \right) \frac{J_1(k_0 \xi)}{\sqrt{\xi^2 + R^2}} d\xi \right] (dr'). \quad (20,18)$$

При $k_0 = 0$, т. е. когда масса покоя частиц, сопоставленных мезонному полю (т. е. мезонов), равна нулю, потенциал φ переходит в решение уравнения Даламбера (т. е., в частности, уравнений для потенциалов электромагнитного поля), из которого видно, что от источника начинают распространяться волны со скоростью c . В нашем случае, когда волны сопоставлены частицам, обладающим массой покоя, от источника, кроме волн, распространяющихся со скоростью c (скорость фронта волны), будут распространяться другие волны со всевозможными скоростями $c' = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\xi^2}{R^2}}}$, меньшими c . С физической точки зрения

полученный результат является совершенно понятным. В самом деле, в теории электромагнитного поля сигналы переносятся фотонами, которые распространяются со скоростью света, так как покоящаяся масса фотонов равна нулю. В нашем же случае сигналы переносятся мезонами, покоящаяся масса которых не равна нулю, и поэтому скорость их движения лежит в пределах от 0 до c .

Формула (20,18) принимает более простой вид, когда правая часть уравнения (20,1) изменяется по гармоническому закону, т. е.

$$\rho(r, t) = \rho_0(r) e^{-i\omega t}, \quad (20,19)$$

причём круговая частота $\omega > ck_0^*$.

В этом случае решение уравнения (20,1) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_0(r) e^{-i\omega t}.$$

Принимая во внимание тождество

$$k_0^2 \varphi = -\frac{k_0^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (20,20)$$

сведём уравнение (20,1) к уравнению Даламбера, описывающему распространение сигналов со скоростью

$$v = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - c^2 k_0^2}} > c:$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = -4\pi\rho. \quad (20,21)$$

Решение последнего уравнения с учётом запаздывающих потенциалов имеет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (d\mathbf{r}'). \quad (20,22)$$

Фазовая скорость v распространения волн зависит от частоты ω , однако для монохроматических волн она должна оставаться величиной постоянной.

Решение (20,22) может быть получено также из более общего выражения (20,18).

*) Случай $\omega < ck_0$ не даёт волнового процесса и для нас сейчас особого интереса не представляет.

§ 21. Интегрирование волнового уравнения в n -мерном пространстве *)

В n -мерном пространстве обобщённое волновое уравнение типа Клейна имеет вид

$$L\varphi = \left(\sum_{s=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \varphi = -4\pi\rho(x_s, t), \quad (21,1)$$

где ρ является плотностью источника, а φ — искомой волновой функцией.

Обобщая рассуждения предыдущего параграфа, мы найдём следующее значение для функции Грина, соответствующей запаздывающим потенциалам и естественным граничным условиям:

$$G_n = \begin{cases} \frac{c}{(2\pi)^n} \int e^{i \sum_{s=1}^n k_s R_s} \cdot \frac{\sin cT \sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (dk)_n; & T > 0, \\ 0; & T < 0, \end{cases} \quad (21,2)$$

где

$$k^2 = \sum_{s=1}^n k_s^2, \quad (dk)_n = dk_1 dk_2 \dots dk_n, \quad T = t - t', \quad R_s = x_s - x'_s,$$

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + \dots + R_n^2}.$$

Прежде всего найдём функцию Грина в том случае, когда мы имеем одно ($n=1$) или два ($n=2$) пространственных измерения.

В первом случае ($n=1$) мы находим

$$G_1 = \begin{cases} \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} \cos kR \frac{\sin cT \sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} dk; & T > 0, \\ 0; & T < 0, \end{cases} \quad (21,3)$$

*) См. Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, 36, 37, 1940.

или, принимая во внимание соотношения (20,9) и (20,13), получаем

$$G_1 = \begin{cases} \frac{c}{2} J_0(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}. \end{cases} \quad (21,4)$$

Точно так же во втором случае ($n=2$) находим

$$G_2 = \begin{cases} \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty \frac{k J_0(kR)}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} \sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2}) dk; & T > 0, \\ 0; & T < 0, \end{cases} \quad (21,5)$$

если примем во внимание, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ikR \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(kR). \quad (21,6)$$

Интеграл (21,5) является известным разрывным интегралом Сонина*), равным

$$G_2 = \begin{cases} \frac{c \cos(k_0 \sqrt{c^2 T^2 - R^2})}{2\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}}; & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}. \end{cases} \quad (21,7)$$

*) Как известно, разрывный интеграл Сонина имеет вид (см. Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, стр. 150)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty J_m(bt) \frac{J_n(a \sqrt{t^2 + x^2})}{(t^2 + x^2)^{n/2}} t^{m+1} dt = \\ & = \begin{cases} \frac{b^m}{a^n} \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{x} \right)^{n-m-1} J_{n-m-1}(x \sqrt{a^2 - b^2}); & a > b > 0, \\ 0; & 0 < a \leq b, \end{cases} \end{aligned} \quad (21,7a)$$

где $n > m > -1$, а число x может принимать любое комплексное значение. Чтобы получить наше соотношение (21,7), необходимо положить $n = \frac{1}{2}$, $m = 0$.

Для вычисления функции Грина, в случае трёх и большего числа пространственных измерений*) удобно ввести сферические координаты, которые в n -мерном пространстве будут связаны с декартовыми при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} k_1 &= k \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ k_2 &= k \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ k_3 &= k \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ k_4 &= k \cos \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ k_n &= k \cos \theta_{n-2}, \end{aligned} \tag{21,8}$$

причём

$$= \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2},$$

а сферические координаты изменяются в пределах:

$$0 \leq k < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \tag{21,9}$$

Составляя якобиан, находим известное выражение элемента объёма в сферических координатах:

$$(dk)_n = k^{n-1} dk d\varphi \sin \theta_1 d\theta_1 \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \sin^{n-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2}. \tag{21,10}$$

Телесный угол в n -мерном пространстве равняется

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta_1 d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} = \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{21,11}$$

Для вывода последнего соотношения принимается во внимание, что**)

$$\int_0^{\pi} \sin^s \theta d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} \sqrt{\pi}. \tag{21,12}$$

*) Точнее говоря, полученными формулами можно пользоваться, начиная с $n=2$.

***) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 10.

Направляя ось n по направлению вектора R , имеем

$$R_n = R, R_s = 0 \quad (\text{если } s \neq n). \quad (21,13)$$

Поэтому

$$\sum_{s=1}^n k_s R_s = k_n R = kR \cos \theta_{n-2}. \quad (21,14)$$

Интегрируя равенство (21,2) по углам $\varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}$, имеем

$$G_n = \frac{c}{(2\pi)^n} \omega_{n-1} \int_0^\infty k^{n-1} \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2})}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} dk \times \\ \times \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta e^{ikR \cos \theta} d\theta; \quad T > 0, \quad (21,15) \\ G_n = 0; \quad T < 0.$$

Учитывая далее соотношение *)

$$\int_0^\pi \sin^{n-2} \theta e^{ikR \cos \theta} d\theta = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \frac{J_{(n-2)/2}(kR)}{\left(\frac{kR}{2}\right)^{(n-2)/2}}, \quad (21,16)$$

можем представить функцию G_n в виде

$$G_n = \begin{cases} \frac{cR}{(2\pi R)^{n/2}} \int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(kR) \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2})}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} dk; & T > 0, \\ 0; & T < 0. \end{cases} \quad (21,17)$$

Разберём прежде всего обобщённый электростатический случай. При этом вместо функции Грина G_n n -мерного волнового уравнения удобно ввести функцию Грина

статического n -мерного уравнения Лапласа $\sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_s^2} = -4\pi\rho$,

*) Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. II, ГТТИ, 1934, стр. 178.

сингулярная часть которой равна

$$G_n^{st} = \int_0^\infty G_n dT = \frac{1}{2\pi (2\pi R)^{\frac{n}{2}-1}} \int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(kR) \frac{dk}{k^2 + k_0^2}. \quad (21,18)$$

Последний интеграл может быть вычислен с помощью равенства *)

$$\int_0^\infty k^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(kR) \frac{dk}{k^2 + k_0^2} = k_0^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(k_0 R). \quad (21,19)$$

В этом случае для функции Грина находим

$$G_n^{st} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_0}{2\pi R} \right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(k_0 R). \quad (21,20)$$

В частности, полагая $n=3$, получаем функцию Грина уравнения Пуассона, обобщённого на член с массой покоя:

$$G_3^{st} = \frac{e^{-k_0 R}}{4\pi R}. \quad (21,21)$$

В этих рассуждениях речь везде идёт о сингулярной части. При переходе к предельному случаю ($k_0=0$) необходимо учесть соотношение **)

$$x^s K_s(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2^{s-1} \Gamma(s). \quad (21,22)$$

*) Равенство (21,19) может быть получено из формулы (11,32) при $a=0$, $n=1$ и $m=\frac{n}{2}-1$.

**) Формулой (21,22) мы можем пользоваться при $s > 0$, поэтому функция Грина (21,23) относится к случаю трёх, четырёх и т. д. измерений. При $s=0$ мы имеем $K_0(k_0 R) = -\ln R - \ln \frac{k_0}{2}$.

Отбрасывая бесконечный, но постоянный множитель $\ln \frac{k_0}{2}$; $k_0 \rightarrow 0$, получим функцию Грина двумерного уравнения Пуассона [см. соотношение (9,7)]:

$$G_{20}^{st} = -\frac{1}{2\pi} \ln R.$$

Тогда

$$G_{n0}^{st} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{4\pi^{n/2} R^{n-2}}. \quad (21,23)$$

При $n=3$ мы вновь находим функцию Грина трёхмерного уравнения Пуассона:

$$G_{30}^{st} = \frac{1}{4\pi R}, \quad (21,24)$$

а при $n=4$ — функцию Грина четырёхмерного уравнения Лапласа-Пуассона

$$G_{40}^{st} = \frac{1}{4\pi^2 R^2}. \quad (21,25)$$

При вычислении функции Грина в общем случае мы должны различать случаи нечётного ($n=2\nu+1$; $\nu=1, 2, 3, \dots$) и чётного ($n=2\nu$; $\nu=1, 2, 3, \dots$) числа пространственных измерений.

В первом случае ($n=3, 5, 7$ и т. д.) из равенства (21,17) находим

$$G_{2\nu+1} = \frac{c}{2\pi (2\pi R)^{\nu-\frac{1}{2}}} \int_0^\infty k^{\nu+\frac{1}{2}} \times \\ \times J_{\nu-\frac{1}{2}}(kR) \frac{\sin(cT \sqrt{k^2+k_0^2})}{\sqrt{k^2+k_0^2}} dk; \quad T > 0, \quad (21,26)$$

$$G_{2\nu+1} = 0; \quad T < 0.$$

Принимая во внимание соотношение

$$J_{\nu-\frac{1}{2}}(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{\nu-1} \left(\frac{R}{k}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}} \frac{\sin kR}{R}, \quad (21,27)$$

находим

$$G_{2\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu-1} c}{2^\nu \pi^{\nu+1}} \frac{d^{\nu-1}}{(RdR)^{\nu-1}} \frac{1}{R} \times \\ \times \int_0^\infty k \sin kR \frac{\sin(cT \sqrt{k^2+k_0^2})}{\sqrt{k^2+k_0^2}} dk; \quad T > 0, \quad (21,28)$$

$$G_{2\nu+1} = 0; \quad T < 0.$$

В частности, при $\nu = 1$

$$G_3 = \begin{cases} \frac{c}{2\pi^2 R} \int_0^\infty k \sin kR \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 + k_0^2})}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} dk, & T > 0, \\ 0; & T < 0. \end{cases} \quad (21,29)$$

Последний интеграл был взят нами прежде и определяется равенством (20,16).

Как видно из последних соотношений, функция $G_{2\nu+1}$ может быть выражена через функцию G_3 :

$$G_{2\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{(R dR)^{\nu-1}} G_3. \quad (21,30)$$

Точно так же в случае чётного числа пространственных измерений функция Грина $G_{2\nu}$ будет равняться

$$G_{2\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^{\nu-1}} \frac{d^{\nu-1}}{(R dR)^{\nu-1}} G_2, \quad (21,31)$$

причём функция Грина двухмерного пространства определяется выражением (21,5).

Наконец, разберём вопрос о выполнении принципа Гюйгенса при распространении волн в пространстве с различным числом измерений.

Как известно, принцип Гюйгенса сводится к следующему положению: если источник испускает волны в течение времени Δt , то этот поток волн должен действовать на приёмник в течение этого же момента времени Δt , т. е. скорость распространения волн не должна зависеть от частоты колебаний источника и при своём распространении волны не должны подвергаться деформации в смысле размазывания и образования «хвоста».

С точки зрения формализма δ -функции это означает, что соответствующая функция Грина должна быть пропорциональной или $\delta\left(T - \frac{R}{c}\right)$ или производной от δ -функции. Как видно из наших формул, для выполнения принципа Гюйгенса кроме основного требования исчезновения покоящейся массы у волн или частиц, сопоставлен-

ных волнам ($k_0 = 0$), необходимо также, чтобы число пространственных измерений было нечётным. Согласно равенствам (20,16) и (21,30) в этом случае мы имеем

$$G_{2\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{2(2\pi)^\nu} \frac{d^{\nu-1}}{(R dR)^{\nu-1}} \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right)}{R}. \quad (21,32)$$

Отсюда видно, что потенциал φ будет зависеть лишь от состояния источника, взятого в предшествующий момент времени. При этом сдвиг определяется временем, необходимым для прохождения расстояния R между источником и точкой наблюдения со скоростью c , и никаких «хвостов», т. е. волн, движущихся со скоростью, меньшей чем c , и ведущих к размазыванию формы потока волн, здесь не возникает.

Нетрудно показать, что принцип Гюйгенса не будет выполняться в случае чётного числа пространственных измерений, даже при исчезающей массе покоя у частиц, сопоставленных волне.

В самом деле, из (21,7) и (21,31) следует

$$G_{2\nu} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\pi)^\nu} \frac{d^{\nu-1}}{(R dR)^{\nu-1}} \frac{1}{\sqrt{T^2 - \frac{R^2}{c^2}}}; & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}, \end{cases} \quad (21,33)$$

т. е. потенциал φ в этом случае будет зависеть от состояния источника не только в момент $t' = t - \frac{R}{c}$, но также от его состояния во все предшествующие моменты времени $t' < t - \frac{R}{c}$. Иными словами, кроме фронта волны, распространяющегося со скоростью c , за ним будет следовать целый «хвост» волн, движущихся со всевозможными скоростями, начиная от нуля и кончая c . Как видно из формулы (20,16), аналогичный «хвост» должен появиться также в случае нечётного числа измерений, если покоящаяся масса k_0 отлична от нуля (см. также § 20).

Аналогичная проблема выполнимости принципа Гюйгенса для n -мерных обобщённых волновых уравнений

рассматривалась Адамаром и другими математиками *). При этом, однако, дополнительный член (включавшийся притом в уравнение с обратным знаком $+k_0^2\varphi$) трактовался чисто формально, ввиду неизвестной прежде его интерпретации как члена с массой покоя. Поэтому, несмотря на формальную правильность результатов Адамара, окончательного физического толкования вопроса о выполнимости принципа Гюйгенса он, по указанным причинам, получить не мог.

§ 22. Распространение электромагнитных волн в проводящей среде

Уравнение, описывающее распространение электромагнитных волн в проводящей среде, имеет вид так называемого телеграфного уравнения:

$$L\varphi = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2\sigma}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = -4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (22,1)$$

где постоянный в данном случае коэффициент σ является проводимостью среды.

Для сингулярной части функции Грина при естественных граничных условиях мы имеем

$$G_1 = -L^{-1}\delta(\mathbf{R})\delta(T) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - icxT}}{k^2 - x^2 - 2\sigma ix} (d\mathbf{k}) dx, \quad (22,2)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$.

Применяя теорию вычетов, получим **)

$$\int \frac{e^{-icxT}}{k^2 - x^2 - 2\sigma ix} dx = \begin{cases} 2\pi e^{-c\sigma T} \frac{\sin(cT\sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}}; & T > 0, \\ 0; & T < 0. \end{cases} \quad (22,3)$$

*) См., например, Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 2, стр. 531, Гостехиздат, 1945.

**) Отметим, что наличие в уравнении (22,1) первой производной по времени ведёт автоматически к запаздывающим потенциалам для сингулярной части функции Грина. Поэтому, ограничиваясь вообще одним запаздывающим решением, несингулярную часть G_0 мы должны положить равной нулю. Так же, как и в параболическом уравнении теплопроводности (см. § 16), здесь не может иметь места решение с одними лишь опережающими потенциалами.

Отсюда для функции Грина находим

$$G = \begin{cases} \frac{ce^{-\sigma cT}}{8\pi^3} \int e^{ikR} \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} (dk); & T > 0, \\ 0; & T < 0. \end{cases} \quad (22,4)$$

Во многих исследованиях можно ограничиться этой формой для функции Грина. Однако интеграл (22,4) допускает явное выражение через бесселевы функции.

Интегрируя далее последнее выражение по углам, с помощью соотношения (17,15) имеем

$$G = -\frac{c}{2\pi^2 R} e^{-\sigma cT} \frac{\partial F}{\partial R}, \quad (22,5)$$

где F является разрывным интегралом Солина [см. также (21,7а)]

$$F = \int_0^{\infty} \cos kR \frac{\sin(cT \sqrt{k^2 - \sigma^2})}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} dk = \begin{cases} \frac{\pi}{2} I_0(\sigma \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}, \end{cases} \quad (22,6)$$

а I_0 — бесселевой функцией от мнимого аргумента.

Учитывая, что производная от разрывной функции даёт δ -функцию, получим

$$G = \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R} e^{-\sigma cT} + \begin{cases} \frac{\sigma c e^{-\sigma cT}}{4\pi \sqrt{c^2 T^2 - R^2}} I_1(\sigma \sqrt{c^2 T^2 - R^2}); & T > \frac{R}{c}, \\ 0; & T < \frac{R}{c}. \end{cases} \quad (22,7)$$

Как видно из (22,7), в проводящей среде принцип Гюйгенса, ввиду образования затухающего «хвоста»,

не будет иметь места. Физически это связано с тем обстоятельством, что лишь скорость распространения фронта электромагнитных волн в проводниках равняется c , сам же сигнал в проводящей среде размазывается, и фазовая скорость изменяется в пределах от 0 до c (см. ниже).

В частности, при $\sigma = 0$ (диэлектрик) мы найдём прежнее значение для функции Грина уравнения Даламбера:

$$G = \frac{\delta\left(T - \frac{R}{c}\right)}{4\pi R}, \quad (22,8)$$

в которой автоматически отобраны решения лишь с запаздывающими потенциалами.

В другом предельном случае

$$c^2 \rightarrow \infty, \quad \sqrt{\frac{c}{2\sigma}} = a = \text{const},$$

найдем функцию Грина для уравнения теплопроводности в трёх измерениях:

$$G = \frac{1}{8\pi a \sqrt{\pi T^3}} e^{-\frac{R^2}{4a^2 T}}. \quad (22,9)$$

При этом мы использовали следующее асимптотическое выражение для функции I_1 :

$$I_1(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Наконец, найдём решение уравнения (21,1) в случае наличия точечного источника, испускающего монохроматические волны с круговой частотой ω :

$$\rho(\mathbf{r}', t') = p\delta(\mathbf{r}') e^{-i\omega t'}. \quad (22,10)$$

Воспользовавшись значением для функции Грина (22,4), получим

$$\varphi = \frac{cp}{2\pi^2} \int e^{ikr} (dk) \int_{-\infty}^t e^{-i\omega t' - c(t-t')} \frac{\sin [c(t-t') \sqrt{k^2 - \sigma^2}]}{\sqrt{k^2 - \sigma^2}} dt' \quad (22,11)$$

или после интегрирования по t'

$$\varphi = \frac{pe^{-i\omega t}}{2\pi^2} \int e^{ikr} \frac{1}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - 2\sigma \frac{\omega}{c} t} (dk). \quad (22,12)$$

Таким образом при наличии затухающего члена, связанного с проводимостью, простое деление на оператор даёт запаздывающие потенциалы для монохроматических волн без добавления какой-либо вспомогательной функции типа G_0 , которая была необходима в случае уравнений Даламбера, допускающего также решения с опережающими потенциалами [см. равенство (18,3)].

Наконец, вычисляя интеграл (22,12), найдём

$$\varphi = \frac{P}{r} e^{-\beta r} e^{-i\omega \left(t - \frac{r}{v}\right)}. \quad (22,13)$$

Отсюда видно, что фазовая скорость распространения электромагнитных волн в проводящей среде с коэффициентом проводимости σ равняется

$$v = \frac{c}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\sigma^2 \frac{c^2}{\omega^2}}\right)}} \quad (22,14)$$

и зависит от частоты колебаний.

Кроме того, как и следовало ожидать, волны, распространяющиеся в проводящей среде, являются затухающими, причём коэффициент затухания β также зависит от частоты:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + 4\sigma^2 \frac{c^2}{\omega^2}} - 1 \right)}. \quad (22,15)$$

В предельном случае исчезающей проводимости $\sigma = 0$, т. е. идеального диэлектрика, скорость волн становится равной постоянной величине c , а коэффициент затухания обращается в нуль.

ГЛАВА IV

КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 23. Основы классической электродинамики

а) Значение классической электродинамики в современной теории частиц и полей

Законы классической электродинамики, т. е. теории электромагнитного поля и заряженных частиц, вообще говоря, в целом неприменимы к элементарным частицам, ядрам, атомам, молекулам. Например, движение электронов в атомах и молекулах и движение протонов в ядрах, так же как излучение света ядрами, атомами и молекулами и т. д., должны описываться квантовой теорией поля и частиц. Точно так же движение свободных электронов, например, в космических лучах, также подчиняется квантовой механике. Во всех этих случаях величины «действия» за период процесса сравнимы с планковской постоянной $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек. Иначе говоря, длина де-Бройлевской волны $\Delta = \frac{h}{p}$, или при малых скоростях $\Delta = \frac{h}{m_0 v}$, сравнима с размерами исследуемых областей. В частности, при движении электронов в атомах Δ будет порядка размеров орбит $\sim 10^{-8}$ см. Может создаться неправильное впечатление, что вся физика элементарных частиц должна быть только квантовой в том смысле, что классические теории представляют собой совершенно непригодное приближение. Однако подобная крайность не соответствует действительности.

В ряде случаев, например, весьма быстрых движений, длина де-броглевской волны электрона оказывается значительно меньше размеров орбиты либо характерного промежутка длины, или, что сводится к тому же, действие за период процесса оказывается значительно больше \hbar . Таким образом при $\Lambda \rightarrow 0$, или $\hbar \rightarrow 0$, мы вправе трактовать многие процессы с элементарными частицами классическим путём, а точное квантовое решение, как правило, будет давать лишь незначительные поправки. Это относится, в частности, к движению заряженных частиц в ускорительных установках, притом как к нерелятивистскому случаю движения протонов, дейтеронов, α -частиц и других ядер в циклотронах, так и к релятивистскому движению лёгких частиц — электронов в бетатронах и синхротронах. Теория движения электронов в современных ускорителях типа бетатрона — синхротрона является важнейшей областью применения неквантовой релятивистской теории электрона и электромагнитного поля. В частности, оказалось возможным предсказать и дать теорию испускаемого электронами в этих условиях излучения нового типа, являющегося иногда видимым и обладающего рядом других интересных особенностей, — эффект «светящегося» электрона (см. § 43).

Кроме того, классическая релятивистская теория поля и электрона позволила объяснить другое новое явление — эффект «сверхсветового» электрона (эффект Черенкова), заключающийся в излучении света электроном, движущимся в среде равномерно со скоростью, большей фазовой скорости света (см. § 27).

Наряду с этими конкретными новейшими применениями современная неквантовая релятивистская электродинамика оказывается необходимой также для анализа ряда принципиальных вопросов, прежде всего проблемы собственной массы и вывода уравнений движения электрона.

Ни классическая, ни квантовая теории не смогли ещё объяснить природу массы элементарных частиц и тем более вывести численные значения масс. На базе классической теории возникла и была перенесена в кванто-

вую механику гипотеза «полевой» массы, согласно которой собственная энергия или масса частиц обязана энергии полей.

Возникшая при этом трудность с бесконечным значением энергии любого поля, порождаемого точечной частицей, не была окончательно удовлетворительно разрешена ни путём введения конечного радиуса частиц, ни каким-либо другим классическим или квантовым способом. При этом, поскольку взаимодействие частиц посредством какого-либо поля является в своей основе эффектом классическим, лишь иначе интерпретируемым квантовой механикой, то и «самодействие» или обратное действие поля на породившую его частицу, и связанный с этим эффект возникновения собственной полевой массы, можно предполагать в основном также классическими. Это предположение подкрепляется тем обстоятельством, что из константы заряда e , скорости света c и длины r_0 («классический радиус») можно составить, не вводя постоянной Планка h , величину размерности массы

$$m = \frac{e^2}{c^2 r_0} \left(\text{или, наоборот, } r_0 = \frac{e^2}{m c^2} \right).$$

С другой стороны, не следует, конечно, забывать о наличии чисто квантовой величины с размерностью длины, так называемой комптоновской длины волны $\Lambda_0 = \frac{h}{m c} = \frac{2\pi e^2}{m c^2} \cdot \frac{h c}{2\pi e^2}$, в $2\pi \cdot \alpha^{-1} = 2\pi \cdot 137,02$ раза большей классического радиуса, которая характеризует область длин волн, ниже которых сказываются релятивистские квантовые эффекты.

Таким образом априори классическая теория, повидимому, способна объяснить хотя бы отчасти природу массы. Конечно, все выводы её подлежат проверке и уточнению при помощи квантовой механики. С другой стороны, оставляя в стороне вопрос о природе массы, мы можем, беря m просто за некоторую константу, задаться вопросом о выводе классических релятивистских уравнений движения на базе неквантовой теории. В последнее время обе эти проблемы: вывод уравнений движения

и задача о собственной массе, довольно усиленно обсуждались не только с квантовой, но и классической точки зрения.

Как бы то ни было, классическая трактовка помогает глубже проанализировать физическую сущность проблемы, расчленив классические и квантовые стороны вопроса и тем самым, если не может дать окончательного решения, то во всяком случае способна подготовить для него почву.

Ввиду всех изложенных обстоятельств мы рассмотрим в данной части книги как ряд принципиальных вопросов, так и ряд новейших конкретных применений классической электродинамики. В этом кратком вступлении мы естественно не останавливались на издавна хорошо известных и излагаемых в курсах электронной теории и классической электродинамики многочисленных разнообразнейших явлениях излучения, распространения и поглощения электромагнитных полей и движения электронов, описываемых неклассической электродинамикой *).

б) Инвариантность и трансформационные свойства

Остановимся сначала на общих трансформационных свойствах, которым должны удовлетворять согласно теории относительности любые уравнения полей и элементарных частиц, в том числе уравнения теории Максвелла-Лорентца, описывающие электромагнитное поле заряженных частиц.

Как известно, в общем случае следует различать законы преобразования для контравариантных и ковариантных компонент векторов и тензоров.

*) Я. И. Френкель, Электродинамика, ч. 1 и 2, ОНТИ, 1935; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948; И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1949; Г. А. Лорентц, Теория электронов, ГТТИ, 1934; Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936; Абрагам-Беккер, Теория электричества, ОНТИ, 1936.

Переход от одного вида тензоров к другому осуществляется при помощи фундаментальных метрических тензоров: $(g_{\mu\nu})$ и $(g^{\mu\nu})$, определяемых в простейшем случае отсутствия гравитации, иначе говоря, плоского (так называемого псевдоевклидова) мира, равенствами

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (23,1)$$

Соответствующие значения $g_{\mu\nu} = 0, \pm 1$ носят название галилеевых. Пространственные составляющие будем обозначать латинскими индексами n ($n = 1, 2, 3$), а временную значком 0. Переход от ковариантных A_μ векторов к контравариантным A^μ , и наоборот, осуществляется с помощью формул:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu,$$

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu,$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, а по значку, входящему дважды, необходимо произвести суммирование, т. е.

$$g^{\mu\nu} A_\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} A_\nu.$$

Отсюда видно, что временные составляющие обоих видов векторов равны друг другу ($A^0 = A_0$), а пространственные отличаются знаком ($A_n = -A^n$).

В частности, скалярное произведение двух векторов, представляющее собою инвариант, равно:

$$A^\mu A_\mu = A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2.$$

Если вместо координаты времени $x_0 = ct$ ввести мнимую величину $x_4 = ict$ и положить $A_4 = iA_0$, тогда можно ограничиться, например, только ковариантными векторами, из которых образуется скалярное произведение,

являющееся инвариантом:

$$(A, A) = A_\mu A_\mu = A_4^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -A_0^2 + A_n A_n \text{ *}).$$

Нетрудно видеть, что в этом случае компоненты ковариантных и контравариантных векторов будут равны друг другу, а компоненты метрического тензора образуют единичную матрицу:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23,1a)$$

Волновые функции, описывающие поля и элементарные частицы, должны иметь определённые трансформационные свойства, т. е. изменяться закономерным образом при преобразованиях координат или соответствующих движениях систем отсчёта. При этом в релятивистской теории речь идёт о преобразованиях в четырёхмерном мире (пространство — время) в приближённой же нерелятивистской теории, пригодной лишь при малых скоростях, — о преобразованиях в трёхмерном пространстве и отдельно о преобразовании времени, сводящемся в данном случае к переносу начала отсчёта. Наибольшее значение имеют инварианты (скаляры), т. е. величины, не изменяющиеся при переходе к различным координатным системам. Сами уравнения, описывающие те или иные поля и частицы, согласно теории относительности не должны зависеть от выбора системы координат и должны сохранять при различных допустимых преобразованиях свою форму.

Требования инвариантности на современном этапе развития теории поля принадлежат к числу наиболее общих и глубоких физических законов, выражающих основные свойства пространства и времени, движения частиц и их взаимодействий.

Перечислим преобразования, оставляющие уравнения полей и частиц инвариантными. За всеми подроб-

*) Здесь и в дальнейшем греческие буквы пробегают значения от 1 до 4 (x, y, z, ict), а латинские от 1 до 3 (x, y, z).

ностями мы отсылаем к монографиям по теории относительности и теории групп *).

1) Отсутствие абсолютного центра в пространстве и какого-то начала отсчёта времени, т. е. однородность пространства — времени, приводят к инвариантности относительно переноса начала координат («принцип относительности начала отсчёта»). Следовательно, все уравнения должны быть дифференциальными в четырёх координатах. Преобразования переноса записываются в виде линейной неоднородной трансформации:

$$x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

или для бесконечно малых преобразований

$$\delta x'_\alpha = \delta x_\alpha.$$

2) Отсутствие каких-либо избранных направлений или изотропность трёхмерного пространства («принцип относительности направлений») приводит к инвариантности по отношению к трёхмерным пространственным вращениям.

Соответственные линейные ортогональные преобразования координат имеют вид

$$x'_r = a_{rs} x_s,$$

или для бесконечно малых преобразований

$$\delta x'_r = \delta a_{rs} x_s,$$

причём тензор δa_{rs} , характеризующий малый угол поворота, является антисимметричным $\delta a_{rs} = -\delta a_{sr}$.

Как ясно уже из наглядных геометрических соображений, при этом остаётся инвариантным расстояние (или квадрат расстояния) между двумя точками, например, с координатами $(0, 0, 0)$ и (x_1, x_2, x_3) в старой системе координат, соответственно $(0, 0, 0)$ и (x'_1, x'_2, x'_3) в новой системе координат, т. е.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2,$$

или

$$r^2 = r'^2.$$

*) См. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947, § 8; В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. I, Гостехиздат, 1949, § 52; В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947; Ф. Мурнаган, Теория представлений групп, ИЛ, 1950.

3) «Принцип относительности равномерных и прямолинейных движений», или «специальный принцип относительности» (иногда для сокращения говорят просто «принцип относительности»), установленный на базе работ Лорентца Эйнштейном и Пуанкаре в 1905 г., утверждает эквивалентность всех так называемых инерциальных систем отсчёта, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга. Принцип относительности требует включения четвёртой координаты, т. е. времени, в значительной мере на равных математических основаниях наряду с тремя пространственными координатами (x, y, z) и приводит к инвариантности всех уравнений относительно так называемых преобразований Лорентца, которые в формальном отношении сводятся к вращениям в плоскостях (x, t) , (y, t) , (z, t) и выражают переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой. При этом инвариантным остаётся интервал или квадрат расстояния между двумя точками в четырёхмерном мире, например, с координатами $r, x_4 = ict$ (в старой системе) и соответственно $r', x'_4 = ict'$ (в новой системе) и началом координат $(0, 0, 0, 0)$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2,$$

или

$$c^2 t^2 - r^2 = c^2 t'^2 - r'^2.$$

Ввиду различных знаков при квадратах пространственных и временных координат это четырёхмерное пространство иногда называется псевдоэвклидовым.

Тем самым мы, очевидно, приходим к изотропности всего четырёхмерного пространства — времени и к условию инвариантности уравнений относительно четырёхмерных вращений, включающих как обычные вращения, так и преобразования Лорентца в собственном смысле слова. Общая формула четырёхмерных вращений имеет тот же вид линейных ортогональных преобразований, что и в трёхмерном случае, если подразумевать пробегание индексами координат не трёх, а четырёх значений: $\mu = 1, 2, 3, 4$

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$$

(или для бесконечно малых преобразований $\delta x'_\mu = \delta a_{\mu\nu} x_\nu$, где $\delta a_{\mu\nu}$ — бесконечно малый четырёхмерный антисимметричный тензор 2-го ранга, определяющий соответствующее вращение). В частном случае преобразований Лорентца, сводящихся к вращению координатной системы в плоскости $x_1, x_4 = ict$, или, иначе говоря, в случае перехода от одной инерциальной системы к другой, движущейся со скоростью $v = \beta c$ вдоль оси x_1 , имеем следующие формулы:

$$x'_1 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{k},$$

$$x'_2 = x_2,$$

$$x'_3 = x_3,$$

$$x'_4 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{k},$$

где $k = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Таким образом матрица преобразований Лорентца в этом частном случае имеет вид

$$a_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{k} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{i\beta}{k} & 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{vmatrix}.$$

Как известно, для малых скоростей лорентцовы преобразования переходят в галилеевы, при которых время остаётся неизменным:

$$x'_1 = x_1 + i\beta x_4, \quad x'_4 = x_4; \quad \text{или} \quad x' = x - vt, \quad t' = t.$$

4) Произвольность выбора правой и левой систем координат, а также симметрия по отношению к прошлому и будущему приводят к инвариантности относительно зеркальных отражений (и н в е р с и й), а также к инвариантности относительно обращения времени. Эти преобразования записываются в виде

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad x'_3 = -x_3, \quad x'_4 = -x_4 \quad (t' = -t).$$

Весьма существенно, что первичные дифференциальные уравнения современной релятивистской квантовой механики, так же как уравнения неквантовой и нерелятивистской механики, обратимы по времени. Необратимость же, как известно, трактуемая вообще путём статистического рассмотрения, может также учитываться, например, в случае задачи излучения через дополнительные условия (использование одних запаздывающих потенциалов). В случае инверсий, очевидно, нет речи о непрерывных преобразованиях или бесконечно малых преобразованиях.

5) Кинематике полей и элементарных частиц можно придать так называемую общековариантную форму, записав их согласно Эйнштейну (1916) в тензорном виде при помощи компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ *). Формулы преобразования координат при этом будут иметь вид ($x = x_1, y = x_2, z = x_3, ict = x_4$):

$$dx'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} dx^{\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4),$$

где коэффициенты

$$a^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

являются теперь функциями точки, а не постоянными, как в прежних случаях в пп. 2 и 3. При этом инвариантным является «интервал» или квадрат бесконечно малого

*) Если мы имеем дело не со скалярами или векторами и, вообще говоря, не с тензорами любого целого ранга, а со спинорами, которыми, например, описываются согласно квантовой теории Дирака электроны, а также все частицы полуцелого спина, то для записи уравнения Дирака и других в общековариантной требуемой наличием гравитации форме следует применить обобщённые дираковские матрицы γ_{μ} , появляющиеся в результате факторизации или расщепления $g_{\mu\nu}$, как было показано Фоком и Иваненко.

Эти матрицы удовлетворяют соотношению

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\mu} = 2g_{\mu\nu}.$$

См. Д. Иваненко, Изв. АН СССР, 73, 1929; V. Fock und D. Iwanenko, Phys. Zs., 30, 648, 1929, C. R., Paris, 1929; V. Fock, Zs. f. Phys., 54, 798, 1929.

расстояния между двумя точками, который теперь имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Подобная форма интервала характерна для геометрии кривого, в данном случае четырёхмерного мира Лобачевского-Римана, а не плоского псевдоэвклидова пространства.

Заметим, что в галилеевой системе координат при $x_4 = ict$ коэффициенты $g_{\mu\nu}$ образуют единичную матрицу.

Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ становятся отличными от единичной матрицы, во-первых, когда галилеева система координат начинает двигаться с ускорением, благодаря чему возникают так называемые «силы инерции» и, во-вторых, при наличии гравитационного поля. Эти обстоятельства привели к появлению кинематического направления в развитии общей теории относительности, сводящегося к попыткам отождествить гравитационные силы с «силами инерции» (принцип эквивалентности). Однако это направление оказалось бесплодным.

В самом деле, в первом случае тензор Римана-Кристоффеля, т. е. тензор четвёртого ранга, составленный определённым образом из первых и вторых производных коэффициентов $g_{\mu\nu}$, обращается в нуль $R_{\mu\nu\sigma\lambda} = 0$, благодаря чему путём простого преобразования координат мы можем во всех точках пространства уничтожить «силы инерции» и перейти к галилеевой метрике.

Во втором случае (т. е. при наличии гравитационного поля) тензор Римана-Кристоффеля будет отличным от нуля. Всё же и в этом последнем случае для рассматриваемой точки можно найти такую систему координат, в которой тензор $g_{\mu\nu}$ образует единичную матрицу, и первые производные от него обращаются в нуль, правда, только в малой области в окрестности точки. Вторые же производные в общем случае будут отличными от нуля и только в частном случае однородного в данной области гравитационного поля обращаются в нуль.

Таким образом, путём выбора любой другой системы координат нельзя скомпенсировать реальные гравита-

ционные силы, и в этом заключается их принципиальное отличие от фиктивных «сил инерции». Следовательно, принцип эквивалентности гравитации и поля ускорения имеет место лишь для малой области, в случае, когда гравитационное поле является однородным. Попытки распространить его на общий случай являются заведомо ошибочными.

6) Уравнения поля, вообще говоря, не инвариантны относительно конформных преобразований, сохраняющих неизменным уравнение светового конуса: $c^2t^2 - r^2 = 0$, при которых, однако, величина интервала не сохраняется, но умножается на некоторую функцию координат. Однако, как было показано Бэтменом и Кэннингемом, уравнения электродинамики Максвелла конформно инвариантны, что тесно связано с отсутствием массы покоя у электромагнитных волн ($m = 0$) или сопоставленных им согласно квантовой теории частиц—фотонов, и тем самым с отсутствием какой-либо характерной длины типа комптоновской длины волны $\Delta_0 = \frac{h}{mc}$ *). Однако, как показал Паули, например, квантовые дираковские уравнения для электрона при исчезающей массе (что, вероятно, справедливо для нейтрино) всё же не будут конформно инвариантны.

Предыдущие преобразования относились непосредственно к координатам. Рассмотрим теперь два важных типа преобразований, которые могут испытывать сами вещественные или комплексные волновые функции, характеризующие поле.

7) Исходя из наглядной возможности выбрать произвольно начало отсчёта электромагнитных потенциалов, иначе говоря, возможности добавлять к потенциалам члены, не меняющие напряжённостей поля, мы приходим к требованию инвариантности уравнений электромагнитного поля и уравнений всех других частиц, взаимодействующих с этим полем, относительно «к а л и б р о в о ч н ы х» преобразований потенциалов (преобразований калиб-

*) Н. Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), 8, 228, 1909; E. Bessel-Hagen, Math. Ann., 84, 258, 1921.

ровки 2-го рода по номенклатуре Паули), имеющих вид

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \text{ или } \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f;$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

где f — скалярная функция всех четырёх координат. Поэтому сами электромагнитные потенциалы не могут входить явно в уравнения Максвелла, содержащие в согласии с этим лишь производные от потенциалов. (Более подробно см. § 24.)

8) Хотя электромагнитные потенциалы входят явно в уравнения Шредингера, Дирака и в другие квантовые уравнения полей и частиц, но изменение их калибровки компенсируется изменением фазы у волновых функций.

Наглядная возможность изменить фазу квантовых волновых функций подсказывает требование инвариантности всех квантовых, так называемых волновых уравнений (в том числе и нерелятивистского уравнения Шредингера) относительно фазового или «калибровочного» преобразования волновых функций (калибровочного преобразования 1-го рода по номенклатуре Паули):

$$\psi' = \psi e^{\frac{2\pi i e}{hc} f}.$$

Действительно, непосредственно наблюдаемыми величинами являются билинейные комбинации квантовых, вообще говоря, комплексных волновых функций типа плотности вероятности $\psi^* \psi$, которые не изменяются при подобном преобразовании.

С другой стороны, квантовые вещественные волновые функции и напряжённости поля сами по себе являются физически измеримыми величинами. Таким образом непосредственно измеримыми являются величины инвариантные при калибровочных преобразованиях. В классической теории поля все величины вещественны, и все они являются, конечно, измеримыми.

Квантовая теория заряженных частиц отличается от классической теории лишь инвариантностью относительно калибровочных преобразований 1-го рода, т. е. фазовых преобразований волновых функций (п. 8); в квантовой теории нейтральных частиц это преобразование, очевидно, не имеет места. При пренебрежении влиянием тяготения, т. е. вне рамок общей теории относительности, когда можно ограничиться инерциальными системами отсчёта, отпадают преобразования (п. 5). Особое положение конформных преобразований (п. 6) уже было отмечено. Инвариантность, или, точнее, ковариантность уравнений относительно всех остальных преобразований является обязательной. В нерелятивистском приближении, пригодном при описании медленных движений и процессов с малым балансом энергии отпадает, очевидно, группа лорентцовых преобразований (п. 3).

Заметим теперь, что преобразования Лорентца (п. 3) так же, как трансформации переноса (п. 1) и трёхмерных вращений (п. 2), а также преобразования координат типов пп. 5, 6 и калибровочные преобразования (пп. 7, 8), образуют группы непрерывных преобразований, т. е. два последовательных преобразования могут быть заменены одним преобразованием того же типа. Например, два преобразования вращения эквивалентны одному вращению и т. д. В каждой группе имеется единичное (тождественное), а также обратное преобразование.

С другой стороны, преобразования инверсии сами по себе, очевидно, группы не образуют, но вместе с собственно ортогональными преобразованиями (п. 3) или (п. 2) образуют более общую группу вещественных ортогональных преобразований, для которых определитель, составленный из коэффициентов a_{rs} , равен ± 1 , тогда как в случае чистых вращений определитель равен $+1$.

Весьма важно подчеркнуть, что инвариантности уравнений, описывающих какое-либо поле, и, следовательно, инвариантности соответствующего лагранжиана или вариационного интеграла действия относительно каждой непрерывной группы преобразований соответствует свой особый

закон сохранения (теорема Нетер)*). Например, из инвариантности всех уравнений относительно переноса начала трёх пространственных координат и отсчёта времени (п. 1) вытекают универсальные законы сохранения трёх компонент количества движения и энергии (всего четыре закона). Инвариантность всех уравнений относительно вращений в пространстве (п. 2) приводит к универсальному закону сохранения момента количества движения (три закона сохранения). Инвариантность всех уравнений относительно преобразований Лорентца, т. е. вращений в плоскостях (xt) , (yt) , (zt) , приводит к обобщённому закону сохранения движения центра тяжести (три закона сохранения). Указанные десять фундаментальных законов сохранения соответствуют универсальной инвариантности относительно непрерывных, в частности бесконечно малых, преобразований конечной группы, обозначаемой через G_{10} , зависящей всего от $(4 + 3 + 3 = 10)$ десяти параметров.

Специальная инвариантность уравнений Максвелла относительно конформных преобразований приводит к новым соотношениям типа законов сохранения, не имеющим, впрочем, какого-либо обычного непосредственного физического смысла, что ещё раз показывает исключительное положение этой группы**). Относительно дока-

*) E. Noether, Goettingen Nachricht, 235, 1918; E. Bessel-Hagen, Math. Ann., 84, 258, 1921 (применения к классической электродинамике Максвелла); М. А. Марков, Phys. Zs. der Sowjetunion, 10, 773, 1936 (применения к теории электрона Дирака).

***) Отметим, что общая группа преобразований координат G_p является *конечной* и зависящей от 10 параметров ($p=10$). С другой стороны, например, при калибровочном преобразовании потенциалов (п. 7) электромагнитного поля мы имеем *бесконечную* группу $G_{\infty\rho} = G_{\infty 1}$, определяемую некоторой функцией калибровки ($\rho=1$). Точно так же произвольные точечные преобразования общей теории относительности (п. 5) образуют бесконечную группу, определённую четырьмя произвольными функциями: $G_{\infty 4}$ ($\rho=4$) (связанными с преобразованиями четырёх координат). В случае инвариантности относительно бесконечно малых преобразований какой-либо бесконечной группы G_∞ имеет место теорема Гильберта, утверждающая наличие ρ тождественных соотношений между лагранжевыми вариационными производными соответствующей функции действия и их

зательства теоремы Нетер в частных интересующих нас случаях смещения и вращения координат см. ниже § 30.

Перечислим теперь кратко различные типы волновых функций, вообще говоря, комплексных, способных описывать волновые свойства элементарных частиц и служить тем «строительным материалом», из которого при помощи указанных требований инвариантности можно конструировать теорию тех или иных полей.

1) Скалярная функция (или инвариант, т. е. тензор ранга 0). Скаляр ψ не изменяется при всевозможных преобразованиях.

2) Четырёхмерный вектор с четырьмя компонентами $\psi_\mu = A_1, A_2, A_3, A_4$ (тензор ранга 1).

3) Тензор 2-го ранга, который, в частности, можно получить, беря произведение двух векторов.

В теории могут играть роль как антисимметричные тензоры 2-го ранга, имеющие шесть составляющих (шестивектор):

$$H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu},$$

например тензор электромагнитного поля, образованный из производных четырёхмерного векторного потенциала, так и симметричные тензоры, например метрический тензор

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu},$$

имеющий десять различных компонент, играющих роль гравитационных потенциалов.

Тензоры высшего ранга также можно использовать для описания тех или иных полей, однако до сих пор особой надобности в этом не встретилось.

4) В качестве волновых функций тех или иных полей можно использовать также волновые функции, «дуальные» к скаляру (псевдоскаляр) и к вектору (псевдовектор). Более подробно см. § 46.

производными. Например, ввиду наличия четырёх тождеств в общей теории относительности из десяти гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$ остаётся всего шесть независимых (D. Hilbert, Math. Ann., 92, 1, 1924; Gesamm. Werke, Bd. III).

5) Для описания волновых свойств частиц с полуполым спином (например, электрона, протона, нейтрона) необходимо применить спиноры или тензоры ранга $1/2$ (употребляются также термины: семивекторы, полу-векторы). Обычные тензоры и спиноры можно трактовать совместно как спинтензоры или согласно Бельинфанте—ундоры *). В настоящее время производится разработка теории волновых функций, являющихся тензорами (или спинорами, см. стр. 128) высшего ранга и связанных, как выясняется, с частицами высшего **) спина.

в) Основные уравнения классической электродинамики

Получив основные сведения об инвариантности и характере величин, из которых строится теория того или иного поля, перейдем к анализу классической электродинамики, т. е. некантовой релятивистской теории электромагнитного поля и заряженных частиц. Уравнения поля можно получить из вариационного принципа, если известна соответствующая лагранжева функция.

В данном параграфе координаты электрона будем обозначать через

$$\xi_{\mu} = \xi, \text{ и } ct.$$

Эти координаты зависят от собственного времени s (равного в покоящейся системе координат τ), производную по которому будем обозначать точкой, т. е. $\dot{\xi}_{\mu} = \frac{d\xi_{\mu}}{ds}$. Для координат же электромагнитного поля напишем $x_{\mu} = r, \text{ и } ct$

В согласии с многовременным формализмом теории относительности частицы и поле будем характеризовать своими отдельными координатами времени.

При этом мы отвлекаемся сейчас от учёта собственного магнетизма частиц, который к тому же по

*) Э. К а р т а н, Теория спиноров, ИЛ, 1947; F. B e l i n f a n t e, Theory of heavy quanta, Hague, 1940.

**) См., например, И. Г е л ь ф а н д и А. Я г л о м, ЖЭТФ, 18, 703, 1948.

существо имеет квантовую природу, а под зарядами для определённости будем понимать электроны *).

Тензор электромагнитного поля $H_{\mu\nu}$ связан с четырьмя составляющими четырёхмерного вектора, являющегося потенциалом $A_\mu = A, i\varphi$, соотношением «вихря»

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (23,2)$$

причём

$$\begin{pmatrix} H_{23} & H_{31} & H_{12} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_x & H_y & H_z \\ iE_x & iE_y & iE_z \end{pmatrix}, \quad (23,3)$$

где E и H являются векторами электрического и магнитного поля. Таким образом основными величинами классической электродинамики, на базе которых строится вся теория поля, являются скалярный потенциал φ и вектор-потенциал A .

Во главу угла всей классической электродинамики, как и в случае других полей, целесообразнее всего поставить вариационный принцип или принцип наименьшего действия для соответствующей функции (интеграла) действия S , или же для непосредственно связанной с ней лагранжевой функции L . Равенство нулю вариации функции действия: $\delta S = 0$, даст искомые уравнения как эйлеровы уравнения вариационной задачи.

Функция действия S состоит из трёх частей:

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \quad (23,4)$$

Часть S_1 является функцией координат и определяет уравнение свободного движения электрона; часть S_2 является функцией потенциалов A_μ и приводит к уравнению свободного электромагнитного поля в отсутствии источников; последняя же смешанная часть S_3 , являющаяся функцией величин, характеризующих как поле, так и частицу, будет описывать взаимодействие

*) См. ниже § 47, где трактуется близкий вопрос о связи нуклонов с векторным мезонным полем при наличии у частиц квазиэлектрических зарядов и квазимагнитных моментов.

между электроном и электромагнитным полем. Функция действия S , как и её три части в отдельности, должна быть инвариантом относительно всех перечисленных выше допустимых преобразований четырёх координат и волновых функций, т. е. потенциалов поля.

Важно подчеркнуть, что при заданных трансформационных свойствах величин, из которых строится S , при условии ограничения низшей возможной степенью производных и при условии линейности уравнений поля, функции действия S_1, S_2, S_3 , а тем самым дифференциальные уравнения поля получаются однозначно, и окончательное выражение S зависит только лишь от произвольных констант, на которые могут быть умножены отдельные части функции действия. При этом константа, входящая в S_1 , есть по существу масса покоя частицы m , значение которой берётся из опыта; константа, входящая в S_2 , есть множитель нормировки, определяющий выбор единиц, в данном случае гауссовых. Наконец, константа в S_3 есть коэффициент связи заряженной частицы с полем или электрический заряд (в более общем случае в S_3 входит также магнитный момент, определяющий связь «магнитной» частицы с полем).

Функция действия для свободной частицы будет иметь вид интеграла, взятого вдоль мировой линии между какими-либо двумя точками четырёхмерного мира:

$$S_1 = -mc^2 \int ds, \quad (23,5)$$

так как интервал ds есть единственный инвариант, который можно образовать из дифференциалов координат точечной частицы. Вместо этого можно также для удобства написать

$$S_1 = -mc \int \sqrt{-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} ds,$$

учитывая, что инвариант $(\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu)$, являющийся квадратом четырёхмерной скорости, равен, как будет показано ниже, $-c^2$.

Принимая во внимание, что

$$-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -\dot{\xi}_4^2 - \dot{\xi}_n \dot{\xi}_n = \left(\frac{cd\tau}{ds} \right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

где $v = \frac{d\mathfrak{s}}{d\tau}$ равняется трёхмерной скорости движения частицы, можем положить

$$S_1 = \int L_1 d\tau.$$

Определённая подобным образом функция Лагранжа L_1 в случае свободной частицы равна известному из теории относительности выражению

$$L_1 = mc^2 - mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (23,6)$$

причём в последнем выражении мы добавили постоянный член mc^2 , который не меняет уравнений движения. В нерелятивистском приближении при малых скоростях $v \ll c$ лагранжиан принимает известный из классической ньютоновской механики вид

$$L_1 = \frac{mv^2}{2}, \quad (23,7)$$

что и оправдывает выбор констант в лагранжиане.

Перейдём к смешанной части S_3 . Единственный допустимый инвариант, из которого можно образовать функцию действия S_3 , имеет вид

$$S_3 = \frac{e}{c} \int ds \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_\mu (A_\mu + A_\mu^i) (dx). \quad (23,8)$$

Здесь четырёхмерный объём $(dx) = (d\mathbf{r}) dt = dx dy dz dt$, A_μ и A_μ^i являются соответственно потенциалами, создаваемыми самим электроном и внешним полем. Нетрудно усмотреть, что этот инвариант образован по правилу, которое неоднократно будет использовано в дальнейшем: вектор частицы (т. е. скорость $\dot{\xi}_\mu$) умножается на вектор поля $(A_\mu + A_\mu^i)$ *).

*) При учёте собственного магнетизма частицы следовало бы добавить сюда ещё член, равный произведению тензора магнитного и электрического момента частицы $\mu_{\alpha\beta}$ на тензор поля $H_{\alpha\beta}$ (см. § 47), т. е. $\frac{1}{2} \mu_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}$.

Инвариантная величина ρ , имеющая характер плотности, может быть представлена в виде*)

$$\rho(x - \xi) = \frac{c}{(2\pi)^4} \int D(\mathbf{k}, k_4) e^{i\mathbf{k}(r - \xi) - ic k_4(t - \tau)} (d\mathbf{k}) dk_4,$$

где форм-фактор D должен являться инвариантной функцией компонент вектора $k_\nu = \mathbf{k}, k_4$, например функцией четырёхмерного инварианта-квадрата длины: $k^2 - k_4^2$; $(d\mathbf{k}) = (d\mathbf{k}) dk_4$.

В частности, для точечного электрона следует положить $D = 1$. В этом случае

$$\rho = \delta(\mathbf{r} - \xi) \delta(t - \tau). \quad (23,9)$$

Принимая во внимание, что $\dot{\xi}_4 = ic\tau$, $\dot{\xi} = \mathbf{v}\tau$ (\mathbf{v} — трёхмерная скорость), выражение S_3 для точечного электрона можно привести к виду

$$S_3 = e \int \left[\frac{v}{c} (A + A^i) - \varphi - \varphi^i \right] d\tau, \quad (23,8a)$$

из которого легко будет найти силу Лорентца.

Наконец, часть функции действия S_2 , относящаяся к самому полю, будет равна

$$S_2 = \int L_0(dx), \quad (23,10)$$

где L_0 является инвариантной функцией полей $H_{\mu\nu}$.

В частности, к интересующим нас сейчас уравнениям Максвелла-Лорентца электромагнитного поля (т. е. к уравнениям первого порядка и линейным относи-

*) Мы ввели мнимую четвёртую координату лишь для определения полей, чтобы избавиться здесь от необходимости одновременного применения ко- и контравариантных составляющих, различие между которыми несущественно при отсутствии тяготения, т. е. вне рамок общей теории относительности. Если же время входит в элемент четырёхмерного объёма или в качестве аргумента для плотности зарядов, его проще оставить действительным.

тельно $H_{\mu\nu}$) приводит только инвариант Лармора, равный *)

$$L_0 = I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2). \quad (23,11)$$

Другие основные инвариантные комбинации, составленные из функций поля, приводят или к нелинейным уравнениям (второй основной инвариант поля: $I_2 = (E \cdot H)^2$ **) или к уравнениям, зависящим явно от потенциалов, т. е. не удовлетворяющим требованию калибровочной инвариантности (третий основной инвариант поля $I_3 = \varphi^2 - A^2 = -A_\mu A_\mu$). На этом вопросе мы остановимся более подробно в других параграфах (см. §§ 32, 33 и 47).

При варьировании функции действия по собственному времени, что приведёт к уравнению движения частицы в электромагнитном поле, мы можем отбросить S_2 , подинтегральное выражение которой не зависит от собственного времени s .

*) Так как нас сейчас не интересуют дифференциальные уравнения, описывающие свободные внешние поля $H_{\mu\nu}^i$, то мы не включаем в лагранжиан L_0 внешних полей. В противном случае следовало бы написать, например, вместо L_0

$$L'_0 = -\frac{1}{16\pi} (H_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^i) (H_{\mu\nu} + H_{\mu\nu}^i).$$

Внешние поля были нами введены лишь в смешанное выражение функции действия для того, чтобы определить воздействие внешнего поля на движение электрона.

**) Инвариант I_2 можно написать в виде

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta} H_{\gamma\delta} \right)^2,$$

где $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — единичный антисимметричный псевдотензор четвёртого ранга, с помощью которого данному антисимметричному тензору $H_{\alpha\beta}$ сопоставляется дуальный тензор $\tilde{H}_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\alpha\beta}$. Тогда произведение дуального тензора на основной даст псевдоскаляр: $\tilde{H}_{\gamma\delta} H_{\gamma\delta}$ (произведение полярного вектора E на аксиальный H), квадрат которого будет скаляром (инвариантом). Более подробно см. § 46.

Таким образом для этой задачи функция действия принимает вид

$$S' = \int L' ds, \quad (23,12)$$

где лагранжиан

$$L' = -mc \sqrt{-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} + \frac{e}{c} \int \rho(x - \xi) [\dot{\xi}_\mu (A_\mu + A_\mu^i)](dx). \quad (23,13)$$

Эйлеровское уравнение искомой вариационной задачи $\delta S' = 0$ при условии исчезновения вариаций на обоих пределах $(\delta \xi_\nu)_1 = (\delta \xi_\nu)_2 = 0$ даёт

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} - \frac{d}{ds} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = 0. \quad (23,14)$$

Из (23,13) следует

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = \frac{mc \dot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho}} + \frac{e}{c} \int \rho(x - \xi) (A_\mu + A_\mu^i)(dx),$$

где

$$\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho = \dot{\xi}_n \dot{\xi}_n - c^2 \tau^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} &= \frac{mc \ddot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho}} + \frac{mc \dot{\xi}_\mu (\ddot{\xi}_\sigma \dot{\xi}_\sigma)}{(-\dot{\xi}_\rho \dot{\xi}_\rho)^{3/2}} + \\ &+ \frac{e}{c} \int \frac{\partial \rho(x - \xi)}{\partial \xi_\nu} \dot{\xi}_\nu (A_\mu + A_\mu^i)(dx). \end{aligned}$$

Учитывая далее равенство

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{\xi}_\mu} = \frac{e}{c} \int \frac{\partial \rho(x - \xi)}{\partial \xi_\mu} \dot{\xi}_\nu (A_\nu + A_\nu^i)(dx),$$

а также соотношение

$$\int \frac{\partial \rho(x - \xi)}{\partial \xi_\mu} f(x)(dx) = \int \rho(x - \xi) \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(dx), \quad (23,15)$$

получим следующее уравнение движения частицы с массой покоя m :

$$\frac{m\ddot{\xi}_\mu}{\sqrt{-\dot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_\sigma}} + \frac{mc\dot{\xi}_\mu(\ddot{\xi}_\sigma\dot{\xi}_\sigma)}{(-\dot{\xi}_\rho\dot{\xi}_\rho)^{3/2}} = F_\mu + F_\mu^i. \quad (23,16)$$

Здесь так называемая сила самодействия (т. е. сила обратного действия поля на частицу) или сила взаимодействия «элементов» частицы друг с другом равняется

$$F_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu \int \rho(\xi - x) H_{\mu\nu}(x) (dx). \quad (23,17)$$

В частности, для точечного электрона имеем выражение

$$F_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}(\xi). \quad (23,18)$$

Точно так же находим, что сила, действующая на частицу со стороны внешнего поля, имеет вид, точно совпадающий с известным выражением лорентцовой силы:

$$F_\mu^i = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}^i(\xi). \quad (23,19)$$

Поля $H_{\mu\nu}$ и $H_{\mu\nu}^i$ являются антисимметрическими тензорами. Поэтому они ортогональны к симметрическому произведению $\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu$.

В самом деле,

$$\dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \dot{\xi}_\nu\dot{\xi}_\mu H_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \dot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\nu (H_{\mu\nu} + H_{\nu\mu}) = 0.$$

Отсюда следует, что силы F_μ и F_μ^i должны быть ортогональными к вектору скорости $\dot{\xi}_\mu$:

$$\dot{\xi}_\mu F_\mu = \dot{\xi}_\mu F_\mu^i = 0.$$

Учитывая последние равенства, находим из (23,16) ортогональность четырёхмерных скоростей и ускорений

$$\ddot{\xi}_\mu\dot{\xi}_\mu = 0. \quad (23,20)$$

Иными словами, квадрат четырёхмерной скорости должен оставаться величиной постоянной:

$$\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = \dot{\xi}_n \dot{\xi}_n - c^2 \dot{\tau}^2 = \text{const.} \quad (23,21)$$

Постоянная величина может быть найдена из условия, что для неподвижного электрона $\dot{\xi}_n = 0$, $\dot{\tau} = 1$, т. е.

$$\text{const} = -c^2.$$

Поэтому трансляционное уравнение движения заряженной частицы принимает окончательно вид

$$m \ddot{\xi}_\mu = F_\mu^i + F_\mu^* \quad (23,22)$$

Перейдём теперь к выводу уравнений электромагнитного поля путём варьирования функции действия S по электромагнитным потенциалам. Мы можем отбросить часть S_1 , не зависящую от потенциалов.

Тогда, очевидно, имеем

$$S'' = \int L(dx), \quad (23,23)$$

где лагранжиан

$$L = L_0 + \frac{e}{c} \int \rho(x - \xi) [\dot{\xi}_\mu (A_\mu + A_\mu^i)] ds. \quad (23,24)$$

Из уравнений Эйлера вариационного принципа $\delta S'' = 0$ при условии исчезновения вариаций (δA_ν^i) на границах получим

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \quad (23,25)$$

Здесь

$$A_{\mu,\nu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Обозначая тензор моментов поля (смещений) через $D_{\mu,\nu}$:

$$D_{\mu,\nu} = 4\pi \frac{\partial L_0}{\partial A_{\mu,\nu}}, \quad (23,26)$$

*) Более подробно вопрос о силе самодействия F_μ будет рассмотрен ниже (см. §§ 31 и 34).

находим общие дифференциальные уравнения для определения полей

$$\frac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds. \quad (23,27)$$

В частности, согласно (23,11) для максвелловского поля

$$D_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}. \quad (23,28)$$

Поэтому уравнения электромагнитного поля Максвелла-Лорентца окончательно принимают вид

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds, \quad (23,29)$$

где в правой части стоит выражение плотности четырёхмерного тока.

Для точечного электрона имеем:

$$\rho(x - \xi) = \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}) \delta(t - \tau). \quad (23,30)$$

Подставляя (23,30) в (23,29) и интегрируя по $\delta(t - \tau)$, с помощью соотношения (6,5) получим

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c} \frac{d\tilde{\xi}_\mu}{d\tau} \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi})$$

(первая группа уравнений Максвелла-Лорентца в четырёхмерном виде) при условии, что $\tau = t$.

Для определения тензора $H_{\mu\nu}$ имеем уравнение (23,2), которое можно представить в виде

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \quad (23,31)$$

(вторая группа уравнений Максвелла, сводящая к исчезновению «цикла» антисимметрического тензора поля *),

*) При помощи символа $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (см. § 46) уравнение (23,31) можно записать в виде

$$\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = 0.$$

откуда, переходя к векторной форме, запишем первую группу уравнений Максвелла при наличии точечного источника:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi e}{c} \mathbf{v} \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi e \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (23,32)$$

где \mathbf{v} является трёхмерной скоростью движения частицы, т. е. $\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}$. К этим уравнениям мы должны добавить уравнение (23,2), связывающее компоненты поля с потенциалами, или эквивалентное ему уравнение (23,31).

В трёхмерных обозначениях уравнение (23,2) имеет вид

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (23,33)$$

Вместо последних уравнений, являющихся определением напряжённостей поля, можно написать тождественно совпадающую с ними вторую группу уравнений Максвелла-Лорентца [см. (23,31)]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (23,34)$$

§ 24. Интегрирование уравнений Максвелла-Лорентца

При интегрировании уравнений Максвелла-Лорентца мы должны прежде всего учесть так называемую калибровочную инвариантность, которая возникает в связи с неоднозначным выбором потенциалов при заданных электромагнитных полях (см. условие 7 в § 23).

В самом деле, вводя новые потенциалы

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad (24,1)$$

где f — произвольная скалярная функция калибровки, мы видим, что электромагнитные поля $H_{\mu\nu}$ будут связаны одинаковым соотношением как с потенциалами A_μ ,

так и с A'_μ :

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (24,2)$$

Уравнения Максвелла-Лорентца (23,29), а также уравнение движения электрона (23,22) не содержат в явном виде потенциалов и поэтому, как уже указывалось выше, не должны зависеть от выбора калибровочной функции f *).

Неопределённость выбора значений для потенциалов приводит к тому, что мы не можем однозначно определить A_μ , не наложив дополнительного условия на калибровочную функцию f . Как правило, калибровочная функция f выбирается таким образом, чтобы потенциалы удовлетворяли дополнительному условию Лорентца:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0 \quad (24,3)$$

(или в трёхмерном виде: $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$). Однако калибровка Лорентца не является единственной возможной, и, в частности, для электромагнитных (световых) волн накладывается другая калибровка, соответствующая наличию одних лишь поперечных колебаний

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (24,4)$$

Перейдём теперь к решению системы уравнений Максвелла-Лорентца (23,29) при дополнительном условии Лорентца (24,3).

*) При калибровочном преобразовании к смешанной функции действия S_3 добавляется величина

$$S'_3 = \int (dx) \int \rho(x-\xi) \xi_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} ds,$$

которая может быть отброшена, так как она с помощью равенства (23,15) приводится к полному дифференциалу:

$$S'_3 = \int (dx) f \int \frac{d\rho(x-\xi)}{ds} ds,$$

и поэтому не может влиять на уравнения движения.

Подставляя вместо $H_{\mu\nu}$ значение (23,2), получим уравнение:

$$\square A_{\mu} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_{\mu} = -\frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_{\mu} ds. \quad (24,5)$$

Решая уравнения Даламбера, находим согласно (17,20)

$$A_{\mu} = e \int \dot{\xi}_{\mu} ds \int \rho(x' - \xi) \delta(R^2 - c^2 T^2) \left(1 + \varepsilon \frac{T}{|T|} \right) (dx'),$$

где

$$R = r - r', \quad T = t - t', \quad (dx') = (dr') dt', \quad (24,6)$$

а величина ε в зависимости от того, берём ли мы запаздывающие, опережающие или полусумму тех и других потенциалов, будет соответственно равна $+1$, -1 или 0 .

Для точечного электрона [см. соотношение (23,9)] решение с запаздывающими потенциалами приводит к выражению

$$A_{\mu} = e \int \dot{\xi}_{\mu} \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{cR'} ds, \quad (24,7)$$

где

$$R' = r(t) - \xi(\tau).$$

Вводя трёхмерную скорость $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{s}}{d\tau}$, получим для скалярного потенциала $\varphi = \frac{A_4}{ic}$ и вектор-потенциала \mathbf{A} следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi &= e \int \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'} d\tau, \\ \mathbf{A} &= \frac{e}{c} \int \mathbf{v}(\tau) \frac{\delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'} d\tau. \end{aligned} \quad (24,8)$$

§ 25. Потенциалы Льенара-Вихерта и формула Брейта

При помощи соотношений (24,8) для потенциалов точечного электрона весьма просто получаются выражения для потенциалов Льенара-Вихерта, а также классический вид формулы Брейта.

Для того чтобы получить потенциалы Льенара-Вихерта для точечного заряда, мы должны взять интеграл (24,8) по времени τ , учитывая, что R' зависит от τ без всяких дополнительных предположений о распределении плотности заряда электронов в пространстве.

Тогда согласно равенству (6,5)

$$\varphi = \frac{e}{R' \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\tau + \frac{R'}{c} \right)} = \frac{e}{R' \left(1 - \frac{v_{R'}}{c} \right)}. \quad (25,1)$$

При выводе последней формулы мы учли, что

$$\frac{\partial R'}{\partial \tau} = - \left(\frac{d\mathbf{s}}{d\tau} \cdot \mathbf{R}'^0 \right) = -v_{R'}. \quad (25,2)$$

Здесь $\mathbf{R}'^0 = \frac{\mathbf{R}'}{R'}$ является единичным вектором, а для определения времени τ служит уравнение $\tau - t + \frac{R'}{c} = 0$.

Аналогичным образом для вектор-потенциала \mathbf{A} находим

$$\mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}(\tau)}{cR' \left(1 - \frac{v_{R'}}{c} \right)}. \quad (25,3)$$

Выражения (25,1) и (25,3), известные под названием потенциалов Льенара-Вихерта, обычно получаются с помощью предельного перехода от электрона, обладающего плотностью, распределённой в пространстве, к точечной частице, что в нашем выводе автоматически учитывается при помощи формализма δ -функции.

Определим теперь энергию взаимодействия между двумя движущимися точечными зарядами, которые будем обозначать соответственно индексами 1 и 2.

Как известно, эта энергия взаимодействия определяется выражением [см. (23,8а)]

$$V_{12} = e_1 \varphi_2 - \frac{e_1}{c} (\mathbf{v}_1 \mathbf{A}_2), \quad (25,4)$$

где e_1 и \mathbf{v}_1 являются зарядом и скоростью первого электрона, а φ_2 и \mathbf{A}_2 — электромагнитными потенциалами, создаваемыми вторым электроном в той точке, где находится первый электрон.

Если мы подставим сюда вместо φ_2 и \mathbf{A}_2 потенциалы Льенара-Вихерта, то увидим, что V_{12} будет зависеть от двух различных времён t и $t - \frac{R'}{c}$, где R' — расстояние между двумя электронами. Мы будем определять приближённое значение для энергии взаимодействия V_{12} , отнесённой к одному и тому же моменту времени t , с точностью до величин порядка $\frac{v^2}{c^2}$.

Для этого разложим δ -функцию по величинам $\frac{R'}{c}$:

$$\begin{aligned} \delta\left(\tau - t + \frac{R'}{c}\right) &= \\ &= \delta(\tau - t) + \frac{R'}{c} \frac{d}{d\tau} \delta(\tau - t) + \frac{R'^2}{2c^2} \frac{d^2}{d\tau^2} \delta(\tau - t) + \dots \end{aligned} \quad (25,5)$$

Ограничиваясь при вычислении φ_2 тремя членами разложения, а при вычислении \mathbf{A}_2 одним первым членом, получим, учитывая правила интегрирования с δ -функцией:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \dots, \\ \mathbf{A}_2 &= \frac{e_2 \mathbf{v}_2}{cR}, \end{aligned} \quad (25,6)$$

где R — расстояние между двумя электронами, отнесённое благодаря интегрированию по δ -функции и её производным к одному и тому же моменту времени t .

Совершим калибровочное преобразование к новым потенциалам. Выбрав величину f равной $\frac{e_2}{2c} \frac{\partial R}{\partial t}$ *), найдём

$$\varphi'_2 = \varphi_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e_2}{R}, \quad (25,7)$$

$$A'_2 = A_2 + \nabla f = \frac{e_2 \mathbf{v}_2}{cR} + \frac{e_2}{2c} \nabla \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (25,8)$$

Учитывая соотношение (25,2), имеем

$$\nabla \frac{\partial R}{\partial t} = -\nabla \left(\mathbf{v}_2 \frac{R}{R} \right) = \frac{R(\mathbf{v}_2 R) - \mathbf{v}_2 R^2}{R^3}, \quad (25,9)$$

откуда

$$A'_2 = \frac{e_2 [\mathbf{v}_2 + R^0 (\mathbf{v}_2 R^0)]}{2cR}. \quad (25,10)$$

Подставляя (25,10) и (25,7) в равенство (25,4), получим важную формулу, определяющую взаимодействие между двумя движущимися электронами с точностью до величин второго порядка относительно v/c :

$$V_{12} = \frac{e_1 e_2}{R} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} [(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 R^0) (\mathbf{v}_2 R^0)] \right\}. \quad (25,11)$$

Это выражение было найдено впервые Брейтом. Оно симметрично относительно обоих электронов и учитывает запаздывающее действие, несмотря на то, что все величины, входящие в формулу, относятся к одному и тому же моменту времени t . Соответственное обобщение формулы Брейта было получено также в квантовой механике. В случае взаимодействия электронов, которые описываются квантовыми спинорными уравнениями Дирака, следует для перехода к квантовой формуле Брейта заменить скорости \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 соответственно на дираковские матричные операторы $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$, а также трактовать всё выражение как оператор, действующий на волновые ψ -функции. Нетрудно получить квантовое обобщение

*) См., например, Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948, стр. 193.

формулы Брейта также для случая взаимодействия заряженных частиц, описываемых скалярным, векторным и другими уравнениями, что должно иметь применение в квантовой теории мезонов, повидимому, характеризуемых этими уравнениями.

Формула Брейта была с успехом применена в квантовой теории атома, в частности, при рассмотрении тонкой структуры спектра гелия и ионизированного лития, обладающих двумя электронами, а также при рассмотрении рассеяния электронов. Заметим, что в квантовой механике для приближённого учёта взаимодействия двух зарядов наряду с формулой Брейта применяется формула Мёллера, также учитывающая запаздывающее действие и представляющая собою инвариантное относительно скоростей выражение, являющееся результатом разложения по степеням постоянной тонкой структуры *).

§ 26. Поле точечного заряда, движущегося равномерно и прямолинейно

Пусть вдоль оси z движется точечный заряд с постоянной скоростью v . Тогда для плотности заряда ρ и тока j_z мы имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \rho &= e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \\ j_z &= \beta v. \end{aligned} \tag{26,1}$$

В этом случае волновые уравнения для определения скалярного и векторного потенциала примут вид:

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi &= -4\pi e\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z &= -4\pi e\beta\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt), \end{aligned} \tag{26.2}$$

*) См. Г. Бете, Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935, стр. 145 и 305; В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, 1940, стр. 115; М. А. Марков, ЖЭТФ, 18, 510, 1948.

где β равняется отношению скорости заряда v к скорости света c в пустоте, т. е. $\beta = \frac{v}{c}$, причём согласно теории относительности мы всегда должны иметь $\beta < 1$.

Из последних формул видно, что

$$A_z = \beta\varphi. \quad (26,3)$$

Кроме того,

$$A_x = A_y = 0.$$

Для компонент электромагнитного поля имеем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad (26,4)$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\beta E_y, \quad H_y = \beta E_x, \quad H_z = 0.$$

Здесь мы учли равенство (26,3), а также тот факт, что все компоненты полей зависят только от разности $(z - vt)$, поэтому

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\beta \frac{\partial A_z}{\partial z} \text{ и т. д.} \quad (26,5)$$

Чтобы определить скалярный потенциал φ , подставим в правую часть (26,2) разложение Фурье трёхмерной δ -функции:

$$\begin{aligned} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) &= \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int dk_1 dk_2 dx e^{i[k_1 x + k_2 y + x(z - vt)]}, \end{aligned} \quad (26,6)$$

откуда, производя деление на оператор Даламбера и выбирая решения с запаздывающими потенциалами, получим

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{e}{2\pi^2} \int e^{i[k_1 x + k_2 y + x(z - vt)]} &\left[\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + x^2 (1 - \beta^2)} + \right. \\ &\left. + \pi i \frac{x}{|x|} \delta[k_1^2 + k_2^2 + x^2 (1 - \beta^2)] \right] dk_1 dk_2 dx. \end{aligned} \quad (26,7)$$

При выборе опережающих потенциалов в последних квадратных скобках перед δ -функцией следовало бы взять знак минус.

В случае, когда $\beta < 1$, аргумент, от которого зависит δ -функция, не будет содержать особой точки, т. е. не будет обращаться в нуль, поэтому δ -функцию, стоящую в скобках, мы можем просто отбросить. Таким образом как запаздывающие, так и опережающие потенциалы приводят к одному и тому же значению для φ .

При интегрировании выражения (26,7) сделаем замену переменных

$$k_3 = \kappa \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (26,8)$$

Тогда для φ находим

$$\varphi = \frac{e}{2\pi^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \int (dk) \frac{e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}})}}{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Последнее выражение пропорционально гриновской функции уравнения Пуассона с решением, найденным нами в § 10 [см. формулу (10,11)]:

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad (26,9)$$

где

$$r = \sqrt{(1 - \beta^2)(x^2 + y^2) + (z - vt)^2}.$$

Эквипотенциальными поверхностями $r^2 = \text{const}$ здесь будут сплюснутые (вдоль оси z) эллипсоиды, исследованные впервые Хивисайдом. С помощью формул (26,4) мы можем определить также поля E и H .

Как известно, электрон, движущийся с постоянной скоростью в вакууме, не излучает энергии, так же как это имеет место тривиальным образом для покоящегося электрона. Наглядно можно представить себе, что в этом случае поле, связанное с электроном, движется равномерно вместе с ним, не «отрываясь». Это связано формально с тем обстоятельством, что при $v < c$ уравнение

Даламбера для потенциала, имеющее гиперболический вид, может быть сведено к уравнению эллиптическому, соответствующему потенциалу покоящегося заряда. Иначе говоря, с помощью преобразований Лорентца мы всегда можем выбрать такую систему координат, относительно которой равномерно и прямолинейно движущийся электрон будет покоиться и, следовательно, не должен излучать.

Вообще говоря, излучение является необратимым процессом, и поэтому оно должно быть связано с наличием членов, несимметричных относительно запаздывающих и опережающих решений. Подобным несимметричным членом является выражение с δ -функцией, стоящее в подинтегральном уравнении (26,7). Поэтому излучение должно отсутствовать, когда этот несимметричный член обращается в нуль.

§ 27. «Сверхсветовой» электрон Черенкова

Согласно теории относительности скорость движения электрона не может превосходить скорости света в вакууме ($\beta = \frac{v}{c} < 1$). Однако при движении электрона в какой-либо среде его скорость v , оставаясь меньше скорости света в вакууме, может оказаться больше фазовой скорости света в данной среде: $c' = \frac{c}{n} < c$ (n — показатель преломления среды), т. е. возможен случай, когда $\frac{c}{n} < v < c$. В этом случае электрон обгоняет поле, которое, говоря наглядно, «отрывается» от него, т. е. излучается.

Остановимся на теории этого вопроса, впервые подробно разработанной для движения электрона в диэлектрике И. Е. Таммом и И. М. Франком, показавшими, что в данном случае будет иметь место излучение *), кото-

*) И. М. Франк и И. Е. Тамм, ДАН, 14, 107, 1937. Подробная теория эффекта Черенкова дана в статье И. Е. Тамма (Ig: Тамм, Journ. of Phys. USSR, 1, 439, 1939).

рое действительно было наблюдаено ещё ранее в 1934 г. П. А. Черенковым (в лаборатории С. И. Вавилова)*). Для краткости указанное явление Черенкова разумно назвать также согласно его физическому смыслу «эффектом сверхсветового электрона». При этом наблюдалось весьма слабое видимое свечение, вызванное быстрыми электронами, двигавшимися в различных жидкостях и твёрдых телах с высоким показателем преломления (например, в циклогексане, где $n = 1,4367$). Электроны получались как из внешнего источника, так и возникали за счёт комптон- и фотоэффекта от γ -излучения радиоактивных препаратов. Большую трудность представило отделение нового свечения от различных видов люминесценции, а также наблюдение свечения крайне малой интенсивности.

Перейдём к теории эффекта Черенкова. Если точечный электрон движется в среде с показателем преломления $n = \sqrt{\epsilon}$ (ϵ — диэлектрическая постоянная) по оси z с постоянной скоростью v , то уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 4\pi \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (27,1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \rho &= e \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \\ j_z &= \frac{v}{c} \rho = \beta \rho, \quad j_x = j_y = 0. \end{aligned} \quad (27,2)$$

Векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} связаны между собою соотношением

$$\mathbf{D} = (\epsilon \mathbf{E}) = (n^2 \mathbf{E}). \quad (27,3)$$

*) С. И. Вавилов, ДАН, 2, 457, 1934, П. А. Черенков, ДАН, 2, 451, 1934. Полная сводка экспериментальных результатов П. А. Черенкова содержится в его докторской диссертации, опубликованной в Трудах Физического института АН СССР им. Лебедева, 2, № 4, 1944.

Последнее соотношение имеет место, когда показатель преломления n является величиной постоянной. В общем же случае n зависит от частоты ω . Тогда равенство (27,3) будет носить операторный характер*) и будет иметь место для отдельных компонент Фурье, т. е. для отдельных частот. Разлагая поля в интегралы Фурье:

$$\mathbf{D} = \int \mathbf{D}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{E} = \int \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \text{ и т. д.}, \quad (27,4)$$

мы раскроем смысл равенства (27,3) в виде формулы

$$(n^2 \mathbf{E}) = \int n^2 \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (27,5)$$

Отсюда для компонент Фурье имеем

$$\mathbf{D}(\omega) = n^2 \mathbf{E}(\omega). \quad (27,6)$$

Заметим, что деление на оператор, содержащий величину n^2 , является вполне законным действием так же, как и деление на линейные операторы, составленные из частных производных. В самом деле, из равенства (27,3) имеем

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{n^2} \mathbf{D} \right) = \int \frac{\mathbf{D}(\omega)}{n^2} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (27,7)$$

что находится в полном согласии с формулой (27,6).

В дальнейшем мы не будем особо оговаривать операторный характер величин, содержащих показатель преломления n .

Учитывая условие Лорентца

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$A_x = A_y = 0,$$

а также соотношение (27,1), найдём

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = - \frac{4\pi e}{n^2} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt),$$

$$A_z = \beta n^2 \varphi. \quad (27,8)$$

*) Чтобы подчеркнуть операторный характер равенства (27,3), мы заключаем величину $n^2 \mathbf{E}$ в круглые скобки, т. е. будем писать $(n^2 \mathbf{E})$.

Электромагнитные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} будут связаны со значением скалярного потенциала φ при помощи равенств

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, & E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, & E_z &= \gamma^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ H_x &= \beta n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & H_y &= -\beta n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & H_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27,9)$$

где $\gamma^2 = n^2 \beta^2 - 1$.

Подставляя в правую часть уравнений (27,8) вместо δ -функции её значение из формулы (26,6), найдём

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{1}{n^2} e^{i[k_1 x + k_2 y + x(z-vt)]} \times \\ &\times \left(\frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 x^2} + \pi i \frac{x}{|x|} \delta(k_1^2 + k_2^2 - \gamma^2 x^2) \right) \times \\ &\times dk_1 dk_2 dx. \end{aligned} \quad (27,10)$$

В нашем случае, когда электрон движется со скоростью $v > \frac{c}{n}$, величина $\gamma^2 = \beta^2 n^2 - 1$ будет больше нуля, и поэтому мы не можем отбросить в подынтегральном выражении (27,10) член, пропорциональный δ -функции, обуславливающий излучение.

При интегрировании последнего выражения мы сделаем переход к цилиндрическим координатам

$$\left(k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \psi = \arctg \frac{k_2}{k_1}, \quad x \right).$$

Тогда, интегрируя по полярному углу ψ , найдём согласно (21,6)

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{\pi} \int \frac{1}{n^2} e^{ix(z-vt)} dx \int_0^\infty k J_0(kr) \times \\ &\times \left[\frac{1}{k^2 - x^2 \gamma^2} + \pi i \frac{x}{|x|} \delta(k^2 - x^2 \gamma^2) \right] dk, \end{aligned} \quad (27,11)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

откуда при помощи соотношений (18,17) получим окончательно основную для всей теории формулу для скалярного потенциала электромагнитного поля, порождённого прямолинейно и равномерно движущимся электроном:

$$\varphi = \frac{ei}{2} \int \frac{1}{n^2} e^{ix(z-vt)} \left[\frac{x}{|x|} J_0(r\gamma|x|) + iN_0(r\gamma|x|) \right] dx. \quad (27,12)$$

Теперь мы можем найти количество энергии, которую излучает электрон в единицу времени.

Согласно теореме Умова-Пойнтинга

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int ([\mathbf{E}\mathbf{H}] dS). \quad (27,13)$$

Интегрирование произведём вдоль цилиндрической поверхности радиуса r , геометрической осью которой является ось z .

Элемент поверхности dS равняется

$$dS = r d\varphi dz \frac{r}{r}, \quad (27,14)$$

где

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = 0.$$

Принимая во внимание значения компонент поля (27,9), имеем

$$([\mathbf{E}\mathbf{H}] dS) = \beta r d\varphi dz \left(\gamma^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right) \left(n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (27,15)$$

причём согласно операторному равенству (27,5)

$$\left. \begin{aligned} \left(\gamma^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) &= -\frac{e}{2} \int \frac{\gamma^2}{n^2} e^{ix(z-vt)} \times \\ &\quad \times [|x| J_0(r\gamma|x|) + ixN_0(r\gamma|x|)] dx, \\ \left(n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) &= -\frac{ei}{2} \int \gamma e^{-ix'(z-vt)} \times \\ &\quad \times [x' J'_0(r\gamma|x'|) - i|x'| N'_0(r\gamma|x'|)] dx'. \end{aligned} \right\} \quad (27,16)$$

Подставив последние соотношения в (27,13), получим

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \pi \beta e^2 c r \int_0^{\infty} \frac{x^2}{n^2} \Upsilon^3 (N'_0 J_0 - J'_0 N_0) dx, \quad (27,17)$$

причём цилиндрические функции зависят от произведения $r\gamma x$, а штрих означает производную по этому аргументу.

Здесь принято во внимание, что подинтегральное выражение обладает азимутальной симметрией; далее, при интегрировании по переменным z и x' мы учли, что

$$\int e^{i(x-x')z} dz = 2\pi \delta(x-x').$$

Наконец, при интегрировании по величине x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ мы отбросили нечётные подинтегральные функции и заменили удвоенным интегралом в пределах от 0 до ∞ чётные функции.

Как известно, в теории бесселевых функций имеет место соотношение*)

$$N'_0(x) J_0(x) - J'_0(x) N_0(x) = \frac{2}{\pi x}. \quad (27,18)$$

Поэтому выражение (27,17) для энергии излучения принимает вид**)

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_m} \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) d\omega, \quad (27,19)$$

где вместо переменной x введена частота колебаний $\omega = xv$. Заметим, что показатель преломления с увеличением частоты ω уменьшается и для рентгеновских лучей становится меньше единицы. Поэтому верхний предел

*) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 52.

**) См. также обзорную статью И. М. Франка в «Успехах физических наук», 30, № 3—4, стр. 149, 1946; там же имеется подробный список литературы.

интеграла по ω следует определить из уравнения

$$\beta n(\omega_m) = 1. \quad (27,20)$$

Наконец, найдём уравнение для эквипотенциальных поверхностей в простейшем случае, когда $n = \text{const}$.

Преобразуем выражение (27,12) к форме

$$\varphi = -\frac{e}{n^2} \int_0^{\infty} [\sin \kappa(z - vt) J_0(r\gamma\kappa) + \cos \kappa(z - vt) N_0(r\gamma\kappa)] d\kappa. \quad (27,21)$$

Из теории бесселевых функций известно соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin \kappa \alpha J_0(\kappa \beta) d\kappa &= - \int_0^{\infty} \cos \kappa \alpha N_0(\kappa \beta) d\kappa = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}; & \alpha > \beta > 0, \\ 0 & ; \beta > \alpha > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (27,22)$$

откуда находим для искомого потенциала

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2e}{n^2 \sqrt{(vt-z)^2 - \gamma^2 r^2}}; & vt - z > \gamma r = \gamma \sqrt{x^2 + y^2}, \\ 0 & ; vt - z < \gamma r. \end{cases} \quad (27,23)$$

Вычислим, далее, значение полей и направление вектора Умова-Пойнтинга для момента времени $t = 0$. Для других значений времени t мы должны будем в найденных выражениях z заменить через $z - vt$.

В этом случае

$$\varphi = \begin{cases} \frac{2e}{n^2 \sqrt{z^2 - \gamma^2 r^2}}; & -z > \gamma r, \\ 0 & ; -z < \gamma r. \end{cases} \quad (27,24)$$

Эквипотенциальные поверхности могут быть найдены из уравнения

$$z^2 - \gamma^2 r^2 = \text{const}, \quad (27,25)$$

которое описывает гиперболоиды вращения (рис. 11), причём, как видно из (27,24), потенциал, а значит, и поля отличны от нуля лишь в области отрицательных значений z ($z < 0$). Поля будут заключены внутри конуса (огibaющий конус), образующие которого определяются из уравнения*)

$$-z = \gamma r.$$

С помощью формул (27,9) находим значение полей

$$\mathbf{E} = -\frac{2\gamma^2 e \mathbf{R}}{n^2 (R^2 - \beta^2 n^2 r^2)^{3/2}},$$

$$\mathbf{H} = \beta n^2 [\mathbf{v}^0 \mathbf{E}], \quad (27,26)$$

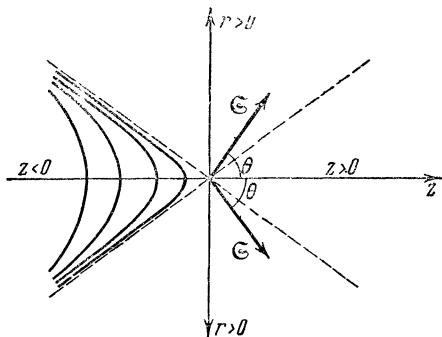


Рис. 11.

где радиус-вектор \mathbf{R} имеет составляющие x, y, z , а единичный вектор скорости \mathbf{v}^0 направлен по движению частицы, т. е. вдоль оси z .

Составляющие вектора Умова-Пойнтинга

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (27,27)$$

на оси координат будут равны

$$\mathfrak{S}_r = -\frac{c}{4\pi} \beta n^2 E_r E_z > 0; \quad z < 0,$$

$$\mathfrak{S}_z = \frac{c}{4\pi} \beta n^2 E_r^2 > 0, \quad (27,28)$$

*) Рис. 11 является пространственной фигурой, обладающей аксиальной симметрией вокруг оси z . Поэтому величина r может иметь только положительные значения.

где

$$E_r = \frac{r}{R} E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

откуда

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_r^2 + \mathcal{E}_z^2} = \frac{c}{4\pi} \beta n^2 E E_r, \quad (27,29)$$

$$\cos \theta = \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}} = \frac{r}{R}. \quad (27,30)$$

Как видно из формул (27,26), значения полей и вектора Умова-Пойнтинга при

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} \quad (27,31)$$

обращаются в бесконечность. Поэтому всё излучение будет происходить по направлениям, перпендикулярным к образующим конуса, огибающего поле (см. рис. 11). Физически это связано с тем, что по направлениям, определяемым условием (27,31), излучаемые электромагнитные волны будут усиливать друг друга, а по всяким иным направлениям они будут взаимно гаситься.

Если подсчитать общую энергию, которую излучает точечный электрон при постоянном значении показателя преломления, то мы получим бесконечную величину. Этот же результат следует из формулы (27,19), поскольку в случае $n = \text{const}$ частота ω_m обращается в бесконечность. Однако на самом деле энергия излучения является согласно более строгой теории конечной величиной, потому что случай $n = \text{const}$ является физически нереальным и, как мы уже указали, спектр обрывается на некоторой частоте, для которой n начинает резко уменьшаться [см. соотношение (27,20)].

Теория движения частиц в различных средах со скоростями, превышающими фазовые скорости волн, которые они образуют, рассматривается также и в других областях физики.

В частности, в механике давно уже были обнаружены особые звуковые волны, возникающие при

движении тел, например снарядов, в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями. Эффект сверхсветового электрона является по существу электродинамическим аналогом излучения подобных звуковых волн. Эксперименты Черенкова находятся в полном согласии с теорией, разработанной на основе классической электродинамики как в смысле спектра поляризации, так и угловой зависимости излучения в эффекте сверхсветового электрона.

Возникает вопрос о квантовой трактовке эффекта Черенкова.

Не останавливаясь здесь подробно на выводе квантовых формул этого явления, укажем, что при квантовом рассмотрении излучения фотонов прежде всего должны выполняться одновременно в каждом элементарном акте законы сохранения энергии и импульса.

Как известно, энергия электрона \mathcal{E} связана с его импульсом p и массой m соотношением

$$\mathcal{E} = c \sqrt{m^2 c^2 + p^2}.$$

Со своей стороны фотон обладает энергией $h\nu$ и импульсом hk , где ν — частота света, а $k = \frac{1}{\lambda}$ — волновое число.

Обозначая импульс электрона до и после излучения соответственно через p и p' , будем иметь следующие соотношения, получаемые из закона сохранения энергии:

$$c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} - h\nu = c \sqrt{m^2 c^2 + p'^2}$$

и закона сохранения импульса:

$$p - hk = p'.$$

Возводя оба последних равенства в квадрат и вычитая одно из другого, найдём следующее выражение для косинуса угла между первоначальным направлением движения электрона p и направлением k , по которому

излучается фотон:

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{p}k)}{pk} = \frac{v}{ck\beta} + \frac{hk}{2p} \left(1 - \frac{v^2}{c^2k^2}\right), \quad (27,32)$$

причём здесь принято во внимание, что отношение скорости электрона к скорости света определяется через импульс p выражением

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{cp}{\mathcal{E}} = \frac{p}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}}.$$

Напомним, что в вакууме у фотонов частота ν связана с волновым числом k соотношением

$$\nu = ck.$$

Поэтому выражение (27,32) для косинуса угла излучения принимает вид абсурдного неравенства

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta} > 1.$$

Это означает, что движущийся по инерции электрон так же, как и в классической трактовке, не может излучить свет, так как при этом не могут быть одновременно удовлетворены законы сохранения энергии и импульса.

Рассмотрим далее вместо вакуума диэлектрик как непрерывную среду, характеризующуюся показателем преломления n , в которой свет распространяется с фазовой скоростью $c' = \frac{c}{n}$. Тогда вместо прежнего выражения получим следующее соотношение между ν и k :

$$\nu = c'k = \frac{ck}{n}.$$

Поэтому формула (27,32) принимает новый вид:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\Lambda}{2\lambda} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (27,32a)$$

где $\Lambda = \frac{h}{p}$ — длина де-броглевской волны движущегося электрона, а $\lambda = \frac{1}{k}$ — длина волны излучаемого света.

Отсюда видно, что когда скорость движения электронов будет больше фазовой скорости распространения света в среде, т. е. $\frac{1}{\beta n} < 1$, то становится возможным излучение света, ограниченное со стороны малых длин волн значением λ_{\min} , при котором $\cos \theta$ обращается в единицу.

Описывая электрон квантовым релятивистским уравнением Дирака и применяя обычные квантовые методы подсчёта, находим следующее выражение для энергии, излучаемой электроном в единицу времени*):

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_m} \omega \left[1 - \frac{1}{n^2 \beta^2} - \frac{\Lambda}{n \beta \lambda} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{4 \lambda^2} \left(1 - \frac{1}{n^4} \right) \right] d\omega, \quad (27,33)$$

где круговая частота $\omega = \frac{2\pi c}{n\lambda}$.

Согласно последней формуле даже при $n = \text{const}$ максимальная частота излучения, а значит, и энергия излучения не обращаются в бесконечность.

Последние соотношения приобретают более простой вид в нерелятивистском квантовом случае $\frac{v}{c} \ll 1$. Принимая во внимание, что излучение «сверхсветового» электрона возможно лишь при условии $\frac{vn}{c} > 1$, мы должны в нерелятивистском приближении положить $n \gg 1$. В этом случае вместо (27,32а) и (27,33) имеем следующие более

*) А. Соколов, ДАН, 28, 415, 1940. Квантовая теория эффекта Черенкова для обоих предельных случаев (нерелятивистского и ультрарелятивистского) была разработана также В. Г и н з б у р г о м, ЖЭТФ, 10, 589, 1940; см. также статью J. M. J a n s h and K. M. W a t s o n, Phys. Rev., 74, 1485, 1948, где развита общая схема квантовой феноменологической электродинамики.

простые соотношения:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\Lambda}{2\lambda},$$

$$- \frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_m} \omega \sin^2 \theta d\omega.$$

В частности, при $\lambda \gg \Lambda$, как это имеет место, например, в экспериментах Черенкова, квантовыми поправками можно пренебречь ($\frac{\Lambda}{\lambda} = 0$), что оказывается эквивалентным пренебрежению отдачей, получаемой электроном при излучении; при этом квантовые формулы (27,32а) и (27,33) переходят соответственно в классические (27,31) и (27,19).

Физическая причина возможности отбрасывания квантовых поправок при реально наблюдаемом излучении сверхсветового электрона заключается в том, что де-броглевская длина волны электронов оказывается меньше тех длин волн, которые излучает электрон при своём движении и диэлектрике. Квантовые эффекты, как известно, сказываются в тех случаях, когда де-броглевские длины волн будут порядка размеров орбит или порядка длины световых волн, излучаемых электроном (т. е. $\Lambda \sim \lambda$). Эти же квантовые поправки начинают давать о себе знать при столь малых длинах волн излучаемого света, при которых нарушается условие $\frac{1}{n\beta} < 1$, ввиду быстрого уменьшения показателя преломления с увеличением частоты. Вообще говоря, рассмотренная выше макроскопическая теория эффекта Черенкова не является строгой как при квантовом, так и при классическом рассмотрении, потому что излучение сверхсветовых электронов происходит благодаря взаимодействию атомов диэлектрика с движущимися электронами, которое в нашем случае учитывается путём формального введения некоторого среднего показателя преломления $n = \sqrt{\epsilon}$. Однако рассмотренный метод подсчёта излучения оказался весьма продуктивным и был впоследствии использован Ферми *) для вычисления общей

*) E. Fermi, Phys. Rev., 57, 485, 1940; см. также статью П. Е. Кунина в сборнике «Мезон», Гостехиздат, 1947.

потери энергии движущимся в среде электроном как на возбуждение атомов среды, так и на потери при излучении сверхсветового электрона. Ферми отбросил ограничение вещественности для показателя преломления или диэлектрической постоянной ϵ , а использовал обычное в электродинамике комплексное выражение для ϵ , мнимая часть которого учитывает поглощение энергии электромагнитных волн. Таким путём было найдено хорошее приближение к формулам для потерь энергии движущимся зарядом, полученным в классической теории Томсоном-Бором и развитым далее в квантовой механике Бете и Блохом (см. цитированную книгу Гейтлера).

В дальнейшем излучение сверхсветового типа Черенкова было теоретически исследовано во многих других случаях, прежде всего при прохождении заряженных частиц не через диэлектрик, но через ферромагнетик, когда рассматриваемое излучение начинается при ско-

ростях $v > \frac{c}{\sqrt{\mu_0}}$, где μ_0 — магнитная проницаемость среды

(когда ϵ положено равным 1)*. Излучение сверхсветового типа, очевидно, должно иметь место также при движении незаряженных, но магнитных частиц, например нейтронов, и вообще явиться комбинацией зарядной и магнитной частей в случае заряженных и магнитных частиц, таких, как протоны или же электроны, если учесть наличие у последних недавно обнаруженного собственного вакуумного магнитного момента.

Наряду с излучением в среде аналогичное излучение должно наблюдаться также для всех заряженных и магнитных частиц при их переходе из одной среды в другую, например из вакуума в диэлектрик или металл или при движении частиц в узких каналах, вырезанных в диэлектрике или ферромагнетике с размерами, меньшими излучаемой длины волны. Интенсивности подобных излучений весьма малы при исследованных случаях не слишком высоких энергий электронов.

*) Д. Иваненко и В. Гургенидзе, ДАН, 67, 997, 1949.

Заметим в заключение, что излучение сверхсветового типа должно также иметь место не только в электродинамике, но и в мезодинамике (см. ниже, гл. V) при движении нуклеонов—протонов или нейтронов через слой вещества достаточно высокой плотности. Тогда, например, в случае прохождения нуклеона через атомное ядро будут иметь место потери как при столкновениях, так и при излучении сверхсветового типа. При этом целесообразно плотную среду характеризовать аналогично электродинамике путём развития феноменологической мезодинамики, вводя квазидиэлектрическую постоянную и квазимагнитную проницаемость, задавая соответствующий закон дисперсии, использование которого всегда необходимо для трактовки эффекта Черенкова.

Таким образом открытый сравнительно недавно эффект Черенкова оказался весьма важным и общим явлением, имеющим место во многих случаях движения электрона и других частиц*).

§ 28. Тензор энергии

Перейдём к рассмотрению новой важной величины, характеризующей электромагнитное поле, — тензору энергии. Тензор энергии позволяет, в частности, свести четырёхмерный импульс силы самодействия к приращению электромагнитного количества движения.

При помощи равенств (23,17) и (23,27) находим

$$\int F_{\nu} ds = \int \frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} (dx), \quad (28,1)$$

причём значения для $H_{\mu\nu}$ и $D_{\nu\lambda}$ определяются равенствами (23,2) и (23,26).

*) Различные стороны сверхсветового излучения анализируются в книге Н. Бора и О. Бора «Прохождение атомных частиц через вещество», ИЛ, 1950.

В случае максвелловского поля имеем

$$D_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}. \quad (28,2)$$

Подинтегральное выражение правой части соотношения (28,1) преобразуем к виду:

$$\frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} \frac{\partial D_{\nu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{1}{4\pi} H_{\mu\nu} D_{\nu\lambda} \right) - \frac{1}{4\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}.$$

Пользуясь уравнением (23,31), а также свойством антисимметричности тензоров $D_{\nu\lambda}$ и $H_{\mu\nu}$, имеем

$$\frac{1}{4\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = \frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \left(\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial H_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} \right) = -\frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}.$$

В частности, для лагранжианов L_0 , являющихся функцией только $H_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$, получим

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L_0}{\partial H_{\nu\lambda}} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial L_0}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = -\frac{1}{8\pi} D_{\nu\lambda} \frac{\partial H_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}, \quad (28,3)$$

откуда следует

$$\int F_\mu ds = \int \frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} (dx), \quad (28,4)$$

причём компоненты тензора энергии находятся из равенства

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} D_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\nu} L. \quad (28,5)$$

Точнее эту величину следовало назвать тензором плотности энергии импульса — натяжений.

Как видно из формулы (28,4), тензор энергии $T_{\mu\nu}$ определён лишь с точностью до величины $T'_{\mu\nu}$, четырёхмерная расходимость которой равняется нулю: $\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0$.

Вводя тензор энергии, мы можем импульс собственной силы (28,4) преобразовать к виду:

$$\int F_{\mu} ds = \int dt \oint T_{\nu n} dS_n + \frac{1}{ic} \int dt \frac{d}{dt} \int T_{\mu 4} (d\mathbf{r}), \quad (28,6)$$

где dS является элементом поверхности, ограничивающей рассматриваемый объём, элемент которого равен $(d\mathbf{r})$.

С другой стороны, из равенства (23,22) находим

$$\int \frac{dm \dot{\xi}_{\mu}}{ds} ds = \int F_{\mu} ds + \int F_{\mu}^i ds. \quad (28,7)$$

Исключая из двух последних уравнений импульс собственной силы, получим

$$\int d \left| m \dot{\xi}_{\mu} - \frac{1}{ic} \int T_{\mu 4} (d\mathbf{r}) \right| = \int F_{\mu}^i ds + \int dt \oint T_{\nu n} dS_n. \quad (28,8)$$

Величина $m \dot{\xi}_{\mu}$ является механическим количеством движения. По аналогии с этим интеграл

$$G_{\mu} = -\frac{1}{ic} \int T_{\mu 4} (d\mathbf{r}) \quad (28,9)$$

получил название количества движения или импульса электромагнитного поля. Компоненты $-\frac{1}{ic} T_{\mu 4}$ являются, очевидно, составляющими плотности количества движения электромагнитного поля.

В правой части к импульсу внешней силы $\int F_{\mu}^i ds$ необходимо добавить импульс поверхностных сил:

$$J_{\mu} = \int dt \oint T_{\nu n} dS_n. \quad (28,10)$$

Отметим, что величины G_{μ} и J_{μ} в отдельности в общем случае могут и не образовывать четырёхмерных векторов, только их линейная комбинация [см. правую часть равенства (28,6)] образует четырёхмерный вектор.

§ 29. Импульс электромагнитного поля

Сравним теперь трансформационные свойства механического и электромагнитного количества движения.

Существуют два условия, при которых количество движения электромагнитного поля G_μ является четырёхмерным вектором и тем самым оказывается совпадающим по трансформационным свойствам с количеством движения частиц.

1. Если мы имеем пространство без зарядов, т. е., как видно из равенства (28,4), расходимость от тензора энергии обращается в нуль: $\frac{\partial T_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0$, то величина

$$G_\mu = \frac{i}{c} \int T_{\mu 4} (dr) \quad (29,1)$$

будет представлять собою четырёхмерный вектор.

В самом деле, в отсутствии зарядов электромагнитное поле не будет обладать особенностями, и поэтому импульс поверхностных сил [см. (28,10)] после удаления поверхности интегрирования в бесконечность должен исчезнуть.

Учитывая, что комбинация количества движения электромагнитного поля G_μ и импульса поверхностных сил всегда является вектором, а сам импульс обращается в нуль, мы приходим к выводу, что величина G_μ должна вести себя как четырёхмерный вектор.

Подобным условиям удовлетворяет, например, электромагнитное поле, находящееся в пространстве без зарядов. В частности, благодаря этому в теории фотонов (т. е. квантов света, сопоставленных согласно квантовой теории элементарным электромагнитным волнам) Эйнштейн смог охарактеризовать фотон не только энергией $\varepsilon = h\nu$, но также количеством движения $p = \frac{\varepsilon}{c}$, причём в совокупности эти величины образуют четырёхмерный вектор.

2. Теорема Лауэ формулирует условие, при котором энергия и импульс электромагнитного поля образуют

четырёхмерный вектор при наличии зарядов. Для этой цели найдём закон преобразования для четырёхмерного импульса G_μ , когда электромагнитное поле порождается заряженной частицей, например электроном.

Прежде всего рассмотрим систему отсчёта, относительно которой электрон покоится, и обозначим в этой координатной системе тензор энергии через $T_{\mu\nu}^0$, а элементарный объём через (dr_0) .

В силу сферической симметрии мы можем утверждать, что для недиагональных компонент ($\mu \neq \nu$) всегда должно выполняться равенство

$$\int T_{\mu\nu}^0 (dr_0) = 0, \quad (29,2)$$

в то время как интегралы от диагональных компонент

$$\int T_{\mu\mu}^0 (dr_0) \text{ (суммирования по } \mu \text{ нет)} \quad (29,3)$$

могут быть отличными от нуля.

Поэтому согласно (29,2) и (28,9) имеем

$$G_n^0 = 0, \quad G_4^0 = \frac{iU_0}{c}, \quad (29,4)$$

где $U_0 = \int T_{44}^0 (dr_0)$ является энергией электростатического поля.

Для того чтобы определить релятивистскую ковариантность вектора G_μ , сделаем переход к другой системе координат, относительно которой электрон движется с постоянной скоростью v .

Направив ось x по вектору скорости, имеем согласно преобразованиям Лорентца-Эйнштейна

$$x_1^0 = \frac{x_1 + i\beta x_4}{k}, \quad x_2^0 = x_2, \quad x_3^0 = x_3, \quad x_4^0 = \frac{x_4 - i\beta x_1}{k}, \quad (29,5)$$

где

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad k = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

При переходе к движущейся системе координат новые значения для компонент $T_{\mu\nu}$ и объёма (dr) будут связаны со старыми при помощи соотношений

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\beta^0}{\partial x_\nu} T_{\alpha\beta}^0, \quad (29,6)$$

$$(dr) = k(dr_0).$$

Оставляя для тензора $T_{\alpha\beta}^0$ только диагональные члены ($\alpha = \beta$) и учитывая, что при движении вдоль оси x необходимо оставить только составляющие, для которых $\mu, \nu = 1, 4$, имеем

$$T_{14} = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_1} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_4} T_{11}^0 + \frac{\partial x_4^0}{\partial x_1} \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} T_{44}^0 = -\frac{i\beta}{k^2} (T_{44}^0 - T_{11}^0), \quad (29,7)$$

$$T_{44} = \frac{\partial x_1^0}{\partial x_4} \frac{\partial x_1^0}{\partial x_4} T_{11}^0 + \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} \frac{\partial x_4^0}{\partial x_4} T_{44}^0 = \frac{1}{k^2} (T_{44}^0 - \beta^2 T_{11}^0), \quad (29,8)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\beta}{kc} \int (T_{44}^0 - T_{11}^0) (dr_0), \\ G_4 &= \frac{1}{ikc} \int (T_{44}^0 - \beta^2 T_{11}^0) (dr_0). \end{aligned} \quad (29,9)$$

Теория относительности требует, чтобы электромагнитное количество движения и энергия образовывали вместе четырёхмерный вектор, закон преобразования для компонент которого имеет вид

$$G_\mu = \frac{\partial x_\alpha^0}{\partial x_\mu} G_\alpha^0 = \frac{\partial x_4^0}{\partial x_\mu} G_4^0 \quad (29,10)$$

или сообразно с (28,9)

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{i\beta}{k} G_4^0 = \frac{\beta}{kc} \int T_{44}^0 (dr_0), \\ G_4 &= \frac{i}{kc} \int T_{44}^0 (dr_0). \end{aligned} \quad (29,11)$$

Сопоставляя (29,9) с (29,11), мы видим, что количество движения электромагнитного поля образует четырёхмерный вектор в том случае, когда

$$\int T_{11}^0 (dr_0) = 0. \quad (29,12)$$

Последнее соотношение выражает теорему Лауэ, согласно которой электромагнитное количество движения G_μ является четырёхмерным вектором только в том случае, если в покоящейся относительно электрона системе координат для всех компонент тензора энергии соблюдается соотношение

$$\int T_{\mu\nu}^0 (dr_0) = 0, \quad (29,13)$$

кроме составляющей T_{44}^0 , интеграл от которой является постоянной величиной и равняется полной энергии поля, порождённого частицей. Эту энергию поля мы можем приравнять собственной энергии частицы, выражая тем самым основную идею полевой гипотезы. Согласно последней собственная энергия частицы U_0 , делённая на c^2 , или её масса m^{el} равняется

$$m^{el} = \frac{U_0}{c^2} = \frac{1}{c^2} \int T_{44}^0 (dr_0). \quad (29,14)$$

Покажем, что равенство (29,13) формулирует не только условие, при котором количество движения G_μ образует четырёхмерный вектор, но также выражает собою необходимое условие, при котором весь заряд должен находиться в равновесии.

В самом деле, в статическом случае ($T_{n4} = 0$) вместе (29,13) имеем

$$\int T_{nm}^0 \delta_{nm} (dr_0) = 0. \quad (29,15)$$

Учитывая, далее, равенство

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_m} = \delta_{nm},$$

мы получаем вместо соотношения (29,15)

$$\int x_n \frac{\partial T_{nm}^0}{\partial x_m} (d\tau_0) = 0. \quad (29,16)$$

Как видно из (28,4), величина $\frac{\partial T_{nm}^0}{\partial x_m}$ является плотностью силы, а всё выражение (29,16) представляет собою вириал сил, который, как известно, пропорционален средней кинетической энергии [более подробно см. соотношение (44,1)]. При обращении в нуль вириала сил средняя кинетическая энергия также обращается в нуль и общий заряд должен находиться в равновесии. Таким образом только что выведенные теоремы, указывающие условия возможности приравнивания вектора энергии-импульса частицы вектору энергии-импульса поля, являются весьма существенными при построении полевой теории электрона.

§ 30. Теория электромагнитной массы в электродинамике Максвелла-Лорентца

а) Тензор энергии максвелловского поля

В электродинамике Максвелла-Лорентца функция Лагранжа для поля равна [см. (23,11)]

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2), \quad (30,1)$$

причём для величины моментов поля [см. равенство (23,28)] имеем

$$D_{\mu\nu} = H_{\mu\nu}. \quad (30,2)$$

Отсюда для компонент тензора энергии согласно (28,5) получаем

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} H_{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi} \delta_{\mu\nu} H_{\alpha\beta} H_{\alpha\beta}. \quad (30,3)$$

Тензор $T_{\mu\nu}$ содержит девять пространственных составляющих, образующих трёхмерный тензор поверхност-

ных натяжений:

$$T_{nk} = \frac{1}{4\pi} \left[E_n E_k + H_n H_k - \frac{1}{2} \delta_{nk} (H^2 + E^2) \right]; \quad (30,4)$$

$$n, k = 1, 2, 3,$$

шесть пространственно-временных компонент:

$$T_{n4} = -icg_n, \quad T_{4n} = -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_n, \quad (30,5)$$

причём плотность электромагнитного количества движения g_n связана с вектором потока энергии поля Умова-Пойнтинга

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [EH] \quad (30,6)$$

соотношением

$$\mathbf{g} = \frac{\mathfrak{S}}{c^2}. \quad (30,7)$$

Наконец, временная составляющая T_{44} является плотностью энергии электромагнитного поля:

$$T_{44} = u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2). \quad (30,8)$$

Таким образом тензор энергии имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_1 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & icg_2 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_1 & -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_2 & -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_3 & u \end{pmatrix}. \quad (30,9)$$

Соотношение (30,7) между плотностью электромагнитного количества движения \mathbf{g} и потоком \mathfrak{S} является следствием симметричности тензора энергии в максвелловской теории:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}^*).$$

*) В общем случае, когда $D_{\mu\nu} \neq H_{\mu\nu}$, мы имеем два тензора поля:

$$\begin{aligned} H_{23} &= B_x, & D_{23} &= H_x, \\ H_{41} &= iE_x, & D_{41} &= iD_x. \end{aligned}$$

Проверим теперь выполнимость теоремы Лауэ (29,13) в теории Максвелла-Лорентца.

В системе координат, неподвижной относительно электрона, магнитное поле обращается в нуль, а электрическое должно обладать сферической симметрией. Поэтому

Электрические составляющие носят названия напряжённости поля (\mathbf{E}) и индукции (\mathbf{D}); магнитные называются напряжённостью (\mathbf{H}) и индукцией (\mathbf{B}).

Для векторов (\mathbf{B} , \mathbf{E}) и (\mathbf{D} , \mathbf{H}) имеют место уравнения, совпадающие с уравнениями Максвелла для диэлектрической среды:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\pi \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho,$$

причём для точечной частицы [см. (23, 30)]

$$\mathbf{j} = \frac{e\mathbf{v}}{c} \delta(r - \mathfrak{S}), \quad \rho = e\delta(r - \mathfrak{S}).$$

В случае материальной среды тензор энергии может оказаться несимметричным. В самом деле, согласно (28,5) имеем

$$T_{n4} = -icg_n = -\frac{i}{4\pi} [DB]_n,$$

$$T_{4n} = -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_n = -\frac{i}{4\pi} [EH]_n \neq T_{n4}.$$

Выражение тензора энергии (28,5) совпадает с определением, данным Минковским и Далленбахом.

С другой стороны, Абрагам ошибочно считал, что тензор энергии всегда должен быть симметричным и, оставляя для компонент T_{4n}^a значение, найденное Минковским ($T_{4n}^a = T_{4n}$), положил

$$T_{n4}^a = T_{4n} = -\frac{i}{4\pi} [EH].$$

Аргументация Абрагама является, очевидно, неубедительной, и мы должны остановиться на тензоре Минковского-Далленбаха, являющемся необходимым следствием общей теории, основанной на вариационных принципах. Относительно более подробную дискуссию физических следствий, связанных с обоими тензорами, можно найти в книге Тамма (см. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1949, § 116).

по самому смыслу равенства (29,2) нас могут интересовать только диагональные компоненты тензора энергии, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} T_{44}^0 &= \frac{1}{8\pi} E^2, \\ T_{11}^0 &= \frac{1}{4\pi} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right). \end{aligned} \quad (30,10)$$

Отсюда находим:

$$\int T_{44}^0 (dr_0) = \frac{1}{8\pi} \int E^2 (dr_0) = U_0, \quad (30,11)$$

где U_0 — энергия электростатического поля.

Учитывая, далее, сферическую симметрию вектора E , имеем

$$\int T_{11}^0 (dr_0) = \frac{1}{4\pi} \int \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) (dr_0) = -\frac{1}{3} U_0, \quad (30,12)$$

т. е. для электромагнитного поля, порождённого зарядом, теорема Лауэ не выполняется.

В соответствии с (29,9) находим следующие значения для компонент количества движения электромагнитного поля, порождённого электроном, движущимся со скоростью v :

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{U_0 v}{c^2 k} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \frac{U_0 v}{c^2 k}, \\ G_4 &= \frac{iU_0}{ck} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right). \end{aligned} \quad (30,13)$$

Таким образом компоненты G_ν не образуют четырёхмерного вектора в противоположность компонентам количества движения самого электрона $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$;

$$p_4 = \frac{i\mathcal{E}}{c} = \frac{m_0 c i}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Обратимся теперь к гипотезе полевой массы в рамках классической электродинамики. Согласно этой гипотезе, выдвинутой в конце XIX века Дж. Дж. Томсоном и раз-

витой Лорентцем, Абрагамом и Пуанкаре, собственная энергия электрона (или его масса) полностью обусловлена энергией электромагнитного поля, связанного с электроном, или, что сводится к тому же—инерция частицы обязана инерции поля. Точно так же импульс электрона предполагается обязанным импульсу поля.

Хотя программа полевой теории и не была осуществлена вплоть до наших дней, основные её физические идеи и методы расчётов всё время играли стимулирующую роль. Для успеха полевой теории массы должны быть осуществлены по крайней мере следующие условия. Во-первых, следует получить конечное значение энергии поля, порождённого частицей, которое можно было бы точно приравнять конечной энергии частицы (т. е. массе, умноженной на квадрат скорости света: $\mathcal{E} = mc^2$). Во-вторых, значение импульса поля, порождённого частицей, должно быть не только конечным, но и находящимся в правильном соотношении с энергией, образуя с последней четырёхмерный вектор. В-третьих, теория должна суметь вывести уравнения движения электрона.

При дальнейшем развитии теории следует сверх того потребовать вывода спина, т. е. собственного момента количества движения электрона как спина поля, что, однако, относится к квантовому обобщению теории полевой массы, так как спин является квантовым эффектом. Точно так же получение не просто конечного, но данного определённого значения массы электрона и других частиц, очевидно, также лежит в сфере действия квантовой теории. Поэтому сейчас в рамках классической теории полевой массы мы ограничимся прежде всего проблемой получения конечной массы и импульса и их взаимным согласованием, возможность чего также не очевидна.

Возвращаясь к максвелловской электродинамике и оставляя пока что вопрос о конечном значении энергии поля в стороне, мы видим, что массу частицы с полевой точки зрения возможно определить двумя способами. Во-первых, исходя из количества движения электромагнитного поля G_1 , можно определить массу как коэффициент пропорциональности между количеством движе-

ния поля и трёхмерной скоростью частицы:

$$m^{el} = \frac{G_1}{v} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2 k} = \frac{4}{3} \frac{\frac{U_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (30,14)$$

Подобный закон изменения массы электрона со скоростью движения был действительно подтверждён экспериментально в начале 20-го века (Кауфман, Гюи и Лаванши), что казалось одно время сильным аргументом в пользу гипотезы полевой электромагнитной массы.

Во-вторых, однако, если рассматривать собственную энергию электрона как равную или совпадающую с энергией поля, а массу как отношение энергии поля $\frac{cG_4}{i}$ (т. е. четвёртой составляющей количества движения поля) к квадрату скорости света c^2 , мы получим противоречащее предыдущему уравнению и экспериментальным данным соотношение

$$m^{el} = \frac{U_0}{kc^2} \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2 \right). \quad (30,15)$$

Этот результат не совпадает ни с требуемой теорией относительности правильной формулой $m^{el} = \frac{U_0}{kc^2}$, ни с неверным соотношением (30,14):

$$m^{el} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{kc^2}. \quad (30,16)$$

Таким образом масса и импульс электрона не могли быть приведены друг с другом в согласие при разработке полевой теории в рамках классической максвелловской электродинамики. Кроме того, следует подчеркнуть, что согласно специальной теории относительности масса всякого тела изменяется со скоростью по закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где m_0 — масса в состоянии покоя, а импульс равняется
$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
. Эти соотношения имеют место совершенно

независимо от какой бы то ни было модели массы, так что экспериментальное подтверждение изменения массы со скоростью по закону
$$m = \frac{\text{const}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
 ни в коей мере не является

аргументом в пользу полевой гипотезы электромагнитного происхождения массы. Точно такой же закон изменения массы имеет место и для незаряженных частиц, например нейтронов.

Более того, согласно теории относительности энергия всякого тела равняется
$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
, где $\mathcal{E}_0 = m_0 c^2$ есть собственная энергия в состоянии покоя. Все эти формулы теории относительности прекрасно подтверждены экспериментами. Появление дополнительного множителя $\frac{4}{3}$ в выражении количества движения (30,14) и множителя $(1 + \frac{1}{3} \beta^2)$ в выражении энергии (30,15), не согласованных друг с другом и противоречащих опыту и соотношениям теории относительности, показывает, что масса, энергия, импульс, а следовательно, и механическое поведение электрона не могут быть объяснены в теории Максвелла-Лорентца из рассмотрения его собственного электромагнитного поля. Таким образом, в частности, масса электрона не может иметь чисто электромагнитного происхождения.

Как мы видим, эта первая неудача классической полевой теории массы электрона связана с рассмотренным выше нарушением условий выполнимости теоремы Лауэ. Оказывается, что компоненты количества движения и энергии электромагнитного поля не образуют четырёхмерного вектора и, следовательно, не могут быть приравнены импульсу и энергии электрона, образующих вектор. Если всё же оставаться на почве полевой теории, то следует ввести какое-то вспомогательное поле, отличное

от максвелловского, для того чтобы энергия и импульс этого поля смогли компенсировать излишнюю долю поля, связанную с коэффициентами $1/3$ в выражении импульса и член $1/3 \beta^2$ в выражении энергии. Это добавочное поле приводит к так называемому давлению Пуанкаре, удерживающему электрон в «равновесии» (см. ниже). Учтя подобную неудачу классической полевой теории электрона в согласовании значений энергии и импульса частицы и поля, обратимся всё же к анализу следующего основного пункта, связанного с проблемой конечного значения энергии поля, создаваемого электроном.

Для покоящейся частицы $\beta = 0$, $k = 1$; поэтому масса покоящегося электрона равнялась бы согласно тому или другому из двух указанных определений $m^{el} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}$

по (30,14) или $m^{el} = \frac{U_0}{c^2}$ по (30,15). Здесь U_0 есть электростатическая энергия точечного заряда. Так как энергия поля U_0 точечного электрона равняется бесконечности, то для устранения этой трудности предлагается представить заряд распределённым в некотором объёме, который для простоты возьмём сферическим с радиусом r_0 . Необходимо с самого начала подчеркнуть, что подобное введение радиуса нарушает релятивистскую инвариантность теории и может поэтому рассматриваться лишь как весьма предварительный приём.

В случае поверхностно заряженной сферы радиуса r_0 полная энергия электрического поля равняется

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int_{r_0 \leq r < \infty} E^2 (dr) = \frac{e^2}{2} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^3} = \frac{e^2}{2r_0}. \quad (30,17)$$

Для случая заряда, равномерно распределённого по объёму, $U_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0}$. Вообще говоря, при том или ином распределении заряда

$$U_0 = \alpha \frac{e^2}{r_0},$$

причём коэффициент α зависит от характера распределения заряда и имеет порядок единицы.

Не придавая значения точному виду распределения заряда «внутри» электрона в этой весьма предварительной некантовой модели, которая к тому же при любом распределении заряда нарушает релятивистскую инвариантность, попытаемся всё же оценить порядок радиуса электрона, отвлекаясь от всех коэффициентов, имеющих порядок единицы. Приравняем энергию электростатического поля U_0 собственной энергии электрона $m^{el}c^2$:

$$m^{el}c^2 = \frac{e^2}{r_0}.$$

Подставляя сюда вместо e , m , c известные численные константы для электрона: масса $m = 9 \cdot 10^{-28}$ г, заряд $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ абс. эл-стат. ед., скорость света $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек, находим

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \sim 10^{-13} \text{ см} \left(\text{точнее } \frac{e^2}{mc^2} = 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см} \right). \quad (30,18)$$

Последнее выражение даёт значение для так называемого классического радиуса электрона. Точнее говоря, речь идёт сейчас о классическом электрическом радиусе, так как радиус можно было бы совершенно аналогичным путём, применяя те же идеи теории полевой массы, вычислить для случая магнитного поля, отвлекаясь от того обстоятельства, что магнитный момент, как и спин электрона, обусловлен квантовыми эффектами.

Приравнивая магнитную энергию, обусловленную дипольным моментом электрона μ и по порядку равную

$$\mathcal{E}_\mu \sim \frac{\mu^2}{r_\mu^3} \text{ — собственной энергии электрона } mc^2, \text{ имеем}$$

$$mc^2 = \frac{\mu^2}{r_\mu^3}, \text{ откуда для классического магнитного радиуса}$$

электрона имеем

$$r_\mu = \left(\frac{\mu^2}{mc^2} \right)^{1/3} \sim 10^{-11} \text{ см},$$

так как согласно эмпирическим данным магнитный момент

электрона равен боровскому магнетону

$$\mu = \frac{eh}{4\pi mc}.$$

Точно так же для классического гравитационного радиуса электрона имеем $r_g = \frac{\chi m}{c^2} \sim 10^{-55}$ см*), так как $mc^2 \cong \frac{\chi m^2}{r_g}$ (χ —гравитационная постоянная).

Несмотря на крупные дефекты указанной гипотезы полевой массы, всё же нельзя отрицать её известного успеха, заключающегося в том, что полученное значение для электрического радиуса электрона (30,18) действительно соответствует каким-то эффективным «размерам» электрона, сказывающимся, например, при рассеянии света на электроне, который при всех подобных расчётах предполагается точечным. Как будет показано ниже (§ 36), классическое томсоновское эффективное сечение для рассеяния света на точечном электроне определяется в согласии с опытом в основном величиной $\sigma \cong r_0^2$, причём квантовая теория рассеяния света на точечном электроне, необходимая для случая коротких длин волн, когда электрон получает заметную отдачу (эффект Комптона), приводит в согласии с опытом к формуле Клейна-Нишины**) для эффективного сечения, которая также содержит в качестве основной величины r_0^2 . Поэтому можно сказать, что с точки зрения полевой теории масса или энергия электрона действительно обязана в основном электростатическому полю. С другой стороны, поскольку классический магнитный или гравитационный радиусы не имеют ничего общего с эффективными размерами электрона, проявляющимися при его взаимодействиях, его движении в атомах и т. д., следует заключить, что гравитационное и магнитное поля не играют существенной роли в структуре электрона с полевой точки зрения.

*) См. Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ, № 8, 1947.

**) O. Klein und J. Nishina, Zs. f. Phys., 52, 853, 1929. Эта формула была выведена также И. Е. Таммом (I. Tam m, Zs. f. Phys., 62, 545, 1930).

Вспомним теперь указанный выше результат о необходимости введения немаксвелловских сил для проведения программы полевой теории электрона. Нетрудно усмотреть наглядную физическую причину для допущения подобных сил.

Поскольку электрон-шарик представляется заряженным одноимённым электричеством, он должен неминуемо разлететься под действием одних максвелловских (в данном случае кулоновских) сил. Следовательно, для того чтобы сдерживать «части» электрона вместе, мы должны ввести немаксвелловские силы.

Совершенно ясно, что с точки зрения понимания электрона как элементарной частицы говорить о его «частях» в строгом смысле слова нельзя, что ещё раз подчёркивает сугубо предварительный характер модели электрона-шарика.

б) Тензор момента количества движения поля

К тензору энергии электромагнитного поля, а также всех других полей, можно придти непосредственно, исходя из рассмотрения функции Лагранжа L .

Ограничиваясь для простоты случаем свободного поля без зарядов, имеем согласно (23,11) для максвелловского случая

$$L = -\frac{1}{16\pi} H_{\lambda\nu} H_{\lambda\nu}. \quad (30,19)$$

Найдём производную L по координате x_μ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} \frac{\partial A_{\lambda,\nu}}{\partial x_\mu} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu} \frac{\partial A_{\lambda,\mu}}{\partial x_\nu}, \quad (30,20)$$

Здесь мы учли, что

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda\nu}.$$

Принимая во внимание, что в пространстве без зарядов

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial H_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

мы можем равенство (30,20) преобразовать к виду

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}^{\text{can}}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (30,21)$$

где компоненты так называемого канонического тензора энергии (точнее говоря, тензора плотности энергии, импульса и натяжений) определяются соотношением

$$T_{\mu\nu}^{\text{can}} = \frac{1}{4\pi} A_{\lambda,\mu} H_{\lambda\nu} - L\delta_{\mu\nu} = A_{\lambda,\mu} \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} - L\delta_{\mu\nu}. \quad (30,22)$$

Уравнение (30,21), выражающее исчезновение четырёхмерной расходимости, эквивалентно четырём обычным законам сохранения, которые получаются при значениях индекса $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Действительно, при $\mu = 4$ получим уравнение

$$\text{div } T_4 - \frac{i}{c} \frac{\partial T_{44}}{\partial t} = 0,$$

выражающее закон сохранения энергии, так как T_{44} является плотностью энергии. Умножим последнее уравнение на элемент объёма (di) и проинтегрируем по всему пространству. Тогда, преобразуя объёмный интеграл $\int \text{div } T_4 (dr)$ в поверхностный по теореме Остроградского и учитывая, что на бесконечности компоненты $T_{\mu\nu}$ исчезают, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} (dr) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \int T_{44} (dr) = \text{const.}$$

Точно так же доказываются три закона сохранения для компонент импульса.

Как было указано в § 23а, согласно теореме Нетер инвариантности лагранжиана относительно каждой данной группы непрерывных преобразований соответствует свой закон сохранения для той или иной величины. Кроме того, имеет место и обратная теорема, утверждающая наличие инвариантности при выполнении законов сохранения. Легко показать, что общий закон сохранения (30,21) для тензора энергии соответствует инвариантности уравнений Максвелла относительно группы смещений всех четырёх координат. В самом деле, при пере-

носе начала координат мы имеем следующее изменение (вариацию) для функции Лагранжа:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_\mu} \delta x_\mu,$$

которое сводится к вычислению производной $\frac{\partial L}{\partial x_\mu}$. Таким образом независимость L от смещений координат приводит к тождественному исчезновению $\int \delta L(dx)$ и вместе с тем к законам сохранения энергии и импульса поля (30,21). В этом смысле теория поля вполне аналогична механике точки, где инвариантность действия или лагранжиана относительно смещений всех четырёх координат также непосредственно приводит к четырём законам сохранения для компонент четырёхмерного вектора импульса, т. е. для трёх компонент количества движения и для энергии.

Таким образом можно сказать, что группа смещений координат индуцирует как построение канонического тензора энергии, так и закон его сохранения в виде условия исчезновения четырёхмерной расходимости, при помощи инвариантного лагранжиана или соответственного инвариантного вариационного начала. Совершенно аналогичным образом можно придти к тензору энергии и закону его сохранения не только в случае уравнений Максвелла, но для всех иных полей: например, гравитационного поля, а также скалярного, векторного, псевдоскалярного и псевдовекторного полей, возможно описывающих мезоны, затем для полей дираковских спиноров и т. д., поскольку уравнения всех этих полей инвариантны относительно смещений ввиду однородности пространства-времени.

Канонический тензор энергии представляет собою по существу обобщение на случай поля выражения функции Гамильтона

$$H = p_s \dot{q}_s - L \quad \left(p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right),$$

относящейся к материальной точке, причём в случае

поля функция Гамильтона является одной из компонент тензора плотности энергии импульса ($H = T_{44}$).

Наконец, возможно ещё ввести всегда симметричный метрический тензор энергии, который согласно Гильберту получается путём варьирования функции Лагранжа по компонентам метрического тензора*):

$$T_{\mu\nu}^{\text{metr}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{gL}}{\partial g^{\mu\nu}}, \quad (30,23)$$

причём в окончательном результате, переходя к плоскому псевдоевклидовому миру (при отсутствии тяготения), мы должны положить компоненты $g^{\mu\nu}$ равными, в нашем случае ($x_4 = ict$), единичному дельта-символу $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$ [см., например, соотношение (23,1)]. Точно так же определитель, составленный из компонент $g^{\mu\nu}$, следует положить равным единице ($g = 1$).

В случае поля Максвелла метрический тензор энергии совпадает с полученным выше тензором (30,3)**)

$$T_{\mu\nu}^{\text{metr}} = \frac{1}{4\pi} (A_{\lambda,\mu} - A_{\mu,\lambda}) H_{\lambda\nu} - L \delta_{\mu\nu}, \quad (30,24)$$

который является симметричным ($T_{\mu\nu}^{\text{metr}} = T_{\nu\mu}^{\text{metr}}$) и удовлетворяет в вакууме законам сохранения:

$$\frac{\partial T_{\mu\nu}^{\text{metr}}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Канонический же тензор энергии не является симметричным и отличается от метрического на величину:

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{can}} - T_{\mu\nu}^{\text{metr}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} A_\mu H_{\nu\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_\lambda} f_{\mu[\nu\lambda]},$$

расходимость от которой обращается в нуль:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0.$$

*) См., например, А. С. Э д д и н г т о н, Теория относительности, ГТТИ, 1934, § 79.

***) Вывод соотношения (30,24) будет дан в § 47.

Несимметрия канонического тензора энергии непосредственно связана с наличием нескольких компонент волновых функций у всех полей, кроме скалярного (или псевдоскалярного). Иначе говоря, эта несимметрия связана с поляризационными свойствами поля, или с отличным от нуля значением спина сопоставленных полю частиц.

Обратимся теперь к моменту количества движения электромагнитного поля, напомним прежде всего выражение момента количества движения из механики точки. В четырёхмерной записи механический момент количества движения равен антисимметричному тензору 2-го ранга

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu.$$

Чисто пространственные составляющие ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) этого тензора моментов имеют известный вид обычного аксиального вектора момента количества движения

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{p}]; \quad M_x = M_{23} = y p_z - z p_y,$$

остальные же пространственно-временные составляющие дают вектор с компонентами

$$M_{4n} = ic \left(t p_n - \frac{x_n \mathcal{E}}{c^2} \right) \quad \left(x_4 = ict, \quad p_4 = \frac{i\mathcal{E}}{c} \right).$$

Как уже указывалось, изотропность пространства—времени приводит к инвариантности интеграла действия или лагранжиана относительно вращений [см. § 23, б), п. 3], откуда согласно теореме Нетер вытекают законы сохранения компонент тензора $M_{\mu\nu}$ ($\frac{d}{dt} M_{\mu\nu} = 0$). Три закона сохранения компонент момента количества движения M_{nk} хорошо известны из механики точки. Остальные же три закона сохранения $M_{4n} = \text{const}$ представляют собою релятивистское обобщение закона равномерного движения центра инерции, в чём легко убедиться, например, при переходе в сумме $\sum M_{4n}$ по всем массам системы к приближению малых скоростей, когда $\mathcal{E} \approx mc^2$ *).

*) Ср. E. Bessel-Hagen, Math. Ann., 1921; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948, § 13.

Отсылая за полным анализом момента количества движения поля к указанной выше литературе, мы получим сейчас непосредственно выражение тензора моментов, точнее плотности «орбитального» момента поля как обобщение тензора моментов из механики точки в виде:

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda}^{\text{can}} - x_\nu T_{\mu\lambda}^{\text{can}}), \quad (30,25)$$

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = -M_{[\nu\mu]\lambda}.$$

При этом вместо импульсов p_ν в механическом тензоре сейчас необходимо подставить компоненты канонического тензора энергии $T_{\nu\lambda}^{\text{can}}$, точно так же, как при переходе к теории поля вместо того же вектора импульса-энергии ($p_\nu = p$; $i\mathcal{E}/c$) мы получали компоненты тензора (плотности) энергии $T_{4\nu}$, и, в частности, вместо энергии \mathcal{E} компоненту T_{44} для плотности энергии. Тогда компоненты полного, «орбитального», момента количества движения в обычном смысле выразятся как интегралы по объёму от антисимметричных в пространственных координатах компонент тензора плотности моментов $\bar{M}_{[rs]4}$; например,

$$\bar{M}_x = \int M_{[23]4}(dr) \text{ и т. д.} \quad (30,26)$$

Расходимость тензора моментов

$$\frac{\partial M_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{i}{c} (T_{\nu\mu}^{\text{can}} - T_{\mu\nu}^{\text{can}}) = -\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{i}{c} (f_\mu{}_{[\nu\lambda]} - f_\nu{}_{[\mu\lambda]}) \quad (30,27)$$

может быть легко найдена, если принять во внимание законы сохранения (30,21), а также соотношение

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\lambda} = \delta_{\mu\lambda}.$$

Эта расходимость будет исчезать, т. е. момент количества движения (30,25) будет подчиняться закону сохранения и оставаться величиной постоянной только в том случае, когда канонический тензор энергии $T_{\mu\nu}^{\text{can}}$ является симметричным, т. е. только в случае скалярного (или псевдоскалярного) поля ($f_\mu{}_{[\nu\lambda]} = 0$).

С другой стороны, отсутствие симметрии канонического тензора энергии в случае векторного (максвелловского) и всех прочих полей показывает, что для обеспечения сохранения тензора момента количества движения к полученному выше «орбитальному» моменту количества движения поля следует добавить некоторый новый тензор третьего ранга:

$$M'_{[\mu\nu]\lambda} = M_{[\mu\nu]\lambda} + S_{[\mu\nu]\lambda}, \quad (30,28)$$

такой, чтобы их общая сумма удовлетворяла закону сохранения, т. е.

$$\frac{\partial M'_{[\mu\nu]\lambda}}{\partial x_\lambda} = 0. \quad (30,29)$$

Из равенства (30,27) видно, что для этой цели мы должны положить

$$\begin{aligned} S_{[\mu\nu]\lambda} &= -S_{[\nu\mu]\lambda} = \\ &= \frac{i}{c} (f_{\mu[\nu\lambda]} - f_{\nu[\mu\lambda]}) = -\frac{i}{4\pi c} (A_\mu H_{\nu\lambda} - A_\nu H_{\mu\lambda}). \end{aligned} \quad (30,30)$$

Тогда расходимость (30,30) в сумме с расходимостью (30,27) даёт нам значение нуль. Следует отметить, что производимая во всех обычных курсах теории поля «симметризация» тензора энергии без выяснения только что указанных соотношений не выясняет физического смысла отсутствия симметрии.

Величину $S_{[\mu\nu]\lambda}$ мы можем рассматривать как тензор плотности собственного или спинного момента количества движения поля (что соответствует для случая электромагнитного поля в корпускулярном аспекте спину фотона). Закон сохранения полного тензора плотности моментов поля (30,29) согласно теореме Нетер соответствует инвариантности в данном случае уравнений Максвелла и, следовательно, их лагранжиана относительно четырёхмерных вращений, иначе говоря, изотропности всего пространства-времени. Аналогичные соотношения имеют место также в случае иных полей.

По аналогии с равенством (30,26) мы можем найти общее значение для спина поля:

$$\bar{S}_x = \int S_{[23]4} (d\tau),$$

или, подставляя вместо $S_{[23]4}$ значение (30,30), имеем

$$\bar{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [EA] (dr).$$

Квантовые исследования показывают, что спин фотонов в долях $h/2\pi$ равен единице. Наглядно это вытекает из того обстоятельства, что для фотонов частоты ν мы имеем

$$|E| = \frac{1}{c} \left| \frac{\partial A}{\partial t} \right| = \frac{2\pi\nu}{c} |A|, \quad E = H,$$

причём в случае круговой поляризации векторы E и A имеют взаимно перпендикулярные направления.

Учитывая, что полная энергия поля определяется формулой

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) (dr),$$

находим следующее соотношение между вектором $|S|$ и U :

$$|S| = \frac{1}{2\pi\nu} |U|,$$

откуда, принимая во внимание, что согласно квантовой теории $U = h\nu$, получаем

$$|S| = \frac{h}{2\pi}.$$

За подробностями, связанными с каноническим и метрическим тензором, а также с моментом количества движения поля, отсылаем к соответствующей литературе*).

*) В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, Москва, 1947, стр. 11; F. Belinfante, Physica, 6, 887, 1939; А. Соколов и А. Мухтаров, Вестник МГУ № 8, 1948.

Об экспериментальном определении спина, т. е. вращательного момента электромагнитной волны, предсказанного ещё в классической электродинамике Садовским, см. Г. Розенберг, УФН, 40, 328, 1950.

§ 31. Вывод классического уравнения движения электромагнитной массы по методу Лорентца

Кроме определения электромагнитной массы через компоненты тензора энергии можно получить её непосредственно через силу самодействия. Этот способ определения силы обратного воздействия поля на частицу, его породившую, впервые был указан Лорентцом.

Ограничимся исследованием наиболее простого случая движения электрона вдоль оси x с нерелятивистской скоростью $v \ll c$, что является несущественным ограничением для выяснения идеи данного метода.

В этом случае мы имеем

$$m\ddot{x} = eE^t + e \int \bar{E}\rho_0(r) (dr), \quad (31,1)$$

где E^t — внешнее электрическое поле, а \bar{E} — среднее поле, создаваемое самим электроном:

$$\bar{E} = \int E\rho_0(r') (dr'). \quad (31,2)$$

Оба поля направлены вдоль оси x . Плотность $\rho_0(r) = \frac{\rho(r)}{e}$, удовлетворяющая соотношению

$$\int \rho_0(r) (dr) = 1, \quad (31,3)$$

характеризует распределение заряда электрона внутри некоторого объёма.

Для определения поля самодействия воспользуемся уравнением

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}. \quad (31,4)$$

Согласно формулам (24, 8) для точечного источника, движущегося со скоростью v вдоль оси x , имеем следующие решения в запаздывающих потенциалах:

$$\begin{aligned} \varphi &= e \int \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'} dt', \\ A_x &= \frac{e}{c} \int v(t') \frac{\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right)}{R'} dt', \end{aligned} \quad (31,5)$$

где $R' = r - r'(t')$ — расстояние между точкой наблюдения и источником.

Силу самодействия мы отнесём к одному и тому же моменту времени t . Для этого разложим δ -функцию по величине $\frac{R'}{c}$ (физический смысл этого разложения выяснится в дальнейшем)

$$\delta\left(t' - t + \frac{R'}{c}\right) = \delta(t' - t) + \frac{R'}{c} \dot{\delta}(t' - t) + \frac{R'^2}{2c^2} \ddot{\delta}(t' - t) + \frac{R'^3}{6c^3} \dddot{\delta}(t' - t) + \dots, \quad (31,6)$$

причём точки, поставленные над δ -функцией, означают производные по времени t' .

Подставляя разложения (31,6) в формулу (31,5) и воспользовавшись правилами интегрирования по δ -функции и её производным, получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{R} + \frac{e}{2c^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} - \frac{e}{6c^3} \frac{\partial^3 R^2}{\partial t^3} + \dots, \\ A_x &= \frac{e}{c} \frac{v}{R} - \frac{e\omega}{c^2} + \dots, \end{aligned} \quad (31,7)$$

где ω — ускорение движущегося электрона, а $R = r - r'(t)$.

При дифференцировании по t учтём формулы

$$\dot{r}'(t) = v \quad \ddot{r}'(t) = \omega \quad \text{и т. д.}, \quad (31,8)$$

причём $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ и т. д. Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{(R \mathbf{v})}{R} = -\frac{R_x}{R} v; \quad \frac{\partial R^2}{\partial t} = -2(R \mathbf{v}) = -2R_x v,$$

где

$$R_x = x - x'(t).$$

Ограничиваясь сейчас лишь линейными членами относительно скорости и ускорений, получим

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{R} - \frac{eR_x v}{2c^2 R} + \frac{eR_x \dot{\omega}}{3c^3} - \dots \\ A_x &= \frac{e}{c} \frac{v}{R} - \frac{e}{c^2} \omega + \dots, \end{aligned} \quad (31,9)$$

откуда согласно (31,4) находим

$$E = \frac{eR_x}{R^3} - \frac{e}{2c^2R} \left(\frac{R_x^2}{R^2} \omega + \omega \right) + \frac{2e}{3c^3} \dot{\omega} + \dots \quad (31,10)$$

Как видно из (31,1) и (31,2), сила самодействия будет равна

$$F_x = e \int \rho_0(r') (dr') \int \rho_0(r) E(dr). \quad (31,11)$$

Принимая во внимание соотношение (31,3), а также равенства, имеющие место при сферической симметрии,

$$\begin{aligned} & \int \rho_0(r') (dr') \int \rho_0(r) f(R) R_x(dr) = 0, \\ & \int \rho_0(r') (dr') \int \rho_0(r) f(R) \frac{R_x^2}{R^2}(dr) = \\ & = \frac{1}{3} \int \rho_0(r') (dr') \int \rho_0(r) f(R) (dr), \end{aligned} \quad (31,12)$$

найдем окончательно следующее нерелятивистское уравнение движения для электрона с учётом силы самодействия:

$$m\ddot{x} = eE^i - m^{el} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}} + \dots \quad (31,13)$$

Коэффициент m^{el} , являющийся полевой электромагнитной массой

$$m^{el} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \int (dr') \int \frac{\rho_0(r)\rho_0(r')}{R} (dr) \quad (31,14)$$

имеет порядок величины

$$m^{el} \sim \frac{e^2}{c^2 r_0},$$

где r_0 является классическим радиусом электрона. Смысл подобного радиуса, призванного обеспечить конечность массы электрона, и трудности, к которым он в свою очередь приводит, были уже рассмотрены раньше (§ 30).

Для выяснения физического смысла величины электромагнитной массы, полученной подобным способом,

сопоставим m^{el} с электростатической энергией U_0 покоящегося электрона.

Как известно, электростатическую энергию заряженной частицы мы можем выразить через потенциал поля φ и плотность заряда ρ :

$$U_0 = \frac{e}{2} \int \rho_0(r) \varphi(r) (dr). \quad (31,15)$$

Потенциал φ , создаваемый электрической плотностью $e\rho_0(r)$ равен

$$\varphi(r) = e \int \frac{\rho_0(r')}{R} (dr'), \quad (31,16)$$

где

$$R = |r - r'|,$$

откуда имеем

$$U_0 = \frac{e^2}{2} \int (dr') \int \frac{\rho_0(r) \rho_0(r')}{R} (dr). \quad (31,17)$$

Поэтому для электромагнитной массы вместо (31,14) можем написать

$$m^{el} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}. \quad (31,18)$$

Последняя величина для нерелятивистского случая точно совпадает со значением электромагнитной массы (30,14), полученной из рассмотрения компонент количества движения общего тензора энергии поля.

Если проделать указанные вычисления в релятивистском приближении, то в знаменателе правой части выражения (31,17) или (31,18) появится характерный множитель $k = \sqrt{1 - \beta^2}$.

Таким образом метод Лорентца привёл вновь к прежним результатам.

Множитель $4/3$ в формуле (31,18), который был подробно проанализирован в § 30, снова свидетельствует о «неустойчивости» классического лорентцева электрона (в смысле теоремы Лауэ) и о необходимости введения каких-то немаквелловых натяжений для обеспечения его равновесия, если вообще оставаться на почве классической полевой теории.

В теории Лорентца полевая электромагнитная масса появляется наряду с неполевой массой m , природа которой ближе не уточнялась. Поскольку в уравнение (31,13) обе массы (m и m^{el}) входят совершенно одинаково, неполевую массу m можно положить равной нулю. Тем самым мы становимся на точку зрения чисто электромагнитной природы массы электрона в духе программы полевой теории. Тогда уравнение движения электрона примет вид

$$m^{el}\ddot{x} = eE^i + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}} + \dots \quad (31,19)$$

Это уравнение движения отличается от простой, более привычной формы добавлением члена с третьей производной, выражающего силу лучистого трения. Важно подчеркнуть, что этот член может быть получен совершенно независимо от предыдущих рассуждений (т. е. вполне независимо от каких бы то ни было гипотез и методов расчёта, связанных с полевой теорией) из рассмотрения баланса энергии при излучении электрона. Действительно, приравнявая среднюю энергию, излучённую электроном за 1 сек.

$$\bar{U} = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}}^2 dt,$$

средней работе силы лучистого трения

$$\frac{1}{T} \int_0^T F dx = \bar{U},$$

получим для случая периодического движения электрона (с периодом колебания T) для искомой силы F значение, найденное выше:

$$F = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\dot{x}}.$$

Метод Лорентца позволяет найти также область применимости уравнения (31,19), ограниченную со стороны больших частот колебания электрона.

Пусть электрон совершает гармонические колебания с частотой ν (соответствующая длина волны λ будет равна $\frac{c}{\nu}$). Сравнивая между собою первый и второй члены силы самодействия, видим, что разложение, к которому приводит равенство (31,13), производится по величине

$$\alpha = \frac{r_0 x}{c x}$$

В случае гармонических колебаний

$$\alpha \sim \frac{r_0}{\lambda}. \quad (31,20)$$

Следовательно, пригодность уравнения движения (31,19) ограничена условием, что длина волны гармонического колебания электрона много больше его радиуса. Таким образом полученное уравнение пригодно пока что для медленных движений ($v \ll c$) и при взаимодействии с полями не слишком высоких частот ($\lambda \gg r_0$). При взаимодействии с полями, обладающими длиной волны, меньшей чем радиус электрона, разложение по величине α производить нельзя, и характер колебания электрона должен резко измениться. Это замечание относится также к любым другим теориям полевой массы, в которых вводится длина, играющая роль радиуса электрона (см. последующие параграфы).

Уравнение (31,19) можно уточнить в двух направлениях. Во-первых, обобщая вычисление, приведшее к его выводу, на релятивистские скорости электрона $v \cong c$, получим релятивистское выражение силы самодействия F , которое будет выведено иным, не лорентцовым способом, но с тем же результатом в § 34 [см. (34,35)]. Во-вторых, можно сохранить в уравнении члены с производными от x выше третьей. Все эти члены с $x^{(IV)}$, $x^{(V)}$ и т. д. в противоположность члену трения, пропорциональному \dot{x} , играющие роль лишь для высоких частот, будут явно зависеть также от радиуса или формы электрона. Согласно предыдущему этим членам нельзя придавать непосред-

ственного физического значения, и их наличие является недостатком полного уравнения движения электрона Лорентца.

Заканчивая на этом изложение старой классической теории полевой массы электрона-шарика, подчеркнём, что её существенным недостатком являлась также невозможность непосредственного обобщения на квантовую теорию.

§ 32. Нелинейная электродинамика

Перейдём теперь к рассмотрению других теорий электромагнитной массы. Прежде всего рассмотрим нелинейные уравнения электродинамики, на возможность которых указал впервые Г. Ми (1912).

Схема Ми оказалась порочной, так как в его уравнения явно входили электромагнитные потенциалы, и поэтому вся теория не удовлетворяла требованию калибровочной инвариантности. Всё же следует отметить, что идея построения новой обобщённой электродинамики путём использования различных инвариантов поля оказалась весьма плодотворной и была, в частности, использована при построении общей теории относительности. Кроме того, у Ми мы вновь находим ясную формулировку идеи «унитарной» теории поля, в которой характеристики заряженной частицы должны были получаться из описания поля. Излишне говорить, насколько преждевременной была попытка Ми добиться решения вопроса о структуре электрона до открытия его спиновых и магнитных свойств и установления квантовой механики.

В 1934 г. Борну удалось развить нелинейную теорию, удовлетворяющую всем условиям инвариантности, и получить на её основе конечное значение для электромагнитной массы заряженной частицы*).

Как было указано выше (см. § 23), из компонент антисимметрического тензора поля $H_{\mu\nu}$ можно составить

*) M. Born, Proc. Roy. Soc. A, 143, 410, 1934; M. Born and L. Infeld, *ibid.* 144, 425, 1934.

только два основных инварианта, не содержащих потенциалов и высших производных от потенциалов:

$$I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2), \quad (32,1)$$

$$I_2 = (\mathbf{E}\mathbf{H})^2. \quad (32,2)$$

Так как любая функция от инвариантов есть также инвариант, то ясно, что одного условия инвариантности и ограничения низшими производными для построения теории недостаточно, если мы отбрасываем условие линейности.

Для получения нелинейных уравнений поля Борн выбрал сперва лагранжиан в виде следующей функции от одного инварианта I_1 :

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{E_0^2} (E^2 - H^2)} \right), \quad (32,3)$$

где величина E_0 представляет собою так называемое максимальное поле.

В теории Борна выполняется некоторый принцип соответствия*), а именно, когда максимальное поле E_0 стремится к бесконечности, иначе говоря, при полях, значительно меньших максимального:

$$\left(\frac{E}{E_0} \right) \ll 1, \quad \left(\frac{H}{E_0} \right) \ll 1,$$

выражение (32,3), как легко видеть, переходит в лагранжиан максвелловской электродинамики:

$$L_0 = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2).$$

Некоторой аналогией для указанного выбора функции Лагранжа Борну послужил переход от функции Ла-

*) О значении принципа соответствия см. И. В. Кузнецов, Принцип соответствия в современной физике и его философское значение, Гостехиздат, 1948.

гранжа $L = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)$, известной из механики теории относительности для свободного электрона, к классическому пределу [см. соотношение (23,6)] $L = \frac{mv^2}{2}$, который получается при $c^2 \rightarrow \infty$. В дальнейшем оказалось возможным подобрать другие комбинации инвариантов I_1 и I_2 , также приводящих к конечному значению для собственной энергии электрона U_0 . В частности, Борн и Инфельд развили общую теорию поля, исходя из лагранжиана, являющегося функцией обоих инвариантов I_1 и I_2 вида

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - H^2}{E_0^2} - \frac{(E H)^2}{E_0^4}} \right).$$

Некоторым формальным основанием для выбора подобной, опять-таки произвольной, комбинации инвариантов оказывается то, что этот лагранжиан является так называемым объёмом тензора $H_{\mu\nu}$, равным значению определителя, построенного из элементов

$$g_{\mu\nu} + H_{\mu\nu},$$

где $g_{\mu\nu}$ — компоненты фундаментального тензора, взятого в данном случае с галилеевыми значениями [см. соотношение (23,1)]. Шредингер использовал другую произвольную комбинацию

$$L_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} \ln \left(1 + \frac{E^2 - H^2}{E_0^2} \right).$$

Выбор лагранжиана должен обеспечить также устойчивость точечного электрона, так как только в этом случае мы получим правильное соотношение между импульсом электромагнитного поля и его энергией, т. е. согласно полевой гипотезе между импульсом и энергией частицы. Лагранжиан (32,3) оказывается одной из простейших нелинейных функций инварианта I_1 , при котором обеспечивается как конечное значение для электромагнитной массы, так и устойчивость точечного заряда в указанном смысле.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая электростатического поля точечного электрона по классической нелинейной теории.

Составим общую функцию Лагранжа L из простейшего нелинейного лагранжиана (32,3) для поля L_0 и потенциальной энергии взаимодействия поля с электроном.

Полагая $\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$, $\rho(\mathbf{x} - \xi) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t - s)$, найдём согласно (23,24)

$$L = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right) - e\varphi\delta(\mathbf{r}). \quad (32,4)$$

С помощью вариационного принципа получаем [см. соотношение (23,25)]

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\partial D_n}{\partial x_n} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

где вектор D_n является по своему определению электростатической индукцией (смещением)

$$D_n = 4\pi \frac{\partial L}{\partial E_n} = \frac{E_n}{\sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}}}. \quad (32,5)$$

Отсюда находим следующее уравнение для определения поля:

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r}). \quad (32,6)$$

Подставляя сюда вместо плотности точечного заряда его разложение в интеграл Фурье:

$$e\delta(\mathbf{r}) = \frac{e}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}), \quad (32,7)$$

найдем, как обычно,

$$\mathbf{D} = -\frac{e}{2\pi^2} \text{grad} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{k^2} (d\mathbf{k}). \quad (32,8)$$

Учитывая равенство (10,11), получим известное в максвелловской теории решение

$$\mathbf{D} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}, \quad (32,9)$$

т. е. с точки зрения D -поля электрон следует рассматривать как точечный.

Из соотношения (32,5) для напряжённости поля, вызванного точечным зарядом, находим

$$E = \frac{D}{\sqrt{1 + \frac{D^2}{E_0^2}}} = \frac{er}{r \sqrt{r^4 + r_0^4}}, \quad (32,10)$$

где

$$r_0 = \sqrt{\frac{e}{E_0}}.$$

Отсюда получаем

$$\varphi = \int_r^\infty E_r dr = \frac{e}{r_0} \int_{r/r_0}^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}. \quad (32,11)$$

В начале координат ($r=0$) напряжённость достигает своего максимального значения:

$$E = \frac{e}{r_0^2} = E_0, \quad (32,12)$$

а потенциал φ остаётся конечной величиной, равной

$$\varphi_0 = \frac{e}{r_0} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Численное значение этого эллиптического интеграла равно

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 1,8541... \quad (32,13)$$

Поэтому

$$\varphi_0 = 1,8541... \frac{e}{r_0}. \quad (32,14)$$

С точки зрения анализа E -поля электрон не является точечным, и плотность распределения его заряда может быть найдена из уравнения

$$\rho' = \frac{\operatorname{div} E}{4\pi} = \frac{er_0^4}{2\pi r (r^4 + r_0^4)^{3/2}}. \quad (32,15)$$

Иными словами, с точки зрения E -поля заряд можно рассматривать распределённым в основном в объёме радиуса r_0 , так как при $r \gg r_0$ плотность будет быстро стремиться к нулю. Поэтому величину r_0 можно рассматривать как эффективный радиус заряженной частицы, под которой в дальнейшем для определённости будем подразумевать электрон*). Легко показать, что общий заряд частицы равен e .

В самом деле, общий заряд определяется из равенства

$$\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div} \mathbf{E} (dr) = \frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{E} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \mathbf{E} (r) = e. \quad (32,16)$$

Наличие двух типов полей и соответствующие им два определения для плотности заряда, как известно, имеют место в теории диэлектриков. В данном случае, по устарелой терминологии электростатики диэлектриков, «истинной» плотностью зарядов является плотность ρ (т. е. точечный источник), а «свободной» — ρ' («истинные» плюс «связанные» заряды). Отношение величины \mathbf{D} к \mathbf{E} можно рассматривать как «диэлектрическую постоянную» вакуума, являющуюся функцией положения:

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = \sqrt{1 + \frac{r_c^4}{r^4}}. \quad (32,17)$$

На больших расстояниях от точечного заряда, когда $\frac{r_0}{r} \rightarrow 0$, ε принимает значение, равное единице, как в обычной электродинамике. Можно сказать, что вместо выражения энергии $\frac{e^2}{r}$ Борн берёт $\frac{e^2}{\varepsilon r}$, причём уменьшение r компенсируется увеличением ε , так что полная энергия остаётся конечной.

*) Точнее говоря, под радиусом электрона мы будем понимать то наибольшее расстояние от центра симметрии, при котором начинает практически сказываться отклонение от обычного кулоновского поля точечного заряда.

Найдём теперь тензор энергии в борновской теории. Согласно (28,5) имеем

$$\begin{aligned} T_{11} &= \frac{1}{4\pi} E_1 D_1 - L_0, \\ T_{44} &= \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D}) - L_0, \end{aligned} \quad (32,18)$$

причём

$$L_0 = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2}{E_0^2}} \right). \quad (32,19)$$

Подставляя сюда вместо \mathbf{E} и \mathbf{D} их значения из (32,10) и (32,9) и принимая во внимание сферическую симметрию, найдём

$$\begin{aligned} \int T_{11}(dr) &= \frac{e^2}{r_0} \left(\frac{1}{3} B_1 - B_2 \right), \\ \int T_{44}(dr) &= \frac{e^2}{r_0} (B_1 - B_2). \end{aligned} \quad (32,20)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_1 &= \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \\ B_2 &= \int_0^\infty x^2 \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \right) dx. \end{aligned} \quad (32,21)$$

Интеграл B_2 может быть преобразован посредством интегрирования по частям:

$$B_2 = \frac{1}{3} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \right) dx^3 = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1+x^4)^{3/2}}.$$

Интегрируя второй раз по частям, имеем

$$B_2 = -\frac{1}{3} \int_0^\infty x d \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{3} B_1, \quad (32,22)$$

откуда находим, что

$$\int T_{11}(dr) = 0.$$

Таким образом в рассмотренном варианте теории Борна выполняется теорема устойчивости. Следовательно, борновский электрон является в данном смысле устойчивым.

Величина полевой массы электрона, как известно, может быть найдена из равенства

$$m^{el} = \frac{\int T_{44}(dr)}{c^2} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2 r_0} B_1 = \frac{2}{3} \frac{e^2 \epsilon_0}{c^2}. \quad (32,23)$$

Подставляя сюда значение потенциала φ_0 , получим

$$m^{el} = 1,2361 \dots \frac{e^2}{c^2 r_0}. \quad (32,24)$$

Отсюда, зная численные значения для m , e и c , найдём эффективный радиус электрона, практически равный классическому радиусу электрона:

$$r_0 \cong 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad (32,25)$$

а также значение для максимального поля, являющегося полем в центре электрона ($r=0$):

$$E_0 = \frac{e}{r_0^2} \cong 4 \cdot 10^{15} \text{ абс. эл.-стат. ед.}$$

Таким образом, исходя из некоторого формально безукоризненного гипотетического нелинейного обобщения электродинамики, удалось получить конечную собственную энергию (или массу) заряженной частицы как величину, полностью обусловленную энергией поля этой частицы.

Кроме того, в этой теории выполняется теорема устойчивости и достигается правильное соотношение между энергией и импульсом частицы. Всё это бесспорно является немалым достижением теории, в известном смысле осуществившей программу построения «унитарной» чисто

полевой теории электромагнитной массы электрона. Однако успехи нелинейной теории этими пунктами в сущности и ограничиваются. Точное сравнение с экспериментом каких-либо дальнейших конкретных следствий теории не имеет особого смысла обсуждать, так как всё основание теории покоится на произвольном выборе лагранжиана и не обосновано экспериментом, что является основным пороком данной теории.

Подчеркнём также, что, устранив так или иначе трудность, связанную с бесконечной «продольной» собственной энергией в классической теории поля, необходимо ещё, во-первых, подтвердить этот результат квантовым путём и, во-вторых, как подчёркивалось выше, устранить новую специфически квантовую «поперечную» часть бесконечной собственной энергии (см. ниже § 34). Обе эти задачи в теории Борна не были решены.

Квантовое же обобщение самой теории Борна как в её простейшем изложенном выше случае, так и в других вариантах не привело к каким-либо существенным новым физическим результатам. Самое квантование какой-либо нелинейной теории пока что ограничивается лишь установлением некоторых общих соотношений.

Всё же на теории Борна, являющейся простейшей известной нелинейной схемой, оказалось нередко удобным анализировать характерные нелинейные эффекты. Как известно, в электродинамике Максвелла, являющейся линейной теорией, электромагнитные поля обладают свойством суперпозиции, т. е. аддитивности, сумма решений уравнений вновь является их решением (волны, не взаимодействуя, проходят друг сквозь друга). В нелинейной теории свойство суперпозиции нарушается, ввиду чего эта теория приводит к характерным нелинейным эффектам, в частности, к рассеянию света на свете, нелинейному рассеянию света на зарядах, отражению света от света, видоизменению планковского закона для равновесного излучения и т. д., которые были довольно поучительным образом рассмотрены по этой теории. Все эти нелинейные поправки крайне малы.

Проблема нелинейной электродинамики приобрела реальное, а не формальное значение лишь после открытия

взаимного превращения частиц, предсказанного впервые в квантовой релятивистской теории электрона-позитрона. Действительно, согласно релятивистской квантовой механике два фотона (или две электромагнитные волны), могут при столкновении друг с другом виртуально породить пару частиц (электрон-позитрон или два противоположно заряженных мезона), которая в свою очередь может аннигилироваться и дать два новых фотона, т. е. в конечном счёте мы получим столкновение двух фотонов, приводящее к двум новым фотонам, иначе говоря, рассеяние света на свете. Таким образом, возможность взаимного превращения частиц приводит к нелинейным эффектам.

Можно задаться вопросом: какому изменению теории Максвелла в нелинейном смысле будет эквивалентно подобное включение эффектов, связанных с парами частиц? Символически можно сказать, что указанная релятивистская теория вакуума Дирака плюс линейная электродинамика Максвелла будут эквивалентны некоторой нелинейной электродинамике, характеризуемой особым лагранжианом. Так как искомым лагранжиан при пренебрежении высшими производными, т. е. при ограничении медленно меняющимися полями, есть функция инвариантов I_1 и I_2 , то при не слишком высоких значениях полей его можно разложить в ряд по степеням I_1 и I_2 :

$$L = I_1 + \alpha I_2 + 64\pi^2 \beta I_1^2 + \dots$$

Задача сводится к определению коэффициентов α , β , ... Теория пар Дирака приводит к коэффициентам

$$\alpha = 7\beta, \quad \beta = \frac{1}{360\pi^2} \frac{1}{2\pi} \frac{e^4 \hbar}{m^4 c^7}.$$

Довольно любопытно, что различные, как подчёркивалось, с физической точки зрения произвольные варианты формальной нелинейной электродинамики приводят к близким значениям коэффициентов, если учесть, что радиус

электрона

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{1}{137} \frac{h}{2\pi mc}.$$

Величина различных нелинейных эффектов, возникающих согласно теории пар, при указанных ограничениях оказывается крайне незначительной, как и по теории Борна. Например, эффективное сечение рассеяния света на свете, выражающееся формулой $\sigma = \frac{\text{const.}}{\lambda^3}$, даже для γ -лучей достигает всего лишь порядка $\sim 10^{-50}$ см², что лежит далеко за пределами современных экспериментальных возможностей.

Наряду с перечисленными выше эффектами и поправками в теории взаимодействия нелинейные теории поля существенно отличаются от линейных теорий тем, что, принципиально говоря, позволяют вывести уравнения движения частиц из уравнений порождаемого ими поля. В самом деле, уравнения движения заряженных (или магнитных) частиц включаются в линейную электродинамику независимо, наряду с уравнениями поля Максвелла-Лорентца, а не вытекают из последних. Это особенно ясно из следующего примера. Пусть мы имеем два покоящихся заряда e_1 и e_2 , для которых напряжённости полей равны e_1/r_1^2 и e_2/r_2^2 . Ввиду линейности обычных уравнений сумма этих решений является также решением, т. е. должна соответствовать возможному состоянию системы зарядов. На самом же деле два заряда не могут находиться в покое, они будут двигаться отталкиваясь, либо притягиваясь. Это движение зарядов никак не вытекает из линейных уравнений поля, но описывается путём добавочных уравнений движений, в которые включаются силы, действующие на заряды со стороны других зарядов.

В теории гравитации уравнения поля согласно общей теории относительности являются нелинейными. Это обстоятельство в самом деле позволило вывести уравнения движения частиц под влиянием сил тяготения из уравнений поля, порождаемого этими частицами*).

*) В. Ф о к, Journ. of Phys. USSR, 1, 1, 1939; см. также А. Е i n s t e i n, В. Н o f f m a n n, L. I n f e l d, Ann. of Math., 1938.

Поэтому из рассматриваемой нелинейной теории, принципиально говоря, также возможно вывести уравнения движения частиц из уравнений поля, порождённого этими частицами, подобно тому как это было сделано в теории гравитации.

Заметим, однако, что нелинейная электродинамика, вытекающая из релятивистской квантовой механики, которую до сих пор удалось построить лишь при некоторых ограничениях, например для случая медленно меняющихся полей, сама по себе оказалась не в состоянии устранить хотя бы трудность, связанную с бесконечной продольной собственной энергией поля. Согласно подсчётам Вейскопфа указанная расходимость в теории вакуума Дирака, в известной мере эквивалентной введению нелинейностей, приобретает всё же более слабый логарифмический характер вместо расходимости типа r^{-1} при $r \rightarrow 0^*$).

Заметим здесь же, что аналогично обстоит дело в мезодинамике, где, например, принципиальная возможность виртуального порождения пары нуклеонов или нуклона и антинуклона двумя мезонами и последующего виртуального их уничтожения с испусканием двух новых мезонов даёт типичный нелинейный эффект рассеяния мезонов на мезонах, нарушающий суперпозицию мезонных ψ -функций.

Нелинейная мезодинамика, на необходимость которой мы здесь указываем, до сих пор обсуждалась лишь в виде программы; она должна будет привести к квазидиэлектрической постоянной и квазимагнитной проницаемости вакуума и к таким эффектам, как поляризация нуклеонного вакуума, нелинейное рассеяние мезонов на мезонах и т. д., а также сможет, повидимому, обусловить ослабление взаимодействия нуклеонов на малых расстояниях, возможно содействуя устранению дипольной трудности в теории ядерных сил (см. § 48). Мы уже имели выше аналогичное ослабление электростатического по-

*) Н. Euler, Ann. d. Phys., 26, 398, 1936; Н. Euler und W. Heisenberg, Zs. f. Phys., 98, 714, 1936; V. Weisskopf, Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys., 14, 6, 1936; Zs. f. Phys., 89, 27, 1934; 90, 817, 1934; Phys. Rev., 56, 72, 1939.

тенциала в рассмотренной нелинейной теории, обязанное поляризации вакуума.

Так как все частицы так или иначе могут при столкновениях виртуально порождать пары различных других частиц, которые после виртуальной аннигиляции могут вновь превращаться в пары частиц первоначального типа, то отсюда можно заключить об универсальной нелинейности уравнений всех частиц, в том числе уравнений полей электронов, позитронов, нуклеонов и т. д. Было бы преждевременно обсуждать здесь эти новые сложные проблемы. Укажем лишь, что для нелинейных уравнений поля теряет смысл разложение на отдельные компоненты типа ряда Фурье и тем самым теряет непосредственный наглядный смысл вторичное квантование, заключающееся в сопоставлении амплитудам Фурье чисел частиц. Таким образом, повидимому, самое понятие частиц в нелинейной теории приобретёт иной смысл.

Во всяком случае следует подчеркнуть, что новейшее развитие теории вакуума (см. дополнение), учитывающее превращения частиц, использует до сих пор лишь линейную квантовую теорию, не прибегая к введению эффективных нелинейностей.

§ 33. Электродинамика полей с высшими производными

В последнее время неоднократно обсуждался вопрос о возможном обобщении уравнений электромагнитного поля путём введения высших производных. Простейшим вариантом подобной теории, которая в формальном отношении удовлетворяет всем условиям инвариантности, является схема Боппа и Подольского*). Вводя высшие производные следующего порядка в уравнения Максвелла, этим авторам удалось в известном смысле осуществить идеи полевой теории электрона, получив конечное значение для собственной электромагнитной массы.

*) F. Bopp, Ann. d. Phys., 38, 345, 1940; B. Podolsky, Phys. Rev., 62, 68, 1941; B. Podolsky and Schwed, Rev. Mod. Phys., 20, 40, 1948

Оставляя в силе максвелловское соотношение между полем и потенциалами:

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (33,1)$$

а также дополнительное условие Лорентца, накладываемое на потенциалы:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (33,2)$$

заменяем волновое уравнение Даламбера (24,5) уравнением четвёртого порядка:

$$\left(1 - \frac{1}{k_0^2} \square\right) \square A_\mu = -\frac{4\pi e}{c} \int \dot{\xi}_{\mu\nu}'(x - \xi) ds. \quad (33,3)$$

Это уравнение является релятивистски инвариантным и при $k_0^2 \rightarrow \infty$ переходит в уравнение Даламбера.

Если функция Лагранжа L зависит от потенциалов A_μ и производных от потенциалов $A_{\mu,\alpha} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\alpha}$, $A_{\mu,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$, то вариационный принцип приводит к следующему уравнению для определения полей:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\alpha\beta}} - \dots = 0.$$

В частности, мы получим уравнения (33,3), если положим

$$L_B = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{1}{16\pi k_0^2} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{e}{c} \int \dot{\xi}_\mu A_{\mu\rho}(x - \xi) ds.$$

Отсюда, как обычно, находим тензор энергии и другие основные величины, характеризующие поле.

Однако мы используем сейчас другой способ исследования уравнения четвёртого порядка (33,3), а именно, сведём новое обобщённое поле к двум полям, подчиняющимся уравнениям второго порядка.

Для этой цели введём два потенциала A'_μ и A''_μ , соответственно равные

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \left(1 - \frac{1}{k_0^2} \square\right) A_\mu, \\ A''_\mu &= -\frac{1}{k_0^2} \square A_\mu. \end{aligned} \quad (33,4)$$

Отсюда видно, что потенциал нового поля A_μ будет равняться разности потенциалов обоих полей:

$$A_\mu = A'_\mu - A''_\mu. \quad (33,5)$$

Далее, как видно из (33,3), потенциал A'_μ будет подчиняться уравнению Даламбера:

$$\square A'_\mu = -\frac{4\pi e}{c} \int \dot{\xi}_{\mu\rho}(x - \xi) ds, \quad (33,6)$$

а потенциал A''_μ — уравнению Клейна с правой частью (см. § 20):

$$(\square - k_0^2) A''_\mu = -\frac{4\pi e}{c} \int \dot{\xi}_{\mu\rho}(x - \xi) ds. \quad (33,7)$$

Таким образом первоначальное поле сведено к двум полям (своеобразному би-полю), именно: к электромагнитному полю (т. е. с квантовой точки зрения к фотонам с массой покоя, равной нулю) и ко второму полю, вектор-потенциал которого подчиняется уравнению Клейна (т. е. с квантовой точки зрения к полю, связанному с частицами с отличной от нуля массой покоя $m = \frac{hk_0}{2\pi c}$).

Образуя из потенциалов A'_μ и A''_μ поля

$$H'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x_\nu}, \quad H''_{\mu\nu} = \frac{\partial A''_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A''_\mu}{\partial x_\nu}, \quad (33,8)$$

имеем согласно (33,5)

$$H_{\mu\nu} = H'_{\mu\nu} - H''_{\mu\nu}. \quad (33,9)$$

Функция Лагранжа L , которая приводит нас к уравнениям (33,6) и (33,7), должна состоять из двух частей L' и L'' :

$$L = L' - L''. \quad (33,10)$$

L' является лагранжианом максвелловского поля. Поэтому согласно (23,24) и (23,11) имеем

$$L' = L'_0 + \frac{e}{c} \int \dot{\xi}_\mu A'_\mu \rho(x - \xi) ds, \quad (33,11)$$

где

$$L'_0 = -\frac{1}{16\pi} H'_{\mu\nu} H'_{\mu\nu}. \quad (33,12)$$

L'' является лагранжианом уравнений, которые специально используются также для описания векторных мезонов (подробности см. ниже, § 47), причём

$$L'' = L''_0 + \frac{e}{c} \int \dot{\xi}_\mu A''_\mu \rho(x - \xi) ds, \quad (33,13)$$

где

$$L''_0 = -\frac{1}{16\pi} H''_{\mu\nu} H''_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A''_\mu A''_\mu. \quad (33,14)$$

Варьируя лагранжиан L по потенциалам A_μ и A''_μ , получим в качестве уравнений Эйлера для полей $H'_{\mu\nu}$ уравнения Максвелла:

$$\frac{\partial H'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds, \quad (33,15)$$

а для полей $H''_{\mu\nu}$ уравнения, которые используются также для описания векторных мезонов

$$\frac{\partial H''_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_3^2 A''_\mu = \frac{4\pi e}{c} \int \rho(x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds. \quad (33,16)$$

Отсюда легко показать, что потенциалы будут удовлетворять исходным уравнениям (33,6) и (33,7).

Как видно из (33,11) и (33,13), энергия связи нового поля с заряженными частицами имеет вид

$$U = L - L'_0 + L''_0 = \frac{e}{c} \int \dot{\xi}_\mu A_{\mu\rho}(x - \xi) ds, \quad (33,17)$$

совпадающий с прежним выражением (23,13). Поэтому для силы самодействия мы должны получить выражение (23,17):

$$F_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu \int \rho(x - \xi) H_{\mu\nu}(x) (dx), \quad (33,18)$$

где учтено, что $H_{\mu\nu} = H'_{\mu\nu} - H''_{\mu\nu}$.

Для определения тензора энергии образуем импульс силы самодействия.

Принимая во внимание соотношения (33,15), (33,16) и (33,18), получаем

$$\int F_{\mu} ds = \int \left[\frac{1}{4\pi} H'_{\mu\nu} \frac{\partial H'_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} - \frac{1}{4\pi} H''_{\mu\nu} \left(\frac{\partial H''_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} + k_0^2 A''_{\nu} \right) \right] (dx). \quad (33,19)$$

Отсюда видно, что тензор энергии $T_{\mu\nu}$ равняется разности двух тензоров:

$$T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu} - T''_{\mu\nu}. \quad (33,20)$$

Тензор максвелловского поля $T'_{\mu\nu}$ определяется из равенства

$$\frac{\partial T'_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = \frac{1}{4\pi} H'_{\mu\nu} \frac{\partial H'_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}}, \quad (33,21)$$

или [см. также (28,5)]

$$T'_{\nu\lambda} = \frac{1}{4\pi} H'_{\mu\nu} H'_{\nu\lambda} - \delta_{\nu\lambda} L'_0. \quad (33,22)$$

Аналогично для нахождения тензора $T''_{\nu\lambda}$ имеем уравнение

$$\frac{\partial T''_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} = \frac{1}{4\pi} H''_{\mu\nu} \frac{\partial H''_{\nu\lambda}}{\partial x_{\lambda}} + \frac{k_0^2}{4\pi} H''_{\mu\lambda} A''_{\lambda}, \quad (33,23)$$

откуда, принимая во внимание тождество

$$H''_{\mu\lambda} A''_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{1}{2} A''_{\lambda} A''_{\lambda} - \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} A''_{\mu} A''_{\lambda}, \quad (33,24)$$

а также переход от равенства (33,21) к равенству (33,22), получаем

$$T''_{\mu\lambda} = \frac{1}{4\pi} H''_{\mu\nu} H''_{\nu\lambda} - \frac{k_0^2}{4\pi} A''_{\mu} A''_{\lambda} - \delta_{\nu\lambda} L''_0. \quad (33,25)$$

Рассмотрим теперь статический случай. Полагая для покоящегося точечного электрона

$$\rho(x - \xi) = \delta(t) \delta(t - s), \quad (33,26)$$

найдем для скалярного потенциала следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi' &= -4\pi e \delta(r), \\ (\nabla^2 - k_0^2) \varphi'' &= -4\pi e \delta(r).\end{aligned}\quad (33,27)$$

Подставляя вместо плотности заряда значение (32,7), получим

$$\varphi' = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{e^{ikr}}{k^2} (dk) = \frac{e}{r}, \quad (33,28)$$

$$\varphi'' = \frac{e}{2\pi^2} \int \frac{e^{ikr}}{k^2 + k_0^2} (dk) = \frac{e}{r} e^{-k_0 r}. \quad (33,29)$$

Потенциал точечного заряда нового поля равен

$$\varphi = \varphi' - \varphi'' = \frac{e}{r} (1 - e^{-k_0 r}). \quad (33,30)$$

При $r \gg \frac{1}{k_0}$ формула (33,30) переходит в известный электростатический потенциал:

$$\varphi = \frac{e}{r}, \quad (33,31)$$

а при $r = 0$ останется величиной конечной и равной

$$\varphi = ek_0. \quad (33,32)$$

Так же, как в нелинейной теории, к вопросу о плотности заряда можно подходить с двух точек зрения.

В самом деле, в случае данной теории мы также имеем два типа полей: вектор электрической напряжённости

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (33,33)$$

и вектор электрической индукции

$$\mathbf{D} = \text{grad} \left(1 - \frac{1}{k_0^2} \nabla^2 \right) \varphi. \quad (33,34)$$

Поэтому наряду с «истинной» плотностью заряда

$$\rho = \frac{\text{div } \mathbf{D}}{4\pi} = e\delta(r), \quad (33,35)$$

которая является плотностью точечных зарядов, мы

можем ввести ещё понятие плотности «свободных» зарядов:

$$\rho' = \frac{\operatorname{div} \mathbf{E}}{4\pi} = \frac{ek_0^2}{4\pi} \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \quad (33,36)$$

которая даёт «размазанный» заряд, в основном распределённый внутри сферы радиуса $r_0 \approx \frac{1}{k_0}$. Таким образом величина r_0 играет роль эффективного «радиуса» электрона.

Из последних равенств видно, что вакуум в рассматриваемой теории, аналогично нелинейной теории, как бы обладает «диэлектрической постоянной», операторное значение которой равно

$$\varepsilon = \frac{D}{E} = 1 - \frac{\nabla^2}{k_0^2}. \quad (33,37)$$

Для исследования устойчивости точечного электрона необходимо найти компоненты тензора энергии. Согласно соотношениям (33,20), (33,22) и (33,25) имеем

$$T_{11} = \frac{1}{4\pi} \left(E_1'^2 - \frac{1}{2} E'^2 - E_1''^2 + \frac{1}{2} E''^2 + \frac{k_0^2}{2} \varphi''^2 \right). \quad (33,38)$$

Подставляя сюда вместо φ' и φ'' разложения (33,28) и (33,29), получим

$$\int T_{11}(d\mathbf{r}) = \frac{e^2}{2\pi^2} \int \left(\frac{k_1^2 - \frac{1}{2} k^2}{k^4} - \frac{k_1^2 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} k_0^2}{(k^2 + k_0^2)^2} \right) (dk). \quad (33,39)$$

В последнем интеграле в силу сферической симметрии мы можем положить

$$k_1^2 = \frac{1}{3} k^2 \quad (33,40)$$

или, вводя новую переменную,

$$k = k_0 x,$$

найдем

$$\int T_{11}(d\mathbf{r}) = \frac{e^2 k_0}{3\pi} \int_0^\infty \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx. \quad (33,41)$$

Последний интеграл равен нулю, так как, вводя замену переменных $y = \frac{1}{x}$, имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - y^2}{(y^2 + 1)^2} dy = 0. \quad (33,42)$$

В силу равенства $\int T_{11}(dr) = 0$ точечный электрон будет устойчивым.

Отсюда видно, что в этой теории роль механических натяжений, необходимых для компенсации отталкивания «частей» заряда, играет второе линейное поле, энергия которого в рассматриваемом случае является величиной отрицательной (см. § 47).

Общая электростатическая энергия поля покоящегося электрона определяется из равенства

$$U_0 = \int T_{44}(dr) = \frac{e^2 k_0^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2 + k_0^2} = \frac{e^2 k_0}{2}, \quad (33,43)$$

откуда для собственной энергии (и тем самым массы) электрона, обусловленной полной энергией поля, находим

$$m^{el} = \frac{U_0}{c^2} = \frac{e^2 k_0}{2c^2} = \frac{e^2}{2c^2 r_0}. \quad (33,44)$$

Подставляя сюда вместо массы и заряда известные численные значения, найдём для радиуса электрона величину разумного порядка

$$r_0 \cong 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Таким образом теория полей с высшими производными, как и нелинейная теория, позволяет построить последовательные релятивистски инвариантные модели полевой массы, и они принадлежат в этом смысле к лучшим классическим теориям.

Однако рассмотренная здесь теория с высшими производными является всё же линейной теорией, и по-

этому с помощью её мы не сможем получить в противоположность борновской теории характерные нелинейные эффекты, например рассеяние света на свете. Не представляет особого труда дать квантовое обобщение теории Боппа-Подольского и убедиться, что оно приводит попрежнему к конечной (продольной) массе частицы, порождающей поле. Следует вновь подчеркнуть, что даже при конечном значении продольной части собственной массы частицы поперечная часть массы, обусловленная с полевой точки зрения энергией поперечной части поля, порождённого частицей, и имеющая чисто квантовый характер, всё равно оказывается согласно квантовой механике равной бесконечности. Нетрудно также обобщить теорию с высшими производными на случай, когда оба поля связаны с какими-то массами покоя m_1 , m_2 . Любопытным образом взаимодействие между двумя частицами (например, нуклеонами), переносимое подобным мезонным полем, не будет уже страдать пороком дипольной трудности (см. § 48).

Наряду с бозевскими полями уравнения с высшими производными можно также ввести в теорию спинорных частиц. Ввиду произвольности выбора функции Лагранжа, а также добавочных трудностей, появляющихся при квантовании поля, связанных с отрицательной энергией второго поля*), теория полей с высшими производными также является далеко не убедительной.

Следует отметить, что для развития теории полей с высшими производными в настоящее время наиболее существенным является физическое обоснование самой необходимости введения высших производных, а не рассмотрение отдельных конкретных вариантов, являющихся к тому же неоднозначными.

Это обоснование следует произвести с той же убедительностью, с какой, например, доказывается общая необходимость нелинейного обобщения на основании теории превращения пар частиц. В последнее

*) См. Д. Ива́ненко и А. Соколов. ЖЭТФ, 14, 379, 1944.

время в этом направлении первые шаги были предприняты Крамерсом, а также группой Баба, показавшими из общих формальных соображений, что уравнения с высшими производными получаются, естественно, в рамках общих ункторных (спин-тензорных) уравнений. Следует отметить возрождение интереса к теории с высшими производными в связи с новой теорией вакуума (см. дополнение) вследствие того, что при помощи подобных уравнений, как видно, например, из (33,30) [см. также (48,16)], можно составить обобщённые «регуляризованные» гриновские функции и, следовательно, функции, определяющие перестановочные соотношения, которые не будут обладать сингулярностями, и положить эти функции в основу теории. К подобному приёму в сущности сводятся методы регуляризации Паули-Вилларса и Фейнмана, хотя они и были введены самими авторами как искусственные приёмы, вне связи с теорией высших производных. Кроме того, следует подчеркнуть, что идеи и методы теории с высшими производными, способной описывать различные «размазанности», возможно, будут применены в связи с размазыванием заряда в новой теории вакуума.

Таким образом, ввиду общей произвольности теории, ограничивающейся притом ближайшими степенями высших производных, и ряда трудностей с отрицательной энергией эта попытка, несмотря на известные успехи, также не является окончательно убедительной и должна рассматриваться скорее лишь как предварительное указание на новые интересные возможности.

§ 34. Теория неполевой массы

Вопрос о природе массы электрона представляет в современной физике одну из центральных проблем теории элементарных частиц. В предыдущих параграфах были разобраны различные варианты классической теории электрона, основанные на гипотезе полевой массы.

Экспериментальное исследование* зависимости массы от скорости не даёт возможности решить вопрос о её природе, поскольку закон изменения массы от скоро-

сти согласно теории относительности как для полевой, так и для неполевой массы имеет один и тот же универсальный характер:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (34,1)$$

Однако, как оказывается, поведение электрона в быстропеременных полях существенным образом зависит от той или иной трактовки его массы.

Как было указано выше (см. § 31), существующие полевые теории при колебаниях электрона с длиной волны, меньшей его радиуса, приводят к весьма сложным интегро-дифференциальным уравнениям, притом с членами, зависящими от «размеров» частицы. Дирак*), исходя из ряда гипотез, построил новый вариант классической теории точечного электрона, обладающего только неполевой массой, дифференциальное уравнение движения которого имеет один и тот же вид независимо от частоты колебания электрона.

В настоящее время ещё нет окончательных аргументов в пользу той или другой точки зрения, однако предложенная выше теория обладает следующими достоинствами.

Во-первых, классическая релятивистская теория Дирака приводит к простейшему уравнению движения электрона в быстропеременных полях, совпадающему с релятивистской формой уравнений Лорентца, при отбрасывании в последнем членов с производными выше третьей.

Во-вторых, классическая (тем самым предварительная) теория неполевой массы частицы, в известном смысле, ближе всего соответствует квантовой теории, поскольку последняя в настоящем её состоянии существенным образом пользуется представлением об электро-не с неполевой массой. Отметим, однако, что при исследовании взаимодействия точечного электрона с электромагнитным полем согласно квантовой теории появляются бесконечные полевые массы двух типов: 1) продольная, возникающая благодаря взаимодействию заряда с продольной частью электрического поля и имеющая

*) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A, 167, 148, 1938.

своим классическим аналогом полевую массу Лорентца, подробно обсуждавшуюся выше, и 2) поперечная масса, возникающая при взаимодействии заряда с поперечной частью поля, т. е. с фотонами в собственном смысле, которая не имеет классического аналога (точнее говоря, обращающаяся в классическом приближении в нуль). Как показывается в квантовой теории*), физической причиной, обуславливающей эту поперечную часть энергии, возникающую согласно квантовой механике даже для покоящегося электрона (с которым по классической теории никакое поперечное поле не связано), являются флуктуации электромагнитного поля. Напряжённость поля не исчезает даже в том случае, если число фотонов равно нулю (см. дополнение). Появление указанных бесконечных масс представляет собой пока что непреодолимую трудность при построении квантовой теории элементарных частиц. Согласно полевой гипотезе значения для обеих масс должны быть конечными и равными в сумме массе той или иной частицы. Однако до настоящего момента мы не имеем релятивистски инвариантной квантовой теории конечной полевой массы, аналогичной, например, классическим теориям Борна или Боппа-Подольского. В самом деле, как неоднократно подчёркивалось, даже при успешном квантовом обобщении классической теории конечной продольной массы всё равно мы остались бы лицом к лицу перед специфически квантовой трудностью бесконечной поперечной массы.

С другой стороны, согласно точке зрения неполевой теории, обе массы—как продольную, так и поперечную,—следует отбросить (точнее говоря, необходимо построить теорию, в которой обе полевые массы были бы значительно меньше, чем неполевая масса**). Конечно, тем самым вопрос о природе массы пока что снимается с рассмотрения и подлежит разработке в будущей теории. Таким образом основная трудность построения теории точечной частицы как при классическом, так и при

*) В. Гейтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, 1940, стр. 201.

**) См. А. А. Соколов, Journ. of Phys. USSR, 5, 231, 1941.

квантовом рассмотрении связана с появлением бесконечных собственных масс.

Для обращения полевой массы в нуль в классической теории было предложено несколько способов: а) обращение бесконечной полевой массы в нуль с помощью предельного λ -процесса (Вентцель, Дирак*); эта идея, несмотря на неоднозначность введения параметра λ , обратила на себя известное внимание, поскольку теория λ -процессов может быть сравнительно просто обобщена на квантовый случай; б) исключение бесконечной полевой массы электрона при помощи введения некоторого вспомогательного поля (теория би-поля). Последний способ**) позволяет наиболее прямым путём прийти к уравнению движения точечного заряда.

В заключение заметим, что последние успехи новейшей квантовой теории вакуума, подтверждённые рядом экспериментов (подробнее см. дополнение), помогли всё же выяснить некоторые вопросы теории собственной массы.

Фактически удалось показать, что небольшая часть массы электрона носит явно полевой характер. Эта полевая доля оказывается примерно равной $\Delta m \sim \frac{1}{137} m$. Остальная часть массы, повидимому, не может быть обусловлена энергией электромагнитного поля, тем более энергией других полей. Следовательно, у электрона, как и у других элементарных частиц, должна существовать некоторая основная «затравочная» масса, к которой уже добавляется полевая масса. Возможно, что классическая теория неполевой массы поможет со своей стороны в той или другой степени разобраться в вопросе о природе «затравочной» массы элементарных частиц. Появление новых более совершенных теорий, относящихся к учению о природе собственной массы элементарных частиц, а вместе с тем и учение о строении материи, будет в значительной

*) См., например, Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей (дополнения), Гостехиздат, 1947; P. A. M. Dirac, The principles of quantum Mechanics, 3-rd. Oxford, 1947, § 78; М. А. Марков, УФН, 29, 269, 1946; Д. И. Блохинцев, Вестник МГУ, № 1, 1948.

**) А. А. Соколов, Вестник МГУ, № 2, 1947; см. также ЖЭТФ, 18, 280, 1948.

мере зависеть от новых экспериментов в области ядерной и космической физики.

Во всяком случае, существующие как классические, так и квантовые теории, связанные со строением элементарных частиц, носят ещё предварительный характер. О неисчерпаемости изучения вопроса о строении материи писал ещё Ленин в 1908 г.; в частности, он указал. „Материя исчезает»—это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идёт глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса ~~и~~ т. п.) и которые теперь обнаруживаются, как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо *единственное* «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью*, существовать вне нашего сознания (*).

а) Теория λ -процесса

Представим трёхмерную плотность неподвижного заряда при $e \rightarrow \lambda$ разложенной в интеграл Фурье:

$$\rho(\mathbf{r}) = e \nu_0(\mathbf{r}) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int \nu_0(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (d\mathbf{k}),$$

где амплитуда Фурье $\nu_0(\mathbf{k})$ характеризует распределение плотности электрона в пространстве импульсов, т. е. даёт так называемый форм-фактор. Для равномерно заряженного электрона-шарика радиуса r_0 плотность $\rho(\mathbf{r}) = \text{const}$ при $r \leq r_0$ и $\rho(\mathbf{r}) = 0$ при $r > r_0$.

Для точечного электрона $\nu_0(\mathbf{k}) = 1$, поэтому

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r}).$$

Значение потенциала может быть найдено из уравнения Пуассона:

$$\varphi = -\frac{4\pi\rho(\mathbf{r})}{\nabla^2} = \frac{e}{2\pi^2} \int \rho_0(\mathbf{k}') \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}}{k'^2} (d\mathbf{k}'),$$

причём в последнем выражении переменную \mathbf{k} мы заменили на $-\mathbf{k}'$.

*) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1949, стр. 243.

Полная энергия U_0 поля, связанного с зарядом, равна

$$U_0 = \frac{1}{8\pi} \int E^2 (d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) (d\mathbf{r}).$$

Подставляя сюда значения для $\varphi(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r})$ и учитывая соотношение

$$\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} (d\mathbf{r}) = 8\pi^3 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'),$$

получим

$$U_0 = \frac{e^2}{4\pi^2} \int \frac{\rho_0^2(k)}{k^2} (dk).$$

Интегрируя последнее выражение в случае сферической симметрии по углам вектора \mathbf{k} , находим

$$U_0 = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \rho_0^2(k) dk.$$

Постараемся теперь подобрать для форм-фактора $\rho(k)$ такой вид, при котором энергия поля U_0 , связанного с электроном, обратилась бы в нуль. Задача эта, очевидно, не имеет однозначного решения.

Остановимся на одном из возможных вариантов, при котором

$$\rho_0^2(k) = \cos k\lambda.$$

Здесь параметр λ является пока что некоторой постоянной величиной.

Электростатическая энергия U_0 поля заряженной частицы будет при этом равняться

$$U_0 = \frac{e^2}{\pi} \int_0^\infty \cos k\lambda dk.$$

Последний интеграл пропорционален δ -функции:

$$U_0 = e^2 \delta(\lambda),$$

которая при всех конечных значениях λ обращается

в нуль*), за исключением случая $\lambda = 0$. Поэтому, оставляя параметр λ конечным, но в пределе сколь угодно малым, найдём, что электростатическая энергия поля, связанного с точечным электроном, а значит, и продольная полевая электромагнитная масса не только не равны бесконечности, но даже обращаются в нуль в классическом некантовом случае. Нетрудно видеть, что теорема устойчивости будет при этом тождественно выполнена, так как в покоящейся системе координат все компоненты $\int T_{\mu\nu}^0(dr_0)$ равняются нулю. Таким образом δ -образная плотность в пространстве импульсов обеспечивает «устойчивость» заряда в рассмотренном выше смысле. Очевидным недостатком λ -процесса является добавочное требование стремления λ к нулю лишь в качестве последнего этапа вычислений, так как в противном случае получаются прежние расходящиеся результаты.

Мы видим, что введение форм-фактора является весьма общим методом, позволяющим с единой точки зрения сформулировать такие разнородные модели электрона, как частица-шарик и точечный предельный электрон.

Важным преимуществом λ -форм-фактора является возможность его представления в релятивистски инвариантном виде. До сих пор мы ограничивались трёхмерным случаем, пригодным для покоящегося электрона. Введём теперь четырёхмерный вектор λ_μ с компонентами

*) Строго говоря, $\delta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos k\lambda dk$ является величиной,

неопределённой даже при $\lambda \neq 0$. Поэтому этот интеграл следует понимать, согласно замечаниям, сделанным выше о δ -функции, как предельное значение некоторого выражения, например, типа

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\alpha k} \cos k\lambda dk = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \lambda^2}$$

(множитель $e^{-\alpha k}$ обращает осциллирующую на бесконечности функцию $\cos k\lambda$ в нуль). Переходя к пределу $\alpha \rightarrow 0$, получим при $\lambda \neq 0$

$$\delta(\lambda) = 0.$$

λ , λ_0 , причём $\lambda_0 > |\lambda|$, т. е. четырёхмерный вектор λ_μ должен быть времени-подобным. Тогда вместо произведения $k\lambda$, которое входит в форм-фактор, мы будем иметь инвариант $\lambda_0 k - \lambda k$. Для конечного значения λ теория не инвариантна, так как вспомогательный вектор λ_μ определяет некоторое избранное направление в четырёхмерном мире, но в пределе $\lambda \rightarrow 0$ теория оказывается инвариантной.

В системе координат покоящегося электрона мы можем положить $\lambda_0 = \lambda$, $\lambda = 0$ и для $\rho_0^2(k)$ получим прежнее выражение $\cos k\lambda$.

Очевидно, можно ввести другие инвариантные форм-факторы, приводящие к конечной или исчезающей полевой массе, однако в числе последних λ -форм-фактор является, повидимому, простейшим. Мы не рассматриваем здесь других обрывающих множителей, приводящих к конечной полевой массе, так как подобные теории не привели к каким-либо убедительным или физически интересным результатам.

В λ -теории электрон остаётся точечным в смысле пространственного распределения, но ему сперва приписывается некоторая протяжённость во времени, т. е. длительность, величина которой в пределе стремится к нулю. Можно сказать, что вспомогательный вектор λ своеобразным путём заменяет радиус электрона.

Нетрудно показать, что введение λ -форм-фактора типа $\cos(k\lambda_0 - k\lambda)$ эквивалентно следующему видоизменению Δ -функции [см. соотношение (17,13)], и D -функции [см. соотношение (20,4)], определяющих пуассоновы скобки для величин поля классической теории (а также соответствующие четырёхмерные правила перестановки квантовой теории полей):

$$\Delta_\lambda = \frac{1}{2} [\Delta(x + \lambda) + \Delta(x - \lambda)]$$

и, соответственно,

$$D_\lambda = \frac{1}{2} [D(x + \lambda) + D(x - \lambda)].$$

Действительно, подставляя форм-фактор плотности λ -теории, т. е. $\cos(k\lambda_0 - k\lambda)$, в разложения Фурье Δ -функ-

ции и D -функции и производя интеграции, получим выше-приведённые выражения.

Одним из достоинств λ -теории, как всякого релятивистски инвариантного формализма, является возможность его перенесения в релятивистскую квантовую механику. При этом четырёхмерные правила перестановки волновых функций и других разнообразных величин, определяющих поля, например, электромагнитных потенциалов, гравитационных и мезонных потенциалов, будут определяться не Δ -функцией или D -функцией, но видоизменёнными функциями Δ_λ и D_λ *).

Как и в классической теории, λ -форм-фактор обеспечивает в квантовой теории исчезновение продольной полевой массы или собственной энергии частицы, обращая электростатическую энергию поля точечного заряда в нуль.

Заметим, однако, что никаких разумных способов устранения бесконечной поперечной энергии до сих пор не указано. Одно время Дирак придерживался мысли о необходимости введения для этой цели отрицательных энергий фотонов и отрицательных вероятностей, но эта сложная и неплодотворная схема была им самим оставлена (см. третье издание его книги).

До сих пор мы рассматривали λ -теорию с точки зрения введения в классической и квантовой теории нового форм-фактора, предназначенного, главным образом, для устранения расходимости в продольной энергии поля. Однако, точно так же, как в теории классической полевой массы, можно исходить не только из выражения энергии или импульса, но брать за отправной пункт вывод уравнения движения Лорентца. В этом случае теория λ -процесса приводит к другой трактовке этих уравнений движения.

*) Как известно из релятивистской квантовой механики, четырёхмерные правила перестановки для простейшего скалярного поля имеют вид (см. § 45)

$$\varphi(r, t) \varphi(r', t') - \varphi(r', t') \varphi(r, t) = \frac{2ch}{i} D(r-r', t-t') = \frac{2ch}{i} D(x-x').$$

В теории же λ -процессов в правую часть последнего равенства вместо функции D мы должны подставить функцию D_λ .

Первоначальная мысль Вентцеля заключалась в использовании многовременного формализма, описывающего электроны и поле своими отдельными координатами ξ и η и значениями времени τ и t . Тогда при определении действия поля на точечный электрон в данный момент времени необходимо корректным образом совершить предельный переход $\tau \rightarrow t$. Для уточнения этого перехода вводится вспомогательный вектор λ_μ , полагаемый затем равным нулю:

$$r = \xi + \lambda,$$

$$t = \tau + \lambda_0.$$

Наметим совсем коротко дальнейший ход этих идей. Введя новые потенциалы, совпадающие с максвелловскими в областях вне светового конуса и равные разности запаздывающих и опережающих максвелловских потенциалов в области абсолютно прошлого, Вентцель и Дирак получили, совершая при помощи вектора λ_μ переход $\tau \rightarrow t$, релятивистские уравнения движения для точечного электрона без инерциальных полевых членов и без членов с производными выше третьей, но с правильным членом затухания. Это уравнение будет выведено нами иным способом [см. (34,36)]. Паули и Яух применили λ -процесс в теории мезонного поля, причём выяснилось, что полевая продольная мезонная масса нуклеона не будет уже равной нулю, а равняется по порядку величины массе мезона*). Других существенных результатов эти приложения λ -теории не дали.

Окончательный итог проведенного краткого анализа λ -теории не может, очевидно, говорить в её пользу.

*) W. P a u l i, Phys. Rev., 64, 332, 1943; J. M. J a u s h, Phys. Rev., 63, 335, 1943.

В простейшем случае потенциал скалярного мезонного поля (созданного нуклеоном: протоном, нейтроном) определяется функцией Грина обобщенного уравнения Пуассона (см. § 44). С учётом λ -форм-фактора вместо (14,9) мы будем иметь:

$$G_\lambda = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \cos k\lambda \cdot k \frac{\sin kR}{k^2 + k_0^2} dk,$$

Сам вспомогательный вектор λ_μ не имеет никакого физического смысла и не проявляется непосредственно в каких-либо явлениях. В качестве форм-фактора его введение удобно, но совершенно произвольно и не однозначно*). Кроме того, с помощью λ -процессов не удалось устранить трудностей с расходимостью поперечной энергии, возникающей при квантовой трактовке.

б) Т е о р и я б и - п о л я

Перейдём теперь к выводу классического релятивистского уравнения электрона при помощи нового метода, основанного на введении второго вспомогательного поля.

Вектор-потенциал второго (немаквелловского) поля будем обозначать маленькими буквами a_μ .

Компоненты тензора немаквелловского поля $h_{\mu\nu}$ будут равны

$$h_{\mu\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (34,2)$$

Для компонент маквелловского поля $H_{\mu\nu}$ остаётся старое выражение (23,2), т. е.

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (34,3)$$

в частности, для потенциала самодействия ($R \rightarrow 0$)

$$G_\lambda = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 \cos k\lambda}{k^2 + k_0^2} dk = \frac{1}{2\pi} \delta(\lambda) - \frac{k_0}{4\pi} e^{-k_0\lambda},$$

или для малых значений λ

$$G_\lambda = -\frac{k_0}{4\pi} \neq 0.$$

Подсчёт магнитных моментов нуклеонов приводит согласно λ -теории к конечным значениям, но с обратными по сравнению с требуемым эмпирически знаками. Таким образом, уже самые простые обобщения λ -теории на мезонное поле показали её несостоятельность.

*) См., например, И. П о м е р а н ч у к, ЖЭТФ, 17, 567, 1947.

Подберём тензор $h_{\mu\nu}$ таким образом, чтобы новое вспомогательное поле действовало только на электрон, его порождающий, и не могло быть излучённым в виде свободных волн.

Для функции действия S (см. § 23) имеем

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \quad (34,4)$$

Для первой части функции действия S_1 , определяющей свободное движение частицы, мы оставляем выражение (23,5):

$$S_1 = -mc \int \sqrt{V - \dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} ds. \quad (34,5)$$

Для второй части функции действия S_2 , относящейся к полю, вместо (23,10) и (23,11) напомним выражение

$$S_2 = \int L_0(dx), \quad (34,6)$$

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi} (H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} h_{\mu\nu}),$$

причём в функцию Лагранжа наряду с максвелловским $H_{\mu\nu}$ введено также немаксвелловское поле $h_{\mu\nu}$.

Наконец, последняя часть функции действия определяет взаимодействие поля с электроном:

$$S_3 = \frac{e}{c} \int ds \int \rho(x - \xi) [\dot{\xi}_\mu (A_\mu^i + A_\mu - a_\mu)](dx). \quad (34,7)$$

При этом к обычному потенциалу A_μ прибавляем потенциал A_μ^i , создаваемый внешними источниками, и вычитаем в согласии с излагаемой гипотезой особый (немаксвелловский) потенциал a_μ , действующий только на заряд, его порождающий.

При варьировании функции S по координатам электрона нас будут интересовать только части S_1 и S_3 :

$$S' = S - S_2 = \int L' ds, \quad (34,8)$$

где

$$L' = -mc \sqrt{-\dot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu} + \frac{e}{c} \int \rho(x - \xi) [\dot{\xi}_\mu (A_\mu^i + A_\mu - a_\mu)](dx). \quad (34,9)$$

При помощи уравнений (23,14) и (23,20) находим уравнение движения частицы

$$m \ddot{\xi}_\mu = F_\mu^i + F_\mu. \quad (34,10)$$

Здесь

$$F_\mu^i = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}^i(\xi)$$

есть сила, действующая на электрон со стороны внешнего поля [ср. (23,19)]; с другой стороны,

$$F_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu \int \rho(x - \xi) [H_{\mu\nu}(x) - h_{\mu\nu}(x)](dx) \quad (34,11)$$

обозначает результирующую силу самодействия со стороны максвелловского и немаксвелловского полей.

Равенство (34,10) содержит в себе четыре уравнения. Однако вместо четвертого уравнения всегда можно взять уравнение (23,20), которое выражает собою ортогональность четырёхмерного вектора скорости по отношению к ускорению:

$$\ddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = 0. \quad (34,12)$$

Отсюда также следует равенство, которым мы воспользуемся в дальнейшем:

$$\ddot{\xi}_\mu \dot{\xi}_\mu = -\dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\mu. \quad (34,13)$$

При варьировании функции действия по электромагнитным потенциалам мы можем отбросить часть S_1 , не содержащую потенциалов A_μ .

Тогда

$$S'' = S - S_1 = \int L(dx),$$

причём

$$L = L_0 + \frac{e}{c} \int \rho (x - \xi) [\dot{\xi}_\mu (A_\mu^i + A_\mu - a_\mu)] ds. \quad (34,14)$$

Вариационный принцип, применённый к лагранжиану L , даёт [см. также (23,25)]

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \quad (34,15)$$

Аналогичное уравнение получаем для второго потенциала a_μ .

Отсюда находим дифференциальные уравнения для максвелловского и немаксвелловского полей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{4\pi e}{c} \int \rho (x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds, \\ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \frac{4\pi e}{c} \int \rho (x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds. \end{aligned} \quad (34,16)$$

Подчиняя потенциалы условиям Лорентца

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial a_\nu}{\partial x_\nu} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \square A_\mu &= -\frac{4\pi e}{c} \int \rho (x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds, \\ \square a_\mu &= -\frac{4\pi e}{c} \int \rho (x - \xi) \dot{\xi}_\mu ds. \end{aligned} \quad (34,17)$$

Таким образом мы приходим к частному случаю теории полей типа Бюппа-Подольского, когда покоящаяся масса второго (немаксвелловского) поля равна нулю ($k_0 = 0$). Следовательно, здесь можно использовать полученные для указанной теории результаты, согласно которым наш электрон оказывается устойчивым, а его электромагнитная масса, пропорциональная k_0 [см. соотношение (33,44)], должна обращаться в нуль.

Далее, из последних формул мы видим, что потенциалы A_μ и a_μ подчиняются одним и тем же дифферен-

циальным уравнениям. Используя произвольность выбора решений этих линейных уравнений, при решении уравнения с обычными потенциалами A_μ мы возьмём одни запаздывающие потенциалы, которые приводят к излучению электромагнитной энергии, а при решении уравнений, содержащих немаквелловские потенциалы a_μ второго вспомогательного поля, возьмём полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов (наличие комбинации в виде полусуммы запаздывающих и опережающих потенциалов делает, очевидно, невозможным излучение немаквелловских волн; см. выше § 17).

Релятивистски инвариантная плотность $\rho(x - \xi)$ для точечного электрона равна

$$\rho(x - \xi) = \delta(r - \xi) \delta(t - \tau). \quad (34,18)$$

Тогда для силы самодействия получаем

$$F_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu [H_{\mu\nu}(\xi) - h_{\mu\nu}(\xi)]. \quad (34,19)$$

Принимая во внимание замечание, сделанное о выборе решений для потенциалов маквелловского и немаквелловского полей, имеем

$$A_\mu = A_\mu^r$$

(запаздывающие потенциалы),

$$a_\mu = \frac{1}{2} (A_\mu^r + A_\mu^a) \quad (34,20)$$

(полусумма запаздывающих и опережающих потенциалов), откуда

$$H_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (A_\nu^r - A_\nu^a)}{\partial \xi_\mu} - \frac{\partial (A_\mu^r - A_\mu^a)}{\partial \xi_\nu} \right]. \quad (34,21)$$

Итак, со стороны собственного поля на электрон действует сила, определяемая полуразностью запаздывающих и опережающих потенциалов. Введение подобной гипотетической комбинации, используемой также в теории классического электрона Дирака (1938 г.), может быть

сведено простым путём, как мы сейчас показали, к гипотезе о существовании второго немаквелловского поля.

Как видно из (17,20), функция Грина уравнения Даламбера с решениями, являющимися полуразностью запаздывающих и опережающих потенциалов, будет равна

$$G = \frac{c}{4\pi} f(x, x'), \quad (34,22)$$

где

$$f(x, x') = \delta[(r - r')^2 - c^2(t - t')^2] \frac{t - t'}{|t - t'|}. \quad (34,23)$$

Поэтому, когда в правой части уравнения Даламбера стоит четырёхмерный ток точечного заряда, равный

$$j_\mu(x') = \frac{4\pi e}{c} \int \xi'_\mu \delta(r' - \xi') \delta(t' - \tau') ds', \quad (34,24)$$

то для вектора-потенциала находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A_\mu^r - A_\mu^a) &= \frac{c}{4\pi} \int j_\mu(x') f(\xi, x') (dx') = \\ &= e \int \xi'_\mu f(\xi, \xi') ds'. \end{aligned} \quad (34,25)$$

Здесь для краткости введено обозначение

$$\xi'_\mu = \xi_\mu(s'),$$

откуда с помощью (34,19) и (34,21) получим следующее значение для силы самодействия:

$$F_\mu = \frac{e^2}{c} \int \left(\xi_\nu \xi'_\nu \frac{\partial}{\partial \xi_\mu} - \xi_\nu \xi'_\mu \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \right) f(\xi, \xi') ds'. \quad (34,26)$$

Введём в дальнейшем обозначение

$$\sigma = (\xi_\mu - \xi'_\mu)(\xi_\mu - \xi'_\mu). \quad (34,27)$$

Тогда

$$F_\mu = \frac{2e^2}{c} \int [\xi_\nu \xi'_\nu (\xi_\mu - \xi'_\mu) - \xi_\nu \xi'_\mu (\xi_\nu - \xi'_\nu)] \frac{\partial f}{\partial \sigma} ds', \quad (34,28)$$

причём здесь принято во внимание, что

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_\mu} = 2(\xi_\mu - \xi'_\mu) \frac{\partial f}{\partial \sigma}.$$

Учитывая наличие δ -функции под знаком интеграла в (34,28), можно заключить, что область интегрирования по величине s' будет лежать около точки s .

Вводя новую переменную

$$u = s' - s \quad (34,29)$$

и разлагая подинтегральные выражения по малому параметру u , находим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}'_{\mu} &= \dot{\xi}_{\mu}(s+u) = \dot{\xi}_{\mu} + u\ddot{\xi}_{\mu} + \frac{u^2}{2}\ddot{\xi}_{\mu} + \dots, \\ (\xi_{\mu} - \xi'_{\mu}) &= -u\dot{\xi}_{\mu} - \frac{u^2}{2}\ddot{\xi}_{\mu} - \frac{u^3}{6}\ddot{\xi}_{\mu} + \dots \end{aligned} \quad (34,30)$$

При помощи равенств (34,12) и (34,13) получаем

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{\nu} [\dot{\xi}'_{\nu} (\xi_{\mu} - \xi'_{\mu}) - \dot{\xi}'_{\mu} (\xi_{\nu} - \xi'_{\nu})] &= \\ &= -\frac{c^2 u^2}{2} \ddot{\xi}_{\mu} - \frac{u^3}{3} (c^2 \ddot{\xi}_{\mu} - \dot{\xi}_{\mu} \ddot{\xi}_{\nu} \ddot{\xi}_{\nu}). \end{aligned} \quad (34,31)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= (\xi_{\mu} - \xi'_{\mu}) (\xi_{\mu} - \xi'_{\mu}) = u^2 \dot{\xi}_{\nu} \dot{\xi}_{\nu} = -c^2 u^2, \\ \frac{\tau - \tau'}{|\tau - \tau'|} &= -\frac{u}{|u|}. \end{aligned} \quad (34,32)$$

Подставляя последние соотношения в формулу (34,28), находим

$$\begin{aligned} F_{\mu} &= -\frac{e^2}{c} \int \left[\frac{1}{2} \ddot{\xi}_{\mu} u + \frac{1}{3} \left(\ddot{\xi}_{\mu} - \frac{1}{c^2} \dot{\xi}_{\mu} \ddot{\xi}_{\nu} \ddot{\xi}_{\nu} \right) u^2 \right] \times \\ &\quad \times \frac{d}{du} \left(\frac{u}{|u|} \delta(c^2 u^2) \right) du. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее выражение по частям и принимая во внимание, что

$$\delta(\infty) = 0,$$

имеем

$$F_{\mu} = \frac{e^2}{c} \int \left[\frac{1}{2} \ddot{\xi}_{\mu} \frac{u}{|u|} + \frac{2}{3} \left(\ddot{\xi}_{\mu} - \frac{1}{c^2} \dot{\xi}_{\mu} \ddot{\xi}_{\nu} \ddot{\xi}_{\nu} \right) |u| \right] \delta(c^2 u^2) du.$$

Как видно из равенств (34,27) и (34,25), $\sigma = -c^2 u^2$ представляет собою квадрат четырёхмерного расстояния между двумя положениями электрона.

В частности, в нерелятивистском приближении ($t = s$) мы можем рассматривать σ как предельное значение следующего выражения:

$$\sigma = -c^2 (s' - s)^2 + r^2 = -c^2 u^2 + r^2,$$

при $r \rightarrow 0$, где r является уже трёхмерным расстоянием.

Рассматривая $\delta(c^2 u^2)$ как предел выражения $\delta(c^2 u^2 - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, форма которого не может измениться при переходе к релятивистскому случаю, найдём согласно (6,8)

$$\int |u| \delta(c^2 u^2) du = \frac{1}{c^2} \int |v| \delta(v^2) dv = \frac{1}{c^2}. \quad (34,33)$$

Кроме того, мы имеем соотношение

$$\int \frac{u}{|u|} \delta(c^2 u^2) du = 0, \quad (34,34)$$

которое следует из того факта, что подинтегральное выражение является нечётной функцией.

Отсюда получаем следующее выражение для силы самодействия:

$$F_\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\ddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2} \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu \right). \quad (34,35)$$

Выражение же для собственной массы, пропорциональное интегралу (34,34), обращается в нуль ($m^{el} = 0$). Подчеркнём ещё раз, что исключение бесконечной собственной массы существенно связано с тем обстоятельством, что для силы самодействия мы выбрали полуразность запаздывающих и опережающих потенциалов. При любых других комбинациях полей (одни запаздывающие или одни опережающие потенциалы, полусумма запаздывающих и опережающих потенциалов) собственная полевая масса для точечной частицы обращается в бесконечность.

Подставляя последнее выражение в равенство (34,10) найдём окончательно следующее классическое (не квантовое) релятивистское уравнение движения для точеч-

ного электрона:

$$m\ddot{\xi}_\mu = \frac{e}{c} \dot{\xi}_\nu H_{\mu\nu}^i + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\ddot{\xi}_\mu - \frac{1}{c^2} \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu \right). \quad (34,36)$$

Для ясности подчеркнём снова, что это уравнение отличается от уравнения Лорентца (31,13), во-первых, отсутствием члена с полевой массой; во-вторых, отсутствием членов с производными выше третьей; в-третьих, уравнение (34,36) сформулировано в релятивистски инвариантном виде. Величина

$$dG'_\mu = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\xi}_\mu \ddot{\xi}_\nu \dot{\xi}_\nu ds \quad (34,37)$$

представляет собою четырёхмерный импульс излучения. Проекция импульса на временную ось $G_t = \frac{1}{ic} G_4$, т. е. энергия излучаемых световых волн, взятая со знаком минус, является отрицательной величиной ($\tau > 0$). Это связано с тем обстоятельством, что электрон всегда теряет энергию на излучение, когда он движется с ускорением.

Другой член четырёхмерного импульса самодействия

$$dG''_\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\xi}_\mu ds \quad (34,38)$$

связан с электромагнитным полем движущегося электрона. Эта часть импульса не излучается, так как равняется полному дифференциалу от электромагнитного количества движения

$$C''_\mu = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\xi}_\mu \quad (34,39)$$

и является поэтому обратимой величиной. В нерелятивистском приближении члены затухания, добавленные к лорентцевой силе, сводятся к известному выражению для силы лучистого трения (см., например, § 31).

Заметим, что аналогично теории регуляризации*) или приведения к конечному виду различных расходимостей

*) W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys., 21, 434, 1949. См. также Сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

в новейшей теории вакуума можно назвать приём устранения бесконечностей с помощью λ -процесса «формалистическим», поскольку в конечном выводе λ -вектор стремится к нулю и исчезает из конечного результата. С другой стороны, метод устранения бесконечностей при помощи компенсирующего би-поля следует назвать «реалистическим», поскольку это гипотетическое поле предполагается реально существующим и остаётся в конечном результате. Очевидно также, что недавние работы Пайса *) представляют собой по существу не что иное, как дальнейшее развитие идеи компенсирующего би-поля уже при помощи не векторного, а скалярного и других полей.

§ 35. Интегрирование уравнения движения электрона

Интегрирование уравнения движения точечного электрона вида (34,36) встретило ряд затруднений. В силу того, что это уравнение содержит третью производную по собственному времени, необходимо, кроме тривиальных начальных условий, т. е. задания начальной координаты и начальной скорости, ввести ещё какое-то новое третье дополнительное условие.

Для примера остановимся на исследовании прямолинейного движения.

Как известно, электрон будет двигаться по прямой линии в том случае, когда на него со стороны внешнего поля действует только электрическая сила, направленная по оси x , совпадающая с направлением начальной скорости. Принимая во внимание, что в этом случае отличной от нуля будет лишь одна компонента, и вводя обозначения ($H_{41}^i = iE$), $x = \xi_1$ и $t = \frac{1}{ic} \xi_4$, находим

$$m\ddot{x} = etE + \frac{2e^2}{3c^3} \left(\ddot{x} - \frac{1}{c^2} \dot{x} (\dot{x}^2 - c^2 \dot{t}^2) \right), \quad (35,1)$$

$$mc^2 \ddot{t} = exE + \frac{2e^2}{3c^3} [c^2 \ddot{t} - \dot{t} (\dot{x}^2 - c^2 \dot{t}^2)]. \quad (35,2)$$

*) О работах Пайса см. сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

Вместо равенства (35,2) мы можем взять соотношение (23,21), которое в нашем случае принимает вид

$$c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 = c^2. \quad (35,3)$$

Чтобы удовлетворить уравнению (35,3), положим

$$\begin{aligned} ct &= c \operatorname{ch} q, \\ \dot{x} &= c \operatorname{sh} q. \end{aligned} \quad (35,4)$$

Величина q связана с трёхмерной скоростью движения соотношением

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{t}} = c \operatorname{th} q. \quad (35,5)$$

В частности, для малого значения скоростей v (нерелятивистский случай) находим

$$q = \frac{v}{c} = \beta.$$

Подставляя (35,4) в равенство (35,1), получим уравнение для определения величины q :

$$\dot{q} - s_0 \ddot{q} = \frac{e}{cm} E, \quad (35,6)$$

где $s_0 = \frac{2}{3} \frac{r_0}{c}$, а величина $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ является классическим «радиусом», играющим роль его эффективного размера.

При решении уравнения (35,6) примем, что внешнее поле является функцией одного собственного времени. Вообще же говоря, оно может зависеть как от t , так и от x . В этом более общем случае решение нашей задачи примет уже вид интегрального уравнения; как обычно, это интегральное уравнение будет эквивалентно не только исходному дифференциальному уравнению движения, но также будет автоматически учитывать и начальные условия.

Решение уравнения (35,6) будем искать в виде

$$q = \frac{e}{mc} \int E(s') G(s-s') ds', \quad (35,7)$$

где функция Грина G определяется из равенства

$$\dot{G} - s_0 \ddot{G} = \delta(s - s') = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(s-s')} dk, \quad - (35,8)$$

откуда

$$G = G_1 + G_0. \quad (35,9)$$

Здесь G_1 является сингулярной частью функции Грина:

$$G_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ik(s-s')}}{ik - s_0 (ik)^2} dk. \quad (35,10)$$

Несингулярная же её часть определяется из решения однородного уравнения

$$\dot{G}_0 - s_0 \ddot{G}_0 = 0. \quad (35,11)$$

При вычислении функции G_1 разложим подинтегральное выражение на сумму двух членов:

$$\frac{1}{ik - s_0 (ik)^2} = \frac{1}{ik} + \frac{s_0}{1 - s_0 ik}. \quad (35,12)$$

С помощью теории вычетов (см. § 11) находим

$$G_1 = \begin{cases} \frac{1}{2}; & s > s', \\ -\frac{1}{2} + e^{\frac{s-s'}{s_0}}; & s < s'. \end{cases} \quad (35,13)$$

Из уравнения (35,11) получаем значение для функции G_0 :

$$G_0 = \frac{1}{2} + C_1 + C_2 e^{\frac{s-s'}{s_0}}. \quad (35,14)$$

Поэтому функция Грина уравнения (35,6) равна

$$G = \begin{cases} 1 + C_1 + C_2 e^{\frac{s-s'}{s_0}}; & s > s', \\ C_1 + (1 + C_2) e^{\frac{s-s'}{s_0}}; & s < s'. \end{cases} \quad (35,15)$$

Отсюда следует, что искомая величина q будет содержать две части:

$$q = q^r + q^a, \quad (35,16)$$

причём

$$q^r = \frac{e}{mc} \int_{-\infty}^s (1 + C_1 + C_2 e^{\frac{s-s'}{s_0}}) E(s') ds', \quad (35,17)$$

$$q^a = \frac{e}{mc} \int_s^{\infty} [C_1 + (1 + C_2) e^{\frac{s-s'}{s_0}}] E(s') ds'. \quad (35,18)$$

В решении (35,17) мы интегрируем по всем значениям s' , меньшим чем s . Наоборот, в решении (35,18) мы интегрируем по всем s' , большим чем s . Иными словами, в первом случае (q^r) мы учитываем запаздывающее воздействие внешнего поля $E(s)$ на точечный электрон, а во втором (q^a) — опережающее.

Прежде всего, следуя аналогии с классической механикой, оставим решение, определяемое только запаздывающим воздействием (см. § 15).

В этом случае мы должны положить $C_1 = 0$, $C_2 = -1$. Тогда равенство (35,16) принимает вид

$$q = q^r = \frac{e}{mc} \int_{-\infty}^s (1 - e^{\frac{s-s'}{s_0}}) E(s') ds'. \quad (35,19)$$

Однако решение (35,19) с физической точки зрения является абсурдным. В самом деле, полагая, например, $E = E_0 \delta(s')$, находим

$$q = \begin{cases} \frac{eE_0}{mc} (1 - e^{\frac{s}{s_0}}); & s > 0, \\ 0; & s < 0, \end{cases} \quad (35,20)$$

т. е. после окончания действия силы ($s > 0$) электрон будет продолжать двигаться с ускорением (самоускоряющийся электрон*). Попробуем избавиться от этого решения с помощью введения опережающего воздействия.

*) Решение уравнения движения с запаздывающими потенциалами исследовалось также А. П. Белоусовым (ЖЭТФ, 9, 658, 1939) и М. А. Марковым (ЖЭТФ, 16, 800, 1946).

В этом случае дополнительные условия необходимо задать не только для момента времени до начала действия силы ($s = -\infty$), но также и для момента после окончания её действия (см. также § 15).

В качестве подобного дополнительного условия потребуем, чтобы как при $s = -\infty$, так и при $s = \infty$ ускорение электрона (т. е. величина, пропорциональная \dot{q}) равнялось бы нулю (само собой разумеется, что это требование автоматически выполняется в случае исчезновения внешней силы при $s = \pm \infty$)*).

Заметим далее, что мы всегда можем выбрать систему координат, относительно которой электрон при $s = -\infty$ будет покоиться в начале координат.

Поэтому дополнительные условия примут окончательно вид

$$q = 0, \quad x = 0, \quad t = s \quad \text{при } s = -\infty \quad (35,21)$$

(начальные условия);

$$\dot{q} = 0 \quad \text{при } s = \infty \quad (35,22)$$

(конечное условие).

Отсюда находим $C_1 = C_2 = 0$. Поэтому согласно (35,16) имеем

$$q = \frac{e}{mc} \left[\int_{-\infty}^s E(s') ds' + \int_s^{\infty} e^{\frac{s-s'}{s_0}} E(s') ds' \right]. \quad (35,23)$$

Далее, при помощи (35,4) получаем окончательное значение для искомых величин в виде

$$x = c \int_{-\infty}^s \text{sh } q(s') ds', \quad t = s + \int_{-\infty}^s [\text{ch } q(s') - 1] ds'. \quad (35,24)$$

В решении (35,23) мы учитываем как запаздывающее воздействие ($s' < s$), так и опережающее ($s' > s$). Появле-

*) Эти условия были сформулированы одним из нас (А. С о к о л о в, Вестник МГУ, № 2, стр. 33, 1947; ЖЭТФ, 18, 280, 1948).

ние решений с опережающим воздействием*) оправдывается введением опережающих потенциалов при решении уравнений с собственным полем. Перейдём теперь к выяснению физического смысла решения, связанного с опережающим воздействием. Электрон является как бы размазанным по оси времени и поэтому практически за s_0 секунд раньше начинает замечать появление внешнего поля. За это время электромагнитная волна проходит расстояние

$$s_0 c = \frac{2}{3} r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m c^2}, \quad (35,25)$$

которое следует принять за радиус электрона**).

Таким образом, если в классических теориях полевой массы мы должны каким-то образом ввести величину r_0 , играющую роль радиуса электрона, с которой связывается затем электромагнитная масса, то в классической неполевой теории точечной частицы наоборот, в основные уравнения движения вводится масса электрона m , а радиус r_0 появляется автоматически при интегрировании уравнений движения.

В частности, в нерелятивистском случае, когда мы можем положить $q = \frac{v'}{c}$ и пренебречь величинами ква-

*) Вопрос о введении опережающего воздействия в других задачах был рассмотрен также А. В л а с о в ы м (Учёные записки Московского Университета, раздел Физика, вып. 75, 1945 г.).

**) Интересно заметить, что, пренебрегая силой лучистого трения (т. е. полагая $s_0 = 0$), вместо (35,6) получаем уравнение

$$\dot{q} = \frac{e}{m c} E,$$

которое совпадает с уравнением (15,1), применяющимся в классической механике.

В этом случае в решении уравнения (35,6) [см. соотношение (35,23)], как и следовало ожидать, будут отсутствовать решения с опережающим воздействием, т. е.

$$q = \frac{e}{m c} \int_{-\infty}^s E(s') ds'$$

Аналогичное выражение было найдено нами в § 15 при решении уравнения (15,1).

дратичными относительно q ($q^2 \sim 0$), решения (35,24) принимают вид

$$t = s,$$

$$x = \int_{-\infty}^t v(t') dt'. \quad (35,26)$$

Подставляя сюда вместо $v = cq$ значение (35,23), получим после ряда преобразований

$$x = \frac{e}{mc} \left[\int_{-\infty}^t (t - t' + s_0) E(t') dt' + \right. \\ \left. + s_0 \int_t^{\infty} e^{\frac{t-t'}{s_0}} E(t') dt' \right]. \quad (35,27)$$

Правильность последнего выражения может быть легко проверена, поскольку решение (35,27) удовлетворяет как новому начальному условию (35,26), т. е. $x = 0$ при $t = -\infty$, так и дифференциальному уравнению (35,23).

Как известно, в классической механике существует два способа трактовки вариационных проблем.

Метод Лагранжа, при котором функция действия задаётся на всём интервале времени движения материальной точки:

$$S = \int_{s_1}^{s_2} L ds, \quad (35,28)$$

где s — собственное время.

В этом случае мы должны потребовать, чтобы на границах (т. е. при $s = s_1$ и $s = s_2$) вариации от координат δx обращались бы в нуль, т. е. мы фактически должны задать как начальные, так и конечные условия.

Во втором способе, известном под названием метода Гамильтона-Якоби, функция действия имеет вид

$$S = \int_{s_1}^s L ds, \quad (35,29)$$

или, иными словами, функция S обрывается на некотором моменте времени s .

Метод Гамильтона-Якоби допускает решения только с начальными условиями.

В классической механике рассматриваются такие лагранжианы, для которых оба метода являются совершенно тождественными, т. е. когда возможно свести всю проблему к случаю, когда заданы только начальные условия.

К решению нашей задачи (движение точечного электрона с учётом силы трения) мы подошли с помощью метода Лагранжа, растягивая пределы интегрирования от $s_1 = -\infty$ до $s_2 = +\infty$.

Так как решение этой проблемы может быть дано только в том случае, когда наряду с начальными задаются ещё конечные условия, подобная задача не может трактоваться методом Гамильтона-Якоби, допускающим, как было указано, лишь задание начальных условий.

§ 36. Рассеяние света свободными электронами

Как было указано выше (см. § 34), определяя зависимость массы от скорости, при равномерно-прямолинейном движении электрона мы не можем решить вопроса о её происхождении (полевая и неполевая массы изменяются с увеличением скорости по одному и тому же закону).

Однако уравнения движения для полевой и неполевой массы будут различны в быстропеременных полях благодаря наличию членов с 4-й, 5-й и т. д. производными в полевой теории Лорентца, и поэтому исследование колебаний электрона с большой частотой может явиться критерием в пользу той или другой классической предварительной модели, если мы находимся вне области квантовых эффектов.

Пусть точечная частица совершает прямолинейное гармоническое колебание с нерелятивистской скоростью. В этом случае

$$t = s, \quad x = \xi_1, \quad \xi_2 = \xi_3 = 0. \quad (36,4)$$

Уравнения движения (35,1) и (35,2) примут вид

$$m\dot{\omega} = eE + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\omega}, \quad (36,2)$$

$$evE = \frac{2e^2}{3c^3} \omega^2, \quad (36,3)$$

где $v = \dot{x}$ и $\omega = \ddot{x}$ являются соответственно скоростью и ускорением частицы.

При получении уравнения (36,2) мы пренебрегли величиной $\frac{v\omega^2}{c^2}$ по сравнению с $\dot{\omega}$. Это вытекает из того обстоятельства, что при гармоническом колебании электрона с амплитудой a и круговой частотой ω

$$\dot{\omega} \sim a\omega^3,$$

$$\frac{v\omega^2}{c^2} \sim \frac{\omega^5}{c^2} a^3 \sim \frac{v^2}{c^2} \dot{\omega},$$

т. е. в нерелятивистском случае последняя величина действительно может быть отброшена.

Уравнение (36,3) выражает собою закон сохранения энергии. В левой части равенства стоит работа, которая совершается внешней силой в единицу времени, а в правой части количество энергии W , которую излучает электрон в одну секунду, т. е.

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3}. \quad (36,4)$$

Уравнение (36,2) было получено также Лорентцом для движения электрона, обладающего электромагнитной массой [см. формулу (31.19)]. Однако исходное уравнение (36,2) предполагается в некантовом приближении пригодным для колебаний с любыми длинами волн в то время как уравнение Лорентца является ограниченным и имеет место только в том случае, когда длина волны больше радиуса электрона ($\lambda > r_0$), т. е. когда членами с производными выше 3-й можно пренебречь. Различие

между обеими моделями сказывается при рассмотрении вопроса о рассеянии света на свободных электронах.

Пусть на электрон падает электромагнитная волна с круговой частотой ω .

Внешнее электрическое поле задаётся уравнением

$$E = E_0 \cos \omega t, \text{ или } E = E_0 e^{-i\omega t}. \quad (36,5)$$

Решение для ускорения ω будем искать в виде

$$\omega = \omega_0 e^{-i\omega t}. \quad (36,6)$$

Подставляя (36,6) и (36,5) в равенство (36,2), находим

$$\omega_0 = \frac{eE_0}{m(1 + i\omega s_0)}, \quad (36,7)$$

где

$$s_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}.$$

Как известно, эффективное сечение σ при рассеянии света свободными электронами равняется отношению количества энергии W , которую излучает электрон в единицу времени, к количеству энергии J , которая падает в 1 сек. на единицу поверхности.

Для величины W согласно (36,4) имеем

$$W = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\omega^2} = \frac{e^4 E_0^2}{3c^3 m^2 (1 + \omega^2 s_0^2)}, \quad (36,8)$$

где черта означает усреднение данной величины по времени.

Значение для J определяется из соотношения

$$J = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \quad (36,9)$$

При нахождении средних значений по времени $\overline{\omega^2}$ и $\overline{E^2}$ мы, отбросив мнимые части, учли, что

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда находим

$$\sigma' = \frac{W}{J} = \frac{\sigma}{1 + \frac{2\pi}{3} \frac{\sigma}{\lambda^2}}, \quad (36,10)$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, а длина волны падающего света $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

В частности, при больших значениях λ ($\lambda \gg r_0$) мы получаем формулу Томсона:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2, \quad (36,11)$$

т. е. в этом случае эффективное сечение имеет порядок площади поперечника электрона, линейные размеры которой равны r_0 , хотя никаких размеров точечному электрону заранее не приписывалось.

Таким образом при рассеянии света точечный электрон ведёт себя как шарик с радиусом r_0 .

В теории точечного электрона выражение (36,10) должно иметь место также для сколь угодно малых длин волн λ ($\lambda \ll r_0$).

В этом предельном случае эффективное сечение принимает вид

$$\sigma' = \frac{3}{2\pi} \lambda^2, \quad (36,12)$$

в то время как с точки зрения теории протяжённого электрона (например, электрона Лорентца) выражение (36,10) имеет место лишь при $\lambda \gg r_0$ (см. § 31), когда сила трения играет роль поправочных членов. При малых же λ теория Лорентца приводит к существенно иным выражениям.

Поэтому экспериментальная проверка формулы (36,12) при малых λ может решить вопрос в пользу гипотезы полевой или неполевой массы.

Следует, однако, заметить, что при $\lambda \ll \lambda_c$ ($\lambda_c = \frac{h}{mc}$), или по-прежнему при

$$\lambda \ll r_0,$$

т. е. когда энергия падающего света (кванта света) достигает порядка $137 mc^2$ *), мы должны рассматривать всю проблему с точки зрения квантовой механики, влияние которой становится существенным уже при $\lambda \sim \lambda_c$ ($\lambda_c = \frac{h}{mc}$), и, в частности, наблюдать комptonовское изменение длины волны при рассеянии.

Однако вычисления, проделанные по квантовой механике для рассеяния света на точечном электро́не с учётом затухания в предположении, что электрон не обладает полевой массой, иначе говоря, при пренебрежении продольной и поперечной энергией поля, приводят к аналогичным результатам.

Действительно, при больших длинах волн ($\lambda \gg h/mc$) мы вновь получаем согласно нерелятивистской квантовой механике формулу (36,10), или при пренебрежении затуханием, которое в этой области мало, формулу (36,11). В области более коротких длин волн ($\sqrt{\sigma} < \lambda < h/mc$) квантовая релятивистская теория Дирака приводит для эффективного сечения рассеяния света на электро́не к формуле Клейна-Нишины, имеющей в системе координат, где покоится центр инерции системы электрон плюс фотон, вид:

$$\sigma = \frac{\alpha^2}{4\pi} \lambda^2 \left(\ln \frac{2\lambda_c}{\lambda} + \frac{1}{4} \right).$$

Затухание при этом ещё не играет заметной роли. Наконец, в области крайне малых длин волн $\lambda < \sqrt{\sigma}$

*) Как известно из квантовой теории, энергия кванта света определяется выражением

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек — постоянная Планка.

Для случая, когда $\frac{16\pi^2}{9} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^2 \gg 1$ или $\lambda \ll \frac{4\pi}{3} r_0$, имеем

$$\varepsilon \gg \frac{3hc}{4\pi e^2} mc^2 \sim 137 mc^2.$$

Здесь принято во внимание, что так называемая постоянная тонкой структуры $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ численно равняется $\frac{1}{137,02}$.

эффективное сечение в пределе сохраняет при учёте затухания вид (36,12) в той же избранной системе координат*). Однако при этих энергиях существенную роль начинает играть рождение пар (электронов и позитронов), в силу чего этот вывод проверить экспериментально весьма затруднительно.

Нельзя не считать, что совпадение классических и квантовых результатов является сильным аргументом в пользу пригодности, в известных пределах, теории частицы с неполевой массой и ещё раз показывает рациональность предварительного рассмотрения вопросов, связанных со структурой элементарных частиц, с точки зрения классической теории, лучшим в известном смысле вариантом которой является изложенная выше гипотеза вспомогательного компенсирующего поля.

§ 37. Когерентное колебание двух связанных электронов

Рассмотрим когерентное движение двух связанных электронов, т. е. тот случай, когда оба электрона колеблются с длиной волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, во много раз превышающей расстояние между ними R ($\lambda \gg R$).

Ради простоты ограничимся исследованием нерелятивистского одномерного колебания вдоль оси x .

Обозначая координаты обоих электронов соответственно через x_1 и x_2 , найдём согласно (36,2) следующие уравнения движения:

$$m\ddot{x}_1 = F_1 e^{-i\omega t} + F_{12} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}_1 \quad (37,1)$$

(для первого электрона),

$$m\ddot{x}_2 = F_2 e^{-i\omega t} + F_{21} + \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}_2 \quad (37,2)$$

(для второго электрона).

Здесь $F_1 e^{-i\omega t}$ и $F_2 e^{-i\omega t}$ являются внешними силами, приводящими в колебательное движение оба электрона;

*) А. С о к о л о в, Journ. of. Phys, USSR, 5, 231, 1941.

F_{12} и F_{21} — силы взаимодействия между электронами, которые связаны с полями E_2 и E_1 , создаваемыми вторым и первым электронами, соотношениями

$$F_{12} = eE_2 \left(t - \frac{R}{c} \right), \quad (37,3)$$

$$F_{21} = eE_1 \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (37,4)$$

Оба поля путём разложения по величине $\frac{R}{c}$ могут быть отнесены к одному времени.

Полагая в нашем случае $R^2 = R_x^2 = [x_1(t) - x_2(t)]^2$, найдём согласно (31,10)

$$E_2 \left(t - \frac{R}{c} \right) = \frac{e [x_1(t) - x_2(t)]}{R^3} - \frac{e}{c^2 R} \ddot{x}_2(t) + \frac{2e}{3c^3} \dddot{x}_2(t) + \dots,$$

$$E_1 \left(t - \frac{R}{c} \right) = \frac{e [x_2(t) - x_1(t)]}{R^3} - \frac{e}{c^2 R} \ddot{x}_1(t) + \frac{2e}{3c^3} \dddot{x}_1(t) + \dots$$

(37,5)

Из последних соотношений находим уравнение колебания для центра тяжести системы $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$:

$$2m\ddot{x} = Fe^{-i\omega t} - \frac{(2e)^2}{2c^2 R} \ddot{x} + \frac{2}{3} \frac{(2e)^2}{c^3} \dddot{x} + \dots, \quad (37,6)$$

где общая внешняя сила

$$F e^{-i\omega t} = (F_1 + F_2) e^{-i\omega t}.$$

Отсюда видно, что при когерентном движении электронов к общей массе добавляется электромагнитная масса

$$m^{el} = \frac{(2e)^2}{2c^2 R},$$

которая при движении одного электрона благодаря введению немаквелловского поля была сведена нами к нулю.

Для силы трения (пропорциональной \ddot{x}), а следовательно, также для общей энергии излучения аддитивность не имеет места, поскольку сила трения пропорциональна квадрату заряда. Поэтому при увеличении заряда в два раза сила трения увеличивается в четыре раза.

§ 38. Простейшая теория бетатрона

Как известно, в постоянном магнитном поле H электроны двигаются по окружности радиуса

$$a = \frac{ctv}{eH} \quad (38,1)$$

с постоянной скоростью v (если их начальная скорость направлена перпендикулярно к вектору H).

Принцип действия бетатрона сводится к ускорению электронов вихревым электрическим полем, возникающим благодаря изменению со временем магнитного поля. При этом изменение магнитного поля в пространстве таково, что оно заворачивает обратно ускоряемые электроны и заставляет их в конце концов двигаться по некоторой стабильной окружности. Таким образом, бетатрон является своеобразным трансформатором, в котором ток в первичной обмотке электромагнита преобразуется во вторичный ток ускоряемых электронов, движущихся, однако, не во вторичной обмотке, но в пустотной тороидальной кольцевой трубке (рис. 12).

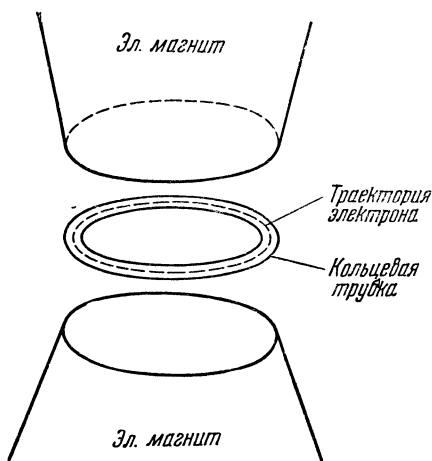


Рис. 12.

Бетатрон, построенный Керстом в 1941 г. после теоретических работ Видерое и Терлецкого, является

релятивистским прибором, в противоположность циклотрону, работающему нормально лишь при энергиях, меньших собственной энергии частиц mc^2 , когда изменение массы со скоростью ещё не сказывается.

Условия же работы бетатрона не ставят предела достижимых энергий из-за изменения массы от скорости. Однако следует указать на наличие другого фактора, приводящего к появлению предельных значений для энергий, которые могут быть достигнуты в бетатроне.

Действительно, в бетатроне частицы движутся ускоренно (даже в случае $v = \text{const}$ частицы будут обладать центростремительным ускорением), вследствие чего

согласно законам классической электродинамики электроны будут излучать электромагнитную энергию.

Пренебрегая квантовыми эффектами (см. § 43), в основу теории бетатрона положим классическое релятивистское уравнение движения электрона с учётом силы трения (34,36), полученное для точечной частицы.

В этом параграфе мы найдём условия, определяющие положение устойчивой орбиты, а также предельное значение для энергии движения, обусловленное влиянием силы лучистого трения.

Обозначим координаты электрона, находящегося в точке A (рис. 13), соответственно через x, y, z, ict .

Направим магнитное поле H по оси z и предположим, что оно обладает аксиальной симметрией, изменяясь со временем по синусоидальному закону с круговой частотой ω' :

$$\begin{aligned} H_x = H_y = 0, \\ H_z = -H = -H(r) \sin \omega' t, \end{aligned} \quad (38,2)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тогда электрическое поле, которое ускоряет электрон, будет направлено по касательной к окружности. Соот-

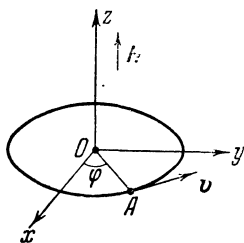


Рис. 13.

ношение между E и H может быть найдено из второго уравнения Максвелла, представленного в интегральной форме:

$$\oint E_1 dl = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int H_z dS. \quad (38,3)$$

Интегрирование по контуру l следует производить по всей окружности, которая ограничивает площадь S .

Учитывая аксиальную симметрию магнитного поля [см. соотношение (38,2)], получим

$$2\pi r E = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int H dS, \quad (38,4)$$

откуда

$$E = \frac{r}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{H}. \quad (38,5)$$

Здесь \bar{H} является магнитным полем, усреднённым по площади S .

Проекции вектора E на оси координат будут равны

$$E_x = -\frac{y}{r} E, \quad E_y = \frac{x}{r} E, \quad E_z = 0. \quad (38,6)$$

Принимая во внимание соотношения (23,3), найдём составляющие уравнения (34,36) на пространственные оси координат

$$m\ddot{x} = e\dot{t}E_x + \frac{e}{c} \dot{y}H_z - \frac{2e^2}{3c^5} (\dot{x}\omega_0^2 - \ddot{x}c^2). \quad (38,7)$$

Аналогичное уравнение будем иметь для составляющих на оси y и z , причём в случае плоского движения мы можем положить $z = 0$.

Наконец, для составляющей на ось t мы получим уравнение:

$$mc^2\ddot{t} = e(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y) - \frac{2e^2}{3c^3} (\dot{t}\omega_0^2 - \ddot{t}c^2). \quad (38,8)$$

Здесь четырёхмерное ускорение равно:

$$\omega_0^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 - c^2\ddot{t}^2.$$

Сделаем далее переход от четырёхмерных к трёхмерным величинам, принимая во внимание, что

$$\ddot{t} = \frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2}, \quad (38,9)$$

$$\dot{x} = v_x \dot{t}, \quad \omega_0^2 = \dot{t}^4 \omega^2 - c^2 \ddot{t}^2 (1 - \beta^2),$$

где \mathcal{E} является энергией частиц, v и ω — её обычной пространственной скоростью и ускорением.

Тогда, пренебрегая силой лучистого трения в уравнении (38,7), легко свести его к известному релятивистскому уравнению движения электрона в электромагнитном поле:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}]. \quad (38,10)$$

Уравнение же (38,8), в котором мы в правой части отбросим малые величины, пропорциональные \ddot{t} и \ddot{t}^2 , будет характеризовать изменение энергии в единицу времени:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\mathbf{v}\mathbf{E}) - \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3} \dot{t}^4 \quad (38,11)$$

Из последнего уравнения видно, что увеличение энергии обязано работе электрических сил:

$$A = e(\mathbf{v}\mathbf{E}), \quad (38,12)$$

ускоряющих электроны. Благодаря же излучению происходит уменьшение энергии на величину:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2}{c^3} \dot{t}^4, \quad (38,13)$$

которая отличается от соответствующего нерелятивистского выражения появлением множителя \dot{t}^4 .

Рассмотрим прежде всего движение по устойчивой круговой орбите, для которой $r = a = \text{const.}$

Проекции уравнения (38,10) на радиус и касательную к окружности равны:

$$\frac{mv^2}{a\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e}{c} vH, \quad (38,14)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}} = eE. \quad (38,15)$$

Сокращая уравнение (38,14) на величину v и дифференцируя его затем по времени t , найдём:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e}{c} a \frac{dH}{dt}. \quad (38,16)$$

Сопоставляя между собою уравнения (38,15) и (38,16), а также принимая во внимание соотношение (38,5), находим основное условие, определяющее существование равновесной орбиты электрона:

$$H = \frac{1}{2} \bar{H}. \quad (38,17)$$

Это условие Видерое было подробно исследовано Терлецким*) и является основой современной теории бетатрона. Отсюда видно, что магнитное поле H в точках, расположенных на равновесной орбите, должно быть в два раза меньше, чем среднее значение магнитного поля на площади круга, охватываемого этой орбитой.

Электрон будет находиться на равновесной орбите до тех пор, пока энергия излучения W будет много меньше работы A электрического поля, ускоряющего электроны:

$$W \ll A. \quad (38,18)$$

Рассматривая ультрарелятивистский случай ($v \sim c$), когда можно положить:

$$\omega = \frac{c^2}{a}, \quad \dot{t} = \frac{eaH}{mc^2}, \quad (38,19)$$

и учитывая далее соотношение (38,2), а также (38,15) и (38,16), имеем вместо неравенства (38,18):

$$\frac{2}{3} \frac{e^3 H \dot{t}^3}{mac} \ll ea\omega' H.$$

*) Я. П. Терлецкий, ЖЭТФ, 11, 96, 1941. Вопрос об устойчивости движения электрона на равновесной орбите и другие детали теории бетатрона мы разбирать не будем, отсылая читателей к работам Терлецкого (Journ. of Phys. USSR, 9, 159, 1945), Керста-Сербера (D. Kerst and R. Serber, Phys. Rev., 60, 53, 1941); см. также А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1949. Каузер и др., Nucleonics, февраль, 1948; см. также научно-реферативные сборники, вып. I, Резонансные ускорители, ИЛ, 1948 и вып. II, Бетатрон, ИЛ, 1948.

Отсюда получаем основное условие, при выполнении которого электрон остаётся на равновесной орбите:

$$\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{cr}, \quad (38,20)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathcal{E}_{cr} = mc^2 \sqrt[3]{\frac{3}{2} \frac{a^2 \omega'}{r_0 c}},$$

а $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ является радиусом электрона *).

Когда энергия электронов достигает порядка критического значения \mathcal{E}_{cr} , они начинают терять заметную долю энергии и сходят с равновесных орбит**), становясь источниками интенсивного излучения электромагнитных волн.

Рассмотрим прежде всего вопрос о сжатии орбит, которое проще всего исследовать с помощью уравнения (38,11).

В ультрарелятивистском случае уравнение (38,11) принимает вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = ecE - W, \quad (38,21)$$

причём энергия электрона \mathcal{E} связана, согласно (38,19), с магнитным полем H соотношением:

$$\mathcal{E} = mc^2 \dot{t} = erH;$$

электрическое поле E определяется равенством (38,5), а для энергии, излучаемой в единицу времени, имеем, согласно (38,13) и (38,19), выражение

$$W = \frac{2}{3} \frac{r_0^3 r^2 H^4}{mc}. \quad (38,22)$$

Равенство (38,21) представим в виде:

$$W = \frac{er}{2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - e \frac{drH}{dt}. \quad (38,21a)$$

Последующие преобразования сделаем с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r^2 \bar{H}) &= r^2 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \dot{r} \frac{\partial r^2 \bar{H}}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt} (r^2 H) &= \dot{r} r H + r \frac{dr H}{dt}. \end{aligned}$$

*) Д. Иваненко и И. Померанчук, ДАН, 44, 343, 1944.

**) Сжатие орбит было обнаружено Блюиттом (T. Bluet, Phys. Rev., 69, 87, 1946).

Далее, как известно, поля \bar{H} (среднее магнитное поле) и H (магнитное поле на круговой орбите) связаны между собою формулой:

$$\bar{H} = \frac{2}{r^2} \int_0^r r H dr,$$

т. е.

$$\frac{\partial r^2 \bar{H}}{\partial r} = 2 r H. \quad (38,23)$$

Отсюда находим

$$W = \frac{e}{2r} \frac{dr^2 (\bar{H} - 2H)}{dt},$$

или

$$\frac{\bar{H}}{2} - H = \frac{1}{er^2} \int_0^t r W dt. \quad (38,24)$$

Для равновесной орбиты ($r = a$) имеем:

$$H(a, t) = \frac{\bar{H}(a, t)}{2}. \quad (38,25)$$

Кроме того, дифференцируя выражение (38,23) по r , находим, что для равновесной орбиты производная от среднего значения магнитного поля будет равна:

$$\frac{\partial \bar{H}(a, t)}{\partial a} = - \frac{2H(a, t)}{a}. \quad (38,26)$$

Полагая далее в левой части выражения (38,24)

$$r = a - \Delta r,$$

найдем, учитывая соотношения (38,25) и (38,26):

$$\frac{\bar{H}(r, t)}{2} - H(r, t) = \frac{\Delta r}{a} \frac{\partial a H(a, t)}{\partial a}.$$

Отсюда получаем, что в течение времени t электрон отклонится от равновесной орбиты на величину:

$$\Delta r \cong \frac{\int_0^t W(a, t) dt}{e \frac{\partial a H(a, t)}{\partial a}}. \quad (38,27)$$

В частности, полагая, что вблизи равновесной орбиты магнитное поле изменяется по закону:

$$H = Ar^q \sin \omega' t,$$

где A — некоторый постоянный коэффициент, а ω' — круговая частота изменения магнитного поля, имеем для величины Δr следующее значение:

$$\Delta r = \frac{2r_0^3 a^2 (Aa^q)^3}{3 m c e \omega' (1+q)} F(\omega' t),$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\sin y} \int_0^y \sin^4 y \, dy.$$

Вычисляя последний интеграл, находим:

$$F(y) = \frac{3}{8} \left(\frac{y}{\sin y} - \cos y - \frac{2}{3} \sin^2 y \cos y \right).$$

В частности, при $y = \frac{\pi}{2}$, т. е. при том времени, когда электрон получает наибольшее ускорение, величина F становится равной:

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{16}.$$

Подставляя сюда согласно Блюитту (1. с.)*) $a = 83$ см, $\omega' = 377$ сек⁻¹, $q = -\frac{3}{4}$, $Aa^q = 4000$ гаусс, найдём для изменения радиуса в течение времени, равного четверти периода ($t\omega' = \frac{\pi}{2}$), следующее значение:

$$\Delta r = 3,2 \text{ см.}$$

Излучение электронов, движущихся с релятивистскими скоростями, обладает рядом особенностей по сравнению с излучением медленно движущихся электронов.

Вопрос об интенсивности излучения в зависимости от номера гармоники будет разобран в следующих параграфах.

*) О работе Блюитта см. также научно-реферативный сборник, вып. II, Бетатрон, ИЛ, 1948.

§ 39. Излучение электромагнитных волн электронами, движущимися по окружности

Как было указано в предыдущем параграфе, вращающийся по окружности (например, в ускорительных приборах типа бетатрона или синхротрона) электрон должен явиться источником излучения электромагнитных волн.

Так как при движении электрона по окружности излучение происходит, главным образом, за счёт нормального ускорения ω (см. предыдущий параграф), то мы можем ограничиться исследованием случая равномерного вращения.

Длина волны λ при дипольном излучении связана с круговой частотой вращения ω следующим соотношением:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi a}{v}, \quad (39,1)$$

где a является радиусом орбиты, а v — скоростью движения электрона.

Вместо (39,1) мы можем написать

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = \frac{v}{c} = \beta. \quad (39,2)$$

Интенсивность излучения высших гармоник (номера n) с длиной волны $\frac{\lambda}{n}$ имеет порядок интенсивности дипольного излучения ($n=1$), умноженной на величину

$$\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^{2(n-1)} = \beta^{2(n-1)}. \quad (39,3)$$

Поэтому при нерелятивистских скоростях, когда $\beta \ll 1$, мы можем ограничиться лишь дипольным излучением.

Однако в ультрарелятивистском случае, когда v достигает порядка скорости света c ($\beta \sim 1$), разложение (39,3) теряет смысл, и вопрос о распределении интенсивности излучения в зависимости от номера гармоники n требует дополнительного исследования*).

*) Как было отмечено в предыдущем параграфе, Д. Иваненко и И. Померанчук указали, что в ускорителях с круговыми траекториями, по которым движутся с релятивистскими скоростями части-

Равномерное движение электрона по окружности (в плоскости x, y) возникает, например, под действием постоянного магнитного поля, направленного по оси z [см. формулу (39,2)]. В этом случае в тензоре электромагнитного поля $H_{\mu\nu}$ отличной от нуля будет одна составляющая $H_{12} = H_z = -H = \text{const}$. Общее количество энергии $\frac{dU}{ds}$, излучаемое электроном в единицу собственного времени, может быть найдено с помощью формулы (34,36). Полагая $\xi_4 = ic\tau$, имеем для четвертой составляющей ($\mu = 4$) указанной формулы

$$-\frac{dU}{ds} = -\frac{dmc^2\dot{\tau}}{ds} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} (\dot{\tau}\omega_0^2 - c^2 \ddot{\tau}), \quad (39,4)$$

где ω_0^2 является квадратом четырехмерного ускорения, которое при равномерном вращении электрона по окружности согласно (38,9) равно

$$\omega_0^2 = a^2\omega^4\dot{\tau}^4, \quad (39,5)$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{d\tau}$ является угловой скоростью вращения электрона, а величина

$$\dot{\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \quad (39,6)$$

равняется отношению энергии электрона \mathcal{E} к его собственной энергии mc^2 .

Из (39,6) следует, что при равномерном вращении величина β остаётся постоянной, благодаря чему $\ddot{\tau} = 0$. Поэтому согласно (39,4) имеем для общего количества энергии, излучаемой электроном в единицу времени:

$$-\frac{dU}{d\tau} = -\frac{1}{\dot{\tau}} \frac{dU}{ds} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \omega^4}{c^3 (1-\beta^2)^2}. \quad (39,7)$$

пы, необходимо учитывать наличие заметного излучения. Спектр подобного излучения исследовался рядом авторов: Л. А р п и м о в и ч и И. П о м е р а н ч у к (Journ. of Phys. USSR, 9, 267, 1945) и Л. Ш и ф ф (L. Shiff, Rev. Sci. Instr., 17, 6, 1946) и др. Замкнутые формулы, равномерно пригодные во всей интересующей нас области спектра, были получены в нашей работе (Д. И в а н е н к о и А. С о к о л о в, ДАН, 59, 1551, 1948), см. также G. S c h o t t, Electromagnetic Radiation, Cambridge, 1912, стр. 109.

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\omega = \frac{v}{a} = \frac{\beta c}{a},$$

найдем

$$W = -\frac{dU}{d\tau} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \beta^4 c}{a^2 (1-\beta^2)^2}. \quad (39,8)$$

Это можно переписать также, учитывая значение ускорения, обусловленного магнитным полем согласно (38,19), не вводя явно радиуса a :

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^4 H^2 \beta^2}{m^2 c^3 (1-\beta^2)}. \quad (39,9)$$

Полученная формула определяет общую (глобальную) энергию, которую излучает вращающийся электрон, но не даёт ни спектрального, ни углового распределения излучения.

Прежде чем определить спектральную и угловую зависимость интенсивности излучения, мы должны найти поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , создаваемые электроном в волновой зоне.

Пусть орбита электрона (окружность радиуса a) лежит в плоскости (xy) (рис. 14).

Определим поле в точке P со сферическими координатами r , θ , φ в момент времени t . Обозначая полярный угол, характеризующий положение электрона в плоскости движения через ψ , имеем:

$$\dot{\psi} = \omega \tau.$$

Согласно равенству (24,8) имеем следующее выражение для вектор-потенциала:

$$\mathbf{A} = \frac{e}{c} \int \frac{\mathbf{v}(\tau)}{R} \delta\left(\tau - t + \frac{R}{c}\right) d\tau, \quad (39,10)$$

где

$$R = r - a(\tau).$$

При определении поля в волновой зоне, где напряжённости \mathbf{E} и \mathbf{H} будут порядка $1/r$, следует, очевидно, в выражении для вектор-потенциала \mathbf{A} отбросить величины порядка $1/r^2$ и выше.

Поэтому мы получаем следующие приближённые равенства:

$$R = r \left(1 - 2 \frac{ra}{r^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \cong r - a \sin \theta \cos \chi, \quad (39,11)$$

$$A = \frac{e}{cr} \int v(\tau) \delta \left(\tau - t + \frac{r}{c} - \frac{a \sin \theta \cos \chi}{c} \right) d\tau, \quad (39,12)$$

где χ является углом между вектором a и проекцией r на плоскость (x, y) , т. е.

$$\chi = \omega\tau - \varphi. \quad (39,13)$$

В нашем случае движение является периодическим.

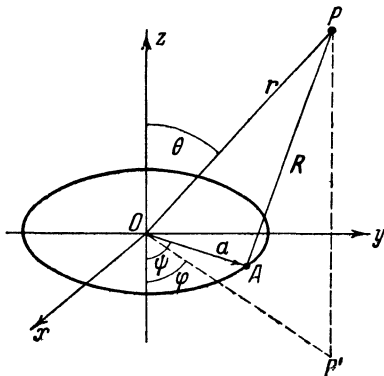


Рис. 14.

Период движения T связан с угловой частотой ω соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (39,14)$$

Представляя δ -функцию, входящую в выражение (39,12), в виде

$$\delta(\tau') = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega\tau'} \quad (39,15)$$

и учитывая, что интегрирование должно быть ограничено периодом T , мы легко можем найти компоненты Фурье векторного потенциала

$$A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(n) e^{-in\chi}, \quad (39,16)$$

где

$$A(n) = \frac{e}{cr} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v e^{i(n\alpha - n\beta \sin \theta \sin \alpha)} d\alpha, \quad (39,17)$$

$$\gamma = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha = \gamma + \frac{\pi}{2}.$$

Проекции скорости в сферических координатах равны

$$v_{\varphi} = v \cos \chi = v \sin \alpha,$$

$$v_{\theta} = v \cos \theta \sin \chi = -v \cos \theta \cos \alpha, \quad (39,18)$$

откуда для проекций вектор-потенциала находим

$$A_{\varphi}(n) = \frac{ev}{cr} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \alpha \cdot e^{i(n\alpha - n\beta \sin \theta \sin \alpha)} d\alpha, \quad (39,19)$$

$$A_{\theta}(n) = -\frac{ev}{cr} \cos \theta \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha \cdot e^{i(n\alpha - n\beta \sin \theta \sin \alpha)} d\alpha. \quad (39,20)$$

Проекция вектора A на ось r нас не интересует, так как в волновой зоне ввиду поперечности электромагнитных волн она обращается в нуль.

Как известно, в теории цилиндрических функций имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\alpha - x \sin \alpha)} d\alpha = J_n(x), \quad (39,21)$$

$$J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (39,22)$$

с помощью которых находим

$$A_{\varphi}(n) = i \frac{ev}{cr} J'_n(n\beta \sin \theta),$$

$$A_{\theta}(n) = -\frac{e}{r} \operatorname{ctg} \theta J_n(n\beta \sin \theta). \quad (39,23)$$

Оставляя, как обычно, в волновой зоне лишь члены порядка $\frac{1}{r}$, имеем

$$E = [Hr^0], \quad (39,24)$$

откуда

$$\begin{aligned} -E_\varphi = H_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} rA_\varphi(n) e^{-in\gamma} = \\ &= \frac{2e\beta^2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} nJ'_n(n\beta \sin \theta) \cos n\gamma, \\ E_\theta = H_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} = -\frac{2e\beta}{ar} \operatorname{ctg} \theta \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(n\beta \sin \theta) \sin n\gamma. \end{aligned} \quad (39,25)$$

Найдём теперь радиальную составляющую вектора Умова-Пойнтинга \mathfrak{S}_r :

$$\mathfrak{S}_r = \frac{c}{4\pi} (E_\theta H_\varphi - E_\varphi H_\theta) = \frac{c}{4\pi} (H_\varphi^2 + H_\theta^2). \quad (39,26)$$

Количество энергии, которую излучает электрон в единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$, равняется

$$dW = \mathfrak{S}_r d\Omega. \quad (39,27)$$

Подставляя сюда выражение (39,26) и усредняя по периоду вращения электрона T с помощью равенств:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos n\gamma \cos n'\gamma dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \sin n\gamma \sin n'\gamma dt = \frac{1}{2} \delta_{nn'}, \\ \frac{1}{T} \int_0^T \cos n\gamma \sin n'\gamma dt &= 0, \end{aligned} \quad (39,28)$$

получим

$$dW = \sum_{n=1}^{\infty} dW_n, \quad (39,29)$$

где

$$dW_n = \frac{e^2 n^2 \beta^2 c}{2\pi a^2} [\text{ctg}^2 \theta J_n^2(n\beta \sin \theta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta \sin \theta)] d\Omega. \quad (39,30)$$

Последнее соотношение определяет собою зависимость интенсивности излучения от угла θ и номера гармоники n .

При вращении по окружности не одного, а N электронов мы будем вместо равенства (39,25) иметь

$$H_\theta = \frac{2e^2 \zeta^2}{ar} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N n J_n'(n\beta \sin \theta) \cos n(\gamma + \psi_j), \quad (39,31)$$

где $\gamma = \omega t - \frac{\omega r}{c} - \varphi + \frac{\pi}{2}$, а ψ_j является начальной фазой j -го электрона. Аналогичное соотношение мы получим также для составляющей H_φ .

Воспользовавшись формулой

$$\cos n(\gamma + \psi_j) = \cos n\gamma \cos n\psi_j - \sin n\gamma \sin n\psi_j,$$

а также соотношением (39,28), найдём выражение для энергии n -й гармоники, излучаемой всеми N электронами:

$$dW_{n, N} = S_N dW_n, \quad (39,32)$$

где «фактор когерентности»

$$S_N = N + \sum_{j=1}^N \sum_{j'=1(j' \neq j)}^N \cos n(\psi_j - \psi_{j'}) \quad (39,33)$$

показывает, во сколько раз энергия, излучаемая N электронами, увеличивается по сравнению с энергией dW_n , излучаемой одним электроном.

Если электроны расположены по орбите произвольно, т. е. беспорядочно, то среднее значение, взятое по сумме разностей фаз, должно равняться нулю. Тогда

$$S_N = N, \quad (39,34)$$

и общая энергия, излучаемая N электронами, будет

равняться сумме энергий, излучаемых каждым электроном (некогерентное движение).

Если же электроны расположены по орбите равномерно, т. е. таким образом, что угол между двумя соседними частицами равен $\frac{2\pi}{N}$, то в этом случае мы будем иметь для фактора S_N , характеризующего равномерность круговой концентрации электронов, выражение

$$S_N = N \left(1 + \sum_{j=1}^{N-1} \cos 2\pi j \frac{n}{N} \right). \quad (39,35)$$

Вычисляя последнюю сумму, получим

$$S_N = N (-1)^n \frac{\sin \pi n}{\operatorname{tg} \frac{\pi n}{N}}. \quad (39,36)$$

Отсюда видно, что S_N равняется нулю, если номер гармоники не будет кратным числу электронов N , т. е. отношение $\frac{n}{N} = \nu$ не равняется целому числу.

Наконец, когда $\nu = \frac{n}{N}$ является целым числом, фактор когерентности S_N становится равным

$$S_N = N^2. \quad (39,37)$$

Таким образом, при вращении нескольких электронов, равномерно распределённых по окружности (когерентное движение), интенсивность излучения для некоторых гармоник ($\frac{n}{N} =$ не целому числу) обращается в нуль, а для других ($\frac{n}{N} =$ целому числу) будет возрастать пропорционально квадрату общего числа электронов.

В дальнейшем мы ограничимся исследованием излучения, происходящего от одного вращающегося электрона, потому что переход к случаю N вращающихся электронов можно осуществить при помощи фактора S_N .

§ 40. Угловое распределение излучения

Для того чтобы определить зависимость интенсивности излучения от сферического угла θ , мы должны выражение (39,30) просуммировать по номерам всех гармоник n .

Воспользуемся следующими соотношениями, известными из теории цилиндрических функций *):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(nx) = \frac{x^2 (4 + x^2)}{16 (1 - x^2)^{7/2}}, \quad (40,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n'^2(nx) = \frac{4 + 3x^2}{16 (1 - x^2)^{5/2}}. \quad (40,2)$$

Эти соотношения могут быть проверены при помощи разложения левых и правых частей последних равенств по величине x , причём для квадрата бесселевой функции и её производной удобно воспользоваться соотношениями:

$$J_n^2(y) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2n+2s)! y^{2(n+s)}}{s! 2^{2(n+s)} (2n+s)! [(n+s)!]^2}, \quad (40,3)$$

$$J_n'^2(y) = \left[\frac{1}{2y} \frac{d}{dy} + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} + \left(1 - \frac{n^2}{y^2} \right) \right] J_n^2(y). \quad (40,4)$$

Выражение (40,4) может быть получено путём двукратного дифференцирования равенства (40,3) и исключения $J_n^2(y)$ с помощью уравнения Бесселя:

$$J_n''(y) = -\frac{1}{y} J_n'(y) - \left(1 - \frac{n^2}{y^2} \right) J_n(y). \quad (40,5)$$

Отсюда для общей энергии, излучаемой всеми гармониками в единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$,

*) См., например, книгу G. S c h o t t, *Electromagnetic Radiation*, Cambridge, 1912, стр. 125. Заметим, что формула (40,1) приведена в книге В а т с о н, *Теория бесселевых функций*, ч. I, ИЛ, 1949, стр. 630, с опиской: $1/2$ вместо $7/2$.

имеем

$$\begin{aligned}
 dW &= \frac{e^2 \beta^2 c}{2\pi a^2} \left(\operatorname{ctg}^2 \theta \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n^2(n\beta \sin \theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \beta^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 J_n'^2(n\beta \sin \theta) \right) d\Omega = \\
 &= \frac{e^2 \beta^4 c}{8\pi a^2} \left(1 + \cos^2 \theta - \frac{\beta^2}{4} \sin^4 \theta (1 + 3\beta^2) \right) \frac{d\Omega}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{7/2}} *).
 \end{aligned} \tag{40,6}$$

При малых скоростях электронов, когда $\beta \ll 1$, пренебрегая членами порядка β^2 , находим обычную нерелятивистскую зависимость от угла

$$dW = \frac{e^2 v^4}{8\pi a^2 c^3} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega, \tag{40,7}$$

т. е. максимум интенсивности излучения будет лежать в направлении, перпендикулярном к плоскости вращения электрона (при $\theta = 0$). Интегрируя выражение (40,7) по телесному углу, найдём для глобального излучения

$$W = \frac{2e^2 v^4}{3a^2 c^3}. \tag{40,8}$$

Это значение для W совпадает, как и следовало ожидать, с нерелятивистским приближением интегральной формулы (39,8).

Далее, как видно из формулы (40,6), в ультрарелятивистском случае, когда ($\beta \sim 1$), максимум интенсивности излучения будет лежать вблизи плоскости движения электрона, причём всё излучение будет сосредоточено практически внутри угла, имеющего порядок $\Delta\varphi \cong \sqrt{1 - \beta^2}$.

Для того чтобы получить общую энергию W , которую излучает электрон в единицу времени, мы должны равенство (40,6) проинтегрировать по углам φ и θ .

*) В работе Л. Арпимовича и И. Померанчука (л. с.) аналогичная формула получена в приближённом виде. Точная формула без вывода приводится в статье Шиффа (л. с.).

С помощью простых преобразований найдём

$$W = \frac{e^2 \beta^4 c}{4a^3} \int_0^\pi \left[\frac{\sin^5 \theta \left[1 - \frac{\beta^2}{4} (1 + 3\beta^2) \right]}{[(1 - \beta^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^{7/2}} + \frac{2 \sin \theta \cos^4 \theta + 3 \sin^3 \theta \cos^2 \theta}{[(1 - \beta^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^{7/2}} \right] d\theta. \quad (40,9)$$

Воспользовавшись значением для определённого интеграла *)

$$F(n, s) = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n-1} \theta \cos^{2s-1} \theta d\theta}{[(1 - \beta^2) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta]^{n+s}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n) \Gamma(s)}{\Gamma(n+s)} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^n}, \quad (40,10)$$

получим

$$W = \frac{e^2 \beta^4 c}{4a^3} \left\{ \left[1 - \frac{\beta^2}{4} (1 + 3\beta^2) \right] 2F\left(3, \frac{1}{2}\right) + 6F\left(2, \frac{3}{2}\right) + 4F\left(1, \frac{5}{2}\right) \right\}.$$

Подставляя сюда вместо Γ -функций Эйлера известные значения, получим для W прежнее глобальное выражение:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \beta^4 c}{a^2 (1 - \beta^2)^2}, \quad (40,11)$$

которое, как и следовало ожидать, совпадает с точной интегральной формулой (39,8).

При ультрарелятивистских скоростях электрона можем положить

$$\beta \sim 1, \quad \frac{1}{1 - \beta^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2,$$

откуда имеем удобное для приложений выражение

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4, \quad (40,12)$$

*) Например, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Гостехиздат, 1948, стр. 165.

§ 41. Зависимость интенсивности излучения от частоты

Для того чтобы определить зависимость интенсивности излучения от частоты излучения (т. е. от номера гармоники n), мы должны формулу (39,30), выражающую парциальную интенсивность n -й гармоники, проинтегрировать по телесному углу $d\Omega$.

Тогда найдём количество энергии с частотой $n \frac{\omega}{2\pi}$, которую излучает электрон в единицу времени:

$$W_n = \frac{e^2 \beta^2 c n^2}{a^2} \int_0^\pi [\operatorname{ctg}^2 \theta J_n^2(\beta n \sin \theta) + \beta^2 J_n'^2(\beta n \sin \theta)] \sin \theta d\theta. \quad (41,1)$$

С помощью равенства (40,4) последнее соотношение легко привести к виду

$$W_n = \frac{e^2 \beta^2 c n^2}{a^2} [2\beta^2 A_1 - (1 - \beta^2) A_2]. \quad (41,2)$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(\frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{d^2}{dy^2} \right) J_n^2(y) \sin \theta d\theta,$$

$$A_2 = \int_0^\pi J_n^2(y) \sin \theta d\theta, \quad (41,3)$$

а величина y связана с углом θ соотношением

$$y = \beta n \sin \theta. \quad (41,4)$$

Подставляя сюда вместо $J_n^2(y)$ разложение (40,3) и принимая во внимание значение для определённого интеграла *)

$$\int_0^\pi \sin^{2n+2s-1} \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+s)}{\Gamma\left(n+s+\frac{1}{2}\right)}, \quad (41,5)$$

*) См. Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 10.

получим

$$A_1 = \frac{1}{n\beta} J'_{2n}(2n\beta),$$

$$A_2 = \frac{1}{n\beta} \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx, \quad (41,6)$$

откуда окончательно находим

$$W_n = \frac{c^2 \beta c n}{a^2} [2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx]. \quad (41,7)$$

Последнее выражение, полученное впервые Шоттом, даёт распределение интенсивности излучения в зависимости от номера гармоники. Так как номер гармоники не только входит в аргумент, но определяет также порядок бесселевой функции, то практически пользоваться этой формулой весьма затруднительно. Поэтому в следующем параграфе мы выведем другое довольно точное асимптотическое приближение к формуле (41,7), пригодное в интересующем нас ультрарелятивистском случае ($\beta \sim 1$).

§ 42. Асимптотическое приближение для бесселевых функций высокого порядка

Приближённые формулы, найденные Ватсоном*), для бесселевых функций высокого порядка ($\nu \gg 1$) вида $J_\nu(\nu x)$, где $0 < x \leq 1$, определяют лишь верхнюю границу для функции $J_\nu(\nu x)$ и только при $x \sim 1$ дают хорошее приближение. Поэтому мы воспользуемся другим способом нахождения асимптотического выражения для бесселевых функций указанного вида**).

*) В а т с о н, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949, стр. 287.

**) См., например, В. А. Ф о к, ДАН, 1, 97, 1934, R L a n g e r, Trans. Amer. Math. Soc., 33, 23, 1931.

Как известно, функции Бесселя подчиняются уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \sqrt{x} J_\nu(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) \sqrt{x} J_\nu(x) = 0. \quad (42,1)$$

Наша задача заключается в определении асимптотического решения последнего уравнения, когда x изменяется в пределах от 0 до ν .

Метод Вентцеля-Бриллуэна, применённый в квантовой механике, даёт следующее приближённое решение этого уравнения:

$$\sqrt{x} J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{-z'}} (Ae^z + Be^{-z}), \quad (42,2)$$

где $z = \int_x^{x_0} \sqrt{\frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} - 1} dx$, а x_0 является единственным

корнем функции $f(x) = \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} - 1$, т. е. $f(x_0) = 0$. При больших значениях ν мы можем принять $x_0 = \nu$.

Однако решение (42,2) является хорошим приближением лишь при больших значениях z ($x \ll \nu$) и непригодно вблизи точки $x = x_0$.

Как было показано*), решение уравнения (42,1), равномерно пригодное во всей области изменения x , включая особую точку x_0 ($0 \leq x \leq \nu$), следует искать в форме

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{z}{-z'}} I_s(z), \quad (42,3)$$

где I_s является бесселевой функцией от мнимого аргумента.

Подставляя (42,3) в исходное уравнение (42,1), получим уравнение для определения неизвестной функции z ,

*) А. С. Соколов, Вестник МГУ, № 4, стр. 77, 1947. В несколько более общем виде асимптотическое представление решений волнового уравнения с помощью разложения по малому параметру было найдено также П. Краснушкиным (Вестник МГУ, № 6, 1948). См. также Н. А. Крамерс, Zs. f. Phys., 39, 828, 1926.

а также величины s , характеризующей порядок искомой цилиндрической функции:

$$\frac{v^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - 1 = z'^2 (1 - \varepsilon), \quad (42,4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{4} - s^2}{z^2} - \frac{3}{4} \frac{z''^2}{z'^4} + \frac{1}{2} \frac{z'''}{z'^3}. \quad (42,5)$$

При получении последних формул мы воспользовались также дифференциальным уравнением, которому удовлетворяет функция $I_s(z)$:

$$I_s''(z) + \frac{1}{z} I_s'(z) - \left(1 + \frac{s^2}{z^2}\right) I_s(z) = 0,$$

причём штрих означает производную по аргументу, от которого зависит функция.

Постараемся подобрать параметр s таким образом, чтобы на всём интервале изменения x ($0 \leq x \leq v$) величина ε оставалась много меньше единицы.

Из уравнения (42,4) мы находим для искомой функции следующее хорошее приближение:

$$\begin{aligned} z &= \int_x^v \frac{\sqrt{v^2 - x^2}}{x} dx = \\ &= -v \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{v^2}} + \ln \frac{x}{v \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{v^2}} + 1 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (42,6)$$

Введём в случае больших значений x новую переменную величину ξ :

$$x = v(1 - \xi). \quad (42,7)$$

При $x \sim v$, т. е. при $\xi \ll 1$, мы найдём

$$z \simeq \frac{v}{3} (2\xi)^{3/2}; \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{dz}{d\xi} = -\sqrt{2\xi} \text{ и т. д.} \quad (42,8)$$

Подставляя (42,8) в равенство (42,5), получим

$$\varepsilon \simeq \frac{1}{v^2 (2\xi)^2} (1 - 9s^2), \quad (42,9)$$

откуда, полагая $s = \pm \frac{1}{3}$, находим условие, при котором величина ϵ при $\xi \rightarrow 0$ становится исчезающе малой.

Поэтому для искомой функции мы можем написать

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{z}{-z'}} [AK_{1/3}(z) + BI_{1/3}(z)], \quad (42,10)$$

где вторая функция Бесселя от мнимого аргумента равна

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec} \pi n [I_{-n}(z) - I_n(z)]. \quad (42,11)$$

В случае малых значений x ($0 \leq x \ll \frac{2\nu}{e}$) находим

$$z = -\ln\left(\frac{xc}{2\nu}\right)^\nu \gg 0, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\nu}{x} \text{ и т. д.} \quad (42,12)$$

Величина ϵ , имеющая при $x \rightarrow 0$ порядок $\frac{1}{\sqrt{2}}$, может быть также отброшена, т. е. решение (42,10) является пригодным на всём интересующем нас интервале изменения x^*).

Наконец, нам остаётся ещё определить значения постоянных величин A и B .

Учитывая при этом асимптотические значения для K и I при больших z^{**})

$$K_n(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}; \quad I_n(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad (42,13)$$

а также формулу Стирлинга:

$$\left(\frac{\nu}{e}\right)^\nu \cong \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi\nu}}, \quad (42,14)$$

получим

$$K_{1/3}(z) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{\sqrt{2\pi\nu}}{\Gamma(\nu+1)}; \quad I_{1/3}(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{2\pi\nu}}.$$

*) В нашей задаче необходимо знать асимптотическое поведение функций Бесселя только в случае больших значений x ($x \sim \nu$; $\xi \ll 1$). Однако для определения постоянных A и B , а также для определения интенсивности излучения при малых скоростях v ($v \ll c$), мы должны воспользоваться другим крайним значением искомой функции при $x \rightarrow 0$.

**) Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, ОНТИ, 1935, стр. 78.

С другой стороны, принимая во внимание, что для малых значений x

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad (42,15)$$

получим уравнение для определения постоянных A и B :

$$\frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} = \pi A \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)} + B \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{2\pi\nu x^\nu}, \quad (42,16)$$

откуда находим, что $A = \frac{1}{\pi}$, $B = 0$. Окончательно искомое асимптотическое выражение для функции Бесселя принимает вид

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x}} \sqrt{\frac{z}{-z'}} K_{1/3}(z) *). \quad (42,16a)$$

Заметим, что при больших значениях аргумента z функция $K_{1/3}(z)$ не зависит от номера порядка, т. е. в данном случае от индекса $1/3$ и определяется равенством (42,13). Поэтому

$$\sqrt{x} J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi z'}} e^{-z}. \quad (42,17)$$

Последнее же решение совпадает с приближённым решением (42,2), найденным методом Вентцеля-Бриллуэна и пригодным лишь для больших значений z . С другой стороны, изложенный в настоящем параграфе приближённый метод, включающий как частный случай способ Вентцеля-Бриллуэна, позволяет получать решения как для больших, так и для малых значений z .

*) Как известно, цилиндрические функции порядка $1/3$ непосредственно связаны с интегралом Эйри F соотношением ($x > 0$):

$$F = \int_0^\infty \cos(t^3 + xt) dt = \frac{\sqrt{x}}{3} K_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3}\right);$$

В частности, в наиболее интересующей нас области больших значений z получаем

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\xi}{3}} K_{1/3} \left(\frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2} \right), \quad (42,18)$$

где

$$\xi = 1 - \frac{x}{\nu}.$$

Из (42,18) находим

$$J_\nu(x) = \frac{2\xi}{\pi \sqrt{3}} K_{2/3} \left(\frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2} \right), \quad (42,19)$$

а также

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^x \sqrt{-\frac{z}{z'x}} K_{1/3}(z) dz. \quad (42,20)$$

Вместо последнего выражения можно взять

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = \frac{\nu}{\pi \sqrt{3}} \int_{\xi}^1 \sqrt{2\xi} K_{1/3} \left(\frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2} \right) d\xi. \quad (42,21)$$

Формула (42,21) является менее точной, чем (42,20), так как вместо z мы подставили значение (42,8), пригодное лишь при $\xi \rightarrow 0$. Однако, принимая во внимание, что при $\xi \rightarrow 1$ ($z \rightarrow \infty$) функции $K_{1/3}(z)$ и $K_{1/3} \left(\frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2} \right)$ быстро стремятся к нулю, наше новое приближение является вполне пригодным. Наконец, вводя новую переменную величину $y = \frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2}$ и растягивая предел интегрирования для больших ν , практически до ∞ , получим

$$\int_0^x J_\nu(x) dx = \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_{\frac{\nu}{3} (2\xi)^{3/2}}^{\infty} K_{1/3}(y) dy. \quad (42,22)$$

Формулы (42,18), (42,19) и (42,22) представляют собою искомые асимптотические выражения для функций Бесселя.

§ 43. «Светающийся» электрон

Как было найдено выше, зависимость энергии излучения от номера гармоники определяется равенством (41,7):

$$W_n = \frac{e^2 c \beta n}{a^2} \left[2\beta^2 J'_{2n}(2n\beta) - (1 - \beta^2) \int_0^{2\beta n} J_{2n}(x) dx \right]. \quad (43,1)$$

Рассмотрим теперь два случая: нерелятивистский ($\beta \ll 1$) и ультрарелятивистский ($1 - \beta \ll 1$).

В нерелятивистском случае мы можем положить в согласии с (42,15)

$$J_{2n}(2n\beta) = \frac{(n\beta)^{2n}}{(2n)!}; \quad J'_{2n}(2n\beta) = \frac{(n\beta)^{2n-1}}{2(2n-1)!};$$

$$\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x) dx = \frac{2(n\beta)^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (43,2)$$

Тогда для энергии n -й гармоники находим

$$W_n = \frac{4e^2 c \beta^{2n+2}}{a^2} \frac{n^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{n+1}{2}. \quad (43,3)$$

Максимальную энергию будет излучать основной тон ($n=1$)

$$W_1 = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^4}{a^2 c^3}. \quad (43,4)$$

Энергия излучения гармоники с частотой $n\omega$ ($n=2, 3, 4, \dots$) будет иметь порядок $\beta^{2(n-1)} W_1$, поэтому в нерелятивистском приближении её можно отбросить.

Формула (43,4), как и следовало ожидать, совпадает с нерелятивистским приближением выражения (39,8), определяющим общую энергию излучения.

Длина волны основного тона [см. также равенства (39,1) и (39,2)] равна

$$\lambda = 2\pi a \frac{c}{v},$$

т. е. вращающийся электрон будет излучать электромагнитные волны с длиной волны λ , превышающей в несколько раз размеры орбиты.

Совершенно другое положение вещей мы будем иметь в ультрарелятивистском случае.

Вводя обозначение $x = 2n\beta = 2n(1 - \xi)$ и принимая во внимание соотношения (42,18) и (42,22), получим следующее выражение при $\xi \ll 1$ и больших значениях n для энергии излучения n -й гармоники *):

$$W_n = \frac{e^2 c}{a^2} \left\{ 2n J'_{2n} [2n(1 - \xi)] - 2\xi n \int_0^{2n(1-\xi)} J_{2n}(x) dx \right\} =$$

$$= \frac{e^2 c}{a^2} \frac{2\xi n}{\pi \sqrt{3}} \left[2K_{2/3} \left(\frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2} \right) - \int_{\frac{2n}{3} (2\xi)^{3/2}}^{\infty} K_{1/3}(y) dy \right]. \quad (43,5)$$

Здесь величина

$$\sqrt{2\xi} = \sqrt{2(1-\beta)} \cong \frac{mc^2}{\mathcal{E}}$$

представляет собою отношение собственной энергии mc^2 электрона к его общей энергии \mathcal{E} . В ультрарелятивистском случае это отношение является малой величиной ($2\xi \ll 1$).

Круговая частота излучаемой гармоники равняется

$$\omega = n\omega_0,$$

где

$$\omega_0 = \frac{c}{a}$$

является круговой частотой основного тона.

Вводя далее критическую частоту

$$\omega_c = \frac{3\omega_0}{2(2\xi)^{3/2}} = \frac{3\omega_0}{2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^3 = \frac{3\omega_0}{2} (1 - \beta^2)^{-3/2} \quad (43,6)$$

и учитывая, что для больших номеров гармоник $n \gg 1$ изменение частоты излучения ω мы можем считать непрерывным:

$$d\omega = \omega_c dn,$$

*) Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, 59, 1551, 1948.

так как приращение номера гармоники $dn = 1$ по сравнению с n можно считать за малую величину, получаем

$$dW = W_n dn = -\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y dy \left[2K_{1/3}(y) - \int_y^\infty K_{1/3}(x) dx \right], \quad (43,7)$$

где величина y равняется отношению частоты излучения ω к критической частоте ω_c , т. е.

$$y = \frac{\omega}{\omega_c} = n \frac{\omega_0}{\omega_c}.$$

Принимая во внимание известное рекуррентное соотношение

$$2K'_{2/3}(x) + K_{1/3}(x) = -K_{5/3}(x),$$

мы можем значение для dW представить также в другом виде:

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y dy \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx. \quad (43,7a)$$

Найдём теперь энергию излучения dW в следующих предельных случаях.

1) В случае $\omega \ll \omega_c$ величина y будет много меньше единицы ($y \ll 1$).

Предельное значение для dW при $y \ll 1$ значительно проще может быть найдено из равенства (43,7), чем из равенства (43,7a).

Воспользовавшись формулами

$$K_n(y) = \frac{2^{n-1} \Gamma(n)}{y^n}, \quad y \rightarrow 0, \quad n > 0,$$

$$\int_0^\infty K_n(x) x^{2m+1-n} dx = 2^{2m-n} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1-n),$$

$$m+1 > n > 0, \quad (43,8)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}},$$

получим

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{2^{4/3}\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) y^{1/3} dy \left(y = n \frac{\omega_0}{\omega_c}\right), \quad (43,9)$$

т. е. энергия излучения будет возрастать пропорционально корню кубическому из частоты излучения $\omega = y \omega_c$, или корню кубическому из номера гармоники n , достигая своего максимального значения при $\omega \sim \omega_c$.

Как видно из формулы (43,6) при очень больших энергиях вращающегося электрона критическая частота излучения (частота, при которой интенсивность излучения достигает своего максимального значения) может попасть в видимую часть спектра, несмотря на то, что основной тон обладает длиной волны порядка радиуса орбиты.

Поэтому вращающийся электрон может стать «светящимся» в буквальном смысле слова.

Действительно, подобное свечение, предсказанное в указанных выше работах, было визуально обнаружено в 1947 г. *), причём экспериментальное исследование подтвердило характер спектрального распределения, установленного теорией [формулы (43,9) и (43,12)].

Наконец, установим связь между направлением излучения и номером гармоники. В § 40 мы нашли, что максимум интенсивности излучения лежит вблизи плоскости орбиты электрона $\left(\theta = \frac{\pi}{2} + \Delta\varphi\right)$, причём всё излучение фактически будет сосредоточено внутри угла порядка $2\Delta\varphi \sim 2\sqrt{1-\beta^2}$. Обратимся к формуле (39,30), устанавливающей зависимость энергии излучения от номера гармоники n и от угла θ .

В частности, для углов θ , лежащих вблизи плоскости максимального излучения $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$, мы находим сле-

*) Н. С. Rollock и др., Phys. Rev., 71, 829, 1947, и 74, 52, 1948. См. также УФН, 34, 398, 1948. Фотографии нового излучения см., например, в Electronics (сентябрь, 1947).

дающий аргумент, от которого должна зависеть функция Бесселя, входящая в равенство (39,30):

$$n\beta \sin \theta = n \left(1 - \xi - \frac{\alpha^2}{2} \right),$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Учитывая равенство (43,6), будем иметь отличное от нуля значение для интенсивности, когда

$$n \left(\xi + \frac{\alpha^2}{2} \right)^{3/2} < 1.$$

В частности, для гармоник, дающих отличную от нуля общую интенсивность, т. е. удовлетворяющих неравенству

$$n\xi^{3/2} < 1,$$

находим, что отличная от нуля интенсивность спектрального излучения будет сосредоточена внутри угла

$$n\alpha^3 < 1,$$

откуда находим предельное значение для угла излучения

$$\alpha_n = n^{-1/3}. \quad (43,10)$$

С увеличением номера гармоники телесный угол излучения будет всё время уменьшаться, приближаясь к плоскости движения электрона.

2) В другом предельном случае $\omega \gg \omega_c$ мы имеем $y \gg 1$. Для вычисления dW воспользуемся выражением (43,7а).

Принимая во внимание, что при больших значениях y ($y \gg 1$)

$$K_{5/3}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y},$$

найдем

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 y [1 - g(\sqrt{y})] dy. \quad (43,11)$$

Здесь

$$g(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

является функцией Гаусса.

В частности, для больших значений z мы имеем

$$g(z) = 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}z} + \dots,$$

откуда

$$dW = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \sqrt{y} e^{-y} dy \quad (43,12)$$

$$\left(y = n \frac{\omega_0}{\omega_c}\right).$$

Таким образом для частот выше критических $\omega > \omega_c$ энергия излучения будет быстро, практически экспоненциально, уменьшаться с увеличением частоты или номера гармоники n . Следовательно, главная часть излучения обязана частотам, лежащим вблизи критической ω_c .

Примерная графическая зависимость энергии излучения W_n от номера гармоники $n = \frac{\omega}{\omega_0}$ представлена на рис. 15.

Наконец, найдем глобальную энергию излучения, которая согласно (43,7а) будет равняться

$$W = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4 \int_0^\infty y dy \int_y^\infty K_{5/3}(x) dx. \quad (43,13)$$

Последний интеграл может быть легко вычислен с помощью соотношения (43,8).

В самом деле,

$$\int_0^{\infty} y dy \int_y^{\infty} K_{5/3}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} y^2 K_{5/3}(y) dy = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}},$$

откуда находим выражение для W :

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{a^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^4, \quad (43,14)$$

точно совпадающее с ультрарелятивистским приближением (40,12) для интегрального значения энергии излучения.

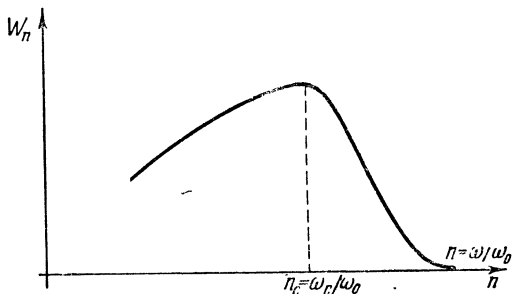


Рис. 15.

Таким образом найденное выше асимптотическое выражение (43,7) представляет собою хорошее приближение для описания излучения «светящегося» электрона.

При вращении по кругу не одного, а N электронов мы должны учесть фактор когерентности S_N , определяемый формулой (39,33).

Обозначим через N_1 число электронов, расположенных по орбите произвольно, т. е. беспорядочно в смысле взаимных расстояний; через N_2 обозначим число электронов, образующих k сгустков, причём в каждом сгустке пусть находится в среднем N' электронов ($N_2 = kN'$).

Под «сгустком» мы будем понимать совокупность электронов, расположенных произвольно вдоль дуги с углом

вым раствором φ , так, что их плотность быстро убывает по какому-либо закону, например, по гауссовой формуле при удалении от центра сгустка.

Электроны сгустка должны когерентно излучать гармоники с интенсивностью, пропорциональной N'^2 в области длин волн λ , превышающих размеры сгустка $a\varphi$ ($\lambda > a\varphi$ *). Наконец, через N_3 обозначим число электронов, расположенных по орбите регулярно (т. е. на равных расстояниях друг относительно друга).

Общая энергия излучения для n -й гармоники будет равняться

$$W_n^N = W_{1n} + W_{2n} + W_{3n}. \quad (43,15)$$

Энергия W_{1n} , излучаемая электронами, расположенными на орбите произвольно, будет равняться сумме энергий W_n , излучаемой каждым электроном (см. § 39), т. е.

$$W_{1n} = N_1 W_n. \quad (43,16)$$

Энергия W_{2n} , излучаемая сгустками, должна быть пропорциональной квадрату числа частиц (или квадрату заряда), т. е.

$$W_{2n} = kN'^2 W_n = N_2 N' W_n. \quad (43,17)$$

Наконец, энергия W_{3n} , излучаемая регулярно расположенными электронами, будет равняться

$$W_{3n} = S_{N_3} W_n, \quad (43,18)$$

*) Вообще под когерентным излучением мы будем понимать такое излучение, при котором излучение двух или более электронов не будет равняться сумме интенсивностей излучения каждого электрона в отдельности. В нашем случае мы имеем двойного рода когерентность: во-первых, когерентное излучение, происходящее из-за движения равномерно распределённых по окружности электронов [фактор когерентности определяется равенством (39,36)], и, во-вторых, когерентное излучение, связанное с тем обстоятельством, что часть электронов будет расположена друг относительно друга на расстояниях, меньших чем длина излучаемой ими волны (см. § 37).

причём согласно (39,36) и (39,37) фактор когерентности равен

$$S_{N_3} = \begin{cases} 0, & \text{когда } \frac{n}{N_3} \text{ будет не целым числом,} \\ N_3^2, & \text{когда } \frac{n}{N_3} \text{ будет целым числом.} \end{cases} \quad (43,19)$$

В частности, при $N_3 > n_c \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$ последняя группа электронов практически не должна излучать. Например, идеальный постоянный круговой ток мы можем рассматривать как движение регулярно расположенных по орбите электронов при $N_3 \rightarrow \infty$. Этот вывод согласуется с тем известным фактом, что постоянный ток не излучает электромагнитной энергии. Таким образом регулярность расположения электронов должна в общем случае привести к уменьшению энергии излучения.

Рассмотрим вопрос о границах применимости классической теории «светящегося» электрона *).

Решая релятивистскую задачу в плоских полярных координатах, когда можно пренебречь спиновыми эффектами, находим для энергии электрона \mathcal{E}_{ls} и волновой функции $\psi_{l,s}$ следующие выражения:

$$\mathcal{E}_{ls} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sqrt{m^2c^4 + eHc \frac{h}{2\pi} (2l + 2s + 1)}, \quad (43,20)$$

$$\psi_{ls} = C_{ls} e^{il\varphi} R_{ls},$$

где квантовые числа $l, s = 0, 1, 2, 3, \dots$, $C_{l,s}$ является нормированным коэффициентом, радиальная функция R связана с обобщёнными полиномами Лаггера L соотношением

$$R_{ls} = e^{-\rho} \rho^{\frac{l}{2}} \frac{d^l}{d\rho^l} L_{s+l}(2\rho),$$

а безразмерная величина ρ равна

$$\rho = \frac{\pi e H}{2ch} r^2.$$

*) А. Соколов, ДАН, 67, 1013, 1949.

В случае круговой орбиты ($s = 0$) квантовое число l связано с радиусом a соотношением

$$a = \sqrt{\frac{chl}{\pi e H}}.$$

Если квантовое число s не равно нулю, то от круговой орбиты радиуса a возможно отклонение на величину

$$\Delta r = \pm a \sqrt{\frac{s}{l}}.$$

Определим излучение электрона при переходе из состояния $(l, 0)$ в состояние (l', s') , причём номер гармоники излучения равняется $n = l - (l' + s')$.

Из формулы (43,20) можно найти круговую частоту излучения:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{h} (\mathcal{E}_{l0} - \mathcal{E}_{l', s'}) = n \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \frac{n}{l} \right),$$

где $\omega_0 = \frac{v}{a}$.

Интенсивность излучения n -й гармоники внутри телесного угла $d\Omega$ равна:

$$dW_n^{\text{KB}} = \frac{e^2 v_n^2}{2\pi m^2 c^3} \sum_{s'} (\overline{P}_x^2 + \cos^2 \theta \overline{P}_y^2) d\Omega,$$

где

$$\overline{P}_x = \int \psi_{l', s'}^\dagger e^{-i \frac{(wr)}{c}} \left(\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right) \psi_{l0} d\tau;$$

аналогичное выражение имеем для \overline{P}_y .

Для интенсивности излучения находим:

$$dW_n^{\text{KB}} = dW_n \sum_{s'} B_{s'}^2,$$

где dW_n — классическая интенсивность излучения, определяемая формулой (39,30), а коэффициенты $B_{s'}^2$ равны:

$$B_0^2 = 1 - \frac{1}{4} \frac{n^2}{l}, \quad B_1^2 = \frac{n^2}{4l} \text{ и т. д.}$$

При вычислении суммы $\sum_{s'} B_{s'}^2$ члены порядка n^2/l сокра-

щаются, и отношение квантовых поправок для суммарного излучения к классическим результатам будет равно

$$\alpha = \frac{n}{l}.$$

В ультрарелятивистском случае де-броглевскую длину волны движущегося электрона можно положить равной

$$\Lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}} \cong \frac{ap}{l}.$$

Отсюда для величины α находим выражение

$$\alpha = \frac{n\Lambda}{\pi a}.$$

Таким образом, при излучении обертонов номера n квантовые поправки для частоты и суммарной интенсивности излучения начинают сказываться, когда де-броглевская длина волны становится сравнимой с $\frac{a}{n}$. Напомним, что для дипольного излучения ($n=1$) мы получим обычное условие $\Lambda \sim a$.

Подставляя сюда вместо n значение той гармоник, которая даёт максимум излучения $n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$, находим условие, при котором начинают сказываться квантовые поправки для суммарной интенсивности излучения:

$$\mathcal{E} \sim mc^2 \left(\frac{amc}{h}\right)^{1/2},$$

что значительно превосходит достигаемые в настоящее время энергии.

Как известно, при классическом рассмотрении плоского движения электрона в постоянном магнитном поле траектория электрона всегда должна оставаться круговой. На языке квантовой механики это означает, что из состояния $s=0$ возможны только такие переходы, для которых s' также равняется нулю. Как видно из последних формул, это возможно лишь в том случае, когда величина $\gamma = \frac{n^2}{l} = \frac{n^2\Lambda}{\pi a}$ будет много меньше единицы ($\gamma \ll 1$), в противном случае мы должны учесть эффект отдачи;

который может повлиять на траекторию движения электрона, что связано с возможностью перехода в состояния $s' \neq 0$.

Из условия $\gamma \sim 1$ находим значения для энергии \mathcal{E} , при которой следует учитывать эффект отдачи:

$$\mathcal{E} \sim mc^2 \left(\frac{amc}{\hbar} \right)^{1/5},$$

что, повидимому, лежит на границе наблюдений.

При последнем условии, повидимому, следует пересмотреть также вопрос о когерентности излучения нескольких электронов, поскольку каждый электрон получает новые степени свободы (изменение радиальных функций) при квантовых переходах.

В заключение небезынтересно остановиться на истории открытия нового эффекта «светящегося» электрона.

Предсказание нового излучения, испускаемого электронами в бетатронах, может на первый взгляд показаться в значительной мере тривиальным, так как движение по стабильной круговой орбите является ускоренным. Поэтому важно подчеркнуть, что первый существенный пункт теории светящегося электрона заключается в доказательстве весьма значительной величины потерь на излучение, растущих пропорционально четвертой степени энергии. При энергии порядка 100 MeV потеря энергии на излучение, согласно Блюитту (см. § 38), достигает 20%, а радиус орбиты с 83 см уменьшается примерно на 3 см.

При некоторой критической энергии потеря энергии оказывается равной энергии, приобретённой электроном. Наличие потолка работы бетатрона является вторым существенным выводом теории*).

Поэтому неудивительно, что первые работы с новым бетатроном на 100 MeV были посвящены выяснению роли предсказанного излучения. После окончательного подтверждения существования нового излучения проектирование бетатронов сверхвысоких энергий без добавочных

*) Это обстоятельство было выяснено в первой же работе (1. с.) по светящемуся электрону, явившейся результатом дискуссии на одном из семинаров в Московском университете.

приспособлений, очевидно, оказывается нецелесообразным. С другой стороны, бетатрон останется весьма эффективным прибором для получения ускоренных до 100—200 MeV электронов и для получения тормозных рентгеновых лучей примерно этой же энергии, возникающих при столкновении электронов с мишенью в бетатроне.

В-третьих, переход от излучения отдельного электрона к излучению пучка вызвал возражение в связи с отсутствием излучения кругового тока; была высказана мысль, что благодаря взаимной интерференции реальный пучок электронов в ускорителе типа бетатрона вообще излучать не будет. Однако излучение возникает вследствие наличия флуктуаций в пучке электронов, нарушающих равномерное распределение типа кругового тока*). В результате флуктуаций излучение пучка электронов в бетатроне в основном является суммой излучений отдельных электронов.

Далее, как было показано в § 40, это излучение имеет особое угловое распределение, будучи направлено при ультрарелятивистском движении электрона вперёд по движению.

Наконец, одной из наиболее характерных и существенных сторон нового излучения является его спектральное распределение. При ультрарелятивистском движении излучается отнюдь не одна основная волна, соответствующая дипольному излучению, а имеет место интенсивное испускание обертонов крайне высокого порядка, причём максимум энергии приходится как раз на высокие обертоны порядка $n \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^3$. При этом спектр является практически непрерывным, так как разница между частотами незначительна по сравнению с критической частотой, в области которой происходит основное излучение. Отсюда ясно, что первоначальные предположения об излучении микрорадиоволн и поиски, например, Блюиттом этих волн в данных условиях были ошибочными, так как максимум излучения при энергии электронов в десятки миллионов электрон-вольт должен приходиться на область видимого света. В полном согласии с этими довольно

*) Вопрос о флуктуациях был впервые обсуждён в дискуссии с Я. П. Терлецким.

парадоксальными выводами об излучении видимого света, лаборатории Поллока (*l. c.*) удалось наконец в 1947 г. визуально обнаружить в синхротроне, являющемся модернизированным видоизменением бетатрона, свечение, испускаемое движущимися электронами в виде красноватого при 30 MeV и голубовато-белого при 70 MeV пятна, столь яркого, что оно было видно даже при дневном свете.

В этой связи следует отметить, что в противоположность всем прежним косвенным способам наблюдения электрона вновь открытое свечение является наиболее непосредственным. В самом деле, наблюдение сцинтилляций или следов частиц в камере Вильсона или в фотопластинках, а также регистрация отсчетов в счётчике, — все эти методы позволяют надёжно отметить присутствие или прохождение частиц косвенно по их воздействию на другие частицы. В эффекте Черенкова электрон наблюдается более непосредственно по его излучению, которое, однако, самым тесным образом связано с наличием среды. Лишь в новом эффекте, который разумно назвать явлением «светящегося» электрона, наблюдается свечение, исходящее непосредственно от электрона, движущегося в поле, и не обусловленное частицами окружающей среды. Термин «светящийся» подчёркивает наиболее интересное свойство нового типа излучения при практически используемых ускорениях до энергий в десятки миллионов электрон-вольт.

Резюмируя эти замечания, можно сказать, что теоретические и экспериментальные исследования показали ряд специфических, частью неожиданных свойств предсказанного излучения и доказали его важность для работы ускорительных установок.

Весьма интересно, что новое излучение «светящегося» электрона, исследованное вначале как помеха при работе ускорителей, в свою очередь оказалось интересным явлением, которое можно использовать разнообразными способами. Более того, явление «светящегося» электрона играет роль не только в лабораторных условиях. При движении быстрых электронов и других частиц, входящих в состав космического излучения, в магнитном поле Солнца и звёзд мы будем, очевидно, иметь условия, аналогичные поло-

жению в ускорителях типа синхротрона и бетатрона, ввиду чего должно иметь место излучение электромагнитных волн космическими заряженными частицами. Не исключено, что подобное новое космическое излучение будет хотя бы отчасти ответственным за открытое недавно радиоизлучение звёзд*). Кроме того, следует отметить, что интенсивное излучение в магнитном поле, например, Земли ставит известный предел энергии, которой могут обладать частицы, достигающие Земли из мирового пространства (для электронов около 10^{17} eV**).

Предсказание и открытие явления «свещающегося» электрона ещё раз с полной наглядностью показало весьма глубокое универсальное значение утверждения Ленина о том, что «Электрон так же неисчерпаем, как и атом***). Действительно, электрон, как и другие элементарные частицы, характеризуется теперь не только массой и электрическим зарядом, но и открытыми позднее магнитными моментами разного типа, спином, типом статистики, волновыми свойствами, ядерными квазизарядами, проявляющимися при взаимодействиях с нуклеонами и т. д. Все эти вновь и вновь открываемые качества электрона (как и всех других частиц) проявляются в неисчерпаемом множестве всё новых свойств поведения, таких, например, как явления диффракции электронных волн, способности превращения в другие частицы, поглощения атомными ядрами (K — захват), способности излучать видимый свет с особыми свойствами при движении со скоростями, близкими к скорости света, и т. д.

Не останавливаясь сколько-нибудь подробно на вопросах, связанных с ускорителями, укажем коротко, что в настоящее время описаны весьма эффективные ускорительные установки, основанные на идее Векслера****)

*) См. также Н. Alfvén and N. Herlofson, Phys. Rev., 78, 616, 1950; Н. О. Киренхейер, Phys. Rev., 79, 738, 1950.

**) И. Я. Померанчук, ЖЭТФ, 9, 915, 1939.

***) В. И. Ленин, Материализм и эмпириокритицизм, Госполитиздат, 1949, стр. 245.

****) В. Векслер, Journ. of Phys. USSR, 9, 153, 1945; см. также А. П. Гринберг, Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1949. Научно-реферативные сборники: вып. I, Резонансные ускорители, ИЛ, 1948; вып. II, Бетатрон, ИЛ, 1948; сборник

медленного добавочного изменения частоты электрического поля в циклотроне (синхроциклотрон или фазотрон), или введения в циклотроне медленно изменяющегося магнитного поля. Аналогичным образом применяются бетатроны, с добавочным ускорением электронов при помощи включения радиочастотного промежутка—так называемые синхротроны. Эти установки оказались гораздо менее громоздкими и более экономичными при постройке. Излучение светящегося электрона было обнаружено впервые именно на синхротроне (условия наблюдения в бетатроне на 100 MeV были неблагоприятны ввиду покрытия вакуумной трубки слоем серебра, не пропускавшим света).

В последнее время вновь обратились к различным линейным ускорителям резонансного или волноводного типа. Одним из преимуществ подобных приборов является отсутствие заметных потерь на излучение, обусловленное прямолинейностью движения частиц и незначительностью величины ускорения в данном случае по сравнению с круговым движением.

статей «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц», ИЛ, 1950; Д. К. С л е т е р, Конструкция линейных ускорителей УФН, 37, 459, 1949.

ГЛАВА V КЛАССИЧЕСКАЯ МЕЗОДИНАМИКА

§ 44. Проблема ядерных сил

а) Модель атомного ядра

Ввиду того, что новейшая теория взаимодействия частиц развивалась главным образом, в связи с проблемой отыскания ядерных сил, остановимся несколько подробнее на этом вопросе.

Как известно, до 1932 г. атомные ядра считались составленными из двух типов известных тогда элементарных частиц: протонов и электронов. Однако эта модель не могла объяснить ряда важных свойств ядер. В особенности отчётливо противоречия выступали при анализе спина, статистики и магнитных моментов ядер. Магнитные моменты всех ядер примерно в тысячу раз меньше электронных и по порядку равны ядерному магнетону:

$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi Mc}$, где M — масса протона. Сам протон имеет

магнитный момент $\mu_p = +2,792 \mu_0$ (Штерн, Раби, Хиппль).

Магнитный же момент электрона лишь незначительно отличается от боровского магнетона $\mu_B = -\frac{eh}{4\pi mc}$ и равняется

$\mu_e = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$, $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}$. Совершенно непонятно,

каким образом магнитные моменты электронов могли бы оказаться полностью скомпенсированными во всех ядрах.

Значения спинов ядер и характер статистики также не получались по старой модели. Например, для тщательно исследованного ядра азота ^{14}N (предполагавшегося составленным из 14 протонов и 7 электронов) получался

полуцелый спин *) и фермиевская статистика, тогда как в действительности эти ядра имеют целый спин $s = 1$ и подчиняются бозевской статистике. Эта «азотная катастрофа» и другие примеры заставили некоторых физиков обсуждать даже вопрос о «потере» электронами своего спина или о неприменимости квантовой механики к ядру. С другой стороны, подобная ситуация побудила произвести более тщательный анализ существования различных частиц в системах столь малых размеров, как ядра. При этом, выяснилось, что лёгкие частицы, такие, как электроны (и позитроны), в ядрах вообще не могут существовать, сохраняя свою индивидуальность, так как их собственная энергия $\mathcal{E} = mc^2 \sim 0,5 \cdot 10^6$ eV значительно меньше энергии взаимодействия в ядрах, которая достигает нескольких миллионов электрон-вольт на частицу. Таким образом испускание электронов или позитронов при бета-распаде является порождением этих частиц в точной аналогии с испусканием фотонов атомами или ядрами.

После открытия нейтрона Чадвиком в 1932 г. и обнаружения нейтронов в результате расщепления многих ядер, ряд авторов предложил компромиссную модель ядра, составленного из протонов, электронов и нейтронов (Перрен и Ожэ), что оставляло, очевидно, неустранёнными указанные выше принципиальные трудности. Вопреки этому была выдвинута нуклеонная модель ядра, составленного только из тяжёлых частиц: протонов и нейтронов **). Число протонов определяется порядковым номером Z в периодической системе, а число нейтронов N разностью атомного номера A (атомного веса в круглых числах) и порядкового номера Z , т. е. $N = A - Z$. Нуклеонная модель ядра указывает на то, что нейтрон является элементарной частицей, обладающей спином $1/2$ и, в согласии с полуцелым значением спина, подчиняющейся фер-

*) Как известно, спин электрона, как и позитрона и протона, или точнее—компонента спина на данную ось, в единицах $h/2\pi$ равняется $s = \pm 1/2$, и эти частицы подчиняются фермиевской статистике. О более точных значениях магнитных моментов частиц см. дополнение.

***) Д. Иваненко, Сборник «Атомное ядро», ГТТИ, 1934, стр. 54; также Nature, 129, 798, 1932; C. R., Paris, 195, 439, 1932.

миевской статистике. Эти свойства нейтрона полностью подтвердились опытом. В дальнейшем у нейтрона был открыт магнитный момент, равный $\mu_n = -1,913 \mu_0$ (Блох)*). Теперь трудности старой модели непосредственно устраняются, так как, например, магнетизм ядер обуславливается собственными и орбитальными моментами нуклеонов, которые все будут порядка ядерного магнетона. Движение нуклеонов описывается квантовой механикой, притом в основном оказалось достаточным нерелятивистское приближение, т. е., в частности, использование уравнения Шредингера. В дальнейшем магнитные моменты ядер удалось вычислить не только по порядку величины, но для лёгких ядер также с известной точностью на базе правдоподобных представлений о конфигурациях нуклеонов.

Ядро азота ^{14}N оказывается на самом деле составленным из 7 протонов и 7 нейтронов, всего 14 нуклеонов, что объясняет целый спин и бозевский характер статистики. Так как общее число нуклеонов равняется атомному весу, то нуклеонная модель в согласии с опытом непосредственно объясняет целые (или полуцелые) значения спина и бозевский (или фермиевский) характер статистики у ядер чётного (или нечётного) атомного веса. Действительно, чётное число значений спина по $s_z = \pm 1/2$ каждое даёт целый спин. Нетрудно также показать, что система из чётного (нечётного) числа фермиевских частиц подчиняется бозевской (фермиевской) статистике. Следует подчеркнуть, что согласно фундаментальной теореме Паули (1939 г.) фермиевская (бозевская) статистика с необходимостью следует для частиц полуцелого (целого) спина**).

Обратимся к энергии связи. На каждый нуклеон приходится в ядре в среднем энергия 7—8 MeV, кроме ядер легче альфа-частицы. Для дейтерона удельная энергия связи несколько больше 1 MeV. Это, по существу отрицательное, значение энергии представляет собою разность между отрицательной потенциальной и положительной кинетической энергией и совпадает с так называемым

*) См. таблицу ядерных моментов J. E. M a s k, Rev. Mod. Phys., 22, 64, 1950.

***) В. П а у л и, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947, стр. 72.

упаковочным коэффициентом или дефектом массы, приходящимися на частицу и выраженными в энергетических единицах. Заметим, что эта энергия гораздо меньше собственной энергии нуклеонов $\mathcal{E} = Mc^2 \cong 918 \text{ MeV}$. При этом важно подчеркнуть в качестве добавочного аргумента в пользу нуклеонной модели ядер, что длина де-броглевской волны нуклеона подобной средней энергии, которую можно подсчитать по нерелятивистской механике, равняется

$$\Delta = \frac{h}{p} \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

что по порядку как раз совпадает с размерами ядер и ядерных орбит (также, как в атоме де-броглевская длина волны электронов по порядку совпадает с размерами орбит $\Delta \sim a \sim 10^8 \text{ см}$). С другой стороны, де-броглевская длина волны предполагавшихся внутриядерных электронов, которую нужно подсчитывать по релятивистской формуле, была бы равной при тех же энергиях

$$\Delta = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\mathcal{E}} \sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ см},$$

что превышает размеры ядер, аналогично тому как длины волн света, фотонов, испускаемых атомами, но не существовавших в готовом виде в атомах, превышают его размеры.

Таким образом величины энергий и длин де-броглевских волн также говорят в пользу нуклеонной модели. Следует, наконец, в ряду основных аргументов против старой модели ядра ещё отметить, что наличие электронов и позитронов в ядрах привело бы к их аннигиляции и соответствующему гамма-излучению, никогда не наблюдавшемуся. Самые основные факты β -распада также говорят против наличия лёгких частиц в ядрах, так как электроны и позитроны всегда испускаются не в момент расщепления и образования искусственно-радиоактивных ядер, но спустя некоторое время, в среднем весьма продолжительное с точки зрения ядерных периодов (от $T \sim 0,01$ сек. вплоть до 10^8 сек.). Кроме того, предположение о существовании электронов и позитронов в ядрах

заставило бы принять наличие какого-то удерживающего их потенциального барьера, размеры которого должны были бы, однако, оказаться абсурдно большими.

Различные попытки, возникавшие время от времени, трактовать нейтрон как сложную частицу, составленную из протона и отрицательного мезона, и свести тем самым ядерные силы к обменным силам наподобие сил в молекуле водорода (Тамм-Ландау), так же как рассмотрение нейтрона в виде комбинации протон плюс электрон (Темпле), не дали какого-либо положительного результата.

Устранение противоречий старой модели, обнаружение многих эмпирических закономерностей, к которым приводило новое представление (Гапон, Гейзенберг*), а также последовавшее в 1932—1933 гг. открытие порождения электронов и позитронов и их трансмутации в два фотона, — всё это сравнительно быстро сделало новую нуклеонную модель ядра общепризнанной**). Никакие последующие попытки вернуться к сложному протону или сложному нейтрону успеха не имели.

Одним из наиболее важных приложений нуклеонной модели, являющейся отправным пунктом всей современной ядерной физики, явилась теория β -распада, развитая Ф. Перреном и в особенности Ферми, на базе представления о порождении пары частиц: электрона (или позитрона) и нейтрино ядрами, или, соответственно, поглощения электрона и испускания нейтрино ядрами при K -захвате. Изложение этой теории лежит вне рамок настоящей книги, и мы ограничимся здесь замечанием, что теория β -распада требует участия заряженных частиц в ядерном поле, к рассмотрению которого мы сейчас перейдём.

*) W. Heisenberg, Zs. f. Phys., 77, 1, 1932; Rapports du congrès Solvay, Paris (1934). Е. Гапон, Zs. f. Phys., 84, 509, 1933; Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер, Физика ядра, ч. I, Харьков, 1938; Э. В. Шпольский, Атомная физика, т. II, Гостехиздат, 1950; Э. Разетти, Атомное ядро, Гостехиздат, 1940; В. Гейзенберг, Физика атомного ядра, Гостехиздат, 1948; Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949; E. Fermi, Nuclear Physics, Chicago, 1950.

**) См. M. L a u e, Geschichte der Physik, Bonn, 1949.

б) Свойства ядерных сил

Важнейшей проблемой, которую выдвинула нуклеонная модель ядра, является фундаментальный вопрос о силах, действующих между протоном и нейтроном. Укажем сразу, что эта проблема до сих пор окончательно не решена, хотя при её анализе достигнуты очень большие успехи как в смысле выяснения природы ядерных сил, так и в направлении построения общей теории взаимодействия всех частиц и полей. Наиболее существенный прогресс связан, во-первых, с открытием возможности взаимодействия через частицы с конечной массой покоя, сопоставленные некоторым полям, и, во-вторых, с предсказанием и открытием новой частицы,—мезона, переносящей ядерные силы, средней по массе между нуклеонами и электронами.

Прежде всего легко убедиться, что никакие обычные, до сих пор известные силовые поля непригодны для объяснения самого наличия ядерных взаимодействий, независимо от какого бы то ни было их более детального описания. В самом деле, поле тяготения (или сопоставленные слабому полю, согласно квантовой теории частицы—гравитоны) отпадает для всех атомных и ядерных частиц ввиду своей чрезвычайной малости, обусловленной ничтожными массами частиц и незначительностью константы тяготения. Напомним, что сила ньютонова притяжения, например, двух протонов будет примерно в 10^{36} раз меньше их кулонова отталкивания:

$$\frac{e^2}{r^2} : \frac{\kappa M^2}{r^2} = \frac{e^2}{\kappa M^2} \sim 10^{36},$$

где κ — гравитационная постоянная.

Электрические силы между нуклеонами отпадают ввиду нейтральности нейтронов. Магнитные силы (возникающие благодаря наличию магнитных моментов) также слишком малы по своей величине. По порядку величины магнитная энергия взаимодействия нуклеонов равна $V \sim \mu_0^2/r^3$, где μ_0 — ядерный магнетон, $r \sim 10^{-13}$ см, т. е. $V \sim 10^{-5}$ eV вместо требуемых 10^7 eV. Кроме того, магнитное взаимодействие не способно дать устойчивых состоя-

ний. Так как последнее обстоятельство существенно для дальнейшего, выясним его несколько подробнее.

Как известно, в классической и квантовой механике имеет место теорема вириала, гласящая, что в случае периодических движений частиц, среднее по времени значение кинетической энергии T связано со средним значением потенциальной энергии V соотношением

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \overline{\sum_s x_s \frac{\partial V}{\partial x_s}}, \quad (44,1)$$

где x_s — координаты частиц.

Если потенциальная энергия является однородной функцией координат степени n , то на основании теоремы Эйлера об однородных функциях имеем вместо (44,1)

$$\bar{T} = \frac{1}{2} n \bar{V}.$$

Отсюда для среднего значения полной энергии мы получаем

$$\bar{E} = \bar{T} + \bar{V} = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \bar{V}.$$

Для того чтобы было возможно устойчивое периодическое движение, для закона $V \sim r^n$ при $n < 0$ необходимо, чтобы не только $\bar{V} < 0$, но ввиду $\bar{T} > 0$ также $\bar{E} < 0$ (так как $|V| > T$), т. е. показатель однородности n должен быть больше -2 . Как известно, кулоновское или ньютоновское притяжение ($V \sim -r^{-1}$) дают устойчивые орбиты, а например, при взаимодействии двух магнитных диполей ($V \sim -r^{-3}$) устойчивые состояния невозможны. Критический случай, очевидно, имеет место при $n = -2$.

С точки зрения квантовой механики невозможность устойчивых состояний при дипольном взаимодействии можно показать также из следующих соображений. Если бы частица двигалась в области с линейными размерами r , то её импульс согласно известной формуле соотношения неточности имел бы порядок величины

$$p \sim \frac{h}{r},$$

а кинетическая энергия

$$T = \frac{p^2}{2m} \sim \frac{h^2}{mr^2}.$$

Следовательно, в случае, например, кулоновского поля, притяжение частиц друг к другу на самых малых расстояниях $V = -\frac{e^2}{r}$ компенсируется быстрым возрастанием кинетической энергии, что приводит к возможности устойчивых состояний. Из условия $V \sim T$ немедленно получается даже правильный порядок радиуса боровской орбиты:

$$r_0 \sim \frac{h^2}{me^2}.$$

В случае же дипольной энергии взаимодействия $V = -\frac{\text{const}}{r^3}$ — кинетическая энергия не в состоянии скомпенсировать рост потенциальной, и устойчивые состояния невозможны.

Все взаимодействия в атомах, молекулах, твёрдых и жидких телах и газах сводятся в конце концов к электрическим и, отчасти, магнитным силам. Напомним, что электрические кулоновские силы благодаря квантовой кинематике и сложности систем частиц, подчиняющихся в случае электронов статистике Ферми, приводят к появлению дисперсионных ван-дер-ваальсовых, эффективных обменных и других химических сил. Для больших скоплений атомов начинает играть заметную роль тяготение, превалирующее в случае астрономических объектов.

Таким образом, мы стоим перед фундаментальной задачей понять природу или построить модель ядерных сил, обусловленных каким-то полем, или частицами, или же комбинациями частиц нового типа. В XVIII веке подобная проблема не вызвала бы, вероятно, особого смущения, и в науку были бы введены чисто феноменологически новые «ядерные» силы (или соответствующая «жидкость») наряду с электрической, магнитной, тепловой и световой (эфиром) «жидкостями». Задача заключалась бы в подборе удачного математического выражения новых сил (подобно ньютоновскому закону тяготения). Не отказываясь от подбора удачных выражений для сил,

сейчас, однако, мы непременно должны связать рассматриваемое ядерное поле с какой-либо новой комбинацией известных частиц или допустить существование новых частиц, сопоставленных ядерному полю.

Напомним современную модель электрических сил. Два заряда e и e' оказываются связанными друг с другом благодаря тому, что один из них порождает вокруг себя электрическое поле, а другой это поле поглощает, и обратно, первый заряд поглощает электрическое поле, порождённое вторым зарядом. Квантовая теория взаимодействия формулирует то же положение вещей несколько иначе, говоря о виртуальном испускании фотонов, точнее псевдофотонов,—корпускул продольного электростатического поля, одной частицей и поглощении их другой частицей. Аналогичным образом толкуются ньютоновские силы тяготения, обязанные, согласно квантовой трактовке, испусканию и поглощению гравитонов.

Хотя квантовый вывод в данном частном случае покоящихся зарядов или масс не даёт ничего нового, воспроизводя обычный закон Кулона: $V = \frac{ee'}{r}$ *), или Ньютона: $V' = -\kappa \frac{mm'}{r}$, он обладает огромной эвристической силой. Действительно, следует сделать заключение, что всевозможные взаимодействия могут переноситься также различными частицами конечной массы, а не только квантами электромагнитного (или гравитационного) поля с массой покоя, равной нулю. Эта идея лежит в основе всей современной теории взаимодействия, в частности теории ядерных сил.

Сформулируем основные эмпирические свойства новых сил, отсылая за подробностями к специальной литературе по ядру **).

*) Обмен между зарядами, квантами света (фотонами), т. е. корпускулами поперечного поля, ведёт к брейтовской части взаимодействия (см. § 25).

**) Кроме литературных указаний на стр. 296 и 299 см. также Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949; Ch. Weizsäcker, Die Atomkerne, Leipzig, 1937; А. Ахизер и И. Померанчук, Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1950; L. Rosenfeld, Nuclear forces, Amsterdam—New-York, 1948.

1. Силы короткого действия. Ядерные силы в согласии с данными о размерах ядер, о ядерных реакциях и масс-дефектах должны быть силами короткого действия с радиусом действия порядка $r \sim 10^{-13}$ см; на больших расстояниях они быстро убывают и становятся ничтожными по сравнению с электрическими силами. Всё же некоторое влияние ядерных сил сказывается в атомах на ближайших электронных орбитах.

Размеры атомных ядер были определены, во-первых, из теории альфа-распада (радиус потенциального барьера для радиоактивных ядер), затем из рассмотрения обратных реакций бомбардировки ядер заряженными частицами, а также из анализа энергии связи в ядрах, отличающихся заменой протона нейтроном. Кроме того, при реакциях с быстрыми нейтронами, де-броглевская длина волны которых мала по сравнению с ядерными размерами, эффективное сечение будет в пределе высоких энергий равняться геометрическому значению $\sigma = \pi R^2$. Все эти данные позволяют установить эмпирическую формулу для возрастания радиуса ядер в зависимости от числа нуклонов, т. е. атомного веса A :

$$R = 1,5 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ см.}$$

Эта формула передаёт лишь основную закономерность, не учитывая отклонений для ядер чётного и нечётного A и Z или влияния оболочек нуклонов.

Так как

$$\frac{A}{\frac{4}{3} \pi R^3} = \text{const},$$

то, следовательно, плотность ядерного вещества (или, наглядно говоря, «нуклеонной жидкости») остаётся в основном постоянной и равняется

$$\rho = \frac{AM}{\frac{4}{3} \pi R^3} \sim 10^{14} \text{ г/см}^3,$$

где $M = 1,6 \cdot 10^{-24}$ г — масса протона.

Напомним теперь, что согласно квантовой механике каждой частице с массой покоя m сопоставляется характерная длина, так называемая комптоновская длина волны

$$\Lambda = \frac{h}{mc}.$$

Таким образом радиусы ядер R лежат в пределах между комптоновской длиной волны $\Lambda_n \cong 10^{-14}$ см тяжёлых частиц (нуклеонов) и комптоновской длиной волны $\Lambda_c = 2,4 \cdot 10^{-10}$ см лёгких частиц (электронов—позитронов):

$$\Lambda_n < R < \Lambda_c.$$

Короткодействующий характер ядерных сил следует также из сравнения масс-дефектов, т. е. энергий связи у дейтерона ${}^2_1\text{H}$ ($V = -2,19$ MeV, т. е. около 1 MeV на частицу), тритона ${}^3_1\text{H}$ ($V = -8,5$ MeV, т. е. около 3 MeV на частицу) и у альфа-частицы ${}^4_2\text{He}$ ($V = -28$ MeV, т. е. около 7 MeV на частицу). У более тяжёлых ядер энергия связи лежит в пределах 7—8 MeV на частицу, достигая наибольшего абсолютного значения примерно в середине периодической системы и снова понижаясь для самых тяжёлых ядер. При этом мы отвлекаемся сейчас и в дальнейшем, как и в случае ядерных радиусов, от индивидуальных колебаний отдельных значений в масс-дефектах ядер чётного и нечётного A , а также от периодичностей как в значениях масс-дефектов, так и других ядерных свойств (эффективных сечений захвата нейтронов, распространённости, числа изотопов, квадрупольных моментов, спинов, магнитных моментов и др.), вероятно, связанных с заполнением некоторых оболочек протонами и нейтронами и, возможно, также с образованием структур типа α -частиц. Факт прекращения роста абсолютного значения энергии связи в ряду ядер, начиная с дейтерона, означает прежде всего достижение «насыщения» в ядре гелия (${}^4_2\text{He}$), а быстрый рост энергии связи в семь раз от дейтерона к гелию при увеличении числа частиц всего в два раза был бы невозможен при силах далёкого действия.

Резюмируя, можно сказать, что ядерные силы являются короткодействующими с эффективным радиусом действия порядка

$$r \sim 10^{-13} \text{ см.}$$

Поэтому, ограничиваясь этим наиболее существенным признаком ядерных сил, с феноменологической (описательной) точки зрения ядерный потенциал можно было бы представить в виде какой-либо произвольной потенциальной функции, зависящей только от r , т. е. ведущей к центральным силам, и достаточно быстро убывающей с расстоянием. Подсчёты производились, например, с прямоугольной потенциальной ямой с параметрами: $V = -21 \text{ MeV}$ при $r < a$, $V = 0$ при $r > a$, $a \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ (в основном состоянии дейтерона). Использовались также функции вида $V = -Ae^{-ar}$; $V = -Ae^{-\beta r^2}$; $V = -A + Br^2$ (осцилляторный потенциал) и другие аналогичные предварительные формы с параметрами, подбиравшимися на основании опытных данных. При этом выяснилось, что многие ядерные проблемы и эффекты, как задача дейтерона, рассеяние нейтронов на протонах, альфа-распад и другие, в области относительно малых энергий, не очень сильно зависят от уточнения вида потенциала короткодействующих сил.

В частности, ограничиваясь центральными короткодействующими силами, получаем для основного состояния дейтерона сферически симметричное S -состояние; на самом же деле основное состояние есть смесь S -состояния и небольшой доли D -состояния. Далее, рассеяние нейтронов на протонах при небольших энергиях, до 10 MeV соответствует сферически симметричному ядерному потенциалу, что доказывает как короткодействующий характер сил, так и их в основном центральный характер.

Конечно, с принципиальной точки зрения использование подобных произвольных видов взаимодействия совершенно неудовлетворительно и должно быть заменено формой однозначно определённой на основе полевой теории ядерных сил. Важно сразу подчеркнуть, что полевая теория ядерных сил непосредственно приводит к короткодействующим силам, что является её основным успехом.

Здесь и в дальнейшем мы будем употреблять термин «полевая» теория сил, имея в виду теорию ядерного поля, связанного с теми или иными частицами («переносящими» взаимодействие), т. е. парами лёгких частиц или одиночными мезонами и т. д., и противопоставляя ей формально-феноменологическую теорию ядерных сил, ограничивающуюся лишь подбором произвольных потенциалов, на основе ряда признаков ядерных сил с последующим уточнением этих потенциалов при помощи эмпирических данных.

2. Спиновые силы. До сих пор мы ограничивались рассмотрением короткодействующего характера ядерных сил, являющегося их наиболее специфическим признаком. Второй класс свойств ядерных сил связан с их существенной зависимостью от спинов. Это доказывается прежде всего значительной разницей в энергии основного устойчивого триплетного (3S) уровня дейтерона, в котором спины протона и нейтрона параллельны, а энергия связи равна $-2,19$ MeV, и энергии виртуального, синглетного уровня (1S), соответствующего антипараллельным спинам нуклеонов, равной $+0,064$ MeV. Магнитное взаимодействие нуклеонов само по себе слишком незначительно, чтобы объяснить это большое расстояние между уровнями, которое поэтому имеет другую физическую причину, чем аналогичное дублетное расщепление в атомных уровнях электронов. Спиновый характер ядерных сил между протоном и нейтроном непосредственно доказывается также разницей в эффективных сечениях рассеяния нейтронов молекулами орто- и параводорода. Ортоводород рассеивает нейтроны сильнее, чем параводород, и отношение эффективных сечений (σ_0 — для ортоводорода, σ_p — для параводорода), согласно последним экспериментам равно

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_p} \sim 30.$$

Наличие спиновых сил снова можно было бы учесть феноменологически, добавляя к основной энергии взаимодействия $V_1(r)$ член $V_2(r)(\sigma_A \sigma_B)$, характеризующий собой в некоторой мере взаимодействие двух диполей со спинами

σ_A и σ_B (σ совпадают с матрицами Паули), где A и B — индексы двух нуклеонов. Значение же для V_2 может быть подобрано из опыта. Очевидно, $V_2(r)$ также должно представлять потенциал сил короткого действия. С принципиальной точки зрения эта процедура также неудовлетворительна. Поэтому важно здесь же подчеркнуть, что полевая теория ядерных сил, как мы покажем ниже, приводит не только к короткодействующим, но также и к спиновым силам.

3. **Н е ц е н т р а л ь н ы е с и л ы.** Следующим важным и характерным свойством ядерных сил является их нецентральный характер. Ядерные силы подобно магнитным зависят не только от расстояния между нуклонами, но и от взаимной ориентации спинов и радиус-вектора, ведущего от одного нуклеона к другому, т. е. являются силами квазимагнитными. Нецентральный характер сил доказывается наличием у дейтерона ${}^2_1\text{H}$ (${}^2_1\text{D}$) электрического квадрупольного момента, открытого в лаборатории Раби. В самом деле, по известному из теории электричества определению тензор квадрупольного момента задаётся выражением

$$eQ_{nm} = e(3x_n x_m - r^2 \delta_{nm}) \quad (44,2)$$

(см., например, § 10), где r — радиус-вектор протона.

Диагональный элемент этого тензора определяет эффективную площадку, характеризующую квадрупольный момент

$$Q_{33} = (3z^2 - r^2).$$

В случае, если распределение плотности протона есть ρ , среднее значение «квадрупольного момента» равняется

$$Q = \int \rho (3z^2 - r^2) d\tau = (3\bar{z}^2 - \bar{r}^2). \quad (44,3)$$

При центральных силах основное состояние является S -состоянием, для которого $\bar{z}^2 = \bar{y}^2 = \bar{x}^2 = \frac{1}{3}\bar{r}^2$, и следовательно, $Q=0$. Поэтому, если бы основное состояние дейтерона было чистым S -состоянием, то его квадрупольный момент равнялся бы нулю, и обратно, факт обнаружения

на опыте у дейтерона квадрупольного момента, определяемого площадкой

$$\bar{Q} = +2,73 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2,$$

доказывает, что основное состояние дейтерона не есть чистое S -состояние. Положительный знак \bar{Q} указывает на «сигарообразный» характер распределения плотности заряда, вытянутого вдоль спиновой оси. Дальнейший квантовомеханический анализ показывает, что к 3S -состоянию примешана, как уже указывалось, небольшая доля 3D -состояния, причём вероятность пребывания в D -состоянии равна примерно 4%.

Следует подчеркнуть, что влияние нецентральных сил оказывается, вообще говоря, незначительным не только при расчёте основного состояния дейтерона, но также, например, при рассеянии нейтронов на протонах, захвате нейтронов протонами и фотоэффекте на дейтероне, и других процессах, если они разыгрываются при малых энергиях.

Наличие нецентральных сил также можно было бы учесть с формально-феноменологической точки зрения, добавляя к энергии взаимодействия центральных бесспиновых сил $V_1(r)$ и центральных спиновых сил $V_2(r) (\sigma_A \sigma_B)$ член квазимагнитного типа $V_3(r) S_{AB}$, где

$$S_{AB} = 3 (\sigma_A r^0) (\sigma_B r^0) - (\sigma_A \sigma_B) \quad (44,4)$$

и снова подбирая форму короткодействующего потенциала V_3 из опыта. Член $S_{AB} \cdot \frac{f^2}{r^3}$ точно совпадает по форме с выражением энергии взаимодействия двух магнитных диполей $f\sigma_A$ и $f\sigma_B$. Конечно, с принципиальной точки зрения эта процедура весьма мало удовлетворительна. Важно поэтому подчеркнуть, что полевая теория ядерных сил естественно, без всяких добавочных предположений приводит к нецентральным силам. Более того, нецентральные силы были впервые введены в ядерную теорию ещё до экспериментов Раби уже на базе первой модели ядерных парных бета-сил. Они получаются, как мы покажем ниже, также и в современной мезонной теории ядерных сил.

Позднее, существенно используя результаты полевой теории ядерных сил, оказалось возможным доказать, что выражение энергии взаимодействия нуклеонов вида

$$V = V_1(r) + V_2(r)(\sigma_A \sigma_B) + V_3(r) S_{AB} \quad (44,5)$$

является наиболее общим при соблюдении всех требований инвариантности относительно смещений, инверсий и вращений как обычных, так и спиновых координат и при независимости от скоростей частиц.

Как будет показано ниже, полевая теория ядерных сил приводит к определённом виду короткодействующих потенциалов V_1 , V_2 и V_3 вместо их подбора из эмпирических данных, в чём заключается одно из её коренных преимуществ.

4. **З а р я д н а я н е з а в и с и м о с т ь.** Важное свойство ядерных сил заключается в равенстве хотя бы порядка сил между любыми нуклеонами: протон—нейтрон, протон—протон, нейтрон—нейтрон, т. е. в их независимости от электрического заряда. Доказательство основано на экспериментах по рассеянию протонов на протонах, проделанных впервые Тьювом при энергиях около 1 MeV и расширенных затем до более высоких энергий. Как известно, рассеяние заряженных частиц друг другом описывается формулой Резерфорда, которая подтверждается квантовой механикой. Как показал Мотт, учёт тождественности частиц приводит к добавочному члену, знак которого определяется типом статистики.

Опыты показали, в частности, значительно большее число протонов высокой энергии, рассеянных под углом 45° по сравнению с предсказанием теории, основанной на чисто электрическом кулоновском взаимодействии. Например, при энергиях ~ 10 MeV рассеяние примерно в 40 раз больше; с другой стороны, при низкой энергии 0,4 MeV рассеяние под углом 45° значительно меньше чисто кулоновского.

Анализ подобных экспериментов, проделанный Брейтом с сотрудниками, привёл к выводу, что кроме кулоновской силы отталкивания между двумя протонами действует сила притяжения короткодействующего характера, которая будет превосходить кулоновскую при высоких энер-

гиях, когда протоны могут ближе подходить друг к другу при столкновении. При умеренных энергиях речь идёт лишь об 1S -состояниях подобной системы. Ввиду симметрии ψ -функции в координатах протонов, спиновая функция должна быть антисимметрична, что исключает триплетное состояние 3S . Положение вещей с этими новыми силами можно с феноменологической точки зрения охарактеризовать, например, прямоугольной потенциальной ямой радиуса $a = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см и величиной потенциала $V_{pp} \cong 11$ MeV.

Сравнивая это значение с данными для рассеяния нейтронов на протонах в том же 1S состоянии, когда согласно эмпирическим данным $V_{pn} \cong 11,9$ MeV, мы получаем замечательное совпадение энергий взаимодействия V_{pp} и V_{pn} , по крайней мере, в 1S -состоянии. Отметим, что для 3S -состояния глубина эффективной прямоугольной потенциальной ямы при взаимодействии нейтрона с протоном на основании анализа дейтерона равна 21,3 MeV. Из анализа масс-дефектов можно заключить, что силы между двумя нейтронами также примерно равняются ядерным силам между двумя протонами. Таким образом, обобщая данные опыта (с 1S на все состояния), мы приходим к положению о зарядной независимости ядерных сил при не слишком высоких энергиях (подробнее см. § 48 б). Укажем ещё, что кулоновское отталкивание, несмотря на наличие ядерных сил притяжения, не допускает образования стабильной системы из двух протонов.

Требование зарядной независимости ядерных сил может быть удовлетворено простейшим вариантом полевой теории сил, полностью отвлекающимся от электрических зарядов и допускающим, что все взаимодействия между нуклеонами, обладающими одинаковыми специфическими ядерными квазизарядами g и квазимоменгами f , обязаны их связи с полем нейтральных частиц. Если бы ядерное поле было связано с одними заряженными частицами, удовлетворение условия зарядной независимости оказалось бы практически невозможным.

5. **Обменные силы.** Последним известным фундаментальным свойством ядерных сил является их обменный характер. Доказательство основывается на известном

«насыщении» ядерных сил, выражающемся, как уже упоминалось выше, в росте энергии связи (а также объёма ядер) в основном пропорционально числу нуклеонов:

$$E = -aA.$$

Все данные указывают на то, что нуклеоны взаимодействуют преимущественно только с ближайшими соседями, тогда как, например, в случае кулоновских сил каждый протон взаимодействует с каждым, так что общая энергия отталкивания растёт не линейно, но для большого числа частиц, примерно квадратично с числом частиц $\div Z(Z - 1) \sim Z^2$. После того как при построении самых лёгких ядер ${}^1_1\text{H}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^3_2\text{He}$ достигнуто насыщение в альфа-частице ${}^4_2\text{He}$, средняя энергия связи остаётся примерно постоянной в огромном диапазоне всей периодической системы элементов: $a \sim 7 - 8 \text{ MeV}$. По всей видимости потенциальная энергия какого-либо обычного типа не может полностью объяснить свойств ядерного поля, препятствующих частицам взаимодействовать с числом соседей, большим нексторого.

Гейзенберг предложил объяснить насыщение обменным характером ядерных сил по аналогии с обменными химическими силами, также обеспечивающими известное насыщение, выражающееся в факте образования двухатомной молекулы водорода H_2 и в невозможности образования трёхатомной молекулы H_3 . Нетрудно указать все возможные варианты обменных сил:

1) нуклеоны при взаимодействии могут обмениваться зарядами или, что сводится к тому же, спинами и координатами (гейзенберговские силы);

2) нуклеоны при взаимодействии обмениваются координатами (майорановские силы);

3) в ядерной физике обычные необменные силы принято иногда называть вигнеровскими;

4) наконец, возможен тип взаимодействия, при котором нуклеоны обмениваются одними спинами (бартлеттовские силы).

Поскольку описание ядерного поля, обязанного заряженным частицам и приводящего к обмену нуклеонов

зарядами, лежит вне рамок классической теории, ограничимся здесь лишь несколькими замечаниями.

Принимая во внимание известный успех теории обычных необменных сил для процессов малой энергии, когда учитывается лишь нижнее S -состояние ($l = 0$), следует заключить, что основные силы должны быть вигнеровского или майорановского типа; однако обычные силы не способны обеспечить насыщения. Кроме того, бартлеттовские силы, как выяснилось, приводят к разным знакам потенциальной энергии в синглетном и триплетном состояниях дейтерона подобно гейзенберговским силам и не могут поэтому вместе с последними играть роль основных ядерных сил. Поэтому для объяснения насыщения при феноменологическом подходе можно ядерные силы взять в основном майорановскими с примесью гейзенберговских. Действительно, чисто майорановские силы не способны объяснить спиновый характер сил, в частности, большое различие в энергиях связи 1S - и 3S -состояний дейтерона. С другой стороны, майорановские силы приводят в соответствии с опытом к ядру гелия (^4He) как насыщенной конфигурации, тогда как гейзенберговские силы ошибочно дали бы насыщение уже для дейтерона, энергия связи в котором на частицу всего около 1 MeV. В этом варианте разумной пропорцией оказывается смесь примерно 75% майорановских сил и 25% гейзенберговских сил. При этом, конечно, не исключается наличие необменных и бартлеттовских сил.

Все эти феноменологические соображения об основных свойствах ядерных сил, не были связаны с уточнением радиальной зависимости потенциалов V от расстояния.

Гейзенберговское феноменологическое направление в теории ядерных сил заключалось в предварительном анализе обменного характера сил и оставляло вопрос о виде $V(r)$ так же, как и строгом выводе пропорции смеси сил, открытым. При этом для конкретных подсчетов, как указывалось выше, потенциал брался в произвольном виде, обеспечивающем короткодействующий характер сил (прямоугольная яма, осцилляторный потенциал, экспоненциальная форма и т. д.), а пропорция сил подбиралась на основе эмпирических данных. Конечно,

подобная процедура являлась весьма неудовлетворительной с принципиальной точки зрения. Отметим ещё побочный недостаток данного круга работ, связанный с отсутствием в использованных выражениях важных нецентральных сил. Поэтому следует подчеркнуть, что существенным успехом полевой теории ядерных сил является естественное введение обменных сил всех типов в определённой пропорции, притом способной удовлетворить требованиям опыта. Как мы увидим ниже, это связано с тем, что в составе ядерного поля или частиц, переносящих взаимодействие, оказываются заряженные частицы. Тем самым, однако, мы вступаем, как отмечалось выше, в некоторый конфликт с требованием зарядной независимости порядка ядерных сил, проще всего удовлетворяющимся путём взаимодействия через нейтральные частицы. Выходом является, как оказывается, использование смеси тех и других частиц.

Кроме основного факта объяснения насыщения ядерных сил, влияние обменных сил сказывается на разных эффектах при высоких энергиях, когда в игру войдут состояния с $l \neq 0$ (P -, D -, ..., состояния), в которых различные типы обменных сил будут иметь разные знаки. В частности, рассеяние весьма быстрых нейтронов на протонах будет согласно предсказаниям теории существенно иным в случае обменных и обычных сил. Недавние эксперименты с рассеянием нейтронов огромной энергии около 100 MeV на ядрах показали, что ядерные протоны при этом выбиваются с теми же примерно значениями энергии и летят вперёд, т. е. меняются местами с нейтронами. Это доказывает наличие существенной доли обменных сил в ядерном поле. К тому же заключению приводит анализ рассеяния протонов на протонах в диапазоне 40—200 MeV (см. § 48б).

К этому введению в проблему ядерных сил добавим, что поскольку, как выяснилось в настоящее время, ядерное поле, в значительной мере, если не полностью, обязано мезонам, теория должна также выяснить вопросы взаимодействия мезонов с нуклеонами и лёгкими частицами (порождение и поглощение мезонов нуклеонами, распад мезонов на лёгкие частицы и для ряда

сортов мезонов их взаимное превращение и т. д.). Кроме того, теория ядра должна дать объяснение основным закономерностям β -распада. Поскольку при β -распаде ядрами испускаются заряженные частицы (электроны или позитроны вместе с нейтрино), чисто нейтральная теория ядерного поля представляется неудовлетворительной. Зарядная независимость ядерного поля не позволила бы также заключить о наблюдающейся тенденции неустойчивых искусственно радиоактивных изотопов более тяжёлых, чем нормальные (например, ${}^{16}_7\text{N}$, ${}^{19}_8\text{O}$, ${}^{239}_{92}\text{U}$ и т. д.), испускать электроны, а изотопов более лёгких, чем нормальные (${}^{13}_7\text{N}$, ${}^{15}_8\text{O}$ и т. д.), испускать позитроны. В случае же присутствия заряженной части в ядерном поле «отрывание» от него каких-то порций в виде заряженных частиц непосредственно представляется возможным. Характер ядерного поля, как электрически заряженного, позволяет также качественно объяснить наличие отрицательного магнитного момента у нейтрона и определённой доли врождённого некинематического момента у протона, поскольку магнетизм этих нуклеонов обязан отчасти магнетизму порождённого ими поля, если последнее связано с электрическим зарядом, который в свою очередь ведёт к наличию магнитного момента. Эти качественные соображения подчёркивают невозможность оперировать с одним нейтральным так же, как с одним заряженным ядерным полем.

в) Т е о р и я п а р н ы х я д е р н ы х с и л

Перейдём к анализу полевой теории ядерных сил. Так как согласно изложенному выше все возможности описания ядерных сил известными полями (или сопоставленными им корпускулами) т. е. гравитационным и электромагнитным полем оказались непригодными, было предложено прежде всего объяснить взаимодействие между нуклеонами переносом сил не отдельными известными корпускулами, а их комбинациями, именно парами частиц: электрон—нейтрино и позитрон—нейтрино, которые ведь могут не только виртуально испускаться и поглощаться нуклеонами, но и реально испускаются при β -рас-

паде*). Взаимодействие нуклеонов осуществляется тогда по схеме:

0) начальное состояние: протон—нейтрон (p, n) ;

1) промежуточное состояние: протон испускает позитрон—нейтрино и превращается в нейтрон; остаётся нейтрон, пара лёгких частиц (позитрон и нейтрино) и нейтрон (n, e^+, ν, n) ;

2) конечное состояние: нейтрон поглощает пару, испущенную протоном и превращается в протон, остаются: нейтрон—протон (n, p) .

Взаимодействие может осуществляться также через испускание пары электрон—нейтрино или антинейтрино нейтроном и поглощение её протоном. Символически:

0) (p, n) ,

1) (p, e^-, ν, p) ,

2) (n, p) .

При этом протон и нейтрон обмениваются зарядом или, как непосредственно очевидно, своими координатами, а также спинами.

Так как поле пар фермиевских частиц, притом связанных с зарядом, не имеет классического аналога, теория парных электронно-нейтринных сил или, иначе говоря, β -сил может быть только квантовой. Беря за основу простейшую энергию связи нуклеонов с полем пар, именно закон Ферми, использованный в теории β -распада, получаем энергию взаимодействия между протоном и нейтроном в виде

$$V = -\frac{g_F^2}{8\pi^2 c h r^5}. \quad (44,6)$$

Здесь g_F —ядерный «парный» квазизаряд нуклеонов. Этот вид взаимодействия относится к областям $r < \frac{h}{mc}$ ($\frac{h}{mc}$ —комптоновская длина волны электронов); на

*) И. Тамм, Д. Иваненко, Nature, 133, 981, 1934; Д. Иваненко и А. Соколов, ДАН, 3, 361, 1936.

больших расстояниях взаимодействие ещё быстрее убывает [именно экспоненциально $\approx e^{-r(mc/h)}$].

С принципиальной точки зрения, антинейтрино ($\bar{\nu}$) и нейтрино (ν), описываемые как все частицы полуцелого спина уравнением Дирака, различаются в обычной трактовке; например, обе частицы (ещё с достоверностью не обнаруженные, но несомненно участвующие в процессах β -распада, K -захвата и распаде мезонов) могут обладать магнитными моментами разного знака. Майорана предложил вариант теории, в которой нейтрино и антинейтрино тождественны. Наблюдение двойного β -распада принципиально позволяет сделать выбор между обоими вариантами теории. Для дальнейшего указанная неоднозначность, вообще говоря, несущественна, за исключением пунктов, где это специально оговорено.

Фермиевское выражение энергии связи нуклеонов с полем пар имеет вид $U = g_F \psi^* \psi_e Q$ + комплексно сопряжённый член, где Q — оператор, действующий на волновые функции нуклеонов и превращающий протон в нейтрон, и обратно.

Первоначальное значение константы связи с полем пар $g_F = 4,5 \cdot 10^{-50} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$ ныне согласно эмпирическим данным оказывается увеличенным до $\sim 10^{-48} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3$; ψ_e, ψ_ν — волновые функции электронов (позитронов) и нейтрино (антинейтрино). Уже простейшие соображения размерности приводят к правильной структуре формулы взаимодействия нуклеонов (44,6) при учёте того, что это выражение должно быть квадратичным относительно квазизарядов g_F аналогично кулоновской формуле.

Построение теории парных ядерных сил, в которой впервые была доказана возможность переноса взаимодействия частицами конечной массы, несомненно, явилось немалым успехом. При этом были непосредственно получены обменные гейзенберговские силы короткого действия; в дальнейшем спиновые и нецентральные силы, а также обменные силы всех различных типов (гейзенберговские, майорановские, бартлеттовские), также оказались естественно включёнными в теорию. Кроме того, на базе первой модели ядерных сил удалось качественно объяснить наличие магнитного момента у нейтрона и несова-

дение момента протона с ядерным магнетонном (Вик)*). Сущность этого объяснения, так же как и общие методы расчёта ядерных сил, были перенесены затем в современную мезонную теорию ядерных сил. Однако величина взаимодействия нуклеонов, обязанного переносу парами лёгких частиц, оказывается ничтожной ($V \approx -10^6 \text{ eV}$ при $r \sim 10^{-13} \text{ см}$ вместо требуемого опытом $V \approx -10^{+6} \text{ eV}$), и парные силы являются лишь «копией» главных ядерных сил. Физическим основанием подобной малости β -сил является, очевидно, их связь с β -распадом, крайне маловероятным, так сказать, «геологически» редким в жизни ядер явлением, характеризующимся незначительной константой g_F . Наглядно говоря, на месте крайне редкого «переброса» парами лёгких частиц должен, очевидно, стоять весьма частый обмен нуклеонов какими-то иными частицами, связь с полем которых является гораздо более сильной.

Заметим, что, кроме того закон (44,6) согласно теореме вириала при столь сильном возрастании потенциала на малых расстояниях ($V \sim -\frac{1}{r^5}$; $r \rightarrow 0$) не может привести к устойчивому состоянию в задаче дейтерона (протон плюс нейтрон); последняя трудность не является, однако, специфической для парных сил и могла быть предварительно устранена обрезанием потенциала на каком-то расстоянии $r_0 \sim 10^{-13} \text{ см}$. Попытки объяснить ядерные силы полями, соответствующими переносу парами и другими комбинациями прочих известных частиц, например, парой позитрон и электрон, или двумя нейтрино (Тамм), успеха также не имели. Эти последние предположения подсказывали, однако, возможность отрыва ядерных сил от причин, непосредственно обуславливающих β -распад и тем самым подготавливали почву для введения новой, особой константы связи нуклеонов с ядерным полем требуемой величины.

Несмотря на указанную коренную неудачу, после появления теории β -сил начался новый период в теории ядра и в развитии общего учения о взаимодействии, поскольку самая возможность взаимодействия через поля или частицы, обладающие массой покоя, а не только через

*) См. В. Гейзенберг, УФН, 16, 1, 1936.

гравитационные или электромагнитные поля, была впервые доказана в этой теории. Подчеркнём ещё раз, что эта идея является весьма характерной для современного понимания взаимодействий, которые могут осуществляться любыми частицами, обладающими массой покоя, полями, не связанными с массой покоя, и разнообразными комбинациями частиц.

г) Мезон

1) Т е о р е т и ч е с к о е п р е д с к а з а н и е м е з о н а. Второй этап теории ядерных сил связан с работами Юкава (1935—1938 гг.)*), который, сохраняя основную идею переноса сил частицами конечной массы, наглядно говоря, предложил в известном смысле объединить электрон—нейтрино в одну частицу: отрицательный мезон, а позитрон—нейтрино в положительный мезон, и тем самым объяснить ядерные взаимодействия новым, ещё гипотетическим в то время, мезонным полем, иначе говоря, новыми частицами—мезонами. Несмотря на незавершённый ещё характер теории ядерных сил, сейчас нет сомнений, что взаимодействия между нуклеонами действительно в основном обусловлены какими-то мезонами, заряженными и нейтральными. Обмен нуклеонов заряженными мезонами можно пояснить следующим образом. Протон, превращаясь в нейтрон, испускает положительный мезон π^+ , поглощаемый нейтроном:

0) начальное состояние p, n ,

1) промежуточное состояние n, π^+, n ,

2) конечное состояние n, p ,

или, наоборот, нейтрон испускает отрицательный мезон, поглощаемый затем протоном. При переносе взаимодействия нейтральными мезонами, как и в случае электромагнитных сил, нуклеоны, очевидно, сохраняют своё зарядное состояние.

При этом добавочно предполагается, что мезоны имеют целый спин и в связи с этим подчиняются бозевской

*) H. Y u k a w a, Proc. Phys. Math. Soc., Japan, 17, 48, 1935. Дальнейшие работы Юкава и сотрудников см. там же, 1937—1938 гг.

статистике и, следовательно, могут переносить взаимодействие «поодиночке», как и другие «бозоны», а не парами, как частицы полуцелого спина в теории β -сил, или другие «фермионы». Действительно, при испускании одной частицы полуцелого спина нуклоны должны были бы перейти в состояние целого спина, что невозможно.

В первоначальном варианте теории рассматривались простейшие бесспиновые заряженные мезоны, описываемые скалярными волновыми функциями.

В дальнейшем были рассмотрены как заряженные, так и нейтральные мезоны (нейтретто) различных масс, притом наряду с бесспиновыми скалярными и бесспиновые псевдоскалярные, а также мезоны полуцелого и единичного спина. Связь нуклонов с мезонным полем того или иного типа обуславливается наличием у них специфической константы связи с этим полем, иначе говоря, некоторого квазизаряда g . Ряд простых соображений приводит к значению $g \sim 5e$ в долях элементарного электрического заряда (см. ниже). Вопрос о массе мезонов будет рассмотрен ниже, сейчас ограничимся указанием на то, что значение мезонной массы должно быть средним между массами тяжёлых нуклонов и лёгких частиц. В самом деле, для того чтобы мезоны в качестве частиц ядерного поля, не существующих реально в ядре, могли осуществить взаимодействие, между нуклонами, их масса должна быть в достаточное число раз меньше нуклонной; с другой стороны, как стало уже ясно из теории парных сил, короткодействующий характер сил непосредственно обусловлен наличием массы покоя у частиц, переносящих взаимодействие. Мы будем иметь для обеспечения короткодействующего характера сил множитель типа $e^{-\frac{r}{\Lambda}}$, где комптоновская длина волны частиц $\Lambda = \frac{h}{\mu c}$ должна примерно совпадать с величиной радиусов лёгких ядер, т. е. $\Lambda \sim 10^{-13}$ см, откуда масса мезона примерно должна быть равна

$$\mu \sim 200 m,$$

где m — масса электрона.

Укажем теперь же на добавочное предположение, высказанное Юкава и непосредственно не связанное с теорией ядерных сил, что мезоны могут быть связаны также и с лёгкими частицами, а не только с тяжёлыми, иначе говоря, что электрон (e^-), позитрон (e^+) и нейтрино (ν) (как и антинейтрино ν') обладают некоторыми квазизарядами g' , обеспечивающими их связь с каким-то мезонным полем. Это давало бы возможность мезонам (как предполагалось, μ -мезонам, см. ниже) распадаться на пары частиц по схеме

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu.$$

Распад заряженных мезонов, переносящих ядерное взаимодействие, будет воспринят как β -распад. В самой теории β -распада ничего не изменяется благодаря подобной модели, включающей мезон в качестве промежуточного звена. Действительно,

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + \mu^- \rightarrow p + e^- + \nu \text{ (электронный распад),} \\ p &\rightarrow n + \mu^+ \rightarrow n + e^+ + \nu \text{ (позитронный распад).} \end{aligned}$$

Приведённая схема β -распада могла бы иметь место только в том случае, если бы спин мезона оказался целочисленным. Последние же данные (распад μ -мезона на 3 частицы, см. стр. 326) говорят о том, что схема Юкава для β -распада нуждается в дальнейшем уточнении, тем более, что в переносе ядерных сил, повидимому, основную роль играют π -мезоны, непосредственно не распадающиеся на электрон и нейтрино.

Далее с точки зрения современной мезонной теории, независимо от всех её уточнений, качественное объяснение «врождённого» магнетизма нуклеонов заключается в следующем: протон, будучи связан с заряженным мезонным полем, испускает кванты этого поля (превращаясь в нейтрон плюс положительный мезон) и вновь их поглощает. Точно так же нейтрон «диссоциируется» на протон плюс отрицательный мезон. Доля времени пребывания нуклеона в диссоциированном состоянии оказывается примерно равной 20%. Магнитный момент нейтрона, следовательно, будет примерно равняться 20% магнитного момента

отрицательных мезонов, поскольку значительно меньшим магнитным моментом более тяжёлого протона в этом диссоциированном состоянии можно пренебречь. Точно так же у протона возникает дополнительный положительный магнитный момент, обязанный магнитному моменту положительно заряженного мезонного поля.

Таким образом, исходя из теории ядерных сил, предсказывается новая частица средней массы, предполагаемая обладающей целым спином и, следовательно, бозевского типа, порождаемая нуклеонами и притом радиоактивная в свободном состоянии.

Это замечательное предсказание до некоторой степени подтвердилось после открытия заряженных мезонов с массой около 200 масс электрона, точнее $(212 \pm 4) m$, в космических лучах в 1937 г. Андерсоном и Неддермейером, названных позднее μ -мезонами и в особенности после открытия более тяжёлых π -мезонов.

Тщательные наблюдения над жёсткой компонентой космических лучей показали, что подавляющее большинство проникающих частиц действительно обладает массой, меньшей, чем у протона, но гораздо большей, чем у электрона, и, следовательно, не теряет столь много энергии на тормозное излучение фотонов, как лёгкие частицы. Отсюда их название: мезон (или мезотрон) от греческого «мезос» — средний. Наряду с μ -мезонами в состав проникающей компоненты входит также некоторое число нуклеонов, двигающихся с релятивистскими энергиями.

2. Основные свойства мезонов*)

Так как открытие и в значительной мере исследование мезонов, а также изучение многих ядерных процессов

*) См. сборник «Мезон» под редакцией И. Е. Тамма, Гостехиздат, 1947, а также L. Japossy, Cosmic Rays, 2 ed., Oxford, 1950 (Сокращённый русский перевод первого издания вышел в 1949 г.); E. Fermi, Nuclear Physics, Chicago, 1950; Д. В. Скобельцын, УФН, 41, 331, 1950; научно-реферативный сборник, серия 2, вып. II, Космические лучи, ИЛ, 1950. (Примечание при корректуре: см. также C. F. Powell, Reports Progress Phys., 13, 350, 1950.)

связаны с космическими лучами, остановимся на этом вопросе подробнее. Исследования мезонов в космических лучах и мезонов, порождённых в лабораторной обстановке при помощи ускорителей, проведённые в течение последних трёх лет, значительно расширили и уточнили наши прежние сведения об этих частицах. Что касается космических лучей, то в самом кратком виде современное их понимание можно резюмировать следующим образом. Хотя место, время и способ порождения первичных космических лучей ещё с достоверностью не выяснены, однако сейчас эта проблема вышла из тупика, в котором она находилась ранее, когда как будто самым надёжным выводом было отрицательное заключение, что ни звёзды, ни Солнце и никакие другие известные объекты или физические процессы не могут быть источниками космических лучей.

Сейчас, в частности работами Я. П. Терлецкого, показано, что электрические поля на Солнце и звёздах, вызванные переменными магнитными полями, обязанными наличию магнитных моментов, непараллельных оси вращения (космический индукционный ускоритель, близкий к бетатрону), действительно могут ускорять частицы до огромных энергий. Ускорение также может иметь место согласно Дэвису в случае параллельности магнитного момента оси вращения звезды, действующей в этом случае в качестве униполярной машины. Эти гипотезы приобрели значительный вес после открытия Бэбкоком магнетизма у ряда звёзд (Девы L78 и других), причём напряжённость поля достигает значений в тысячи гауссов. Далее Ферми заметил, что при столкновении достаточно быстрых протонов с облаками межзвёздной материи, вероятно намагниченными, частицы могут добавочно ускоряться. Как подчеркнули Теллер и Рихтмейер, весьма вероятно, что первичные космические частицы, прежде чем попасть на землю, довольно долго диффундируют, притом скорее всего внутри галактики, что обеспечивает изотропность потока. Таким образом, даже не прибегая к другим, менее правдоподобным или же возможным, но играющим вспомогательную роль механизмам, например модели «небесного циклотрона», осуществляемого согласно

Алфвену намагнитченными двойными звёздами, или наличию излучения высокой частоты при аннигиляции нуклеонов с неоткрытыми ещё гипотетическими антинуклеонами, или ускорению частиц при взрывах сверхновых звёзд, или ускорению частиц гипотетическими космическими полями, или же какому-то ещё менее ясному ускорению путём побочных процессов при образовании химических элементов в предзвёздном состоянии, мы можем сейчас, так или иначе, начать строить в общих чертах картину происхождения первичных космических лучей*). Главная доля космических лучей обладает энергией около 10^{10} eV; число частиц более высоких энергий убывает по закону

$$dN = \frac{\text{const } d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^{1,9}}.$$

Вопреки более старым представлениям 30-х годов, современные непосредственные наблюдения на больших высотах при помощи саморегистрирующих приборов, поднятых на баллонах до 30 км или ракетами примерно до 150 км, а также анализ геомагнитных эффектов привели к выводу, что лёгкие частицы (электроны—позитроны) в первичном потоке отсутствуют, но что первичные лучи в основном являются протонами (Шейн, Джонсон, Вернов). Все известные мезоны, как и нейтроны, ввиду их нестабильности не могут входить в состав первичного потока.

Важно ещё подчеркнуть, что в первичных космических лучах на больших высотах были непосредственно обнаружены в 1947 г. (Брадт, Петерс и др.) наряду с протонами, составляющими основную часть первичного потока, также ядра гелия (несколько процентов от числа протонов), углерода, кислорода и другие лёгкие ядра (в сумме — десятые доли процента от числа протонов) в общем согласии с предсказанием Терлецкого.

Попадая в атмосферу и реагируя с ядрами атомов (кислорода и азота), протоны высоких энергий ($10^9 - 10^{10}$ eV), во-первых, выбивают из ядер другие единичные протоны и нейтроны, которые, обладая высокой энергией, в свою очередь могут присоединиться к первич-

*) Подробности см. в статьях Я. П. Терлецкого, ЖЭТФ, 19, 1059, 1949 и ter Haar, Rev. Mod. Phys., 22, № 2, 119, 1950.

ному потоку и выбивать третичные и т. д. нуклеоны; во-вторых, протоны и вторичные нуклеоны могут «нагреть» ядро и вызвать испарение многих нуклеонов, а также альфа-частиц и других осколков ядер, иначе говоря, произвести расщепления типа «звёзд», открытых впервые А. П. Ждановым при помощи метода толстослойных фотопластинок Л. В. Мысовского; в-третьих, при столкновении весьма быстрых нуклеонов друг с другом могут одновременно образоваться мезоны. Иначе говоря, будет происходить излучение мезонов, или «отрывание» мезонного поля от нуклеонов при торможении, весьма аналогичное испусканию фотонов (т. е. отрыванию поля электромагнитного) при столкновении заряженных частиц. Наиболее существенная разница между двумя последними явлениями заключается в том, что оторвавшееся электромагнитное поле не обладает массой покоя, представляя собой «поле» в узком смысле слова, а излучённое мезонное поле связано с массой покоя, благодаря чему его корпускулярные свойства значительно более ярко выражены; иначе говоря, мы имеем мезоны «частицы» в обычном узком смысле слова. Как было доказано группой Пауэлла в 1948 г. при анализе фотографий космических звёзд, нуклеоны, сталкиваясь с ядрами, непосредственно порождают заряженные тяжёлые мезоны обоих знаков заряда с массой 276 ± 4 электронных масс, названные π -мезонами (π -primary—первичный *)). Кроме того недавно выяснилось важное обстоятельство: возможность не только единичного, но и кратного порождения нескольких π -мезонов при столкновении двух нуклеонов весьма высокой энергии.

Несколько позднее эти же π -мезоны были открыты Лэттесом и Гарднером в лабораторных условиях при бомбардировке различных мишеней нуклеонами и ядрами гелия с энергиями в сотни миллионов вольт (вплоть до 380 MeV для альфа-частиц), полученными в фазотроне**), а Мак-Миллан наблюдал порождение π_- и π_+ -мезонов при бомбардировке ядер γ -лучами с энергией около 335 MeV, полученными в синхротроне. В свою очередь

*) Ферми предлагает для этой частицы наименование пи-он.

**) См. УФН, 34, 450, 1948.

π -мезоны интенсивно реагируют с ядрами; отрицательные π -мезоны, поглощаясь ядрами (скорее всего путём процесса типа K -захвата с орбиты атомного типа, на которую они сначала попадают при замедлении в течение $\approx 10^{-12}$ сек. в конденсированной среде), образуют вновь звёзды (отсюда их прежнее наименование σ -мезоны, от σ -star, т. е. звездообразующие). При этом в случае захвата на водородную орбиту образуется своеобразный атом «мезоводорода».

Весьма важным явилось открытие распада π -мезонов на более лёгкие, обычные μ -мезоны и нейтральную частицу, вероятно, пситрино или же, возможно, лёгкий нейтральный мезон ν' по схеме $\pi_{\pm} \rightarrow \mu_{\pm} + \nu$. По наблюдениям в космических лучах и непосредственным лабораторным измерениям время жизни по отношению к подобному распаду для покоящихся π -мезонов оказалось порядка $T_{\pi} \sim 10^{-8}$ сек. *). С другой стороны, более тщательное изучение μ -мезонов показало, что они распадаются не на две частицы, как предполагалось ранее [электрон (позитрон) и нейтрино], а на три частицы **), из которых две нейтральные, т. е. нейтрино, или, возможно, какие-либо лёгкие нейтральные мезоны. Таким образом, распад μ -мезонов идёт по схеме: $\mu_{\pm} \rightarrow e_{\pm} + 2\nu$ или $\mu_{\pm} \rightarrow e_{\pm} + \nu + \nu'$.

Спонтанный распад μ -мезонов был изучен в космических лучах многими способами, общая идея которых заключается в сравнении числа частиц, распадающихся за время прохождения некоторого слоя вещества, распределённого один раз на большом пути (например, в атмосфере), а другой раз сконцентрированного в узком участке (например, в воде). Для медленного или покоящегося мезона время жизни $T_{\mu} = 2,15 \cdot 10^{-6}$ сек.; для быстрых частиц, в согласии с теорией относительности, время жизни увеличивается в зависимости от скорости по закону

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

*) См. обзор А. Б. Мигдала и Я. А. Смородинского, УФН, 41, 133, 1950.

**) Одними из первых к этому выводу пришли Г. Б. Жданов и А. А. Хайдаров (ДАН, 65, 287, 1949); подробнее см. научно-реферативный сборник, серия 2, вып. II, Космические лучи, ИЛ, 1950.

Разетти, затем Ожэ и Росси смогли определить T_{μ} в лабораторных условиях при исследовании распада космических мезонов, заторможенных в блоке свинца.

Открытие новых, более тяжёлых π -мезонов, значительно более интенсивно взаимодействующих с ядрами, чем μ -мезоны, объяснило казавшийся парадоксальным факт, обнаруженный недавно группой Пиччони и заключающийся в слабом поглощении лёгкими ядрами обычных μ -мезонов, составляющих главную долю жёсткой компоненты космических лучей. При этом имеет место интересная реакция: $p + \mu_{-} \rightarrow n + \nu$.

Отметим, что различные авторы время от времени сообщают о наличии некоторого числа мезонов других масс в космических лучах, в том числе специально тяжёлых τ -мезонов с массой около 900—1000 m (Лепренс-Ренге*), а также нейтральных τ -мезонов, распадающихся с $T \sim 10^{-10}$ сек. на две заряженные частицы (Рочестер, группа Андерсона), или лёгких мезонов с массами $< 200 m$. Все эти наблюдения далеко ещё не являются достоверными**), кроме, повидимому, недавно подтверждённых τ -мезонов.

*) См. статью L e r p r i n s e-R i n g u e t в сборнике «L e t t e r s o n», Paris, 1945.

**) Последнее заключение относится также к так называемым «варитронам», т. е. мезонам разных масс и зарядов (вплоть до 20 000 m), об экспериментальном обнаружении которых сообщали неоднократно А. И. Алиханов и А. И. Алиханьян с сотрудниками (см. ЖЭТФ, 18, 301, 1948; 19, 1021, 1949). Во всяком случае, общую картину космических лучей на сегодняшний день можно построить без варитронов (см., например, обзор Д. В. Скобелыцына, УФН, 41, 331, 1950), особенно с подобным спектром масс и в количестве нескольких процентов от всего состава жёсткой компоненты, не говоря уже о том, что современная теория не предсказывает «варитронов» и т. д., как, впрочем, и не запрещает их. С другой стороны, весьма вероятно, что современная физика далеко ещё не исчерпала всех элементарных частиц как в мезонном диапазоне, так и ближайших по массе к нуклеонам.

«Супрачастицы» с массами, в несколько раз превышающими нуклеонные, могут быть с некоторым основанием предсказаны, исходя из предположения о возможности существования частиц, взаимодействия между которыми могут переноситься нуклеонами, аналогично тому, как мезоны реализуют поле сил между нуклеонами (см. Д. И в а н е н к о, УФН, 32, 306, 1947). Возбуждённые же состояния нуклеонов по теории сильной связи нуклеонов с мезонным полем (Вентпель-Гейтлер-Ма) должны иметь массы, лишь незначи-

Наконец, весьма важным обстоятельством явилось недавнее открытие в космических лучах и в лабораторных условиях (1950 г.) относительно тяжёлых нейтральных π_0 -мезонов (нейтретто) с массой около 270 m , также нестабильных, со временем жизни $T_0 \approx 10^{-14}$ сек. и распадающихся на два фотона по схеме

$$T_0 \rightarrow 2\gamma.$$

При этом процесс предполагается идущим благодаря виртуальному порождению пары нуклеон-антинуклеон и её аннигиляции с превращением в γ -фотоны:

$$\pi_0 \rightarrow p + p' \rightarrow 2\gamma.$$

В этой связи упомянем недавнее предварительное предложение Ферми построить модель мезона как сложной частицы, состоящей из пары тесно связанных частиц — нуклона и антинуклона. π_0 -мезоны образуются так же, как и π_{\pm} -мезоны, при столкновении нуклеонов или γ -фотонов с нуклеонами (Брюкнер, Штейнбергер, Поповский). Интересно, что малое время жизни нейтральных π_0 -мезонов делает преимущественно именно эти новейшие частицы ответственными за порождение более поглощаемой, мягкой электронно-позитронно-фотонной компоненты в космических лучах. Наряду с γ -лучами от π_0 -мезонов мягкая компонента ведёт своё начало также от электронов и позитронов распада μ_{\pm} -мезонов, от δ -электронов, т. е. атомных электронов, выбитых космическими частицами, всевозможных фотонов, образующихся при относительно незначительном тормозном испускании протонов, π_{\pm} -мезонов, ν_{\pm} -мезонов и, вероятно, также фотонов, возникающих при излучении перезарядки протона в нейтрон *) и т. д. В дальнейшем, как известно, γ -лучи высокой энергии при столкновении с ядрами порождают пары лёгких частиц $\gamma + M_z \rightarrow M_z + e_+ + e_-$, а электроны и позитроны в свою очередь излучают тормозные γ -фотоны в поле ядер, при-

тельно превышающие нуклеонные (см. также статьи И. Т а м м а, В. Г и н з б у р г а и др. в сборнике «Мезон», Гостехиздат, 1947).

*) На необходимость последнего указали недавно П о м е р а н ч у к и Ш м у ш к е в и ч, а также Х а й а к а в а.

вода к хорошо изученным мягким каскадным ливням, открытым в 1933 г. Блэккетом *).

Следует отметить, что гипотеза порождения нуклеонами нейтральных π_0 -мезонов, являющихся частицами, непосредственно не наблюдаемыми, в противоположность π_{\pm} -мезонам, обнаруживаемым по их следам в камере Вильсона или фотопластинках, а также их распада на два фотона, возникла первоначально из невозможности объяснить какими-либо известными механизмами (тормозное испускание и т. д.) наличие неожиданно значительного числа электронов, позитронов и, по всей видимости, породивших их фотонов наряду с нуклеонами в ядерных «звёздных» взрывах. Исследование этих смешанных «электронно-ядерных» взрывов, индуцирующих затем дальнейшие аналогичные электронно-ядерные ливни, успешно проводилось главным образом Памирской экспедицией под руководством Д. В. Скобельцына, В. И. Векслера, С. Н. Вернова и Н. А. Добротина. Кроме γ -лучей и электронов-позитронов, в состав мягкой компоненты входит также некоторое число нуклеонов и мезонов, двигающихся с незначительными нерелятивистскими энергиями. На уровне моря космические лучи, интенсивность которых падает примерно до 0,1 первичной интенсивности, состоят из жёсткой компоненты, т. е. в основном из p -мезонов (80%) и отчасти мягкой компоненты (20%).

Для ядерной физики, очевидно, весьма важны разнообразные данные физики космических лучей; особенно существенным с точки зрения проблемы ядерных сил является открытие того обстоятельства, что ядерное поле, окружающее нуклеоны, в основном состоит из среднетяжёлых частиц: π -мезонов как заряженных, так и нейтральных. Действительно, подчеркнём ещё раз, именно π -мезоны

*) Полная теория каскадных ливней, являющихся электромагнитными процессами, была, вслед за работами Гейтлера и Баба, Оппенгеймера и Карлсона развита и завершена главным образом советскими физиками Ландау и Румером, Иваненко и Соколовым, Таммом и Беленьким. См. монографии: С. З. Беленький, Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат, 1948; Росс и Грейзен, Взаимодействие космических лучей с веществом, ИЛ, 1949 и цитированную книгу Яносси о космических лучах.

непосредственно с наибольшей вероятностью порождаются и поглощаются ядрами. Очевидно, π_{\pm} и π_0 -мезоны в первую очередь являются также передатчиками внутриядерных взаимодействий между нуклеонами. Тем самым приобретает первостепенное значение определение всех основных свойств π -мезонов: в первую очередь после их массы значение спина.

Как следует из самого факта распада π_0 -мезонов на два фотона, обладающих каждый единичным спином, спин π_0 -мезона должен, по видимому, равняться нулю. Аналогичное положение вещей было выяснено в теории «позитрония», т. е. атомноподобной системы, ещё непосредственно не обнаруженной, состоящей из позитрона и электрона, обращающихся вокруг общего центра тяжести впрямь до взаимной аннигиляции с превращением в фотоны. При этом система парапозитрония с общим спином, равным нулю, превращается в два фотона ($T \sim 10^{-9}$ сек.), тогда как ортопозитроний, обладающий спином единица, должен превращаться, во всяком случае при подсчёте в нерелятивистском приближении, в три фотона ($T \sim 10^{-7}$ сек.)*.

Вероятнее всего, что π_0 -мезон является псевдоскалярным, а не скалярным (см. § 46), что доказывается в первую очередь более близким совпадением экспериментальных данных с предсказаниями псевдоскалярной теории. Кроме того, самые общие основы теории ядерных сил указывают на существенную роль спиновых свойств нуклеонов и ядерного поля, т. е. в основном π -мезонного, что не могло бы иметь места при скалярном характере π -мезонов. Судя по более удовлетворительному согласию предсказаний псевдоскалярной теории с опытом, заряженные π_{\pm} -мезоны также являются псевдоскалярными и, следовательно, обладают спином 0.

*) См. ряд работ Иваненко-Соколова-Мухтарова в ДАН и в Вестнике МГУ за 1947—1948; а также Ландау-Померанчука в ДАН за 1948. Заметим, что при своей диффузии в веществе медленные π_{+} и μ_{+} -мезоны также могут рекомбинировать с электронами, образуя новую короткоживущую атомноподобную систему «мезотроний». С другой стороны π_{-} и μ_{-} -частицы могут захватываться на атомные орбиты подобно электронам.

Открытие π_0 -мезонов или нейтрального мезонного поля не только подводит более реальный базис под современную теорию ядерных сил, но и оправдывает построение чисто классической теории, «классической мезодинамики» мезонного поля и ядерных взаимодействий. Для заряженных π_{\pm} -мезонов, строго говоря, необходима квантовая трактовка, хотя многие основные результаты могут быть получены из теории нейтральных частиц. Подчёркивая основную роль π -мезонов как частиц ядерного поля, мы не должны ещё ввиду незаконченного характера как теории ядерных сил, так и экспериментов в данной области категорически исключать возможности участия иных, возможно, более лёгких мезонов в ядерном поле, хотя устранение трудностей теории ядерных сил, по всей видимости, не связано с введением иных мезонов. Ввиду целого спина, статистика π -мезонов должна быть бозевской. Так как не исключена ещё возможность как скалярного характера этих мезонов, так и значения их спина 1, то разумно проанализировать все варианты описания, пригодные при целом спине: 1) скалярное или псевдоскалярное уравнение (спин 0); 2) векторное или псевдовекторное уравнение (спин 1).

Для описания ρ -мезонов как частиц, повидимому, полуцелого спина, как и для электронов, необходимо использовать спинорное уравнение Дирака. Никаких оснований предполагать у каких-либо мезонов спин больше единицы не имеется. Тем самым нет причин привлекать для описания мезонного поля более сложные волновые функции, обладающие большим числом компонент, чем четырёхмерные векторы.

Дополнительная гипотеза Юкава о связи мезонов внутриядерного поля с β -распадом привела к предсказанию факта самопроизвольного распада свободных мезонов, действительно подтверждённому опытом. Однако теперь нам понятна неудача построения точной количественной теории, которая позволила бы связать β -распад и распад ρ -мезонов, единственно известных в 1937—1947 гг. Время распада покоящихся ρ_{\pm} -мезонов $T_{\rho} = 2,15 \cdot 10^{-6}$ сек. оказалось слишком большим по сравнению с требованиями теории β -распада, данные по которому

приводили к значениям $T \sim 10^{-8}$ сек. Это значение совпадает по порядку со временем жизни недавно открытых π -мезонов. Однако последние, по крайней мере в свободном состоянии, отнюдь не распадаются на электрон (позитрон) и нейтрино, поэтому известный распад π -мезона в случае, если он имеет место также для π -мезонов, переносящих ядерные силы, никак не может служить объяснением для β -распада*). Ввиду доказательства распада μ_{\pm} -мезонов на три частицы они также непосредственно не могут быть привлечены в качестве промежуточных звеньев при β -распаде, даже если эти мезоны участвуют в переносе ядерных сил парами (например, парами μ_{+} и μ_{-} или вместе с нейтрино μ_{+} и ν и т. д.) Таким образом, пока что, несмотря на привлекательность гипотезы о сведении β -распада к распаду промежуточных мезонов, переносящих ядерное взаимодействие, приходится трактовать β -распад феноменологически в духе теории Ферми, при помощи независимой константы g_F , связывающей нуклоны с электронно-(позитронно)-нейтринным полем.

Вернёмся к общей теории мезона. Для понимания дальнейшего развития теории мезонов и теории ядерных сил прежде всего необходимо подчеркнуть, что первоначальное описание ядерных сил посредством одних скалярных мезонов, заряженных или нейтральных, оказалось слишком упрощённым. Для того чтобы объяснить спиновые и нецентральные ядерные силы, необходимо связать нуклоны с мезонным полем, обладающим какими-то спиновыми, например дипольными, свойствами. Наилучшим способом оказалось описание мезонов посредством псевдоскалярного уравнения (спин 0) (во вновь открытых π -мезонах, по видимому псевдоскалярных, эти теоретические требования нашли теперь реальное обоснование) или векторных уравнений (спин 1). Таким путём удаётся придти к спиновым и нецентральным силам, в частности, истолковать квадрупольный момент дейтерона. Одинаковый порядок сил,

*) Недавно попытки в этом направлении были сделаны Финкельштейном и др., рассматривавшими промежуточное виртуальное порождение пары нуклонов вместе с антинуклонами по схеме

$$\pi_{\pm} \rightarrow \pm + n \rightarrow e_{\pm} + \nu.$$

действующих между протоном и нейтроном, протоном—протоном и нейтроном—нейтроном, настойчиво требовал введения наряду с заряженными также нейтральных мезонов (нейтретто) в качестве частиц, переносящих взаимодействие. Открытие π_0 -мезонов со своей стороны подводит реальную почву под эту теорию. Обычно теория развивается на базе использования смеси заряженных и нейтральных мезонов, чаще всего в равной, «симметричной» пропорции. Наконец, неоднократно обсуждались всевозможные иные смеси, например, векторных и псевдоскалярных мезонов, которые одновременно должны реализовать согласно гипотезе Мёллера и Розенфельда ядерное поле. Другие авторы использовали только заряженные или только нейтральные частицы и т. д.

Однако удовлетворить всем требованиям теории ядерных сил до сих пор не удаётся. В теории ядерных сил имеется фундаментальная трудность, связанная с эффективной дипольностью мезонного поля (как векторного, псевдовекторного, так и некоторых вариантов псевдоскалярного), которая приводит к появлению в энергии взаимодействия, вычисляемой классическим путём в случае нейтральных мезонов и квантовым путём в случае мезонов заряженных или нейтральных, членов, имеющих квазимагнитный вид, на относительно малом расстоянии: $V \sim r^{-3}$.

Как уже указывалось (см. теорему вириала), при таком быстром возрастании энергии взаимодействия на малых расстояниях нуклеоны упали бы друг на друга и стабильные орбиты были бы невозможны. Подобные дипольные члены возникают при нерелятивистском подсчёте; провести же точный релятивистский подсчёт ещё не удалось, хотя в псевдовекторном и псевдоскалярном случаях (см. ниже) при релятивистском улучшении дипольные члены удалось устранить.

Как будет подробно показано ниже, дипольность мезонов проявляется также при разнообразных эффектах рассеяния: мезонов на нуклеонах и различных частиц, в том числе и фотонов, на мезонах. При этом эффективные сечения этих процессов безгранично растут с ростом энергии, что, конечно, нелепо. В векторном случае подобные

трудности возникают как при электромагнитных, так и при специфически ядерных взаимодействиях, тогда как в псевдоскалярном случае к трудностям приводят лишь ядерные эффекты. Из всех способов, предложенных для устранения дипольных трудностей при рассеянии, наиболее эффективным и бесспорным оказался учёт обратного действия мезонного поля или затухания на испускающие его частицы, разработанный как в классической теории нейтральных мезонов (Иваненко и Соколов, Баба), так и в квантовой теории заряженных мезонов (Соколов, Гейтлер, Вильсон, Гора). Во всех случаях учёт затухания приводит к уменьшению эффективных сечений при высоких энергиях. Однако учёт затухания не позволяет устранить дипольные трудности при взаимодействии. Впрочем, в последнее время ситуация с дипольной трудностью несколько улучшилась, так как для псевдоскалярных мезонов удалось устранить эту трудность по крайней мере во втором приближении, при релятивистском подсчёте, учитывающем скорости нуклеонов (см. §§ 46 и 48б). Так как псевдоскалярные мезоны во многих других отношениях дают наилучшее описание ядерного поля, то разумно эти частицы взять за основу. Поскольку, однако, до сих пор не имеется полной уверенности в возможности ограничиться одним этим полем, основы теории ядерных сил следует проанализировать на базе всех четырёх полей спина 0 и 1.

Таким образом, несмотря на общий успех в понимании мезонов, связанный с самим предсказанием новой частицы средней массы, её роли в ядерных силах и её спонтанного распада, а также на удачное описание ряда эффектов, даже несмотря на новейшее открытие заряженных и нейтральных π -мезонов и выяснение распада π - и η -мезонов, общее положение теории ядерных сил и теории мезонов остаётся пока что неудовлетворительным. Ввиду такой ситуации разнообразные ядерные эффекты приходится временно вычислять с энергией взаимодействия искусственно подобранной формы, передающей указанные выше основные признаки ядерных сил, главным образом исходя как из данных по дейтерону, так и сведений о рассеянии нуклеонов при высоких энергиях порядка 100—400 MeV, или же использовать мезонный вид взаимодействия, обре-

занный на малых расстояниях. К счастью, как указывалось выше, понимание многих важных явлений не зависит от более точного вида взаимодействия. Тем самым мы должны в известной мере использовать результаты феноменологического направления теории ядерных сил, беря, однако, что весьма существенно, за основу все результаты полевой мезонной теории.

Проблема построения ядерных сил является, очевидно, одной из важнейших во всей современной физике. Знание точного закона взаимодействия между нуклеонами, подобного ньютонову или кулонову, позволило бы рассчитать любые ядерные эффекты. Сейчас ещё неясно, коренятся ли затруднения теории ядерных сил, не позволяющие придать закону взаимодействия нуклеонов окончательную форму, главным образом в недостаточном ещё знании свойств π -мезонов, переносящих в основном ядерные силы, или других мезонов, возможно участвующих в ядерном поле, или же эти трудности связаны с общими проблемами релятивистской квантовой механики элементарных частиц, в частности с недостаточным ещё развитием теории вакуума мезонов и нуклеонов.

Для облегчения анализа проблемы ядерных сил начнём изложение теории с простейшего её варианта, именно нейтрального скалярного мезонного ядерного поля. Имея в виду вероятное, но всё же не обязательное применение к любым нейтральным мезонам, в частности π_0 -мезонам (нейтретто), будем называть для краткости излагаемую теорию вещественного поля «классической мезодинамикой» *).

§ 45. Скалярное мезонное поле

а) Скалярные ядерные силы

Рассмотрим простейший вариант теории ядерных сил, с самого начала обеспечивающий их зарядную независимость (в смысле § 44а, п. 4), который сводится к допущению, что к силам притяжения между любыми нуклеонами приводит нейтральное мезонное поле, описываемое однокомпонентной скалярной вещественной

*) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, 10, 709, 1940.

функцией φ . Теорию скалярных ядерных сил будем строить в рамках классической мезодинамики.

В этом отношении мы имеем известную аналогию с ньютоновым полем тяготения, которое как раз приводит к притяжению, действующему между любыми массами.

Как известно, для определения потенциала ньютонова поля, который будем обозначать также через φ , создаваемого точечной массой m , находящейся в начале координат, имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi k m \delta(\mathbf{r}), \quad (45,1)$$

где k — гравитационная постоянная.

Отсюда с помощью (10,11) при естественных граничных условиях находим значение для потенциала на расстоянии r от источника

$$\varphi = -\frac{km}{r} \quad (45,2)$$

и для потенциальной энергии взаимодействия двух одинаковых масс, расположенных друг от друга на расстоянии r :

$$V = m\varphi. \quad (45,3)$$

Переходя теперь к ядерным силам, мы не можем ограничиться подстановкой нового специфического мезонного заряда g нуклеонов, обеспечивающего их связь с ядерным полем вместо гравитационного заряда $m\sqrt{k}$. Действительно, в этом случае мы вновь пришли бы к силам далёкого действия $V \sim \frac{1}{r}$ вместо требуемых короткодействующих сил. Поэтому прежде всего сделаем замену выражения (45,2) и тем самым (45,3) формулами, обеспечивающими, по крайней мере, короткодействующий характер искомых сил. Для этой цели достаточно изменить уравнение поля (45,1), например, в том же направлении, как это было сделано Зеелигером и Нейманом в теории тяготения (см. § 14). Следовательно, за основу разумно взять вместо уравнения типа Пуассона уравнение Зеелигера или, иначе говоря, статическое приближение к уравнению (20,1):

$$(\nabla^2 - k_0^2) \varphi = 4\pi g \delta(\mathbf{r}), \quad (45,4)$$

приводящее к потенциалу короткодействующих сил.

При этом, как было указано в § 20, постоянная k_0 должна быть связана с массой частиц μ , сопоставленных полю, соотношением $k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}$. Вообще говоря, учитывая корпускулярно-волновой дуализм, точная форма которого устанавливается в квантовой теории, мы всё время имеем в виду как поля, так и частицы, им сопоставленные, например, электромагнитное поле и фотоны, мезонное поле и мезоны, и т. д.

С другой стороны, для энергии связи нуклеона с мезонным полем можно полностью сохранить выражение типа (45,3), пригодное в статическом нерелятивистском приближении для связи любых частиц с полем через какие-либо «заряды». Подставляя сюда мезонный заряд, получим

$$V = g\varphi. \quad (45,5)$$

Таким образом классическое нерелятивистское уравнение движения нуклеона массы M должно определяться формулой

$$M\ddot{x}'_n = -\frac{\partial V}{\partial x'_n} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial x'_n}. \quad (45,6)$$

Эти же соотношения получаются строго из функции действия S , состоящей из трёх частей (см. § 23):

$$S = S_1 + S_2 + S_3. \quad (45,7)$$

Здесь S_1 — функция действия свободной частицы (нуклеона), которая в нерелятивистском приближении имеет вид

$$S_1 = \frac{M}{2} \int v^2 dt', \quad (45,8)$$

где $v^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2$, а координаты нуклеона зависят от времени t' .

S_2 обозначает функцию действия одного вещественного скалярного мезонного поля, выражающуюся через интеграл от лагранжиана L , который является единственным инвариантом, удовлетворяющим условиям линейности уравнения и наименьшей возможной, именно второй,

степени производных от скаляра φ в уравнении поля

$$S_2 = \int L(dr) = -\frac{1}{8\pi} \int (\varphi_{\nu} \varphi_{\nu} + k_0^2 \varphi^2) (dx), \quad (45,9)$$

где $(dx) = dx dy dz dt$, x , y , z , t — координаты поля и $\varphi_{\nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\nu}}$. Действительно, самое φ , а следовательно, и φ^2 , а также квадрат четырёхмерного градиента $\varphi_{\nu} \varphi_{\nu}$ являются инвариантами.

Наконец, S_3 обозначает смешанный член функции действия, определяющий взаимодействие мезонного поля с нуклеонами, причём

$$S_3 = - \int ds \int \rho(x - x') U(x) (dx). \quad (45,10)$$

Здесь величина U , играющая в релятивистской теории роль энергии связи, является скаляром и получается по правилу образования смешанных инвариантов, т. е. равняется сумме произведений скаляра поля на скаляр частицы, вектора поля на вектор частицы и т. д.

Для скалярного поля мы имеем

$$U = g\varphi + f \frac{v_{\mu}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}},$$

где v_{μ} является скоростью нуклеона, а g и f являются ядерными «зарядами».

Используя особое калибровочное преобразование (см. §§ 46, 48) или же просто ограничиваясь нерелятивистским приближением, последний инвариант, пропорциональный скорости, мы можем вообще отбросить. Тогда

$$U = g\varphi. \quad (45,10a)$$

В нерелятивистском приближении для точечного нуклеона, когда можно положить собственное время s равным t' ($s = t'$) и

$$\rho(x - x') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'),$$

имеем

$$S_3 = -g \int dt' \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \varphi(x) (dr) dt. \quad (45,11)$$

Для определения уравнений поля при наличии нуклеонных источников мы берём лишь функции действия S_2 (поля) и S_3 (член взаимодействия):

$$S_2 + S_3 = \int L(dx), \quad (45,12)$$

причём функция Лагранжа теперь равна

$$L = -\frac{1}{8\pi}(\varphi_{,\nu}\varphi_{,\nu} + k_0^2\varphi^2) - g\varphi \int dt'\delta(r-r')\delta(t-t'). \quad (45,13)$$

Варьируя L по потенциалу φ , получим из эйлеровых уравнений

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\nu}} = 0 \quad (45,14)$$

уравнение скалярного мезонного поля, создаваемого точечными нуклеонами:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 4\pi g\delta[r-r'(t)]. \quad (45,15)$$

В частности, в статическом случае нуклеона, помещённого в начале координат $r' = 0$, получаем исходное уравнение (45,4).

Точно так же уравнение движения нуклеона может быть найдено из функций действия S_1 (частицы) и S_3 (взаимодействия):

$$S_1 + S_3 = \int L'dt'. \quad (45,16)$$

Здесь нерелятивистская функция Лагранжа равна

$$L' = \frac{M}{2} \dot{x}'_n \dot{x}'_n - g\varphi(r', t'), \quad (45,17)$$

откуда, варьируя L' по координатам нуклеона и используя эйлеровы уравнения

$$\frac{\delta L'}{\delta x'_n} = \frac{\partial L'}{\partial x'_n} - \frac{d}{dt'} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'_n} = 0, \quad (45,18)$$

получаем уравнение (45,6), описывающее трансляционное движение нуклеона в мезонном поле.

Потенциальная энергия V взаимодействия нуклеона с мезонным полем может быть найдена из равенства

$$S_3 = - \int V dt', \quad (45,19)$$

из которого для точечного покоящегося нуклеона вновь получаем формулу (45,5).

Таким образом смешанная функция действия S_3 приводит в полной аналогии с максвелловской теорией как к выражению для плотности нуклеонов, порождающих мезонное поле [см. правую часть равенства (45,4)], так и к силе, действующей со стороны мезонного поля на нуклеон [см. правую часть равенства (45,6)]. В нашем случае мы ввели в S_3 лишь член, описывающий один точечный нуклеон, поэтому правая часть уравнения (45,6) представляет собою по существу силу самодействия. Однако, вводя в функцию действия ещё внешнее поле φ^i (см. также § 23), легко показать, что сила, действующая на нуклеон со стороны внешнего поля, будет равняться

$$F^i = - \text{grad } g\varphi^i.$$

С помощью формулы (14,10) находим из уравнений (45,4) и (45,5) следующее важное для всей теории ядерных сил значение для потенциала мезонного поля на расстоянии r от источника:

$$\varphi = -g \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (45,20)$$

Отсюда имеем для потенциальной энергии взаимодействия через вещественное скалярное поле двух точечных нуклеонов, находящихся соответственно в начале координат и в точке r :

$$V = g\varphi = -g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (45,21)$$

На больших расстояниях $r > \frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu c}$, превышающих комптоновскую длину волны $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$, соответствующую мезонам массы μ , полученная энергия взаимодействия быстро убывает и практически обращается в нуль.

На малых же расстояниях при $r < \frac{1}{k_0}$ можно заменить экспонент через единицу:

$$V = -\frac{g^2}{r}, \quad (45,22)$$

т. е. скалярная энергия связи частиц имеет вид ньютоновой энергии гравитационного взаимодействия двух масс.

Для того чтобы внутри ядра ($r \approx 10^{-13}$ см) для энергии связи получить разумное значение $V \sim 10$ MeV, мы должны положить ядерный заряд равным $g \sim 5e$.

Важно подчеркнуть, что квантовая теория переноса взаимодействия скалярным вещественным полем (так же как и в случае электростатического и гравитационного полей, а также для всех других вещественных бозевских полей, описываемых не спинорными, а тензорными функциями) или сопоставленными этому полю частицами целого спина вновь приводит к тому же выражению, которое сейчас было нами получено классическим путём.

В случае же взаимодействия протонов и нейтронов через заряженные бозевские поля, описываемые комплексными функциями и не имеющие столь непосредственной классической аналогии как поля вещественные, квантовая механика приводит к тем же выражениям энергии взаимодействия нуклеонов V' , что и для нейтральных полей, но умноженным на некоторый дополнительный множитель, так называемый оператор обмена P [более подробно см. (45,47)]. Таким образом только что полученное выражение для скалярных сил следует считать окончательным для вещественного поля и передающим величину взаимодействия с точностью до знака в случае заряженного поля, для нерелятивистского приближения.

Этот простой и наглядный результат имеет фундаментальное значение для всей современной теории ядерных сил. В самом деле, устанавливая перенос взаимодействия через поле, связанное с массой покоя μ , мы получаем силы, имеющие короткодействующий характер, что является одним из наиболее существенных свойств ядерного поля.

Возвращаясь к основной формуле теории короткодействующих сил (45,21), мы видим, что, подбирая константу

k_0 , которая по существу является массой покоя частиц скалярного поля ($k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}$), можно добиться исчезновения сил на требуемом расстоянии порядка $r \sim 10^{-13}$ см (совпадающем примерно со значением классического радиуса электрона). Отсюда масса частиц, переносящих взаимодействие, по порядку оказывается равной $\mu \approx 200$ — 300 массам электрона. Таким образом, сделав гипотезу о том, что ядерное поле является скалярным, связанным с частицами, обладающими массой покоя, мы немедленно можем определить порядок массы частиц, переносящих взаимодействие. Тем самым предсказывается существование новых (в данном случае нейтральных) элементарных частиц средней массы, промежуточных между электронами и нуклеонами. При этом, как уже указывалось выше, теория заряженного скалярного поля приводит к тем же результатам в отношении порядка массы и ядерного заряда.

Как выяснилось в классической и квантовой теории сил, взаимодействие через поле, связанное с массой покоя, иначе говоря, перенос взаимодействия частицами конечной массы, всегда приводит к силам короткого действия с радиусом r_0 , определяемым массой покоя, именно:

$$r_0 \sim \frac{1}{k_0} = \frac{h}{2\pi\mu c},$$

причём в классических уравнениях поля k_0 можно рассматривать как некоторую константу.

Таким образом с помощью скалярного поля, связанного с массой покоя, удаётся объяснить короткодействующий характер ядерных сил притяжения, притом зарядно-независимый для поля нейтрального и обменный в случае заряженного поля.

б) Общая теория скалярного поля

Разовьём теперь в кратком виде основные соотношения общей теории скалярного поля*).

*) W. Pauli und V. Weisskopf, Helvetica Physica Acta, 7, 809, 1934; Д. Иваненко и А. Соколов, Труды СибФТИ, 5, 32, 1937.

Ограничиваясь сперва для простоты случаем отсутствия нуклеонных источников, имеем согласно (45,9) следующее выражение для функции действия свободного вещественного поля:

$$S = \int L(dx), \quad (45,23)$$

где лагранжиан

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{8\pi}(\varphi_{,j}\varphi_{,j} + k_0^2\varphi^2) = \\ &= -\frac{1}{8\pi}\left[(\nabla\varphi)^2 - \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + k_0^2\varphi^2\right]. \end{aligned} \quad (45,24)$$

Отсюда, варьируя L по волновой функции φ , получим уравнение для скалярных мезонов в вакууме

$$\frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial L}{\partial\varphi_\alpha} = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right)\varphi = 0, \quad (45,25)$$

которое является частным случаем уравнения (45,15) в отсутствии нуклеонов ($g=0$).

Пусть при решении волнового уравнения для свободных частиц на волновую функцию φ накладывается условие периодичности по пространственным координатам.

Обозначая через L длину куба периодичности, имеем

$$\varphi(x_n) = \varphi(x_n + L),$$

где $n = 1, 2, 3$.

Указанным условиям периодичности удовлетворяют, например, следующие ортонормированные функции:

$$f(\mathbf{n}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\frac{2\pi}{L}\mathbf{n}\mathbf{r}},$$

где

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = n_1x + n_2y + n_3z,$$

а n_1, n_2, n_3 являются целыми числами, принимающими любые положительные и отрицательные значения, включая значение нуль.

Введём волновой вектор

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}.$$

Тогда условие ортонормированности примет вид

$$\frac{1}{L^3} \int_V e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \cdot e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} (d\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{n_1 n_1'} \delta_{n_2 n_2'} \delta_{n_3 n_3'},$$

причём интегрирование совершается по объёму $V = L^3$. Волновую функцию представим разложенной в трёхкратный ряд Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} A(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

где тройная сумма берётся по всевозможным значениям вектора \mathbf{k} .

Подставляя последнее выражение в (45,25), получим следующее дифференциальное уравнение для определения коэффициентов $A(\mathbf{k}, t)$:

$$\ddot{A}(\mathbf{k}, t) + c^2 K^2 A(\mathbf{k}, t) = 0,$$

где

$$K = \sqrt{k^2 + k_0^2},$$

откуда находим

$$A(\mathbf{k}, t) = A(\mathbf{k}) e^{-icKt} + B(\mathbf{k}) e^{icKt}.$$

Здесь A и B являются произвольными постоянными, которые могут зависеть лишь от вектора \mathbf{k} .

Учитывая, что функция φ является вещественной, мы должны положить

$$B(\mathbf{k}) = A^+(-\mathbf{k}).$$

Поэтому общее решение скалярного уравнения без источников имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} [A(\mathbf{k}) e^{-icKt + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + A^+(\mathbf{k}) e^{icKt - i\mathbf{k}\mathbf{r}}],$$

причём в последней сумме мы заменили вектор \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$.

Решение волнового уравнения может быть найдено также без дополнительного условия периодичности функции φ для весьма общего вида φ .

В этом случае решение может быть записано в виде трёхкратного интеграла Фурье:

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [A(\mathbf{k}) e^{-icKt + i\mathbf{k}\mathbf{r}} + A^*(\mathbf{k}) e^{icKt - i\mathbf{k}\mathbf{r}}] (d\mathbf{k}).$$

Подставляя последнее выражение в (45, 25), легко убедиться, что оно представляет искомое решение.

Найдём канонический тензор энергии (точнее говоря, тензор плотности энергии—импульса—натяжений).

Для этой цели воспользуемся следующим тождественным соотношением:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\beta} \varphi_{\beta\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_\beta} \varphi_\alpha \right) - \varphi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\beta} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \right),$$

откуда, учитывая (45, 25), находим закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} T_{\alpha\beta} = 0$$

для некоторого тензора 2-го ранга, являющегося искомым тензором энергии (см. также § 30):

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} \varphi_\alpha \varphi_\beta - L \delta_{\alpha\beta}.$$

Полученный закон сохранения находится в согласии с теоремой Нетер, поскольку образование канонического тензора энергии обязано инвариантности лагранжиана относительно смещения координат. Этот канонический тензор является симметричным ($T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$) и поэтому должен совпадать с метрическим тензором энергии.

Для плотности энергии имеем выражение

$$T_{44} = -\frac{1}{4\pi} \varphi_4^2 - L = \frac{1}{8\pi} \left[(\nabla\varphi)^2 + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + k_0^2 \varphi^2 \right], \quad (45, 26)$$

которое является положительно дефинитным в согласии с теоремой Паули о положительности плотности энергии для полей, описываемых не спинорными, а тензорными (в данном случае скалярными) функциями и тем самым сопоставленным бозевским частицам целого спина*).

*) В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, 1947, стр. 72.

Для вектора плотности количества движения скалярного поля имеем

$$G_n = -\frac{T_{n4}}{ic} = -\frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (45,27)$$

Остальные компоненты T_{nk} определяют «натяжения». Плотность момента количества движения скалярного поля (см. также § 30 б) по общему определению находится из равенства

$$M_{[\alpha\beta]\gamma} = \frac{i}{c} (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma}). \quad (45,28)$$

Симметрия тензора энергии $T_{\alpha\beta}$ обеспечивает выполнение закона сохранения для тензора моментов:

$$\frac{\partial M_{[\alpha\beta]\gamma}}{\partial x_\gamma} = \frac{i}{c} (T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta}) = 0.$$

Поэтому к тензору момента $M_{[\alpha\beta]\gamma}$ не требуется добавления спинного момента поля, с тем, чтобы полный момент (орбитальный плюс спинный) удовлетворял закону сохранения. Иначе говоря, спинный момент скалярного поля равен нулю. Это обстоятельство физически весьма наглядно связано с тем, что при наличии одной компоненты поляризации свойства у поля отсутствуют и, следовательно, согласно квантовому корпускулярно-волновому дуализму, частицы, сооставленные скалярному полю, не должны обладать спином.

Покажем, что условие обращения расходимости от тензора $T_{\alpha\beta}$ в нуль

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0$$

ведёт к законам сохранения энергии и импульса поля.

В самом деле, последнее равенство может быть представлено в виде

$$\frac{\partial T_{\beta n}}{\partial x_n} + \frac{\partial T_{\beta 4}}{ic \partial t} = 0.$$

Умножая его на элемент трёхмерного объёма (dr) и учитывая, что при интегрировании по всему простран-

ству объёма V

$$\int \frac{\partial T_{\beta n}}{\partial x_n} (d\mathbf{r}) = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int T_{\beta 4} (d\mathbf{r}) = 0,$$

т. е. при $\beta = 4$ мы получаем закон сохранения энергии:

$$U = \int T_{44} (d\mathbf{r}) = \text{const},$$

а при $\beta = 1, 2, 3$ — закон сохранения импульса.

Подставляя сюда вместо φ разложение в ряд Фурье и учитывая, что

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \int M(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} N(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} (d\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} M(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}),$$

найдем

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \frac{K^2}{2\pi} A^+(\mathbf{k}) A(\mathbf{k}).$$

Как и следовало ожидать, временные члены в выражение для энергии U не входят.

В квантовой теории энергия частицы импульса $\frac{h\mathbf{k}}{2\pi}$ равна $\frac{ch}{2\pi} K$, поэтому, полагая

$$A(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{ch}{K}} a(\mathbf{k}), \quad A^+(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{ch}{K}} a^+(\mathbf{k}),$$

имеем

$$U = \sum_{\mathbf{k}} \frac{chK}{2\pi} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}).$$

Отсюда видно, что величину $a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$ следует рассматривать как число скалярных мезонов, обладающих энергией $\frac{ch}{2\pi} K$.

Обобщим теперь скобки Пуассона, применяемые в механике при исследовании движения системы материальных точек, на случай волновых функций поля.

Как известно, в классической механике функция действия имеет вид

$$S = \int \bar{L} dt, \quad (45,29)$$

причём лагранжиан \bar{L} зависит от обобщённых координат q_i и скоростей $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$.

Вводя понятие импульса

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (45,30)$$

мы можем составить выражение для скобок Пуассона:

$$[A, B] = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{p}_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial \bar{p}_i} \right), \quad (45,31)$$

где сумму следует брать по всем степеням свободы системы материальных точек.

В частности, полагая величины A и B равными обобщённым координатам и их импульсам, находим

$$[q_n, q_{n'}] = [\bar{p}_n, \bar{p}_{n'}] = 0, \quad (45,32)$$

$$[\bar{p}_n, q_{n'}] = \delta_{nn'}.$$

Отсюда ясно, что пуассонова скобка для двух величин будет равна единице только в том случае, если эти величины являются канонически сопряжёнными, т. е. если выбрав одну из них за координату $q_i = B$, мы получим в качестве сопряжённой величины импульс: $\bar{p} = A$.

Для того чтобы найти скобки Пуассона для волновых функций поля, мы приведём выражение вариационного принципа (45,25) к виду (45,29):

$$S = \int \bar{L} dt, \quad (45,33)$$

где

$$\bar{L} = \int L(dr). \quad (45,34)$$

Поэтому, как указывалось раньше, функция Лагранжа поля L является по существу плотностью функции Лагранжа в смысле определения механики точки.

В качестве обобщённых координат следует выбрать волновые функции φ .

Таким образом мы имеем континуум значений волновых функций φ , соответствующих каждой точке пространства.

Для простоты рассуждений разобьём всё пространство на отдельные ячейки, каждую из которых будем характеризовать тремя числами \mathbf{n} (n_1, n_2, n_3) или радиус-вектором \mathbf{r}_n .

Обозначая объём каждой ячейки через

$$\Delta V = \Delta x_{n_1} \Delta y_{n_2} \Delta z_{n_3}^*),$$

можем представить лагранжиан (45,34) в виде

$$\bar{L} = \sum_{\mathbf{n}} L \Delta V,$$

где плотность функции Лагранжа L зависит от обобщённых координат $\varphi(\mathbf{r}_n) = \varphi(\mathbf{n})$ и их скоростей $\dot{\varphi}(\mathbf{n}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{n})}{\partial t}$.

Согласно определению (45,30) канонический импульс равен

$$\bar{p}(\mathbf{n}) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\varphi}(\mathbf{n})} = p(\mathbf{n}) \Delta V, \quad (45,35)$$

причём величину $p(\mathbf{n}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ можно рассматривать как импульс поля или точнее плотность импульса.

В частности, в случае лагранжиана скалярного поля (45,24) мы имеем для плотности импульса

$$p = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (45,36)$$

Скобки Пуассона (45,31) примут в нашем случае вид

$$[A, B] = \sum_{\mathbf{n}''} \frac{1}{\Delta V} \left(\frac{\partial A}{\partial p(\mathbf{n}'')} \frac{\partial B}{\partial \varphi(\mathbf{n}'')} - \frac{\partial B}{\partial p(\mathbf{n}'')} \frac{\partial A}{\partial \varphi(\mathbf{n}'')} \right). \quad (45,37)$$

*) Для простоты положим, что объёмы всех ячеек равны друг другу.

Подставляя вместо величин A и B значения обобщённой координаты φ и плотности импульса p , получаем

$$[\varphi(\mathbf{n}), \varphi(\mathbf{n}')] = [p(\mathbf{n}), p(\mathbf{n}')] = 0, \quad (45,38)$$

$$[p(\mathbf{n}), \varphi(\mathbf{n}')] = \frac{\delta_{\mathbf{nn}'}}{\Delta V}; \quad (45,39)$$

иными словами, скобки Пуассона для координат и плотности импульса, относящиеся к различным точкам, обращаются в нуль, а для одинаковых точек стремятся к бесконечности, т. е. просто равны δ -функции. Действительно,

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{n}'} \frac{\delta_{\mathbf{nn}'}}{\Delta V} \Delta V = 1,$$

кроме того $\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (d\mathbf{r}') = 1$. Поэтому при переходе к пределу $\Delta V \rightarrow 0$ мы получаем следующее выражение для классических скобок Пуассона скалярного поля:

$$\begin{aligned} [\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t)] &= [p(\mathbf{r}, t), p(\mathbf{r}', t)] = 0, \\ [p(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t)] &= \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (45,40)$$

Последние скобки Пуассона (трёхмерные) составлены из двух волновых функций, относящихся к различным пространственным координатам, но к одному и тому же моменту времени.

Произведём обобщение трёхмерных скобок Пуассона на четырёхмерный случай, при котором каждая из волновых функций должна зависеть от своей координаты и от своего времени (релятивистски инвариантные скобки Пуассона).

Нетрудно показать, что четырёхмерные скобки Пуассона связаны с перестановочной D -функцией (20,4):

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin cT \sqrt{k^2 + k_0^2}}{\sqrt{k^2 + k_0^2}} (d\mathbf{k}), \quad (45,41)$$

$$[\varphi(\mathbf{r}, t), \varphi(\mathbf{r}', t')] = 4\pi c D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'). \quad (45,42)$$

В самом деле, принимая во внимание соотношение

$$D(\mathbf{R}, 0) = \left[\frac{\partial^2}{\partial t \partial t'} D(\mathbf{R}, t - t') \right]_{t' \rightarrow t} = 0,$$

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} D(\mathbf{R}, t - t') \right]_{t' \rightarrow t} = \delta(\mathbf{R}),$$

мы можем из (45,42) получить все три равенства (45,40).

Отсюда вытекает важное заключение об инвариантности четырёхмерных скобок Пуассона, связанное с релятивистской инвариантностью функции D . Как известно, с помощью скобок Пуассона можно проделать переход от классической механики к квантовой.

В квантовой теории классические скобки Пуассона должны быть заменены квантовыми, определяемыми равенством

$$[A, B]_{\text{кв}} = \frac{2\pi i}{h} (AB - BA), \quad (45,43)$$

т. е. в квантовом случае величины A и B рассматриваются как операторы, в общем случае не коммутирующие друг с другом.

Например, в квантовой механике вместо классических скобок Пуассона механики точки (45,32) мы имеем для простейшего случая $q = x$

$$\frac{2\pi i}{h} (p_x x - x p_x) = 1. \quad (45,44)$$

Для того чтобы удовлетворить последнему соотношению, мы должны выбрать оператор импульса в виде

$$p_x = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x},$$

причём справа необходимо поставить функцию ψ , на которую действует оператор.

Таким образом операторное равенство (45,43) эквивалентно следующему:

$$\frac{2\pi i}{h} [p_x(\psi x) - x(p_x \psi)] = \psi. \quad (45,45)$$

Точно так же, для того чтобы проделать переход от классической теории поля к квантовой, мы должны заменить классические скобки Пуассона (45,40) квантовыми,

которые для скалярного поля согласно (45,43) и (45,36) сведутся к следующим операторным равенствам:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t) - \varphi(\mathbf{r}', t) \varphi(\mathbf{r}, t) &= \\ &= p(\mathbf{r}, t) p(\mathbf{r}', t) - p(\mathbf{r}', t) p(\mathbf{r}, t) = 0, \\ p(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t) - \varphi(\mathbf{r}', t) p(\mathbf{r}, t) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\hbar}{2\pi i}, \end{aligned} \quad (45,46)$$

где согласно (45,36)

$$p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

В релятивистски инвариантном четырёхмерном случае вместо последних соотношений следует положить

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t') - \varphi(\mathbf{r}', t') \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{2c\hbar}{i} D(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t'), \quad (45,47)$$

что оправдывает название D -функции, как перестановочной.

В квантовой теории доказывается, что волновые функции φ и их производные следует теперь рассматривать в качестве операторов, действующих на функцию от числа частиц, сопоставленных полям.

в) К о м п л е к с н о е с к а л я р н о е п о л е

Не входя в детали, выпишем теперь некоторые основные соотношения для случая комплексного скалярного поля, не имеющего столь непосредственного классического аналога, как поле вещественное, и описывающего в корпускулярном аспекте не нейтральные, а заряженные частицы (скалярные заряженные мезоны спина 0). Теория комплексного поля эквивалентна теории двух действительных полей, равных действительной и мнимой части комплексного поля. Лагранжиан комплексного поля имеет вид

$$L = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right). \quad (45,48)$$

Отсюда, варьируя L по координатам φ^+ :

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^+} = \frac{\partial L}{\partial \varphi^+} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha^+} = 0,$$

мы получим уравнение для волновой функции φ :

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2\right) \varphi = 0. \quad (45,49)$$

Точно так же варьирование по φ даёт аналогичное волновое уравнение для φ^+ .

Для тензора энергии будем иметь выражение

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} (\varphi_\alpha^+ \varphi_\beta + \varphi_\beta^+ \varphi_\alpha) - L \delta_{\alpha\beta}.$$

В частности, для плотности энергии находим снова положительно определённое выражение:

$$T_{44} = \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \varphi^+ \nabla \varphi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right). \quad (45,50)$$

Комплексное скалярное поле (т. е. в корпускулярном аспекте заряженные бесспиновые мезоны) может взаимодействовать с электромагнитным полем. Это взаимодействие лучше всего описать при помощи добавления к лагранжианам свободного скалярного и свободного электромагнитного полей смешанной части, составленной по общему правилу. Как и в других случаях взаимодействия полей заряженных частиц с электромагнитным полем, этот добавок сводится к членам, получающимся путём замены компоненты импульса p_ν на обобщённый $P_\nu = p_\nu - \frac{e}{c} A_\nu$, или замене градиента $\frac{\partial}{\partial x_\nu}$, действующего на мезонную функцию, на оператор

$$\nabla_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi i e}{hc} A_\nu \quad (45,51)$$

(A_ν —потенциалы электромагнитного поля).

Поэтому лагранжева функция скалярного поля вместе со смешанной частью, описывающей связь с полем электромагнитным, будет иметь вид

$$L = -\frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \frac{2\pi i e}{hc} A_\nu \right) \varphi^+ \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi i e}{hc} A_\nu \right) \varphi + k_0^2 \varphi^+ \varphi \right\}.$$

Отсюда обычными методами получим как уравнения для самих волновых скалярных функций (т. е. заряженных мезонов) в электромагнитном поле, так и тензор энергии и все другие основные величины, характеризующие поле.

Например, скалярное уравнение для φ будет теперь иметь вид:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi i e A_\nu}{hc} \right)^2 - k_0^2 \right] \varphi = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Тем самым воздействие электромагнитного поля на скалярные мезоны оказывается полностью описанным. С другой стороны, заряженное скалярное поле (т. е. сопоставленные ему частицы—бесспиновые заряженные мезоны) само является источником электромагнитного поля, так что плотность заряда—тока скалярного поля необходимо включить в правые части уравнений Максвелла-Лорентца. Так как уравнения Максвелла-Лорентца получаются путём вариации лагранжевой функции по электромагнитным потенциалам, то вариация смешанной части лагранжиана (описывающей связь скалярного и электромагнитного полей) по потенциалам должна дать четырёхмерный вектор плотности тока. Выпишем значение плотности тока, вызванного скалярным заряженным полем (бесспиновыми мезонами).

$$j_\nu = \frac{\delta L}{\delta A_\nu} = \frac{ie}{2hc} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\nu} \varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right) - \frac{2\pi e^2}{h^2 c^2} \varphi^+ \varphi A_\nu,$$

или при отсутствии электромагнитного поля

$$j_\nu = \frac{ie}{2hc} \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\nu} \varphi - \varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right). \quad (45,52)$$

Отсюда видно, что для вещественного поля ($\varphi^+ = \varphi$) ток обращается в нуль, и поэтому, как неоднократно подчёркивалось, подобное поле описывает поведение нейтральных частиц.

Легко убедиться в том, что вектор плотности тока удовлетворяет уравнению непрерывности:

$$\frac{\partial j_\nu}{\partial x_\nu} = 0. \quad (45,52 a)$$

Заметим, что несмотря на явное включение электромагнитных потенциалов в лагранжиан, уравнения поля, как и требуется, являются инвариантными относительно преобразований калибровки.

В самом деле, при преобразованиях калибровки

$$A'_\nu = A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_\nu},$$

новые функции будут иметь вид

$$\varphi' = \varphi e^{\frac{2\pi ie}{hc} f}; \quad \varphi'^+ = \varphi^+ e^{-\frac{2\pi ie}{hc} f},$$

где f —произвольная скалярная функция всех четырёх координат.

В справедливости этих преобразований легко убедиться, воспользовавшись тождеством

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc} A_\nu \right) \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - \frac{2\pi ie}{hc} A'_\nu \right) \varphi'.$$

С точки зрения теоремы Нетер закон сохранения тока (т. е. уравнение непрерывности) соответствует инвариантности уравнений комплексного скалярного поля относительно преобразований калибровки.

Обратим внимание на выражение плотности заряда (45,52) $\rho = \frac{1}{i} j_4$ скалярных частиц при исчезающем электромагнитном поле ($A_\nu = 0$):

$$\rho = \frac{ei}{2hc^2} \left(\varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial t} \varphi \right). \quad (45,53)$$

Это выражение индефинитно (т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения) в противоположность известному из теории Шредингера выражению

$$\rho = e\varphi^+\varphi,$$

являющемуся нерелятивистским приближением к формуле (45,53).

Поэтому, в то время как делением на заряд в нерелятивистском случае получается дефинитное выражение $\varphi^+\varphi$, которое интерпретируется как плотность вероятности, в релятивистском случае для скалярного уравнения непосредственное истолкование величины $\frac{\rho}{e}$ как плотности вероятности, очевидно, невозможно. Это обстоятельство в добавочной связи с тем, что скалярное уравнение приводит в кулоновом поле к уровням энергии соответствующей бесспиновой частицы, не согласующимся с подтвержденной опытом формулой Зоммерфельда для тонкой структуры уровней энергии электрона, послужило Дираку поводом первоначально считать самое скалярное уравнение полностью ошибочным. Дирак начал искать новое релятивистское уравнение, ставя во главу угла теории дефинитное выражение плотности вероятности $\psi_\nu^+\psi_\nu$, где волновая функция ψ_ν была взята теперь уже с несколькими компонентами, необходимыми для описания спиновых свойств. Впоследствии выяснилось, однако, что скалярное уравнение, конечно, непригодно для описания электрона и других спиновых частиц, но способно вполне закономерно описывать бесспиновые частицы, которые естественно имеют другие уровни энергии в кулоновом поле, например ядра, по сравнению с электронами.

Как показал Паули (1939 г.), индефинитность плотности заряда также представляет собою закономерный факт, общий для плотности заряда любых бозевских частиц целого спина, описываемых не спинорными, а обычными тензорными функциями (скалярами, псевдоскалярами, векторами и т. д.). С другой стороны, плотность энергии для бозевских частиц будет всегда положительно дефинитной (например, для скалярных и векторных мезонов).

Далее выяснилось, что комплексные поля описывают одновременно заряженные частицы обоих знаков заряда, так что индефинитность плотности заряда в конце концов после надлежащей интерпретации частей волновых функций ψ_ν и ψ_ν^+ , связанных с противоположно заряженными частицами, выражает тот тривиальный факт, что общий заряд равняется разности зарядов.

§ 46. Псевдоскалярное мезонное поле

а) Псевдотензоры

Немаловажную роль в современной теории волновых полей и элементарных частиц играет использование волновых функций, дуальных к скаляру, вектору и т. д.

Для построения дуальных величин рассмотрим тензор четвёртого ранга $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, антисимметричный относительно любой пары значков, т. е. $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varphi_{\beta\alpha\gamma\delta}$ и т. д. Все составляющие этого тензора с двумя одинаковыми значками должны равняться нулю, так как согласно определению, например, $\varphi_{11\gamma\delta} = -\varphi_{11\gamma\delta}$. Отличными от нуля будут только те составляющие, у которых все значки α, β, γ и δ будут отличаться друг от друга и, следовательно, будут составлять произвольную перестановку чисел 1, 2, 3 и 4. В каждом данном случае мы можем путём ряда транспозиций перейти к составляющей тензора φ_{1234} . Обозначая для краткости основную компоненту φ_{1234} через $\tilde{\varphi}$, мы видим, что каждая из 256 компонент антисимметричного тензора четвёртого ранга должна иметь одно из значений:

$$+\tilde{\varphi}, \quad 0, \quad -\tilde{\varphi}.$$

Целесообразность особого обозначения указанной величины специальным образом через значок тильда (\sim) выяснится ниже.

Поэтому мы можем положить:

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varphi}, \quad (46,1)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значков } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ имеются} \\ & \text{равные;} \\ 1, & \text{если значки } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ можно располо-} \\ & \text{жить в порядке } 1, 2, 3, 4 \text{ посредством} \\ & \text{чётного числа транспозиций;} \\ -1, & \text{если необходимо нечётное число} \\ & \text{транспозиций для перевода значков} \\ & \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ в порядок } 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Составляющие $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ведут себя как компоненты антисимметричного тензора четвёртого ранга по отношению к любым четырёхмерным вращениям системы координат; однако при изменении направления одной или трёх координат символ $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ уже не совпадает с тензором в буквальном понимании, отличаясь от него знаком. Поэтому в дальнейшем мы будем его называть антисимметричным псевдотензором четвёртого ранга, ставя вверху над псевдовеличинами значок тильда $\tilde{\sim}$.

В частности, поведение символа $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ при зеркальных преобразованиях

$$x'_n = -x_n, \quad x'_4 = x_4 \quad (46,2)$$

отличается от поведения тензоров.

В самом деле, при переходе от одной системы к другой компоненты тензора четвёртого ранга преобразуются по закону

$$\varphi'_{1234} = \frac{\partial x'_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_2}{\partial x_\beta} \frac{\partial x'_3}{\partial x_\gamma} \frac{\partial x'_4}{\partial x_\delta} \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

При зеркальных преобразованиях (46,2) имеем

$$\frac{\partial x'_{\mu'}}{\partial x_\mu} = \varepsilon_\mu \delta_{\mu\mu'},$$

где эйзенхартовы значки ε_μ (применяемые с пользой при операциях в псевдоэвклидовом мире), индексы μ при которых не учитываются при правилах суммирования, равны

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \quad \varepsilon_4 = 1,$$

т. е. в нашем случае

$$\varphi'_{1234} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varphi_{1234} = -\varphi_{1234};$$

отсюда видно, что основная компонента тензора должна менять знак, в то время как символ $\tilde{\varepsilon}_{1234}$, будучи определённым одинаково для всех систем координат, не меняет знака.

Таким образом компоненты псевдотензоров не удовлетворяют обычным правилам, известным для тензоров при зеркальных преобразованиях.

Скалярные произведения двух псевдотензоров будут, очевидно, удовлетворять правилам поведения тензоров при зеркальных преобразованиях и поэтому являются тензорами.

В частности, произведение

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 4! = 24$$

оказывается скаляром *).

Наряду с антисимметричным тензором четвертого ранга $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, полученным с помощью символа $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ из величины φ , которая, как нетрудно видеть, является псевдоскаляром, мы можем аналогичным образом получить также антисимметричный тензор третьего ранга, исходя из псевдовектора. Действительно, имеем

$$\varphi_{\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varphi}_{\alpha}.$$

Точно так же образуем антисимметричный тензор второго ранга:

$$\varphi_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varphi}_{\alpha\beta},$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ называется антисимметричным псевдотензором второго ранга.

Все величины, образуемые при помощи символа $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, называются дуальными к исходным; таким образом псевдотензоры дуальны к обычным, и обратно.

*) В случае преобразования криволинейных координат, существенном в общей теории относительности, значения символа в новой и старой системах связаны соотношением

$$\tilde{\varepsilon}'_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{g} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

В самом деле, из последних равенств мы можем обратно псевдотензоры выразить через обычные тензоры:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \frac{1}{24} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ \tilde{\varphi}_\alpha &= \frac{1}{6} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\beta\gamma\delta}, \\ \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\gamma\delta} \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Если законы преобразования для тензоров при зеркальных преобразованиях имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi, \\ \varphi'_\alpha &= \varepsilon_\alpha \varphi_\alpha, \\ \varphi'_{\alpha\beta} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varphi_{\alpha\beta}, \\ \varphi'_{\alpha\beta\gamma} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varphi_{\alpha\beta\gamma}, \\ \varphi'_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta},\end{aligned}$$

то для псевдотензоров эти правила гласят:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}' &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}, \\ \tilde{\varphi}'_\alpha &= \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_\alpha, \\ \tilde{\varphi}'_{\alpha\beta} &= \varepsilon_\gamma \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}, \\ \tilde{\varphi}'_{\alpha\beta\gamma} &= \varepsilon_\delta \tilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}, \\ \tilde{\varphi}'_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \tilde{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta},\end{aligned}$$

причём среди α , β , γ , δ не должно быть равных значков.

Приведём несколько примеров образования псевдотензоров, или величин, дуальных к исходным.

Как известно, антисимметричный тензор второго ранга электромагнитного поля определяется равенством

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

где

$$H_{12} = H_z, \quad H_{14} = -iE_x \text{ и т. д.}$$

Дуальный по отношению к нему антисимметричный псевдотензор второго ранга равен

$$\tilde{H}_{\varepsilon\rho} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon\rho\mu\nu} H_{\mu\nu}, \quad \text{т. е. } \tilde{H}_{12} = -iE_z, \quad \tilde{H}_{14} = H_x \text{ и т. д.}$$

Таким образом компоненты $\tilde{H}_{\mu\nu}$ составлены из компонент $H_{\mu\nu}$ путём перестановки вектора магнитного поля \mathbf{H} с вектором электрического \mathbf{E} , которые обладают различной зеркальной инвариантностью. Действительно, вектор \mathbf{E} при зеркальных преобразованиях всех трёх координат меняет знак, а вектор \mathbf{H} остаётся неизменным.

Приведём ряд других примеров псевдовеличин. В трёхмерном пространстве объём параллелепипеда, построенного на трёх векторах \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} , определяется формулой

$$\tilde{V} = (\mathbf{A} [\mathbf{BC}])$$

и характеризуется псевдоскаляром. С точки зрения тензорного анализа объём задаётся антисимметричным тензором третьего ранга с компонентами

$$V_{klm} = \begin{vmatrix} A_k A_l A_m \\ B_k B_l B_m \\ C_k C_l C_m \end{vmatrix},$$

причём

$$\tilde{V} = V_{123}.$$

Векторное произведение двух векторов, т. е. площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{A} и \mathbf{B} :

$$\tilde{C} = [\mathbf{AB}],$$

является псевдовектором, получившим название аксиального вектора, в противоположность истинному, т. е. полярному вектору. С точки зрения тензорного анализа площадь определяется антисимметричным тензором второго ранга:

$$C_{nk} = A_n B_k - B_n A_k,$$

причём $\tilde{C}_1 = C_{23}$ и т. д.

Наконец, укажем, что с понятием псевдотензоров нам придётся встретиться при исследовании взаимодействия нуклеонов с полем мезонов, подчиняющихся различным уравнениям (скалярному, псевдоскалярному, векторному или псевдовекторному). Образует смешанную функцию действия по общему правилу [см., например, (45,10)]

$$S_3 = - \int ds \int \rho(x-x') U(x) (dx),$$

где U должно являться инвариантом, характеризующим энергию взаимодействия.

Накладывая на энергию U требование, чтобы она была линейна относительно функций мезонного поля и не содержала высших производных, мы получаем однозначный ответ для образования $U(x)$.

Особенно просто можно составить выражение для S_3 в квантовой теории, когда нуклеоны подчиняются уравнениям Дирака:

$$(E - \alpha \mathbf{p} - \rho_3 M c^2) \chi = 0,$$

где χ — волновая функция нуклона, $E = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$; $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{2\pi i} \nabla$ являются соответственно оператором энергии и оператором импульса и α , ρ_3 — матрицами Дирака, образованными из четырёхрядных матриц ρ_n и σ_n ($n=1, 2, 3$), удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= -\sigma_2 \sigma_1 = i \sigma_3, & \rho_1 \rho_2 &= -\rho_2 \rho_1 = i \rho_3, \\ \sigma_n^2 &= 1, & \rho_n^2 &= 1, & \rho_n \sigma_{n'} &= \sigma_{n'} \rho_n \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Как известно, из шестнадцати матриц Дирака, образующих группу *), мы можем составить следующие величины:

1) Четырёхмерный вектор:

$$\alpha_\mu = \rho_1 \sigma_\mu, \quad iI.$$

*) Всевозможные произведения и степени матриц равны другим матрицам с точностью до значения коэффициентов, равных $\pm i$ или ± 1 .

Здесь I является единичной матрицей. Точнее, компонентами четырёхмерного вектора являются так называемые матричные элементы

$$\frac{v_\mu}{c} = \int \chi^\dagger \alpha_\mu \chi (d\mathbf{r}),$$

которые равняются отношению компонент четырёхмерной скорости электрона к скорости света.

Если мы введём матрицы $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\sigma_4 = \rho_1 i$, то матрица скорости будет равняться

$$\alpha_\mu = \rho_1 \sigma_\mu.$$

2) Антисимметричный тензор второго ранга при $\mu \neq \nu$ образуется из следующих матриц:

$$\alpha_{\mu\nu} = -i\sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu.$$

Его составляющие будут равны

$$\begin{pmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{31} & \alpha_{12} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_3 \sigma_1 & \rho_3 \sigma_2 & \rho_3 \sigma_3 \\ i\rho_2 \sigma_1 & i\rho_2 \sigma_2 & i\rho_2 \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (46,3)$$

Умножив последнюю матрицу на величину $\frac{eh}{4\pi mc}$, получим значения собственного магнитного (верхняя строка) и электрического момента электрона и других частиц спина $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, описываемых уравнением Дирака.

Вместо компонент антисимметричного тензора $\alpha_{\mu\nu}$ можно ввести компоненты дуального тензора:

$$\tilde{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\sigma\rho} \alpha_{\sigma\rho},$$

причём

$$\tilde{\alpha}_{23} = \alpha_{14} = i\rho_2 \sigma_1,$$

$$\tilde{\alpha}_{14} = \alpha_{23} = \rho_3 \sigma_1.$$

3) Антисимметричный тензор третьего ранга, компоненты которого при разных значениях значков μ, ν и ε равны

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = -\rho_1 \sigma_\mu \rho_3 \sigma_\nu \rho_3 \sigma_\varepsilon.$$

Вместо антисимметричного тензора третьего ранга можно ввести псевдовектор

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{\rho\mu\nu\varepsilon} \tilde{\alpha}_{\rho},$$

причём составляющие псевдовектора

$$\tilde{\alpha}_{\mu} \equiv \sigma_{\mu},$$

т. е. матрицы σ_{μ} , образуют псевдовектор, и в дальнейшем мы их будем писать без значка «тильда» (\sim). Матрицы σ характеризуют спин электрона и других частиц полуцелого спина. Спин $s = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \sigma$.

4) Наконец, мы имеем ещё антисимметричный тензор четвёртого ранга, компоненты которого при различных значениях значков $\mu, \nu, \varepsilon, \rho$ равны

$$\alpha_{\mu\nu\varepsilon\rho} = i\sigma_{\mu\rho 3}\sigma_{\nu\rho 3}\sigma_{\varepsilon\rho 3}\sigma_{\rho} = \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\varepsilon\rho} \tilde{\rho},$$

где псевдоскалярная матрица

$$\tilde{\rho} = \rho_2.$$

Смешанная функция действия S_3 в квантовом случае равна

$$S_3 = - \int \chi^+ U \chi (dx).$$

При переходе к классическому случаю мы должны положить трёхмерную плотность $\chi^+ \chi$ равной

$$\chi^+ \chi = \int \rho (x - x') ds,$$

а вместо матриц Дирака поставить классическое приближение для матричного элемента, например

$$\alpha_{\mu} \rightarrow \int \chi^+ \alpha_{\mu} \chi (dr), \quad (46,4)$$

чем в дальнейшем мы и будем пользоваться.

Энергия взаимодействия U представляет собою инвариант, образованный как сумма инвариантов по правилу: произведение скаляра мезона на скаляр нуклеона плюс вектор мезона на вектор нуклеона и т. д.

При переходе к нерелятивистскому случаю матрицы, пропорциональные ρ_1 и ρ_2 , имеют порядок $\frac{v}{c}$ (например, $\alpha = \rho_1 \sigma = \frac{v}{c}$), и поэтому могут быть отброшены, а матрицы ρ_3 и I следует положить равными единице. Трёхмерный же вектор σ переходит в единичный вектор, характеризующий направление спина нуклеона. Отсюда, например, в случае скалярных мезонов мы имеем для энергии взаимодействия нуклеонов со скалярным полем выражение

$$U = g \rho_3 \Phi + f \alpha_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu},$$

которое в нерелятивистском приближении совпадает с равенством (45,10а).

б) Псевдоскалярное поле

Как было показано в предыдущем параграфе, с помощью скалярного мезонного поля удаётся объяснить короткодействующий характер ядерных сил. Однако скалярное поле не может объяснить возникновения спиновых (центральных и нецентральных) сил, играющих основную роль в ядерном взаимодействии.

К спиновым силам мы можем придти, если введём псевдоскалярное, векторное или псевдовекторное поле (или поле пар фермиевских спинорных частиц).

Поэтому следующий этап теории ядерных сил естественно должен быть связан с исследованием этих полей.

Прежде всего остановимся на анализе псевдоскалярного поля, в основу которого взята псевдоскалярная функция $\tilde{\varphi}$.

Это поле в настоящее время стоит в центре внимания по двум причинам. Во-первых, потому, что π -мезоны, нейтральные и заряженные, принимающие, повидимому, наибольшее участие в переносе ядерных сил, являются по всей вероятности псевдоскалярными. Во-вторых, по тому, что при помощи псевдоскалярного поля с устранённой хотя бы приближённо дипольной трудностью

удаётся дать наилучшее возможное сейчас описание ядерных сил.

Введём антисимметричный тензор четвёртого ранга $\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}$, связанный с псевдоскаляром $\tilde{\varphi}$ соотношением

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varphi}. \quad (46,5)$$

Из тензора четвёртого ранга мы можем образовать также антисимметричный тензор третьего ранга

$$\varphi_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta}}{\partial x_\alpha},$$

связанный с четырьмя компонентами псевдовектора

$$\tilde{\varphi}_\alpha = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_\alpha} \quad (46,5a)$$

соотношением

$$\varphi_{\beta,\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varphi}_\alpha.$$

Полную теорию свободного псевдоскалярного поля, связанного с массой покоя (мезонов), можно развить, исходя из функции Лагранжа, построенной из обычных тензоров и приводящей к линейным уравнениям с наименьшими производными

$$L = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{6} \varphi_{\beta\gamma\delta} \varphi_{\beta\gamma\delta} + \frac{1}{24} k_0^2 \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} \right).$$

При этом мы, как обычно в данном изложении, ограничиваемся вещественным полем, соответствующим нейтральным частицам, которое может быть полностью истолковано классическим путём.

Учитывая соотношения (46,5) и (46,5a), мы можем представить этот лагранжиан в более простом виде через исходный псевдоскаляр $\tilde{\varphi}$ и псевдовектор $\tilde{\varphi}_\alpha$:

$$L = -\frac{1}{8\pi} \left(\tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha + k_0^2 \tilde{\varphi}^2 \right). \quad (46,6)$$

Таким образом лагранжиан псевдоскалярного (мезонного) поля совпадает в случае отсутствия источников (нуклеонов) с лагранжианом скалярного поля.

Поэтому как для волнового уравнения, так и для тензора энергии, спина и т. д. свободных псевдоскалярных частиц оказываются непосредственно применимы результаты, полученные выше для скалярных частиц с соответствующей заменой скаляра φ на псевдоскаляр $\tilde{\varphi}$. В частности, спин псевдоскалярных мезонов, так же как и скалярных, оказывается равным нулю.

Различие между скалярным и псевдоскалярным полями появляется при определении энергии взаимодействия мезонного поля с нуклеонами или же лёгкими частицами, которые все имеют полуцелый спин и описываются спинорными функциями.

Смешанная функция действия S_3 , определяющая взаимодействие мезонного поля с полем нуклеонов, в псевдоскалярном случае имеет вид [см. также (45,10)]

$$S_3 = - \int ds \int \rho(x - x') U(x) (dx). \quad (46,7)$$

Здесь инвариантное выражение взаимодействия U должно равняться сумме произведений псевдоскаляра поля $\tilde{\varphi}$ на псевдоскаляр нуклеонов $\tilde{\rho}_2$ и псевдовектора поля $\tilde{\varphi}_\alpha$ на псевдовектор нуклеонов σ_α , т. е.

$$U = g\rho_2\tilde{\varphi} + f\sigma_\mu\tilde{\varphi}_\mu, \quad (46,8)$$

где ρ_2 и σ_μ представляют классические приближения матриц Дирака [см. (46,4)]. В прежней теории псевдоскалярного поля сразу же совершался переход в этом выражении к нерелятивистскому случаю. При таком переходе псевдоскалярная величина ρ_2 и четвёртая составляющая псевдовектора спина $\sigma_4 = i\rho_1$ имеют порядок $\frac{v}{c}$ и поэтому при нерелятивистском приближённом рассмотрении вообще могут быть отброшены. В классическом случае единичные векторы трёх пространственных составляющих псевдовектора спина мы обозначим через σ_n . Значки тильда у трёхмерного псевдовектора спина мы писать не будем. Следовательно, в классическом нерелятивистском приближении получим

$$U = f\sigma_n\tilde{\varphi}_n.$$

Поэтому окончательно для точечного нуклеона [см. также вывод формулы (45,11)] имеем

$$S_3 = -f \int dt' \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \sigma_n \tilde{\varphi}_n(d\mathbf{r}) dt. \quad (46,9)$$

Отсюда вместо (45,4) и (45,5) можно найти следующие статические уравнения для псевдоскалярного поля, создаваемого точечным нуклеоном, находящимся в начале координат:

$$\left. \begin{aligned} (\nabla^2 - k_0^2) \tilde{\varphi} &= -4\pi f (\sigma \nabla) \delta(\mathbf{r}), \\ V &= f (\sigma \nabla) \tilde{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (46,10)$$

Решение уравнения (46,10) может быть легко найдено с помощью формулы (14,10). Оно имеет вид

$$\tilde{\varphi} = f (\sigma \Delta) \frac{e^{-k_0 r}}{r}.$$

Отсюда для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных нуклеонов, обозначаемых соответственно значками A и B , в псевдоскалярной теории, находим в статическом случае

$$V = f^2 (\sigma_A \nabla) (\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (46,11)$$

Раскрывая последнее выражение, имеем

$$V = f^2 S_{AB} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{k_0}{r} + \frac{k_0^2}{3} \right) \frac{e^{-k_0 r}}{r} + \frac{1}{3} f^2 (\sigma_A \sigma_B) k_0^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \quad (46,12)$$

где

$$S_{AB} = 3 (\sigma_A \mathbf{r}^0) (\sigma_B \mathbf{r}^0) - (\sigma_A \sigma_B) \quad (46,13)$$

и

$$\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Таким образом взаимодействие через псевдоскалярное мезонное поле, обеспечивающее так же, как и в скалярном случае короткодействующий характер сил, определяемый наличием экспоненциального множителя $e^{-k_0 r}$ (обусловленного массой покоя мезонов), приводит, сверх

того, к требуемым спиновым и нецентральным силам между нуклеонами.

Силы эти определяются характерным фактором S_{AB} , появляющимся также в выражении энергии взаимодействия двух магнитных или электрических диполей. При исчезающей массе покоя $k_0 = 0$ или на относительно малых расстояниях всё выражение (46,12) переходит в выражение энергии взаимодействия двух диполей. Таким образом псевдоскалярные силы являются «квазимагнитными».

Однако наряду с этим известным успехом нерелятивистское приближение псевдоскалярной теории приводит по сравнению со скалярной к так называемой дипольной трудности. В самом деле на относительно близких расстояниях $r \rightarrow 0$, превышающих всё же расстояние $\frac{h}{Mc} \sim 10^{-14}$ см, для которых нерелятивистское в нуклеонах приближение имеет смысл, потенциальная энергия, как видно из (46,12), расходится пропорционально r^{-3} , и поэтому согласно теореме вириала (см. § 44) нерелятивистские псевдоскалярные мезонные силы не могут обеспечить устойчивых состояний нуклеонов хотя бы, например, в ядре дейтерона.

В теории векторных сил возникает совершенно аналогичная дипольная трудность. Более тщательный анализ показал, однако, что на самом деле дипольная трудность в псевдоскалярном случае в известном приближении устраняется*).

Рассмотрим сначала скалярное поле и покажем сразу для квантового случая, что путём некоторого касательного (калибровочного) преобразования с функцией S , где $S = -\frac{2\pi i}{hc} f\varphi$, можно устранить из выражения энергии взаимодействия (см. стр. 365):

$$U = g_{\rho\sigma}\varphi + f a_{\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\mu}}$$

все релятивистские члены с константой f .

*) E. C. Nelson, Phys. Rev., 60, 830, 1941; F. J. Dyson, Phys. Rev., 73, 929, 1948; G. Araki, Phys. Rev., 75, 1101, 1262, 1949; K. M. Case, Phys. Rev., 75, 1306, 1949.

Речь идёт по существу о применении известного метода перебрасывания членов взаимодействия из гамильтониана в волновую функцию. Действительно, производя над оператором L преобразование

$$e^{-S} L e^{S} \chi', \quad (46,14)$$

где χ' — новая волновая функция частицы (нуклона), взаимодействующей со скалярным мезонным φ -полем, учитывая, что согласно (45,46) φ коммутирует с φ , $\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ и $\nabla \varphi$ в различных точках, и отбрасывая бесконечные члены самодействия, обремененные совпадающим пространственным точкам, получим в преобразованном уравнении Дирака лишь нерелятивистский член с константой g :

$$\left[D_0 - g \rho_3 \varphi - f \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_n \nabla_n \varphi \right) \right] \chi = \\ = (D_0 - g' \rho_3 \varphi) \chi' = 0, \quad (46,15)$$

где

$$D_0 = -\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{c\hbar}{2\pi i} \alpha_n \nabla_n - \rho_3 M c^2.$$

Таким образом, векторная часть связи со скалярным полем полностью исчезает и не ведёт в любом приближении к каким-либо процессам.

Перейдём к псевдоскалярному случаю, когда энергия взаимодействия нуклона с мезонным полем задана выражением (46,8) и уравнение Дирака имеет вид

$$\left[D_0 - g' \rho_2 \tilde{\varphi} - f \left(\rho_1 \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \sigma_n \nabla_n \tilde{\varphi} \right) \right] \chi = 0. \quad (46,16)$$

Полагая в этом случае

$$S = -\frac{2\pi i}{c\hbar} f' \rho_1 \tilde{\varphi} \quad (46,17)$$

и учитывая правила перестановки матриц ($\nu = 2, 3$) с функцией e^S :

$$\rho_\nu e^S = e^{-S} \rho_\nu = e^S \rho_\nu - e^S (1 - e^{-2S}) \rho_\nu, \quad (46,18)$$

которые проще всего проверить, разлагая e^S в ряд, получим

$$[D_0 - g' \rho_2 \tilde{\varphi} + (1 - e^{\frac{4\pi i}{\hbar c} f' \tilde{\varphi}}) (M c^2 \rho_3 + g \tilde{\varphi} \rho_2)] \chi' = 0. \quad (46,19)$$

Ограничиваясь в последнем уравнении линейными относительно псевдоскалярной функции $\tilde{\varphi}$ членами, получим окончательно выражение энергии взаимодействия без дипольной части. Следовательно, уравнение Дирака для нуклона, взаимодействующего с псевдоскалярным $\tilde{\varphi}$ -полем, в данном приближении будет иметь вид

$$(D_0 - G_{\rho_2} \tilde{\varphi}) \chi' = 0, \quad (46,20)$$

где $G = g + \frac{4\pi M c f}{h}$.

Замечая, что по порядку величины, как следует из эмпирических данных, $f = \frac{g'}{k_0}$, где масса мезона равна $\frac{k_0 h}{2\pi c}$, и что $g \approx g'$, перенормированную константу связи можно представить в виде

$$G = g + \frac{4\pi M c}{h} f = g + \frac{2K_0}{k_0} g', \quad \text{где } M = \frac{K_0 h}{2\pi c}. \quad (46,21)$$

Так как энергия взаимодействия нуклона с псевдоскалярным полем

$$U = G_{\rho_2} \tilde{\varphi} \quad (46,22)$$

имеет по существу тот же вид, что и энергия связи с полем скалярным

$$U = g \rho_3 \varphi \cong g \varphi,$$

то для энергии взаимодействия частиц A и B , подставляя вместо g величину G_{ρ_2} , получим выражение типа (45,21), не содержащее явно дипольных членов

$$V = -G^2 (\rho_2^A \rho_2^B) \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (46,23)$$

Как видно, энергия взаимодействия содержит релятивистские матрицы ρ_2 . Таким образом, мы получили выражение более точное, чем обычные нерелятивистские формулы, поскольку в некотором приближении здесь учтён эффект скоростей нуклонов. Вместе с тем новая формула (46,23) отнюдь не может считаться точным окончательным выражением, как видно уже из анализа про-

деланного выше преобразования, не являющегося к тому же однозначным. Исключение псевдовекторной части, ведущей к дипольному взаимодействию, из псевдоскалярной теории является наиболее существенным успехом общей теории ядерных сил в последнее время. Однако, к сожалению, при этом способе исследования зачёркиваются нецентральные силы, играющие огромную роль в ядерных взаимодействиях.

§ 47. Векторное мезонное поле

а) Основные уравнения

Как было указано выше, уравнения Максвелла время от времени обобщались в различных направлениях. Упомянем, например, нелинейное обобщение, предложенное Борном, или обобщения на высшие производные Боппа-Подольского. В годы построения релятивистской квантовой механики Я. И. Френкель выдвинул идею обобщения максвелловских уравнений добавочными членами, соответствующими наличию покоящейся массы частиц, сопоставленных полю. Последняя задача была окончательно разрешена Прока, установившим некоторую систему уравнений для поля в пустоте, которая была уже использована нами выше в качестве второго поля при рассмотрении теории с высшими производными *). Естественно возникает вопрос о возможности использования векторных уравнений для описания мезонного поля.

Для компонент вещественного векторного мезонного поля выберем электромагнитные обозначения.

Мезонные поля $H_{\mu\nu}$, которые в случае нейтральных мезонов являются вещественными, связаны с четырёхмерным потенциалом $A_\lambda = A$, $i\varphi$ соотношением

$$H_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = A_{\nu, \mu} - A_{\mu, \nu}. \quad (47,1)$$

Компоненты $H_{12} = H_z$ и $H_{41} = iE_x$ будем соответственно называть компонентами квазимагнитной и квазиэлектрической напряжённости поля.

*) А. Прока, Journ. de Phys., 7, 348, 1936.

При отсутствии источников уравнения Максвелла следующим образом обобщаются на случай (мезонного) поля, связанного с массой покоя:

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0^2 A_\mu = 0, \quad (47,2)$$

где k_0 связано с массой μ сопоставленных полю мезонов соотношением $k_0 = \frac{2\pi\mu c}{h}$.

Установленные таким образом векторные уравнения для «тяжёлых» фотонов (нейтральные мезоны) при $k_0 \rightarrow 0$ переходят в обычные максвелловские.

При переходе к трёхмерным обозначениям уравнения (47,2) будем называть уравнениями первой группы. Они принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + k_0^2 \mathbf{A} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (47,3)$$

Точно так же вместо (47,1) мы будем иметь вторую группу векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (47,4)$$

Нетрудно показать, что условие Лорентца

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0 \quad (47,5)$$

получается для векторных мезонов совершенно автоматически. Для этого мы должны уравнение (47,2) продифференцировать по $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ и учесть, что произведение симметричного тензора $\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ на антисимметричный $H_{\mu\nu}$ обращается в нуль.

Напомним, что в электродинамике условие Лорентца представляет собою дополнительное уравнение, которое накладывается на потенциалы, чтобы избежать неопре-

делённости при выборе калибровки. Для «тяжёлых фотонов» потенциалы входят явно в первую группу уравнений, и поэтому уравнения для векторных мезонов не обладают инвариантностью относительно калибровочных преобразований мезонных потенциалов.

Заметим, что сам Прока сперва ошибочно предназначал свои уравнения для релятивистского квантового описания электрона взамен дираковских спинорных уравнений, ведущих к состояниям с отрицательной энергией. Это казалось одно время трудностью, которая была разрешена при помощи гипотезы о позитронах как дырках среди заполненных уровней отрицательной энергии. Открытие позитрона, в согласии с предсказаниями теории, а также взаимного превращения электрона и позитрона в два фотона и обратно, всё более укрепляло уверенность в правильности дираковского уравнения для электрона.

В то же время нами в сотрудничестве с Дурандиным и Ершовым*) было показано, что векторные уравнения описывают частицы бозевского, а не фермиевского типа и поэтому совершенно непригодны для электронов. Позднее было доказано, что кванты векторного поля, как и фотоны, имеют спин 1. Открытие в космических лучах и позднее в лабораторных условиях новых полутяжёлых элементарных частиц—мезонов, некоторые из которых обладают, по всей вероятности, целым спином и подчиняются бозевской статистике, заставляет обратить внимание на векторные уравнения как на возможный способ описания мезонов спина 1. Сейчас известно, что частицы спина 1 могут описываться также при помощи псевдовекторной волновой функции, однако подобная трактовка мезонов оказалась мало пригодной для объяснения ядерных сил. Векторные же уравнения бесспорно стоят всё время в центре теоретической дискуссии вместе с псевдоскалярными и являются отправным пунктом всевозможных вариантов описания мезонов, переносящих ядерные силы.

Теория мезона, учитывая возможность значения спина 0, применяет также уравнение для псевдоскалярной

*) Е. Дурандин и А. Ершов, ЖЭТФ, 8, 5, 1938.

волновой функции (см. предыдущий параграф) наряду с описанием мезона при помощи скалярного уравнения, использованного первоначально Юкава. Как было указано выше, взятое само по себе скалярное уравнение для бесспиновых частиц непригодно, так как не позволяет учесть важных спиновых свойств мезонного поля и поля ядерных сил, которое, по всей вероятности, является мезонным. Конечно, не исключается возможность существования мезонов различных спинов.

Мы остановимся здесь на изложении классической теории нейтрального векторного поля, которая независимо от непосредственной применимости к гипотетическим векторным нейтретто (нейтральные мезоны) спина 1 обладает значительной эвристической силой, позволяя простым и наглядным путём проанализировать многие успехи и трудности теории ядерных сил и получить важные результаты, которые, как оказывается, полностью или по порядку величины сохраняют силу и в квантовой теории нейтральных и заряженных векторных частиц спина единица.

б) Общая теория векторного мезонного поля

С точки зрения теории инвариантов и группы преобразований уравнения для вещественного векторного поля отличаются от максвелловских уравнений классической электродинамики лишь в одном пункте: в теории мезонов отбрасывается требование калибровочной инвариантности (калибровка 2-го рода) потенциалов мезонного поля, поэтому в уравнения могут явно входить сами потенциалы. Иначе говоря, теория векторных мезонов строится при помощи двух фундаментальных инвариантов векторной теории,

$$I_1 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H^{\mu\nu} \quad \text{и} \quad I_2 = -A_\mu A^\mu, \quad (47,6)$$

а не одного первого инварианта I_1 , используемого в теории Максвелла. С другой стороны, в обеих теориях сохраняется условие линейности уравнений, поэтому

инвариант вида $I_2 = (\mathbf{EH})^2$, с помощью которого можно составить лишь нелинейные уравнения, в нашем случае попрежнему не используется. Точно так же в обеих теориях учитывается условие ограничения наименьшими, именно вторыми производными.

Во главу угла всей теории, как обычно, ставится лагранжиан, являющийся линейной комбинацией всех допустимых инвариантов, в данном случае [см. также соотношение (33,14)]

$$L = aI_1 + bI_3 = -\frac{1}{16\pi} H_{\mu\nu} H_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu, \quad (47,7)$$

где для удобства нормировки взято $a=1$, $b = \frac{k_0^2}{8\pi}$.

Лагранжиан позволяет сконструировать все основные величины, характеризующие поле. Прежде всего нетрудно убедиться, что вариационный принцип

$$\delta \int L(d\mathbf{r}) dt = 0 \quad (47,8)$$

действительно приводит к уравнениям (47,2), т. е. система векторных уравнений является эйлеровыми «уравнениями движения», получающимися вариацией L по потенциалам или волновым функциям A_μ , играющим роль обобщённых координат:

$$\frac{\delta L}{\delta A_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = 0. \quad (47,9)$$

Установив функцию Лагранжа, найдём канонический тензор энергии.

Для этого так же, как и в теории Максвелла (см. § 30), воспользуемся тождественным соотношением

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} A_{\lambda,\nu\mu} + \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} A_{\lambda,\mu}.$$

Учитывая далее, что $A_{\lambda,\nu\mu} = A_{\lambda,\mu\nu}$, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} A_{\lambda,\mu} \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\lambda,\nu}} - \frac{\partial L}{\partial A_\lambda} \right) A_{\lambda,\mu}. \quad (47,10)$$

Принимая во внимание равенство (47,9), а также, что в нашем случае

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\lambda, \nu}} = \frac{1}{4\pi} H_{\lambda \nu}, \quad (47,11)$$

преобразуем (47,10) к виду, определяющему закон сохранения тензора плотности энергии — импульса — напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu}^{\text{can}} = 0,$$

причём компоненты канонического тензора энергии равны

$$T_{\mu\nu}^{\text{can}} = \frac{1}{4\pi} A_{\lambda, \mu} H_{\lambda \nu} - \delta_{\mu\nu} L. \quad (47,12)$$

Отсюда видно, что канонический тензор является несимметричным:

$$T_{\mu\nu}^{\text{can}} \neq T_{\nu\mu}^{\text{can}}.$$

Аналогичное заключение было сделано при исследовании максвелловского поля (см. § 30).

Это приводит к тому, что плотность тензора момента количества движения поля

$$M_{[\mu\nu]\lambda} = \frac{i}{c} (x_\mu T_{\nu\lambda} - x_\nu T_{\mu\lambda})$$

не удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} M_{[\mu\nu]\lambda} \neq 0.$$

Закону сохранения так же, как и в случае максвелловского поля удовлетворяет тензор момента, равный

$$M'_{[\mu\nu]\lambda} = M_{[\mu\nu]\lambda} + S_{[\mu\nu]\lambda},$$

причём величину

$$S_{[\mu\nu]\lambda} = -\frac{i}{4\pi c} (A_\mu H_{\nu\lambda} - A_\nu H_{\mu\lambda}) \quad (47,13)$$

следует рассматривать как тензор, описывающий спин мезонного поля (т. е. согласно квантовой теории — мезона).

Поэтому в полной аналогии с электромагнитным (фотонным) полем мы получаем для мезонного поля следующее значение полного спина:

$$\bar{S} = \frac{1}{4\pi c} \int [EA] (dr), \quad (47,14)$$

откуда видно, что спин векторных мезонов так же, как и фотонов, равен единице.

Кроме канонического тензора, мы можем образовать также метрический тензор энергии:

$$T_{\mu\nu}^{\text{met}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (47,15)$$

Для того чтобы вычислить метрический тензор, следует сперва проводить вычисления в произвольной координатной системе и только в конечном результате (в случае $x_4 = ict$) положить: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ [см. соотношение (23,1a)], а определитель, составленный из фундаментального тензора

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix},$$

равным единице.

При произвольном значении метрического тензора $g_{\mu\nu}$ для функции Лагранжа L векторных уравнений будем иметь

$$L = -\frac{1}{16\pi} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} H_{\nu\alpha} H_{\mu\beta} - \frac{k_0^2}{8\pi} g^{\mu\nu} A_{\nu} A_{\mu}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\text{met}} &= \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} L}{\partial g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}} L - \frac{1}{4\pi} g^{\alpha\beta} H_{\nu\alpha} H_{\mu\beta} - \frac{k_0^2}{4\pi} A_{\mu} A_{\nu}. \end{aligned} \quad (47,16)$$

Принимая во внимание известное для метрического тензора соотношение

$$\frac{\partial g}{g \partial g^{\mu\nu}} = -g_{\mu\nu},$$

а также равенство (47,15), находим

$$T_{\mu\nu}^{\text{met}} = \frac{1}{4\pi} H_{\mu\lambda} H_{\lambda\nu} - \frac{k_0^2}{4\pi} A_\mu A_\nu - \delta_{\mu\nu} L. \quad (47,17)$$

Аналогичное выражение для тензора энергии было получено нами при исследовании второго поля уравнений с высшими производными [см. соотношение (33,25)]. Заметим, что при $k_0^2 = 0$ мы получаем метрический тензор (30,24), найденный для электромагнитного поля. В дальнейшем метрический тензор мы будем обозначать без значка met вверху, т. е. $T_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu}^{\text{met}}$.

Метрический тензор является симметричным:

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}.$$

Разность между каноническим и метрическим тензорами, как и сами эти тензоры

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{can}} - T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} A_{\mu,\lambda} H_{\lambda\nu} + \frac{k^2}{4\pi} A_\mu A_\nu = - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{1}{4\pi} A_\mu H_{\nu\lambda},$$

удовлетворяет закону сохранения:

$$\frac{\partial T'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0,$$

и поэтому в полном согласии с вариационными принципами оба тензора отличаются на величину, четырёхмерная расходимость от которой обращается в нуль (см. также § 28).

Из (47,17) найдём плотность энергии или гамильтониан векторного нейтрального поля

$$T_{44} = \frac{1}{8\pi} [E^2 + H^2 + k_0^2 (\varphi^2 + A^2)], \quad (47,18)$$

который является положительно определённым.

Плотность потока энергии, или вектор Умова-Пойнтинга имеет вид

$$\mathfrak{S}_n = icT_{4n},$$

или

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} \{ [EH] + k_0^2 \varphi A \}. \quad (47,19)$$

Наконец, в полной аналогии со скалярным полем мы можем написать значение для скобок Пуассона в релятивистски инвариантном виде.

Так как мы имеем четыре обобщённые координаты (четыре компоненты потенциалов поля), то вместо (45,42) в данном случае получаем при помощи той же основной перестановочной D -функции

$$[A_\mu(r, t); A_\nu(r', t')] = a_{\mu\nu} 4\pi c D(r - r', t - t'). \quad (47,19a)$$

Если бы все координаты поля A_μ были независимыми величинами, то следовало бы естественно положить

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Однако потенциалы A_μ связаны условием Лорентца

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0,$$

поэтому коэффициенты $a_{\mu\nu}$ следует выбрать в таком виде, чтобы правая часть (47,19a) также удовлетворяла условию Лорентца:

$$\frac{\partial a_{\mu\nu} D}{\partial x_\mu} = \frac{\partial a_{\mu\nu} D}{\partial x'_\nu} = 0. \quad (47,20)$$

Для этой цели коэффициенты $a_{\mu\nu}$ следует положить равными:

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x'_\nu}.$$

так как, принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \right) D = 0,$$

мы автоматически удовлетворим при этом равенству (47,20).

Зная четырёхмерные скобки Пуассона для вектор-потенциала, мы можем найти скобки Пуассона для полей $H_{\mu\nu}$, а также трёхмерные скобки Пуассона ($t = t'$). Переход к квантовым уравнениям поля осуществляется путём замены классических скобок Пуассона на квантовые согласно общему правилу (45,43).

Наконец, можно построить также теорию заряженного векторного мезонного поля.

В этом случае функция Лагранжа будет связана с комплексными полями соотношением

$$L = -\frac{1}{8\pi} H_{\mu\nu}^+ H_{\mu\nu} - \frac{k_0}{4\pi} A_\mu^+ A_\mu.$$

Комплексное векторное поле (т. е. заряженные мезоны) может взаимодействовать с электромагнитным полем, что лучше всего описать при помощи добавления к лагранжиану некоторого члена, зависящего от потенциалов электромагнитного поля A_μ^{el} . Этот добавок сводится, как и в случае комплексного скалярного поля, к членам, получающимся благодаря замене четырёхмерного градиента $\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, действующего на мезонные функции A_μ , оператором

$$\nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \frac{2\pi ie}{hc} A_\mu^{el}.$$

Дифференцируя, как обычно, лагранжиан по потенциалам электромагнитного поля, мы получим значение для плотности электрического тока, обусловленного движением заряженных мезонов:

$$j_\nu = \frac{\partial L}{\partial A_\nu^{el}} = \frac{ie}{2hc} (H_{\nu\mu}^+ A_\mu - A_\mu^+ H_{\nu\mu}). \quad (47,21)$$

Лагранжева функция, а следовательно, и вся теория будут инвариантны относительно преобразования калибровки электромагнитных потенциалов, несмотря на явное включение потенциалов (см. также теорию скалярного уравнения).

в) Векторное мезонное поле при наличии нуклеонных источников

Перейдём к установлению полной системы векторных уравнений со включением источников, порождающих поле. Для определённости будем иметь в виду в качестве источников нуклеоны, хотя лёгкие частицы также могут играть эту роль.

Для этой цели, кроме функции действия поля мезонов

$$S_2 = \int L_0(dx),$$

где лагранжиан

$$L_0 = -\frac{1}{16\pi} D_{\mu\nu} D_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu, \quad (47,22)$$

а тензор

$$D_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu},$$

причём

$$\begin{pmatrix} D_{23} & D_{31} & D_{12} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_x & B_y & B_z \\ -iD_x & -iD_y & -iD_z \end{pmatrix},$$

мы должны ввести ещё смешанную функцию действия S_3 , определяющую взаимодействие мезонного поля с нуклонами.

Как и в предыдущих случаях, значение для S_3 запишем в виде

$$S_3 = - \int ds \int f(x-x') U(x) (dx), \quad (47,23)$$

где инвариантное выражение взаимодействия $U(x)$ будет для векторного поля равняться сумме произведений: вектора потенциала A_μ мезонного поля на вектор скорости $\alpha_\mu = \frac{v_\mu}{c}$ нуклеонов и тензора поля $D_{\mu\nu}$ мезонов на тензор $\alpha_{\mu\nu}$, характеризующий квазимагнитный и квазиэлектрический моменты нуклеонов, т. е. *)

$$U = -g\alpha_\mu A_\mu - \frac{1}{2} f\alpha_{\mu\nu} D_{\mu\nu}. \quad (47,24)$$

Других линейных (относительно функций мезонного поля) комбинаций инвариантов, удовлетворяющих также

*) Связь классического приближения величин α_μ и $\alpha_{\mu\nu}$ с соответствующими матрицами Дирака указана формулой (46,4).

условию наименьших (вторых) производных, для энергии взаимодействия векторного поля с нуклеонами не существует.

Для того чтобы провести более глубокий анализ последнего выражения, обратимся опять к выражению смешанного взаимодействия с точки зрения квантовой теории. Выражение (47,24) может быть записано через матрицы Дирака при помощи равенства

$$U = -g \alpha_{\mu} A_{\mu} - \frac{1}{2} f \alpha_{\mu\nu} D_{\mu\nu} = \\ = g (\varphi - (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{A})) - f (\rho_3 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}) + \rho_2 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{D})).$$

Здесь α_{μ} —матрица скорости, а $\alpha_{\mu\nu}$ —матрица магнитного и электрического моментов, связанная с матрицами ρ_2 и ρ_3 и матрицей спина $\boldsymbol{\sigma}$ соотношением (46,3).

Учитывая, что при малых скоростях $\rho_3 \rightarrow 1$, а $\boldsymbol{\alpha}$, $\rho_2 \sim \frac{v}{c}$, имеем следующее выражение для U , пригодное в нерелятивистском приближении:

$$U(x) = g\varphi - f(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}),$$

причём в классическом пределе под $\boldsymbol{\sigma}$ следует понимать единичный вектор, характеризующий направление спина.

Поэтому в нерелятивистском приближении для точечного нуклеона имеем

$$S_3 = - \int dt' \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') U(\mathbf{r}, t) (d\mathbf{r}) dt.$$

Отсюда для потенциальной энергии взаимодействия нуклеона с мезонным полем находим

$$V = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') U(\mathbf{r}, t) (d\mathbf{r}) dt = \\ = U(\mathbf{r}', t') = g\varphi - f(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}), \quad (47,25)$$

где волновые функции φ и \mathbf{B} зависят от координат нуклеона \mathbf{r}' , t' .

Функция действия мезонного поля с учётом энергии взаимодействия с нуклеонами будет равна

$$S = S_2 + S_3 = \int L(dx),$$

где

$$L = -\frac{1}{16\pi} D_{\mu\nu} D_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} A_\mu A_\mu + \\ + \int ds_\nu (x - x') \left(g x_\mu A_\mu + \frac{1}{2} f \alpha_{\mu\nu} D_{\mu\nu} \right). \quad (47,26)$$

С помощью уравнений Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0$$

находим основную систему векторных уравнений мезонного поля при наличии источников

$$\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0^2 A_\mu = 4\pi j_\mu, \quad (47,27)$$

$$H_{\mu\nu} = 4\pi \frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}} = D_{\mu\nu} - 4\pi S_{\mu\nu}, \quad (47,28)$$

причём тензор квазимагнитного момента и вектор тока нуклеонов соответственно равны

$$S_{\mu\nu} = f \int \rho (x - x') \alpha_{\mu\nu} ds, \\ j_\nu = g \int \rho (x - x') \alpha_\nu ds.$$

При переходе к трёхмерным обозначениям введём следующие векторы:

1) вектор квазимагнитной \underline{H} и квазиэлектрической напряжённости

$$H_x = H_{23}; \quad E_x = -iH_{41},$$

2) вектор квазимагнитной и квазиэлектрической индукции

$$B_x = D_{23} = \text{rot}_x A; \quad D_x = -iD_{41} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

3) вектор квазимагнитной и квазиэлектрической поляризации

$$S_x = S_{23}, \dots; \quad T_x = iS_{41}, \dots$$

Тогда уравнения (47,27), образующие так называемую первую группу векторных уравнений, примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + k^2 \mathbf{A} &= 4\pi \mathbf{j}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \varphi &= 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (47,29)$$

где \mathbf{j} , $i\rho$ образуют в совокупности четырёхмерный ток.

Точно так же для второй группы векторных уравнений (47,28) мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{S}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{D} + 4\pi \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (47,30)$$

При исчезающей массе покоя $k_0^2 \rightarrow 0$ мы получаем уравнения для электромагнитного поля в более общем виде, чем в электродинамике, поскольку магнитные моменты электронов согласно релятивистской квантовой механике возникают благодаря своеобразному движению заряда и равны магнетону Бора $\mu_e = \frac{eh}{4\pi mc}$. В первоначальной теории Дирака дополнительные моменты (\mathbf{S} и \mathbf{T}) просто не вводились (более подробно см. дополнение). Всё же наша теория целиком применима для электродинамики, если положить $k_0^2 = 0$, а у источников наряду с кинематическим моментом ввести ещё врождённый момент, как это имеет место, например, у протонов, магнитный момент которых больше, чем ядерный магнетон Бора μ_0 , т. е. равняется сумме кинематического и врождённого моментов, или у нейтронов, обладающих только врождённым магнитным моментом (см. § 44).

Заметим, что врождённые магнитные моменты нуклеонов имеют порядок ядерного магнетона Бора

$$\mu_0 \sim \frac{eh}{4\pi Mc},$$

так как в знаменателе стоит масса нуклеонов M . Поэтому у частиц, обладающих зарядом и магнитным моментом (протон), магнитные свойства особенно сильно начинают сказываться лишь в области, релятивистской относительно нуклеонов.

В мезодинамике, для того чтобы квазимагнитные (т. е. нецентральные) и квазиэлектрические силы имели одинаковый порядок в нерелятивистской относительно нуклеона области, необходимо положить

$$f \sim \frac{gh}{4\pi\mu c} \sim \frac{g}{k_0},$$

т. е. в знаменателе поставить не массу нуклеона M , а массу мезона μ .

В случае, если векторное мезонное поле порождается какими-то лёгкими частицами (электронами, позитронами, нейтрино и т. д.), то в правых частях вместо членов, описывающих нуклеоны, следует включить совершенно аналогичные члены, характеризующие соответственные лёгкие частицы, заменив заряды g и моменты f на новые константы связи g' и f' .

Если всё же принять предварительную гипотезу Юкава в виде своеобразного феноменологического описания β -распада, то согласно данным теории β -распада мы должны положить константы связи заряженных мезонов с электронно-нейтринным полем равными:

$$g' = 10^{-8}g; \quad f' \sim \frac{g'}{k_0}.$$

Не исключена возможность, что нейтральные ядерные мезоны распадаются на пару частиц (электрон—позитрон) или на два γ -кванта (например, π_0 -мезоны). Поэтому следовало бы ожидать непосредственного испускания пар частиц или γ -лучей некоторыми нестабильными ядрами.

г) Векторные ядерные силы

Для нахождения энергии взаимодействия между двумя покоящимися нуклеонами следует найти величину мезонного поля, создаваемого одним нуклеоном, и подставить её в выражение энергии связи другого нуклеона с мезонным полем.

В случае точечного нуклеона, покоящегося в начале координат, имеем согласно (47,28)

$$\rho = g\delta(r), \quad \mathbf{S} = f\boldsymbol{\sigma}_A\delta(r),$$

где σ_A — единичный вектор, определяющий направление спинового, и тем самым магнитного момента первого нуклона. В согласии с эмпирическими данными предположим, что нуклоны обладают одинаковыми квазизарядами.

Для покоящегося нуклона ток \mathbf{j} , а также компоненты тензора квазиэлектрического момента обращаются в нуль ($\mathbf{j} = \mathbf{T} = 0$).

Если нуклон приходит в движение, то компоненты четырёхмерного тока j_μ , а также тензоры квазимагнитного и квазиэлектрического моментов могут быть легко выражены через покоящиеся компоненты по правилам тензорного анализа, причём будем иметь $\mathbf{j} \sim \frac{v}{c} \rho$ и $\mathbf{T} \sim \frac{v}{c} S$.

В статическом случае уравнения для мезонного поля, порождённого точечным нуклоном, принимают вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{A} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \varphi &= 4\pi g \delta(\mathbf{r}), \\ \mathbf{E} + \operatorname{grad} \varphi &= 0, \\ \mathbf{H} - \operatorname{rot} \mathbf{A} &= -4\pi f \sigma_A \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Условие Лорентца принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Исключая из последних уравнений мезонные поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , получим следующие дифференциальные уравнения для определения потенциалов, которые обобщают благодаря членам с k_0 обычные соотношения электростатики и магнетостатики:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - k_0^2) \varphi &= -4\pi g \delta(\mathbf{r}), \\ (\nabla^2 - k_0^2) \mathbf{A} &= -4\pi f \operatorname{rot} \sigma_A \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Решение последних уравнений согласно § 14 имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= g \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \\ \mathbf{A} &= f \operatorname{rot} \left(\sigma_A \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right). \end{aligned}$$

Отсюда согласно (47,25) находим для энергии взаимодействия двух нуклонов через вещественное векторное поле, связанное с массой покоя (т. е. через нейтральные векторные мезоны)

$$V = g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} - f^2 \left(\sigma_B \operatorname{rot} \operatorname{rot} \sigma_A \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right).$$

Принимая во внимание векторные тождества

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\sigma_A \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right) &= - \left[\sigma_A \operatorname{grad} \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right], \\ - \operatorname{rot} \left[\sigma_A \operatorname{grad} \frac{e^{-k_0 r}}{r} \right] &= - \sigma_A \nabla^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} + \nabla (\sigma_A \nabla) \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \\ \nabla^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} &= k_0^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} \quad (r \neq 0), \end{aligned} \quad (47,31)$$

получаем

$$V = g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} + f^2 [k_0^2 (\sigma_A \sigma_B) - (\sigma_A \nabla) (\sigma_B \nabla)] \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (47,32)$$

Раскрывая последнее выражение, находим

$$\begin{aligned} V &= g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} + \\ &+ f^2 \left[\frac{2}{3} k_0^2 (\sigma_A \sigma_B) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{k_0}{r} + \frac{k_0^2}{3} \right) S_{AB} \right] \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \end{aligned} \quad (47,33)$$

причём множитель S_{AB} определяется формулой (46,13).

Первый квазиэлектрический член взаимодействия, пропорциональный g^2 , совпадает (с точностью до знака) с энергией взаимодействия в скалярном случае.

Второй член, пропорциональный f^2 , даёт квазиманнитную, дипольную энергию взаимодействия. На больших расстояниях $r > \frac{1}{k_0}$ благодаря наличию множителя $e^{-k_0 r}$ всё взаимодействие быстро исчезает, так что в соответствии с ожиданием силы имеют короткодействующий характер.

На малых расстояниях ($r < \frac{1}{k_0}$), что соответствует стремлению k_0 к нулю, первый член, как и в скалярном случае, приобретает чисто кулонову форму

$$V_1 = \frac{g^2}{r},$$

а второй член (как и в псевдоскалярном нерелятивистском случае) при $k_0 \rightarrow 0$ принимает вид энергии взаимодействия двух магнитных диполей, обеспечивая наличие спиновых и нецентральных сил ($m_A = f\sigma_A$ и $m_B = f\sigma_B$):

$$V_2 = - (m_A \nabla) (m_B \nabla) \frac{1}{r}.$$

Благодаря нейтральности поля взаимодействие вида (47,33) имеет место между любыми двумя нуклеонами (протон—нейтрон, протон—протон, нейтрон—нейтрон), что ведёт к зарядной независимости сил.

Подчеркнём теперь, что квантовая механика при переносе взаимодействия нейтральным векторным мезонным полем воспроизводит при помощи подсчёта во втором приближении точно то же выражение энергии взаимодействия между любыми нуклеонами.

При переносе взаимодействия заряженными векторными мезонами (комплексное поле), так же как для случая заряженного скалярного или псевдоскалярного поля, добавляется лишь специфический множитель P — оператор гейзенберговского обмена нуклеонов зарядами, который по абсолютному значению при взаимодействии протона с нейтроном обращается в единицу, а при взаимодействии между двумя протонами или двумя нейтронами — в нуль. Тогда энергия взаимодействия различных нуклеонов, обязанная заряженному векторному полю, оказывается равной $V' = VP$, где V определяется через (47,33).

Для получения же взаимодействия через заряженные мезоны между одинаковыми нуклеонами нужно, как и в случае скалярного, псевдоскалярного и других полей, провести подсчёт в четвёртом приближении квантовой теории возмущения, что приводит к выражениям, существенно отличающимся от величины энергии взаимодействия между

протонами и нейтронами, получающейся в результате подсчёта во втором приближении.

Так как эмпирические факты говорят за примерную зарядную независимость хотя бы порядка ядерных сил, то следует заключить, что, по крайней мере, некоторая доля взаимодействия между нуклеонами должна осуществляться через нейтральное мезонное поле. С другой стороны, заряженные мезоны также несомненно участвуют в переносе взаимодействия, так как, повидимому, только они могут обеспечить обменный характер сил между протоном и нейтроном, требуемый опытами по рассеянию при высоких энергиях, и обеспечивающий насыщение.

Обычно берут смесь заряженных и нейтральных мезонов в пропорции, которая подбирается из эмпирических соображений и окончательно ещё не установлена (подробнее см. § 48).

Существенным преимуществом векторных мезонных сил, так же как и нерелятивистских псевдоскалярных, над скалярными является наличие в энергии взаимодействия нуклеонов квазимагнитного члена с фактором S_{AB} , приводящим к спиновым силам в качественном согласии с эмпирикой ядерных сил*).

Не удивительно поэтому, что в современной теории ядерных сил оба эти поля применяются наиболее часто. Вместе с тем, однако, эти же квазимагнитные члены ведут к серьёзной «дипольной» трудности для векторных сил.

Действительно, ввиду недопустимо быстрого роста потенциальной энергии на малых расстояниях,

$$r \rightarrow 0 \left(V \propto \frac{1}{r^3} \right),$$

устойчивые состояния согласно теореме вириала (см. § 44) оказываются невозможными. При конкретных подсчётах ядерных эффектов приходится поэтому обрезать потен-

*) Как было недавно показано (L. van Nove, Phys. Rev., 75, 1519, 1949), дипольные члены сохраняются для векторного поля даже после своеобразных калибровочных преобразований (см. § 46), в противоположность исчезновению их для псевдоскалярного поля.

циал векторных или псевдоскалярных мезонных сил при некотором r_0 , порядка 10^{-13} см, определяя более точно границу обрезания из эмпирических данных и подбора потенциала при $r < r_0$ (например, $V = \text{const}$ или $V = 0$). Конечно, подобное положение вещей совершенно неудовлетворительно и является до последнего времени наиболее серьёзной трудностью всей теории ядерных сил.

Заметим, что при рассеянии мезонов на нуклонах, обязанном специфическим ядерным силам, эти же дипольные члены приводят также к трудностям — безграничному росту эффективного сечения.

До настоящего времени не существует универсального способа разрешения дипольной трудности одновременно и в теории взаимодействия и в теории рассеяния векторных мезонов; калибровочное преобразование, которое позволило устранить дипольные члены в псевдоскалярном случае, в векторном и псевдовекторном случаях приводит в лучшем случае лишь к исключению продольной части поля. Это соответствует тому обстоятельству, что квантовый релятивистский подсчёт, учитывающий скорости нуклонов до второго порядка, в векторном случае сохраняет члены типа r^{-3} .

В последующих параграфах мы остановимся на некоторых попытках устранения этих трудностей как в задаче взаимодействия, так и в задаче рассеяния.

§ 48. Псевдовекторное поле. Дипольные трудности

а) Псевдовекторное мезонное поле .

Рассмотрим в заключение ещё вещественное псевдовекторное мезонное поле, в основу которого положен вещественный псевдовектор \tilde{A}_α .

Для того чтобы описать псевдовекторное поле, введём прежде всего антисимметричный тензор третьего ранга $A_{\alpha\beta\gamma}$, из которого мы можем образовать антисимметричный тензор второго ранга

$$D_{\beta\gamma} = -\frac{\partial A_{\alpha\beta\gamma}}{\partial x_\alpha}. \quad (48,1)$$

Антисимметричный тензор $A_{\alpha\beta\gamma}$ связан с псевдовектором

\tilde{A}_δ соотношением

$$A_{\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{A}_\alpha.$$

Точно так же вместо тензора $D_{\alpha\beta}$ можно ввести псевдотензор или дуальный тензор $\tilde{D}_{\gamma\delta}$, причём

$$D_{\gamma\delta} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{D}_{\alpha\beta}.$$

Подставляя последние соотношения в равенство (48,1), получаем уравнение

$$\frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{D}_{\alpha\beta} = - \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial \tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta}$$

с решением

$$\tilde{D}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{A}_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \tilde{A}_\alpha}{\partial x_\beta}.$$

Функция Лагранжа, приводящая к линейным уравнениям с наимизшими производными, должна иметь вид

$$L = - \frac{1}{16\pi} D_{\mu\nu} D_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{48\pi} A_{\mu\nu} A_{\mu\nu}.$$

Подставляя сюда вместо тензоров псевдотензорные величины, получим

$$L = - \frac{1}{16\pi} \tilde{D}_{\mu\nu} \tilde{D}_{\mu\nu} - \frac{k_0^2}{8\pi} \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\mu. \quad (48,2)$$

Отсюда видно, что функция Лагранжа при отсутствии источников псевдовекторного поля совпадает с функцией Лагранжа векторного поля.

Поэтому как для волнового уравнения, так и для тензора энергии, спина и т. д. полностью применимы результаты теории векторного поля при условии, что мы должны заменить векторные величины соответственно на псевдовекторные. В частности, поэтому спин псевдовекторного поля должен равняться единице.

Различие между обоими полями появляется при определении энергии взаимодействия между нуклеонами и мезонным полем.

Смешанная функция действия S_3 будет иметь вид

$$S_3 = - \int ds \int \rho(x-x') U(x) (dx), \quad (48,3)$$

где инвариантный член взаимодействия $U(x)$ должен в общем случае равняться сумме произведений: псевдовектора нуклеонов на псевдовектор поля и псевдотензора нуклеонов на псевдотензор поля, т. е. согласно § 46а:

$$\begin{aligned} U(x) &= -g\tau_\mu \tilde{A}_\mu - \frac{i}{2} \tilde{f} \alpha_{\mu\nu} \tilde{D}_{\mu\nu} = \\ &= g(\rho_1 \tilde{\varphi} - (\sigma \tilde{A})) - f(\rho_3 (\sigma \tilde{D}) - \rho_2 (\sigma \tilde{B})), \end{aligned}$$

где $\tilde{D}_{23} = \tilde{B}_x$; $\tilde{D}_{14} = -i\tilde{D}_x$ и так далее.

Отсюда для псевдовекторных мезонов вместо (47,27) и (47,28) мы получаем следующие уравнения: первая группа уравнений:

$$\frac{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + k_0^2 \tilde{A}_\mu = 4\pi \tilde{j}_\mu,$$

вторая группа:

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = 4\pi \frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_{\mu,\nu}} = \tilde{D}_{\mu\nu} - 4\pi \tilde{S}_{\mu\nu},$$

где

$$\tilde{j}_\mu = g \int \rho(x-x') \sigma_\mu ds,$$

$$\tilde{S}_{\mu\nu} = if \int \rho(x-x') \tilde{\alpha}_{\mu\nu} ds.$$

В статическом случае для поля, создаваемого точечным нуклеоном, покоящимся в начале координат, имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot } \tilde{H} + k_0^2 \tilde{A} &= 4\pi g \sigma_A \delta(r), \\ \text{div } \tilde{E} + k_0^2 \tilde{\varphi} &= 0, \\ \tilde{E} + \text{grad } \tilde{\varphi} &= 4\pi f \sigma_A \delta(r), \\ \tilde{H} - \text{rot } \tilde{A} &= 0. \end{aligned} \quad (48,4)$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{H}} \equiv 0$, находим вместо условия Лорентца

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{A}} = \frac{4\pi g}{k_0^2} \operatorname{div} \sigma_A \delta(r) = \frac{4\pi g}{k_0^2} \sigma_A \nabla \delta(r).$$

Исключая из последних уравнений векторы $\tilde{\mathbf{H}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ и принимая во внимание модифицированное условие Лорентца, находим дифференциальные уравнения для определения компонент полей $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{D}}$:

$$(\nabla^2 - k_0^2) \tilde{\mathbf{A}} = \frac{4\pi g}{k_0^2} [\nabla (\nabla \sigma_A) \delta(r) - k_0^2 \sigma_A \delta(r)],$$

$$(\nabla^2 - k_0^2) \tilde{\mathbf{D}} = -4\pi f \nabla (\nabla \sigma_A) \delta(r),$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = -\operatorname{grad} \varphi$. Их решение мы можем представить в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= -\frac{g}{k_0^2} [\nabla (\nabla \sigma_A) - \sigma_A k_0^2] \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \\ \tilde{\mathbf{D}} &= f \nabla (\nabla \sigma_A) \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \end{aligned} \quad (48,5)$$

Наконец, чтобы найти энергию взаимодействия двух точечных нуклеонов, следует подставить значения полей, создаваемых нуклеоном A , в энергию V взаимодействия нуклеона B с этим мезонным полем.

Как видно из (48,3), энергия взаимодействия равна

$$V = \int \rho(x - x') U(x) (dx) = U(x'),$$

т. е. в нерелятивистском случае:

$$V = -g (\sigma_B \tilde{\mathbf{A}}) - f (\sigma_B \tilde{\mathbf{D}}), \quad (48,6)$$

где σ_B — единичный вектор, характеризующий направление спина нуклеона B .

Подставляя (48,5) в (48,6), находим значение для искомой энергии взаимодействия двух нуклеонов через нейтральное псевдовекторное поле в нерелятивистском

приближении для нуклеонов, т. е. на расстояниях $r \gg \frac{h}{Mc}$:

$$V = \frac{g^2}{k_0^2} [(\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla) - k_0^2 (\sigma_A \sigma_B)] \frac{e^{-k_0 r}}{r} - f^2 (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_0 r}}{r}. \quad (48,7)$$

При переносе сил заряженным полем энергия взаимодействия нуклеонов будет равна $V' = VP$, где P — оператор обмена зарядом.

Члены, содержащие нецентральные силы $\sim (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla)$, приводят к тем же дипольным трудностям ($V \sim r^{-3}$ при $r \rightarrow 0$), о которых мы упоминали при исследовании псевдоскалярного и векторного полей.

б) Общая форма взаимодействия нуклеонов

Резюмируя предыдущие параграфы, мы видим, что статический закон взаимодействия между двумя нуклеонами (A и B), обязанный нейтральному мезонному полю, согласно классической и квантовой теории должен иметь в нерелятивистском приближении вид:

1) для скалярных мезонов:

$$V_1 = -g_1^2 \frac{e^{-k_1 r}}{r}, \quad (48,8)$$

2) для псевдоскалярных мезонов:

$$V_2 = f_2^2 (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_2 r}}{r}, \quad (48,9)$$

2а) для них же при некотором релятивистском уточнении

$$V'_2 = -G^2 \rho_2^A \rho_2^B \frac{e^{-k_2 r}}{r},$$

3) для векторных мезонов:

$$V_3 = g^2 \frac{e^{-k_3 r}}{r} + f_3^2 [k_3^2 (\sigma_A \sigma_B) - (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla)] \frac{e^{-k_3 r}}{r}, \quad (48,10)$$

4) для псевдовекторных мезонов:

$$V_4 = \frac{g_4^2}{k_4^2} [(\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla) - k_4^2 (\sigma_A \sigma_B)] \frac{e^{-k_4 r}}{r} - f_4^2 (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_4 r}}{r}. \quad (48,11)$$

В случае взаимодействия через заряженные мезоны квантовая теория приводит к тем же выражениям, но умноженным ещё на оператор P обмена нуклонов зарядами, иначе говоря, координатами и спинами.

Здесь для общности мы учли, что каждый сорт мезонов в общем случае может иметь различные массы.

Для ясности выпишем снова выражение энергии взаимодействия двух покоящихся нуклонов одновременно через мезонное поле всех четырёх типов ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_0$), отделяя бесспиновые и спиновые центральные и нецентральные силы:

$$V = [C_1 + C_2 (\sigma_A \sigma_B) + C_3 (\sigma_A \nabla)(\sigma_B \nabla)] \frac{e^{-k_0 r}}{r}.$$

С точки зрения обменного характера нейтральные скалярные силы являются вигнеровскими, заряженные скалярные силы — гейзенберговскими. Спиновые члены вида $(\sigma_A \sigma_B)$ в векторном, псевдовекторном и нерелятивистском псевдоскалярном случаях приводят для нейтральных полей к бартлеттовским силам, так как оператор обмена спинами согласно Дираку равен $P_\sigma = \frac{1 + (\sigma_A \sigma_B)}{2}$.

Майорановские силы возникают лишь при обмене нуклонов заряженными частицами, притом для всех полей, кроме скалярного, так как обмен одними координатами эквивалентен гейзенберговскому обмену координатами и спинами, скомбинированному с бартлеттовским обменом одними спинами.

Простейший закон взаимодействия, обязанный скалярным мезонам, объясняя короткодействующий характер сил, не приводит к спиновой зависимости и поэтому должен быть оставлен.

К спиновым и нецентральным силам приводят три остальных типа мезонов в нерелятивистском приближе-

нии. При релятивистском подсчёте, учитывающем скорости нуклеонов до второго порядка, дипольные члены, как было показано в псевдоскалярном случае, выпадают.

К сожалению, с появлением нецентральных сил возникают дипольные трудности, так как характерное выражение

$$(\sigma_A \nabla) (\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_0 r}}{r} = S_{AB} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{k_0}{r} + \frac{k_0^2}{3} \right) \frac{e^{-k_0 r}}{r} + \frac{1}{3} (\sigma_A \sigma_B) k_0^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r} \quad (48,12)$$

[см. также (46,12)] содержит члены, пропорциональные r^{-3} , а согласно теореме вириала при этом не могут возникнуть устойчивые состояния.

Было предложено также взять нерелятивистскую комбинацию псевдоскалярных и векторных мезонов*), полагая

$$k_2 = k_3, \quad f_2 = f_3.$$

В этом случае закон взаимодействия принимает вид

$$V = V_2 + V_3 = g_3^2 \frac{e^{-k_3 r}}{r} + f_3^2 k_3^2 (\sigma_A \sigma_B) \frac{e^{-k_3 r}}{r},$$

в котором также выпадают нецентральные силы.

Этот приём может быть использован безразлично как в теории нейтральных, так и заряженных полей. Однако тем самым устраняется возможность объяснения квадрупольного момента дейтерона через нецентральные силы. Меллер и Розенфельд надеялись получить нецентральные силы в виде небольшого добавка при учёте релятивистских поправок. Однако, как показали дальнейшие расчёты, релятивистские поправки дают слишком малое значение для квадрупольного момента.

Швингер**) предложил некоторое видоизменение подобной смеси, взяв векторные и псевдоскалярные мезоны с разными массами, но попрежнему полагая $f_2 = f_3$.

*) C. Möller and L. Rosenfeld, Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-fys. Medd., 17, № 8 (1940).

**) J. Schwinger, Phys. Rev., 61, 387, 1942.

Тогда опасные дипольные члены $\propto r^{-3}$ исчезают, а знак тензорного дипольного взаимодействия определяется разностью масс.

Действительно, в этом случае мы имеем

$$V = V_2 + V_3 = [g_3^2 + f_3^2 k_3^2 (\sigma_A \sigma_B)] \frac{e^{-k_3 r}}{r} - \\ - f_3^2 (\sigma_A \nabla) (\sigma_B \nabla) \frac{e^{-k_3 r} - e^{-k_2 r}}{r} \quad (48,13)$$

или, принимая во внимание соотношение (48,12), найдём, что когда $r \rightarrow 0$,

$$V = [g_3^2 + f_3^2 k_3^2 (\sigma_A \sigma_B)] \frac{1}{r} + \\ + \frac{f_3^2}{6} (k_3^2 - k_2^2) \frac{1}{r} [S - 2 (\sigma_A \sigma_B)], \quad (48,14)$$

причём согласно (46,13)

$$S_{AB} = 3 (\sigma_A \lambda^0) (\sigma_B \lambda^0) - (\sigma_A \sigma_B).$$

При решении задачи дейтерона с таким потенциалом оказалось лучше всего положить в случае заряженного поля $g_3 = 0$, а отношение масс $\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{k_3}{k_2}$ взять равным примерно 1,6. Тогда для квадрупольного момента мы получаем правильный знак, но слишком малое значение, почти в три раза меньше экспериментального.

Другой весьма предварительный способ устранения опасных дипольных членов заключается в обрезании потенциала на некотором малом расстоянии r_0 , причём в промежутке $(0 - r_0)$ потенциальная энергия берётся либо постоянной $V = V(r_0) = \text{const}$, либо равной нулю.

Совершенно очевидно, что эта процедура является неудовлетворительной с принципиальной точки зрения: например, она нарушает релятивистскую инвариантность. Однако в некоторой мере обрывание потенциала соответствует, повидимому, учёту какого-то эффективного «радиуса» частиц и не является физически совершенно абсурдным. Критический радиус действия сил r_0 подбирается из сравнения выводов теории с эмпирическими данными в применении, например, к дейтерону.

В случае векторных нейтральных сил Бете получил значение для $r_0 \sim 0,32 - 0,4 \frac{h}{\mu c}$, причём это значение практически не зависит от выбора потенциала при $r < r_0$: $V = 0$ или $V = V(r_0)$.

Заметим, что дипольные члены могут быть устранены автоматически в теории ядерных сил путём введения уравнений с высшими производными*), типа предложенных в теории электромагнитного поля.

В этом случае основное статическое уравнение для определения потенциала, создаваемого единичным точечным зарядом

$$(\nabla^2 - k_0^2) f = 4\pi\delta(r) \quad (48,15)$$

с решением

$$f = -\frac{e^{-k_0 r}}{r}, \quad (48,15a)$$

должно быть заменено уравнением четвёртого порядка:

$$(\nabla^2 - k_1^2)(\nabla^2 - k_2^2) f_2 = -4\pi(k_1^2 + k_2^2)\delta(r).$$

Решение последнего уравнения можно представить в виде

$$f_2 = -\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_2^2 - k_1^2} \frac{e^{-k_1 r} - e^{-k_2 r}}{r}. \quad (48,16)$$

Это выражение при $k_2 \rightarrow \infty$ переходит в потенциал Юкава:

$$f_\infty = -\frac{e^{-k_1 r}}{r},$$

а при $k_1 = 0$ даёт потенциал

$$f_0 = -\frac{1 - e^{-k_2 r}}{r},$$

найденный Боппом и Подольским в их обобщённой электродинамике (см. § 33).

Развивая теорию высших производных для скалярных, псевдоскалярных и т. д. частиц, мы легко можем получить для энергии взаимодействия между нуклеонами

*) Д. И в а н е н к о и А. С о к о л о в, ЖЭТФ, 14, 379, 1944.

законы типа (48,8—48,11), в которых вместо потенциала (48,15а) мы должны подставить потенциал (48,16).

Как видно из анализа формулы (48,13), в этом случае дипольные члены как в псевдоскалярном, так и векторном взаимодействии должны исчезнуть.

К сожалению, теория высших производных встречает затруднения при обобщении на квантовый случай, так как частицы с большей массой ($k_2 > k_1$) должны обладать отрицательной энергией (см. также § 33).

Нетрудно сообразить, что, вводя в дифференциальные уравнения ещё более высокие производные

$$(\nabla^2 - k_1^2)(\nabla^2 - k_2^2) \dots (\nabla^2 - k_n^2) f = \\ = -4\pi (-1)^n k_1^2 k_2^2 \dots k_n^2 \left(\frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} + \dots + \frac{1}{k_n^2} \right) \delta(\varrho),$$

мы можем описать поведение частиц с различными массами ($k_1 < k_2 < \dots < k_n$). Так же как и в случае двух масс, функция Грина уравнений с высшими производными будет равняться линейной комбинации функций Грина уравнений второго порядка вида (48,15)*).

Наряду с этим в теории ядерных сил существенно учесть то обстоятельство, что константы связи нуклеонов с мезонным полем или мезонные квазизаряды нуклеонов g велики по сравнению с зарядом e , иначе говоря, соответственные мезонные постоянные тонкой структуры $\beta = \frac{2\pi g^2}{hc} \approx \frac{1}{5}$

превышают зоммерфельдовскую постоянную тонкой структуры $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \sim \frac{1}{137}$. Благодаря этому связь нуклеонов с мезонным полем является сильной, и квантовые подсчёты, использующие метод возмущений, ведут к плохой сходимости, причём вероятности эффектов высшего порядка не намного меньше, чем для эффектов низшего порядка. Попытка построить теорию сильной связи привела к интересному предсказанию высших возбуждённых состояний нуклеонов, несколько отличных по массе от основ-

*) Более подробно на этом вопросе мы остановимся в дополнении.

ного изобара и обладающих как высшими спинами ($3/2$, $5/2$, ...), так и любыми зарядами ($+2e$, $+3e$..., а также $-e$, $-2e$, $-3e$, ...). Последовательной релятивистской теории сильной связи, использующей модель протяжённого нуклона, дать ещё, однако, не удалось, и все подсчёты ведутся сейчас по обычному методу возмущений, пригодному лишь при слабой связи частиц с полем.

Наконец, остановимся на эмпирических формулах ядерного взаимодействия, которые были специально подобраны для объяснения некоторых явлений, связанных с взаимодействием между нуклонами.

Анализ эмпирических данных показывает, что при энергиях взаимодействия, меньших чем примерно 7 MeV , точной радиальной зависимости короткодействующего ядерного взаимодействия установить невозможно, но в то же время удаётся установить эффективную область действия сил и наличие нецентральных и спиновых членов.

Многие количественные результаты, связанные с взаимодействием протона с нейтроном в таких явлениях, как проблема дейтерона, квадрупольный момент дейтерона, рассеяние нейтронов протонами (с энергией, меньшей чем $7 - 10 \text{ MeV}$), могут быть получены, если предположить, что радиальная часть потенциальной энергии, включающей спиновые члены, имеет вид прямоугольной ямы *)

$$V = - \left[1 - \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}g(\sigma_A \sigma_B) + \gamma S_{AB} \right] J(r), \quad (48,17)$$

$$\text{где } J(r) = \begin{cases} -13,89 \text{ MeV} & \text{при } r < 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см,} \\ 0 & \text{при } r > 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см,} \end{cases}$$

$g = 0,0715$, $\gamma = 0,775$ и S_{AB} — тензорный член, описывающий нецентральное взаимодействие, определяемый формулой (46,13). Формула (48,17) годится только для описания чётных состояний (например S -состояния) и обобщается на другие случаи в зависимости от того или иного предполагаемого характера обменных сил.

Для дальнейшего уточнения характера ядерных сил весьма важными являются эксперименты по рассеянию

*) Более подробно см. Г. Бете, Лекции по теории ядра, ИЛ, 1949, стр. 109.

быстрых (порядка 50 — 300 MeV) нуклеонов на нуклеонах. Анализ подобных опытов должен помочь установить более точный закон взаимодействия между нуклеонами, включая вид короткодействующей функции $J(r)$, тип оператора обмена и роль нецентрального члена так же, как в своё время опыты Резерфорда с рассеянием α -частиц атомами доказали применимость закона Кулона к внутриатомным явлениям и помогли установить ядерную модель атома.

Имеющиеся в настоящий момент экспериментальные данные по рассеянию нейтронов с энергией от 40 до 90 MeV на протонах *) позволяют прежде всего заключить, что ядерные силы, хотя бы частично, носят обменный характер, поскольку в системе центра инерции частиц эффективное сечение растёт, когда угол рассеяния приближается к 180° . Это означает отброс нейтрона назад или превращение первичного протона в нейтрон, так как первичный нейтрон, превратившись в протон, стремится двигаться вперёд.

На основе подобного анализа можно прийти к следующей полуэмпирической формуле для энергии взаимодействия нейтрон — протон:

$$V = (V_1 + V_2) \frac{1 + P_x}{2}, \quad (48,18)$$

где

$$V_1 = g^2 \frac{e^{-k_0 r}}{r}, \quad V_2 = \gamma g^2 S_{AB} \frac{e^{-0,3k_0 r}}{r}. \quad (48,19)$$

Здесь ядерная постоянная тонкой структуры имеет два значения: $\frac{2\pi g^2}{ch} = 0,405$ при рассеянии частиц с параллельными спинами и $\frac{2\pi g^2}{ch} = 0,280$ при рассеянии частиц с антипараллельными спинами; $\gamma = 0,16$; P_x — оператор обмена координатами.

Отсюда видно, что энергия взаимодействия V состоит из двух частей. Часть V_1 , имеющая характер юкавского потенциала, обладает центральной симметрией и прости-

*) E. Segré и др., Phys. Rev., 75, 351, 1949; подробный реферат этой работы содержится в научно-реферативном сборнике, серия 2, вып. I, Теория элементарных частиц, опыты с частицами и γ -квантами большой энергии, ИЛ, 1950, стр. 50.

рается на некоторое эффективное расстояние $R = \frac{1}{k_0}$, которое согласно этим экспериментам равно $R = 1,2 \cdot 10^{-13}$ см, что соответствует массе сопоставленных полю мезонов, равной 326 электронным массам, весьма близкой к массе как нейтральных, так и заряженных π -мезонов. Другая, тензорная часть V_2 , приводящая, в частности, к квадрупольному моменту дейтерона, имеет эффективное расстояние, в три раза большее, чем первая часть, и связана поэтому с мезонами с массой, примерно равной 100 электронным массам.

Интересно заметить, что несколько ранее мы пришли к выводу о возможном существовании мезонов подобной массы*), применяя метод самосогласованного поля Фока-Хартри для построения статистической теории тяжёлых ядер.

Дальнейшие эксперименты по рассеянию нейтронов протонами (вплоть до энергии 280 MeV) и рассеянию протонов протонами (вплоть до энергий 350 MeV) в основном подтвердили как существование двух частей энергии взаимодействия**), так и несколько большее значение для эффективного расстояния тензорной части. Тензорная часть взаимодействия, повидимому, должна носить мезонный характер $\left(\frac{e^{-k_0 r}}{r}\right)$; эмпирически ещё не исключён экспоненциальный $(e^{-k_0 r})$ характер. Что касается первой части, то для неё эффективное расстояние слишком мало, и поэтому более точный вид радиальной функции $J(r)$ может быть уточнён при изучении рассеяния ещё более быстрых нуклеонов. Анализ рассеяния нуклеонов указывает на различный закон взаимодействия между двумя протонами и протоном — нейтроном в области больших энергий. Это заключение, однако, не исключает возможности одинаковой радиальной зависимости для тех и других сил, но, повидимому, с достаточной ясностью подчёркивает различие в обменном их характере.

Таким образом, установление эмпирических формул для взаимодействия между нуклеонами в последнее время также идёт по пути, указанному полевой теорией. В этих эмпи-

*) А. Соколов и Б. Керимов, ДАН, 46, 199, 1949.

**) R. Christian и др., Phys. Rev., 77, 441, 1950; 79, 85, 1950.

рических формулах не только вид тензорной и спиновой зависимости берётся из полевой теории, но, по мере определения вида функции, описывающей короткодействующую часть взаимодействия, мы от произвольной формы радиальной функции $J(r)$ постепенно приближаемся к форме, полученной в мезонной теории.

Различие сил между протоном — нейтроном и протоном — протоном также находит своё объяснение, хотя бы в качественном отношении. В самом деле, взаимодействие между протоном — протоном может переноситься во втором приближении только нейтральными мезонами, в то время как взаимодействие между протоном и нейтроном переносится не только нейтральными, но и заряженными мезонами.

Во всяком случае, развитие полевой теории ядерных сил и последние эксперименты по рассеянию быстрых нуклеонов позволяют надеяться, что в недалёком будущем будет установлен закон взаимодействия между двумя любыми нуклеонами, в результате чего под многие полуэмпирические закономерности ядерной физики будет подведён единый фундамент.

§ 49. Распространение плоских векторных мезонных волн в вакууме

Можно поставить вопрос о распространении мезонных волн, излучаемых нуклеонами, причём в задаче рассеяния падающую мезонную волну, приходящую с большого расстояния, можно рассматривать как плоскую.

Выбирая ось x по направлению распространения волны, мы получаем, что наряду с поперечными векторными волнами могут распространяться также продольные. Продольная составляющая подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} &= k_0^2 A_x, & E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= -k_0^2 \varphi, & \frac{\partial A_x}{\partial x} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (49,1)$$

Поперечные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} - k_0^2 A_y = 0, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad (49,2)$$

и

$$\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial H_y}{\partial x} - k_0^2 A_z = 0, \quad (49,3)$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad E_z = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

При этом уравнения (49,3) можно отдельно не исследовать, так как они получаются из (49,2) путём замены осей координат y, z соответственно на оси $z, -y$.

Из последних соотношений видно, что каждая составляющая мезонного поля F (т. е. E, H, A, φ) удовлетворяет уравнению Клейна

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) F = 0. \quad (49,4)$$

Беря падающую мезонную волну монохроматической с частотой $\nu = \frac{cK}{2\pi}$, можно каждую компоненту поля представить в виде

$$F = F_0 e^{-icKt + ikx}, \quad (49,5)$$

где $K^2 = k^2 + k_0^2$, $v = c \frac{K}{k}$ — фазовая скорость, а $v_g = c \frac{dK}{dk} = c \frac{k}{K}$ — групповая скорость мезонной волны.

Комплексный вид (49,5) для поля F взят исключительно в целях удобства, так как физический смысл в случае нейтрального поля имеет только вещественная часть уравнения (49,5), так что можно положить

$$Re^{i\alpha} = \cos \alpha, \quad Rie^{i\alpha} = -\sin \alpha. \quad (49,6)$$

В дальнейшем символ R , означающий, что от комплексной величины берётся лишь вещественная часть, мы писать не будем.

Подставляя (49,5) в уравнения (49,1), (49,2) и (49,3), найдём следующие соотношения между компонентами: для продольной волны

$$\varphi = \frac{k}{K} A_x; \quad E_x = i \frac{k_0^2}{K} A_x; \quad H_x = 0, \quad (49,7)$$

для поперечной волны

$$A_y = -\frac{i}{K} E_y = -\frac{i}{k} H_z. \quad (49,8)$$

В дальнейшем при вычислении эффективного сечения рассеяния мы используем выражение, связывающее интенсивность первичного излучения J (среднее значение энергии, падающей в единицу времени на единицу площади) со средней плотностью энергии \bar{u} [значок — (черта) означает усреднение величины по времени, т. е. $\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u dt$,

где τ — полный период]:

$$J = v_g \bar{u} = \frac{ck}{K} \bar{u}. \quad (49,9)$$

На основании последних формул легко показать, что интенсивность первичного излучения J связана с полями \mathbf{E} и \mathbf{H} следующими соотношениями:

для продольных волн

$$J'' = \frac{ckK}{4\pi k_0^2} E_z^2, \quad (49,10)$$

для поперечных волн

$$J' = \frac{ck}{4\pi K} E_y^2 = \frac{cK}{4\pi k} H_z^2. \quad (49,11)$$

§ 50. Интегрирование уравнений мезонного поля при помощи векторов Герца

Если в задаче рассеяния первичная волна задаётся плоской и свободно распространяющейся в пространстве, то вторичное (т. е. рассеянное) поле по существу является волной, непосредственно порождённой нуклеонами, приведёнными в движение первичной волной. Поэтому для определения вторичной мезонной волны мы должны, прежде всего, проинтегрировать векторные уравнения в общем виде, т. е. суметь выразить компоненты поля (φ , \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{H}) через произвольно заданные плотности, токи $\left(\rho, \rho \frac{\mathbf{v}}{c}\right)$ и моменты (\mathbf{S} и \mathbf{T}) нуклеонов.

По аналогии с интегрированием уравнений Максвелла мы можем наиболее просто проинтегрировать эти уравнения, полагая

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}; \quad \frac{\rho v}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M}, \quad (50,1)$$

где \mathbf{P} и \mathbf{M} — векторы квазиэлектрической и квазимагнитной поляризации. Введём теперь по аналогии с электродинамикой вместо потенциалов φ и \mathbf{A} два вектора типа Герца: \mathbf{Z}_1 (квазиэлектрический) и \mathbf{Z}_2 (квазимагнитный), образующих в совокупности антисимметричный тензор Герца второго ранга: $Z_{\mu\nu} = Z_2, iZ_1^*$).

При этом, чтобы удовлетворить условию Лорентца (47,5), необходимо положить

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}_1, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{Z}_2. \quad (50,2)$$

Подставляя (50,2) в равенство (47,30), найдём выражение для полей через векторы Герца

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{Z}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}_1}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{Z}_2}{\partial t} + 4\pi \mathbf{T}, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{Z}_1}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Z}_2 - 4\pi \mathbf{S}. \end{aligned} \quad (50,3)$$

Подставляя затем (50,1), (50,2) и (50,3) в уравнения (47,29), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\square - k_0^2) \mathbf{Z}_1 + 4\pi \mathbf{T} + 4\pi \mathbf{P}] &= \\ &= -\operatorname{rot} [(\square - k_0^2) \mathbf{Z}_2 + 4\pi \mathbf{S} + 4\pi \mathbf{M}], \\ \operatorname{div} [(\square - k_0^2) \mathbf{Z}_1 + 4\pi \mathbf{T} + 4\pi \mathbf{P}] &= 0, \end{aligned} \quad (50,4)$$

где оператор Даламбера

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (50,5)$$

Соотношениям (50,4) можно удовлетворить, допустив, что векторы Герца удовлетворяют следующим уравне-

*) Заметим, что близкая задача интегрирования уравнений Максвелла при наличии магнитных диполей была решена Н. И. Френкелем в его книге «Электродинамика», ч. 1, ГТТИ, 1934.

ниям *):

$$\begin{aligned} (\square - k_0^2) Z_1 &= -4\pi(P + T), \\ (\square - k_0^2) Z_2 &= -4\pi(M + S). \end{aligned} \quad (50,6)$$

В дальнейшем ограничимся нерелятивистским случаем малых скоростей движения нуклеонов. Тогда, пренебрегая величинами M и T , имеющими по сравнению с P и S порядок $\frac{v}{c}$ [см. § 47], получим

$$(\square - k_0^2) Z_1 = -4\pi P, \quad (\square - k_0^2) Z_2 = -4\pi S. \quad (50,7)$$

Определяя отсюда векторы Герца Z_1 и Z_2 через P и S и подставляя найденные значения в выражения (50,3), сможем окончательно найти значения мезонных полей через произвольно заданные вектор поляризации P и вектор квазимагнитного момента S нуклеонов.

Общее решение уравнения типа (50,7), т. е. неоднородного релятивистского уравнения Клейна, содержащего в правой части член, характеризующий источники, было дано в § 20.

В частном случае монохроматических колебаний вектора поляризации P :

$$P = P_0 e^{-icKt}, \quad (50,8)$$

решение уравнения для Z_1 можно искать в виде

$$Z_1 = Z_0 e^{-icKt}. \quad (50,9)$$

В этом случае имеем

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} + k_0^2 Z_1 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2}, \quad (50,9a)$$

где $v = c \frac{K}{k}$, $k = \sqrt{K^2 - k_0^2}$.

*) Уравнения (50,6) написаны в предположении, что при отсутствии нуклеонов векторы Герца Z_1 и Z_2 подчиняются для пустого пространства уравнению:

$$(\square - k_0^2) Z = 0.$$

Поэтому в случае $K > k_0$ вектор Z_1 будет подчиняться волновому уравнению Даламбера:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) Z_1 = -4\pi P, \quad (50,10)$$

приводящему к известному решению:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int \frac{P\left(r', t \mp \frac{R}{v}\right)}{R} (dr') = \\ &= \int \frac{P(r', t') \delta\left(t' - t \pm \frac{R}{v}\right)}{R} (dr') dt'. \end{aligned} \quad (50,11)$$

В случае запаздывающих решений следует в аргументах функции взять верхние знаки, а в случае опережающих — нижние. Общее решение является суперпозицией запаздывающих и опережающих решений. Совершенно аналогичное выражение в случае монохроматических колебаний вектора квазимагнитной поляризации можно получить также для вектора Z_2 .

§ 51. Излучение векторных мезонных волн квазиэлектрическим и квазимагнитным диполем

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда векторы P и S , характеризующие поляризацию и момент нуклонов, совершают гармонические колебания с частотой $\nu = \frac{cK}{2\pi}$. Тогда интегральные выражения для векторов Герца Z_1 и Z_2 согласно результатам предыдущего параграфа будут иметь вид:

$$Z_1 = \int \frac{P\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (dr'), \quad (51,1)$$

$$Z_2 = \int \frac{S\left(r', t - \frac{R}{v}\right)}{R} (dr'),$$

В дальнейшем разделим мезонные поля на части, зависящие от квазиэлектрического Z_1 (индекс 1) и квазимагнитного мезонного вектора Z_2 (индекс 2).

На основании формул (50,2), (50,3) и (50,6) для квазиэлектрических составляющих имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\operatorname{div} Z_1, & A_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial Z_1}{\partial t}, \\ E_1 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} + \operatorname{grad} \operatorname{div} Z_1, \\ H_1 &= \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial Z_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (51,2)$$

Для квазимагнитных составляющих получим

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= 0, & A_2 &= \operatorname{rot} Z_2, \\ E_2 &= -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial Z_2}{\partial t}, \\ H_2 &= \operatorname{grad} \operatorname{div} Z_2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial t^2} - k_0^2 Z_2 = \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} Z_2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (51,3)$$

Для вычисления энергии излучения найдём значение в волновой зоне мезонных полей, создаваемых точечным нуклеоном. Тогда, полагая векторы поляризации и момента в виде

$$\begin{aligned} P &= p(t) \delta(r) = p_0 e^{-icKt} \delta(r), \\ S &= m(t) \delta(r) = m_0 e^{-icKt} \delta(r) \end{aligned} \quad (51,4)$$

и подставляя значения (51,4) в решение (51,1), получим

$$Z_1 = \frac{p\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}, \quad Z_2 = \frac{m\left(t - \frac{r}{v}\right)}{r}. \quad (51,5)$$

С помощью последних формул получим для волновой зоны, в которой можно отбросить величины порядка $\frac{1}{r^2}$, следующие значения для мезонных полей:

а) Для продольных составляющих, зависящих от Z_1 *):

$$\begin{aligned} A_1'' &= \frac{r^0}{c} (\dot{p} r^0); & E_1'' &= -\frac{k_0^2 r^0}{k^2 v^2 r} (\ddot{p} r^0); \\ \varphi_1'' &= \frac{1}{v r} (\dot{p} r^0); & H_1'' &= 0, \end{aligned} \quad (51,6)$$

где

$$r^0 = \frac{r}{r}, \quad v = c \frac{K}{k},$$

а вектор p является функцией $t - \frac{r}{v}$, т. е.

$$p = p_0 e^{-icKt + ikr}.$$

б) Для поперечных составляющих, зависящих от Z_1 :

$$\begin{aligned} A_1' &= -\frac{1}{cr} [[\dot{p} r^0] r^0], & \varphi_1' &= 0, \\ E_1' &= \frac{1}{c^2 r} [[\ddot{p} r^0] r^0], & H_1' &= \frac{1}{c v r} [\ddot{p} r^0]. \end{aligned} \quad (51,7)$$

в) Для поперечных составляющих, зависящих от Z_2 :

$$\begin{aligned} A_2' &= \frac{1}{v r} [\dot{m} r^0], & \varphi_1' &= 0, \\ E_2' &= -\frac{1}{c v r} [\ddot{m} r^0], & H_2' &= \frac{1}{v^2 r} [[\ddot{m} r^0] r^0], \end{aligned} \quad (51,8)$$

где

$$m = m \left(t - \frac{r}{v} \right) = m_0 e^{-icKt + ikr}.$$

Наконец, продольными квазимагнитными составляющими в нерелятивистском приближении можно просто пренебречь.

Подставляя найденные значения полей в выражение (47,19), получим для частей мезонного вектора Умова-

*) Для того чтобы разбить вектор p на продольную (относительно r^0) и поперечные составляющие, воспользуемся, как обычно, тождеством $p = r^0(p r^0) - [[p r^0] r^0]$, из которого видно, что первый член правой части равенства является продольной, а второй — поперечной составляющей.

Пойнтинга, зависящих соответственно от продольных и поперечных составляющих векторов Z_1 и Z_2 :

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{k_0^2 \ddot{p}^2 \cos^2 \vartheta}{K^2 4\pi c^2 v r^2} r^0, \quad (51,8a)$$

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^2 v r^2} r^0, \quad \mathcal{E}'_2 = \frac{\ddot{m}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi v^3 r^2} r^0,$$

где ϑ — угол между вектором r^0 и направлением соответствующего диполя (\ddot{p} или \ddot{m}).

Среднее значение потока энергии, проходящего в единицу времени через площадку $r^2 d\Omega$ ($d\Omega$ — телесный угол), связано с вектором Умова-Пойнтинга известным соотношением

$$dW = (\mathcal{E} r^0) r^2 d\Omega. \quad (51,9)$$

Подставляя вместо вектора Умова-Пойнтинга только что найденное значение, имеем

$$dW''_1 = \frac{k_0^2 \ddot{p}^2 \cos^2 \vartheta}{K^2 4\pi c^2 v} d\Omega, \quad (51,10)$$

$$dW'_1 = \frac{\ddot{p}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi c^2 v} d\Omega, \quad dW'_2 = \frac{\ddot{m}^2 \sin^2 \vartheta}{4\pi v^3} d\Omega.$$

Интегрируя, далее, по сферическим углам, получим окончательно общее выражение для энергии, излученной в единицу времени.

При квазиэлектрическом излучении

$$W_1 = W''_1 + W'_1 = \frac{2}{3} \frac{\ddot{p}^2}{c^2 v} \left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2} \right), \quad (51,11)$$

при квазимагнитном излучении

$$W_2 = \frac{2}{3} \frac{\ddot{m}^2}{v^3}. \quad (51,12)$$

§ 52. Квазиэлектрическое рассеяние векторных мезонов

Для вычисления дифференциального эффективного сечения $d\sigma$ рассеяния мезонного поля (т. е. мезонов) нуклеонами по классической теории мы должны в точной аналогии с рассеянием света (т. е. фотонов) взять отношение количества энергии dW , которую излучает в единицу времени приведённый в движение первичной волной нуклеон [см. формулу (51,10)], к интенсивности потока энергии первичной мезонной волны [см. формулы (49,10) и (49,11)], т. е.

$$d\sigma = \frac{dW}{J}. \quad (52,1)$$

Для вычисления $d\sigma$ при квазиэлектрическом рассеянии, обусловленном квазиэлектрическим нуклеонным диполем \mathbf{p} , воспользуемся трансляционным уравнением движения нуклеона массы M в квазиэлектрическом поле \mathbf{E} :

$$M\ddot{\mathbf{p}} = g^2 \mathbf{E}, \quad (52,2)$$

причём ограничимся здесь нерелятивистским приближением и пренебрежём пока что силой обратной реакции мезонного поля (влияние силы реакции на излучение будет учтено в § 55).

Заменим в формулах для $d\sigma$ угол ϑ между $\ddot{\mathbf{p}}$ и направлением рассеянного мезона углом θ между падающей и рассеянной мезонной волной. При этом, если падающий мезон является продольным, то $\vartheta = \theta$, а для поперечного мезона

$$\cos \vartheta = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \varphi, \quad (52,3)$$

где θ_0 является углом между $\ddot{\mathbf{p}}$ и направлением падающей мезонной волны, который в случае поперечных мезонов является прямым $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

Квадрируя равенство (52,3) и усредняя по азимуту, получим

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{\sin^2 \theta}{2}; \quad \overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}. \quad (52,4)$$

При вычислении дифференциальных и полных эффективных сечений следует различать следующие случаи.

1) Падающие и рассеянные мезонные волны являются продольными:

$$d\sigma = r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^4 \cos^2 \theta d\Omega; \quad (52,5)$$

тогда

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^4,$$

где $r_N = \frac{g^2}{Mc^2}$ — квазиэлектрический радиус нуклона.

2) Падающая мезонная волна является продольной, а рассеянная — поперечной:

$$d\sigma = r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (52,6)$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^2.$$

3) Падающая мезонная волна — поперечная, а рассеянная — продольная:

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad (52,7)$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} r_N^2 \left(\frac{k_0}{K} \right)^2.$$

4) Падающая и рассеянная мезонные волны являются поперечными:

$$d\sigma = r_N^2 \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\Omega, \quad (52,8)$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_N.$$

Как видно из полученных формул, при рассеянии вероятность образования продольного мезона в $\left(\frac{k_0}{K}\right)^2$

раз меньше вероятности образования поперечного мезона.

В частности, когда энергия падающего мезона значительно превышает его собственную массу, т. е. $\frac{k_0}{K} \rightarrow 0$,

мы можем пренебречь продольными эффектами. Поперечные же мезонные волны будут рассеиваться в точной аналогии с электромагнитными волнами (т. е. фотонами) по известной формуле Томсона, в которой лишь элект-

рический радиус электрона $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ заменён квазиэлектрическим радиусом нуклона $r_N = \frac{g^2}{Mc^2}$.

§ 53. Квазимагнитное рассеяние векторных мезонов

Перейдём к рассеянию мезонных волн, обязанному их взаимодействию с квазимагнитными моментами нуклеонов.

Если бы в природе существовали изолированные магнитные (или квазимагнитные) заряды, то рассеяние на них фотонов (или мезонов) происходило бы по тем же законам, которые имеют место при рассеянии на электрических (или квазиэлектрических) зарядах.

Однако магнитных или квазимагнитных зарядов пока что обнаружить не удалось*). Что касается мезонного поля, то необходимо допустить существование в природе лишь «жёстких» квазимагнитных («врождённых») диполей у нуклеонов величины m , которые при воздействии на них квазимагнитного мезонного поля H испытывают механический момент, равный

$$L = [mH], \quad (53,1)$$

и в результате приходят во вращательное движение.

*) В этой связи см. новую теорию Д р а к а, трактующую о возможных магнитных полюсах: Proc. Roy. Soc. A, 133, 60, 1931; Phys. Rev., 74, 817, 1948.

Опять-таки, пренебрегая пока что реакцией излучения, а также релятивистскими эффектами, в качестве основного уравнения вращательного движения для квазимагнитного диполя имеем выражение

$$\dot{m} = \kappa [mH], \quad (53,2)$$

где величина κ равняется отношению квазимагнитного момента частицы $|m| = f$, т. е. в данном случае нуклона к механическому моменту l .

Как показывают опытные данные, квазимагнитный момент нуклона f связан с его квазимагнитным зарядом g соотношением

$$f \sim \frac{g}{k_0} \sim \frac{hg_1}{2\pi\mu c}, \quad (53,3)$$

где μ — масса мезона.

Заметим, что в согласии с опытом по квантовой теории кинематический собственный магнитный момент μ_e электрона также связан с зарядом e соотношением типа (53,3)

(именно: $\mu_e = \frac{e}{mc} S$, где $S = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$), однако в знаменателе

стоит не покоящаяся масса электромагнитного поля, равная нулю, а масса электрона. Поэтому, если в электромагнитной теории магнитные эффекты достигают заметной величины лишь в области релятивистской относительно электрона, то в мезонной теории нуклонов квазимагнитные эффекты должны становиться заметными по сравнению с квазиэлектрическими уже в области релятивистской относительно мезона, но ещё нерелятивистской относительно нуклона. Например, при $v > mc^2$ скорость электрона не будет слишком мала по сравнению со скоростью света, поэтому томсоновское эффективное сечение для рассеяния света на электроне, как известно, заменяется квантовой формулой Клейна-Нишина, вычисленной по дираковскому уравнению, автоматически учитывающему магнетизм электрона.

Мы не будем останавливаться здесь на обсуждении различных попыток истолковать на основе классической теории квантовое по существу соотношение (53,3).

Отметим, что отношение между квазимагнитным и механическим моментами нуклеона для частиц со спином $\frac{1}{2}$ (в единицах $\frac{\hbar}{2\pi}$) равно

$$\kappa = \frac{f}{l} = \frac{4\pi f}{\hbar}. \quad (53,4)$$

В случае падающей монохроматической волны $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-icKt}$ уравнение движения (53,2) приводит к следующему соотношению между $\ddot{\mathbf{m}}$ и \mathbf{H} :

$$|\ddot{\mathbf{m}}| \cong f |\kappa c K H \sin \alpha|, \quad (53,5)$$

где α — угол между направлениями векторов \mathbf{m} и \mathbf{H} .

Отсюда по формулам (49,11), (51,10) и (52,1) находим дифференциальное эффективное сечение при квазимагнитном рассеянии:

$$d\sigma = \frac{16\pi^2 f^4 k^4 \sin^2 \alpha}{c^2 \hbar^2 K^2} \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (53,6)$$

Если вектор квазимагнитного момента нуклеона \mathbf{m} параллелен \mathbf{H} , то $\alpha = 0$, и эффективное сечение $d\sigma$ обращается в нуль. Наоборот, если вектор \mathbf{m} перпендикулярен к \mathbf{H} , будем иметь максимальное значение для $d\sigma$, причём здесь мы должны различать два случая.

а) Вектор \mathbf{m} ориентирован по направлению движения первоначального мезона (т. е. по направлению \mathbf{k}). Тогда угол ϑ (между \mathbf{m} и направлением рассеянного мезона) равен углу θ (между направлением падающего и рассеянного мезона), поэтому

$$d\sigma_1 = \frac{16\pi^2 f^4 k^4}{c^2 \hbar^2 K^2} (1 - \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (53,7)$$

б) Вектор \mathbf{m} параллелен \mathbf{E} (т. е. направлен перпендикулярно к первоначальному направлению движения мезона). В этом случае согласно равенству (52,4)

$$\overline{\sin^2 \vartheta} = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta),$$

благодаря чему

$$d\sigma_2 = \frac{16\pi^2 f^4 k^4}{c^2 h^2 K^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} d\Omega. \quad (53,8)$$

Так как при $m \perp H$ квазимагнитная потенциальная энергия нуклеона в мезонном поле $U = - (mH)$ в обоих указанных случаях равна нулю, то обе ориентации являются равновероятными, ввиду чего усреднённое дифференциальное эффективное сечение равно

$$d\sigma = \frac{d\sigma_1 + d\sigma_2}{2} = \frac{4\pi^2 f^4 k^4}{c^2 h^2 K^2} (3 - \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (53,9)$$

Отсюда после интегрирования по углам находим выражение для полного эффективного сечения рассеяния векторных вещественных мезонных волн на квазимагнитном моменте нуклеона

$$\sigma = \frac{128\pi^3 f^4 k^4}{3c^2 h^2 K^2} \quad (53,10)$$

(в нерелятивистском приближении для движения нуклонов и при пренебрежении затуханием или обратной реакцией поля). Квантовая теория рассеяния полностью подтверждает этот результат для нейтральных мезонов, а для заряженных мезонов приводит к выражению, отличающемуся лишь на числовой множитель порядка единицы.

Резюмируя полученные результаты, подчеркнем, что эффективное сечение для квазиэлектрического рассеяния при увеличении энергии падающих мезонов остаётся величиной постоянной или начинает быстро убывать (см. предыдущий параграф). В случае же квазимагнитного рассеяния мезонных волн эффективное сечение, в области релятивистской относительно скорости движения мезонов, возрастает в $\left(\frac{k}{k_0}\right)^2$ раз по сравнению со значением для эффективного сечения при рассеянии поперечных мезонных волн на квазизаряде. Появление этого характерного «дипольного» множителя обусловливается дипольным уравнением движения (53,2), связывающим \ddot{m} с H ($\ddot{m} \sim cKH$), в противоположность квазиэлектрическому трансляцион-

ному уравнению движения (52,2), связывающему \ddot{p} с E ($\ddot{p} \sim E$).

Тем самым эффективное сечение при квазимагнитном рассеянии безгранично возрастает с увеличением частоты падающих векторных мезонных волн (т. е. энергии мезонов). Подобное возрастание является совершенно недопустимым, так как благодаря ему число n , следовательно, общая энергия рассеянных мезонов стремится стать больше числа n , следовательно, энергии падающих.

Поэтому наряду с трудностями, связанными с бесконечным значением энергии мезонного поля, порождённого точечными частицами, и тем самым — с полевой точки зрения — расходимостью собственной массы нуклеонов, трудностями, которые свойственны также классической и квантовой электродинамике, в векторной мезонной теории появляются ещё свои добавочные специфические трудности, связанные с дипольным характером взаимодействия нуклеонов с мезонным полем и с эффективной дипольностью векторного поля.

§ 54. Силы реакции мезонного поля

Вопрос об отыскании силы, которую оказывает мезонное поле, создаваемое нуклеоном, на сам нуклеон (сила самодействия), тесно связан с установлением уравнения движения. Последующие рассуждения применимы для векторного случая.

Если воспользоваться для этой цели методом Лорентца, рассмотренным в § 31, то в полной аналогии с теорией электромагнитного поля возникает трудность, связанная с бесконечной полевой собственной массой, обязанной энергии мезонного поля самого нуклеона. Для её устранения прежде всего можно предположить, что нуклеонная масса полностью обязана энергии мезонного поля, притом порождённого частицей, обладающей каким-то конечным радиусом a («полевая» гипотеза классической теории протяжённой частицы).

Тогда полевая мезонная масса нуклеона, складывающаяся из двух частей: квазиэлектрической M_e и квазимагнитной M_m будет конечной, по порядку равной

$M_e \sim \frac{1}{c^2} \frac{g^2}{a}$, $M_m \sim \frac{1}{c^2} \frac{f^2}{a^3}$ (более точные, довольно громоздкие выражения содержат параметр k_0 и зависят, как и в электродинамике, от предположений о характере распределения мезонного заряда «внутри» нуклеона: например поверхностный или объёмный случай).

Наряду с полевой массой в уравнение вращательного движения войдут значения полевых моментов инерции. Точно так же, как и в случае электродинамики, введение конечного радиуса является неудовлетворительным ввиду нарушения релятивистской инвариантности. Кроме того, даже получив конечное значение полевой массы при помощи радиуса частицы, невозможно будет, как и в электродинамике, привести его в согласие со значением импульса ввиду невыполнения условия Лауэ.

В дальнейшем мы ограничиваемся классической теорией. Относительно квантового обобщения заметим лишь, что точно так же, как для электродинамики, квантовая теория мезонного поля любого типа, вообще говоря, вновь приводит к бесконечной энергии поля, порождённого точечным нуклеоном, что видно, например, из выражений энергии взаимодействия (см. § 48). Кроме того, квантовая мезодинамика подобно квантовой электродинамике приводит к добавочным специфическим квантовым бесконечностям для энергии поля, порождённого нуклеоном, связанным с флуктуациями поля (поперечная энергия, см. дополнение).

Положительной стороной классического метода Лорентца является включение весьма простым путём сил самодействия в уравнения движения.

Однако лорентцовы уравнения движения нуклеона в мезонном поле кроме членов, не зависящих от радиуса нуклеона a , будут содержать бесконечное число членов, пропорциональных радиусу, типа $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$ ($n = 1, 2, \dots$), не имеющих, очевидно, непосредственного физического смысла и подлежащих, как обычно, отбрасыванию. Тем самым уравнения движения нуклеонов в мезонном поле должны быть ограничены со стороны малых частот поля (λ — длина волны мезонного поля). Мы получим в мезо-

динамике такие классические уравнения движения нуклеонов, в которые с самого начала входили бы лишь члены, связанные с внешним полем и силой самодействия, но не связанные с радиусом частиц подобно тому, как это было сделано в электродинамике Дираком для трансляционного случая (теория неполевой массы). Самым простым способом получения подобных уравнений является метод компенсирующего поля, при котором также естественно включается сила самодействия, а инерционные члены с полевой массой автоматически выпадают (см. § 34). Тем самым мы можем получить уравнения, позволяющие описывать колебания нуклеонов с любыми частотами, причём в случае колебаний с большими частотами основную роль вновь будут играть члены с силой лучистого мезонного трения.

В частности, метод Лорентца приводит к следующему уравнению ротационного движения в нерелятивистском приближении:

$$\dot{m} = \kappa [mH^i] - \frac{\kappa}{3v^2a} [m\ddot{m}] + \frac{2\kappa}{3v^3} [m\ddot{\dot{m}}] + \dots,$$

где a — радиус нуклеона, а v — скорость мезонных волн. Кроме того, мы предполагаем, что квазимагнитный заряд распределён по поверхности нуклеона.

Третий член справа с реакцией излучения был установлен нами; полное релятивистское уравнение было затем найдено Баба. В нём мы вычеркнем сразу инерционный член, пропорциональный $[m\ddot{\dot{m}}]$, который был получен Гейзенбергом, опустившим, однако, член с третьей производной *).

Учитывая силу самодействия, имеем для определения движения квазиэлектрического диполя и квазимагнитного

*) Д. Иваненко и А. Соколов, ЖЭТФ, 10, 709, 1940; А. Мухтаров, Вестник МГУ, № 7, 61, 1948; H. J. V h a b h a, Proc. Roy. Soc., A 178, 314, 1941; *ibid.*, 172, 384, 1939; W. H e i s e n b e r g, Zs. f. Phys., 113, 61, 1939. См. также В. Г и н з б у р г, ДАН, 31, 319, 1941.

момента вместо (52,2) и (53,2) в нерелятивистском приближении соответственно уравнения

$$\begin{aligned} M\ddot{p} &= g^2 E^i + gF, \\ \dot{m} &= \kappa [mH^i] + \kappa L. \end{aligned} \quad (54,1)$$

Здесь E^i и H^i являются внешними квазиэлектрическими и квазимагнитными полями. Далее, предполагая нуклеон распределённым с некоторой пространственной плотностью ρ , нормированной на единицу заряда, найдём для силы самодействия F и момента самодействия L выражения (см. § 31)

$$F = g\bar{E}; \quad L = [m\bar{H}], \quad (54,2)$$

причём средние поля определяются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \int E(r, r') \rho_0(r) \rho_0(r') (dr) (dr'), \\ \bar{H} &= \int H(r, r') \rho_0(r') \rho_0(r) (dr) (dr'), \end{aligned} \quad (54,3)$$

где $E(r, r')$ и $H(r, r')$ — собственные поля в точке r' , создаваемые точечным нуклеоном, находящимся в точке r , причём в нерелятивистском случае можно считать, что поля E и H возникают благодаря наличию моментов p и m , а ρ_0 — нуклеонная плотность, нормированная на единицу.

Вообще говоря, при определении полей ограничиваются только запаздывающими потенциалами. Однако, следуя теории, развитой в § 34 для исключения полевой массы, введём ещё второе поле, действующее только на нуклеон, его порождающий. При этом для того чтобы компенсирующее поле не могло быть излучённым в виде мезонных волн, при его вычислении возьмём полусумму запаздывающих и опережающих потенциалов, а при определении общего поля в полной аналогии с выражением

(34,21) мы должны взять полуразность запаздывающих и опережающих потенциалов.

Поэтому в случае точечного нуклеона, т. е. когда $\rho_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$ [см. также соотношения (51,4) и (51,3)], находим

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{E}} &= \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div} \right) \mathbf{Z}_1, \\ \bar{\mathbf{H}} &= \left(-\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \text{grad div} \right) \mathbf{Z}_2,\end{aligned}\tag{54,4}$$

причём согласно (51,5)

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= \int \mathbf{p}(t') \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} dt', \\ \mathbf{Z}_2 &= \int \mathbf{m}(t') \frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} dt' .\end{aligned}\tag{54,5}$$

Здесь $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')$.

Раскладывая δ -функцию в ряд по величине $\frac{R'}{v}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\delta\left(t'-t+\frac{R'}{v}\right) - \delta\left(t'-t-\frac{R'}{v}\right)}{2R'} &= \\ &= \frac{1}{v} \dot{\delta}(t'-t) + \frac{R'^2}{6v^3} \ddot{\delta}(t'-t) + \dots,\end{aligned}\tag{54,6}$$

откуда с помощью формулы (3,11) находим

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_1 &= -\frac{\dot{\mathbf{p}}}{v} - \frac{1}{6v^3} \frac{\partial^3(\mathbf{p}R^2)}{\partial t^3} + \dots, \\ \mathbf{Z}_2 &= -\frac{\dot{\mathbf{m}}}{v} - \frac{1}{6v^3} \frac{\partial^3(\mathbf{m}R^2)}{\partial t^3} + \dots,\end{aligned}\tag{54,7}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t)$.

Принимая во внимание равенство

$$\text{grad div} (\mathbf{p}R^2) = 2\mathbf{p},$$

а также то обстоятельство, что для точечного нуклеона в конечном результате мы должны положить $R = 0$, получим

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{v c^2} \left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2} \right), \\ \overline{H} &= \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{m}}}{v^3}. \end{aligned} \quad (54,8)$$

Окончательно уравнения движения нуклеона (54,1) с учётом силы лучистого мезонного трения примут вид

$$M\ddot{\mathbf{p}} = g^2 \mathbf{E}^i + \frac{2g^2}{3c^2v} \ddot{\mathbf{p}} \left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2} \right), \quad (54,9)$$

$$\dot{\mathbf{m}} = \kappa [\mathbf{m}H^i] + \frac{2\kappa}{3v^3} [\mathbf{m}\ddot{\mathbf{m}}]. \quad (54,10)$$

Важно отметить, что в полной аналогии с электродинамикой мы можем получить точно такие же выражения для собственных полей также другим методом, основанным на балансе энергии.

Действительно, добавим в уравнениях движения нуклеона (54,1) к внешним полям \mathbf{E}^i и \mathbf{H}^i значения собственных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , подобранных так, чтобы нуклеон в единицу времени излучал при квазиэлектрическом взаимодействии количество энергии W_1 [см. формулу (51,11)], а при квазимагнитном взаимодействии количество энергии W_2 [см. формулу (51,12)]. Тогда, обозначая период колебания нуклеона через τ , получим, принимая во внимание, что

$$\dot{\mathbf{p}}(\tau) = \dot{\mathbf{p}}(0) = 0$$

и т. д., для определения собственных полей следующие уравнения:

$$\int_0^{\tau} (\dot{\mathbf{p}} \overline{\mathbf{E}}) dt = -\frac{2}{3c^2 v} \left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2}\right) \int_0^{\tau} \ddot{\mathbf{p}}^2 dt = \\ = \frac{2}{3c^2 v} \left(1 + \frac{k_0^2}{2K^2}\right) \int_0^{\tau} (\dot{\mathbf{p}} \ddot{\mathbf{p}}) dt, \quad (54,11)$$

$$\int_0^{\tau} (\dot{\mathbf{m}} \overline{\mathbf{H}}) dt = -\frac{2}{3v^3} \int_0^{\tau} \ddot{\mathbf{m}}^2 dt = \frac{2}{3v^3} \int_0^{\tau} (\dot{\mathbf{m}} \ddot{\mathbf{m}}) dt.$$

Отсюда видно, что собственные поля, которые следует добавить в уравнениях движения, будут точно определяться формулами (54,8).

Как и следовало ожидать, исходя из баланса реально излучённой энергии, мы не могли получить для собственных полей дополнительных членов, пропорциональных производным чётного порядка, в данном случае $\ddot{\mathbf{p}}$ или $\ddot{\mathbf{m}}$ (см. метод Лорентца), поскольку последние связаны лишь с собственной массой или моментом инерции нуклеона. Таким образом, метод баланса энергии (в котором учитывается только реально излучённая энергия) и метод Лорентца приводят к различным значениям для силы самодействия. Именно, укажем ещё раз для ясности, что в методе Лорентца появляются дополнительные инерциальные члены, пропорциональные $\ddot{\mathbf{p}}$ и $\ddot{\mathbf{m}}$. В нашем методе, взяв для силы самодействия полуразность запаздывающих и опережающих потенциалов, мы смогли исключить инерциальные члены. Поэтому оба метода, т. е. метод определения силы самодействия при помощи компенсирующего поля и метод баланса энергии, приводят к тождественным результатам, и их применимость не ограничена большими частотами колебаний нуклеона. Согласно теории электромагнитного вакуума (см. дополнение), полевая масса электрона составляет примерно $\frac{1}{137}$ часть всей массы. Возможно, что часть массы нуклеона (повидимому, составляющая долю $\frac{2\pi g^2}{ch}$)

будет также носить полевой характер. В этом случае полевые члены дадут небольшую поправку к нашим уравнениям (54,9) и (54,10). Однако более подробно этот вопрос можно будет проанализировать лишь после построения теории мезонного вакуума.

§ 55. Рассеяние векторных мезонных волн с учётом затухания

Рассмотрим прежде всего квазиэлектрическое рассеяние нейтральных векторных мезонов с учётом затухания. Ограничимся здесь наиболее важным случаем больших энергий ($k \sim K$), когда рассеянием продольных мезонов можно пренебречь.

Задавая квазиэлектрическую напряжённость поля падающей мезонной волны в виде

$$E = E_0 e^{-icKt}, \quad (55,1)$$

найдем, используя формулу (54,9), для второй производной от квазиэлектрического дипольного момента нуклона, вызванного этой волной, выражение

$$\ddot{p} = \frac{g^2 E}{M + i \frac{2}{3} \frac{g^2 k}{c^2}}, \quad (55,2)$$

откуда

$$\overline{\ddot{p}^2} = \frac{g^4 \overline{E^2}}{M^2 \left(1 + \frac{4}{9} \frac{g^4 k^2}{M^2 c^4} \right)}. \quad (55,3)$$

Полное эффективное сечение рассеяния находится, как обычно, по формуле (52,1):

$$\sigma' = \frac{W}{J}. \quad (55,4)$$

Здесь в согласии с равенствами (49,11) и (51,11) интенсивность падающих волн положена равной

$$J = \frac{c}{4\pi} \overline{E^2} \quad (55,5)$$

и энергия вторичных волн, излучённых за секунду,

$$W = \frac{2}{3} \frac{\overline{p^2}}{c^3}. \quad (55,6)$$

Из последних формул находим для квазиэлектрического эффективного сечения рассеяния мезонов на нуклонах с учётом затухания следующее выражение:

$$\sigma' = \frac{8\pi}{3} \frac{r_N^2}{1 + \frac{4}{9} r_N^2 k^2}, \quad (55,7)$$

где $r_N = \frac{g^2}{Mc^2}$ — квазиэлектрический радиус нуклона.

Вспоминая, что эффективное сечение без учёта затухания определяется соотношением (52,8), т. е.

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_N^2,$$

можно выражение (55,7) представить в виде

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 + \frac{k^2 \sigma}{6\pi}}. \quad (55,8)$$

С точки зрения классической неполевой теории частиц (в данном случае нуклона), развиваемой в духе классической теории Дирака, уравнение движения (54,9), а вместе с тем и формула для эффективного сечения рассеяния (55,8) не ограничены в нерелятивистском случае каким-либо условием.

Напомним, что в § 36 была получена аналогичная формула для рассеяния света на электроне.

С другой стороны, с точки зрения классической теории Лорентца, допускающей полевую массу неточечных частиц, как уравнение движения (54,9), так и величина эффективного сечения (55,8) являются пригодными лишь для длин волн, превышающих соответственно классический, в данном случае квазиэлектрический радиус r_N частиц [ввиду необходимости отбрасывания в уравнениях движения членов типа $(r_N/\lambda)^n$].

Как видно из (55,8), сила лучистого трения начинает оказывать влияние при таких частотах, когда выполняется

соотношение

$$\sigma k^2 \sim 1, \quad (55,9)$$

или

$$\frac{chk}{2\pi} \sim \frac{hc}{2\pi g^2} Mc^2 \sim 6Mc^2. \quad (55,10)$$

При более высоких энергиях эффективное сечение становится равным

$$\sigma' = \frac{6\pi}{k^2} = \frac{3}{2\pi} \Lambda^2, \quad (55,11)$$

где длина падающих мезонных волн $\Lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Однако при энергиях падающего мезона, превышающих в несколько раз собственную энергию нуклеона Mc^2 , мы вступаем в область релятивистской энергии относительно нуклеона. Здесь с большой вероятностью при рассеянии будут иметь место квантовые явления, в частности, комптон-эффект, т. е. некогерентное рассеяние мезонов с изменением частот, в противоположность рассматриваемому сейчас когерентному рассеянию без изменения частоты *).

Перейдём к квазимагнитному рассеянию мезонных волн (мезонов) на нуклеонах.

Предположим, что вектор внешнего мезонного поля H изменяется гармонически с частотой $\frac{cK}{2\pi}$ и направлен по оси z . Пусть вектор момента нуклеона m расположен в плоскости xz . Тогда, пренебрегая центростремительным ускорением, имеем $\ddot{m} = -c^2 K^2 m$.

Проектируя уравнение движения (54,10) на оси координат, получим

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= b m_x \dot{m}_y, \\ \dot{m}_y &= -\chi m_x H - b m_x \dot{m}_x + b m_x \dot{m}_z, \\ \dot{m}_z &= -b m_x \dot{m}_y, \end{aligned} \quad (55,12)$$

*) Как было нами указано в § 36, в системе координат, где покоится центр тяжести мезон-нуклеон, квантовая теория рассеяния приводит к формуле, по существу совпадающей с (55,8) вплоть до ультрарелятивистских энергий $\left(\frac{chk}{2\pi} > Mc^2\right)$.

где

$$b = \frac{2c^2 K^2}{3v^3} \kappa.$$

Отсюда находим

$$\dot{m}_y = -\kappa \frac{m_x H}{1 + b^2 m^2}, \quad \dot{m}_x = b m_z \dot{m}_y; \quad \dot{m}_z = -b m_x \dot{m}_y, \quad (55,13)$$

где $m = \sqrt{m_x^2 + m_z^2}$, или

$$\dot{m} = \frac{\kappa m_x H}{(1 + b^2 m^2)^{1/2}},$$

$$\ddot{m}^2 = \frac{\kappa^2 c^2 K^2 m_x^2 H^2}{1 + b^2 m^2}.$$

Полагая в формуле для эффективного сечения

$$\sigma' = \frac{W}{J}$$

в согласии с равенствами (49,11) и (51,12)

$$J = \frac{v}{4\pi} H^2,$$

$$W = \frac{2}{3} \frac{\ddot{m}^2}{v^3},$$

найдем следующее выражение для эффективного сечения квазимагнитного рассеяния поперечных мезонов с учётом затухания, в предположении, что угол между векторами \mathbf{m} и \mathbf{H} равен $\frac{\pi}{2}$:

$$\sigma' = \frac{\sigma}{1 + c k^2 (6\pi)^{-1}}. \quad (55,14)$$

Здесь σ — полное эффективное сечение при квазимагнитном рассеянии без учёта затухания [см. соотношение (53,10)]:

$$\sigma = \frac{128\pi^3 f^4 k^4}{3c^2 h^2 K^2}. \quad (55,15)$$

Для малых энергий падающих мезонных волн, когда

$$\frac{chk}{2\pi} < \sqrt{\frac{ch}{2\pi f^2 k_0^2}} \mu c^2 \sim 2\mu c^2 \quad (55,16)$$

(где μ — масса мезона; величина $\beta_2 = \frac{2\pi f^2 k_0^2}{ch} \sim 6$ есть мезонная постоянная тонкой структуры), т. е. при

$$ck^2 < 1,$$

для эффективного сечения находим старый результат (55,15), который был получен без учёта затухания.

Для умеренно больших энергий падающих мезонных волн

$$\frac{chk}{2\pi} > \sqrt{\frac{ch}{2\pi f^2 k_0^2}} \mu c^2 \sim 2\mu c^2, \quad (55,17)$$

превышающих лишь в несколько раз собственную энергию мезона (т. е. практически ещё нерелятивистская область энергий относительно нуклеона), величина ck^2 становится больше единицы. Поэтому, начиная с этих энергий, необходимо учитывать силу лучистого мезонного трения. При высоких энергиях эффективное сечение становится равным

$$\sigma' = \frac{6\pi}{k^2} = \frac{3}{2\pi} \Lambda^2 \quad (55,18)$$

и перестаёт возрастать с увеличением энергии. Отсюда видно, что учёт силы лучистого трения устраняет дипольную трудность при квазимагнитном рассеянии векторных мезонов.

Совершенно аналогичным образом трактуются эффекты, связанные с классическим псевдовекторным полем, дипольные свойства которого будут точно подобны векторному и, как видно непосредственно из выражения энергии связи с этим полем, должны полностью проявляться при взаимодействии с нуклеонами.

Таким образом классическая мезодинамика позволяет не только выяснить вопрос о происхождении дипольной

трудности, сказывающейся в недопустимом росте эффективного сечения для квазимагнитного рассеяния, но также даёт возможность устранить эту трудность путём учёта затухания, т. е. обратного действия поля.

Квантовая теория рассеяния нейтральных и заряженных векторных, псевдовекторных и т. д. мезонов на нуклонах полностью подтверждает эти результаты, в свою очередь позволяя устранить рост вероятности или эффективного сечения квазимагнитного рассеяния благодаря учёту затухания *).

Эти результаты, как выяснилось при дальнейшем анализе, имеют фундаментальное значение во всей современной теории поля, выходящее за рамки теории рассеяния.

Другим весьма интересным g -эффектом является тормозное испускание мезонного поля (мезонов) быстрыми нуклонами при столкновении их друг с другом, совершенно подобное тормозному излучению электромагнитных волн (фотонов), особенно интенсивному при больших энергиях сталкивающихся частиц.

Как известно, вероятность тормозного испускания фотонов быстро возрастает с энергией, и, например, для энергий порядка десятков и сотен миллионов электрон-вольт потери энергии электронов в потоке мягкой компоненты космических лучей, главным образом, обусловлены излучением. Вероятность же их столкновения с атомными электронами и значительных потерь энергий на ионизацию в этой области энергий ничтожна. Вполне аналогично быстрые нуклоны при прохождении через слой вещества с наибольшей вероятностью теряют свою энергию при тормозном испускании мезонов. По современным представлениям благодаря столкновениям первичных протонов с ядрами может происходить порождение разнообразных заряженных и нейтральных мезонов в верхних

*) А. Соколов, Journ. of Phys. USSR, 5, 231, 1941; В. Паули, Мезонная теория ядерных сил, гл. IV, ИЛ, 1947; Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1948. Там же приведена дальнейшая литература по квантовой теории затухания.

слоях атмосферы, а также недавно обнаруженное порождение мезонов в лабораторных условиях.

Подобно испусканию электромагнитного (или мезонного) поля частицами, приведёнными в движение падающими волнами, тормозное испускание также является по сути дела эффектом классическим; квантовые поправки здесь, однако, весьма существенны. Полная теория, соответствующая действительности, должна быть квантовой, и окончательные выражения для вероятности тормозного излучения при e -силах и при g -силах зависят от планковской константы h , иначе говоря, от постоянной тонкой структуры $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ (или соответствующей мезонной константы $\beta = \frac{2\pi g^2}{hc}$). Несмотря на это как было показано для случая электромагнитного поля *) и как можно показать также для поля мезонного**), возможно дать полуквантовую приближённую трактовку задачи о тормозном испускании, учитывающую суть явления.

Дело сводится к тому, что поле падающей частицы, сталкивающейся с какой-то покоящейся, разлагается на плоские волны, и тормозное излучение при столкновении трактуется как результат суммы актов рассеяния отдельных волн.

В самом грубом виде суть подобного вывода тормозного испускания фотонов заключается в следующем. Электрон, пролетающий в поле ядра заряда Ze на расстоянии r , испытывает ускорение $\omega \sim \frac{eE}{m} \sim \frac{Ze^2}{mr^2}$ и благодаря этому в течение времени $\tau \sim \frac{r}{c}$ испускает энергию

$$\Delta W \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} |\omega|^2 \tau \sim \frac{e^2}{c^4} \frac{Z^2 e^4}{m^2 r^3}.$$

*) Williams, Phys. Rev., 45, 729, 1934; Rev. Mod. Phys., 17, 1945, Weizsäcker, Zs. f. Phys., 88, 612, 1934; В. Гейтлер, Квантовая теория излучения, Гостехиздат, 1940, § 17.

**) Heitler and Peng, Proc. Irish. Academy Sci. (A), 1942—1943 гг. (ряд статей).

Для получения эффективного сечения σ_{rad} тормозного испускания нужно это выражение умножить на вероятность попадания электрона на площадку $2\pi r dr$, затем разделить на начальную энергию $\sim mc^2$ и, наконец, проинтегрировать по r , т. е.

$$\sigma_{\text{rad}} \sim \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{Z^2 e^2}{mc^2} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r^2}.$$

Здесь существенно сказывается квантовая механика, утверждающая, что границу применения классической теории следует задать при $r_{\text{min}} \sim \frac{h}{mc}$; тогда

$$\sigma_{\text{rad}} \sim \alpha Z^2 r_0^2 \sim \frac{Z^2 r_0^2}{137} \left(\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} = \frac{1}{137,02}, \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \right).$$

Точная квантовая теория также приводит к выражению, содержащему в качестве основного фактора только что полученное выражение.

Для испускания мезонов нуклеонами, обусловленного их квазиэлектрическими зарядами, мы получим аналогичное выражение, заменяя e на g и m на M :

$$\sigma_{\text{rad}}^M = R_0^2 \sim \left(\frac{g^2}{Mc^2} \right)^2 \frac{g^2}{hc} \sim \frac{R_0^2}{6}$$

$\left(R_0 = \frac{g^2}{Mc^2} \right)$ — квазиэлектрический радиус нуклеона).

Однако, как мы видели на примере задачи рассеяния, при высоких энергиях наиболее существенную роль играют квазимагнитные члены. Производя с ними те же выкладки, получим значение эффективного сечения для квазимагнитного тормозного испускания нейтральных векторных (или псевдоскалярных) мезонов нуклеонами, которое снова абсурдным образом растёт с энергией нуклеонов E :

$$\sigma_{\text{rad}}^{M'} \approx \text{const } v^2 \approx \text{const } E^2 \quad (\text{где положено } E = hv).$$

Квантовая теория тормозного испускания подтверждает в основном этот результат, что вновь ставит нас перед задачей устранения дипольной трудности. Закономерным способом устранения этой трудности и предотвращения

недопустимого роста эффективного сечения тормозного испускания мезонов нуклеонами при росте энергии последних также является более точная трактовка задачи с учётом затухания как в классической, так и в последовательной квантовой теории. Действительно, только после учёта затухания стало возможным развить теорию тормозного порождения мезонов нуклеонами, лежащую ныне в основе понимания процессов в космических лучах в высших слоях атмосферы и объясняющую образование мезонов в лабораторной обстановке.

Дипольная трудность имеет место для векторных мезонов не только в случае эффектов, связанных с g -силами, но также для электромагнитных процессов (e -силы). Например, эффективное сечение рассеяния света на подобных мезонах (комpton-эффект) растёт с частотой света *). Здесь также необходимо учесть затухание, которое и устраняет недопустимый рост сечений. Кроме того, дипольная трудность возникает также в задачах взаимодействия при e -силах и проявляется, например, в невозможности стационарных состояний векторных заряженных мезонов в кулоновом поле точечного заряда**), иначе говоря, в частности, в невозможности образования мезоводорода и других своеобразных мезо-атомов из ядер с вращающимися вокруг них векторными мезонами. Резюмируя эту ситуацию, можно сказать, что эффективная дипольность векторного мезонного поля делает мезон при больших энергиях или на малых расстояниях не зарядом, а скорее магнитом, магнитные же силы, как мы указывали выше (§ 45), не дают стабильных уровней. Этот пример с дипольной трудностью в случае электромагнитного взаимодействия мезонов весьма аналогичен проявлению дипольной трудности при взаимодействии нуклеонов через мезонное поле при связи с последним благодаря квазимагнитным моментам. В обоих случаях до сих пор не указано бесспорных способов устранения дипольной трудности при взаимодействии. Предварительный нерелятивистский метод обрезания потенциальной энергии

*) Я. А. Смородинский, ЖЭТФ, 10, 840, 1940.

***) И. Е. Тамм, ДАН, 29, 551, 1940.

при некотором весьма малом Γ_{\min} , конечно, неудовлетворителен.

Как уже упоминалось, дипольная трудность отсутствует для электромагнитных эффектов в случае псевдоскалярного поля, что легко усмотреть из общего вида уравнений или смешанного лагранжиана псевдоскалярных частиц в электромагнитном поле, в котором отсутствуют дипольные члены. Тем самым, например, эффективные сечения различных электромагнитных процессов (комpton-эффект, тормозное испускание света псевдоскалярными мезонами и т. д.) не дают роста с энергией в случае псевдоскалярных частиц.

Эти обстоятельства в известной мере побуждают считать векторную теорию менее пригодной для описания мезонов и склониться в пользу псевдоскалярного уравнения*). Однако этот аргумент**) относится лишь к e -силам, т. е. к взаимодействию псевдоскалярных мезонов с электромагнитным полем.

Что касается мезонной теории g -сил, то в ней мы, с одной стороны, не можем обойтись без тензорной или нецентральной части $\sim S_{AB}$, которая обеспечивает квадрупольный момент дейтерона; в то же время в любом варианте теории это тензорное взаимодействие содержит дипольные члены.

Однако более подробно этих вопросов мы здесь касаться не будем.

Выяснение большой роли, которую играет затухание в полях, обладающих эффективной дипольностью, полученное в классической и квантовой мезодинамике, побудило развить общую теорию затухания в различных направлениях.

Следует подчеркнуть, что стремление ко всё более точному учёту обратного действия поля является весьма характерным для развития теоретической физики самых последних лет. Речь идёт о построении общей теории связи частиц с полями мезонным, электромагнитным или грави-

*) J. R. Oppenheimer, Phys. Rev., 59, 462, 1941, R. F. Christy and S. Kusaka, Phys. Rev., 59, 405, 1941.

**) См. обзор С. З. Беленького в сборнике «Мезон» под ред. И. Е. Тамма, Гостехиздат, 1947, стр. 146.

тационным и разделении эффектов, приводящих к конечным результатам от бесконечностей типа членов самодействия, возникающих при классических и квантовых подсчётах и обязанных прежде всего энергии поля точечных частиц. Новейшему развитию этих вопросов посвящено дополнение в конце книги.

§ 56. Гравитация и элементарные частицы

Так как настоящая книга посвящена главным образом проблемам, связанным с элементарными частицами, мы не останавливались сколько-нибудь подробно на теории гравитационного поля, поскольку тяготение практически не играет роли среди разнообразных взаимодействий между частицами. Действительно, как уже указывалось выше, потенциальная энергия тяготения, например между двумя протонами, V_m совершенно ничтожна по сравнению с их электростатической энергией V_e :

$$V_m : V_e = \kappa \frac{M^2}{r} : \frac{e^2}{r} \sim 10^{-36}. \quad (56,1)$$

Точно так же гравитационная энергия мала по сравнению с мезонной потенциальной энергией между теми же элементарными частицами на расстояниях $r < \frac{1}{\chi_0}$:

$$V_m : V_g \sim \frac{\kappa M^2}{r} : \frac{g^2}{r} \sim 10^{-38}. \quad (56,2)$$

Вводя понятие гравитационного заряда, совпадающего по существу с массой тела: $m' = \sqrt{\kappa} \cdot m$, можно сказать, что гравитационные заряды элементарных частиц малы по сравнению с их электрическими или мезонными зарядами *).

Гравитация начинает играть заметную роль лишь для макроскопических тел и превалирует над остальными

*) При этом, конечно, не следует всё же упускать из виду возможного влияния тяготения в таких вопросах, как собственная энергия частиц, на важность чего недавно было вновь обращено внимание М. Ф. Широковым (Вестник МГУ, № 4, 1947).

видами взаимодействия для астрономических объектов, обладающих огромной массой.

Кроме того, изложение основ теории гравитации тесно связано с использованием тензорного анализа, и обычно является предметом особых монографий*).

Однако мы должны всё же дать здесь хотя бы самое краткое изложение основ теории гравитационного поля, для того чтобы показать, с одной стороны, наличие у этого поля многих общих, притом не отмеченных ранее, свойств с полями электромагнитными и мезонными, что позволяет провести трактовку гравитации теми же методами, какие были применены к полям электромагнитному и мезонному, а с другой стороны, чтобы отметить ряд специфических особенностей, присущих этому полю.

Остановимся прежде всего на истории теории тяготения. В понимании поля тяготения следует различать три этапа. Первый из них связан с теорией Ньютона, классической физикой и отчасти специальной теорией относительности. Согласно этим теориям гравитационное поле осталось в стороне от известного объединения различных разделов физической науки XIX века и начала XX века, в результате чего была установлена связь между световыми, электрическими и магнитными явлениями, а также искривлением пространства и временем и т. д. Второй этап представлен общей теорией относительности Эйнштейна (1916 г.), согласно которой гравитационное поле является полем метрическим, возникающим при наличии любого типа вещества, определяющим искривление пространства—времени, возможность которого впервые была доказана в неевклидовой геометрии Лобачевского. Можно сказать, что общая теория относительности как будто

*) См. П. Г. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947; А. С. Эддингтон, Теория относительности, ГТТИ, 1934; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948; В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947; R. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, 1934. О связи теории гравитации и современной теории поля см. также: W. Pauli and M. Fierz, Proc. Roy. Soc. A, 173, 211, 1939; L. de Broglie, Theorie generale des particules à spin, Paris, 1943.

окончательно оторвала гравитационное поле от обычного вещества, которое, как мы знаем, состоит из элементарных частиц и полей.

Как было недавно в этой связи подчеркнута, физические объекты разделены на «метрическое поле» $g_{\mu\nu}$ (гравитация), с одной стороны, и электромагнитное поле $H_{\mu\nu}$ (т. е., точнее говоря, элементарные частицы и поля), с другой*).

Третий этап теории тяготения связан с релятивистской квантовой механикой элементарных частиц и полей, которая не только позволяет построить квантовую теорию слабого гравитационного поля, но по крайней мере на данном этапе в случае линейного приближения приводит с необходимостью к заключению о возможности взаимных превращений элементарных частиц и квантов гравитации (гравитонов) друг в друга. Тем самым, в известной мере, гравитация объединяется с системой остальных элементарных частиц, что приводит к принципиальной возможности построения объединённой теории всех полей и частиц**).

Перейдём теперь к самой краткой математической формулировке теории тяготения.

Согласно классической теории Ньютона поле тяготения является статическим и описывается однокомпонентной функцией, потенциалом φ , который подчиняется уравнению Лапласа-Пуассона

$$\nabla^2\varphi = 4\pi k m \rho, \quad (56,3)$$

где m — масса тела, создающего поле, ρ — плотность распределения этой массы. В случае точечной частицы, находящейся в точке $r=0$, вместо ρ следует подставить $\delta(r)$. Здесь можно принять электромагнитную нормировку, введя $\varphi' = \frac{\varphi}{\sqrt{k}}$ и гравитационный заряд $m' = \sqrt{k} \cdot m$; тогда

$$\nabla^2\varphi' = 4\pi m' \rho.$$

*) A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton, 1946.

**) Д. Иваненко, УФН, 32, вып. 2, 3, 1947. Д. Иваненко и А. Соколов, Вестник МГУ, № 8, 1947; ДАН, 58, 1633, 1947.

Энергия взаимодействия тела массы m с гравитационным полем в ньютоновом приближении равна $U = -mf$.

Перейдём к математической формулировке второго этапа теории тяготения, связанного со специальной и общей теорией относительности. Теория тяготения Ньютона обобщается при этом в разнообразных направлениях. Как заметил ещё Пуанкаре при построении специальной теории относительности, статическое уравнение Пуассона должно быть во всяком случае заменено волновым уравнением для гравитационного потенциала. Следовательно, ньютонов закон также является лишь статическим приближением соответствующей формулы, зависящей также от скоростей тяготеющих масс, подобно, например, формуле Брейта в электродинамике. Дальнейшие обобщения связаны с общей теорией относительности Эйнштейна. Согласно последней гравитационное поле должно описываться не однокомпонентным потенциалом, но 10 компонентами волновой функции, образующими симметричный тензор $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$). При этом тензор гравитационного поля оказывается совпадающим с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{метр}}$, характеризующим искривление четырёхмерного пространства—времени, предугазанное Лобачевским (1826 г.). В этом пункте, очевидно, коренится наибольшее своеобразие, вся не имеющая аналога в случае других полей специфичность эйнштейновской теории гравитации, отождествляющей последнюю с метрическим полем, т. е. полностью её геометризующей. Вообще говоря, все обычные поля тяготения являются слабыми, соответствующими незначительному искривлению пространства—времени. Поэтому можно положить для ковариантных составляющих: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$ и для контравариантных: $g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, где $g_{\mu\nu}$ с индексом 0 равны постоянным псевдоевклидовым значениям

$$g_{\mu\nu}^0 = g_0^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix},$$

а квадратами $h_{\mu\nu}$, как правило, пренебрегается. Ньютонов потенциал оказывается лишь (статической) добавкой к одной из компонент слабого поля: $\varphi = \frac{c^2 h_{44}}{2}$. Компоненты слабого поля $h_{\mu\nu}$ образуют симметричный тензор относительно линейных преобразований. Используя знаки Эйзенхарта, индексы μ которых не должны учитываться при суммировании:

$$e_1 = e_2 = e_3 = -1, \quad e_4 = +1,$$

имеем

$$g_{\mu\nu}^0 = e_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad \sqrt{-g} = 1 + h;$$

$$h = e_\mu h_{\mu\mu}, \quad h^{\mu\nu} = e_\mu e_\nu h_{\mu\nu}.$$

Как и в случае других полей, мы имеем в гравитации дело с двумя основными проблемами: описание воздействия гравитационного поля на вещество и описание порождения или излучения поля веществом. Отсылая за разъяснениями по некантовой теории к монографиям по общей теории относительности, укажем здесь, что решение первой задачи, в конце концов, оказывается весьма простым, поскольку для этого достаточно лишь записать соответствующие лагранжианы или уравнения свободных частиц (или полей) в ковариантном виде, т. е. в общих четырёхмерных криволинейных координатах с помощью компонент $g_{\mu\nu}$. Добавочные члены, возникающие при этом, по сравнению с псевдоэвклидовым случаем, будут соответствовать взаимодействию с гравитационным полем. Подставив затем в указанные выражения приближённые значения $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + h_{\mu\nu}$, мы получим описание взаимодействия со слабым полем. Впрочем, поскольку слабое гравитационное поле $h_{\mu\nu}$ можно рассматривать в точной аналогии с другими полями: электромагнитным, мезонным и др., сохраняя в первом приближении псевдоэвклидов характер метрики, то энергию взаимодействия со слабым полем любого данного поля (или частиц) возможно получить, конструируя по общему правилу лагранжиан, учитывающий связь данного поля (или частиц) со слабым гравитационным.

Слабое гравитационное поле содержит, как было указано, десять компонент; в плоской волне имеет смысл назвать (h_{44}) продольно-продольной частью, (h_{4n}) — продольно-поперечной и (h_{nk}) — поперечно-поперечной. Бесконечно малым преобразованием координат можно всегда добиться того, что отличными от нуля будут в плоской волне лишь две поперечно-поперечные компоненты. Аналогично случаю электромагнитного поля, реально излучаться может лишь одна поперечно-поперечная часть. Компоненты h_{nk} удовлетворяют уравнению Даламбера $\square h_{nk} = 0$, причём между шестью компонентами поля имеются четыре соотношения:

$$\frac{\partial h_{n\gamma}}{\partial x_n} = 0, \quad h = h_{11} + h_{22} + h_{33} = 0.$$

Таким образом, поперечно-поперечная часть обладает лишь двумя независимыми составляющими.

Далее, основное уравнение релятивистской квантовой механики $(\nabla_\mu \nabla_\mu - k_0^2) \psi = 0$ приобретёт в гравитационном поле вид

$$(-g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + g^{\mu\nu} \{\mu\nu, \alpha\} \nabla_\alpha - k_0^2) \psi = 0,$$

где $\{\mu\nu, \alpha\}$ обозначают трёхзначковые скобки Кристоффеля, зависящие от первых производных компонент $g_{\mu\nu}$:

$$\{\mu\nu, \alpha\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\beta} \left(\frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right).$$

Ограничиваясь слабым полем, притом его реально излучаемой поперечной частью, имеем

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = e_\mu \nabla_\mu \nabla_\mu - h_{ns} \nabla_n \nabla_s;$$

$$g^{\mu\nu} \{\mu\nu, \alpha\} \nabla_\alpha = (\nabla_s h_{ns} h_{nk}) \nabla_k + \frac{1}{4} e_\alpha (\nabla_\alpha h_{ns} h_{ns}) \nabla_\alpha.$$

Отсюда основное уравнение Клейна примет вид

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_0^2 \right) \psi = U \psi,$$

где

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = -h_{ns} \nabla_n \nabla_s,$$

$$U_2 = -(\nabla_s h_{ns} h_{nk}) \nabla_k - \frac{1}{4} e_\alpha (\nabla_\alpha h_{ns} h_{ns}) \nabla_\alpha.$$

Таким же образом путём введения четырёхмерных криволинейных координат и ковариантных производных при помощи компонент $g_{\mu\nu}$ видоизменяются все уравнения частиц и полей бозевского типа, т. е. целого спина, требующие для своего описания обычных тензоров того или иного ранга, т. е. скаляров, векторов, антисимметричных тензоров 2-го ранга и т. д. С другой стороны, частицы и поля полуцелого спина, описываемые при помощи спиноров и не имеющие непосредственного классического аналога, требуют добавочного исследования. Как было ранее указано (см. § 23, стр. 128), уравнение спинора, или семивектора (тензора ранга $1/2$), в гравитационном поле может быть записано при помощи матриц γ_μ , являющихся своеобразными корнями квадратными из компонент $g_{\mu\nu}$ в виде $[\gamma^\mu (\nabla_\mu - \Gamma_\mu) - ik_0] \psi = 0$, где Γ_μ — коэффициенты, характеризующие параллельный перенос спинора.

Напомним, что сам оператор дираковского уравнения возникает в результате «линеаризации» уравнения Клейна.

При наличии гравитации матрицы γ_μ уже не являются константами, но представляют собою функции координат и времени, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

В случае слабого поля имеем

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} = 2e_\mu \delta_{\mu\nu} - 2e_\mu e_\nu h_{\mu\nu}.$$

Можно также ввести вектор слабого гравитационного поля, положив

$$\gamma^\mu = \gamma_0^\mu - h^\mu,$$

где γ_0^μ удовлетворяет обычному соотношению

$$\gamma_0^\mu \gamma_0^\nu + \gamma_0^\nu \gamma_0^\mu = 2e_\mu \delta_{\mu\nu};$$

тогда получим

$$h^\mu = \frac{1}{2} \gamma_0^\lambda e_\mu h_{\mu\lambda}.$$

Заметим, что тем самым решается не только принципиальная задача учёта воздействия на электрон гравита-

ционного поля, представленного в данном случае компонентами γ_μ , но также немаловажная задача написания уравнения Дирака в любых криволинейных координатах.

При исследовании слабого гравитационного поля будем прежде всего исходить из общего выражения лагранжевой функции

$$L = \frac{c^4}{16\pi\kappa} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} (\{\mu\alpha, \beta\} \{\nu\beta, \alpha\} - \{\mu\nu, \alpha\} \{\alpha\beta, \beta\}),$$

где

$$\{\alpha\beta, \beta\} = \nabla_\alpha \sqrt{-g}, \quad \nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Для слабого поля получаем

$$\{\mu\alpha, \beta\} = e_\beta [\mu\alpha, \beta] = \frac{1}{2} e_\beta (\nabla_\alpha h_{\mu\beta} + \nabla_\mu h_{\alpha\beta} - \nabla_\beta h_{\mu\alpha}).$$

Выбирая калибровку так, чтобы $h = e_\mu h_{\mu\mu} = 0$, и отбрасывая продольные компоненты поля, получим для поперечно-поперечной части лагранжиана

$$L = \frac{c^4}{16\pi\kappa} e_\mu e_\alpha e_\beta [\mu\alpha, \beta] [\mu\beta, \alpha].$$

В частности, для случая распространения гравитационных волн вдоль оси $x_1 = x$, замечая, что $h_{22} + h_{33} = 0$, будем иметь отличными от нуля лишь две компоненты h_{23} и $h_{22} - h_{33}$. Тогда лагранжиан будет равняться

$$L = \frac{c^4}{64\pi\kappa} \sum_{\mu, \nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Выражение лагранжиана, как обычно, даёт возможность построить всю теорию поля, в данном случае слабого поперечного гравитационного поля.

В частности, для плотности энергии, как временной компоненты тензора энергии, получаем

$$T_{44} = L - g_{(4)}^{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial g_{(4)}^{\alpha\beta}},$$

где

$$g_{(4)}^{\alpha\beta} = \nabla_4 (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) = -e_\alpha e_\beta \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t}.$$

Следовательно,

$$T_{44} = \frac{c^4}{64\pi k} \sum_{\mu, \nu=3,2} \left[\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial t} \right)^2 \right].$$

В согласии с общей теорией плотность энергии гравитационного поля, описываемого тензорными, а не спинорными функциями, оказывается положительно дефинитной. Ввиду наличия нескольких компонент у волновой функции спин гравитационного поля, очевидно, отличен от нуля. Его выражение можно найти по общему правилу (см. § 30).

В квантовой теории доказывается, что спин гравитона, т. е. корпускулы, сопоставленной гравитационной волне, равен $2 \frac{\hbar}{2\pi}$.

Напомним, что спин фотона, описываемого векторным максвелловским полем, так же как и векторного проковского мезона, равен $1 \frac{\hbar}{2\pi}$. К тому же результату относительно спина гравитационного поля можно прийти из подсчёта числа независимых компонент поля (поперечных и продольных), замечая, что значение спина s связано с числом компонент n соотношением $n = 2s + 1$.

В данном случае слабого гравитационного поля десять компонент $h_{\mu\nu}$ связаны, во-первых, четырьмя условиями калибровки и, во-вторых, условием исчезновения следа h . Следовательно, остаётся 5 независимых компонент, что ведёт к значению спина $s = 2$.

Важно отметить, что излучение слабого гравитационного поля имеет квадрупольный характер, в противоположность электромагнитному полю, обладающему непосредственно дипольным характером. Квадрупольный характер гравитационного поля связан, наглядно говоря, со следующим обстоятельством. В электродинамике простейшей излучающей системой является, как известно, диполь. Величина излучённой энергии определяется

квадратом ускорения дипольного момента. Этот же результат подтверждается квантовой механикой, которая лишь на место плеча диполя ставит матричный элемент, соответствующий переходу между двумя данными состояниями.

Для периодического движения с круговой частотой ω имеем по классической теории

$$-\frac{dU}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{r}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^4 r^2.$$

Как хорошо известно, для произвольной системы зарядов возможно ограничиться дипольным членом в общем выражении для вектор-потенциала поля, порождённого системой в том случае, когда размеры R малы по сравнению с длиной волны $R \ll \lambda$ и когда скорости зарядов малы: $v \ll c$.

Для системы частиц, обладающих одинаковым удельным зарядом $\frac{e}{m} = \text{const}$, ускорение дипольного момента равно нулю и, следовательно, дипольное излучение отсутствует. В самом деле, в этом случае

$$\mathbf{p} = \sum e_i \mathbf{r}_i = \frac{e}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{e}{m} \mathbf{r}_0 M,$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра инерции, M — общая масса системы. Однако всегда возможно выбрать начало системы координат в центре инерции, т. е. положить $\mathbf{r}_0 = 0$, следовательно, взять $\mathbf{p} = 0$. Иначе говоря, излучение будет отсутствовать, если центр инерции покоится или движется равномерно, т. е. $\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$.

Представим себе теперь, что мы интересуемся следующими членами разложения вектор-потенциала поля ввиду исчезновения дипольного излучения, или благодаря необходимости учёта размеров системы при излучении малых длин волн, когда $r \approx \lambda$, либо, наконец, по причине необходимости учёта релятивистских поправок порядка v/c . Тогда, как доказывается в электродинамике, следует принять во внимание излучение, обусловленное электрическим квадрупольным моментом и магнитным дипольным моментом системы заряженных частиц. Этот

же результат подтверждается квантовой механикой, заменяющей соответствующие классические выражения на матричные элементы. Наглядно положение вещей можно пояснить весьма просто, замечая, что при дипольном излучении мы пренебрегаем членами порядка x/λ в выражении для вектор-потенциала или для радиуса-вектора

$$e^{i\omega(t-x/c)} = e^{i\omega t} \left(1 - \frac{i\omega x}{c} \right).$$

Таким образом, второй член разложения даст в выражении для излучения поправочный множитель порядка

$$\frac{\omega^2}{c^2} x^2.$$

Действительно, величина квадрупольного излучения равняется

$$-\frac{dU}{dt} \sim \frac{e^2}{c^5} \ddot{Q}^2 \sim \frac{e^2 x^4 \omega^6}{c^5},$$

где тензор квадрупольного момента распределения частиц равняется

$$Q_{nk} = \sum (3x_n x_k - \delta_{nk} r^2).$$

Следовательно, отношение величины квадрупольного излучения к дипольному по порядку равно

$$\frac{e^2 \frac{\ddot{Q}^2}{c^5}}{\frac{e^2}{c^3} \ddot{r}^2} \sim \frac{1}{c^2} \omega^2 x^2.$$

Обратимся снова к интересующему нас случаю гравитации. Аналогично потенциалу в электростатике, потенциал гравитационного поля, вызванного распределением масс, можно представить в виде суммы членов $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots$, где φ_0 есть обычный ньютонов потенциал, обусловленный полной массой системы $\varphi_0 = -\frac{\chi m}{r}$. Потенциал диполя φ_1 в случае гравитации равен нулю. В самом деле, отношение гравитационного

заряда к массе будет во всех случаях одинаково и равно

$$\frac{\sqrt{\kappa} \cdot m}{m} = \sqrt{\kappa}.$$

Потенциал φ_2 , обязанный квадрупольному моменту распределения масс, будет иметь обычный вид

$$\varphi_2 \sim \gamma m Q_{nk} \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_k} \frac{1}{r}.$$

Поэтому, в то время как излучение электромагнитных волн имеет обычно дипольный характер и приобретает тип квадрупольного лишь в особых случаях, излучение слабого гравитационного поля является в основном квадрупольным. Не приводя здесь точного вывода величины гравитационного излучения, ограничимся лишь пояснением полученной по классической теории формулы для величины гравитационной энергии, теряемой в единицу времени:

$$-\frac{dU}{dt} \sim \frac{\kappa m^3}{c^5} \ddot{Q}^2.$$

Эта формула вполне аналогична результату электродинамики, что легко усмотреть, заменяя электрический заряд e на гравитационный $\sqrt{\kappa} \cdot m$. Квантовая теория подтверждает этот результат, заменяя величину квадрупольного момента на соответствующий матричный элемент.

Имея величину гравитационного излучения, мы можем, применяя обычное сравнение баланса энергии и силы, получить величину силы гравитационного лучистого трения или затухания.

Подобно силе лучистого электромагнитного трения, силу гравитационного лучистого трения следует также ввести в уравнение движения отдельной частицы*). Эта сила оказывается по существу равной 5-й производной по времени от квадрупольного момента, в противополож-

*) См. также Д. Д. Иваненко и А. М. Бродский, ДАН, 75, 519, 1950.

ность 3-й производной в случае дипольного излучения. Действительно, вместо

$$F_e \sim \frac{e^2}{c^3} \omega^3 x \sim \frac{e^2}{c^3} \ddot{x}$$

сейчас будем иметь

$$F_m \sim \kappa \frac{m^2}{c^3} \omega^5 x^3 \sim \frac{\kappa m^2 (x^3)^{(V)}}{c^5}.$$

Как легко проверить, излучение гравитационной энергии в случае слабого поля и нерелятивистских скоростей частиц, для которых развивается вся эта теория, ничтожно, ибо у элементарных частиц крайне малы их массы, хотя частоты колебаний велики, у астрономических же объектов, таких, как, например, двойные звёзды, несмотря на значительную величину масс, весьма малы частоты.

Подставляя для грубой ориентировки в случае звёзд $\omega \sim 10^{-3}$, $m \sim 10^{32}$, $r \sim 10^{11}$, получим $-\frac{dU}{dt} \sim 10^{32}$, что составляет примерно 10^{-20} собственной энергии.

Упомянем в заключение, что одно из наиболее интересных и на первый взгляд парадоксальных следствий релятивистской квантовой теории гравитационного поля заключается в предсказании принципиальной возможности превращения гравитационного поля в обычные элементарные частицы и обратно (например, превращения пары электрон—позитрон в два гравитона). Вероятность или эффективное сечение подобного превращения в случае слабого поля крайне мала, поскольку она определяется квадратом гравитационного радиуса $r_m = \frac{\kappa m}{c^2}$, а не квадратом электрического радиуса $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$, как в случае ставших привычными электромагнитных трансмутаций.

Не приводя вывода соответствующих квантовых формул, лежащих вне рамок данной книги, поясним лишь их смысл путём сравнения с выражением для электромагнитных превращений. Как известно, в случае малых скоростей квантовая теория даёт следующее выражение

для эффективного сечения превращения электрона и позитрона в два фотона:

$$\sigma_e \sim r_e^2 \frac{c}{v} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2.$$

Наши подсчёты для соответствующей гравитационной трансмутации, т. е. превращения той же пары частиц в два гравитона, приводят в случае малых скоростей к выражению

$$\sigma_m \sim r_m^2 \frac{c}{v} \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2.$$

Кроме замены электрического радиуса на гравитационный, мы имеем ещё появление характерного квадрупольного множителя $(\mathcal{E}/mc^2)^4$ (вполне аналогично появлению дипольного множителя $(\mathcal{E}/mc^2)^2$ в формулах векторной мезодинамики). Очевидно, в обычных условиях ($\mathcal{E} \sim mc^2$) слабого поля вероятность подобной гравитационной трансмутации ничтожна:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_e} \sim \frac{r_g}{r_e^2} \sim 10^{-82}.$$

Однако вероятность гравитационных превращений весьма быстро возрастает с энергией и при значениях $\mathcal{E} \sim 10^{21} mc^2$ будет достигать порядка электромагнитных эффектов.

Повидимому полученный результат имеет известное принципиальное значение, поскольку благодаря возможности указанных превращений стирается резкая граница между гравитационным полем и другими полями и частицами, которая имела во всех предыдущих воззрениях на тяготение. Этот вывод можно рассматривать как один из первых шагов на пути построения некоторой более общей картины строения всего вещества, соответствующей имеющимся сведениям об элементарных частицах и сопоставленных им полях и их взаимных превращениях.

ДОПОЛНЕНИЕ

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВАКУУМА

а) История вопроса

Новейшая теория полей и элементарных частиц развивается в направлении построения такой общей теории взаимодействия частиц с электромагнитным, мезонным, гравитационным полями, полем пар электронов — позитронов и других частиц, которая учитывала бы нулевые флуктуации этих полей. Иначе говоря, последнее развитие квантовой теории поля делает новый шаг в уточнении физических свойств вакуума, влияние которого сказывается в ряде эффектов. Новейшая квантовая теория поля развивается, вообще говоря, в рамках существующей релятивистской квантовой механики на базе лагранжевой функции и гамильтонова формализма и правил перестановок. При этом оказалось возможным придать всей теории более законченную релятивистскую форму на основе нового своеобразного сверхмноговременного формализма Швингера-Томонага, который, впрочем, приводит к результатам, совпадающим с полученными обычным путём. Наиболее существенными являются результаты теории не в направлении улучшения формализма, но в объяснении двух весьма важных физических явлений, обнаруженных на опыте: во-первых, сдвига энергетических уровней атомных электронов по отношению к их положению, вычисленному на основе релятивистской квантовой теории электрона Дирака, не учитывавшей нулевых флуктуаций, и, во-вторых, в доказательстве наличия у электрона дополнительного к обычному спиновому, некинематического собственного магнитного мо-

мента. Вместе с тем новейшая теория вакуума проливает известный свет на проблему собственной массы элементарных частиц.

Как мы подчеркнули, новейшая теория вакуума является существенно квантовой, так что её подробное изложение выходит за рамки настоящей книги *). Однако ввиду важности этой теории для понимания ряда свойств элементарных частиц, в особенности природы их массы, иначе говоря, для вопросов, которые анализируются в данной книге, мы дадим краткое изложение истории основных идей и результатов новейшей теории вакуума. Это тем более необходимо, что квантовая теория вакуума во многих пунктах, как и в других случаях, развивает идеи и методы, возникшие на почве классической теории. Изложение этих новейших вопросов в конце данной книги уместно также в качестве введения в квантовую теорию поля.

Поскольку новая теория вакуума в значительной мере развивалась в связи с толкованием упомянутых выше двух эффектов, мы остановимся сначала на их открытии. Установление сдвига уровней имеет долгую историю. Как известно, квантовая механика весьма успешно определяет значения энергии электронов в атомах. При этом в атоме водорода релятивистская квантовая теория Дирака давала для энергии электрона, движущегося в электростатическом кулоновом поле точечного протона, формулу, установленную ранее Зоммерфельдом, с более точными значениями квантовых чисел. Формула эта в общем прекрасно подтверждалась опытом; являясь одним из фундаментальных подтверждений предпосылок теории. В частности, согласно теории Дирака имеет место вырождение, и термы $2S_{1/2}$ и $2P_{1/2}$ должны совпадать. Это последнее обстоятельство явилось предметом специальных экспериментальных исследований, причём Хаустон и Вильямс ещё более десяти лет назад обнаружили обычным оптическим методом с помощью

*) См. реферативный сборник, серия вторая, вып. I, ИЛ, 1950 и сборник статей и рефератов под ред. Д. И в а н е н к о «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

приборов высокой разрешающей силы незначительное нарушение формулы Зоммерфельда-Дирака, которое было правильно истолковано Пастернаком как следствие сдвига уровня $S_{1/2}$ относительно $P_{1/2}$ вверх в сторону меньших по абсолютной величине энергий. Эти результаты возбудили некоторый интерес, но не показались убедительными. Сдвиг уровня указывает на уменьшение притяжения. Причину этого прежде всего казалось естественным искать в модификации закона Кулона, например, за счёт неточности протона, придавая ему какой-то эффективный радиус, или относить её за счёт размазанности заряда протона, проводящего примерно 0,2 времени в диссоциированном состоянии $p \rightarrow n + \pi_+$ (Гейтлер и др.). Несомненно, обе эти причины ослабления кулонового притяжения имеют место, однако можно показать, производя подсчёт с уточнёнными волновыми функциями электрона, с самого начала учитывающими объём ядра, что они ведут к слишком незначительным сдвигам*). Указание Бора и Оппенгеймера, что причину сдвига можно искать в более точном учёте обратной реакции поля, так же как аналогичное замечание Блохинцева в одном из докладов, не были разработаны подробнее**). Неясность ситуации лучше всего характеризуется замечанием Зоммерфельда в его работе 1941 г., что ввиду исчерпания, как тогда казалось, всех теоретических возможностей в этом направлении, следует надеяться, что никакого сдвига на самом деле экспериментально обнаружено не было! Окончательно сдвиг уровня в подтверждение прежнего открытия был обнаружен с бесспорностью уже не оптическим, но радиочастотным методом в 1947 г. Лэмбом и Ризерфордом, получившими для расстояния $(2S_{1/2} - 2P_{1/2})$ термов значение (1062 ± 5) мкц, лежащее в области тонкой структуры $(1 \text{ мкц} = 4,1 \cdot 10^{-9} \text{ eV})$; основной терм водорода соответствует энергии 13,5 eV). Эти прецизионные измерения возбудили общее внимание и повели к разработке соответствующей

*) См. Д. Иваненко и В. Родичев, ДАН, 70, 80, 1950; Д. Иваненко и А. Цандер, ЖЭТФ, 18, 434, 1948.

***) См. обзор Я. А. Смородинского, УФН, 39, № 3, 325, 1949.

теории сдвига, исходившей из учёта вакуумных флуктуаций электромагнитного поля, которыми ранее теория Дирака пренебрегала. Первоначальный нерелятивистский подсчёт Бете хотя и давал хорошее согласие с опытом, но использовал произвольное обрезание логарифмически расходящегося интеграла при $\mathcal{E} \approx mc^2$; дальнейшая релятивистская теория была более последовательной и привела к конечному и совпадающему с опытом результату. Последующий анализ подтвердил, что все другие возможные поправки и причины сдвига играют второстепенную роль. Сдвиг уровней предсказывается также в других атомах и наблюдался в общем согласии с теорией в ионизированном He^+ .

История установления дополнительного магнитного момента электрона гораздо короче. После того как несколько лет назад в лаборатории Раби радиочастотным методом исследования Зееман-эффекта ряда спектров (Na, Ga) было найдено отклонение гиромангнитного коэффициента g для электрона, указывающего соотношение между магнитным и механическим моментами, от обычного значения $g=2$, Брейт предложил объяснить это расхождение наличием у электрона дополнительного («аномального») магнитного момента. Вскоре на базе новой теории вакуума Швингер и другие получили в прекрасном согласии с опытом следующее значение магнитного момента электрона*):

$$\mu_e = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right), \quad \mu_B = \frac{eh}{4\pi mc}, \quad \alpha = \frac{2\pi e^2}{hc} \approx \frac{1}{137}.$$

В дальнейшем новая теория вакуума была применена к подсчёту отклонений от формулы Клейна-Нишины при эффекте Комптона, затем к отклонениям от формулы Резерфорда для рассеяния заряженных частиц и т. д.; однако во всех случаях, кроме двух указанных эффектов, поправки оказались лежащими за пределами возможностей современного эксперимента. Применение новой теории вакуума к мезонному полю, в частности к подсчёту

*) См., например, А. Д. Г а л а н и н, ЖЭТФ, 19, 521, 1949. Подробные рефераты статей Швингера имеются в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

магнитных моментов нуклеонов, обязанных виртуальной их диссоциации, дало качественно разумные, но далеко не окончательные результаты. К полю гравитационному новая теория вакуума ещё не применялась, несмотря на очевидную естественность подобного обобщения.

б) Сдвиг уровней

Как уже указывалось выше, новая теория вакуума является закономерным развитием предыдущего этапа релятивистской квантовой теории частиц и полей, отнюдь не выходящим за рамки этой теории при помощи каких-либо добавочных гипотез, хотя бы и обрабатываемых квантовыми релятивистскими методами. Среди последних укажем, например, гипотезу квантованного пространства—времени*), или борновскую гипотезу наличия какой-то фиксированной лагранжевой функции, или недавнее предложение Борна симметризовать теорию в координатах и импульсах на основе некоторого принципа «взаимности»**), или общую теорию «слияния» де-Броглия***), развивающую прежние идеи нейтринной теории света****), и т. д. Более того, новая теория вакуума представляет собой в значительной мере реабилитацию полной системы релятивистской квантовой механики, приведшей в своё время с необходимостью к предсказанию нулевых флуктуаций и других характеристик вакуума, которые, однако, описывались расходящимися интегралами и поэтому подвергались сомнениям в смысле их физического значения.

Как известно, неоднократно предпринимались попытки запретить переходы в состояния отрицательной энергии, полностью удалить последние из теории,

*) Эта гипотеза была предложена В. Амбарцумяном и Д. Иваненко (Zs. f. Phys., 64, 563, 1930) и неоднократно в дальнейшем обсуждалась в литературе; см., например, работу Снайдера (Spudger, Phys. Rev., 71, 38, 1947).

**) M. Born, Rev. Mod. Phys., 21, 463, 1949.

***) L. de Broglie, Theorie generale des particules à spin, Paris, 1943.

****) Основы нейтринной теории света изложены, например, в работах А. А. Соколова: ЖЭТФ 7, 1055, 1937; 8, 113, 644, 1938.

отбросить нулевые флуктуации и т. д. Новая теория вакуума в сущности предлагает прекратить эти попытки отхода в сторону от закономерных следствий релятивистской квантовой механики и принять эти следствия со всей серьёзностью, придать наиболее непосредственный, возможно даже наглядный, смысл нулевым флуктуациям полей и вместе с тем добиться с минимумом произвола хотя бы частичного устранения бесконечностей. Одну из основных идей новой теории вакуума и вывода из неё выражения сдвига уровня электрона наглядно, хотя далеко не строго, пояснил Вельтон следующим полуквантовым нерелятивистским рассуждением.

Хорошо известно, что энергию поля излучения можно представить в виде суммы энергий осцилляторов. Последние, однако, согласно квантовой теории обладают нулевой энергией \mathcal{E}_0 , не исчезающей даже в нулевом состоянии при $n = 0$:

$$\mathcal{E}_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad \mathcal{E}_0 = \frac{h\nu}{2}. \quad (57,1)$$

Всё это ведёт к тому, что даже в отсутствии фотонов имеются флуктуации энергии. Оставим для дальнейших рассмотрений эту нулевую энергию, несмотря на то, что сумма нулевых энергий по всем частотам поля равна бесконечности и попытаемся придать ей реальный смысл энергии электромагнитного поля, под действием которого непрерывно находится электрон, даже в отсутствии каких-либо внешних полей. Действие этого вакуумного поля «нерождённых» фотонов заставит электрон совершать колебания в грубом приближении согласно уравнению движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_{\text{вак}}. \quad (57,2)$$

Таким образом смещение координаты электрона под влиянием вакуумного поля будет равно:

$$\Delta \mathbf{r} = -\frac{e}{m} \int \frac{\mathbf{E}_\omega}{\omega^2} \cos \omega t d\omega,$$

где \mathbf{E}_ω — амплитуда Фурье разложения электрической

напряжённости $E_{\text{вак}} = E$:

$$E = \int E_{\omega} \cos \omega t d\omega.$$

Следовательно, для среднего по времени имеем:

$$\overline{\Delta r^2} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \int \frac{1}{\omega^4} E_{\omega}^2 d\omega.$$

До сих пор мы имеем дело с обычным классическим уравнением движения. Теперь сделаем решающий шаг и приравняем энергию поля, как известно, равную

$$\mathcal{E} = \frac{\overline{E^2 + H^2}}{8\pi} = \frac{\overline{E^2}}{4\pi} = \frac{1}{8\pi} \int E_{\omega}^2 d\omega,$$

к энергии квантовых, притом нулевых флуктуаций

$$\mathcal{E}_{\text{вак}} = \int \left(\frac{1}{2} \frac{h\omega}{2\pi} \right) \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega,$$

где второй множитель под интегралом есть известное выражение плотности состояний частоты ω в интервале $\omega, \omega + d\omega$. Отсюда $E_{\omega}^2 = \frac{2h\omega^3}{\pi^2 c^3}$.

Следовательно,

$$\overline{\Delta r^2} = \frac{2}{\pi} \frac{2\pi e^2}{hc} \left(\frac{h}{2\pi mc} \right)^2 \int \frac{d\omega}{\omega} = \text{const} \lg \frac{\omega_{\text{max}}}{\omega_{\text{min}}}.$$

Расходимость этого выражения не представляет принципиальной трудности и связана с легко устранимыми пренебрежениями. Во-первых, электрон не является свободным, но связан в атоме, что устраняет расходимость на нижнем пределе. Во-вторых, при нерелятивистском рассмотрении не имеет смысла интегрировать по сколь угодно высоким энергиям или частотам, поэтому следует в качестве верхнего предела взять не ∞ , но величину $\mathcal{E}_{\text{max}} \sim mc^2$, $\omega_{\text{max}} \sim 2\pi \frac{mc^2}{h}$. Дальнейший анализ подтверждает эти заключения.

Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что под влиянием вакуумного поля свободный покоящийся электрон совершает своего рода брауновское движение

с определённым квадратом смещения. Тем самым вакуумные колебания, как подчеркнули особенно ясно Боголюбов и Тябликов *), индуцируют у первоначально точечного электрона некоторую размазанность или эффективный радиус, величина которого оказывается средним геометрическим между классическим электрическим радиусом и квантовым радиусом, т. е. комптоновской длиной волны

$$r_{\text{вак}} \sim \sqrt{\alpha} \frac{h}{2\pi mc}.$$

Наличие подобного эффективного радиуса скажется на ряде эффектов при анализе поведения электрона. В частности для взаимодействия электрона с внешним электрическим полем вместо старого

$$V = -e\varphi(\mathbf{r})$$

мы будем иметь, с учётом вакуумных членов, новое выражение:

$$\begin{aligned} V' &= -e\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = -e \left[1 + (\Delta\mathbf{r}\nabla) + \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{r}\nabla)^2 + \dots \right] \varphi(\mathbf{r}) = \\ &= -e \left[1 + \frac{1}{6} \overline{(\Delta\mathbf{r})^2} \nabla^2 + \dots \right] \varphi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

так как

$$\overline{(\Delta\mathbf{r})} = 0, \quad (\Delta\mathbf{r}\nabla)^2 = \frac{1}{3} \overline{(\Delta\mathbf{r})^2} \nabla^2.$$

Следовательно, изменение энергии взаимодействия, с учётом влияния вакуумного поля, равно:

$$V' - V = -\frac{e}{6} \overline{(\Delta\mathbf{r})^2} \nabla^2 \varphi = \frac{2\pi e^2}{3} \overline{(\Delta\mathbf{r})^2} \delta(\mathbf{r}),$$

ибо [см. (10,8)] для атома водорода:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi e \delta(\mathbf{r}).$$

Наконец, чтобы получить искомый сдвиг уровня как усреднённое по состоянию атомного электрона значение

*) Н. Н. Боголюбов и С. В. Тябликов, Изв. АН УССР, № 5, 10, 1946.

изменения энергии взаимодействия, необходимо величину $V' - V$ умножить на $|\psi(\mathbf{r})|^2$ и проинтегрировать по всему пространству.

Тогда для искомого сдвига уровня находим значение:

$$\mathcal{E}' = \int (V' - V) |\psi(\mathbf{r})|^2 (d\mathbf{r}) = \frac{4e^2}{3} \alpha \left(\frac{h}{2\pi mc} \right)^2 |\psi(0)|^2 \ln \frac{2\pi mc}{\hbar k_{\min}},$$

где k_{\min} связано со средней энергией возбуждения $\overline{\Delta\mathcal{E}}$ соотношением

$$k_{\min} = \frac{2\pi}{\hbar c} \overline{\Delta\mathcal{E}}.$$

Как известно, для S -состояния:

$$|\psi(0)|^2 = \frac{1}{\pi a^3 n^3},$$

где a — боровский радиус, а n — главное квантовое число.

Для других состояний (P , D и т. д.)

$$|\psi(0)|^2 = 0.$$

Отсюда мы получаем формулу Бете, из которой видно, что сдвиги уровней, обусловленные вакуумными поправками, должны наблюдаться в нерелятивистском приближении только для S -состояний:

$$\mathcal{E}' = \frac{8}{3\pi} \alpha^3 \frac{Ry}{n^3} \ln \frac{mc^2}{\Delta\mathcal{E}},$$

где Ry представляет собою энергию ионизации основного состояния водорода. В частности, для $2S$ -состояния ($n = 2$, $\Delta\mathcal{E} = 17,8 Ry$) находим для сдвига термов 1040 мэв.

Величину искомого сдвига энергетических уровней мы получаем, вычислив один раз энергию взаимодействия с нулевыми колебаниями электрона свободного и другой раз электрона, связанного в атоме. Оба раза получается бесконечный результат, расходящийся квадратично. Однако разность двух расходящихся величин оказывается в нерелятивистской теории лишь логарифмически расходящейся, а в релятивистской, с учётом новых правил регуляризации (см. стр. 464) — величиной конечной и дающей в прекрасном согласии с опытом значение сдвига. Энергия взаимодействия электрона с нулевыми колебания-

ми обусловлена связью его с поперечной частью электромагнитного поля, представленного в вектор-потенциале A :

$$U_{\text{pot}} = \frac{e}{c} (\mathbf{v}A) = e(\alpha A)$$

(напомним, что в некантовой теории для покоящегося электрона этот член взаимодействия отсутствует). Наглядно говоря, взаимодействие обязано испусканию и поглощению квантов поля. В данном случае сам электрон испускает и поглощает поперечные фотоны, что приводит к бесконечной энергии самодействия или собственной электромагнитной энергии и, следовательно, соответственной бесконечной массе частицы. Эта поперечная собственная полевая энергия добавляется к полевой классической продольной электростатической энергии поля, порождённого электроном. Наряду с этим играет роль другое фундаментальное обстоятельство новой теории вакуума: перенормировка массы. Идея перенормировки массы заключается в следующем. Вместо того, чтобы отбрасывать указанные бесконечные полевые массы или устранять их сейчас же каким-либо гипотетическим образом, допустим, что последующее развитие теории каким-то образом устранил бесконечности и даст конечное значение массы. Поэтому предлагается считать указанные бесконечные члены включёнными в конечное эмпирическое значение массы, перенормировав последнюю. Эта перенормировка отнюдь не является простым переименованием выражений, так как, будучи применённой к электрону связанному, она обязывает нас вычесть из его полной полевой энергии значение полевой энергии свободной частицы. При этом разность оказывается, как указывалось, конечной.

Мы отмечали выше неоднократно, что строгий релятивистский подсчёт уменьшает степень расходимости в энергии взаимодействия электрона с его электромагнитным полем или вакуумом. Суть дела заключается в том, что электрон связан не только с нулевыми колебаниями поля электромагнитного, но также с флуктуациями поля виртуальных пар электронов—позитронов. Поэтому в присутствии электрона виртуальные электроны—позитроны

вакуума, во-первых, несколько смещаются, вакуум своеобразно «поляризуется», так что его диэлектрическая постоянная оказывается меньше единицы примерно на $\frac{1}{137}$ в области порядка $\frac{h}{2\pi mc}$ вокруг электрона *). Отметим, что подобные поляризационные поправки слишком малы:

$$\mathcal{E}'' = -\frac{8}{15\pi} \frac{\alpha^3}{n^3} Ry,$$

т. е. поляризационное смещение уровня для $2S$ -состояний примерно равно $\frac{1}{40}$ рассмотренного выше смещения \mathcal{E}' , обусловленного связью с нулевыми колебаниями фотонов. Наряду с этим всякий внешний заряд индуцирует в вакууме заряд бесконечной величины, который следует считать включённым в реальный конечный заряд**), произведя перенормировку его подобно перенормировке массы. Во-вторых, влияние вакуума пар электронов—позитронов сказывается в том, что ввиду принципа Паули возникает эффективное отталкивание электронов вакуума от реального внешнего электрона, и это перераспределение заряда в вакууме сказывается в виде размазывания заряда электрона. Как раз это обстоятельство делает классическую электромагнитную собственную энергию равной

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{2\pi e^2}{hc} \right) mc^2 \ln \frac{\lambda_c}{r_0} \quad \left(\lambda_c = \frac{h}{2\pi mc} \right),$$

т. е. расходящейся только логарифмически при стремлении эффективного радиуса электрона к нулю, $r_0 \rightarrow 0$. В-третьих, нулевые колебания электромагнитного поля взаимодействуют с виртуальными парами электронов—позитронов, благодаря чему смещение и энергия электрона, вызванные нулевыми фотонами, оказываются существенно уменьшенными. Средний квадрат смещения ока-

*) В. Вейсскопф, см. сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950, стр. 23.

**) См. Д и р а к, Сборник «Атомное ядро», ГТТИ, 1934 и сборник «Сдвиг уровней атомных электронов».

зывается теперь сходящимся и не зависящим от радиуса электрона (вместо логарифмической расходимости), а средняя энергия, приобретённая электроном под влиянием толчков нулевых фотонов (полевая собственная поперечная энергия), будет расходиться только логарифмически, а не квадратично, т. е. будет значительно более слабо зависеть от структуры электрона. Наконец, разность полевых энергий для свободного и связанного электронов оказывается, как подчёркивалось выше, конечной.

Мы не будем останавливаться сейчас на пояснении дополнительного вывода магнитного момента электрона, который, говоря наглядно, обязан воздействию нулевых колебаний вакуума на дрожащее движение шредингеровского типа, совершаемое дираковским электроном. Как известно, благодаря дрожанию обычный собственный магнетизм электрона можно наглядно истолковать как величину, обязанную круговым токам радиуса $\sim \frac{h}{2\pi mc}$.

Здесь важно лишь подчеркнуть, что значение вакуумной добавки к магнитному моменту получается совершенно естественно в рамках общей теории поля, учитывающей взаимодействие с вакуумом, а весь магнитный момент электрона будет равен

$$\mu_e = \mu_B \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \right).$$

С принципиальной точки зрения следует подчеркнуть не только успех теории при выводе сдвига уровней и получения дополнительного момента, но также наличие более общей точки зрения на природу массы. Повидимому, не исключено, что собственная масса частиц имеет двойственную природу (сравни § 34). Некоторая основная, «затравочная» масса (механическая масса по терминологии классической теории электрона Лорентца) ещё не может быть расшифрована, и не исключено, что именно её объяснение потребует существенного выхода за рамки нынешней релятивистской квантовой механики. С другой стороны, полевая доля массы, возможно, окажется в конце концов конечной, порядка $\frac{1}{137} m$.

Аналогичным образом следует подойти к объяснению масс других частиц, например нуклеонов, которые, повидимому, кроме основной «затравочной» массы будут обладать полевыми мезонными массами, а также некоторыми полевыми электромагнитными и т. д. массами. После перенормировки массы и заряда бесконечности оказываются удалёнными из теории, и всем выражениям можно вновь придать в терминах эффективных потенциалов и других величин относительно наглядный смысл. Наряду с эффективным радиусом и дополнительным магнитным моментом взаимодействие с вакуумом индуцирует, как можно показать, у электрона и других частиц эффективные мультипольные моменты высшего порядка, т. е. квадрупольный момент и т. д., которые следует учитывать в энергии связи уравнения Дирака для электрона.

После указания на основные физические идеи новой теории вакуума и пояснения двух важных эффектов, остановимся ещё коротко на некоторых более формальных, но играющих принципиальную роль сторонах современной теории поля.

в) Сверхмноговременной формализм

Наряду с развитием теории вакуума обычными методами релятивистской квантовой механики, позволившими выяснить все основные физические идеи, необходимые для объяснения сдвига уровней атомных электронов и дополнительного магнитного момента электрона, те же результаты были получены несколько иным методом нового «сверхмноговременного» формализма*). Этот формализм, не выходящий за рамки релятивистской квантовой механики, представляет известное преимущество сплошной релятивистской ковариантной формулировки теории, тогда как обычно, несмотря на ковариантный по существу характер теории, время, единое для поля и всех частиц, оказывается существенно выделенным, и ковариантность приходится доказывать дополнительно, нередко громозд-

*) J. Schwinger, Phys. Rev., 73, 415 (1948); 74, 1439 (1948); 75, 651 (1949); рефераты этих и других близких работ см. в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ. 1950.

ким путём. Сверхмноговременной формализм является обобщением многовременного формализма Дирака—Фока—Подольского, в котором в системе частиц, взаимодействующих с полем, наряду с общим для всего поля временем T для каждой частицы вводилось своё особое время t_i^*). Как было отмечено Марковым**), многовременной формализм можно применить также к классической релятивистской теории взаимодействия частиц с полем. Аналогичное замечание, очевидно, следует сделать также относительно применимости нового сверхмноговременного формализма к классической теории. В новом формализме, который можно также назвать «бесконечно временным», каждой точке поля или пространства сопоставляется своё локальное время $t = \sigma(x, y, z)$. Таким образом, время выступает в качестве пространственно-подобных гиперповерхностей в четырёхмерном пространстве, в результате чего положения в пространстве и во времени оказываются неразрывно связанными. Место дифференцирования по времени от волновой функции $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ в новой теории занимает функциональная производная от функционала $\Psi(t_{xyz}) = \Psi(\sigma)$, или в некантовой теории от функции действия $S(\sigma)$

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \rightarrow \frac{\delta \psi(\sigma)}{\delta \sigma}$$

При переходе от одной гиперповерхности к другой волновые функции преобразуются при помощи некоторого унитарного оператора

$$\psi(\sigma_2) = U\psi(\sigma_1),$$

причём для предельного случая трансформации от бесконечно удалённого в прошлом состояния к бесконечно удалённому в будущем оператор U совпадает с S -матрицей Гейзенберга. Таким образом, квантовая электродинамика и теория вакуума, остающиеся на почве лагран-

*) См. П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, ГТТИ, 1932; Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.

**) М. А. Марков, ЖЭТФ, 10, 1311, 1940.

жева и гамильтонова формализма, содержат как частный случай теорию Гейзенберга, который пытался отбросить гамильтонов формализм, полагая невозможным определить изменение ψ -функции за бесконечно малый промежуток времени, процессы в течение которого будто бы являются ненаблюдаемыми ввиду наличия предполагаемого минимального промежутка длины и времени (несколько в духе квантования пространства и времени).

г) Полевая масса фотона

Поскольку собственная полевая масса частиц обусловлена взаимодействием частицы с различными полями всех других частиц и полей, с которыми данная частица взаимодействует, иначе говоря, с частицами и полями, которые данная частица может породить, то возникает проблема конечности полевой массы фотона. В самом деле, фотон виртуально порождает пары электронов — позитронов, пары заряженных мезонов и протонов — антипротонов. Подсчёты полевой массы фотона привели различных авторов к несовпадающим результатам, в том числе расходящемуся, конечному (Вентцель) и равному нулю. Последний результат, требуемый калибровочной инвариантностью, был подтверждён в дальнейшем. Эта ситуация заставила ещё раз более тщательно проанализировать операции с различными расходящимися выражениями и попытаться установить более однозначные правила «регуляризации» подобных выражений.

д) Новые правила регуляризации

Как было уже показано выше (см. §§ 32—34), вопрос об устранении бесконечной собственной полевой энергии электрона возник ещё в классической теории Лорентца и обсуждался затем неоднократно. Все приёмы регуляризации удобно по терминологии Паули-Вилларса разбить на два класса.

1) «Реалистические» теории, которые предлагают ввести, кроме электромагнитного, какие-либо иные поля,

предполагаемые действительно существующими, энергия которых могла бы скомпенсировать бесконечность в компонентах тензора энергии электромагнитного поля и обеспечила бы как конечность полевой массы электрона (или даже привела бы к окончательному выражению этой массы, согласно добавочной полевой гипотезе), так и исчезновение компонент натяжения; последнее необходимо согласно Лауэ для обеспечения устойчивости электрона и для выполнения правильного соотношения между энергией и импульсом. К реалистическим теориям относятся: теория давления Пуанкаре в дорелятивистской схеме, теория компенсирующего векторного поля, образующего вместе с максвелловским би-полем (Сколов, см. § 34б); теория полей с высшими производными (Бопп и др. § 33)*, а также новая теория компенсирующего нейтрального скалярного поля Паиса (c -мезонов). До сих пор не удалось провести реалистическую программу в любой степени приближения квантовой теории возмущений. Возможно, что подобная теория должна с самого начала использовать правила перестановки, свободные от сингулярностей. Кроме того, ни компенсирующее векторное поле, ни c -мезоны нигде не проявляются в каких-либо физических явлениях, и вопрос об их реальном существовании остаётся открытым.

2) С другой стороны, возможно стать на «формалистическую» точку зрения и вводить для компенсации бесконечностей вспомогательные поля, которые в окончательном результате исчезают, например, путём обращения в нуль некоторых векторов или обращения в бесконечность масс, которые связаны с полями. К формалистическим теориям относится, очевидно, метод предельного λ -процесса (см. § 34а).

В связи с развитием новой теории вакуума было предложено несколько новых формалистических приёмов регуляризации. Типичным является метод Паули-Вил-

*) См. также позднейшие работы Н. И. В х а б а, Rev. Mod. Phys., 17, 200 (1945); 21, 451 (1949); Н. А. К р а м е р с, F. I. Belinfante, I. K. Lubanski, Physica, 8, 598 (1941).

ларса*), заключающийся в замене сингулярной на световом конусе функции Грина G_1 уравнений Даламбера и скалярного уравнения, а также связанных с ней функций Δ и D , определяющих правила перестановок (§§ 17 и 20), на новые регуляризованные функции G_R , являющиеся суммой подобных же функций, но с рядом вспомогательных масс $M_i = \frac{k_i h}{2\pi c}$, стоящих на месте старой массы $m = \frac{k_0 h}{2\pi c}$, связанной с частицами данного поля:

$$G_R = \sum c_i G(k_i),$$

где $G(k_i)$ согласно § 20 имеет вид

$$G(k_i) = \frac{k_i^2 c}{4\pi^2} \int \cos\left(\lambda k_i^2 \alpha + \frac{1}{4\alpha}\right) d\alpha,$$

при этом $c_0 = 1$, $M_0 = m$, а коэффициенты c_i ($i \neq 0$) и вспомогательные массы k_i подчиняются условиям

$$\sum'_{i \neq 0} c_i = 0, \quad \sum'_{i \neq 0} c_i k_i^2 = 0.$$

В конечном результате все k_i стремятся к бесконечности. Этот приём регуляризации связан с тем обстоятельством, что гриновская функция скалярного уравнения вблизи светового конуса $\lambda = c^2 T^2 - R^2 \rightarrow 0$ имеет вид (см. § 20), а также (3,1)

$$G_R = \frac{c}{4\pi} \left\{ \delta(\lambda) + \left(\frac{k^0}{4} + \dots \right) \theta(\lambda) \right\}, \quad (I)$$

где $\theta(\lambda) = \gamma(\lambda) + \frac{1}{2} = \begin{cases} 1, & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$

Вместо дискретного ряда вспомогательных масс и компенсирующих полей можно использовать непрерывное распределение. Применение подобной регуляризации подтвердило прежние результаты теории вакуума, дало требуемое значение нуль для массы фотона и внесло известную ясность также в ряд других расчётов.

Существенно отметить, что, несмотря на формалистический исходный пункт регуляризации через вспомогательные массы, можно придать этому методу более реаль-

*) W. Pauli and F. Villars, Rev. Mod. Phys., 21, 434, 1949; см. сборник «Сдвиг уровней атомных электронов», ИЛ, 1950.

ный физический смысл. В самом деле, взяв за исходный пункт регуляризованную функцию G_R , будем рассматривать её как гриновскую функцию некоторого поля. Тогда нетрудно показать, что это поле соответствует частицам разных масс M_i и описывается уравнением с высшими производными. От четырёхмерной гриновской функции можно перейти к статическому закону взаимодействия, который, очевидно, будет иметь вид (см. также § 48):

$$V = \text{const} \left\{ \frac{e^{-k_0 r}}{r} + c_1 \frac{e^{-k_1 r}}{r} + \dots \right\}.$$

При этом характерное для теории с высшими производными различие знаков коэффициентов c_i (см. § 33) непосредственно ведёт к условию (I). Мы видим, что стремление вспомогательных масс к бесконечности, необходимое для устранения компенсирующих полей в окончательном результате, с указанной только что точки зрения вовсе не обязательно.

Другие формалистические методы заключаются в том, что нерелятивистское обрезание расходящихся интегралов заменяется релятивистским. Одна из попыток в этом направлении была сделана путём введения инвариантного обрезания в пространстве импульсов электрона, на чём мы сейчас не останавливаемся. Более широко сейчас используется фейнмановское предложение релятивистского размазывания закона взаимодействия заряда с электромагнитным полем*), таким образом, чтобы эффекты с частотами, много меньшими $137 \frac{mc^2}{h}$, давали бы старый результат, в то время как расходящиеся интегралы стали бы конечными.

Практически вычисления проводятся по следующей схеме: прежде всего интеграл

$$J = \int \frac{(dk)}{k}$$

*) R. P. Feynman, Phys. Rev., 74, 939, 1948; 74, 1430 1948: подробный реферат статьи Фейнмана содержится в сборнике «Сдвиг уровней атомных электронов», (I. c).

представляется в виде

$$J = \frac{2}{c} \int (dk) \int_0^{\infty} \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) d\omega,$$

а инвариантное размазывание сводится к тому, что для устранения бесконечностей при $k \rightarrow \infty$ четырёхмерная сингулярная функция плотности $\delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)$ заменяется выражением

$$g \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) = \int_0^{\infty} \left[\delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) - \delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \lambda^2 \right) \right] G(\lambda) d\lambda,$$

где $G(\lambda)$ — произвольная гладкая функция, нормированная на единицу и достигающая максимума в области λ порядка $137 \frac{2\pi mc}{h}$. Этот метод применим как в классической, так и квантовой теории. В результате подобного обрезания полевая энергия электронов (или полевая масса), оказывающаяся конечной, определяется из выражения:

$$\mathcal{E}_0 \psi = \rho_3 \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{3}{2} \ln \frac{h\lambda_0}{2\pi mc} + \frac{3}{8} \right) mc^2 \psi,$$

где

$$\ln \lambda_0 = \int_0^{\infty} G(\lambda) \ln \lambda d\lambda.$$

Отсюда видно, что полевая масса электрона составляет всего примерно лишь $\frac{1}{137}$ часть общей массы, что было указано нами выше, а также обладает требуемыми свойствами тензорной размерности, т. е. пропорциональна матрице ρ_3 .

Для того чтобы избежать инфракрасной катастрофы, которая появляется при вычислении того же сдвига уровней, следует, согласно Фейнману, вместо функции $\delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right)$ ввести функцию $\delta \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \lambda_{\min}^2 \right)$, причём λ_{\min} подби-

рается из условия, чтобы релятивистское выражение переходило в нерелятивистскую формулу Бете, в которой ограничение на нижнем пределе обязано связи электрона в атоме (см. стр. 458).

Тогда необходимо положить:

$$\ln \lambda_{\min} = \ln 2k_{\min} - \frac{5}{6},$$

где

$$k_{\min} = \frac{2\pi(\Delta\mathcal{E})}{ch}.$$

Сдвиг S -уровней относительно P -уровней при внутреннем квантовом числе $j = \frac{1}{2}$ и любом значении главного квантового числа n будет складываться из трёх частей:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' + \mathcal{E}'' + \mathcal{E}''' = \frac{8}{3\pi} \alpha^3 Ry \frac{1}{n^3} \left(\ln \frac{mc^2}{\Delta\mathcal{E}} - \ln 2 + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right),$$

Сдвиг \mathcal{E}' (пропорциональный коэффициенту $\ln \frac{mc^2}{\Delta\mathcal{E}} - \ln 2 + \frac{11}{24}$, где $\ln \frac{mc^2}{\Delta\mathcal{E}} = 7,6876$) является по существу бетевским

сдвигом. Сдвиг \mathcal{E}'' (пропорциональный коэффициенту $-\frac{1}{5}$) связан с поляризацией электронно-позитронного вакуума.

Наконец, сдвиг \mathcal{E}''' (пропорциональный коэффициенту $\frac{1}{2}$) связан с взаимодействием дополнительного момента электрона с электростатическим полем.

Для атома водорода мы находим для общего сдвига:

$$2S_{1/2} - 2P_{1/2} = 1051 \text{ мгу},$$

что улучшает первоначальный результат Бете (1040 мгу) и находится в хорошем согласии с опытом (1062 мгу).

Заметим, что любой формальный вспомогательный метод при всём его удобстве и простоте применения (например, обрезание), даже независимо от вопросов однозначности, может, в лучшем случае, представлять собой лишь предварительную ступень теории, которая в дальнейшем должна будет придать реальный физический смысл любым

вспомогательным полям и частицам, вводимым в рассмотрение.

Следует подчеркнуть, что все перечисленные «реалистические» и «формалистические» способы регуляризации представляют собой пока что гипотетический выход за рамки современной физики, поскольку первые теории предсказывают новые частицы или поля, ещё не обнаруженные на опыте, а теории второго класса хотя и действуют, подобно реалистическим, методами релятивистской квантовой механики, но существенно выходят за рамки теории, обобщая гриновские функции и правила перестановки за счёт новых фиктивных полей, устраняемых в конечном результате. Во всяком случае несомненно, что общая теория элементарных частиц должна быть замкнутой, т. е. бесконечности во взаимодействии частиц A с частицами B должны быть компенсированы какими-либо иными, возможно, всеми остальными реальными частицами и полями.

Хотя ввиду успехов теории, позволившей объяснить новые явления и изолировать бесконечности, например, в собственной массе, потребность более существенного выхода за рамки релятивистской квантовой механики не является сейчас слишком острой, всё же вновь отметим возникновение ряда гипотез, пытающихся на базе новых допущений быстрее продвинуться вперёд в понимании элементарных частиц. Сюда относятся, в частности, теория взаимности, различные формы пятимерной теории, возрождённая гипотеза квантования пространства и времени, а также общая теория сведения одних полей к другим путём особого «слияния» (например, в духе нейтринной теории света).

Заканчивая описание успехов и затруднений теории элементарных частиц и полей, мы видим, что развитие учения о строении вещества может быть правильно понято только с точки зрения философии диалектического материализма, согласно которой каждый новый этап наших познаний связан с нахождением (на основе плодотворного сотрудничества теории и эксперимента в тесном контакте с практикой и новейшей техникой) более глубоких законов

всеобщей взаимосвязи явлений природы.

Таким образом, эволюция наших представлений о строении материи с полной убедительностью подтверждает известное положение И. В. Сталина «...что нет в мире непознаваемых вещей, а есть только вещи, ещё не познанные, которые будут раскрыты и познаны силами науки и практики.» *).

*) И. Сталин, Вопросы ленинизма, Госполитивдат, 1939, стр. 543.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алихановы, варитроны 327
Андерсон и Неддермейер, открытие μ -мезона 322
Антинейтрино 317
- Бесселя функции, асимптотическое приближение 273
 β -распад 298, 299, 315, 321, 331
 β -силы ядерные 315
- Бете формула сдвига атомных уровней 458, 469
Бегатрон 120, 253, 290
—, излучение 254, 258
—, потолок работы 258, 290
—, сжатие орбиты 258
—, условие Видерое 257
- Би-поле, теория 219, 223, 230, 465
- Блэккет, открытие каскадных ливней 329
- Боголюбова и Тябликова исследование вакуумных колебаний 457
- Боппа-Подольского электродинамика с высшими производными 211, 233
- Бора магнетон 295
- Борна-Инфельда нелинейная теория поля 201
- Брейта формула 148, 150
- Вакуум, диэлектрическая постоянная 204, 217, 460
—, квантовая теория 223, 450
—, поляризация 460
- Варитроны 327
- Вейля условие нормировки 25
- Векслера ускорители 293
- Вектор квазимагнитной индукции 384
— — напряжённости 384
— — поляризации 384
— квазиэлектрической индукции 384
— тока 384
— четырёхмерный 362
- Векторное мезонное поле 372
- Векторы ковариантные 123
— контравариантные 123
- Вентцеля-Бриллуэна метод 277
- Вернов, изучение первичной компоненты космических лучей 324
- Видерое условие 257
- Власова исследования опережающего воздействия 244
- Волны длина де-броглевская 119
— — комптоновская 121, 305
— мезонные, излучение квазимагнитным диполем 409
— —, — квазиэлектрическим диполем 409
— —, распространение в вакууме 404
— —, рассеяние с учётом затухания 426
— —, распространение в одномерном пространстве 95
— электромагнитные, излучение 87, 90, 293
— —, скорость фронта 96, 105, 114, 117
— —, фазовая скорость 96, 105, 114, 117, 118, 154
- Время, квантование 454, 470
—, обратимость 127
—, однородность 125

- Гамильтона функция 187
 Гамильтона-Якоби метод 245
 Гаусса функция 81
 Гельфанд и Яглом, теория частиц высшего спина 135
 Геометрия Лобачевского-Римана 129, 437
 — псевдоэвклидова 129, 188
 — вектор 91, 94
 — вектор квазимагнитный 407
 — вектор квазиэлектрический 407
 Гильберта-Негер теорема 133
 Гравитация 436
 —, излучение 447
 —, история теории тяготения 437
 —, квадрупольный характер поля 444
 —, квантовая теория слабого поля 441
 —, теория Зеелигера 70
 Грина функция 34, 39, 42, 45, 72, 74, 79, 86, 89, 100, 105, 107, 111, 112, 116
 Даламбера уравнение 84, 90
 δ -функция, важнейшие формулы 30
 — в n мерном пространстве 29
 — и интеграл Стильтьеса 13
 — разложение в тригонометрический ряд 22
 — — — по полиномам Лежандра 28
 — — — функциям Бесселя 26
 — — — эрмитовым функциям 28
 — — — Фурье 20
 — как предельный случай 15
 —, общая теория 11
 —, определение 11, 14, 15, 22
 —, примеры представления 22, 26, 28
 —, связь с оператором Коши 43
 Δ -функция вторая 88
 — первая 87, 227
 Дейтерон, квадрупольный момент 308
 Дейтерон, основное состояние 306
 —, энергия связи 297
 Дирака матрицы 128, 362
 — релятивистская теория вакуума 208
 — уравнение квантовое 362
 — — классическое 221, 370
 Дирихле задача 61
 — интеграл 23
 Диполь, плотность 46
 —, потенциал 47
 —, электрический момент 91
 Дипольная трудность 369, 390, 397, 418, 430, 434
 Дифференциал собственный 25
 D -функция вторая 101, 104
 — первая (перестановочная) 101, 227, 351
 Дурандина-Ершова теория векторных уравнений 374
 Жданов А. П., «звёзды» в космических лучах 325
 Законы сохранения 133, 186, 345—347, 377
 Заряды фиктивные 55, 65
 Заряженная плоскость 49, 58
 Заряженный цилиндр 52
 Зеелигера теория гравитации 70, 336
 Зеркальные отражения, инвариантность 127
 Зоммерфельда-Дирака формула 451
 Зоммерфельда постоянная тонкой структуры 400
 Иваненко модель атомного ядра 296
 — и Померанчук, предсказание «светящегося» электрона 258, 261
 — и Соколова теория «светящегося» электрона 276
 — и Фока теория ковариантной производной от спиноров 128
 Излучение гармонического осциллятора 90, 198

- Излучение гравитационное 447
 — когерентное 286
 — «сверхсветовое» 120, 154, 167
 — света электронами в ускорителях 261, 279
 — — — — —, зависимость интенсивности от частоты 272
 — — — — —, угловое распределение 269
 — тормозное мезонов нуклонами 431
 — — фотонов 432
 — электромагнитных волн 87, 90
 — — — космическими частицами 293
 Импульс излучения четырёхмерный 238
 — канонический 349
 — самодействия четырёхмерный 238
 Инвариант, интервал 126, 129
 —, плотность 139
 —, скалярное произведение 123
 —, форм-фактор 227
 — электромагнитного поля второй 140
 — — — первый 140, 200
 — — — третий 140
 Инвариантность 122, 125—129, 136, 139, 140, 199, 200, 227
 — относительно зеркальных отражений (инверсии) 127
 — — калибровочных преобразований потенциалов 131
 — — конформных преобразований 130
 — — преобразований Лоренца 126
 — — трёхмерных вращений 125
 Кароттаж, бесконечно тонкий пласт 64
 —, источник тока в скважине 62
 —, краевые задачи теории 60, 62, 64
 —, основное уравнение 61
 Квантования пространства—времени гипотеза 454, 470
 Квантовая механика нерелятивистская 250, 297, 301, 433, 451
 — — релятивистская 163, 228, 438, 448, 451, 454
 — теория «сверхсветового» электрона 163
 — — светящегося электрона 287
 Кинематика полей и частиц, общековариантная форма 128
 Клейна-Нишины формула 250, 416, 453
 Клейна уравнение волновое 99
 — — — в n -мерном пространстве 107
 Колебания нестационарные 94
 — струны 96
 — —, резонанс 98
 Комптона эффект 428
 Космические лучи, ливни каскадные 329
 — —, мезоны 325
 — —, первичная компонента 324
 — —, происхождение 323
 — —, процессы в атмосфере 325
 — —, радиоизлучение 293
 — —, электронно-ядерные взрывы 329
 Коши оператор 43
 — формула 44
 Краснушкина метод решения волнового уравнения 94
 Кронекера-Вейерштрасса символ 21, 24, 84
 Кулона закон 303
 Лагранжа функция (лагранжиан) 138, 200, 349
 Лапласа-Пуассона уравнение двумерное 41
 — — одномерное 38
 — — трёхмерное 30, 45
 Лармора инвариант 140
 Лауэ теорема 171, 177
 Ленин о неисчерпаемости электрона 293
 — об изучении строения материи 224

- Ливни каскадные 329
 Линейный ускоритель 294
 Лишница формула 52
 Лобачевского-Римана геометрия 129, 437
 Лондона теория сверхпроводимости 72
 Лорентца преобразования 126, 132
 — сила 142
 — теория электромагнитной массы 175, 193
 — уравнение 247
 — условие для потенциалов 146
 λ -предельный процесс 223, 224
 Льенара-Вихерта потенциалы 61, 148
- Магнетон Бора 295
 — ядерный 295
 Максвелла-Лорентца уравнения 144, 145, 177
 — —, инвариантность 133
 — —, интегрирование 145
 Марков, многовременной формализм в классической теории 463
 Масса, изменение со скоростью 180
 — μ -мезона 326
 — неполевая, теория 220, 461
 — π -мезона 325, 330
 — покоя 137, 197
 — полевая 121, 178, 197, 419, 461
 —, природа 121, 222
 — протона 304
 — фотона полевая 464
 — электромагнитная по Максвеллу-Лорентцу 175
 — —, уравнение движения 193
 — электрона 180
 — элементарных частиц 120
 Мезоводород 434
 Мезодинамика квантовая 420, 431
 — классическая 70, 295
 — —, уравнения с высшими производными 399
 — нелинейная 210
- Мезонная теория ядерных сил 319, 335, 357, 372, 391
 Мезонное поле, силы реакции 419
 Мезонные волны векторные, излучение квазимагнитным диполем 409
 — — —, — квазиэлектрическим диполем 409
 — — —, интегрирование уравнений 406
 — — —, квазимагнитное рассеяние 415, 428
 — — —, квазиэлектрическое рассеяние 413, 426
 — — —, распространение в вакууме 404
 — — —, рассеяние с учётом затухания 426
 Мезоны 319, 325
 — векторные 372, 386
 — в космических лучах 325
 —, время жизни 326, 331
 —, дипольность 333
 — лабораторные 325
 —, масса 320, 326, 327, 330
 —, модель Ферми 328
 — μ 326
 — нейтральные 320, 328
 —, основные свойства 322
 — π заряженные 325
 — — нейтральные 328
 — псевдовекторные 391
 — псевдоскалярные 357, 365
 —, распад 321, 326, 330
 —, спин 330
 —, теоретическое предсказание 319
 —, тормозное испускание нуклеонами 431
 «Мезотроний» 330
 Меллера-Розенфельда смесь мезонов 397
 Меллера формула 151
 Мерсера теорема 36
 Метод перебрасывания членов взаимодействия 370
 Минковского-Далленбаха тензор плотности энергии 177
 Момент диполя 18

- μ -мезон 326
 Мысовский и Жданов, метод толстослойных фотопластинок 325
- Неймана задача 62
 Нейтретто (π_0 -мезон) 320, 328
 Нейтрино 317
 Нейтрон 296, 299
 —, магнитный момент 297, 321
 —, спин 296
 Нейтроны быстрые, рассеяние 304, 314, 402
 Нетер-Гильберта теорема 133, 186
 Нуклеон 296
 —, возбуждённое состояние 327
 —, общая форма взаимодействия 395
 —, полевая масса 419
 —, тормозное испускание мезонов 431
 —, уравнения движения 424
 Ньютона закон 303
 — теория тяготения 437
- Ортонормирования условия 93
 Остроградского теорема 186
 Осциллятор гармонический 90, 198
- Пары частиц, превращение в гравитоны 448
 — — — фотоны 208, 299, 449
 — —, теория Дирака 208
 Паули-Вилларса метод регуляризации 220, 465
 π -мезоны заряженные 325
 — нейтральные 328
 Плотность дипольного момента 46
 — заряда, индефинитность 355
 — — поверхностная 40, 48, 49
 — — точечного 46, 139, 202
 — квадрупольного момента 46
 — объёмная 48, 49
 Поле движущегося точечного заряда 151
 — мезонное векторное 372, 395
 Поле мезонное векторное, векторные ядерные силы 386
 — — —, общая теория 375
 — — —, основные уравнения 372
 — — — при наличии нуклонных источников 381
 — —, интегрирование уравнений 406
 — —, квазимагнитное рассеяние 415, 428
 — —, квазиэлектрическое рассеяние 413, 426
 — — псевдовекторное 391, 396
 — — псевдоскалярное 357, 365, 395
 — —, силы реакции 419
 — — скалярное 335, 395
 — — —, общая теория 342
 — — — комплексное 352
 — электромагнитное, излучение 87, 90
 — —, импульс 171
 — —, распространение 84, 115
 — —, тензор энергии 168
 Померанчук, произвольность λ -форм-фактора 230
 Потенциал векторный 147, 148
 — диполя 47
 — заряда 39, 43, 47, 54, 73, 216
 — квадруполя 47
 — линии 43, 54
 —, обрезание 398
 — плоскости 40
 — скалярный 147, 148, 158
 Преобразований группы 132
 Преобразования инверсии 127, 132
 — калибровочные 131, 140, 145, 369, 374
 — конформные 130, 132
 — Лорентца 126, 132
 — переноса 125, 132
 — фазовые 131
 Принцип вариационный 136
 — относительности начала отсчёта 125
 — — общий 437
 — — специальный 126
 — соответствия 200

- Прока уравнения 372
 Пространство, изотропность 125
 —, квантование 454, 470
 —, однородность 125
 Протон, магнитный момент 295, 322
 —, масса 304
 —, спин 296
 Псевдовектор 134, 361
 Псевдовекторное мезонное поле 391, 396
 Псевдоскаляр 134, 361
 Псевдоскалярное мезонное поле 357, 365, 395
 Псевдотензоры 357
 Пуассона интеграл 20
 — скобки квантовые 351
 Пуассона скобки обобщенные 348
 — —, связь с δ -функцией 350
 — —, — — D -функцией 350
 — уравнение обобщенное 70
 Рассеяние быстрых нейтронов протонами 402
 — — — ядрами 314
 — — протонов протонами 403
 — мезонов квазимагнитное 415
 — — квазизлектрическое 413
 — нейтронов в пара- и ортоводороде 307
 — света на свете 207, 209
 — — свободных электронах 207, 246
 Регуляризации метод Паули-Вилларса 220, 465
 — — Фейнмана 220, 467
 — теории «реалистические» 464
 — — «формалистические» 465
 Римана-Кристоффеля тензор 129
 Сверхпроводимость, теория Лондона 72
 «Сверхсветовой» электрон 120, 154
 «Светящийся» электрон 120, 279
 Свойства трансформационные 122
 Сдвиг уровней атомных электронов 454
 Сила самодействия 121, 142, 193, 419
 Силы ван-дер-ваальсовы 302
 — инерции 129
 — «квазимагнитные» 369
 — магнитные 300
 — нецентральные 308
 — обменные 302, 311
 — реакции мезонного поля 419
 — спиновые 307
 — электрические 303
 — ядерные 295, 300, 304, 341
 Синхротрон 120, 261, 292
 Скалярное мезонное поле 335, 342, 352
 — произведение 123
 Скаляры 124, 134
 Скобельцын, электронно-ядерные взрывы 329
 Соколова теория затухания 431
 — — компенсирующего поля 219, 223, 230, 465
 Солина интеграл разрывный 108, 116
 Спин гравитона 444
 — мезона 330
 — нейтрона 296
 — поля 192, 378
 — протона 296
 — фотонов 192
 — электрона 179, 296
 Спинор 135
 Спинтензор 135
 Сталин о познаваемости мира 471
 Стильбеса интеграл 13
 Стирлинга формула 276
 «Супрачастицы» 327
 Тамма и Франка теория «сверхсветового» электрона 154
 Тензор 134, 135
 — квазимагнитного момента 384
 — момента количества движения поля 185, 189
 — плотности момента количества движения поля 190, 377
 — энергии 169, 205
 — — канонический 187, 345, 377

- Тензор энергии максвелловского поля 175
 — — метрический 188, 378
 — —, «симметризация» 191
 Тензоры метрические фундаментальные 122
 — — —, галилеевы значения 123
 Теорема взаимности 68
 — вириала 301
 — устойчивости 206
 Теория относительности общая 71, 199, 437, 439
 — — специальная 126, 173, 180, 439
 Терлецкого теория бетатрона 253, 257
 — гипотеза происхождения космических лучей 323
 Ток фиктивный 65
 Томсона формула рассеяния света 249, 415
 Тритон, энергия связи 305
 Умова-Пойнтинга вектор 161, 412
 — теорема 158.
 Уравнение волновое 84, 90, 99
 — — в n -мерном пространстве 107
 — движения в классической механике 74
 — — заряженной частицы 142, 143
 — — электромагнитной массы 193
 — телеграфное 115
 — теплопроводности 77, 79, 80, 82
 Уравнения гиперболического типа 84
 —, зависящие от времени 74
 — параболического типа 77
 — статические эллиптического типа 38
 Условия ортонормирования 93
 Фазотрон 294
 «Фактор когерентности» 267
 Фейнмана метод регуляризации 220, 467
 Ферми теория β -распада 316
 Флуктуации нулевые 454
 Фок, асимптотическое исследование бесселевых функций 273
 Формализм многовременной 229
 — сверхмноговременной 462
 Фотон, масса 464
 —, спин 192
 Френкеля обобщение максвелловских уравнений 372
 — теория магнитных диполей 407
 Функция действия 136
 Функции перестановочные 87, 88, 101, 227, 350
 Фурье-Бесселя интеграл 27
 Фурье разложение 20
 Циклотрон 120
 Частицы, «самодействие» 121, 142, 193, 419
 —, собственный магнетизм 138
 — элементарные 119
 — —, конечный радиус 121
 — —, масса 120
 Чебышева-Эрмита полиномы 28
 Черенкова эффект 120, 154, 163, 167
 Швингера смесь мезонов 397
 — формула магнитного момента электрона 453
 Шредингера уравнение 131
 Эйнштейна теория тяготения 71, 199, 437, 439
 Эйри интеграл 277
 Электрические силы 303
 Электродинамика квантовая 119
 132
 — классическая 119 и д.
 — —, основные уравнения 135
 — —, релятивистская 120
 — нелинейная 199
 — полей с высшими производными 211
 Электролиты сильные, теория 71
 Электромагнитные волны, излучение 87, 90

- Электромагнитные волны, излучение космическими частицами 293
 — —, импульс 171
 — —, распространение 84, 115
 Электрон атомный, сдвиг уровней 451
 —, гиромагнитный коэффициент 453
 —, движение в ускорителях 120
 —, излучение электромагнитных волн 261, 269
 —, изменение массы со скоростью 180
 —, классический радиус 183, 206
 —, — — гравитационный 186
 —, — — магнитный 185
 —, магнитный момент 295
 —, — — собственный некинематический 453
 — «сверхсветовой» 120, 154, 163
 — «светящийся» 120, 279
 — —, квантовая теория 287
 —, спин 179
 —, уравнение движения 238, 239
 —, — — релятивистское 256
 —, эффективный радиус 204, 217, 244, 457
 Электронно-ядерные взрывы 329
 Электроны свободные, рассеяние света 207, 246
 — связанные, когерентные колебания 251
 Электростатика, краевые задачи 55, 57, 58
 —, метод изображений 56
 —, простейшие задачи 49, 52
 Элементарные частицы 119
 Эффективное сечение, квазимагнитного рассеяния мезонов 417, 429, 430
 — — квазиэлектрического рассеяния мезонов 414, 427, 428
 Эффективное сечение превращения пар в гравитоны 449
 — — — — — фотоны 449
 — — — мезонов с учётом затухания 427
 — — — нейтронов в паре и ортоводороде 307
 — — — света на свете 209
 — — — — свободными электронами 249
 — — тормозного излучения 433
 Юкава-теория ядерных сил 319
 Ядерные силы 295, 300, 304, 315, 332
 — — бартлеттовские 312, 317, 396
 — — векторные 372, 386, 395
 — — вигнеровские 312, 396
 — — гейзенберговские 312, 317, 396
 — —, зарядная независимость 310
 — — майорановские 312, 317, 396
 — —, нецентральный характер 308
 — —, обменный характер 311
 — —, общая форма взаимодействия нуклонов 395
 — — парные 315
 — —, полевая теория 307, 315
 — — псевдовекторные 391
 — — псевдоскалярные 357, 365
 — —, радиус действия 306, 341
 — — скалярные 335, 342, 352
 — —, спиновый характер 307
 Ядро, «врождённый» магнетизм 321
 —, модель 295
 —, потенциал 306
 —, размеры 304
 —, спин 295
 —, статистика 296, 297
 —, энергия связи 297, 305

Редактор *В. А. Лешковцев.*
Техн. редактор *Л. А. Голубкова.*

Подписано к печати 23/IV 1951 г.
Бумага 84×108/32. 7,5 бум. л. 24,6
печ. л. 26,24 уч.-изд. л. 42 660 тип. зн.
в печ. л. Тираж 10 000 экз. Т-02319.
Цена 9 р. 20 к. Переплёт 2 р. Зак. № 795.

16-я типография Главполиграфиздата
при Совете Министров СССР.
Москва, Трехпрудный пер., 9.