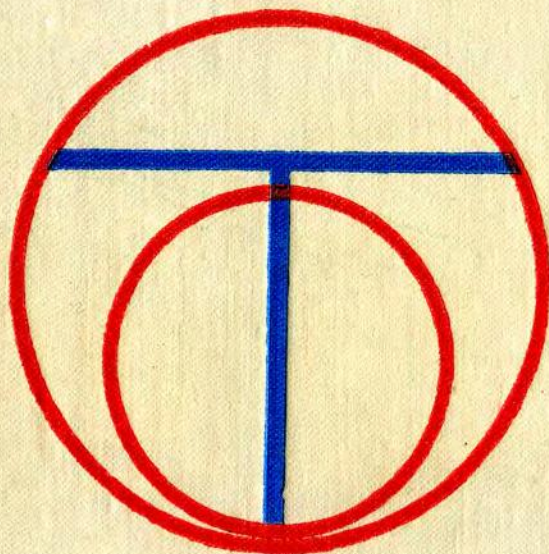


О. С. ИВАНИЦКАЯ

ЛОРЕНЦЕВ БАЗИС
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ
ЭФФЕКТЫ
В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ
ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ



ЛОРЕНЦЕВ БАЗИС
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ

О. С. ИВАНИЦКАЯ ◆

АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛОРУССКОЙ ССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт физики

О. С. ИВАНИЦКАЯ

**ЛОРЕНЦЕВ БАЗИС
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ
ЭФФЕКТЫ
В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ
ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ**

МИНСК
«НАУКА И ТЕХНИКА»
1979

Иваницкая О. С. Лоренцев базис и гравитационные эффекты в эйнштейновой теории тяготения. Мн., «Наука и техника», 1979, 336 с.

В монографии дается систематизация части гравитационных эффектов (100), предсказываемых эйнштейновой общей теорией относительности (ОТО). Излагается специальное представление (тер-радное) ОТО, в котором в качестве гравитационных потенциалов выступают компоненты лоренцева базиса — обобщенные коэффициенты Ламе, подчиненные эйнштейновым уравнениям тяготения. Строится общая теория калибровочных условий — дополнительных условий, накладываемых на лоренцев базис. На ее основе с единой точки зрения излагаются другие специальные формулировки ОТО, которые также производят локальное $(3+1)$ -расщепление 4-пространства, выделяя подгруппы преобразований и их инварианты. Предлагается метод анализа физической структуры некоторых эффектов ОТО, привлекающий понятия физических времени и расстояния пробных тел, а также времени задержки их гравитационным полем, обусловленной десинхронизацией. Обсуждается тензорная запись бивекторной параметризации группы Лоренца.

Монография рассчитана на студентов и преподавателей физических факультетов и особенно на научных работников в области релятивистской физики. Она будет полезна лицам, уже изучившим эйнштейнову ОТО в метрической формулировке и начинающим знакомство с ее представлениями, привлекающими полностью или частично лоренцев базис с целью расширения возможности физической интерпретации.

Иллюстраций 15. Библиография — 717 названий.

Редактор
академик АН ЭССР Х. П. КЕРЕС

Рецензенты:
доктор физико-математических наук В. И. Родичев,
кандидат физико-математических наук И. С. Сягло

Эйнштейн полагал, что основная трудность при изучении ОТО в ее метрической формулировке определяется тем, что связь между величинами, входящими в эту теорию и измеряемыми, гораздо сложнее, чем в других теориях. Требуя локальной справедливости СТО в присутствии гравитационного поля, Эйнштейн ввел в ОТО элементы аппарата СТО. Дальнейшее развитие ОТО многими авторами на основе этих элементов преследовало цель преодолеть указанную трудность. В результате были созданы специальные формулировки ОТО (тетрадное ее представление, формализм хронометрических инвариантов и др.), включающие в аппарат единичные векторы — лоренцев базис (репер, локальные лоренцевы системы). Таким образом, лоренцев базис, являясь важнейшим элементом специальной теории относительности, вошел и в общую теорию относительности.

Разные специальные формулировки ОТО используют векторы лоренцева базиса полным или неполным их комплектом при разных исходных позициях, но так или иначе подчиняют компоненты этих векторов эйнштейновым уравнениям тяготения, сохраняя лишь частично свободу их выбора. Эта свобода реализуется введением дополнительных условий (калибровочных). В данной монографии отдельные специальные формулировки ОТО рассматриваются не обычным для них путем введения хроно-монады независимо от лоренцева базиса в целом и от исходных позиций и уравнений тетрадного представления, но именно в его рамках. Независимо напоминаются отдельные фрагменты и уравнения, а также элементы истории. Приведенные в монографии многочисленные выдержки из книг и статей относятся в основном к идеям Эйнштейна, получившим в специальных формулировках ОТО дальнейшую разработку.

Лоренцевы векторы, в силу их единичности играющие роль эталонов, позволили конструктивно сформулировать эйнштейново понятие измеряемых величин в соответствии с метрологической терминологией и установить в общем виде их связь с величинами метрической формулировки.

В первых же работах по ОТО Эйнштейн начал извлекать из общих уравнений теории конкретные следствия, говорящие о новых эффектах. Сейчас накопился обширный материал, предсказывающий множество гравитационных эффектов ОТО. Рассмотрение в монографии значительной части этого материала не должно создать иллюзии, будто тем самым обнаруживается много эффектов — кандидатов на экспериментальную проверку ОТО в современных условиях. Обсуждаемые гравитационные эффекты весьма слабы, входят в совокупность других явлений, что осложняет их экспериментальное исследование. Поэтому их систематизация представляет интерес главным образом с точки зрения теоретического анализа содержания эйнштейновой ОТО и его лучшего понимания, но некоторые из рассмотренной совокупности эффектов уже обсуждаются в связи с экспериментальными программами.

В настоящее время к опытной проверке ОТО привлекается новая техника (новейшие стандарты частоты, лазеры, космические аппараты и т. д.). Современные программы гравитационных экспериментов не предъявляют требований к выражению гравитационных эффектов ОТО в ином, нелоренцевом базисе. Поэтому представлениями эйнштейновой ОТО, непосредственно контактирующими с областью гравитационного эксперимента, являются ее формулировки в лоренцевом базисе. Отнесение величин ОТО к этому базису сделало их трансформационные размерности координатно-независимыми, но сами величины, однако, разыскиваются в виде функций от координат, которые могут быть выбраны произвольно. Сравнение таких величин с экспериментальными данными избежит произвола лишь в том случае, если те и другие отнесены к одной и той же координатной системе.

Монография содержит главу (VI), отведенную тензорной записи известной параметризации Ф. И. Федорова для группы Лоренца, цель которой облегчить применение в будущем этой параметризации в ОТО.

Выражаю большую признательность Ф. И. Федорову, А. А. Богушу за помощь при написании главы VI, Н. Н. Костюковичу за участие в сборе материала для двух первых глав монографии и помощь при их оформлении, а также расчеты, устранившие некоторые пробелы.

Пользуясь возможностью, благодарю Х. П. Кереса за научное редактирование и связанные с ним полезные и внимательные обсуждения различных вопросов ОТО, В. И. Родичева и И. С. Сягло за критические замечания по всей монографии, а В. А. Брумберга, П. Кууск и Ю. Г. Сбытова — за замечания по двум первым главам, а также других лиц, принимавших участие в обсуждении этих глав.

Были полезными краткие, но стимулирующие обсуждения

оригинальных фрагментов из глав IV и V монографии с профессором Э. Шмутцером (Йенский университет, ГДР), а также с Д. Е. Либшером и У. Каспером (Центральный институт астрофизики АН ГДР, Потсдам).

Основные обозначения

Сокращения СТО, ОТО — специальная, общая теории относительности, НТТ — ньютонова теория тяготения, ГВ — гравитационная волна, ИСЗ — искусственный спутник Земли, R -тензоры — определенные относительно подгруппы пространственных вращений (R -подгруппы), х. и. — хронометрическая инвариантность, к. и. — кинеметрическая инвариантность.

Константы c — скорость света в вакууме, κ, γ — гравитационные постоянные ОТО, НТТ, Λ — космологическая постоянная.

Индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ до $\kappa - 1, 2, 3$; μ, λ, ν, \dots 0, 1, 2, 3; $a, b, c, d \dots$ до $k - 1, 2, 3$; $k, l, m, n \dots$ 0, 1, 2, 3.

Базисные векторы и их произведения e_μ — векторы, касательные к координатным линиям, $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$ — метрические гравитационные потенциалы, e_k — лоренцев базис (четверка), тетрада векторов таких, что $\eta_{kn} = e_k \cdot e_n = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $h_{\mu k} = e_\mu \cdot e_k$ — обобщенные коэффициенты Ла-ме (тетрадные гравитационные потенциалы).

Коэффициенты связности и тензор кривизны $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ — символы Кристоффеля, $\gamma_{kmn}, \gamma_{km\lambda}, \gamma_{\mu\nu\lambda}$ — коэффициенты вращения Риччи, $F_a = \gamma_{(0)a(0)}$ — искривление, $D_{ab} = \gamma_{(0)(ab)}$ — тензор деформации, $A_{ab} = \gamma_{(0)[ab]}$ — тензор угловой скорости системы отсчета, $R^\mu_{\nu\lambda\sigma}$ — мировые компоненты тензора кривизны, построенные из $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$; $R^k_{n\lambda\sigma}, R^k_{nrs}$ — соответственно построенные из $\gamma^k_{n\lambda}, \gamma^k_{nr}$.

Гравитирующие параметры M — гравитирующая масса, $m = \frac{\gamma M}{c^2}$, J_2 — квадрупольный момент, $\sigma = 15J_2 r_1^2 / 2m^2$, Q — электрический заряд, $k = \gamma Q^2 / c^4$, a — удельный угловой момент, $\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi\gamma}$ — плотность массы гравитирующего вакуума, \tilde{q} — гравитирующий электрический заряд легкой массы, $\tilde{k} = \frac{\gamma \tilde{q}^2}{c^4}$, \tilde{n} — гравитирующий магнитный момент легкой массы (плотность), h_+, h_\times, h_0 — амплитуда ГВ.

Пробные параметры μ — масса, q — электрический заряд, $S, S^{\mu\nu}$ — вектор, тензор пробного спина.

Параметры орбит e — эксцентриситет, $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр (a — большая полуось эллипса), b — прицельный параметр, ϵ, h — постоянные энергий, площадей.

Частоты, периоды ν — частота по собственному, физическому времени, $\omega_0 = [mc^2(1 - e^2)^3/p^3]^{1/2}$ — кеплерова частота, ω_g — частота ГВ, $\mathcal{T}_\psi, \mathcal{T}_\varphi$ — собственные аномалистический и сидерический периоды, T_ψ, T_φ — координатные аномалистический и сидерический периоды, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ — кеплеров период.

Скорости $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, $v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ — 4-скорости, ds — элемент интервала,

$d\tau$ — элемент временно-подобного интервала, $u_\mu u^\mu = -1$, $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ — волновой вектор, $d\lambda \neq 0$ на световом конусе.

Ускорение $g^\alpha \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v^\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)$, отнесенное к локальным лоренцевым сечениям 4-пространства ОТО: (6.1) — (6.5), (6.7) — (6.12); также «метрический вектор» $g_\alpha \equiv -h_\alpha^{(0)}/h_0^{(0)}$, в частности (в сопутствующей системе координат) $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00}$: (21.31), (21.35).

Параметры лоренцева преобразования $q = a + ib$, $g = c + id$ — комплексные векторы-параметры: § 25; ρ_{kn} — бивектор-параметр: § 26.

Преобразования коэффициентов $P^{\mu'}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu}$ — голономных координат;

$L^{k'}_n(x^\lambda)$; $L(x)$ — локальное (обобщенное) преобразование Лоренца; $L^k_n = a\delta^k_n + b\rho^k_n + c^D\rho^k_n + d\rho^{km}p_{mn}$ — лоренцев полином (полиномиальное представление коэффициентов лоренцева преобразования): § 26, 27.

Метрический тензор в 3-пространстве $g_{\mu\nu}^*$: (14.17), § 21, 24, $\gamma_{\alpha\beta}$: (21.10), (21.26), $\gamma^{\alpha\beta}$: (21.55), а также в связи с выдержками из литературы: h_{ik} (21.9), (21.14), (22.13); y_{ik} (21.55); $b_{\mu\nu}$ п. 21.4 и др.

Другие усеченные метрические тензоры $(g_{\mu\nu})_{(1)} \equiv g_{\mu\nu} - h_\mu^{(1)}h_{\nu(1)}$; $(g_{\mu\nu})_{(01)} \equiv g_{\mu\nu} - h_\mu^{(0)}h_{\nu(0)} - h_\mu^{(1)}h_{\nu(1)}$ и др.: § 17.

Специальные мировые компоненты $Q^\mu \equiv h^\mu_{(0)}Q^{(0)}$; $Q^* \equiv h^\mu_a Q^a$; $Q^{\mu\nu} \equiv h^\mu_{(0)} \times h^\nu_{(0)} Q^{(0)(0)}$; $Q^{*\mu\nu} \equiv h^\mu_a h^\nu_b Q^{ab}$ и т. д.: (14.5), (14.9) — (14.11), (14.17), (16.2) — (16.5).

Уравнения тяготения Эйнштейна и геодезической линии в специальных представлениях

тетрадном: (13.8), (15.34), (14.32), (14.38), (15.28);

R-инвариантно: (20.37—20.39), (20.31), (20.32), (20.35);

х. и.: (21.72), (21.69), (21.70);

к. и.: (21.73), (21.75);

ортометрическом: (22.57), (22.58), (22.62);

представлении со специальным кручением: (23.19—23.22), (23.18).

В выдержках из литературы **сохраняются обозначения**, принятые их авторами, что в большинстве случаев в тексте не оговаривается.

В угловые скобки берутся комментарии, включенные в выдержки из публикаций (за исключением главы VI).

Комментарии к выбору обозначений, принятых в монографии, даны в п. 12.6.

**СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ,
ПРЕДСКАЗЫВАЕМЫХ ОТО
(НЕКОТОРЫЕ ЭФФЕКТЫ, СВЯЗАННЫЕ С ЧЕТЫРЬМЯ
КРИТИЧЕСКИМИ ЭФФЕКТАМИ)**

...Гравитационное поле в рамках общей теории относительности в отличие от ньютоновой теории тяготения должно влиять на характер любых физических процессов. Поэтому в принципе должно существовать бесконечное число явлений, по которым можно проверить утверждения общей теории относительности.

К. МЕЛЛЕР

ВВЕДЕНИЕ

Под решающим влиянием специальной теории относительности ньютонова теория тяготения уступила место общей теории относительности Эйнштейна. Эйнштейновы уравнения гравитационного поля, уравнения движения в этом поле, а также связь между ними стали намного сложнее. Поэтому из них вытекает много новых следствий: поправки к решениям ньютоновой теории тяготения, новые частные решения уравнений поля и уравнений движения, содержащие новые параметры, новые ограничения и т. д. Некоторые из частных следствий уравнений ОТО получили более или менее полную физическую интерпретацию и название гравитационных эффектов ОТО.

Долгие годы после основных работ Эйнштейна по общей теории относительности [1] главное внимание уделялось не исследованию вытекающих из нее конкретных эффектов, а ее теоретико-математическим разработкам и обобщению [2]. Новые возможности экспериментальной техники и резкое повышение точности измерений изменили ситуацию. Обсуждение предсказываемых ОТО явлений стало предметом не только специальных обзоров, таких, как [3—8], традиционных конференций [9—11], но и посвященных гравитационным эф-

фактам и их экспериментальной проверке специальных симпозиумов [12—15]. Как в статьях, так и в монографиях [16—19] обсуждается уже не просто опытная проверка конкретных предсказаний теории, но и их связь с отдельными принципами ОТО. Все это стимулирует расширение числа программ гравитационных экспериментов и дальнейшее извлечение конкретных следствий при решении частных задач ОТО. Теперь уже представляет интерес как более подробный анализ четырех подтвержденных эффектов ОТО, так и систематизация многих других предсказанных ею эффектов, несмотря на то что большинство из них не может быть подвергнуто опытной проверке в недалеком будущем.

В систематизирующую сводку отобранных 100 эффектов ОТО включена часть только неквантовых, не связанных с излучением тел и не сугубо космологических эффектов. При их отборе не имела решающего значения количественная сторона эффекта. Учитывались прежде всего новизна, качественное отличие от НТТ. В большинстве случаев даны лишь краткие описания эффектов и только основные уравнения или неравенства, как правило, без вывода. Они приводятся для групп эффектов, а где это труднее — только для отдельных эффектов. Несмотря на принятые ограничения при отборе эффектов, сделанная сводка позволяет иллюстрировать большое разнообразие физических следствий эйнштейновой теории тяготения по сравнению с НТТ. Часть из приведенных соотношений и величин, описывающих эффекты, выходит за рамки метрической формулировки ОТО. Это требует привлечения специальных ее формулировок, относящих величины к лоренцеву базису (реперу) СТО — единичным векторам e_m в смысле требования $\eta_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, что всегда возможно в силу эйнштейнова постулата о локальной справедливости СТО в ОТО. Некоторые из величин, описывающих эффекты, в принципе не отнесены к лоренцеву базису, но, в частности, в определенном приближении отождествляются с отнесенными к e_m .

С частью отобранных эффектов можно познакомиться по различным монографиям и пособиям, посвященным общей теории относительности. Однако в них привлекается сравнительно небольшое их число, отдается предпочтение некоторым группам эффектов (чаще всего критическим). С другой частью описанных ниже явлений можно познакомиться по журнальным обзорам. Для них, однако, характерен уклон в сторону отбора эффектов в очередь на экспериментальную проверку в ближайшее время. Поэтому выбор эффектов в этом случае определяется не столько их качественной стороной и характером новизны по сравнению с НТТ, сколько современными техническими возможностями эксперимента. На-

конец, описание большей части эффектов можно найти только в отдельных статьях.

В первой главе монографии рассмотрим четыре группы эффектов ОТО, повторяя их систематизацию [20], продолженную в работе [21]. Краткая сводка данных обзоров «первой сотни» эффектов ОТО приведена в статье [22]. В монографии по сравнению с работами [20—22] сделаны небольшие изменения.

§ 1. ПАРАМЕТРЫ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ ОТО

1.1. Уравнения поля и движения как источники эффектов.

Гравитационные эффекты ОТО выявляются при решении частных задач на основе эйнштейновых уравнений тяготения:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

уравнений движения и других дополняющих их уравнений — координатных условий, уравнений состояния, общековариантных уравнений Максвелла, условий на спин и т. д. [19, 23—26].

Эйнштейново обобщение понятия источника гравитационного поля допустило в правую часть (1.1) тензоры энергии-импульса любых негравитационных полей. Это увеличило по сравнению с НТТ число физических характеристик, играющих роль параметров в выражениях для гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$. Среди них не только ньютонова масса, но и электрический заряд, угловой момент, космологическая постоянная и др. Далее будем называть такие параметры гравитирующими, например «гравитирующая масса», «гравитирующий заряд», «гравитирующий спин» и т. д. Лишь ньютонова масса m является общим гравитирующим параметром для ОТО и НТТ. Однако в ОТО этот параметр сочетается с различными ее отличительными требованиями, в частности с отказом от абсолютной одновременности: $T_{00} = \rho \dot{x}_0 \dot{x}_0$, где $\dot{x}^0 = dx^0/dx^{(0)}$, а $x^{(0)}$ — собственное время. В результате даже в простейшем из полей тяготения ОТО, шварцшильдовом, выявляется множество гравитационных эффектов, отсутствующих в НТТ. Оно пополняется новыми эффектами, если $T_{\mu\nu}$ содержит и другие параметры.

Разыскание уравнений движения в ОТО в силу нелинейности (1.1) является, вообще говоря, весьма сложной задачей. Она упрощается для тел, не оказывающих влияния на окружающее гравитационное поле, т. е. не вносящих вклада в гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$. Такие тела называют пробными. В наиболее простом случае пробное тело обладает един-

ственным параметром — малой массой μ , который, сокращаясь (в силу принципа эквивалентности), выпадает из уравнений движения. Такие, простейшие, пробные тела движутся согласно уравнениям геодезической линии

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu = 0, \quad \dot{x}^\sigma = dx^\sigma / d\tau. \quad (1.2)$$

Гравитационные эффекты ОТО, следующие из (1.1) и (1.2), выражаются поэтому только через «гравитирующие параметры» — входящие в $g_{\mu\nu}$. В случае системы «равноправных» тел в потенциалы $g_{\mu\nu}$ ее поля и в уравнения движения каждого из тел входят все параметры тел (их массы, электрические заряды, вращательные и магнитные моменты и др.). Уравнения движения при этом отличны от (1.2). Возможны и промежуточные случаи, когда пробное тело обладает, кроме массы μ , и другими параметрами — электрическим зарядом q , спиновым моментом S и др., которые уже не выпадают из уравнений движения, но еще не входят (в соответствующем приближении) в $g_{\mu\nu}$. Их движение также не является геодезическим. В частности, уравнение (1.2) заменяется системой уравнений Папапетру

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\tau} \left(\mu u^\lambda + u_\sigma \frac{DS^{\sigma\lambda}}{D\tau} \right) &= - \frac{q}{c^2} F^\lambda{}_\sigma u^\sigma + \frac{1}{2} R^\lambda{}_{\nu\sigma\kappa} u^\sigma S^{\nu\kappa}, \\ \frac{DS^{\mu\nu}}{D\tau} + u_\lambda \left(u^\mu \frac{DS^{\nu\lambda}}{D\tau} - u^\nu \frac{DS^{\mu\lambda}}{D\tau} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $S^{\mu\nu}$ — тензор спина движущегося тела, $F_{\mu\nu}$ — тензор внешнего электромагнитного поля [27]. Далее параметры, не входящие в $g_{\mu\nu}$, будем называть «пробные параметры» движущихся тел, а сами пробные тела в зависимости от наличия соответствующих параметров просто «пробная масса», «пробный заряд», «пробный спин» и т. д.

Многообразие различных гравитирующих и пробных параметров, а также разнообразие начальных условий, вносящих в решения уравнений движения параметры орбит, порождают большое число их комбинаций и соответственно множество решений эйнштейновых уравнений поля и уравнений движения. Это ведет к предсказаниям множества разнообразных эффектов ОТО. Некоторые из них однотипны, например гравитационные сдвиги спектральных линий. Однако зависимость эффектов от различных из указанных параметров придает им специфические черты, в результате чего они могут выступать как самостоятельные эффекты.

Разумеется, переход к системе многих тел, к учету излучения движущихся тел, к эффектам квантовой области, кос-

мологическим решениям (1.1) весьма расширил множество конкретных предсказаний ОТО, отличающих ее от НТТ. Для их описания, кроме указанных, введены и некоторые другие параметры.

1.2. Общие замечания к определению «эффектов ОТО».

Прежде всего, эти эффекты связаны с новыми понятиями ОТО, отсутствующими в НТТ, например. собственного времени. Одни эффекты выражаются определенными соотношениями ОТО, отнесенными к разным условиям, например к двум разным точкам в конкретном гравитационном поле, или отнесенным к двум частицам с разными зарядами или по-разному ориентированными спинами и т. д. Другие эффекты, и таких много, определяются сравнением соотношений ОТО с их же предельными выражениями. В ультрарелятивистских случаях сравнение ведется с соотношениями СТО, как например в эффекте Шапиро, где начальная скорость фотона на бесконечности равна скорости света в вакууме. В таких случаях, строго говоря, «в теории Ньютона эффект... вычислить невозможно, поскольку для фотонов в принципе не существует нерелятивистское приближение» [28, с. 36]. Предельные переходы в ОТО явились предметом многих глубоких и специальных исследований. Их изучение проводилось Картаном и Фридрихсом [29, 30], Траутманом и Докурором [31, 32] и особенно Кересом [33] и затем Коппелем [34]. Наиболее сильный предельный переход $c^2 \rightarrow \infty$ переводит ОТО сразу в НТТ. В этом случае снимаются все постулаты ОТО, привнесенные Эйнштейном. Промежуточные предельные переходы (в частности, «нерелятивистские гравитационные поля» [33, 34]) возникают при снятии лишь некоторых постулатов эйнштейновой теории. При выделении таких пределов появляется возможность обнаружения эффектов или их составных частей, обусловленных лишь некоторыми постулатами теории. Такого рода сравнения ОТО с ее нерелятивистскими пределами особенно полезны для анализа и возможного изучения на эксперименте отдельных принципов ОТО. В частности, в связи с этим представляет интерес цикл работ [35—52].

Астрономические наблюдения—сложный глобальный процесс, на основе которого не всегда можно выделить долю некоторого эффекта ОТО, легко вычлняемую в рамках теории. Ряд эффектов ОТО схож с некоторыми эффектами НТТ в более сложных задачах, особенно вызываемых возмущениями (прецессии орбит, захват тел и др.). При обработке данных астрономических наблюдений это создает значительные трудности выделения именно эффекта ОТО. Теоретически же сходные явления НТТ и ОТО обычно не смешиваются, поскольку относятся к совершенно разным задачам этих теорий. Так, прецессия (смещение) перигентра в НТТ, вызываемая

возмущениями, выходит за рамки задачи одного гравитирующего тела. Смещение же перицентра в задаче Шварцшильда не связано с возмущениями, обусловленными присутствием других тел, т. е. порождается иными физическими причинами.

Эффекты СТО всегда можно отнести к инерциальной системе и описывать с помощью связанных с ней четырехмерных псевдодекартовых голономных координат. Голономные же координаты ОТО всегда криволинейны. В то же время для описания любого гравитационного эффекта ОТО в согласии с принципом общей ковариантности должна быть найдена характеризующая его координатно-независимая величина. Как уже отмечалось, это сделано не во всех публикациях, посвященных выявлению гравитационных эффектов ОТО.

Из сказанного видно, что понятие «эффект ОТО» сложнее и шире, чем «эффект СТО».

Может возникнуть вопрос, не слишком ли раздроблены эффекты, описанные в двух первых главах монографии, не следует ли некоторые из них объединять в один более крупный эффект. Такого рода укрупнения, конечно, возможны, причем объединения могут быть произведены по-разному. В частности, могут быть произведены объединения и среди уже подтвержденных опытом предсказаний ОТО: трех рассмотренных самим Эйнштейном и четвертого — эффекта Шапиро. Из § 24 будет видно, что соответствующий интегральный перевод времени запаздывания в угловую меру дает угол отклонения луча. Следовательно, два эффекта — «запаздывания» и «отклонения» (их обычно рассматривают раздельно как самостоятельные эффекты ОТО) — могут быть объединены в один эффект, который можно выразить либо во временной мере, либо в угловой мере. Однако представляется естественным, и не только по историческим соображениям, сохранить деление уже проверенных предсказаний ОТО на 4 эффекта. Тогда становится рациональным аналогичное деление и многих других следствий ОТО. Такая тенденция имеется в литературе. Авторы, предсказывающие или обсуждающие частные следствия, посвящают им отдельные публикации. В некоторых случаях обсуждаются и самостоятельные экспериментальные методы их обнаружения. Так, например, в литературе обсуждаются гравитационные эффекты ОТО Вебера—Брагинского, Кустаанхеймо—Лехти, ван Паттена и Эверитта, эффект дрейфа точки встречи, эффект Широкова и многие другие, выявляемые при более детальной разработке ОТО. Учитывая эту тенденцию, будем рассматривать сводку эффектов ОТО именно в «мелком плане».

1.3. Метрические гравитационные потенциалы наиболее изученных полей. Они являются решениями системы (1.1) в

виде функций от координат и параметров источников полей тяготения.

Статические гравитационные поля

Поле Шварцшильда [53] *)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dx^{0^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.4)$$

является точным решением вакуумных уравнений (1.1) при $\Lambda=0$ в стандартной системе координат. Хотя криволинейные координаты входят в ОТО как неизмеряемые величины, как не отнесенные к лоренцеву базису (см. гл. III), углы θ и φ в (1.4) иногда отождествляются с измеряемыми астрономами. Отличие r от астрономической координаты не превышает одной восьмимиллионной части [55]. По поводу временной координаты смотри, например, монографию [56]. Согласно общепринятой интерпретации, метрика (1.4) описывает гравитационное поле вне изолированной сферически-симметричной массы M . Параметр m является постоянной интегрирования и по принципу соответствия с НТТ определяется в виде $m = \gamma M c^{-2}$. Для Солнца $m_{\odot} = 1,4766 \cdot 10^5$ см, а для Земли $m_{\oplus} = 0,4438$ см. Если поле Солнца или Земли описывать метрикой (1.4), то фигурирующее в $g_{\mu\nu}$ отношение m/r на поверхности Солнца равно $2,122 \cdot 10^{-6}$, а на поверхности Земли — $6,980 \cdot 10^{-10}$. Остальные статические и стационарную метрики будем задавать в «шварцшильдово-подобных» координатах, чтобы после исключения новых параметров источников поля они переходили в (1.4). Это удобно для выделения ключевых эффектов в некоторых группах.

Поле Вейля—Леви-Чивита [57, 58]. Квадратичная форма, описывающая поле вне аксиально-симметричной массы, имеет вид [59]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left\{ 1 + \frac{4m^3\sigma}{15r^3} \left(1 + \frac{3m}{r}\right) P_2(\cos \theta) \right\} dx^{0^2} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left\{ 1 - \frac{4m^3\sigma}{15r^3} P_2(\cos \theta) - \frac{m^4\sigma}{5r^4} (5 \cos^4 \theta - 1) \right\} dr^2 +$$

*) Данное решение независимо получено также Дросте [54].

$$\begin{aligned}
& + r^2 \left\{ 1 + \frac{4m^3\sigma}{15r^3} \left(1 + \frac{3m}{r} \right) P_2(\cos\theta) \right\}^{-1} \sin^2\theta d\varphi^2 + \\
& + r^2 \left\{ 1 - \frac{4m^3\sigma}{15r^3} P_2(\cos\theta) - \frac{m^4\sigma}{5r^4} (5\cos^2\theta - 1) \right\} d\theta^2, \quad (1.5)
\end{aligned}$$

где в $g_{\mu\nu}$ сохранены лишь необходимые для дальнейшего рассмотрения члены низших порядков по m/r . Характеризующий аксиальные свойства гравитирующей массы m квадрупольный момент J_2 *) связан с безразмерным параметром σ соотношением $\sigma = 15 J_2 r_1^2 / 2 m^2$. Поскольку, согласно последним измерениям, для Солнца $J_2 \approx 1 \cdot 10^{-5}$ [61, 62], то для σ получаем значение $\sim 10^7$. Для Земли, обладающей значительным квадрупольным моментом $J_2 \approx 1,08 \cdot 10^{-3}$, находим $\sigma \approx 1,5 \cdot 10^{16}$ [63]. Поэтому в последнем случае уже необходимо учитывать влияние σ на гравитационные эффекты.

Поле Нордстрема—Рейсснера [64—66]

$$\begin{aligned}
ds^2 = & - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right) dx^{0^2} + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + \\
& + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1.6)
\end{aligned}$$

создается вне электрически заряженной сферически-симметричной массы. Метрика (1.6) является точным решением уравнений (1.1) без космологического члена с тензором энергии-импульса электромагнитного поля в правой части (см. ставший традиционным вывод метрики (1.6), данный Джеффри [67]). В этом случае отлична от нуля лишь компонента $F_{01} = -Q/r^2$ тензора электромагнитного поля. Параметр k зависит от квадрата заряда центральной массы: $k = \gamma Q^2 c^{-4}$. Интерес к рассмотрению гравитационных явлений в поле (1.6) усиливается результатами работ [68, 69], где установлена возможность приобретения звездой отрицательного и положительного заряда в результате «выметания» позитронов или электронов лучистым давлением (см. также [24, с. 416]). Возможны и другие механизмы приобретения звездой электрического заряда (см., например, [70, 71]). Кроме того, высказывались мнения о наличии у Солнца положительного [72] или отрицательного [73] зарядов. В частности, для приведенного в [73] значения $Q \sim 10^{28}$ ед. CGSE для Солнца получаем $k_{\odot} \sim 10^7$ см². На основании же [74] для Земли находим $k_{\oplus} \cong \cong 0,187 \cdot 10^{-20}$ см².

*) Вместо обычно употребляемого квадрупольного момента можно вводить и величину $2m^3 c^2 \sigma / 15\gamma$ [59], что согласуется с обозначениями, принятыми в работе [60].

Поле Коттлера—Треффца—де Ситтера [75—77]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dx^{0^2} + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.7)$$

обобщает решение Шварцшильда на случай вакуумных уравнений поля с космологическим членом. Согласно статьям [78, 79] (см. также монографию Зельдовича и Новикова [24, с. 39]), космологическую постоянную Λ можно интерпретировать как параметр, характеризующий гравитационные свойства вакуума (согласно [80], $\Lambda \approx 10^{-56} \text{ см}^{-2}$). Тогда его гравитирующее влияние идентично порождаемому веществом с плотностью $\rho_\Lambda = c^2 \Lambda / 8 \pi$ и давлением $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$ [79]. Интерес к Λ -члену в последнее время возродился [10, с. 119]. Естественно учесть и его слабое влияние на гравитационные эффекты ОТО.

Стационарное гравитационное поле

Поле Керра [81]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) dx^{0^2} + \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2} dr^2 + (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) \times \times \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{4mar \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} dx^0 d\varphi \quad (1.8)$$

является точным вакуумным решением уравнений Эйнштейна и обладает аксиальной симметрией. До сих пор нет полного удовлетворения физической интерпретацией источника метрики Керра, так как еще не найдено такое внутреннее решение уравнений ОТО для вращающихся масс (идеальной жидкости и др.), которое шивалось бы с метрикой Керра как внешним решением [11, с. 217; 82] *). Однако естественно полагать, что решение (1.8) описывает гравитационное поле вне вращающейся массы m , так как при ограничении лишь линейными по a членами решение Керра переходит в метрику Лензе—Тирринга [83]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) dx^{0^2} + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{4ma}{r} \sin^2 \theta d\varphi dx^0 \quad (1.9)$$

*) См. также статью Дональда («Ann. of Phys. (USA)», 1979, 110, 231).

и так как утверждение об единственности метрики Керра как поля вращающегося коллапсара подкрепляется теоремой, аналогичной теореме Израэля для поля Шварцшильда [23, с. 411].

Последнее уравнение — приближенное решение (1.1) для случая вращающейся пылевидной массы с тензором энергии-импульса $T_{\mu\nu} = \rho \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu$. На этом основании параметр a интерпретируется как удельный угловой момент вращающейся гравитирующей массы m (при записи метрики в виде (1.8) вектор a направлен по оси $\theta=0$). Значение a для Солнца определено с небольшой точностью. Обсуждаются экспериментальные проекты [84] по уточнению значения углового момента am . Ниже будем пользоваться значением $a_\odot = 1,26 m_\odot$ [85]. Для Земли, согласно [86], примем $a_\oplus = 330$ см.

Нестационарное поле тяготения

Поле плоской гравитационной волны, распространяющейся вдоль оси x^1 , имеет вид [19, 24, 87]

$$ds^2 = -dx^0{}^2 + dx^1{}^2 + (1 + h_{22}) dx^2{}^2 + (1 - h_{22}) dx^3{}^2 + 2h_{23} dx^2 dx^3, \quad (1.10)$$

где h_{22} и h_{23} характеризуют амплитуду волны и зависят от ее частоты и поляризации. В частном случае монохроматической волны имеем $h_{22} = h_+ \sin \left(\omega_g \frac{x^0 - x^1}{c} + \psi_+ \right)$; $h_{23} = h_\times \sin \times \left(\omega_g \frac{x^0 - x^1}{c} + \psi_\times \right)$, причем для двух состояний с линейной поляризацией $h_\times = 0$ или $h_+ = 0$, а для двух состояний с круговой поляризацией $h_\times = \pm h_+$ [88]. Наличие волновых решений эйнштейновых уравнений поля является прямым следствием радикального обобщения, устранившего принцип дальнего действия, на котором базировалась НТТ. Поскольку гравитационные волны еще не обнаружены на эксперименте, вопрос о возможных значениях входящих в (1.10) параметров обсуждается лишь в теоретическом плане (см., например, монографии [19, 26]).

Как видно из сказанного, некоторые из параметров конкретных решений эйнштейновых уравнений (1.1) для отдельных гравитирующих объектов уже известны или продолжают уточняться.

§ 2. СДВИГИ ЧАСТОТ В ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

Пусть в поле тяготения имеет место периодический процесс, вообще говоря, негравитационной природы. Например,

некоторым источником излучается электромагнитная волна. Из ОТО следует сдвиг частот, зависящий от потенциалов $g_{\mu\nu}$ гравитационного поля в точках A и B , где расположены наблюдатель и источник излучения, и от их скоростей u_A^μ и u_B^μ (по собственному времени). Он описывается общековариантным соотношением

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_0}{\nu} - 1 = \frac{(\rho_\mu u^\mu)_A}{(\rho_\mu u^\mu)_B} - 1 = \frac{g_{\mu\nu}(A) p_A^\mu u_A^\nu}{g_{\mu\nu}(B) p_B^\mu u_B^\nu} - 1, \quad (2.1)$$

где p^μ — импульс фотона (подробнее см. [3, 89—94]). Частота излучения ν является собственной величиной, физической частотой. Она равна обратному периоду собственного, а не координатного времени (см., например, [95]). В этом общем соотношении сдвига частот потенциалы $g_{\mu\nu}$ зависят от параметров источников поля (массы, заряда и т. д.), скорости u^μ и поэтому, вообще говоря, от параметров движущихся тел. Как отмечено, например, С. И. Вавиловым [96], собственно доплер-эффект и гравитационный сдвиг имеют общую черту, позволяющую отличить их от смещения частот, вызываемых электрическим (эффект Штарка) и магнитным (эффект Зеемана) полями, комптон-эффектом и др. Именно они не сопровождаются уширением спектральных линий. Поэтому собственно гравитационный сдвиг переплетается с любым доплер-эффектом*). Естественно, что в общем случае, когда в (2.1) содержится зависимость как от параметров поля, так и от параметров движущихся источника или наблюдателя, разделение сдвига частот на две составные части, строго говоря, невозможно. На это обращено внимание в работах [3, 91] и др. В частном случае, когда и источник, и наблюдатель покоятся друг относительно друга, соотношение (2.1) принимает вид

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \left[\frac{g_{00}(B)}{g_{00}(A)} \right]^{1/2} - 1. \quad (2.2)$$

Теперь сдвиг частот порождается лишь параметрами полей тяготения, входящими в компоненту g_{00} , удовлетворяющую уравнениям тяготения (1.1), и не связан с уравнениями движения. Можно рассматривать выражение (2.2) при g_{00} , содержащем несколько параметров полей тяготения, как один

*) Например, вызванным движением излучающего атома в солнечной короне. Последнее обстоятельство, в частности, ведет к тому, что в разных частях солнечного диска сдвиг частот различен и наблюдаемое суммарное смещение спектральных линий может быть голубым вместо красного (см. монографию [26]). По этой причине некоторое время казалось, что ОТО противоречит опыту (подробнее см. [97, 98]).

суммарный эффект «сдвига частот», порождаемый общим действием вместе взятых параметров. Согласно п. 1.2, представляется более рациональным рассматривать (2.2) как основное уравнение для описания группы гравитационных эффектов, порождаемых различными параметрами полей тяготения. Эти параметры берутся эйнштейновой ОТО из разных разделов физики. Для каждого из них разумны свое приближение, свои объекты и разные методы опытной проверки. Это, конечно, не исключает в случае надобности, совместного рассмотрения нескольких эффектов.

2.1. Эйнштейнов эффект красного смещения частот в поле Шварцшильда. Полагая здесь и далее $g_{00}(A) = 1$ (условие отсутствия поля в точке расположения наблюдателя), в случае метрики (1.4) из (2.2) находим

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu}\right)_m = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} - 1. \quad (2.3)$$

Индекс у величины, описывающей эффект (в случае (2.3) индекс m при $\Delta\nu/\nu$), указывает параметр данного гравитационного эффекта, исчезающего при обращении этого параметра в нуль. Поскольку в НТТ в принципе отсутствует понятие собственного, физического, времени, сдвиг (2.3) является эффектом ОТО и исчезает в пределе $c^2 \rightarrow \infty$ (напомним, что $m = \gamma M c^{-2}$). С точностью до членов первого порядка из (2.3) следует эйнштейнов эффект красного сдвига спектральных линий [99, 100]

$$(\text{эф. 1}) \quad (\Delta\nu/\nu)_m = -m/r. \quad (2.4)$$

Для атома, излучающего с поверхности Солнца, он равен $-2,119 \cdot 10^{-6}$. Именно красный сдвиг в спектре Солнца по сравнению с земными спектрами был обнаружен еще в 1896 г. Джуэллом [101] и более надежно установлен в работе [102], но объяснялся влиянием давления в солнечной атмосфере. Поэтому Эйнштейн, впервые в 1911 г. обсуждавший возможность экспериментального обнаружения эффекта в спектре Солнца, подчеркнул важность знания условий испускания света. Он не отождествлял эффект гравитационного сдвига со сдвигами, обнаруженными в работах [101, 102]. После того как Эвершед показал [103], что смещение Джуэлла не может быть обусловлено давлением, Фрейдлих [104] первым обратил внимание на естественность его отождествления с эффектом Эйнштейна (2.4) [105, 106]. Поэтому начиная с 1914 г. появилось множество работ, посвященных экспериментальному и теоретическому исследованию эффекта Эйнштейна красного сдвига (сравнительно полный обзор с соответствующими комментариями см. в [3, 26, 96, 98]). Уже

в работах [107, 108] в пределах ошибок подтвердилось наличие гравитационного сдвига частот, но первые наиболее убедительные доказательства были получены для Сириуса-В Адамсом [109] и для Солнца Сент-Джоном [110]. Поэтому обычно считают, что авторы этих работ впервые экспериментально доказали существование эффекта первого порядка (2.4). Так как точность измерения была низка, то предсказанный ОТО гравитационный сдвиг наряду с доплер-эффектом являлся в то время лишь наиболее вероятным объяснением наблюдаемого смещения частот в спектрах звезд. Улучшение экспериментальной техники обусловило значительный прогресс в области выявления эффекта 1 в спектрах Солнца и звезд. Здесь отметим лишь работы [111—116], причем для сдвига в спектре Солнца эффект подтвержден с точностью до 5% [113].

Коренное изменение ситуации произошло после использования Паундом и Ребкой [117] и независимо авторами статьи [118] (см. замечание Вейссенгоффа [119]) эффекта Мёссбауэра для проверки эйнштейнова эффекта в земных условиях при весьма малом изменении величины m/r . На этом пути удалось достигнуть точности 1% [120]*). Результаты указанных работ подробно обсуждаются во многих статьях и монографиях.

До недавнего времени в теоретическом и экспериментальном плане рассматривалось лишь соотношение (2.4), т. е. эффект первого порядка. Еще Эйнштейном было отмечено, что для его вывода не требуется привлечения всего аппарата ОТО: частные следствия теории вытекают из системы уравнений (1.1)—(1.3) при некотором их усечении. Таким усечением, в частности, является ограничение лишь членами первого порядка в (1.3) и переход к (2.4). Учет следующего приближения ведет к эффекту второго порядка

$$(\text{эф. 1a}) \quad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{m^2} = - \frac{m^2}{2r^2} . \quad (2.5)$$

Рассмотрение сдвигов частот высших порядков было начато в статье [121] и интенсивно продолжалось [93, 94]. В работах [122, 123] утверждалось, что из-за малости $(m/r)^2$ проверка (2.5) представляется маловероятной. Однако исследования Джаффи [93, 94], рассмотревшего вопрос об измерении эффектов второго порядка с помощью космического корабля, движущегося по орбите с большим эксцентриситетом, позволяют считать проверку эффекта 1a делом недалекого будущего (см. также [6]). Действительно, вблизи Солнца $(m/r)^2 \sim$

*) Недавние эксперименты Ижима, Фудживара («Ann. Tokyo Astronom. Observ.», 1978, 17, 68), сравнивших ход цезиевых часов, разнесенных по высоте на 2818 м, подтвердили эффект 1 с точностью 5%.

$\sim 10^{-12}—10^{-13}$, что вполне доступно измерению с помощью атомных часов, стабильность хода которых в настоящее время достигает $10^{-14}—10^{-16}$ [124, 125]. Более подробно на вопросе о проверке предсказываемых ОТО сдвигов частот с помощью космических аппаратов остановимся в п. 2.8.

2.2. Угловая зависимость сдвига частот в поле эллипсоида вращения. Сдвиг частот в поле сферически-симметричной гравитирующей массы является изотропным, так как не зависит от значения координат θ и φ . Без связи с конкретными параметрами гравитационного поля возможность угловой зависимости обсуждалась в работе [126]. Затем было установлено [127], что если угловая анизотропия (по углу отклонения от перпендикуляра к земной поверхности) и существует, то она меньше 0,1% от полного эффекта. На угловую зависимость сдвига частот, порожденную параметром σ поля тяготения, по-видимому, впервые обратил внимание Гофман [128] (см. также статьи [129—131]), который учел влияние ньютонова потенциала сжатого эллипсоида на эффект первого порядка (2.4). Из (2.2) следует эффект зависимости сдвига частот от угла θ

$$(\text{эф. 2}) \quad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{\sigma} = + \frac{m^3\sigma}{15r^3} \left(1 + \frac{m}{r} \right) (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (2.6)$$

вызванный аксиальной симметрией поля Вейля—Леви-Чивита. Для расположенных в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$) и на оси симметрии ($\theta = 0$) источников излучения соответственно

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{\sigma} = - \frac{m^3\sigma}{15r^3} \left(1 + \frac{m}{r} \right), \quad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{\sigma} = + \frac{2m^3\sigma}{15r^3} \left(1 + \frac{m}{r} \right).$$

Таким образом, гравитирующее действие квадрупольного момента меняет не только величину, но и знак сдвига частот при изменении угла θ . Очевидно, что при $\theta_0 = \arccos(1/\sqrt{3})$ несферичность массы не дает вклада в полный эффект смещения спектральных линий. Поэтому в земных условиях прецизионные проверки эйнштейновых эффектов (2.4) и (2.5) следует проводить лишь при $\theta = \theta_0$. Действительно, с учетом приведенных выше значений m и σ получаем, что $(m^3\sigma/r^3) \sim 5 \cdot 10^{-12} \gg \gg (m^2/r^2) \approx 4 \cdot 10^{-19}$, т. е. при выявлении, по крайней мере, эффекта второго порядка (2.5) необходимо учитывать и вклад поправок вида $m^3\sigma/r^3$, рассчитанных еще Гофманом.

2.3. Голубой сдвиг частот в поле гравитирующего электрического заряда (эффект Джеффри). Подстановку в (2.2) значения g_{00} для гравитационного поля Нордстрема — Рейсснера (2.6) выявляет эффект сдвига частот под действием гравити-

рующего электрического заряда — «массы», эквивалентной энергии электростатического поля:

$$(\text{эф. 3}) \quad \left(\frac{\Delta v}{v} \right)_k = \frac{k}{2r^2} . \quad (2.7)$$

Еще Джеффри [67], впервые обсуждавший этот эффект*), отмечал, что он не зависит от знака электрического заряда. Как следует из (2.7), на расстоянии $r_h = k/2m$ от центра гравитирующей массы красный сдвиг (2.4) компенсируется голубым (2.7). Поскольку значение r_h зависит в первом порядке лишь от параметров поля тяготения, это расстояние будет заметным лишь при большом значении отношения k/m . Хотя решение (1.6) допускает значения k вплоть до $k=m$, детальное рассмотрение условий равновесия разноименных зарядов в околозвездной плазме значительно уменьшает возможные значения k (подробнее см. [70, 136]). Поэтому компенсации сдвигов (2.4) и (2.7) можно ожидать лишь в поле так называемой голой сингулярности с $k > m$.

Более реальной представляется возможность регистрации сдвига (2.7) в сильном поле электростатического генератора (например, генератора ван де Граафа) или электростатического ускорителя. Такого рода возможность была реализована еще в экспериментах [137, 138], правда, с целью обнаружения зависимости сдвига частот от электростатического потенциала**). Опыты состояли в сравнении с помощью интерферометра типа Майкельсона частот излучения нейтрального и положительно или отрицательно заряженного источника. Для потенциалов ± 50000 В сдвиг частот в расчете на 1 В составил $1,1 \pm 8,8 \cdot 10^{-14}$ [137], а после повышения точности измерений и увеличения потенциалов до $\pm 300\,000$ В — $0,9 \pm \pm 1,0 \cdot 10^{-15}$ [138]. Хотя данные значения электростатического поля малы для обнаружения эффекта З (см. также [132]), интересно отметить, что вне зависимости от знака заряда сдвиг происходил в одну сторону и был приблизительно одинаков для разных знаков заряда. Это позволило авторам [137] предположить нелинейную зависимость эффекта от электростатического потенциала.

2.4. Красный сдвиг частот, обусловленный космологическим членом (гравитирующей массой вакуума). После под-

*) Без ссылок на Джеффри он выявлен в работе [132] (см. также [133, 134]). Выражение с иным, неверным коэффициентом содержится в статье [135].

**) Подобная зависимость возникает в теории Вейля, где пространственно-временные масштабы зависят от потенциала электрического поля. Вопрос о возможности существования «электростатического аналога» гравитационного сдвига частот, в частности, обсуждался Эйнштейном в переписке с Бессо [139].

становки из (1.7) в (1.2) весьма просто устанавливается эффект влияния космологической постоянной на сдвиг частот:

$$(\text{эф. 4}) \quad \left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_{\Lambda} = - \frac{\Lambda}{6} r^2. \quad (2.8)$$

Красное смещение спектральных линий, обусловленное влиянием Λ -члена из эйнштейновых уравнений поля (1.1), может проявиться лишь на больших расстояниях от гравитирующей массы m . Это объясняется чрезвычайной малостью Λ . По этой причине обычно в метрике (1.7) игнорируют массовый член и ведут рассмотрение в космологической модели де Ситтера (см., например, [56, 140]). В этом случае из-за известной аналогии гравитационного и доплеровского сдвигов частот вместо эффекта 4 обычно рассматривают эквивалентный доплер-эффект.

2.5. Угловая зависимость сдвига частот в поле Керра. По аналогии с п. 2.2 можно предположить, что любая аксиально-симметричная метрика приведет к угловой зависимости смещения спектральных линий. В частности, для гравитационного поля вне вращающейся массы из (1.8) и (2.2) находим

$$(\text{эф. 5}) \quad \left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_{\alpha} = \sqrt{1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}} - 1 \approx \frac{ma^2}{r^3} \cos^2 \theta. \quad (2.9)$$

Удельный угловой момент a , как и квадрупольный момент σ , обуславливает зависимость эффекта 5 от угла θ . Эта зависимость, однако, обладает специфическими чертами, свойственными лишь полю (1.8). В отличие от п. 2.2 получаем

$$\left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_{\alpha, \theta = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad \left(\frac{\Delta \nu}{\nu} \right)_{\alpha, \theta = 0} = + \frac{ma^2}{r^3}.$$

Следовательно, с изменением угла θ меняется лишь величина, но не знак смещения спектральных линий.

По-видимому, впервые (для приближенного решения уравнений поля) влияние гравитирующего действия углового момента на сдвиг частот исследовалось в случае, когда наблюдатель расположен на вращающейся массе [142]. Для часов вне вращающейся гравитирующей массы вопрос о сдвиге частот (точнее, о задержке времени, выявляемой с помощью атомных часов) рассматривался в работах [143, 144]. Однако угловая зависимость эффекта (2.9) специально не акцентировалась. Ее же наличие, как и в случае сжатой массы, позволяет предложить своеобразную качественную проверку эффектов (2.6) и (2.9). Для этого необходимо расположить атомные часы в точках с различными значе-

ниями угла θ . Тогда простая фиксация (без количественного измерения) сдвига частот в красную или фиолетовую стороны позволит судить о структуре соответствующего решения уравнений поля. Такие «предварительные» опыты были бы особенно полезны при анализе метрики Керра, так как именно члены в уравнении (1.8) квадратичные по угловому моменту, обуславливающие эффект 5, до сих пор остаются несколько проблематичными*). Численные оценки для Земли дают $ma^2/r^3 \sim \sim 10^{-22}$, т. е. эффект (2.9) в этом случае приблизительно того же порядка, что и (2.5).

2.6. Периодический сдвиг частот в поле плоской монохроматической гравитационной волны. Формула (2.1) справедлива для любых $g_{\mu\nu}$, являющихся решениями уравнений поля (1.1), в частности и для волновых решений — поля гравитационной волны (1.10). Согласно [145], в случае, когда источник излучения и наблюдатель покоятся друг относительно друга в поле гравитационной волны, из (2.1) следует

$$\left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{\text{ГВ}} = [(h_{22})_A - (h_{22})_B] \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

где θ — усредненный угол между направлением распространения электромагнитного сигнала и направлением распространения гравитационной волны (в данном случае осью $x^1 = x$). Для монохроматической волны

$$h_{22} = h_+ \cos \left[\omega_g \left(t - \frac{x}{c} \right) \right].$$

Если L — расстояние между наблюдателем A и источником B , расположенным в начале координат (т. е. $x_B = 0$), то с учетом $x_A = L \cos \theta$, $t_B = t_A - t$ находим

$$\begin{aligned} (\text{эф. 6}) \quad \left(\frac{\Delta\nu}{\nu} \right)_{\text{ГВ}} &= 2h_+ \left[\sin \left(\omega_g \frac{L}{c} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \sin \left(\omega_g t_A - \omega_g \frac{L}{c} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Таким образом, сдвиг частот в поле (1.10) является периодической функцией времени и зависит от направления распространения электромагнитного сигнала в ГВ-поле. Некоторые вопросы, связанные с (2.10), обсуждаются в работе [146]. Полученное более общее выражение включает также зависимость от h_{\times} [88]. В частности, если сигнал распространяется

*) Напомним, что лишь метрика Лензе — Тирринга (1.9) получена интегрированием уравнений поля с ненулевой правой частью.

под прямым углом к оси x , сдвиг (2.10) имеет максимальное значение:

$$\left(\frac{\Delta v}{v}\right)_{\Gamma B, \max} = h_+ \sin\left(\frac{\omega_g L}{2c}\right) \sin\left(\omega_g t_A - \frac{\omega_g L}{2c}\right).$$

Для сигнала, распространяющегося вдоль оси x , сдвиг частот отсутствует. Специфика волнового гравитационного поля проявляется в своеобразных флуктуациях [145] сдвига частот. Оценки для предполагаемых источников гравитационных волн дают $(\Delta v/v)_{\Gamma B} \sim 10^{-17}$, что ниже величины, доступной измерению с помощью эффекта Мессбауэра. По этой причине представляет интерес выявление возможностей усиления флуктуаций сдвига (2.10), например, с помощью специальных экспериментальных установок. Так, с помощью интерферометра Майкельсона можно получить большие значения L , не прибегая к разнесению источника света и наблюдателя на большие расстояния, а заставляя интерферировать лучи после многократного прохождения оптического контура (см., например, [147]) *). Если же специальным образом выбрать фазовые соотношения и частоты, а также длины плеч интерферометра, можно добиться резонансного накопления красного или голубого сдвига частот **) (вообще говоря, в зависимости от направления обхода контура интерферометра и ориентации его разных плеч относительно направления распространения гравитационной волны сдвиг может быть либо красным, либо голубым [147]). Реализация такой возможности особенно интересна при использовании интерферометров для детектирования гравитационных волн (см. § 9).

2.7. Утроение доплер-импульса в поле гравитационной волны. Интересная особенность сдвига частот в поле плоской гравитационной волны выявлена недавно [148, 149] (см. также [125]) ***). Если слабая гравитационная волна распространяется в направлении $x^1 = z$, то для соответствующего доплеровского сдвига можно получить

$$\begin{aligned} (\text{эф. 7}) \quad \left(\frac{\Delta v}{v}\right)_{\Gamma B} = \cos 2\varphi \left\{ h_{22}(x^0 - \Delta x^0) \frac{1 + \cos \theta}{2} - \right. \\ \left. - h_{22} \left(x^0 - \frac{\Delta x^0}{2} (1 + \cos \theta) \right) \cos \theta - h_{22}(x^0) \frac{1 - \cos \theta}{2} \right\}. \quad (2.11) \end{aligned}$$

*) По поводу другого интерференционного эффекта при падении гравитационной волны на интерферометр см. эффект 79.

**) Этот резонанс является, по сути дела, частным случаем рассмотренного далее гравитационно-электромагнитного резонанса (эффект 96).

***) Переход к случаю произвольной поляризации гравитационной волны осуществлен Хелипгсом («Phys. Rev. D.», 1978, 17, 3158).

Здесь предполагается, что земной наблюдатель расположен в начале координатной системы, а космический аппарат, выполняющий функции активного отражателя, покоится в точке с координатами

$$x = \frac{1}{2} \Delta x^0 \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \frac{\Delta x^0}{2} \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \frac{\Delta x^0}{2} \cos \theta, \quad (2.12)$$

где Δx^0 — время распространения сигнала «туда» и «обратно». Как следует из (2.12), короткий импульс гравитационного излучения $\dot{h}_+ \sim \delta(x^0 - z)$ вызовет три импульса в принимаемом доплеровском сигнале, причем все они различаются как амплитудами, так и зависимостью от θ и времени распространения Δx^0 . Поэтому каждый всплеск гравитационного излучения будет сопровождаться утроением принимаемого сигнала. Такого рода особенность свойственна лишь волновому гравитационному полю и не может быть обусловлена, например, нарушениями хода часов, колебаниями плазмы или некоррелированными движениями источника и отражателя. Это делает эффект 7 пригодным для детектирования гравитационных волн. Полагают даже, что использование космических станций и водородных лазерных часов в качестве стандарта частоты (со стабильностью хода $\sim 10^{-15}$ в течение более чем 10 с) позволит его зарегистрировать [148].

2.8. Некоторые экспериментальные возможности выявления сдвигов частот гравитационным полем Земли. Поскольку точность измерения сдвига спектральных линий в спектрах Солнца и звезд невелика, естественно разработать другие методы, которые позволили бы измерять сдвиг в полях тяготения при сравнительно небольших значениях m/r . В земных условиях это сделали Паунд и Ребка. Еще до успешного запуска космических аппаратов обсуждался вопрос об использовании искусственных спутников Земли (ИСЗ) для проверки предсказаний ОТО. Предполагая, что система отсчета связана с земным наблюдателем, а спутник с источником излучения движется по определенной траектории, из уравнения (2.1) вместо (2.2) получаем

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \left\{ -g_{00}(A) g_{\mu\nu}(B) p_B^\mu u_B^\nu \right\}^{-\frac{1}{2}} - 1. \quad (2.13)$$

Отсюда видно, что сдвиг частот зависит уже не только от разности гравитационных потенциалов в точках расположения наблюдателя и источника, но и от характеристик орбиты ИСЗ (в частности, от параметров последнего). По-видимому, впервые использование ИСЗ для проверки (2.13), а также возможность использования атомных или молекулярных генераторов (часов) в качестве стандартов частоты обсуждались Таунсом

[150]. Позже Винтерберг [151], Зингер [152] и Гинзбург [153] на основании конкретных расчетов оценили численные значения возможных сдвигов, причем была отмечена возможность перехода красного смещения в фиолетовое при увеличении высоты ИСЗ над Землей. Кроме того, было предложено [151, 152] использовать вместо частотных измерений сравнение длительных интервалов времени, фиксируемых часами на Земле и на ИСЗ. Соответствующие расчеты для поля Шварцшильда содержатся в работах [151—161] и для поля вращающейся или сжатой масс — в [128—130] и [142—144] соответственно. Заметим, что большая длительность полета ИСЗ накладывает жесткие требования учета всевозможных негравитационных возмущений, точного знания параметров орбиты и т. д. Поэтому интересны предложения [157, 158] об использовании коротко-временных измерений сдвигов частот (≤ 30 с) с одно-временным накоплением сдвига за счет специального приема. Он состоит в смешивании принимаемого ИСЗ и земным наблюдателем сигналов с излучением, частота которого равна удвоенной частоте первоначально испущенного сигнала (подробнее см. [157, 158, 161]). Это позволит земному наблюдателю принимать после одного отражения от ИСЗ сигнал с удвоенным сдвигом частот. Это даст возможность накопить эффект путем многократных отражений. Такое накопление особенно полезно при выявлении слабых эффектов (2.5)—(2.7), (2.9). Различные другие проекты предполагают использование ИСЗ для выявления разности сдвигов частот в перигее и апогее [162], ночью и днем [163] и т. д. Хотя первые экспериментальные программы по проверке (2.13) обсуждались еще в 1960—1961 гг. [164, 165], на реальную почву они стали лишь после создания генераторов частоты с высокой стабильностью (в настоящее время — 10^{-14} — 10^{-15} [124, 125]). В связи с этим особый интерес представляет эксперимент [166—168] по проверке эффекта (2.4) с точностью до 10^{-5} с помощью водородных мазерных часов. Он был проведен в 1976 г. [169] и по предварительным оценкам подтвердил этот эффект ОТО с точностью до сотых долей процента.

Поскольку достигнутая точность таких измерений достаточна для выявления эффектов сдвига частот в поле Земли, начиная с работ [170—172] (см., однако, [173]), для проверки предсказаний ОТО стали использоваться самолеты. Например, в недавних опытах [174, 175] полеты производились в течение 15 ч, а связь с земными стандартами частоты осуществлялась с помощью лазерного луча. Сдвиг частот из-за разности гравитационных потенциалов поля Земли составил 53 нс, а спецрелятивистский эффект равнялся 5 нс. Точность измерения составила $1,005 \pm 0,016$, где за единицу принят эффект 1а.

Итак, группа эффектов «сдвига частот», очевидно, происходит от обобщения в ОТО понятия собственного времени СТО на зависимость не только от движения, но и непосредственно от поля тяготения, от его параметров. Наблюдаться, естественно, должен суммарный эффект, соответствующий определенному набору параметров у данного гравитирующего объекта. Поскольку в принципе параметры произвольны по величине, произвольно и соотношение между их количественными вкладами в суммарный сдвиг частот. Соответственно в правой части эйнштейновых уравнений (1.1) приобретают доминирующий интерес те или иные из множества тензоров энергии-импульса или их отдельных компонент. Это и позволяет в принципе выделять ситуации, когда некоторый параметр вносит в сдвиг частот вклад, доминирующий по сравнению со вкладом от других параметров. В таких случаях вклад от данного параметра поля представляет самостоятельный интерес не только с теоретической стороны, но и с экспериментальной.

Как видно из п. 2.8, гравитационный эксперимент по изучению сдвигов частот вошел в активную фазу. Используются новые методики на Земле, новые гравитирующие объекты, искусственные спутники Земли, самолеты. До сих пор проверяется лишь ключевой эффект (2.4). Естественно, с особым интересом следует ожидать проверки сдвигов частот, порожденных другими параметрами полей тяготения. Именно они дадут свое заключение о верности правой части эйнштейновых уравнений поля, о правомочности эйнштейнова обобщения понятия источника тяготения.

§ 3. ДОБАВОЧНЫЕ АНОМАЛИИ И СМЕЩЕНИЯ ПЕРИЦЕНТРОВ ПРИ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

Сначала в п. 3.1—3.6 рассмотрим движение в гравитационном поле $g_{\mu\nu}$ по геодезическим линиям. Вторые интегралы уравнений (1.2) приводят к уравнению орбиты пробного тела. Ограничимся случаями, когда орбиты имеют «квазиконический вид», в данном параграфе квазиэллиптический. При движении в плоскости $\theta = \pi/2$ уравнение орбиты может быть записано в форме конического сечения:

$$u = \frac{1}{r} = p^{-1}(1 + e \cos \psi), \quad \psi \equiv \varphi + \chi(\varphi) \equiv \varphi + \Delta\varphi, \quad (3.1)$$

где p и e — фокальный параметр и эксцентриситет, а ψ — истинная аномалия, в которую входит добавочное по сравнению с НГТ угловое смещение $\chi(\varphi)$ (добавочная аномалия). Если $e < 1$, это смещение, в частности, может быть отнесено к бли-

жайшей до гравитирующего центра точке, называемой перицентром. Тогда добавочная аномалия $\chi(\varphi)$ описывает «эффект смещения перицентра». Хотя при движении по окружности понятие перицентра вырождается, более общее понятие «добавочная аномалия» остается в силе: $(\lim \chi)_{\varepsilon \rightarrow 0} \neq 0$. В выражение (3.1) из уравнений движения переходят параметры поля, содержащиеся в $g_{\mu\nu}$, и входят две постоянные интегрирования p и e . Возможен переход и к другим параметрам орбиты, например к постоянной энергий ε и постоянной площадей h , содержащихся в первых интегралах уравнений движения:

$$g_{0\lambda} \dot{x}^\lambda = -\varepsilon, \quad g_{3\lambda} \dot{x}^\lambda = h. \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в выражение $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$ приводит к дифференциальному уравнению траектории пробного тела

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = F(u), \quad (3.3)$$

где в некоторых случаях точно, в некоторых приближенно $F(u) = P(u)$ — полином относительно u , степень и вид коэффициентов которого определяются метрическими потенциалами конкретного гравитационного поля. Существуют различные методы отыскания решений уравнения (3.3) в виде (3.1). Для отыскания $\chi(\varphi)$ воспользуемся методом разбиения (3.3) на 3 уравнения, восходящим к работе Дарвина [176]. Ниже примем вариант разбиения, предложенный В. В. Митянком [41, 42]. Этот вариант нашел также применения [46—49, 177]. Метод Дарвина использован в работах [178, 179]. После подстановки (3.1) в (3.3) последнее можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{p^2} \sin^2 \psi \left(\frac{d\psi}{d\varphi} \right)^2 = & A(\varepsilon, h, p, e) + \\ & + B(\varepsilon, h, p, e) \frac{e}{p} \cos \psi + C(\varepsilon, h, p, e, \psi) \frac{e^2}{p^2} \sin^2 \psi, \end{aligned}$$

и разбить на систему двух алгебраических уравнений:

$$A(\varepsilon, h, p, e) = 0, \quad B(\varepsilon, h, p, e) = 0 \quad (3.4)$$

и дифференциального

$$(\chi')^2 + 2\chi' - D(\varepsilon, h, p, e, \psi) = 0, \quad \text{или} \quad \psi' = \sqrt{1 + D}, \quad (3.5)$$

$$\chi' = d\chi/d\varphi, \quad \psi' = d\psi/d\varphi, \quad D \equiv C - 1.$$

Отсюда получаем следующее выражение для добавочной аномалии за период

$$\frac{\Delta\chi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+D)^{-\frac{1}{2}} d\psi - 1, \quad \int d\chi \equiv -\Delta\chi. \quad (3.6)$$

Алгебраические же уравнения устанавливают связь между параметрами источников поля тяготения, а также p , e и ε , h . Удобство этого подхода, в частности, состоит в возможности исследования с помощью уравнений (3.4)—(3.6) движения тел по круговым орбитам. Действительно, если условие движения по окружности $e=0$ делает невозможным разыскание с помощью (3.3) добавочной аномалии, то она находится с помощью системы (3.4)—(3.6), так как $\lim (\Delta\chi/2\pi)_{e \rightarrow 0} \neq 0$.

Начиная с п. 3.7, перейдем к рассмотрению добавочных аномалий при негеодезическом движении. Отклонение уравнений движения от геодезической линии может быть вызвано разными причинами: внешними силами (механическими, электромагнитными и др.), «пробными параметрами» в указанном выше смысле, а также гравитационным взаимодействием на уровне задачи многих тел.

3.1. Эйнштейново смещение перицентра в поле Шварцшильда. С привлечением всех компонент $g_{\mu\nu}$ из (1.4) и (3.2) следует, что в поле гравитирующей массы

$$F(u) = P_m(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3. \quad (3.7)$$

Реализация описанной выше процедуры и решение системы (3.4) дают точные выражения для постоянных ε и h :

$$\varepsilon^2 = \left[\left(1 - \frac{2m}{p} \right)^2 - \frac{4m^2}{p^2} e^2 \right] \left[1 - \frac{m(3+e^2)}{p} \right]^{-1},$$

$$h^2 = \frac{mp}{1 - \frac{m(3+e^2)}{p}}, \quad (3.8)$$

а из (3.5) получаем

$$D = -\frac{2m}{p} (3 + e \cos \psi). \quad (3.9)$$

Подстановка (3.9) в (3.6) и приближенное интегрирование приводят к следующему выражению для добавочного смещения перицентра в поле (1.4) при квазиэллиптическом ($e < 1$) движении в плоскости $\theta = \pi/2$:

$$(\text{эф. 8}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_m = \frac{3m}{p} + \frac{27m^2}{2p^2} + \frac{3m^2}{4p^2} e^2. \quad (3.10)$$

В результате этого имеет место прецессия эллиптической орбиты НТТ. Первый член из (3.10) был получен Эйнштейном [180] для приближенного решения уравнений поля, а для метрики (1.4) впервые рассчитан Шварцшильдом [53]. Из (3.10) следует, что в поле Шварцшильда в отличие от поля гравитирующей массы в НТТ квазиэллипс, задаваемый уравнением (3.1), прецессирует. Из (3.1) видно, что эффект увеличивается с уменьшением фокального параметра. Так, для Меркурия $p=5,53 \cdot 10^{11}$ см, поэтому $\Delta\chi=0,1038''$ за один оборот. За столетие смещение перицентра должно составить $43,03''$. Сравнение этой величины со смещением, ранее установленным наблюдениями, было выполнено Эйнштейном [180]. Получилось вполне удовлетворительное совпадение. Вопрос о причине смещения перигелия Меркурия обсуждался многими авторами еще до создания ОТО, но особенно интенсивные обсуждения появились после работы Эйнштейна (достаточно подробно этот вопрос освещен в [98]). Анализ наблюдательных данных о Меркурии с 1765 по 1937 г., проведенный Клеменсом [181], дал величину $42,56 \pm 0,94''$ [182] эффекта 8, что хорошо согласуется с предсказаниями ОТО. Согласно более поздним расчетам, $\Delta\chi=43,11+0,45''$, т. е. эффект ОТО смещения перицентра подтверждается с точностью до 1% [183, 184]. Такая же точность была достигнута и после уточнения параметров орбит планет с помощью радарной техники [185]. Отметим, однако, что недавний анализ движения Меркурия с 1677 по 1973 г. привел к уменьшению наблюдаемой величины смещения до $41,9 \pm 0,5''$ [186].

Уменьшение фокального параметра может иметь место за счет увеличения эксцентриситета, поскольку $p=a(1-e^2)$, где a — большая полуось орбиты. По этой причине широко обсуждалась возможность проверки эффекта 8 при анализе движения астероида Икара [185, 187], для которого $e=0,8265$. Возможность широкого варьирования параметров орбит ИСЗ делала бы их удобным инструментом для проверки эффекта смещения перицентра в оптимальных условиях. На такую возможность указано в работах [153, 155, 188—191]. Однако этому мешают негравитационные возмущения.

3.2. Смещение перицентра в поле эллипсоида вращения. Согласно [98, с. 296; 192], еще Ньюком исследовал возможное влияние сплюснутости Солнца на движение перигелия Меркурия. В ОТО это влияние устанавливается на основании метрики Вейля—Леви-Чивита (1.5). Из уравнений геодезических линий следует, что в этом случае

$$F(u) = P(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u - u^2 +$$

$$+ 2m \left\{ 1 + \frac{m^2 \sigma (2\varepsilon^2 - 1)}{15h^2} \right\} u^3 + \frac{m^4 \sigma (3\varepsilon^2 - 1)}{3h^2} u^4. \quad (3.11)$$

Приближенное решение системы (3.4) с необходимой для отыскания добавочной аномалии точностью дает для постоянных энергии и площадей следующие значения:

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{m}{p} (1 - e^2) + \frac{m^2}{p^2} (1 - e^2)^2,$$

$$h^2 = \frac{mp}{1 - \frac{m(3 + e^2)}{p}} \left\{ 1 + \frac{m^2 \sigma^2}{15p^2} (2\varepsilon^2 - 1)(3 + e^2) + \frac{2m^3 \sigma}{3p^3} (3\varepsilon^2 - 1)(1 + e^2) \right\}.$$

Из (3.11) также вытекает, что

$$D = -\frac{2m}{p} \left\{ 1 + \frac{m^2 \sigma^2}{15h^2} (2\varepsilon^2 - 1) \right\} (3 + e \cos \psi) - \frac{m^4 \sigma}{3h^2 p^2} (3\varepsilon^2 - 1) (6 + 4e \cos \psi + e^2 + e^2 \cos^2 \psi). \quad (3.12)$$

После подстановки в (3.6) и интегрирования это дает для добавочной аномалии ОТО, обусловленной σ , выражение

$$(\text{эф. 9}) \quad \left(\frac{\Delta \chi}{2\pi} \right)_{\sigma} = \frac{14m^3 \sigma}{5p^3} + \frac{4m^3 \sigma}{5p^3} e^2 \quad (3.13)$$

(в χ входит также член $\frac{m^2 \sigma}{5p^2} c^2$, но он принадлежит НТТ) *).

Вблизи поверхности Солнца члены в выражении (3.13) равны $0,898 \cdot 10^{-5}$ и $2,664 \cdot 10^{-10}$ соответственно, а для Земли — $1,451 \cdot 10^{-3}$ и $1,412 \cdot 10^{-11}$. Таким образом, для тел, движущихся в поле Земли, необходимо учитывать и гравитационный эффект (3.13). Широко обсуждался вопрос о возможном наличии квадрупольного момента у Солнца и его влиянии на смещение перицентра Меркурия. Началом послужили работы Дикке [198, 199], утверждавшего, что эффект (3.13) может составить до 8% от наблюдаемого [200—203]. Однако прецизионные измерения Хилла с сотрудниками [204, 205] снизили значение σ_{\odot} . Установленные же этими исследователями ос-

*) Добавочная аномалия (3.13) рассчитывалась ранее и другими авторами [43, 193—197], но согласующихся друг с другом результатов не было получено (использовались разные координатные системы).

цилляции поверхности Солнца еще более усложнили вопрос о выявлении эффекта (3.13) в гравитационном поле Солнца. Попытки выявить влияние σ на движение Икара также не увенчались успехом [206].

Вообще говоря, квадрупольный момент увеличивает значение смещения перицентра лишь для близких к экватору траекторий. В общем случае неэкваториального движения, как следует из работы [207], эффект зависит от угла θ . При некотором θ вклад σ может оказаться нулевым. Это удобно для более точного измерения эффекта 8. Поскольку для большинства планет солнечной системы отклонение от экваториальной плоскости Солнца составляет лишь несколько градусов, данная специфическая зависимость может проявиться лишь при движении ИСЗ.

3.3. Влияние гравитирующего электрического заряда на добавочную аномалию. Дифференциальное уравнение траектории (3.3) в поле Нордстрема—Рейсснера, содержащее полином

$$P_{m,k}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u - \left(1 + \frac{k}{h^2}\right) u^2 + 2mu^3 - ku^4, \quad (3.14)$$

записано еще Джеффри [67]. Оно широко обсуждалось в литературе (см., например, [209—211])^{*}. Его корректное решение имеется в работах [41, 48, 208, 212]. Согласно [48] (см. также [213]), из системы (3.4) следуют точные значения постоянных ε , h и D :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left\{ \left(1 - \frac{2m}{p} + \frac{k}{p^2}\right)^2 + \right. \\ & \left. + e^2 \left[\frac{2k}{p^2} + \frac{4mk}{p^3} - \frac{4m^2}{p^2} - \frac{k^2}{p^4} (2 - e^2) \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{m}{p} (3 + e^2) + \frac{2k}{p^2} (1 + e^2) \right\}^{-1}, \quad (3.15) \end{aligned}$$

$$h^2 = (mp - k) \left\{ 1 - \frac{m}{p} (3 + e^2) + \frac{2k}{p^2} (1 + e^2) \right\}^{-1},$$

$$\begin{aligned} D = & -\frac{2m}{p} (3 + e \cos \psi) + \frac{k}{h^2} + \\ & + \frac{2k}{p^2} (3 + 2e \cos \psi) + \frac{ke^2}{p^2} (1 + \cos^2 \psi). \quad (3.16) \end{aligned}$$

^{*} В первом исчезающем приближении задача решалась и в работе [135], где, однако, конечный результат отличается от (3.17).

После интегрирования (3.6) с учетом (3.16) получаем

$$(\text{эф. 10}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_k = -\frac{k}{2mp} - \frac{6k}{p^2} - \frac{ke^2}{4p^2}. \quad (3.17)$$

Без учета конкретного вида эта аномалия найдена Джаффи [208] *), а ее физическая структура для круговых орбит анализировалась в статье [41] (см. § 24).

3.4. Вклад космологической постоянной в добавочную аномалию. Выражения для добавочной аномалии в поле (1.7) [44, 56, 217, 219] не совпадают друг с другом. Некоторые из них ошибочны. Согласно [217], получаем

$$F_{m,\Lambda}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{\Lambda}{3} + \frac{2m}{h^2} u - u^2 + 2mu^3 + \frac{\Lambda}{3h^2 u^2}. \quad (3.18)$$

Для квазиэллиптических орбит после решения соответствующих уравнений приближенно находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left\{ \left(1 - \frac{2m}{p} - \frac{\Lambda p^2}{3} \right)^2 - 2\Lambda p^2 e^2 \left(1 - \frac{10m}{p} \right) \right\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{m}{p} (3 + e^2) \right\}^{-1}, \quad (3.19) \\ h^2 = & \left\{ mp - \frac{\Lambda p^4}{3} (1 + 2e^2) \right\} \left\{ 1 - \frac{m}{p} (3 + e^2) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Учет в (3.6) выражения

$$D = -\frac{2m}{p} (3 + e \cos \psi) - \frac{\Lambda p^4}{3h^2} (3 - 4e \cos \psi + 5e^2 + 5e^2 \cos^2 \psi) \quad (3.20)$$

и интегрирование дают добавочную аномалию в виде

$$\begin{aligned} (\text{эф. 11}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_\Lambda = & \frac{\Lambda p^3}{2m} \left(1 + \frac{6m}{p} \right) + \\ & + \frac{\Lambda p^3}{2m} \left(\frac{5}{2} + 12 \frac{m}{p} \right) e^2. \quad (3.21) \end{aligned}$$

Первый член давно известен (см. работы [44, 56, 217, 218]), но в выражении, приведенном в статье [219], он не фигури-

*) Вопрос о влиянии электрического заряда на смещение перигелия Меркурия обсуждался в работах [214—216], но вне связи с ОТО. В этих работах предполагалось, что Солнце индуцирует у Меркурия дипольный момент и тем самым порождает смещение перигелия.

рует. Поправка же следующего порядка, найденная в монографии [56], в два раза меньше и с обратным знаком.

3.5. Добавочная аномалия и смещение перицентра в поле Керра. Впервые вопрос о влиянии гравитационного поля вращающейся массы на движение пробных тел исследован Лензе и Тиррингом [83] на примере метрики (1.9) и многократно обсуждался [42, 49, 56, 153, 179, 220]. Для метрики Керра (1.8) в первом порядке по параметру a согласно с результатами работы [83] было впервые установлено Бойером и Прайсом [221]. Попытки более точного расчета эффекта смещения перицентра [222, 223] оказались некорректными. Поэтому в препринте [177] критические эффекты ОТО пересмотрены с учетом членов $(m/r)^3$. Здесь ограничимся лишь линейными по a поправками к (3.10). Уравнение траектории определяется решением (3.3), где

$$F(u) \simeq P_{m,a}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} \left\{ 1 - \frac{2a\varepsilon}{h} (\varepsilon^2 - 1) \right\} u - \left\{ 1 + \frac{8m^2 a}{h^3} \varepsilon^3 \right\} u^2 + 2m \left\{ 1 - \frac{8m^2 a}{h^3} \varepsilon - \frac{8m^3 a}{h^4} \varepsilon (\varepsilon^2 - 1) \right\} u^3. \quad (3.22)$$

Из системы (3.4) находим

$$D = + \frac{8am^2}{h^3} \varepsilon^3 - 2m \left\{ 1 - \frac{8am^2}{h^3} \varepsilon - \frac{8am^3}{h^4} \varepsilon (\varepsilon^2 - 1) \right\} \frac{3 + e \cos \psi}{\rho}. \quad (3.23)$$

После интегрирования в этом случае (3.6) для эффекта смещения перицентра, вызванного вращательным моментом, имеем

$$(\text{эф. 12}) \quad \left(\frac{\Delta \chi}{2\pi} \right)_a = - \frac{4a \sqrt{m}}{\rho \sqrt{\rho}} \left(1 + \frac{9m}{\rho} \right). \quad (3.24)$$

Следовательно, при движении пробной массы навстречу вращению источника поправка (3.24) увеличивает эйнштейново значение эффекта (3.10), а при движении в противоположном направлении уменьшает. Смещение перицентра в поле Керра обладает и еще одной характерной чертой, отмеченной Лензе и Тиррингом, — оно зависит от ориентации орбиты по отношению к экваториальной плоскости. Эту угловую зависимость можно выразить введением множителя $\cos i$, где i — угол наклонения к экватору *):

*) Из формулы для прецессии любого вектора (см. § 8 и [23, с. 426]) следует, что прецессия линии узлов при $i=0$ (или $\theta=\pi/2$) отсутствует. В монографии [141] утверждается обратное.

$$\frac{\Delta\chi}{2\pi} = - \frac{4a\sqrt{m}}{p\sqrt{p}} \cos i. \quad (3.25)$$

Начиная с работы [224], некоторые авторы (например, [56, 225, 226]) вместо (3.25) используют выражение с другим коэффициентом:

$$\frac{\Delta\chi}{2\pi} = - \frac{6a\sqrt{m}}{p\sqrt{p}} \cos i, \quad (3.26)$$

где учтена проекция прецессии Лензе—Тирринга (см. § 8) на плоскость орбиты. При этом, однако, не делается оговорки, что эта формула может привести к неверному результату (отличающемуся от (3.24) коэффициентом) при переходе к экваториальной плоскости ($i=0$), поскольку в уравнении (3.26) игнорируется отсутствие прецессии линии узлов при $i=0$. Обсуждение формул (3.25) и (3.26) имеется в работе [227]. Используя оценки для Солнца и Земли, приведенные выше, для лензе-тирринговского члена, из (3.24) получаем величины порядка 10^{-8} и 10^{-11} соответственно, т. е. его вклад может составить несколько процентов от эффекта 8. Современная точность измерения смещений перицентров позволяет надеяться на выявление (с учетом оговорок относительно негравитационных возмущений) эффекта 12 при движении ИСЗ, для которых данный эффект может быть значительным [153, 226]. Качественное подтверждение эффекта 12 может быть получено косвенно, проверкой эффекта дрейфа тел в поле Керра (см. § 9).

3.6. Смещение перицентра в поле плоской гравитационной волны. Как показано в работах [228, 229], гравитационная волна влияет на орбитальное движение пробных тел. Поэтому интересно выявить ее вклад и в добавочную аномалию. Этому вопросу посвящены исследования [52, 230]. Для добавочной силы, вызванной ГВ, падающей ортогонально плоскости квазиэллиптической орбиты в поле массы m , принимается

$$F_{\rho} = \frac{r\dot{h}}{2} \cos(2\varphi + \alpha_1), \quad F_{\varphi} = \frac{r\dot{h}}{2} \sin(2\varphi + \alpha_1),$$

$$h = \frac{h_0}{2} \sin(\omega_g t + \alpha_2), \quad (3.27)$$

где α_2 — фаза; ω_g — частота гравитационной волны, α_1 характеризует поляризацию. Для разыскания добавочной аномалии удобнее воспользоваться не уравнением геодезической линии, учитывающей суперпозицию метрик (1.4) и (1.10), а уравнением девиации:

$$\frac{d^2\eta^\lambda}{d\tau^2} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu \frac{du^\nu}{d\tau} + \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\lambda u^\mu u^\nu \eta^\sigma = \eta^\sigma \partial_\sigma F^\lambda. \quad (3.28)$$

Здесь η^λ — вектор отклонения. С точки зрения возможной экспериментальной проверки представляют интерес решения (3.28) в случаях резонансных ситуаций, когда эффект накапливается со временем. При условии синхронизма $\omega_g = \omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{m/r_0^3}$ — кеплерова частота, согласно [52],

$$\frac{\Delta\chi}{2\pi} = \frac{3m}{r_0} + \frac{3r_0 h_0}{8\xi^1}, \quad (3.29)$$

где $\xi^1 = (r - r_0)/\sin \omega t$ — радиальная компонента смещения. Тогда обусловленное гравитационной волной резонансное смещение перигея составит

$$(\text{эф. 13}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{\text{ГВ}} = \frac{3r_0 h_0}{8\xi^1}. \quad (3.30)$$

Поскольку для измерения (3.30) необходимо и знание ξ^1 , экспериментальная проверка данного эффекта затруднена, хотя при малых ξ^1 он может достигать больших значений и даже сравниться по величине с эйнштейновым.

Заканчивая на этом описание добавочных аномалий при геодезическом движении, отметим, что эффект 8 является ключевым. Он вызывается более универсальным параметром, присутствующим и в НТТ. Эффекты 9—13 сопровождают эффект 8.

Перейдем к эффектам добавочных аномалий в случаях негеодезических движений.

3.7. Добавочная аномалия для пробного осциллятора в поле Шварцшильда. Пусть пробная масса движется по круговой траектории радиуса r_0 в поле Шварцшильда. Если она дополнительно подвергается действию негравитационной силы (электромагнитного происхождения или механической), то отклонение от опорной геодезической траектории описывается уравнением (3.28) для девиации геодезических. Интересный случай внешней периодической силы $F^\mu = -\Omega^2 \eta^\mu$ рассмотрен в работе [51], где Ω — частота, $\eta^\mu = \xi^\mu e^{i(\omega s + \alpha)}$, $\omega = f(\Omega)$. Предполагается наличие лишь радиальных составляющих F^1 и η^1 . После разыскания первых интегралов уравнений девиации [51] найдено выражение для добавочной аномалии за период колебания пробной массы под действием силы F^μ :

$$(\text{эф. 14}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_\Omega = \left\{ 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{3m}{r_0} \right) \right\}^{1/2} \times \\ \times \left(1 + \frac{3m}{r_0} \right) - \left\{ 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right\}^{1/2}, \quad (3.31)$$

где $\omega_0 = \sqrt{m/r_0^3}$ — кеплерова частота. Характерной чертой этого эффекта является его сильная зависимость от отношения частот Ω и ω_0 . Так, из (3.31) следует:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi}\right)_{\Omega=0} &= \frac{3m}{r_0}, \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi}\right)_{\Omega_1 \ll \omega_0} = \\ &= \frac{3m}{r_0} \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{\omega_0^2}\right), \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi}\right)_{\Omega_2 \gg \omega_0} = \frac{3m}{2r_0} \frac{\omega_0}{\Omega_2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В развитие сказанного в работе [251] отмечено, что из выражений (3.32) следует «разделение» по полярному углу двух осцилляторов с частотами колебаний $\Omega_1 \ll \omega_0 \ll \Omega_2$. Со временем расстояние между ними должно изменяться. Наблюдение такого разделения послужило бы качественной проверкой предсказаний (3.32), но оно сопряжено с преодолением многих факторов, затрудняющих опыт.

3.8. Добавочная аномалия при движении электрического заряда в поле Шварцшильда. Остановимся на случае, когда заряд движущегося тела достаточно велик, чтобы влиять на гравитационное поле системы. Для выявления гравитационных эффектов в данном случае необходимо, вообще говоря, решать задачу о движении двух массивных и заряженных тел [231, 232]. Если же в выражении для добавочной аномалии, полученном в этих работах, положить массу одного из тел малой по сравнению с массой другого (т. е. считать ее пробной), а заряд массивного тела приравнять нулю, то для добавочной аномалии следует выражение

$$(\text{эф. 15}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi}\right)_{\vec{q}} = -\frac{\vec{q}^2}{2c^2\mu p} = -\frac{\vec{k}}{2\vec{m}p}, \quad (3.33)$$

где параметры \vec{k} и \vec{m} относятся к телу с малой массой. Таким образом, гравитирующее действие заряда пробной массы при негеодезическом движении сходно с влиянием заряда центрального тела на геодезическое движение нейтральной пробной массы (см. эффект 10). Важно отметить, что эффект (3.33) зависит лишь от параметров движущегося тела, что позволяет варьированием их в широких пределах изменять величину (3.33). Поэтому эксперимент такого рода был бы весьма желательным, так как, по-видимому, проще запустить спутник со специально выбранными параметрами, чем измерить часто проблематичные параметры массивных небесных объектов.

3.9. Вклад в аномалию гравитирующего магнитного дипольного момента. Как и в п. 3.8, для выявления гравитирующего действия магнитного момента можно воспользоваться

решением задачи о движении двух массивных и намагниченных тел [231, 232]. Если предположить, что магнитный момент более массивного тела равен нулю, то для аномалии при движении легкого намагниченного тела

$$(\text{эф. 16}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{\tilde{n}} = - \frac{6m\tilde{n}}{\rho\sqrt{mp}}. \quad (3.34)$$

Здесь предполагается, что магнитный момент \tilde{n} ориентирован ортогонально плоскости орбиты. Как и в предыдущем случае, гравитирующее действие параметра движущегося тела приведет к уменьшению полной добавочной аномалии. Поэтому запуск на одну орбиту нейтральной массы и тела с большим зарядом или магнитным моментом приведет к отставанию последнего. Согласно оценкам из работ [231, 232], сильный постоянный магнит с $|cn| \sim 10^3 - 10^5 \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ может обусловить эффект $(\Delta\chi/2\pi)_{\tilde{n}} \sim 4 \cdot 10^{-10} - 10^{-12}$ за четверть оборота вокруг Земли. Поскольку спутник на орбите с фокальным параметром $\rho \sim 10^9 \text{ см}$ совершит за год ~ 3000 оборотов вокруг Земли, то смещение магнита внутри спутника составит от 0,5 до 200 см за год. Регистрация такого смещения была бы реальна при использовании спутников без сноса.

3.10. Влияние нормальной компоненты пробного спина на добавочную аномалию в поле Шварцшильда. Перейдем к рассмотрению негеодезического движения тел, все параметры которых являются пробными. Здесь и далее при рассмотрении эффектов для пробных спинов будем полагать, что вектор спина ориентирован перпендикулярно плоскости орбиты, $S = S_z$. Согласно [233], при экваториальном движении такие траектории будут устойчивыми.

Первые интегралы уравнений Папапетру (т. е. уравнений (1.3) при $q=0$) можно принять в виде [234—239]

$$\begin{aligned} \left(\mu u_0 + u^\lambda \frac{DS_{\lambda 0}}{D\tau} \right) + \frac{1}{2} g_{0\rho, \sigma} S^{\rho\sigma} &= -\mu\varepsilon, \\ \left(\mu u_3 + u^\lambda \frac{DS_{\lambda 3}}{D\tau} \right) + \frac{1}{2} g_{3\rho, \sigma} S^{\rho\sigma} &= \mu h \end{aligned} \quad (3.35)$$

вне зависимости от конкретных дополнительных условий на спин частицы, необходимых для полноты системы *). Примем условия Пирани **) [240]

*) Как показано еще в работах [241, 242], система уравнений (1.3) содержит семь независимых уравнений для десяти неизвестных $S^{\mu\nu}$ и u^λ .

**) Условия (3.36) правильнее было бы называть условиями Френкеля — Вейсенгоффа [243, 244].

$$S^{\rho\sigma} u_{\sigma} = 0, \quad \frac{1}{\mu} S_{\lambda\sigma} = \eta_{\lambda\sigma\rho\nu} S^{\rho} u^{\nu} \quad (3.36)$$

и ограничимся лишь линейными по спину членами, так как именно в этом случае вращающуюся частицу можно строго рассматривать как пробный спин [245, 246] и пренебречь в (1.3) и (3.5) членами вида $u^{\lambda} DS_{\lambda\nu}/D\tau$. При ограничении членами первого порядка по удельному спину из первых интегралов (3.35) и соотношения $1 = g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}$ для метрики Шварцшильда (1.4) находим дифференциальное уравнение траектории в виде (3.3), где

$$P_{m,S}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) + \frac{2m}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) u - u^2 + 2m \left(1 \mp \frac{S\varepsilon}{h} \right) u^3. \quad (3.37)$$

Приближенное интегрирование по описанной выше схеме дает с учетом

$$D = - \frac{2m}{\rho} \left(1 \mp \frac{S\varepsilon}{h} \right) (3 + e \cos \psi) \quad (3.38)$$

добавочную аномалию в виде

$$(\text{эф. 17}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{m,S} = \mp \frac{3mS}{\rho\sqrt{mr}}. \quad (3.39)$$

В соотношениях (3.37)—(3.39) верхние знаки относятся к параллельным орбитальному и спиновому моментам, а нижние — к антипараллельным. Эффект 17 при верхнем знаке впервые рассчитан в статье [247], а затем в работах [47, 143, 238]. Для Земли $S_{\oplus} \equiv a_{\oplus}$, поэтому эффект (3.39) вблизи ее поверхности $\sim 10^{-11}$. Качественной проверкой эффекта 17 может служить и следующий из (3.39) эффект разделения противоположно ориентированных спинов в поле Шварцшильда. Действительно, за один оборот угловое разделение между движущимися в одну и ту же сторону вращающимися частицами составит $12 \pi mS/\rho\sqrt{mr}$. Эффект имеет вековой характер. Можно показать [47], что в рассмотренном приближении выражение (3.39) сохраняется и после замены условий Пирани (2.36) на добавочные условия Коринальдеси—Папапетру [242] (см. уравнение (4.38)).

3.11. Разделение разноименных пробных зарядов в поле Нордстрема—Рейсснера. Как было показано еще в [67, 208], дифференциальное уравнение траектории пробного заряда q в поле Нордстрема—Рейсснера (1.6) имеет вид (3.3), где (см. [50])

$$P_{k,q}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2(m - A\varepsilon)}{h^2} u - \left(1 + \frac{k - A^2}{h^2}\right) u^2 + 2mu^3 - ku^4, \quad (3.40)$$

$A = \pm qQ/\mu c^2$, причем верхний знак соответствует одинаково заряженным центральному (гравитирующему) и пробному зарядам. Попытки использования полинома (3.40) предпринимались в работах [208, 248], но корректное выражение для добавочной аномалии найдено Н. Н. Костюковичем [50, 249]. Как следует из уравнения (3.5) и полинома (3.40),

$$D = \frac{k - A^2}{h^2} - \frac{2m}{p} (3 + e \cos \psi) + \frac{2k}{p^2} (3 + 2e \cos \psi) + \frac{ke^2}{p^2} (1 + \cos^2 \psi). \quad (3.41)$$

Тогда для смещения перицентра орбиты пробного заряда

$$(\text{эф. 18}) \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{k,q} = \mp \frac{qQ}{\mu M \gamma} \left(\frac{k}{2mp} \mp \frac{qQ}{2\mu c^2} - \frac{11k}{4p^2} \right). \quad (3.42)$$

Первый член получен также А. П. Рябушко [231, 232] при решении задачи двух тел, а второй следует из подсчетов Джаффи [208] после подстановки выражения для h . В статье [50] отмечено, что эти члены являются составными частями выражения (3.42), при выводе которого полагалось, что $A \sim m$. Как и в случае эффекта 15, возможность варьирования параметров пробного тела в широких пределах позволяет увеличивать значение (3.42). Согласно оценкам Рябушко [231, 232], совокупное действие эффектов (3.42), (3.33) и (3.17) может привести к добавочной аномалии $\Delta\varphi = -2,26''$ в год. С помощью современной экспериментальной техники выявление эффекта 18 в принципе реально. С другой стороны, учет значений зарядов Меркурия и Солнца, полученных с помощью эффекта Штарка, может привести к смещению перигелия порядка $0,1''$ за столетие (см. [250])^{*}. Кроме того, зависимость эффекта (3.42) от знака пробного заряда позволяет предложить проверку эффекта 18 на основе фиксации разделения разноименных пробных зарядов по полярному углу, причем одинаково заряженный с центром пробный заряд всегда будет отставать (см. (3.42)) [50].

^{*} Из-за краткости сообщения [250] нельзя установить, делалась ли эта оценка на основании выражения (3.42).

3.12. Влияние гравитирующего заряда на движение пробного спина. Если пробный спин движется в гравитационном поле Нордстрема—Рейсснера, то вместо (3.37):

$$P_{k,S}(u) = \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) + \frac{2m}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) u - \\ - \left\{ 1 + \frac{k}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) \right\} u^2 + 2m \left(1 \mp \frac{S\varepsilon}{h} \right) u^3 - \\ - k \left(1 \mp \frac{2S\varepsilon}{h} \right) u^4, \quad (3.43)$$

а после приближенного интегрирования находим добавочную аномалию [251]

$$(\text{эф. 19}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{k,S} = \pm \frac{15kS}{2p^2 \sqrt{mp}}. \quad (3.44)$$

Как и в случае эффекта (3.39), зависимость от ориентации пробного спина приведет к разделению противоположно ориентированных спинов. Однако в отличие от поля Шварцшильда гравитирующий заряд обуславливает отставание той частицы, спин которой антипараллелен орбитальному моменту. Таким образом, и для негеодезического движения параметр k сохраняет тенденцию компенсировать вклад m в полную аномалию.

3.13. Влияние космологической постоянной на движение пробного спина. Выясним, как влияет космологическая постоянная на движение пробного спина, ортогонального плоскости квазиэллиптической орбиты. Из первых интегралов (3.35) для метрики (1.7) находим

$$P_{\Lambda,S}(u) = \left(\frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u \right) \left(1 \mp \frac{2S\varepsilon}{h} \right) + \\ + \frac{\Lambda}{3h^2} u^{-2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) - u^2 + \\ + 2m \left(1 \mp \frac{S\varepsilon}{h} \right) u^3 + \frac{\Lambda}{3} \pm \frac{2\Lambda S\varepsilon}{3h}, \quad (3.45)$$

что после приближенного интегрирования дает для добавочной аномалии выражение

$$(\text{эф. 20}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{\Lambda,S} = \mp \frac{7\Lambda S p^2}{2 \sqrt{mp}}. \quad (3.46)$$

Этот эффект рассчитан в работе [251], где отмечена также возможность разделения траекторий по-разному ориентиро-

ванных спинов из-за зависимости (3.46) от направления собственного углового момента вращающихся пробных тел.

3.14. Добавочная аномалия для пробного спина в поле Керра. Поскольку при рассмотрении эффектов (3.39), (3.44) и (3.46) вращение центральной массы не учитывалось, они являются в известном смысле «спин-орбитальными» (этим и обусловлена зависимость данных эффектов от взаимной ориентации орбитального и спинового моментов). Обратимся к вкладу спин-спинового взаимодействия в добавочную аномалию и смещение перицентра. Попытки расчета этого вклада предпринимались еще Дасом [247] и Калицыным [252] для метрики Лензе—Тирринга (1.9) и в статье [222] для метрики Керра. Однако чаще всего в конечном выражении фигурирует лишь сумма эффектов (3.24) и (3.39), а спин-спиновый член отсутствует. Поэтому в работе [251] произведено более полное рассмотрение. Для ориентированного перпендикулярно экваториальной плоскости спина в поле Керра получено

$$\begin{aligned}
 P_{a,S}(u) = & \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} \left(1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} \right) + \\
 & + \frac{2m}{h^2} \left\{ 1 \pm \frac{2S\varepsilon}{h} + \frac{2a\varepsilon}{h} (\varepsilon^2 - 1) \pm \frac{6aS\varepsilon^2}{h^2} (\varepsilon^2 - 1) \right\} u - \\
 & - \left\{ 1 - \frac{8am^2\varepsilon^2}{h^3} \pm \frac{24a}{h^4} m^2 S \varepsilon^4 \right\} u^2 + 2m \left\{ 1 \mp \frac{S\varepsilon}{h} \pm \right. \\
 & \left. \pm \frac{aS}{h^2} (1 - 2\varepsilon^2) + \frac{8am^2\varepsilon}{h^3} \pm \frac{24a}{h^4} m^2 S \varepsilon^2 \right\} u^3. \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

После приближенного интегрирования дифференциального уравнения траектории, ограничиваясь членами порядка aS и пренебрегая квадратами a и S , получаем

$$(\text{эф. 21}) \quad \left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{a,S} = \mp \frac{27aS}{p^2}. \quad (3.48)$$

Здесь два знака учитывают различные ориентации пробного спина при фиксированном направлении углового момента центральной массы (в данном случае a направлен по оси $\theta=0$ в положительном направлении). Замена знака a на противоположный сопровождается заменой знаков перед (3.48). Таким образом, знак добавочной аномалии зависит от взаимной ориентации орбитального момента, углового момента центральной массы и спина пробного тела.

Вторая группа эффектов ОТО — добавочные аномалии во главе с ключевым эффектом эйнштейнова смещения перицентра в поле Шварцшильда — разнообразнее первой груп-

пы, поскольку порождается не только параметрами источников тяготения, но и параметрами движущихся тел. Все эффекты 8—21 описываются разностью угловых координат. Еще Эйнштейн подчеркивал, что разности координат в ОТО не являются измеряемыми величинами. Однако разности $\Delta\chi$ во всех выражениях § 3 предполагают особый выбор угловой координаты, который позволяет трактовать их как величины, отнесенные к лоренцеву базису. На этом остановимся подробнее в § 11.

§ 4. ОТКЛОНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ И ДОБАВОЧНЫЕ АНОМАЛИИ ПРИ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ

В следующую группу отберем эффекты ОТО, возникающие при квазигиперболическом движении пробных тел, ограничившись ультрарелятивистскими скоростями. Главное внимание уделим электромагнитным сигналам, т. е. предельному случаю, когда движение происходит по изотропным линиям. В этом случае требуется, вообще говоря, совместное рассмотрение эйнштейновых уравнений (1.1) и общековариантных уравнений Максвелла. В приближении же лучевой оптики и при отвлечении от поляризации фотонов распространение электромагнитных сигналов подчиняется уравнениям геодезической (1.2), в которых, однако, параметр τ заменен на нулевой параметр. При таком подходе решения уравнений движения изотропной геодезической линии отличаются от таких же уравнений обыкновенной геодезической линии только предельностью значений постоянных интегрирования. Поэтому для разыскания добавочных аномалий можно исходить из общих уравнений геодезической линии, содержащих предельный случай. Такой подход восходит к работам [253—255]. Для этого достаточно совершить в (3.3) переход к прицельному параметру b и начальной скорости частицы на бесконечности v_0 , что дает, согласно [46, 177, 213, 256, 257],

$$\varepsilon = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}, \quad h = b\beta_0(1 - \beta_0^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\varepsilon^2 - 1}{h^2} = b^{-2}, \quad \beta_0 = \frac{v_0}{c}.$$

В случае квазигиперболического движения в отличие от квазиэллиптического показательно вычислить и отклонение траектории частицы от прямой. Зная максимальное значение добавочной аномалии χ_{\max} , это можно сделать следующим образом. Согласно (3.1), в координатах $(r, \psi = \varphi + \chi)$ уравнение траектории является уравнением гиперболы. Поэтому угол θ между асимптотами траектории равен углу, обозначим его f , между асимптотами гиперболы в координатах (r, ψ) , сложен-

ному с углом χ_{\max} , на который повернется координатная система (r, ψ) в системе (r, φ) :

$$\theta = \chi_{\max} + f. \quad (4.1)$$

Из уравнения гиперболы следует:

$$f = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}},$$

т. е.

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} + \chi_{\max}. \quad (4.2)$$

В конце параграфа остановимся и на отклонении частиц, обладающих пробным спином.

4.1. Отклонение ультрарелятивистских частиц в поле Шварцшильда. В случае $m^2/b^2 \ll 1$, $1/e^2 \ll 1$, согласно [46],

$$\varepsilon^2 = \left(1 - \frac{me}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{1 - \beta_0^2}, \quad h^2 = \frac{mbe}{1 - \frac{me}{b}} = \frac{b^2\beta_0^2}{1 - \beta_0^2}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\perp}^2 &= \frac{v_{\perp}^2}{c^2} = \beta_0^2 + \frac{2m}{r}(1 - \beta_0^2), \quad \beta_0^2 \equiv (\beta^2)_{m=0, r=\infty} = \\ &= 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{me}{b}. \end{aligned}$$

В пределе

$$(\varepsilon)_{\beta_0=1} = \infty, \quad (h)_{\beta_0=1} = \infty, \quad (h/\varepsilon)_{\beta_0=1} = b. \quad (4.4)$$

Соотношения (4.3) приводят с помощью (3.5) к элементу добавочной аномалии

$$d\chi \approx \left(-\frac{3m}{\varepsilon b} - \frac{m}{b} \cos \varphi\right) d\psi. \quad (4.5)$$

Интегрирование в пределах от ψ_1 до ψ_2 — наименьших по абсолютному значению корней уравнения $(1 + e \cos \psi) = 0$ (тогда, согласно (3.1), $r = \infty$) — дает выражение для χ_{\max} . Подставляя его в (4.2), с учетом (4.3) приходим к эффекту отклонения ультрарелятивистской частицы на угол

$$(\text{эф. 22}) \quad (\theta)_m \approx \frac{2m}{b} \left(1 + \frac{1}{\beta_0^2}\right) \approx \frac{4m}{R} \left(1 + \frac{\delta}{2\beta_0^2} + \frac{m}{R\beta_0}\right) \dots, \quad (4.6)$$

$$r_0 = (r)_{\varphi=0} = b \left(1 + \frac{1}{e}\right)^{-1}, \quad b \approx r_0 \left(1 + \frac{m}{r_0\beta_0}\right),$$

$$\theta = 2\varphi_{\max} - \pi,$$

$\delta = 1 - \beta_0^2$, r_0 — минимальное расстояние.

4.2. Эйнштейнов эффект отклонения электромагнитного сигнала. Из (4.6) в пределе $\beta_0 \rightarrow 1$ следует, что в принятом приближении

$$(\text{эф. 23}) \quad (\theta)_{m, \beta_0=1} \approx \frac{4m}{r_0}. \quad (4.7)$$

Этот эффект без связи с (4.6) предсказал Эйнштейн в работе [100], относящейся к циклу основополагающих работ по ОТО. Во времена первых обсуждений эффекта (4.7) опытная проверка могла быть осуществлена лишь в оптическом диапазоне частот. Поэтому эффект 23 стали называть «эффектом искривления светового луча». Подойдем, как обычно, к (4.7), производя предельный переход в дифференциальных уравнениях. Учитывая (4.4), из выражения (3.7) получаем

$$\tilde{P}_m(u) \equiv \lim_{\varepsilon, h \rightarrow \infty} P_m(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3. \quad (4.8)$$

Выделяя соответствующие системы алгебраических и дифференциальных уравнений, находим с необходимой точностью

$$p = \frac{b^2}{m}, \quad e = \frac{b}{m} > 1, \quad (4.9)$$

$$\lim_{\varepsilon, h \rightarrow \infty} D \equiv \tilde{D} = - \frac{2m}{p} e \cos \psi. \quad (4.10)$$

Ограничиваясь лишь членами первого порядка по m , после приближенного интегрирования непосредственно получаем для полного угла отклонения выражение (4.7).

Из него следует, что вблизи поверхности Солнца отклонение должно составить $1,75''$, а для Юпитера в сто раз меньше (эти оценки были проделаны Эйнштейном). Как и в случае гравитационного красного смещения (2.4), Фрейндлих первым обратился к экспериментальной проверке эффекта 23. Еще в 1913 г. он исследовал фотоснимки затмения Солнца 1901 г. [258] (см. также [259]), а в 1914 г. возглавлял экспедицию в Крым для наблюдения эйнштейнова эффекта. Однако надежное экспериментальное подтверждение этого предсказания ОТО было получено лишь в 1919 г. Наблюдения дали для θ значения $1,98'' \pm 0,12''$ и $1,61'' \pm 0,31''$ [260]. Во время последующих солнечных затмений были получены результаты, которые в большинстве случаев хорошо согласовались с теоретическим значением (см. подробные обзоры [3, 96, 98, 261]). Из-

мерения техасской группы исследователей, наблюдавших затмение 20 июня 1973 г. в Мавритании [262], дали экспериментальное значение отклонения, составляющее $0,95 \pm 0,11$ от теоретического. Несмотря на сравнительно невысокую точность измерения эффекта (4.7) во время солнечных затмений, считается, что предсказание Эйнштейна достаточно надежно подтверждено еще в работе [260], а, согласно утверждению специалиста по солнечным затмениям Митчела [263], никакой другой эффект или комбинация эффектов не могут объяснить наблюдаемое на опыте явление отклонения луча света в гравитационном поле.

С целью повышения точности измерения эффекта (4.7) предложено [264] выносить измерительную аппаратуру в космос. Тем самым появилась бы возможность наблюдать явление отклонения света не только в случае солнечных затмений, причем точность измерения могла бы достигать 1%. Однако дальнейшее развитие исследований по проверке эффекта 23 пошло по другому пути. Новые возможности возникли после открытия в конце 50-х годов радиисточников во Вселенной. Некоторые из них периодически (ежегодно) оказываются вблизи Солнца. Малые угловые размеры квазаров и возможность широкого варьирования базы радиointерферометров позволили успешно реализовать предложенные [265, 266] измерения отклонения радиолуча в гравитационном поле Солнца (см. [267—269]). В первых экспериментах точность измерений была порядка десяти процентов. Работы же последних лет позволили проверить эффект отклонения с точностью в десять раз выше. Точность проверки достигла 0,9% [270, 271].

4.3. Эффект уменьшения годовых параллаксов. Отклонение лучей света гравитационным полем ведет к ряду интересных следствий. Некоторые из них могут рассматриваться и как самостоятельные эффекты ОТО. Прежде всего в силу эффекта (4.7) изменяется видимое положение звезд на небосводе, что проявляется в необходимости выявления релятивистских поправок к величине звездного параллакса. Как следует из работы [272], расчет вторых интегралов уравнений изотропных геодезических для поля Шварцшильда приводит в линейном по массе m приближении к эффекту уменьшения годовых параллаксов:

$$(\text{эф. 24}). \quad \Delta p = p(tr) - p(real) = -\frac{2m}{r} \sin^2 \varphi_0. \quad (4.11)$$

Здесь $p(tr)$ — главная (измеряемая тригонометрическими методами) часть параллакса, $p(real) = r/r_0$ — ньютоново значение параллакса, r_0 и φ_0 — гелиоцентрические координаты звезды (расстояние и широта), а r характеризует удаление

наблюдателя от гравитирующей массы (например, радиус земной орбиты). Предсказываемое эффектом 24 изменение составляет $\Delta p \geq 0,004''$. В связи с этим А. А. Михайловым [273] подчеркнуто, что выявленный Арифовым и Кадыевым эффект относится к случаю, когда тригонометрический параллакс определяется с помощью угловых расстояний от звезды до Солнца. Принятый же в астрономии способ состоит в измерении угла до некоторой далекой опорной звезды, влияние гравитационного поля которой на параллакс весьма слабо.

Применение астрофизических методов (зависимости интенсивности спектральных линий от абсолютной звездной величины и т. д.) позволяет измерить ньютоново значение параллакса при одновременном измерении релятивистского с помощью тригонометрического способа. Поэтому эффект 24 является одним из немногих примеров, когда можно измерить и эйнштейново, и ньютоново значение физической величины, не прибегая к расчетам, что и отмечено в обзоре [4].

4.4. Анизотропное отклонение электромагнитного сигнала в поле Вейля—Леви-Чивита. Применение описанной выше процедуры к уравнению (3.11) приводит в случае (4.4) к выражению

$$\tilde{P}_\sigma(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2m \left\{ 1 + \frac{2m^2\sigma}{15b^2} \right\} u^3 + \frac{m^4\sigma}{b^2} u^4. \quad (4.12)$$

Отсюда с необходимой точностью находим

$$p = \frac{b^2}{m} \left\{ 1 - \frac{2m^2\sigma}{15b^2} \right\}, \quad e = \frac{b}{m} \left\{ 1 - \frac{2m^2\sigma}{15b^2} \right\}, \quad (4.13)$$

а вместо (3.12) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{D} = & -\frac{2m}{p} \left\{ 1 + \frac{2m^2\sigma}{15b^2} \right\} (3 + e \cos \psi) - \\ & - \frac{m^4\sigma}{b^2 p^2} (6 + 4e \cos \psi + e^2 + e^2 \cos^2 \psi). \end{aligned} \quad (4.14)$$

После подстановки этих соотношений в дифференциальное уравнение (3.5) и разыскания добавочной аномалии χ_{\max} с помощью (4.3) находим угол отклонения светового луча, распространяющегося в плоскости $\theta = \pi/2$:

$$(\text{эф. 25}) \quad (\theta)_{\sigma, m} = \frac{8m^3\sigma}{15b^3}. \quad (4.15)$$

Подчеркнем, что в полях (1.3) и (1.4), несмотря на отличие симметрий их источников, составные части f и χ_{\max} полного угла отклонения равны между собой.

В силу аксиальной симметрии поля (1.4) значение угла отклонения сильно зависит от ориентации плоскости орбиты по отношению к плоскости $\theta = \pi/2$, т. е. отклонение светового луча будет, вообще говоря, анизотропным. Можно ожидать, что подобно эффекту смещения перигентра при некотором значении $\theta = \theta_0$ вклад квадрупольного момента может быть элиминирован.

4.5. Отклонение ультрарелятивистской частицы и электромагнитного сигнала в поле Нордстрема—Рейсснера. Через десять лет после получения Эйнштейном формулы (4.10), Джеффри [67] впервые исследовал вопрос о распространении света в поле Нордстрема — Рейсснера, а также вычислил угол отклонения луча света в поле (1.5). Прежде чем обсудить его, рассмотрим более общий случай — отклонение ультрарелятивистских частиц в приближении $k \ll m^2$, $(1 - \beta_0^2) \ll 1$. Исходя из (4.3) и (3.5), согласно [213], получаем максимальную добавочную аномалию, а также угол f . Это приводит к максимальной добавочной аномалии

$$\chi_{\max} = \frac{2m}{b} + \frac{\pi m^2}{b^2} \frac{15}{4} - \frac{3}{4} \frac{\pi k}{b^2} \quad (4.16)$$

и углу отклонения от прямой

$$(\theta)_{m,k} = (\theta)_m - \frac{3}{4} \frac{\pi k}{b^2}, \quad (4.17)$$

где $(\theta)_m$ относится к полю Шварцшильда, т. е. совпадает с (4.6). Следовательно, за счет параметра k возникает эффект отклонения ультрарелятивистской частицы на угол

$$(\text{эф. 26}) \quad (\Delta\theta)_k = -\frac{3}{4} \frac{\pi k}{b^2}. \quad (4.18)$$

Таким образом, гравитирующее действие электрического заряда, согласно ОТО, уменьшает угол отклонения. В принятом приближении (4.18) не содержит β_0 , т. е. в равной мере относится как к неизотропным, так и к электромагнитным сигналам. Конечно, предельный случай можно рассмотреть и самостоятельно. Дифференциальное уравнение траектории, следующее из (3.14), при $\varepsilon, h \rightarrow \infty$ определяется полиномом

$$\tilde{P}_k(u) = \frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3 - ku^4.$$

Согласно [213], эксцентриситет и фокальный параметр квазигиперболы подчиняются соотношениям

$$p = \frac{b^2}{m} \left(1 + \frac{3k}{b^2} \right), \quad e = \frac{b}{m} \left(1 + \frac{5k}{2b^2} \right). \quad (4.19)$$

После учета этих соотношений и следующего из (3.16) выражения

$$\tilde{D} \approx -\frac{2m}{p}(3 + e \cos \psi) + \frac{k}{p^2}(6 + 4e \cos \psi + e^2 + e^2 \cos^2 \psi), \quad (4.20)$$

а также из (3.5) сразу приходим к предельному случаю (4.18), когда первый член совпадает с (4.7), а второй с (4.18) (см. работы [48, 67, 213, 274—276]).

4.6. Вклад космологического члена в отклонение электромагнитного сигнала. Как следует из (3.18), дифференциальное уравнение траектории светового луча в поле (1.6) содержит полином

$$\tilde{P}_\Lambda(u) = \frac{1}{b^2} + \frac{\Lambda}{3} - u^2 + 2mu^3. \quad (4.21)$$

После дифференцирования по переменной u член с космологической постоянной исчезает:

$$d^2u/d\varphi^2 = -u + 3mu^2. \quad (4.22)$$

На этом основании утверждалось [56, 140], что траектория луча света не зависит от космологической постоянной и в метрике (1.6) имеет тот же вид, что и в поле Шварцшильда (1.3). При этом, однако, не учитывалось, что уравнение (4.22) определяет траекторию лишь с точностью до двух постоянных интегрирования, которые могут зависеть и от Λ (см. (4.21)). Это подтверждается результатами работы [251], где рассчитан вклад космологического члена в отклонение луча света. Следуя описанной выше методике, из (4.21) находим приближенные выражения для p и e :

$$p = \frac{b^2}{m} \left(1 - \frac{\Lambda b^2}{3} \right), \quad e = \frac{b}{m} \left(1 - \frac{\Lambda b^2}{6} \right)$$

и выражение для

$$\tilde{D} \approx -\frac{2m}{p}(3 + e \cos \psi).$$

Нетрудно убедиться, что составные части полного угла отклонения равны между собой, причем

$$(\text{эф. 27}) \quad (\theta)_\Lambda = \frac{2}{3} m\Lambda b. \quad (4.23)$$

Таким образом, вклад космологической постоянной хотя и весьма мал, но не равен нулю и возрастает с ростом прицельного параметра.

4.7. Анизотропное отклонение ультрарелятивистских частиц и электромагнитного сигнала в поле Керра. Аксиальная симметрия поля Керра (1.7) и специфика удельного углового момента a существенно обогащают явления отклонения под действием гравитации. Сначала, следуя [213], рассмотрим общий случай добавочной аномалии при квазигиперболическом движении в приближении $a^2 \ll m^2 \ll b^2$; $(1 - \beta_0^2) \ll 1$. Тогда

$$\chi_{\max} = \frac{2m}{b} + \frac{15}{4} \frac{\pi m^2}{b^2}, \quad (4.24)$$

$$(\theta)_{m,a} \cong (\theta)_m - \frac{4am}{b^2}. \quad (4.25)$$

Следовательно, имеет место эффект отклонения ультрарелятивистских частиц, порождаемый параметром a поля Керра:

$$(\text{эф. 28}) \quad (\Delta\theta)_a \approx - \frac{4am}{b^2}. \quad (4.26)$$

Как и в (4.18), в это выражение в рассмотренном приближении β_0 явно не входит. Поэтому и оно в равной мере относится к движению как по обыкновенным, так и изотропным геодезическим. Действительно, с учетом лишь линейных по a членов в случае экваториального распространения изотропного сигнала, согласно (3.22),

$$\bar{P}_a(u) = \frac{1}{b^2} + \frac{4am}{b^3} u - \left\{ 1 - \frac{8am^2}{b^3} \right\} u^2 + 2m \left\{ 1 + \frac{8am^2}{b^3} \right\} u^3. \quad (4.27)$$

Отсюда с необходимой точностью следует (см. [49, 177, 213]):

$$p = \frac{b^2}{m} \left\{ 1 + \frac{2a}{b} \right\}, \quad e = \frac{b}{m} \left\{ 1 + \frac{2a}{b} \right\}, \quad (4.28)$$

$$\bar{D} \approx \frac{8am^2}{b^3} - \frac{2m}{p} \left\{ 1 + \frac{8am^2}{b^3} \right\} (3 + e \cos \psi). \quad (4.29)$$

Из этих соотношений для угла отклонения электромагнитного сигнала непосредственно приходим к (4.26). В первом приближении эффект был рассчитан в работах [277, 278] для метрики (1.8), а в работе [279] этот же результат получен для метрики Керра и многократно обсуждался [49, 85, 276, 280]. Его отличительной особенностью является зависимость от направления вращения центральной массы и от взаимной ориентации ее вращения и направления распространения светового луча. Кроме того, при неэкваториальном распространении света угол отклонения зависит и от ориентации по отношению к

оси вращения. В частности, для луча, распространяющегося параллельно оси вращения (в этом случае траектория не является плоской — см. эффект 67), отклонение не зависит от члена, линейного по угловому моменту источника поля [277, 278]. Все эти случаи можно охарактеризовать обобщенным выражением для угла отклонения:

$$(\text{эф. 28a}) \quad (\theta)_a = \frac{4m}{b^2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}), \quad (4.30)$$

где \mathbf{e} — единичный вектор, нормальный к плоскости траектории. Экспериментальная проверка анизотропии отклонения луча в поле вращающейся массы может представлять самостоятельный интерес. Для этого необходимо выявить разность в отклонении лучей с одинаковым прицельным параметром. В этом отношении может оказаться удобным использование затмений Солнцем радиоисточников, поскольку здесь имеется уже разработанная методика измерения углов отклонения радиолучей от квазара до и после его затмения.

4.8. Периодическое отклонение и дрейф луча света в поле гравитационной волны. Согласно замечанию в работе [281], Бертоцци обратил внимание на то, что в поле гравитационной волны луч света должен испытывать периодическое отклонение. Это же следует и из вида «коэффициента преломления» для луча в поле (1.9) (см., например, статью [282]):

$$n = 1 + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta, \quad (4.31)$$

где \mathbf{e}^α — единичный вектор вдоль направления распространения луча света. Действительно, компоненты $h_{\alpha\beta}$ являются периодическими функциями времени, а угол между асимптотами световой траектории в поле тяготения как своеобразной среде с коэффициентом преломления, отличным от 1, определяется выражением $\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dr} (\ln n) dr$ [283]. Для слабых грави-

тационных волн этот эффект ничтожен. Поэтому при обсуждении его экспериментальной проверки предложен следующий способ накопления дрейфа отклонения луча (или частицы) в поле гравитационной волны [88]. Если в точках $x^2=0$ и $x^2=L$ расположить зеркала, то испущенный из начала координат световой луч под действием гравитационной волны, распространяющейся вдоль оси x , будет претерпевать отклонения вдоль x^1 и x^3 :

$$x^1 = - \frac{n\pi c}{\omega_g} \beta^2 h_+ \sin \Phi_+, \quad (4.32)$$

$$x^3 = \frac{2c}{\omega_g} \beta [1 - (-1)^N] h_{\times} (\cos \Phi_{\times} - n\pi \sin \Phi_{\times}),$$

где учтено $L = \frac{1}{\omega_g} \pi N v$ (N — целое число). При сравнении лишь четных отражений (N четное) сдвиг по x^3 может быть компенсирован, а сдвиг по x^1 будет накапливаться. Таким образом, в системе из двух зеркал можно добиться дрейфа светового луча за счет определенного выбора фазовых и частотных соотношений (резонансного характера). Согласно [88], дрейф определяется соотношением

$$(\text{эф. 29}) \quad (\Delta x^1) = -L\beta h_+ \sin \Phi_+ \quad (4.33)$$

и для фотона может составить $\Delta l = \lambda h_+ N_1$, где λ и h_+ — длина волны и амплитуда гравитационного излучения, N_1 — число отражений.

4.9. Влияние пробного спина на добавочную аномалию ультрарелятивистской частицы в поле Шварцшильда. Влияние вращательных моментов тел на их движение явилось предметом многих исследований. В отличие от фотона ориентация пробного спина у макроскопических тел, согласно ОТО, в значительной мере произвольна. Это следует и из решения задачи многих тел и из задачи одного тела при использовании уравнений Папапетру.

В случае плоского движения и постоянного спина S_n , ориентированного нормально плоскости орбиты, согласно работам [47, 238, 251, 286], имеем следующие выражения для добавочных аномалий:

$$(\Delta X_{\max})_{S; S^0\alpha=0} = -2m\dot{S}_n/\epsilon b^2, \quad (4.34)$$

$$(\Delta X_{\max})_{S; u_\mu S^{\mu\nu}=0} = +2mS_n/b^2 \quad (4.35)$$

соответственно при условии Пирани (3.30) и условии Коринальдеси — Папапетру [242]

$$S^0\alpha = 0. \quad (4.36)$$

Из уравнений (4.2), (4.34) и (4.35) следуют эффекты добавочных отклонений, порожденные пробным спином:

$$(\text{эф. 30}) \quad (\Delta\theta)_{m,S,S^0\alpha=0} = -\frac{2mS_n}{b^2}, \quad (4.37)$$

$$(\Delta\theta)_{m,S,u_\mu S^{\mu\nu}=0} = -\frac{4mS_n}{b^2}. \quad (4.38)$$

Как видно, они зависят от добавочных условий, наложенных на спин частицы *). Эти эффекты не относятся к электромагнитным сигналам, для которых $S_n = 0$. Угол отклонения (4.37) получен Микуле [238], а угол (4.38) — в работе [47], где проводился их анализ в связи с изучением физической структуры добавочных аномалий (см. § 24).

4.10. Отклонение фотона от плоского движения. Когда спин частицы, начавшей движение в плоскости $\theta = \pi/2$, не имеет нормальной компоненты (т. е. $S_z = 0$, $S_x, S_y \neq 0$), то уравнения Папапетру переходят в уравнения геодезической. Такое движение оказывается неплоским [284]. Эффект отклонения фотона от плоскости, в которой он начал движение, рассмотрен Епихиным и Мицкевичем [285]. Для его выявления решалось уравнение девиации геодезических (3.28), причем в качестве возмущающей силы F^λ фигурировал член из правой части (1.3) (при $q = 0$). Метрика Шварцшильда записывалась в изотропных координатах. Было показано, что наличие спина у фотона отклоняет траекторию светового луча перпендикулярно экваториальной плоскости:

$$(\text{эф. 31}) \quad l = \frac{mA_1}{(A_2)^2} \sin 2\varphi. \quad (4.39)$$

Здесь A_1 и A_2 — постоянные, а отклонение от плоского движения характеризуется вектором $l^\mu = l\delta^\mu_z$. В работе [285] отмечалось, что это отклонение симметрично по отношению к противоположным ориентациям спина и в низшем приближении не приводит к повороту плоскости поляризации.

§ 5. ЗАПАЗДЫВАНИЕ ЧАСТИЦ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИГНАЛОВ, ВЫЗВАННОЕ ДЕСИНХРОНИЗАЦИЕЙ

Отказ от абсолютной одновременности находит в ОТО разнообразные проявления. Рассмотрим группу эффектов, обусловленных дополнительным по сравнению со СТО влиянием гравитационного поля на синхронизацию разноместных событий, принадлежащих пространственно-подобному интервалу. (Напомним, что первая группа эффектов выявлялась при сопоставлении событий, принадлежащих временно-подобному интервалу.) В общем случае для произвольного интервала

$$ds^2 = -(dx^{(0)})^2 + dl^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

где $dx^{(0)}$ и dl — элементы собственных (физических) времени и расстояния в некоторой локальной лоренцевой системе.

) В работе [238] указывалось, что с возрастанием постоянной ϵ эффект 30 исчезает. Это недоразумение. Как отмечено [20], постоянная ϵ , содержащаяся также в $\overset{}{S} = \epsilon S$, сокращается.

Условие синхронизации по собственному, физическому, времени

$$dx^{(0)} = 0 \quad (5.1)$$

выделяет уравнение

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dl^2 = - (dx^{(0)})^2 = 0. \quad (5.2)$$

Решая это уравнение относительно dx^0 , находим (см. подробнее п. 14.3) элемент, который будем называть координатным временем десинхронизации:

$$(dx^0)_{dx^{(0)}=0} \equiv dx^0_{\text{дес}} = - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} \pm \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{00} g_{\alpha\beta}) \frac{dx^\alpha dx^\beta}{g_{00}} + dl^2}. \quad (5.3)$$

В том же пункте приведено и другое выражение:

$$dx^0_{\text{дес}} = - \frac{u_\alpha dx^\alpha}{u_0} = - \frac{g_{\alpha\mu} \dot{x}^\mu dx^\alpha}{g_{0\lambda} \dot{x}^\lambda}, \quad (5.4)$$

где $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu$ — решения уравнений движения частицы, относительно собственного времени которой производится синхронизация. В случае изотропного сигнала, когда $dl \equiv d\bar{l} = 0$, элемент времени десинхронизации (5.3) является временем распространения сигнала, содержащими члены, предсказываемые ОТО, известные под названием «времени задержки» электромагнитного сигнала. Сохраним это название и для членов, предсказываемых ОТО, когда $dl \neq 0$, т. е. для частицы, движущейся с досветовой скоростью. Время десинхронизации многократно вычислялось в работах [36—44, 46, 47, 51, 52].

Таким образом, десинхронизация в ОТО порождает группу эффектов — «задержек во времени» гравитационным полем [287]. Из (5.4) видно, что они, вообще говоря, зависят как от гравитирующих параметров, так и от параметров пробных тел. Далее отберем эффекты задержек, порождаемых именно десинхронизацией, а не другими причинами, и главное внимание уделим задержке электромагнитных сигналов.

Приведем выражение для времени распространения, содержащего время задержки изотропного сигнала, когда $\theta = \pi/2$ и принята шварцшильдово-подобная система координат x^0, r, θ, φ . Тогда

$$-g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} dr^2 + g_{33} d\varphi^2 + 2g_{03} dx^0 d\varphi = 0, \quad (5.5)$$

а связь между первыми интегралами изотропной геодезической представляется в виде

$$-g_{00} + g_{11} \left(\frac{dr}{dx^0} \right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\varphi}{dx^0} \right)^2 + 2g_{03} \frac{d\varphi}{dx^0} = 0, \quad (5.6)$$

$$\left(-g_{00} + g_{03} \frac{d\varphi}{dx^0}\right) \dot{x}^0 = \varepsilon, \quad \left(g_{33} \frac{d\varphi}{dx^0} + g_{03}\right) \dot{x}^0 = h, \quad (5.7)$$

где \dot{x}^0 — производная по некоторому параметру вдоль изотропной геодезической, отличному от s . Отсюда следует выражение для времени распространения сигнала

$$(x^0)_{ds=0} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\{g_{03}(r_0) + [g_{03}^2(r_0) + g_{00}(r_0)g_{33}(r_0)]^{\frac{1}{2}}\} g_{03} + g_{33}g_{00}}{g_{03} + [g_{03}^2 + g_{00}g_{33}]^{\frac{1}{2}} g_{00} - g_{03}g_{00}} d\varphi. \quad (5.8)$$

Здесь совершен переход от прицельного параметра b к более удобному параметру — минимальному расстоянию r_0 между сигналом и гравитирующим центром.

Пусть источник излучения расположен в точке с координатами

$$r_1 = p(1 + e \cos \psi_1)^{-1}, \quad \psi_1 = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_1} - 1\right),$$

а объект, используемый в качестве отражателя, помещается в точке

$$r_2 = p(1 + e \cos \psi_2)^{-1}, \quad \psi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r_2} - 1\right).$$

Тогда для разности времени движения по траектории «туда» или «обратно», рассчитанных с учетом искривления траектории в гравитационном поле и без его учета:

$$\Delta x^0 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\{g_{03} + [g_{03}^2 + g_{00}g_{33}]^{\frac{1}{2}}\} g_{03} + g_{33}g_{00}}{\{g_{03} + [g_{03}^2 + g_{00}g_{33}]^{\frac{1}{2}}\} g_{00} - g_{03}g_{00}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\bar{D}}} - (\Delta x^0)_{m=0}. \quad (5.9)$$

Здесь член $(\Delta x^0)_{m=0}$ — время распространения по прямой линии (в отсутствие поля тяготения). Предполагается, что все параметры орбиты сигнала выражены через параметры источника поля тяготения и r_0 .

5.1. Эффекты задержки пробных тел в поле Шварцшильда. Решения уравнений плоского движения пробных тел в поле Шварцшильда можно записать в виде

$$\frac{dr}{dx^0} = \frac{A}{\alpha^3 \varepsilon}; \quad \frac{d\varphi}{dx^0} = \frac{h}{\varepsilon \alpha^2 r^2}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2 A}{\alpha h}, \quad (5.10)$$

$$\alpha \equiv \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2}, \quad A^2 = \alpha^2 \varepsilon^2 - 1 - \frac{h^2}{r^2}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad (5.11)$$

Подставляя выражения (5.10) в уравнение (5.4), имеем

$$\begin{aligned} (\text{эф. 32}) \quad \Delta x_{\text{деc}} &= \int (dx^0_{\text{деc}})_{ds=dt>0} = \int \left(\frac{\alpha^2 \varepsilon}{h} - \frac{1}{\varepsilon h} \right) r^2 d\varphi = \\ &= \int \left(\frac{\alpha^2 \varepsilon}{h} - \frac{1}{\varepsilon h} \right) \left[\frac{\alpha^2 \varepsilon^2}{h^2} - \frac{1}{h^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \alpha dr. \quad (5.12) \end{aligned}$$

Обратим внимание, что различие в знаках двух членов подынтегрального выражения (5.12) в принципе говорит о возможности случаев как задержки, так и опережения. Сборный эффект 32 конкретизируется лишь после выбора определенных значений ε и h . Иллюстрируем его примерами.

Пусть неизотропным сигналом является пробная частица, равномерно вращающаяся в поле Шварцшильда по окружности радиуса r . Тогда

$$(h)_{\varepsilon=0} \approx \sqrt{mr} (1 + 3m/r), \quad (\varepsilon)_{\varepsilon=0} \approx 1 - m/2r. \quad (5.13)$$

Подставляя эти выражения в (5.12) и переходя к интегрированию по φ в пределах $(0, 2\pi)$, находим

$$(\text{эф. 32a}) \quad \left(\frac{\Delta x^0_{\text{деc}}}{2\pi} \right)_{m,\varepsilon=0} = \sqrt{mr}; \quad \frac{m^2}{r^2} = \beta_{\pi}^4 \ll 1. \quad (5.14)$$

Для оценки найденного времени десинхронизации приведем его отношение ко времени движения частицы, равному кеплерову периоду:

$$\frac{\Delta x^0_{\text{деc}}}{2\pi} / T_0 = \frac{\sqrt{mr}}{1/\omega_0} = \frac{m}{r} = \beta_{\pi}^2. \quad (5.15)$$

Это отношение — порядка малости, типичного для основных поправок ОТО в поле Шварцшильда.

Приведем теперь результаты подсчетов Г. Э. Сусурина [39] времени десинхронизации при квазигиперболическом движении с небольшим эксцентриситетом:

$$(me^2/r_0)^2 \ll 1, \quad \beta^4 = v^4/c^4 \ll 1. \quad (5.16)$$

Тогда, согласно работе [39], где используется (5.4) (в иных обозначениях), имеем

$$(\text{эф. 32b}) \quad (\Delta x^0_{\text{деc}})_m = - \int_0^{\varphi} \frac{u_{\alpha} dx^{\alpha}}{u_0} = \sqrt{mp} \frac{\Phi + e \operatorname{sh} \Phi}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad (5.17)$$

$\Phi = \operatorname{arth} \sqrt{(e-1)/(e+1)} \operatorname{tg} \varphi$ — эксцентрисическая аномалия.

Квазигиперболические орбиты с большим эксцентриситетом (ультрарелятивистские) таковы, что

$$1/e^2 \ll 1, \quad \beta^4 \approx 1 - 2m/r_0. \quad (5.18)$$

В частности, если $e = \frac{r_0}{m}$, то, согласно [39],

$$\Delta x^0_{\text{деc}} = - \int_{r_0}^r \frac{u_\alpha dx^\alpha}{u_0} = \sqrt{r^2 - r_0^2} + (\Delta x^0_{\text{деc}})_m, \quad (5.19)$$

где

$$\begin{aligned} (\text{эф. 32c}) \quad (\Delta x^0_{\text{деc}})_m &= m \sqrt{r^2 - r_0^2} \left\{ \frac{r_0 - r}{2r_0(r + r_0)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 [P(r) - P(r_0)] \right\}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$P(r) \equiv \ln \left[\frac{1}{e} + \frac{r}{b} (1 - A_0) \right].$$

Таким образом, при умеренно релятивистских скоростях (эффект 32 а и эффект 32 б) весь промежуток времени десинхронизации обусловлен ОТО. В случае же ультрарелятивистских скоростей время десинхронизации состоит из двух частей. Первый член в (5.19) принадлежит СТО, второй — задержка во времени, предсказываемая ОТО. (О связи в общем виде между временем движения и временем десинхронизации см. в конце п. 14.13.)

5.2. Эффект Шапиро в поле Шварцшильда. В предельном случае общего выражения (5.7) находим время десинхронизации, содержащее задержку изотропного сигнала — эффект Шапиро:

$$(\Delta x^0_{\text{деc}})_{\tilde{d}l=0} = \int \frac{\alpha^2}{b} r^2 d\varphi. \quad (5.21)$$

В таком виде оно рассматривается в статье [46]. В данном обзоре предпочтем более стандартное рассмотрение на основе (5.5) — (5.9). Пусть электромагнитный сигнал распространяется в поле Шварцшильда между точками (r_1, ψ_1) и (r_2, ψ_2) . Его траектория будет описываться дифференциальным уравнением $(du/d\varphi)^2 = \tilde{P}_m(u)$, где $\tilde{P}_m(u)$ зададим в соответствии с (3.3). Решение системы алгебраических уравнений для отыскания p и e с необходимой точностью и замена b на r_0 дают:

$$p = \frac{r_0^2}{m} \left(1 + \frac{2m}{r_0} - \frac{4m^2}{r_0^2} \right), \quad e = \frac{r_0}{m} \left(1 + \frac{m}{r_0} - \frac{4m^2}{r_0^2} \right),$$

$$b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}}} . \quad (5.22)$$

С учетом (1.4) уравнение (4.2) принимает вид

$$(\Delta x^0) = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{r^2}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \tilde{D}}} - (\Delta x^0)_{m=0} , \quad (5.23)$$

где \tilde{D} определяется из (3.5). Приближенное интегрирование этого соотношения дает в линейном по m приближении

$$(\Delta x^0) = (r_1 + r_2) - \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left\{ 1 + 2m \left[1 - \frac{r_0}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \ln \frac{4r_1 r_2^2}{r_0^2} \right] \right\} - (\Delta x^0)_{m=0} . \quad (5.24)$$

Поскольку первые два члена и $(\Delta x^0)_{m=0}$ не зависят от m , то

$$(\text{эф. 33}) \quad (\Delta x^0)_m = 2m + 2m \ln \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} - m r_0 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) . \quad (5.25)$$

Следовательно, согласно ОТО, световой луч и радиосигнал задерживаются полем Шварцшильда. В результате возвращение отраженных лучей (сигналов) запаздывает. Эффект 33 был предсказан Шапиро в 1964 г. [288]. Одновременно и независимо от него к подобному выводу пришли и авторы [289]. Если в качестве отражателя радарного сигнала использовать Меркурий и предположить, что по пути луч почти касается поверхности Солнца (т. е. $r_0 \approx R_\odot$), то с учетом лишь первых двух членов из (5.21) находим

$$(\Delta x^0)_m = 4m \left\{ 1 + \ln \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right\} \approx 240 \text{ мкс (72 км)} \quad (5.26)$$

для запаздывания при движении «туда» и «обратно». Несмотря на огромные трудности, связанные с учетом различных побочных факторов и расчета $(\Delta x^0)_{m=0}$ в отсутствие гравитационного поля, уже первые опыты подтвердили эффект Шапиро с точностью порядка 20% [290], а позже—до 10% [291]. Новые возможности для повышения точности измерения появились после предложения использовать космические аппараты в качестве активных отражателей радарных сигналов. В экспериментах со станциями «Маринер-6 и -7» эффект Шапиро был

подтвержден с точностью 3% [292, 293]. Недавние же эксперименты по отражению сигналов от кораблей «Викинг» по предварительным подсчетам и после устранения систематических ошибок измерения указывают на согласие с экспериментом с точностью до 0,5% [294]. После уточнения элементов орбит она может подняться до 0,1%. В ближайшем будущем можно надеяться на повышение точности измерения эффекта Шапира еще на два порядка [294].

Таким образом, из большого числа эффектов, предсказанных ОТО, уже четыре обнаружены экспериментально. В монографии [295] высказано естественное предположение, что если бы радиолокация была такой же неотъемлемой частью техники в 1916 г., как и теперь, то Эйнштейн рассчитал бы и этот эффект ОТО.

В силу повышенного интереса к электромагнитным сигналам ограничимся далее лишь эффектами задержки изотропных сигналов в зависимости от параметров полей тяготения.

5.3. Опережение изотропного сигнала в поле Нордстрема — Рейсснера. Перспективы значительного увеличения точности измерения времени распространения радарных сигналов в гравитационном поле (уже достигшей долей процента) могут поставить на экспериментальную основу и вопрос о выявлении вклада других параметров источников тяготения, в частности заряда и космологической постоянной. В поле Нордстрема — Рейсснера

$$p = \frac{r_0^2}{m} \left(1 + \frac{2m}{r_0} + \frac{2k}{r_0^2} \right), \quad e = \frac{r_0}{m} \left(1 + \frac{m}{r_0} + \frac{2k}{r_0^2} \right). \quad (5.27)$$

Тогда, согласно (5.9),

$$\Delta x^0 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{r^2}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0} + \frac{k}{r_0^2}} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right)^{-1} \times \\ \times \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \bar{D}}} - (\Delta x^0)_{m=0}. \quad (5.28)$$

После интегрирования находим приближенное выражение для времени распространения изотропного сигнала от точки (r_1, ψ_1) к точке (r_2, ψ_2) :

$$\Delta x^0 = (r_1 + r_2) + 2m \left(1 + \ln \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right) - \\ - \frac{3k}{2} \left[\frac{\pi}{r_0} - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Следовательно,

$$(\text{эф. 34}) \quad (\Delta x^0)_k = -\frac{3k\pi}{2r_0} + \frac{3k}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (5.30)$$

Таким образом, гравитирующее действие заряда уменьшает суммарную величину эффекта Шапиро, а при специальном выборе отношения k/m , например, в поле сколлапсировавшего объекта первый член в (5.30) может вызвать и опережение сигнала.

5.4. Влияние космологического члена на время распространения изотропного сигнала. Применение описанного выше метода к случаю распространения изотропного сигнала в метрике (1.7) дает

$$\begin{aligned} \Delta x^0 = & \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{r^2}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2m}{r_0} - \frac{\Lambda r_0^2}{3}} \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{m}{r} (3 + e \cos \psi) \right\}^{-1} d\psi - (\Delta x^0)_{m=0}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

После приближенного интегрирования находим эффект влияния космологического члена на время задержки:

$$\begin{aligned} (\text{эф. 35}) \quad (\Delta x^0)_\Lambda = & \frac{\Lambda r_0^2}{3} \left\{ (r_1 + r_2) + \right. \\ & \left. + \frac{r_0^2}{m} \left[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \right] + \frac{r_1^3 + r_2^3}{3r_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Эффект возрастает с ростом r_0 .

5.5. Анизотропия задержки изотропного сигнала в поле Керра. Анизотропия пространства вне гравитирующей вращающейся массы оказывает влияние на задержку сигнала. По-видимому, впервые оно рассмотрено в работе [177]. Ограничиваясь членами лишь линейными по удельному угловому моменту a для метрики Керра (1.8), согласно [177], получаем

$$p = r_0(1 + e), \quad e = r_0/m \left(1 + \frac{2a}{r_0} \right). \quad (5.33)$$

Это приводит к выражению для времени распространения сигнала в экваториальной плоскости:

$$\begin{aligned} x^0 = & (r_1 + r_2) + 2m - \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left(1 + \frac{2m}{r_0} \right) + \\ & + 2m \ln \frac{4r_1 r_2}{r_0^2} \mp \frac{8am}{r_0}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Выделим часть времени, порождаемую параметром a :

$$(\text{эф. 36}) \quad (\Delta x^0)_a = \mp \frac{8am}{r_0}. \quad (5.35)$$

Этот эффект зависит от того, является ли движение сигнала «обратным» или «прямым» по отношению к направлению вращения центральной массы. В первом случае поправка имеет положительный знак и увеличивает суммарную задержку сигнала. Во втором случае она уменьшается. Эта особенность влияния параметра a на эффект задержки может послужить основой для новой проверки ОТО в поле Солнца путем сравнения времен распространения сигналов по разные стороны от оси вращения Солнца. При этом следует лишь выявить и оценить согласие с (5.35) разности во временах для прямого и обратного движения даже без определения полного времени распространения каждого из лучей. Для этого необходимо рассматривать сигналы, распространяющиеся «туда» или «обратно» по разные стороны солнечного диска, например сравнивать времена распространения сигналов от двух космических аппаратов, посланных земному наблюдателю (или наоборот). Это следует делать по той причине, что вклад эффекта (5.35) в суммарное время распространения «туда» и «обратно» равен нулю. Интересно отметить, что необходимое для проверки эффекта 37 расположение источника излучения и отражателей фактически уже было реализовано в полетах станций «Маринер-6 и -7», которые во время измерения задержки на определенном участке полета находились по разные стороны от Солнца [56, 296]. Интересный проект эксперимента по выявлению разности времен распространения луча света по замкнутому контуру вокруг Солнца по предложению В. Б. Брагинского рассмотрен Дэвисом [84].

Таким образом, четвертая группа эффектов, предсказанных ОТО, порождается зависимостью десинхронизации от параметров гравитационного поля. На величину эффектов оказывают влияние параметры орбит. Случаи задержек изотропных сигналов определяются предельными значениями этих параметров. В совокупности задержек изотропных сигналов эффект Шапиро является ключевым.

Все эффекты четвертой группы, как видно из приведенных для них соотношений, выражаются разностями координатных времен. Выше уже подчеркивалось, что временная координата ОТО, как и многие другие ее координаты, не отнесена к лоренцеву базису. Поэтому разность временных координат, по Эйнштейну, не является измеряемой величиной. Она зависит от произвола в выборе системы координат. Эта зависимость обсуждалась многократно (в частности, см. [297]).

Эффект задержки может быть выражен в собственном времени (см. п. 13.5). Это можно сделать с самого начала, а можно воспользоваться переводом задержки по координатному времени в задержку по собственному времени наблюдателя, отправляющего и затем принимающего сигнал. Для этого координатную задержку умножают на $\sqrt{-g_{00}/c}$ [19, 23]. Если наблюдатель движется, дополнительно учитывается и влияние скорости на его собственное время. В случае, когда изотропный сигнал в поле Солнца посылает земной наблюдатель («далекий» от Солнца), а x^0 принадлежит стандартной (шварцшильдовой) системе координат, приближенно можно отождествить задержку, входящую в $\Delta x_{\text{дес}}^0$, с задержкой по собственному времени, отнесенному к единичному вектору $e_{(0)}$ лоренцева базиса.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СИСТЕМАТИЗАЦИИ ЭФФЕКТОВ ОТО (НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ ПРЕДСКАЗАННЫЕ ЭФФЕКТЫ)

Дайте нам еще пятьдесят лет обширных планетных наблюдений с помощью современных меридианных кругов или сделайте применимыми для наблюдения за звездами новые интерференционные методы, тогда последует и рост точности, ...который и решит вопрос о пригодности новых теорий при соответствующих условиях.

К. ШВАРЦШИЛЬД

ВВЕДЕНИЕ

Пятьдесят лет, о которых на заседании Берлинской академии говорил Шварцшильд ^{*)}, уже позади. За прошедшее время в области гравитационного эксперимента произошли изменения, о которых не могло быть речи во времена Шварцшильда: проверка ОТО вышла за рамки астрономических планетных наблюдений и частично перешла в земные физические лаборатории; появились новые высокой точности приборы (например, водородные мазерные часы), их стали использовать для проверки ОТО не только в земных лабораториях, но и на самолетах в околоземном пространстве. Построены и быстро совершенствуются космические аппараты и их начинают привлекать для проверки ОТО; появились новые методы гравитационного эксперимента, в том числе и интерференционные, обнаружены новые астрономические объекты, интенсивно изучаемые по их радио-, рентгеновскому и γ -излучениям, с которыми, возможно, связаны не только слабые, но и очень сильные эффекты ОТО и т. д.

Несмотря на столь значительное расширение области гравитационных исследований и чрезвычайно возросшие технические возможности, за прошедшее время к трем опытным под-

^{*)} См. сб. статей А. Зоммерфельда «Пути познания в физике» (М., 1973, с. 141).

тверждениям эффектов, предсказанных ОТО, добавилось только одно — четвертое испытание ОТО (опыт Шапиро по измерению времени задержки радиосигнала гравитационным полем). Однако за прошедшие годы, во-первых, последовал очень большой рост точности проверки (уже четырех) критических эффектов ОТО и объема проведенных измерений, как видно из беглых замечаний в главе I и особенно из многочисленных замечаний в монографии [19]. Во-вторых, радикально изменились возможности планирования и подготовки программ новых гравитационных экспериментов, изменилась перспектива.

В литературе многократно подчеркивалось, что четыре классических проверки подтверждают лишь весьма усеченную часть ОТО [2]. Они являются критическими лишь применительно к теории поля Шварцшильда. В нее входит только один гравитирующий параметр (гравитирующая масса), что сильно ограничивает эйнштейново обобщение понятия источника тяготения. Пробные параметры в эту часть ОТО вовсе не входят. При этом, естественно, возникает вопрос: «...Является ли логически полной программа экспериментов (выполненных и планируемых) по ОТО? Иными словами, сколько и какие качественно разные измерения нужно сделать для того, чтобы утверждать, что вся ОТО справедлива» [297, с. 29].

Хотя в ОТО имеются застарелые нерешенные проблемы (энергия, квантование), ее состояние позволяет усиливающимися темпами извлекать из нее новые конкретные предсказания. При чрезвычайно больших трудностях постановки релятивистских гравитационных экспериментов теоретические предсказания многих новых эффектов извлекаются из ОТО сравнительно легко. Поэтому диспропорция между обилием предсказанных ОТО и проверенных опытом гравитационных эффектов растет: «Относительно бурное развитие релятивистской гравитационной теории... привело к аномальному по сравнению с другими областями физики положению: экспериментаторы не могут «справиться» с эффектами, предсказанными, по существу, более 40 лет назад» [298, с. 85]. В связи с этим естествен и вопрос, в какой мере актуально извлекать из ОТО новые предсказания конкретных эффектов, усиливая тем самым уже имеющуюся диспропорцию. Ответ на этот вопрос содержится в следующем замечании: «В настоящее время возможно большое число экспериментов по проверке ОТО. Но большинство из них являются очень дорогими... Вследствие больших затрат очень важно иметь как можно лучшую теоретическую систему для сопоставления величин, измеренных в различных экспериментах и для предложения новых экспериментов, которые могли остаться до этого незамеченными» [19, т. 3, с. 288]. Представляется, что в разработку

«теоретической системы» должна входить и систематизация уже предсказанных эффектов ОТО.

Во II главе монографии продолжим начатый в главе I обзор, дополнив его рассмотрением еще пяти групп эффектов, предсказываемых эйнштейновой теорией тяготения. Некоторые из них являются вторичными следствиями критических эффектов, прежде всего следствиями отклонения электромагнитного луча, остальные, в большинстве своем, с критическими эффектами не связаны. Лишь несколько из эффектов, рассмотренных в данной главе, обсуждаются в программах новых экспериментов, остальные накапливают материал для всестороннего анализа ОТО. К ним, как и к большинству эффектов, учтенных в главе I, применимо замечание Шварцшильда, что лишь рост точности решит вопрос, в какой мере правильны предсказания ОТО широкого диапазона в ее еще не проверенной части.

§ 6. ЭФФЕКТЫ ГРАВИТАЦИОННОГО УСКОРЕНИЯ ПРОБНЫХ ТЕЛ

Уравнения движения НТТ устанавливают связь между ускорением тела, движущегося в поле тяготения, и «гравитационной силой», всегда выступающей как сила притяжения. ОТО усложнила не только уравнения движения, но и их интерпретацию. Так, движение по геодезической линии иногда рассматривают как движение по инерции и не вводят в рассмотрение понятий ускорения и гравитационной силы. С другой стороны, относя движение не к произвольным координатным трехмерным сечениям, а к лоренцевым локальным пространственным сечениям принятой системы отсчета, возвращаются к понятиям ускорения и силы.

Тогда 3-ускорение, определяемое как

$$g^\alpha = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{ds} \frac{v^\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (6.1)$$

связывается с отличной от нуля трехмерной физической скоростью v , отнесенной к указанным локальным сечениям. Наиболее простое выражение для ускорения и физической скорости v при этом получается в системе координат, сопутствующей системе отсчета, относительно которой рассматривается движение пробного тела. Входящие в него мировые компоненты v^α таковы, что $v = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta}$, где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - (g_{0\alpha} g_{0\beta})/g_{00}$, а само выражение для ускорения приводится к виду (см. монографию [56]):

$$g^\alpha = \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ -\frac{\Gamma_{00}^\alpha}{g_{00}} - \frac{2}{\sqrt{g_{00}}} \left(\Gamma_{0\beta}^\alpha - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \Gamma_{00}^\alpha \right) \frac{v^\beta}{c} - \right.$$

$$- \left(\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{g_{0\gamma}}{g_{00}} \Gamma_{0\beta}^{\alpha} - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \Gamma_{0\gamma}^{\alpha} + \frac{g_{0\beta} g_{0\gamma}}{(g_{00})^2} \Gamma_{00}^{\alpha} \right) \frac{v^{\beta}}{c} \frac{v^{\gamma}}{c} \Bigg\}, \quad (6.2)$$

$$g = \sqrt{\gamma_{\alpha\beta} g^{\alpha} g^{\beta}}.$$

Если пробное тело в данный момент покоится относительно принятой системы, то мгновенное ускорение имеет вид

$$(g^{\alpha})_{v^{\alpha}=0} = - \Gamma_{00}^{\alpha} / g_{00}. \quad (6.3)$$

Из (6.2) следует, что любые гравитирующие параметры, а при $v^{\alpha} \neq 0$ и параметры пробного тела вносят вклад в ускорение. Как увидим далее, рассматривая различные случаи (6.2), не все возможные параметры полей тяготения и пробных тел, а также не все их различные комбинации будут обуславливать лишь притяжение тел. Если же притяжение при определенном расположении пробного тела по отношению к гравитирующему центру и имеет место, то это не гарантирует, что оно будет иметь место при незначительном изменении ситуации (например, при переходе на орбиту большего или меньшего радиуса).

При негеодезическом движении в правой части (6.2) следует учесть и добавочные ускорения, обусловленные негравитационными силами. Все это свидетельствует о многообразии эффектов ОТО гравитационного притяжения и отталкивания.

6.1. Дополнительное притяжение в поле Шварцшильда.

Пусть пробная масса μ покоится относительно системы отсчета, которой сопутствует стандартная система координат. Подставляя соответствующие g_{00} и Γ_{00}^{α} в уравнение (6.3), находим выражение

$$(\text{эф. 37}) \quad (g)_m = \frac{m}{r^2} / \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (6.4)$$

которое отличается от ньютонова выражения для ускорения свободного падения пробной массы в поле тяготения сферически-симметричного тела. В силу симметрии поля в принятой системе координат отлична от нуля лишь радиальная составляющая ускорения. Как следует из (6.4), разница между ньютоновым и эйнштейновым значениями g велика лишь вблизи сферы Шварцшильда [24] *). Предсказываемое значение (6.4) мгновенного ускорения свободного падения в принципе можно было бы зафиксировать с помощью высокоточных гравиметров, расположенных на космических аппаратах [300, 301]. Так, акселерометр SACTUS [301] может фиксировать ускорение до 10^{-8} м/с², т. е. величину в 10^9 раз меньшую, чем

*) Кроме того, следует учесть, что вблизи этой сферы координата стандартной системы существенно отличается от евклидовой.

ньютоново ускорение свободного падения в гравитационном поле Земли. Поскольку первый ньютонов член находится практически в том же отношении к следующему члену m^2/r^2 разложения (6.4), то такой акселерометр, по-видимому, мог бы обнаружить эффект 37.

6.2. Ослабление притяжения нейтральной пробной массы в поле Шварцшильда. Предположим теперь, что радиальная компонента скорости v^1 отлична от нуля. Тогда из (6.2) следует, что относительно той же системы отсчета

$$\begin{aligned} (\text{эф. 37 а}) \quad (g^1)_m &= \frac{1}{1-\beta^2} \left\{ -\frac{m}{r^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{v^1}{c} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

т. е. в ускорении появляется член другого знака, превалирующий над ньютоновым притяжением лишь при $v^1 \rightarrow c$.

Если в (6.2) перейти к дифференцированию по координатному времени x^0 , совпадающему с собственным временем бесконечно удаленного наблюдателя, и ограничиться радиальным падением, то вместо (6.5) будем иметь (см. [302, 303])

$$\begin{aligned} (\text{эф. 37 б}) \quad \frac{d^2 r}{(dx^0)^2} &= -\frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) + \\ &+ \frac{3m}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dx^0} \right)^2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

т. е. по сравнению с (6.5) величина второго члена меняется. Как отмечено [302], для эллиптических орбит эффект такого рода мал, а для круговых, очевидно, равен нулю. Однако в случае гиперболических или радиальных траекторий его вклад может оказаться существенным. В частности, если в (6.6) ограничиться членами, линейными по m , то в правой части

(6.6) останется $-\frac{m}{r^2} + \frac{3m}{r^2} (dr/dx^0)^2$. Следовательно, при

$\sqrt{3} dr/dx^0 \geq 1$ (тогда $\sqrt{3} dr/dt \geq c$) притяжение как бы сменяется отталкиванием. На это впервые обратил внимание Гильберт (см. [303]) и позже — авторы работы [302]. Поэтому пробная частица, имеющая на пространственной бесконечности скорость $v_0 \geq c/\sqrt{3}$ (в частности, фотон), с точки зрения бесконечно удаленного наблюдателя будет всегда тормозиться полем Шварцшильда *).

*) До сих пор, однако, нет единого мнения по поводу изменения скорости и ускорения пробной массы при приближении ее к сфере Шварцшильда (см., например, [304—307]).

6.3. Гравитационное отталкивание нейтрального пробного тела и его зависание в поле Нордстрема — Рейсснера. Для метрики (1.7) из (6.3) следует

$$(эф. 38) \quad (g)_{m,h} = \left(\frac{m}{r^2} - \frac{k}{r^3} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right)^{-1/2}. \quad (6.7)$$

Отсюда видно, что гравитирующее действие электрического заряда уменьшает по сравнению с (6.4) общее ускорение притяжения. Этот эффект гравитационного отталкивания нейтральной массы в поле (1.7) в 1918 г. обсуждался Лонго [308], а также исследовался позже [309—311]. Как следует из (6.7), для значений $r \leq k/m$ отталкивание преобладает над притяжением. Поэтому, как подчеркивалось в работах [309—312], при $r = k/m$ ускорение g обращается в нуль. Следовательно, пробная масса не доходит до источника поля, а, достигнув $r = k/m$, «зависает» над гравитирующим центром^{*}). Подчеркнем, что в поле Нордстрема — Рейсснера эффекты отталкивания и зависания вызваны эйнштейновым обобщением понятия источника поля тяготения, введением «плотности массы» $2W/c^2$, эквивалентной удвоенной энергии W электростатического поля [49].

6.4. Суммарное взаимодействие гравитирующего и пробного электрических зарядов. В сильном гравитационном поле кардинальным образом может измениться суммарное взаимодействие гравитационного и негравитационного характера. В частности, меняется выражение для ускорения пробного заряда в поле другого заряда, более массивного. Если в правую часть (6.2) добавить ускорение, вызываемое силой Лоренца, то из (6.3) вместо (6.7) приближенно получим

$$(эф. 39) \quad (g)_{m,h} = + \frac{m}{r^2} - \frac{k}{r^3} \mp \frac{qQ}{\mu r^2 c^2}. \quad (6.8)$$

Если заряды q и Q одноименны, т. е. в последнем члене выбран верхний знак, то при большом значении гравитирующей массы m гравитационное притяжение превалирует над электростатическим отталкиванием, что обуславливает суммарное притяжение одноименных зарядов. ОТО вносит в (6.8) лишь 2-й член. При значительном k/r^3 , что может иметь место при малых значениях r , гравитационное отталкивание может превалировать над гравитационным и электростатическим притяжением разноименных зарядов. По-видимому, на этот эффект ОТО впервые обратил внимание Сафко [313]. Затем изменения, согласно ОТО, в суммарном взаимодействии обсуждались в работах [311, 314].

^{*}) В работе [313] показано, что в случае поля заряженной нити пробные тела отталкиваются и при расстояниях, больших расстояния зависания.

6.5. Вклад космологического члена в гравитационное отталкивание. Из (6.3) следует, что в поле (1.8) ускорение свободного падения имеет лишь радиальную составляющую, величина которой равна

$$(\text{эф. 40}) \quad (g)_\Lambda = \left(+ \frac{m}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r \right) \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.9)$$

причем космологическая постоянная вызывает отталкивание пробной массы. Оно обсуждалось в литературе (см., например, [78; 140, с. 359; 141, с. 299]). Добавим лишь, что при $r = (3m/\Lambda)^{1/3}$, т. е. на большом расстоянии от гравитирующей массы $(g)_\Lambda = 0$, т. е. пробное тело может «зависнуть».

6.6. Изменение ускорения в поле Керра. Рассмотрим ускорение пробного тела без спина в поле Керра относительно системы отсчета, которой сопутствует координатная система Бойера—Линдвиста. Из (1.9) и (6.3) следует, что

$$(\text{эф. 41}) \quad (g)_{m,a} = \frac{m}{\rho^3 (\rho^2 - 2m)} [\Delta (2r^2 - \rho^2)^2 + r^2 a^4 \sin^2 2\theta]^{1/2}, \quad (6.10)$$

где $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. В поле Керра, кроме радиальной составляющей g^1 ускорения, возникает и тангенциальная g^2 . Эти компоненты и величина суммарного ускорения зависят от угла θ , т. е. от положения пробного тела в пространстве вне источника поля. В частных случаях $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ из (6.10) следует:

$$(g)_{\theta=0} \approx \frac{m}{r^2} \left(1 - \frac{3a^2}{r^2} \right), \quad (g)_{\theta=\frac{\pi}{2}} \approx \frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} \right).$$

Таким образом, при малых θ угловой момент гравитирующего тела может привести к уменьшению ньютонова ускорения. Обобщение (6.10) дано в статье [315]. На основании формул, взятых из монографии [23, с. 322], эффект рассматривался в работе [316]. Приравняв (6.10) и (6.4), можно получить соотношение для определения координат (r, θ) точек, где влияние параметра a исчезает. Таким образом, аксиальная симметрия поля Керра проявляется и в эффекте 41.

6.7. Гравитационный аналог кориолисова ускорения в поле Керра. В случае круговой экваториальной орбиты, отбрасывая для простоты члены квадратичные по скорости v^β , из (6.2) для метрики Керра в линейном по a приближении находим

$$(\text{эф. 42}) \quad (g)_{m,a} = \frac{m/r^2}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \left[1 \pm 2a \frac{d\varphi}{dt} / c \sqrt{1 - 2m/r} \right] \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (6.11)$$

Знак поправки к эффекту (6.4) зависит от направления движения тела по орбите. Для «прямого» движения (в направлении вращения источника) эффект (6.11) приводит к дополнительному притяжению, а при «обратном» движении — к отталкиванию. В случае неэкваториального движения величина дополнительного ускорения зависит и от угла наклона орбиты к экватору, а при $\theta = 0$ равна нулю. После перехода к трехмерной векторной записи соотношения (6.2) выражению для $(g)_a$ может быть придана форма кориолисова ускорения. Поэтому его можно назвать «гравитационным аналогом кориолисова ускорения» (см., например, [23, с. 324; 49]).

6.8. Зависимость ускорения пробного спина от его ориентации в поле Керра. Переход от геодезической линии к уравнениям движения Папапетру приводит к обобщению (6.2): появляются члены, зависящие от спина пробной частицы. Согласно [317, 318], при $v^\alpha = 0$ они имеют вид

$$(\text{эф. 43}) \quad (g)_{a,s} = -\nabla \left\{ \frac{1}{r^5} [mr^2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} - 3m (\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})] \right\}. \quad (6.12)$$

Отсюда следует, что знак ускорения зависит от взаимной ориентации угловых моментов пробного и гравитирующего тела. В частности, параллельные моменты «притягиваются», а антипараллельные «отталкиваются». Поэтому в поле вращающейся массы ускорения двух антипараллельных пробных спинов должны различаться. В работах [7, 298, 319, 320] предлагается измерять силу взаимодействия двух вращающихся тел в лабораторных условиях с целью обнаружения спин-спиновых эффектов гравитационного происхождения.

6.9. Эффект Вебера — Брагинского. На основе уравнения геодезических линий (3.28) можно показать [321], что разность ускорений двух пробных масс (относительное ускорение) в поле гравитационной волны равна

$$(\text{эф. 44}) \quad \Delta g^\mu = -R^\mu_{\alpha 0} l^\alpha, \quad (6.13)$$

где расстояние l^α между телами мало по сравнению с длиной волны, а тензор кривизны является функцией периодической во времени. Поэтому относительное расстояние между двумя пробными массами в поле гравитационной волны будет периодически меняться со временем, на что обратил внимание Ве-

бер [321]. Относительное изменение расстояния должно составить величину

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{2} (h_{22} \cos 2\theta + h_{23} \sin 2\theta), \quad (6.14)$$

где совершен переход к полярным координатам с началом в одной из частиц. Для расстояния между Землей и Луной, равного $3,84 \cdot 10^{10}$ см, изменение должно составить $8 \cdot 10^{-6}$ см. Фиксировать такую величину даже с помощью лазерной техники, путем послылки и приема отраженного от Луны луча, пока еще нельзя (см. [295, с. 128]). Несколько лучше обстоит дело с интерференционными методами фиксации эффекта (6.14) (см. § 9).

Коснемся предложенной В. Б. Брагинским возможности косвенной проверки эффекта 43. Поскольку периодическое изменение ускорений пробных тел вызовет соответствующее изменение и их относительных скоростей, предложено [14, с. 246; 322] измерять именно величину

$$(\text{эф. 44 а}) \quad \Delta v \approx l \sqrt{\frac{8\pi\gamma J}{c^3}}. \quad (6.15)$$

Здесь J — плотность потока гравитационного излучения. Эффект 44 а естественно попытаться выявить путем оптических или радиолокационных измерений на двух искусственных спутниках Земли (см. подробнее [298, 323, 324]), если бы они были подвержены влиянию и гравитационной волны. При соответствующих оптимальных ориентации и выборе расстояния между ИСЗ $\leq \lambda_{\text{ГВ}}/2$ разность скоростей может достигнуть величины $3 \cdot 10^{-7}$ см/с. Радиолокационные же измерения позволяют регистрировать величину 10^{-5} см/с за среднее время ~ 10 с (см. [324]).

§ 7. ОГРАНИЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ ПРОБНЫХ ТЕЛ

Эффекты ограничения параметров орбит, а тем самым и типы возможных движений порождаются многими причинами. Некоторая их совокупность (эф. 45—52) выявляется при исследовании решений уравнений движения на орбитальную устойчивость. При этом анализируется поведение постоянной энергии ϵ и постоянной площадей h в зависимости от значений параметров орбит p и e . Чаще всего исследуют радиальную устойчивость финитных (обычно круговых) траекторий. В этом случае постоянная энергии ϵ называется «радиальным эффективным потенциалом» $\epsilon(r)$, так как зависит лишь от радиуса орбиты. Рассмотрение круговых траекторий может иметь аст-

рофизические приложения, в частности, в случае синхротронного, в том числе гравитационного, излучения [325, 326].

Условия на $h(r)$ дают дополнительные ограничения на параметры траекторий. Эффекты возникают как следствия принимаемых критериев (см., например, [327—329]):

1) существования движения:

$$\varepsilon \geq 0, h \geq 0; \quad (7.1)$$

2) радиальной устойчивости:

$$d^2\varepsilon/dr^2 > 0, d^2h/dr^2 > 0, \quad (7.2)$$

к которым иногда добавляют и критерий «связанных состояний» [328]. Ряд других ограничений на параметры (эф. 53—59) вытекает как некоторые частные следствия специфических закономерностей движения в полях тяготения ОТО.

7.1. Ограничения на круговые орбиты в поле Шварцшильда. Точные значения ε и h следуют из (3.8) при $e=0$:

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 - \frac{3m}{r}\right)^{-1/2}, h = \sqrt{mr} \left(1 - \frac{3m}{r}\right)^{-1/2}. \quad (7.3)$$

Критерий существования (7.1) дает

$$r \geq 3m. \quad (7.4)$$

В случае знака равенства в (7.4) скорость движения по орбите равна скорости света (круговая орбита фотона). Из условия (7.2) следует, что экстремальными свойствами обладает орбита радиуса $r=6m$, причем устойчивыми по отношению к радиальным возмущениям будут лишь орбиты, для которых

$$(\text{эф. 45}) \quad r \geq 6m. \quad (7.5)$$

Поэтому даже незначительное изменение значения радиальной координаты для орбит в интервале от $3m$ до $6m$ может привести либо к уходу тела с круговой орбиты на пространственную бесконечность (или орбиту большего радиуса), либо к его падению на гравитирующий центр. Указанные ограничения на радиусы круговых орбит в поле (1.4) отсутствуют в ньютоновой теории гравитации. Систематическое исследование таких ограничений, по-видимому, впервые предпринято в работах [330] и [331]. Подробное изучение устойчивости движения в поле Шварцшильда проводилось рядом авторов [327, 332—334]. Эффекты (7.4), (7.5) имеют место лишь для гравитирующих объектов, размеры которых меньше $6m$.

7.2. Ограничения на углы вылета светового луча в поле Шварцшильда. Предположим, что из некоторой точки в поле

гравитирующего центра испускается световой луч. Как следует из системы первых интегралов для плоской изотропной геодезической линии, мировые компоненты линейной скорости распространения равны

$$v^1 = \frac{dr}{dx^{(0)}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)},$$

$$v^3 = r \frac{d\varphi}{dx^{(0)}} = \frac{b}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (7.6)$$

Отношение этих величин определяет тангенс угла φ между лучом и направлением радиус-вектора, проходящего через точку испускания света относительно далекого наблюдения:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v^3}{v^1} = \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2}. \quad (7.7)$$

Перейдем к «физическим» компонентам скорости (см., например, работы [19, 24] и далее гл. III, § 12, гл. IV, п. 13.5):

$$v^{(1)} \equiv v_r = v_1 \sqrt{g_{11}/-g_{00}}, \quad v^{(3)} \equiv v_\varphi = v_3 \sqrt{g_{33}/-g_{00}}.$$

Тогда вместо (7.7) получаем соотношение

$$(\text{эф. 46}) \quad (\operatorname{tg} \varphi)_m = \frac{v_\varphi}{v_r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 + \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \quad (7.8)$$

для угла φ с точки зрения наблюдателя, находящегося в точке с координатой r . Требование положительной определенности подкоренных выражений удовлетворяется лишь при определенных значениях r/b . Испущенный вблизи гравитирующей массы свет лишь в некотором ограниченном конусе с раствором 2φ может уйти на бесконечность. Для других значений этого угла орбита будет «навиваться» на центральную массу или же свет будет ею захвачен (см. эффект 55). В этом смысле присутствие гравитирующей массы, согласно ОТО, ограничивает возможные значения угла вылета фотона по отношению к направлению радиус-вектора \mathbf{r} .

7.3. Разделение по радиусу круговых орбит антипараллельных спинов в поле Шварцшильда. Для кругового движения пробного спина, ориентированного ортогонально плоскости движения, для которой $\theta = \pi/2$, из первых интегралов уравнений Папаетру (1.3) в поле Шварцшильда следует, что $\varepsilon(r)$ определяется квадратным уравнением [335], коэффициенты

которого зависят от m , радиуса орбиты и величины пробного спина. Поскольку спин входит в это уравнение в виде линейных комбинаций, выражения для $\varepsilon(r)$ и $h(r)$ будут включать и линейную зависимость от S , т. е. ограничения на радиусы круговых орбит будут зависеть от ориентации вектора пробного спина. Эту ориентацию удобно определить относительно направления вектора орбитального углового момента (постоянная площадей h является его проекцией на нормаль к плоскости орбиты). Поэтому в данном случае эффекты ограничений

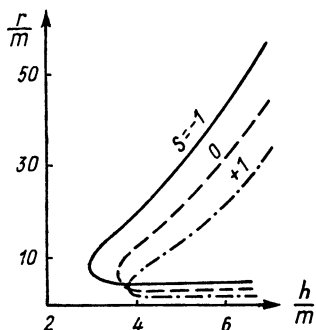


Рис. 1

(эффект 47) удобно представить графической зависимостью r от h [335] (рис. 1), построенной на основе численных решений. Из рис. 1 видно, что при ориентации пробного спина в положительном направлении вектора орбитального углового момента (т. е. для прямого движения) орбиты расположены «глубже», чем для антипараллельного спина (что эквивалентно обратному движению при неизменной ориентации пробного спина). Этот эффект

разделения по радиусу устойчивых круговых орбит антипараллельных (или параллельных, но находящихся в прямом и обратном движениях) спинов является следствием спинорбитального взаимодействия. Для его выявления требуется высокочувствительная аппаратура, которая, например, могла бы зарегистрировать смещения гироскопов внутри спутника.

7.4. Уменьшение радиусов круговых орбит в поле гравитирующего заряда. Для круговых орбит в поле Нордстрема — Рейсснера из (3.8) следуют выражения для ε и h :

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3m}{r} + \frac{2k}{r^2} \right)^{-1/2},$$

$$h = \sqrt{mr - k} \left(1 - \frac{3m}{r} + \frac{2k}{r^2} \right)^{-1/2}.$$

В отличие от поля Шварцшильда в данном случае анализ $h(r)$ приводит к дополнительным ограничениям по сравнению со следующими из $\varepsilon(r)$. Из (7.1) находим

$$r^2 - 3mr + 2k \geq 0, \quad mr - k \geq 0,$$

причем второе условие требует, чтобы

$$r \geq \frac{3m}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8k}{9m^2}} \right). \quad (7.9)$$

Отсюда видно, что при любом значении параметра k гравитирующий заряд уменьшает нижнюю границу области существования круговых орбит незаряженных пробных тел (см. [327, 336, 337]). Критерий устойчивости приводит к уравнению

$$r^3 - 6mr^2 + 9kr - 4k^2/m \geq 0,$$

которое в свою очередь в предположении $k \ll m^2$ дает

$$(эф. 48) \quad r \geq 6m \left(1 - \frac{k}{4m^2} \right). \quad (7.10)$$

Арменты [327] приведены соответствующие графики, позволяющие сравнить ограничения в полях (1.4) и (1.6). С более общих позиций вопрос рассмотрен в работе [338].

7.5. Ограничения на углы вылета светового луча в поле Нордстрема — Рейсснера. В релятивистской астрофизике интересен вопрос о получении электромагнитного сигнала внешним наблюдателем, а также наблюдателем вблизи черной дыры [339, 340, 341]. По аналогии с п. 7.2 нетрудно установить, что в поле с метрикой (1.6) вместо (7.8) имеем

$$(эф. 49) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi = & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2} \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\frac{r^2}{b^2} - 1 + \frac{2m}{r} - \frac{k}{r^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

В этом случае величина φ зависит уже не только от связи параметров орбиты с параметрами источника, но и от отношения k/m .

7.6. Влияние космологического члена на радиусы круговых орбит. Специфика решения (1.7) обуславливает интересную в качественном отношении зависимость радиусов устойчивых круговых орбит от параметров поля, впервые исследованную в работе [336]. Для круговых орбит в поле Коттлера де Ситтера из (3.19) следуют точные выражения:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \left(1 - \frac{3m}{r} \right)^{-1/2}, \\ h = & \sqrt{mr - \frac{\Lambda}{3} r^4} \left(1 - \frac{3m}{r} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

После учета критерия существования орбит получаем ограничение

$$r > 3m, \quad r \leq (3m/\Lambda)^{1/3},$$

критерий же устойчивости приводит к уравнению

$$r^4 - \frac{15}{4} mr^3 - \frac{3}{4} \frac{mr}{\Lambda} + \frac{9m^2}{2\Lambda} = 0.$$

Если ограничиться случаем $9m^2\Lambda < 1$, то из анализа приближенного решения этого уравнения следует, что, начиная с

$$(\text{эф. 50}) \quad r_0 = \frac{32}{9} m + 4m \sqrt{\bar{\rho}} \cos \frac{\pi + \alpha}{3}, \quad (7.12)$$

круговые орбиты устойчивы (здесь α — постоянная, зависящая от Λ и m). В интервале $(3m, r_0)$ устойчивых орбит нет. Как было показано [336], существует и верхняя граница устойчивости. Поэтому в поле (1.7) круговые орбиты устойчивы лишь в определенном поясе. При некоторых критических значениях отношения Λ и m может не оказаться ни одной устойчивой орбиты.

7.7. Разделение в поле Керра круговых орбит бесспиновых пробных тел в зависимости от направления движения. Вопрос о существовании и устойчивости круговых орбит бесспиновых частиц при экваториальном движении в поле Керра впервые исследован Руффини и Уилером [12, с. 45] (см. также [295]) и независимо от них А. П. Рябушко [342]. Уравнение для отыскания соответствующей функции $\epsilon(r)$ имеет вид

$$[r^3 + a^2(r + 2m)]\epsilon^2 - 4amh\epsilon + [(2m - r)h^2 - r^2(r - 2m) - a^2r] = 0.$$

Его решения, как легко установить, зависят от направления вращения гравитирующей массы, а следовательно, и от направления движения пробного тела по круговой орбите. Эффект 51 этой зависимости представлен на рис. 2 [12, 295]. Из него видно, что орбиты тел, находящиеся в прямом движении по отношению к направлению вращения центральной массы, имеют меньший радиус по сравнению с телами, движущимися навстречу вращению массы m . Согласно оценкам [12, 295], в эк-

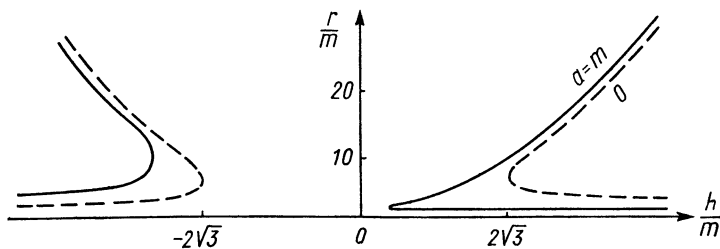


Рис. 2

стремальном поле Керра ($a=m$) в первом случае орбиты могут быть устойчивыми вплоть до $r_+=m$, а при обратном движении — лишь до $r_-=9m$. Таким образом, пробные тела, имеющие противоположные направления движения по орбите, разделяются по радиусу (если значения ϵ и h для них одинаковы). Ограничения на неэкваториальные траектории рассмотрены в работах [343, 344].

7.8. Ограничение круговых орбит в поле Керра по углу наклона. Поскольку поле вращающейся массы обладает аксиальной симметрией, интересно исследовать поведение «эффективного θ -потенциала», который характеризует распределение орбит по углу θ (или, что эквивалентно, по углу i наклона плоскости орбиты по отношению к экватору). Как было показано [328, 345], такой потенциал $\epsilon(\theta)$ следует из уравнения

$$B = K - (h - a\epsilon)^2 = \cos^2 \theta [a^2 (1 - \epsilon^2) + h^2 \sin^{-2} \theta],$$

где K — постоянная, характеризующая полный орбитальный момент. Отсюда вытекает зависимость угла θ от параметров поля и орбиты:

$$\begin{aligned} (\text{эф. 52}) \quad \sin^2 \theta_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{B + h^2}{a^2 (1 - \epsilon^2)} \right] \times \\ &\times \left\{ 1 \pm \left[1 + \frac{4h^2 a^2 (1 - \epsilon^2)}{[a^2 (1 - \epsilon^2) - (B + h^2)]^2} \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Следовательно, неэкваториальная орбита может быть наклонена к экватору лишь под определенным углом в зависимости от значений параметров, входящих в (7.13). В частности, для того чтобы орбита проходила через ось вращения центрального тела ($\theta=0$), необходимо выполнение условия $\sin \theta = 0$. Это возможно лишь при $h=0$. Действительно, при $h=0$ из (7.13) получаем

$$(\sin^2 \theta)_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm 1) \left[1 - \frac{B}{a^2 (1 - \epsilon^2)} \right].$$

Если B произвольно, то $\sin^2 \theta_2 = \sin^2 \theta_- = 0$. Если же $B = a^2 (1 - \epsilon^2)$, то $\sin^2 \theta_1 = \sin^2 \theta_2 = 0$. Вывод о существовании этого эффекта ОТО, по-видимому, впервые сделан [328] для пробных масс, а затем [345] распространен и на случай движения заряженных тел в поле вращающейся и заряженной массы.

7.9. Разделение по радиусу устойчивых круговых орбит пробных спинов в поле Керра. Этот вопрос рассмотрен в работе [335]. Как и следовало ожидать, наличие спин-спинового

взаимодействия при движении пробных спинов в поле Керра приводит к большему разнообразию орбит, чем в случае эффектов 47, 51. Действительно, на рис. 3 виден (см. [335]) эффект 53 — эффект зависимости радиусов устойчивых орбит от взаимной ориентации \mathbf{S} и \mathbf{a} .

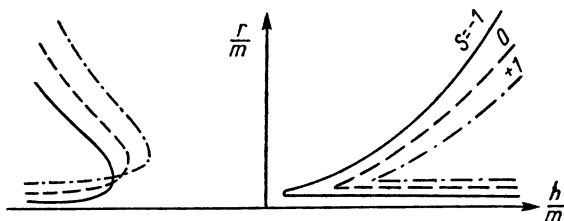


Рис. 3

7.10. Раздвоение круговых орбит в поле Шварцшильда. Если продифференцировать (3.7) еще раз по u и применить полученное уравнение к случаю круговых орбит, то нетрудно получить уравнение, определяющее радиусы этих орбит:

$$r^2 - \frac{h^2}{m} r + 3h^2 = 0.$$

Его решение имеет вид

$$(\text{эф. 54}) \quad r_{\pm} = \frac{h^2}{2m} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{12m^2}{h^2}} \right]. \quad (7.14)$$

Отсюда следует, что при фиксированном значении постоянной h в поле Шварцшильда существуют две круговые орбиты с радиусами r_+ и $r_- < r_+$, что отмечено в работе [346] (см. также [23, с. 400]). При больших значениях h с учетом $m/h \rightarrow 0$ получаем $r_- = 0$ и $r_+ = h^2/2m = r_{\text{НТТ}}$. Рассмотренный эффект можно иллюстрировать и графически (рис. 4). Для $r < 6m$ орбиты становятся неустойчивыми, лишь при $r = r_+$ движение будет устойчивым. С ростом h значения r_+ увеличиваются, а r_- уменьшаются. Как следует из (7.14), в поле Шварцшильда возможны лишь те круговые орбиты, для которых значения постоянной h не меньше, чем $h_{\text{min}} = 2\sqrt{3}m$.

7.11. Гравитационный захват светового луча в поле Шварцшильда. Согласно ОТО, в поле Шварцшильда оказываются возможными траектории, заканчивающиеся на гравитирующем центре. В НТТ подобное явление может иметь место лишь при движении тела по радиальной траектории и «лобовом» столкновении с гравитирующей массой. В ОТО все пробные частицы, для которых постоянная площадей $h < 4m$, гравитационно захватываются, а в случае $h = 4m$ переходят на круго-

вую орбиту (см. подробнее монографию [24]). Особенно интересен случай гравитационного захвата света [24, 347]. Из системы первых интегралов нулевой геодезической линии в поле Шварцшильда находим

$$\frac{dr}{dx^0} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right]^{1/2}.$$

Тогда из определения точек поворота $dr/dx^0=0$ следует связь прицельного параметра b и минимального расстояния r_{\min} между лучом света и гравитирующим центром:

$$b = r_{\min} \left(1 - \frac{2m}{r_{\min}} \right)^{-1/2}.$$

Функция $b(r_{\min})$ имеет ненулевой минимум. Поэтому траектории света, для которых прицельный параметр меньше критического значения b_0 , т. е.

$$(эф.55) \quad b < b_0 = 3\sqrt{3}m, \quad (7.15)$$

гравитационно захватываются (рис. 5). При $b=b_0$ луч навивается на окружность, что может быть рассмотрено как самостоятельный эффект ОТО (см. эффект 57). Существование критического значения b_0 накладывает отпечаток и на эффект ограничения углов вылета света (эф. 46). Из (7.8) следует, что при $b < b_0$ свет не уходит на бесконечность, но захватывается

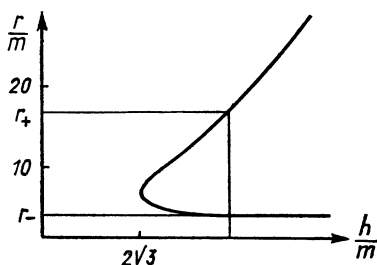


Рис. 4

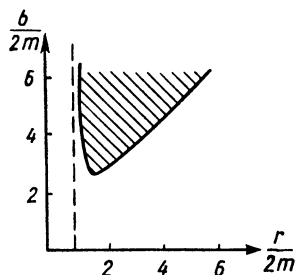


Рис. 5

массой (см. также [19, 24]), так как раствор конуса допустимых направлений вылета света, определяемый (7.8), становится больше π .

7.12. Уход пробного тела с устойчивой орбиты при изменении массы источника поля Шварцшильда. Солнце и другие звезды теряют часть своей массы в результате волнового и корпускулярного излучения. Поэтому их гравитационное поле со временем должно ослабевать. Изменение величины цент-

ральной массы должно привести к изменению параметров орбит пробных тел. Если изменение массы происходит скачкообразно (например, в результате взрыва), то пробное тело, прежде находящееся на устойчивой круговой орбите, может уйти на бесконечность. В НТТ критерием такого ухода является выполнение условия

$$(\Delta m)_{\text{НТТ}} \geq \frac{1}{2} (m + \mu).$$

Для метрики Шварцшильда в предположении мгновенного изменения массы источника m задача об уходе пробного тела рассматривалась в работе [348]. Если допустить, что \dot{r} и h не изменяются*), то критерий ухода принимает вид

$$(\Delta m)_{\text{ОТО}} \geq \frac{m(r - 4m)}{2(r - 2m)} \approx \frac{m}{2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (7.16)$$

если $m \gg \mu$. Следовательно, ньютонов и эйнштейнов критерии качественно различны, причем

$$(\text{эф. 56}) \quad (\Delta m)_{\text{ОТО}} - (\Delta m)_{\text{НТТ}} \approx -m^2/r. \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что релятивистские орбиты «высвобождаются» легче ньютоновых из-за радиальной зависимости, отсутствующей в НТТ. Кроме того, при малых r уход с орбиты в поле Шварцшильда возможен и при незначительном $(\Delta m)_{\text{ОТО}}$. С соответствующими изменениями данный эффект может проявляться и при аккреции (увеличении массы центрального тела).

7.13. Самозамыкание световых лучей в поле Нордстрема — Рейсснера. Из первых интегралов нулевой геодезической линии в поле Нордстрема — Рейсснера легко получить

$$b = r_{\text{min}} \left(1 - \frac{2m}{r_{\text{min}}} + \frac{k}{r_{\text{min}}^2} \right)^{-1/2}. \quad (7.18)$$

Теперь вид функции $b(r_{\text{min}})$ зависит не только от величины m , но и от отношения k/m . Для некоторых значений k/m зависимость прицельного параметра b от минимального расстояния представлена на рис. 6. Отсюда прежде всего следует, что гравитационный захват нейтральной пробной массы в поле (1.6) отсутствует (этот вывод был сделан в работе [312]). Однако в случае $k \gg m^2$ (рис. 6) имеет место эффект «ступенчатого» перехода пробного тела на более глубокие орбиты. Например,

*) Некоторые замечания относительно этого предположения высказаны в работе [349], где предложено использовать метрику Вадьи вместо метрики Шварцшильда при описании ухода пробных тел с орбиты.

при $b < 4m$ луч света может проникнуть под поверхность $r = m$. Экстремальные значения b определяются при подстановке

$$(эф. 57) \quad r_{\min} = \frac{3m}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8k}{9m^2}} \right] \quad (7.19)$$

в (7.18). Эти значения r_{\min} являются радиусами двух круговых орбит света в поле Нордстрема — Рейсснера. Для поля заряженной гравитирующей массы эффект (7.19) рассмотрен в статье [350], а для поля Шварцшильда обсуждался в монографии [24] и работе [351]. Как было отмечено [352], допустимы и целые области финитных траекторий света в гравитационном поле.

7.14. Увлечение пробного тела в прямое движение полем Керра. Из первых интегралов уравнений движения в поле (1.9) следует:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{h(1 - 2m/r) + 2ame/r}{r^2 + a^2(1 - 2m/r)}.$$

Точка поворота пробной массы определяется условием $d\varphi/ds = 0$. Для первоначально «обратного» движения

$$(эф. 58) \quad r = 2m + \frac{2ame}{h}. \quad (7.20)$$

При достижении этой точки тело может изменить свое движение на обратное и будет увлечено в «прямое» по отношению к вращению гравитирующей массы движение [353, 354]. Эффект может проявиться лишь в поле черной дыры.

7.15. Анизотропный гравитационный захват светового луча полем Керра. Новые черты приобретает в поле Керра и эффект гравитационного захвата. Для лучей в экваториальной плоскости имеет место точное выражение для прицельного параметра:

$$b = \left(1 - \frac{2m}{r_{\min}} \right)^{-1} \left\{ \pm r_{\min} \sqrt{1 - \frac{2m}{r_{\min}} + \frac{a^2}{r_{\min}^2}} - \frac{2am}{r_{\min}} \right\}.$$

Верхний знак относится к «прямому» движению, а нижний — к «обратному». Если ограничиться лишь членами, линейными по параметру a , то для экстремумов $b(r_{\min})$ получаем приближенное соотношение

$$(r_{\min})_{\pm} = \frac{3m}{2} \left[1 + \sqrt{1 \mp \frac{8a}{9m}} \right].$$

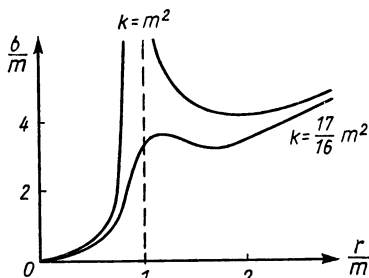


Рис. 6

Отсюда видно, что в поле Керра в случае прямого движения гравитационный захват начинается лишь при достижении расстояния $r = (r_{\min})_+$. Для световых лучей, распространяющихся навстречу вращению источника поля, критической является точка $r = (r_{\min})_-$. Расчет показывает (см. [24, 85]), что для лучей с $b < b_0$, где

$$(\text{эф. 59}) \quad b_0 = 2m \left[1 + \sqrt{1 \mp \frac{a}{m}} \right], \quad (7.21)$$

в поле Керра имеет место эффект гравитационного захвата. Как следует из этого соотношения, захват происходит анизотропно, так как $(b_0)_+ > (b_0)_-$.

7.16. Резонансное влияние гравитационной волны на параметры орбиты пробного тела. Если плоская гравитационная волна падает на систему гравитирующего и пробного тел, то можно ожидать периодического во времени слабого изменения формы орбиты пробного тела. Особый интерес представляют ситуации, когда действие волны наиболее эффективно. К ним относятся, прежде всего, резонансные случаи, рассмотренные В. Н. Руденко [228] и затем в работе [51] (см. § 24). Для возмущенной орбиты имеем [228]

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = -\frac{1}{4} r_0 h_0 \omega_g^2 \frac{\omega_g - 4\omega_0}{\omega_g + 2\omega_0} \sin(\Omega t + \Phi).$$

Если частота обращения ω_0 по первоначальной круговой орбите радиуса r_0 связана с частотой волны соотношениями $\omega_g = \omega_0$ или $\omega_g = 3\omega_0$, то, как отмечалось [228], имеет место резонансный переход пробной массы с круговой орбиты на эллиптическую, эксцентриситет которой линейно растет со временем, а ориентация осей эллипса зависит от поляризации и фазы ГВ. Если же $\omega_g = 2\omega_0$, $\Omega = 0$, то орбита является раскручивающейся спиралью.

Согласно статье [51], эксцентриситет e слабо эллиптической орбиты в поле Шварцшильда под воздействием ГВ заменяется на \tilde{e} вида

$$(\text{эф. 60}) \quad \tilde{e} \approx e - \frac{3}{8} h_0 \omega_0 s \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{3}{8} h_0 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \\ - \frac{5}{24} h_0 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \sin \omega_0 s, \quad (7.22)$$

приобретая члены, содержащие собственное время.

§ 8. ПРЕЦЕССИИ, ПОВОРОТЫ ПЛОСКОСТЕЙ ОРБИТ И ЛИБРАЦИЯ

Под влиянием гравитирующих параметров в некоторой степени могут меняться параметры пробных тел. Так, может меняться направление их спина. Этим порождается группа прецессионных эффектов ОТО. Они подчиняются общему уравнению для прецессии вектора \mathbf{A} , имеющему вид

$$d\mathbf{A}/dt = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}], \quad (8.1)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость прецессии. В некоторых ситуациях направление спина меняется, но его прецессии не происходит. К выделенной группе примыкает и прецессия орбитального углового момента. Добавим в нее эффекты либрации при орбитальном движении и кручение луча, сопровождающееся поворотом плоскости орбиты.

8.1. Прецессия де Ситтера пробного спина в поле Шварцшильда. Как было показано де Ситтером [355], пробный спин при орбитальном движении в центральном поле должен прецессировать со скоростью

$$(\text{эф. 61}) \quad (\boldsymbol{\Omega})_{m,s} = \frac{3m}{2r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]. \quad (8.2)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор центра инерции вращающейся частицы, а \mathbf{v} — скорость ее орбитального движения. Исходя из спиновой части уравнений Папаетру, этот эффект исследовал Шифф [356]. Характерной чертой прецессии де Ситтера является зависимость эффекта лишь от массы центрального тела, но не от спина пробной частицы. Вопрос о возможности экспериментального выявления этого эффекта с помощью искусственных спутников Земли обсуждался Пагхом [357], а затем Шиффом [356] и др. [358—360]. В гравитационном поле Земли эффект должен составить около $7''$ за год полета ИСЗ. В начале 80-х годов намечается экспериментальная проверка данного предсказания ОТО с помощью спутников, свободных от сноса (подробнее см. статьи [360—362], а также сообщения [8, 12, с. 33; 14, с. 331]).

8.2. Прецессия О'Коннелла пробного спина в поле сплюснутой массы. Впервые О'Коннелл [363] обратил внимание на то, что квадрупольный момент источника гравитационного поля дает дополнительный вклад в прецессию пробного спина. Согласно [364], для полярных орбит после усреднения

$$(\text{эф. 62}) \quad \boldsymbol{\Omega}_{\sigma,s} = - \frac{\sigma m^2}{15r^2} \boldsymbol{\Omega}_{m,s}. \quad (8.3)$$

В случае произвольной ориентации орбиты по отношению к оси симметрии угловая скорость прецессии О'Коннелла зави-

сит от угла θ [365]. Это ведет к зависимости от угла наклона не только абсолютной величины эффекта, но и направления прецессии. Для малых θ прецессия (8.3) уменьшает величину прецессии де Ситтера, а при $\theta = \pi/2$ увеличивает. Как и в предыдущем случае, эффект зависит лишь от ориентации пробного спина, но не от его величины. Согласно оценкам [365], вклад эффекта 62 в суммарный эффект прецессии может превышать ошибку измерения, составляющую для гироскопа на околоземной орбите величину $0,001''$ в год.

8.3. Прецессия Шиффа пробного спина в поле Керра. Решение спиновой части уравнений Папапетру в поле (1.8) дает [356]

$$(\text{эф. 63}) \quad (\Omega)_{a,s} = \frac{cm}{r^5} [3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}) - ar^2], \quad (8.4)$$

где учтены лишь линейные по параметру a члены. Этот эффект обычно называют «прецессия Шиффа». Если пробный спин ортогонален плоскости полярной орбиты, то вклад в прецессию дает лишь эффект (8.4), прецессия же де Ситтера равна нулю. Запуск на орбиту двух гироскопов, ориентированных взаимно ортогонально, позволил бы разделить эффекты 61 и 63. Величина прецессии Шиффа для гироскопа на ИСЗ равна $\sim 0,05''$ за год полета. Вопрос о ее проверке широко обсуждается в литературе [4, 8, 360—364] в связи с подготовкой соответствующего эксперимента.

8.4. Резонансная прецессия пробного спина в поле гравитационной волны. В работе [366] рассмотрена прецессия пробного спина в поле гравитационной волны. Решение спиновой части уравнений Папапетру при условии Пирани в системе отсчета, где $u^\alpha = 0$, при начальном значении спина $(S^{\mu\nu})_0$ приближенно дает

$$S^{23} = (S^{23})_0, \quad S^{12} = (S^{12})_0(1 + h_{22}/2), \quad S^{31} = (S^{31})_0(1 - h_{22}/2).$$

Следовательно, покоящийся спин прецессирует вокруг направления распространения волны (вокруг оси x^1). Если предположить, что пробный спин движется по круговой орбите в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (для определенности $x^1 = 0$), то для монохроматической волны (см. п. 1.3) и резонансного случая $\omega_g = \omega_0$ [366] следует:

$$(\text{эф. 64}) \quad S^{\mu\nu} \approx (S^{\mu\nu})_0 + \frac{v}{c} (S^{\mu\nu})_1, \quad (8.5)$$

где

$$(S^{23})_1 = \frac{h_0}{4} \omega_g t [(S^{12})_0 \sin \varphi - (S^{31})_0 \cos \varphi],$$

$$(S^{31})_1 = \frac{h_0}{4} \omega_g t (S^{23})_0 \cos \varphi, \quad (S^{12})_1 = -\frac{h_0}{4} \omega_g t (S^{23})_0 \sin \varphi.$$

Таким образом, имеет место резонансная прецессия пробного спина. Она пропорциональна $h_0 v/c$ и возрастает со временем.

8.5. Изменение величины и направления пробного спина при падении на гравитирующую массу. В случае радиального движения пробного спина уравнения Папапетру упрощаются. Поэтому было получено точное их решение [367]. При условии Пирани из этого решения следует, что хронометрически инвариантная величина (см. § 21) пробного спина и величины соответствующих направляющих косинусов имеют в поле Шварцшильда следующий вид:

$$(\text{эф. 65}) \quad |\mathbf{S}|^2 = \gamma_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta = \{(S_\infty^{12})^2 + (S_\infty^{13})^2\} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + (S_\infty^{23})^2, \quad (8.6)$$

$$\cos(\mathbf{S}, d\mathbf{x}^1) = S_\infty^{23} / S,$$

$$\cos(\mathbf{S}, d\mathbf{x}^2) = S_\infty^{13} / S \sqrt{1 - \frac{2m}{r}},$$

$$\cos(\mathbf{S}, d\mathbf{x}^3) = S_\infty^{12} / S \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad (8.7)$$

где S_∞^{ij} — значения S^{ij} на пространственной бесконечности. Отсюда следует, что величина вектора пробного спина не меняется при движении, лишь если $S_\infty^{12} = S_\infty^{13} = 0$, т. е. когда спин направлен по радиусу. Во всех остальных случаях $S \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 2m$. Из (8.7) находим, что при $r \rightarrow 2m$ вектор спина поворачивается в плоскости, определяемой направлением движения и вектором \mathbf{S}_∞ , стремясь стать перпендикулярным к направлению движения. Если $(S_\infty^{23})_0 = 0$, $(S_\infty^{12})_0^2 + (S_\infty^{13})_0^2 \neq 0$, то при радиальном движении вектор \mathbf{S} не меняет ни ориентации, ни величины. Эффект 65 проявляется лишь для далекого наблюдателя и исчезает с переходом к системе отсчета сопутствующего наблюдателя [367]. В рамках приближенного рассмотрения уравнений Папапетру эффект обсуждался еще в работах [356, 368, 369]. Учитывался и вклад квадратичных по пробному спину поправок, также обуславливающих изменение S [370].

8.6. Прецессия Лензе—Тирринга и эффект Уилкинса в поле Керра. Если поле Шварцшильда вызывает прецессию вектора пробного спина, то поле вращающейся массы обуславливает и прецессию вектора орбитального углового момента. Впервые этот эффект был рассмотрен Лензе и Тиррингом [83]. Прецессия плоскости орбиты определяется, согласно (8.1), выражением

$$(\text{эф. 66}) \quad (\boldsymbol{\Omega})_\alpha = \frac{2ma}{\rho \sqrt{m\rho}}. \quad (8.8)$$

Отличительной чертой эффекта (8.8) является его анизотропия. Максимального значения он достигает для орбит, проходящих через ось вращения центральной массы. Для экваториальных орбит он отсутствует, что следует из (8.1) [23, с. 426]. Выражение (8.8) приближенно, так как получено для метрики (1.9). Если же воспользоваться метрикой (1.8), то из первых интегралов следует интересная особенность прецессии орбитального момента в поле Керра, впервые отмеченная Уилкинсом [328]: с уменьшением радиуса орбиты пробного тела угловая скорость прецессии неограниченно растет. Поэтому за время одного оборота пробного тела на орбите плоскость орбиты успевает повернуться вокруг оси вращения центральной массы большое число раз. Данный эффект обусловлен лишь вращением источника и не изменяется при переходе к системе заряженных тел [345].

8.7. Эффект ван Паттена и Эверитта. Прецессия Лензе—Тирринга в свою очередь может привести к эффекту разделения плоскостей орбит пробных тел в поле Керра, который недавно рассмотрен ван Паттеном и Эвериттом в [371, 372]. Поскольку эффект 65 максимален для полярных орбит и в силу (8.1) зависит от направления движения по орбите, интересно рассмотреть случай двух пробных масс, движущихся в разных направлениях по приблизительно одинаковым полярным траекториям. Пусть в начальный момент времени их орбитальные моменты антипараллельны. Затем из-за прецессии (8.8) плоскости орбит начнут поворачиваться в разные стороны вокруг направления углового момента центрального тела. Поэтому расстояние между пробными телами (точнее, точками пересечения ими плоскости $z = \text{const}$) будет расти со временем:

$$(\Delta\varphi)_a = 2\Omega_a x^0. \quad (8.9)$$

Сейчас ведется подготовка эксперимента по выявлению данного эффекта с помощью спутников, свободных от сноса. Расстояние между точками пересечения экваториальной плоскости за два с половиной года полета спутников на высоте 800 км над поверхностью Земли составит 13,9 м согласно произведенным оценкам [371—373]. Предполагается, что точность измерения достигнет 1% [373].

8.8. Кручение траектории светового луча в поле Керра. В § 4 было показано, что вращение гравитирующей массы порождает анизотропию в отклонении луча света при его распространении в экваториальной плоскости (эф. 28). При движении в плоскости $\varphi = \text{const}$ угол отклонения луча в плоскости траектории совпадает со шварцшильдовым. Однако, как впервые было показано в работах [277, 278], траектория луча света испытывает кручение — луч, который начал распростра-

няться в направлении оси вращения источника поля, поворачивается в сторону этого вращения на угол

$$(\text{эф. 68}) \quad (\Delta\varphi)_a = \frac{4am}{b^2}, \quad (8.10)$$

где φ — полярный угол в экваториальной плоскости. Эффект (8.10) отсутствует лишь при экваториальном движении. Он аналогичен эффекту увлечения пробной массы в прямое движение (см. эффект 58).

8.9. Поворот плоскости орбиты в поле гравитационной волны. Допустим, что пробное тело совершает орбитальное движение вокруг гравитирующей массы в плоскости (x, y) . Если в плоскости орбиты в направлении x распространяется плоская гравитационная волна, то, как показано в [230], плоскость орбиты поворачивается вокруг направления распространения гравитационного излучения с угловой скоростью

$$(\text{эф. 69}) \quad (\omega)_{\text{ГВ}} = \frac{B_0}{4\omega_g} = \frac{\partial^2 h_{23}}{\partial t^2} \frac{1}{4\omega_g \cos \omega_g t}. \quad (8.11)$$

Здесь предполагалось, что частота обращения тела по орбите ω_0 равна частоте гравитационной волны ω_g . Поэтому эффект должен иметь резонансный характер.

8.10. Либрация при орбитальном движении в поле Шварцшильда. Эффект неравномерного вращения пробного тела конечных размеров при его орбитальном движении в поле Шварцшильда на основе ОТО рассматривался в монографии [56]. Из уравнений девиации геодезических линий (3.28) для приобретенного углового ускорения получаем [374]

$$\dot{\omega} = \frac{6m}{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] - \frac{2m}{r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}].$$

Тогда угловая скорость либрации равна

$$\omega = -\frac{2m}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] + \omega_0,$$

где \mathbf{v} — хронометрически-инвариантная скорость движения по орбите. Для экваториального движения $\omega_z = -2mh/r^3$. Приняв (3.1), при изменении φ от $-\pi/2$ до $\pi/2$ получим угол поворота пробного тела вследствие либрации:

$$(\text{эф. 70}) \quad (\Delta\varphi)_m = -\frac{6m}{p} e. \quad (8.12)$$

В случае движения Земли в поле Солнца эффект 70 дает лишь часть наблюдаемой величины сезонных вариаций угловой ско-

рости вращения Земли, вызываемой и другими причинами [56, с. 368]. Как отмечено в работе [56], эффект 70 лежит на пороге современной точности измерения и его следует принимать во внимание.

§ 9. ДЕФЕКТЫ ВРЕМЕНИ, ПУТИ И МАССЫ

В своей геометрии Лобачевский придал научное значение понятию «дефекта» — разности соответствующих величин, принадлежащих неевклидовой геометрии и геометрии Евклида (дефект суммы углов треугольника, дефект параллелограмма и т. д.) *). Понятие дефекта перешло в СТО, где в отличие от 4-пространства — времени геометрия 4-пространства скоростей неевклидова. Н. А. Черников [375] отмечал: «Выясняется, что в предельном случае, когда треугольник вырождается в рычаг Архимеда, формула Лобачевского для дефекта треугольника дает формулу $\Delta E = c^2 \Delta t$ для дефекта массы, где скорость света c есть константа Лобачевского для пространства скоростей» (с. 146).

Приняв риманову геометрию, ОТО тем самым перешла к величинам, значения которых, вообще говоря, отличаются от соответствующих величин НТТ. Их разности будем также называть дефектами [36]. Наибольший интерес представляют дефекты основных величин ОТО, прежде всего времени, длины (пройденного расстояния), причем в их общековариантном определении, не зависящем от выбора системы координат (собственных, см. п. 14.3). Интерес к ним усилился созданием современных атомных часов, уже позволивших непосредственно измерить разности собственных времен макроскопических объектов [174, 175]. Подсчет основных физических величин ОТО с помощью эйнштейновых уравнений тяготения и уравнений движения приводит к их выражениям в виде функций от гравитирующих, пробных параметров и других величин, характеризующих частные ситуации, в которых проявляется отказ от псевдоевклидовой геометрии СТО в сочетании с другими требованиями ОТО. Поэтому представляет интерес не только сравнение величин ОТО с их ньютоновыми пределами, но и сравнение их в ОТО при соответствующем отнесении к различным ситуациям. Такие разности, например собственных времен «близнецов», также будем называть дефектами.

В данном параграфе эффекты 71—75 представляют собой дефекты времени, взятые во временной или в угловой мерах. Дефекты пройденного расстояния (длины) выявляются в эф-

*) Понятие дефекта введено в геометрию до Лобачевского, где оно употреблялось, однако, при выявлении в геометрических исследованиях некоторых «парадоксальных» ситуаций.

фектах 76—78. Рассмотрено также и несколько дефектов других величин. Некоторые дефекты времени и пройденного пробными телами пути вместе со временем их задержки гравитационным полем рассматриваются в § 24.

9.1. Дефект координатного сидерического периода при квазиэллиптическом движении в поле Шварцшильда (эффект Кустаанхеймо—Лехти). В ОТО при описании орбитального движения, как и в НТТ, вводят разные варианты периодов — аномалистический, сидерический и др. (см., например, [56, 178, 179]), причем в отличие от НТТ каждый из них может быть определен как по координатному, так и по собственному времени. Для сидерического координатного периода изменения x^0 в интервале $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ в поле Шварцшильда имеем [178]

$$T_{\varphi} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{mc^2(1-e^2)^3}} \left[1 + \frac{3m}{r}(1-e^2) - \frac{3m}{r}(1-e^2)^{3/2} \times \right. \\ \left. \times (1 + e \cos \Phi)^{-2} \right], \quad (9.1)$$

где Φ — широта перицентра. Вычитая из этого выражения кеплеров период НТТ, находим дефект периода

$$(\text{эф. 71}) \quad \Delta T_{\varphi} \equiv T_{\varphi}(\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi) - T_0 = \\ = T_0 \frac{3m}{r} [(1-e)^2 - (1-e^2)^{3/2} (1 + e \cos \Phi)^{-2}] \quad (9.2)$$

(индекс φ у T_{φ} указывает, что период сидерический). Это выражение совпадает с полученным Кустаанхеймо и Лехти [376] (до перевода его, как сделано у этих авторов, к r_0 и e_0 , где $r_0 = a_0(1-e_0^2)$). Они впервые предложили рассматривать разность периодов орбитального движения в НТТ и в ОТО для возможной проверки эйнштейновой теории гравитации (предлагалось сравнить периоды в перицентре). Из (9.2) следует, что дефект периодов пропорционален m/r — величине, которая может быть фиксирована на современном этапе развития экспериментальной техники. Поэтому данный эффект ОТО рассматривался в работах [377, 378] наряду с другими предполагаемыми экспериментами по проверке теории. Однако детальный анализ [178] выявил ряд трудностей экспериментальной проверки эффекта 71, в основном связанных с расчетом ньютоновских элементов орбит и периодов обращения.

Благоприятными должны быть орбиты с большим эксцентриситетом (в работе [376] предлагалось использовать почти параболические орбиты). Как следует из замечания [379],

группа исследователей из Франции готовит эксперимент по измерению хода часов на ИСЗ, который предполагается запустить на орбиту с большим эксцентриситетом.

9.2. Дефект собственного аномалистического периода в поле Шварцшильда (эффект Широкова). Пусть в поле Шварцшильда пробная частица движется по круговой орбите с центром, немного сдвинутым относительно гравитирующего центра. Относительно пробного тела («спутника»), движущегося по круговой орбите с центром в гравитирующей массе, такая частица, пересекая в разных местах орбиту спутника, совершает относительно него колебания. М. Ф. Широков [380] изучал дефекты периодов таких колебаний при разных ориентациях орбиты частицы относительно орбиты спутника (опорной окружности). Для частоты колебаний по собственному времени с помощью уравнений геодезической девиации при x^1 -колебаниях (r -колебания в работе [380], обе окружности находятся в одной плоскости) получено выражение

$$\omega = \omega_0 \left[\left(1 - \frac{6m}{r_0} \right) / \left(1 - \frac{3m}{r_0} \right) \right]^{1/2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{3m}{2r_0} \right), \quad (9.3)$$

что соответствует аномалистическому периоду по собственному времени (см. монографию [56]):

$$\mathcal{T}_\psi(\psi_1 = 0, \psi_2 = 2\pi) = T_0(1 + 3m/2r_0), \quad (9.4)$$

где r_0 — радиус опорной окружности, индекс ψ у \mathcal{T}_ψ указывает, что период аномалистический. Следовательно, имеет место и дефект собственного аномалистического периода при x^1 -колебаниях:

$$(\text{эф. 72}) \quad \Delta\mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_\psi - T_0 = + \frac{3m}{2r_0} T_0. \quad (9.5)$$

Как показано М. Ф. Широковым [380], при x^2 - и x^3 -колебаниях (в работе [380] соответственно θ - и φ -колебания)

$$(\mathcal{T}_\psi)_{x^2} = T_0 \left(1 - \frac{3m}{2r_0} \right), \quad (\mathcal{T}_\psi)_{x^3} = T_0 \left(1 + \frac{3m}{2r_0} \right),$$

т. е. имеют место также дефекты периодов

$$(\Delta\mathcal{T})_m \equiv (\mathcal{T}_\psi)_{x^1} - T_0 = + \frac{3m}{2r_0} T_0,$$

$$(\Delta\mathcal{T})_m \equiv (\mathcal{T}_\psi)_{x^2} - T_0 = - \frac{3m}{2r_0} T_0.$$

Следовательно,

$$(\text{эф. 72a}) \quad (\Delta\mathcal{T})_m \equiv (\mathcal{T}_\psi)_{x^2} - (\mathcal{T}_\psi)_{x^1} =$$

$$= (\mathcal{F}\psi)_{x^2} - (\mathcal{F}\psi)_{x^3} = -\frac{3m}{r_0} T_0. \quad (9.6)$$

Изучение дефектов собственных аномалистических периодов продолжено в работах [381, 382, 385] (см. далее п. 9.5). В статье [380] отмечено, что измерение дефектов (9.6) явилось бы самостоятельным вариантом проверки ОТО. В силу (9.6) точка пересечения линий, по которым происходят колебания, будет смещаться в зависимости от значений $\mathcal{F}x^1$, $\mathcal{F}x^2$, $\mathcal{F}x^3$. В поле Земли для ИСЗ на орбите $r=7000$ км при начальном смещении ~ 10 см дополнительное смещение частицы в спутнике, предсказываемое ОТО, может составить $\sim 10^{-6}$ (см. [380]).

9.3. «Парадокс близнецов» в поле Шварцшильда. Поскольку собственное время в ОТО испытывает влияние гравитационного поля с переходом от СТО к ОТО, различия в собственных временах разных тел, вообще говоря, усиливаются. Представляет интерес не только сравнение собственного времени ОТО с его ньютоновым пределом, но и сравнение двух соответствующих промежутков собственных времен, различие между которыми вызвано гравитационным полем. Вопрос о существовании такого дефекта широко и всесторонне обсуждался в связи с «парадоксом близнецов» (см., например, [383]). Поэтому остановимся лишь на одной интересной ситуации, в которой указанный дефект может быть выявлен при орбитальном движении пробной массы.

В работе [384] рассмотрен случай, когда в плоскости $\theta=\pi/2$ поля Шварцшильда одно тело движется по круговой орбите вокруг источника (например, Земля вокруг Солнца), а второе — по квазиэллиптической орбите с эксцентриситетом $e \neq 0$ (например, ракета облетает Солнце). Приближенное выражение для собственного времени в поле (1.4)

$$s = ct_0 - \frac{c}{2} \int_0^{t_0} \left(\frac{2m}{r} + \frac{v^2}{c^2} \right) dt = (t_0 - \Delta t) c$$

дает для круговой орбиты радиуса R следующую поправку к ньютонову времени:

$$(\Delta s)_{e=0} = \frac{3m}{2R} ct_0 = 3 \sqrt{\frac{m}{R}} \varphi_0; \quad t_0 = \frac{2\varphi}{\omega_0} = 2\varphi \left(\frac{R^3}{m} \right)^{1/2},$$

где $2\varphi_0$ — пройденный телом путь в угловой мере. Если предположить, что второе тело пересекает орбиту первого, как показано на рис. 7, то, согласно [384], дефект собственных времен при движении между точками А и В в поле Шварцшильда по двум разным орбитам описывается выражением

(эф. 73)

$$\begin{aligned} \Delta s &= (\Delta s)_{e=0} - (\Delta s)_{e \neq 0} = \\ &= (\Delta s)_{e=0} \left[1 + \frac{1 - e^2}{3(1 - e \cos \varphi_0)} - \frac{4}{3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1 - e \cos \varphi_0)}{\varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - e \cos \varphi} \right]. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В случае $e=0$ и $\varphi=\pi/2$, т. е. при движении двух пробных тел по одной и той же круговой орбите, но в разных направлениях, согласно (9.7), имеем $\Delta s=0$. В случае движения ракеты, отправленной с Земли в облет Солнца, по параболе со скоростью 58 км/с после ее возвращения на Землю через 2 месяца и прохождения угла $2\varphi_0=1,04$ рад часы на ракете, согласно (9.7), отстанут на 0,19 с [384]. Впервые дефекты собственного времени макроскопического объекта (самолета) измерены в опытах [170]. Эксперименты, проведенные с помощью ракет и самолетов по измерению гравитационного красного сдвига [169, 174, 175], также подтверждают наличие дефектов собственных времен, вызванных гравитационным полем и движением в нем.

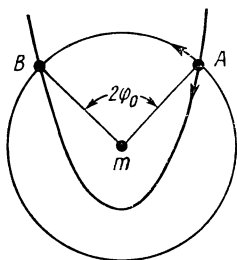


Рис. 7

9.4. Дрейф точки встречи пробных спинов в поле Шварцшильда. Как отмечалось в § 2, сдвиг частот (а следовательно, и дефект времени, соответствующий ему) определяется не только параметрами источника поля, но и первыми интегралами уравнений движения пробных тел, т. е. зависит от их параметров. В частности, существенную роль может играть спин пробного тела, выступающего в качестве часов (с периодом обращения по орбите, принятым за единицу времени). Действительно, из первых интегралов уравнений Папаетру в поле Шварцшильда для пробного спина, ориентированного параллельно (верхние знаки) или антипараллельно (нижние знаки) орбитальному моменту, имеем

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{x}^0 \pm \frac{m}{r} S \dot{\varphi}, \quad h = r^2 \dot{\varphi} \pm \left(1 - \frac{2m}{r} \right) S \dot{x}^0.$$

Отсюда следует приближенное выражение для скорости обращения по орбите:

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \left(1 + \frac{3m}{2r} \mp \frac{S}{\sqrt{mr}} \right). \quad (9.8)$$

После подстановки $\dot{\varphi}$ в соотношение $1 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu$ для случая круговой орбиты после интегрирования находим

$$s = T_0 \left[1 - \frac{m}{r} + \omega_0^2 r^2 \left(1 + \frac{3m}{r} \mp \frac{2S}{\sqrt{mr}} \right) \right]. \quad (9.9)$$

Таким образом, дефект собственного времени зависит от пробных спинов. Он отличен от нуля либо при движении двух параллельных спинов в разные стороны, либо двух антипараллельных в одну и ту же сторону. Как видно из (9.8), следствием дефекта времени является дрейф точки встречи пробных спинов на угол

$$(\text{эф. 74}) \quad (\Delta\varphi)_{m,S} = \frac{4\pi S}{\sqrt{mr}} \quad (9.10)$$

в сторону движения спина, антипараллельного орбитальному моменту. Для случая движения антипараллельных спинов в одну сторону этот эффект обсуждался в работе [233]. Дрейф (9.10) можно было бы измерить при использовании спутников без сноса и расположении в них двух антипараллельных гироскопов.

9.5. Дефект собственного аномалистического периода в поле Керра. Эффект 72 на случай поля вращающейся гравитирующей массы недавно обобщен в работе [385]. Решение уравнений девиации в поле Керра для случая, когда опорная круговая траектория лежит в экваториальной плоскости, для периодов колебания дает выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x^1} = \mathcal{T}_{x^3} &= T_0 \left(1 + \frac{3m}{2r_0} \right) \left[1 + \frac{4a}{r_0} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{3/2} \right], \\ \mathcal{T}_{x^2} &= T_0 \left(1 - \frac{3m}{2r_0} \right) \left[1 - \frac{4a}{r_0} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

при ограничении лишь линейными по параметру a членами. Тогда обусловленный вращением источника поля дефект периодов равен

$$\begin{aligned} (\text{эф. 75}) \quad (\Delta\mathcal{T})_a &= \mathcal{T}_{x^2} - \mathcal{T}_{x^1} = \mathcal{T}_{x^2} - \mathcal{T}_{x^3} = \\ &= -\frac{8a}{r_0} \left(\frac{m}{r_0} \right)^{3/2} T_0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

В дополнение к работе [385] отметим, что эффект 75 зависит от направления движения пробного тела по орбите относительно направления вращения гравитирующей массы.

9.6. Дрейф точки встречи пробных тел (без спина) в поле Керра. Из первых интегралов уравнений геодезических в поле

(1.8) легко установить, что периоды обращения по круговым орбитам зависят от направления движения (см. [386—388]). Так, для собственных сидерических периодов:

$$\mathcal{T}_{\varphi \pm} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{m}} \sqrt{1 - \frac{3m}{r} \mp \frac{2a}{r}} \sqrt{\frac{m}{r}}.$$

Таким образом, имеет место дефект собственных сидерических периодов

$$(\text{эф. 76}) \quad (\Delta \mathcal{T})_a = \mathcal{T}_+ - \mathcal{T}_- = -\frac{2a}{r} \sqrt{\frac{m}{r}} T_0. \quad (9.12)$$

Часы, находящиеся в прямом (по отношению к вращению источника) движении, покажут более ранний момент времени, чем вращающиеся в обратном направлении. На орбите Земли дефект может составить $0,65 \cdot 10^{-3}$ с [388]. Отличаются также и угловые скорости вращения влево и вправо по орбите. Согласно [387],

$$\omega_{\pm} = \pm \omega_0 (1 \pm a\omega_0)^{-1}, \quad \omega_0 = \sqrt{m/r^3}.$$

Поэтому за одно и то же время пробные массы, движущиеся в разных направлениях, пройдут разные пути. В угловой мере $\varphi_{\pm} = \pm \pi (1 \mp a\omega_{\text{НТТ}})$. Следовательно, имеет место дрейф точки встречи противовращающихся тел в поле Керра [387]:

$$(\text{эф. 76a}) \quad (\Delta \varphi)_a = 2\pi a \sqrt{m/r^3}.$$

Тело, движущееся по направлению вращения источника поля, отстает (см. также [389]).

9.7. Дефекты периодов в поле гравитационной волны. Одной из наиболее перспективных возможностей для поиска гравитационного излучения является наблюдение за пульсарами. Стабильность их периода гарантирует необходимую чувствительность при измерении величины временных вариаций, обусловленных гравитационной волной. Если в пустом пространстве — времени через равные промежутки времени Δt излучаются электромагнитные импульсы, то в приближении геометрической оптики их распространение описывается нулевыми геодезическими линиями, причем $dx^0 = dx$, если излучение распространяется по оси $x^1 = x$. В поле же плоской гравитационной волны это соотношение заменяется на $dx^0 = [1 - \frac{1}{2} h_{22}(t, x)] dx$, а излучаемые в моменты t_1 и t_2 импульсы света пройдут одно и то же расстояние dx за разное время:

$$cd\delta(t) = \frac{1}{2} [h_{22}(t_1, x) - h_{22}(t_2, x)] dx,$$

где $\delta(t)$ характеризует сдвиг импульсов во времени. Если предположить, что источником гравитационной волны является двойная звезда, массы компонент которой M_1 и M_2 , то для ситуации, изображенной на рис. 8, изменение (дефект) периода между приходами импульсов к наблюдателю характеризуется величиной [390]:

$$(\text{эф. 77}) \quad \delta(t) = \frac{\pi\alpha\Delta t}{c\tau} \int_{-b_1}^{b_2} \frac{b^4 - b^2x}{(b^2 + x^2)^{5/2}} \sin \left[2\omega t + \right. \\ \left. + 2 \frac{\omega}{c} (x - \sqrt{x^2 + b^2}) \right] dx \quad (9.13)$$

(обозначения см. на рис. 8), где α зависит от M_1 , M_2 и периода двойной звезды, $\tau = 2\pi/\omega$. Идеальным для регистрации эффекта 77 был бы случай, когда расстояние от двойной звезды до линии пульсар—наблюдатель равно длине волны $\lambda_{\text{ГВ}}$. В оптимальных условиях для $M_1 \approx M_2 \approx 10^2 m_{\odot}$ и $\tau \approx 10$ дней относительный дефект периодов прихода импульсов света составит $\delta(t)/\Delta t \sim 10^{-14}$, что соответствует уровню современных стандартов времени. Однако для предполагаемых в настоящее время источников гравитационных волн эта величина снижается до 10^{-19} [390].

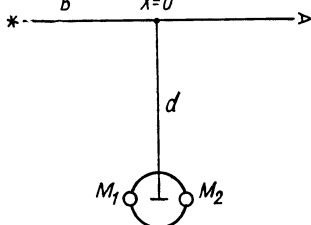


Рис. 8

9.8. Дефект числа колебаний осциллятора на круговой орбите в поле Шварцшильда. Как показано в работе [51], добавочная аномалия (3.31) порождает вторичный эффект — изменения числа колебаний. При $\Omega^2/\omega_0^2 \gg 1$ (см. обозначения в п. 3.7 и п. 9.2) за N оборотов спутника, совершенных за время t далекого наблюдателя, получим

$$(\text{эф. 78}) \quad (\Delta n_N) \cong \frac{3}{2} \frac{m}{r_0} \frac{t}{T_0}, \quad t = NT, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (9.14)$$

Одно добавочное колебание накапливается за промежуток времени $(\Delta t)_{\Delta n=1} = \frac{2}{3} (r_0 T \omega_0 / m)$ при общем числе колебаний

$(n)_{\Delta n=1} = 2 r_0 / 3 m$. Сплюсненность Земли при $\Omega = 100$ Гц не позволит выявить эффект 78 в ее поле тяготения, как и эффект 72 [299]. В поле же Солнца одно добавочное колебание могло бы накопиться за трое суток при общем числе колебаний за это время, равном $\sim 10^7$ [51]. Однако технические трудности делают маловероятным проверку указанного дефекта числа колебаний.

9.9. Периодическое смещение интерференционной картины в поле гравитационной волны. Пространство ОТО, заполненное гравитационным излучением, можно рассматривать как среду с показателем преломления $n = 1 + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta$. Поскольку вдоль направления распространения волны $n = n_{\parallel} = 1$, а в перпендикулярном направлении $n = n_{\perp} = 1 + \frac{1}{2} h_{22} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} h_{23} \sin 2\varphi$ [24, 282], то возникает дефект длины. Если в поле гравитационной волны поместить интерферометр, одно из плеч которого ориентировано вдоль направления распространения волны, то должна возникнуть разность оптических длин $\Delta l_{\text{опт}} = l(n_{\parallel} - n_{\perp})$, которая будет периодически изменяться со временем [282]. Это вызовет периодический сдвиг интерференционной картины:

$$(\text{эф. 79}) \quad \Delta l \approx \frac{1}{2} l h_{22}. \quad (9.15)$$

При выводе (9.15) полагалось, что период гравитационной волны больше, чем время пробега луча в интерферометре. Согласно оценкам, приведенным в работе [282], при $l = 10^3$ см величина эффекта составит $\sim 10^{-14} - 10^{-7}$ при постоянной времени прибора ~ 1 с. В настоящее время ряд экспериментальных центров использует лазерные интерферометры, основанные на применении эффекта 79 для поисков гравитационного излучения [393, 394].

Илмазом [391] предлагалось с помощью лазерного интерферометра проверить справедливость принципа эквивалентности. Шамиром и Фоксом [392] велись наблюдения за изменениями интерференционной картины при поворотах интерферометра вместе с Землей относительно силовых линий поля Солнца. Отсутствие смещения картины, выявленное в пределах погрешности, соответствует состоянию невесомости в этом поле земного интерферометра. Подсчеты, приведенные в работе [392] для случая закрепленного интерферометра, нуждаются в добавочном анализе.

9.10. Дефекты расстояний и скоростей при орбитальном движении в поле Шварцшильда. Различие в уравнениях поля и движения в НТТ и ОТО приводит к тому, что координаты тел, движущихся в поле Шварцшильда, будут отличаться от рассчитанных на основе НТТ. Кроме того, отличаются и компоненты скоростей орбитального движения, даже если предположить, что пробная масса в НТТ и в ОТО имеет одинаковые начальные значения координат и скоростей. Соответ-

ствующие дефекты для радиальных и тангенциальных составляющих радиус-вектора и скорости рассчитаны в работе [395]. Из-за громоздкости полученных выражений приведем для эффекта 80 лишь графические зависимости дефекта радиальной координаты (рис. 9) и тангенциальной составляющей скорости (рис. 10). Указанные дефекты выражаются в удалении или сближении эйнштейновой и ньютоновой орбит по радиусу, забегании или отставании пробной массы по полярному углу и соответствующих изменениях скоростей. Из

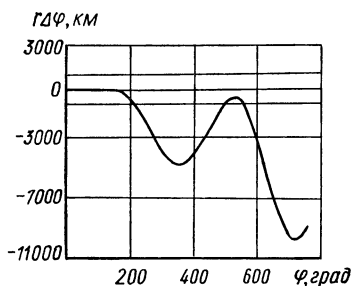


Рис. 9.

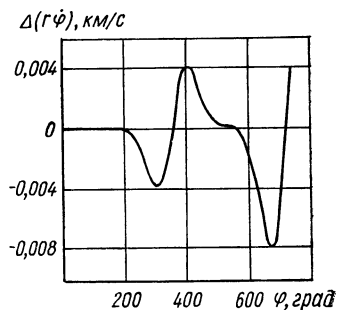


Рис. 10

рис. 9 видно, что уже за два оборота (для астероида Икара) $r_{нтт}\Delta\varphi = r_{нтт}(\varphi_{нтт} - \varphi_{ото}) = 11000$ км. Еще ранее [395] отмечалось, что данные эффекты вполне могут быть обнаружены современным радиолокационным оборудованием.

9.11. Гравитационный дефект массы в поле Шварцшильда

Поскольку скорость движения в поле тяготения зависит не только от пробных, но и от гравитирующих параметров, в ОТС модифицируется зависимость массы от скорости. Согласно [56, с. 139], в рамках (3+1)-расщепления, приводящего уравнения геодезических линий к виду (6.1), (6.2), в ОТО имеем для локального наблюдателя и движущейся пробной массы

$$\mu = \mu_0 (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (9.16)$$

где v — хронометрически-инвариантная («синхронизованная») скорость. Здесь в отличие от основных обозначений μ — масса, зависящая от скорости. В работах [347, с. 191; 396—400] приводятся выражения для дефекта массы покоящихся пробных тел относительно далекого наблюдателя. Так, из полученного общего выражения [398]

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r} \right) - \frac{1}{c^2} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} r^2 \times \right. \right.$$

$$\times \left(\frac{dr}{dx^0} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dx^0} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dx^0} \right)^2 \Big]^{-1/2}, \quad (9.17)$$

соответствующего определению импульса $p_0 = \mathcal{E}/c = \mu_0 c \times \times g_{00} dx^0/ds$ [23, с. 45], для покоящейся пробной массы следует, что $\mu = \mu_0 (1 - 2m/r)^{1/2}$. Отсюда вытекает:

$$(\text{эф. 81}) \quad \Delta\mu = \mu_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}} - 1 \right). \quad (9.18)$$

С приближением к $r=2m$ значение $\Delta\mu$ уменьшается*). Поэтому значительная доля массы покоя пробного тела может расходоваться, например, на гравитационное излучение (подробнее см., в частности, [24, с. 130]).

9.12. Влияние гравитирующего заряда на дефект пробной массы. Этот вопрос, по-видимому, впервые исследовал Нарликар [401]. Из первых интегралов уравнений геодезических линий он нашел

$$\mu (1 - 2m/r + k/r^2) = \mu_0 \varepsilon,$$

но не располагал точными выражениями для постоянных ε и h . Если же воспользоваться (9.17), то в поле Нордстрема—Рейсснера находим:

$$(\text{эф. 82}) \quad (\Delta\mu)_{m,k} = \mu_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r} + \frac{k}{r^2}} - 1 \right). \quad (9.19)$$

Это выражение может быть использовано для оценки энергии гравитационного излучения пробного тела в случае его падения на заряженный гравитирующий центр.

9.13. Влияние космологического члена на дефект массы. Как и в предыдущем случае, это влияние уже исследовалось [401], и было получено выражение

$$\mu_0 \varepsilon = \mu (1 - 2m/r - \Lambda r^2/3).$$

В соответствии с результатами [398] вместо этого выражения получаем

$$(\text{эф. 83}) \quad (\Delta\mu)_{m,\Lambda} = \mu_0 \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} - 1 \right). \quad (9.20)$$

§ 10. ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНАЛОГИ НЕКОТОРЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

Часть эффектов ОТО имеет настолько сильное сходство с соответствующими негравитационными явлениями из других

*) Согласно работам [347, 396, 399], где дано отличное от (9.17) выражение, $\Delta\mu$ увеличивается.

разделов физики, что для них заимствуют и названия, добавляя лишь термин «гравитационные», например «гравитационный эффект Зеемана». Многие гравитационные аналоги оптических явлений представляют собой как бы вторичные эффекты, являясь различными следствиями эйнштейнова эффекта отклонения светового луча. Некоторые из собранных в данном параграфе эффектов описываются определенными соотношениями для частот электромагнитного излучения в поле сильно гравитирующих объектов. Это вызывает интерес к рассмотрению всякого рода волновых процессов в ОТО, в том числе воздействий ГВ на электромагнитные волны (прежде всего в приближении геометрической оптики). Такой интерес стимулируется и современными возможностями исследования электромагнитного излучения в поле тяготения как в лабораторных условиях (например, с помощью кольцевых лазеров), так и при регистрации излучения радиопульсаров, а также потому, что решение важных вопросов ОТО (например, определения энергии) часто связывают с выявлением аналогий между ОТО и электродинамикой в их аппарате, структуре основных уравнений и т. д.

10.1. Гравитационный эффект Штарка в поле Шварцшильда. Под действием электрического поля происходит расщепление (сдвиг) спектральных линий. В случае линейного эффекта Штарка сдвиг частот пропорционален напряженности электрического поля. Бриллюэн [402] высказал предположение, что аналогичное явление должно иметь место и при замене электрического поля гравитационным. В работе [403] получено выражение для расщепления, которое вызывает следующий сдвиг частот в поле Шварцшильда:

$$(\text{эф. 84}) \quad (\Delta\nu)_m = \frac{Am}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1/2}, \quad (10.1)$$

где A — коэффициент пропорциональности. Детальный анализ экспериментальных возможностей выявления этого эффекта проведен недавно [404]. Оказалось, что первый член разложения (10.1) в поле Солнца приводит к гравитационному эффекту Штарка $\sim 10^{-21}$, что значительно меньше эйнштейнова красного сдвига частот при тех же условиях. Лишь в полях компактных объектов с массой, равной солнечной, но с радиусом $1,2 \cdot 10^6$ м, порядок гравитационного эффекта Штарка мог бы возрасти до 10^{-15} , что соответствовало бы современным экспериментальным возможностям. Из (10.1) следует возрастание эффекта при $r \rightarrow 2m$, что отмечено в работе [403]*.

*) Квантовомеханический подход с помощью уравнений Дирака, исследованный М. Н. Полозовым («Exp. Techn. Physik», 1978, 26, 135), также приводит к гравитационному эффекту Штарка.

10.2. Гравитационный эффект Черенкова в поле Шварцшильда. Частота черенковского излучения сильно зависит от значения показателя преломления среды, в которой оно возникает. Из общековариантных уравнений Максвелла в поле (1.4) следует, что $D = E/\sqrt{1-g_{00}}$, $B = H/\sqrt{1-g_{00}}$, т. е. коэффициент преломления шварцшильдова поля равен

$$n = (-g_{00})^{-1/2} \approx 1 + m/r > 1. \quad (10.2)$$

По аналогии естественно предположить, что поле Шварцшильда, если в нем движутся заряженные частицы со скоростью больше фазовой скорости, равной c/n , должно излучать. Такое «гравитационное черенковское излучение», согласно [405], характеризуется верхней границей частоты вида

$$(\text{эф. 85}) \quad (\omega)_m = \frac{pc}{\hbar} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \frac{r}{m} \left(1 - \frac{c}{v} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} \right), \quad (10.3)$$

где \hbar — постоянная Планка. На поверхности Солнца $n < 1,001$. Поэтому из (10.3) следует, что эффект может стать заметным лишь в полях массивных звезд.

10.3. Гравитационный эффект Зеемана в поле Керра. Гравитационное поле вне вращающейся массы в известном смысле подобно магнитному полю. Поэтому естественно ожидать, что ряд гравитационных эффектов в поле Керра будет аналогичен эффектам в магнитном поле. Согласно [406], для электромагнитного излучения в поле (1.9) имеет место гравитационный эффект Зеемана. Если на полюсе вращающейся массы расположен осциллятор, то испускаемый им плоскополяризованный свет можно представить как совокупность двух волн, поляризованных по кругу с частотами $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$, где $\Omega \sim 2m\omega/r$, а ω — угловая скорость вращения массы. Таким образом, относительно далекого наблюдателя происходит расщепление спектральных линий на величину

$$(\text{эф. 86}) \quad (\Delta\omega)_a = 2\Omega = 4 \frac{m}{r} \omega. \quad (10.4)$$

Характерной чертой данного эффекта является его независимость от свойств излучающей системы. Поэтому он одинаков и для атома, и для молекулы, а также в оптическом и в радиодиапазонах. Критический анализ более ранних результатов [406] содержится в работе [407], но В. И. Захаровым и Н. В. Мицкевичем [408, 409] эффект 86 получен и из решения общековариантных уравнений Дирака в поле Керра.

10.4. Эффект Саньяка в поле Керра. В работе [42] выражение (5.14) для времени задержки пробной частицы, вра-

щающейся по окружности в поле Шварцшильда, обобщено на поле Керра:

$$(\Delta x^0_{\text{дес}})_{\pm} = 2\pi (\sqrt{mr} \pm am/r) = T_0 (m/r \pm am \sqrt{m/r^2} \sqrt{r}).$$

Здесь учтены два знака (движение частиц по направлению и обратно направлению вращения гравитирующей массы [42]). Следовательно, гравитирующий параметр поля Керра вызывает относительный дефект времен задержек

$$(\text{эф. 87}) \quad \Delta x^0 \equiv (\Delta x^0_{\text{дес}})_+ - (\Delta x^0_{\text{дес}})_- = 4\pi \frac{am}{r}. \quad (10.5)$$

При рассмотрении встречного движения двух частиц на вращающемся диске в 4-пространстве Минковского получают разность времен вида $\Delta x^0 = 4\pi \omega r^2 / (1 - \omega^2 r^2 / c^2)$, подчеркивая ее независимость от скорости движения частиц относительно вращающегося диска. Это дает некоторое основание применять последнее выражение и для случая распространения двух встречных лучей света. Тогда разность Δx^0 может быть выражена в виде разности фаз, а следовательно, должен иметь место сдвиг интерференционной картины, которую и наблюдают на опыте Саньяка. Выражение (10.5) также не зависит от скорости вращения частиц по круговым орбитам. Распространяя его на встречное движение световых лучей в покоящемся контуре, приходим к выводу, что в поле Керра в отличие от поля Шварцшильда, согласно ОТО, имеет место «гравитационный эффект Саньяка»^{*)}, обусловленный гравитирующим параметром a . Поскольку измерения относятся к собственным временам, разность Δx^0 следует перевести в $\Delta x^{(0)}$ — соответствующую разность собственного времени наблюдателя умножением на $\sqrt{g_{00}}$, как это делается при подсчете эффекта Шапиро (см. п. 5.2). Однако это внесет в (10.5) поправки высшего порядка малости. С другими коэффициентами выражение (10.5) получено в работах [412, 413], посвященных гравитационному эффекту Саньяка в покоящемся относительно принятой системы координат контуре, по периметру которого распространяются лучи. Численные оценки для эффекта 87 приведены в работе [413].

10.5. Гравитационный эффект Фарадея. Как впервые показано Г. В. Скродским [277] (на основе решений общековариантных уравнений Максвелла), плоскость поляризации электромагнитного луча в поле Керра, вообще говоря, претерпевает поворот. Следовательно, имеет место гравитацион-

^{*)} Обычный эффект Саньяка во вращающемся контуре на фоне искривленного пространства — времени рассматривался, например, в работах [410, 411].

ный аналог эффекта Фарадея. Позже этот эффект анализировался в работах [278, 414—416], но количественно были получены другие результаты. Согласно недавней работе [417], в линейном по a приближении плоскость поляризации поворачивается вокруг положительного направления \mathbf{a} на угол

$$(\text{эф. 88}) \quad (\Phi)_a = -\frac{2am}{B^2}, \quad (10.6)$$

где B — прицельный параметр для неэкваториальной траектории. Если луч распространяется параллельно оси вращения из экваториальной плоскости в бесконечность, то полный угол поворота равен $\Phi_{\parallel}(0, +\infty) = (\Phi)_a + 2am/B^2 = 0$, где второй член обусловлен «увлечением» во вращение. Конечно, и $\Phi_{\parallel}(-\infty, \infty) = 0$, что согласуется с выводом из работ [85, 278]. Согласно [415], при распространении луча по любой траектории из $-\infty$ в $+\infty$ суммарный эффект равен нулю. Для луча, идущего вдоль оси вращения, имеем $\Phi = am/z^2$, что совпадает с данными работы [85], но в три раза меньше результата Г. В. Скроцкого [277]. Здесь z — координата источника, расположенного на оси вращения гравитирующей массы. Для $z = 200 m$ и $a = 0,2 m$, согласно [417], величина угла $\Phi = (3 \cdot 10^{-4})^\circ$. Численный же расчет из работы [418] при $a = 0,998 m$, где $m = 9 m_{\odot}$, показывает, что величина угла поворота плоскости поляризации может достигать 100° *). Возможность дисперсионного вращения плоскости поляризации в гравитационном поле отмечена в работе [420].

10.6. Дисперсия поляризационного света в поле Керра (эффект Машхуна). Как утверждает А. М. Волковым и др. [421], отклонение луча света в гравитационном поле не зависит от его поляризации. В работах [422, 423] была предпринята попытка экспериментальной проверки этого утверждения. Результаты опытов (осень 1972 г.) свидетельствуют о том, что поляризованные по-разному лучи отклоняются в поле Солнца по-разному: ортогонально поляризованные компоненты радиолуча от пульсара в гравитационном поле расщепляются по радиусу на $0,0035''$, а в перпендикулярном направлении — на $0,002''$ при соответствующем значении эйнштейнова эффекта отклонения $0,2''$ [422].

Это побудило Машхуна [424] пересмотреть вопрос, и он выявил новый эффект ОТО — эффект дифференциального отклонения поляризованных лучей в поле вращающейся массы. Из общековариантных уравнений Максвелла Машхун нашел, что разность углов отклонения право- и левополяризованных

*) В рамках квантовой теории в поле Керра гравитационный эффект Фарадея рассматривался Ю. С. Владимировым и И. Ф. Исхаковым [419] и недавно Лайтером («Nuovo Cimento», 1978, B44, 275).

лучей при распространении по оси вращения гравитирующей массы равна

$$(\text{эф. 89}) \quad (\Delta\theta)_{a,m} = \theta_+ - \theta_- = Aa\lambda \frac{m}{b^3}, \quad (10.7)$$

где A — числовой множитель порядка единицы, λ — длина волны. Согласно [425], для керровской черной дыры эффект может составить около одной угловой минуты для излучения с частотой $4 \cdot 10^8$ Гц. Подчеркнем, что предсказанный эффект 89 и эффект, согласно [422, 423], обнаруженный наблюдениями за пульсарами, относятся к различным условиям распространения лучей.

10.7. Фокусировка в гравитационной сферически-симметричной линзе. Пусть на гравитирующую массу из бесконечности падает параллельный пучок лучей света. Из-за эйнштейнова эффекта отклонения (эффект 23) после прохождения области сильного гравитационного поля лучи могут сфокусироваться на конечном расстоянии от источника поля (по крайней мере, те из них, которые имеют равные прицельные параметры). На этот эффект впервые указал Кроммелин [426], а подробное рассмотрение проведено в работах [427—429]. Фокусировка лучей происходит позади массы на расстоянии (рис. 11) [430, 431]

$$(\text{эф. 90}) \quad F = R^2/8m \quad (10.8)$$

от нее. Здесь R — радиус массы, лучи касаются ее поверхности. Для Солнца это фокусное расстояние превышает размеры солнечной системы [430]. Из-за большого фокусного расстояния эффект гравитационной линзы может наблюдаться лишь в том случае, когда линзой служит далекая звезда. Например, в работах [432, 433] обсуждается возможность наблюдения эффекта 90 в 1988 г., когда звезда 40 Eri-A будет закрывать более далекую звезду. На новую возможность, состоящую в наблюдении эффекта 90 для радиоисточников (квазаров), было недавно указано [434]. На основании анализа 208 квазаров утверждается, что квазары 3С 268.4 и 3С 286 являются подходящими кандидатами для проверки эффекта гравитационной линзы.

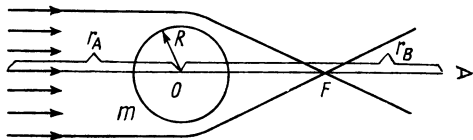


Рис. 11

10.8. Гравитационный эффект усиления яркости. Если бы наблюдатель мог пройти через фокус, он зафиксировал бы яркую вспышку света. Вспышка, однако, вызывается не только перераспределением потока излучения вследствие фокусировки (как в случае негравитационных линз), но и дополнительным гравитационным эффектом усиления яркости излучателя [417, 430, 431]. Коэффициент усиления, согласно [417] (рис. 11), равен

$$(эф. 91) \quad \text{Amp} = \frac{I}{I_0} = \frac{1}{1 - E^2}, \quad E \equiv \frac{4mr_A r_B}{b^2 (r_A + r_B)}, \quad (10.9)$$

где I_0 — интенсивность падающей волны. В поле Шварцшильда усиление может составить до $10 m\lambda^{-1}$, где λ — длина волны [430]. В силу сферической симметрии поля Шварцшильда усиление будет максимальным, если источник расположен «точно позади» гравитационной линзы [430, 431].

10.9. Эффекты изображений в гравитационной линзе. Сначала остановимся на эффекте «собственной гравитационной линзы» [352, 435]. Гравитирующая масса отклоняет не только проходящие мимо нее лучи света, но и ею испускаемые. Это ведет к тому, что лучи, испущенные частью звезды, «невидимой» (согласно НТТ) для предполагаемого наблюдателя, расположенного в тени за линзой в сильном поле тяготения из-за отклонения в гравитационном поле излучателя, могут быть им зафиксированы (рис. 12). Видимое изображение излучателя с учетом этого эффекта оказывается большим, чем в отсутствие гравитационного отклонения лучей света. Если радиус звезды приближается к гравитационному, то ее диск может увеличиться вследствие эффекта собственной гравитационной линзы приблизительно в 2,59 раза [435].

В другой ситуации, когда наблюдатель и источник расположены на одной линии, проходящей через центр гравитирующей массы, из-за линзоподобного действия поля Шварцшильда наблюдатель зафиксирует вокруг массы светящийся круг с угловым радиусом [1, II, с. 436]

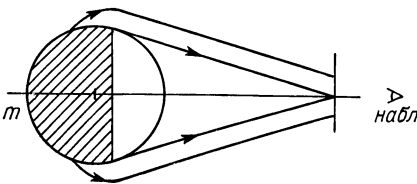


Рис. 12

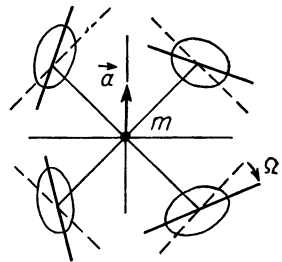


Рис. 13

$$(\text{эф. 92}) \quad \Phi = 2 \sqrt{\frac{\theta R}{r_1}}, \quad \theta = \frac{4m}{b}, \quad (10.10)$$

где R — радиус линзы, r_1 — расстояние от наблюдателя до линзы. Если же наблюдатель сместится в сторону от своего прежнего положения, то вместо круга будут наблюдаться две светящиеся точки на некотором расстоянии от истинного положения излучателя, а также ряд других изображений, подробно описанных в работах [436, 437].

10.10. Усиление и фокусировка во вращающейся гравитационной линзе. Разница между коэффициентами усиления в поле Керра и Шварцшильда, выделяющая влияние линейных по параметру a членов, равна [417]

$$(\text{эф. 93}) \quad \Delta \text{Amp} = - \frac{4aE^2}{b(1 - E^2)} \quad (10.11)$$

(обозначения те же, что и в уравнении (10.9)). В этом эффекте также проявляется асимметрия: для лучей, распространяющихся в прямом по отношению к направлению вращения массы направлении, коэффициент усиления больше, чем для обратного движения с тем же прицельным параметром. Как было установлено в п. 4.7, эти лучи отклоняются на меньший угол. Поэтому при расположении источника излучения, линзы и наблюдателя на одной прямой фокус оказывается смещенным и лежит вне этой линии.

10.11. Поворот изображений в случае вращающейся гравитационной линзы. Специфика поля тяготения вращающейся массы проявляется и в эффектах изображений, получаемых при отклонении лучей полем Керра. В шварцшильдовой линзе для смещенного источника света сфокусированный пучок лучей имеет эллиптическое сечение, большая полуось которого перпендикулярна к линии, соединяющей на звездной сфере центр линзы и изображение (см. штриховые линии на рис. 13, взятом из работы [417]). Вследствие эффекта 68 — зависимости угла отклонения света в поле Керра от ориентации плоскости траектории (по отношению к вектору углового момента источника поля) — эллиптические сечения поворачиваются относительно их прежних положений в поле Шварцшильда. При этом направление поворота зависит от расположения фокуса относительно оси вращения источника поля Керра. Максимальное значение угла поворота равно

$$(\text{эф. 94}) \quad \Phi_{\text{max}} = alb. \quad (10.12)$$

Этот эффект позволяет отличить вращающуюся гравитационную линзу от шварцшильдовой или аксиально-симметричной, создаваемой полем Вейля—Леви-Чивита (см. [437]). Для

$b=200 m$, $a=0,2 m$ значение (10.13) достигает $0,06^\circ$ согласно оценкам [417].

10.12. Фокусировка электромагнитной волны в поле волны гравитационной. Если на совокупность частиц или на электромагнитную волну падает плоская гравитационная волна, то разные частицы или разные участки волновой поверхности приобретают разные относительные ускорения. Поэтому при выходе частиц или электромагнитной волны из области фронта гравитационной волны они приобретают относительные скорости. С точки зрения наблюдателя в поле гравитационной волны или за задним ее фронтом электромагнитная волновая поверхность становится выпукло-вогнутой, а в определенный момент «схлопывается в линию» [438, 439], т. е. фокусируется (случай пробной электромагнитной волны). Как показано [440] (случай сильной электромагнитной волны), на поверхности

$$(эф. 95) \quad \cos^2 Av = B^2 u^2. \quad (10.13)$$

Здесь u и v — запаздывающая и опережающая фазы, а величины A и B определяются характеристиками гравитационной и электромагнитной волн [440]. Уравнение (10.13) получено для конкретных видов волн: « δ -образная» ГВ сталкивается с « θ -образной» электромагнитной волной. Детальнее фокусирующий эффект ГВ рассмотрен в работе [441].

10.13. Гравитационно-электромагнитный резонанс. При некоторых частотных и фазовых соотношениях влияние гравитационной волны на электромагнитную может приобрести резонансный характер. В частности, для случая нормального падения плоской монохроматической гравитационной волны (поляризованной по кругу) на кольцевой резонатор получено соотношение [442]

$$(эф. 96) \quad \Delta\omega = -2\omega t \sqrt{\frac{2\pi GI}{c^3}} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \sin(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (10.14)$$

где I — поток гравитационной энергии. Максимальное значение $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi GI}{c^3}} \omega t. \quad (10.15)$$

Поскольку амплитуда растет со временем, имеет место гравитационно-электромагнитный резонанс (более подробное обсуждение этого эффекта содержится в работах [443—445], где рассматриваются и возможные его приложения для регистрации гравитационного излучения)*).

*). Обнаруженные четырехлетними наблюдениями изменения элементов орбиты двойной звезды интерпретируются как следствия испускания ею ГВ («Nature», 1979, 277, 437).

10.14. Флуктуация интенсивности света в поле гравитационной волны (сцинтилляции). Если световой луч проходит через гравитационную волну, то относительное изменение его интенсивности, согласно [281], составит

$$(\text{эф. 97}) \quad \frac{\Delta A_0}{A_0} \approx - \frac{E_0 \xi^2}{2L} \int_0^L u(L-u)[f^1(\alpha_4 t + \xi u)]^2 du, \quad (10.16)$$

где L — расстояние от источника до наблюдателя, $\xi = \alpha_\mu v^\mu = \alpha_4(1 - \cos \theta)$, а θ — угол между направлениями светового луча и направлением распространения ГВ. Детальный анализ из [446] показал, что наблюдение флуктуаций интенсивности весьма затруднено из-за их локализованного характера.

10.15. Добавочное торможение заряда, причиненное «хвостом» электромагнитного излучения. Поскольку неоднородное гравитационное поле можно рассматривать как среду с переменным показателем преломления, в нем также возникает эффект «хвоста» электромагнитного излучения. Он является результатом «отражения на кривизне». С переходом к плоскому пространству — времени «хвост» исчезает. Вопросы общей теории электромагнитного хвоста в гравитационном поле исследовались рядом авторов [447—459] (см. библиографию по этому вопросу в работах [458, 459]). Исследование в ОТО хвостов встречается с большими математическими трудностями, требующими развития соответствующих методов [450]. К их расчетам, как видно из упомянутых работ, успешно привлекаются изотропные тетрады (см. далее п. 14.4).

Одним из проявлений хвоста является эффект торможения им электрического заряда, находящегося в гравитационном поле. Так, согласно первой из работ [447], уравнение негеодезического движения точечного заряда на фоне искривленного пространства—времени имеет вид

$$(\text{эф. 98}) \quad \mu \left(\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu \dot{x}^\lambda \dot{x}^\sigma \right) = f_1(F_{\mu\nu}^{in}) + f_2(x^\lambda, \ddot{x}^\mu) + \\ + q^2 \dot{x}^\lambda \int_{-\infty}^r f_{\lambda\sigma}^\mu \dot{x}^\sigma dx', \quad (10.17)$$

где первый член справа обусловлен внешним электромагнитным полем, второй — классическое торможение, а третий — добавочное торможение, вызванное хвостом излучения ($F_{\mu\nu}^{in}$ — бивектор электромагнитного поля, $f_{\lambda\sigma}^\mu$ определяется фоновой метрикой). В частности, во второй из работ [447] вычисляется член, обусловленный хвостом, для заряженной частицы на

эллиптической орбите в поле Шварцшильда. Часть этого члена, не имеющая аналога в СТО, вызывает добавочное смещение перицентра $\Delta\chi/2\pi = \tilde{\kappa}/m\mu$, которое ослабляет эффект 8 (см. эффект 15).

10.16. Эффект гравитационного зеркала в поле Шварцшильда. В сильном гравитационном поле луч света может отклоняться не только на малый угол (эффект 23), но и на любой угол, совершив определенное число витков вокруг гравитирующей массы [141]. При целом числе витков луч воз-

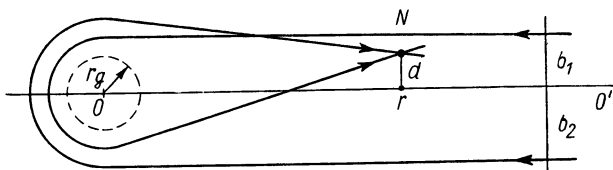


Рис. 14

вращается назад и может быть зарегистрирован (рис. 14). Этот эффект «гравитационного зеркала» проявляется в том, что в достаточной близости к оси симметрии OO' вокруг черной дыры должен наблюдаться ореол из «отраженного» света далекой звезды, что аналогично известному в теории столкновений явлению [460, 461], возникающему при наличии спиральных траекторий. Интенсивность I «гравитационного эха» в зависимости от расстояния r от черной дыры и удаления d от оси OO' представима в виде [462]

$$(\text{эф. 99}) \quad I \approx 2A \frac{b_0^2}{rd} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{A} e^{-\pi n} + A e^{-2\pi n} \right) e^{-2\pi n} \right\} I_0, \quad (10.18)$$

где I_0 — интенсивность падающего сигнала (например, света далекой звезды), n — число витков вокруг массы m , $b_0 = 3\sqrt{3}m$, $A \approx 15,6$. Учет дифракции показывает, что (10.18) теряет силу при $d < d_0 = \lambda r b_0^{-1}$, где λ — длина волны. Внутри этой области и на оси OO' [459]

$$I = 2A \frac{b_0^3}{\lambda r^2} \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{A} e^{-\pi n} + A e^{-2\pi n} \right) e^{-2\pi n}. \quad (10.19)$$

При определенных значениях b_0 , λ и r интенсивность возвратившегося эха может даже превзойти величину I_0 сигнала,

упавшего на массу m . Это может иметь место для массивных коллапсаров. Так, если со стороны Солнца к черной дыре с массой $m = 3 \cdot 10^{-8} m_{\odot}$, находящейся на расстоянии $r \approx 10^4$ пс от него, приходит свет с $\lambda = 10^{-4}$ см, то интенсивность эха, вернувшегося к Земле (точка N на рис. 14), вследствие эффекта 99 составит $I \approx 10 I_0$, как следует из формулы (10.19). В работе [462] обсуждается также возможность реализации эксперимента по проверке эффекта 99 с помощью лазеров.

10.17. Эффект гравитационного расщепления эха в поле Шварцшильда. Выражения (10.18), (10.19) описывают результат наложения лучей, совершивших n витков вокруг гравитирующей массы. Разному же числу витков соответствует разное время нахождения сигнала в окрестности массы m . Если сигнал имеет вид очень короткого плоского импульса, то различные его части, соответствующие различным слагаемым в (10.19), вернуться в точку наблюдения N с некоторой задержкой. Сигнал разделится на серию быстро ослабевающих импульсов, причем каждый последующий будет в 400 раз слабее предыдущего [462]. Как уже отмечалось в п. 7.11, при $b \rightarrow b_0 = 3\sqrt{3} m$ траектория луча света навивается на окружность радиуса $3m$, причем угловая скорость равна $\omega = d\varphi/dx^0 = \frac{2}{3} / \sqrt{3} r_g$. Поэтому, как показано в работе [462], интервал расщепления (время, соответствующее одному витку) равен

$$(\text{эф.100}) \quad (T)_m = \frac{2\pi}{\omega} = 3\sqrt{3} \pi r_g. \quad (10.20)$$

С помощью этого выражения можно было бы по измеренному времени расщепления эха однозначно определить радиус черной дыры. Величина эффекта 100 даже для наименьших из возможных сколлапсировавших звезд с $r_g \approx 6$ км составляет $(T)_m \approx 3 \cdot 10^{-4}$ с, т. е. в принципе доступна измерению. Для наблюдения эффекта «гравитационного расщепления эха» необходим мощный источник однократных или периодических импульсов (например, пульсар), удовлетворяющий условию $\Delta T \ll (T)_m \ll T$, где ΔT — длительность импульса, а T — период источника.

§ 11. ДВА РАЗЯДА ВЕЛИЧИН В ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ ОТО

11.1. Основное уравнение измерения. В этом параграфе обсудим в общих чертах вопрос принципиальной возможности сравнения выражений, приведенных выше для гравитационных эффектов ОТО, с предполагаемыми данными измерений.

Фактически проводимые измерения подчинены требованиям метрологии и принятому ГОСТу. Эти требования на основе соответствующих определений изложены, в частности, в фундаментальной монографии М. Ф. Маликова. Напомним главные из них: «Измерением мы называем познавательный процесс, заключающийся в сравнении путем физического эксперимента данной величины с некоторым ее значением, принятым за единицу сравнения... Если Q — измеряемая величина, U — единица измерения, а q — числовое значение измеряемой величины в принятой единице, то на основании определения имеем

$$(1) \quad Q = qU.$$

Уравнение (1) является основным уравнением измерения» [463, с. 18]. В монографии А. Г. Чертова (в ее предисловии подчеркивается, что в ней используются ГОСТы по метрологической терминологии) также приводится это уравнение (в иных обозначениях): «Значением физической величины называется оценка физической величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц... В общем случае значение X некоторой величины x можно выразить в виде формулы

$$X = \{X\} [X], \quad (11.1)$$

где $\{X\}$ — числовое значение величины, $[X]$ — ее единица» [464, с. 5]. Здесь же вводится определение: «Нахождение значения физической величины опытным путем при помощи специальных технических средств называется измерением».

Для того чтобы теория, в том числе ОТО, могла быть проверена на опыте, она на определенном этапе должна включать в себя понятия измерения, причем не в каком-либо новом, а именно в указанном выше смысле метрологической терминологии. Следовательно, на определенном этапе в аппарат физической теории, а значит, и ОТО должно войти соответственно конкретизованное уравнение измерения и соответственно конкретизованные как образы $[X]$ единиц измерения, так и $\{X\}$ — образы результатов измерения.

В СТО числовые значения, равные единицам, присваиваются лоренцеву базису, векторы которого подчинены требованию, чтобы $e_k \cdot e_n = \eta_{kn} = \text{diag} (-1, 1, 1, 1)$. Величины СТО, отнесенные к этому базису, являются образами результатов измерения $\{X\}$. Поэтому уравнения СТО, записанные в псевдодекартовой системе координат (глобальной), удовлетворяют основным требованиям метрологии и тем самым подготовлены в принципе к сравнению с экспериментальными данными. В силу псевдоевклидова характера геометрии СТО переход к такой системе координат всегда возможен во всем пространстве. Риманов характер геометрии ОТО меняет ситуацию.

11.2. Собственные и несобственные величины в ОТО. Формируя ОТО, Эйнштейн ввел в нее понятие измеряемой величины. На этом подробно остановимся в п. 13.1. Здесь подчеркнем лишь, что он определял ее как инвариант: «Величина, непосредственно измеряемая единичными измерительными стержнями и часами, ... является однозначно определенным инвариантом» [1, I, с. 49]. Имеется в виду инвариантность относительно выбора криволинейных систем координат (глобальное введение псевдодекартовой системы координат в ОТО невозможно). Задание системы координат иногда называют арифметизацией. Используя этот термин и резюмируя ситуацию в ОТО, Фридман писал: «...Мы можем разделить свойства вещей пространства на 2 разряда. Одни будут целиком зависеть от избранной... арифметизации, другие останутся неизменными, как бы мы не арифметизовали пространство. Первые вещи условимся называть несобственными, вторые собственными... только когда мы перейдем к собственным свойствам, только тогда мы будем изучать пространство... вне зависимости от его арифметизации... Из сказанного понятно, насколько важно для нас установление собственных вещей и их свойств в пространстве...» [465, с. 21].

Комментируем сказанное Фридманом на более современном языке. Метрическая формулировка ОТО с ее уравнениями (1.1) и соответствующими уравнениями движения вводит величины, отнесенные к криволинейной системе координат, которые не являются относительно ее выбора инвариантами. Это и есть несобственные величины ОТО. Они не являются образами результатов измерения, не могут быть представителями чисел $\{X\}$, входящих в основное уравнение измерения. В силу локальной справедливости СТО в ОТО возможно отнесение величин и к лоренцеву базису. Такие величины — инварианты, точнее скаляры, относительно выбора систем координат. Это и есть собственные величины ОТО. Они — образы результатов измерения, представители чисел $\{X\}$ из основного уравнения метрологии. Конечно, возможны случаи, когда некоторая несобственная величина при определенных условиях и в некотором приближении может отождествляться с соответствующей собственной величиной.

При рассмотрении гравитационных эффектов ОТО в § 2—10 вводились выражения, их характеризующие. По ходу описания эффектов часто подчеркивалось, что эти выражения содержат собственные величины, не зависящие от выбора координат. Так, в § 2 приводились общековариантные выражения и подчеркивалось, что входящие в них частоты отнесены к собственному времени. Это время отнесено к лоренцеву вектору $e_{(0)}$, чем и обеспечивается его независимость от выбора системы координат. Поэтому собственные частоты и имеют ме-

трологический смысл. Они входят в теорию как однозначно определенные инварианты. При введении в § 5 общего понятия «времени задержки» (общего для частиц с досветовой скоростью и для света) также рассматривались инварианты относительно арифметизации — собственные время и длина пути. Это позволило ввести два варианта задержек: по координатному и по собственному времени. Именно последнее описывает физический эффект задержки. Координатное время задержки — представитель несобственных величин и меняется в зависимости от выбора системы координат. В частности, координатное время задержки может принадлежать стандартной шварцшильдовой системе координат. Такое время для далекого наблюдателя приблизительно совпадает с его собственным временем. Поэтому в случае земного наблюдателя оказалось возможным приближенно сопоставлять данные опыта Шапиро с выражением эффекта задержки по шварцшильдову координатному времени. Уточнение проверки потребовало перехода к выражению ОТО задержки сигнала по собственному времени наблюдателя.

В выражениях эффектов 72, 72а, 75, 76 также содержатся частоты или периоды по собственному времени. Выражения эффектов 32, 78 (см. также § 24) содержат собственные длины. Эти примеры показывают, что многие предсказания ОТО сформулированы в виде выражений для собственных величин, отнесенных к лоренцеву базису.

11.3. Стандартные координаты Шварцшильда и эффекты добавочных аномалий. В отличие от псевдодекартовых координат СТО координаты ОТО и их разности не являются измеряемыми величинами. В выражении эффектов добавочных аномалий слева входят разности угловых координат, а справа — параметры орбит (орбитальные параметры меняются при изменении системы координат [466]), а также сами координаты. Все это в принципе несобственные величины. Напомним, что выражения, приведенные в § 3, 4, отнесены не к какой-либо, а именно к шварцшильдовой стандартной, также шварцшильдовоподобным системам координат. Приведем ряд замечаний по поводу таких координат.

Эйнштейн, вводя эти координаты, называл их полярными [1, I, с. 443]. Этому замечанию следуют и во многих других публикациях. Так, после записи траектории пробного тела в стандартных координатах ОТО в обзоре [6, с. 227] добавляется: «... r и φ — обычные полярные координаты». Многих авторов беспокоил вопрос о возможности отождествления некоторых гауссовых координат ОТО с евклидовыми и в результате с собственными величинами, и они писали уточняющие и предостерегающие замечания. Так, Дарвин писал: «...Предположим теперь, что движение планеты наблюдается далеким на-

блюдателем, находящимся где-то на линии полюса эклиптики... Некоторый астроном в этой обсерватории и астроном на планете могут различаться своими взглядами на t и r , но они согласятся относительно угла φ » [177].

В связи с этим при использовании стандартных координат в метрике Шварцшильда говорится [23, с. 384]: «Пространственная метрика определяется выражением для элемента пространственного расстояния $dl^2 = dr^2(1 - r_g/r)^{-1} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)$. Геометрический смысл координаты φ определяется тем, что в <этой> метрике длина окружности с центром в центре поля равна $2\pi r$ ».

Для круговой орбиты в поле Шварцшильда закон Кеплера в точности выполняется. По этому поводу Эддингтон пишет: «Этот вывод не имеет никакого экспериментального значения, представляя собой просто свойство принятого нами частного определения r . Существуют несколько иные координатные системы, которые с таким же правом могут считаться соответствующими полярными координатами в плоском пространстве — времени, для которых 3-й закон Кеплера уже не будет точным. Мы должны остерегаться выводов последнего рода, которые могли бы представлять интерес только в том случае, если бы радиус-вектор являлся не условной координатой, а непосредственно измеряемой величиной. Движение перигелия относится к другой категории явлений» [217, с. 118].

Получив выражение для угла смещения перигелия, Г. Мак-Витти замечает: «Для применения этих результатов к солнечной системе необходимо прежде всего отождествить координаты (t, r, θ, φ) с координатами, измеряемыми астрономами» [55, с. 138]. Напомнив метод измерения расстояний в солнечной системе, он обосновывает возможность отождествления найденного таким образом гелиоцентрического расстояния с величиной r пространства — времени Шварцшильда подсчетом разности r между двумя сферами. Это приводит его к выводу: «...Отождествление r с гелиоцентрическими расстояниями, вычисленными астрономами на основе евклидовой геометрии, дает ошибку, не превышающую одной восьмимиллионной, что намного меньше ошибок в самих расстояниях. Подобно этому приближению евклидов характер геометрии наводит на мысль, что φ можно отождествить с углом между направлениями с Солнца на планету и на точку весеннего равноденствия... Это чисто эмпирическое определение координат (t, r, θ, φ) , предназначенное для анализа конкретной физической ситуации и возможное только благодаря астрономической практике. Оно иллюстрирует высказанное в § 4.2 положение относительно апостериорного отождествления координат...» [55, с. 139].

А. З. Петров делает вывод [467, с. 5]: «Система координат,

для которой записан метрический тензор... в теории гравитации Эйнштейна идентифицируется с полярной системой астрономических координат. В этом утверждении есть нечто апостериорное, но на нем зиждется физическая интерпретация обоих эффектов в ОТО, и поэтому мы его также принимаем». Сказанное позволяет сделать вывод, что приближенно при больших значениях координаты r в стандартной системе координат (в поле Шварцшильда) ее часто отождествляют с радиальной астрономической координатой (вычисляемой на основе угловых измерений по евклидовой геометрии), входящие вместе с ней угловые координаты — с астрономическими угловыми координатами. Учет дефекта радиальной координаты (см. эффект 80 и приведенное выше замечание Г. Мак-Витти) при этих условиях дает поправки ОТО высших порядков малости. Аналогичное можно сказать и о параметрах орбит, отнесенных к шварцшильдовой системе координат. Когда решение уравнений движения ищется в квазиклассическом виде (3.1), предполагается, что p и e — параметры ньютоновой орбиты в НТТ, определенные в евклидовой геометрии. По поводу прицельного параметра квазигиперболических орбит в работе [55, с. 171] сказано: «Здесь b — расстояние... прицельный параметр; идеализация в виде плоского пространства».

Таким образом, не в результате строгого введения собственных величин, но вследствие указанного приближенного отождествления радиальной координаты с астрономической и специального выбора угловой координаты выражениям для добавочных аномалий придают согласие с требованиями метрологии.

Однако стандартная шварцшильдова система координат не всегда рассматривается как наиболее подходящая. В частности, она трактуется как «неподходящая» и отмечается, что «...физики, астрономы и специалисты по небесной механике при анализе Солнечной системы обычно используют не «шварцшильдовские», а «изотропные» координаты... В релятивистских астрономических таблицах, составленных лабораторией реактивных двигателей Калифорнийского технологического института, ...которые широко используются во всем мире, применяются изотропные координаты» [19, т. 3, с. 345]. В монографии [56] отмечается, однако, что, согласно методу Инфельда и Плебаньского, «наиболее объективными» являются координаты Пенлеве.

В приведенных выше замечаниях из множества координатных систем выбирают такие, которые «наиболее соответствуют» астрономическим наблюдениям. Хотя в отдельных случаях это соответствие не исключено, но отбор предпочтительных координатных систем диссонирует с принципом общей ковари-

антности, согласно которому все координатные системы равноправны*).

11.4. Лоренцев базис и принцип Бора. Под соответствующим влиянием дискуссии с Эйнштейном о теоретико-познавательных проблемах атомной физики Н. Бор сформулировал следующее общее положение, известное в литературе под названием «принцип Бора»: «Как бы далеко не выходили явления за рамки классического физического объяснения, все опытные данные должны описываться при помощи классических понятий» [468]. Комментируя этот принцип применительно к ОТО, А. З. Петров писал: «Если допустить «римановость» физического пространства — времени, то принцип Бора означает, что теория должна стать такой теорией, которая локально в некоторой лабораторной системе отсчета (репер специальной теории относительности) может быть сопоставлена с терминологией, понятиями и информацией об экспериментах, которыми пользуется экспериментатор» [469, с. 66]. Там же говорится: «Классические понятия современного эксперимента — специальная теория относительности. Это обозначает, что результат всякого физического измерения прежде, чем представить в качестве готовой информации, экспериментатор обязан обработать в рамках понятий СТО...» Для того чтобы экспериментатор мог справиться с этой задачей, сначала теоретик должен обработать уравнения ОТО так, чтобы величины, подлежащие измерению, были отнесены к лоренцеву базису (реперу). Это означает, что, согласно принципу Бора и приведенному его комментарию, лоренцев базис должен играть конструктивную роль в математическом аппарате ОТО. Сейчас имеются представления (формулировки) ОТО, в которых лоренцеву базису (всем его векторам сразу или лишь некоторым) такая роль отведена. Созданием этих специальных формулировок достигнуто в общем виде конструктивное подчинение ОТО принципу Бора.

*) Исходя из этой позиции, В. А. Брумберг развивает подход, согласно которому построение непротиворечивой релятивистской теории движения небесных тел должно производиться вычислением измеряемых величин (с помощью уравнений движения света) в той же координатной системе, которая была использована для вывода динамических эффектов на основе уравнений движения тел. В процессе такой процедуры координатно-зависимые члены должны исчезать (см.: Труды 81 Симпозиума МАС. Токио, 1978; Современные проблемы ОТО (юбилейный сб. научных трудов ИФ АН БССР). Минск, 1979, с. 6).

ТЕТРАДНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНОВОЙ ОТО

То, что обозначает слово даль, чувственно представимо лишь в очень ограниченных размерах — в пределах зрительного кругозора человека. Все же, лежащее за этим пределом, будучи реальным, доступно лишь мысли и получает определенный облик лишь в условном одеянии меры и числа.

И. М. СЕЧЕНОВ

ВВЕДЕНИЕ

Созданию эйнштейновой ОТО предшествовали построение Ламе теории криволинейных координатных систем и ее применение в трехмерном случае для специальной формулировки ряда уравнений классической физики (формулировки в «физических компонентах»). Эйнштейнова ОТО использует криволинейные координатные системы и требует локальной справедливости СТО. Эйнштейн предположил, что глобально метрический тензор СТО при наличии гравитационного поля следует заменить метрическим тензором, отнесенным к криволинейной системе координат, и что в этом случае он играет двойную роль: продолжает описывать характер криволинейной системы координат, совмещая это с ролью полевой функции (метрические гравитационные потенциалы). Эйнштейн подчинил метрические потенциалы $g_{\mu\nu}$ своим уравнениям тяготения, построенным на базе римановой геометрии, заменив уравнение Пуассона. Такая формулировка ОТО получила впоследствии название метрической.

Обсуждая физическую сторону ОТО, Эйнштейн, опираясь на требование локальной справедливости СТО, ввел понятие «естественно измеряемых величин» и, сохранив метрический тензор СТО локально, записал соотношения, связывающие элементы аппарата СТО и ОТО: связь в бесконечно малой области между координатами СТО и ОТО и связь $g_{\mu\nu}$ с метрическим тензором СТО $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (см. детальнее п. 13.1). Этим Эйнштейн фактически произвел обобщение клю-

чевых соотношений теории Ламе, заменив декартов базис (триаду)*) лоренцевым базисом (тетрадой)**). Дальнейшее развитие этих обобщений привело к расширению аппарата метрической формулировки ОТО, к тетрадному представлению ОТО в лоренцевом базисе. Это представление учитывает полностью в своем аппарате требование локальной справедливости СТО.

СТО допускает общековариантную формулировку в любых координатных системах, вводимых в плоском псевдоевклидовом пространстве Минковского: 1) псевдодекартовых ортогональных (с неизотропными координатными линиями), 2) координатных системах с изотропными (прямыми) координатными линиями, 3) в криволинейных координатных системах.

Эйнштейнова ОТО ограничивает справедливость СТО в присутствии гравитационного поля бесконечно малой областью. Поэтому из СТО в ОТО могут перейти два первых вида координат СТО — псевдодекартовы ортогональные и изотропные, в первом случае вместе с лоренцевой тетрадой единичных векторов, во втором — тетрадой изотропных (нулевых, световых) векторов (естественно возможен и промежуточный случай). Таким образом, метрический тензор СТО в общем случае может быть образован как лоренцевой, так и нулевой тетрадой. Включение общего случая тетрады СТО в аппарат ОТО приводит к созданию общего тетрадного аппарата ОТО. Дальнейший выбор тетрады порождает разветвление — представление ОТО в лоренцевых тетрадах (единичных) и представление в нулевых тетрадах. Они различаются в дальнейшем развитии аппарата и областями применения. При такой общей исходной позиции контакт с триадным методом Ламе обнаруживается после разветвления — с ветвью общего тетрадного представления ОТО, использующей единичную, лоренцеву тетраду. Так, например, в задаче Шварцшильда в стандартных координатах при отождествлении r , θ , φ (см. п. 11.2) с астрономическими координатами обнаруживается, что $\sqrt{g_{22}}$, $\sqrt{g_{33}}$ являются классическими коэффициентами Ламе.

Знакомство с тетрадным представлением ОТО можно начать с общего случая. Это сразу знакомит с его аппаратом в целом. Можно сначала, следуя Эйнштейну, ограничиться единичными, лоренцевыми тетрадами. Это быстрее приводит к введению в ОТО измеряемых величин.

В данной, третьей, главе монографии пойдем вторым путем. Начнем знакомство с тетрадным представлением ОТО с предварительного напоминания в § 12 понятий, аппарата, примеров применения триадного метода Ламе, позволившего со-

*) τρίάς(τριάδος) — тройка.

**) τετράς(τετράδος) — четверка.

читать функциональную зависимость величин от криволинейных координат с отнесением их трансформационных размерностей к локальным декартовым координатным системам. Опираясь на метод Ламе, в § 13 ограничим изложение представлением ОТО в единичных лоренцевых тетрадах и уже после этого в § 14 выходим за его рамки.

Математический язык тетрадного представления ОТО сложнее языка метрической формулировки. В него входят не только аффинный репер, но и лоренцев базис; не только координатные, но и локальные лоренцевы преобразования и их подгруппы; не только координатные, но и калибровочные условия; не только метрический тензор, но и обобщенные коэффициенты Ламе; не только криволинейные, но и физические компоненты величин, отнесенные к лоренцеву базису. В результате такого усложнения математического аппарата многие идеи и понятия, эскизно введенные Эйнштейном, становятся яснее и конструктивнее, превращаясь в полноценные «рабочие» понятия. В связи с этим уместно привести следующее замечание Х. П. Кереса, сделанное им при обсуждении некоторых вопросов физической трактовки ОТО: «Альберту Эйнштейну как физику была присуща редкостная интуиция. Его идеи коснулись самых фундаментальных основ физической картины мира. Но его математический язык был относительно прост. Современная математическая форма ОТО представляет собой в значительной степени заслугу продолжателей и комментаторов, которые и подправили кое-что в теории и ее в той или иной мере изменили. Поэтому кажется нелишним время от времени возобновлять в памяти первоначальные идеи Эйнштейна» [470, с. 8]. Это замечание в равной мере относится ко всем представлениям ОТО, изложенным в III—V главах монографии.

§ 12. ТРИАДНЫЙ МЕТОД ЛАМЕ

12.1. Локальная декартова система. Физические компоненты. Многие уравнения физики записаны в трехмерной векторной форме, например уравнения Максвелла, связывающие векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} . При решении частных задач целесообразно отнести такие уравнения к определенной координатной системе. Для того чтобы отнести векторные уравнения к декартовой системе, производится разложение векторов по единичным векторам (ортам), направленным вдоль координатных линий. Например*):

*) В уравнениях (12.1) и (12.3) индексы декартовой триады для единообразия с обозначениями в соответствующих выдержках, приведенных в тексте, не помещаются в скобки. Далее, начиная с формулы (12.13), индексы декартовой триады берутся в скобки.

$$\mathbf{E} = iE_x + jE_y + kE_z \equiv E_x \mathbf{e}_1 + E_y \mathbf{e}_2 + E_z \mathbf{e}_3. \quad (12.1)$$

Для иллюстрации ограничимся гармонически изменяющимся электромагнитным полем (см. например, [471, с. 18; 472, с. 14; 473, с. 24]). Тогда

$$\begin{aligned} j\epsilon \frac{\omega}{c} E_x &= \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y}, & j \frac{\omega}{c} H_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ j\epsilon \frac{\omega}{c} E_y &= \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}, & j \frac{\omega}{c} H_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ j\epsilon \frac{\omega}{c} E_z &= \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}, & j \frac{\omega}{c} H_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Поскольку векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичны, их можно рассматривать как эталоны, а (12.1)—как частный случай основного уравнения метрологии. Поэтому декартовы компоненты E_x, E_y, E_z —образы в теории измеряемых величин.

Однако во многих задачах выгодно задавать положение точки не тремя декартовыми координатами, а тремя другими числами, более отвечающими рассматриваемой частной задаче криволинейными координатами*). В связи с этим говорится: «Введем ортогональные криволинейные координаты $q_1, q_2, q_3...$ и будем искать такие скалярные функции этих координат, через которые можно было бы выразить все криволинейные составляющие векторов \mathbf{E} и $\mathbf{H}...$ » [473, с. 22]. Для этого сохраняется введение декартовой триады, которая в случае ортогональных криволинейных систем направляется по касательным к их координатным линиям. В работе [474, с. 197] подчеркивается: «Коренное отличие криволинейных координат от обычных прямоугольных заключается в том, что в криволинейных координатах векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3...$ зависят от того, для какой точки M они определяются». Поэтому вместо (12.1) имеем

$$\mathbf{E} = E_u (\mathbf{e}_1)_M + E_v (\mathbf{e}_2)_M + E_w (\mathbf{e}_3)_M. \quad (12.3)$$

(В дальнейшем индекс M для простоты писать не будем.)

Введение поля декартовой триады позволяет найти такие искомые скалярные функции криволинейных координат, например E_u, E_v, E_w , которые удовлетворяют основному уравнению метрологии. Для этих функций вводится название «криволинейные составляющие вектора... или проекции вектора на оси криволинейных координат» [474, с. 198], или просто «со-

*) Используются многие варианты их обозначений: u, v, w — [471], x_1, x_2, x_3 — [26, 472], q_1, q_2, q_3 — [473—475], α, β, γ — [476], ξ, η, ζ — [477] и т. д.

ставляющие» [472, с. 14] *). В работе [476, с. 394] отмечается: «...В классических обозначениях берут проекции векторов на касательные к координатным линиям. Мы будем обозначать эти проекции через $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$... <Здесь α, β, γ — криволинейные координаты>... мы назовем эти величины физическими составляющими...» (с. 395).

Поскольку $\partial \mathbf{r} / \partial q_b$ имеет направление касательной к координатной линии q_b , то**)

$$\partial \mathbf{r} / \partial q_b = H_b \mathbf{e}_b,$$

где H_b — длина вектора $\partial \mathbf{r} / \partial q_b$. Поэтому

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = \\ &= H_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + H_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + H_3 dq_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (12.4)$$

«Физическими составляющими» вектора $d\mathbf{r}$, отнесенными к единичной, декартовой триаде, являются

$$ds_b = H_b dq_b \quad (12.5)$$

или

$$ds_\xi = h_\xi d\xi, \quad ds_\eta = h_\eta d\eta, \quad ds_\zeta = h_\zeta d\zeta.$$

На этих составляющих может быть построен элемент «физического объема»

$$dV \equiv ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (12.6)$$

Строя с помощью (12.5) квадратичные формы и записывая их в разных употребительных обозначениях, получаем

$$\begin{aligned} ds^2 &= ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 = \\ &= d\alpha^2/h_1^2 + d\beta^2/h_2^2 + d\gamma^2/h_3^2 \equiv U^2 du^2 + V^2 dv^2 + W^2 dw^2 = \\ &= h_\xi^2 d\xi^2 + h_\eta^2 d\eta^2 + h_\zeta^2 d\zeta^2, \end{aligned} \quad (12.7)$$

где «...коэффициенты h_ξ, h_η, h_ζ <соответственно и в других обозначениях> в общем случае изменяются от точки к точке; они называются коэффициентами Ламе» [477, с. 88; 478—481].

*) Первые из названий могут привести к недоразумениям, так как термин «криволинейные составляющие» теперь чаще употребляется в другом смысле (для тензорных, аффинных компонент). Для проекций на направления декартовой триады будем далее придерживаться названия «физические составляющие, компоненты» [476].

**) В этом соотношении и ему подобных, поскольку векторы триады касательны к координатным линиям, суммирование по одинаковым дважды встречающимся индексам не предполагается.

Приводится и такая мотивировка введения физических составляющих (компонент): «Векторам и тензорам, встречающимся в физических задачах, обычно приписаны физические размерности. Например, скорость имеет размерность длины, деленной на время. Компоненты поля скоростей относительно данной системы координат не обязаны иметь ту же самую размерность, поскольку размерности различных членов естественного базиса <координатного> обычно не являются все одинаковыми. Например, в цилиндрических координатах вектор e^r безразмерен, вектор e_θ имеет размерность длины, а вектор e^θ — размерность, обратную размерности длины. В физических задачах часто бывает желательно иметь возможность интерпретировать каждую компоненту вектора в тех же терминах, что и сам вектор, и по этой причине вводят физические компоненты» [482, с. 518].

Таким образом, поле декартовой триады $(e_i)_M$ позволяет ввести «физические составляющие (компоненты)» соответственно основному уравнению метрологии. Локальная декартова система (ds_i) связана с криволинейной, согласно (12.5), посредством коэффициентов Ламе.

12.2. Переход в векторных уравнениях к физическим компонентам. В векторные уравнения входят дифференциальные операторы, в частности выражения $\text{rot}\mathbf{A}$, $\text{div}\mathbf{A}$. Векторный анализ, используя разложения типа (12.3) и (12.5), позволяет получить их проекции на координатные линии (например, [483, с. 200, 201]). В частности, «...это дает для компонент $\text{rot}\mathbf{A}$ в координатах u, v, w выражения:

$$\begin{aligned}(\text{rot } \mathbf{A})_u &= \frac{1}{VW} \{ \partial_v (A_w W) - \partial_w (A_v V) \}, \quad \partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_v &= \frac{1}{WU} \{ \partial_w (A_u U) - \partial_u (A_w W) \}, \\(\text{rot } \mathbf{A})_w &= \frac{1}{UV} \{ \partial_u (A_v V) - \partial_v (A_u U) \}.\end{aligned}\tag{12.8}$$

Следовательно, с переходом к произвольной, но ортогональной системе координат вместо (12.2) имеем [471, с. 20]:

$$\begin{aligned}j\varepsilon \frac{\omega}{c} E_u &= \frac{1}{VW} \{ \partial_w (H_v V) - \partial_v (H_w W) \}, \\j\varepsilon \frac{\omega}{c} E_v &= \frac{1}{WU} \{ \partial_u (H_w W) - \partial_w (H_u U) \}, \\j\varepsilon \frac{\omega}{c} E_w &= \frac{1}{UV} \{ \partial_v (H_u U) - \partial_u (H_v V) \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j \frac{\omega}{c} H_u &= \frac{1}{VW} \{ \partial_v (E_w W) - \partial_w (E_v V) \}, \\
 j \frac{\omega}{c} H_v &= \frac{1}{WU} \{ \partial_w (E_u U) - \partial_u (E_w W) \}, \\
 j \frac{\omega}{c} H_w &= \frac{1}{UV} \{ \partial_u (E_v V) - \partial_v (E_u U) \}.
 \end{aligned} \tag{12.9}$$

С переходом к определенной системе координат требуется разыскание для нее коэффициентов Ламе. В силу того что \mathbf{e}_i — единичный вектор, из (12.4) получаем

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \tag{12.10}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
 U &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right]^{1/2}, \\
 V &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right]^{1/2}, \\
 W &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^2 \right]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{12.11}$$

В частности, для цилиндрической системы координат

$$H_u \equiv H_r = 1, \quad H_v \equiv H_\varphi = r, \quad H_w \equiv H_z = 1.$$

В этом случае (12.8) принимает вид

$$\begin{aligned}
 -j \varepsilon \frac{\omega}{c} r E_r &= \frac{\partial}{\partial \varphi} H_z - \frac{\partial}{\partial z} (r H_\varphi), & j \frac{\omega}{c} r H_r &= \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (r E_\varphi), \\
 -j \frac{\omega}{c} r E_\varphi &= \frac{\partial}{\partial z} H_r - \frac{\partial}{\partial r} H_z, & j \frac{\omega}{c} r H_\varphi &= \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\
 -j \frac{\omega}{c} r E_z &= \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{\partial H_r}{\partial \varphi}, & j \frac{\omega}{c} r H_z &= \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}.
 \end{aligned} \tag{12.12}$$

Таким образом, добавляя к криволинейной системе координат поле локальных декартовых систем, поле декартовой триады, вместо векторных уравнений получаем уравнения, записанные в удобных для данной задачи криволинейных координатах и содержащие «физические составляющие» величин, соответствующие основному уравнению метрологии.

Введение физических составляющих и запись относительно них с помощью коэффициентов Ламе уравнений в криволинейных координатах получили широкое практическое применение, особенно в механике и в прикладных разделах электродинамики для расчета волноводов, резонаторов и т. д. *)

12.3. Переход в тензорных уравнениях к физическим компонентам. При традиционном построении тензорного исчисления величины классифицируют алгебраически по поведению их при преобразованиях координат. Геометрические объекты изменяются посредством того же преобразования, что и дифференциалы координат. В этом преобразовании участвуют производные, вообще говоря, достаточно высокого порядка от новых координат по исходным. Для таких тензорных компонент (составляющих) в дальнейшем при изложении тетрадной формулировки ОТО будем использовать также термины «тензориальные, мировые компоненты». Они не совпадают с введенными выше терминами «физические составляющие». Тензорное исчисление в криволинейных компонентах применялось и для переформулировки теорий в трехмерном евклидовом пространстве [257, 476, 484]. Естественно понадобилось приведение в соответствие указанных двух видов компонент. В частности, оно рассматривается в книге [476]. Здесь тензорные составляющие (компоненты) i -го единичного вектора, касательного к i -й координатной кривой, обозначаются через $\varepsilon^r_{(i)}$. Очевидно,

$$\varepsilon^r_{(1)} = h_1 \delta^r_1, \quad \varepsilon^r_{(2)} = h_2 \delta^r_2, \quad \varepsilon^r_{(3)} = h_3 \delta^r_3, \quad r = 1, 2, 3. \quad (12.13)$$

«Если нам задан вектор A^r <тензорные компоненты, преобразующиеся как дифференциалы криволинейных координат>, то вместо того, чтобы взять A^1, A^2, A^3 в качестве составляющих тензоров, в классических обозначениях <точнее сказать понятиях> берут проекции вектора на касательные к координатным кривым. Мы будем обозначать эти проекции через $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$; имеем

$$A_\alpha = A_r \varepsilon^r_{(1)}, \quad A_\beta = A_r \varepsilon^r_{(2)}, \quad A_\gamma = A_r \varepsilon^r_{(3)}. \quad (12.14)$$

... Мы назовем эти величины физическими составляющими вектора в отличие от тензорных составляющих. Так как $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ являются проекциями A^r на касательные к координатным кривым, то физические составляющие вектора—это просто его со-

*) В известном курсе «Механика сплошных сред» Л. И. Седова при записи уравнений в криволинейных координатах вводится специальный пункт «Физические компоненты векторов и тензоров» (с. 179). Используемые обозначения весьма разнообразны [482, с. 518, 528]: «Физические компоненты обозначаются с помощью соответствующих индексов, помещенных на строке и заключенных в ломаные скобки, например $v\langle r \rangle, v\langle \theta \rangle, v\langle z \rangle$. Аналогичные обозначения используются и для тензоров, например $T\langle r, r \rangle, T\langle r, \theta \rangle$ и т. д.»

ставляющие по осям декартовой системы координат, совпадающие с упомянутыми касательными. Аналогично, если нам задан тензор второго порядка A^{rs} , мы обозначим его физические составляющие через $A_{\alpha\alpha}, A_{\alpha\beta}, A_{\beta\gamma}$ и т. д., где $A_{\alpha\alpha} = A_{r_s} e^{r(1)} e^{s(1)}$, $A_{\beta\gamma} = A_{r_s} e^{r(2)} e^{s(3)}$ и т. д. ... Выражения эти ... являются, очевидно, инвариантами для всех преобразований координат при условии, что $e^{r(1)}, e^{r(2)}, e^{r(3)}$ — три фиксированных вектора ... » [476, с. 394, 395]. Например, для физических составляющих вектора скорости записываются их выражения (с. 396) через криволинейные компоненты и коэффициенты Ламе:

$$v_\alpha = \dot{\alpha}/h_1, \quad v_\beta = \dot{\beta}/h_2, \quad v_\gamma = \dot{\gamma}/h_3, \quad (12.15)$$

где $v^1 = \dot{\alpha}$, $v^2 = \dot{\beta}$, $v^3 = \dot{\gamma}$.

В работе [26] пункт «Векторный анализ в ортогональных координатах» после изложения тензорного анализа с величинами, преобразующимися посредством координатного преобразования для дифференциалов криволинейных координат, начинается замечанием: «Читателю может быть интересно, какое имеет отношение тензорный формализм, изложенный в этой главе, к знакомым формулам для градиента, вихря и дивергенции в классических криволинейных системах». Ответ гласит: «Эти координатные системы характеризуются условием, что g_{ij} диагонально, т. е.

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где h_i — функции координат ... < здесь и в (12.15) одинаково обозначены взаимно обратные коэффициенты Ламе >. То, что обычно называется компонентами вектора \mathbf{V} в элементарных трактовках, не ковариантные компоненты V_i или контравариантные компоненты V^i , а «обычные» компоненты $\bar{V}_i \cdot \bar{V}_i = h_i V^i = h_i^{-1} V_i$ » [26, с. 108, 109].

Далее градиент, вихрь, дивергенция, лапласиан выражаются через h_i . Например [26, с. 109]:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = (h_1 h_2 h_3)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} h_2 h_3 \bar{V}_1 + \frac{\partial}{\partial x^2} h_1 h_3 \bar{V}_2 + \frac{\partial}{\partial x^3} h_1 h_2 \bar{V}_3 \right).$$

Следовательно, к уравнениям относительно физических составляющих (компонент) можно прийти двумя путями: 1) отправляясь, как рассмотрено в предыдущих пунктах, от уравнений в векторной форме и применяя разложения вида (12.3), 2) отправляясь от уравнений в тензорной форме и переходя в них от тензорных компонент к физическим с помощью соотношений, таких, как (12.13) — (12.15). Фрагменты второго пути имеются в книге [476, с. 396].

Приведем несколько замечаний из старой монографии Фредерикса и Фридмана [483, с. 131]: «Рассмотрим, каким образом тензорное исчисление можно применить к вопросу преобразования уравнений величины (к величинам), встречающимся в физике...» Далее говорится: «...Таким образом, проекции наших векторов на оси q не совпадают, вообще говоря, с составляющими в многообразии $M_3^{(q)}$ наших векторов, а отличаются от них множителем, зависящим от коэффициентов Ламе. Во многих физических вопросах, как мы увидим в дальнейшем, эти проекции векторов на оси q_i <физические составляющие> имеют определенное физическое значение; поэтому представляется часто более выгодным вводить в рассмотрение именно эти проекции, а не составляющие векторов в $M_3^{(q)}$ » [484, с. 135]. Иллюстрируем сказанное на следующем простом примере. Пусть имеется цилиндрический волновод с проводящей стенкой. Пусть в некоторой точке стенки E — напряженность электрического поля с компонентами E^1 и E^2 (тензорными) и E_r , E_φ (физическими) в цилиндрической системе координат. Тогда $E_\varphi = rE^2$, где r — второй коэффициент Ламе. Поскольку E_r и E_φ — декартовы проекции в локальной системе, то физическое значение E_r — сила, прижимающая единичный заряд к стенке волновода, E_φ — вызывающая его ток по стенке. В то же время криволинейная компонента не равна этой силе как величине в принципе измеряемой: $E^2 = \frac{E_\varphi}{r} \neq E_\varphi$, т. е.

ток, циркулирующий по стенке волновода (в поперечном его разрезе), вызывается силой, численно равной E_φ , но не E^2 . Поэтому для физической интерпретации выгоднее переходить к компоненте E_φ .

12.4. Подчинение коэффициентов Ламе двум условиям. Условия выбора координатной системы иногда выражаются через коэффициенты Ламе. Так, в книге [473, с. 23], в частности, принимается

$$h_1 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{h_2}{h_3} = 0 \quad (12.16)$$

и подчеркивается, что, хотя эти предположения кажутся весьма специальными, большинство практически применяемых систем координат им удовлетворяет (например, сферическая, обобщенно-цилиндрическая и др.). В монографии [477, с. 25] принимается другое частное условие:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3) = 0. \quad (12.17)$$

Остановимся на двух общих условиях, которым подчиняются коэффициенты Ламе. Первое из них — требование евкли-

довости геометрии. Обычно оно просто подразумевается, а иногда записывается аналитически. Соотношение (12.7) позволяет выразить коэффициенты Ламе через метрический тензор [476, с. 394]:

$$g_{11} = 1/h_1^2, \quad g_{22} = 1/h_2^2, \quad g_{33} = 1/h_3^2, \quad g_{mn} = 0, \quad m \neq n, \quad (12.18)$$

где

$$g_{ii} = H_i^2, \quad H_i = \sqrt{g_{ii}}. \quad (12.19)$$

Следовательно, если метрический тензор задан, то коэффициенты Ламе могут быть найдены с его помощью. Это позволяет выразить через H_i и символы Кристоффеля, и тензор Римана — Кристоффеля. Поскольку в евклидовой геометрии этот тензор равен нулю, в монографии [483, с. 140] подчеркивается: «...Коэффициенты Ламе не могут быть заданы произвольно». Так как в трехмерном евклидовом пространстве тензор Римана — Кристоффеля имеет 6 независимых компонент, то «...таким образом получим 6 соотношений, называемых уравнениями Ламе» (с. 140), и далее эти соотношения, т. е. равные нулю компоненты тензора кривизны, записываются относительно коэффициентов Ламе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_1}{\partial q_2 \partial q_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} &= 0, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial q_3 \partial q_1} - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} &= 0, \quad (12.20) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} = 0.$$

Система (12.20) — первое общее условие, которому подчинены коэффициенты Ламе. Оно слишком обще и громоздко, чтобы использовать приведенные дифференциальные уравнения для разыскания H_i . Поэтому H_i обычно находятся из геометрических соображений при фиксированной криволинейной системе координат с учетом частных проявлений евклидовой геометрии. При этом Ламе принимает второе, обязательное для своей теории условие: декартова триада должна присоединяться касательно (соответственно ортогонально) к координатным линиям. Ограничение ортогональными координатными системами всегда допускает такое условие.

Если для разложения (12.4) ввести более подробную запись (перейдем к обозначениям (12.13)):

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} = \sum_k \varepsilon_i^{(k)} \mathbf{e}_{(k)}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (12.21)$$

то второе условие Ламе можно записать алгебраически в виде уравнений

$$\varepsilon_i^{(k)} = 0 \text{ при } i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

среди которых независимы три:

$$\varepsilon_2^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_3^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_3^{(2)} = 0; \quad \varepsilon_i^{(k)} = 0 \text{ при } i > k. \quad (12.22)$$

Присоединяя (12.22) к системе уравнений

$$g^{rs} = \varepsilon^r_{(k)} \varepsilon^s_{(n)} \delta^{(k)}_{(n)}, \quad r, s = 1, 2, 3, \quad (12.23)$$

приходим к выражениям (12.13).

Таким образом, в более или менее явной форме имеют место два общих условия, накладываемые на коэффициенты Ламе: 1) подчинение евклидовости геометрии, в общем виде оно задается уравнениями Ламе (12.20), 2) подчинение требованию касания, которое может быть записано в виде (12.22)*).

12.5. Дополнение триады до лоренцева базиса. Дополнив декартову триаду временным единичным вектором $\mathbf{e}_{(0)}$, СТО в построении Минковского ввела понятие лоренцева базиса (лоренцевой тетрады, четверки векторов взаимно ортогональных и нормированных на единицу) \mathbf{e}_k . Единичная лоренцева тетрада, когда $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{n'} \equiv \eta_{k'n'} = \text{inv}$, подвержена общему преобразованию Лоренца [485, с. 24]. Она явно вводится при изложении СТО в книге П. К. Рашевского [486, с. 259]. Ее декартовы компоненты в СТО изучаются в монографиях [19, 25, 76, 92, 487] и многих других. Лоренцев базис СТО широко используется для изучения негравитационных взаимодействий элементарных частиц, в частности в монографии [488]. В [1, I, с. 7] при построении динамики СТО Эйнштейн ввел локальные преобразования Лоренца (параметры — компоненты мгновенной скорости). Сначала это выразилось в определении импульса частицы в собственном времени с последующим переходом ко времени лабораторному [489, 490]. ОТО стимулировала общеквариантное построение СТО. Проекции векторов \mathbf{e}_k на координатные линии криволинейных систем, т. е. $h_{\mu k} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_k$ (см. список обозначений), являются обобщенными коэффици-

*) В отличие от условия Ламе в механике сплошных сред допускают, что триада (называемая ранее «директорами») может вращаться независимо от смещения точек материальной среды [479]. В старой монографии братьев Коссера [480] развит математический метод изучения сплошной среды с помощью «жестких директоров». Они ввели понятие «спрятанный триэдр» («скрытый триэдр», «tridère caché») — тройка единичных «жестких директоров». Возникло понятие «континуум Коссера» [481].

ентами Ламе. Обобщение состоит в добавлении к h_α^a коэффициента $h_0^{(0)}$, допущении недиагональных членов матрицы h_μ^k , коэффициенты h_μ^k приобретают относительный характер, поскольку в СТО (3+1)-расщепление относительно. В статье [491] приводится ряд конкретных примеров введения в СТО h_μ^k . В работах [35, 492] тетрады h_μ^k и локальные преобразования Лоренца применяются при рассмотрении электродинамики на вращающемся диске в 4-пространстве Минковского.

В СТО вошла и нулевая (изотропная) тетрада. Еще при рассмотрении в евклидовой геометрии расстояний и углов сначала ограничивались только действительными элементами. Внесение евклидовой метрики в проективную систему, допуская мнимые элементы, внесло новые возможности — появление изотропных или минимальных линий. Ф. Клейн в монографии «Неевклидова геометрия» подчеркивает, что «измерение длин такой прямой невозможно» [493, с. 151]. Приведем выдержку из «Лекций о развитии математики в XIX столетии» (ч. I) Ф. Клейна: «Вследствие этих парадоксальных свойств Ли в начале своей жизненной карьеры (1869/70) называл эти линии не иначе, как «сумасшедшими прямыми». Позже в своих печатных работах он их называл более вежливо минимальными прямыми. Во Франции за ними укрепилось название изотропных прямых (*droites isotropes*), ведущее свое происхождение от того факта, что при любом вращении вокруг нулевой точки остаются неизменными две такие прямые, соединяющие центр вращения с двумя циклическими точками...» [493, с. 181].

Ограничимся приведенными выше краткими сведениями о тетрадах и обобщенных коэффициентах Ламе в СТО. Резюмируя, можно сказать, что лоренцев базис e_k получил в СТО весьма широкое распространение, как и его проекции на глобальную псевдодекартову систему — коэффициенты лоренцева преобразования $L^k'_n$. В СТО вводятся проекции e_k и на криволинейную систему координат, т. е. на локальную псевдодекартову. Это ведет к обобщению трехмерных коэффициентов Ламе. Находит применение и нулевая тетрада.

12.6. Комментарии к обозначениям. Как видно из предыдущих пунктов § 12, для коэффициентов Ламе во многих публикациях вводятся свои обозначения, но наиболее употребительна коренная буква h (для обратных коэффициентов H). Аналогичная ситуация имеет место в ОТО, где для компонент лоренцева базиса (из § 13 станет ясно, что в ОТО они еще более обобщенные, чем в СТО) также привлекаются разнообразные обозначения. К ним следует предъявить повышенные требования, поскольку они связаны с двумя группами преобразований (см. п. 13.4 и 13.7) и широко используются при (3+1)-расщеплении. Наиболее употребительными являются следующие обозначения:

h_μ^α — Эйнштейн [1, II, с. 229, 289], Вейль («Z. Phys.», 56, 330, 1929), Фок [498], Белинфанте [496], Родичев [531, с. 32, 63] и др.; греческий алфавит закрепляется за группой общих координатных преобразований, латинский — за локальной группой Лоренца.

$\lambda_{h_1}^i$ — Эйзенхарт [537], $\lambda_i^{(a)}$ — Синг [530] и др., где за группой общих координатных преобразований закрепляются индексы без вертикальной черты (скобок), а за локальной группой — индексы соответственно с вертикальной чертой и в круглых скобках (это утяжеляет обозначения, но позволяет подчинить индексы укоренившемуся правилу: индексы одного алфавита пробегают значения только 0, 1, 2, 3, другого — только 1, 2, 3).

λ_μ^α — Пиранни [495] (греческие индексы — 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3), причем за локальной группой закрепляются индексы первых частей алфавитов ($\alpha...$; $a...$), за общими же координатными преобразованиями — вторых частей алфавитов ($\mu...$; $r...$).

ϵ_λ^x — Схоутен и Стройк [535], $e^i_{(a)}$ — Мёллер [25], Ландау, Лифшиц [23] (в [23] за локальными (лоренцевыми) индексами закрепляются первые буквы латинского алфавита a, b, c, \dots)*).

Вводятся и другие обозначения, например $\Omega_i(\alpha)$ — Румер [494], $g_\mu^{(\alpha)}$ — Мицкевич [567], V_μ^α — Вейнберг [26] и т. д. Иногда за разными векторами лоренцева базиса закрепляются разные коренные буквы, например принимают $h_{\mu(0)} \equiv \tau_\mu$, $h_{\mu(1)} \equiv l_\mu$ и т. д., а лоренцевы индексы отбрасываются (это, однако, неудобно при введении тензоров с несколькими локальными индексами (см. п. 20.1), если локальная группа привлекается к рассмотрению). Когда же рассмотрение ограничено общими координатными преобразованиями и их подгруппами, лоренцевы индексы в таких задачах рационально отбросить, поскольку они остаются без дела.

При выборе обозначений для данной монографии сделана попытка сочетать разные преимущества указанных обозначений. В основу приняты обозначения Эйнштейна, Фока, Вейля, т. е. — коренная буква h (обобщенные коэффициенты Ламе в пределе переходят в обычные коэффициенты Ламе h_i) и закрепление разных алфавитов за разными группами, поскольку в монографии рассмотрению обеих групп (координатных и лоренцевых) уделяется главное и равное внимание и так как это позволяет в общих случаях облегчить обозначения — поме-

*) В пособии [23, с. 373] принимается: «Во избежание чрезмерного утяжеления записи формул мы будем, однако, писать скобки у индексов лишь там, где реперные индексы фигурируют вместе (или наравне) с 4-тензорными...»

щать в скобки лишь частные (численные) значения лоренцевых индексов, например h_{μ}^k , h_{μ}^a , но $h_{\mu}^{(0)}$, $h_{\mu}^{(1)}$... Тогда придется жертвовать укоренившимся правилом и закреплять за значениями индексов 0, 1, 2, 3 и 1, 2, 3 разные части обоих алфавитов.

§ 13. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТО В ЛОРЕНЦЕВОМ БАЗИСЕ (АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ)

13.1. Естественно-измеряемые величины (по Эйнштейну) и обобщение коэффициентов Ламе. Эйнштейн, идя по пути Гаусса и Римана, стремился к введению в ОТО измеряемых величин. Он дал их общее определение и, оценивая ситуацию, писал: «...В том обстоятельстве, что в ОТО связь между входящими в уравнения и измеряемыми величинами гораздо менее непосредственна, чем в обычных теориях, лежит, вероятно, основная трудность, появляющаяся при изучении ОТО» [1, I, с. 621].

Проанализируем это замечание, взяв в качестве примера «обычной теории» электродинамику Максвелла.

Декартовы компоненты полевых функций электромагнитного поля трактуются как измеряемые величины. К ним всегда можно перейти от тензорных компонент, которые под вид измеряемых не подходят, или путем преобразования криволинейной координатной системы в глобальную псевдодекартову, или с помощью коэффициентов Ламе. Эти переходы хорошо разработаны и во многих случаях просты. В этом смысле связь между тензорными величинами и измеряемыми непосредственна.

Эйнштейновы уравнения тяготения в метрической формулировке и другие соотношения ОТО записаны в криволинейной системе координат и содержат тензорные компоненты величин, преобразующиеся как дифференциалы криволинейных координат. Эти компоненты не есть измеряемые величины.

Развивая указанное замечание, Эйнштейн ввел в ОТО следующее определение измеряемой величины. Он писал: «...В ОТО нельзя выбрать такую систему координат, в которой можно было бы пространственные и временные разности координат связать путем измерения с некоторым масштабом и часами в такой же мере непосредственно, как это делалось в случае СТО. Подобный привилегированный выбор системы координат возможен только для б. м. <бесконечно малой> области, когда полагается

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = -d\xi_1^2 - d\xi_2^2 - d\xi_3^2 + d\xi_4^2. \quad (13.1)$$

Величины $d\xi...$ измеряются точно так же, как координаты

в СТО, однако они не являются полными дифференциалами. В б. м. области все величины можно относить к системе координат $d\xi$, в этом смысле мы будем их называть «естественно измеренными величинами» [1, I, с. 355]. Введя это определение, Эйнштейн далее (в несколько иных обозначениях) переходит от квадратичной связи (13.1) к соответствующей линейной. «Пусть X_1, X_2, X_3 — пространственные координаты; X_4 — координата времени... Эти координаты... имеют непосредственный физический смысл в рамках СТО. ...Рассмотренному линейному элементу соответствуют также дифференциалы dx_1, \dots, dx_4 четырехмерных координат некоторой выбранной системы. Если для рассматриваемого места выбрана такая система координат и «местная» система указанного типа, то величины dX_ν можно представить в виде некоторых выражений, линейных и однородных относительно dx_σ :

$$dX_\nu = \sum_{\sigma} \alpha_{\nu\sigma} dx_\sigma \quad (13.2)$$

[1, I, с. 461]. Этим соотношением Эйнштейн фактически обобщает трехмерные выражения Ламе (12.5): $ds_i = H_i dq_i$, хотя на это и не обращает внимания. Коэффициенты $\alpha_{\nu\sigma}$ тем самым обобщают коэффициенты Ламе. В другом месте и по иному поводу (при других номерах уравнений) Эйнштейн записывает связь между коэффициентами $\alpha_{\nu\sigma}$ и метрическим тензором ОТО: «Кроме того, из равенств <13.1> и <13.2> имеем

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma\mu} \alpha_{\sigma\nu} \quad (13.3)$$

[1, I, с. 337]. Эти соотношения, очевидно, обобщают соотношения теории Ламе (12.19). Ясно, что

$$\alpha_{\mu\mu} = \sqrt{g_{\mu\mu}}$$

— частные решения системы (13.3).

В «Основах ОТО» [1, I] Эйнштейн применил приведенные общие уравнения для установления в поле Шварцшильда связи «между «локально» измеренными... длинами и промежутками времени ...и приращениями координат dx_ν ...» (с. 501). Воспроизведем эту связь, опираясь непосредственно на (13.2). Из (13.2), в частности, следует:

$$(dX_1)_{dx_2=dx_3=dx_4=0} = \alpha_{11} dx_1, \quad (dX_4)_{\dots} = \alpha_{44} dx_4, \quad (13.2a)$$

т. е.

$$dx_1 = \frac{(dX_1)_{\dots}}{\sqrt{g_{11}}}, \quad dx_4 = \frac{(dX_4)_{\dots}}{\sqrt{g_{44}}}. \quad (13.2b)$$

Полагая dX_1 и dX_4 локально измеренными и равными единицам, для поля Шварцшильда Эйнштейн находит в стандартной системе координат:

$$dx_1 = 1 - \frac{\alpha}{2r}, \quad dx_4 = \frac{1}{g_{44}}. \quad (13.2c)$$

В своих основополагающих работах по ОТО как теории тяготения Эйнштейн систематически не развил далее общего аппарата, который бы в общем случае, опираясь на соотношения (13.1)—(13.3), связал тензорные компоненты величин ОТО с измеряемыми величинами в его приведенном выше определении. Такой общий аппарат был впоследствии развит рядом авторов и получил название тетрадного представления (метода) ОТО. Эйнштейн прибег к такого рода аппарату уже в своих построениях единой теории поля (см. п. 13.8).

Перейдем к систематическому изложению представления ОТО в лоренцевом базисе на основе эйнштейновых соотношений (13.2), (13.3) и опираясь на триадный метод Ламе.

13.2. Локальные лоренцевы системы (квазиординатные). Перепишем (13.2) в принятых в монографии обозначениях (см. список основных обозначений):

$$dx^k = h_{\mu}^k dx^{\mu}. \quad (13.4)$$

Замечание Эйнштейна, что «величины $d\xi$ измеряются точно так же, как координаты в СТО...», означает, что имеет место разложение по лоренцеву базису e_k

$$d\mathbf{r} = dx^k e_k = (h_{\mu}^k dx^{\mu}) e_k. \quad (13.4a)$$

Дифференциалы dx^k — локальные псевдодекартовы координаты, действующие в бесконечно малой области 4-пространства ОТО, где еще справедлива СТО. Соотношения (13.4a) и (13.3) обобщают соответственно соотношения (12.4) и (12.5) триадной формулировки Ламе его теории криволинейных систем в плоском 3-пространстве. Трехмерная часть квазиординат dx^a обобщает на случай наличия поля тяготения «физические составляющие» элемента перемещения ds_1, ds_2, ds_3 теории Ламе.

Перепишем теперь соотношения (13.3) в принятых обозначениях:

$$(g_{\mu\nu})_{\text{OTO}} = h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn}, \quad (13.5)$$

где, согласно (13.1), $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (в другой, чем у Эйнштейна, сигнатуре). Соотношения (13.5) обобщают уравнения (12.19) теории Ламе, а индекс ОТО (в дальнейшем писать его не будем) означает, что $g_{\mu\nu}$ относится к искривленно-

му пространству ОТО. Следовательно, уравнения Ламе (12.20) с переходом к ОТО отпадают.

13.3. Подчинение обобщенных коэффициентов Ламе эйнштейновым уравнениям тяготения. Учтем теперь, что Эйнштейн, перейдя к римановой геометрии, подчинил $g_{\mu\nu}$ своим уравнениям (1.1). Запишем их еще раз (для простоты без Λ -члена):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (13.6)$$

Это радикально меняет ситуацию. Триадная формулировка Ламе позволила представить уравнения электромагнитного поля в полностью физических компонентах. Физическими же компонентами $g_{\mu\nu}$ является постоянный метрический тензор СТО. Согласно (13.5) и (13.3):

$$\eta_{kn} = h^{\mu}_k h^{\nu}_n g_{\mu\nu}, \quad dx^{\mu} = h^{\mu}_k dx^k. \quad (13.7)$$

Следовательно, возможность представления уравнений ОТО (13.6) в полностью физических компонентах полевых функций, подобно, например, уравнениям Максвелла (12.9), отпадает. Однако допускается частичный переход. Действительно, в силу (13.5) коэффициенты h_{μ}^k вынуждены, так же как и $g_{\mu\nu}$, совмещать описание криволинейной системы координат с описанием гравитационного поля. Умножая (13.6) на h^{ν}_k и суммируя по ν , получаем так называемое тетрадное представление эйнштейновых уравнений тяготения в лоренцевом базисе

$$R_{\mu k} - \frac{1}{2} h_{\mu k} R = -\kappa T_{\mu k}, \quad (13.8)$$

где $R_{\mu k} = h^{\nu}_k R_{\mu\nu}$, $h_{\mu k} = h^{\nu}_k g_{\mu\nu}$, $T_{\mu k} = h^{\nu}_k T_{\mu\nu}$. Поскольку $R_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ — функции $g_{\mu\nu}$, то в силу (13.5) ясно, что они могут быть представлены как функции h_{μ}^k и что, таким образом, эйнштейново уравнение тяготения в тетрадном представлении (13.8) является уравнением относительно компонент h_{μ}^k . Дальнейшее умножение уравнений (13.8) на h^{μ}_i с последующим суммированием по μ приводит их к виду

$$R_{kn} - \frac{1}{2} \eta_{kn} R = -\kappa T_{kn}, \quad (13.9)$$

в котором, однако, неизвестными, как и в (13.3), являются h_{μ}^k .

Перейдя к тетрадному представлению эйнштейнова уравнения тяготения, Румер [494, с. 130] резюмирует: «Проведенное исследование показывает, что первичными геометрическими образами, определяющими метрику в пространстве Римана,

являются элементы метрической матрицы Ламе, в то время как составляющие метрического тензора g_{ik} являются производными квадратичными образованиями» (здесь $r, k=0, 1, 2, 3$).

Выбор термина мотивируется так: «Если матрица $\|\Omega_i(\alpha)\| < \text{т. е. } h_\mu^k >$ диагональна, то ее элементы $\Omega_h(k)$ суть коэффициенты Ламе, поэтому мы будем ее называть метрической матрицей Ламе» [494, с. 111].

Подчинившись эйнштейновым уравнениям тяготения, обобщенные коэффициенты Ламе h_μ^k становятся, как и $g_{\mu\nu}$, полевыми функциями. Поэтому их называют также тетрадными гравитационными потенциалами. «Другими словами гравитационное поле может быть описано посредством четырехножника с компонентами h^μ_k » [496].

Если решения $g_{\mu\nu}$ метрических уравнений (13.6) известны, то можно пойти по пути Ламе — разыскивать обобщенные коэффициенты Ламе h_μ^k по заданным $g_{\mu\nu}$, т. е. найти их из более простой, чем (13.8) алгебраической системы уравнений (13.5).

13.4. Выход за рамки условий касания Ламе. Сравним систему (13.5) с уравнениями СТО $L_k{}^r L_n{}^s \eta_{rs} = \eta_{k' n'} = \text{inv}$, исследование которых не ограничилось разысканием одного частного решения. Общее решение, содержащее шесть произвольных постоянных, привело к группе Лоренца. Это стимулирует не ограничиваться и в ОТО одним частным решением системы (13.5) $h_{\mu m} = \sqrt{g_{\mu\mu}}, |m| = |\mu|$. Общее решение этой системы в ОТО сложнее. Оно содержит также шесть произвольных, но не постоянных, а функций координат. Поэтому теория нуждается в дополнительных условиях, которые помогли бы определить параметры — функции. Простейший вариант таких условий — задание шести компонент h_μ^k из соображений целесообразности. Тогда остальные 10 можно найти из (13.5). Математически допустима и более общая формулировка задания недостающих условий: в виде шести дополнительных уравнений, связывающих, вообще говоря, все 16 компонент h_μ^k . Это аналогично ситуации с координатными условиями, которые иногда подбираются из условий целесообразности, как, например, в задаче Шварцшильда, решаемой в стандартной системе координат, а иногда задаются в виде уравнений, например $\partial_\mu g^{\mu\nu} = 0$ (координатные условия Эйнштейна [1, I, с. 433]), условий гармоничности де Дондера—Фока и др. Дополнительные шесть уравнений по аналогии с электродинамикой получили в тетрадном представлении ОТО название калибровочных условий (подобная ситуация имеет место в электродинамике при разыскании потенциалов электромагнитного поля).

Эйнштейновы уравнения тяготения (13.6) позволяют разыскать 10 независимых компонент $g_{\mu\nu}$ с точностью до четырех произвольных функций. Чтобы найти эти функции или преду-

предить их появление, эйнштейновы уравнения метрической формулировки ОТО дополняются четырьмя координатными условиями. Без этого нельзя довести до конца решение ни одной конкретной задачи. Уравнения Эйнштейна в тетрадном представлении (13.8) недоопределены еще в большей мере, чем (13.6): в результате перехода от (13.6) к (13.8) число независимых уравнений сохраняется, а число неизвестных увеличивается с 10 до 16. Поэтому из (13.8) компоненты h_{μ}^k находятся с точностью до 6 произвольных функций. Чтобы найти эти функции или не допустить их появления, нужно присоединить к (13.8), вообще говоря, 6 дополнительных условий (калибровочных). Без этих условий разыскание гравитационных потенциалов h_{μ}^k не может быть доведено до конца. С математической точки зрения допустимо множество вариантов калибровочных условий. Повременим с дальнейшим обсуждением калибровочных условий и предположим, что h_{μ}^k уже полностью известны.

13.5. Физические компоненты в тетрадном представлении ОТО. Выпишем сначала несколько уравнений из § 12 в принятых в данной монографии обозначениях. Тогда формулы (12.3) и (12.8) примут вид

$$\mathbf{E} = E^{(1)}\mathbf{e}_{(1)} + E^{(2)}\mathbf{e}_{(2)} + E^{(3)}\mathbf{e}_{(3)}, \quad (12.3a)$$

$$j\epsilon \frac{\omega}{c} E^{(1)} = \frac{1}{h_2^{(2)}h_3^{(3)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^3} (H_{(2)}h_2^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial x^2} (H_{(3)}h_3^{(3)}) \right\},$$

.....

$$j \frac{\omega}{c} H^{(3)} = \frac{1}{h_1^{(1)}h_2^{(2)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (E_{(2)}h_2^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial x^2} (E_{(1)}h_1^{(1)}) \right\}. \quad (12.8a)$$

В частности, (12.12):

$$-j\epsilon \frac{\omega}{c} r E_{(1)} = \frac{\partial}{\partial \varphi} H_{(1)} - \frac{\partial}{\partial z} (zH_{(2)}), \quad (12.12a)$$

$$-j \frac{\omega}{c} E_{(2)} = \frac{\partial}{\partial z} H_{(1)} - \frac{\partial}{\partial r} H_{(3)},$$

где $H_r \equiv H_{(1)}$, $H_\varphi = H_{(2)}$, $H_z = H_{(3)}$ — компоненты напряженности магнитного поля.

В тех же обозначениях соотношения (12.14) принимают вид

$$A_{(1)} = A_r h^r_{(1)}, \quad A_{(2)} = A_r h^r_{(2)}, \quad A_{(3)} = A_r h^r_{(3)}. \quad (12.14a)$$

Во всех этих соотношениях — классические коэффициенты Ламе, но в иных, чем ранее, обозначениях. Естественно, что в

конкретных задачах классической физики с их условиями касания и сравнительно узким классом используемых криволинейных координатных систем нет смысла менять обозначения, например $E_u, E_v; E_r, E_\varphi$, уже перешедшие в область инженерной практики на $E_{(1)}, E_{(2)}$.

Дополняя декартову триаду до лоренцевой тетрады и предполагая наличие гравитационного поля, обобщаем (12.3а) и (12.14а) для произвольного 4-вектора \mathbf{A} в пространстве ОТО:

$$\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha + A^{(0)} \mathbf{e}_{(0)}, \quad A^k = h_\mu{}^k A^\mu,$$

где $h_\mu{}^k$ уже подчинены эйнштейновым уравнениям тяготения.

Аналогично (и это обобщает сказанное в п. 12.3), если заданы компоненты некоторого тензора более высокого ранга, изменяющиеся посредством преобразования для дифференциалов координат, то и их можно отнести с помощью обобщенных коэффициентов Ламе к лоренцеву базису:

$$A^{h_1 \dots r_s \dots} = h_\mu{}^k h_\nu{}^n \dots h^\lambda{}_\gamma h^\sigma{}_\delta \dots A^{\mu\nu} \dots \lambda\sigma \dots \quad (13.10)$$

В частности, сопоставляя эту запись с обозначениями, использованными Мак-Коннелом [476, с. 394], имеем

$$A_{\alpha\alpha} \equiv A_{(1)(1)}, \quad A_{\beta\gamma} \equiv A_{(2)(3)}.$$

Компоненты величин, отнесенные к лоренцеву базису \mathbf{e}_k , получили и в ОТО название «физических компонент» и интерпретируются как величины измеряемые, поскольку отнесение к лоренцеву, единичному базису можно рассматривать как подчинение основному уравнению метрологии.

Так, Пириани в статье «Тетрадная формулировка ОТО» [495] пишет: «Результатами измерений являются физические компоненты соответствующих тензоров, т. е. скалярные произведения этих тензоров с тетрадными векторами. Эти величины являются скалярами... и не зависят от пространственно-временных координатных систем».

Термин «физические компоненты» получил в ОТО широкое распространение. В частности, он используется в монографии [19, с. 37], где говорится: «...Компоненты вектора или тензора в локальной лоренцевой системе («физические компоненты») отличаются от компонент в общей координатной системе». Распространен как синоним и термин «локальные компоненты». Так, в статье [496] Белинфанте, следуя обозначениям Вейля и Фока, пишет: «Тензоры только с греческими индексами называются мировыми тензорами, а тензоры только с латинскими индексами — локальными тензорами... посредством $h^\mu{}_k$ и $h_\mu{}^k$ латинские индексы могут быть изменены в греческие и наоборот» (в дальнейшем это изменение будем называть перелицовкой).

Из предыдущего видно, что понятие «естественно-измеряемые величины», обсужденное Эйнштейном [1, I, с. 423] («собственные величины» в смысле [465]), совпадает с понятием «физические компоненты». Это синонимы.

Введением в ОТО «физических компонент» достигается в принципе введение в нее измеряемых величин и основного уравнения измерения в смысле метрологической терминологии. Перефразируя сентенцию И. М. Сеченова, избранную в качестве эпиграфа к данной главе монографии, можно сказать, что тетрадное представление эйнштейновой ОТО в лоренцевом базисе, исходя из представлений СТО об измерении, справедливой в ОТО в очень ограниченных размерах, в пределах окрестности любой данной точки, привело к величинам в одеянии не только числа, как в метрической формулировке ОТО (мировые компоненты), но и в «одеянии меры и числа» (физические компоненты). Выход из исходной окрестности «в даль» теперь «доступен мысли» — возможно интегрирование вдоль линий, по объему, учитывающее наличие меры в каждой из промежуточных окрестностей.

С переходом к тетрадной формулировке ОТО следует знать, что «физические составляющие» величин и тетрады h_{μ}^k (обобщенные коэффициенты Ламе) не являются монополией ОТО, что они имеют предков и союзников в виде своих классических аналогов — широко используемых классических физических компонент и классических коэффициентов Ламе, что «физические компоненты» — это именно те самые величины, которые, по определению Эйнштейна, отнесены к локальной псевдодекартовой системе координат и названы им «естественно-измеряемые». В связи с некоторым разнообразием в терминологии приведем замечание Румера и Фета: «С каждой физической системой можно сопоставить наблюдаемые (в старой терминологии — физические величины). Значения наблюдаемых суть результаты измерений и поэтому предполагаются действительными» [497, с. 133]. Следует также предостеречь от возможных недоразумений, поскольку иногда в литературе по ОТО употребляется термин «физические компоненты» в иных смыслах, чем в § 12 и в данном пункте. На этом специально остановимся в конце п. 21.4.

В некоторых случаях может оказаться удобным введение смешанных компонент — частично мировых (по одним из индексов), частично физических (по другим индексам). Например,

$$A^{\mu k} = h_{\lambda}^k A^{\mu\lambda} = (A^{\mu 0}, A^{\mu\alpha}). \quad (13.11)$$

13.6. Условия касания в ОТО. В случае ортогональных систем координат частными решениями системы (13.5) являются

$$h_{\mu}^m = \sqrt{g_{\mu\nu}}, \quad (13.12)$$

где принято, что сходные буквы обоих алфавитов, например μ и m , принимают одинаковые численные значения (суммирование по μ не производится). Выражения (13.12) обобщают классические выражения для коэффициентов Ламе (12.19). С переходом в соотношении (13.3) к плоскому 3-пространству имеем

$$dx^a \equiv dX^a = h_{\beta}^a dx^{\beta}, \quad (13.13)$$

где X^a могут рассматриваться как декартовы координаты глобальной системы координат. Тогда, вводя переобозначение

$$h_{\beta}^a \equiv P_{\beta}^a = \partial X^a / \partial x^{\beta} \quad (13.14)$$

и переходя к трехмерному случаю, получаем

$$g_{\alpha\beta} = P_{\alpha}^a P_{\beta}^a \eta_{ab}. \quad (13.15)$$

Из (13.12) и (13.15) следует, что в этом случае

$$h_{\alpha}^c = \sqrt{P_{\alpha}^a P_{\alpha}^b \eta_{ab}}, \quad (13.16)$$

где по a и b производится суммирование. Сравнивая (13.16) с классическими обозначениями, видим, что

$$h_1^{(1)} \equiv U, \quad h_2^{(2)} \equiv V, \quad h_3^{(3)} \equiv W \quad (13.17)$$

(см. (12.11)).

Приведем примеры использования в ОТО условий касания. Как видно из п. 11.2, Эйнштейн ввел коэффициент

$$H_0 = \sqrt{g_{00}} = h_0^{(0)} \quad (13.18)$$

в своей теории эффекта красного смещения для перехода от координатного, неизмеряемого времени к местному времени, собственному (измеряемому).

Этот прием, как указывалось в п. 11.2, применяют и сейчас для интерпретации результатов опытной проверки, в частности, эффекта Шапиро: координатное время задержки в точке наблюдателя следует умножить на $\sqrt{g_{00}}$ [25, с. 357].

При обсуждении связи «между «локально» измеренными ... длинами ... и приращениями координат dx_{ν} , ...» [1, I, с. 501] Эйнштейн в статье «Основы ОТО» фактически привлекает и пространственные коэффициенты Ламе, $\sqrt{g_{11}}$ в частности (см. (13.2b)). Для перехода от тензорных компонент электромагнитного поля к физическим компонентам вводятся соотношения $D^{\alpha} = -\sqrt{g_{00}} F^{0\alpha}$, $H^{\alpha\beta} = \sqrt{g_{00}} F^{\alpha\beta}$ (точнее физических по одному из индексов, временному) [23, с. 328]. Там же [23, с. 323] говорится: «Во избе-

жание недоразумений при сравнении с формулами, часто применяемыми для трехмерных векторных операций в ортогональных криволинейных координатах, ... укажем, что в этих формулах под компонентами вектора подразумеваются величины

$$\sqrt{g_{11}} A^1 (= \sqrt{A_1 A^1}), \quad \sqrt{g_{22}} A^2, \quad \sqrt{g_{33}} A^3. \quad (13.19)$$

Использование условий касания вследствие своей простоты получило широкое распространение.

13.7. Две группы преобразований. Локальные (обобщенные) преобразования Лоренца в ОТО. Разыскание h_{μ}^{ν} как общих решений системы (13.5) предполагает независимое введение локальных лоренцевых систем по отношению к глобальным криволинейным системам координат. На эту независимость Эйнштейн обращал внимание в своих «Основах ОТО»: «... Величины $g_{\sigma\tau}$ функции x_{σ} , которые уже не могут более зависеть от ориентации и состояния движения «местной» координатной системы» [1, I, с. 461]. Изменения ориентации «местных» систем подчинены СТО, т. е. являются преобразованиями Лоренца. Эйнштейн назвал их обобщенными преобразованиями Лоренца. Перечисляя в своей статье «Физические основы теории тяготения» 4 общих постулата, «... которые можно принять (но не обязательно все) в теории тяготения», в качестве третьего постулата Эйнштейн принял следующий:

«Справедливость теории относительности (в более узком смысле), т. е. системы уравнений должны быть ковариантны относительно линейных ортогональных подстановок (обобщенные преобразования Лоренца)». Далее Эйнштейн замечает: «По нашему мнению, безусловно необходимо придерживаться постулата 3, если только не будет оснований, принуждающих отказать от него; как только мы отказываемся от этого постулата, разнообразие возможностей становится необозримым» [1, I, с. 275].

В 1928 г. Эйнштейн развивает мысль о двух видах преобразований ОТО — координатных и лоренцевых в связи с построением единой теории поля (на этом остановимся в следующем пункте). Работы Вейля, Фока, Иваненко по включению спинорного поля в ОТО акцентируют как тетрады, так и лоренцевы преобразования. В 1929 г. Фок писал [498]: «... $h_{\kappa}^{\sigma} = \sum_i e_i a_{i\kappa} h^{\sigma}_i$, $a_{i\kappa}$ — transformation locale de Lorentz». В монографии [494] двум видам преобразований в ОТО отводится глава V «Тензорный анализ и мероопределение Ламе». В ней Румер замечает, что, полагая в основу мероопределение Ламе (тетрады), можем построить тензорный анализ как теорию одновременных ковариантов двух групп преобразований: группа общих преобразований координат $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\lambda})$:

$$h_{\mu}{}^{,k} = P_{\mu}{}^{,\lambda} h_{\lambda}{}^{,k}; P^{\mu'}{}_{\nu} = \partial x^{\mu'} / \partial x^{\nu}; P^{\mu'}{}_{\nu} P_{\lambda}{}^{,\nu} = \delta_{\lambda}^{\mu'}, \quad (13.20)$$

группа ортогональных преобразований элементов матрицы Ламе, т. е. локальных (обобщенных) преобразований Лоренца $L(x)$:

$$h_{\mu}{}^{,k'} = L^{k'}{}_{,n}(x^{\lambda}) h_{\mu}{}^{,n}. \quad (13.21)$$

Таким образом, эйнштейновы уравнения тяготения в тетрадном представлении (13.8) ковариантны относительно двух групп преобразований, уравнения же в виде (13.9) лоренц-ковариантны. Будем для краткости обозначать локальное лоренцево преобразование символом $L(x)$. Аналогично тому как координатные условия не должны быть общековариантны, так, очевидно, и калибровочные условия не должны быть ковариантны относительно общего 6-параметрического преобразования Лоренца (относительно подгрупп преобразований соответственно координатных и локальных лоренцевых ковариант-ность может иметь место).

Как видно из (13.5) и (13.21), метрический тензор $g_{\mu\nu}$ — инвариант относительно локальных лоренцевых преобразований

$$g_{\mu\nu} = L^{k'}{}_{,r} L^{n'}{}_{,s} h_{\mu}{}^{,r} h_{\nu}{}^{,s} \eta_{k'n'} = h_{\mu}{}^{,k} h_{\nu}{}^{,n} \eta_{kn} = \text{inv.} \quad (13.22)$$

Из (13.21) и (13.8) ясно, что при фиксированных исходных тетрадах коэффициенты $L^{k'}{}_{,n}(x^{\lambda})$ становятся в подчинение эйнштейновым уравнениям тяготения, которые после подстановки соотношения (13.21) в равенство (13.8) из уравнений относительно $h_{\mu}{}^{,k'}$ переходят при заданных исходных $h_{\mu}{}^{,n}$ в уравнения относительно $L^{k'}{}_{,n}(x^{\lambda})$, т. е. в уравнения относительно 6 параметров $L(x)$. В этом смысле функциональная зависимость коэффициентов $L^{k'}{}_{,n}$ от x^{λ} не произвольна, а подчинена эйнштейновым уравнениям (в тетрадном представлении).

Будем далее для краткости две рассмотренных группы преобразований называть соответственно P , L -преобразованиями (группами).

Разрешая (13.21) относительно $L^{k'}{}_{,n}$ (сворачиваем с $h^{\mu}{}_{,m}$), получаем

$$L^{k'}{}_{,n}(x^{\lambda}) = h_{\mu}{}^{,k'} h^{\mu}{}_{,n}. \quad (13.23)$$

Аналогично из (13.20)

$$P^{\mu'}{}_{\nu} = h^{\mu'}{}_{,k} h_{\nu}{}^{,k}. \quad (13.24)$$

Отсюда также видна независимость двух рассматриваемых видов преобразований: коэффициенты $L^{k'}{}_{,n}$ инвариантны относительно общих координатных преобразований, коэффициенты $P^{\mu'}{}_{\nu}$ — инварианты относительно локальных лоренцевых. Это, естественно, не мешает связать их друг с другом. Действительно,

$$P^{\mu'}_{\nu} = h^{\mu'}_{k'} h_{\nu}^{k'} = h^{\mu'}_{k'} L^{k'}_n h_{\nu}^n, \quad (13.25)$$

$$L^{k'}_n = h_{\mu}^{\mu'} h^{\mu'}_n = h_{\mu}^{\mu'} P^{\mu'}_{\nu} h_{\nu}^n. \quad (13.26)$$

В IV главе монографии эти соотношения будут использованы для изучения калибровочных условий и установления связи между разными подходами к введению наблюдаемых величин в ОТО.

13.8. Эйнштейн о тетрадах. Эйнштейн привлек тетрады в своих попытках создания единой теории гравитационного и электромагнитного полей. Опираясь при этом на локальную справедливость СТО, он писал [1, II, с. 248]: «Наличие метрики Римана гарантирует, что в каждой области n -мерного континуума существует n -под (n -репер) *). Если принять его в качестве локальной системы координат, то величина линейного элемента в такой системе будет задаваться формулой (прим.: по предложению Вейценбёка отнесение к оси локального n -пода выражается левым индексом)

$$ds^2 = \Sigma ({}^a ds)^2. \quad (13.27)$$

Предположим, что в общей системе координат величины ${}_a h^{\nu}$ обозначают n компонент оси a этого n -пода. Тогда...

$$dx^{\nu} = {}_a h^{\nu a} dx^a. \quad (13.28)$$

Уточняя обозначения, Эйнштейн пишет: «Индексы, относящиеся к координатам, мы обозначаем греческими, а индексы n -подов — латинскими» [1, II, с. 224]. Соотношение (13.28) обратное по отношению к (13.2), ${}_a h^{\nu}$ обратны $\alpha_{\nu\sigma}$ (обратные обобщенные коэффициенты Ламе). Далее Эйнштейн замечает: «... в случае $n=4$ имеется 16 величин h^{ν}_s , по сравнению с 10 величинами $g_{\mu\nu}$. Понятие тензора в этой теории обобщается. Действительно, мы должны рассматривать здесь не только преобразования, изменяющие систему координат, но и преобразования, которые изменяют ориентацию n -подов» [1, II, с. 290]. Введение этих преобразований наряду с общими преобразованиями координат приводит к тому, что «... кроме инвариантов и тензоров геометрии Римана, появляются новые инварианты и тензоры» [1, II, с. 223]. В связи с этим Эйнштейн обращал внимание и на то, что его уравнения тяготения недостаточны для отыскания ${}_a h^{\nu}$: «Знания метрики риманова пространства еще недостаточно для однозначного задания n -пода в каждой его точке. Действительно, метрика пространства не изменится, если подвергнуть все n -поды повороту на произвольный угол. Итак, если задана только метрика, ориентации n -подов неизвестны, и в определении структуры пространства еще остается некоторый произвол. Поэтому очевид-

*) $\rho\omega\sigma$ (подобос) (греч.) — нога.

но, что описание пространства посредством n -подов является в известном смысле более содержательным, чем описание с помощью квадратичной формы...» [1, III, с. 288]. Эйнштейн эту большую содержательность не связал с введением в ОТО «естественно измеряемых величин». Он видел ее в другом: «Возникает мысль что именно в произволе <введения n -подов>, связанном с этим способом описания, кроются искомые связи между структурой пространства и причиной электромагнетизма, которые до сих пор ускользали из теории» [1, III, с. 288]. Как известно, это предположение не оправдилось.

Таким образом, Эйнштейн своими соображениями об измерении в ОТО и соотношением (13.2) подготовил возможность введения в ОТО «измеряемых» величин путем обобщения метода Ламе. Эту возможность он не развил. Лоренцев базис и его компоненты он привлек уже в период попыток создания единой теории поля. Вводя аппарат тетрад (n -подов), Эйнштейн не был оригинален: «Подобного рода пространства рассматриваются не впервые; с чисто математической точки зрения они уже были исследованы ранее... От Вейценбёка и Картана, в частности, я узнал, что теория континуумов рассматриваемого здесь рода сама по себе не является новой. Картан любезно взял на себя труд составить исторический обзор соответствующего раздела, который дополняет мою работу» [1, III, с. 307].

13.9. $L(x)$ как преобразования систем отсчета. Трансформационные свойства физических компонент. Позднее суждение Эйнштейна, что «... описание пространства посредством n -подов является в известном смысле более содержательным...», ряд авторов, в частности Пирани, Тредер, Родичев и др., стали трактовать иначе, высказывая мысль, что в определении тетрад с точностью до локального лоренцева преобразования кроется возможность введения в ОТО понятия неинерциальных систем отсчета, независимого от понятия системы координат и связанного с эйнштейновыми уравнениями тяготения. Если предположить, что поле векторов $e_k(x^\lambda)$ таково, что $e_{(0)}(x^\lambda)$ имеет огибающие, то представляется естественным обобщить трактовку постоянного лоренцева преобразования в СТО — рассматривать $L(x)$ как преобразования в ОТО от одной неинерциальной системы отсчета к другой системе также неинерциальной (поскольку глобальной псевдодекартовой системы координат в ОТО не существует). При таком определении огибающие — конгруенция мировых линий — изображают тела отсчета. Независимость двух рассматриваемых групп преобразований освобождает мировые линии тел отсчета от необходимости быть избранными также и в качестве временных координатных линий системы координат. Она также предполагает,

что поле Лоренцева базиса является пробным, т. е. что тела отсчета и приборы, выступающие в теории в виде единичных векторов e_k , не нарушают состояния источников поля тяготения в согласии с требованием метрологии, чтобы приборы не нарушали состояния исследуемого объекта.

Отделение понятия системы координат от понятия системы отсчета и допущение континуума неинерциальных систем отсчета соответствуют континууму калибровочных условий. Тогда выбор калибровочных условий связывается, вообще говоря, с выбором условий наблюдения. Это вызывает потребность в изучении различных допустимых вариантов калибровок тетрад.

СТО явилась разительным примером, показавшим, насколько важно знание четырехмерных трансформационных свойств величин, которые в конце концов устанавливаются опытом, подтверждающим или отбрасывающим теоретические предположения об этих свойствах. Так, в СТО замена E, \mathbf{V} тензором E^{kn} позволила правильно описать электромагнитные явления в инерциальных системах отсчета.

Коль скоро $L(x)$ в ОТО трактуется как преобразование систем отсчета, то изучение в ОТО трансформационных свойств величин относительно $L(x)$ имеет первостепенное значение.

Изменение калибровочных условий, меняя в 4-пространстве ОТО ориентацию лоренцевой тетрады e_k , преобразует тем самым посредством локального лоренцева преобразования и физические компоненты величин. Так, например, для компонент вектора или тензора 2-го ранга в другой неинерциальной системе отсчета

$$A^{k'} = L^{k'}_n A^n, \quad (13.29)$$

$$A^{k'n'} = L^{k'}_r L^{n'}_s A^{rs}, \quad (13.30)$$

где $L^{k'}_n$ — коэффициенты локального лоренцева преобразования. При такой трактовке большая содержательность тетрадного представления состоит в том, что оно располагает и тензорными компонентами величин (мировыми, несобственными), удобными при расчетах, и «естественно измеряемыми величинами» — физическими компонентами (собственными величинами), введение которых необходимо при сравнении теории с результатами измерений. Аналогия между СТО и ОТО, приведенная Тредером в [28, § 1, 2], отделяет формальную координатную ковариантность от $L(x)$ -ковариантности. Последняя трактуется как общий принцип относительности, как непосредственное обобщение специального принципа относительности.

13.10. Естественно-измеряемый объем. Физические компоненты дуальных тензоров. Эйнштейн ввел в ОТО понятие инвариантного [1, I, с. 337] (или естественно-измеряемого)

объема [1, I, с. 359], фактически обобщая его определение в теории Ламе (12.6): «... интеграл

$$d\tau_0^* = \int dX_1 dX_2 dX_3 dX_4 \quad (13.31)$$

является инвариантом, т. е. не зависит от выбора системы координат». Далее Эйнштейн находит для этого инварианта другое выражение, связывая с элементом

$$d\tau = \int dx_1 \dots dx_4, \quad (13.32)$$

где dX_α — местные координаты СТО, x_μ — глобальные криволинейные. Используя свои соотношения (13.2) и (13.3), Эйнштейн получает следующую связь между указанными определителями:

$$|g_{\mu\nu}| = \left| \sum_{\sigma} \alpha_{\sigma\mu} \alpha_{\sigma\nu} \right| = |\alpha_{\sigma\nu}|^2. \quad (13.33)$$

В принятых в монографии обозначениях эта связь имеет вид

$$\begin{aligned} g \equiv |g_{\mu\nu}| &= |h_\mu^k \eta_{kn} h_\mu^n| = |h_\mu^k| |\eta_{kn}| |h_\mu^n| = \\ &= h \eta h = h^2 \eta, \quad h = |h_\mu^k| = \det h_\mu^k, \quad \eta = \det \eta_{kn}. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Отсюда следует

$$\sqrt{-g} = h \sqrt{-\eta} = h. \quad (13.35)$$

Из (13.2) и (13.33) следует соответственно в обозначениях Эйнштейна и в принятых обозначениях

$$d\tau_0^* = \sqrt{-g} d\tau = \int dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} dx^{(0)} = \det h_\mu^k \int dx^0 \dots dx^3. \quad (13.36)$$

Остановимся на этом детальнее, ограничившись записью именно дифференциальных соотношений. В частности, для ортогональных криволинейных систем

$$dx^{(0)} dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} = \sqrt{g_{00}} \sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{33}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (13.37)$$

Это выражение обобщает элемент (12.6) теории Ламе. В общем случае элемент объема выражается через произвольные тетрады:

$$dx^{(0)} dx^{(1)} dx^{(2)} dx^{(3)} = h_\mu^{(0)} h_\nu^{(1)} h_\lambda^{(2)} h_\sigma^{(3)} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\sigma. \quad (13.38)$$

Этот элемент объема не только общековариантен, но, как нетрудно убедиться, и лоренц-ковариантен, подобно тому как лоренц-ковариантны метрический тензор η_{kn} и единичный тензор (в отсутствие отражений) четвертого ранга Леви-Чивита ϵ_{klmn} [499, с. 6]. (Поскольку $L^k{}_\nu L^{l'}{}_\rho L^{m'}{}_q L^{n'}{}_r \epsilon^{pqrs} = (\det L^{p'}{}_q) \epsilon^{k'l'm'n'}$ и если (в основном это далее принимается) $\det L^{p'}{}_q = +1$, то $\epsilon^{k'n'r's'}$

имеет во всех лоренцевых системах одни и те же значения компонент, причем $\varepsilon^{0123} = \varepsilon^{(0)(1)(2)(3)} = +1$.)

Мировые компоненты относительного тензора Леви-Чивита

$$\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv h^\mu_k h^\nu_n h^\lambda_r h^\sigma_s \varepsilon^{knrs}, \quad \eta_{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv h_\mu^k \dots h_\sigma^s \varepsilon_{knrs} \quad (13.39)$$

испытывают на себе влияние как координатной системы, так и гравитационного поля. Выполняя суммирование в правой части (13.39) и вводя сокращенную запись, в которой принято, что сходные буквы двух алфавитов принимают одинаковые численные значения, находим

$$\eta^{\mu\nu\lambda\sigma} = (\det h^{\rho}_{(\rho)}) \varepsilon^{mnls} = \sqrt{-g} \varepsilon^{mnls}. \quad (13.40)$$

В другой координатной системе

$$\eta^{\mu'\nu'\lambda'\sigma'} = \sqrt{-g'} \varepsilon^{m'n'l's'}, \quad g' \equiv \det g^{\mu'\nu'}. \quad (13.41)$$

Например, в двухмерном случае

$$\begin{aligned} h^1_a h^2_b \eta^{ab} &= \varepsilon^{(1)(2)} (h^1_{(1)} h^2_{(2)} - h^1_{(2)} h^2_{(1)}) = \\ &= \varepsilon^{(1)(2)} \det h^\alpha_a, \quad a, b, \alpha = 1, 2, \\ g &= \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix} = (h^1_a h^1_b \eta^{ab}) (h^2_a h^2_b \eta^{ab}) - \\ &- (h^1_a h^2_b \eta^{ab}) (h^2_c h^1_d \eta^{cd}) = (\det h^\alpha_a)^2, \quad c, d = 1, 2. \end{aligned}$$

Пользуясь символом Леви-Чивита, вводят также элемент объема в виде

$$\begin{aligned} dV &\equiv \varepsilon_{knrs} dx^k dx^n dx^r dx^s = \varepsilon_{knrs} h_\mu^k h_\nu^n h_\lambda^r h_\sigma^s dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\sigma = \\ &= \eta_{\mu\nu\lambda\sigma} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\sigma = (\det h_\mu^k) dx^0 dx^1 dx^2 dx^3, \\ \varepsilon_{(0)(1)(2)(3)} &= +1. \end{aligned} \quad (13.42)$$

В частности, включая такой элемент объема в соответствующий инвариантный интеграл Гильберта, вариационным путем приходят к тетрадным представлениям эйнштейновых уравнений (13.8) и (13.9) [494, с. 130].

С помощью дискриминантного тензора можно ввести тензоры, называемые дуальными. Связь между их мировыми и лоренцевыми (физическими) компонентами производится обычным образом с помощью тетрад. Так, например, тензор дуальный тензору $A_{\lambda\sigma}$:

$$\begin{aligned} {}^D A^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} A_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} h^\mu_k h^\nu_n \eta^{kn\lambda\sigma} A_{\lambda\sigma} = \\ &= \frac{1}{2} h^\mu_k h^\nu_n h_\lambda^r h_\sigma^s \eta^{kn\lambda\sigma} A_{rs} = \frac{1}{2} h^\mu_k h^\nu_n \varepsilon^{knrs} A_{rs} = h^\mu_k h^\nu_n {}^D A^{kn}. \end{aligned} \quad (13.43)$$

Аналогично для дуального вектора

$${}^D A^\mu \equiv \frac{1}{3!} \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} A_{\nu\lambda\sigma} = h^\mu_k {}^D A^k = \frac{1}{3!} \eta^{\mu knr} A_{knr}. \quad (13.44)$$

В этой терминологии элемент объема dV , определенный, согласно (13.42), является дуальным скаляром.

Таким образом, Эйнштейн, введя (13.31), перешел к элементу физического объема. Приведенные соотношения детализируют этот переход в рамках общего тетрадного представления ОТО.

§ 14. (3+1)-РАСЩЕПЛЕНИЕ. ОБОБЩЕНИЕ НА ИЗОТРОПНЫЙ БАЗИС

14.1. Хроно- и хоро *)- величины. Сопоставление хоро-величин классической физики, СТО и ОТО. В классической физике время и пространственные величины (хоро-величины) измеряются раздельно. Хоро-величины имеют два вида компонент — тензорные криволинейные и физические. Оба вида компонент относятся к одному и тому же абсолютному 3-пространству. Так, например, тензорные компоненты A_r , содержащиеся в выражении (12.14), или E_1, E_2, E_3 , входящие в (12.3), отнесены к тому же 3-пространству, что и компоненты $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma$ в соотношении (12.14) или E_u, E_v, E_w в уравнении (12.13), в частности E_r, E_φ, E_z в уравнении (12.12).

СТО сохранила раздельность измерения времени и хоро-величин, но потребовала относительности этого разделения. В результате появилось множество хроно-величин, имеющих размерность времени, таких, как плотность заряда и др. Что касается хоро-величин, то в СТО возможно введение следующих трех видов их компонент: 1) мировые (криволинейные) компоненты, отнесенные к 3-подпространству мира Минковского (в виде искривленной 3-гиперповерхности), не совпадающему с собственным пространством какой-либо инерциальной системы отсчета; 2) физические компоненты хоро-величин, отнесенные к трехмерной криволинейной системе координат, установленной в некотором собственном пространстве инерциальной системы отсчета; 3) мировые компоненты (криволинейные компоненты), отнесенные к трехмерной криволинейной системе координат, установленной в том же собственном пространстве, что и физические компоненты. Таким образом, 3-пространство для 2-го и 3-го видов компонент является общим и не совпадает с 3-пространством 1-го вида компонент. Поэтому хоро-компоненты 3-го вида (отметим их звездочкой) в ортогональной системе координат определяются соотношениями

*) По-гречески $\chi\rho\nu\sigma\zeta$ — время, $\chi\omega\rho\alpha$ — место.

$$\overset{*}{A}^\alpha = \sqrt{g^{\alpha\alpha}} A^\alpha, \quad A^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \overset{*}{A}^\alpha. \quad (14.1)$$

Однако для 1-го вида хоро-компонент СТО имеем, вообще говоря,

$$A^\alpha = h^\alpha_k A^k \neq \overset{*}{A}^\alpha, \quad (14.2)$$

поскольку в силу произвольности (3+1)-расщепления $A^{(0)} \neq 0$.

Обычно компоненты, такие, как A^α и $\overset{*}{A}^\alpha$, в СТО не различают, рассматривая их в одном множестве тензорных компонент.

Приняв в ОТО эйнштейново определение «естественно-измеряемых величин» [1, I, с. 355], тетрадная формулировка ОТО тем самым принимает и раздельность измерения в ОТО хоро- и хроно-компонент величин, например компонент

$$A^{(0)} = h_\mu^{(0)} A^\mu, \quad A^\alpha = h_\mu^\alpha A^\mu. \quad (14.3)$$

Возможно разделение на части и мировых компонент, например A^μ на A^0 и A^α и разделение 4-суммирования в инварианте, например $A_\mu A^\mu = A_0 A^0 + A_\alpha A^\alpha$. В члене $A^\alpha A_\alpha$ усеченное суммирование только по пространственным индексам. Такого рода разделение не выделяет, вообще говоря, величин для измерения. Ни A^0 , ни A^α не являются хроно-, соответственно хоро-измеряемыми величинами.

14.2. Специальные (ограниченные) мировые компоненты в ОТО. Метод (3+1)-рассечения суммации по лоренцевым индексам. Введение криволинейной системы координат требует конечной или бесконечной области. В ОТО можно выделить лишь бесконечно малые элементы 3-пространства Минковского. Поэтому перенос из СТО в ОТО компонент 3-го вида, таких, как $\overset{*}{A}^\alpha$, невозможен. Однако можно ввести некоторый их обобщенный аналог, сочетая выделение элемента собственного пространства СТО с выделением из четырехмерной координатной криволинейной системы (x^μ) в ОТО ее трехмерной части (x^α). Действительно, рассекая суммацию по лоренцевым (локальным) индексам, например, в случае вектора

$$Q^\mu = h^\mu_k Q^k = h^\mu_{(0)} Q^{(0)} + h^\mu_\alpha Q^\alpha, \quad (14.4)$$

можем ввести раздельно 4-компоненты вида

$$Q^\mu_* \stackrel{\text{df}}{=} h^\mu_{(0)} Q^{(0)}, \quad \overset{*}{Q}^\mu \stackrel{\text{df}}{=} h^\mu_\alpha Q^\alpha, \quad (14.5)$$

где 4-компоненты $\overset{*}{Q}^\mu$ физических хоро-компонент Q^α отмечены звездочкой сверху, а физической хроно-компоненты $Q^{(0)}$ — снизу. В некоторых простых случаях может оказаться, что

$$Q^\alpha_* = 0, \quad \overset{*}{Q}^0 = 0.$$

Тогда (14.5) сводятся к соотношениям

$$Q^0_{\#} = h^0_{(0)} Q^{(0)}, \quad (14.6)$$

$$Q^{\alpha} = h^{\alpha}_{\alpha} Q^{\alpha}. \quad (14.7)$$

В этих частных случаях особенно заметно сходство уравнений (14.1) и (14.7). Различие сводится к тому, что $h^{\alpha} \equiv \sqrt{g^{\alpha\alpha}}$ в соотношениях (14.1) зависит от выбора трехмерной ортогональной криволинейной системы в плоском пространстве, тогда как h^{α}_{α} в формуле (14.7) подчинены эйнштейновым уравнениям тяготения и произвольным калибровочным условиям. В отдельных случаях, однако, может оказаться, что соответствующие компоненты h^{α}_{α} и h^{α} внешне совпадают, например $h^3_{(3)} = r \equiv h_3$. Тогда различие состоит в трактовке координат ОТО и координат плоского пространства. Добавим, что A^{α} и Q^{α} в соотношениях (14.1) и (14.7) подчинены соответственно уравнениям классической физики и уравнениям ОТО.

Таким образом, введение компонент вида Q^{α} начинается с (3+1)-расщепления в смысле СТО (в ОТО это специальное, локальное расщепление). Индексы α или μ в Q^{μ} относятся к произвольной системе координат ОТО. Это мировые индексы. Такого рода компоненты в отличие от мировых компонент Q^{α} , Q^{μ} и в отличие от физических компонент будем называть специальными мировыми компонентами.

Очевидно, ни в смысле триадного метода Ламе, ни с точки зрения эйнштейнова определения «естественно-измеряемых величин» специальные мировые компоненты, вообще говоря, не являются образами в теории измеряемых величин. В простых случаях, как, например, в выражении (14.7), они весьма близкие аналоги криволинейных компонент (т. е. не измеряемых величин в смысле метрологии и классической теории Ламе). Компонента E_{α} в ОТО имеет классический аналог в уравнении (12.3) — криволинейные компоненты E_1, E_2, E_3 , но не физические E_u, E_v, E_w . В пределе, когда искривленное пространство ОТО переходит в плоское, именно специальные мировые компоненты становятся криволинейными компонентами классической теории.

В частности, некоторые из четырех векторов e_{μ} во всем 4-пространстве, или даже все четыре вектора e_{μ} в некоторых точках, могут в результате подбора координатной системы совпасть с соответствующими векторами лоренцева базиса. Пусть, например, $e_0 = e_{(0)}$, но $e_{\alpha} \neq e_{\alpha}$ (полугеодезическая система координат). В этом случае $A = A^{\mu} e_{\mu} = A^{(0)} e_{(0)} + A^{\alpha} e_{\alpha}$ и компо-

нента $A^0 = A^{(0)}$ в отличие от $A^\alpha \neq A^\alpha$ является измеряемой величиной. Однако в ОТО в силу неевклидовости геометрии в принципе невозможно полностью передать мировым компонентам роль измеряемых величин. Это можно сделать только частично, тогда как лоренцевы компоненты полностью берут на себя роль измеряемых без нарушения принципа общей ковариантности.

Таким образом, специальные мировые компоненты не являются результатом разложения физических величин, например вектора \mathbf{A} по векторам лоренцева базиса \mathbf{e}_k . Однако их введение весьма полезно в том смысле, что, будучи связанными с хроно- (например, с $Q^{(0)}$) или с хоро- (например, с Q^a) компонентами, происходя от них, от их раздельного введения, специальные компоненты в то же время связаны с криволинейной системой координат ОТО. В конкретных случаях последняя выбирается не как-нибудь, а целесообразным образом, чтобы отразить симметрию задачи и т. д. Этим рационально воспользоваться. Сказанное относится к компонентам любого ранга, но, начиная со второго ранга, вообще говоря, появляются смешанные компоненты — частично мировые специальные, частично физические, аналогично тому, как это имело место в выражении (13.11). Произведем, например, рассечение суммации по локальным индексам в мировых компонентах тензора 2-го ранга:

$$Q^{\mu\nu} = h^\mu_k h^\nu_n Q^{kn} = h^\mu_{(0)} h^\nu_{(0)} Q^{(0)(0)} + h^\mu_{(0)} h^\nu_a Q^{(0)a} + h^\mu_b h^\nu_{(0)} Q^{b(0)} + h^\mu_a h^\nu_b Q^{ab}. \quad (14.8)$$

В результате можно ввести специальные мировые компоненты

$${}^*Q^{\mu\nu} = h^\mu_a h^\nu_b Q^{ab}, \quad (14.9)$$

$$Q_*^{\mu\nu} = h^\mu_{(0)} h^\nu_{(0)} Q^{(0)(0)}, \quad (14.10)$$

$${}^*Q^{\nu(0)} = h^\nu_a Q^{(0)a}, \quad Q_*^{\mu a} = h^\mu_{(0)} Q^{(0)a}. \quad (14.11)$$

В некоторых случаях смешанных компонент не возникает.

Таким образом, специальные мировые компоненты могут быть найдены по соответствующим физическим компонентам и некоторой части обобщенных коэффициентов Ламе. Они — части мировых компонент, выделенные при рассечении суммации по локальным индексам. Компоненты ${}^*Q^\mu$, ${}^*Q^{\mu\nu}$ и т. д. содержат триаду \mathbf{e}_a в скрытом виде («спрятанная триада» [480]).

Для частного случая (при условиях $h_0^a = 0$) специальные мировые компоненты под названием «ограниченные 4-тензо-

ры» рассматриваются Мёллером [25]. Они ведут себя как тензоры и при более ограниченных группах координатных преобразований. На этом остановимся в § 21.

В отличие от мировых компонент специальные компоненты не являются инвариантами относительно 6-параметрических преобразований $L(x)$ и зависят от выбора калибровочных условий, будучи специально отнесенными к тому или иному $(3+1)$ -расщеплению. В частности,

$$\begin{aligned} (\overset{*}{Q}^\mu)' &\equiv h^{\mu_a} Q^{a'} = h^{\mu_k} Q^k - h^{\mu_{(0)}} Q^{(0)'} = \\ &= \overset{*}{Q}^\mu + h^{\mu_{(0)}} Q^{(0)} - L_{(0)'}{}^k L^{(0)'}{}_{\ n} h^{\mu_k} Q^n \neq \overset{*}{Q}^\mu, \end{aligned} \quad (14.12)$$

т. е. рассечение суммы сопровождается рассечением 6-параметрической группы Лоренца на ее подмножества, в том числе на подгруппы. Очевидно, что $\overset{*}{Q}^\mu$ — инвариант относительно 3-параметрической подгруппы $L(x)$ пространственных вращений. Относительно этой подгруппы $Q_*^{\lambda'}$ — скаляр.

Многие задачи ОТО решаются в рамках фиксированной системы отсчета. Тогда вопрос о трансформационных свойствах упрощается, так как поле $e_{(0)}(x^\lambda)$ задано и могут преобразовываться лишь хоро-величины. В этих задачах разумно упростить обозначения, отбросив на время индексы (0) (пока изучаются величины и соотношения между ними только в фиксированной (произвольно) системе отсчета). При этом стирается внешняя разница между некоторыми величинами, вызванная их происхождением. Так, в соотношении (14.7)

3-вектор $\overset{*}{Q}^\alpha$ происходит от компонент вектора Q^a . Компоненты $Q^{\alpha(0)}$ в первом из соотношений (14.11) происходят от компонент тензора 2-го ранга. В упрощенных обозначениях

$$\overset{*}{Q}^{\nu(0)} = \overset{*}{Q}^{(\nu)} = h^\alpha_a Q^a, \quad (14.13)$$

что по форме совпадает с выражением (14.7)*). Естественно, что и звездочка над знаком равенства, предупреждающая об упрощениях, для простоты обычно не пишется.

Таким образом, трансформационные свойства специальных мировых компонент имеют двойственный характер, связанный и с p - и с $L(x)$ -преобразованиями. Продолжим их рассмотрение в главе V.

14.3. Физические время, расстояние и время задержки в тетрадном представлении ОТО. Отведем этим трем понятиям отдельный пункт, поскольку все они важны в принципе, используются в приложениях. В частности, в главах I и II они уже привлекались для описания конкретных гравитационных

*) Согласно Схоутену, звездочка над равенством означает, что оно имеет место только в данной системе отсчета.

эффектов, а в § 24 они, вместе взятые, будут положены в основу анализа физической структуры добавочных аномалий.

Из (13.4) при $k=0$ следует выражение для элемента времени:

$$dx^{(0)} = h_{\mu}^{(0)} dx^{\mu}. \quad (14.14)$$

Будем называть его, оттеняя инвариантность относительно произвольного преобразования системы координат и отнесение к лоренцеву базису, физическим (истинным) временем, или собственным. Этот термин также отражает зависимость интеграла $\int dx^{(0)}$ от пути интегрирования, на чем остановимся в § 15. Элемент $dx^{(0)}$, очевидно, не является инвариантом относительно преобразований $L(x)$, что и подчеркивается наличием лоренцева индекса (0). Выделим $dx^{(0)}$ в квадратичной форме, рассекая суммацию по лоренцевым индексам:

$$\begin{aligned} \pm ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{(0)(0)} (dx^{(0)})^2 + \\ &+ \eta_{ab} dx^a dx^b = -c^2 (dt^{(0)})^2 + dl^2. \end{aligned} \quad (14.15)$$

В частных случаях

$$(ds)_{dx^a=0} = c dt^{(0)}, \quad (ds)_{dt^{(0)}=0} = dl, \quad (14.16)$$

$$(-c^2 (dt^{(0)})^2 + dl^2)_{ds=0} = 0, \quad c = \frac{dl}{dt^{(0)}}.$$

Рассекая суммацию в системе уравнений (13.5)

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^{(0)} h_{\nu(0)} + h_{\mu}^a h_{\nu a} \equiv g_{\mu\nu*} + g_{\mu\nu}^*$$

выделим метрический тензор 3-пространства

$$g_{\mu\nu}^* \equiv h_{\mu}^a h_{\nu a}. \quad (14.17)$$

Рассмотрим отдельно второй член справа в формуле (14.15), т. е.

$$dl^2 \equiv \eta_{ab} dx^a dx^b = (\eta_{ab} h_{\mu}^a h_{\nu}^b) dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu}^* dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (14.18)$$

Будем называть

$$dl \equiv \sqrt{\eta_{ab} dx^a dx^b} = \sqrt{g_{\mu\nu}^* dx^{\mu} dx^{\nu}} \quad (14.19)$$

элементом физического, собственного расстояния, зависящего от сделанного выбора (3+1)-расщепления и соответствующего ему лоренцева базиса. Термин «собственный» подчеркивает также зависимость интеграла $\int dl$ от выбора пути интегрирования и инвариантность относительно произвольного преобразования координатной системы.

Введению в ОТО физического расстояния Эйнштейн придавал важное значение. Так, в рецензии на книгу Вейля «Пространство, время и материя» он писал: «...Я хотел бы, чтобы во втором издании был более отчетливо показан физический смысл расстояния между двумя точками (как непосредственного результата измерения с помощью масштабных линеек и часов). Это позволило бы достичь большей полноты изложения с точки зрения физика» [1, IV, с. 43].

Выразим условие (5.1) синхронизации по собственному времени с помощью тетрад в виде

$$dx^{(0)} = h_0^{(0)} dx^0 + h_\alpha^{(0)} dx^\alpha \stackrel{df}{=} 0. \quad (14.20)$$

Отсюда находим общее выражение для элемента координатного времени десинхронизации (или десинхронизма, последний термин встречается в литературе по космическим исследованиям биологического характера), записанное с помощью тетрад:

$$dx^0_{\text{дес}} = -h_\alpha^{(0)} dx^\alpha / h_0^{(0)}. \quad (14.21)$$

Оно эквивалентно выражению для элемента (5.3), записанному с помощью метрического тензора, а с переходом от ОТО к СТО оно принимает вид $dX^0 = L^0_\alpha dX^\alpha / L^0_0$, где X^k — голономные псевдодекартесовы координаты.

Остановимся на сравнении метрического и тетрадного путей введения элемента $dx^0_{\text{дес}}$ и на интересных частных случаях его метрического и тетрадных выражений. Для этого запишем общее выражение для интервала в следующих формах:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \begin{cases} g_{00} \left[(dx^0)^2 + 2 \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} dx^0 + \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{g_{00}} \right], & (14.22a) \\ g_{0\nu} dx^\nu dx^0 + g_{\beta\nu} dx^\nu dx^\beta, & (14.22b) \\ \eta_{kn} dx^k dx^n = -(dx^{(0)})^2 + dl^2, & (14.22c) \\ \tilde{\eta}_{kn} dx^k dx^n, \quad \tilde{\eta}_{kn} \neq \text{diag}(-1, 1, 1, 1). & (14.22d) \end{cases}$$

Для пространственно-подобного интервала, точки которого синхронизованы в смысле (5.1), из (14.22a) и (14.22c) следует соотношение (5.2). Оно имеет два решения — знаки перед корнем в соотношении (5.3) учитывают две возможности распространения изотропного сигнала или движения частицы в прямом и обратном направлениях.

Выделим из соотношения (5.3) случай распространения изотропного сигнала. Предварительно вспомним, ограничившись для простоты одномерным движением, что $dx^{(1)'} = L^{(1)'}_{(0)} dx^{(0)} + L^{(1)'}_{(1)} dx^{(1)}$. Отсюда при условии синхронизации (5.1) имеем

$dx^{(1)} = \sqrt{1 - \beta_{\text{л}}^2} dx^{(1)'}$, где $v_{\text{л}} = c\beta_{\text{л}}$ — локальная скорость, т. е. $(dx^{(1)})_{v_{\text{л}} \rightarrow c} \rightarrow 0$. Иллюстрируем это на рис. 15, где изображен изотропный вектор dx , удовлетворяющий условию $dx \cdot dx = 0$. Пусть в точке O заданы две локальные псевдодекартовы системы K и K' . Проекция изотропного вектора на эти системы будут соответственно равны $dx^{(0)} = AB$, $dl = dx^{(1)} = CD$ и $dx^{(0)'} = A'B'$, $dl' = dx^{(1)'} = C'D'$ (для простоты рис. 15 ограничен случаем, когда $dl = dx^{(1)}$ и принято $c = 1$). Из рисунка видно, что по мере приближения скорости v системы K' к скорости света c в вакууме как временная линия, так и собственное пространство системы приближаются к изотропной линии. При этом точки A' , B' , C' , D' приближаются к точке O , а тем самым точки A' и B' , а также C' и D' сближаются соответственно друг с другом. В $\underline{\nu}$ пределе

$$\lim_{v \rightarrow c} A'B' \equiv \vec{dt}^{(0)} = 0, \quad \lim_{v \rightarrow c} C'D' \equiv \vec{dl} = 0 \quad (14.23)$$

понятие проекций изотропного вектора исчезает.

В случае (14.23) выражение (5.3) упрощается:

$$\begin{aligned} (dx_{\pm}^0)_{dl=0, dx^{(0)}=0} &= (dx^0_{\text{дес}})_{ds=0} = \\ &= - \frac{g_{0\alpha} dx^{\alpha}}{g_{00}} \pm \sqrt{\frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}' - g_{00} g_{\alpha\beta}}{(g_{00})^2}} dx^{\alpha} dx^{\beta}. \end{aligned} \quad (14.24)$$

Отсюда для полного промежутка времени десинхронизации, когда сигнал, ушедший в прямом направлении, вернется в ту же точку,

$$(dx^0_{\text{дес}})_{+} - (dx^0_{\text{дес}})_{-} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta}' - g_{00} g_{\alpha\beta})} dx^{\alpha} dx^{\beta}.$$

Выделим теперь из (5.3) случай, соответствующий движению частиц с досветовой скоростью. Для этого, используя (14.22б) и (14.22с), представим (5.3) в виде

$$\begin{aligned} dx^0_{\text{дес}} &= \\ &= - \frac{g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} dx^{\nu} - \frac{dl}{d\tau} dl}{g_{0\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}}. \end{aligned} \quad (14.25)$$

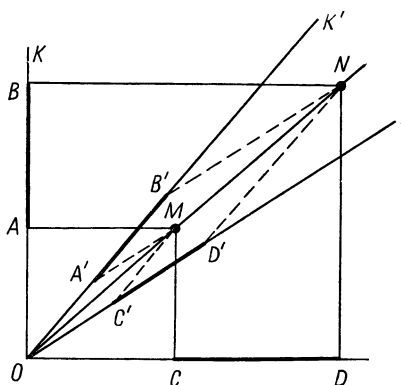


Рис. 15

Это выражение при условии сопутствия частице локальной лоренцевой системы, когда

$$dl/d\tau = 0,$$

принимает вид (5.4), т. е.

$$dx^0_{\text{дес}} = - \frac{g_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\tau} dx^\beta}{g_{0\nu} dx^\nu/d\tau}. \quad (14.26)$$

Если частице сопутствует также система координат, а тогда

$$\dot{x}^\beta = 0,$$

то в уравнении (14.25)

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = (g_{\alpha\beta} - g_{0\alpha} g_{0\beta} / g_{00}) dx^\alpha dx^\beta$$

и оно, упрощаясь, принимает вид

$$dx^0_{\text{дес}} = - g_{0\beta} dx^\beta / g_{00}. \quad (14.27)$$

Это следует и из подстановки $\dot{x}^\beta = 0$ в выражение (14.26).

Те же случаи могут быть выделены и из общего тетрадного представления элемента $dx^0_{\text{дес}}$, т. е. из уравнения (14.21). Условие сопутствия $dl/d\tau = 0$ может рассматриваться как три калибровочных условия $h_\mu^a \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$ (см. подробнее § 16). Подставляя их в равенство (14.21), также приходим к выражению (14.26). Последнее можно применять и к изотропному сигналу, заменив в нем τ на другой параметр вдоль изотропной линии, отличный от нулевого, и учтя специфические для этого случая значения постоянных интегрирования в первых интегралах уравнений изотропной линии.

Наконец, найдем в общем виде связь между временем движения (распространения) и временем десинхронизации. Для частицы с досветовой скоростью

$$\frac{\dot{x}_\alpha dx^\alpha}{dx^0} = \frac{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}{\dot{x}^0} = - \frac{1 + \dot{x}_0 \dot{x}^0}{\dot{x}^0} = - \frac{1 + g_{0\mu} \dot{x}^0 \dot{x}^\mu}{\dot{x}^0}.$$

Для изотропного сигнала

$$\frac{\dot{x}_\alpha dx^\alpha}{dx^0} = \frac{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}{\dot{x}^0} = - \dot{x}_0 = - g_{0\nu} \dot{x}^\nu, \quad \dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{dp}, \quad dp \neq d\tau.$$

Следовательно, для элементов dx^0 —времени движения частицы и времени распространения сигнала соответственно

$$(dx^0)_{v<c} = -\frac{g_{\alpha\mu}\dot{x}^0\dot{x}^\mu dx^\alpha}{1 + g_{0\nu}\dot{x}^0\dot{x}^\nu}, \quad (dx^0)_{v=c} = -\frac{\dot{x}_\alpha dx^\alpha}{\dot{x}_0}. \quad (14.28)$$

Сравнивая (14.28) с элементом времени десинхронизации (14.26), находим соответственно

$$(dx^0)_{v=c} = dx^0_{\text{дес.}} \quad (14.29)$$

Отсюда можно заключить, во-первых, что связь времени десинхронизации существенно меняется по мере $v \rightarrow c$, что, в частности, и было видно при рассмотрении эффектов 32a — 32c, во-вторых, что эффект «времени задержки», следующий из десинхронизации, является универсальным и в пределе $v = c$ вырождается в эффект Шапиро. Продолжим рассмотрение времен десинхронизации и задержек в § 24 в зависимости от гравитирующих и пробных параметров.

14.4. Тетрадное представление ОТО в «полунолевых» и нулевых тетрадах. Формализм Ньюмена—Пенроуза. Задача введения физических компонент ОТО потребовала ее перестройки относительно обобщенных коэффициентов Ламе как проекций единичной лоренцевой тетрады. Это ограничило возможный выбор метрического тензора СТО введением лишь $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. В то же время нулевые векторы СТО — важнейший составной элемент СТО, вытекающий из требования предельности скорости света. Поэтому требование ОТО локальной справедливости СТО допускает в ОТО локальные метрические тензоры СТО недиагональные, в частности, у которых $\eta_{(0)(0)} = \eta_{(1)(1)} = 0$, $\eta_{(0)(1)} \neq 0$. Поэтому наряду с системами уравнений (13.3), (13.5) введем соотношения

$$(g_{\mu\nu})_{\text{ОТО}} = Z_\mu^k Z_\nu^n \tilde{\eta}_{kn}, \quad \tilde{\eta}_{kn} = Z^k_h Z^l_n g_{\mu\nu}, \quad (14.30)$$

где $\tilde{\eta}_{kn}$ или «полунолевой» (полудиagonalный) метрический тензор СТО, или нулевой. На системе уравнений (14.30) и основан широко используемый в ОТО формализм Ньюмена—Пенроуза [500—510, 512, 513].

Нулевая тетрада Z_k и связанная с ней локальная «световая» координатная система с квазикоординатами

$$d\tilde{x}^k = Z_\mu^k dx^\mu \quad (14.31)$$

чужды нерелятивистской физике. Как отмечалось (п. 12.5) в выдержке из монографии Ф. Клейна, «...измерение длин на такой прямой <нулевой> невозможно» [493, с. 151].

Если рассматривать коэффициенты Ламе как преследующие цель введения физических (измеряемых) компонент, то переход от h_μ^k к Z_μ^k целесообразно рассматривать как новое направление в тетрадном представлении ОТО. Поэтому сохра-

ним название «обобщенные коэффициенты Ламе» только за h_{μ}^k , связанным с $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, а Z_{μ}^k будем кратко называть нулевыми (полунолевыми) тетрадами. Однако в силу (14.30), где $(g_{\mu\nu})$ — решения эйнштейновых уравнений тяготения, коэффициенты Z_{μ}^k в равной мере можно рассматривать как полевые функции, как гравитационные потенциалы.

Действительно, подставляя недиагональный метрический тензор $\tilde{\eta}_{kn}$ в систему (14.30), получаем возможность разыскать при заданных $g_{\mu\nu}$ соответственно полуизотропные или изотропные тетрады, очевидно, с точностью до произвольных функций. Для однозначного разыскания Z_{μ}^k еще нужны добавочные условия, эквивалент калибровочных условий. Аналогично предыдущему умножение уравнений (13.1) на Z_{ν}^k с последующим суммированием по ν приводит к тетрадному представлению эйнштейновых уравнений тяготения в нулевых (полунолевых) тетрадах:

$$R_{\mu k} - \frac{1}{2} Z_{\mu k} R = -\kappa T_{\mu k}. \quad (14.32)$$

Представление ОТО в нулевых (световых) тетрадах получило название формализма Ньюмена—Пенроуза (формализма НП). В нем нашла распространение локально-безындексная запись за счет обозначений разных нулевых векторов разными коренными буквами:

$$Z_{\mu}^{\nu} = (l^{\mu}, n^{\mu}, m_{\mu}, \bar{m}_{\mu}), \quad (14.33)$$

$$l^{\mu} l_{\mu} = 0, \quad n^{\mu} n_{\mu} = 0, \quad m^{\mu} m_{\mu} = \bar{m}^{\mu} \bar{m}_{\mu} = 0,$$

где черта — знак комплексного сопряжения. В этих обозначениях система (14.30) принимает вид

$$g_{\mu\nu} = 2 \{l_{(\mu} n_{\nu)} - m_{(\mu} \bar{m}_{\nu)}\}. \quad (14.34)$$

Как уже отмечено, формализм НП сходит с пути, намеченного Ламе, в том смысле, что уже не преследует цели ввести измеряемые величины. Локальные компоненты, например

$$A^k = Z_{\mu}^k A^{\mu}, \quad (14.35)$$

уже не являются образами в теории результатов измерения. С триадным формализмом Ламе НП-формализм связывают лишь некоторые формальные аналогии. НП-формализм обязан новым возможностям СТО и оказался весьма плодотворным при решении в ОТО задач на излучение, классификацию полей тяготения, включение спинорных полей в ОТО и др. По-

этому по НП-формализму в ОТО имеется большая литература. Ему посвящены недавние обстоятельные обзоры [501—503], где приведены основы НП-метода в ОТО, его применения, обширная библиография (см. также библиографию в работах [35, 511]). В случае полуизотропных тетрад формализм связывают с именами Героча—Хелда—Пенроуза. В публикациях по НП-формализму подчеркивается, что изотропные тетрады определяются неоднозначно. Действительно, соотношения (14.30) — инварианты относительно преобразований комплексной группы Лоренца. В частности, этот вопрос обсуждается в работе [501, с. 88, 89]. При этом обращается внимание на 4-параметрическую подгруппу группы Лоренца с двумя действительными и одним комплексным параметром. Однако вопрос о выборе калибровочных условий для изотропных тетрад еще не получил всестороннего развития. Он становится актуальным в связи с ростом применений аппарата НП для решения задач ОТО [501—503, 512, 513], а также в связи с эффективным введением в ОТО комплексных координат [514 и др.]. Их применение позволило получить не только отдельные новые точные решения уравнений поля Эйнштейна [515, 516], но и целые классы таких решений (см., например, [501—503, 517, 518]). Если все векторы тетрады изотропны, то решениями уравнений Эйнштейна могут быть метрики типа (см. [519])

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (H + iF) k_{\mu} k_{\nu}, \quad k_{\mu} k^{\mu} = 0, \quad (14.36)$$

обобщающие известный класс решений Керра—Шилда [520]. Обычно ограничиваются рассмотрением лишь «действительных срезов» решений уравнений Эйнштейна [506—509, 521]. Устранить мнимую часть метрики можно и специальным выбором комплексной тетрады. Как показано в работе [523], этот подход естественным образом связан с методом аналитического продолжения. Согласно [522—527], большая роль в формализме Ньюмена—Пенроуза принадлежит преобразованиям группы $SL(2, \mathbb{C})$, а также группы $SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{C})$ (накрывающей для $SO(4, \mathbb{C})$). Это становится особенно наглядным при записи уравнений Эйнштейна в форме уравнений Янга—Миллса [522, 527], составляющих основу калибровочной теории гравитации. Один из ее вариантов (с группой $SL(2, \mathbb{C})$ в качестве калибровочной) развивается в [526, 528, 529]. В последнем случае комплексные коэффициенты вращения Риччи, см. § 15 (спиновые коэффициенты Ньюмена—Пенроуза), выполняют роль потенциалов, а тетрадные компоненты комплексного тензора Вейля — напряженностей поля Янга—Миллса и преобразуются в соответствии с группой $SL(2, \mathbb{C})$ [522, 527]. В связи с этим представляет интерес выяснить, генерируют ли при определенных условиях подгруппы комп-

лексных преобразований координат ОТО соответствующие подгруппы преобразований комплексной группы Лоренца, а также установить ковариантность относительно подгрупп комплексной группы Лоренца различных вариантов калибровочных условий, которыми дополняют систему уравнений (14.30). Такого рода вопросы применительно к вещественным тетрадам рассматриваются в главе V.

14.5. Общий тетрадный метод. Введение в ОТО метрического тензора $\eta_{kn} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ использует требование о локальной справедливости СТО только частично. В СТО, кроме этого тензора, возможно введение других постоянных метрических тензоров, образованных не только единичными, но и нулевыми векторами. Поэтому в общем случае в ОТО имеет место система уравнений

$$(g_{\mu\nu})_{\text{ОТО}} = e_{\mu}{}^k e_{\nu}{}^n \eta_{kn}, \quad (14.37)$$

в которой под η_{kn} уже понимается произвольный лоренц-инвариантный метрический тензор с постоянными компонентами. Объединяя уравнения (13.8) и (14.32) и переходя к коллективной записи, получаем

$$R_{\mu k} - \frac{1}{2} e_{\mu k} R = -\kappa T_{\mu k}. \quad (14.38)$$

Это и есть общий случай тетрадного представления эйнштейновых уравнений тяготения. Они вместе с координатными условиями и дополнительными калибровочными условиями составляют основу общего тетрадного метода с двумя ветвями — $e_{\mu k} = h_{\mu k}$ и $e_{\mu k} = Z_{\mu k}$. Так, при обсуждении тетрадного представления уравнений Эйнштейна в [23, с. 374] подчеркивается: «Что касается произвольно задаваемой матрицы η_{ab} $\langle a, b = 0, 1, 2, 3 \rangle$, то наиболее естественный ее выбор — в «галилеевой» форме (т. е. диагональная матрица с элементами 1, -1 , -1 , -1); при этом реперные векторы ... взаимно ортогональные, причем один из них времениподобен, а три других — пространственноподобны. Подчеркнем, однако, что такой выбор отнюдь не обязателен...» Во многих изложениях тетрадной формулировки ОТО, например в монографиях [25, 530], с самого начала ограничиваются единичной тетрадой, не оговаривая, что этим сужается учет требования ОТО локальной справедливости СТО и соответствующие этому возможности аппарата.

Заметим, наконец, что четверка векторов в обоих разветвлениях тетрадного представления вводится в общем случае. При решении многих частных задач введение всех четырех векторов излишне. Общий тетрадный метод охватывает все случаи $n \leq 4$, где n — число векторов единичных или нулевых.

На это, в частности, обращается внимание в книге [23, с. 375]: «...Изложенные построения, по существу, никак не связаны с четырехмерностью метрики». Это, очевидно, следствие того, что сам тетрадный метод ОТО является частным случаем общего метода, « n -байнов» при n произвольном. На случаях $n < 4$ в ОТО специально остановимся далее, прежде всего в п. 16.1. Использование только части векторов лоренцева базиса, например только хроно-монады, может оказаться полезным не только при рассмотрении закономерностей в рамках соответствующих подпространств, но и при некоторых общих построениях в 4-пространстве ОТО.

§ 15. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕТРАДНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОТО (ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИЗА)

15.1. Неголономность квазиординат. Изложим лишь самые необходимые элементы тензорного анализа в лоренцевом базисе, предполагая, что математический аппарат метрической формулировки ОТО известен. Более детальное рассмотрение аппарата тетрадной формулировки ОТО имеется в книгах [28, 35, 494, 531].

Коэффициенты постоянных лоренцевых преобразований, вводимых в пространстве Минковского, могут быть представлены в виде частных производных: $L^{k'}_n = \partial X^{k'} / \partial X^n = \text{const}$, где $X^{k'}$, X^n — глобальные, голономные псевдодекартовы координаты. Поэтому

$$\begin{aligned} d dX^{k'} &= \partial_{[r} L^{k'}_{n]} dX^r dX^n = 0, \\ d dX^{k'} &= \partial_r (L^{k'}_m dX^m) dX^r, \end{aligned} \quad (15.1)$$

что и дает возможность устанавливать конечные значения голономных координат X^k однозначно, вне зависимости от пути в данную точку. Наложим на систему (X^k) произвольным образом поле локальных псевдодекартовых систем $dx^{(m)}$. Тогда

$$\begin{aligned} d dx^{(h)} &= \partial_{[m} L_n^{(h)} dX^m dX^n \neq 0, \\ L_n^{(h)} &\neq \partial x^{(h)} / \partial X^n. \end{aligned} \quad (15.2)$$

В результате зависимости этого преобразования от точки дифференциалы псевдодекартовых координат, вообще говоря, неполные. Представим (15.2) в виде

$$d dx^{(h)} = L_n^{(p)} L_r^{(q)} \partial_{[n} L_r]^{(h)} dx^{(p)} dx^{(q)}. \quad (15.3)$$

Коэффициент в этом соотношении

$$\Omega^{(h)}_{(p)(q)} \stackrel{\text{df}}{=} L^r_{(q)} L^n_{(p)} \partial_{[r} L_{n]}^{(h)} = L_s^{(h)} \partial_{[(p)} L^s_{(q)]} \quad (15.4)$$

по определению является объектом неголономности. Найдем закон его преобразования, введя еще одну локальную неголономную систему координат на базе той же самой голономной псевдодекартовой системы координат:

$$\Omega^{(h)'}_{(n')(r)'} = L^i_{(r)'} L^j_{(n)'} \partial_{[i} L_{j]}^{(h)'}. \quad (15.5)$$

Чтобы найти связь $\Omega^{(h)'}_{(n')(r)'}$ с $\Omega^{(h)}_{(n)(r)}$, учтем, что $L_{(h)'}^{(n)} = L^r_{(h)} \cdot L_r^{(n)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Omega^{(h)'}_{(n')(r)' } &= L^{(h)'}_{(s)} L_{(r)'}^{(q)} L_{(n)'}^{(p)} \Omega^{(s)}_{(p)(q)} - \\ &- L^{(h)'}_p \partial_{[(r)'} L_{(n)'}^{(p)}], \end{aligned} \quad (15.6)$$

т. е. объект неголономности — более сложный геометрический объект, чем тензор.

Введем неголономные псевдодекартовы координатные системы (dx^k) на базе криволинейной голономной, заменив $L^k_{(n)}$ на обобщенные коэффициенты Ламе [28, 35, 531—533]*):

$$d dx^k = \partial_\mu (h^\mu_\nu dx^\nu) dx^\mu. \quad (15.7)$$

Тогда объект неголономности примет следующий вид:

$$d dx^k = \partial_{[\mu} h_{\nu]}^k dx^\mu dx^\nu = \Omega^k_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (15.8)$$

$$\Omega^k_{rs} \stackrel{\text{df}}{=} h^\mu_s h^\nu_r \partial_{[\mu} h_{\nu]}^k = h_\nu^k \partial_{[r} h^{\nu]}_s]. \quad (15.9)$$

Переход от одной неголономной координатной системы к другой неголономной, если они введены на базе одной и той же голономной криволинейной системы координат, происходит также посредством обобщенного лоренцева преобразования, но уже зависящего от криволинейных голономных координат:

$$dx^{k'} = L^{k'}_n dx^n = h_\mu^{k'} dx^\mu; \quad h_\mu^{k'} = L^{k'}_n h_\mu^n. \quad (15.10)$$

При этом объект неголономности преобразуется по закону (15.6), в который входит зависимость $L^{k'}_n$ не от X^m , но от x^λ . Изменение опорной криволинейной системы, поскольку

$$\partial_{[\sigma'} P_{\rho']}^\lambda = 0, \quad P_{\rho'}^{\lambda'} = \partial_{\rho'} x^{\lambda'}, \quad (15.11)$$

*) В дальнейшем будем помещать в скобки лишь численные значения латинских индексов.

сохраняет объект неголономности (15.9) неизменным. Соотношения (15.7)—(15.10) имеют место как в СТО, так и в ОТО.

Эйнштейн, говоря о локальных псевдодекартовых координатах, подчеркивал, что «...они не являются полными дифференциалами» [1, I, с. 355]. На неполноту дифференциала собственного времени в СТО обращал внимание и Минковский [35, с. 11].

Таким образом, математический аппарат тетрадной формулировки ОТО базируется на общих математических построениях. Он уже имеется в основополагающей монографии Риччи [534]. С ним можно познакомиться по многим курсам тензорного анализа [535—540]. Величины, зависящие от пути, использовались в работе [541]. Вопросы интегрирования в неголономных координатных системах, в частности, рассматривал Вагнер [542].

15.2. Коэффициенты вращения Риччи. Перейдем к сравнению векторов лоренцева базиса в двух бесконечно близких точках, т. е. рассмотрим их параллельный перенос. Переход в СТО от голономной к неголономной псевдодекартовой системе координат приводит к коэффициентам связности, отличным от нуля. Действительно

$$\begin{aligned} \Gamma^{(l)}_{(m)(p)} &\equiv \gamma^{(l)}_{(m)(p)} = L_r^{(l)} L^n_{(m)} L^r_{(p)} \left\{ \begin{matrix} k \\ nr \end{matrix} \right\} + L_r^{(l)} \partial_{(p)} L^r_{(m)} = \\ &= L_r^{(l)} L^s_{(p)} \partial_s L^r_{(m)}, \quad \left\{ \begin{matrix} k \\ nr \end{matrix} \right\} = 0, \quad \eta_{kn} = \text{const.} \end{aligned} \quad (15.12)$$

Это — частный случай коэффициентов вращения Риччи [531, 534—538]. Заменим теперь псевдодекартову голономную на криволинейную голономную систему координат с коэффициентами связности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$.

Преобразуя $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ в СТО или ОТО к неголономной псевдодекартовой системе, находим

$$\gamma^k_{mn} = h_\mu^k h^v_m h^\lambda_n \Gamma^\mu_{\nu\lambda} + h_\sigma^k \partial_n h^\sigma_m = h_\mu^k h^\lambda_n \nabla_\lambda h^\mu_m. \quad (15.13)$$

Выделим симметричную часть

$$\gamma_{(km)n} = \frac{1}{2} h^\lambda_n [\nabla_\lambda (h_{\mu k} h^\mu_m) + h_{\mu m} h_{\lambda k} \nabla_\lambda g^{\mu\kappa}]. \quad (15.14)$$

Поскольку в СТО и ОТО выполняются условия $\nabla_\lambda \eta_{km} = 0$, $\nabla_\lambda g^{\mu\kappa} = 0$, то $\gamma_{(km)n} = 0$. Следовательно,

$$\gamma_{kmn} = -\gamma_{mkn}, \quad (15.15)$$

т. е. в неголономной системе псевдодекартовых координат коэффициенты связности по первым двум индексам антисимметричны.

ричны. Они являются коэффициентами вращения Риччи. Соответствующий им параллельный перенос сопровождается бесконечно малыми лоренцевыми поворотами базисных векторов e_k . Матрица этого лоренцева преобразования имеет вид $\omega^k_n = \gamma^k_{n\lambda} dx^\lambda$ [35, § 12]. Очевидно,

$$\gamma_{r's'\lambda} = L_{r's'}{}^k L_s{}^m \gamma_{km\lambda} + L_{r'n} \partial_\lambda L_s{}^n. \quad (15.16)$$

Умножая (15.13) на $h_\sigma{}^n$ и суммируя, получим

$$\gamma^k_{m\sigma} = h_\sigma{}^n \gamma^k_{mn} = h_\mu{}^k \nabla_\sigma h^\mu{}_m$$

Запишем преобразование, обратное (15.13):

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = h^\mu{}_k h_\nu{}^n \gamma^k_{n\lambda} + h^\mu{}_k \partial_\lambda h_\nu{}^k. \quad (15.17)$$

Введем криволинейные компоненты коэффициентов вращения Риччи:

$$\gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \equiv h^\mu{}_k h_\nu{}^m h_\lambda{}^n \gamma^k_{mn}, \quad \gamma_{\mu\nu\lambda} = -\gamma_{\nu\mu\lambda}. \quad (15.18)$$

Таким образом,

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = \gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + h^\mu{}_\tau \partial_\lambda h_\nu{}^\tau \equiv \gamma^\mu{}_{\nu\lambda} + \bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda}, \quad (15.19)$$

где $\bar{\Gamma}^\mu{}_{\nu\lambda} \equiv h^\mu{}_k \partial_\lambda h_\nu{}^k$ — коэффициенты связности абсолютного параллелизма [1, II, с. 223; 531, 539, 540]. Поскольку в СТО и ОТО в силу римановости геометрии $\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} = 0$, из (15.13) и (15.9) следует

$$\gamma^k_{[mn]} = h_\sigma{}^k \partial_{[n} h^\sigma{}_{m]} = -\Omega^k{}_{mn}, \quad (15.20)$$

$$\Omega_{kmn} = \frac{1}{2} (\gamma_{kmn} - \gamma_{knm}). \quad (15.21)$$

Из (15.21) вытекает выражение

$$\gamma_{mpq} = \Omega_{mpq} + \Omega_{pmq} + \Omega_{qmp}, \quad (15.22)$$

непосредственно показывающее, что коэффициенты вращения Риччи отличны от нуля лишь в неголономных системах координат.

15.3. Трансформационные свойства коэффициентов вращения Риччи относительно лоренцевой подгруппы. Следуя работе [543], остановимся детальнее на преобразовании γ_{kmn} относительно локальных преобразований Лоренца. В общем случае:

$$\gamma^{a' b' c'} = L^{a'}{}_k L_{b'}{}^m L_{c'}{}^n \gamma^k_{mn} + L^{a'}{}_k \partial_{c'} L_{b'}{}^k, \quad (15.23)$$

$$\gamma^{a' b' (0)'} = L^{a'}{}_k L_{b'}{}^m L_{(0)'}{}^n \gamma^k_{mn} + L^{a'}{}_k \partial_{(0)'} L_{b'}{}^k, \quad (15.24)$$

$$\gamma^{(0)'}{}_{a' b'} = L^{(0)'}{}_k L_{a'}{}^m L_{b'}{}^n \gamma^k_{mn} + L^{(0)'}{}_k \partial_{b'} L_{a'}{}^k, \quad (15.25)$$

$$\gamma^{(0)'}_{a'(0)'} = L^{(0)'}_{\quad k} L_{a'}{}^m L_{(0)'}{}^n \gamma^k_{mn} + L^{(0)'}_{\quad k} \partial_{(0)'} L_{a'}{}^k. \quad (15.26)$$

Отсюда видно, что компоненты коэффициентов вращения Риччи $\gamma^{(0)'}_{ab}$ и $\gamma^{(0)'}_{a(0)'}$ являются тензорами относительно подгруппы 3-пространственных поворотов лоренцевой триады. Действительно, из (15.26) следует, что при $L^{(0)'}_a = 0$, $L^{(0)'}_{(0)'} = 1$ закон преобразования упрощается:

$$\begin{aligned} \gamma^{(0)'}_{a'b'} &= L_{a'}{}^a L_{b'}{}^b \gamma^{(0)}_{ab}, \\ \gamma^{(0)'}_{a'(0)'} &= L_{a'}{}^a \gamma^{(0)}_{a(0)}. \end{aligned} \quad (15.27)$$

Поэтому в рамках заданной системы отсчета (в смысле пункта 13.9) преобразованиями триады эти компоненты нельзя ни создать, ни уничтожить, если первоначально они отличались от нуля. Их физическая интерпретация подсказывается следующими соображениями.

Отнесем пространственные уравнения геодезической к лоренцеву базису

$$\begin{aligned} \ddot{x}^a + \gamma^a_{\quad kn} \dot{x}^k \dot{x}^n &= \ddot{x}^a + \gamma^a_{(0)(0)} (\dot{x}^{(0)})^2 + \gamma^a_{(0)b} \dot{x}^{(0)} \dot{x}^b + \\ &+ \gamma^a_{b(0)} \dot{x}^b \dot{x}^{(0)} + \gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \end{aligned}$$

Нерелятивистский предел этих уравнений подсказывает, что член $\gamma^a_{(0)(0)}$ следует отождествить с ускорением, а член $\gamma^a_{(0)b} \dot{x}^b$ — с силами инерции [543]. В нерелятивистской механике сплошной среды при наличии поля скоростей u^k вводят ускорение du_b/dt , тензор скоростей деформации $\partial_{(a} u_{b)}$, тензор скоростей вращения $\partial_{[a} u_{b]}$ (см., например, [544]). Естественно обобщить, переходя к СТО и ОТО, эти понятия посредством соотношений

$$\begin{aligned} A_b &\equiv Du_b/dx^{(0)} = du_b/dx^{(0)} - \gamma^k_{bn} u_k u^n, \\ D_{ab} &\equiv \nabla_{(a} u_{b)} = \partial_{(a} u_{b)} - \gamma^k_{(ba)} u_k, \\ A_{ab} &\equiv \nabla_{[a} u_{b]} = \partial_{[a} u_{b]} - \gamma^k_{[ba]} u_k. \end{aligned} \quad (15.28)$$

При $\gamma^k_{mn} = 0$ эти величины переходят в указанные нерелятивистские. Для частиц, сопутствующих системе отсчета, а следовательно, и для частиц, ее образующих (тел отсчета), имеем $dx^a = 0$, $u^k = \delta^k_{(0)}$. В этом случае [543]

$$A_b = \gamma_{b(0)(0)}, \quad D_{ab} = \gamma_{(0)(ab)}, \quad A_{ab} = \gamma_{(0)[ab]}.$$

Следовательно, тензорные относительно пространственной лоренцевой подгруппы компоненты коэффициентов вращения Риччи можно рассматривать как динамические характеристики систем отсчета, как меру их неинерциальности. Продолжим их рассмотрение в главе V.

15.4. Кривизна и кручение в неголономных псевдодекартовых координатах. Образует из γ^k_{mn} величину той же конструкции, что $R^\mu_{\nu\lambda\sigma}$ из $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

$$r^k_{lmn} \equiv 2\partial_{[m}\gamma^k_{|l|n]} + 2\gamma^k_{q[m}\gamma^q_{|l|n]}. \quad (15.29)$$

Подставив в формулу (15.29) соотношения (15.13) и (15.15) после длительных преобразований, не требующих дополнительных условий, получим

$$r^k_{lmn} = h^\mu_l h^\nu_m h^\sigma_n h_\lambda^k R^\lambda_{\mu\nu\sigma} - 2\gamma^k_{lq}\Omega^q_{mn}. \quad (15.30)$$

Таким образом, r^k_{lmn} не является тензором, и если криволинейная система установлена в плоском пространстве, то

$$r_{klmn} = -2\gamma_{klq}\Omega^q_{mn} \neq 0. \quad (15.31)$$

Поэтому с переходом к неголономным псевдодекартовым координатам естественно принять определение кривизны, сохраняющее ее тензором:

$$\begin{aligned} R^k_{nrs} &\equiv h_\sigma^k h^p_n h^\mu_r h^\nu_s R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \\ &= h^\mu_r h^\nu_s R^k_{n\mu\nu} = r^k_{nrs} + 2\gamma^k_{nq}\Omega^q_{rs}, \end{aligned} \quad (15.32)$$

где

$$R^k_{n\mu\nu} \equiv h_\sigma^k h^p_n R^\sigma_{\rho\mu\nu}. \quad (15.33)$$

В СТО $R^k_{n\mu\nu}$ и R^k_{nrs} в отличие от r^k_{nrs} равны нулю. В ОТО они являются конструктивным элементом эйнштейновых уравнений тяготения в тетрадном представлении.

Заменяя в равенстве (15.33) коэффициенты $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, входящие в $R^\sigma_{\rho\mu\nu}$, суммой двух членов, согласно выражению (15.17), после преобразований, не требующих никаких дополнительных условий, находим

$$R^k_{n\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\gamma^k_{|n|\nu]} + 2\gamma^k_{p[\mu}\gamma^p_{|n|\nu]}. \quad (15.34)$$

Соответствующий обход по замкнутому контуру при этом задан в определенной голономной системе координат. Задание контура неголономными координатами приводит в (15.32) ко второму, дополнительному члену, зависящему от объекта неголономности.

Относительно голономных координатных преобразований антисимметричная часть $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$, т. е. кручение, является тензором

$$\begin{aligned} S^{\mu'}_{\rho'\sigma'} &= \Gamma^{\mu'}_{[\rho'\sigma']} = P^{\mu'}_{\mu} P_{[\rho'}{}^{\rho} P_{\sigma']}{}^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma} + \\ &+ P^{\mu'}_{\lambda} \partial_{[\sigma'} P^{\lambda}_{\rho']} = P^{\mu'}_{\mu} P_{\rho'}{}^{\rho} P_{\sigma'}{}^{\sigma} \Gamma^{\mu}_{[\rho\sigma]}. \end{aligned} \quad (15.35)$$

В СТО и ОТО оно равно нулю, так как $\Gamma_{[\rho\sigma]}^u = 0$. С переходом к неголономной системе естественно, как и в случае с кривизной, определить кручение, сохранив его тензором:

$$S^k_{mn} \stackrel{df}{=} \gamma^k_{[mn]} + \Omega^k_{mn}, \quad (15.36)$$

$$S^{l'}_{m's'} = \gamma^{l'}_{[m's']} + \Omega^{l'}_{m's'} = L^{l'}_l L_m{}^m L_{s'}{}^s S^l_{ms}. \quad (15.37)$$

Выражения (15.32)—(15.34) и (15.36) понадобятся в главе V при рассмотрении специальных формулировок ОТО.

ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ КАЛИБРОВОЧНЫХ УСЛОВИЙ

Система отсчета = система координат + калибровка.

Г. ВЕЙЛЬ

Понятие системы отсчета может быть выведено из понятия лаборатории...

В. А. ФОК

ВВЕДЕНИЕ

Практика использования тетрадного представления ОТО для решения конкретных задач не ограничилась разысканием из системы (13.5) при данном $g_{\mu\nu}$ лишь одного из возможных частных решений. Исследовались разные частные решения, т. е. вводились разные калибровочные условия. Более или менее явный выбор этих условий подчинен у разных авторов разным мотивам. Иллюстрируем это несколькими примерами.

Так, Ю. Б. Румер [494, с. 111] говорит: «Поскольку ортогональное преобразование <локальное лоренцево> определяется $\frac{1}{2} n(n-1)$ параметрами, матрицу Ламе всегда можно привести к нормальному треугольному виду

$$\begin{pmatrix} \Omega_1(1) & \Omega_1(2) & \dots & \Omega_1(n) \\ 0 & \Omega_2(2) & \dots & \Omega_2(n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_n(n) \end{pmatrix},$$

при котором она, как и симметричная матрица Гаусса $\|g_{\sigma\tau}\|$, определяется лишь $\frac{1}{2} n(n-1)$ элементами». Такой выбор калибровочных условий, требующий равенства нулю поддиагональных элементов матрицы Ламе, удобен тем, что применительно к ОТО оставляет систему (13.5) или систему эйнштейновых уравнений (вместе с координатными условиями),

содержащих число неизвестных, равное числу независимых уравнений.

В книге [23] приводится другая мотивировка: «...Возможны ситуации, когда по тем или иным причинам (например, по свойствам симметрии метрики) целесообразен выбор неортогональной тетрады» (имеется в виду с недиагональной матрицей) и в примечании уточняется, что целесообразный выбор тетрады может диктоваться стремлением придать определенную форму dl^2 -пространственной части ds^2 .

В. И. Родичев ввел калибровочные условия в виде дифференциальных уравнений $\nabla_\lambda h^{\lambda\kappa} = 0$ [531]. Они интересны тем, что этим условиям можно придать форму условий гармоничности (квазикоординат), подобно условиям де Дондера—Фока, и тем, что они способствуют вскрытию аналогии между тетрадным представлением ОТО и электродинамикой. Л. И. Седов в связи с получением «локального уравнения энергии» гравитационного поля, использовал полный набор из шести калибровочных условий, приводящий к «тетрадам А. З. Петрова» *): $W_{1020} = W_{1030} = W_{1031} = W_{1012} = W_{2030} = W_{2012}$, где $W_{\mu\nu\lambda\sigma}$ — тензор Вейля конформной кривизны [708]. Эти шесть уравнений относительно тетрад h_μ^{κ} направляют лоренцев базис e_κ по главным направлениям, соответствующим канонической форме тензора Вейля. Там же говорится, что вместо шести указанных калибровок можно ограничиться только тремя, выделяющими главное направление $e_{(0)}$ (см. далее — неполный набор, физическая часть калибровочных условий). Три остальных можно заменить другими калибровками, например условиями Ферми—Уолкера, которые, в частности, привлекаются к решению задачи об инерциальной навигации (см. далее § 18). Также в связи с исследованиями энергии гравитационного поля Н. В. Мицкевич предлагает условия, при которых векторы лоренцева базиса автоматически оказываются обобщенными векторами Киллинга [567].

В качестве калибровочных условий предлагается [543] выбирать равенства нулю динамических характеристик систем отсчета, т. е. компонент коэффициентов вращения Риччи (15.27), преобразующихся по тензорному закону при чисто пространственном локальном преобразовании Лоренца. В частности, в работе [624] при изучении эргосферы в поле Керра избирается калибровка $\gamma_{(0)(ab)} = 0$, которой требуется жесткость системы отсчета. Мотивы выбора этой калибровки физические. Можно было бы привести множество других мотивов выбора калибровочных условий, в частности следующий: «Существует много подходов к калибровке тетрад, но мы не будем на них

*) См.: Седов Л. И. «ДАН СССР», 1978, 240, 568; Желнорович В. А., Седов Л. И. «ПММ», 1978, 42, 771.

останавливаться, ограничившись концепцией одиночного наблюдателя, так как остальные подходы базируются на формальных соображениях, в лучшем случае чисто геометрических, а не физических» [567, с. 67]. В связи с этим отметим, что «концепция одиночного наблюдателя» входит в класс калибровок сопутствия, который будет рассмотрен в § 18, и что сказанное требует следующей расшифровки. В какой бы форме ни были заданы калибровочные условия, если они позволяют найти $h_{\mu(0)}$ как непрерывную функцию с достаточным числом производных, то тем самым они задают, вообще говоря, конгруенцию мировых линий, к которым касательна хроно-монада $e_{(0)}$. Каждая из мировых линий конгруенции — одиночный наблюдатель. Внешний вид калибровочных условий может наперед ничего не говорить об их физическом содержании, о характере задаваемой ими конгруенции. Это действительно имеет место во многих случаях. Их содержание, однако, вскрывается после использования таких калибровочных условий. В этом смысле они формальны, но лишь до их применения. После их привлечения к разысканию h_{μ}^k физический смысл принятых калибровочных условий выясняется. В частности, он может быть установлен разысканием с помощью свертка (13.23), т. е. $L^{k'n} = h_{\mu}^{k'} h^{\mu n}$, коэффициентов $L(x)$, если исходные $h^{\mu n}$ найдены при помощи калибровок с уже известным физическим содержанием. Может оказаться, что найденное преобразование $L^{k'n}(x^\lambda)$ весьма специально и имеет узкие рамки применимости и в этом смысле более формально, чем некоторые иные случаи. Если калибровочные условия содержат коэффициенты вращения Риччи, то их смысл может быть раскрыт выделением тех компонент этих коэффициентов, которые играют роль динамических характеристик. Так, например, калибровка вида $\nabla_{\lambda} \gamma^{[\mu\nu\lambda]} = 0$ *) как выясняется после раскрытия суммации, требует определенной, специальной связи между этими характеристиками. Это, по-видимому, сужает рамки ее применимости. Внешний вид калибровки обнаруживает лишь определенные свойства симметрии. Таким образом, общий подход к калибровочным условиям требует, чтобы оценка их физического содержания производилась не только по их внешнему виду до их применения, но и на основе их более детального изучения, включая результаты, полученные после их применения. В итоге все калибровочные условия с учетом сделанного выше замечания о непрерывности и дифференцируемости приводят к «концепции конгруенции наблюдателей». Постановка конкретной задачи укажет, следует ли произвести выбор одной из линий конгруенции и если да, то какой именно.

*) См. статью В. С. Брежнева, А. Г. Радынова в сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц» (М., 1970, вып. 4, с. 119).

Калибровочные условия являются лишь элементом ОТО, но элементом, лежащим в основе теории. Без них нельзя довести решение конкретных задач до однозначного разыскания физических компонент, т. е. до такого уровня, когда становится возможным сравнение с опытом. Коль скоро калибровочные условия — важный элемент ОТО и так как в литературе уже имеется некоторое множество их вариантов, и поскольку действительно в ряде случаев их физическое содержание еще не раскрыто, значит, они подлежат изучению. Вероятно, первые попытки приступить к систематическому изучению калибровочных условий ОТО были предприняты в работах [35, 558]. С тех пор их исследование пошло дальше. Уже представляется возможным перейти к построению специального раздела тетрадной формулировки ОТО — общей теории калибровочных условий, которая основывалась бы на введении специальных понятий, общих для разных калибровочных условий, объединяла бы различные калибровочные условия, например, по некоторым геометрическим или физическим характеристикам, по группе ковариантности этих условий, по области применимости и т. д. Такая теория помогла бы правильно ориентироваться в разнообразии возможностей, в потребностях дальнейшего развития математического аппарата, направляла бы решение задач соответствующим рациональным выбором калибровочных условий и по математически удобному пути и по пути, поясняющему физическую сторону ОТО.

Задача данной главы, поставленная в общем виде в работе [547], после ряда подготовительных исследований [546, 545, 549] — выработка программы построения общей теории калибровочных условий эйнштейновой ОТО и ее частичная реализация. В этой главе в соответствии с работами [545—547, 553, 558—560] вводятся основные общие понятия. Наибольшее внимание уделяется понятию автономного неполного набора калибровок. Эти общие понятия в последующих параграфах главы конструктивно включаются в тетрадное представление ОТО. Производится изучение наборов калибровочных условий (неполных и полных): выявление автономных неполных наборов и подгрупп их ковариантности, разбиение полных наборов на автономные неполные, изучение структуры системы (13.5), приобретаемой ею в результате присоединения к ней указанных наборов, систематизация на этой основе простейших и наиболее употребительных условий их объединением в классы калибровок.

С наибольшей, можно сказать, исчерпывающей полнотой рассмотрен в § 17 класс калибровок Ламе, в частности добавляющий вектор $e_{(0)}$ лоренцева базиса касательно временной координатной линии, что превращает ее в мировую линию тела отсчета. К этому случаю относится суждение Вейля, из-

бранное в качестве эпитафии к данной главе. Другой из эпитафий подчеркивает более общий аспект: понятие лаборатории включает в себя образы единиц измерения, а следовательно, лоренцев базис. Поэтому можно исходить в ОТО из понятия лаборатории, освобождая мировые линии тел отсчета от обязанностей временных координатных линий.

§ 16. ОБЩИЙ АНАЛИЗ КАЛИБРОВОЧНЫХ УСЛОВИЙ

16.1. Полные, неполные наборы калибровок и их классы. Приступая к изучению этих условий, прежде всего следует иметь в виду, что ими придется распоряжаться в соответствии с постановкой конкретных задач, с постановкой определенного эксперимента (наблюдений). Одни задачи требуют по их условиям разыскания всех 16 компонент лоренцевой тетрады. Набор калибровочных условий, позволяющий вместе с системами (13.5) или (13.6) найти все 16 компонент h_{μ}^k , следуя работе [545], будем называть полным, все остальные наборы неполными. В других задачах по их постановке нет потребности во введении всей лоренцевой тетрады. Требуется лишь часть информации из локального мира Минковского, достаточно знания лишь части компонент h_{μ}^k . Это вовсе не означает, что для решения таких задач ОТО следует отступать от метода « n -байнов»*), т. е. от разыскания обобщенных коэффициентов Ламе из эйнштейновых уравнений тяготения и присоединенных к ним калибровочных условий. Напомним, что тетрадный метод сам является частным случаем « n -подного метода» и, следовательно, в свою очередь способен поддаваться уменьшению числа n задаваемых векторов. Поэтому для решения указанных задач просто требуется соответствующее усечение системы калибровочных условий, использование их неполных наборов. Например, в случае плоского или одномерного движения нет надобности во введении всех векторов лоренцевой тетрады. Очевидно, в этих случаях достаточно ввести в теорию соответственно 3 и 2 из векторов лоренцевой тетрады, соответственно 9 и 4 из 16 компонент h_{μ}^k . Тогда следует вводить соответственно 3 и 1 калибровочных условия, т. е. присоединять к эйнштейновым уравнениям тяготения неполные наборы калибровок. Так обычно и поступают.

Таким образом, следует различать максимальные возможности тетрадного метода и конкретные специальные потребности.

Если системы уравнений (13.5) или (13.6) решать относительно h_{μ}^k до задания калибровочных условий, то в найденные решения войдут произвольные функции. Вообще говоря, они

*) Das Bein (нем.) — нога.

войдут во все 16 компонент h_{μ}^k , как, например, в работах [546, 547]. В частности, не во все. Эти случаи заслуживают особого внимания, так как в них можно ограничиться $n < 6$ калибровочными условиями, достаточными для разыскания только тех произвольных функций, которые действительно нужны для решения данной частной задачи. Аналогично присоединение неполного набора к (13.5) или (13.6) может не позволить определить до конца ни одной из компонент h_{μ}^k . Однако могут быть случаи, также заслуживающие особого внимания, когда присоединение неполных наборов калибровок к (13.5) или (13.6) выделяет из них автономную подсистему, число уравнений которой равно числу содержащихся в ней неизвестных компонент h_{μ}^k . Назовем такие *неполные наборы автономными*, поскольку из выделенной ими подсистемы можно найти входящую в нее часть обобщенных коэффициентов Ламе без привлечения остальных уравнений из системы (13.5) или (13.6), решить эти подсистемы до конца. В случае подсистемы, выделенной из (13.5), она позволяет однозначно определить часть компонент h_{μ}^k в виде функций от заданных компонент $g_{\mu\nu}$, попавших в эту подсистему. Если нужные неполные наборы выявлены и с их помощью найдены компоненты части векторов лоренцева базиса, то это обеспечивает отыскание части физических компонент ряда величин. По условию это может полностью решить поставленную задачу. Так, например, при решении задачи о мягкой посадке объекта в центральном поле тяготения достаточно располагать знанием только физической компоненты $v^{(4)}$ этого объекта. Для разыскания этой компоненты требуется знание только $h_{\mu}^{(4)}$, а следовательно, неполный набор калибровок. Автономные неполные наборы калибровок как позволяющие рационально поставить и решить конкретную задачу весьма ценны и их исследование — одна из важнейших задач теории калибровочных условий.

Недостаточная изученность калибровочных условий выразилась, в частности, в том, что общее понятие автономного неполного набора калибровок введено в ОТО лишь недавно [547]. Возможность выделения в общем виде автономных подсистем системы эйнштейновых уравнений тяготения (13.6) (или системы (13.5), несущей на себе нагрузку эйнштейновых уравнений) с помощью автономных неполных наборов калибровок обычно явно не подчеркивалась. Это в отдельных случаях приводило к недоразумениям. При решении частных задач иногда «злоупотребляли» полными наборами, вводили все шесть калибровочных условий в тех задачах, для решения которых достаточно неполного набора и подсистемы из системы уравнений (13.5). В результате задача решается с избытком: находятся и часть компонент h_{μ}^k , требуемая условиями задачи, и заодно остальные компоненты, которые могут быть

использованы, но в каких-то других задачах. Это спровоцировало появление в литературе отдельных замечаний, утрирующих тетрадный метод рассмотрением указанных избыточных решений как результата органического порока тетрадного метода.

Введение общего понятия «неполного набора калибровок» для разыскания нужной части обобщенных коэффициентов Ламе с самого начала устраняет возможность появления указанных недоразумений.

Совмещение калибровочных условий с системами уравнений (13.5) или (13.6) придает им определенную структуру, зависящую от характера присоединяемого набора, аналогично тому как основные уравнения электродинамики принимают характерную структуру в зависимости от того, какая принята калибровка для электромагнитных потенциалов (например, лоренцева или кулонова). Присоединение неполного набора также оказывает влияние на структуру систем (13.5) и (13.6). Этим можно воспользоваться как для математического упрощения этих систем, так и для вскрытия аналогий. Например, неполный набор калибровочных условий В. И. Родичева — четыре условия

$$\nabla_{\mu} h^{\mu}_{k} = 0 \quad (16.1)$$

позволяет представить тетрадные уравнения тяготения в максвелловой форме [531, 548]. Однако присоединение неполного набора (16.1) к уравнениям (13.5) или (13.6), вообще говоря, не позволяет однозначно найти часть компонент h_{μ}^{k}, поскольку условия (16.1) содержат все 16 компонент и по своей структуре все эти компоненты ставят в равноправное положение.

Некоторые неполные наборы могут быть одинаковы по своему функциональному виду, по своей геометрической или физической сути, могут отличаться только значениями содержащихся в них постоянных и т. д. Такого рода варианты различных условий (их полные и неполные наборы) естественно объединять в классы калибровочных условий, поскольку они подчиняются некоторым общим закономерностям и поэтому могут рассматриваться с единой точки зрения.

Наконец, подчеркнем еще раз, что уравнения (13.5) и (13.6) нелинейны. Калибровочные условия также не обязаны всегда быть линейными относительно h_{μ}^{k}. Отсюда следует, что в принципе искомое число компонент h_{μ}^{k} может быть найдено при пониженном числе калибровок.

Следуя работе [549], будем называть такие наборы калибровочных условий выродженными. На них специально остановимся в п. 16.7 и в § 19.

16.2. Построение специальных мировых компонент с по-

мощью неполных наборов калибровок (метод вычитания из мировых компонент). Как уже отмечено в предыдущем пункте, неполные наборы калибровочных условий, если они автономны, позволяют разыскать соответствующую часть физических компонент величин. В отличие от этого по крайней мере некоторые неполные наборы позволяют найти все специальные мировые компоненты. Это достигается вычитанием из мировых компонент тех их частей, которые найдены с помощью неполных наборов калибровочных условий. Иллюстрируем это на примере неполного набора калибровок, позволяющего найти все компоненты одного из векторов лоренцевой тетрады. Для определенности пусть это будет $e_{(0)}$. Итак, пусть некоторый неполный набор позволил выделить из (13.5) или (13.6) автономную подсистему и однозначно найти из нее $h_{\mu(0)}$. Преобразуя, например, правую часть (14.9), выделенную методом рассеяния суммации по локальным индексам, можем представить ее в виде

$$\begin{aligned} \overset{*}{Q}^{\mu}_{\nu} &= h^{\mu}_{\alpha} h_{\nu}^{\beta} Q^{\alpha}_{\beta} = h^{\mu}_{\kappa} h_{\nu}^{\lambda} Q^{\kappa}_{\lambda} - h^{\mu}_{(0)} h_{\nu}^{\beta} Q^{(0)}_{\beta} = \\ &= h^{\mu}_{\kappa} h_{\nu}^{\eta} Q^{\kappa}_{\eta} - h_{\nu}^{(0)} Q^{\mu}_{(0)} - h^{\mu}_{(0)} Q^{(0)}_{\nu} + h^{\mu}_{(0)} h_{\nu}^{(0)} Q^{(0)}_{(0)} = \\ &= Q^{\mu}_{\nu} - h_{\nu}^{(0)} h^{\lambda}_{(0)} Q^{\mu}_{\lambda} - h^{\mu}_{(0)} h_{\sigma}^{(0)} Q^{\sigma}_{\nu} + \\ &\quad + h^{\mu}_{(0)} h_{\nu}^{(0)} h_{\lambda}^{(0)} h^{\sigma}_{(0)} Q^{\lambda}_{\sigma}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Аналогично преобразуя Q^{μ}_{*} из (14.5) и $\overset{*}{g}_{\mu\nu}$ из (14.17), соответственно имеем

$$Q^{\mu}_{*} = h^{\mu}_{(0)} Q^{(0)} = h^{\mu}_{(0)} h_{\lambda}^{(0)} Q^{\lambda}, \quad (16.3)$$

$$\overset{*}{g}_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu\alpha} = h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - h_{\mu}^{(0)} h_{\nu(0)}. \quad (16.4)$$

Следовательно, специальные мировые компоненты могут быть получены по мировым компонентам и некоторой части обобщенных коэффициентов Ламе, найденных из автономных подсистем системы (13.5), выделенной из (13.5) с помощью соответствующего неполного автономного набора калибровок. Как указывалось, имеется два способа введения в ОТО специальных мировых компонент — путем рассеяния суммации по локальным индексам и путем вычитания из мировых компонент. Оба способа позволяют спрятать триаду e_a , образуя инвариант относительно ее поворотов. Это возможно в результате введения неполных наборов калибровочных условий. В простейших случаях уместно введение обозначений, указывающих, какие именно компоненты h_{μ}^{κ} входят в вычитаемые члены, например,

$$g_{\mu\nu}^* \equiv (g_{\mu\nu})_{(0)},$$

$$Q^\mu = h^\mu_\alpha Q^\alpha = Q^\mu - h^\mu_{(0)} Q^{(0)} = Q^\mu - h^\mu_{(0)} h_\lambda^{(0)} Q^\lambda \equiv (Q^\mu)_{(0)}. \quad (16.5)$$

16.3. Генерирование неполными наборами калибровок подгрупп (подмножеств) $L(x)$ - и P -преобразований. Вернемся к п. 13.7 и обсудим соотношения (13.23)—(13.24) с точки зрения неполных автономных наборов калибровочных условий.

Если известны все 16 компонент $h_\mu^{k'}$ и все 16 компонент h_μ^k , то все коэффициенты $L_n^{k'}$ могут быть однозначно вычислены с помощью (13.23), т. е. полный набор калибровочных условий для $h_\mu^{k'}$ вместе с (13.7) или (13.8) определяет некоторое одно локальное лоренцево преобразование.

Каждый коэффициент $L_n^{k_1 k_2}$, где k_1 и k_2 — фиксированные индексы, определяется не всеми 16 компонентами $h_\mu^{k'}$ и не всеми 16 компонентами h_μ^k , а лишь четырьмя из $h_\mu^{k'}$ и четырьмя из h_μ^k . Автономные компоненты набора для $h_\mu^{k'}$ и для h_μ^k определяют часть компонент $h_\mu^{k'}$ и часть h_μ^k . В отдельных случаях может оказаться, что в некоторые из коэффициентов $L_n^{k'}$ войдут только те из компонент $h_\mu^{k'}$ и h_μ^k , которые до конца найдены с помощью неполных наборов калибровок. Следовательно, в этих случаях часть коэффициентов $L(x)$ окажется известной, а другая часть — произвольной. Поэтому можно сказать, что в таких случаях неполные автономные калибровочные наборы генерируют подмножество (в частности, подгруппу) локальных преобразований Лоренца. Если на $h_\mu^{k'}$ и h_μ^k накладывается один и тот же неполный набор калибровочных условий (по форме одинаковые требования), то можно сказать, что подмножества (подгруппы) преобразований $L(x)$ генерируются требованием инвариантности неполного набора калибровок. В таких случаях сведения о коэффициентах $L_n^{k'}$ можно получить либо непосредственно из (13.23), либо, и это может быть удобнее, из соотношений (13.21), подчиняя справа и слева соответствующие из коэффициентов $h_\mu^{k'}$ и h_μ^k одного вида условиям согласно принятым неполным наборам.

Иллюстрируем сказанное примером. Пусть неполные наборы заданы в виде

$$h_0^a = 0, \quad (16.6)$$

$$h_0^{a'} = 0. \quad (16.7)$$

Из (16.6) следует, поскольку $h_\mu^a h^\mu_{(0)} = \delta_0^a = 0$,

$$h_{(0)}^a = 0. \quad (16.8)$$

Подставляя (16.6) и (16.8) в (13.23), видим, что

$$L^{a'}_{(0)} = h_{\mu}^{a'} h^{\mu}_{(0)} = h_{\alpha}^{a'} h^{\alpha}_{(0)} + h_0^{a'} h^0_{(0)} = 0, \quad (16.9)$$

$$L^{a'}_b = h_{\alpha}^{a'} h^{\alpha}_b, \quad L^{(0)'}_{(0)} = h_0^{(0)'} h^0_{(0)}, \quad (16.10)$$

причем неполные наборы (16.6) и (16.7) не дают никаких сведений о компонентах $h_{\alpha}^{a'}$ и h^{α}_b , а, следовательно, оставляют $L^{a'}_b$ произвольными. Из (13.7) и (16.6), (16.7) находим

$$g_{00} = h_0^{(0)} h_{0(0)} = h_0^{(0)'} h_{0(0)'}, \quad h^0_{(0)} = \frac{1}{h_0^{(0)}}, \quad (16.11)$$

т. е.

$$L^{(0)'}_{(0)} = 1. \quad (16.12)$$

Условия (16.6) и (16.7) являются одновременно примером неполных наборов и примером требования инвариантности неполного набора, генерирующих подгруппу $L(x)$, а именно 3-параметрическую подгруппу пространственных (круговых) вращений. Будем далее называть ее R -подгруппой.

Перейдем к аналогичному обсуждению соотношений (13.24). Очевидно, как и в случае (13.23), отдельные коэффициенты $P^{\mu'}_{\mu_2}$, где μ'_1 и μ_2 — фиксированные индексы, могут определяться теми и только теми компонентами из числа $h^{\mu'}_k$ и h^k_{ν} , которые до конца находятся с помощью некоторого неполного набора калибровок. Поскольку остальные коэффициенты из числа $P^{\mu'}_{\nu}$ будут содержать произвол, то тем самым автономный неполный набор калибровок может генерировать и подгруппу (подмножество) координатных преобразований.

16.4. «Координатное представление» R -подгруппы и лоренцево представление P -подгруппы как следствия неполных наборов калибровок. Согласно (13.25) и (13.26), коэффициенты P - и L -преобразований в принципе совершенно независимы друг от друга, при наложении же условий на тетрады может быть установлена корреляция. Если $h^{\mu'}_k$ и h^k_{ν} известны (значит, полные наборы калибровок заданы) и если при помощи одного из этих наборов также найдены коэффициенты $L^{k'}_n = h_{\mu}^{k'} h^{\mu}_n$, то (13.25) позволяют однозначно подсчитать все коэффициенты P -преобразования.

Возможны случаи, когда неполные наборы калибровок позволяют найти те из компонент $h^{\mu'}_k$, h^k_{ν} , $L^{k'}_n$, которые только и входят в часть коэффициентов $P^{\mu'}_{\nu}$. Тогда эта часть становится известной при полной свободе выбора остальной части. Тем самым подмножества (подгруппы) L - и P -преобразований связываются друг с другом и могут быть найдены одна по другой. В таких случаях будем называть P -подгруппу представлением L -

подгруппы на базе данного неполного набора калибровок и наоборот — L -представлением P -подгруппы.

Подчеркнем, что если два полных набора калибровок, наложенных соответственно на $h_\mu^{k'}$ и h_μ^n , одинаковы, то $L^{k'}_n = h_\mu^{k'} h^\mu_n = \delta^{k'}_n$. Однако неполные наборы могут быть общими совпадающими по виду и при этом $L^{k'}_n \neq \delta^{k'}_n$ за счет оставшейся свободы. Аналогичное замечание относится и к P -преобразованию, согласно (13.26), имеющему свое L -представление.

Следовательно, понятие неполного набора калибровок может объединить рассмотрение соответствующих подгрупп P - и L -преобразований.

16.5. Специальные виды ковариантности уравнений ОТО.

Относительно выделенных автономными неполными наборами подгрупп P - и $L(x)$ -преобразований можно определить специальные виды величин-тензоров и более сложных геометрических объектов. Так, например, специальные мировые компоненты $Q^\mu = h^\mu_a Q^a$, $g_{\mu\nu} = h_\mu^a h_{\nu a}$ инвариантны относительно R -подгруппы, $Q^\mu_{\cdot\ast} = h^\mu_{(0)} Q^{(0)}$ — скаляр относительно этой подгруппы, $Q^{a'} = L^{a'}_b Q^b$ — вектор относительно нее. Аналогично по отношению к определенным подгруппам можно переформулировать и дифференциальные операции. Так, специальная частная производная $\partial_\mu = h_\mu^a \partial_a$ R -инвариантна.

Из сказанного следует, что уравнения ОТО, ковариантные относительно полных $L(x)$ - и P -групп, содержащих величины с трансформационными свойствами, введенными на полных L - и P -группах, можно преобразовать к виду, ковариантному только относительно отдельных подгрупп, переписать их относительно величин с трансформационными свойствами, заданными на подгруппах. Будем далее эту более частную ковариантность называть подгрупповой, или специальной ковариантностью. Каждая из форм уравнений может быть хорошо приспособленной для решения некоторого своего круга задач. В качестве примера приведем подгруппу преобразований трехмерных пространственных координат $x^{a'} = x^a(x^b)$, выделяя ее из эйнштейновой группы. Эта подгруппа непринужденно выделяется в ОТО при изучении статического поля и ее использование влечет за собой реконструкцию уравнений ОТО — выделение в них трехмерных величин. В этом случае естественно применить формализм трехмерного тензорного анализа и соответственно записать уравнения гравитационного поля. Это было сделано в работе Леви-Чивита. Фок обобщает построение Леви-Чивита на конформные пространства, также выделяя трехмерные величины в эйнштейновых уравнениях тяготения и в их решениях. Конечно, ограничение менее общей группой преобразований не упростит формализма [550, с. 214],

но, как уже отмечено, может хорошо приспособить его к решению некоторого круга задач. В главе V остановимся на этом подробнее и рассмотрим реконструкции основных уравнений ОТО для нескольких подгрупп преобразований.

16.6. Разделение калибровочных условий на референционные (физические) и нефизические. Класс транзитивности тетрад. Требование в ОТО локальной справедливости СТО предполагает постулат локальной изотропии 3-подпространства, а тем самым постулат о равноправии по-разному ориентированных в этом 3-подпространстве эталонов длины, декартовой триады. Иллюстрируем такую точку зрения на триаду следующим замечанием Дирака. Допуская свободу выбора триады и говоря об изменениях, соответствующих ее вращению, он подчеркивает: «...Мы оставляем произвольным выбор триады, ...мы знаем, что такое изменение не влияет на физическое состояние» [551, с. 197].

Принятие в ОТО такого постулата вносит неравноправие в калибровочные условия, наталкивает на разделение их на части — физическую часть калибровочных условий и нефизическую. Физическая часть — три условия, ковариантные относительно локальной подгруппы пространственных поворотов триады (R -подгруппы) и относительно преобразований ее инверсии. Нефизическая часть — три остальных калибровочных условия, нековариантные относительно этих двух видов преобразований, аналогично тому как координатные условия нековариантны относительно общих преобразований координат.

Возникает потребность во введении наряду с понятием «калибровочные условия» и более общего понятия, отражающего указанное разделение, фиксирующего поле e_k с учетом свободы ориентации триады. По аналогии с термином «координатные условия» введем термин «референционные условия» для трех калибровочных условий, ковариантных относительно локальной подгруппы пространственных поворотов и преобразований инверсии триады, дополненных множеством равноправных троек калибровочных условий, нековариантных относительно этих двух видов преобразований.

Коль скоро понятие системы отсчета должно выводиться из понятия лаборатории [552], ее естественно определить как поле лоренцева базиса (орторепера, нормированного на единицу) при свободной ориентации триады и задавать референционными условиями в указанном смысле. Калибровочные условия (все шесть) являются достаточными условиями для задания системы отсчета.

Выделим из $L_n^{h'}$ подгруппу $(L^{a' b})_j$ пространственных поворотов и преобразований инверсии триады, а из множества T тетрад выделим подмножество T_i , удовлетворяющее условиям:

- 1) при любых $L^{a' b}$ и h_{μ}^n таких, что

$$L^{a'}_b \in (L^{a'}_b)_j, \quad h_\mu^a \in T_i, \quad (16.13)$$

имеем

$$h_\mu^{k'} \in T_i, \quad h_\mu^{(0)'} = h_\mu^{(0)}, \quad h_\mu^{a'} = L^{a'}_b h_\mu^b, \quad (16.14)$$

2) если

$$h_\mu^{k'}, \quad h_\mu^n \in T_i, \quad (16.15)$$

то существует такое

$$L^{a'}_b \in (L^{a'}_b)_j, \quad (16.16)$$

что

$$h_\mu^{a'} = L^{a'}_b h_\mu^b. \quad (16.17)$$

Представляется полезным привлечь терминологию теории групп [553]. Тогда, по определению, введенное подмножество тетрад T_i является классом транзитивности множества T [554] или областью транзитивности подгруппы локальных пространственных поворотов и преобразования инверсии триады [555, с. 67]. Связь между тетрадами внутри класса транзитивности и при переходе из класса в класс, как видно из (13.21), линейна и относительно тетрад, и относительно коэффициентов лоренцева преобразования как некоторых функций координат. Если тетрады известны, это преобразование может быть найдено или из (13.23), или из совместного рассмотрения калибровочных условий. Пусть $A_i(h_\mu^{k'})=0$, $B_i(h_\mu^n)=0$ — два некоторых калибровочных условия. Тогда связывающее их локальное лоренцево преобразование удовлетворяет уравнению $A_i[L^{k'}_n(h_\mu^n)_{B_i}] = 0$, где $L^{k'}_n$ — искомые коэффициенты, $(h_\mu^n)_{B_i}$ — известные тетрады, найденные при калибровочных условиях $B_i=0$. Для разыскания $L^{k'}_n$ к последнему уравнению должны быть присоединены еще 10 независимых уравнений из системы $L^{k'}_n L^{r'}_n \eta_{k'r'} = \text{diag} (-1, 1, 1, 1)$. Если найденные преобразования принадлежат подгруппе пространственных поворотов или являются преобразованиями инверсии триады, то оба калибровочных условия приводят к одному и тому же классу транзитивности тетрад. Тетрады могут содержать постоянные, изменение значения которых меняет класс транзитивности.

Свобода выбора ориентации триады e_a , а следовательно, и выбора определенных калибровочных условий из множества условий нековариантных относительно подгруппы локальных пространственных поворотов и преобразований инверсии e_a не устраняет, вообще говоря, потребности в явном введении триады. Эту свободу остается разумно использовать для введения в данной конкретной задаче физических компонент, наиболее удобных для интерпретации, сравнения с конкретным экспериментом, а также для простоты расчетов.

Касаясь анализа координатных условий и их изменения путем координатного преобразования, Эйнштейн писал: «...В совокупности всех подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем» [1, I, с. 459]. Изложенное показывает, что аналогичная ситуация имеет место и в случае калибровочных условий. Принцип общей ковариантности, если его связывать только с изменением координат, имеет формальный характер. Тетрадный метод ОТО, кроме общей ковариантности, вводит локальную (обобщенную) лоренц-ковариантность. В работах Тредера [28, с. 98; 556, 557] предлагается трактовать эту спец-ковариантность как общий принцип относительности, поскольку она является ковариантностью относительно изменения системы отсчета, а «...для понимания общего принципа относительности необходимо делать различие между системой координат $\{x_i\}$ и системой отсчета Σ [28, с. 22]». Однако указанную трактовку во всяком случае следует уточнить в связи с рассмотрением [547, 553] системы отсчета не просто как поля лоренцева базиса, но как этого поля при свободной ориентации триады (как класса транзитивности тетрад [547, с. 6, 7, 11]). Это несколько меняет физическую оценку локальной лоренцевой ковариантности, поскольку ковариантность уравнений движения и эйнштейновых уравнений тяготения относительно локальной лоренцевой подгруппы пространственных (эйлеровых) поворотов, рассмотренную в работах [547, 558—560], нельзя трактовать как ковариантность физическую. Она также является формальной. Эту подгруппу лоренц-ковариантности в тетрадном методе можно выразить и в терминах координатной подгрупповой ковариантности, поскольку данный неполный набор калибровочных условий одновременно генерирует и локальную лоренцеву подгруппу (подмножество) и подгруппу (подмножество) общих координатных преобразований («координатное представление» соответствующего подмножества локальных преобразований Лоренца).

16.7. Вырождение калибровочных условий, их область применимости, калибровочные сингулярности. Равенство числа неизвестных и числа уравнений системы, из которой надлежит их разыскать, вообще говоря, относится к системам линейных уравнений. Обычно проводимый подсчет числа калибровочных условий, присоединяемых к эйнштейновым уравнениям, оставляет в стороне нелинейность последних. Очевидно, нелинейность дифференциальных уравнений ОТО (13.8) передается и алгебраической системе уравнений (13.7). Поэтому баланс числа 16 неизвестных обобщенных коэффициентов Ламе и 6 эйнштейновых уравнений, 4 координатных и 6 калибровочных условий следует коррелировать учетом нелинейности эйнштей-

новых уравнений и возможной нелинейности координатных и калибровочных условий относительно искомых h_{μ}^k . Проявления в конкретных случаях нелинейности весьма разнообразны. В некоторых ситуациях характер калибровочных условий может исключить влияние нелинейности уравнений поля. Однако, вообще говоря, следует ожидать вырожденных случаев калибровочных условий. В § 19 покажем, что возможны такие ситуации, когда число калибровочных условий, меньшее шести, позволяет разыскать все 16 искомых h_{μ}^k . Исследование таких вырожденных калибровочных условий должно занять свое место в теории калибровок тетрадной формулировки ОТО.

Известно, что произвольно заданной координатной системой, вообще говоря, нельзя покрыть все четырехмерное пространство ОТО. Так, например, в поле Шварцшильда одни координатные системы свойственны R -области, другие T -области (область сферы Шварцшильда). Аналогичная ситуация имеет место и при задании калибровочных условий. Так, например, тетрады в поле Шварцшильда, равные корням квадратным из $g_{\mu\nu}$, имеют разный характер в двух указанных областях: в R -области (при использовании стандартной системы координат) они вещественны, в T -области мнимы. Мнимость тетрады может передаться времени, длине. Тогда, естественно, виновные в этом калибровочные условия как несвойственные данной области 4-пространства должны быть отброшены и заменены другими.

Известно, что выбор для изучения того или иного гравитационного поля координатных условий приводит к $g_{\mu\nu}$ разного вида. В частности, выбор координатной системы может привести к сингулярным значениям отдельных компонент $g_{\mu\nu}$. Эти сингулярности неинвариантны и, следовательно, могут быть устранены координатными преобразованиями. Такие координатные преобразования могут оказаться принадлежащими некоторой специальной подгруппе и таким образом могут быть «координатными представлениями» некоторой локальной подгруппы Лоренца. Поэтому к устранению неинвариантных особенностей метрического тензора могут быть привлечены и локальные лоренцевы преобразования. Идея их привлечения предложена в работе [561] и нашла развитие в создании общего метода устранения неинвариантных особенностей с помощью $L(x)$. В работах [35, 558] этому посвящены отдельные главы.

Неинвариантные особенности $g_{\mu\nu}$, порожденные выбором координатной системы, очевидно, могут быть унаследованы и тетрадами h_{μ}^k . Действительно, из (13.7) вытекает, что h_{μ}^k могут быть представлены как функции $g_{\mu\nu}$. Сингулярность $g_{\mu\nu}$ может быть передана и этим функциям. Однако в тех случаях,

когда $g_{\mu\nu}$ не имеет сингулярностей, тетрады, найденные из (13.7), могут оказаться сингулярными.

Поэтому следует различать два вида сингулярностей тетрад: особенности, вызванные неинвариантными сингулярностями $g_{\mu\nu}$ и устранимые одновременно с ними координатными преобразованиями, и сингулярности, являющиеся следствием принятого набора калибровочных условий и устранимые изменением калибровки, т. е. с помощью локальных преобразований Лоренца. В статье [562] первый вид сингулярностей h_{μ}^k назван координатными сингулярностями тетрад, второй — калибровочными сингулярностями тетрад. В общем случае тетрады содержат оба вида сингулярностей. Тогда для их устранения необходимо одновременное применение координатных и локальных лоренцевых преобразований. Наличие того или другого вида калибровочных сингулярностей может привести к разрыву физических компонент величин, а также выявить область применимости калибровочных условий. Поэтому «калибровочные сингулярности» — одно из новых понятий, которое следует привлечь к построению общей теории калибровочных условий.

16.8. Программа изучения калибровочных условий. Заканчивая общий анализ калибровочных условий, резюмируем основные пункты программы их изучения.

1. Сбор сведений из литературы по ОТО о применявшихся по разным случаям калибровочных условиях (явно или неявно). Изучение их конкретного физического содержания. Выделение автономных неполных наборов калибровок, объединение калибровок в классы. Изучение областей их применимости, калибровочных сингулярностей, случаев вырождения.

2. Изучение групповых аспектов калибровочных условий: подгрупп ковариантности неполных наборов калибровок — локальных лоренцевых и их координатных представлений.

3. Образование при разных калибровочных условиях из мировых компонент компонент физических и «специальных мировых компонент». Изучение трансформационных свойств тех и других компонент относительно специальных преобразований в зависимости от выбора калибровочных условий и от подгрупп их ковариантности.

4. Переформулировка эйнштейновых уравнений тяготения к форме, ковариантной относительно специальных подмножеств преобразований — подгрупп ковариантности неполных наборов калибровок. Переформулировка в том же смысле уравнений движения, прежде всего для пробных тел, приведение их к спец-ковариантному виду.

5. Сопоставление различных специальных формулировок ОТО, построенных на основе различных подгрупп.

§ 17. КЛАСС КАЛИБРОВОК ЛАМЕ

17.1. Определение класса. Как видно из (12.22), Ламе в своей теории криволинейных координатных систем фактически ввел дополнительные условия равенства нулю некоторых недиагональных элементов матрицы своих коэффициентов.

Обобщая понятие этих условий, назовем калибровочным условием Ламе требование равенства нулю некоторой компоненты обобщенных коэффициентов Ламе:

$$h_{\mu k} = e_{\mu} \cdot e_k = 0, \quad (17.1)$$

т. е. требование ортогональности вектора e_k лоренцева орторепера μ -й координатной линии. В общем невырожденном случае требуется шесть калибровочных условий. Весь полный набор из шести калибровочных условий может быть составлен из калибровочных условий Ламе. Калибровки Ламе могут составлять лишь часть полного набора калибровок, могут использоваться в сочетании с другими калибровочными условиями.

Назовем классом калибровок Ламе множество полных и неполных наборов калибровочных условий вида (17.1), позволяющих вместе с системой (13.5) или (13.6) отыскать соответственно все или часть остальных еще не известных коэффициентов Ламе. Все эти калибровки объединяются в класс общим для них требованием касания (ортогональности) единичных векторов к соответствующим координатным линиям.

Само по себе условие ортогональности e_{μ} и e_k имеет формальный геометрический смысл, но им можно выразить и физические свойства — характер движения, симметрию поля тяготения и др. Очевидно, калибровки Ламе наиболее просты в математическом отношении, а потому и наиболее удобны. Они обуславливают после присоединения к системе (13.5) весьма простую и характерную ее структуру. Поэтому класс калибровок Ламе — самый употребительный из классов калибровочных условий тетрадной формулировки ОТО. Рассмотрим его, следуя работам [545, 564], которым предшествовала работа [563].

17.2. Полные наборы класса Ламе (3+2+1)-структуры. Предположение $\det h_{\mu}^k \neq 0$ допускает одновременное обращение в нуль не более трех коэффициентов Ламе в одной строке (столбце) матрицы Ламе (h_{μ}^k). В зависимости от их структуры наборы имеют разные границы применимости: могут быть совместны с системой (13.5) не при произвольном выборе $g_{\mu\nu}$, а лишь при некотором специальном подборе значений $g_{\mu\nu}$, могут быть пригодны только при определенном выборе координатных условий и лишь в некоторых областях 4-пространства ОТО, могут в своем составе содержать или не содержать авто-

номные неполные наборы и т. д. В частности, полный набор калибровок Ламе

$$h_0^a = 0, \quad h_1^{(0)} = h_1^{(2)} = h_1^{(3)} = 0 \quad (17.2)$$

(3+3)-структуры совместен с уравнением $g_{01} = h_0^k h_{1k} = h_0^{(0)} h_{1(0)}$ системы (13.5) лишь в случае, когда $g_{01} = 0$. Например, полный набор вида $h_0^{(2)} = h_0^{(3)} = 0$, $h_1^{(0)} = h_1^{(2)} = 0$, $h_2^{(0)} = h_2^{(1)} = 0$, имеющий (2+2+2)-структуру, выступает только в целом—входящие в него неполные наборы из двух калибровок Ламе не выделяют из (13.5) автономной подсистемы. Так, подсистема из двух уравнений (13.5), содержащая g_{01} и g_{00} , включает в себя при таком наборе 3 неизвестные компоненты h_{μ}^k , подсистема из 4 уравнений, содержащих $g_{\mu 0}$, — 7 неизвестных компонент h_{μ}^k и т. д.

Среди полных наборов класса Ламе особо выделяются наборы (3+2+1)-структуры. Они совместны с системой (13.5) при произвольном выборе решений $g_{\mu\nu}$ эйнштейнова уравнения тяготения, а составляющие их неполные наборы (3)-структуры и (3+2)-структурны автономны. Для таких наборов можно применить следующую символическую запись, которая детализирует символику, предложенную в работе [563], естественно приспособивая ее к тетрадному формализму.

Символом $n_{\mu_1 k_1}$ обозначим n калибровочных условий Ламе, требующих равенства нулю n коэффициентов Ламе в μ_1 -строке матрицы Ламе, позволяющих найти вместе с частью уравнений системы (13.5), самостоятельно или после использования другого набора калибровок, все коэффициенты, расположенные в k_1 -столбце матрицы (h_{μ}^k). Индексы μ_1 и k_1 — произвольны, но фиксированы. Поскольку $n \leq 3$, наборы из большего числа условий задаются последовательностью нескольких символов. Рассмотрим, следуя работам [545, 564], некоторые характерные примеры полных наборов калибровок из класса Ламе (3+2+1)-структуры. Первый из них употребляется в тетрадной формулировке ОТО особенно часто.

17.3. Канонический набор. Его можно задать символом $3_0^{(0)} 2_1^{(1)} 1_2^{(2)}$, согласно которому

$$h_0^a = 0, \quad h_1^{(2)} = h_1^{(3)} = 0, \quad h_2^{(3)} = 0. \quad (17.3)$$

При таких условиях система (13.5) имеет следующую структуру:

$$g_{\mu 0} = h_{\mu}^{(0)} h_{0(0)}, \quad (17.4)$$

$$(g_{\mu 1})_{(0)} \equiv g_{\mu 1} - h_{\mu}^{(0)} h_{1(0)} = h_{\mu}^{(1)} h_{1(1)}, \quad (17.5)$$

$$(g_{\mu 2})_{(0)} \equiv g_{\mu 2} - h_{\mu}^{(0)} h_{2(0)} - h_{\mu}^{(1)} h_{2(1)} = h_{\mu}^{(2)} h_{2(2)}, \quad (17.6)$$

$$(g_{\mu 3})_{(0)} = h_{\mu}^{(3)} h_{3(3)}, \quad (17.7)$$

где в левых частях уравнений введены усеченные метрические тензоры, например $(g_{\mu\nu})_{(0)} \equiv g_{\mu\nu} - h_{\mu}^{(0)} h_{\nu(0)} = g_{\mu\nu} - g_{\mu 0} g_{\nu 0} / g_{00}$. Подсистема (17.4) автономна. Соответственно находим

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{(0)} &= \frac{-g_{\mu 0}}{\sqrt{-g_{00}}}, & h_{\mu}^{(1)} &= \frac{(g_{\mu 1})_{(0)}}{\sqrt{(g_{11})_{(0)}}}, \\ h_{\mu}^{(2)} &= \frac{(g_{\mu 2})_{(01)}}{\sqrt{(g_{22})_{(01)}}}, & h_{\mu}^{(3)} &= \frac{(g_{\mu 3})_{(012)}}{\sqrt{(g_{33})_{(012)}}}. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Если $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$, то

$$h_{\mu}^k = \text{diag}(\sqrt{-g_{00}}, \sqrt{g_{\alpha\alpha}}).$$

Каждый из комплектов решений, входящих в (17.8), позволяет соответственно найти квазикоординаты $dx^{(0)}$, $dx^{(1)}$, $dx^{(2)}$, $dx^{(3)}$.

Любой из полных наборов (3+2+1)-структуры можно переписать в другом порядке, группируя условия не по строкам, а по столбцам. Например, набор (17.3) можно переписать в виде

$$h_0^{(3)} = h_1^{(3)} = h_2^{(3)} = 0, \quad h_0^{(2)} = h_1^{(2)} = 0, \quad h_0^{(1)} = 0. \quad (17.9)$$

При такой форме записи неполным набором достаточно сопоставить символ с одним индексом — n_m , поскольку группировка наборов по столбцам позволяет выразить отличные от нуля компоненты h_{λ}^m в m -столбце через усеченные метрические тензоры с помощью калибровочных условий, отнесенных к этому же m -столбцу. Учитывая, что при рассматриваемом наборе калибровок $(g_{\mu 0})_{(123)} = g_{\mu 0}$, $(g_{\mu 1})_{(023)} = (g_{\mu 1})_{(0)}$, $(g_{\mu 2})_{(013)} = (g_{\mu 2})_{(01)}$, рационально при решении системы (13.5) использовать неполные наборы, содержащиеся в условиях (17.3), в обратном порядке, начиная со столбца, в котором не задан ни один из неполных наборов. Тогда

$$g_{\mu 0} - h_{\mu}^b h_{0b} = (g_{\mu 0})_{(123)} = h_{\mu}^{(0)} h_{0(0)}, \quad b \neq (0), \quad (17.10)$$

$$h_{\mu}^{(0)} = \frac{-(g_{\mu 0})_{(123)}}{\sqrt{-(g_{00})_{(123)}}} = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}},$$

$$g_{\mu 1} - h_{\mu}^k h_{1k} \equiv (g_{\mu\nu})_{(023)} = h_{\mu}^{(1)} h_{1(1)}, \quad k \neq (1), \quad (17.11)$$

$$h_{\alpha}^{(1)} = (g_{\alpha 1})_{(023)} / \sqrt{(g_{11})_{(023)}} = (g_{\alpha 1})_{(0)} / \sqrt{(g_{11})_{(0)}},$$

$$g_{\mu 2} - h_{\mu}^k h_{2k} \equiv (g_{\mu 2})_{(013)} = h_{\mu}^{(2)} h_{2(2)}, \quad k \neq (2), \quad (17.12)$$

$$h_2^{(2)} = \sqrt{(g_{22})_{(013)}} = \sqrt{(g_{22})_{(01)}}, \quad h_3^{(2)} = \frac{(g_{32})_{(013)}}{\sqrt{(g_{22})_{(013)}}} = \frac{(g_{32})_{(01)}}{\sqrt{(g_{22})_{(01)}}},$$

$$g_{\mu 3} - h_{\mu}^k h_{3k} \equiv (g_{\mu 3})_{(012)}, \quad h_3^{(3)} = \sqrt{(g_{33})_{(012)}}, \quad k \neq (3). \quad (17.13)$$

Эти выражения соответственно совпадают с (17.8), если учесть, что в согласии с принятой калибровкой часть компонент усеченных метрических тензоров, входящих в компоненты (17.8), равна нулю.

17.4. Двойственный канонический набор. Он требует, чтобы

$$h_3^{(0)} = h_3^{(1)} = h_3^{(2)} = 0, \quad h_2^{(0)} = h_2^{(1)} = 0, \quad h_1^{(0)} = 0. \quad (17.14)$$

Поэтому его естественно задавать символом $3_3^{(2)}2_2^{(2)}1_1^{(1)}$. В этом случае система (13.5) примет вид, сходный с видом уравнений (17.4) — (17.7), если ввести другие варианты усеченных метрических тензоров:

$$g_{\mu 3} = h_{\mu}^{(3)} h_{3(3)}, \quad (17.15)$$

$$(g_{\mu 2})_{(3)} \equiv g_{\mu 2} - h_{\mu}^{(3)} h_{2(3)} = h_{\mu}^{(2)} h_{2(2)}, \quad (17.16)$$

$$(g_{\mu 1})_{(23)} \equiv g_{\mu 1} - h_{\mu}^{(2)} h_{1(2)} - h_{\mu}^{(3)} h_{1(3)} = h_{\mu}^{(1)} h_{1(1)}, \quad (17.17)$$

$$(g_{\mu 0})_{(123)} = h_{\mu}^{(0)} h_{0(0)}, \quad (17.18)$$

где автономной является подсистема (17.15). Отсюда соответственно находим:

$$h_{\mu}^{(3)} = \frac{g_{\mu 3}}{\sqrt{g_{33}}}, \quad h_{\mu}^{(2)} = \frac{(g_{\mu 2})_{(3)}}{\sqrt{(g_{22})_{(03)}}}, \quad (17.19)$$

$$h_{\mu}^{(1)} = \frac{(g_{\mu 1})_{(23)}}{\sqrt{(g_{11})_{(23)}}}, \quad h_{\mu}^{(0)} = \frac{-(g_{\mu 0})_{(123)}}{\sqrt{-(g_{00})_{(123)}}}.$$

При диагональном $g_{\mu\nu}$ решения (17.19) становятся диагональными, так же как и решения (17.8).

17.5. Побочный канонический набор. Зададим его символом $3_0^{(3)}2_1^{(2)}1_2^{(0)}$. Полные наборы калибровок (17.3), (17.14) требуют равенства нулю компонент h_{μ}^k , лежащих под (над) главной диагональю матрицы Ламе. Примем набор, обращающий в нуль компоненты, лежащие над побочной диагональю матрицы Ламе:

$$h_0^{(0)} = h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = 0, \quad h_1^{(0)} = h_1^{(1)} = 0, \quad h_2^{(0)} = 0. \quad (17.20)$$

Эти условия придают (13.5) структуру, аналогичную структуре уравнений (17.4) — (17.7) и (17.15) — (17.18), но при новом варианте усеченных метрических тензоров:

$$g_{\mu 0} = h_{\mu}^{(3)} h_{0(3)}, \quad (17.21)$$

$$(g_{\mu 1})_{(3)} \equiv g_{\mu 1} - h_{\mu}^{(3)} h_{1(3)} = h_{\mu}^{(2)} h_{1(2)}, \quad (17.22)$$

$$(g_{\mu 2})_{(23)} = h_{\mu}^{(1)} h_{2(1)}, \quad (17.23)$$

$$(g_{\mu 3})_{(123)} = h_{\mu}^{(0)} h_{3(0)}. \quad (17.24)$$

Автономной подсистемой оказывается (17.21). В этом случае

$$\begin{aligned} h_{\mu}^{(3)} &= \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_{\mu}^{(2)} = \frac{(g_{\mu 1})_{(3)}}{\sqrt{(g_{11})_{(3)}}}, \\ h_{\mu}^{(1)} &= \frac{(g_{\mu 2})_{(23)}}{\sqrt{(g_{22})_{(23)}}}, \quad h_{\mu}^{(0)} = \frac{-(g_{\mu 3})_{(123)}}{\sqrt{-(g_{33})_{(123)}}}. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Если отличны от нуля лишь компоненты $g_{\mu\nu}$, расположенные на главной диагонали, то не равны нулю лишь компоненты h_{μ}^k стоящие на побочной диагонали:

$$h_3^{(0)} = \sqrt{-g_{33}}, \quad h_2^{(1)} = \sqrt{g_{22}}, \quad h_1^{(3)} = \sqrt{g_{11}}, \quad h_0^{(3)} = \sqrt{g_{00}}. \quad (17.26)$$

17.6. Пример неканонического набора. Рассмотрим набор $3_1^{(0)} 2_0^{(1)} 1_2^{(2)}$, обращающий в нули некоторые из компонент, лежащих и на главной, и на побочной диагонали матрицы Ламе:

$$h_1^a = 0, \quad h_0^{(2)} = h_0^{(3)} = 0, \quad h_2^{(3)} = 0. \quad (17.27)$$

Тогда

$$g_{\mu 1} = h_{\mu}^{(0)} h_{1(0)}, \quad (17.28)$$

$$(g_{\mu 0})_{(0)} = h_{\mu}^{(1)} h_{0(1)}, \quad (17.29)$$

$$(g_{\mu 2})_{(01)} = h_{\mu}^{(2)} h_{2(2)}, \quad (17.30)$$

$$(g_{\mu 3})_{(012)} = h_{\mu}^{(3)} h_{3(3)}. \quad (17.31)$$

Автономное значение имеет подсистема (17.28). В этом случае:

$$h_{\mu}^{(0)} = \frac{-g_{\mu 1}}{\sqrt{-g_{11}}}, \quad h_{\mu}^{(1)} = \frac{(g_{\mu 0})_{(0)}}{\sqrt{(g_{00})_{(0)}}}, \quad (17.32)$$

$$h_{\mu}^{(2)} = \frac{(g_{\mu 2})_{(01)}}{\sqrt{(g_{22})_{(01)}}}, \quad h_{\mu}^{(3)} = \frac{(g_{\mu 3})_{(012)}}{\sqrt{(g_{33})_{(012)}}}.$$

При диагональном $g_{\mu\nu}$ (главная диагональ)

$$h_1^{(0)} = \sqrt{-g_{11}}, \quad h_0^{(1)} = \sqrt{g_{00}}, \quad h_2^{(2)} = \sqrt{g_{22}}, \quad h_3^{(3)} = \sqrt{g_{33}}. \quad (17.33)$$

17.7. Обратный канонический набор. Коэффициенты h_{μ}^k имеют обратные коэффициенты Ламе, определяемые соотношениями

$$h_{\mu}^k h_{\mu}^{\mu} = \delta^k_{\mu}, \quad h_{\mu}^k h_{\mu}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (17.34)$$

Поэтому для каждого набора калибровочных условий Ламе, наложенных на коэффициенты h_{μ}^k , с помощью соотношений (17.34) может быть найден обратный набор калибровок Ламе, наложенных на коэффициенты h^{μ}_k . Символическая запись обрат-

ных наборов аналогична: $h^{\mu k_1}$. В частности, из уравнений (17.14) и (17.34) находим следующий обратный набор $3^0_{(3)}2^1_{(4)}1^2_{(2)}$:

$$h^0_a = 0; h^1_{(2)} = h^1_{(3)} = 0; h^2_{(3)} = 0. \quad (17.35)$$

Обратные наборы могут приниматься независимо от наборов для $h_{\mu k}$. Тогда для разыскания остальных компонент обратной матрицы Ламе ($h^{\mu k}$) присоединим калибровочные условия (17.35) к системе уравнений

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu k} h^{\nu n} \eta^{kn}, \quad \eta^{kn} = \text{diag} (-1, 1, 1, 1). \quad (17.36)$$

Из уравнений (17.35) и (17.36) находим

$$g^{\mu 0} = h^{\mu}_{(0)} h^{0(0)}, \quad (17.37)$$

$$(g^{\mu 1})_{(0)} = h^{\mu}_{(1)} h^{1(1)}, \quad (17.38)$$

$$(g^{\mu 2})_{(01)} = h^{\mu}_{(2)} h^{2(2)}, \quad (17.39)$$

$$(g^{\mu 3})_{(012)} = h^{\mu}_{(3)} h^{3(3)}, \quad (17.40)$$

т. е.

$$h^{\mu}_{(0)} = \frac{-g^{\mu 0}}{\sqrt{-g^{00}}}, \quad h^{\mu}_{(1)} = \frac{(g^{\mu 1})_{(0)}}{\sqrt{(g^{11})_{(0)}}}, \quad (17.41)$$

$$h^{\mu}_{(2)} = \frac{(g^{\mu 2})_{(01)}}{\sqrt{(g^{22})_{(01)}}}, \quad h^{\mu}_{(3)} = \frac{(g^{\mu 3})_{(012)}}{\sqrt{(g^{33})_{(012)}}}.$$

В отличие от предыдущих случаев в эти соотношения входят обратные усеченные метрические тензоры, а полученные обратные коэффициенты Ламе позволяют непосредственно найти не контра-, а ковариантные компоненты квазикоординат dx_k . Это придает калибровкам, накладываемым на $h_{\mu k}$ и на $h^{\mu k}$, разный геометрический и физический смысл, поскольку, например, $\vec{dx}^{(0)}$ задается геометрически в локальной области парой точек, а $\vec{dx}_{(0)}$ — элементами пары гиперплоскостей [554].

Усеченные метрические тензоры связывают между собой ко- и контравариантные компоненты величин в соответствующих подпространствах. Если одни из этих компонент принадлежат дуальным величинам, связь осуществляется дискриминантным, полностью антисимметричным тензором (14.39). К нему также применимы различного рода операции усечения, например

$$(\eta_{\alpha\beta\gamma 0})_{(0)} \equiv \eta_{\alpha\beta\gamma 0} - h_0^{(0)} \eta_{\alpha\beta\gamma(0)} = h_0^a \eta_{\alpha\beta\gamma a} \quad (17.42)$$

или

$$(\eta_{\alpha\beta\gamma 0})_{(0)} \equiv \eta_{\alpha\beta\gamma 0} - h_{\alpha}^{(0)} \eta_{(0)\beta\gamma 0} = h_{\alpha}^b \eta_{b\beta\gamma 0}. \quad (17.43)$$

17.8. Области применимости. Калибровки Ламе в T -области. Все найденные выше выражения для обобщенных коэф-

фициентов Ламе содержат корни квадратные из компонент либо метрического тензора, либо усеченных метрических тензоров. Это приводит к мнимым значениям некоторых из компонент h_{μ}^k в одних областях пространства — времени ОТО и вещественным — в других, при условии, что во всем 4-пространстве введены общие координатные условия. Различным наборам калибровок Ламе (3+2+1)-структуры соответствуют разные области применимости, поскольку эти области определяются разного рода усеченными метрическими тензорами. Так как мнимые значения коэффициентов Ламе должны быть отброшены по физическим соображениям, то набор калибровок Ламе, приводящий в данной области к мнимым значениям компонент h_{μ}^k , должен быть заменен в этой области другим набором калибровок Ламе (при сохранении в этой области координатных условий). Так, простейшие выражения для h_{μ}^k в условиях (17.9) приводят к вещественным значениям в области, где $g_{00} < 0$, $g_{\alpha\alpha} > 0$. Например, в случае поля Шварцшильда в стандартной системе координат — в R -области, где $r > r_g$ (r_g — гравитационный радиус). При $r < r_g$ калибровочные условия (17.3) приводят к мнимым h_{μ}^k , так как в T -области $g_{00} > 0$, $g_{11} < 0$. Поэтому, если в T -области координатные условия сохраняются, то калибровку (17.3) следует, как было уже предложено [35, 558], изменить на условия (17.27). Из выражений (17.33) видно, что это приведет к вещественным значениям h_{μ}^k в области $r < r_g$. По тем же соображениям калибровка (17.27) не пригодна в R -области.

Обозначим индексы, отнесенные к T -области, тильдой сверху. Рассмотрим, следуя работам [545, 564], пример полного набора, допуская равенство нулю «продольных» компонент h_{μ}^m ($|\mu| = |m|$), но как и в работе [35], исключая равенства нулю компонент h_{μ}^n , лежащих на побочной диагонали. Пусть

$$h_0(\bar{0}) = h_0(\bar{1}) = h_0(\bar{2}) = 0, \quad h_1(\bar{0}) = h_1(\bar{1}) = 0, \quad h_2(\bar{0}) = 0. \quad (17.44)$$

При этих условиях система (13.5) принимает вид:

$$\begin{aligned} g_{\mu 0} &= h_{\mu}(\bar{3})h_0(\bar{3}), \\ (g_{\mu 1})_{(\bar{3})} &\equiv g_{\mu 1} - h_{\mu}(\bar{3})h_1(\bar{3}) = h_{\mu}(\bar{2})h_1(\bar{2}), \\ (h_{\mu 2})_{(\bar{2} \bar{3})} &\equiv g_{\mu 2} - h_{\mu}(\bar{2})h_2(\bar{2}) - h_{\mu}(\bar{3})h_2(\bar{3}) = h_{\mu}(\bar{1})h_2(\bar{1}), \\ (g_{\mu 3})_{(\bar{1} \bar{2} \bar{3})} &\equiv g_{\mu 3} - h_{\mu}(\bar{1})h_3(\bar{1}) - h_{\mu}(\bar{2})h_3(\bar{2}) - h_{\mu}(\bar{3})h_3(\bar{3}) = h_{\mu}(\bar{0})h_3(\bar{0}). \end{aligned} \quad (17.45)$$

Из этой системы находим

$$h_{\mu}(\bar{3}) = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_{\mu}(\bar{2}) = \frac{(g_{\mu 1})_{(\bar{3})}}{\sqrt{(g_{11})_{(\bar{3})}}}, \quad (17.46)$$

$$h_{\mu}^{(\tilde{1})} = (g_{\mu 2})_{(\tilde{2} \tilde{3})} / \sqrt{(g_{22})_{(\tilde{2} \tilde{3})}}, \quad h_{\mu}^{(\tilde{0})} = - (g_{\mu 3})_{(\tilde{1} \tilde{2} \tilde{3})} / \sqrt{-(g_{33})_{(\tilde{1} \tilde{2} \tilde{3})}}.$$

Имеется, однако, формально альтернативная возможность сохранить применимость рассмотренных наборов калибровок Ламе во всем 4-пространстве за счет введения в разных его областях разных координатных систем, как это уже предлагалось ранее [24, 565]. Действительно, например, переобозначение координат $x^0 \rightarrow x^1$, $x^1 \rightarrow x^0$ приводит к совпадению системы (17.4) — (17.7) с системой (17.28) — (17.31) и к совпадению их решений (17.8) с (17.32). Они относятся к разным областям 4-пространства.

Сравнивая системы (17.9) и (17.25), аналогично замечаем, что после переобозначения $x^0 \rightarrow x^3$, $x^3 \rightarrow x^0$ они совпадают. По аналогии формально можно ввести понятие Φ -области вместо R -области ($\Phi \equiv x^3$) и др. Сопоставляя компоненты (17.46) с (17.19), замечаем, что если в (17.46) ввести переобозначения координат вида $x^0 \rightarrow x^{\tilde{3}}$, $x^1 \rightarrow x^{\tilde{2}}$, $x^2 \rightarrow x^{\tilde{1}}$, $x^3 \rightarrow x^{\tilde{0}}$, то полученные таким образом компоненты $h_{\mu}^{\tilde{h}}$ совпадают по форме с компонентами (17.19). Если же в выражения (17.46) ввести аналогичное переобозначение для локальных квазикоординат:

$$dx^{(\tilde{0})} \rightarrow dx^{(3)}, \quad dx^{(\tilde{1})} \rightarrow dx^{(2)}, \quad dx^{(\tilde{2})} \rightarrow dx^{(1)}, \quad dx^{(\tilde{3})} \rightarrow dx^{(0)}, \quad (17.47)$$

то полученные после переобозначения компоненты $h_{\mu}^{\tilde{h}}$ совпадают по форме с компонентами (17.8).

17.9. Общие свойства (3+2+1)-наборов калибровок Ламе. Приведенных примеров полных наборов класса Ламе достаточно, чтобы сформулировать основные общие свойства наборов (3+2+1)-структуры. Они разбивают систему уравнений (13.5) или (17.36) на четыре подсистемы, которым можно придать одинаковую общую структуру введением при разных полных наборах калибровок Ламе разных усеченных метрических тензоров. Сходные подсистемы отличаются входящими в них лоренцевыми, локальными индексами.

Разные (3+2+1)-калибровки Ламе выделяют из систем (13.5) и (17.36) разные автономные подсистемы, позволяющие найти компоненты разных векторов лоренцева базиса, вообще говоря, в разных областях 4-пространства. Выделение автономной системы, во-первых, производится неполным набором $3_{\mu}^{\tilde{h}}$ из полного набора (3+2+1)-структуры. Назовем такой неполный набор монадным, поскольку он, выделяя из системы (13.5) автономную подсистему, позволяет тем самым найти все компоненты одного из векторов лоренцева базиса-монады*). Наборы $3_{\mu}^{(0)}$ назовем хроно-монадными, наборы 3_{μ}^{α} —

*) монаσ (монадоσ) — монада, единица.

хоро-монадными. Во-вторых, автономная подсистема выделяется неполными наборами $(3_{\mu_1}{}^{k_1} 2_{\mu_2}{}^{k_2})$, которые будем называть диадными*), где $\mu_1 \neq \mu_2$, $k_1 \neq k_2$. Диадные неполные наборы позволяют найти компоненты двух векторов лоренцева базиса.

Каждому набору условий $n_{\mu_1}{}^{k_1}$, наложенных на компоненты $h_{\mu}{}^k$, соответствуют два варианта наборов условий, наложенных на компоненты $h^{\mu k}$ — обратный $n^{\lambda_1 k_1}$ и взаимный (двойственный) — $n^{\mu_1 l_1}$. Обратный набор связан с условиями, наложенными на $h_{\mu}{}^n$, соотношениями (17.34), взаимный нет. В частности, набор калибровок (17.35) обратен набору (17.14), но взаимен набору (17.3). Привлекая геометрическую интерпретацию ковариантных компонент лоренцева базиса, легко заметить, что взаимные наборы удовлетворяют геометрическому принципу двойственности.

Приведенные примеры полных наборов калибровок Ламе показывают, что в классе калибровочных условий Ламе, в частности, имеются автономные неполные наборы калибровок Ламе. Они замечательны тем, что позволяют не доводить решение уравнений (13.5) или (17.36) до конца, а найти ориентацию только одного или только двух векторов лоренцева базиса (одну или две квазиординаты dx^n) и, когда этого достаточно, позволяют на этом остановиться.

17.10. Неполные монадные наборы калибровок Ламе. Рассмотрим их независимо от полных наборов калибровок Ламе. Анализируя систему (13.5) с точки зрения разыскания ее не-сингулярных решений, легко заметить следующее. Обращением в нуль трех членов μ_1 -строки (кроме члена $h_{\mu_1}{}^{l_1}$), т. е. введением трех калибровок Ламе

$$h_{\mu_1}{}^s = 0, \quad s \neq l_1, \quad (17.48)$$

из системы (13.5) отделяется автономная подсистема

$$g_{\nu\mu_1} = h_{\nu}{}^{l_1} h_{\mu_1 l_1} = \pm h_{\nu l_1} h_{\mu_1 l_1}. \quad (17.49)$$

Здесь и далее индексы μ_1 , l_1 произвольны, но фиксированы, поэтому суммирование по l_1 не производится. Знаки \pm в уравнениях (17.49) соответственно относятся к случаям $l_1 = a_1$, $l_1 = (0)$.

Из подсистемы (17.49) получаем

$$h_{\nu}{}^{l_1} = \frac{g_{\nu\mu_1}}{\sqrt{\pm g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad dx^{l_1} = \frac{g_{\nu\mu_1} dx^{\nu}}{\sqrt{\pm g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad (17.50)$$

что позволяет найти одну из квазиординат локального мира Минковского. Если этого достаточно для изучения некоторого

*) $\delta\nu\alpha\sigma(\delta\nu\alpha\delta\sigma)$ — диада, число два.

вопроса, дальнейшее решение системы (13.5) можно приостановить.

Монадный набор, обратный рассмотренному, вытекает из системы (17.34) и условий (17.48):

$$h_{\mu_1}^n h_{\nu}^n = h_{\mu_1}^{l_1} h_{\nu}^{l_1} = \delta_{\nu \mu_1}^v = 0, \quad \nu \neq \mu_1, \quad h_{\mu_1}^{l_1} \neq 0, \quad (17.51)$$

т. е.

$$h_{\nu}^{l_1} = 0, \quad \nu \neq \mu_1. \quad (17.52)$$

Запишем в общем виде монадный набор, взаимный набору калибровок (17.48):

$$h_{\mu_s}^{\mu_1} = 0, \quad s \neq l_1. \quad (17.53)$$

Он выделяет из системы (17.36) автономную подсистему, сходную с (17.49):

$$g^{\nu \mu_1} = h_{l_1}^{\nu} h^{\mu_1 l_1} = \pm h_{l_1}^{\nu} h^{\mu_1 l_1}, \quad (17.54)$$

которая имеет следующее решение:

$$h_{l_1}^{\nu} = g^{\nu \mu_1} / \sqrt{\pm g^{\mu_1 \mu_1}}. \quad (17.55)$$

17.11. Неполные диадные наборы калибровок Ламе. В тех случаях, когда требуется одновременное знание двух квази-координат, решение системы (13.5) нужно продолжить. Легко заметить, что расширением неполного набора калибровок (17.48) за счет добавления к нему подчиненного неполного набора вида

$$h_{\mu_2}^r = 0, \quad l_1 \neq r \neq l_2, \quad \mu_2 \neq \mu_1 \quad (17.56)$$

получаем возможность выделить из системы (13.5) расширенную автономную подсистему, состоящую из уравнений (17.49) и уравнений

$$(g_{\nu \mu_2})_{l_1} \equiv g_{\nu \mu_2} - h_{\nu}^{l_1} h_{\mu_2 l_1} = h_{\nu}^{l_2} h_{\mu_2 l_2}. \quad (17.57)$$

Отсюда с помощью компонент (17.50) находим

$$h_{\nu}^{l_2} = \frac{(g_{\nu \mu_2})_{l_1}}{\sqrt{\pm (g_{\mu_2 \mu_2})_{l_1}}}, \quad (17.58)$$

что позволяет разыскать вторую из квазикоординат, dx^{l_2} , в дополнение к квазикоординате dx^{l_1} , уже найденной при помощи исходного автономного набора.

В отличие от (17.50) в соотношениях (17.58) в общем случае не равны нулю лишь три коэффициента Ламе, когда $\nu \neq \mu_1$, что обеспечивает совместность выражений (17.58) с (17.48). Действительно, в силу условий (17.48)

$$(g_{\mu_1 \mu_2})_{l_1} = h_{\mu_1}^s h_{\mu_2 s} = 0, \quad h_{\mu_1}^{l_2} = 0. \quad (17.59)$$

Поскольку

$$e_{l_1} = h^{\mu_{l_1}} e_{\mu}, \quad e_{l_2} = h^{\mu_{l_2}} e_{\mu}, \quad l_1 \neq l_2, \quad (17.60)$$

найденные компоненты коэффициентов Ламе (17.50) и (17.58) определяют ориентацию двух векторов лоренцева базиса относительно избранной системы координат.

Анализируя систему (17.36), видим, что добавление к взаимному автономному набору (17.53) подчиненного неполного набора

$$h^{\mu_2}_r = 0, \quad \mu_2 \neq \mu_1, \quad l_1 \neq r \neq l_2 \quad (17.61)$$

позволяет выделить следующую расширенную подсистему

$$g^{\nu\mu_1} = h^{\nu}_{l_1} h^{\mu_1 l_1} = \pm h^{\nu}_{l_1} h^{\mu_1 l_1}, \quad (17.62)$$

$$(g^{\nu\mu_2})_{(l_1)} \equiv g^{\nu\mu_2} - h^{\nu}_{l_1} h^{\mu_2 l_1} = \pm h^{\nu}_{l_2} h^{\mu_2 l_2}, \quad (17.63)$$

которая имеет решение:

$$h^{\nu}_{l_1} = \frac{g^{\nu\mu_1}}{\sqrt{\pm g^{\mu_1\mu_1}}}, \quad h^{\nu}_{l_2} = \frac{(g^{\nu\mu_2})_{l_1}}{\sqrt{\pm (g^{\mu_2\mu_2})_{(l_1)}}}, \quad (17.64)$$

причем аналогично (17.59)

$$h^{\mu_1}_{l_2} = 0, \quad (g^{\mu_1\mu_2})_{l_1} = 0. \quad (17.65)$$

Таким образом, диадные неполные наборы калибровок Ламе с помощью двух подсистем, образующих вместе расширенную автономную подсистему, позволяют найти компоненты одного из векторов лоренцева базиса в виде функций компонент метрического тензора 4-пространства ОТО, другого — в виде тех же функций, но уже от усеченных метрических тензоров.

17.12. Генерирование подмножеств $L(x)$ -преобразований требованием ковариантности монадных наборов. Выясним в общем виде, какие ограничения накладывает на коэффициенты локального лоренцева преобразования требование ковариантности совокупности монадных калибровок (17.48) и (17.52):

$$(h_{\mu_1}^s)_{3_{\mu_1 s}} = 0, \quad (h_{\mu_1}^{s'})_{3_{\mu_1 s}} = 0, \quad s \neq l_1, \quad s' \neq l_1', \quad (17.66)$$

$$(h^{\nu}_{l_1})_{3_{\mu_1 s}} = 0, \quad (h^{\nu}_{l_1'})_{3_{\mu_1 s}} = 0, \quad \nu \neq \mu_1.$$

Из (13.26) и (17.66) приходим к заключению, что

$$L^{s'}_{l_1} = h_{\tau}^{s'} h^{\tau}_{l_1} = h_{\mu_1}^{s'} h^{\mu_1}_{l_1} + h_{\kappa}^{s'} h^{\kappa}_{l_1} = 0. \quad (17.67)$$

Требования (17.66) не накладывают ограничений на другие коэффициенты локального лоренцева преобразования. Од-

нако из определения этих преобразований имеем дополнительно:

$$\begin{aligned} \eta^{s'l_1'} &= L^{s'}_{l_1} L^{l_1'}_{l_1} \eta^{l_1 l_1} + L^{s'}_s L^{l_1'}_s \eta^{ss} = 0, \\ \eta^{l_1' l_1'} &= L^{l_1'}_m L^{l_1'}_n \eta^{mn} = \eta^{l_1 l_1}, \end{aligned} \quad (17.68)$$

откуда в силу произвольности коэффициентов вида $L^{s'}$ и соотношений (17.67) получаем

$$L^{l_1'}_s = 0, \quad L^{l_1'}_{l_1} = 1. \quad (17.69)$$

Отсюда вытекает, что подмножество локальных лоренцевых преобразований, выделенное требованием ковариантности калибровки (17.66), оставляет инвариантными компоненты коэффициентов Ламе, содержащие индекс l_1 :

$$h_v^{l_1'} = L^{l_1'}_s h_v^s = h_v^{l_1}. \quad (17.70)$$

Требую локальной лоренц-ковариантности монадных калибровок Ламе (17.65), взаимных условиям (17.48):

$$(h^{\mu_1 s})_{3\mu_1 s} = 0, \quad (h^{\mu_1 s'})_{3\mu_1 s} = 0, \quad (h_v^{l_1'})_{3\mu_1 s} = 0, \quad (17.71)$$

и учитывая, что

$$h^{\mu_1 r} h_v^r = h^{\mu_1 s} h_v^s + h^{\mu_1 l_1} h_v^{l_1} = \delta^{\mu_1}_v = 0, \quad (17.72)$$

из уравнений (13.26) и (17.71) находим $L^{l_1'}_s = 0$. Тогда из подсистемы (17.62) вытекает $L^{s'}_{l_1} = 0$, $L^{l_1'}_{l_1} = 0$.

Таким образом, требования ковариантности монадных калибровок Ламе для h_μ^n и ковариантности калибровок, им взаимных, для h^μ_n генерируют одно и то же подмножество локальных лоренцевых преобразований.

17.13. Подмножества P -преобразований, генерируемые монадными калибровками. Потребуем ковариантности этих калибровок относительно общих координатных преобразований:

$$(h_{\mu_1}^s)_{3\mu_1 s} = 0, \quad (h_{\mu_1}^{s'})_{3\mu_1 s} = 0, \quad s \neq l_1, \quad (17.73)$$

$$(h^v_{l_1})_{3\mu_1 s} = 0, \quad (h^{v'}_{l_1})_{3\mu_1 s} = 0, \quad v \neq \mu_1.$$

Из выражений (13.25) и (17.73) находим

$$P^{v'}_{\mu_1} = h^{v'}_{l_1} h_{\mu_1}^{l_1} + h^{v'}_s h_{\mu_1}^s = 0. \quad (17.74)$$

Это ограничение, выделяющее подмножество координатных преобразований, является единственным. Аналога ограничений (17.73) не существует, так как в ОТО, вообще говоря,

$$g^{\mu'v'} = P^{\mu'}_{\lambda} P^{v'}_{\sigma} g^{\lambda\sigma} \neq g^{\mu\nu}. \quad (17.75)$$

Требование ковариантности взаимных монадных калибровок

$$(h^{\mu_1 s})_{3\mu_1 s} = 0, (h^{\mu_1' s})_{3\mu_1 s=0} = 0, (h_{\nu}^{\prime l_1})_{3\mu_1 s=0} = 0, (h_{\nu}^{\prime l_1})_{3\mu_1 s=0} = 0 \quad (17.76)$$

и выражение (13.25) генерируют ограничения

$$P^{\mu_1' \nu} = h^{\mu_1' l_1} h_{\nu}^{\prime l_1} + h^{\mu_1 s} h_{\nu}^s = 0, \quad (17.77)$$

оставляющие произвольными все остальные коэффициенты.

Следовательно, в отличие от требования ковариантности монадных калибровок относительно локального лоренцева преобразования требование ковариантности относительно общего координатного преобразования монадных калибровок $3_{\mu_1}^s$ и их взаимных монадных калибровок $3_{\mu_1}^s$ генерирует разные подмножества координатных преобразований.

В работе [564] основные сведения о классе калибровок Ламе собраны в виде таблицы. Там же рассмотрен вопрос о применимости калибровок Ламе к полуизотропным и изотропным тетрадам. Показано, что если в уравнениях (14.30) локальный метрический тензор полудиagonalен, то существуют неполные наборы калибровок Ламе, позволяющие отщепить автономную подсистему и найти из нее компоненты ненулевых векторов тетрады. Если же в уравнениях (14.30) тензор $\tilde{\eta}_{kn}$ образован из четырех нулевых векторов, то калибровки Ламе при произвольном $g_{\mu\nu}$ не позволяют выделить автономную подсистему [564].

§ 18. КЛАСС КАЛИБРОВОК СОПУТСТВИЯ

18.1 Определение класса. Во многих задачах ОТО введение калибровочных условий с самого начала связано с конгруенцией мировых линий или одной мировой линией. При этом в работе [566, § 7] употребляется термин «тетрады на линии», в сборнике [567, с. 72] — «концепция одиночного наблюдателя» и «заинтересованного наблюдателя» *).

Будем называть калибровочными условиями сопутствия полные и неполные наборы условий, накладываемых на лоренцев базис, присоединенный к мировым линиям, которые наперед заданы уравнениями в параметрической форме $x^\mu = x^\mu(s)$ или дифференциальными уравнениями движения.

В первом варианте дополнительные условия выгодно присоединять не к уравнениям Эйнштейна или к системе (13.5), а к следующим уравнениям относительно h_{μ}^k , полученным из соотношений (15.17) после свертки с $h_{\mu}^n x^\lambda$ и суммирования по λ :

*) Седов Л. И. III Конгресс, Механика. Варна, 1977, с. 17; «Acta Astronaut», 1978, 5, 491.

$$\frac{\delta}{\delta s} h^\mu_k = \frac{d}{ds} h^\mu_k + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} h^\lambda_k \dot{x}^\sigma = \gamma_k^n h^\mu_n \dot{x}^\lambda \equiv \dot{\omega}_k^n h^\mu_n. \quad (18.1)$$

Здесь $\Gamma^\mu_{\lambda\sigma}$ предполагаются известными из метрической формулировки ОТО, а компоненты \dot{x}^σ находятся дифференцированием заданных выражений $x^\mu = x^\mu(s)$. Метрическая формулировка, вообще говоря, не содержит сведений о шести функциях $\dot{\omega}_{kn}$. Поэтому задание некоторых из компонент может рассматриваться как введение калибровочных условий, накладываемых на лоренцев базис. Величины $\dot{\omega}_{kn}$ — параметры бесконечно малого лоренцева преобразования при перемещении векторов этого базиса из данной точки в точку бесконечно близкую [35]. Такого рода калибровочные условия можно комбинировать с другими условиями, накладываемыми на h^μ_k .

18.2. Полный набор «калибровок Френе — Серре». Рассмотрим уравнения Френе — Серре в 4-пространстве ОТО с точки зрения теории калибровочных условий. Зададим мировую временно-подобную линию уравнениями $x^\mu = x^\mu(s)$. Пусть в точках этой линии лоренцев вектор $e_{(0)}$ к ней касателен. Тогда квазикоордината $dx^{(0)}$ также задана на касательной, т. е. $dx^{(0)} = ds$. Условия касания могут быть записаны в виде

$$h^\mu_{(0)} = dx^\mu/ds = dx^\mu/dx^{(0)} \equiv \dot{x}^\mu, \quad (18.2a)$$

где скорость dx^μ/ds известна, поскольку имеется уравнение мировой линии. Дополним этот набор калибровок из трех независимых уравнений еще тремя условиями:

$$\dot{\omega}^{(0)(2)} = 0, \quad \dot{\omega}^{(0)(3)} = 0, \quad \dot{\omega}^{(3)(4)} = 0. \quad (18.2b)$$

При этих условиях $\dot{\omega}_{(0)(1)} \equiv b$, $\dot{\omega}_{(1)(2)} \equiv c$, $\dot{\omega}_{(2)(3)} \equiv d$ — соответственно первая, вторая и третья кривизны заданной мировой линии. Их также можно считать известными, поскольку их можно вычислить, пользуясь формулами дифференциальной геометрии с помощью \dot{x}^μ . Присоединив «калибровки Френе—Серре» (18.2a) и (18.2b) к (18.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{(0)} &= \dot{\omega}_{(0)(1)} h^\mu_{(1)}, \\ \frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{(1)} &= \dot{\omega}_{(1)(2)} h^\mu_{(2)} + \dot{\omega}_{(1)(0)} h^\mu_{(0)}, \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{(2)} = \dot{\omega}_{(2)}^{(1)} h^\mu_{(1)} + \omega_{(2)}^{(3)} h^\mu_{(3)},$$

$$\frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{(3)} = \dot{\omega}_{(3)}^{(2)} h^\mu_{(2)}.$$

Введем локально-безындексную запись, обозначив разные векторы лоренцевой тетрады разными коренными буквами:

$$h^\mu_{(0)} \equiv A^\mu, \quad h^\mu_{(1)} \equiv B^\mu, \quad h^\mu_{(2)} \equiv C^\mu, \quad h^\mu_{(3)} \equiv D^\mu,$$

$$\eta_{(0)(0)} = -1 = A^\mu A_\mu, \quad \eta_{(1)(1)} = 1 = B^\mu B_\mu, \quad (18.4)$$

$$\eta_{(2)(2)} = 1 = C^\mu C_\mu, \quad \eta_{(3)(3)} = 1 = D^\mu D_\mu.$$

Тогда формулы (18.3) примут вид широко известных уравнений, обобщающих трехмерные формулы Ферне — Серре:

$$\frac{\delta A^\mu}{\delta s} = b B^\mu, \quad (18.5)$$

$$\frac{\delta B^\mu}{\delta s} = c C^\mu + b A^\mu, \quad (18.6)$$

$$\frac{\delta C^\mu}{\delta s} = d D^\mu - c B^\mu, \quad (18.7)$$

$$\frac{\delta D^\mu}{\delta s} = -d C^\mu. \quad (18.8)$$

Структура этой системы уравнений такова, что позволяет выделить автономную ключевую подсистему (18.5), из которой находятся все компоненты B^μ без привлечения остальных уравнений системы. Тогда становится автономной подсистема (18.6), а затем (18.7).

18.3. Полный набор «калибровок Ферми — Уолкера». Перепишем формулу (18.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{k'} &= \eta_{k'm'} \dot{\omega}^{m'n'} h^\mu_{n'} = h_{vk'} h^\nu_{m'} \dot{\omega}^{m'n'} h^\mu_{n'} = \\ &= h_{vk'} [\dot{\omega}^{a'b'} h^\mu_{[a'} h^\nu_{b']} + 2\omega^{(0)'}{}^{a'} h^\mu_{[(0)'} h^\nu_{a'}], \end{aligned} \quad (18.9)$$

где штрихи у индексов указывают, что в этом пункте рассматривается лоренцев базис в целом иной, чем в предыдущем пункте.

Следуя Ферми — Уолкеру, но привлекая лоренцевы индексы и понятия тетрадной формулировки ОТО, примем три калибровочных условия

$$\dot{\omega}^{a'b'} = 0, \quad (18.10)$$

запрещающих пространственный поворот триады \mathbf{e}_a при перемещении вдоль мировой линии. Тогда формула (18.9) упрощается:

$$\frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{k'} = 2h_{\nu k'} \dot{\omega}^{(0)a'} h^\mu_{[(0)'} h^\nu_{a']} . \quad (18.11)$$

Здесь компонента $\dot{\omega}^{(0)'(1)'} \equiv b' \neq b$ не является первой кривизной и поэтому неизвестна. Дополним набор (18.10) еще тремя условиями, положив

$$h^\mu_{(0)'} = h^\mu_{(0)} = A^\mu = \dot{x}^\mu, \quad (18.12)$$

и выразим в уравнениях (18.11) компоненты $h^\nu_{a'}$ через компоненты h^ν_c , введенные в предыдущем пункте и испытывающие перенос Френе — Серре. Учитывая также (18.2а), приводим (18.11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta s} h^\mu_{k'} &= h_{\nu k'} \dot{\omega}^{(0)a'} L_{a'}{}^c (h^\mu_{(0)} h^\nu_c - h^\mu_c h^\nu_{(0)}) = \\ &= h_{\nu k'} \dot{\omega}^{(0)c} (A^\mu h^\nu_c - A^\nu h^\mu_c) = bh_{\nu k'} (A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu), \end{aligned} \quad (18.13)$$

т.е. приходим к переносу лоренцева базиса по Ферми—Уолкеру [19,1, с. 216; 530]*). При $k' = (0)' = (0)$ из системы уравнений (18.13) выделяется подсистема (18.5). При $k' = a'$, поскольку в силу условий (18.2) $h_{\nu a'} A^\nu = \eta_{a'(0)'} = 0$, оставшиеся уравнения (18.13) можно записать в виде

$$\frac{\delta h^\mu_{a'}}{\delta s} = bh_{\nu a'} A^\mu B^\nu.$$

Следовательно, лоренцева триада при калибровке Ферми — Уолкера испытывает перенос Ферми [530].

При калибровочных условиях

$$h^\mu_{(0)} = \dot{x}^\mu, \quad b = c = d = 0 \quad (18.14)$$

лоренцев базис подвергается параллельному переносу. В этом случае соотношения (18.1) принимают вид

$$\frac{\delta h^\mu_k}{\delta s} = \frac{dh^\mu_k}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} h^\nu_k \dot{x}^\lambda = 0.$$

*) Его рассмотрение в связи с калибровкой лоренцева базиса дано Краузе («Int. J. of Phys.», 1975, 12, 35) и в связи с теорией инерциальной навигации Л. И. Седовым («ДАН СССР», 1976, 231, 1311).

Перейдем к вариантам калибровок сопутствия, когда мировая линия задается дифференциальными уравнениями движения, решениями которых являются \dot{x}^λ . Они — функции координат и постоянных интегрирования (первых интегралов движения).

18.4. Две алгебраические формы неполного набора калибровки сопутствия. Локальные компоненты трехмерной скорости связаны с мировыми ее компонентами: $dx^a/dx^{(0)} = h_\mu^a dx^\mu / h_\nu^{(0)} dx^\nu$.

В системе, сопутствующей частице, $dx^a = 0$. Тогда $(ds^2)_{dx^a=0} = (dx^{(0)})^2$. Отсюда следует

$$h_\mu^a \frac{dx^\mu}{dx^{(0)}} = h_\mu^a \frac{dx^\mu}{ds} = 0, \quad (18.15)$$

а также

$$\left(\frac{h^\alpha_k dx^k}{ds} \right)_{dx^a=0} = h^\alpha_{(0)} = \left(\frac{dx^\alpha}{ds} \right)_{dx^a=0} = \frac{dx^\alpha}{dx^{(0)}} \equiv \dot{x}^\alpha \quad (18.16)$$

(\dot{x}^α — три независимые компоненты из четырех компонент \dot{x}^μ). Следовательно, калибровку сопутствия можно представить или в виде трех уравнений (18.15) относительно компонент h_μ^a (компонент триады) или в виде трех уравнений (18.16), приравнивающих три компоненты хроно-монады $h^\alpha_{(0)}$ соответствующим компонентам скорости, найденной из уравнений движения.

Укажем на связь калибровки сопутствия с вопросом о существовании первых интегралов \dot{x}^μ , с уравнением тяготения Эйнштейна, с нелокальностью алгебраических уравнений (13.5). Действительно, нелинейность уравнений поля тяготения ведет в ряде случаев к уравнениям движения. Так, уравнения геодезической линии являются условиями интегрируемости уравнений поля. Под нелокальным характером калибровки сопутствия понимается зависимость тетрад h_μ^k , найденных с участием (18.15) или (18.16), от постоянных интегрирования уравнений движения, содержащихся в \dot{x}^μ . Эти постоянные при фиксированном поле тяготения зависят от начальных и граничных условий и определяют класс калибровки сопутствия. На конкретной зависимости калибровки и тетрад от постоянных интегрирования специально останавливаться далее.

Таким образом, калибровка сопутствия в форме (18.16) является автономным неполным набором и представляет собой конечные выражения компонент хроно-монады, заданные с точностью до калибровочных постоянных. К форме (18.15) калибровки сопутствия следует прибегать для разыскания

компонент сопутствующей триады. Системы (13.5) или (13.8) сначала могут быть разрешены вовсе без калибровочных условий. Тогда в h_{μ}^{λ} войдут произвольные функции. После этого калибровка сопутствия может быть использована для разыскания произвольных функций. Иллюстрируем это на конкретном примере в следующем пункте.

Если принять координатные условия в виде $\dot{x}^{\alpha} = 0$, то калибровка сопутствия вырождается в неполный набор калибровок Ламе. Действительно, тогда условия (18.15) и (18.16) соответственно принимают вид

$$h_0^{\alpha} = 0, \quad h_{(0)}^{\alpha} = 0. \quad (18.17)$$

В форме (18.16) калибровка сопутствия R -скалярна, в форме (18.15) R -инвариантна относительно локальной подгруппы пространственных поворотов и преобразования инверсии триады. Определяя «референционные условия», она должна быть нековариантной относительно преобразований системы отсчета, т. е. преобразований, содержащих гиперболические повороты. Действительно, поскольку

$$h_{\mu}^{\alpha'} \frac{dx^{\mu}}{dx^{(0)}} = L^{\alpha'}_{(0)} h_{\mu}^{(0)} \frac{dx^{\mu}}{dx^{(0)}} + L_b^{\alpha'} h_{\mu}^b \frac{dx^{\mu}}{dx^{(0)}} \quad (18.18)$$

и если $L^{\alpha'}_{(0)} = 0$, то отсюда следует, что $h_{\mu}^{\alpha'} dx^{\mu}/dx^{(0)} = 0$ и что h_{μ}^{α} и $h_{\mu}^{\alpha'}$ принадлежат одному классу транзитивности.

Ковариантность относительно общих координатных преобразований присуща условиям (18.15) по определению. Ковариантность же частного случая калибровки сопутствия (18.17) имеет место лишь относительно подгруппы координатных преобразований. Действительно, условия вида (18.17) (из них независимы три)

$$h^{\alpha'}_{(0)} = P^{\alpha'}_{\mu} h^{\mu}_{(0)} = P^{\alpha'}_{\beta} h^{\beta}_{(0)} + P^{\alpha'}_0 h^0_{(0)} = 0,$$

$$h_0^{\alpha} = P_0^{\alpha} h_{\mu}^{\alpha} = P_0^{\alpha} h_{\alpha}^{\alpha} + P_0^0 h_0^{\alpha} = 0$$

сохранятся лишь в случае таких координатных преобразований, когда $P^{\alpha'}_0 = 0$. Это так называемые хронометрические преобразования. Они, в частности, содержатся в соотношениях (17.73), (17.74) (см. (17.73) при $\nu' = \alpha'$, $\mu'_1 = 0$). На этой подгруппе подробнее остановимся в главе V.

18.5. Тетрады, сопутствующие пробным телам в поле Шварцшильда. Применение калибровки сопутствия к разысканию произвольных функций. Следуя [546, 547], иллюстрируем различные варианты использования калибровки сопутствия, ограничившись для простоты разысканием тетрад, сопутствующих пробным телам при их плоском движении в по-

ле Шварцшильда. Тогда система уравнений (13.5), запишем ее в стандартной системе координат, состоит из шести независимых уравнений относительно 9 неизвестных компонент тетрады:

$$h_{\mu}{}^k h_{\nu}{}^n \eta_{kn} = \text{diag}(-1/\alpha, \alpha, r^2, \dots), \quad \mu, \nu = 0, 1, 3, \quad (18.19)$$

где $\alpha \equiv (1 - 2m/r)^{-1/2}$. Для разыскания всех 9 компонент требуется присоединение к этой системе полного набора из трех (невырожденных) калибровочных условий.

Решения уравнений движения пробных тел (геодезической линии) в поле (18.19) в стандартной системе координат имеют вид

$$dr/ds = A/\alpha, \quad d\varphi/ds = h/r^2, \quad dx^0/ds = \varepsilon\alpha^2, \quad (18.20)$$

$$A = (\alpha^2 \varepsilon^2 - 1 - h^2/r^2)^{1/2},$$

где h и ε — соответственно постоянная площадей и энергетическая постоянная (калибровочные постоянные). Поскольку $\dot{x}_{\mu}\dot{x}^{\mu} = -1$, лишь две из компонент (18.20) независимы, а калибровка сопутствия в рассматриваемом плоском случае содержит лишь два независимых уравнения.

Используя калибровку (18.16) и выражения (18.20), находим компоненты хроно-монады

$$h_0^{(0)} = \varepsilon, \quad h_1^{(0)} = -\alpha A, \quad h_3^{(0)} = -h. \quad (18.21)$$

Компоненты триады также можно получить использованием калибровки сопутствия, но в виде (18.15). В рассматриваемом случае

$$h_1^{(1)} \frac{dr}{ds} + h_3^{(1)} \frac{d\varphi}{ds} = -h_0^{(1)} \frac{dx^0}{ds}, \quad (18.22)$$

$$h_1^{(3)} \frac{dr}{ds} + h_3^{(3)} \frac{d\varphi}{ds} = -h_0^{(3)} \frac{dx^0}{ds}.$$

На долю нефизической части калибровки приходится еще одно условие. В зависимости от его выбора искомые компоненты $h_{\mu}{}^k$ будут иметь разный вид. Пусть, например, нефизическим калибровочным условием будет требование Ламе

$$h_3^{(1)} = 0. \quad (18.23)$$

Из уравнений (18.22), (18.23) и соответствующей части системы (18.19) находим

$$h_{\mu}{}^k = \begin{pmatrix} \varepsilon & Ar/\alpha\sqrt{h^2+r^2} & -\varepsilon h/\sqrt{h^2+r^2} \\ -\alpha A & -\alpha^2 \varepsilon r/\sqrt{h^2+r^2} & \alpha h A/\sqrt{h^2+r^2} \\ -h & 0 & \sqrt{h^2+r^2} \end{pmatrix}, \quad (18.24)$$

тогда как из систем (18.19), (18.22) и условия

$$h_0^{(1)} = 0, \quad (18.25)$$

взятого вместо калибровки (18.23), получаем другой вариант тетрадных компонент:

$$h_{\mu}^k = \begin{pmatrix} h_0^{(0)} = \varepsilon & h_0^{(1)} = 0 & h_0^{(3)} = -\frac{B}{\alpha} \\ h_1^{(0)} = -\alpha A & h_1^{(1)} = \frac{h\alpha}{rB} & h_1^{(3)} = \frac{A\alpha^2\varepsilon}{B} \\ h_3^{(0)} = -h & h_3^{(1)} = -r\frac{A}{B} & h_3^{(3)} = \frac{h\alpha\varepsilon}{B} \end{pmatrix}, \quad (18.26)$$

$B = \pm \alpha\varepsilon v_{\pm}/c$, где v_{\pm} — локальная скорость.

Наконец, рассмотрим вариант разыскания тетрад с точностью до произвольных функций и определение этих функций применим калибровки сопутствия.

Решим сначала систему (18.19) при калибровочном условии (19.23) с точностью до двух произвольных функций. Введем их так, чтобы

$$h_1^{(1)} = \sigma h_1^{(3)}, \quad h_3^{(3)} = \lambda h_3^{(0)}. \quad (18.27)$$

Тогда из уравнений (18.19), (18.23) и (18.27) имеем [546]

$$h_{\mu}^k = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\sigma}{\alpha[(\lambda^2-1)(1+\sigma^2-\lambda^2)]^{1/2}} & \frac{(\lambda^2-1)^{1/2}}{\alpha[1+\sigma^2-\lambda^2]^{1/2}} & \frac{\sigma}{\alpha[\lambda^2-1](1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} \\ \frac{\alpha\lambda}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} & \frac{\alpha\sigma}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} & \frac{\alpha}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} \\ \frac{r}{(\lambda^2-1)^{1/2}} & 0 & \frac{\lambda r}{(\lambda^2-1)^{1/2}} \end{pmatrix}, \quad (18.28)$$

Воспользуемся калибровкой сопутствия для разыскания произвольных функций λ и σ . Подставляя соответствующие компоненты из матрицы (18.28) в уравнения (18.22), найдем

$$\lambda = \pm \left(1 + \frac{r^2}{h^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \mp \frac{\alpha\varepsilon}{A} \sqrt{\lambda^2-1} = \pm \frac{\alpha r \varepsilon}{Ah}. \quad (18.29)$$

Следовательно,

$$(h_{\mu}^k)_{h_3}^{(1)} = 0$$

$$= \begin{pmatrix} - & + & A & - & \varepsilon h \\ -\varepsilon & + & \alpha\sqrt{r^2+h^2} & + & \sqrt{r^2+h^2} \\ + & - & & - & \\ +\alpha A & - & \alpha^2 r \varepsilon & + & \alpha A h \\ - & + & \sqrt{r^2+h^2} & + & \sqrt{r^2+h^2} \\ h & 0 & & + & \sqrt{r^2+h^2} \\ & & & - & \\ & & & + & \end{pmatrix}. \quad (18.30)$$

Как видно из рассмотренного, нелинейность системы (18.19) проявляется в данном случае в наличии квадратных корней из некоторых выражений, что приводит к вариантам тетрад, отличающимся преобразованием инверсии. Так, например, переход от тетрад (18.30) с нижними знаками к тетрадам (18.30) с верхними знаками осуществляется преобразованием инверсии вида $P^k_n = \text{diag}(-1, 1, -1)$.

Примем теперь вместо (18.23) условие (18.25), а произвольные функции введем так, чтобы

$$h_1^{(1)} = \sigma h_1^{(3)}, \quad h_0^{(3)} = \lambda h_0^{(0)}. \quad (18.31)$$

Тогда вместо тетрад (18.28) получим

$$= \begin{pmatrix} h_\mu^k = \\ \frac{1}{\alpha\sqrt{1-\lambda^2}} & 0 & \frac{\lambda}{\alpha\sqrt{1-\lambda^2}} \\ \frac{\lambda\alpha}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} & \frac{\alpha\sigma}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} & \frac{\alpha}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} \\ \frac{\lambda\sigma r}{[(1-\lambda^2)(1+\sigma^2-\lambda^2)]^{1/2}} & \frac{-r\sqrt{1-\lambda^2}}{(1+\sigma^2-\lambda^2)^{1/2}} & \frac{r\sigma}{[(1-\lambda^2)(1+\sigma^2-\lambda^2)]^{1/2}} \end{pmatrix}. \quad (18.32)$$

Используя выражения (18.22) и (18.20), найдем

$$\lambda = \mp \frac{\sqrt{\alpha^2 \varepsilon^2 - 1}}{\alpha \varepsilon} \equiv \mp \frac{B}{\alpha \varepsilon}, \quad \sigma = \pm \frac{h}{A \alpha r \varepsilon}. \quad (18.33)$$

Подставляя эти функции в тетрады (18.32), получаем

$$(h_\mu^k)_{h_0^{(1)}=0} = \begin{pmatrix} + & & - & B \\ + & \varepsilon & 0 & + \\ + & & & - \\ - & \alpha A & + \frac{\alpha h}{r B} & + \frac{\alpha^2 \varepsilon}{-} \frac{A}{B} \\ + & & + & \\ - & h & - r \frac{A}{B} & + \frac{\alpha h \varepsilon}{+} \\ - & & + & B \end{pmatrix}. \quad (18.34)$$

Варианты этих тетрад при нижних и средних знаках связаны преобразованием инверсии $P^k_n = \text{diag} (-1, -1, 1)$. Это преобразование эквивалентно замене $B \rightarrow -B$. Варианты тетрад (18.34) при верхних знаках и тетрад (18.30) при нижних знаках связаны локальным преобразованием из R -подгруппы:

$$L^k_n = (h_\mu^k)_{h_0(1)=0} (h^\mu_n)_{h_3(1)=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha h \varepsilon}{B\sqrt{r^2+h^2}} & \frac{rA}{B\sqrt{r^2+h^2}} \\ 0 & \frac{-rA}{B\sqrt{r^2+h^2}} & \frac{\alpha h \varepsilon}{B\sqrt{r^2+h^2}} \end{pmatrix}. \quad (18.35)$$

Следовательно, при одних и тех же значениях h и ε и любых знаках \dot{r} и φ найденные сопутствующие тетрады входят в один и тот же класс транзитивности тетрад. Связь между классами транзитивности осуществляется локальными лоренцевыми преобразованиями, содержащими гиперболические повороты, возникающие за счет изменения калибровочных постоянных. Так, ограничившись для простоты лишь верхними знаками и случаем $\dot{r} > 0$, $\varphi > 0$, находим [547]

$$L_m^n = (h^\mu_m)_{h_3(1)=0} (h_\mu^n)_{h_3(1)=0} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_1 - \frac{h_1 h_2}{r^2} & -\frac{\alpha r D_2}{r_2} & -\frac{h_2 D_1}{r_2} + \frac{h_1 r_2}{r^2} \\ -\frac{\alpha r D_2}{r_1} & \frac{r^2 D_1}{r_1 r_2} & \frac{\alpha r h_2 D_2}{r_1 r_2} \\ \frac{h_1 D_1}{r^2 r_1} - \frac{h_2 r_2}{r^2} & \frac{\alpha r h_1 D_2}{r_1 r_2} & -\frac{h_1 h_2}{r_1 r_2} D_1 + \frac{r_1 r_2}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (18.36)$$

$$r_1 \equiv \sqrt{r^2 + h_1^2}, \quad r_2 \equiv \sqrt{r^2 + h_2^2}, \quad D_1 \equiv \alpha^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 - A_1 A_2,$$

$$D_2 \equiv \varepsilon_1 A_2 - \varepsilon_2 A_1.$$

При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $h_1 = h_2$ это локальное лоренцево преобразование становится тождественным. Поэтому h и ε могут быть также названы постоянными класса транзитивности тетрад.

Изложенный выше путь использования калибровочных условий для разыскания произвольных функций может быть принят и в случае изотропных тетрад. В работе [40] этим путем найдены тетрады, сопутствующие изотропным геодезическим линиям в поле Шварцшильда.

Сопутствующие тетрады можно также найти другим способом — применяя локальное лоренцево преобразование*) к некоторым исходным «закрепленным» тетрадам [546, 569]. Тогда вместо калибровочных условий задаются параметры локального преобразования Лоренца. Этот способ разыскания сопутствующих тетрад в поле Шварцшильда использован в работах [36, 37, 39]. Если тетрады сопутствуют геодезическим линиям, их называют «свободно падающими» [570, 571].

Таким образом, возможности использования калибровки сопутствия разнообразны. Свобода выбора ориентации триады в данном классе транзитивности тетрад является одним из источников разнообразия математических форм физически эквивалентных калибровочных условий.

§ 19. КЛАСС Х. И.-ПОДОБНЫХ КАЛИБРОВОК

19.1. Определение класса. Как видно из § 17, калибровки Ламе, требующие равенства нулю некоторых компонент обобщенных коэффициентов Ламе, позволяют найти неизвестные их компоненты в виде характерных по форме единообразных отношений, таких, как отношения (17.8), (17.19), (17.25), (17.32), (17.41), а в общей записи (с незафиксированными, но ограниченными значениями индексов) — (17.50), (17.55), (17.64) и др. Впервые один из случаев такого рода отношений введен в общетеоретических построениях теории хронометрических инвариантов для выражения компонент хроно-монады**) через компоненты метрического тензора 4-пространства ОТО (без использования понятия калибровочных условий в смысле тетрадного представления ОТО, см. далее § 21). Поэтому упомянутые отношения будем называть х.и.-подобными. Поскольку ОТО допускает в принципе множество калибровок, очевидно, можно, наоборот, на правах калибровочных условий наперед потребовать, чтобы некоторые из компонент h_{μ}^{ν} равнялись х.и.-подобным отношениям. В работе Ю. С. Владимирова [563] так и сделано (в ней эти равенства названы «групповыми калибровками»). При этом оставались в стороне нормы тетрадного метода, не выделялись именно независимые условия с целью присоединения к системе (13.5) для совместного решения и, таким образом, для разыскания остальных неизвестных компонент h_{μ}^{ν} . Поэтому в работе [574] Ю. П. Выблым произведен пересмотр

*) Его бивекторная параметризация применительно к вращению в плоском 4-пространстве использовалась в работе [568].

**) Преобразование хроно-монады при переходе к другой системе отсчета с помощью локальных преобразований Лоренца рассматривалось в работах [572, 573].

равенств некоторых из компонент h_{μ}^k х.и.-подобным отношениям как калибровочных условий в смысле тетрадного метода с его нормами, не допускающими избытка калибровок. Так как и другого вида калибровочные условия могут генерировать подгруппы преобразований, то заменим слишком общее название «групповые калибровки» на более узкое — «х.и.-подобные калибровки». Будем далее называть классом х.и.-подобных калибровок все множество полных и неполных наборов калибровочных условий, требующих равенства соответствующего числа компонент h_{μ}^k х.и.-подобным отношениям. Перейдем к рассмотрению этого класса, следуя статье [574], а тем самым соответственно опираясь и на работу Ю. С. Владимирова [563]. Это позволит выявить две характерные черты, отличающие класс х.и.-подобных калибровок от класса Ламе.

19.2. Хроно-монадная калибровка. Присоединим к системе (13.5) условие

$$h_{\mu_1}^{(0)} = \sqrt{-g_{\mu_1\mu_1}} = -g_{\mu_1\mu_1} / \sqrt{-g_{\mu_1\mu_1}}, \quad (19.1)$$

где μ_1 — фиксированный индекс. Тогда из системы (14.5) выделяется подсистема из четырех уравнений

$$g_{\mu_1\nu} = h_{\mu_1}^{(0)}h_{\nu(0)} + h_{\mu_1}^a h_{\nu a}. \quad (19.2)$$

В ней содержится уравнение при $\nu = \mu_1$, принимающее при учете калибровки (19.1) вид

$$\begin{aligned} g_{\mu_1\mu_1} &= h_{\mu_1}^{(0)}h_{\mu_1(0)} + h_{\mu_1}^a h_{\mu_1 a} = \\ &= g_{\mu_1\mu_1} = (h_{\mu_1(1)})^2 + (h_{\mu_1(2)})^2 + (h_{\mu_1(3)})^2. \end{aligned} \quad (19.3)$$

Из этого, одного, уравнения в случае вещественных тетрад находим три компоненты $h_{\mu_1}^k$:

$$h_{\mu_1}^{(1)} = h_{\mu_1}^{(2)} = h_{\mu_1}^{(3)} = 0, \quad (19.4)$$

принадлежащие трем разным векторам лоренцева базиса. Учет равенства (19.4) превращает подсистему (19.1) в автономную, из которой находим

$$h_{\nu(0)} = g_{\mu_1\nu} / \sqrt{-g_{\mu_1\mu_1}}. \quad (19.5)$$

Таким образом, одно калибровочное условие (19.1) и четыре уравнения (19.2) позволяют найти (в случае вещественных тетрад) шесть независимых компонент h_{μ}^k — все компоненты лоренцева вектора $e_{(0)}$ и попутно μ_1 -компоненты триады.

19.3. Хоро-монадные калибровки. Примем два следующих калибровочных условия:

$$h_{\mu_1}^{a_1} = [(g_{\mu_1\mu_1})_{(a_2a_3)}]^{1/2}, \quad h_{\mu_1}^{a_2} = (g_{\mu_1\mu_1})^{1/2}. \quad (19.6)$$

Подстановка первого условия калибровки (19.6) в уравнение системы (14.5), содержащее $g_{\mu_1\mu_1}$, дает

$$h_{\mu_1}^{(0)} = 0, \quad (19.7)$$

а подстановка второго с учетом равенства (19.7) позволяет получить (для вещественных тетрад)

$$h_{\mu_1}^{a_1} = h_{\mu_1}^{a_2} = 0. \quad (19.8)$$

Тогда три остальных уравнения из системы (14.5), содержащих $g_{\alpha_1\alpha_2}$, $g_{\alpha_1\alpha_3}$, $g_{\alpha_1\alpha_0}$, имеют решения

$$h_{\mu_0}^{a_2} = \frac{g_{\mu_1\mu_0}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad h_{\mu_2}^{a_2} = \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad h_{\mu_3}^{a_2} = \frac{g_{\mu_1\mu_3}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}. \quad (19.9)$$

Таким образом, из двух калибровочных условий (19.6) и четырех уравнений из системы (13.5) находятся 6 неизвестных компонент из h_{μ}^k , но среди них все компоненты только одного из векторов лоренцева базиса — монады e_{a_2} , остальные же дают лишь по одной μ_1 -компоненте остальных векторов базиса. Поэтому два калибровочных условия (19.6) являются монадной калибровкой.

19.4. Хоро-, хроно-диадные калибровки. Примем

$$h_{\mu_1}^{(0)} = (-g_{\mu_1\mu_1})^{1/2}, \quad h_{\mu_2}^{a_1} = [(g_{\mu_2\mu_2})_{(0)}]^{1/2}, \quad (19.10)$$

т. е. дополним калибровку (19.1) еще одним условием. Первое из условий позволило найти равенства (19.4) и (19.5). Присоединяя второе из условий (19.10) к уравнению системы (13.5), содержащему $g_{\mu_2\mu_2}$, находим

$$h_{\mu_2}^{a_2} = h_{\mu_2}^{a_3} = 0. \quad (19.11)$$

Тогда решениями уравнений системы (13.5), содержащими $g_{\mu_2\mu_2}$ и $g_{\mu_2\mu_0}$ и дополненными вторым из условий (19.10), будут компоненты

$$h_{\mu_3}^{a_1} = \frac{(g_{\mu_2\mu_3})_{(0)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(0)}}}, \quad h_{\mu_0}^{a_1} = \frac{(g_{\mu_2\mu_0})_{(0)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(0)}}}. \quad (19.12)$$

Следовательно, условия (19.10) являются диадными. Они позволяют найти все компоненты $e_{(0)}$ и e_{a_2} , но, кроме них, находятся также компоненты (19.4) и (19.11). В работе [574] рассмотрены и другие варианты хоро-, хроно-диадных калибровок.

19.5. Хоро-диадные калибровки. Пусть приняты четыре калибровочных условия:

$$h_{\mu_1}^{(0)} = [-(g_{\mu_1\mu_1})_{(a_2)}]^{1/2}, \quad h_{\mu_1}^{a_1} = [(g_{\mu_1\mu_1})_{(a_2 a_2)}]^{1/2}, \quad (19.13)$$

$$h_{\mu_2}^{a_1} = [(g_{\mu_2\mu_2})_{a_2 a_2}]^{1/2}, \quad h_{\mu_2}^{a_2} = [(g_{\mu_2\mu_2})_{(a_2)}]^{1/2}.$$

Эти условия выделяют из (13.5) подсистемы уравнений, содержащие

$$g_{\mu_1\mu_1}, \quad g_{\mu_1\mu_2}, \quad g_{\mu_1\mu_3}, \quad g_{\mu_1\mu_0}, \quad g_{\mu_2\mu_2}, \quad g_{\mu_2\mu_3}, \quad g_{\mu_2\mu_0},$$

из которых последовательно находятся такие компоненты:

$$h_{\mu_1}^{(0)} = h_{\mu_1}^{a_1} = h_{\mu_1}^{a_2} = 0, \quad h_{\mu_1}^{a_3} = \sqrt{g_{\mu_1\mu_1}},$$

$$h_{\mu_2}^{a_3} = \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad h_{\mu_3}^{a_3} = \frac{g_{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad h_{\mu_0}^{a_3} = \frac{g_{\mu_1\mu_0}}{\sqrt{g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad (19.14)$$

$$h_{\mu_2}^{(0)} = h_{\mu_2}^{a_1} = 0, \quad h_{\mu_2}^{a_2} = \sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(a_2)}},$$

$$h_{\mu_2}^{a_3} = \frac{(g_{\mu_2\mu_2})_{(a_2)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(a_2)}}}, \quad h_{\mu_0}^{a_3} = \frac{(g_{\mu_2\mu_0})_{(a_2)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(a_2)}}}.$$

Следовательно, четыре условия системы (19.13) остаются диадными, так как позволяют найти все компоненты только двух векторов лоренцева базиса — e_{a_2} и e_{a_3} . Кроме них, находятся по две компоненты μ_1 и μ_2 двух остальных векторов тетрады. В работе [574] рассмотрены и другие варианты хоро-диадных условий.

19.6. Вырожденные полные наборы. Добавим к двум условиям (19.10) еще одно вида

$$h_{\mu_2}^{a_1} = [(g_{\mu_2\mu_2})_{(0, a_2)}]^{1/2}. \quad (19.15)$$

Присоединив три калибровочных условия, еще не использованных в п. 19.3, к уравнениям (13.5), получим недостающие компоненты лоренцева базиса. В результате решения

$$h_{\mu}^{(0)} = -\frac{g_{\mu_1\mu_1}}{\sqrt{-g_{\mu_1\mu_1}}}, \quad h_{\mu}^{a_1} = \frac{(g_{\mu_1\mu_1})_{(0)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(0)}}}, \quad (19.16)$$

$$h_{\mu}^{a_3} = \frac{(g_{\mu_2\mu_2})_{(0, a_1)}}{\sqrt{(g_{\mu_2\mu_2})_{(0, a_1)}}}, \quad h_{\mu}^{a_2} = \frac{(g_{\mu_2\mu_0})_{(0, a_1 a_2)}}{\sqrt{(g_{\mu_0\mu_0})_{(0, a_1 a_2)}}}.$$

Следовательно, набор калибровок систем (19.10) и (19.15) является полным, позволяет найти все компоненты лоренцева

базиса. Он также вырожден, поскольку содержит не 6, а только 3 калибровочных условия. В работе [574] приведены еще 3 варианта полных вырожденных наборов.

19.7. Сравнение класса х.и.-подобных калибровок с классом Ламе. Как видно из изложенного, оба класса позволяют выделять из системы (14.5) автономные подсистемы. В обоих классах вся совокупность задаваемых и находимых компонент h_{μ}^k — нули или х.и.-подобные выражения. Для любой калибровки Ламе существует дополнительная х.и.-подобная, которая приводит к той же совокупности известных компонент h_{μ}^k , что и соответствующая калибровка Ламе. Разница заключается лишь в том, что в первом случае часть h_{μ}^k , равных нулю, задается наперед калибровочными условиями, а во втором компоненты, равные нулю, находятся из системы (14.5). Можно, однако, ввести х.и.-подобные калибровки и не являющиеся дополнительными к наборам Ламе. Эти калибровки позволяют находить добавочные по сравнению с калибровками Ламе компоненты h_{μ}^k . Так, добавляя к калибровке (19.6) условие

$$h_{\mu_2}^{a_2} = [(g_{\mu_1 \mu_2})_{(a_2)}]^{1/2},$$

найдем добавочно коэффициент $h_{\mu_2}^{a_2}$. Кроме того, найдем, что имеет место равенство $h_{\mu_2}^{(0)} = \pm h_{\mu_2}^{a_2}$.

Другим отличительным свойством рассмотренных калибровок при условии вещественности компонент h_{μ}^k является возможность существования вырожденных наборов. Это приводит, в частности, к полным наборам с числом условий менее шести. Существование вырожденных калибровок показывает, что число калибровочных условий, доопределяющих лоренцев базис или его отдельные векторы, не обязательно равно числу параметров группы или подгруппы Лоренца.

Отметим, наконец, что, поскольку х.и.-подобные калибровки приводят к решениям системы (14.5), содержащим компоненты h_{μ}^k , равные нулю, они инвариантны относительно тех же подгрупп координатных и лоренцевых преобразований, что и соответствующие калибровки Ламе.

Среди множества калибровок, не входящих в три рассмотренных выше класса, имеются и другие интересные калибровки. Так, обращает на себя внимание калибровка [575], требующая наименьшего отклонения тетрад h_{μ}^k от единичных δ_{μ}^k , а также калибровка (16.1). Последняя, в частности, анализировалась в работе [576] *).

*) Специальный класс калибровочных условий, накладываемых на $h_{\mu}^{(0)}$, выделяющих системы отсчета, ассоциированные с электромагнитным полем, предложен в «ДАН СССР» (1978, 243, 85).

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ОТО, ВЫДЕЛЯЮЩИЕ ПОДГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Из сказанного понятно, насколько важно для нас установление собственных вещей и их свойств в пространстве: не следует, однако, думать, что изучение несобственных вещей и свойств есть ненужный балласт...

А. ФРИДМАН

ВВЕДЕНИЕ

Наличие 4 тождеств в системе эйнштейновых уравнений (13.6) относительно 10 неизвестных компонент $g_{\mu\nu}$ приводит к тому, что эти компоненты зависят, кроме распределения и движения источников поля тяготения, также и от четырех произвольных функций. Последние определяются выбором системы координат. Эйнштейн, согласно принципу общей ковариантности, допустил в ОТО любые возможные системы координат, т. е. всевозможные арифметизации пространства — времени. Он же отметил, что не все координатные преобразования («подстановки» [1, I, с. 459]) равноправны. С одними связано движение, с другими нет. Естественно, что рассмотрение данного поля тяготения в разных координатных системах приводит к разного вида соотношениям. Это одно время служило источником всякого рода недоразумений. В частности, обзор рассмотрений центрально-симметричных полей тяготения в различных системах координат и анализ некоторых из упомянутых недоразумений имеются в работе [577]. С другой стороны, представляют интерес и математические исследования координатных условий. В связи с задачей Коши и с установлением типа эйнштейновых уравнений (после присоединения к ним определенных координатных условий) по классификации Петровского [578] координатные условия ОТО изучались в работах [579, 580]. Показано, что изменение координатных условий может изменить тип уравнений (1.1) в смысле этой классификации. В частности, пока-

зано, что система эйнштейновых уравнений ОТО в вакууме является системой гиперболического типа по классификации Петровского только при некоторых условиях [579].

По мере развития физической интерпретации ОТО системы координат «...выходят за рамки своих функций и заимствуют нечто у систем отсчета» [567]. Обычно это «нечто» легко усматривается — вектор $e_{(0)}$, принадлежащий лоренцеву базису. В частности, это подразумевается в монографии [23]: «Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени».

Если «указание времени» и «часы» понимать в подчинении требованиям метрологии, то данное определение состоит из объединения понятий координатной системы с единичным вектором $e_{(0)}$ лоренцева базиса (эталона времени). Такого рода гибрид повлек за собой перестройку некоторых величин и соотношений ОТО, а затем систематическую перестройку всего аппарата теории и ее основных уравнений. Независимо от тетрадного представления ОТО возникли специальные формулировки ОТО, основанные на введении «эталона» времени $e_{(0)}$, присоединенного некоторым образом к координатной системе, и на подгруппах координатных преобразований, но в основном без учета того, что $e_{(0)}$ может быть в ОТО подвергнут локальному преобразованию Лоренца. Как видно из предыдущего, тетрадное представление ОТО также содержит $e_{(0)}$, а автономные неполные наборы позволяют разыскать $h_{\mu}^{(0)}$, не вводя в рассмотрение e_a (спрятанная триада). Отсюда следует, что указанные специальные формулировки могут быть рассмотрены не только индуктивно, независимо от тетрадной формулировки, каждая по отдельности, но и дедуктивно, в рамках тетрадного представления, по мере перехода от использования четырех векторов e_a к одному $e_{(0)}$. Наличие общей цели у разных специальных формулировок ОТО (введение измеряемых величин, устранение трудностей, связанных с зависимостью от произвола в выборе координаты времени и др.) делает рациональным анализ всех этих формулировок с некоторой единой точки зрения, укладку их в одно общее русло.

Задача данной главы — сделать это, исходя из тетрадного представления ОТО и получая специальные формулировки за счет расщепления величин и операций, выбора калибровочных условий и других видоизменений естественных и допустимых в рамках тетрадной формулировки. Такое сопоставление тетрадной формулировки с другими формулировками ОТО приводит к сравнению их друг с другом на общей

основе. Приведен также ряд фрагментов из независимых построений специальных формулировок и из их истории.

Ограничимся следующими формулировками, выделяющими подгруппы преобразований и их инварианты: R -инвариантная формулировка ОТО (локальная лоренцева R -подгруппа); хронометрически-инвариантная (х. и., подгруппа голономных координатных хронометрических преобразований); кинеметрически-инвариантная (к. и., подгруппа координатных кинеметрических преобразований); специальная формулировка Шмутцера (подгруппа неголономных хронометрических преобразований); ортометрическая формулировка (она общековариантна, но ее ортометрические величины R -инвариантны)*).

Для проведенного в данной главе сопоставления различных формулировок ОТО с тетрадной формулировкой ключевым является R -инвариантное представление. Привлечение понятий неполного набора калибровочных условий и координатных представлений лоренцевых локальных подгрупп позволило все перечисленные выше специальные формулировки ОТО рассмотреть на общей основе — на локальной R -подгруппе. Это обеспечило выделение альтернативных частей формулировок и частей существенно оригинальных. Центральным в этих формулировках является введение специальных величин и специальных производных. Лишь немногие из величин являются собственными. Большинство же из них — несобственные величины.

Последний параграф данной главы можно рассматривать как применение, как иллюстрацию специальных формулировок ОТО. Для всех них, начиная с тетрадной (см. п. 14.3), первоначальными и достаточно общими понятиями являются физические время и длина (хронометрические инварианты) и время задержки (десинхронизации). Эти понятия специальных формулировок получили наиболее широкое распространение. Они вошли в монографии и многие статьи, где используются для обсуждения физического содержания ОТО, вводятся как в общих теоретических построениях, так и в подсчетах и комментировании отдельных гравитационных эффектов, что, в частности, видно из глав I и II.

Три указанные величины, согласно работам [36—44, 51, 52], при некоторых дополнениях вычисляются в § 24 с помощью эйнштейновых уравнений поля тяготения и уравнений движения в зависимости от параметров. Они сравниваются с соответствующими величинами НТТ (при ультрарелятивистском движении с соответствующими величинами СТО). Получен-

* Сопоставление хронометрии с монадным аппаратом и др. см.: Румянцев С. В. Применение монадного и диадного методов в ОТО. Автореф. канд. дис. М., МГУ, 1978.

ные разности называются дефектами (времени десинхронизации или задержки, собственных времени и пути). Тем самым пополняется восьмая группа эффектов ОТО. Они рассматриваются сначала независимо друг от друга, но затем вместе взятые (сумма дефектов в общей мере). Поэтому для них вводится также и общее название—кинематические дефекты, что подчеркивает их происхождение, их локальную связь с кинематикой СТО (см. п. 14.3).

В богатой исходными положениями эйнштейновой теории тяготения разные ее эффекты могут возникать при доминирующем влиянии, вообще говоря, разных ее постулатов. Снятие доминирующих постулатов при сохранении остальных сопровождается исчезновением соответствующих им эффектов. Теперь, когда ставится вопрос об опытной проверке не только отдельных эффектов, но и постулатов ОТО, а также конкурирующих теорий тяготения, уместно выявление групп эффектов ОТО, для которых характерна доминирующая связь с определенными постулатами.

§ 20. R-КОВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТО

20.1. R-величины. Так назовем, следуя работе [559], R -скаляры, R -тензоры и более сложные геометрические объекты, определенные относительно локальной лоренцевой подгруппы пространственных вращений. Они, вообще говоря, содержат общековариантные индексы, временные локальные, а также локальные пространственные, полностью или частично свернутые, т. е. они являются результатом полной или частичной «перелицовки» локальных компонент геометрических объектов ОТО в их общековариантные компоненты по закону, соответствующему рассматриваемому объекту.

Пользуясь термином, употребляемым Э. Картаном,— «реперы, присвоенные группе движения» [581], R -инварианты можно назвать «присвоенными величинами» [582, 583], присвоенными R -подгруппе. «Операцию присвоения» можно разделить на три шага: 1) «перелицовка» (полная или частичная) локальных компонент в мировые или наоборот; 2) замена свертков, содержащих компоненты триады h_{μ}^a , на содержащие компоненты хроно-монады $h_{\mu(0)}$, поскольку $h_{\mu}^a h_{\nu a} = g_{\mu\nu} - h_{\mu(0)} h_{\nu(0)}$, что уменьшит в рассматриваемых величинах число локальных индексов до одного; 3) отбрасывание индекса (0) как в рамках фиксированной системы отсчета «оставшегося без дела». Тогда операция присвоения может быть сведена к воздействию на мировые тензоры компонентами лоренцева базиса $h_{\mu}^{(0)}$, а R -скаляры могут быть образованы свертками вида (14.12), т. е.

$$dx^{(0)} = h_{\mu}^{(0)} dx^{\mu}, \quad dl^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad (20.1)$$

(R — скалярные время и длина), или

$$\begin{aligned} \rho_{(0)} &= h_{\mu(0)} p^{\mu} \equiv \tau_{\mu} p^{\mu} \equiv P_{*}, \quad \rho_{(0)(0)} = h_{\mu(0)} h_{\nu(0)} p^{\mu\nu} \equiv \\ &\equiv P_{**} = \tau_{\mu} \tau_{\nu} p^{\mu\nu}, \\ \rho_{\mu(0)} &= h^{\lambda}_{(0)} p_{\mu\lambda} \equiv \tau^{\lambda} p_{\mu\lambda} \equiv P_{\mu*}, \\ \rho_{\mu(0)(0)} &= h^{\lambda}_{(0)} h^{\sigma}_{(0)} p_{\mu\lambda\sigma} \equiv \tau^{\lambda} \tau^{\sigma} p_{\mu\lambda\sigma} \equiv P_{\mu**} \end{aligned} \quad (20.2)$$

и др. Эти величины не имеют индекса, который мог бы быть подвергнут нетождественному преобразованию из R -группы*). Такие индексы имеют R -инварианты, но они образуют свертки, например:

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu}^a h_{\nu a} = g_{\mu\nu} - h_{\mu}^{(0)} h_{\nu(0)} \equiv (g_{\mu\nu})_{(0)} \quad (20.3)$$

(R -инвариантный метрический тензор), или

$$\begin{aligned} \overset{*}{p} &\equiv p^a p_a = h_{\mu}^a h_{\nu a} p^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})_{(0)} p^{\mu\nu} \equiv P, \\ \overset{*}{p}_{\mu} &= h_{\mu}^a p_a = h_{\mu}^a h_{\nu a} p^{\nu} = (g_{\mu\nu})_{(0)} p^{\nu} \equiv P_{\mu}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Приведенные примеры показывают, что R -инварианты весьма разнообразны по своей локальной структуре, по своим трансформационным размерностям относительно локальных преобразований Лоренца, содержащих гиперболические повороты. Поэтому весьма разнообразны и законы их преобразования, например [586]:

$$\begin{aligned} h_{\mu(0)'} &\equiv \tau'_{\mu} = L_{(0)'}{}^{,k} h_{\mu k} = \\ &= L_{(0)'}{}^{(0)} (h_{\mu(0)} - v^a_{(0)} h_{\mu a}) = (\tau_{\mu} - \overset{*}{v}_{\mu}) / \sqrt{1 - \beta^2}, \end{aligned} \quad (20.5)$$

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu})_{(0)'} &= (g_{\mu\nu})_{(0)} + (1 - \beta^2)^{-1} (\beta^2 h_{\mu}^{(0)} h_{\nu}^{(0)} + v_{\mu(0)} v_{\nu(0)} - \\ &- 2h_{\mu}^{(0)} v_{\nu(0)}), \quad L_{(0)'}{}^{,a} = -v^a_{(0)} L_{(0)'}{}^{(0)}, \end{aligned}$$

где $h_{\mu(0)}$ и $h_{\mu(0)'}$ — решения тетрадного уравнения Эйнштейна при разных калибровках тетрад. Аналогично

$$\begin{aligned} P_{*'} &= h_{\mu(0)'} p^{\mu} = L_{(0)'}{}^{,k} h_{\mu k} p^{\mu}, \quad \overset{*}{p}'_{\mu} = h_{\mu}{}^{a'} p_{a'} = \\ &= (g_{\mu\nu})_{(0)'} p^{\nu}, \quad \overset{*}{P}' = p^{a'} p_{a'} = (g_{\mu\nu})_{(0)'} p^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (20.6)$$

Следовательно, упрощая запись отбрасыванием лоренцевых индексов, нужно соблюдать осторожность, иметь их в ви-

*) Замена индекса (0) звездочками производится согласно работе [572].

ду на случай возможного преобразования R -инвариантов относительно произвольного локального лоренцева преобразования.

Относительно R -подгруппы могут быть введены и геометрические объекты с более сложным законом преобразования, чем тензоры. Среди коэффициентов вращения Риччи имеются следующие R -тензоры [543] (см. (15.27)):

$$F_\alpha = \gamma_{(0)a(0)}, \quad A_{ab} = \gamma_{(0)[ab]}, \quad D_{ab} = -\gamma_{(0)(ab)} \quad (20.7)$$

и геометрические R -объекты с трансформационными свойствами коэффициентов связности

$$\Delta^a_{bc} = \gamma^a_{bc}, \quad \Delta^a_b = \gamma^a_{b(0)}. \quad (20.8)$$

Детальнее:

$$F_\alpha = h_\alpha^b \gamma^{(0)}_{b(0)}, \quad (20.9)$$

$$D_{\alpha\beta} = -h_{(\alpha}{}^a h_{\beta)}{}^b \gamma^{(0)}_{ab},$$

$$A_{\alpha\beta} = h_{[\alpha}{}^a h_{\beta]}{}^b \gamma^{(0)}_{ab} = h_{[\alpha}{}^a h_{\beta]}{}^b h_\mu^{(0)} \partial_b h^\mu_\alpha, \quad (20.10)$$

$$\Delta^{\alpha}_{\beta\gamma} = h^\alpha_\alpha h_\beta^b h_\gamma^c \gamma^a_{bc} + h^\alpha_c \partial_\gamma h_\beta^c. \quad (20.11)$$

20.2. R -инвариантные производные. Введем R -скалярную частную производную

$$\partial_{(0)} \equiv h^\mu_{(0)} \partial_\mu. \quad (20.12)$$

Она, естественно, не инвариантна относительно 6-параметрического $L(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)'} &= L_{(0)'}{}^k \partial_k = L_{(0)'}{}^{(0)} \partial_{(0)} + L_{(0)'}{}^a \partial_a = \\ &= L_{(0)'}{}^{(0)} h^\mu_{(0)} \partial_\mu + L_{(0)'}{}^b h^\mu_b \partial_\mu. \end{aligned} \quad (20.13)$$

R -инвариантная частная производная образуется усечением суммы:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\partial}_\mu &\equiv h_\mu^a \partial_a = h_\mu^a h^\lambda_a \partial_\lambda = (g_\mu^\lambda)_{(0)} \partial_\lambda = \partial_\mu - h_\mu^{(0)} \partial_{(0)} = \\ &= \partial_\mu - h_\mu^{(0)} h^\nu_{(0)} \partial_\nu. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Производные $\partial_{(0)}$ и $\overset{*}{\partial}_\mu$ соотношениями (20.12) и (20.14) определяются для общего случая, т. е. для всех возможных случаев калибровочных условий. При разных калибровочных условиях компоненты h_μ^0 , $h^\mu_{(0)}$ будут различными. Поэтому $\partial_{(0)}$ и $\overset{*}{\partial}_\mu$ зависят от выбора калибровочных условий.

Объекты (20.8) могут быть использованы для введения пространственной и временной R -ковариантных производных:

$$\tilde{\nabla}_a Q^b{}_{c\dots} \equiv \partial_a Q^b{}_{c\dots} + \Delta^b_{da} Q^d{}_{c\dots} - \Delta^d_{ca} Q^b{}_{d\dots}, \quad (20.15)$$

$$\tilde{\nabla}_{(0)} Q^b{}_{c\dots} \equiv \partial_{(0)} Q^b{}_{c\dots} + \Delta^b_a Q^a{}_{c\dots} - \Delta^d_c Q^b{}_{d\dots}$$

(производная ∇_k без тильды берется не относительно Δ_{bc}^a , а относительно γ_{mn}^k).

В частности,

$$\tilde{\nabla}_a \Phi = \partial_a \Phi = h^\mu_a \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \quad \tilde{\nabla}_{(0)} \Phi = \partial_{(0)} \Phi = h^\mu_{(0)} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu}, \quad (20.16)$$

где Φ — общековариантный скаляр или R -скаляр. Запишем выражения (20.15) и (20.16) применительно к R -вектору T^a и R -скаляру $T^{(0)}$ в виде двух следующих соотношений:

$$\tilde{\nabla}_k T^a \equiv \partial_k T^a + \gamma^a_{\ b k} T^b, \quad (20.17)$$

$$\tilde{\nabla}_k T^{(0)} \equiv \partial_k T^{(0)} + \gamma^{(0)}_{(0)k} T^{(0)} = \partial_k T^{(0)}. \quad (20.18)$$

Возможны два варианта их перелицовки. В работе [584] введен вариант усеченной перелицовки:

$$h_\mu^a h_\nu^b h^\tau_c \dots \tilde{\nabla}_a Q^c_{\ b \dots} = \overset{*}{\nabla}_\mu Q^{\tau \dots}_{\ \nu \dots}, \quad (20.19)$$

$$h_\mu^a h^\nu_b \dots \tilde{\nabla}_{(0)} Q^b_{\ a \dots} = \overset{*}{\nabla}_t Q^{\nu \dots}_{\ \mu \dots}.$$

Тогда

$$\overset{*}{\Delta}^{\rho}_{\ \nu \mu} = \left\{ \overset{*}{\rho}_{\ \nu \mu} \right\} + \gamma^\rho_{\ \tau} h_{[\mu}^{(0)} \partial_{\nu]} h^\tau_{(0)} - \gamma_{\tau(\nu} h_{\mu)}^{(0)} \gamma^{\rho \omega} \partial_\omega h^\tau_{(0)},$$

$$\left\{ \overset{*}{\rho}_{\ \nu \mu} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{\rho \sigma} (\overset{*}{\partial}_\nu \gamma_{\mu \sigma} + \overset{*}{\partial}_\mu \gamma_{\nu \sigma} - \overset{*}{\partial}_\sigma \gamma_{\nu \mu}), \quad (20.20)$$

$$\overset{*}{\Delta}^{\rho}_{\ \nu} = \overset{*}{D}^{\rho}_{\ \nu} - \overset{*}{A}^{\rho}_{\ \nu} - \gamma^\rho_{\ \omega} \partial_\omega h^\omega_{(0)}.$$

В работе [585] введен другой вариант перелицовки посредством выражений (20.17), (20.18) (полной перелицовки):

$$\overline{\nabla}_\mu T^\nu \equiv h_\mu^k h^\nu_n \tilde{\nabla}_k T^n, \quad (20.21)$$

где $\tilde{\nabla}_k T^n$ определены согласно правилам (20.17), (20.18), т. е. согласно уравнениям (20.15) и (20.16). Это порождает еще одну специальную связь, обозначим ее $\overline{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$:

$$\overline{\nabla}_\mu T^\nu = \partial_\mu T^\nu + \overline{\Gamma}_{\lambda\mu}^\nu T^\lambda \equiv h_\mu^k h^\nu_n \tilde{\nabla}_k T^n. \quad (20.22)$$

На этом остановимся подробно в § 23.

20.3. Перестановочные соотношения с R -ковариантными производными. R -представление тензора Римана — Кристоффеля. Введем для них и для произвольного R -вектора B^k ($B^{(0)} = \varphi$, B^c) перестановочные соотношения [584]:

$$2\tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{(0)]} \Phi = F_a \partial_{(0)} \Phi + (A_a^b + D_a^b) \partial_b \Phi,$$

$$\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}\varphi = A_{ab}\partial_{(0)}\varphi,$$

$$2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{(0)]}B^b = F_a\tilde{\nabla}_{(0)}B^b + (A_a^c + D_a^c)\tilde{\nabla}_cB^b + \tilde{R}^b{}_{ca(0)}B^c, \quad (20.23)$$

$$2\tilde{\nabla}_{[a}\tilde{\nabla}_{b]}B^c = 2A_{ab}\tilde{\nabla}_{(0)}B^c + \tilde{R}^c{}_{dab}B^d.$$

Учитывая (20.23), сгруппируем 20 независимых компонент тензора Римана — Кристоффеля следующим образом, выражая их через R -тензоры F_a , A_{bc} , D_{bc} и их производные [543, 558]:

$$R_{abc} \equiv R_{abc(0)} = \tilde{R}_{abc(0)} - F_a(A_{bc} - D_{bc}) - F_b(A_{ac} - D_{ac}), \quad (20.24)$$

$$R_{abcd} = \tilde{R}_{abcd} + (A_{ac} - D_{ac})(A_{bd} - D_{bd}) - (A_{ad} - D_{ad}) \times \\ \times (A_{bc} - D_{bc}), \quad (20.25)$$

$$R_{a(0)b(0)} = \tilde{\nabla}_{(0)}(A_{ab} - D_{ab}) - \tilde{\nabla}_bF_a + F_aF_b - (A_{ac} - D_{ac}) \times \\ \times (A^c{}_b - D^c{}_b), \quad (20.26)$$

$$R_{(0)abc} = \tilde{\nabla}_b(A_{ac} - D_{ac}) - \tilde{\nabla}_c(A_{ab} - D_{ab}) - 2F_aA_{bc}. \quad (20.27)$$

Соотношения (20.24) — (20.27) позволяют переписать относительно R -тензоров известные тождества, которым удовлетворяет тензор Римана — Кристоффеля [584]:

$$\tilde{R}_{abc(0)} = \tilde{\nabla}_a(A_{bc} + D_{bc}) - \tilde{\nabla}_b(A_{ac} + D_{ac}) + F_a(A_{bc} - D_{bc}) - \\ - F_b(A_{ac} - D_{ac}) + 2F_cA_{ab}, \\ \tilde{R}_{a[bcd]} = -2D_{a[b}A_{cd]}, \quad (20.28)$$

$$\tilde{\nabla}_{(0)}A_{ab} + \tilde{\nabla}_{[a}F_{b]} - 2(A_a^cD_{cb} - A_b^cD_{ca}) = 0,$$

$$\tilde{\nabla}_{[a}A_{bc]} + F_{[a}A_{bc]} = 0.$$

20.4. R -ковариантное представление уравнений ОТО. Уравнения ОТО в тетрадном представлении записываются в виде, ковариантном относительно произвольных локальных преобразований Лоренца:

$$\delta\dot{x}^k/\delta\tau = \dot{x}^k + \gamma^k{}_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b + \gamma^k{}_{(0)b}\dot{x}^{(0)}\dot{x}^b + \gamma^k{}_{b(0)}\dot{x}^{(0)}\dot{x}^b + \\ + \gamma^k{}_{(0)(0)}(\dot{x}^{(0)})^2 = 0, \quad (20.29)$$

$$R_{kn} \equiv r^m{}_{kmn} - 2\gamma^m{}_{ks}\Omega^s{}_{mn} = -\kappa \left(T_{kn} - \frac{T}{2} \eta_{kn} \right) \quad (20.30)$$

(для простоты ограничимся уравнениями движения свободной пробной частицы). Уравнения (1.1) и (20.30) связаны простым преобразованием, учитывающим, что $R_{mn} = \hbar^\lambda{}_m R_{\lambda n}$.

Выделяя в системах (20.29), (20.30) R -объекты и R -ковариантные производные, приведем их к виду, ковариантному лишь относительно подгруппы локальных пространственных поворотов [559, 584]. Начнем с изотропной геодезической линии:

$$\begin{aligned} \delta k^m / \delta \lambda &= dk^m / d\lambda + \gamma^m_{rs} k^r k^s = 0, \quad k^r = dx^r / d\lambda, \\ k_\mu k^\mu &= k_m k^m = 0, \quad k^{(0)} \equiv \omega = dx^{(0)} / d\lambda, \quad \alpha^n = \\ &= dx^n / dx^{(0)} = k^n / \omega, \end{aligned} \quad (20.31)$$

λ — канонический параметр. Используя (20.7) и отбрасывая индекс (0), легко придать уравнениям (20.31) следующую R -ковариантную форму:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dx^{(0)}} + D_{ab} \alpha^a \alpha^b - F_c \alpha^c = 0, \quad (20.32)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{\tilde{D}}{dx^{(0)}} (\omega \alpha_b) + (A_{ab} + D_{ab}) \alpha^a - F_b = 0,$$

где

$$\frac{\tilde{D}}{dx^{(0)}} (\omega \alpha_b) = \frac{dx^a}{dx^{(0)}} \tilde{\nabla}_a (\omega \alpha_b) + \tilde{\nabla}_{(0)} (\omega \alpha_b). \quad (20.33)$$

Определив трехмерный импульс и энергию частицы по правилам локально справедливой СТО (для простоты $c=1$), т. е. приняв

$$p^a = m_0 dx^a / d\tau = m dx^a / dx^{(0)} = m v^a, \quad m = E = m_0 / \sqrt{1 - v^2}, \quad (20.34)$$

легко можно переписать уравнения временно-подобной геодезической линии (20.29) в R -ковариантном виде:

$$\frac{\tilde{D} p_a}{dx^{(0)}} = m F_a + (A_{ab} - D_{ab}) p^b, \quad (20.35)$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dx^{(0)}} = (F_a - D_{ab} v^b) v^a.$$

Закон сохранения ОТО, $\nabla_k T^{nk} = 0$, также можно переписать в R -ковариантной форме:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)} \rho + \rho D + D_{ab} u^{ab} + \tilde{\nabla}_c J^c - 2F_c J^c &= 0, \\ \nabla_{(0)} J^b + (A_a{}^b + D_a{}^b) J^a + D J^b + (\tilde{\nabla}_c - F_c) u^{cb} - \rho F^b &= 0, \\ T^{(0)(0)} \equiv \rho, \quad T^{a(0)} \equiv J^a, \quad T^{ab} \equiv u^{ab}. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Наконец, используя выражения (20.24) и (20.25), приходим к R -ковариантному представлению эйнштейновых уравнений тяготения [543, 584]:

$$R_{ab} + (A_{ab} - D_{ab})D - \tilde{\nabla}_{(0)}(A_{ab} - D_{ab}) + \tilde{\nabla}_b F_a - F_a F_b = \\ = -\kappa \left[u_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab}(u - \rho) \right], \quad (20.37)$$

$$\partial_a D - \tilde{\nabla}_b (A^b_a - D^b_a) - 2F^b A_{ab} = \kappa J_a, \quad (20.38)$$

$$\partial_{(0)} D - \tilde{\nabla}_a F^a + F_a F^a + A_{ab} A^{ab} - D_{ab} D^{ab} = -\frac{\kappa}{2} (u + \rho). \quad (20.39)$$

В метрической формулировке, конечно, тоже можно раскрыть суммацию в $R_{\mu\nu}$, выделив коэффициенты связности, т. е. $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Однако в системе (20.37) — (20.39) выделяются именно R -тензорные компоненты коэффициентов связности, характеризующие перенос лоренцева базиса, что полезно для физической интерпретации.

20.5. Подгруппы координатных преобразований с R -инвариантными коэффициентами. Принцип общей ковариантности допускает произвольное преобразование базисных векторов $\mathbf{e}_\lambda' = P_\lambda{}^\mu \mathbf{e}_\mu$ (совместное с эйнштейновыми уравнениями тяготения). Это, в частности, позволяет составлять новые базисы путем комбинирования базисных векторов \mathbf{e}_λ , оказавшихся в предыдущих исследованиях удобными или интересными по физическим соображениям.

Отправимся от лоренцева базиса \mathbf{e}_m , т. е. нормированного на единицу, лежащего в основе тетрадной формулировки ОТО. Следуя работе [585], свяжем его с произвольным базисом \mathbf{e}_λ и произведем $(3+1)$ -расщепление:

$$\mathbf{e}_\lambda = h_\lambda{}^a \mathbf{e}_a + h_\lambda{}^{(0)} \mathbf{e}_{(0)}.$$

Из этих двух членов, взятых по отдельности, составим новый координатный базис:

$$\mathbf{e}_0 \equiv h_0{}^{(0)} \mathbf{e}_{(0)} = h_0{}^{(0)} h_0{}^0 \mathbf{e}_0 + h_0{}^{(0)} h_0{}^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad (20.40)$$

$$\mathbf{e}_\alpha \equiv h_\alpha{}^a \mathbf{e}_a = h_\alpha{}^a h_\alpha{}^0 \mathbf{e}_0 + h_\alpha{}^b h_\alpha{}^\beta \mathbf{e}_\beta. \quad (20.41)$$

Найдем координатное преобразование, переводящее базис \mathbf{e}_λ в \mathbf{e}_α :

$$\mathbf{e}_\mu = R_\mu{}^\lambda \mathbf{e}_\lambda \rightarrow \mathbf{e}_0 = R_0{}^0 \mathbf{e}_0 + R_0{}^\alpha \mathbf{e}_\alpha, \quad (20.42)$$

$$\mathbf{e}_\alpha = R_\alpha{}^0 \mathbf{e}_0 + R_\alpha{}^\beta \mathbf{e}_\beta. \quad (20.43)$$

Сравнивая соответственно приведенные соотношения, находим

$$R_{\mu}{}^{\lambda} = \left(\frac{R_0^0 = h_0^{(0)} h^0_{(0)} \quad | \quad R_0^\beta = h_0^{(0)} h^\beta_{(0)}}{R_\alpha^0 = -h_\alpha^{(0)} h^0_{(0)} \quad | \quad R_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - h_\alpha^{(0)} h^\beta_{(0)}} \right) =$$

$$= \left(\frac{R_0^0 = 1 - h_0^a h^0_a \quad | \quad R_0^\beta = -h_0^b h^\beta_b}{R_\alpha^0 = h_\alpha^b h^0_b \quad | \quad R_\alpha^\beta = h_\alpha^b h^\beta_b} \right). \quad (20.44)$$

Выделим два взаимно-дуальных преобразования из множества координатных преобразований с R -скалярными коэффициентами. Пусть задан неполный набор калибровок Ламе вида (16.6), т. е.

$$h_0^a = 0. \quad (20.45)$$

Он R -инвариантен, автономен, т. е., будучи присоединен к системе уравнений (13.5), выделяет из нее автономную подсистему, из которой находятся все компоненты $h_{\mu}^{(0)}$ (см. § 17):

$$(h_{\mu}^k)_{h_0^a=0} = \left(\frac{h_0^{(0)} = \sqrt{-g_{00}} \quad | \quad h_0^a = 0}{h_\alpha^{(0)} = \frac{-g_{\alpha 0}}{\sqrt{-g_{00}}} \quad | \quad h_\alpha^b} \right). \quad (20.46)$$

Из (20.46) и соотношений $h^\mu_k h_\mu^n = \delta_k^n$ получаем обратные тетрады

$$(h^{\mu k})_{h_0^a=0} = \left(\frac{h^0_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \quad | \quad h^0_a}{h^\alpha_{(0)} = 0 \quad | \quad h^\alpha_a} \right). \quad (20.47)$$

Подставляя компоненты (20.45) — (20.47) в коэффициенты (20.44), находим координатное преобразование

$$(R_{\mu}{}^{\nu})_{h_0^a=0} \equiv A_{\mu}{}^{\nu} = \left(\frac{A_0^0 = 1 \quad | \quad A_0^\beta = 0}{A_\alpha^0 = -\frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \quad | \quad A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta} \right). \quad (20.48)$$

Преобразование обратное:

$$(R^{\mu}{}_{\nu})_{h_0^a=0} \equiv A^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}} = \left(\frac{A^{\bar{0}}_0 = 1 \quad | \quad A^{\bar{0}}_\beta = \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}}}{A^{\bar{\alpha}}_0 = 0 \quad | \quad A^{\bar{\alpha}}_\beta = \delta^{\bar{\alpha}}_\beta} \right). \quad (20.49)$$

Пусть теперь задан другой неполный набор калибровок Ламе (16.8), т. е.

$$h^0_a = 0. \quad (20.50)$$

Он также R -инвариантен, автономен и позволяет найти другой вариант компонент хроно-монады (см. § 17):

$$(h_{\mu}^k)_{h^0_a=0} = \left(\frac{h_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-g^{00}}} \quad | \quad h_0^a}{h_\alpha^{(0)} = 0 \quad | \quad h_\alpha^a} \right), \quad (h^{\mu k})_{h^0_a=0} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \sqrt{-g^{00}} & 0 \\ \hline -g^{\alpha 0} & h^{\alpha}_b \end{array} \right). \quad (20.51)$$

Подставляя (20.50) и (20.51) в (20.44), получаем другое координатное преобразование из подмножества преобразований с R -скалярными коэффициентами:

$$(R_{\mu}^{\nu})_{h^0_{\alpha}=0} \equiv B_{\mu}^{-\nu} = \left(\begin{array}{c|c} B_0^{-0} = 1 & B_0^{-\beta} = \frac{g^{\beta 0}}{g^{00}} \\ \hline B_{\alpha}^{-0} = 0 & B_{\alpha}^{-\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} \end{array} \right), \quad (20.52)$$

$$(R^{\mu}_{\nu})_{h^0_{\alpha}=0} \equiv B^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} = \left(\begin{array}{c|c} B^{\bar{0}}_0 = 1 & B^{\bar{0}}_{\beta} = 0 \\ \hline B^{\bar{\alpha}}_0 = -\frac{g^{0\alpha}}{g^{00}} & B^{\bar{\alpha}}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \end{array} \right). \quad (20.53)$$

Очевидно, преобразования (20.48), (20.49) и (20.52), (20.53) являются взаимно-дуальными [545, 547]. Они при $g_{00} \neq 0$, $g^{00} \neq 0$ несингулярны и неголономны. Действительно, из выражений (20.48), (20.49) находим, что компоненты объекта неголономности отличны от нуля:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^0_{\bar{m}\bar{n}} &\equiv \bar{\Omega}^0_{mn} \equiv A_m^{-\mu} A_n^{-\nu} \partial_{[\mu} A^0_{\nu]} = \\ &= \partial_{[n} \frac{g_{m]0}}{g_{00}} + \frac{g_{0[m}}{g_{00}} \partial_{|0|} \frac{g_{n]0}}{g_{00}}. \end{aligned} \quad (20.54)$$

В случае преобразований (20.52), (20.53):

$$(\bar{\Omega}^k_{0n})_{h^0_{\alpha}=0} = \frac{1}{2} \partial_n \frac{g^{kn}}{g^{00}} = B_0^{-\mu} B_n^{-\nu} \partial_{[\mu} B^{\bar{k}}_{\nu]}. \quad (20.55)$$

§ 21. ПЕРЕХОД К ХРОНО- И КИНЕМАТРИЧЕСКИМ ФОРМУЛИРОВКАМ ОТО

21.1. Перенос в ОТО преобразований трехмерных координатных систем, не содержащих времени. Их дополнение. Сначала остановимся на элементах истории, предшествовавших созданию хроно-инвариантного представления ОТО. Предположение об абсолютном характере времени ограничивает дорелятивистскую физику группой преобразований трехмерных пространственных координат, вообще говоря, криволинейных:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\beta}). \quad (21.1)$$

Допускается, что она не играет физической роли. Это, в частности, проявляется в понимании движения как изменения

пространственных координат не под влиянием преобразования (21.1), а с течением скалярного параметра-времени: $x^\alpha = x^\alpha(t)$. СТО в построении Минковского ввела время-координату. Движение стало пониматься как изменение пространственных координат с изменением не параметра-скаляра, а временной, четвертой координаты, которую можно подвергнуть преобразованию Лоренца. В групповой подход это вносит существенные изменения, так как с движением связывается уже не только зависимость $x^\alpha = x^\alpha(x^0)$, но и преобразование $x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta, x^0)$, которое также дает возможность установить некоторую связь между движущимися телами.

В частности, подгруппа (21.1) относится к глобальным декартовым координатам СТО. Тогда это — подгруппа собственной группы Лоренца (R -подгруппа с постоянными коэффициентами преобразования). Она не меняет физической ситуации в силу положения СТО об изотропии и однородности 3-пространства. Например, не меняет 3-расстояния между двумя заданными точками.

С переходом к ОТО подгруппа (21.1) относится уже только к криволинейным координатам и обсуждается ее дополнительное преобразование *)

$$(13) \quad x^{0'} = x^{0'}(x^\alpha, x^0), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (21.2)$$

Образовавшаяся при этом подгруппа и возможная относительно нее инвариантность обратили на себя внимание на первом же этапе развития ОТО. Иллюстрируем это следующими словами А. А. Фридмана: «Рассматривая физическое пространство и время в отдельности, мы видели, каким образом произвольность арифметизации как пространства, так и времени заставляет признать, что собственные свойства пространства и времени, т. е. свойства, не зависящие от способа арифметизации, *должны быть инвариантны по отношению к следующим преобразованиям чисел x_1, x_2, x_3 и t , арифметизирующих пространство и время одним способом, в числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ и \bar{t} , арифметизирующие пространство и время другим способом*

$$(15) \quad \left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \bar{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \right\} \quad (21.3a) \quad (21.3)$$

$$\bar{t} = f(x_1, x_2, x_3; t). \quad (21.3b)$$

*) Слева стоят номера уравнений, соответствующие номерам в выдержках из литературы.

Нетрудно видеть, что эти преобразования особо выделяют роль времени и не являются самыми общими преобразованиями...» [465, с. 57]. Предварительно Фридман специально обсуждает преобразование (21.2), взятое в отдельности от подгруппы (21.1), (оно вводится в его книге [465] под номером (13)): «...конечно, собственные свойства времени (физического) должны быть в данной точке *инвариантны относительно преобразований, установленных формулой (13)*. Одним из таких собственных свойств физического времени является промежуток между двумя моментами времени,— понятие, аналогичное для одномерного «пространства» времени понятию физического расстояния в трехмерном пространстве» [465, с. 55]. Подгруппа (21.1), как уже упоминалось в п. 16.5, непринужденно выделяется в ОТО при изучении статического поля и ее использование влечет за собой реконструкцию уравнений ОТО — выделение в них трехмерных величин: «В этом случае временная координата определяется однозначно и является гармонической. Это оставляет группу преобразований пространственных координат. Таким образом, в этом случае естественно применить формализм 3-мерного тензорного анализа и соответственно записать уравнения гравитационного поля, что было сделано в работе Леви-Чивита» [587, с. 209]. А. Фок обобщает построение Леви-Чивита на конформные пространства, также выделяя трехмерные величины в эйнштейновых уравнениях тяготения и их решениях [587, 588]. (См. также задачу в [23, с. 356], в решении которой уравнения Эйнштейна переформулируются в случае постоянного гравитационного поля к виду, содержащему трехмерный метрический тензор локальных пространств и ковариантные производные в этих локальных пространствах.)

ОТО, как известно, не ограничилась подгруппой (21.3). Первое из приведенных выше замечаний А. А. Фридмана заканчивается словами: «...Уже самый неестественный вид формул (15) показывает на необходимость дальнейшего их обобщения» [465, с. 58]. Перейдя от подгруппы (21.3) к общей, эйнштейновой группе

$$x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\alpha}, x^0), \quad (21.4)$$

Фридман подчеркивает достоинства этого перехода: «Вместе с новой точкой зрения на физический мир отпадают и те трудности исследования его, на которые мы указывали...: время перестает мешать нашим исследованиям, наоборот, потеряв свое преимущественное положение, смешавшись с пространственными координатами, время становится деятельным помощником при исследовании уже не физического пространства и не физического времени, которых самих по

себе нет, а совокупности пространства—времени—физического мира» [465, с. 62].

К этому следует добавить, что, конечно, в общековариантной форме эйнштейновы уравнения тяготения (и уравнения движения) проще, чем после расщепления их на части выделением трехмерных величин. Действительно, «...ограничение менее общей группой преобразований не упростит формализма» [550, с. 214]. Оценивая роль в ОТО эйнштейновой группы (21.3), Паули резюмирует: «В общем случае и в принципиальных вопросах общая ковариантность необходима» [97, с. 219].

Таким образом, с переходом к ОТО преобразования (21.1) существенно дополняются и это начинает формировать новые понятия и дальнейшую разработку ОТО. Уже на ранней стадии ее развития на примере физического времени упоминается понятие инварианта подгруппы (21.2), а для частного случая полей тяготения, статических, уже производится расщепление эйнштейновых уравнений тяготения выделением трехмерных величин, т. е. дается специальная, подгрупповая формулировка ОТО. На этой стадии привлечение подгрупп (21.2) и (21.3) еще носит эпизодический характер. В книге Фридмана [465] они рассматриваются попутно, с целью постепенного перехода к общей ковариантности.

21.2. Возврат к пространственной подгруппе и введение хроно-монады. Эйнштейнова группа (21.4) увела ОТО в сторону от общего рассмотрения вопросов измерения входящих в нее величин. Для устранения такого пробела намечился, сначала в слабой форме, возврат к подгруппе (21.3), что привело к формированию общего понятия системы отсчета, исходящего из этой подгруппы, а следовательно, из понятия системы координат. Согласно известной монографии Лауэ, «...будем пользоваться всегда совокупностью всех взаимнопокоящихся координатных систем, которую мы назовем системой отсчета (ein Bezugssystem)» [589, с. 2]. Лауэ подчеркивает, что «...система отсчета охватывает бесконечно много координатных систем, но полностью определяется посредством какой-либо одной, принадлежащей системе отсчета», откуда следует, что подгруппа преобразований вида (21.1) рассматривается как не меняющая физической ситуации. В связи с этим Мёллером вводится термин «идентичные системы отсчета»: «Вообще говоря, система отсчета R' , определенная системой координат (x'^i) , будет отличаться от системы отсчета, соответствующей координатам (x^i) , но если преобразования (54) <имеется в виду общее преобразование координат> имеют вид

$$x'^i = x'^i(x^k),$$

(59)

(21.5)

$$x'^4 = x'^4(x^i) = f(x^i),$$

где пространственные координаты x'^i являются функциями только пространственных координат x^k , то системы отсчета R' и R являются идентичными» [25, с. 236].

Введя указанное выше определение, Лауэ, однако, поясняет, что понятие системы отсчета не математическое понятие, что «в физике иначе» и что оси и плоскости координатной системы должны быть определены с помощью масштабов, вводимых для измерения (т. е. что система отсчета нечто большее, чем система координат). Это коротко подчеркивается в определении Вейля [590, с. 23].

Далее в § 23 монографии Вейля, названном «Анализ принципа относительности, расщепление мира на пространство и время как проекция» в качестве образа эталона времени в теории задается единичный временно-подобный вектор $e \cdot e = -1$. Именно с его помощью производится «расщепление» мира на пространство и время: «Каждое смещение x может быть однозначно расщеплено на два слагаемых

$$(27) \quad x = \xi e = x^*, \quad (21.6)$$

из которых первое пропорционально, второе ортогонально e :

$$(28) \quad (x^* \cdot e) = 0, \quad \xi = \frac{1}{e} (x \cdot e) \quad (21.7)$$

[590, с. 174] (будем далее называть введенный единичный лоренцев вектор e хроно-монадой) *).

Приведенные замечания о системах отсчета взяты из литературы первого десятилетия развития ОТО. Они являются модификацией и дальнейшим развитием основополагающего замечания Эйнштейна: «...в совокупности всех подстановок во всяком случае есть те подстановки, которые соответствуют всем относительным движениям (трехмерных) координатных систем» [1, I, с. 459]. Данное в указанных замечаниях определение системы отсчета широко распространилось и вошло в ранг исходных понятий. Например, первая глава — «Системы отсчета, системы координат и преобразования координат» монографии Бергмана [550] начинается с рассмотрения преобразований координат, не зависящих от времени, и преобразований, содержащих время. После рассмотрения частного примера резюмируется: «Движение двух систем отсчета друг относительно друга определяется зависимостью c_{ih} от време-

*) Одно из примечаний монографии [591, с. 330] уточняет: «Кажется, Минковский первым воспользовался таким методом разложения вектора. Вейль использовал его, значительно расширив в части своей книги, посвященной релятивистской механике».

ни [550, с. 120]», где c_{ih} — коэффициенты преобразования трехмерных координат.

Таким образом, возврат к подгруппе (21.3) привел к понятию системы отсчета, более общему, чем система координат: состоящему из временных координатных линий, дополненных, во-первых, в каждой точке касательной хроно-монадой, во-вторых, не тройкой пространственных координатных линий, а множеством таких троек, равноправных трехмерных координатных систем.

Разграничение понятий системы отсчета и системы координат проводилось еще в СТО, до создания ОТО. Приведем пример [592, с. 109]: «Для того, чтобы уметь оперировать такими количествами, как те, которые предполагаются при измерении движения, времени, скорости и т. д., необходимо иметь некоторую систему отсчета, относительно которой производятся измерения. Рассмотрим некоторую группу вещей, состоящую из каких-нибудь предметов и некоторого вида физических количеств, каждая из которых находится в покое относительно каждой другой. Допустим, что среди этих предметов имеются часы для измерения времени и стержни или линейки для измерения длин. Подобную группу предметов и количеств, находящихся в покое друг относительно друга вместе с их единицами для измерения времени и длины, мы будем называть системой отсчета... Пусть с этими системами связаны системы прямоугольных координат».

Введение локального лоренцева базиса позволяет перенести разграничение систем координат и систем отсчета из СТО в ОТО. Тетрадный аппарат осуществляет это конструктивно, вводя, вообще говоря, все 4 единичных вектора. Мировая линия, огибающая последовательности векторов $e_{(0)}$, является мировой линией тела отсчета, мировой линией прибора. В частности, она может быть принята в качестве временной координатной линии избранной системы координат. В расщепление (21.6) явно введен лишь один единичный вектор, временной (хроно-монада). Основная идея теории х.и. — выделение подгруппы координатных преобразований (21.3) — обсуждалась до полной разработки тетрадного представления ОТО и задолго до систематического построения теории х.и. в сороковых и пятидесятых годах. Таким образом, для построения теории х.и. открывались две возможности: или выделить ее из готового тетрадного аппарата с помощью условий $h_0^a = 0$, или построить ее независимо от тетрадного аппарата как дальнейшее развитие метрической формулировки ОТО, оставив неподнятым вопрос о связи аппарата х.и. с тетрадным. Исторически был принят второй из этих путей. Сравнительно недавно, также независимо от тетрадного представления ОТО, созданы и другие из рассмотренных в § 22, 23 формули-

ровок. Некоторым образцом и отправным пунктом при этом служила теория хронометрических инвариантов.

21.3. Общие замечания о теории хронометрических инвариантов. Оснащение конгруенции мировых линий хроно-монадой позволяет к ним «примыслить реальных наблюдателей», располагающих эталоном времени. Множество равноправных трехмерных координатных систем позволяет ввести величины, ковариантные относительно трехмерных преобразований (21.3а), обсуждавшихся Фридманом, при любом выборе пространственных сечений $x^0 = \text{const}$. С этой ковариантностью может быть связано введение смещений, обозначенных Вейлем x^* , входящих в (21.6) и, согласно условию (21.7), ортогональных хроно-монаде e . Введение такого $(3+1)$ -расщепления и «примысленных наблюдений» производилось попутно при решении многих конкретных задач, в частности, Экартом [593]. В общем случае зависящей от времени метрики систематическая переформулировка ОТО на основе подгруппы (21.3) выполнена А. Л. Зельмановым [594, 595, 602] и несколько позднее Каттанео [596]. Впоследствии эта формулировка ОТО получила название формализма (теории, метода) хронометрических инвариантов (х.и.). Для подхода Каттанео характерна «геометрическая техника проективных операторов». К Зельманову и Каттанео присоединились, развивая и применяя их формализмы, многие авторы [573, 597, 598]. Один из наиболее оригинальных вариантов принадлежит Э. Шмутцеру, следовавшему за Мёллером и Каттанео. Этот вариант будет рассмотрен далее в § 23.

Хронометрически-инвариантная формулировка ОТО вошла в монографии. Некоторые из соотношений х.и. формализма имеются в курсе [23] (также в более ранних изданиях начиная с 1948 г.). Специально изложению метода х.и. отведены п. 8.9 монографии [599], § 3 и 4 книги [56], п. 1 гл. 12 монографии [600], § 4 и 6 монографии [24]*).

Задачей данного параграфа, как видно из его названия, не является рассмотрение независимого, исторически сложившегося построения х.и. представления ОТО, но переход к нему в рамках тетрадного представления ОТО. Поэтому ограничимся лишь некоторыми замечаниями, взятыми главным образом из публикаций А. Л. Зельманова. Как видно из работы [601], отправным пунктом явилось применение сопутствующих координат в нерелятивистской механике и в космологических работах А. А. Фридмана. На основе трехмерно-тензорного исчисления А. Л. Зельманов [601] вводит

*) Элементы х. и. аппарата используются также в монографии Брессана (Relativistic Theories of Materials. Springer-Verlag, 1978) в связи с релятивистским изложением многих разделов теоретической физики с эйлеровой и лагранжевой точек зрения.

тензор скоростей деформации $D_{\alpha\beta}$, его выражения, содержащие производные от времени. Почленное ковариантное дифференцирование уравнений движения приводит к трем уравнениям изменения вихря и шести уравнениям изменения деформации, содержащим векторы силы. В случаях, представляющих астрономический интерес, Q^α — сила тяготения. Получен ряд уравнений, связанных с условиями евклидовости. Наконец, отмечено, что в случаях, когда Q_i — сила тяготения, «...полученные уравнения допускают далеко идущую аналогию с уравнениями поля ОТО» [601, с. 996]. Эта аналогия раскрыта в работах [594, 595], где и построено х.и. представление ОТО. В статье «Хронометрические инварианты и сопутствующие координаты в ОТО» [602] изложение начинается с подгруппы (21.3). В соответствии с замечанием Фридмана «...собственные свойства времени (физического) должны быть в данной точке инвариантны относительно преобразований, установленных формулой (13)». А. Л. Зельманов вводит общее понятие инварианта и коварианта этой подгруппы: «...Из величин, не ковариантных по отношению к общим преобразованиям $\tilde{x}^\alpha = \tilde{x}^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$, физически преимущественны величины, инвариантные относительно преобразований $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3)$ (как мы будем говорить, хронометрически-инвариантные) и ковариантные по отношению к преобразованиям $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3)$, $\partial\tilde{x}^i/\partial x^0 = 0$ » [602, с. 815] (здесь греческие индексы — 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3). Указывается, что если $Q_{00}^{ik} \dots_0^p$ — мировой тензор, то величины

$$T^{ik\dots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}} Q_{00\dots 0}^{ik\dots p} \quad (21.8)$$

образуют хронометрически-инвариантный тензор. После этого говорится: «Пользуясь сказанным, можно легко находить х.и. выражения для величин и операторов, если известны их выражения при каком-либо специальном выборе времени...» Далее подбираются примеры: «Для х.и. элементарной длины u и метрических тензоров h_{ik} и h^{ik} ... находим *)

$$(6) \quad du^2 = h_{ik} dx^i dx^k, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (21.9)$$

$$(7) \quad h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}, \quad h^{ik} = -g^{ik} \quad (21.10)$$

*) Подчеркивается, что х. и. метрика h_{ik} совпадает с принятой Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем в первом издании курса [23] и принятой В. А. Фоком [489]. Она фигурирует и в исследованиях раннего периода развития ОТО [603], привлекается для изучения «внутренней геометрии» 3-пространства на вращающемся диске [604]. В обобщенном виде $\gamma_{ik} = g_{ik} + (1-1/\epsilon\mu) u_i u_k$ она привлекалась Гордоном [605] для описания влияния среды на электромагнитные процессы, эквивалентного влиянию гравитационного поля и др.

... для элементарного х. и. промежутка времени $d\tau$... получаем

$$(8) \quad cdt = \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}, \quad ds^2 = c^2 d\tau^2 - du^2 \quad \langle \alpha = 0, 1, 2, 3 \rangle. \quad (21.11)$$

Для х. и. скорости v^i движения точки (частицы) имеем

$$v^i = dx^i/d\tau, \quad h_{ik} v^i v^k = (du/d\tau)^2. \quad (21.12)$$

«Если $ds = 0$, то $h_{ik} v^i v^k = c^2$: х. и. скорость света в пустоте ...» [594, с. 150]. Затем приводятся х. и. операторы дифференцирования и х. и. обобщения символов Кристоффеля:

$$(9) \quad \frac{*d}{dt} = \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{*\partial}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad \frac{*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad (21.13)$$

$$(10) \quad \Delta_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{*\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \frac{*\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \frac{*\partial h_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (21.14)$$

После введения х.и. вектора ускорения (силы), х.и. тензора угловой скорости вращения, х.и. тензора скоростей деформации [594, 602] производится переформулировка к х.и. величинам основных уравнений эйнштейновой ОТО: закона сохранения, эйнштейновых уравнений поля тяготения, уравнений движения пробных тел (геодезической линии) и др. В работе [606] также вводится совокупность величин (подчеркивается, что это не вектор), определяемых равенствами:

$$(3) \quad (\omega_0)^2 = g_{00}, \quad (\omega_0 \omega_1)^2 = -g_{00} g_{11} + (g_{01})^2, \quad (21.15)$$

$$\sqrt{g_{00}} = \omega_0, \quad \frac{g_{01}}{\sqrt{g_{00}}} = \Omega_1, \quad \frac{g_{02}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{y_{12}}{y_{11}} \Omega_1 - \frac{\omega_1}{y_{11}} \Omega_2,$$

$$(5) \quad \frac{g_{03}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{y_{13}}{y_{11}} \Omega_1 + \frac{z^{23} \omega_1}{y_1 z^{33}} \Omega_2 - \frac{\omega_1 \omega_2}{y z^{23}} \Omega_3, \quad (21.16)$$

где

$$(6) \quad \Omega_1 = k \sqrt{(\omega_1)^2 - y_{11}}, \quad \Omega_2 = l \sqrt{(\omega_2^2) y_{11} - y z^{33}}, \quad (21.17)$$

$$\Omega_3 = m \sqrt{y [(\omega_3^2) z^{23} - 1]}, \quad k^2 = l^2 = m^2 = 1,$$

$y_{ik} = -g_{ik}$, $y_{ij} z^{kj} = \delta^k_i$ (y_{ik} -ковариантный, z^{ik} -контравариантный метрический тензор пространственного сечения $x^0 = \text{const}$). Существенно отметить представления о 3-пространстве в теории х.и. Так, в работе [607, с. 1037] говорится: «В каждой точке определим трехмерное локальное простран-

ство, ортогональное в ней к линии времени. Под трехмерным пространством данной системы отсчета будем понимать многообразие таких локальных пространств, определенных во всех мировых точках конечной или бесконечной 4-мерной области, а под неголономностью неголономность этого многообразия».

Х.и. формулировка ОТО ценна тем, что «применение х.и. величин и операторов устраняет трудность, состоящую в зависимости многих (хронометрически не инвариантных) величин и соотношений... от произвола в выборе координаты времени» [606, с. 149]. Кроме применения для прояснения космологических вопросов в цитированных работах А. Л. Зельманова, теория х.и. была использована для решения многих иных задач, в том числе введения энергии в ОТО и в поисках критериев гравитационного излучения. В частности, И. Д. Новиковым [608] показано, что ни одно из известных в то время выражений для квазитензора энергии импульса в ОТО не является х.и. В работе [609] напоминает, что теория х.и. диктует определенные формы для дифференциальных законов сохранения. Показывается, что удовлетворить законам сохранения нельзя, если комплекс содержит лишь первые производные от метрического тензора. Поэтому привлекаются и вторые производные*). Цикл работ В. Д. Захарова, Л. Б. Борисовой (Григорьевой) [610—612] посвящен изучению критериев гравитационно-инерционного излучения и классификации полей тяготения на основе х.и. представления ОТО. Эти представления, а также (2+2)-расщепление послужили основой для многих работ Р. Ф. Полищука [613—615] (см. также [616]).

В статье Н. В. Мицкевича [567, с. 76] формализм х.и. рассматривается как модификация метода τ_μ -поля (единичного вектора $\tau_\mu \tau^\mu = 1$, $\text{sign} = + - - -$). Это условие нормировки хроно-монады сразу же дает

$$\tau^\mu = \delta^\mu_0 / \sqrt{g_{00}}, \quad \tau_\mu = g_{0\mu} / \sqrt{g_{00}}, \quad (21.18)$$

что приводит к выражениям (21.10), (21.11). Рассмотренные в § 19 калибровочные условия задают лоренцевы векторы именно в виде, подобном (21.18), обобщая его включением компонент метрических тензоров различных подпространств 4-пространства ОТО.

21.4. Выделение хронометрических инвариантов и ковариантов в тетрадном представлении ОТО. Это можно сделать

*) Недавно геометрическая интерпретация х.и. и их отношение к проблеме сохранения энергии в ОТО рассматривалась Хорским («Folia facultatis scientiarum naturalium universitatis purkynianae Brunensis. Physica», 1977, 28, № 4).

при помощи автономного неполного набора (16.6), принадлежащего классу Ламе, т. е. приняв

$$h_0^a = 0, \quad a = 1, 2, 3 \quad (21.19)$$

(первые три условия в полном наборе (17.3) или случай мо-надного набора (17.48) при $\mu_1=0$, тогда $k=a$). Из выражения (16.8) при этом видно, что

$$h^{\alpha}_{(0)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (21.20)$$

Поскольку $h_0^a = h_{0a} = \mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_a = 0$ и так как $\eta_{(0)a} = \mathbf{e}_{(0)} \cdot \mathbf{e}_a = 0$, калибровка (21.19) требует, чтобы лоренцев вектор $\mathbf{e}_{(0)}$ присоединился к временной координатной линии касательно, а элемент локального пространства, в котором может быть введена триада \mathbf{e}_a , присоединился ортогонально этой линии.

Подстановка калибровочного условия (21.19) в систему (13.5) выделяет автономную подсистему

$$g_{0\mu} = h_{\mu}^k h_{0k} = h_0^{(0)} h_{\mu}^{(0)} \eta_{(0)(0)}, \quad (21.21)$$

в которую входят все 4 компоненты лоренцева вектора $\mathbf{e}_{(0)}$ и только они. При $\mu=0$ из (21.21) находим

$$h_0^{(0)} = \sqrt{-g_{00}}, \quad \eta_{(0)(0)} = -1. \quad (21.22)$$

Следовательно, решениями оставшихся уравнений подсистемы (21.21) являются

$$h_{\alpha}^{(0)} = -g_{\alpha 0} / \sqrt{-g_{00}}, \quad (21.23)$$

что совпадает с выражениями (21.18), если, отбросив лоренцев индекс, положить $h_{\mu}^{(0)} = h_{\mu} \equiv \tau_{\mu}$. Таким образом, набор (21.19) позволяет найти при произвольно заданном $g_{\mu\nu}$ (но $g_{00} \neq 0$) 4-й столбец матрицы Ламе:

$$h_{\mu}^{(0)} = -g_{\mu 0} / \sqrt{-g_{00}}. \quad (21.24)$$

Воспользуемся компонентами (21.19) и (21.24) для перехода в тетрадном представлении ОТО к некоторым величинам и соотношениям, приведенным в предыдущем пункте и имеющимся в курсе [23], где они вводятся для физической интерпретации ОТО без явного обращения к тетрадной формулировке.

Подставим (21.24) в соотношение (13.4) (или в первое из выражений (14.12)):

$$dx^{(0)} = h_{\mu}^{(0)} dx^{\mu} = -g_{\mu 0} dx^{\mu} / \sqrt{-g_{00}} \equiv c d\tau. \quad (21.25)$$

Это выражение для физической компоненты элемента време-

ни совпадает с элементарным х.и. промежутком времени (21.11). В ортогональной системе координат

$$dx^{(0)} = h_0^{(0)} dx^0 = \sqrt{-g_{00}} dx^0,$$

что совпадает с элементом «истинного времени» (уравнение (84.1) в [23, с. 229]). Подставим теперь компоненты (21.4) в (16.4) и во второе из соотношений (14.12), соответственно получим выражения: хронометрически ковариантное

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \overset{*}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{0\alpha}g_{0\beta}/g_{00}, \quad \gamma_{00} = \overset{*}{g}_{00} = 0 \quad (21.26)$$

и хронометрически инвариантное (скалярное)

$$dl^2 \equiv \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (21.27)$$

Эти два уравнения с точностью до обозначений совпадают соответственно с выражениями (21.9) и (21.10), а также с соотношениями (84.6) и (84.7) из курса [23, с. 301], в котором они получены локальной посылкой — приемом световых сигналов. Эта возможность, естественно, содержится в общих локальных выражениях ОТО, отнесенных к псевдодекартовым квазикоординатам (13.4), из которых получены уравнения (16.4) и (14.12).

Подставив условия (21.19) в элемент времени десинхронизации (14.12), получим для него выражение

$$dx^0_{\text{дес}} = -h_\alpha^{(0)} dx^\alpha / h_0^{(0)} = -g_{\alpha 0} dx^\alpha / g_{00}. \quad (21.28)$$

Обозначив $g_\alpha \equiv -g_{\alpha 0} / g_{00}$, приходим к соотношению (84.14) из курса [23, с. 302]. При других калибровочных условиях $dx^0_{\text{дес}}$ будет иной функцией от $g_{\mu\nu}$. При $h_\alpha^{(0)} = 0$, очевидно, $dx^0_{\text{дес}} = 0$. Вероятно, именно в этом смысле можно понимать утверждение, что «... невозможность синхронизации всех часов является свойством именно произвольной системы отсчета, а не пространства — времени как такового» [23, с. 303].

Обозначая $dx^{(0)}$ (без штриха) собственное время наблюдателя, не движущегося с частицей, и учитывая, что в системе частицы $dx^{\alpha'} = 0$, имеем

$$dx^{(0)} = L^{(0)}{}_{(0)} \cdot dx^{(0)'} + L^0_{\alpha'} \cdot dx^{\alpha'} = L^{(0)}{}_{(0)} \cdot dx^{(0)'}, \quad (21.29)$$

откуда

$$\begin{aligned} dx^{(0)'} \equiv ds &= \sqrt{1 - \beta^2} dx^{(0)} = \sqrt{1 - \beta^2} h_\mu^{(0)} dx^\mu = \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} (h_0^{(0)} dx^0 + h_\alpha^{(0)} dx^\alpha) = \\ &= \sqrt{1 - \beta^2} h_0^{(0)} (dx^0 + h_\alpha^{(0)} dx^\alpha / h_0^{(0)}). \end{aligned} \quad (21.30)$$

Подставляя сюда компоненты (21.4) и используя принятое обозначение для отношения тетрад, находим

$$dx^{(0)'} \equiv ds = \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{-g_{00}} (dx^0 - g_{\alpha} dx^{\alpha}), \quad (21.31)$$

что совпадает с квадратным корнем из выражения (88.13) [23, с. 321], если принять обозначение $g_{00} = h$ (см. там же уравнение (88.11)). Согласно (21.31), для х.и. скорости имеем

$$v^{\alpha} \equiv \frac{dx^{\alpha}}{dx^{(0)'}} = \frac{dx^{\alpha}}{\sqrt{-g_{00}} (dx^0 - g_{\alpha} dx^{\alpha})}, \quad (21.32)$$

что совпадает с уравнением (88.10) курса [23, с. 321]. Если же ввести скорость частицы по ее собственному времени, то

$$\begin{aligned} u^0 &\equiv \frac{dx^0}{dx^{(0)'}} \equiv \frac{dx^0}{ds} = \frac{h^0_{\alpha} dx^{\alpha}}{dx^{(0)'}} = \frac{h^0_{(0)} dx^{(0)'}}{dx^{(0)'}} + \\ &+ \frac{h^0_{\alpha} h_{\mu}{}^{\alpha} dx^{\mu}}{dx^{(0)'}} = \frac{h^0_{(0)}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{h^0_{\alpha} h_{\mu}{}^{\alpha} dx^{\mu}}{dx^{(0)'}} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (21.33)$$

Из условий (21.20) и (21.19) вытекает, что

$$h^{\mu}_{(0)} h_{\mu}{}^{(0)} = h^0_{(0)} h_0{}^{(0)} = 1, \quad h^0_{(0)} = 1/h_0{}^{(0)} = 1/\sqrt{-g_{00}}. \quad (21.34)$$

Следовательно,

$$h^0_{(0)} h_{\alpha}{}^{(0)} + h^0_{\beta} h_{\alpha}{}^{\beta} = \delta^0_{\alpha} = 0, \quad (21.35)$$

$$h^0_{\beta} h_{\alpha}{}^{\beta} = -h_{\alpha}{}^{(0)} h_0{}^{(0)} = -h_{\alpha}{}^{(0)}/h_0{}^{(0)} \equiv g_{\alpha},$$

т. е. при калибровке (21.19) выражение (21.33) совпадает с выражениями (57) и (88.14) [23, с. 322] и уравнением (57) [56, с. 138] соответственно.

Таким образом, указанные соотношения из книг [23, 56], где они получены на основе локальной посылки — приема световых сигналов, могут быть выведены в рамках тетрадного представления ОТО при неполном наборе калибровочных условий (21.24). Для полного совпадения требуется еще отбросить в соответствующих выражениях тетрадного представления лоренцев индекс (0) и ввести некоторые обозначения, например g_{α} , $h \equiv \sqrt{-g_{00}}$ и др. Отбрасывание индекса упрощает запись, и поэтому вполне уместно, если решено остановиться на данном выборе координатной системы. С переходом к новой системе можно или (если (0) отброшен) составлять заново все выражения в новой системе, или производить преобразования, но не только координатные, но и $L(x)$. В последнем случае требуется восстановить все отброшенные лоренцевы индексы.

Специальные мировые компоненты применительно к теории х. и., т. е. к неполному набору калибровок $h^{\alpha}_{(0)} = 0$, введены в работе [25, § 9.16]. Приведем в соответствие терминологию

гию и некоторые из соотношений этого параграфа из книги Мёллера с общими соотношениями тетрадного представления ОТО. Примем, что не любые латинские, как в курсе [25], а только греческие индексы второй половины алфавита пробегают значения 0, 1, 2, 3. При этой договоренности, очевидно (см. уравнение (9.286) из книги [25]), имеем $\Gamma_\mu \equiv h_\mu^{(0)} = g_{\mu 0} / \sqrt{-g_{00}}$. Ясно, что «калибровочно-инвариантная величина», определяемая в [25, уравнение (9.289)] как $[A] \equiv A^\mu \Gamma_\mu$, является нулевой компонентой в лоренцевых индексах

$$\begin{aligned} [A] &\equiv A^\mu \Gamma_\mu = A_0 \Gamma^0 = A_0 / \sqrt{-g_{00}} \equiv (A_{(0)})_{h^\alpha_{(0)=0}} = \\ &= (A_\mu h^\mu_{(0)})_{h^\alpha_{(0)=0}}. \end{aligned}$$

Ограниченные же тензоры являются частным случаем специальных мировых компонент

$$\begin{aligned} A_\perp^\mu &= A^\mu + (A_\nu \Gamma^\nu) \Gamma^\mu = A^\mu + \delta_{\mu 0} A_0 (\Gamma^0)^2 \equiv (\dot{A}^{\mu})_{h^\alpha_{(0)=0}} = \\ &= (h^\mu_a A^a)_{h^\alpha_{(0)=0}} = A^\mu + h^\mu_{(0)} h^0_{(0)} A_0; (h^\mu_{(0)})_{h^\alpha_{(0)=0}} \equiv \delta_{\mu 0} h^0_{(0)}. \end{aligned}$$

Ограниченный вектор, как отмечено [25, уравнение (9.291)], ортогонален Γ_μ :

$$\begin{aligned} A_\perp^\mu \Gamma_\mu &= \dot{A}^\mu h_{\mu(0)} = h^\mu_a A^a h_{\mu(0)} = \eta_{a(0)} A^a = 0, \\ (A_\perp^\mu \Gamma_\mu)_{h^\alpha_{(0)=0}} &= \dot{A}_\mu h^\mu_{(0)} = \dot{A}_0 h^0_{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (21.35a)$$

(см. условие ортометричности и ортометрические тензоры далее в § 22).

Наряду с ограниченными 4-тензорами вводятся [25] «стандартные 4-тензоры». Так, например, для стандартного вектора имеем-

$$\begin{aligned} \bar{A}^\alpha &= (A_\perp^\alpha, -[A]) \equiv (\dot{A}^\alpha = h^\alpha_a A^a, A^{(0)}), \\ \bar{A}_\alpha &= (A_\alpha^\perp, [A]) \equiv (\dot{A}_\alpha = h_\alpha^a A_a, A_{(0)}). \end{aligned}$$

С точки зрения тетрадного представления ОТО объединение R -скаляров и R -инвариантов естественно. В R -ковариантной формулировке оно более уместно.

Вернемся к п. 13.10 и продолжим рассмотрение связи между физическим и координатным элементами объемов. Рассмотрим эту связь применительно к набору калибровок (21.24). Согласно (13.42),

$$dV = h_\mu^{[m} h_\nu^n h_\lambda^r h_\sigma^s] \epsilon_{mnr s} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\sigma, \quad (21.36)$$

причем, проводя альтернирование, можно убедиться, что

$$h_{\mu}^{[m} h_{\nu}^n h_{\lambda}^r h_{\sigma]}^s = h_{[\mu}^m h_{\nu}^n h_{\lambda}^r h_{\sigma]}^s = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \equiv \sqrt{-g}. \quad (21.37)$$

В частности, при условии (21.24)

$$\begin{aligned} h_{[\mu}^m h_{\nu}^n h_{\lambda}^r h_{\sigma]}^s &= h_0^{[m} h_{\alpha}^n h_{\beta}^r h_{\gamma]}^s = h_0^{(0)} h_{[\alpha}^a h_{\beta}^b h_{\gamma]}^c = \\ &= \sqrt{-g_{00}} h_{[\alpha}^a h_{\beta}^b h_{\gamma]}^c = \sqrt{-g}. \end{aligned} \quad (21.38)$$

В то же время

$$\begin{aligned} (\det g_{\alpha\beta}^*)_{h_0^a=0} &= \det \gamma_{\alpha\beta} \equiv \gamma = \det h_{\alpha}^a h_{\beta}^b \eta_{ab} = \\ &= \det \eta_{ab} \det h_{\alpha}^a \det h_{\beta}^b = (\det h_{\alpha}^a)^2 = (h_{[\alpha}^a h_{\beta}^b h_{\gamma]}^c)^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\sqrt{-g})_{h_0^a=0} = \sqrt{-g_{00}} \sqrt{\gamma}, \quad (21.39)$$

что соответствует уравнению (84.9) из работы [23, с. 288]

$$(\eta_{\mu\nu\lambda\sigma})_{h_0^a=0} = \sqrt{-g_{00}} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{mnrs}. \quad (21.40)$$

Можно ввести смешанные компоненты, содержащие пространственные мировые индексы и локальный лоренцев. При условии (21.24)

$$\eta_{\alpha\beta\gamma 0} = h_0^k \eta_{\alpha\beta\gamma k} = h_0^{(0)} \eta_{\alpha\beta\gamma(0)}. \quad (21.41)$$

Решив ограничиться избранной (произвольно) системой координат, можем для упрощения записи отбросить лоренцев индекс (0). Тогда

$$\eta_{\alpha\beta\gamma(0)} = \eta_{\alpha\beta\gamma 0} / \sqrt{-g_{00}} \equiv \sqrt{\gamma} \varepsilon_{abc(0)} \equiv \eta_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\gamma} \varepsilon_{abc}, \quad (21.42)$$

что совпадает с первым из уравнений в примечании, данном в курсе [23, с. 323].

Используя частное определение (21.41) для дуальных компонент бивектора электромагнитного поля, в силу условия (21.24) имеем

$${}^D E_{0\alpha} \equiv \frac{1}{2} \eta_{0\alpha\beta\gamma} E^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma 0} E^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} h_0^{(0)} \eta_{\alpha\beta\gamma(0)} E^{\beta\gamma}. \quad (21.43)$$

Принимая указанное условие и отбрасывая при фиксированной системе координат индексы 0 и (0), находим

$$\begin{aligned} {}^D E_{(0)\gamma} \equiv H_{\gamma} &= -\frac{1}{2} \eta_{\gamma\alpha\beta} E^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{cab} E^{\alpha\beta} = \\ &= \frac{1}{2} \eta_{(0)\gamma\alpha\beta} E^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (21.44)$$

где для численных значений индексов принято $|\gamma| = |c|$, $|\alpha| = |a|$, $|\beta| = |b|$. Аналогично в силу соотношений (21.24)

$$\begin{aligned} {}^D E_{(0)\alpha} &= h^\mu_{(0)} {}^D E_{\mu\alpha} = h^0_{(0)} {}^D E_{0\alpha} = \\ &= -\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta\gamma(0)} E^{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{abc} E^{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (21.45)$$

т. е., как в курсе [23, с. 329],

$$H_\gamma = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} H^{\alpha\beta}, \quad H_\gamma \equiv {}^D E_{(0)\gamma}.$$

Остановимся еще на получении соотношений (21.15)—(21.17) из уравнений тетрадного представления ОТО. Для краткости ограничимся простейшими из них. Из системы (13.5) и условий (21.19) вытекает

$$-g_{00} = (h_0^{(0)})^2, \quad g_{11} = -(h_1^{(0)})^2 + h_1^a h_1^b \eta_{ab}. \quad (21.46)$$

Сравнивая первые из выражений в соотношениях (21.46), (21.15), а также сравнивая (21.24) со вторым из соотношений (21.16), видим, что при условии (21.19) с учетом различий в выборе сигнатуры

$$h_0^{(0)} = \omega_0, \quad (21.47)$$

$$h_1^{(0)} = \Omega_1. \quad (21.48)$$

Из уравнений (21.46) видно, что

$$(h_1^{(0)})^2 \equiv \Omega_1^2 = h_1^a h_1^b \eta_{ab} - g_{11}. \quad (21.49)$$

Учитывая различие в выборе сигнатуры, приходим к первому из соотношений (21.17), положив

$$\omega_1^2 = -h_1^a h_1^b \eta_{ab} \equiv \gamma_1. \quad (21.50)$$

При условии (21.19) имеем

$$\begin{aligned} (g_{01})^2 - g_{00}g_{11} &= (h_0^{(0)})^2 (h_{1(0)})^2 - (h_0^{(0)})^2 [(h_1^{(0)})^2 + \\ &+ h_1^a h_{1a}] = (h_0^{(0)})^2 (-h_1^a h_1^b \eta_{ab}) = (\omega_0)^2 (\omega_1)^2, \end{aligned} \quad (21.51)$$

что совпадает со вторым из соотношений (21.15). Следовательно, ω_0 и ω_1 при подходе к ним из тетрадного представления ОТО являются обозначениями

$$\omega_0 \equiv h_0^{(0)}, \quad \omega_1 \equiv \sqrt{\gamma_{11}} = \sqrt{-h_1^a h_{1a}}.$$

Очевидно, совокупность величин ω_ν не есть вектор, что и отмечено в работе [606]. Лишь после игнорирования лоренцевыми индексами может оказаться целесообразным объединение ω_0 и ω_1 в одну величину ω_ν .

Наконец, перейдем к х. и. операторам частного дифференцирования (21.13) исходя из R -инвариантных операторов, рассмотренных в п. 20.2, записав их при наборе калибровок (21.19). Из выражений (20.12), (20.14) при этом наборе получаем соответственно

$$\partial_{(0)} \equiv h^{\mu}_{(0)} \partial_{\mu} = h^0_{(0)} \partial_0, \quad (21.52)$$

$$\partial_{\mu}^* = \partial_{\mu} - h_{\mu}^{\nu(0)} h^{\nu}_{(0)} \partial_{\nu} = \partial_{\mu} - h_{\mu}^0(0) h^0_{(0)} \partial_0. \quad (21.53)$$

Подставляя сюда компоненты (21.24) и учитывая соотношения (21.34), находим

$$\partial_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \partial_0, \quad \partial_{\alpha}^* = \partial_{\alpha} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \partial_0, \quad \partial_0^* = 0, \quad (21.54)$$

что с точностью до выбора алфавита для индексов и сигнатуры совпадает с производными (21.13). Из сравнения элемента (21.11), в котором $\alpha=0, 1, 2, 3$, с элементом (21.25), в котором $\mu=0, 1, 2, 3$, ясно, что

$$\frac{d}{d\tau} \equiv \frac{d}{dx^{(0)}} \equiv \frac{*d}{dt}. \quad (21.54a)$$

Аналогичным образом, используя калибровку (21.19), трудно получить из тетрадного представления ОТО и другие соотношения теории хронометрических инвариантов.

В этой теории вводятся трехмерные коэффициенты связности в виде символов Кристоффеля, построенных из хронометрически-ковариантного метрического тензора с участием х. и. производных. Используя выражение (15.17) при условии (21.19), но допуская к преобразованию только трехмерные компоненты коэффициентов вращения Риччи и трехмерное суммирование, легко находим

$$\begin{aligned} \Delta^*_{\beta\gamma} &= h^{\alpha}_{\beta} h^{\alpha}_{\gamma} h^{\nu}_{\nu} h^{\alpha}_{\nu} h^{\beta}_{\alpha} + h^{\alpha}_{\beta} \partial_{\nu} h^{\alpha}_{\nu} h^{\beta}_{\alpha} = \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\beta}^* g^*_{\delta\gamma} + \partial_{\gamma}^* g^*_{\beta\delta} - \partial_{\delta}^* g^*_{\beta\gamma}), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Исходя из тетрадного представления ОТО, легко прийти и к тензорам вида [600, с. 140] $X^{ij} = -R_0^i j / g_{00}$, $Y^{ijk} = -R_0^{ijk} / \sqrt{g_{00}}$ (здесь $i, j, k = 1, 2, 3$), вводимым в теории х. и. и интенсивно используемым для исследования в ОТО гравитационно-инерционных волн. Взяв комбинированные локально-мировые компоненты тензора Римана — Кристоффеля в случае калибровки тетрад (21.19), находим $R_{(0)}^{\alpha}_{(0)\beta} = h^{\mu}_{(0)} h^{\nu}_{(0)} R_{\mu}^{\alpha\nu\beta} = (h^0_{(0)})^2 R_0^{\alpha\beta} = -R_0^{\alpha\beta} / g_{00}$. Аналогично получаем $R_{(0)}^{\alpha\beta\gamma} = h^0_{(0)} R_0^{\alpha\beta\gamma}$. Пока исследования ведутся в некоторой одной системе отсчета, индексы (0) рационально отбросить.

21.5. Комментарии к терминологии. Наконец, во избежание недоразумений (см. замечание в конце п. 13.5) остановимся на терминологии. В работе [567] термин «физические компоненты» употребляется в ином смысле, чем в нерелятивистской физике и тетрадной формулировке ОТО, хотя ставится тот же вопрос, который решается в теории Ламе и тетрадном представлении: «... Как из теоретических величин <мировых компонент>, данных в их координатах (нефизических компонентах), построить физические наблюдаемые (физические компоненты)?» (с. 68). Ответ на него состоит из двух частей. Во-первых, «...проектируя 4-мерные тензорные величины <мировые компоненты> на направление τ^μ ($\tau^\mu \equiv h_{(0)}^\mu$), можно найти физические временные компоненты этих величин, например интервал физического времени... $dt = -\tau_\mu dx^\mu$ » [567, с. 69] ($\equiv h_{(0)}^\mu dx^\mu = dx^{(0)}$). Именно так и определяются физические хроно-компоненты в тетрадном представлении, где индекс (0) подчеркивает, что они получены в результате отнесения к лоренцеву единичному вектору $e_{(0)}$. Это придает им метрологический смысл [464] и полное соответствие с эйнштейновым определением измеряемых величин. Во-вторых, после введения метрического тензора (21.26) в работе [567, с. 69] говорится: «...Любой 4-вектор A_μ можно разложить на физические временную и пространственную компоненты

$$a_* = A_\mu \tau^\mu \text{ и } a_\mu = b_{\mu\nu} A^\nu \quad \langle \equiv A^\nu \gamma_{\mu\nu} \rangle.$$

В обозначениях, принятых в данной монографии, эти соотношения имеют вид

$$a_* = A_\mu h_{(0)}^\mu = A_{(0)}, \quad a_\mu = A^\nu h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} A^\nu \equiv \dot{A}_\mu^*.$$

Таким образом, «физическими компонентами вектора» в теории Ламе и в тетрадной формулировке ОТО называются величины A_a , тогда как в работе [567] — величины $a_\mu = h_{\mu\nu} A^\nu$. Чтобы не получилось путаницы, в данной монографии в п. 14.2 для величин типа $h_{\mu\nu} A^\nu \equiv a_\mu = A^\nu b_{\nu\mu}$ использован термин «специальные мировые компоненты». В соответствии с тетрадной формулировкой ОТО в работе [567, с. 70] отмечено, что «...расщепленные на временную и пространственную части величины преобразуются при переходах между любыми системами отсчета... с помощью локального преобразования Лоренца». Действительно, $a_* = A_{(0)}$ — R -скаляр, $a_\mu = b_{\mu\nu} A^\nu$ — R -инвариант, но они не являются $L(x)$ -инвариантами. Эйнштейн также подчеркивал, что «...кроме инвариантов и тензоров геометрии Римана, появляются новые инвариан-

анты и тензоры» (см. п. 13.8). Эти величины являются новыми, поскольку их свойства определены относительно новой (другой) группы преобразований — локальной группы Лоренца. Для мировых инвариантов, связанных с (3+1)-расщеплением [567, с. 68], употребляется название «нетривиальные скаляры». Этот термин предполагает фиксированность системы отсчета, позволяющую для простоты отбросить индекс (0) и пространственные индексы в свертке (a^a). Тогда, например, $dx^{(0)} \equiv cd\tau$ и $a_{\mu}^* b^{\mu} \equiv a_{\mu}^*$. Пока система отсчета не фиксирована, термин «нетривиальные скаляры» неуместен, поскольку они содержат трансформационные (лоренцевы) индексы. Очевидно, тривиальные скаляры — скаляры относительно каждой из групп преобразований, например $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = h_{\mu h} R^{\mu h}$.

Э. Шмутцером также вводится термин «физические компоненты», но для величин, не тождественных ни с величинами типа A^h , ни с величинами типа $\dot{A}^{\mu} = h^{\mu}_a A^a$ (см. п. 23.2).

Остановимся еще на термине «наблюдаемые». Как указывалось, Румером и Фетом он употребляется в смысле метрологической терминологии: «Значения наблюдаемых суть результаты измерений» [497, с. 133], т. е. как более современный синоним термина «физические компоненты». Основываясь на теории х. и. в термин «наблюдаемые» часто вкладывают другое содержание, понимая под наблюдаемыми хронометрические инварианты, в том числе х.и. трехмерные величины (см., например, [600, с. 140] *), т. е. специальные мировые компоненты. Из сказанного видно, что в этом смысле термин «наблюдаемые» уже выходит за рамки метрологической терминологии. Он также не совпадает по содержанию и с термином Эйнштейна «естественно-измеряемые величины».

21.6. Выделение кинеметрических инвариантов и ковариантов в тетрадном представлении ОТО. Еще в работах [594, с. 150; 607, с. 1030] А. Л. Зельмановым обращалось внимание на то, что наряду с хронометрически-инвариантными метрическим тензором h_{ih} (21.10) и элементом длины (21.9) могут быть введены другие сходные по конструкции выражения

$$(12) \quad y_{ih} = -g_{ih}, \quad y^{ik} \equiv -g^{ik} + g^{0i}g^{0k}/g^{00}, \quad y = -gg^{00} \quad (21.55)$$

(метрика пространственного сечения $x^0 = \text{const}$) и

$$du^2 \equiv y_{ih} dx^i dx^h = -g_{ih} dx^i dx^h. \quad (21.56)$$

*) См. также статью Л. Б. Борисовой в сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц» (1978, вып. 9, с. 111).

Метрика (21.10) зависит от выбора линий времени, но вследствие хронометрической инвариантности независима от выбора пространственных сечений, тогда как метрика (21.55) зависит от выбора этих сечений, но не от выбора линий времени и, вообще говоря, не является хронометрически-инвариантной. Подчеркивается, что х. и. метрика (21.10) («метрика пространства системы отсчета») всюду пространственно-подобна, а метрика (21.55), вообще говоря, нет. Поэтому определенные метрикой h_{ik} элементы длины, площади и объема всегда вещественны. В частности, $y = \det y_{ik}$ в отличие от $h = \det h_{ik}$ может принимать отрицательные значения. Это приводит к мнимости объема соответствующих областей сечений. В связи с этим ставится вопрос «...о возможности того, что пространственный объем мировых (пространственно-временных) областей даже всего мира координатной системы, если его относить, вообще говоря, к другим системам, — конечен при одном выборе пространственных сечений и линий времени и бесконечен при другом их выборе» [607, с. 1031]. В работе [594, с. 151] резюмируется: «Таким образом, даже при выборе координаты времени и фиксации ее значения непосредственный физический смысл имеет не метрика (12) <(21.55)> пространственного сечения $x^0 = \text{const}$, а метрика (7) <(21.10)> пространства при $x^0 = \text{const}$ ». В монографиях [23, 56, 599, 600], уделивших значительное внимание теории х. и., метрика (21.55) и элемент длины (21.56) не обсуждаются.

Трехмерные гиперповерхности пространственных сечений $x^0 = \text{const}$ и метрический тензор на ней (21.55) ввел Дирак [617] (перевод в [618, с. 141, уравнение (4)]). Существенным является введение единичной нормали [618, с. 148]: «Обозначим через l^μ единичную нормаль к поверхности $x^0 = \text{const}$ в некоторой точке последней, так что

$$l^\mu g_{\mu r} = 0, \quad l^\mu l_\mu = 1 \quad \langle r = 1, 2, 3, \rangle. \quad (21.57)$$

Тогда

$$l^\mu = g^{\mu 0} (g^{00})^{-\frac{1}{2}}. \quad (21.58)$$

Поскольку $x^0 = \text{const}$ рассматривается как пространственно-подобная гиперповерхность, то единичный вектор нормали является лоренцевым вектором $e_{(0)}$, т. е. у Дирака принято

$$l^\mu = h^\mu_{(0)} = g^{\mu 0} / \sqrt{g^{00}}, \quad (21.59)$$

что совпадает с первым из соотношений (17.41), полученным при помощи (17.36) и неполного набора калибровок $h^0_a = 0$ из (17.37). Исходя из тетрадного представления, этот набор Дирак обсуждает в работе [618, с. 194]: «...мы должны вы-

брать тетрады... так, чтобы «the leg 0» <т. е. $e_{(0)}$ > была нормальна к гиперповерхности... При таких тетрадах мы имеем $h_{\mu 0} = l_{\mu}$ или <Дирак не помещает лоренцевы индексы в скобки>

$$(8) \quad h_{00} = -(-g^{00})^{-\frac{1}{2}}, \quad h_{r0} = 0, \quad (21.60)$$

$$(9) \quad \dots h^0 = (-g^{00})^{\frac{1}{2}}, \quad h^0_{\alpha} = 0, \quad (21.61)$$

$$(10) \quad h^r_{\alpha} h_{rb'} = \delta_{\alpha'b'}, \quad h_{ra'} h_{sa'} = g_{rs}, \quad (21.62)$$

$$(11) \quad h^0_{(0)} h_{0a'} + h^r_{(0)} h_{ra'} = 0, \quad h_{ra'} h_{0a'} = g_{r0}, \quad (21.63)$$

$a', b' = 1, 2, 3$ » [618, с. 194]. В обозначениях, принятых в данной монографии, эти уравнения соответственно примут вид:

$$h_{0(0)} = -1/\sqrt{-g^{00}}, \quad h_{\alpha(0)} = 0, \quad (21.64)$$

$$h^0_{(0)} = \sqrt{-g^{00}}, \quad h^0_{\alpha} = 0, \quad (21.65)$$

$$h^{\alpha}_{\alpha} h_{\alpha b} = \eta_{\alpha b}, \quad h_{\alpha a} h_{\beta}^a = g_{\alpha\beta}, \quad (21.66)$$

$$h^0_{(0)} h_{0a} + h^{\alpha}_{(0)} h_{\alpha a} = \eta_{(0)a} = 0, \quad h_{\alpha a} h_0^a = g_{\alpha 0}. \quad (21.67)$$

Следовательно, условия Дирака (21.60), т. е. (21.64), или (21.65) являются неполным набором калибровок трех первых условий (17.20) или трех первых условий (17.35). Эти условия, как видно из (17.36), т. е. после замены систем (21.66), (21.63) эквивалентной системой (17.36), позволяют найти компоненты (21.59) и затем метрический тензор (21.55) (уравнение (4) в работе [618, с. 141]). С учетом различия в выборе индексов и сигнатуры соотношения (21.61) или (21.65) приводят к (21.55).

А. Л. Зельманов [619] вновь возвращается к рассмотрению пространственных сечений $x^0 = \text{const}$ и к его метрике (21.55), строя теорию кинеметрических инвариантов (к. и.) в ОТО и тем самым еще одну специальную формулировку ОТО, выделяющую подгруппу преобразований координат, не совпадающую с подгруппой х. и. Отмечается, что при рассмотрении некоторых вопросов в отличие от теории х. и. существен фиксированный выбор пространственных сечений, тогда как выбор линий времени остается произвольным. Выделение подгруппы ведет к ее инвариантам: «Если выбор пространственных сечений фиксирован, допустимы лишь преобразования $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0)$, $P^{0'}_i = 0$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$. В этом случае математически удобны величины, преобразующиеся по формулам, не содержащим коэффициентов $P^{\mu'}_0$ или их производных (будем говорить: кинеметрически-инвариант-

ные, к. и.) и ковариантные по отношению к преобразованиям $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3)$, в которых x^0 рассматривается как параметр (греческие индексы — 0, 1, 2, 3, латинские — 1, 2, 3)» [619]. Там же дается построение специальной кинеметрически-инвариантной формулировки ОТО и ее аппарата.

В работах [620, 621] этот метод Зельманова связывается с дираковским подходом к гамильтонову формализму ОТО, в частности с его выражением (21.59) для хроно-монады. Поскольку в теориях х. и. и к. и. выражения (21.18) и (21.58) сходны по своей конструкции, это стимулирует к введению подобных выражений для всех векторов лоренцева репера, что и было сделано Ю. С. Владимировым [563] («класс групповых калибровок») [620] (дальнейшие публикации на эту тему и с ней связанные см. в работах [621, 622, 623]).

Аналогично п. 21.4 рассмотрим подход к аппарату к. и. исходя из тетрадного представления ОТО. Вместо калибровочных условий (21.19) и (21.20) примем неполный набор

$$h_{\alpha}^{(0)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad \text{или} \quad h^0_{\alpha} = 0. \quad (21.68)$$

Тогда вместо формул (21.21) — (21.28) получим следующие соотношения (см. также (17.37) и (17.41)):

$$g^{\mu 0} = h^{\mu}_{(0)} h^{0(0)}, \quad h^0_{(0)} = \sqrt{-g^{00}}, \quad h^{\alpha}_{(0)} = -g^{\alpha 0} / \sqrt{-g^{00}},$$

$$dx^{(0)} = h_{\mu}^{(0)} dx^{\mu} = h_0^{(0)} dx^0 = dx^0 / \sqrt{-g^{00}}, \quad h_0^{(0)} = 1/h^0_{(0)},$$

$$\begin{aligned} g^{*\alpha\beta} &\equiv -\gamma^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha}_{\ a} h^{\beta}_{\ b} \eta^{ab} = g^{\alpha\beta} - h^{\alpha}_{(0)} h^{\beta}_{(0)} \eta^{(0)(0)} = \\ &= g^{\alpha\beta} - g^{\alpha 0} g^{\beta 0} / g^{00}, \end{aligned}$$

$$\sphericalangle dx^{\alpha} \equiv dx^{*\alpha} = h^{\alpha}_{\ a} dx^a = \bar{d}x^{\alpha} - h^{\alpha}_{(0)} dx^{(0)} =$$

$$= dx^{\alpha} - h^{\alpha}_{(0)} h_{\mu}^{(0)} dx^{\mu} = dx^{\alpha} - \frac{g^{0\alpha}}{g^{00}} dx^0,$$

$$dx^a = h_{\alpha}^a (\sphericalangle dx^{\alpha})$$

(\sphericalangle — символ, используемый в аппарате к. и. вместо символа * в аппарате х. и.),

$$dl^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} h_{\alpha}^a h_{\beta}^b (\sphericalangle dx^{\alpha}) (\sphericalangle dx^{\beta}) =$$

$$= h_{\alpha\beta} \sphericalangle dx^{\alpha} \sphericalangle dx^{\beta}, \quad h_{\alpha\beta} \equiv \eta_{ab} h_{\alpha}^a h_{\beta}^b = g_{\alpha\beta} - h_{\alpha}^{(0)} h_{\beta}^{(0)} \eta_{(0)(0)} = g_{\alpha\beta},$$

$$dx^0_{\text{дес}} = -\frac{h_{\alpha}^{(0)}}{h_0^{(0)}} dx^{\alpha} = 0.$$

Исходя из выражения (21.36), при калибровочном условии (21.68) легко найти аналогичные соотношения, но вместо уравнения (21.39) получаем

$$(\sqrt{-g})_{h_\alpha}^{(0)} = \sqrt{h} / \sqrt{-g^{00}}, \quad \sqrt{h} \equiv h_{[\alpha^a h_\beta^b h_\gamma^c]}.$$

Вместо (21.53) легко находим

$$\overset{\circ}{\partial} \equiv \partial_{(0)} \equiv h^0_{(0)} \partial_0 + h^\alpha_{(0)} \partial_\alpha = \sqrt{-g^{00}} \partial_0 - g^{\alpha 0} / \sqrt{-g^{00}} \partial_\alpha.$$

Второй член отсутствует только, если дополнительно принято $h^\alpha_{(0)} = 0$ (дополнительное условие нормальности). Поскольку

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{v}^\alpha &= \overset{\circ}{dx}^\alpha / d\tau = \frac{h^\alpha_a dx^a}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} - h^\alpha_{(0)} \frac{dx^{(0)}}{d\tau} = \\ &= \frac{\overset{\circ}{dx}^\alpha}{d\tau} + \frac{g^{0\alpha}}{\sqrt{-g^{00}}}, \quad (v^\alpha)_{dx^{(0)}} = \frac{g^{0\alpha}}{\sqrt{g^{00}}} - h^\alpha_{(0)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d} &\equiv \frac{d}{dx^{(0)}} = h^\mu_{(0)} \partial_\mu = \\ &= h^0_{(0)} \partial_0 + h^\alpha_{(0)} \partial_\alpha = \overset{\circ}{d} + h^\alpha_{(0)} \partial_\alpha = \overset{\circ}{d} - v^\alpha \partial_\alpha. \end{aligned}$$

Использованием калибровки $h^0_a = 0$ нетрудно получить из тетрадного представления ОТО и другие соотношения теории кинеметрических инвариантов. Основные из них, требующие введения связности, рассмотрим в следующем пункте.

В теории к. и., так же как и в теории х. и., вводятся трехмерные коэффициенты связности в виде символов Кристоффеля, но построенных из кинеметрически-ковариантного метрического тензора и к. и. частных производных. Так, из уравнения (15.17) при условии (21.68) легко находим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Delta}^\alpha_{\beta\gamma} &= h^\alpha_a h_\beta^b h_\gamma^c \gamma^a_{bc} + h^\alpha_b \partial_\gamma h_\beta^b = \\ &= \frac{1}{2} y^{\alpha\delta} (\partial_\beta y_{\delta\gamma} + \partial_\gamma y_{\beta\delta} - \partial_\delta y_{\beta\gamma}), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где $y_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора (21.55), а

$$\overset{\circ}{\partial}_\beta \equiv \overset{\circ}{\partial}_\beta = h_\beta^a \partial_a = (h_\beta^k \partial_k)_{h_\beta^{(0)}} = \partial_\beta.$$

21.7. Основные уравнения ОТО в х. и. и в к. и. формах и два частных случая R-инвариантных уравнений ОТО. Приведенные в п. 20.4 и 20.6 алгебраические соотношения и введение символов Кристоффеля относительно метрических тензоров (21.26) и (21.55), позволившее развить дифференциаль-

ную часть аппарата, завершились соответственно в работах [602] и [619] представлением основных уравнений ОТО в хронометрически и кинеметрически ковариантном виде. Согласно А. Л. Зельманову [602], для изотропной геодезической линии (при сохранении обозначений [602]) имеем

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{cd\tau} + \frac{1}{c} D_{ij}\alpha^i\alpha^j - \frac{1}{c^2} F_i\alpha^i = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (21.69)$$

$$\frac{1}{\omega} \frac{d(\omega\alpha^k)}{cd\tau} + \Delta^k_{ij}\alpha^i\alpha^j + \frac{2}{c} (D^k_i + A_i^k) \alpha^i - \frac{1}{c^2} F^k = 0,$$

ω — х. и. циклическая частота, $\alpha^i = dx^i/cd\tau$, $k^i = \omega\alpha^i$ — волновой вектор. Для неизотропной геодезической

$$dE/d\tau + mD_{ij}v^i v^j - mF_i v^i = \xi_i v^i, \quad (21.70)$$

$$dp^k/d\tau + \Delta^k_{ij} p^i v^j + 2m(D^k_i + A_i^k) v^i - mF^k = \xi^k,$$

p_i — х. и. импульс, ξ^k — х. и. негравитационная сила,

$$E = c^2 P_0 \sqrt{g_{00}}, \quad p_i = P_i c = m\omega_i, \quad P_\mu = m_0 dx_\mu/ds.$$

Для законов сохранения:

$$\frac{*d\rho}{dt} + D\rho + \frac{1}{c^2} D_{ij}u^{ij} + \left[\left(* \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i \right) J^i \right] - \frac{1}{c^2} F_i J^i = 0, \quad (21.71)$$

$$\frac{*dy^k}{dt} + DJ^k + 2(D^k_i + A_i^k) J^i + \left[\left(* \nabla_i - \frac{F_i}{c^2} \right) u^{ik} \right] - \rho F^k = 0,$$

$$T_{00} \sqrt{g_{00}} \equiv \rho, \quad cT^i_0 \sqrt{g_{00}} = J^i.$$

Наконец, для уравнений тяготения Эйнштейна:

$$\frac{*dD}{dt} + D_{jl}D^{lj} + A_{jl}A^{lj} + * \nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho c^2 + u), \quad (21.72)$$

$$* \nabla_j (h^{ij} D - D^{ij} - A^{ij}) + \frac{2}{c^2} F_j A^{ij} = \kappa J^i,$$

$$\begin{aligned} & \frac{*dD_{ik}}{dt} - (D_{ij} + A_{ij})(D_k^j + A_k^j) + DD_{ik} - D_{ij}D^j_k + 3A_{ij}A_k^j + \\ & + \frac{1}{2} (* \nabla_i F_k + * \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 h_{ik} + 2u_{ik} - u h_{ik}). \end{aligned}$$

Согласно работе [619], те же уравнения ОТО, но в к. и. форме будут

$$\frac{1}{\omega} \overset{\circ}{\frac{d\omega}{dt}} + D_{ij} \alpha^i \alpha^j - \frac{1}{c} F_j \alpha^j = 0,$$

$$\frac{1}{\omega} \overset{\circ}{\frac{d(\omega \alpha^k)}{dt}} + c \Delta_{ij}^k \alpha^i \alpha^j + 2D^k_i \alpha^i - \frac{1}{c} F^k = 0,$$

$$\overset{\circ}{\frac{dE}{dt}} + m D_{ij} v^i v^j - m F_i v^i = \xi_i v^i, \quad (21.73)$$

$$\overset{\circ}{\frac{dp^k}{dt}} + \Delta^k_{ij} p^i v^j + 2m D^k_i v^i - m F^k = \xi^k,$$

$$\overset{\circ}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + D\rho + \frac{1}{c^2} D_{ij} u^i u^j + \left[\left(\nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) J^j \right] - \frac{1}{c^2} F_j J^j = 0, \quad (21.74)$$

$$\overset{\circ}{\frac{\partial J^k}{\partial t}} + D J^k + 2D^k_i J^i + \left[\left(\nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i \right) u^{ik} \right] - \rho F^k = 0$$

и, наконец,

$$\overset{\circ}{\frac{\partial D}{\partial t}} + D_{jl} D^{jl} + \nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho c^2 + u),$$

$$\nabla_j (h^{ij} D - D^i) = \kappa J^i, \quad (21.75)$$

$$\overset{\circ}{\frac{\partial D_{ih}}{\partial t}} - 2D_{ij} D^j_h + D D_{ih} + \nabla_i F_h -$$

$$- \frac{1}{c^2} F_i F_h - c^2 H_{ih} = \frac{\kappa}{2} (\rho c^2 h_{ih} + 2u_{ih} - u h_{ih}).$$

В отличие от метрической формулировки ОТО, где эйнштейновы уравнения поля сформулированы относительно искомого гравитационных потенциалов $g_{\mu\nu}$, уравнения тяготения (21.71) и (21.75) являются уравнениями относительно динамических характеристик систем отсчета. Эти уравнения относятся к такой стадии записи эйнштейновых уравнений тяготения, когда сохраняются выражения $R_{\mu\nu}$ и \hat{R} через коэффициенты связности, содержащиеся в $R_{\mu\nu\lambda}{}^\sigma$, но не через $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, а через коэффициенты вращения Риччи (без дальнейшего шага — перехода от $\gamma^\lambda_{\mu\nu}$ к $h_\mu{}^h$). Отсюда следует связь уравнений (21.71) и (21.75) с тетрадным представлением ОТО. Она кратко, но исчерпывающе рассмотрена в работах [543, 584]. На основании определений (14.7), (14.9) (в общем случае соотношения

$$\dot{Q}^{\mu\nu\dots}_{\rho\tau\dots} = h^\mu_\alpha h^\nu_b \dots h_\rho^c h_\tau^d \dots Q^{ab\dots cd\dots} \quad (21.76)$$

и аналогичных перелицовок ковариантных производных (20.19) и (20.20) можно сформулировать простые правила перехода в уравнениях (20.31) — (20.37) от лоренцевых (физических) компонент к специальным физическим компонентам, отмечаемым звездочкой под коренной буквой. Для этого необходимо все тетрадные индексы, за исключением нулевого, заменить на общековариантные, пробегающие значения 0, 1, 2, 3. Ковариантные производные $\tilde{\nabla}_{(i)}$ и $\tilde{\nabla}_{(0)}$ заменяются на ковариантные производные $\overset{*}{\nabla}_\alpha$ и $\overset{*}{\nabla}_t$ относительно коэффициентов связности (20.20). Например, первое из уравнений (20.36) с помощью этих правил запишется в форме

$$\partial_{(0)\rho} \rho + \rho D + D_{\mu\nu} u^{\mu\nu} + (\overset{*}{\nabla}_\mu - \overset{*}{F}_\mu) \overset{*}{J}^\mu - \overset{*}{F}_\mu \overset{*}{J}^\mu = 0. \quad (21.77)$$

Есть два вида калибровочных условий на тетрады, при выполнении которых суммация в R -ковариантных уравнениях, отнесенных к криволинейным координатам, автоматически сводится к суммации от 1 до 3. Это условия вида $h_0^\alpha = 0$ и $h^0_\alpha = 0$ (*). В случае условий $h_0^\alpha = 0$ криволинейные компоненты R -тензоров, у которых хотя бы один ковариантный индекс принимает нулевое значение, равны нулю. Вследствие этого уравнения, записанные ковариантными компонентами, также будут содержать только пространственные индексы. Выражения для коэффициентов связности при этом значительно упрощаются [543, 584]:

$$\overset{*}{\Delta}_{\beta\gamma}^\alpha = \left\{ \overset{*}{\alpha} \right\}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\overset{*}{\partial}_\beta \overset{*}{g}_{\delta\gamma} + \overset{*}{\partial}_\gamma \overset{*}{g}_{\beta\delta} - \overset{*}{\partial}_\delta \overset{*}{g}_{\beta\gamma}), \quad (21.78)$$

$$\overset{*}{\Delta}_{\beta}^\alpha = \overset{*}{D}_{\beta}^\alpha - \overset{*}{A}_{\beta}^\alpha.$$

Эти коэффициенты связности те же, что и в аппарате х. и. Поэтому уравнения (20.31) — (20.37) при отбрасывании скобок у индексов и замене операторов $\tilde{\nabla}_\alpha$, $\tilde{\nabla}_{(0)}$ на $\overset{*}{\nabla}_\alpha$, $\overset{*}{\nabla}_t$ по своему смыслу совпадают с соответствующими уравнениями теории хронометрических инвариантов. Для того чтобы они имели точно такой вид, как в теории х. и., необходимо раскрыть ковариантную производную $\overset{*}{\nabla}_t$ и учесть, что трехмерный тензор кривизны $\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и тензор $\overset{*}{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ аппарата х. и. связаны соотношением

$$\overset{*}{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\overset{*}{H}_{\alpha\beta\gamma\delta} - 2(\overset{*}{A}_{\alpha\beta} - \overset{*}{D}_{\alpha\beta}) A_{\gamma\delta}. \quad (21.79)$$

*) Эти калибровочные условия использовались А. А. Коппелем для изучения систем отсчета с ньютоновым временем («Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 2, 123).

Это соотношение показывает, что при определении \tilde{R}_{abcd} , согласно уравнениям (20.23) — (20.37), используется R -ковариантная производная по времени, тогда как в определении $\overset{*}{H}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ входит частная хронометрически инвариантная производная по времени.

Если выполняются условия $h^0_a = 0$, то нулю равны криволинейные компоненты R -тензоров, у которых хотя бы один контравариантный индекс принимает нулевое значение. Следствием этих условий является также обращение в нуль величины $A_{ab} = \Omega^{(0)}_{ab}$. При выполнении калибровочных условий $h^0_a = 0$ уравнения (20.23) — (20.37) после отбрасывания скобок у локальных индексов и замены операторов $\tilde{\nabla}_\alpha, \tilde{\nabla}_{(0)}$ на $\overset{*}{\nabla}_\alpha, \overset{*}{\nabla}_t$ совпадают по форме с уравнениями теории кинеметрических инвариантов. Из соотношения (20.26) видно, что кинеметрические производные $\overset{*}{\nabla}_\alpha$ и $\overset{*}{\nabla}_t$ определяются относительно коэффициентов связности [584]:

$$\overset{*}{\Delta}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \left\{ \overset{*}{\alpha} \right\}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{*\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\gamma\delta} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}), \quad (21.80)$$

$$\overset{*}{\Delta}^{\alpha}_{\beta} = \overset{*}{D}^{\alpha}_{\beta} - f \partial_\beta g^{\alpha},$$

$$f = h^0_{(0)} = \sqrt{-g^{00}}, \quad g^{\alpha} = h^{\alpha}_{(0)}/h^0_{(0)} = g^{\alpha 0}/g^{00}.$$

Так как $\overset{*}{D}^{\alpha}_{\beta}$ является кинеметрически-ковариантным тензором, то его можно исключить из коэффициентов связности и ввести усеченные коэффициенты связности $\overset{\smile}{\Delta}^{\alpha}_{\beta} = -f \partial_\beta g^{\alpha}$. Именно эти коэффициенты связности используются для определения кинеметрической производной по времени $\overset{\smile}{\partial}/\partial t$ [619]:

$$\overset{\smile}{\partial} \overset{*}{Q}^{\alpha}_{\beta} / \partial t = \overset{\smile}{\nabla}_t \overset{*}{Q}^{\alpha}_{\beta} = \overset{\smile}{\partial} \overset{*}{Q}^{\alpha}_{\beta} / \partial x^{(0)} + \overset{\smile}{\Delta}^{\alpha}_{\nu} \overset{*}{Q}^{\nu}_{\beta} - \overset{\smile}{\Delta}^{\nu}_{\beta} \overset{*}{Q}^{\alpha}_{\nu}, \quad (21.81)$$

$$\overset{\smile}{\partial} / \partial x^{(0)} = h^{\nu}_{(0)} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = f \left(\frac{\partial}{\partial x^0} + g^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

Таким образом, уравнения ОТО в форме хронометрически и кинеметрически-инвариантной суть координатные выражения соответственно двух частных случаев R -ковариантных уравнений ОТО. Эти выражения являются результатом перелицовки R -инвариантных уравнений по указанным выше правилам. Полученные в результате перелицовки уравнения, очевидно, ковариантны только относительно тех преобразований координат, которые не нарушают условий $h^0_a = 0$ и $h^0_a = 0$. Из п. 17.13 видно, что, в частности, при $\mu_1 = 0, s = \alpha, \nu = \beta, l_1 = (0)$ в (17.73) условия $h^0_a = 0$ не нарушаются при преобразованиях,

ограниченных требованием (17.74), т. е. преобразованиях, лежащих в основе теории х. и. При тех же значениях индексов, но условиях (17.76) из (17.77) видно, что условия $h^0_a = 0$ не нарушаются при координатных преобразованиях вида

$$P^{\mu'}_{\nu} = \left(\frac{P^{0'}_0 | P^{0'}_{\beta} = 0}{P^{\beta'}_0 | P^{\beta'}_{\alpha}} \right), \quad (21.82)$$

т. е. при подгруппе, лежащей в основе теории к. и. В отличие от работ [35, 561], где использовался термин «координатные представления локальных преобразований Лоренца», будем говорить «координатное выражение». В этом смысле обе подгруппы — (21.3) и (21.82) являются координатными выражениями (координатными аналогами [559]) R -подгруппы. Из соотношений (13.26) видно, что

$$L^{a'}_{(0)} = h_{\mu}{}^{a'} P^{\mu'}_{\nu} h^{\nu}_{(0)} = h_0{}^{a'} (P^{0'}_0 h^0_{(0)} + P^{0'}_{\beta} h^{\beta}_{(0)}) + h_{\alpha}{}^{a'} (P^{\alpha'}_0 h^0_{(0)} + P^{\alpha'}_{\beta} h^{\beta}_{(0)}). \quad (21.83)$$

Следовательно, при преобразованиях (18.36), при которых $p^{\alpha'}_0 = 0$, и условиях $h_0{}^{a'} = 0$, $h^0_a = 0$ из формулы (21.83) вытекает, что $L^{a'}_{(0)} = 0$. Тогда и $L^{(0)'}_a = 0$, так как $L^{k'}_n L_r{}^m = \delta_n^m$. Из уравнений (13.26) также находим

$$L^{(0)'}_a = h_0{}^{(0)'} (P^{0'}_0 h^0_a + P^{0'}_{\beta} h^{\beta}_a) + h_{\alpha}{}^{(0)'} (P^{\alpha'}_0 h^0_a + P^{\alpha'}_{\beta} h^{\beta}_a). \quad (21.84)$$

Следовательно, при преобразованиях (18.36) и условиях $h^0_a = 0$, $h^{0'}_{a'} = 0$ правая часть (21.84) обращается в нуль. Из условий же (13.25) видно, что, задаваясь R -подгруппой и калибровками $h^0_a = 0$ и $h^0_a = 0$, соответственно приходим к равенствам $P^{\alpha'}_0 = 0$ и $P^{0'}_{\alpha} = 0$.

Таким образом, на основе R -подгруппы хронометрически- и кинеметрически-инвариантные выражения ОТО объединяются в один комплекс. В этих представлениях эйнштейновых уравнений тяготения динамические характеристики систем отсчета выступают в роли полевых функций. При этом становится естественным задание координатных условий (как и калибровочных [624]) в виде условий, непосредственно наложенных на компоненты динамических характеристик.

§ 22. СОПОСТАВЛЕНИЕ R -КОВАРИАНТНОГО И ОРТОМЕТРИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ОТО

22.1. Основные величины и операции. R -ковариантная формулировка ОТО развита в § 20 на основе локально-группового

подхода в рамках тетрадной формулировки как ее частная модификация. В ней R -подгруппа выделяется по физическим соображениям как не меняющая физической ситуации, а исходными являются компоненты величин и производных, определенных относительно R -подгруппы. Они имеют 3 вида компонент — физические компоненты (с лоренцевыми индексами), мировые и специальные мировые. Соберем вместе некоторые из соотношений, содержащих эти компоненты, необходимые для дальнейшего:

$$\dot{Q}_{\mu \dots}^{\nu \dots} \equiv h_{\mu}^a h_{\nu}^b \dots Q_{a \dots}^b \dots, \quad (22.1)$$

(в частности, $\dot{g}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu}^a h_{\nu a} = g_{\mu\nu} + h_{\mu(0)} h_{\nu(0)}$),

$$\dot{\partial}_{\mu} \equiv h_{\mu}^a \partial_a, \quad (22.2)$$

$$\dot{\nabla}_{\lambda} \dot{Q}_{\mu\nu} \dots \equiv h_{\mu}^a h_{\nu}^b \dots h_{\lambda}^c \tilde{\nabla}_c \dot{Q}_{ab} \dots, \quad (22.3)$$

$$\tilde{\nabla}_c \dot{Q}_{ab} \dots \equiv \partial_c \dot{Q}_{ab} \dots - \gamma^d_{ac} \dot{Q}_{db} \dots - \gamma^d_{bc} \dot{Q}_{ad} \dots, \quad (22.4)$$

$$Q \equiv Q_{(0)}^{(0)} \dots, \quad (22.5)$$

$$\partial_{(0)} = \partial / \partial x^{(0)} \equiv \dot{\partial}_t, \quad (22.6)$$

$$\dot{\nabla}_t \dot{Q}_{\mu} \equiv h_{\mu}^b \tilde{\nabla}_{(0)} Q_b, \quad (22.7)$$

$$\tilde{\nabla}_{(0)} \equiv \partial_{(0)} Q_b - \gamma^c_{b(0)} Q_c. \quad (22.8)$$

R -Инвариантами, R -тензорами и более сложными объектами являются величины и операторы пространственные в смысле локального расщепления 4-пространства ОТО по законам СТО (хоро-величины, операторы). R -Скалярами являются величины (операторы) временные в смысле этого локального расщепления (хроно-величины, операторы). Из определений (22.1) — (22.3), (22.7) видно, что $\dot{Q}_{\mu \dots}^{\nu \dots}$, $\dot{\partial}_{\mu}$, $\dot{\nabla}_{\lambda} \dot{Q}_{\mu\nu} \dots$, $\dot{\nabla}_t \dot{Q}_{\mu}$ — R -инварианты. То, что это хоро-величины (ограниченные величины в смысле (21.35а)), в частности, выражается равенством нулю их свертков по любому из индексов с хроно-монадой $h^{\mu}_{(0)}$. Действительно, из указанных соотношений ясно, что

$$h^{\mu}_{(0)} \dot{Q}_{\mu \dots}^{\nu \dots} = \delta_{(0)}^b h_{\nu}^a \dots Q_{b \dots}^a \dots = 0, \quad h_{\nu(0)} \dot{Q}_{\mu \dots}^{\nu \dots} = \eta_{(0)b} h_{\mu}^a Q_a^b \dots = 0,$$

$$h^{\mu}_{(0)} \dot{\partial}_{\mu} = \delta_{(0)}^a \partial_a = 0,$$

$$h^{\mu}_{(0)} \overset{\star}{\nabla}_{\lambda} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\mu\nu\dots} = \delta^{\alpha}_{(0)} \dots = 0, \quad h^{\nu}_{(0)} \overset{\star}{\nabla}_{\lambda} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\mu\nu\dots} = \delta^b_{(0)} \dots = 0, \quad (22.9)$$

$$h^{\mu}_{(0)} \overset{\star}{\nabla}_t \overset{\star}{\dot{Q}}_{\mu} = \delta^b_{(0)} \dots = 0.$$

Обратим внимание на то, что свертки с монадой частных R -инвариантной производной (22.2) и R -скалярной (22.6) от R -инвариантов отличны от нуля. Действительно,

$$h^{\nu}_{(0)} h_{\mu}^{\alpha} \partial_{\alpha} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\nu} \neq 0, \quad h^{\mu}_{(0)} \partial_{(0)} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\mu} \neq 0. \quad (22.10)$$

В частности, однако, равенство нулю таких сверток возможно. Так, при калибровочных условиях $h_0^{\alpha} = 0$ и $h^{\alpha}_{(0)} = 0$, имеющих место соответственно в х. и. и в к. и. формулировках ОТО, соответственно имеем

$$(h^{\mu}_{(0)} \partial_{(0)} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\mu})_{h_0^{\alpha}=0} = h^0_{(0)} \partial_{(0)} (h_0^{\alpha} Q_{\alpha}) = 0, \quad (22.11)$$

$$(h^{\nu}_{(0)} \overset{\star}{\partial}_{\mu} \overset{\star}{\dot{Q}}_{\nu})_{h_0^{\alpha}=0} = h^0_{(0)} \overset{\star}{\partial}_{\mu} (h_0^{\alpha} Q_{\alpha}) = 0,$$

$$(h_{\mu(0)} \partial_{(0)} \overset{\star}{\dot{Q}}^{\mu})_{h_{\alpha(0)}=0} = h_{0(0)} \partial_{(0)} \overset{\star}{\dot{Q}}^0 = 0, \quad (22.12)$$

$$(h_{\nu(0)} \overset{\star}{\partial}_{\mu} \overset{\star}{\dot{Q}}^{\nu})_{h_{\alpha(0)}=0} = h_{0(0)} \overset{\star}{\partial}_{\mu} \overset{\star}{\dot{Q}}^0 = 0,$$

$$(\overset{\star}{\dot{Q}}^0 \equiv h^0_{\alpha} Q^{\alpha})_{h_{\alpha(0)}=0} = 0.$$

А. Л. Зельманов [625] предложил еще одну специальную формулировку ОТО — ортометрическую. Цель ее — достичь общей ковариантности, не имеющей места в формулировках х. и. и к. и., сохранив сходство с этими двумя представлениями ОТО. Для этого вместо хронометрических и кинеметрических инвариантов вводятся [625] величины, отнесенные к локальным 3-пространствам СТО (хоро-величины), заданные своими криволинейными компонентами как величины, свертки которых по любому из индексов с хроно-монадой равен нулю (условие ортометричности). Величины, подчиненные этому условию, названы в работе [625] ортометрическими*). Диф-

*) Ортометрический в переводе с греческого — непосредственно, правильно измеренный. Условие ортометричности, как видно из (21.35а), послужило Мёллеру для введения в его курсе [25] «ограниченных тензоров». В монографии Брессана (см. первое из примечаний в п. 21.3) на стр. 42 вводится операция натуральной декомпозиции тензора $T \dots_{\alpha}$ относительно любого из индексов α . Она определяется равенством $T \dots_{\alpha} = T \dots_{\alpha}^{(1)} + T \dots_{\alpha}^{(0)}$, где $T \dots_{\alpha}^{(1)} n^{\alpha} = 0 = T \dots_{\alpha}^{(0)} \perp \alpha$, которое, очевидно, также является условием ортометричности.

ференциальные операторы непосредственно этому условию, вообще говоря, не подчинены, но вводятся такими, чтобы результаты их применения к ортометрическим величинам были также величинами ортометрическими. Сохраняя обозначения, принятые в работе [625] для монады — b_μ и индекса ортометричности — ноль над коренной буквой, продемонстрируем введенные определения следующими соотношениями:

$$\overset{0}{Q}_{\mu\cdots}^{\nu\cdots} = h_\mu^\alpha h^\nu_\sigma \dots Q_{\alpha\cdots}^\sigma, \quad (22.13)$$

где

$$h_{\mu\nu} = \overset{\ast}{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + b_\mu b_\nu, \quad b_\mu b^\mu = -1, \\ \overset{0}{\partial}_\lambda \overset{0}{Q}_{\mu\nu\dots} \equiv h_\mu^\varepsilon h_\nu^\sigma \dots h_\lambda^\omega \overset{0}{\partial}_\omega \overset{0}{Q}_{\varepsilon\sigma\dots}, \quad (22.14)$$

$$\overset{0}{\nabla}_\lambda \overset{0}{Q}_{\mu\nu\dots} \equiv h_\mu^\varepsilon h_\nu^\sigma \dots h_\lambda^\omega \overset{0}{\nabla}_\omega \overset{0}{Q}_{\varepsilon\sigma\dots}, \quad (22.15)$$

$$\overset{0}{\partial}_t \overset{0}{Q}^\nu \equiv h_\varepsilon^\nu (b^\sigma \overset{0}{\nabla}_\sigma \overset{0}{Q}^\varepsilon - \overset{0}{Q}^\lambda \overset{0}{\nabla}_\lambda b^\varepsilon), \quad (22.16)$$

$$\overset{0}{\nabla}_t \overset{0}{Q}_\mu = h_\mu^\varepsilon b^\sigma \overset{0}{\nabla}_\sigma \overset{0}{Q}_\varepsilon. \quad (22.17)$$

Перейдем к сопоставлению соотношений (22.1) — (22.8) с (22.13) — (22.17), произведенному в работе [560].

22.2. Приведение R -тензоров к виду, содержащему усеченный метрический тензор и (или) хроно-монаду. Перелицуем в соотношении (22.1) локальные компоненты Q_a^b в мировые. Тогда

$$\overset{\ast}{Q}^\mu_\nu \equiv h^\mu_\alpha h_\nu^b \overset{0}{Q}^\lambda_\sigma h^\sigma_b h_\lambda^a = h^\mu_\lambda h_\nu^\sigma \overset{0}{Q}^\lambda_\sigma \equiv \overset{0}{Q}^\mu_\nu, \quad (22.18)$$

где $h^\mu_\nu = \overset{\ast}{g}^\mu_\nu$, $h_{\mu(0)} = b_\mu$. Легко находим обратные соотношения

$$Q_{ab} = h^\mu_\alpha h^\nu_b \overset{\ast}{Q}_{\mu\nu}, \quad Q_a = h^\mu_a \overset{\ast}{Q}_\mu. \quad (22.19)$$

Как видно из п. 20.1, R -величины, кроме общековариантных и пространственных лоренцевых, могут содержать и временные лоренцевы индексы, не участвующие в преобразованиях R -подгруппы. Среди них особый интерес представляют те компоненты коэффициентов вращения Риччи, которые содержат индексы (0). Относительно R -подгруппы их трансформационные свойства упрощены: они R -тензоры (см. (15.26)). Приведем их к искомому виду. Введем криволинейные усеченные компоненты:

$$\Upsilon_{(0)\mu(0)} \equiv h_\mu^b \Upsilon_{(0)b(0)}, \quad \Upsilon_{(0)\mu\nu} \equiv h_\mu^a h_\nu^b \Upsilon_{(0)ab}. \quad (22.20)$$

Они удовлетворяют условию ортометричности. Так,

$$h^\mu_{(0)} \overset{\ast}{\Upsilon}_{(0)\mu(0)} = -\eta^{(0)b}_{(0)b(0)} = 0. \quad (22.21)$$

Ограничив рассмотрение задачами, не требующими преобразования хроно-монады $\epsilon_{(0)}$, можем (пока это ограничение не снято) отбросить у коэффициентов вращения Риччи и их усеченных криволинейных компонент индексы (0) (относительно которых эти коэффициенты не являются тензорами). Тогда

$$\begin{aligned} F_a &= \gamma_{(0)a(0)}, \quad \dot{F}_\mu = h_\mu^b F_b = h_\mu^b h^\lambda_{(0)} h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma h_{\lambda b} = \\ &= -h_\mu^b h_{\lambda b} h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma h^\lambda_{(0)} = -h_\mu^\lambda h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma h_{\lambda(0)} = \\ &= -(\delta_\mu^\lambda + h_{\mu(0)} h^\lambda_{(0)}) h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma h_{\lambda(0)} = \\ &= -h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma h_{\mu(0)} = b^\sigma \nabla_\sigma b_\mu \equiv \overset{0}{F}_\mu. \end{aligned} \quad (22.22)$$

Легко видеть, что $\overset{*}{D}_{\mu\nu}$ и $\overset{\bullet}{A}_{\mu\nu}$ могут быть приведены к виду, содержащему $\eta_{(0)a}$, т. е. что они ортометричны. Действительно,

$$\begin{aligned} D_{ab} &\equiv -\gamma_{(0)(ab)}; \quad \overset{\bullet}{D}_{\mu\nu} = h_\mu^a h_\nu^b D_{ab} = \\ &= -h_\mu^{(a} h_\nu^{b)} h^\lambda_{(0)} \nabla_\sigma h_{\lambda a} \cdot h^\sigma_b = \\ &= h_\mu^{(a} h_\nu^{b)} h_{\lambda a} h^\sigma_b \nabla_\sigma h^\lambda_{(0)} = h_\mu^\lambda h_\nu^\sigma \nabla_{(\sigma} b_{\lambda)} \equiv \overset{0}{D}_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (22.23)$$

$$A_{ab} \equiv \gamma_{(0)[ab]}; \quad \overset{\bullet}{A}_{\mu\nu} = h_\mu^a h_\nu^b A_{ab} = \overset{0}{A}_{\mu\nu}. \quad (22.24)$$

Ортометричность имеет место по каждому из индексов. Например,

$$h^{\mu(0)} \overset{\bullet}{D}_{\mu\nu} = \eta^{(0)a} h_\nu^b D_{ab} = 0, \quad h^{\nu(0)} \overset{*}{D}_{\mu\nu} = h_\mu^a \eta^{(0)b} D_{ab} = 0. \quad (22.25)$$

В работе [625] вводятся величины

$$d_{\mu\nu} \equiv \nabla_{(\mu} b_{\nu)}, \quad a_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} b_{\nu]} = \partial_{[\mu} b_{\nu]}. \quad (22.26)$$

Коль скоро $b_\mu \equiv h_{\mu(0)}$, то, очевидно, что это симметрированные и антисимметрированные полные (не усеченные) компоненты коэффициентов вращения Риччи вида $\gamma_{(0)\mu\nu}$. Соотношение

$$(d_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}) b^\mu = \gamma_{(0)\mu\nu} h^\mu_{(0)} = \gamma_{(0)(0)\nu} = 0 \quad (22.27)$$

является следствием антисимметрии коэффициентов вращения Риччи по двум индексам (не свертываемым с dx^ν при параллельном перенесении). Учет этой антисимметрии, в частности, приводит к соотношениям

$$F_\nu = -b^\mu (d_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}) = -h^\mu_{(0)} \gamma^{(0)}_{\nu\mu} = \gamma_{(0)\nu(0)}, \quad (22.28)$$

$$2b^\mu \gamma^{(0)}_{(\mu\nu)} = -2b^\mu \gamma^{(0)}_{[\mu\nu]} = -\gamma_{(0)\nu(0)}, \quad (22.29)$$

т. е. из них и формул (22.22) следует

$$F_\nu = -2h^\mu_{(0)} d_{\mu\nu} = -2h^\mu_{(0)} a_{\mu\nu} = \overset{0}{F}_\nu = \overset{\bullet}{F}_\nu = h_\nu^k \gamma_{(0)k(0)}. \quad (22.30)$$

Следующие свертки, введенные [625] по подобию формулировок х. и. и к. и.,

$$D_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma d_{\lambda\sigma}, \quad A_{\mu\nu} = \gamma_\mu^\lambda \gamma_\nu^\sigma a_{\lambda\sigma} \quad (22.31)$$

выделяют из полных, четырехмерных коэффициентов вращения Риччи их R -ковариантные части:

$$D_{\mu\nu} = h_\mu^a h_\nu^b h^\sigma \gamma_{(0)(\lambda\sigma)} = h_\mu^a h_\nu^b \gamma_{(0)(ab)} = \overset{\star}{\gamma}_{(0)(\mu\nu)};$$

$$A_{\mu\nu} = \overset{\star}{\gamma}_{(0)[\mu\nu]}. \quad (22.32)$$

Приведем еще несколько примеров совпадения ортометрических и соответственно R -скалярных, R -инвариантных, R -векторных выражений, входящих в общую часть работ [583, 625]:

$$ds = -b_\mu dx^\mu = -h_{\mu(0)} dx^\mu = h_\mu^{(0)} dx^\mu = dx^{(0)}, \quad (22.33)$$

$$dx^{\star\mu} \equiv h^\mu_a dx^a = dx^\mu - h^\mu_{(0)} ds = dx^\mu,$$

$$du^2 \equiv h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} dx^a dx^b = h_{\mu\nu} dx^{\star\mu} dx^{\star\nu} = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu;$$

$$dx_{\star\mu}^* = h_\mu^a dx_a = dx_{\mu}^0, \quad (22.34)$$

$$\overset{0}{\nu}^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{h^\lambda_a dx^a}{dx^{(0)}} = \frac{dx^{\star\lambda}}{dx^{(0)}} = \frac{h^\lambda_b dx^b}{ds} = \frac{h^\lambda_{(0)} dx^{(0)}}{ds} =$$

$$= \frac{dx^\lambda}{ds} - h^\lambda_{(0)}. \quad (22.35)$$

Аналогично, в частности, приходим к совпадению R -инвариантных и ортометрических дискриминантного метрического тензора и элемента объема 3-пространства:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} = h_\mu^\sigma h_\nu^\rho h_\lambda^\tau b^\kappa \delta_{\kappa\sigma\rho\tau} = h_\mu^a h_\nu^b h_\lambda^c \delta_{(0)abc},$$

$$dV = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dS^{\mu\nu\lambda} \equiv \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_1^\mu dx_2^\nu dx_3^\lambda = \delta_{(0)abc} dS^{[abc]}. \quad (22.36)$$

Таким образом, алгебраические разделы работ [625] и [583], по существу, являются общими. Различие лишь в том, что в статье [625] отсутствует информация о локальных индексах, в которой нет надобности, если рассмотрение ограничено одним (произвольно фиксированным) полем монады $h_{\mu(0)} \equiv b_\mu$.

22.3. Приведение R -ковариантных производных к виду, содержащему h_μ^λ и (или) $h_{\mu(0)}$. Подставляя выражение (22.4)

в уравнение (22.3), учитывая (15.20) и что Q_a —скаляр относительно координатных преобразований и производя замену $h_\mu^a = h_\mu^\varepsilon h_\varepsilon^a$, в случае производной от вектора находим

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\lambda \dot{Q}_\mu &= h_\mu^a h_\lambda^b \tilde{\nabla}_b Q_a = h_\lambda^\sigma h_\mu^a (\partial_\sigma Q_a - \gamma^b_{a\sigma} Q_b) = \\ &= h_\lambda^\sigma h_\mu^c \partial_\sigma Q_c + h_\lambda^\sigma h_\mu^\varepsilon Q_c \nabla_\sigma h_\varepsilon^c = h_\lambda^\sigma h_\mu^\varepsilon \nabla_\sigma \dot{Q}_\varepsilon \equiv \overset{0}{\nabla}_\lambda \overset{0}{Q}_\mu. \end{aligned} \quad (22.37)$$

Рассмотрим временную R -ковариантную производную от вектора

$$\tilde{\nabla}_t \dot{Q}_\mu \equiv h_\mu^c \tilde{\nabla}_{(0)} Q_c = h_\mu^a (\partial_{(0)} Q_a - \gamma^b_{a(0)} Q_b). \quad (22.38)$$

Поскольку $\gamma^a_{b\sigma} = -h^\varepsilon_b \nabla_\sigma h_\varepsilon^a$, аналогично находим

$$\tilde{\nabla}_t \dot{Q}_\mu = h_\mu^\varepsilon h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma (h_\varepsilon^c \dot{Q}_c) = h_\mu^\varepsilon h^\sigma_{(0)} \nabla_\sigma \dot{Q}_t \equiv \overset{0}{\nabla}_t \overset{0}{Q}_\mu. \quad (22.39)$$

Сворачивая выражение (22.15) с $h^\mu_a h^\nu_b$, а выражение (22.16) с h^μ_a , находим соответственно

$$\tilde{\nabla}_a Q^b = h_\mu^b h^\lambda_a \overset{0}{\nabla}_\lambda \overset{0}{Q}^\mu, \quad (22.40)$$

$$\tilde{\nabla}_{(0)} Q_a = h^\mu_a \overset{0}{\nabla}_t \overset{0}{Q}_\mu.$$

Следовательно,

$$\tilde{\nabla}_a Q^a = (\delta^\lambda_\mu - h_{\mu(0)}^\lambda h^\lambda_{(0)}) \overset{0}{\nabla}_\lambda \overset{0}{Q}^\mu = \overset{0}{\nabla}_\mu \overset{0}{Q}^\mu. \quad (22.41)$$

Таким образом, простые преобразования формы R -тензоров и R -ковариантных производных с помощью элементов тетрадного аппарата ОТО и отбрасывания лоренцева индекса (0) придают им «ортометрический вид», который в работе [625] определен независимо с помощью условия ортометричности.

22.4. Выделение ортометрической части R -инвариантных частных производных от R -тензоров. Применим производную

$\dot{\partial}_\mu \equiv h_\mu^a \partial_a$ к R -инвариантному вектору $\dot{A}_\lambda \equiv h_\lambda^a A_a = h_\lambda^\sigma A_\sigma = h_\lambda^\sigma A_\sigma$:

$$\begin{aligned} \dot{\partial}_\mu \dot{A}_\lambda &= h_\lambda^\sigma \dot{\partial}_\mu \dot{A}_\sigma + \dot{A}_\sigma \dot{\partial}_\mu h_\lambda^\sigma = h_\lambda^\sigma h_\mu^a h^\rho_a \partial_\rho \dot{A}_\sigma + \\ &+ \dot{A}_\sigma h_\mu^a h^\rho_a \partial_\rho h_\lambda^\sigma = h_\lambda^\sigma h_\mu^\rho \partial_\rho \dot{A}_\sigma + \dot{A}_\sigma h_\mu^\rho \partial_\rho h_\lambda^\sigma. \end{aligned} \quad (22.42)$$

Очевидно, что $h^\mu_{(0)} \dot{\partial}_\mu \dot{A}_\lambda = \eta_{(0)b} h^{\sigma b} \partial_\sigma \dot{A}_\lambda = 0$, тогда как

$$\begin{aligned} h^\lambda_{(0)} \dot{\partial}_\mu \dot{A}_\lambda &= h^\lambda_{(0)} h_{\lambda a} h^{\sigma a} h_\mu^\rho \partial_\rho \dot{A}_\sigma + h^\lambda_{(0)} (\partial_\rho h_\lambda^\sigma) \dot{A}_\sigma h_\mu^\rho = \\ &= \eta_{(0)a} h^{\sigma a} h_\mu^\rho \partial_\rho \dot{A}_\sigma + (h^\lambda_{(0)} \partial_\rho h_{\lambda a}) h^{\sigma a} \dot{A}_\sigma h_\mu^\rho \neq 0. \end{aligned} \quad (22.43)$$

Следовательно, только усеченная часть выражения $\overset{\circ}{\partial}_\mu \overset{\circ}{A}_\lambda$ — результата применения R -инвариантной производной к R -инвариантному вектору, а именно $h_\lambda^\sigma h_\mu^\rho \partial_\rho \overset{\circ}{A}_\sigma$, является величиной ортометрической. В целом же, как видно из (22.43), свертки

$h^\lambda_{(0)} \overset{\circ}{\partial}_\mu \overset{\circ}{A}_\lambda$ не приводится к виду, содержащему множитель $\eta_{(0)a}$.

В качестве еще одного примера рассмотрим выражение $\overset{\circ}{\partial}_\mu \overset{\circ}{g}_{\nu\lambda} \equiv \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\nu\lambda} = \overset{\circ}{\partial}_\mu (h_\nu^\varepsilon h_{\varepsilon\tau} h_\lambda^\tau)$, где усеченный метрический тензор 3-пространства $\overset{\circ}{g}_{\mu\nu}$ ортометричен, так как $h^\lambda_{(0)} h_\lambda^\tau = \eta_{(0)a} h_\lambda^a = 0$. Аналогично (22.43) находим

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\nu\lambda} &= h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} + h_{\varepsilon\tau} \overset{\circ}{\partial}_\mu (h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau) = \\ &= h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} + h_{\tau\nu} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_\lambda^\tau + h_{\varepsilon\lambda} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_\nu^\varepsilon = \\ &= h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau h_\mu^\rho \partial_\rho h_{\varepsilon\tau} + h_{\tau\nu} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_\lambda^\tau + h_{\varepsilon\lambda} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_\nu^\varepsilon. \end{aligned} \quad (22.44)$$

Легко видеть, что первый член справа в (22.44) ортометричен благодаря входящим в него h_ν^ε и h_λ^τ :

$$h^\nu_{(0)} h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} = \eta_{(0)a} h^{\varepsilon a} h_\lambda^\tau \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} = 0, \quad (22.45)$$

$$h^\lambda_{(0)} h_\nu^\varepsilon h_\lambda^\tau \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} = \eta_{(0)a} h_\nu^\varepsilon \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\varepsilon\tau} = 0,$$

тогда как два последних члена в уравнении (22.44) не являются ортометричными соответственно по индексам λ и ν . Действительно, например,

$$h^\lambda_{(0)} h_{\tau\nu} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_\lambda^\tau = \eta_{(0)a} h_{\tau\nu} \overset{\circ}{\partial}_\mu h^{\tau a} + \eta^{ab} h^\lambda_{(0)} h_{\nu b} \overset{\circ}{\partial}_\mu h_{\lambda a} \neq 0. \quad (22.46)$$

В частности, применительно к скаляру

$$\overset{\circ}{\partial}_\mu Q = \overset{0}{\partial}_\mu Q, \quad \overset{\circ}{\partial}_i Q = \overset{0}{\partial}_i Q. \quad (22.47)$$

Нетрудно прийти к общему выводу, что в случае R -инвариантного (по всем индексам) тензора $\overset{\circ}{Q}_{\mu\dots\nu\dots}$ любого ранга R -инвариантную от него производную можно представить в виде

$$\overset{\circ}{\partial}_\lambda \overset{\circ}{Q}_{\mu\dots\nu\dots} = h_\mu^\varepsilon \dots h_\nu^\tau \dots h_\lambda^\rho \partial_\rho \overset{\circ}{Q}_{\varepsilon\dots\tau\dots} + A_{\lambda\mu\dots\nu\dots}, \quad (22.48)$$

где через $A_{\lambda\mu\dots\nu\dots}$ обозначена та часть производной от $\overset{\circ}{Q}_{\mu\dots\nu\dots}$, которая в свертке с $h^\mu_{(0)} \dots h_{\nu(0)} \dots$ не приводится к виду, содержащему $\eta_{(0)a}$. Для первого члена (22.47) в обозначениях работы [625] имеем

$$h_{\mu}^{\varepsilon} \dots h^{\nu}_{\tau} \dots h_{\lambda}^{\rho} \partial_{\rho} \dot{Q}_{\varepsilon} \dots \tau \dots \equiv \overset{0}{\partial}_{\lambda} \overset{0}{Q}_{\mu} \dots \nu \dots = h_{\mu}^{\varepsilon} \dots h^{\nu}_{\tau} \dots \partial_{\lambda} \dot{Q}_{\varepsilon} \dots \tau \dots \quad (22.49)$$

В частности, в этих обозначениях соотношения (22.42) и (22.44) принимают соответственно вид:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\partial}_{\mu} \overset{*}{A}_{\lambda} &= \overset{0}{\partial}_{\mu} \overset{0}{A}_{\lambda} + \overset{*}{A}_{\sigma} \overset{*}{\partial}_{\mu} h_{\lambda}^{\sigma}, \\ \overset{*}{\partial}_{\mu} h_{\nu\lambda} &= \overset{0}{\partial}_{\mu} h_{\nu\lambda} + h_{\tau\nu} \overset{*}{\partial}_{\mu} h_{\lambda}^{\tau} + h_{\varepsilon\lambda} \overset{*}{\partial}_{\mu} h_{\nu}^{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (22.50)$$

Таким образом, частная ортометрическая производная от R -величины — ортометрическая часть от частной R -инвариантной ее производной. Следовательно, R -инвариантные и ортометрические частные производные не совпадают и могут быть связаны друг с другом или мультипликативно, как в уравнении (22.49), или аддитивно, как в уравнении (22.50). Изложенное показывает, что следует различать два вида координатных индексов, связанных с индексами, локальными соответственно полной перелицовке (анаметрические индексы) и частичной перелицовке (ортометрические индексы). Поскольку в работе [625] сведения о локальных индексах не учитываются, для внесения этого различия потребовались специальная терминология и разделение величин на ана- и ортометрические.

22.5. Преобразование R -ковариантной формы основных уравнений ОТО в ортометрическую. Согласно выражениям (22.23), (22.24), (22.41) и соотношениям типа (22.9), имеем

$$D_{ab} u^{ab} = \overset{*}{D}_{\mu\nu} \overset{*}{u}^{\mu\nu} = \overset{0}{D}_{\mu\nu} u^{\mu\nu}, \quad (22.51)$$

$$F_a J^a = h^{\mu}_{\alpha} h_{\lambda}^{\alpha} \overset{*}{F}_{\mu} \overset{*}{J}^{\lambda} = \overset{0}{F}_{\lambda} \overset{0}{J}^{\lambda}; \quad \tilde{\nabla}_a J^a = \overset{0}{\nabla}_{\mu} \overset{0}{J}^{\mu}.$$

Из (22.40) соответственно следует:

$$\tilde{\nabla}_{(0)} J^a = h_{\mu}^{\alpha} \overset{0}{\nabla}_{\nu} \overset{0}{J}^{\mu}, \quad \tilde{\nabla}_b u^{bc} = h_{\mu}^{\alpha} \overset{0}{\nabla}_{\lambda} u^{\lambda\mu}. \quad (22.52)$$

Аналогично уравнению (22.51), пользуясь соотношениями (22.19) и (22.24), находим

$$A_a{}^b J^a = h^{\nu}_{\alpha} h_{\mu}^{\alpha} \overset{*}{A}_{\nu} \overset{*}{J}^{\mu} h_{\lambda}^{\alpha} \overset{*}{J}^{\lambda} = h_{\mu}^{\alpha} \overset{0}{A}_{\lambda} \overset{0}{J}^{\mu} \overset{0}{J}^{\lambda}, \quad (22.53)$$

$$F_a u^{ab} = h_{\mu}^{\alpha} \overset{0}{F}_{\lambda} u^{\lambda\mu}, \quad J^b = h_{\mu}^{\alpha} \overset{0}{J}^{\mu}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (20.36), приходим к ортометрической форме закона сохранения ОТО, найденной А. Л. Зельмановым [625]:

$$\partial_{(0)} \rho + \rho D + \overset{0}{D}_{\mu\nu} u^{\mu\nu} + \overset{0}{\nabla}_{\mu} \overset{0}{J}^{\mu} - 2 \overset{0}{F}_{\lambda} \overset{0}{J}^{\lambda} = 0,$$

$$h_{\mu}^a [\nabla_t^0 J^{\mu} + (A_{\lambda}^{\mu} + D_{\lambda}^{\mu}) J^{\lambda} + D J^{\mu} + \nabla_{\lambda}^0 u^{\lambda\mu} - F_{\lambda}^0 u^{\lambda\mu} - \rho F^{\mu}] = 0. \quad (22.54)$$

В силу произвольности h_{μ}^a

$$\nabla_t^0 J^{\mu} + (A_{\lambda}^{\mu} + D_{\lambda}^{\mu}) J^{\lambda} + D J^{\mu} + (\nabla_{\lambda}^0 - F_{\lambda}^0) u^{\lambda\mu} - \rho F^{\mu} = 0, \quad (22.55)$$

если учесть равенства (22.47) и

$$\partial_t^0 J^{\mu} + (D_{\lambda}^{\mu} + A_{\lambda}^{\mu}) J^{\lambda} \equiv \nabla_t^0 J^{\mu}. \quad (22.56)$$

Следовательно, ортометрическую форму законов сохранения можно получить из R -ковариантной формы (20.36) переходом к криволинейной системе координат и заменой $*$ — индекса R -ковариантности на 0 — индекс ортометричности.

Перелицуем последнее из системы (20.37) эйнштейновых уравнений тяготения в R -ковариантной форме. Воспользовавшись соотношениями (22.47) и (22.50), получим

$$\partial_t^0 D + \nabla_{\mu}^0 F^{\mu} - F_{\mu}^0 F^{\mu} + D^{\mu\nu} D_{\mu\nu} - A^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2}(\rho + u). \quad (22.57)$$

Перелицовка второго из уравнений (20.37) с учетом произвольности h_{μ}^k приводит к его ортометрической форме

$$\nabla_{\varepsilon}^0 (h^{\mu\varepsilon} D) - \nabla_{\lambda}^0 (D^{\mu\lambda} + A^{\mu\lambda}) + 2F_{\lambda}^0 A^{\mu\lambda} = \kappa J^{\mu}. \quad (22.58)$$

Аналогично, но более громоздко производится перевод в ортометрическую форму первого из уравнений (20.37). При этом следует учесть, что между $\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ и $H_{\mu\nu\lambda\sigma}$, используемым в работе [625], имеет место связь (см. (21.79))

$$\tilde{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} = -H_{\mu\nu\lambda\sigma} - 2A_{\lambda\sigma}(D_{\nu\mu} + A_{\nu\mu}), \quad (22.59)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = DA_{\mu\nu} + 2A_{\varepsilon[\mu} D^{\varepsilon}_{\nu]} + 2A_{\mu}^{\varepsilon} A_{\nu\varepsilon} - C_{\mu\nu}, \quad (22.60)$$

где $C_{\mu\nu}$ — ортометрический аналог тензора Риччи [625].

Перевод уравнений движения (20.29) в ортометрическую форму требует разбиения на части трехмерных компонент $\gamma^a{}_{bc}$ коэффициентов вращения Риччи:

$$\begin{aligned} \gamma^a{}_{bc} &= h_{\lambda}^a h_{\mu}^b h_{\nu}^c \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + h_{\sigma}^a \partial_c h^{\sigma}_b = \\ &= h_{\rho}^a h^{\tau}_b h^{\varepsilon}_c h_{\lambda}^{\rho} h_{\mu}^{\tau} h_{\nu}^{\varepsilon} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - h^{\sigma}_b h_{\nu}^c \overset{*}{\partial}_c h^{\sigma}_a = \\ &= h_{\rho}^a h^{\tau}_b h^{\varepsilon}_c \overset{0}{\Delta}^{\rho}_{\tau\varepsilon} - h^{\sigma}_b h_{\nu}^c \overset{*}{\partial}_\nu h^{\sigma}_a, \end{aligned} \quad (22.61)$$

где коэффициент $\overset{0}{\Delta}^{\rho}_{\tau\varepsilon} \equiv h_{\lambda}^{\rho} h_{\mu}^{\tau} h_{\nu}^{\varepsilon} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ ортометричен. Очевидно,

$$\ddot{x}^a = h_{\mu}^a \frac{d\dot{x}^{\mu}}{dx^{(0)}} + \dot{x}^{\mu} \frac{d}{dx^{(0)}} h_{\mu}^a,$$

$$\dot{x}^a \dot{\partial}_v = \dot{x}^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{d}{dx^{(0)}}, \quad \dot{x}^{\lambda} \equiv v^{\lambda} = \dot{v}^{\lambda}, \quad \frac{d}{dx^{(0)}} \equiv \frac{d}{dt}.$$

Учет всех этих соотношений приводит (20.29) сначала к виду

$$\frac{d\dot{x}^{\mu}}{dx^{(0)}} + \Delta^{\mu}_{\lambda\nu} \dot{x}^{\lambda} \dot{x}^{\nu} - \dot{F}^{\mu} + 2\dot{x}^{\lambda} (\dot{D}_{\lambda}^{\mu} + \dot{A}_{\lambda}^{\mu}) = 0, \quad (22.62)$$

а после переобозначений — к уравнениям движения в ортометрической форме [625].

В работе [560] обсуждены также связь между R -ковариантной и ортометрической формами уравнений Максвелла в ОТО, а также вопрос о преобразовании ортометрических величин посредством локальных преобразований Лоренца, меняющих поле хроно-монады.

Таким образом, оригинальным и специфическим элементом ортометрической формулировки ОТО по сравнению с R -ковариантной является введение частной ортометрической производной. Оно ставит ее в зависимость от характера величин, к которым эта производная применяется, и приводит к перопределению связности (по сравнению с коэффициентами вращения Риччи). Этим достигается как общая ковариантность, так и некоторое сходство с построениями формулировок ОТО х. и. и к. и. В силу общей ковариантности выделение подгрупп координатных преобразований прекращается. Приведенное в данном параграфе сопоставление обнаруживает, однако, неясную связь ортометрической формулировки с R -подгруппой и этим указывает место ортометрической формулировки в ряду других специальных формулировок ОТО. Наконец, заметим, что ортометрические величины, как и «наблюдаемые» в х. и. и к. и. формулировках, не являются естественно измеряемыми в смысле Эйнштейна.

§ 23. СОПОСТАВЛЕНИЕ R -КОВАРИАНТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОТО С ФОРМУЛИРОВКОЙ ШМУТЦЕРА

23.1. Характерные требования формулировки Шмутцера. В работах [626—628] предлагается специальная формулировка ОТО, в которой «пространство—время ... разложено на физическое пространство и физическое время таким образом, чтобы новые пространственные и временные величины ... в отношении своих трансформационных свойств вели себя (в рамках данной системы отсчета) независимо, т. е. чтобы при пре-

образованиях пространственные величины выражались через свои компоненты, а временные через свои, соответственно имеющимся у них индексам» [627, с. 236]. Наиболее оригинальным пунктом формулировки Шмутцера является распространение такого требования на ковариантные производные: «В проективной ковариантной производной пространственных (временных) компонент должны фигурировать лишь пространственные (временные) же компоненты» [627, с. 238]. Это достигается переходом от голономного базиса e_μ к неголономному $e_{\bar{\mu}}$ посредством преобразований *) (см. (20.58)):

$$A_{\bar{\mu}}^{\nu} = \left(\begin{array}{c|c} A_0^0 = 1 & A_0^\alpha = 0 \\ \hline A_\alpha^0 = -g_{\alpha 0}/g_{00} & A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta \end{array} \right), \quad (23.1)$$

$$A^{\bar{\mu}}_\nu = \left(\begin{array}{c|c} 1 & g_{\alpha 0}/g_{00} \\ \hline 0 & \delta_\alpha^\beta \end{array} \right)$$

и введением специальной связности $\left\{ \begin{array}{c} \bar{\lambda} \\ \mu\nu \end{array} \right\} \equiv \bar{\Gamma}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}} \equiv \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$, для которой постулированы условия

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\mu}^0 = 0, \quad \bar{\Gamma}_{0\mu}^\alpha = 0, \quad (23.2)$$

тогда как остальные коэффициенты отличны от нуля и могут быть выражены через символы Кристоффеля. Преобразования (23.1) по форме сходны с подгруппой хронометрических преобразований $x^{0'} = x^0 + x^\lambda$, $x^{\alpha'} = x^\alpha$, сохраняющих систему отсчета, которые обычно предполагаются голономными. В отличие от них преобразование (23.1) неголономно.

Таким образом, Шмутцером одновременно вводится «две геометрии» — основная на базе e_μ со связностью $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ (символы Кристоффеля) и специальная — на базе $e_{\bar{\mu}}$ со связностью $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$. Введение «второй геометрии» со специальной связностью $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ (в силу (23.2) не симметричной по нижним индексам) естественно не нарушает римановости основной геометрии расщепляемого 4-пространства ОТО. Соотношения между $\left\{ \begin{array}{c} \bar{\lambda} \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ и символами Кристоффеля, согласно работам [626 — 628], имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha} \\ \beta\gamma \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\gamma \end{array} \right\} - \frac{g_{0\gamma}}{g_{00}} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\beta \end{array} \right\} + \frac{g_{0\beta}}{(g_{00})^2} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\},$$

*) Примем в этом параграфе иные, чем в работах [626—628], обозначения. Черта над индексом выражает неголономность. Если величина содержит более одного индекса с чертой, будем, упрощая обозначения, снимать черточки над индексами, заменяя их чертой над коренной буквой.

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{0} \\ 0\beta \end{array} \right\} = \frac{1}{g_{00}} \left[\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0\beta, 0 \end{array} \right\} - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 00, 0 \end{array} \right\} \right], \quad \left\{ \begin{array}{c} \bar{0} \\ \beta 0 \end{array} \right\} = 0, \quad (23.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha} \\ \beta 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta 0 \end{array} \right\} - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 00 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0\beta \end{array} \right\} = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 00 \end{array} \right\} = \frac{1}{g_{00}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 00, 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \bar{\alpha} \\ 00 \end{array} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{array}{c} \bar{0} \\ \alpha\beta \end{array} \right\} = 0.$$

Не будем выписывать другие соотношения аппарата формулировки Шмутцера. Они подробно рассмотрены им [628]. Найдем путь к этой формулировке, оставаясь в рамках тетрадного представления ОТО и производя в нем соответствующие перегруппировки и переопределения, как это сделано в работах [584, 585].

23.2. Переход к формулировке Шмутцера от R -ковариантного представления ОТО. Из (20.58), (20.59) видно, что преобразования (23.1) принадлежат множеству преобразований с R -инвариантными коэффициентами. Применяя (23.1) к тетрадам (20.56) и (20.57), получим

$$h_{\mu}^{-k} \equiv A_{\mu}^{-\nu} (h_{\nu}^k)_{h_0^a=0} = \left(\frac{h_{\bar{0}}^{-(0)} = \sqrt{g_{00}}}{h_{\bar{\alpha}}^{-(0)} = 0} \left| \frac{h_{\bar{0}}^a = 0}{h_{\bar{\alpha}}^b = h_{\alpha}^b} \right. \right), \quad (23.4)$$

$$h_{\bar{k}}^{\mu} = A_{\bar{\nu}}^{\mu} (h_{\bar{\nu}}^k)_{h_0^a=0} = \left(\frac{h_{\bar{0}}^{\bar{0}(0)} = 1/\sqrt{g_{00}}}{h_{\bar{\alpha}}^{\bar{0}(0)} = 0} \left| \frac{h_{\bar{0}}^{\bar{a}} = 0}{h_{\bar{\alpha}}^{\bar{b}} = h_{\alpha}^{\bar{b}}} \right. \right).$$

С помощью этих тетрад введем специальные компоненты тензоров, а также специальную частную производную, отправляясь от их лоренцевых компонент:

$$\bar{T}^{\mu \dots \nu \dots} \equiv h^{\bar{\mu}}_{\bar{m}} \dots h_{\bar{\nu}}^n \dots T^{m \dots n \dots}, \quad (23.5)$$

$$\partial_{\bar{\mu}} \equiv h_{\bar{\mu}}^{-n} \partial_n, \quad \partial_n = h^{\bar{\mu}}_{\bar{n}} \partial_{\bar{\mu}}.$$

Введем аналогичным образом специальную ковариантную производную, но отправляясь от R -ковариантной производной (20.17), (20.18) по лоренцевым индексам. Введем по определению специальную связность $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}}^{\bar{\lambda}}$ так, чтобы *)

$$\bar{\nabla}_{\bar{\mu}} \bar{T}^{\bar{\nu}} = \partial_{\bar{\mu}} \bar{T}^{\bar{\nu}} + \bar{\Gamma}_{\lambda\bar{\mu}}^{\bar{\nu}} \bar{T}^{\bar{\lambda}} \equiv h_{\bar{\mu}}^{-k} h_{\bar{n}}^{\bar{\nu}} \tilde{\nabla}_{\bar{k}} T^{\bar{n}}. \quad (23.6)$$

*) В обозначениях Шмутцера $\partial_{\bar{\mu}} \theta = \theta_{L\bar{\mu}}$, $\nabla_{\bar{\mu}} \bar{T}^{\bar{\nu}} = \bar{\nabla}_{\bar{\mu}} \bar{T}^{\bar{\nu}} = \bar{T}_{L\bar{\mu}}^{\bar{\nu}}$.

При принятых h_{μ}^{-k} в равной мере можно исходить и из отдельно введенных соотношений

$$\nabla_{\mu}^{-} T^{\bar{0}} \equiv h_{\mu}^{- (0)} h^{\bar{0}}_{(0)} \tilde{\nabla}_{(0)} T^{(0)}, \quad \nabla_{\mu}^{-} T^{\bar{\alpha}} = h_{\mu}^{- a} h^{\bar{\alpha}}_{\bar{b}} \tilde{\nabla}_{\bar{a}} T^{\bar{b}}.$$

Подставляя компоненты (23.4) в (23.5), легко убедиться, что специальные компоненты тензоров в этом случае совпадают со введенными Шмутцером, например,

$$\begin{aligned} g_{\bar{0}\bar{0}} &\equiv \bar{g}_{00} = h_0^k h_0^n \eta_{kn} = g_{00}, & \bar{g}^{00} &= g^{00}, & \bar{g}_{0\alpha} &= \bar{g}^{0\alpha} = 0, \\ g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{\alpha 0} g_{\beta 0} / g_{00}, & \bar{g}^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (23.7)$$

Отметим также следующие соотношения, имеющие место в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} T^{\bar{0}} &\equiv \bar{T}^0 = h^{\bar{0}}_{\bar{k}} T^{\bar{k}} = h^0_{(0)} T^{(0)}, & T^{(0)} &= \bar{T}^0 / h^0_{(0)}, & T_{\bar{0}} &= h_0^{(0)} T_{(0)}, \\ T_{(0)} &= T_{\bar{0}} / h_0^{(0)}, & \partial_{\bar{0}} &= h_0^{(0)} \partial_{(0)}, & \partial_{(0)} &= h^0_{(0)} \partial_{\bar{0}}, & T^{\bar{m}} &= h^{\bar{m}}_{\bar{a}} T^{\bar{a}}, \\ T^{\bar{a}} &= h_{\bar{\alpha}}^{- a} T^{\bar{\alpha}}, & T_{\bar{\beta}} &= h_{\bar{\beta}}^{- a} T_a, & T_{\bar{b}} &= h^{\bar{a}}_{\bar{b}} T_{\bar{a}}, \\ \partial_{\bar{\alpha}} &= h_{\bar{\alpha}}^{- a} \partial_a, & \partial_{\bar{a}} &= h^{\bar{\alpha}}_{\bar{a}} \partial_{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \quad (23.8)$$

Такого рода надчеркнутые величины названы в работе [626, § 2] «физическими компонентами». В курсе [25, с. 253] сделано предостерегающее примечание, что их не следует путать со «стандартными 4-тензорами» в смысле Мёллера (см. п. 21.4).

Соотношения (23.5), (23.6) с помощью тетрад (23.4) обеспечивают раздельную перелицовку хоро- и хроно-величин. Действительно, они приводят к таким специальным мировым компонентам тензоров и частной производной, что временные специальные компоненты выражаются только через временные локальные компоненты, а специальные пространственные — только через локальные пространственные. В качестве коэффициентов разложения выступают полностью временные или полностью пространственные компоненты исходных тетрад.

Используя соотношения (23.8) и подставляя компоненты (23.4) в уравнения (23.6), находим

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^0 = \left(\begin{array}{l|l} \bar{\Gamma}_{00}^0 = h^0_{(0)} \partial_{\bar{0}} h_0^{(0)} & \bar{\Gamma}_{0\alpha}^0 = h^0_{(0)} \partial_{\bar{\alpha}} h_0^{(0)} \\ \bar{\Gamma}_{\alpha 0}^0 = 0 & \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 = 0 \end{array} \right), \quad (23.9)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\Gamma}_{00}^{\alpha} = 0 & \bar{\Gamma}_{0\beta}^{\alpha} = 0 \\ \hline \bar{\Gamma}_{\beta 0}^{\alpha} = h^{\alpha}_{\ a} h_{\beta}{}^b h_{0(0)} \gamma^a_{\ b(0)} + & \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = h^{\alpha}_{\ a} h_{\beta}{}^b h_{\gamma}{}^c \gamma^a_{\ bc} + \\ + h^{\alpha}_{\ a} \partial_{\bar{0}} h_{\beta}{}^a & + h^{\alpha}_{\ b} \partial_{\bar{\gamma}} h_{\beta}{}^b \end{array} \right).$$

Используя закон преобразования

$$\gamma^k{}_{mn} = h^{\lambda k} h^{\mu}{}_{\ m} h^{\nu}{}_{\ n} \Gamma^{\lambda}_{\ \mu\nu} + h^{\sigma k} \partial_{\bar{n}} h^{\sigma}{}_{\ m}$$

и переходя, согласно соотношениям (23.8), от $\partial_{\bar{\mu}}$ к ∂_{μ} , приведем коэффициенты (23.9) к виду

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^0 = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\Gamma}_{00}^0 = \frac{1}{g_{00}} \Gamma_{0,00} & \bar{\Gamma}_{0\alpha}^0 = \frac{1}{g_{00}} \left(\Gamma_{0,\alpha 0} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \Gamma_{0,00} \right) \\ \hline \bar{\Gamma}_{\alpha 0}^0 = 0 & \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 = 0 \end{array} \right), \quad (23.10)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} \bar{\Gamma}_{00}^{\alpha} = 0 & \bar{\Gamma}_{0\beta}^{\alpha} = 0 \\ \hline \bar{\Gamma}_{\beta 0}^{\alpha} = \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} - \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}} \Gamma_{00}^{\alpha} & \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{g_{\beta 0}}{\sqrt{g_{00}}} \Gamma_{0\gamma}^{\alpha} - \\ - \frac{g_{\gamma 0}}{\sqrt{g_{00}}} \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} + \frac{1}{g_{00}} g_{\beta 0} g_{\gamma 0} \Gamma_{00}^{\alpha} \end{array} \right).$$

При такой связности, очевидно,

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{\lambda}} T^{\bar{0}} &= \partial_{\bar{\lambda}} T^{\bar{0}} + \bar{\Gamma}_{0\lambda}^0 T^{\bar{0}}; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\lambda}^0 = 0, \\ \nabla_{\bar{\lambda}} T^{\bar{\alpha}} &= \partial_{\bar{\lambda}} T^{\bar{\alpha}} + \bar{\Gamma}_{\beta\lambda}^{\alpha} T^{\bar{\beta}}; \quad \bar{\Gamma}_{0\lambda}^{\alpha} = 0, \end{aligned} \quad (23.11)$$

т. е. достигается разделение временных и пространственных компонент. Равенства нулю компонент $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$, входящих в уравнения (23.11), в отличие от работ [626—628] не постулируются отдельно, а являются следствиями принятого общего определения (23.6) при специальных тетрадах (23.4).

Вторую, переопределенную связность можно ввести не только перелицовкой (23.6) R -ковариантной производной, но и непосредственно перелицовкой коэффициентов вращения Риччи, однако при добавочном условии, что к перелицовке допускаются только не R -тензорные их компоненты:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = h^{\lambda}{}_{\ k} h_{\mu}{}^{-m} h_{\nu}{}^{-n} (\gamma^k{}_{mn})_{\text{не } R\text{-тенз.}} + h^{\lambda}{}_{\ k} \partial_{\bar{\nu}} h_{\mu}{}^{-k}. \quad (23.12)$$

Поскольку в суммировании R -тензорные компоненты, т. е. $\gamma^{(0)}{}_{\alpha(0)}$, $\gamma^{(0)}{}_{ab}$, не участвуют, из уравнений (23.12) и (23.4) также

приходим к (23.9). Из определений (20.17), (20.18) ясно, что и переопределение связности посредством (23.6) содержит то же самое дополнительное условие.

Коэффициенты связности (23.10) «второй геометрии», а также производные (23.11) совпадают с таковыми в аппарате Шмутцера. Из матриц (23.10) видно, что эта геометрия обладает кручением. Отличны от нуля следующие компоненты:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{0\alpha}^0 &= \bar{\Gamma}_{[0\alpha]}^0 + \Omega_{0\alpha}^0 = \frac{1}{2g_{00}} \left(\Gamma_{0,\alpha 0} - \frac{g_{\alpha 0}}{g_{00}} \Gamma_{0,00} \right), \\ \bar{S}_{0\beta}^\alpha &= \bar{\Gamma}_{[0\beta]}^\alpha + \Omega_{0\beta}^\alpha = -\frac{1}{2} \left(\Gamma_{\beta 0}^\alpha - \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}} \Gamma_{00}^\alpha \right), \\ \bar{S}_{\alpha\beta}^0 &= \bar{\Gamma}_{[\alpha\beta]}^0 + \Omega_{\alpha\beta}^0 = \Omega_{\alpha\beta}^0, \quad \bar{S}_{\beta\gamma}^\alpha = 0.\end{aligned}\quad (23.13)$$

Применяя компоненты (23.4) к преобразованию символов Кристоффеля, получаем

$$\bar{\Gamma}_{00}^\alpha = \Gamma_{00}^\alpha, \quad \bar{\Gamma}_{0\beta}^\alpha = \Gamma_{0\beta}^\alpha - \frac{g_{\beta 0}}{g_{00}} \Gamma_{00}^\alpha; \quad \bar{\Gamma}_{\alpha 0}^0 \neq 0, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 \neq 0,$$

а остальные компоненты $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ совпадают с теми компонентами $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ в матрицах (23.10), которые отличны от нуля. Поэтому $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda$ не обеспечивают независимого дифференцирования пространственных и временных компонент.

Перейдем к переформулировке основных уравнений ОТО исходя из их R -ковариантной записи. Для этого произведем в уравнениях (20.35) переход к неголономному базису (20.44), (20.45). Учитывая соотношения (23.8), (23.11) и тетрады (23.4), находим

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{\bar{\mu}} p_a &= h_{\bar{a}}^{\bar{\alpha}} \tilde{\nabla}_{\bar{\mu}} p_{\bar{\alpha}}, \quad F_{\bar{\alpha}} = h_{\bar{a}}^{\bar{\alpha}} F_{\bar{b}}; \quad D_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = h_{\bar{a}}^{\bar{\alpha}} h_{\bar{b}}^{\bar{\beta}} D_{ab}, \\ A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= h_{\bar{a}}^{\bar{\alpha}} h_{\bar{b}}^{\bar{\beta}} A_{ab}, \quad p^{\bar{\alpha}} = m_0 \frac{dx^{\bar{\alpha}}}{ds}.\end{aligned}\quad (23.14)$$

Эти соотношения позволяют записать уравнения (20.35) в виде

$$\frac{\bar{D}p_{\bar{\alpha}}}{ds} - \frac{m^2}{m_0} F_{\bar{\alpha}} - \frac{m}{m_0} (A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - D_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) p^{\bar{\beta}} = 0, \quad \tilde{\nabla}_{(\circ)} = \frac{\bar{D}}{ds} \frac{ds}{dx^{(\circ)}}.\quad (23.15)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned}F_{\bar{\alpha}} &= h_{\bar{a}}^{\bar{\alpha}} \gamma_{(0)a}^{\alpha} = (h^0_{(0)})^2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ 0 \ 0 \end{Bmatrix}, \\ (A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} - D_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) p^{\bar{\beta}} &= \gamma_{(0)ab} h^{\alpha a} h_{\bar{b}}^{\bar{\beta}} p^{\bar{\beta}} =\end{aligned}$$

$$= \bar{\rho}^{\beta} \left[h^0_{(0)} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \beta \end{matrix} \right\} + \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 0 \end{matrix} \right\} \right]. \quad (23.16)$$

Подставляя выражения (23.16) в уравнения геодезической (23.15), приведем их к виду

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D} p^{\bar{\alpha}}}{ds} + \frac{m}{m_0} \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \gamma \end{matrix} \right\} - \frac{g_{0\gamma}}{g_{00}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 0 \end{matrix} \right\} \right] h^0_{(0)} p^{\bar{\gamma}} + \\ + \frac{m^2}{m_0} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 0 \end{matrix} \right\} (h^0_{(0)})^2 = 0, \end{aligned} \quad (23.17)$$

или окончательно

$$\begin{aligned} m_0 \frac{dx^{\mu} -}{ds} \nabla_{\bar{\mu}} \frac{dx^{\bar{\alpha}}}{ds} = \frac{d^2 x^{\bar{\alpha}}}{ds^2} + m_0 \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 \beta \end{matrix} \right\} - \frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 0 \end{matrix} \right\} \right] \times \\ \times \frac{dx^{\bar{\beta}}}{ds} \frac{dx^{\bar{0}}}{ds} + m_0 \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ 0 0 \end{matrix} \right\} \left(\frac{dx^{\bar{0}}}{ds} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (23.18)$$

Преобразуя аналогичным образом законы сохранения в R -ковариантной форме и R -ковариантные эйнштейновы уравнения тяготения, соответственно получаем:

$$\frac{m_0}{m} \frac{1}{\bar{E}} \frac{d\bar{E}}{ds} + \frac{m_0}{m} \bar{E} (\partial_{\bar{\mu}} \ln \sqrt{g_{00}}) p^{\bar{\mu}} = (F_{\bar{\alpha}} - D_{\bar{\gamma}} p^{\bar{\gamma}}) v^{\bar{\alpha}}, \quad (23.19)$$

$$v^{\bar{\alpha}} = h^{\bar{\alpha}}_{\ a} v^a, \quad v^a = dx^a/dx^{(0)}, \quad E \equiv p^{(0)} = h_0^{(0)} p^{\bar{0}}, \quad p^{\bar{0}} \equiv \bar{E},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{g_{00}} \partial_{\bar{0}} \bar{\rho} + \bar{\rho} \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{g_{00}}} \partial_{\bar{0}} g_{00} + \bar{\rho} D + D_{\bar{\alpha}} p^{\bar{\alpha}} + \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} J^{\bar{\beta}} - \\ - 2F_{\bar{\alpha}} J^{\bar{\alpha}} = 0, \quad \bar{\rho} \equiv T^{(0)(0)}, \quad \bar{\rho} = \rho/g_{00}, \quad J^a \equiv T^{a(0)}, \end{aligned} \quad (23.20)$$

$$u^{ab} \equiv T^{ab},$$

$$\partial_{\bar{\alpha}} D + \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} (A^{\bar{\beta}}_{\ \bar{\alpha}} - D^{\bar{\beta}}_{\ \bar{\alpha}}) + 2F^{\bar{\beta}} A_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} = -\kappa J_{\bar{\alpha}}, \quad (23.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\alpha\beta} + (\bar{A}_{\alpha\beta} - \bar{D}_{\alpha\beta}) \frac{D}{\sqrt{g_{00}}} + \bar{\nabla}_{\bar{0}} (\bar{A}_{\alpha\beta} - \bar{D}_{\alpha\beta}) + \\ + \bar{\nabla}_{\bar{\beta}} \bar{F}_{\alpha} - \bar{\nabla}_{\alpha} \bar{F}_{\beta} = -\kappa \left[\bar{u}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\alpha\beta} (\bar{u} - \bar{\rho}) \right], \end{aligned} \quad (23.22)$$

$$\bar{u} = \bar{u}^{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha\beta}; \quad \bar{R}_{\alpha\beta} = h_{\bar{\alpha}}^a h_{\bar{\beta}}^b R_{ab}; \quad \bar{R}_{ab} \equiv \bar{R}^c_{\ acb}.$$

Сказанного достаточно, чтобы присоединиться к следующему выводу [584, 585]: специальная формулировка Шмута-

цера эйнштейновой ОТО, достигшая при введении второй связности независимых связей и операций для пространственных и для временных величин, эквивалентна случаю тетрадной формулировки ОТО при специальных тетрадах (23.3) и специальной связности (23.10), введенных на основе локальной лоренцевой подгруппы пространственных вращений.

23.3. Расширение формулировки Шмутцера. Рассмотрим второй частный случай преобразований (20.48), а именно неголономные кинеметрические преобразования (20.62) и (20.63), и аналогично п. 23.2 построим соответствующий аппарат, включающий второй вариант специальной (второй) связности с кручением. Применив эти преобразования к тетрадам (20.61) и (20.62), найдем [585]:

$$h_{\alpha}{}^k \equiv B_{\alpha}{}^{\beta} (h_{\beta}{}^k)_{h_{\alpha}{}^{(0)}=0} = \left(\frac{h_{\bar{0}}{}^{(0)} = 1/\sqrt{g^{00}} \quad h_{\bar{0}}{}^a = 0}{h_{\bar{\alpha}}{}^{(0)} = 0 \quad | \quad h_{\bar{\alpha}}{}^b = h_{\alpha}{}^b} \right), \quad (23.23)$$

$$h^{\bar{\alpha}}{}_{\kappa} \equiv B^{\bar{\alpha}}{}_{\lambda} (h^{\lambda}{}_{\kappa})_{h_{\alpha}{}^{(0)}=0} = \left(\frac{h^{\bar{0}}{}_{(0)} = \sqrt{g^{00}} \quad h^{\bar{0}}{}_{\alpha} = 0}{h^{\bar{\alpha}}{}_{(0)} = 0 \quad | \quad h^{\bar{\alpha}}{}_{\alpha} = h^{\alpha}{}_{\alpha}} \right).$$

Подставляя эти тетрады в соотношения (23.5), получим вместо (23.7)

$$\bar{g}_{00} = \frac{1}{g^{00}}, \quad \bar{g}^{00} = g^{00}, \quad \bar{g}^{0\alpha} = \bar{g}_{0\alpha} = 0, \quad (23.24)$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad \bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{1}{g^{00}} g^{0\alpha} g^{0\beta}.$$

Подставляя соотношения (23.23) в (23.6), получаем аналог (23.9):

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^0 = \left(\frac{\bar{\Gamma}_{00}^0 = \Gamma_{00}^0 + 2g^{\alpha 0} \Gamma_{0\alpha}^0 / g^{00} + \quad \bar{\Gamma}_{0\beta}^0 = \Gamma_{0\beta}^0 +}{+ g^{\alpha 0} g^{\beta 0} \Gamma_{\alpha\beta}^0 / (g^{00})^2 \quad | \quad + g^{\alpha 0} \Gamma_{\alpha\beta}^0 / g^{00}}{\bar{\Gamma}_{\alpha 0}^0 = 0 \quad | \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^0 = 0} \right), \quad (23.25)$$

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \left(\frac{\bar{\Gamma}_{00}^{\alpha} = 0 \quad | \quad \bar{\Gamma}_{0\beta}^{\alpha} = 0}{\bar{\Gamma}_{\beta 0}^{\alpha} = - \frac{g^{\alpha 0}}{g^{00}} \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} - \frac{g^{\alpha 0} g^{\gamma 0}}{(g^{00})^2} \times \quad \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} -}{\times \Gamma_{\beta\gamma}^0 + \Gamma_{\beta 0}^{\alpha} + g^{\gamma 0} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} / g^{00} \quad | \quad - g^{\alpha 0} \Gamma_{\beta\gamma}^0 / g^{00}} \right). \quad (23.26)$$

Таким образом, на основе кинематических преобразований приходим вместо кручения (23.13) к кручению со следующими компонентами:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{0\alpha}^0 &= \bar{\Gamma}_{[0\alpha]}^0 = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{0\alpha}^0, & \bar{S}_{0\beta}^\alpha &= \bar{\Omega}_{0\beta}^\alpha = \frac{1}{2} \partial_\beta \frac{g^{\alpha 0}}{g^{00}}, \\ \bar{S}_{\beta\gamma}^\alpha &= 0, & \bar{S}_{\beta\gamma}^0 &= 0.\end{aligned}\quad (23.27)$$

Аналогично соотношениям (23.14)—(23.22) легко переформулировать основные уравнения ОТО к связности (23.25). Они будут иметь формально тот же вид, но с заменой $\sqrt{g_{00}}$ на $1/\sqrt{g^{00}}$. Например, вместо (23.20) будем иметь

$$\begin{aligned}(1/\sqrt{g^{00}})\partial_{\bar{0}}\bar{\rho} + \bar{\rho}\sqrt{g^{00}}\partial_{\bar{0}}(1/g^{00}) + \bar{\rho}\bar{D} + \bar{D}_{\alpha\beta}\bar{u}^{\alpha\beta} + \\ + \bar{J}^{\bar{\alpha}}{}_{;\bar{\alpha}} - 2\bar{F}_{\bar{\alpha}}\bar{J}^{\bar{\alpha}} = 0,\end{aligned}\quad (23.28)$$

где индекс $\bar{\alpha}$ означает ковариантную производную. Однако черта над индексами и над коренными буквами в формулах (23.20) и (23.2) имеет разное значение, поскольку для ее введения на базе хронометрических преобразований должны использоваться тетрады (23.4), а на базе кинематических преобразований — тетрады (23.23). После их явного введения обнаруживаются различия.

Таким образом, оба частных случая неголономных преобразований с R -инвариантными коэффициентами — (23.1) и (23.23) — обеспечивают введение специальных компонент тензоров, частных и ковариантных производных, которые позволяют оперировать отдельно с пространственными и с временными компонентами.

Подчеркнем еще раз, что кручение относится к переопределенной связности. По символам Кристоффеля геометрия, конечно, остается римановой.

§ 24. СОПОСТАВЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ДЕФЕКТОВ ДРУГ С ДРУГОМ И С ДОБАВОЧНЫМИ АНОМАЛИЯМИ

24.1. Возможные корреляции. В данном параграфе, заключающем анализ специальных формулировок ОТО, иллюстрируем на частных примерах три важнейших их понятия — физических времени, расстояния и десинхронизации по координатному времени — в зависимости от параметров гравитирующих и пробных, а также от негеодезичности движения. Тем самым продолжим начатое в § 4 и 8 рассмотрение пространственно-временных дефектов, названных во введении к главе V «кинематическими дефектами». Эти дефекты являются релятивистскими эффектами ОТО в смысле релятивизма

одновременности, специфического по сравнению со СТО, проявляющегося через указанные параметры. Данный параметр, гравитирующий или пробный, может по-разному воздействовать на образование того или другого из трех кинематических дефектов. Поэтому представляет интерес сравнение этих трех дефектов друг с другом, для чего их следует перевести из традиционной для них меры в некоторую одну, общую. Ниже в качестве общей избирается угловая мера. Тогда дефекты выступают как элементы добавочной аномалии.

Добавочные аномалии ОТО являются своеобразными дефектами угла (разность аргументов долготы в ОТО и в НТТ). Их накопление происходит с течением физического времени, сопровождается изменением физического пути, появлением времени задержки частицы гравитационным полем. Естественно предположить, что возможны два варианта ситуаций. Один, когда все три кинематических дефекта оказываются (в угловой мере) по величине другого порядка малости, чем добавочная аномалия. В таких случаях в принятом приближении корреляция между ними практически отсутствует. Значит, в образовании такого рода добавочных аномалий доминирует не отказ ОТО от абсолютной одновременности, а другие физические причины.

Другой вариант, когда кинематические дефекты (все три или некоторые из трех) оказываются в угловой мере того же порядка малости, что и добавочная аномалия. В образовании такого рода добавочных аномалий релятивизм одновременности, по-видимому, является доминирующим, что и обуславливает их корреляцию с кинематическими дефектами.

Строго говоря, следовало бы попытаться выявить предполагаемую корреляцию путем преобразования уравнения (3.1) к виду, содержащему кинематические дефекты как элементы добавочной аномалии. На первом этапе естественно ограничиться фактическим выделением двух указанных возможностей. Для этого на разных частных примерах произведем сопоставление порядков кинематических дефектов и добавочных аномалий, а также выявим «квазиньютоновы добавочные аномалии», возникающие от причин, доминирующих над релятивизмом одновременности.

24.2. Кинематические дефекты и добавочные аномалии для частицы, колеблющейся в спутнике источника поля Шварцшильда. Современные космические исследования повышают интерес к изучению эффектов ОТО, связанных с движением пробных тел относительно спутника. Поэтому начнем рассмотрение со случаев, когда частица, кроме движения со спутником по опорной окружности, также колеблется под воздействием внешней силы или гравитационной волны. Следуя [380, 382], примем сначала, что

$$F^\mu = -\Omega^2 \eta^\mu. \quad (24.1)$$

Пусть, в частности,

$$F^1 = -\Omega^2 \eta^1, \quad F^0 = F^2 = F^3 = 0. \quad (24.2)$$

Тогда уравнения геодезической девиации примут вид:

$$\frac{d^2 \eta^1}{ds_0^2} + a_1 \frac{d\eta^3}{ds_0} + a_2 \frac{d\eta^0}{ds_0} + a_3 \eta^1 = -\Omega^2 \eta^1, \quad (24.3)$$

$$\frac{d^2 \eta^2}{ds_0^2} + f \eta^2 = 0, \quad (24.4)$$

$$\frac{d^2 \eta^3}{ds_0^2} + b \frac{d\eta^1}{ds_0} = 0, \quad \frac{d^2 \eta^0}{ds_0^2} + d \frac{d\eta^1}{ds_0} = 0, \quad (24.5)$$

$$a_1 = -2r_0 \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) u^3, \quad a_2 = \frac{2m}{r_0^2} \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) u^0,$$

$$a_3 = -\left\{ (u^3)^2 + 2 \left(\frac{m}{r_0^3} - 3 \frac{m^2}{r_0^4} \right) (u^0)^2 \right\}, \quad (24.6)$$

$$b = \frac{2}{r_0} u^3, \quad d = \frac{2mu^0}{r_0^2 (1 - 2m/r_0)}, \quad f = (u^3)^2,$$

$$u^3 = \frac{d\varphi_0}{ds_0} = \sqrt{\frac{m}{r_0^3} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2}},$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds_0} = \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2}, \quad (24.7)$$

а s_0 —собственное время на опорной окружности.

Следуя [51] и приняв $\theta = 0$, $\eta^2 = 0$, будем искать решение в виде

$$\eta^\nu = \xi^\nu e^{i(\omega s_0 + \alpha)}, \quad (24.8)$$

где ξ^ν и α — постоянные интегрирования, из них две независимые. Аналогично [380, 381] из (24.3), (24.5), (24.6) и (24.8) получим

$$\omega^2 = a_3 + \Omega^2 - a_1 b - a_2 d. \quad (24.9)$$

Подставляя из (24.6) в (24.9) значения коэффициентов, находим

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{m}{r_0^3} \left(1 - \frac{6m}{r_0}\right) \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1},$$

$$(\omega)_{\Omega=0, \frac{m}{r_0} \ll 1} \equiv \omega_0 = \sqrt{\frac{m}{r_0^3}}, \quad (24.10)$$

где ω_0 — кеплерова частота. Из (24.3), (24.5), (24.6)—(24.8) получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \xi^1 (a_3 + \Omega^2 - \omega^2) + \xi^3 i \omega a_1 + \xi^0 i \omega a_2 &= 0, \\ \xi^1 i b - \xi^3 \omega &= 0, \quad \xi^1 i d - \xi^0 \omega &= 0, \end{aligned} \quad (24.11)$$

из которой следует:

$$\xi^3 = \xi^1 \frac{ib}{\omega}, \quad \xi^0 = \xi^1 \frac{id}{\omega}. \quad (24.12)$$

Выделяя действительную часть при $\alpha = -\pi/2$

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \xi^1 \sin \omega s_0, \quad \eta^3 = \xi^3 \cos \omega s_0, \quad \eta^0 = \xi^0 \cos \omega s_0, \\ \xi^3 &= \xi^1 \frac{b}{\omega}, \quad \xi^0 = \xi^1 \frac{d}{\omega}, \end{aligned} \quad (24.13)$$

находим

$$r = r_0 + \xi^1 \sin \omega s_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \xi^3 \cos \omega s_0. \quad (24.14)$$

Для разыскания добавочной аномалии исключим отсюда параметр:

$$s_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{r - r_0}{\xi^1}, \quad (24.15)$$

$$\varphi_0 = u^3 s_0 = \frac{u^3}{\omega} \arcsin \frac{r - r_0}{\xi^1}, \quad (24.16)$$

$$r = r_0 + \left[(\xi^1)^2 - \left(\frac{\xi^1}{\xi^3} \right)^2 \left(\varphi - \frac{u^3}{\omega} \arcsin \frac{r - r_0}{\xi^1} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Из (24.10) и (24.15) следует

$$\frac{T_\Psi}{2\pi} = \frac{1}{\omega_0} \left(1 + \frac{3m}{2r_0} \right) \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{3m}{r_0} \right) \right]^{-1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} ds. \quad (24.17)$$

Переходя под интегралом и на верхнем пределе к НТТ, находим

$$\frac{T_{\text{НТТ}}}{2\pi} = \frac{1}{\omega_0} \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right]^{-1/2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_{\text{НТТ}}} dx^0. \quad (24.18)$$

Таким образом, выявляется дефект периода собственного физического времени:

$$\frac{\Delta T}{2\pi} \equiv \frac{1}{2\pi} (T_{\text{ОТО}} - T_{\text{НТТ}})_{m,\Omega} = \frac{1}{\omega_0} \left\{ \left(1 + \frac{3m}{2r_0} \right) \times \right.$$

$$\times \left[1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{3m}{r_0} \right) \right]^{-1/2} - \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1/2} \}. \quad (24.19)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta T}{2\pi} \right)_{\Omega=0} &= \frac{3m}{2r_0\omega_0}, \quad \left(\frac{\Delta T}{2\pi} \right)_{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \ll 1} = \\ &= \frac{3m}{2r_0\omega_0} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right), \end{aligned} \quad (24.20)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{2\pi} \right)_{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \gg 1} = 0 \left(\frac{m\omega_0^2}{r_0\Omega^3} \right). \quad (24.21)$$

Первое из выражений (24.20) описывает эффект Широкова — эффект 71. Оно совпадает с первым из уравнений (9.5) для дефектов периодов колебаний. Если $\Omega^2/\omega_0^2 \gg 1$, то эффект 71 для r -колебаний отсутствует.

Время десинхронизации, согласно (14.21), выражается через тетрады, сопутствующие колеблющейся частице, причем

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds_0^2 \left[1 - (\xi^1 \omega_0)^2 \sin^2 \omega_0 s_0 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \right].$$

Оценим коэффициент $(\xi^1 \omega_0)^2$. Пусть, например, $\omega_0 = 100$ Гц, $\xi^1 = 1$ см, $m = m_\odot = 1,5$ км, $r_0 = 1,5 \cdot 10^8$ км. Тогда $e = \xi^1/r_0 \approx 10^{-13}$, $(\omega_0 \xi^1)^2 = 10^{-16}$. Поэтому ниже ограничим выбор ω_0 условием $(\omega_0 \xi^1)^2 \ll 1$. При этом условии отличие s от s_0 мало даже в случае $\omega_0^2/\Omega^2 \gg 1$. Поэтому далее индекс 0 у s писать не будем. Учитывая это и (24.14), находим:

$$h_1^{(0)} = -\omega \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} [(\xi^1)^2 - (r - r_0)^2]^{1/2}, \quad (24.22)$$

$$h_3^{(0)} = -r^2 \omega \left(1 - \frac{3m}{r_0} \right)^{-1/2} \left(3 - \frac{2r}{r_0} \right), \quad \frac{r}{r_0} = \xi^1 \sin \omega s,$$

$$\begin{aligned} h_0^{(0)} &= \left(1 - \frac{2m}{r_0} \right) \left[\left(1 - \frac{3m}{r_0} \right)^{-1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m\omega^0}{r_0} \left(1 - \frac{2m}{r_0} \right)^{-1} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Принимая и далее $m\xi^1/r_0^2 \ll 1$, $(\xi^1/r_0)^2 \ll 1$, $(\xi^1 \omega)^2 \ll 1$ и подставляя (24.17) в (14.21) с учетом (24.14), видим, что

$$\left(\frac{\Delta x^0_{\text{дес}}}{2\pi}\right)_{m,\Omega} = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{m}{r_0} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{-1} ds \approx \frac{m}{r_0\omega}. \quad (24.23)$$

Из (24.22) и уравнений системы (13.5) при удобном условии $h_1^{(3)} = 0$, не вносящем физических ограничений, находим (отброшены части тетрад, содержащие ξ^1 , как ненужные в принятом приближении):

$$\begin{aligned} h_1^{(3)} &= 0, \quad h_3^{(3)} \approx \left[r_0^2 + mr_0 \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1} \right]^{1/2}, \\ h^3_{(3)} &= -\frac{1}{r_0^2} h_3^{(3)}, \\ h_0^{(3)} &= -\sqrt{\frac{m}{r_0}} \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{m}{r_0} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1} \right]^{-1/2}, \\ h_3^{(0)} &= -\sqrt{mr_0} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2}, \\ h_0^{(0)} &= \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right) \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2}, \\ h^3_{(0)} &= -h_3^{(0)}/r^2. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Подставляя найденные тетрады в уравнение (14.18) с учетом (24.14), находим

$$dl = \sqrt{\frac{m}{r_0}} \left(1 + \frac{m}{r_0}\right) ds. \quad (24.25)$$

В пределе НТТ в соответствии с евклидовой геометрией

$$dl_{\text{НТТ}} = dx_{\text{НТТ}}^{\text{df}} = r_0 d\varphi. \quad (24.26)$$

Если перейти в (24.26) от $d\varphi$ к ds , учитывая, что $\frac{d\varphi}{ds} ds =$
 $= \sqrt{\frac{m}{r_0}} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2} ds$, то формально можно выразить $dl_{\text{НТТ}}$ в терминах ОТО:

$$dx_{\text{НТТ}}^{(3)} = \sqrt{m/r_0} (1 + 3m/2r_0) ds. \quad (24.27)$$

Тогда, используя для ОТО и для НТТ общий предел интегрирования, для дефекта физического пути получим

$$\left(\frac{\Delta l}{2\pi}\right)_{m,\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (dx_{\text{НТТ}}^{(3)} - dx_{\text{ОТО}}^{(3)}) \approx \frac{m}{2} \frac{\omega_0}{\omega}. \quad (24.28)$$

Переведем найденные кинематические дефекты в общую, угловую меру с помощью усредненных коэффициентов $\bar{h}^3_{(0)}$, $\bar{h}^3_{(3)}$, $d\varphi/dx^0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\varphi_s}{2\pi}\right)_{m,\Omega} &= \bar{h}^3_{(0)} \frac{\Delta T}{2\pi} \cong \frac{\omega_0}{\omega} \left(1 - \frac{3m}{r_0}\right)^{-1/2} \times \\ &\times \left[\frac{\omega}{\omega_0} \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2} - 1 \right], \end{aligned} \quad (24.29)$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi_{\text{дес}}}{2\pi}\right)_{m,\Omega} = \frac{\overline{d\varphi}}{dx^0} \frac{\Delta x^0_{\text{дес}}}{2\pi} \approx \frac{\omega^0}{\omega} \frac{m}{r_0}, \quad (24.30)$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi_l}{2\pi}\right)_{m,\Omega} = \bar{h}^3_{(3)} \frac{\Delta x^{(3)}}{2\pi} \approx \frac{m}{2r_0} \frac{\omega_0}{\omega}. \quad (24.31)$$

Суммируя эти дефекты, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)_{m,\Omega} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{\omega} \left\{ \frac{3m}{2r_0} - \frac{1}{\sqrt{1-3m/r_0}} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\omega}{\omega_0} \left(1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (24.32)$$

В пределе $\Omega = 0$ имеем равенства:

$$\left(\frac{\Delta\varphi_s}{2\pi}\right)_m = \frac{3m}{2r}, \quad \left(\frac{\Delta\varphi_{\text{дес}}}{2\pi}\right)_m = \frac{m}{r}, \quad \left(\frac{\Delta\varphi_l}{2\pi}\right)_m = \frac{m}{2r}, \quad (24.33)$$

$$\left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\right)_m = \sum_{i=1}^3 \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} = \frac{3m}{r}. \quad (24.34)$$

Эти соотношения получены [37] при рассмотрении квазиэллиптического движения в пределе $e \rightarrow 0$, а в работе [629] они подсчитаны с помощью формализма хронометрических инвариантов. Сопоставляя дефекты (24.33) друг с другом, видим, что они одного порядка малости. В отличие от этого в другом случае находим

$$\left\{ \frac{\Delta\varphi_s}{2\pi} = 0 \left(\frac{m\omega_0^2}{r_0\Omega^3} \right); \quad \frac{\Delta\varphi_{\text{дес}}}{2\pi} \approx \frac{m}{r_0} \frac{\omega_0}{\Omega}; \right.$$

$$\frac{\Delta\varphi_l}{2\pi} \approx \frac{m}{2r_0} \frac{\omega_0}{\Omega} \left\} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \gg 1. \quad (24.35)$$

В этом случае дефект собственного аномалистического периода иного порядка малости, чем два других дефекта.

Найдем теперь независимо от дефектов добавочную аномалию. Определим ее как дополнительный угол χ в выражении для r , взятом в квазиклассической форме, т. е. при классических значениях постоянных интегрирования. В НТТ

$$r = r_0 + \left[(\xi_{\text{НТТ}}^1)^2 - \left(\frac{\xi_{\text{НТТ}}^1}{\xi_{\text{НТТ}}^3} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{\text{НТТ}} - \frac{u_{\text{НТТ}}^3}{\omega_{\text{НТТ}}} \arcsin \frac{r - r_0}{\xi_{\text{НТТ}}^1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (24.36)$$

где, согласно (24.7), (24.10), (24.13) и (24.6),

$$u_{\text{НТТ}}^3 = \sqrt{\frac{m}{r_0^3}} = \omega_0, \quad \omega_{\text{НТТ}} = \Omega \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right), \\ \left(\frac{\xi_{\text{НТТ}}^1}{\xi_{\text{НТТ}}^3} \right)^2 = \frac{\Omega^2}{2\omega_0} r_0 \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\Omega^2} \right). \quad (24.37)$$

Пользуясь произвольностью ξ^1 , положим

$$\xi_{\text{НТТ}}^1 = \xi_{\text{НТТ}}^1. \quad (24.38)$$

Тогда, выделив в (24.16) добавочный угол за счет перехода к классическим значениям постоянных интегрирования:

$$r = r_0 + \left[(\xi_{\text{НТТ}}^1)^2 - \left(\frac{\xi_{\text{НТТ}}^1}{\xi_{\text{НТТ}}^3} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left(\varphi_{\text{НТТ}} - \chi - \frac{u_{\text{НТТ}}^3}{\omega_{\text{НТТ}}} \arcsin \frac{r - r_0}{\xi_{\text{НТТ}}^1} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (24.39)$$

и сравнивая (24.39) с (24.16), находим

$$\chi = \xi_{\text{НТТ}}^3 \left\{ \varphi \left(\frac{1}{\xi_{\text{НТТ}}^3} - \frac{1}{\xi^3} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{u_{\text{НТТ}}^3}{\omega_{\text{НТТ}} \xi_{\text{НТТ}}^3} - \frac{u^3}{\omega \xi^3} \right) \arcsin \frac{r - r_0}{\xi^1} \right\}. \quad (24.40)$$

За один период колебания частицы, когда согласно (24.14) s_0 изменяется от 0 до $2\pi/\omega$, а угол φ_0 — от 0 до $\varphi_0 = 2\pi u^3/\omega$ и $\arcsin[(r-r_0)/\xi^4]$ — от 0 до 2π , получим (3.31), т. е.

$$\left(\frac{\Delta\chi}{2\pi}\right)_{\Omega} = \frac{u^3}{\omega} - \frac{u_{\text{НТТ}}^3}{\omega_{\text{НТТ}}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}} + \quad (24.41)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{3m}{r_0}\right)}} + \frac{3m/r_0}{\sqrt{1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \left(1 + \frac{3m}{r_0}\right)}}.$$

В частности, как отмечалось в п. 3.7, при $e=0$, $\Omega=0$ имеет место (3.10), т. е. эффект 8. В случае $\Omega^2 \gg \omega_0^2$ приходим к эффекту 14. Сравнивая добавочную аномалию (24.41) с суммой дефектов (24.32), легко убеждаемся, что в принятом приближении они совпадают. Следовательно, если эффект 8 при $e=0$ как бы порождается всеми тремя кинематическими дефектами, то эффект 14 — только двумя, поскольку в принятом приближении дефект собственного времени отсутствует. Следовательно, отсутствует и корреляция между ним и добавочной аномалией.

Заменим теперь формулу (24.1) на (3.27), тогда вместо системы (24.3) — (24.5) получим:

$$\ddot{\eta}^1 - 2r_0\omega_0 \left(1 - \frac{m}{2r_0}\right) \dot{\eta}^3 + \frac{2m}{r_0^2} \dot{\eta}^0 - 3\omega_0^2 \left(1 + \frac{m}{r_0}\right) \eta^1 =$$

$$= \frac{-r_0 h_0}{4} \omega_g^2 \{ \sin [(\omega_g - 2\omega_0)t + \alpha_2 - \alpha_1] +$$

$$+ \sin [(\omega_g + 2\omega_0)t + \alpha_1 + \alpha_2] \}, \quad (24.42)$$

$$\ddot{\eta}^3 + \frac{2\omega_0}{r_0} \left(1 + \frac{3m}{2r_0}\right) \dot{\eta}^1 = \frac{\omega_g^2 h_0}{4} \times$$

$$\times \{ \cos [(\omega_g - 2\omega_0)t + \alpha_2 - \alpha_1] - \cos [(\omega_g + 2\omega_0)t + \alpha_1 + \alpha_2] \}, \quad (24.43)$$

$$\ddot{\eta}^0 + \frac{2m}{r_0^2} \dot{\eta}^1 = 0. \quad (24.44)$$

По сравнению с уравнениями движения, рассмотренными В. Н. Руденко [228], эта система учитывает шварцшильдовы поправки к ньютонову потенциалу и члены с суммой частот $(\omega_g + 2\omega_0)$. В работе [52] эта система решена для случая простого резонанса

$$\omega_g = \omega_0. \quad (24.45)$$

Подсчет кинематических дефектов показал, что ГВ вносит в них следующие вклады. При $\alpha_1 = \alpha_2$ в традиционной мере:

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta T)_{ГВ,m} = \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{3}{2} \frac{m}{r_0} + \frac{3}{8} \frac{r_0 h_0}{\xi^1} \right), \quad (24.46)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta x_{\text{дес}}^0)_{ГВ,m} = \frac{m}{r_0 \omega} \left[1 + 0 \left(\frac{\xi^1}{r_0}, \frac{m}{r_0}; h_0 \right) \right], \quad (24.47)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta l)_{ГВ,m} = \frac{m}{2} \left[1 + 0 \left(\frac{m}{r}; \frac{r_0 h_0}{\xi^1} \right) \right]. \quad (24.48)$$

В угловой мере:

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta \varphi_s)_{ГВ,m} = \bar{h}_{(0)}^3 \frac{\Delta T}{2\pi} \cong \frac{3m}{2r_0} + \frac{3}{8} \frac{r_0 h_0}{\xi^1}, \quad (24.49)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta \varphi_{\text{дес}})_{ГВ,m} = \frac{\overline{d\varphi}}{dx^0} \frac{\Delta x_{\text{дес}}^0}{2\pi} = \frac{m}{r_0} + 0(\xi^1 h_0), \quad (24.50)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta \varphi_l)_{ГВ,m} = \bar{h}_{(3)}^3 \frac{\Delta l}{2\pi} = \frac{m}{2r_0} + 0(\xi^1 h_0), \quad (24.51)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^3 \Delta \varphi_i = \frac{3m}{r_0} + \frac{3}{8} \frac{r_0 h_0}{\xi^1}. \quad (24.52)$$

Как и в случае (24.35), не все дефекты одинакового порядка малости. В данном случае ситуация обратна ситуации, представленной уравнениями (24.35): лишь один из дефектов в рассмотренном приближении отличен от нуля. Сравним теперь (24.52) с добавочной аномалией, найденной в [52]. Согласно работе [228], при $\omega = \omega_g$ в пренебрежении релятивистскими поправками к ньютонову потенциалу имеет место резонансный переход спутника с круговой орбиты на эллиптическую с эксцентриситетом, линейно растущим со временем. При другом выборе начальной фазы из (24.42) — (24.44) получается выражение для квазиэллипса

$$r \approx r_0 \left\{ 1 + \frac{\xi^1}{r_0} \sin \varphi_0 \left[1 - \frac{3m}{r_0} - \frac{3}{8} \frac{r_0 h_0}{\xi^1} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \right] \right\}^{-1}, \quad (24.53)$$

эксцентриситет которого $e \approx \xi^1 / r_0$ меняется:

$$\begin{aligned} \xi^1 \approx \xi^1 - \frac{3}{8} r_0 h_0 \omega_0 s_0 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{3}{8} r_0 h_0 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) - \\ - \frac{5}{24} r_0 h_0 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \sin^2 \omega_0 s_0. \end{aligned} \quad (24.54)$$

При $\alpha_1 = \alpha_2$ остается лишь периодическая зависимость от времени, а добавочная аномалия, вызванная ГВ, как видно из уравнения (24.53), принимает вид (3.30). Сравнивая ее с (24.52), видим, что она равна сумме дефектов, т. е. как бы порождается тем, что ОТО дает колеблющейся частице для ее движения больший на дефект ΔT промежуток времени, чем НТТ.

Оценим добавочную аномалию для спутника Земли, находящегося под воздействием предполагаемого гравитационного излучения от известных двойных звезд, воспользовавшись данными, приведенными в работе [228]: $r_0 = 7 \cdot 10^8$ см, $\omega_g = 10^{-3}$ с, $h_0 = 2/3 \cdot 10^{-20}$. Пусть $\xi^1 = 10^{-3}$ см. При этих данных из (3.30) находим $(\Delta\chi/2\pi)_{ГВ} = 3r_0 h_0 / 8\xi^1 \approx 7/4 \cdot 10^{-9}$, что по порядку сравнимо со смещением перицентра спутника полем Земли за счет поправок ОТО. Однако регистрация смещения (3.30) при этих условиях потребовала бы измерения ξ^1 с точностью, практически недоступной. Тем не менее с принципиальной стороны интересно, что колебания частицы в спутнике под воздействием силы (24.1) и под воздействием ГВ вида (3.27) не нарушили совпадения добавочной аномалии с суммой дефектов, имевшего место согласно уравнениям (24.34) и (3.10), хотя существенно изменили вклады отдельных дефектов в соответствующие их суммы, что видно из сравнения выражений (24.33), (24.35), (24.45) — (24.51).

24.3. Кинематические дефекты и квазиньютоновы приближения добавочных аномалий, обусловленных параметрами k , Λ , а при $\epsilon = 0$. Подставляя в (13.5) $g_{\mu\nu}$ поля Рейсснера — Нордстрема, используя калибровку сопутствия (18.16) и условие (18.23), находим тетрады, сопутствующие частице, которая вращается в этом поле в плоскости $\theta = \pi/2$ [41, 564]:

$$h_{\mu}^k = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & -\epsilon h (r^2 + h^2)^{-1/2} \\ 0 & (1 - 2m/r + k/r^2)^{-1/2} & 0 \\ -h & 0 & (r^2 + h^2)^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (24.55)$$

где ϵ и h удовлетворяют (3.15) и (3.16). Привлекая эти тетрады и им обратные, находим следующие выражения для дефектов в зависимости от параметров k и m в традиционных и угловой мерах [41, 564]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} (\Delta x^{(0)})_{k,m} &= \frac{r^{3/2}}{\sqrt{m}} \left(\frac{3m}{2r} - \frac{k}{r^2} \right), \\ \frac{1}{2\pi} (\Delta \varphi_s)_{k,m} &= \frac{3m}{2r} - \frac{7}{4} \frac{k}{r^2}, \\ \frac{1}{2\pi} (\Delta x_{\text{деc}}^0)_{k,m} &= \sqrt{mr} \left(1 - \frac{k}{mr} \right), \end{aligned} \quad (24.56)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta\varphi_{\text{деф}})_{k,m} = \frac{m}{r} - \frac{3}{2} \frac{k}{r^2}, \quad (24.57)$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Delta l)_{k,m} = \frac{m}{2} - \frac{3}{4} \frac{k}{r}, \quad \frac{1}{2\pi} (\Delta\varphi_i) = \frac{m}{2r} - \frac{3}{4} \frac{k}{r^2}, \quad (24.58)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^3 \Delta\varphi_i = \frac{3m}{r} - 4 \frac{k}{r^2}. \quad (24.59)$$

Следовательно, члены, зависящие от k во всех кинематических дефектах одного порядка малости $\sim k/r^2$, но иного, чем добавочная аномалия (3.17): $k/2mr > k/r^2$. Член $k/2mr$ — пример добавочной аномалии, возникающей не за счет кинематических дефектов. В работе [41] высказано предположение, что этот член добавочной аномалии принадлежит квазиньютонову приближению ОТО, отличному от НТТ, уже предполагающему возврат к абсолютной одновременности, но вместе с тем еще сохраняющему гравитирующий параметр k . Согласно [44, 50], это предположение оправдывается. Полагая, как обычно, при переходе к пределу $U/c^2 = -g_{00}/2$, $c^2\rho(\dot{x}_0)^2 = c^2\rho$, $(\partial^2/c^2\partial t^2)\dot{U} \ll \Delta U$, используя компоненту $T_{00} = k/8\pi r^4$ электростатического поля, приводим эйнштейновы уравнения (1.1) к обобщенному уравнению Пуассона*), содержащему гравитирующий параметр k :

$$\Delta U = -4\pi G(\rho + k/4\pi c^2 r^4). \quad (24.60)$$

Сильный критерий перехода $c \rightarrow \infty$ сразу ведет к абсолютной одновременности и к изгнанию всех гравитирующих параметров, кроме ньютоновой массы. В выражении (24.60) второй член справа сохраняет конечное значение скорости света и поэтому соответствует массе, эквивалентной энергии электростатического поля, хотя принято $\dot{x}^0 = 1$. Интегрирование (24.60) дает $dU/dr = k/r^3 - m/r^2$. Соответственно уравнения геодезической линии (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= -\frac{m}{r^2} + \frac{k}{r^2}, \\ \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (24.61)$$

Разыскивая решение в виде (3.1), согласно процедуре, описанной в начале § 3, получаем в согласии с работами [41, 50]

$$\left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{\dot{x}^0=1, k} \approx -\frac{k}{2mr}, \quad (h^2)_{\dot{x}^0=1, k} \approx mr \left(1 - \frac{k}{mr} \right). \quad (24.62)$$

*) См., в частности: Callaway J. «Amer. J. Phys.», 1959, 27, 469.

Следовательно, этот член добавочной аномалии порождается учетом гравитирующего параметра k в приближении абсолютной одновременности. Кинематические дефекты (24.56) — (24.58) обусловлены учетом относительности одновременности. Тем самым проясняется, почему все три дефекта не содержат членов порядка k/mr .

Аналогичная ситуация имеет место в случае гравитирующего параметра Λ . В предположении $m/r \ll 1$, $\Lambda r^2 \ll 1$ в работах [44, 564] найдены следующие выражения для дефектов (для краткости ограничимся их записью в угловой мере):

$$\left\{ \frac{\Delta\varphi_s}{2\pi} = \frac{3m}{2r} + \frac{3}{4} \Lambda r^2, \quad \frac{\Delta\varphi_{\text{дец}}}{2\pi} = \frac{m}{r} + \frac{\Lambda r^2}{6}, \right. \quad (24.63)$$

$$\left. \frac{\Delta\varphi_l}{2\pi} = \frac{m}{2r} + \frac{\Lambda r^2}{12} \right\}_{\Lambda, m}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^3 \Delta\varphi_i = \frac{3m}{r} + \Lambda r^2. \quad (24.64)$$

Отсюда следует, что во всех кинематических дефектах члены, зависящие от Λ , одного порядка малости, но меньшего, чем старший член $\Lambda r^2/2m$ в добавочной аномалии (3.21). В работе [44] вскрыто происхождение этого члена. Аналогично предыдущему случаю он вытекает из обобщенного уравнения Пуассона вида

$$\Delta U = -4\pi G \left(\rho - \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} \right), \quad (24.65)$$

содержащего плотность гравитирующей массы вакуума. Это уравнение на правах «квазиньютонова приближения» рассматривалось А. Л. Зельмановым [594, с. 169] и др.*). Как и в случае (24.60), оно приводит к добавочной, отталкивающей силе, которая и ответственна за член $\Lambda r^2/2m$ в эффекте 11.

Похожая, но более сложная ситуация выявлена и в случае кругового движения в поле Керра [42, 49, 564]. В работе [42] найдены выражения для трех кинематических дефектов, обусловленных параметром a . Все они оказались одного порядка малости и в сумме привели к выражению

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^3 (\Delta\varphi_i)_{a, m} = \frac{3m}{r} + \frac{9}{2} \frac{am\sqrt{m}}{r^2\sqrt{r}}, \quad (24.66)$$

второй член которого иного порядка малости, чем линзе-тинринговская добавочная аномалия в эффекте 12. Вновь возни-

*) Raychaudhuri A. «Phys. Rev.», 1955, 98, 1123.

кает предположение, высказанное в работе [42], что эта аномалия, равная $9am\sqrt{m}/2r^2\sqrt{r}$, принадлежит квазиньютонову приближению ОТО, уже игнорирующему относительность одновременности, но еще учитывающему гравитирующий параметр a .

При решении задачи n тел В. А. Фок разбивал уравнения (1.1) на три группы соответственно относительно компонент g_{00} , $g_{0\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ [490, с. 266—268]. По аналогии с электродинамикой он называл вектор $U^\alpha \equiv c^4 g^{0\alpha}/4$ «вектор-потенциалом тяготения». Сильный предельный переход оставляет из всех трех групп лишь одно уравнение для g_{00} — пуассоново. Вторая группа уравнений имеет вид $\Delta g^{0\alpha} = 2G\rho u^\alpha/c^2$. Н. Н. Костюковичем [49] показано, что лензе-тирринговский член добавочной аномалии обусловлен учетом «гравитационного тока» элементов вращающейся массы в рамках квазиньютонова приближения.

Рассмотренные примеры показывают, что введение Эйнштейном новых по сравнению с НТТ гравитирующих параметров сказывается, по крайней мере в некоторых случаях, уже в квазиньютоновом приближении, приводя к эффектам ОТО более сильным, чем кинематические дефекты, вызванные теми же гравитирующими параметрами, но в результате отказа от абсолютной одновременности*).

24.4. Влияние пробных параметров на кинематические дефекты и «квазиньютоновы добавочные аномалии». Ограничимся одним примером — влиянием пробного спина и только при круговом движении в поле Шварцшильда. В работе [47] для этого случая найдены следующие выражения для кинематических дефектов:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\Delta x^{(0)}}{2\pi} = \frac{3}{2} mr \left(1 + \frac{3S}{r} \sqrt{\frac{m}{r}} \right), \quad \frac{\Delta x_{\text{деc}}^0}{2\pi} = \right. \\ \left. = \sqrt{mr} \left(1 + \frac{5m}{r} + \frac{3S}{r} \sqrt{\frac{m}{r}} \right), \right. \\ \left. \Delta l/2\pi = \frac{m}{2} \left(1 + \frac{7m}{r} + \frac{3S}{r} \sqrt{\frac{m}{r}} \right) \right\}_{S, m}. \end{aligned} \quad (24.67)$$

В угловой мере:

$$\left\{ \frac{\Delta \varphi_s}{2\pi} = \frac{3m}{2r} + \frac{9}{2} \frac{Sm}{r^2} \sqrt{\frac{m}{r}}, \quad \frac{\Delta \varphi_{\text{деc}}}{2\pi} = \frac{m}{r} + \right.$$

*) Вопрос о сравнении с кинематическими дефектами членов добавочных аномалий того же порядка малости оставим открытым, поскольку он, возможно, требует уточнения подсчетов.

$$+ \frac{3Sm}{r^2} \sqrt{\frac{m}{r}}, \quad \left. \frac{\Delta\varphi_i}{2\pi} = \frac{m}{2r} - \frac{3Sm}{2r^2} \sqrt{\frac{m}{r}} \right\}_{s, m}, \quad (24.68)$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_1^3 \Delta\varphi_i = \frac{3m}{r} + \frac{9Sm}{r^2} \sqrt{\frac{m}{r}}. \quad (24.69)$$

Таким образом, пробный спин во все три дефекта вводит члены одного порядка малости, но иного, чем член $3S\sqrt{m/r/r}$ добавочной аномалии (3.39). Установлено [47], что этот член также следует отнести к квазиньютоновым добавочным аномалиям, но иной природы, чем рассмотренные в п. 24.3.

Эйнштейн постулировал искривленность пространства — времени. В частности, это вызвало в уравнениях движения Папаметру (1.3) добавочный член — реакцию пробного спина на кривизну. В рассматриваемом случае компоненты

$$(R^1_{010})_{\dot{x}^0=1} \approx \partial_1 \Gamma^1_{00} = -\frac{2m}{r^3}, \quad (R^3_{131})_{\dot{x}^0=1} = \Gamma^1_{11} \Gamma^3_{13} = -\frac{m}{r^3} \quad (24.70)$$

одинакового порядка малости. Поскольку

$$\Gamma^1_{11} \dot{r}^2 \ll \Gamma^1_{00} (\dot{x}^0)^2, \quad \Gamma^3_{13} = 1/r, \quad \Gamma^3_{33} = -r, \quad (24.71)$$

влияние коэффициента Γ^1_{11} , входящего в R^3_{131} , согласно уравнениям геодезической линии в приближении $\dot{x}^0 = 1$, отсутствует. Однако влияние в этом приближении компоненты R^3_{131} проникает в одно из уравнений Папаметру (47):

$$\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{r^2} = 0; \quad \ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} - \frac{3m}{r^4} \dot{r} S = 0, \quad (24.72)$$

обуславливая последний член во втором из уравнений. Находя решение этих уравнений в виде (3.1) посредством процедуры, описанной в § 3, приходим к добавочной аномалии

$$\left(\frac{\Delta\chi}{2\pi} \right)_{\dot{x}^0=1, R^3_{131} \neq 0} = \frac{3S}{r} \sqrt{\frac{m}{r}},$$

составившей эффект 17. Следовательно, квазиньютоновы добавочные аномалии могут порождаться как гравитирующими, так и пробными параметрами ОТО, а влияние кривизны 3-пространства может в некоторых случаях доминировать над влиянием относительности одновременности.

В связи с этим отметим интересную трактовку эффектов

ОТО как перемещений, ассоциированных с циклом в смысле Э. Картана, развиваемую А. Е. Левашевым и Е. А. Ушаковым [9, с. 245] *).

24.5. Доминирующее значение одного из кинематических дефектов при ультрарелятивистском движении (квазигиперболическом). В работе [39] произведен подсчет физических времени и расстояния ультрарелятивистской частицы, движущейся по квазигиперболе с эксцентриситетом $1/e^2 \ll 1$. Получены следующие выражения:

$$x^{(0)} = \frac{b^{3/2}}{\sqrt{me}} \rho \int_0^\varphi d\varphi \left[\cos\varphi + \frac{1}{e} + \frac{m}{b} \sin^2 \varphi \right]^{-2}, \quad (24.73)$$

$$l = x^{(3)} = b\rho \int_0^\varphi d\varphi \left[1 + \left(\frac{1}{e} - \frac{m}{b} \right) \cos\varphi + \frac{m}{be} \sin^2 \varphi \right] \times \\ \times \left[\cos\varphi + \frac{1}{e} + \frac{m}{b} \sin^2 \varphi \right]^{-2}, \quad \rho \equiv (1 - me/b)^{1/2}. \quad (24.74)$$

Поскольку $(e)_{\beta \rightarrow 1} \rightarrow b/m$ [39, 46, 213], то $\rho_{\beta \rightarrow 1} \rightarrow 0$. Следовательно, в согласии с соотношениями [14, 23]

$$(x^{(0)})_{\beta \rightarrow 1} \rightarrow 0, \quad (l)_{\beta \rightarrow 1} \rightarrow 0. \quad (24.75)$$

В ультрарелятивистских случаях определения дефектов $\Delta x^{(0)}$ и Δl должны измениться. Их следует определить как разность времен и пути, соответствующих ОТО и СТО, а не ОТО и НТТ, как это делалось в п. 24.2—24.4. Поскольку в СТО имеют место выражения, аналогичные (24.75), то в таком определении $\Delta x^{(0)}$ и $\Delta l \rightarrow 0$ по мере $\beta \rightarrow 1$ и, следовательно, не вносят в пределе вклада в сумму трех кинематических дефектов. Вероятно, вблизи предела при $\beta \rightarrow 1$ дефекты $\Delta x^{(0)}$ и Δl малы по сравнению со вкладом ОТО в $\Delta x^{(0)}$ _{дес}. Поэтому в работах [46, 213] рассматриваемое сопоставление производилось только со временем десинхронизации. В работе [213] оно дано для трех полей — Рейсснера—Нордстрема, Керра и в пределе для поля Шварцшильда. Поэтому воспользуемся ее результатами. После интегрирования по всей траектории получены следующие выражения для времени десинхронизации в угловой мере соответственно в зависимости от гравитирующих параметров k и a :

$$(\Delta\varphi_{\text{дес}})_k, m = (\Delta\varphi_{\text{дес}})_m - \frac{3\pi}{4} \frac{k}{b^2}, \quad (24.76)$$

*) В этих тезисах [9] приведена соответствующая библиография. См. также: Левашев А. Е., Ушаков Е. А. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 3, 60; Тредер Г. В кн.: Гравитация. Проблемы, перспективы. Киев, «Наукова думка», 1972, с. 293.

$$(\Delta\varphi_{\text{дес}})_{a,m} = (\Delta\varphi_{\text{дес}})_m - \frac{4am}{b^2}. \quad (24.77)$$

В случае поля Шварцшильда [213]

$$(\Delta\varphi_{\text{дес}})_m = \pi \left[\beta_0^2 + 0 \left(\frac{m^2}{r^2} \right) \right] + \frac{4m}{b} \left(1 - \frac{1 - \beta_0^2}{2} \right), \quad (24.78)$$

где β_0 — начальная скорость на бесконечности. В пределе

$$(\Delta\varphi_{\text{дес}})_{m, \beta_0=1} = \pi + \frac{4m}{b}. \quad (24.79)$$

Угол $(\Delta\varphi_{\text{дес}}) = \pi$ относится к распространению сигнала по прямой. Следовательно, время десинхронизации, принадлежащее только ОТО, будет

$$(\Delta\varphi_{\text{дес}})_{m, \beta_0=1, \text{ото}} = \frac{4m}{b} \approx \frac{4m}{r_0}. \quad (24.80)$$

Сравнивая (24.79) с (4.7), (24.76) с (4.17), а (24.77) с (4.26), заключаем, что добавочный угол между асимптотами квази-гиперболы, характеризующий отклонение сигнала от прямой, совпадает во всех трех полях со временем десинхронизации, подсчитанным в угловой мере. Подчеркнем, что это совпадение, согласно работе [213], относится именно к поправке $\Delta\theta$, а не к добавочной аномалии. Так в поле Керра добавочная аномалия, как видно из уравнения (4.16), не содержит члена порядка am/b^2 , тогда как в (24.77) такой член имеется. Аналогичная ситуация обнаружена в работе [47], в которой показано, что при условии Пирани в случае ультрарелятивистского движения частицы с пробным спином имеет место совпадение $(\Delta\varphi_{\text{дес}})_S$ именно с поправкой к углу между асимптотами, но не с добавочной аномалией.

БИВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ КОМПЛЕКСНОЙ ВЕКТОРНОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Преобразование, составляющее главный предмет теории относительности, это—преобразование Г. А. Лоренца. Вывод его... не дает никаких опорных пунктов для обсуждения положения, занимаемого лоренцевым преобразованием в ряду других возможных преобразований и не показывает путей, которые могли бы повести к новым преобразованиям.

Н. А. УМОВ

ВВЕДЕНИЕ

Построение общей теории калибровочных условий, накладываемых на лоренцев базис, в частности, обнаружило, что калибровка тетрад и параметризация лоренцевых преобразований — весьма близкие вопросы. Некоторая свобода в выборе тетрад и в выборе параметризации — следствие недоопределенности систем уравнений соответственно $g_{\mu\nu} = h_{\mu}^k h_{\nu}^n \eta_{kn}$ и $\eta_{k'n'} = L_k{}^r L_n{}^s \eta_{rs}$ относительно h_{μ}^k и $L_k{}^n$. Как указывалось, первая из этих систем переходит во вторую в пределе, когда риманово пространство ОТО становится пространством Минковского. Из п. 13.13 видно, что тетрадная формулировка ОТО использует вещественные и допускает комплексные преобразования Лоренца и их подгруппы. В основе разных специальных формулировок ОТО лежит подгруппа Лоренца 3-пространственных вращений. Содержание предыдущих глав монографии в основном ограничивалось вещественными тетрадами, приводились примеры локальных преобразований Лоренца лишь с вещественными параметрами. Отмечалось, что вопросы о выборе калибровочных условий изотропных тетрад (комплексных) и вопросы преобразований комплексной группы Лоренца, оставляющих инвариантной систему уравнений ОТО (14.14), еще мало изучены. В частности, не выявлены простейшие неполные автономные наборы калибровок изотропных тетрад, которые отсекали бы от (14.14) автономные подсисте-

мы. Не показано, какая из подгрупп группы комплексных преобразований Лоренца может взять на себя роль, аналогичную подгруппе пространственных вращений. Перечисленные вопросы могут стать предметом ближайших исследований. При этом может оказаться полезным рациональный выбор параметризации локальных преобразований Лоренца.

Данная, последняя, глава монографии посвящена индексной записи параметризации лоренцевых преобразований, предложенной Ф. И. Федоровым [630—633] в матричной форме и всесторонне разработанной им с его учениками (см. § 25). Будучи весьма рациональной с точки зрения аппарата и приложений, эта параметризация интересна и с принципиальной стороны. В ней существенным образом используется разложение матриц на само- и антидуальные матрицы. Это разложение явилось одним из важнейших опорных пунктов, открывших путь к ряду преобразований группы Лоренца [633, 648]. Разумеется, указанное разложение в равной мере должно быть применимо и к локальным преобразованиям. Таким образом, представляется желательным включение в тетрадную формулировку ОТО уже хорошо развитой параметризации Ф. И. Федорова. Исследуя классификацию полей тяготения, он отметил [634], что само- и антидуальность — особый и существенный вид симметрии, и показал, что разложение матриц на само- и антидуальные составляющие приводит наиболее общим, естественным и прямым путем к соотношениям, на которых базируется классификация полей тяготения, и позволяет прояснить ее смысл (см. также статью [635]). Это — дополнительный стимул к перенесению параметризации Ф. И. Федорова в ОТО. Матричная форма этой параметризации, являясь большим преимуществом, особенно в приложениях СТО, на первых порах, однако, затрудняет ее использование в ОТО. Можно преодолеть это затруднение предварительным переходом к ее индексной записи.

Как отмечено в монографии [536, с. 68], тензорное и матричное исчисления в принципе не эквивалентны. В тензорном исчислении с самого начала задана группа и трансформационные свойства относительно нее рассматриваемых величин (ранг геометрических объектов, в частности, тензоров, и их закон преобразования). В матричном же исчислении первоначально не задана никакая группа. Матрица является более общим понятием и ее элементы не обязательно рассматривать как компоненты тензоров или более сложных геометрических объектов. В работе [536] говорится, что матричное исчисление является идеальным методом во всех случаях, когда приходится иметь дело с величинами валентности 2, положительными определенным метрическим тензором и декартовыми системами координат, в которых нет различия между ко- и контрава-

риантными величинами. В других случаях прямой матричный метод может оказаться менее удобным, менее автоматичным, чем индексный. Взаимоотношения между матричной и тензорной записями обсуждаются во многих монографиях, в частности, полезные сведения приведены в работе [580].

Поскольку в тетрадном представлении ОТО индексная запись усилена введением, кроме общековариантных индексов, также и лоренцевых индексов, естественно, что для будущего использования в ОТО параметризации Ф. И. Федорова желателен предварительный перевод ее в тензорную форму. Этот перевод завершен в работах [511, 636]. В данной главе приводится содержание этих работ с небольшими изменениями.

§ 25. ГРУППА ЛОРЕНЦА С КОМПЛЕКСНЫМИ ВЕКТОР-ПАРАМЕТРАМИ (МАТРИЧНАЯ ЗАПИСЬ)

25.1. Обзор основных соотношений и применений для групп SO(3.1) и SO(4.C). Согласно параметризации, предложенной Ф. И. Федоровым [630—633], всякая матрица $L \in \text{SO}(3.1)$ выражается через самодуальную и антидуальную матрицы q_-^* и q_+ :

$$L = \alpha_+(q) \alpha_-(q^*), \quad \alpha_{\pm}(q) = \frac{1+q_{\pm}}{\sqrt{1+q^2}}. \quad (25.1)$$

В свою очередь матрицы q_+ и q_- определяются через трехмерный комплексный вектор-параметр $q = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, объединяющий шесть параметров группы SO(3.1) следующим образом*):

$$q_{\pm} = \left(\begin{array}{c|c} q^{\times} & \pm \mathbf{q} \\ \hline \mp \mathbf{q} & 0 \end{array} \right), \quad q_{ab}^{\times} = -\varepsilon_{abc} q^c, \quad (25.2)$$

звездочка означает комплексное сопряжение, \mathbf{a} и \mathbf{b} — действительные трехмерные векторы. Используется метрика $\eta_{kn} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ пространства—времени Минковского с мнимой координатой.

Самое главное в методе Ф. И. Федорова — это установление и последовательное применение характерного для данной параметризации закона композиции вектор-параметров, который в случае

$$L(q'') = L(q) L(q') \quad (25.3)$$

имеет вид

$$q'' = \langle q, q' \rangle = \frac{q + q' + [q, q']}{1 - qq'}. \quad (25.4)$$

*) Введение комплексного вектора предполагает произвольное (3+1)-расщепление 4-пространства ОТО.

Предельная простота этого закона позволяет решать многие вопросы теории группы Лоренца, не обращаясь к использованию самих матриц преобразований и их представлений, оперируя только с вектор-параметрами группы. Таким образом, например, был установлен физический смысл вектор-параметров и получены ограничения, накладываемые на область их изменения [630—633], которые имеют простой вид

$$1 + \langle -\mathbf{q}_-, \mathbf{q} \rangle^2 = 1 - \mathbf{v}^2 \neq 0 \quad (25.5)$$

и очевидный физический смысл (здесь учтено, что $\langle -\mathbf{q}_*, \mathbf{q} \rangle = i\mathbf{v}$, где \mathbf{v} — скорость относительного движения).

Отыскание вектор-параметра $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, отвечающего произвольной 4×4 -матрице $L \in SO(3.1)$, удовлетворяющей условиям

$$L\tilde{L} = \tilde{L}L = I, \quad |L| = \det L = +1, \quad (25.6)$$

I — единичная матрица, осуществляется с помощью соотношения

$$\frac{1}{2}(\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-) = \frac{L - \tilde{L}}{L_c} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{a} \times \mathbf{1} + i\mathbf{b} & \\ \hline -i\mathbf{b} & 0 \end{array} \right). \quad (25.7)$$

Здесь \tilde{L} — транспонированная по отношению к L матрица, $|L| = \det L$ — детерминант, L_c — след (сумма диагональных элементов) матрицы L .

На примере векторной параметризации группы Лоренца $SO(3.1)$ [630—633] раскрывается до конца содержание самого понятия «параметризация группы». Она должна включать совокупность соотношений, которые устанавливают взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм) не только между элементами группы и их параметрами, но и между групповыми операциями над ними.

Об эффективности векторной параметризации и рациональности матричной записи свидетельствуют полученные с ее помощью многочисленные результаты в теории группы $SO(3.1)$ и их приложения: параметризация и детальное исследование малых групп Лоренца [632, 637], построение общих выражений для преобразований конечномерных неприводимых представлений группы Лоренца [638—640], построение ковариантных операторов проекции спина и разработка нового подхода к описанию спиновых свойств частиц в процессах рассеяния [641—644], разработка и применение методов непосредственного расчета амплитуд рассеяния [641, 642], решение узловых вопросов релятивистской кинематики [631, 644—648] и т. д.

Все это послужило основанием для распространения метода Ф. И. Федорова на более широкий класс преобразований, в частности на комплексную группу Лоренца $\tilde{SO}(4.C)$. Необходимость ее детального изучения вытекает из той роли, кото-

рую играет в современной теории квантовых негравитационных полей (в частности, аксиоматической) метод аналитического продолжения функций в комплексную область изменения переменных. Преобразования данной группы и группы $SO(3, C)$ нашли широкое применение при выводе и исследовании кроссинг-соотношений и других связей между s -, t - и u -амплитудами реакций, при устранении кинематических сингулярностей для аналитических амплитуд рассеяния и пр.

Распространение векторной параметризации на комплексную группу Лоренца $SO(4, C)$ дано в работах [649, 650], где матрица общего преобразования $L \in SO(4, C)$ задана с помощью двух линейно независимых комплексных трехмерных векторов $q = a + ib$ и $g = c + id$ в той же форме

$$L = \alpha_+(q) \alpha_-(q), \quad \alpha_{\pm}(q) = \frac{1 + q_{\pm}}{\sqrt{1 + q^2}}, \quad (25.8)$$

что и для действительной группы Лоренца (см. выражения (25.1)). Естественным образом обобщаются на случай группы $SO(4, C)$ и все остальные соотношения векторной параметризации группы $SO(3, 1)$, в том числе и закон композиции вектор-параметров (25.4). Благодаря этому получены новые результаты как в теории самой группы и ее представлений, так и в приложениях. Например, даны общие полиномиальные выражения для конечных преобразований конечномерных неприводимых представлений данной группы [649, 650]. Из этих выражений как частный случай следуют представления преобразования Лоренца в двумерном пространстве комплексных спинов, определяющие преобразования универсальной накрывающей группы $SL(2, C) \times SL(2, C)$ для группы $SO(4, C)$, выраженные через ее вектор-параметры. Показано, что такие широко используемые на практике преобразования группы Лоренца (вещественной и комплексной), как преобразования пространственных и гиперболических поворотов, преобразования малых групп и вигнеровские вращения, могут рассматриваться с единой точки зрения, а именно как преобразования с параметрами, удовлетворяющими условиям простоты [651]. Все они могут быть записаны в виде так называемых плоских преобразований. Использование характерного для векторной параметризации закона композиции (25.4) позволило представить матрицу произвольного преобразования группы $SO(4, C)$ в виде произведения матриц преобразований с простыми параметрами [649]. Было установлено важное преимущество векторной параметризации — ее регулярность, причем условие регулярности выполняется в данном случае не только локально, но и для конечных преобразований группы и ее конечномерных представлений во всей допустимой области из-

менения вектор-параметров. Это позволило упростить доказательство одной из основных теорем аксиоматической квантовой теории поля — теоремы Баргмана — Холла — Вайтмана [651, 652]. Недавно новые аспекты векторной параметризации и ее приложений в физике были вскрыты на основе привлечения кватернионного исчисления [653—655].

25.2. Соотношения Кэли и лоренцевы полиномы 3-й и 2-й степеней. Матрица преобразования группы Лоренца (как и любой ортогональной или псевдоортогональной группы) может быть задана с помощью антисимметричной матрицы (соотношения Кэли [631, 656—658]). В этом случае для группы $SO(4.C)$ получаются выражения [634, 647, 649, 657]:

$$L = L(A) = \frac{E+A}{E-A} = 2 \frac{\left\{ E - \frac{E}{2} (A^2)_c + A^2 \right\} (E+A)}{\left\{ 1 - \frac{1}{2} (A^2)_c \right\}^2 - \frac{1}{4} (A^4)_c} - E, \quad (25.9)$$

$$A = -\tilde{A} = \frac{L - \tilde{L}}{2 + L + \tilde{L}} = \frac{\left\{ E + \frac{1}{2} EL_c - \frac{1}{2} (L + \tilde{L}) \right\} (L - \tilde{L})}{\left(1 + \frac{1}{2} L_c \right)^2 - \frac{1}{2} (L^2)_c}. \quad (25.10)$$

Соотношения такого рода, как показано для случая группы $SO(3.1)$, в безындексной, матричной форме [646, 659] и в явно тензорной, бивекторной форме [35, 660] существенно упрощаются, если исходить непосредственно из векторной параметризации [630—632] данной группы. Так, если в случае комплексной группы Лоренца $SO(4.C)$ в качестве матрицы параметров вместо матрицы A (25.10) взять (см. (25.7))

$$B = -\tilde{B} = \frac{1}{2} (q_+ + q_-) = \frac{1}{L_c} (L - \tilde{L}), \quad (25.11)$$

то общее выражение для произвольного преобразования $L \in SO(4.C)$ принимает вид [650, 651]:

$$L = L(B) = \frac{1 - \frac{1}{2} (B^2)_c}{N(B)} \left\{ E + 2(B + B^2) \left[1 - \frac{1}{2} (B^2)_c \right]^{-1} \right\},$$

$$N(B) = \left\{ \left[1 - \frac{1}{2} (B^2)_c \right]^2 - \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{1}{2} (B^2)_c \right]^2 - \right. \right. \quad (25.12)$$

$$-\frac{1}{2} (B^4)_c \left. \right\} \left. \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Следовательно, вместо полинома третьей степени (25.9) получаем полином лишь второй степени относительно матрицы параметров. Более того, при таком подходе, опираясь на соотношение (25.4), можно записать и закон композиции для матриц параметров B [650, 651]. Однако он оказывается достаточно громоздким.

Соотношения, связывающие между собой матрицы A , B и q_+ , g_- , имеют вид [650, 651]:

$$A = \frac{\alpha g_- + \beta q_+}{\alpha + \beta}, \quad {}^D A = \frac{\alpha g_- - \beta q_+}{\alpha + \beta}, \quad (25.13)$$

$$\alpha = \sqrt{1+q^2}, \quad \beta = \sqrt{1-g^2}, \quad (25.14)$$

$$B = \frac{1}{2} (q_+ + g_-), \quad {}^D B = \frac{1}{2} (-q_+ + g_-).$$

Отсюда следует:

$$q_+ = B - {}^D B, \quad g_- = B + {}^D B, \quad (25.15)$$

где

$${}^D A_{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnhl} A_{hl}, \quad {}^D B_{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon_{mnhl} B_{hl} \quad (25.16)$$

— 4×4 -матрицы, дуальные исходным матрицам A и B (ε_{mnhl} — символ Леви-Чивита). Возможность представления матриц $SO(4.C)$ в характерном виде (25.8), т. е. в виде произведения двух коммутирующих друг с другом матриц α_{\pm} (первого порядка относительно параметров), непосредственно вытекает из специфических особенностей алгебры Ли для этой группы (см., например [651]). Эта алгебра, как известно, распадается на две коммутирующие между собой алгебры Ли, каждая из которых изоморфна алгебре Ли группы трехмерных вращений. Сама группа $SO(4.C)$ локально изоморфна прямому произведению $SO(3.C) \times SO(3.C)$. Таким образом, применительно к потребностям полевой теории элементарных частиц и релятивистской кинематики все основные соотношения векторной параметризации групп $SO(3.1)$ и $SO(4.C)$ были переформулированы в такой матричной форме, при которой в качестве параметров выступают элементы антисимметричной 4×4 -матрицы, т. е. бивектора [646, 650, 651, 659]. Полученный в рамках такого подхода закон композиции для матриц-параметров в целом оказался достаточно громоздким и малоприменимым для приложений.

25.3. Основные итоги и требования к бивекторной записи параметризации. Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы.

I. В настоящее время имеется хорошо разработанный и всесторонне апробированный аппарат обычной, $SO(3,1)$, и комплексной, $SO(4,С)$, групп Лоренца, в основе которого лежит метод векторной параметризации Ф. И. Федорова [630—633, 650, 651]. В рамках данного подхода сформулирована совокупность тех соотношений, которые определяют параметризацию конечных непрерывных преобразований этих некомпактных групп. Она включает:

а) соотношения, позволяющие строить явные выражения для матриц преобразований группы по заданным ее параметрам, для которых определена допустимая область их изменения;

б) соотношения, позволяющие отыскивать параметры группы по известным выражениям для матриц преобразований, удовлетворяющих условиям, определяющим их принадлежность к рассматриваемой группе;

в) соотношения, устанавливающие изоморфное соответствие между групповыми операциями над элементами группы и групповыми операциями над параметрами, т. е. соотношения (закон композиции), позволяющие по известным параметрам двух преобразований отыскивать параметры преобразования, являющегося произведением двух исходных.

Возможность получения соотношений такого типа во всей их совокупности, причем в предельно простой и удобной для практического использования форме, обеспечивается в рамках векторной параметризации рациональным выбором параметров группы, объединяемых в трехмерные комплексные векторы — вектор-параметры группы Лоренца. Все соотношения данной группы записываются в компактной векторно-матричной (безындексной) форме при фиксированной метрике пространства—времени Минковского. Векторная параметризация группы Лоренца существенно использует также и соотношения дуальности, в частности, в рассмотрение вводятся само- и антидуальные матрицы-параметры.

II. Из сказанного вытекают следующие требования к индексной бивекторной записи векторной параметризации Ф. И. Федорова. Она должна:

а) включать всю совокупность соотношений (см. Ia—Iв), определяющих параметризацию группы, и сохранять основные особенности и преимущества векторной параметризации групп $SO(3,1)$ и $SO(4,С)$, для чего она должна быть построена аналогично последней и совпадать с ней при переходе к вектор-параметрам;

б) раскрывать до конца связь и соответствие между би-

векторной и векторной параметризациями, в частности, явно должно быть показано, что характерная для векторной параметризации структура матриц конечных преобразований Лоренца (см. соотношения (25.1) и (25.6)) может быть получена непосредственно из соотношений Кэли при последовательном использовании соотношений дуальности для бивектор-параметров;

в) допускать свободу в определении операции дуальности и выборе конкретного вида локального метрического тензора ОТО, что в свою очередь ставит задачу выяснения влияния этой свободы на адекватность соответствия между бивекторной и векторной параметризациями;

г) включать удобную для практического использования формулировку закона композиции бивектор-параметров, что может быть достигнуто в результате перехода от сложного закона композиции бивектор-параметров общего вида для группы SO(4.C) к закону композиции само- и антидуальных бивектор-параметров, эквивалентному простому закону композиции (25.4) вектор-параметров.

Содержание § 26 и 27 данной главы удовлетворяет этим требованиям.

§ 26. ГРУППА ЛОРЕНЦА SO(3.1) С ВЕЩЕСТВЕННЫМ БИВЕКТОР-ПАРАМЕТРОМ (ТЕНЗОРНАЯ ЗАПИСЬ)

26.1. Предварительный поиск. Следуя статье [660], а также монографии [35], введем выражение для коэффициентов преобразования вещественной группы Лоренца

$$L^k_n = \Delta^{-1} \{ (\eta^{km} + p^{km}) (\eta_{mn} - p_{mn}) - {}^D p^{km} {}^D p_{mn} \}, \quad (26.1)$$

$$\Delta = (1 + i_2)^2 + i_1^2, \quad i_1 = \frac{1}{2} p_{kn} {}^D p^{kn}, \quad i_2 = \frac{1}{2} p_{kn} p^{kn}.$$

Здесь p_{kn} — вещественный бивектор общего вида (сложный, непростой [35]), а ${}^D p_{kn} = \frac{1}{2} \eta_{knrs} p^{rs}$ — бивектор, дуальный бивектору p_{kn} . Дискриминантный тензор η_{knrs} выбран в виде $\eta_{knrs} = \eta^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_{knrs}$. В качестве метрического тензора можно взять $\text{diag} (+1, +1, +1, +1)$ или $\text{diag} (+1, +1, +1, -1)$. Учет соотношений

$${}^D p^{km} {}^D p_{mn} = {}^D p^{km} \eta_{mn}, \quad {}^D p^{km} p_{mn} = p^{km} {}^D p_{mn} \quad (26.2)$$

позволил преобразовать коэффициенты (26.1) к форме, характерной для параметризации Ф. И. Федорова [35, 660]:

$$L_n^k = \frac{(\eta^{km} + q_+^{km})(\eta_{mn} + q_{-mn})}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} q_+^{rs} q_{+rs}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} q_-^{rs} q_{-rs}}}, \quad (26.3)$$

где

$$q_{\pm kn} = p_{kn} \pm {}^D p_{kn}, \quad Dq_{\pm}^{kn} = \pm q^{\pm kn}. \quad (26.4)$$

В отличие от принятых в работах [630 — 632] обозначений в статье [660] знак + у бивектор-параметра q_{\pm}^{kn} обозначает его самодуальность, а знак — антидуальность; при получении уравнений (26.3), (26.4) использовалась метрика $\text{diag}(+1, +1, +1, -1)$.

Соответствие между матрицами q_+ и q_-^* и бивектор-параметрами q_{\pm}^{kn} устанавливалось с помощью следующих соотношений:

$$S_{kr} q_+^{rm} S_{mn} = (q_-^*)_{kn}, \quad S_{kr} q_-^{rm} S_{mn} = (q_+)_{kn}, \quad (26.5)$$

$$q_c = a_c + ib_c, \quad q_c^* = a_c - ib_c, \quad S = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & i \end{array} \right),$$

где учтено, что

$$q_{\pm}^{kn} = \left(\begin{array}{c|c} q_{\pm}^{ab} = -(a^c \mp ib^c) & q_{\pm}^{c4} = \pm i(a^c \mp ib^c) \\ \hline q_{\pm}^{4c} = \mp i(a^c \mp ib^c) & 0 \end{array} \right). \quad (26.6)$$

Таким образом, от коэффициентов преобразования (26.1) с бивектор-параметром общего вида легко перейти к коэффициентам (26.3) с тремя независимыми компонентами самодуального бивектора q_{+kn} и с тремя антидуального бивектора q_{-kn} в качестве параметров. Переход с учетом матрицы (26.6) к трехмерной форме записи и применение унитарного преобразования (26.5) приводят коэффициенты (26.3) к виду (25.1).

В работе [660] предполагалось, что параметры p_{kn} произвольны, но вопрос о связи между различными бивектор-параметрами еще не рассматривался. Естественно изучить эту связь с помощью дуальных преобразований бивекторов, которые, в частности, изучались для электромагнитного поля [661].

26.2. Разные случаи лоренцева полинома $L \in \text{SO}(3,1)$ 2-й степени с вещественным бивектор-параметром. По аналогии с полиномиальным выражением

$$L_n^k = a p_1^k p_n + b p_2^k p_n + c p_2^k p_n + d p_2^k p_n + f \delta_n^k, \quad (26.7)$$

определяющим так называемые плоские преобразования Лоренца (см. работы [663, 664]), выражение для коэффициентов преобразования группы $\text{SO}(3,1)$ общего вида было представлено в форме *) [662, 665]

*) К этому виду полинома можно прийти путем разложения [666, 667] $L = e^H = 1 + H + H^2/2 + \dots$, где H — антисимметричная матрица.

$$L^k_n = a\delta^k_n + bp^k_n + c^D p^k_n + dp^{km} p_{mn}. \quad (26.8)$$

Будем называть его лоренцевым полиномом. При этом были учтены соотношения

$$p_{km} p^{mn} = -i_2 \delta^m_k + {}^D p_{km} {}^D p^{nm}, \quad p_{km} {}^D p^{nm} = {}^D p^{mn} p_{mk} = \frac{i_1}{2} \delta^m_k, \quad (26.9)$$

$$p_{km} p^{mr} p_{rn} = -i_2 p_{kn} - \frac{i_1}{2} {}^D p_{kn},$$

$$p_{km} p^{mrD} p_{rn} = -\frac{i_1}{2} p_{kn}, \quad p_{km} {}^D p^{mrD} p_{rn} = -\frac{i_1}{2} p_{kn}, \quad (26.10)$$

$${}^D p_{km} {}^D p^{mrD} p_{rn} = i_2^D p_{kn} - \frac{i_1}{2} p_{kn}, \quad p_{km} {}^D p^{mr} p_{rn} = -\frac{i_1}{2} p_{kn}.$$

Подстановка полинома (26.8) в систему уравнений $L^{km} L_{nm} = \delta^k_n$, определяющую лоренцевы преобразования, дала два независимых уравнения [662]:

$$a^2 - i_2 c^2 + i_1 bc + \frac{i_1^2}{4} d^2 = 1, \quad (26.11)$$

$$2ad - b^2 - c^2 - i_2 d^2 = 0$$

относительно коэффициентов полинома.

В работе [662] рассмотрено частное решение системы (26.11) при $c=0$. Тогда матрица (26.8) принимает вид

$$L^k_n = (u^2 + i_1^2)^{-1/2} \{ u\delta^k_n + 2\sqrt{u - i_2} p^k_n + 2p^{km} p_{mn} \}, \quad (26.12)$$

где $u = 4d^2 - i_1^2$. Если же в выражении (26.12) принять $u = 1 + i_2$, что эквивалентно условию $b = d$, то из уравнений (26.11) следует:

$$b = d = 2a(1 + i_2)^{-1}, \quad a = \pm (1 + i_2) [(1 + i_2)^2 + i_1^2]^{-1/2}, \quad (26.13)$$

$$L^k_n = \frac{1}{\Delta} [(1 + i_2) \delta^k_n + 2(p^k_n + p^{km} p_{mn})]. \quad (26.14)$$

Нетрудно убедиться, что при $a > 0$ принятые условия, дополняющие систему (26.11), соответствуют параметризации с комплексным вектор-параметром. В частном случае простого бивектора (когда $i_1 = 0$) выражение (26.12) упрощается:

$$L^k_n = \delta^k_n + \frac{2}{1 + i_2} (p^k_n + p^{km} p_{mn}) \quad (26.15)$$

и соответствует простому (плоскому) преобразованию Лоренца. В работах [35, 662] указано и несколько иных частных решений системы (26.11). Так, если систему (26.11) дополнить условиями

$$c = 0, \quad d = 2a, \quad (26.16)$$

то из нее найдем

$$a = \pm (1 + i_1^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad b = 2 \sqrt{1 - i_2} / \sqrt{1 + i_1^2}, \quad (26.17)$$

$$L^k_n = \frac{1}{\sqrt{1 + i_1^2}} (\pm \delta^k_n + 2 \sqrt{1 - i_2} p^k_n \pm p^{kr} p_{rn}). \quad (26.18)$$

Если (частное решение)

$$a = b = c = d, \quad (26.19)$$

то

$$a = \frac{1}{\Delta}, \quad i_2 = 0, \quad L^k_n = \frac{1}{\Delta} (\delta^k_n + p^k_n + {}^D p^k_n + p^{kr} p_{rn}). \quad (26.20)$$

В этом случае бивектор-параметр подчинен ограничению

$${}^D p^{c0} = + p^{c0}, \quad {}^D p^{ab} = - p^{ab}. \quad (26.21)$$

26.3. Семейство бивектор-параметров. Кроме указанных частных решений системы (26.11) при переводе в тензорную запись параметризации (25.8) (см. § 30) найдено еще одно частное решение [511]. Оно интересно тем, что связано с подходом Кэли. Там же поставлен вопрос о связи между собой различных решений системы (26.11), т. е. исследовании свойства бивектор-параметров. Этот вопрос решен в работе [636]. Изложим кратко ее основные результаты (несколько изменив ход изложения и частично обозначения)*.

Как известно, бивекторы могут быть связаны друг с другом посредством преобразований [501, 667]

$$p_{kn} = \alpha p'_{kn} + \beta {}^D p'_{kn} = \rho (\cos \varphi p'_{kn} - \sin \varphi {}^D p'_{kn}). \quad (26.22)$$

Здесь α, β, ρ — произвольные действительные коэффициенты, φ — угол дуального поворота. Из соотношения (26.22) следует, что при этом происходит преобразование и инвариантов бивектора:

$$\begin{aligned} i_1 &= \rho^2 (i'_1 \cos 2\varphi - i'_2 \sin 2\varphi), \\ i_2 &= \rho^2 (i'_1 \sin 2\varphi - i'_2 \cos 2\varphi). \end{aligned} \quad (26.23)$$

Подстановка параметров (26.22) в коэффициенты (26.8) показывает, что переход в полиноме к другому бивектору при-

*) В работе [636] принято $\eta_{knrs} = -\sqrt{-1} \eta_{knrs}$.

водит к перегруппировке членов, в результате чего меняются коэффициенты полинома:

$$\begin{aligned} a' &= a + \rho^2 d (i_2 \sin \varphi - i_1 \cos \varphi) \sin \varphi, \\ b' &= \rho (b \cos \varphi - c \sin \varphi), \\ c' &= \rho (c \cos \varphi + b \sin \varphi), \quad d' = \rho^2 d. \end{aligned} \quad (26.24)$$

Таким образом, семейство бивектор-параметров (26.22) и соответственно семейство лоренцевых полиномов определяются двумя произвольными функциями от инвариантов бивектора — «масштабным множителем» ρ и углом «дуального поворота» φ . Выражение для семейства лоренцевых полиномов (оно является общим решением недоопределенной системы (26.11)) найдено в виде [636]

$$\begin{aligned} L^k_n &= \frac{1}{\Delta} [(\rho^2 + i_2) \delta^k_n + 2\rho \cos \varphi p^k_n + 2\rho \sin \varphi {}^D p^k_n + 2\rho^{kr} p_{rn}], \\ \Delta^2 &= \rho^4 + 2\rho^2 (i_1 \sin 2\varphi + i_2 \cos 2\varphi) + i_1^2 + i_2^2. \end{aligned} \quad (26.25)$$

Задавая функции $\rho (i_1, i_2)$ и $\varphi (i_1, i_2)$, фиксируем в этом семействе полином с определенными коэффициентами. Обратное, если задан лоренцев полином вида (26.8) с фиксированными коэффициентами, то он принадлежит семейству полиномов (26.25) и выделяется из него заданием ρ и φ , следующим образом связанным с его коэффициентами:

$$\rho^2 = \frac{1}{d^2} (b^2 + c^2), \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{c}{b}. \quad (26.26)$$

26.4. Семейство законов композиции. Как видно из § 25, параметризация Ф. И. Федорова содержит уникально простой закон композиции. Коль скоро имеется семейство бивектор-параметров, то ему, очевидно, соответствует и семейство законов композиции.

В работе [659] закон композиции бивектор-параметров представлен в виде

$$\begin{aligned} p^k_n &= \frac{1}{(1 - i_2')^2 + (i_1')^2} \{ (1 - i_2') (p^k_n + p^k_n + 2p^k_{[k|r]} p^r_n) - \\ &\quad - i_1' ({}^D p^k_n + {}^D p^k_n) + 2p^k_{[k|r]} {}^D p^r_m \}, \end{aligned} \quad (26.27)$$

где

$$L^k_n (p'_{rs}) = L^k_m (p'_{rs}) L^m_n (p'_{rs}). \quad (26.28)$$

В работе [636] выяснено, при каком выборе φ и ρ имеет место простой закон композиции. Действительно, переходя в выра-

жении (26.27) от $p'_{i kn}$ к p_{kn} , находим сложное выражение для семейства законов композиции, содержащее функции ρ и φ . Это выражение сильно упрощается, если перейти к комплексному бивектор-параметру $q_{kr} = \rho_{kr} - i^D \rho_{kr}$. Тогда соотношение (26.27) принимает вид

$$q_{km} = \frac{h_3}{h_1 h_2 - \frac{1}{4} q_1^{rs} q_{rs} + q_1 [k^r q_{r|m}]}, \quad h_i = \rho e^{-i\varphi_i}. \quad (26.29)$$

Следовательно, при

$$h_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varphi_i = 0 \quad (26.30)$$

из семейства законов композиции (26.29) выделяется закон композиции параметризации Ф. И. Федорова.

§ 27. ГРУППА ЛОРЕНЦА $SO(4, C)$ С КОМПЛЕКСНЫМИ БИВЕКТОР-ПАРАМЕТРАМИ (ТЕНЗОРНАЯ ЗАПИСЬ)

27.1. Тензорная запись соотношений Кэли и лоренцева полинома $L \in SO(4, C)$ 4-й степени. Матрица L произвольного конечного преобразования комплексной группы Лоренца $SO(4, C)$ удовлетворяет условиям

$$LG\bar{L} = G, \quad \det L = +1. \quad (27.1)$$

Запишем соотношения Кэли в виде

$$L = (G + \rho) B, \quad (27.2)$$

где матрица B такова, что

$$B(G - \rho) = (G - \rho)B = E, \quad (27.3)$$

причем

$$\det(G \pm \rho) \neq 0. \quad (27.4)$$

Здесь $\rho = -\bar{\rho}$ — антисимметричная 4×4 -матрица, независимые элементы которой определяют параметры группы, а E — единичная матрица в четырехмерном пространстве, G — 4×4 -матрица метрического тензора этого пространства.

Перейдем к индексной записи, вводя следующие очевидные символические обозначения:

$$L = (L^k_n), \quad \rho = (\rho^k_n), \quad B = (B^k_n), \quad E = (\delta^k_n), \quad G = (\eta^{kn}),$$

$$G' = (\eta_{kn}), \quad GG' = G'G = \eta^{km}\eta_{mn} = E$$

и учитывая, что

$$GA = AG = (\eta^{km} A_m^n) = (A^{kn}), \quad G'A = AG' = (\eta_{km} A^m_n) = (A_{kn}).$$

Тогда соотношения (27.2)—(27.4) легко представить в явно выраженной тензорной форме*):

$$L_{kn} = (\eta_{km} + p_{km}) B^m_n, \quad (27.5)$$

$$B^{km} (\eta_{mn} - p_{mn}) = (\eta^{km} - p^{km}) B_{mn} = \delta^k_n, \quad (27.6)$$

$$\det(\eta_{kn} \pm p_{kn}) \neq 0, \quad (27.7)$$

$$L^{km} L_{nm} = \delta^k_n, \quad \det L_{kn} = +1. \quad (27.8)$$

В качестве параметров преобразований L_{kn} группы $SO(4, C)$ примем независимые компоненты комплексного бивектора p_{kn} общего вида (непростого). Представим B_{kn} в виде полиномиального выражения относительно p_{kn} , решив уравнение (27.6) относительно B_{kn} . Известно, что если

$$\alpha^{km} a_{mn} = a^{km} \alpha_{mn} = \delta^k_n, \quad (27.9)$$

и выполняется условие $\det(a_{kn}) \neq 0$, то матрица α_{kn} определяется соотношением

$$\alpha^{kn} = \pm \frac{1}{3! \det(a_{kn})} \varepsilon^{kmpq} \varepsilon^{nlit} a_{im} a_{lp} a_{tq}, \quad (27.10)$$

где ε^{kmpq} — символ Леви-Чивита. Здесь знаки $+$ и $-$ относятся к выбору метрики η_{kn} соответственно в виде $\text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ или $\text{diag}(+1, +1, +1, -1)$. В рассматриваемом случае $a_{kn} = \eta_{kn} - p_{kn}$ и $\alpha_{kn} = B_{kn}$. Поэтому из соотношений (27.9), (27.10) для B_{kn} находим

$$B^{kn} = \pm b^{-1} \varepsilon^{kmlp} \varepsilon^{nqrs} (\eta_{qm} - p_{qm}) (\eta_{rl} - p_{rl}) (\eta_{sp} - p_{sp}), \quad (27.11)$$

где

$$b = 3! \det(\eta_{kn} - p_{kn}) \neq 0. \quad (27.12)$$

Используя свойства ε_{mnpq} , преобразуем найденное B^{kn} к виду

$$B^{kn} = b_0^{-1} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} p^{rs} p_{rs} \right) (\eta^{kn} + p^{kn}) + p^{km} p_m^n + p^{km} p_{ms} p^{sn} \right\}, \quad (27.13)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{3!} b = \det(\eta_{kn} - p_{kn}) \neq 0. \quad (27.14)$$

Подстановка выражения (27.13) в коэффициенты (27.5) приводит к громоздкому выражению для L_{kn} в виде полинома четвертой степени относительно p_{kn} .

*) Здесь и далее латинские индексы первой половины алфавита пробегают значения 1, 2, 3, а начиная с $k, l, m \dots$ — значения 1, 2, 3, 4 или 0, 1, 2, 3 в зависимости от выбора метрики η_{kn} в виде $\text{diag}(+1, +1, +1, +1)$ или $\text{diag}(+1, +1, +1, -1)$.

27.2. Переход к лоренцевому полиному $L \in SO(4, C)$ 2-й степени. Как и в § 26, введем в рассмотрение бивектор ${}^D p_{kn}$, но дискриминантный тензор η_{knml} зададим в виде

$$\eta_{knml} = \sqrt{\pm \eta \varepsilon_{knml}}. \quad (27.15)$$

Поскольку в дальнейшем одновременно будут рассматриваться два упомянутых выше варианта выбора метрики η_{kn} , то выражения (27.14), (27.15) фактически содержат в себе четыре варианта определения операции дуальности:

а) $\eta_{knml} = \sqrt{+\eta \varepsilon_{knml}}$, $\eta = +1$; б) $\eta_{knml} = \sqrt{-\eta \varepsilon_{knml}}$, $\eta = +1$;

$$(27.16)$$

в) $\eta_{knml} = \sqrt{+\eta \varepsilon_{knml}}$, $\eta = -1$; г) $\eta_{knml} = \sqrt{-\eta \varepsilon_{knml}}$, $\eta = -1$.

Это придает всем последующим соотношениям дополнительную общность. Применим операцию дуальности дважды:

$${}^{DD} p_{kn} = \pm p_{kn}, \quad {}^{DD} p^{kn} = \pm p^{kn} \quad (27.17)$$

(здесь и далее, если специально не оговорено, верхние и нижние знаки соответствуют верхнему и нижнему знакам в определении (27.15)). Как и в случае выражений (26.9), путем непосредственного расчета можно убедиться в справедливости следующих соотношений для любого бивектора p_{kn} и отличного от него бивектора p'_{kn} :

$$p^{km} p_{mn} = \mp {}^D p^{km} {}^D p_{mn} - i_2 \delta^k_n, \quad (27.18)$$

$${}^D p^{km} p_{mn} = p^{km} {}^D p_{mn} = -\frac{1}{2} i_1 \delta^k_n, \quad (27.19)$$

$$p^{km} {}^D p'_{mn} + p'^{km} {}^D p_{mn} = -\frac{1}{2} (p^{rs} {}^D p'_{rs}) \delta^k_n, \quad (27.20)$$

$${}^D p^{km} p'_{mn} + {}^D p'^{km} p_{mn} = -\frac{1}{2} (p^{rs} {}^D p'_{rs}) \delta^k_n, \quad (27.21)$$

где $i_1 = \frac{1}{2} p_{kn} {}^D p^{kn}$, $i_2 = \frac{1}{2} p_{kn} p^{kn}$ — инварианты бивектора p_{kn} (комплексные скаляры). Умножая (27.18) на p_{kn} и учитывая (27.19), нетрудно получить соотношения, необходимые для упрощения B_{kn} и L_{kn} :

$$p^{km} p_{ms} p^{sn} = \pm \frac{i_1}{2} {}^D p^{kn} - i_2 p^{kn}, \quad (27.22)$$

$$p^{km} p_{ms} p^{sr} p_{rn} = \mp \left(\frac{i_1}{2} \right)^2 \delta^k_n - i_2 p^{km} p_{mn}.$$

Подставляя выражение для B^{kn} (27.13) в коэффициенты (27.5) и используя соотношения (27.22), находим лоренцев полином общего преобразования группы $SO(4,C)$ в виде

$$L_{kn} = b_0^{-1} \left\{ \left[1 + i_2 \mp \left(\frac{i_1}{2} \right)^2 \right] \eta_{kn} + 2\rho_{kn} + 2\rho_{km} p^m_n \pm i_1^D \rho_{kn} \right\}, \quad (27.23)$$

причем из условия (27.9) следует, что

$$b_0 = \det(\eta_{kn} - \rho_{kn}) = 1 + i_2 \pm \left(\frac{i_1}{2} \right)^2 \neq 0. \quad (27.24)$$

Таким образом, всякая матрица преобразования L_{kn} группы $SO(4,C)$ представима в виде полинома второй степени относительно комплексного бивектор-параметра ρ_{kn} с коэффициентами, зависящими только от инвариантов этого бивектора.

Выражение (27.23) можно рассматривать как частный случай общего представления L_{kn} в виде полинома второй степени относительно комплексного непростого бивектора

$$L_{kn} = A\eta_{kn} + B\rho_{kn} + C^D \rho_{kn} + D\rho_{km} p^m_n, \quad (27.25)$$

где A, B, C, D — произвольные комплексные коэффициенты, которые могут содержать ρ_{kn} лишь в свертках i_1 и i_2 . Рекуррентные соотношения типа (27.18) — (27.22) позволяют свести члены, содержащие более высокие степени ρ_{kn} , к одному из членов в правой части (27.25). Аналогично изложенному в § 26 приходим к двум уравнениям относительно четырех неизвестных величин A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A^2 + i_1 B C \pm i_2 C^2 \mp \frac{i_1^2}{4} D^2 &= 1, \\ 2AD - B^2 \pm C^2 - i_2 D^2 &= 0. \end{aligned} \quad (27.26)$$

Эти уравнения обобщают систему (26.11) на случай комплексной группы Лоренца, а также учитывают четыре варианта (27.16) определения операции дуальности. В зависимости от выбора двух дополнительных условий, присоединяемых к уравнениям (27.26), можно прийти к различным выражениям для A, B, C, D через инварианты бивектор-параметра ρ_{kn} . В частности, при дополнительных условиях

$$B = D = 2b_0^{-1} \quad (27.27)$$

находим коэффициенты A и C , входящие в выражение (27.23). Возможны и другие частные решения. Таким образом, если исходить из соотношений Кэли (27.2), то это приводит к частному решению системы (27.26) в виде

$$A = \frac{1 + i_2 \mp (i_4/2)^2}{1 + i_2 \pm (i_4/2)^2}, \quad B = D = \frac{2}{1 + i_2 \pm (i_4/2)^2},$$

$$C = \frac{\pm i_4}{1 + i_2 \pm (i_4/2)^2}. \quad (27.28)$$

Сказанное в п. 26.3 о дуальных поворотах бивектор-параметров можно обобщить и на группу SO (4,C).

27.3. Выражение комплексного бивектор-параметра через лоренцевы полиномы. Нетрудно установить, что соотношения (27.5) и (27.6) обратимы, т. е.

$$\rho_{kn} = (L_{km} - \eta_{km}) C^m_n, \quad (27.29)$$

$$C_{km} (L^m_n + \eta^m_n) = (L_{km} + \eta_{km}) C^m_n = \eta_{kn}. \quad (27.30)$$

Воспользуемся (27.30) и (27.10) для отыскания полиномиального выражения, определяющего ρ_{kn} через матрицу преобразований L_{kn} . Тогда имеем

$$C^{kn} = \pm C^{-1} \varepsilon^{hmpq} \varepsilon^{nlit} (L_{lm} + \eta_{lm})(L_{ip} + \eta_{ip})(L_{tq} + \eta_{tq}),$$

$$C = 3! \det(L_{kn} + \eta_{kn}) \neq 0.$$

После несложных, но громоздких вычислений находим

$$C^{kn} = C_0^{-1} \left\{ \left[1 + 2L^m_m + \frac{1}{2} (L^m_m)^2 - \frac{1}{2} L^{ms} L_{sm} \right] \eta^{kn} - \right.$$

$$\left. - \left[1 + L^m_m + \frac{1}{2} (L^m_m)^2 - \frac{1}{2} L^{ms} L_{sm} \right] L^{kn} + \right.$$

$$\left. + (1 + L^m_m) L^{ks} L_s^n - L^{ks} L_{sm} L^{mn} \right\}, \quad (27.31)$$

$$C_0 = 2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} L^m_m \right)^2 - \frac{1}{4} L^{ms} L_{sm} \right] \neq 0,$$

что является следствием соотношения (27.30). Из уравнений (27.31), (27.29) и характеристического уравнения для L_{kn}

$$L_{km} L^m_r L_{rs} L^s_n - (L^m_m) (L_{ks} L^{sr} L_{rn} + L_{kn}) +$$

$$+ \frac{1}{2} [(L^m_m)^2 - L^{ms} L_{sm}] L_{ks} L^s_n + \eta_{kn} = 0,$$

а также условия ортогональности комплексных преобразований Лоренца получаем искомое выражение для бивектор-параметра:

$$\rho_{kn} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} L^m_m\right) (L_{kn} - L_{nk}) - \frac{1}{2} (L_k^m + L_m^k) (L_{mn} - L_{nm})}{\left(1 + \frac{1}{2} L^m_m\right)^2 - \frac{1}{4} (L^{ms} L_{sm})} \quad (27.32)$$

27.4. Преобразование лоренцева полинома к форме, характерной для векторной параметризации. Приведем выражение (27.23) для матрицы комплексного преобразования Лоренца L_{kn} к более компактной форме. Для этого учтем, что любой бивектор ρ_{kn} можно однозначно представить в виде

$$\rho_{kn} = \frac{1}{2} (\rho_{+kn} + \rho_{-kn}), \quad (27.33)$$

где по определению

$$\rho_{+kn} = \rho_{kn} + \sqrt{\pm 1}^D \rho_{kn}, \quad (27.34)$$

$$\rho_{-kn} = \rho_{kn} - \sqrt{\pm 1}^D \rho_{kn}.$$

Знаки $+$ и $-$ у ρ_{+kn} и ρ_{-kn} выбраны так же, как в работах [35, 660].

Учитывая соотношения (27.17) и (27.18), получаем

$${}^D \rho_{+kn} = \pm \sqrt{\pm 1} \rho_{+kn}, \quad {}^D \rho_{-kn} = \mp \sqrt{\pm 1} \rho_{-kn}, \quad (27.35)$$

$$\rho_{+km} \rho_{-mn} = \rho_{-km} \rho_{+mn}, \quad \rho_{+k}^{\text{km}} \rho_{-km} = 0. \quad (27.36)$$

Следовательно, бивекторы ρ_{+kn} и ρ_{-kn} линейно независимы и имеют по три независимые компоненты, не сводящиеся друг к другу, в том числе и при комплексном сопряжении.

Учет соотношений (27.19) и свойств ρ_{+kn} и ρ_{-kn} позволяет преобразовать коэффициенты (27.23) к виду

$$\begin{aligned} L_{kn} = b_0^{-1} \left\{ \left[1 - \left(\frac{i_- + i_+}{8} \right)^2 \right] \eta_{kn} + \rho_{+km} \rho_{-m}^n + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{i_- - i_+}{8} \right) \rho_{+kn} + \left(1 + \frac{i_- - i_+}{8} \right) \rho_{-kn} \right\}, \quad (27.37) \\ b_0 = 1 + \frac{1}{4} (i_+ + i_-) + \left(\frac{i_- - i_+}{8} \right)^2 \neq 0, \\ i_+ = \frac{1}{2} \rho_{+km} \rho_{+km}, \quad i_- = \frac{1}{2} \rho_{-km} \rho_{-km}. \end{aligned}$$

Тем самым получено выражение для преобразования группы $SO(4, C)$ через два линейно независимых бивектора ρ_{+kn} и ρ_{-kn} , содержащих по шесть действительных параметров группы.

Рассмотрим случай, когда в выражении для матрицы Лоренца (27.37) коэффициент при η_{kn} отличен от нуля:

$$a = 1 - \left(\frac{i_- + i_+}{8} \right)^2 \neq 0. \quad (27.38)$$

Выражение (27.37) для L_{kn} теперь можно представить в виде

$$L_{kn} = ab_0^{-1} \left\{ \eta_{kn} + \frac{p_{+kn}}{1 + (i_- - i_+)/8} + \frac{p_{-kn}}{1 - (i_- - i_+)/8} + \frac{p_{+km}}{1 + (i_- - i_+)/8} \frac{p_{-m}}{1 - (i_- - i_+)/8} \right\}. \quad (27.39)$$

Примем обозначения

$$P_{\pm kn} = \frac{p_{\pm kn}}{1 \pm \frac{i_- - i_+}{8}}, \quad I_{\pm} = \frac{1}{2} P_{\pm rs} P_{\pm rs}, \quad (27.40)$$

где знаки в знаменателе соответствуют знакам у $p_{\pm kn}$. Отсюда следует, что $P_{\pm kn}$ обладают теми же свойствами, что и $p_{\pm kn}$. Учет коммутативности η_{kn} и $P_{\pm kn}$ и несложные преобразования коэффициента ab_0^{-1} позволяют представить коэффициенты (27.39) в более компактной форме

$$L_{kn} = \alpha_{+km} \alpha_{-m}, \quad \alpha_{\pm kn} = \frac{\eta_{kn} + P_{\pm kn}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} I_{\pm}}}. \quad (27.41)$$

При этом справедливы условия $1 + \frac{1}{2} I_{\pm} \neq 0$, которые объединяют в себе неравенство (27.38) и требование $b_0 \neq 0$. Выделим два следующих случая. Примем, что $i_+ \neq i_-$. Тогда общее преобразование комплексной группы Лоренца задается выражением (27.41), а его параметрами служат линейно независимые бивекторы P_{+kn} и P_{-kn} . В случае же $i_+ = i_-$, поскольку $P_{\pm kn} = = p_{\pm kn}$, имеем

$$L_{kn} = \alpha_{+km} \alpha_{-m}, \quad \alpha_{\pm kn} = \frac{\eta_{kn} + p_{\pm kn}}{\sqrt{1 + i_{\pm}/2}}. \quad (27.42)$$

Если неравенство (27.38) нарушается, то

$$a = 1 - \left(\frac{i_- - i_+}{8} \right)^2 = \left(1 - \frac{i_- - i_+}{8} \right) \left(1 + \frac{i_- - i_+}{8} \right) = 0,$$

в результате чего, как нетрудно убедиться, вытекающие из коэффициентов (27.37) матрицы

$$M_{kn} = b_0^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{i_- - i_+}{8} \right) p_{+kn} + p_{+km} p_{-m}^n \right\}, \quad \left(1 + \frac{i_- - i_+}{8} \right) = 0,$$

$$N_{kn} = b_0^{-1} \left\{ \left(1 + \frac{i_- - i_+}{8} \right) p_{-kn} + p_{+km} p_{-m}^n \right\}, \quad \left(1 - \frac{i_- - i_+}{8} \right) = 0$$

не удовлетворяют условию ортогональности (27.8) и, следовательно, не принадлежат группе преобразования $SO(4, C)$.

Итак, матрица L_{kn} общего преобразования комплексной группы Лоренца всегда представима в характерной для векторной параметризации Ф. И. Федорова форме (27.41) или (27.42) вне зависимости от связи между i_+ и i_- , при любом выборе сигнатуры диагональной метрики η_{kn} и любом определении дискриминантного тензора (27.15), (27.16).

Перейдем к отысканию выражения, позволяющего определить бивектор-параметр по известной матрице L_{kn} . Для этого по аналогии с соотношениями (27.33) — (27.34) введем

$$P_{kn} = \frac{1}{2} (P_{+kn} + P_{-kn}), \quad (27.43)$$

$$P_{+kn} = P_{kn} + \sqrt{\pm 1} {}^D P_{kn},$$

$$P_{-kn} = P_{kn} - \sqrt{\pm 1} {}^D P_{kn}. \quad (27.44)$$

Подставляя эти величины в уравнения (27.41), находим

$$L_{kn} = \frac{(\eta_{km} + P_{km} + \sqrt{\pm 1} {}^D P_{km})(\eta_{kn}^m + P_{kn}^m - \sqrt{\pm 1} {}^D P_{kn}^m)}{\sqrt{(1 + I_2)^2 \mp I_1^2}}. \quad (27.45)$$

После учета (27.20), (27.21) это выражение может быть преобразовано к виду

$$L_{kn} = \frac{(1 + I_2) \eta_{kn} + 2(P_{kn} + P_{km} P_{kn}^m)}{\sqrt{(1 + I_2)^2 \mp I_1^2}}. \quad (27.46)$$

Легко показать, что

$$L_{kn} - L_{nk} = \frac{4P_{kn}}{\sqrt{(1 + I_2)^2 \mp I_1^2}}, \quad L^m_m = \frac{1}{\sqrt{(1 + I_2)^2 \mp I_1^2}}.$$

Отсюда следует в согласии с выражением (25.11), что

$$P_{kn} = \frac{1}{2} (P_{+kn} + P_{-kn}) = \frac{L_{kn} - L_{nk}}{L^m_m}. \quad (27.47)$$

Рассмотренная выше бивекторная параметризация справедлива при любом из четырех возможных вариантов операции дуальности (27.16). В работе [511] выделены и подробно рассмотрены различия, вносимые выбором знака под корнем

в выражении $\eta_{k n m l} = \sqrt{\pm \eta} \epsilon_{k n m l}$. Там же выделены преобразования группы $SO(4, C)$ с простыми бивектор-параметрами, когда $i_4 = 0$. Приведены выражения простого бивектора через два 4-вектора, закон композиции простых бивектор-параметров и др.

27.5. Закон композиции бивектор-параметров комплексной группы Лоренца. В рассматриваемом случае бивекторной параметризации отыскание закона композиции параметров преобразования группы $SO(4, C)$ сводится к следующей задаче: по известным бивектор-параметрам $p_{\pm k n}$ и $p'_{\pm k n}$ двух различных преобразований $L_{k n}$ и $L'_{k n}$ получить бивектор-параметры $p_{\pm k n}''$ преобразования $L''_{k n}$, определяемого как произведение исходных

$$L''_{k n} = \alpha''_{+k m} \alpha''_{-m n} = L_{k m} L'_{m n} = \alpha_{+k s} \alpha_{-s m} \alpha'_{+m r} \alpha'_{-r n}. \quad (27.48)$$

Учитывая коммутативность $\eta_{k n}$ и $P_{\pm k n}$, соотношения (27.19), (27.20), справедливые для произвольного бивектора, а также используя соотношения (27.35), получаем

$$\alpha_{-k m} \alpha'_{+m n} = \alpha'_{+k m} \alpha_{-m n}. \quad (27.49)$$

Из сказанного следует

$$\alpha''_{\pm k n} = \alpha_{\pm k m} \alpha'_{\pm m n}. \quad (27.50)$$

Это означает, что бивектор-параметры $P_{+k n}$ и $P_{-k n}$, определяющие матрицы $\alpha_{+k n}$ и $\alpha_{-k n}$, komponуются независимо друг от друга, причем справедливы групповые аксиомы для матриц $\alpha_{+k n}$ и $\alpha_{-k n}$ в отдельности. Будем исходить из соотношения (27.50), которое в развернутой записи принимает вид

$$\frac{\eta_{k n} + P_{\pm k n}''}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} I_{\pm}''}} = \frac{\eta_{k m} + P_{\pm k m}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} I_{\pm}}} \cdot \frac{\eta_{m n} + P'_{\pm m n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} I'_{\pm}}}. \quad (27.51)$$

Учитывая соотношения, аналогичные формулам (27.20), (27.21), получаем

$$\begin{aligned} (\eta_{k m} + P_{\pm k m})(\eta_{m n} + P'_{\pm m n}) &= \left[1 - \frac{1}{4} (P_{\pm}^{rs} P'_{\pm rs}) \right] \eta_{k n} + \\ &+ P_{\pm k n} + P'_{\pm k n} + \frac{1}{2} (P_{\pm k m} P'_{\pm m n} - P'_{\pm k m} P_{\pm m n}). \end{aligned} \quad (27.52)$$

Следовательно,

$$\frac{\eta_{k n} + P_{\pm k n}''}{\sqrt{1 + \frac{1}{2} I_{\pm}''}} =$$

$$= \left\{ \eta_{kn} + \frac{P_{\pm kn} + P'_{\pm kn} + \frac{1}{2} (P_{\pm km} P'_{\pm m n} - P'_{\pm km} P_{\pm m n})}{1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs}} \right\} \times \\ \times \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_{\pm}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} I'_{\pm}} \left(1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs}\right)^{-1} \right\}^{-1}. \quad (27.53)$$

После несложных преобразований находим

$$\left(1 + \frac{1}{2} I_{\pm}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} I'_{\pm}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ = \left\{1 + \frac{1}{4} \left[P_{\pm rs} + P'_{\pm rs} + \frac{1}{2} (P_{\pm rn} P'_{\pm n s} - P'_{\pm rn} P_{\pm n s}) \right] \right\} \times \\ \times \left[1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs} \right]^{-1} \left[P_{\pm rs} + P'_{\pm rs} + \frac{1}{2} (P_{\pm rn} P'_{\pm n s} - \right. \\ \left. - P'_{\pm rn} P_{\pm n s}) \right] \left[1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs} \right]^{-1} \Bigg\}^{1/2}. \quad (27.54)$$

Учитывая это и сопоставляя левую и правую части выражений (27.53), получаем искомый закон композиции

$$P''_{\pm kn} = \frac{P_{\pm kn} + P'_{\pm kn} + \frac{1}{2} [P_{\pm}, P'_{\pm}]_{kn}}{1 - \frac{1}{4} P_{\pm rs} P'_{\pm rs}}, \quad (27.55) \\ [P_{\pm} P'_{\pm}]_{kn} = P_{\pm km} P'_{\pm m n} - P'_{\pm km} P_{\pm m n}.$$

Закон композиции бивектор-параметров имеет характерный для метода Ф. И. Федорова простой вид (27.55) только при задании матрицы общего преобразования L_{kn} в форме (27.41). Действительно, если по аналогии с работой [650] ввести бивектор P_{kn} , определяемый соотношениями (27.43), (27.44), и представить матрицу преобразования группы $SO(4, C)$ выражением (27.45), то закон композиции новых параметров P_{kn} усложнится:

$$P''_{kn} = \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} P^{rs} P'_{rs}\right) \left(P_{kn} + P'_{kn} + [P, P']_{kn}\right) \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{2} (P^{rs} {}^D P'_{rs}) ({}^D P_{kn} + {}^D P'_{kn} + [{}^D P, {}^D P']_{kn}) \right\} \times$$

$$\times \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} P^{rs} P'_{rs} \right)^2 \mp \frac{1}{4} (P^{rs} D P'_{rs})^2 \right\}^{-1}, \quad (27.56)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} P^{rs} P'_{rs} \right)^2 \mp \frac{1}{4} (P^{rs} D P'_{rs})^2 \neq \infty.$$

Выражение (27.56) аналогично закону композиции для антисимметричных 4×4 -матриц-параметров группы $SO(3.1)$ [646, 652] и группы $SO(4.C)$ [650]. Переход от P_{kn} к p_{kn} ведет к еще большему усложнению закона композиции.

27.6. Исследование области допустимых значений бивектор-параметров. Не при всяком комплексном бивекторе P_{kn} выражение (27.41) для матрицы L_{kn} имеет смысл преобразования группы Лоренца. Поэтому исследование области допустимых значений бивектор-параметров, как и в случае векторной параметризации групп $SO(3.1)$ и $SO(4.C)$ [630—632, 649], является необходимым элементом параметризации.

Прежде всего, важно отметить, что выражение (27.41) справедливо лишь при условии

$$1 + \frac{1}{4} P_{\pm}{}^{rs} R_{\pm rs} \neq 0, \quad (27.57)$$

которое эквивалентно требованиям

$$1 + q^2 \neq 0, \quad 1 + g^2 \neq 0$$

векторной параметризации [630]. Из соотношения (27.54), используемого для получения закона композиции (27.55), следует, что если неравенство (27.57) выполняется для $P_{\pm kn}$ и $P'_{\pm kn}$ по отдельности, то при условии

$$1 - \frac{1}{4} P_{\pm}{}^{rs} P'_{\pm rs} \neq \infty \quad (27.58)$$

оно автоматически оказывается справедливым и для $P''_{\pm kn}$ [630—632]. Таким образом, требование (27.57) находится в полном соответствии с групповым законом композиции бивектор-параметров. Оно не запрещает компонентам векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и \mathbf{d} принимать бесконечно большие значения. Однако, как показано в работе [630], матрицы L_{kn} и α_{kn} потеряют смысл (станут неограниченно большими), если на \mathbf{q} и \mathbf{g} (или на тот и другой одновременно) наложены условия вида

$$q^2 = 0, \quad |q|^2 = \infty; \quad g^2 = 0, \quad |g|^2 = \infty. \quad (27.59)$$

Рассмотрим ограничения, накладываемые условиями (27.59) на типы бивектор-параметров. Поскольку свойства любого бивектора в большой мере определяются значениями его

инвариантов, можно выделить следующие четыре типа бивекторов:

- а) $i_1 \neq 0, i_2 \neq 0$ — бивектор общего вида (двухлистный),
- б) $i_1 = 0, i_2 \neq 0$ — простой бивектор,
- в) $i_1 \neq 0, i_2 = 0$ — круговой бивектор (по аналогии с круговым вектором $q^2 = 0$ [669]),
- г) $i_1 = 0, i_2 = 0$ — изотропный (нулевой) бивектор.

В общем случае инварианты i_1 и i_2 не совпадают друг с другом. Для частных случаев бивекторов совпадение возможно, например для бивекторов $P_{\pm kn}$ со специальными относительно операции дуальности свойствами (27.35). Действительно, из соотношений (27.35) и соотношений

$$I_{\pm 1} = \frac{1}{2} P_{\pm rs} {}^D P_{\pm rs}, \quad I_{\pm 2} = \frac{1}{2} P_{\pm rs} P_{\pm rs}$$

находим, что инварианты пропорциональны друг другу:

$$I_{+1} = \pm \sqrt{\pm 1} I_{+2}, \quad I_{-1} = \mp \sqrt{\pm 1} I_{-2}. \quad (27.60)$$

Следовательно, возможны лишь два типа бивектор-параметров $P_{\pm kn}$ — общего вида и изотропный.

Выясним влияние условий (27.59) на параметры $P_{\pm kn}$. При выполнении первого из условий (27.59) для q и g из соотношений (27.60) следует

$$I_{+1} = 2g^2 = 0, \quad I_{-1} = -2q^2 = 0, \quad (27.61)$$

т. е. изотропным бивектор-параметрам $P_{\pm kn}$ соответствуют круговые вектор-параметры. Если же на последние наложено и второе из условий (27.59), то такие бивекторы $P_{\pm kn}$ не могут служить параметрами группы $SO(4.C)$, так как матрицы L_{kn} и α_{kn} станут неограниченно большими. Таким образом, параметрами группы $SO(4.C)$ могут служить бивекторы общего вида или изотропные, для которых не выполняются условия (27.59).

Поскольку $P_{\pm kn}$ конструируются из исходного бивектора p_{kn} общего вида, то ограничения на $P_{\pm kn}$ скажутся и на структуре p_{kn} . Чтобы выяснить их, воспользуемся выражением, следующим из уравнений (27.5), (27.6), (27.33) и (27.40):

$$p_{kn} = Q_1 P_{+kn} + Q_2 P_{-kn}, \quad (27.62)$$

$$Q_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_-} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_+} + \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_-} \right\},$$

$$Q_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_+} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_+} + \sqrt{1 + \frac{1}{2} I_-} \right\}.$$

Тогда для инвариантов бивектора p_{kn} получаем

$$i_1 = \frac{1}{2} p_{kn} p^{kn} = 2 (Q_1^2 g^2 - Q_2^2 q^2), \quad (27.63)$$

$$i_2 = \frac{1}{1} p_{kn} p^{kn} = 2 (Q_1^2 g^2 + Q_2^2 q^2),$$

причем в силу неравенства (27.57) $Q_1 \neq 0$, $Q_2 \neq 0$. Выясним влияние условий (27.59) на инварианты (27.63) для разных типов бивекторов p_{kn} .

1. Если p_{kn} — бивектор общего вида, то, согласно (27.63),

$$Q_1^2 g^2 \pm Q_2^2 q^2 \neq 0. \quad (27.64)$$

Эти соотношения не нарушаются и в том случае, когда один из векторов q или g круговой, но круговые вектор-параметры, удовлетворяющие требованию (27.59), следует исключить из рассмотрения. Таким образом, бивектор p_{kn} общего вида может быть параметром комплексной группы Лоренца лишь в тех случаях, когда отвечающие ему векторы q и g не являются круговыми или, будучи круговыми, не удовлетворяют условиям типа (27.59).

2. Для простого бивектора p_{kn} из формул (27.63) находим

$$Q_1^2 g^2 = Q_2^2 q^2. \quad (27.65)$$

Отсюда видно, что если один из векторов q или g круговой, то круговым будет и второй. Тогда простой бивектор p_{kn} превратится в изотропный.

3. Такие же выводы и для кругового бивектора p_{kn} , когда

$$Q_1^2 g^2 = -Q_2^2 q^2. \quad (27.66)$$

4. Решение системы уравнений $i_1=0$, $i_2=0$, определяющей изотропный бивектор p^{kn} , приводит к выводу, что вектор-параметры q и g круговые, причем одновременно:

$$Q_1^2 g^2 = 0, \quad Q_2^2 q^2 = 0. \quad (27.67)$$

Случай параметризации преобразований группы $SO(4,C)$ изотропными бивекторами p_{kn} (в том числе и следующими из простых и круговых) возможен лишь при нарушении условий типа (27.59) для обоих вектор-параметров q и g одновременно.

Исследование области допустимых бивектор-параметров может оказаться полезным при изучении калибровочных условий, накладываемых на единичные и на изотропные тетрады, а также при разыскании преобразований этих тетрад.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Две первые главы монографии собрали имеющиеся в настоящее время основные сведения о зависимости части гравитационных эффектов, предсказанных ОТО, от разнообразных параметров. Среди них известные величины, например электрический заряд, вращательный момент, но лишь в эйнштейновой ОТО выступившие в качестве «гравитирующих параметров». Единственный гравитирующий параметр НТТ — масса m , а также ряд параметров пробных тел вошли в усложненные ОТО уравнения поля и движения. В новой ситуации старый параметр m уже как параметр поля Шварцшильда породил множество эффектов, не имеющих места в НТТ. Из 100 рассмотренных эффектов 37 относятся к полю Шварцшильда.

Обзор первых четырех групп явлений показал, что и другие гравитирующие параметры, например k , a , в некоторых отношениях равноправны с параметром m — они также порождают эффекты типа критических: сдвигают частоты, вызывают добавочные аномалии, отклоняют и задерживают электромагнитные сигналы. Критические эффекты выделяются в этих группах прежде всего тем, что в солнечной системе они количественно сильнее. Из обзора эффектов, связанных с усложненным в ОТО негеодезическим движением, вытекает, что пробные параметры также являются источником новых гравитационных эффектов, например эффектов разделения пробных тел. Новые эффекты могут возникнуть как при движении нескольких тел с негеодезическими пробными параметрами (антипараллельными спинами, разноименными зарядами и т. д.) [251], так и при наличии нескольких пробных параметров у одного тела.

Разные гравитирующие и пробные параметры вносят в обусловленные ими эффекты свои специфические черты. Так, в поле Керра даже для весьма несходных эффектов, например 12, 28, 36, характерна анизотропия относительно направления вращения источника поля. Явлениям, предсказываемым в поле

ГВ, свойственна периодичность во времени и резонансные ситуации, когда действие гравитационного излучения должно быть наиболее эффективным. Характерные свойства пробных параметров проявляются, вообще говоря, и в полях с разными источниками. Так, эффекты 17, 19—21, 30 в разных полях тяготения зависят от ориентации пробного спина (соответствующие вклады меняют знак при изменении этой ориентации на противоположную). Пробные параметры могут обусловить эффекты, внешне схожие с порождаемыми гравитирующими параметрами. Например, дрейф точки встречи пробных тел на круговой орбите может обуславливаться как вращением гравитирующей массы (эффект 76), так и пробной (эффект 74). То же относится и к разделению круговых орбит по радиусам (эффекты 47, 51). В значительном количестве представлены разнообразными оптические эффекты, возникающие, согласно ОТО, под действием тяготения.

Из кратких пояснений, как получены выражения, описывающие эффекты, во многих случаях можно проследить, что они — результат введения новых параметров в уравнения поля с их проникновением через $g_{\mu\nu}$ и $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ в уравнения движения и, например, в максвелловы уравнения электромагнитного поля. Таким образом, две первые главы монографии на конкретном материале достаточно широко продемонстрировали общее утверждение ОТО, что поле тяготения, оказывая влияние на любые физические процессы и само, в частности, порождаясь негравитационными полями, должно проявляться множеством гравитационных эффектов, не вытекающих из НТТ.

Из кратких сообщений о результатах проверки критических эффектов 1, 8, 23, 33 видно, что отмеченные пожелания Шварцшильда на 50-летний период частично реализованы. Это достигнуто за счет увеличения объема наблюдений, чему, в частности, способствовало открытие квазаров, отправка ракет в поля тяготения других планет, усовершенствование методов наблюдения, особенно радиолокационных и т. д. Эйнштейнова ОТО выдержала 4 классических испытания на уровне современной техники, но решение на этом уровне вопроса о пригодности ОТО осталось в старых рамках, рамках задачи Шварцшильда, и все еще вдали от гравитационного радиуса. В обзор эффектов включены краткие сведения о подготовке экспериментов по выявлению эффектов и за этими рамками.

Эффекты 63, 66, 67, порождаемые вращением гравитирующей массы, вошли в подготавливаемую экспериментальную программу [669]. С реалистических позиций обсуждаются принципиальные возможности проверки эффектов 41, 43, 61, 90, 96 и др. Эффект 79 положен в основу создания установок

по поиску гравитационных волн. Уже имеются экспериментальные данные, которые можно использовать для оценки эффектов 70, 73, 80. Однако трудности обсуждаемых экспериментов весьма велики. Например, выявление эффекта 12 затруднено даже при использовании спутника без сноса [700]. Существенно более полная проверка ОТО наступит лишь после того, как будут выполнены эксперименты по проверке эффектов, обусловленных эйнштейновыми гравитирующими параметрами, особенно поля ГВ, а также когда выяснится, пригодна ли ОТО вблизи сферы Шварцшильда. Интерес к этому в настоящее время велик в связи с изучением нейтронных звезд и с поисками черных дыр. Пожелания Шварцшильда переносятся в новых условиях на новый срок.

Три последующие главы монографии объединили основные формулировки ОТО, использующие полностью или частично векторы лоренцева базиса. Элементы истории продемонстрировали участие в возникновении этих формулировок самого Эйнштейна и его первых последователей. Записанные Эйнштейном уравнения (13.1)—(13.3) стали основными уравнениями тетрадной формулировки ОТО.

На первый взгляд может показаться, что между тетрадной формулировкой ОТО и теми, которые исходят из хроно-монады (одного, временного, вектора лоренцева базиса), мало общего. Такое впечатление возникает, прежде всего, потому, что теория *х. и.* выдвигает на первый план координатную подгруппу (21.3) без связи с группой Лоренца и с калибровочными условиями. Образцом же для построения других монадных формулировок служит *х. и.* формулировка. Это впечатление обычно подкрепляется отсутствием, за небольшими исключениями, ссылок на литературу по тетрадной формулировке в публикациях по формулировкам монадным, и наоборот. При более внимательном сопоставлении находится много общего.

Из глав III—V видно, что в тетрадном аппарате имеются все необходимые элементы для построения всех четырех рассмотренных формулировок (*х. и.*, *к. и.*, ортометрической, формулировки со специальным кручением). Основные из этих элементов — хроно-монада, R -тензорные компоненты коэффициентов вращения Риччи, физические компоненты различных величин с лоренцевыми индексами (0) — переносятся в другие формулировки без существенных изменений, а именно: изменяются обозначения (вводятся другие коренные буквы), отбрасываются индексы (0), поскольку в них нет надобности, если система отсчета предполагается фиксированной, в некоторых случаях лоренцев индекс (0) заменяется другим символом, например звездочкой. Некоторые из элементов тетрадного представления переносятся в специальные формулировки в

усеченном виде. Например, коэффициенты $\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ образуются из части коэффициентов вращения Риччи (из не R -тензорных компонент). Некоторые элементы переносятся с определенными ограничениями. Так, тетрадная формулировка содержит множество калибровочных условий как полных наборов, так и неполных. R -ковариантная формулировка содержит разные неполные R -ковариантные наборы калибровочных условий. Формулировка х. и. — только один R -ковариантный набор вида $h_0^a = 0$, к. и. формулировка — также один, но другой R -ковариантный набор вида $h_{\alpha}^{(0)} = 0$. Тетрадная формулировка с помощью неполных наборов и лоренцевой R -подгруппы генерирует координатные подгруппы, в том числе и лежащие в основе теорий х. и. и к. и. Поэтому все четыре перечисленные формулировки могут быть получены в рамках тетрадного представления при выделении в нем R -подгруппы, т. е. из R -ковариантной формулировки, путем включения триады в свертки и тем самым ее изоляции, путем переопределения величин, производных и коэффициентов связности. R -подгруппа таким образом объединяет перечисленные формулировки с R -ковариантным представлением ОТО и друг с другом. Часть физических компонент тетрадной формулировки (с индексами (0)) входит при определенных ограничениях в другие специальные формулировки, в частности, в виде х. и. и к. и. времен. Специальные мировые компоненты тетрадной формулировки содержат в своей совокупности коварианты х. и к. преобразований, а ортометрические тензоры совпадают с R -тензорами. При этом тетрадная формулировка располагает исчерпывающими данными о координатно-независимых трансформационных размерностях специальных мировых компонент относительно локальных преобразований Лоренца, т. е. при преобразовании поля монад (в специальных формулировках поле монад фиксировано и при его изменении аппарат должен строиться заново). Не составляет принципиальной проблемы построить в рамках тетрадного представления общековариантный монадный аппарат.

Независимое построение специальных формулировок ОТО (кроме R -ковариантной) не преследовало развития тетрадного метода. Однако предшествуя выделению в тетрадной формулировке лоренцевых подгрупп, оно способствовало разработке этого метода — стимулировало и облегчало выделение понятия неполных наборов калибровок, имеющих автономное значение, координатных аналогов R -подгруппы и т. д. В свою очередь вывод специальных монадных формулировок из тетрадной указывает место каждой из них в общей схеме, оттеняя их оригинальные пункты и связывая с хорошо развитой группой Лоренца, избавляя от опасностей повторных открытий [701].

Во всех специальных формулировках выделяются физические время, расстояние и заодно рассматривается время десинхронизации. Глава V заканчивается показом, как эти три величины меняются под воздействием ряда параметров. Сопоставление суммы таких изменений («кинематических дефектов»), взятых в угловой мере, с некоторыми эффектами ОТО выявило случаи совпадения и случаи, когда они различны не только по своему виду, но и по порядку малости. Это расценено как сигнал к выявлению последних эффектов в приближениях ОТО, еще не совпадающих с НТТ. Собранные сведения пока малочисленны, но уже позволяют предложить метод предварительного разделения эффектов ОТО по их физической природе, прежде всего на «квазиньютоновы» и «релятивистские» в смысле релятивизма одновременности ОТО. Метод еще нуждается в испытаниях — принципиальном обосновании, выявлении его границ и т. д., что может быть сделано в результате более широкого его применения. Возможно, что указанные сопоставления полезны и для выявления различий между ОТО и конкурирующими с ней теориями тяготения [702].

Последняя глава написана в надежде, что уже достигнутые успехи применения в СТО рассмотренной в ней параметризации группы Лоренца окажут полезное влияние и на ОТО, в частности, в ее тетрадном представлении Ньюмена—Пенроуза.

Закончим несколькими замечаниями о границах содержания монографии. Она не охватила всех вопросов, связанных с калибровкой лоренцева базиса, в частности с его введением не после получения эйнштейновых уравнений (1.1), а во время вывода уравнений гравитационного поля из вариационного принципа. В работе [703] это вывело за рамки эйнштейновой ОТО, в работах же [704, 705], где калибровочные условия входят в задачу разыскания условного экстремума, уравнения (1.1) остались в силе. В монографии не рассматривались многочисленные применения специальных формулировок ОТО — выделение с их помощью специальных тензоров и комплексов энергии-импульса, квантование, выработки соответствующих критериев излучения, присоединение локальных преобразований Лоренца к другим калибровочным группам [706, 707], дальнейшие разработки аппарата ОТО на основе внешних форм Картана и общей теории расслоенных пространств и др. Монография ограничена «пробным полем» лоренцева базиса, который, как и в СТО, может испытывать только вращение. Поэтому не рассматривалась деформация базисных векторов как «рабочих мер» под влиянием гравитационного поля и соответствующие ей нелоренцевы преобразования систем отсчета [28, § 14; 708—710], а также принципиальная сторона самой процедуры измерения [711—713].

Современный гравитационный эксперимент с его новыми перспективами становится более способным охватить исследование новых эффектов и повысить точность их проверки [714—717]. Из сказанного следует, что выявление на основе уравнений ОТО новых эффектов и развитие в общем виде ее специальных формулировок должно производиться во все более тесном контакте и что с развитием гравитационного эксперимента практическая значимость специальных формулировок будет возрастать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М., т. I, 1965; т. II, III, 1966; т. IV, 1967.
2. Петров А. З. Препринт ИТФ-71-1М. Киев, 1971.
3. Bertotti В., Brill D., Krotkov R. In: Gravitation: an introduction to current research. N. Y.—L., 1969, p. 1.
4. Брагинский В. Б., Руденко В. Н. «УФН», 1970, 100, 395.
5. Пирагас К. А. Препринт ИТФ-71-114Р. Киев, 1971.
6. Rudenko V. N. «Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Physics», 1975, 5, 221.
7. Braginsky V. B., Caves C. M., Thorne K. S. «Phys. Rev.», 1977, D15, 2047.
8. Коноплева Н. П. «УФН», 1977, 123, 537.
9. Тезисы докладов Всесоюзн. конф. «Современные теоретические и экспериментальные проблемы теории относительности и гравитации» (Гр-4). Минск, 1976.
10. Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент.— Сб. научн. тр. Минск, 1976 (ИФ АН БССР).
11. GR-8 abstracts. Waterloo, Ontario, Canada, 1977.
12. The Significance of Space Research for Fundamental Physics, ESRO book N SP-52. Paris, 1971.
13. Proc. of the Conference on Experimental Tests of Gravitation Theories. Ed. R. W. Davies, NASA-JPL Techn. Memorandum 33-499, 1971.
14. Experimental Gravitation.— «Proc. Intern. School of Physics E. Fermi», ed. B. Bertotti. Course 56, N. Y., 1974.
15. «Acta Astronautica», 1978, 5, № 1—2; 4th Intern. Symposium of the Effects of Relativity in Present Day Space Travel (at the XXVIIIth Intern. Astronautical Congress). Prague, 1977.
16. Schild A. «Am. J. Phys.», 1960, 28, 778.
17. Schiff L. I. «Am. J. Phys.», 1960, 28, 340.
18. Dicke R. H. The Theoretical Significance of Experimental Relativity, 1969.
19. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1—3, М., 1977.
20. Костюкович Н. Н., Иваницкая О. С. Препринт № 154. Минск, 1978 (ИФ АН БССР).
21. Костюкович Н. Н., Иваницкая О. С. Препринт №155. Минск, 1978 (ИФ АН БССР).
22. Иваницкая О. С., Костюкович Н. Н. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., Атомиздат, 1979, вып. 10.
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973.
24. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., 1971.
25. Мёллер Х. Теория относительности. М., 1975.
26. Вейнберг С. Гравитация и космология. М., 1975.

27. Papapetrou A., Urich W. «Z. F. Naturforsch.», 1955, 10a, 109.
28. Тредер Г. Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. М., 1973.
29. Cartan E. «Ann. Ecole Norm. Supp.», 1923, 40, 325; 1924, 41, 1.
30. Fridrichs K. «Math. Ann.», 1928, 98, 566.
31. Trautman A. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1963, 257, 617.
32. Dautcourt G. «Acta Phys. Polon.», 1964, 25, 637.
33. Керес Х. П. «ЖЭТФ», 1964, 46, с. 1741; в кн.: Гравитация. Киев, 1972.
34. Коппель А. А. Нерелятивистские гравитационные поля в ОТО; Нерелятивистский анализ релятивистских гравитационных полей. Тарту, 1977.
35. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, 1969.
36. Иваницкая О. С. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1970, вып. 7, с. 106.
37. Иваницкая О. С., Хазан В. Б. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1970, № 6, с. 96.
38. Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1972, № 6, с. 65.
39. Сусурин Г. Э. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1973, № 5, с. 92.
40. Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1973, № 2, с. 73.
41. Иваницкая О. С., Митянок В. В. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1974, № 3, с. 74.
42. Иваницкая О. С., Митянок В. В. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1974, № 4, с. 57.
43. Митянок В. В. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1974, № 5, с. 92.
44. Иваницкая О. С., Митянок В. В. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1975, № 3, с. 75.
45. Левашев А. Е. В кн.: Проблемы гравитации. Ереван, 1975, с. 113.
46. Иваницкая О. С., Сусурин Г. Э. В кн.: Теория относительности и гравитация. М., 1976, с. 44.
47. Иваницкая О. С., Пляцко Р. М. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1976, № 4, с. 80.
48. Костюкович Н. Н. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1976, № 6, с. 47.
49. Костюкович Н. Н. Тезисы Гр-4. Минск, 1976, с. 242.
50. Костюкович Н. Н. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1977, № 6, с. 80.
51. Пляцко Р. М., Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1977, № 6, с. 72.
52. Пляцко Р. М., Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 4, с. 50.
53. Schwarzschild K. «Sitzb. Dtsch. Ak. Wiss.» Berlin, 1916, H. 7, 189.
54. Droste J. «Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam», 1916, 25, 163.
55. Мак-Витти Г. ОТО и космология. М., 1961.
56. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., 1972.
57. Weyl H. «Ann. der Phys.», 1917, 54, 117; 1919, 59, 185.
58. Levi-Civita T. «Atti Ac. Naz. Lincei Rend.», 1919, 28, 3, 101.
59. Young J. H., Coulter C. A. «Phys. Rev.», 1969, 184, 1313.
60. Tomimatsu A., Sato H. «Prog. Theor. Phys.», 1973, 50, 95.
61. Hill H. A., Stebbins R. T. «Astrophys. J.», 1975, 200, 471.
62. Charpan G. A. «Phys. Rev. Lett.», 1975, 34, 755.
63. Монин А. С. «ДАН СССР», 1976, 229, 76.
64. Reissner H. «Ann. der Phys.», 1916, 50, 106.
65. Weyl H. «Ann. der Phys.», 1917, 54, 117.
66. Nordström A. «Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam», 1918, 20, 1238.
67. Jeffery G. V. «Proc. R. Soc. London, ser. A», 1921, 99, 123.
68. Шварцман В. Ф. «Астрофизика», 1970, 6, 309; «ЖЭТФ», 1971, 60, 881.

69. Левич Е. В., Сюняев Р. А. «Астрон журн.», 1978, 48, 461.
70. Suffern K. G. «Astron. & Astrophys.», 1975, 39, 275.
71. Harrison E. R. «Nature», 1976, 264, 525.
72. Крат В. «ДАН СССР», 1947, 55, 207.
73. Bailey V. A. «Nature», 1964, 201, 1202.
74. Коркина М. П., Куринной В. П. В кн.: Взаимодействие элементарных частиц. Днепропетровск, 1975, вып. 1, с. 62.
75. de Sitter W. «Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam», 1917, 19, 1217.
76. Kottler F. «Enzykl. Math. Wiss.», 1922, 22a, 231.
77. Trefftz E. «Math. Ann.», 1922, 86, 317.
78. Schlüter A. «Astron. J.», 1955, 60, 141.
79. Зельдович Я. Б. «Письма в ЖЭТФ», 1967, 6, 883.
80. Ярош В. С. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1977, вып. 8, с. 220.
81. Kerr R. P. «Phys. Rev. Lett.», 1963, 11, 237.
82. Krasinski A. «Ann. of Phys.», 1978, 112, 22.
83. Lense J., Thirring H. «Phys. Z.», 1918, 19, 156.
84. Davies R. W. «Proc. Intern. School of Physics E. Fermi», 1974, Course 56, 405.
85. Godfrey V. B. «Phys. Rev. D.», 1970, 1, 2721.
86. Полищук Р. Ф. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1976, вып. 7, с. 200.
87. Jordan P., Ehlers J., Kundt W. «Abh. Math.-Nat. Kl., Akad. Wiss. Lit. Mainz», 1960, 2, 21.
88. Гришук Л. П. «ЖЭТФ», 1974, 66, 833; «УФН», 1977, 121, 629
89. Schroedinger F. Expanding Universe, Cambridge, 1956.
90. Synge J. L. «Rend. sem. mat. e fis. di Milano», 1960, 30, 271.
91. Synge J. L. In: Relativity, Groups and Topology, ed. de Witt H. C., de Witt B. N. Y.—London—Paris, 1964, p. 67.
92. Jaffe J. «Ann. of Phys.», 1969, 55, 374.
93. Jaffe J. «GRG», 1975, 6, 55.
94. Jaffe J., Vessot R. F. C. «Phys. Rev. D.», 1976, 14, 3294.
95. Тоннела М.-А. Эйнштейновский сборник, 1967. М., 1967, с. 178.
96. Вавилов С. И. Экспериментальные основания теории относительности. М.—Л., 1928, с. 154.
97. Паули В. Теория относительности М—Л., 1947.
98. Арзелье А. Эйнштейновский сборник, 1973 М., 1974, с. 267.
99. Einstein A. «Jahrb. d. Radioakt. Elektr.», 1907, 4, 411.
100. Einstein A. «Ann. der Phys.», 1911, 35, 898.
101. Jewell L. E. «Ap. J.», 1896, 3, 89.
102. Fabry Ch., Boisson H. «C. R. Acad. Sci» (Paris), 1909, 148, 688.
103. Evershed J. «Kodaik Obs Bull.», 1914, 3, N 36.
104. Freundlich E. «Astron. Nachr.», 1914, 198, 265; «Phys. Z.», 1914, 15, 369.
105. Эйнштейн А. В кн.: А. Зоммерфельд. Пути познания в физике. М., 1973, с. 195.
106. Эйнштейн А. Предисловие к кн Э. Фрейндлиха «Основы теории относительности Эйнштейна». М., 1923.
107. Evershed J. «Observatory» (London), 1919, 42, 51, 119, 389.
108. Grebe L., Bachem A. «Verl. d. Dtsch. Phys. Ges.», 1919, 21, 454.
109. Adams W. S. «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», 1925, 11, 382.
110. St. John C. E. «Z. f. Phys.», 1924, 21, 159; «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», 1926, 12, 65.
111. Adam M. G. «Mon. Not. Roy. Astron. Soc.», 1959, 119, 460.
112. Blamont J. E., Roddier F. «Phys. Rev. Lett.», 1961, 7, 437.
113. Brault J. W. Doct. Thesis, Princeton Univ., Abstract, 1962; «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1963, 8, 28.
114. Мельников О. А. «Изв. Главн астрон. обсерв. в Пулкове», 1964, 23, 3.

115. Greenstein J. L., Oke J. B., Shipman H. L. «Ap. J.», 1971, 169, 563.
116. Snider J. L. «Phys. Rev. Lett.», 1972, 28, 853.
117. Pound R., Rebka G. A. «Phys. Rev. Lett.», 1960, 4, 337.
118. Cranshaw T. E., Schiffer J. P., Whitehead A. B. «Phys. Rev. Lett.», 1960, 4, 163.
119. Weyssenhoff J. «Postepy fizyky», 1960, 11, 109.
120. Pound R., Snider J. L. «Phys. Rev. Lett.», 1964, 13, 539.
121. Richard J.-P. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1965, 260, 4151.
122. O'Leary A. J. «Am. J. Phys.», 1964, 32, 52.
123. Schiff L. I. Proc. Semin. Am. Math. Soc., Preprint, 1965.
124. Terrien J. «Repts. on Prog. in Phys.», 1976, 39, 1067.
125. Will C. M. «Metrologia», 1977, 13, 95.
126. Kustaanheimo P. «Phys. Lett.», 1966, 23, 75.
127. Horowitz P., Pound R. V. «Phys. Lett.», 1967, A24, 52.
128. Hoffmann B. «Phys. Rev.», 1957, 106, 358.
129. Refsdal S. «Phys. Rev.», 1962, 127, 977.
130. Krause H. In: Use of Artificial Satellites for Geodesy. Amsterdam, 1963, p. 69.
131. Дравских А. Ф., Финкельштейн А. М. «Астрофиз. иссл.», 1977, № 9, 47.
132. Woodward J. F., Crowley R. J. «Nature, Phys. Sci.», 1973, 246, 41.
133. Smith-Hänni A. L. «Helv. Phys. Acta», 1975, 48, 548.
134. Banerjee A., Choudhury S. «Prog. Theor. Phys.», 1977, 57, 1070.
135. Девиа Э. А. «Вестн. МГУ. Сер. физ.-астрон.», 1970, № 1, 95.
136. Page D. N. «Phys. Rev. D.», 1977, 16, 2402.
137. Kennedy R. J., Thorndike E. M. «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», 1931, 17, 620.
138. Drill H. T. «Phys. Rev.», 1939, 56, 184.
139. Эйнштейновский сборник, 1974. М., 1976, с. 99.
140. Толман Р. Относительность, термодинамика и космология. М., 1974.
141. Богородский А. Ф. Всемирное тяготение. Киев, 1971.
142. Das A. «Prog. Theor. Phys.», 1957, 18, 554.
143. Krori K. D. «Indian J. Pure and Appl. Phys.», 1970, 8, 668.
144. Hara T. «Proc. Intern. Lat. Observ. Mizusawa», 1973, N 13, 1.
145. Kaufman W. J. «Nature», 1970, 227, 157.
146. Dautcourt G. In: Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data, ed. M. S. Longair, 1974, p. 299.
147. Halpern L. «Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belgique», 1972, 58, 257, 647.
148. Eastabrook F. B., Wahlquist H. D. «GRG», 1975, 6, 177.
149. Wahlquist H. D., Eastabrook F. B. GR-8 abstracts, 1977, p. 391.
150. Townes C. H. «J. Appl. Phys.», 1951, 22, 1365.
151. Winterberg F. «Astronaut. Acta», 1956, 2, 25.
152. Singer S. F. «Phys. Rev.», 1956, 104, 11.
153. Гинзбург В. Л. «ЖЭТФ», 1956, 30, 213; «УФН», 1956, 59, 11; 1957, 63, 119.
154. Nariai H., Ueno Y. «Prog. Theor. Phys.», 1958, 20, 703.
155. Winterberg F. «Nuovo Cimento», 1958, 8, 17.
156. Aller L. H. «Astron. J.», 1959, 64, 45.
157. Badessa R. S. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1959, 3, 79.
158. Badessa R. S. et al. «Proc. IRE», 1960, 48, 758.
159. Davidson W. «Nature», 1960, 188, 1013.
160. Newton R. R. «Proc. IRE», 1960, 48, 754.
161. Басов Н. Г. и др. «УФН», 1961, 75, 3.
162. Hoffman B., Sproull W. T. «Am. J. Phys.», 1961, 29, 640.
163. Hoffman B. «Phys. Rev.», 1961, 121, 337.
164. «Proc. IRE», 1960, 48, 438.
165. «Sci. News Lett.», 1961, 76, 35.
166. Vessot R. F. C. In: Experimental Gravitation, 1974, p. 111.
167. Kleppner D., Vessot R., Ramsey N. «Ap. & Sp. Sci.», 1970, 6, 13.

168. Vessot R. F. C. «Spec. Rep. Smithsonian Astroph. Obs.», 1972, N 343.
169. Vessot R. F. C., Levine M. W. Report at 4th symposium (см. [15]).
170. Hafele J. C. «Am. J. Phys.», 1972, 40, 81.
171. Hafele J. C., Keating R. E. «Science», 1972, 177, 166.
172. Burt E. G. C. «Nature», 1973, 242, 94.
173. Schlegel R. «Nature», 1973, 242, 180.
174. Reisse R. A. «Diss. Abstr. Int.», 1977, 37, 2915-B.
175. Williams R. E. «Diss. Abstr. Int.», 1977, 37, 2916-B.
176. Darwin C. «Proc. R. Soc. London, ser. A», 1961, 263, 39.
177. Костюкович Н. Н., Митянок В. В. Препринт № 142. Минск, 1978 (ИФ АН БССР).
178. Geisler P. A., McVittie G. C. «Astron. J.», 1965, 70, 14.
179. Курмакаев З. Х. «Астрон. журн.», 1968, 45, 823; 1971, 48, 1056.
180. Einstein A. «Sitzb. Akad. Wiss. Berlin», 1915, 42, 831.
181. Clemence G. M. «Astron. Papers Amer. Ephemeris», 1943, 2, 1.
182. Clemence G. M. «Revs. Mod. Phys.», 1947, 19, 361.
183. Duncombe R. L. «Astron. J.», 1956, 61, 174.
184. Duncombe R. L. «Astron. Papers Amer. Ephemeris», 1958, 16, 1.
185. Shapiro I. I. In: (см. [13]); Shapiro I. I. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1972, 28, 1594.
186. Morrison L. V., Ward C. G. «Mon. Not R. Astron. Soc.», 1975, 173, 183.
187. Gilvary J. J. «Phys. Rev.», 1953, 89, 1046.
188. Esclangon E. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1948, 226, 23.
189. La Paz L. «Public. Astron. Soc. Pacific», 1954, 66, 13.
190. Hardtwig E. «Forsch. u. Fortsch.», 1958, 32, 193.
191. Gilvary J. J. «Nature», 1959, 183, 666.
192. Krasinski A. «Postepy Astron.», 1975, 23, 159.
193. Argenti A. «Celest. Mech.», 1972, 6, 383.
194. Брежнев В. С., Максюков Н. И. «Вестн. МГУ. Сер. физ.-астр.», 1971, 12, 147.
195. Левашев А. Е., Чопчиц Н. И. Тезисы Гр-4. Минск, 1976, с. 247.
196. Yaacobi D. «J. Math. Phys.», 1975, 16, 1145.
197. Hoenselaers C. «Prog. Theor. Phys.», 1976, 56, 324.
198. Dicke R. H. «Nature», 1964, 202, 432; «Astron. J.», 1965, 70, 395.
199. Dicke R. H., Goldenberg H. M. «Phys. Rev. Lett.», 1967, 18, 313.
200. Roxburg I. W. «Icarus», 1964, 3, 92.
201. Shapiro I. I. «Icarus», 1965, 4, 549.
202. Dicke R. H. «Science», 1974, 184, 419; «Ap. J.», 1974, 190, 187.
203. Dicke R. H., Goldenberg H. M. «Ap. J.», 1974, 27, 131.
204. Hill H. A. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1974, 33, 1497; 1975, 34, 296.
205. Gough D. «New Sci.», 1976, 70, 590.
206. Lieske J. H., Null G. W. «Astron. J.», 1969, 74, 297.
207. Goldberg I. «Nuovo Cimento», 1966, 149, 1010.
208. Jaffe G. «Ann. der Phys.», 1922, 67, 212.
209. Nuyens M. «Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci.», 1922, 8, 755.
210. Ogura K. «Japan. J. Phys.», 1924, 3, 85.
211. Haag J. «Mem. Sci. Math.» (Paris), 1931, 46, 37.
212. Argenti A. GR-8 abstracts, 1977, p. 72.
213. Митянок В. В. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1977, вып. 8, с. 156.
214. Decombe M. L. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1922, 175, 1194.
215. Gerjouj E. «Am. J. Phys.», 1957, 24, 3.
216. Burman R. «J. Proc. Roy. Soc. N. S. W.», 1970, 103, 1.
217. Эддингтон А. С. Математическая теория относительности. Харьков — Киев, 1933.
218. Курмакаев З. Х. «Астрон. журн.», 1971, 48, 1056.
219. Alpher R. S. «Am. J. Phys.», 1967, 35, 771.
220. Kalitzin N. St. «Nuovo Cimento», 1958, 9, 365.

221. Boyer R. H., Price T. G. «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1965, 61, 531.
222. Krori K. D. «Indian J. Phys.», 1970, 44, 227.
223. Bose S. K., Wang M. Y. «Phys. Rev. D.», 1973, 8, 361.
224. Богородский А. Ф. «Астрон. журн.», 1959, 36, 883.
225. Тонелла М.-А. Эйнштейновский сборник, 1967, М., 1967, с. 175.
226. Гинзбург В. Л. Эйнштейновский сборник, 1967, М., 1967, с. 96.
227. Barker V. M., O'Connell R. F. «Phys. Rev. D.», 1974, 10, 1340.
228. Руденко В. Н. «Астрон. журн.», 1975, 52, 444.
229. Salmistraro F. «Lett. Nuovo Cimento», 1976, 15, 343.
230. Иващенко А. В. Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент.— Сб. научн. тр. Минск, 1976 (ИФ АН БССР), с. 141.
231. Рябушко А. П. Препринт ИТФ-72-61Р. Киев, 1972.
232. Рябушко А. П. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1975, № 4, с. 63.
233. Рябушко А. П., Баханьков А. А. Тезисы Гр-4. Минск, 1976, с. 112.
234. Souriau J.-M. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1970, A271, 751.
235. Künzle H.-P. «J. Math. Phys.», 1972, 13, 739.
236. Tod K. P., de Felice F., Calvani M. «Nuovo Cimento», 1976, B34, 365.
237. Carmeli M., Charach Ch., Kaye M. «Phys. Rev. D.», 1977, 15, 1501.
238. Micoulaut R. «Z. Phys.», 1967, 206, 394.
239. Fuchs H. «Ann. der Phys.», 1977, 34, 159.
240. Pirani F. A. E. «Acta Phys. Polon.», 1956, 15, 389.
241. Papapetrou A. «Proc. R. Soc. London, ser. A», 1951, 209, 248.
242. Corinaldesi E., Papapetrou A. «Proc. R. Soc. London, ser. A», 1951, 209, 259.
243. Westpfahl K. «Ann. der Phys.», 1967, 20, 241.
244. Ellis J. R. «Proc. Cambr. Phil. Soc.», 1975, 78, 145.
245. Tulczyjew W. «Acta Phys. Polon.», 1959, 18, 393.
246. Dixon W. G. «Nuovo Cimento», 1964, 34, 317.
247. Das A. «Prog. Theor. Phys.», 1957, 17, 373.
248. Pachner J. «Ann. der Phys.», 1958, 1, 110.
249. Костюкович Н. Н. Тезисы докл. 4-й Республ. конф. молодых ученых по физике (Гомель, 1976). Минск, 1977, с. 14.
250. Smith P. D. P. GR-8 abstracts, 1977, p. 319.
251. Костюкович Н. Н. В кн.: Исследования в области спектроскопии и квантовой электроники, IV, Вильнюс, 1978, с. 38.
252. Kalitzin N. St. «Nuovo Cimento», 1959, 11, 178.
253. Page L. «Nature», 1920, 104, 629; 1920, 105, 233.
254. Page L. «Phys. Rev.», 1920, 15, 335.
255. Eddington A. S. «Nature», 1920, 105, 37.
256. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., 1973, с. 65
257. Синг Дж. Л. Классическая динамика. М., 1963, с. 146.
258. Freundlich E. F. «Astron. Nachr.», 1913, 193, 369.
259. Curtis H. D. «Astron. Soc. Pacific», 1913, 25, 77.
260. Dyson F. W. et al. «Phil. Trans. R. Soc. London», 1920, A220, 291.
261. Von Klüber H. «Vistas in Astron.» Pergamon, 1960, v. 3, p. 47.
262. «Astron. J.», 1976, 81, 452.
263. Mitchell S. A. Eclipses of the Sun. N. Y., 1951, p. 104.
264. Lillestrand R. L. «Techn. Ses. Prepr. Am. Astronaut. Soc.», 1961, N 61.
265. Shapiro I. I. «Phys. Rev.», 1966, 141, 1219.
266. Чихачев Б. М. Тезисы Гр-5. Тбилиси, 1968.
267. Muhleman D. O. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1970, 24, 1377.
268. Seielstad G. A., Sramek R., Weiler K. «Phys. Rev. Lett.», 1970, 24, 1373.
269. Shapiro I. I. «GRG», 1972, 3, 135.
270. Fomalont E. B., Sramek R. A. «Phys. Rev. Lett.», 1976, 36, 75.
271. Fomalont E. B., Sramek R. A. «Comm. Astrophys.», 1977, C7, 19.
272. Арифов Л. Я., Кадыев Р. К. «Астрон. журн.», 1968, 45, 1114; 1975, 52, 164.

- 273 Михайлов А. А. «Астрон. журн.», 1969, **46**, 454.
- 274 Румер Ю. Б. «ЖЭТФ», 1951, **21**, 1403.
- 275 Martucci G., Modugno M. «Lett. Nuovo Cimento», 1970, **3**, 553.
- 276 Ушаков Е. А., Костюкович Н. Н. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1976, № 3, с. 113.
- 277 Скроцкий Г. В. «ДАН СССР», 1957, **114**, 73.
- 278 Plebański J. F. «Phys. Rev.», 1960, **118**, 1396.
- 279 Boyer R. H., Lindquist R. W. «J. Math. Phys.», 1967, **8**, 265.
- 280 Cohen J. M., Brill D. R. «Nuovo Cimento», 1968, **B56**, 209.
- 281 Zipoy D. M. «Phys. Rev.», 1966, **142**, 825.
- 282 Герценштейн М. Е., Пустовойт В. И. «ЖЭТФ», 1962, **42**, 605.
- 283 Друде П. Оптика, Л.—М., 1935, с. 254.
- 284 Рябушко А. П. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 4, с. 42.
- 285 Erikin E. N., Mitskievic N. V. «Acta Phys. Polon.», 1976, **B7**, 543.
- 286 Lawrence J. K. «Acta Phys. Austriaca», 1969, **30**, 313.
- 287 Иванникая О. С. Доклад на Всесоюз. симпозиуме «Актуальные проблемы гравитации». М., 1977.
- 288 Shapiro I. I. «Phys. Rev. Lett.», 1964, **13**, 789.
- 289 Muhleman D. O., Reichly P. «JPL Sp. Prog. Sum.» 37-29, 1964, **4**.
- 290 Shapiro I. I. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1968, **20**, 1265.
- 291 Shapiro I. I. et al. «Phys. Rev. Lett.», 1971, **26**, 1132.
- 292 Anderson J. D., Esposito P. B. AJAA 7-th Annual Meeting, 1970, paper, 70-1317.
- 293 Esposito P. B., Anderson J. D. «Telecommun. J.», 1974, **41**, 299.
- 294 Shapiro I. I. et al. «J. Geophys. Res.», 1977, **82**, 4329.
- 295 Рис М., Руффини Р., Уилер Дж. Черные дыры, гравитационные волны и космология. М., 1977, с. 171.
- 296 Anderson J. D. et al. Report at 13th Plenary Meeting of Cospar. Leningrad, 1970.
- 297 Брагинский В. Б. Экспериментальная проверка теории относительности. М., 1977.
- 298 Брагинский В. Б. Физические эксперименты с пробными телами. М., 1970, с. 85.
- 299 Greenberg P. J. «Nuovo Cimento», 1974, **B 24**, 272.
- 300 Forward R. L. In: The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Washington, 1972, p. 239.
- 301 Bouttes J., Delattre M. «Sci. et Techn.», 1977, N 43, 17.
- 302 Singh K. P., Pandey S. N. «Proc. Nat. Inst. Sci. India, ser. A», 1960, **26**, 629.
- 303 Тредер Г. Ю. Относительность и инерция. М., 1975, с. 22.
- 304 Jaffe J., Shapiro I. I. «Phys. Rev. D», 1972, **6**, 405.
- 305 Janis A. L. «Phys. Rev. D», 1973, **8**, 2360; 1977, **15**, 3068.
- 306 Cavalleri G., Spinelli G. «Phys. Rev. D», 1977, **15**, 3065.
- 307 Стоянов В. И. «ДАН ТаджССР», 1975, **18**, 16.
- 308 Longo C. «Nuovo Cimento», 1918, **15**, 191.
- 309 Горелик Г. Е. «Изв. МГУ. Сер. физ.-астр.», 1972, **13**, 727.
- 310 Черный Л. М. В кн.: Взаимодействие элементарных частиц. Днепропетровск, 1975, вып. 1, с. 153.
- 311 Митянок В. В. Препринт № 97. Минск, 1976 (ИФ АН БССР).
- 312 Graves J. C., Brill D. R. «Phys. Rev.», 1960, **120**, 1507.
- 313 Safko J. L. «Ann. of Phys.», 1970, **58**, 322.
- 314 Denardo G., Treves A. «Lett. Nuovo Cimento», 1974, **10**, 715.
- 315 Полищук Р. Ф. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1976, вып. 7, с. 200.
- 316 De Felice F., Calvani M., Nobili L. «Nuovo Cimento», 1975, **B 26**, 1.
- 317 Wald R. «Phys. Rev. D», 1972, **6**, 406.
- 318 Bovyn M. P. «J. Phys.», 1976, **A9**, 245.

319. Брагинский В. Б., Руденко В. Н. «Уч. записки Казанск. ун-та», 1963, 123, 96.
320. Епихин Е. Н., Пулидо И., Мицкевич Н. В. Тезисы Гр-3. Ереван, 1972, с. 380.
321. Weber J. «Phys. Rev.», 1960, 117, 306.
322. Брагинский В. Б., Герценштейн М. Е. «Письма в ЖЭТФ», 1967, 5, 348.
323. Брагинский В. Б., Манукин А. Б. Измерение малых сил в физических экспериментах. М., 1974, с. 127.
324. Darius J. «New Sci.», 1976, 69, 283.
325. Misner C. W. «Phys. Rev. Lett.», 1972, 28, 994.
326. Соколов А. А. В кн.: Актуальные проблемы теоретической физики. М., Изд-во МГУ, 1977.
327. Armenti A. «Nuovo Cimento», 1975, В 25, 442.
328. Wilkins D. C. «Phys. Rev. D», 1972, 5, 814.
329. Dadlich N., Kale P. P. «J. Math. Phys.», 1977, 18, 1727.
330. Hagihara Y. «Jap. J. Astron. Geophys.», 1927, 5, 1; 1931, 8, 67.
331. Каплан С. А. «ЖЭТФ», 1949, 19, 951.
332. Metzner A. W. K. «J. Math. Phys.», 1963, 4, 1194.
333. Пирагас К. А. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1968, вып. 4—5, с. 180.
334. Широков М. Ф., Бондарев Б. В. «Изв. вузов. Физика», 1974, № 12, 52.
335. Rasband S. N. «Phys. Rev. Lett.», 1973, 30, 111.
336. Препелица Б. В. «Астрон. журн.», 1969, 46, 1130.
337. Dadlich N., Kale P. P. «Pragana», 1977, 9, 71.
338. Пирагас К. А. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1970, вып. 7, с. 90.
339. Cunningham C. T. «Phys. Rev. D», 1975, 12, 323.
340. Нураев Р. М. «Изв. вузов. Физика», 1977, № 9, 133.
341. Ames W. L., Thorne K. S. «Ap. J.», 1968, 151, 659.
342. Рябушко А. П. «ДАН БССР», 1971, 15, 977.
343. De Felice F. «Astron. & Astrophys.», 1974, 34, 15.
344. Bicak J., Stuchlik Z. «Bull. Astr. Inst. Czech.», 1976, 27, 129.
345. Johnson M., Ruffini R. «Phys. Rev. D», 1974, 10, 2324.
346. Goldhammer P. «Nuovo Cimento», 1969, 20, 1205.
347. Von Laue M. Die Relativitätstheorie. Berlin, 1923, bd. 2, p. 225.
348. Case L. A. «Ap. J.», 1972, 173, 665.
349. Noerdlinger P. D. «Nature, Phys. Sci.», 1974, 239, 9.
350. Burman R. «J. Proc. Roy. Soc. N. S. W.», 1971, 103, 87.
351. Atkinson R. d'E. «Astron. J.», 1965, 70, 517.
352. Арифов Л. Я., Кадыев Р. К. В кн.: Исследования по ядерной и теоретической физике. Ташкент, 1969, с. 127.
353. De Silva L. N. K. «Nature Phys. Sci.», 1971, 231, 148.
354. De Silva L. N. K. «Phys. Lett.», 1975, A54, 193.
355. De Sitter W. «Mon. Not. R. Astron. Soc.», 1916, 77, 155, 481.
356. Schiff L. I. «Proc. Natl. Acad. Sci. USA», 1960, 46, 871.
357. Pugh G. E. WSEG Research Memorandum. The Pentagon, Washington 25 D. C., 12 November, N 11, 1959.
358. Wilkins D. «Ann. of Phys.», 1970, 61, 277.
359. Воронов Н. А. «ЖЭТФ», 1970, 58, 1280.
360. O'Connell R. F. «GRG», 1972, 3, 123.
361. Everitt C. W. R. «Bull. Amer. Phys. Soc.», 1975, 18, 589.
362. Anderson J. T., Everitt C. W. E. «IEEE Trans. Mag.», 1977, 13, 377.
363. O'Connell R. F. «Lett. Nuovo Cimento», 1969, 1, 933.
364. Barker V. M., O'Connell R. F. «Lett. Nuovo Cimento», 1970, 4, 561.
365. Barker V. M., O'Connell R. F. «Phys. Rev. D», 1972, 6, 956.
366. Алексеев А. Д., Московкин В. М. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1978, вып. 9, с. 161.

367. Рябушко А. П. Движение тел в общей теории относительности. Автореф. докт. дис. Минск, 1972.
368. Papapetrou A. «Fortschr. d. Phys.», 1953, 1, 29.
369. Kalitzin N. St. Dynamik der Relativistischen Raketen und einiger astronomischen objekten. Sofia, 1963, p. 80.
370. Пляцко Р. М. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1977, № 3, с. 91.
371. Van Patten R. A., Everitt C. W. F. «Phys. Rev. Lett.», 1976, 36, 629.
372. Van Patten R. A., Everitt C. W. F. «Celest. Mech.», 1976, 13, 429.
373. Schaechter D. et al. «J. Spacecr. & Rockets.», 1977, 14, 474.
374. Рыков В. Т. «Астрон. журн.», 1975, 52, 885.
375. Черников Н. А. В кн.: 150 лет геометрии Лобачевского. Пленарн. докл. Всесоюзн. конф. Казань, 1976. М., 1977, с. 146.
376. Kustaaneimo P., Lehti R. «Astron. J.», 1963, 63, 392.
377. Калицин Н., Калинин М. «Физ.-мат. спис.», 1965, 8, 8.
378. Schmeidler F. «Forsch. u. Fortschr.», 1965, 39, 41.
379. Briatore L., Leschiutta S. «Nuovo Cimento», 1977, B37, 219.
380. Shirokov M. F. «GRG», 1973, 4, 131.
381. Широков М. Ф., Бондарев Б. В. Препринт ИТФ-73-140Р. Киев, 1973.
382. Иващенко А. В. Препринт ИТФ-72-60Р. Киев, 1972.
383. Мардер Л. Парадокс часов. М., 1974.
384. Holstein B. R., Swift A. R. «Am. J. Phys.», 1972, 40, 746.
385. Nduka A. «GRG», 1977, 8, 347.
386. Курмакаев З. Х. «Тр. Астрофиз. ин-та АН КазССР», 1967, 8, 9; 1972, 19, 120.
387. Мицкевич Н. В., Пулидо Гарсиа И. «ДАН СССР», 1970, 192, 1263.
388. Markley F. L. «Am. J. Phys.», 1973, 41, 1246.
389. Мицкевич Н. В. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1976, вып. 7, с. 15.
390. Сажин М. В. «Астрон. журн.», 1978, 55, 65.
391. Yilmaz H. «Phys. Rev. Lett.», 1959, 3, 320.
392. Shamir J., Fox R. «Phys. Rev.», 1969, 184, 1303.
393. Forward R. L. GR-8 abstracts. Waterloo, 1977, p. 146.
394. Winkler W. GR-8 abstracts. Waterloo, 1977, p. 50.
395. Lass H., Solloway C. B. «AIAA J.», 1969, 7, 1029.
396. Moller C. «Helv. Phys. Acta, suppl.», 1956, N 4, 54.
397. Giao A. «Portug. Math.», 1961, 20, 153.
398. Chose J. K., Kumar P. «Phys. Rev. D», 1976, 13, 2736.
399. Raab I. «Acta Phys. Austriaca», 1968, 28, 216.
400. French J. D. «Am. J. Phys.», 1977, 45, 580.
401. Narlikar V. V. «Current Sci.», 1968, 37, 281.
402. Brillouin M. L. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1966, B263, 755.
403. Burčev P. «Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Physica», 1975, 5, 285.
404. Davidson W., Efinger H. J. «GRG», 1976, 7, 423.
405. Гурович В. И. Тр. по теории поля, МОИП, М., 1965, вып. 2, с. 120.
406. Зельдович Я. Б. «Письма в ЖЭТФ», 1965, 1, 40.
407. Гуц А. К. «Изв. вузов. Физика», 1973, № 9, 30.
408. Захаров В. Н. Сб. научн. работ аспирантов. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1969, вып. 6, с. 181.
409. Мицкевич Н. В. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1967, вып. 3, с. 129.
410. Dehnen H. «Z. f. Naturf.», 1967, 22a, 816.
411. Kurijagawa A., Ihara M., Mori S. «Phys. Rev. D», 1975, 12, 2955.
412. Ashtekar A., Magnon A. «J. Math. Phys.», 1975, 16, 341.
413. Papini G. «Nuovo Cimento», 1967, B52, 136.
414. Balasz N. L. «Phys. Rev.», 1958, 110.
415. Сбытов Ю. Г. Научн. тр. ВНИИОФИ. М., 1972, вып. А1, с. 116.
416. Mashhoon B. «Phys. Rev. D», 1975, 11, 2679.
417. Pineault S., Roeder R. C. «Ap. J.», 1977, 212, 541; 213, 548.

418. Stark R. F., Connors P. A. «Nature», 1977, 266, 429.
419. Владимиров Ю. С., Исхаков И. Ф. «Изв. вузов. Физика», 1972, № 2, 158.
420. Fu K. Y. «Nuovo Cimento», 1976, B36, 41.
421. Волков А. М., Измestьев А. А., Скроцкий Г. В. «ЖЭТФ», 1970, 59, 1254.
422. Harwitt M. et al. «Nature», 1974, 249, 230.
423. Dennison B. K. Astronomical polarization studies at radio and infrared wavelengths. Ph. Diss., Cornell Univ., 1976.
424. Mashhoon B. «Nature», 1974, 250, 316.
425. Damour T., Ruffini R. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1974, A279, 971.
426. Crommelin A. C. D. «Nature», 1920, 105, 23.
427. Хвольсон О. «Astron. Nachr.», 1924, 221, 329.
428. Link F. «C. R. Acad. Sci.» (Paris), 1936, 202, 917.
429. Zwicky F. «Phys. Rev.», 1937, 51, 290.
430. Herlt E., Stephani H. «Int. J. Theor. Phys.», 1976, 15, 45.
431. Бялко А. В. «Астрон. журн.», 1969, 46, 998.
432. Fiebelman W. A. «Science», 1966, 151, 73.
433. Ингель Л. X. «Астрофизика», 1974, 10, 555.
434. Ronsey C. E. Evidence for secondary gravitationally lensed images in radio quasistellar objects. Ph. Diss., Univ. Oklahoma, 1977.
435. Winterberg F., Phillips W. G. «Phys. Rev. D», 1973, 8, 3329.
436. Christensen R. «Nuovo Cimento», 1973, B15, 69.
437. Ингель Л. X. «Астрофизика», 1975, 52, 727.
438. Сбытов Ю. Г. «ЖЭТФ», 1972, 63, 737; 1976, 71, 2001.
439. Сбытов Ю. Г., Кочкин Р. А. В кн.: Теория относительности и гравитация. М., 1976, с. 18.
440. Griffith J. B. «Phys. Lett.», 1975, A54, 269.
441. Кочкин Р. А., Сбытов Ю. Г. «Известия вузов. Физика», 1978, № 9, 120.
442. Брагинский В. Б., Менский М. Б. «Письма в ЖЭТФ», 1971, 13, 585.
443. Брагинский В. Б. и др. «ЖЭТФ», 1973, 65, 1729.
444. Менский М. Б. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., 1975, вып. 6, с. 181.
445. Baierlein R. «GRG», 1976, 7, 583.
446. Zipoy D. M., Bertotti B. «Nuovo Cimento», 1972, B7, 240.
447. De Witt B., Brehme R. «Ann. of Phys.», 1960, 9, 220; de Witt C. M., de Witt B. «Physics», 1964, 1, 3.
448. Кууск (Керес) П. «Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук», 1971, 20, 264.
449. Кууск П., Унт В. «Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук», 1972, 21, 3, 17.
450. Unt V., Kuusk P. ENSY TA Toimet., «Füüs. Matem.», 1976, 25, 234.
451. Кууск П. Препринт ИТФ-73-13Р; -23Р. Киев, 1973.
452. Манкин Р., Пийр И. «Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук», 1971, 20, 413.
453. Манкин Р., Пийр И. Препринт Р1-29. Тарту, 1974.
454. Манкин Р. Препринт Г1-30. Тарту, 1974.
455. Mankin R., Piir I. Preprint FAI-27, Tartu, 1973.
456. Кууск П. «Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. наук». 1978, № 2, 142.
457. Пийр И. Р., Манкин Р. И. Тезисы Гр-3. Ереван, 1972, с. 132.
458. Кууск П. Электромагнитное излучение в ОТО. Автореф. канд. дис. Тарту, 1974.
459. Манкин Р. И. О нарушении принципа Гюйгенса в слабом гравитационном поле. Автореф. канд. дис. Тарту, 1974.
460. Файнгольд М. И. Некоторые особенности спирального рассеяния. Автореф. канд. дис. Ташкент, 1966.
461. Файнгольд М. И. «Изв. АН УзССР», 1968, № 6, 50.
462. Файнгольд М. И. «Астрометрия и астрофизика», 1977, 35, вып. 33
463. Маликов М. Ф. Основы метрологии. М., 1949.
464. Чертов А. Г. Единицы физических величин. М., 1977.
465. Фридман А. А. Мир как пространство и время. Петербург, 1923.

466. Georgevic R. M., Anderson J. D. «J. Franklin Inst.», 1973, 296, 275.
467. Петров А. З. В кн.: Гравитация и теория относительности, 1970, вып. 7 (Казан. ун-т).
468. Бор Н. Дискуссии с А. Эйнштейном о теоретико-познавательных проблемах в атомной физике.— В кн.: Философские вопросы современной физики. М., 1959.
469. Петров А. З. Построение теории гравитационных волн и физический эксперимент.— В кн.: Методологические проблемы теории измерения. Киев, 1966.
470. Керес Х. П. В кн.: Методологические вопросы физики. Тарту, 1977, вып. III.
471. Введенский Б. А., Аренберг А. Г. Радиоволноводы. Ч. I. М—Л., 1946.
472. Де Бройль Л. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М., 1948.
473. Гуревич А. Г. Полые резонаторы и волноводы. М., 1952.
474. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1951.
475. Никольский В. В. Теория электромагнитного поля. М., 1964.
476. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. М., 1963.
477. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., 1957.
478. Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvignes et leurs divers applications. Paris, 1859.
479. Voigt W. «Abhandl., Wiss. Gess.» (Gottingen), 1887, 34; Duhem P. «Ann. Ecole Norm. Paris», 1893, 10, 187.
480. Cosserat E., Cosserat F. Theorie des corps deformables. Paris, 1909.
481. Maugin G. A., Eringen A. C. «J. Math. Phys.», 1972, 13, 1788.
482. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М., 1975.
483. Фредерикс В. К., Фридман А. А. Основы теории относительности Л, 1924.
484. Синдж (Синг) Дж. Л. Тензорные методы в динамике. М., 1947.
485. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. М., 1958.
486. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1964
487. Synge J. L. Relativity: the special theory. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam, 1965.
488. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1957.
489. Фок В. А. Теория пространства времени и тяготения. М., 1961.
490. Lewis G. N., Tolman R. C. «Phil. Mag.», 1909, 18, 510.
491. Tupper O. J., Phillips G. W. «J. Phys. A: Gen. Phys.», 1969, 3, 149.
492. Irvine W. M. «Physica», 1964, 30, 1160.
493. Клейн Ф. Неевклидова геометрия. М., 1936.
494. Румер Ю. Б. Исследования по 5-оптике. М., 1956.
495. Pirani F. A. E. «Acta Phys. Polon.», 1956, 15, 389; «Bull. Acad. Polon. Sci.», 1957, 5, 143.
496. Belinfante F. J. «Physica», 1940, 7, 305.
497. Румер Ю. Б., Фег А. И. Теория унитарной симметрии. М., 1970
498. Fock V. «Journ. de Phys.», ser. 6», 1929, 10, 397.
499. Corson E. M. Introduction to tensors, spinors and relativistic wave-equations. N. Y., 1953.
500. Newman E. T., Penrose R. «J. Math. Phys.», 1962, 3, 566.
501. Фролов В. П. Труды ФИАН, 1977, 96, 72.
502. Алексеев Г. А., Хлебников В. И. Препринты № 66, 79, 1977 (ИПМ АН СССР).
503. Хлебников В. И. «ТМФ», 1978, 35, 296.
504. Newman E. T. «J. Math. Phys.», 1973, 14, 774.
505. Newman E. T., Winicour J. «J. Math. Phys.», 1974, 15, 426.

506. Flaherty E. J. *Hermitean and Kählerian Geometry in Relativity*. Springer, 1976.
507. Plebański J. F. «J. Math. Phys.», 1975, **16**, 2395.
508. Plebański J. F., Hacıan S. «J. Math. Phys.», 1975, **16**, 2403.
509. Plebański J. F., Schild A. «Nuovo Cimento», 1976, B **35**, 35.
510. Debney G. In: *Differential Geometry*. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.
511. Богуш А. А., Иваницкая О. С., Кисель В. В., Костюкович Н. Н. Препринт № 141, 1978 (ИФ АН БССР).
512. Хлебников В. И. Препринт № 94, 1977; № 31, 1978 (Ин-т прикладной математики АН СССР).
513. Дозморов И. М. «Изв. вузов. Физика», 1974, № 12, с. 142.
514. Храпко Р. И. В кн.: *Современные проблемы гравитации*, Тбилиси, 1967, с. 299.
515. Newman E. T., Janis A. I. «J. Math. Phys.», 1965, **6**, 914.
516. Newman E. T. et al. «J. Math. Phys.», 1965, **6**, 918.
517. Kinnresley W. «J. Math. Phys.», 1969, **10**, 1195.
518. Frolov V. P., Hlebnikov V. I. Preprint, N 27, Lebedev Physical Institute Acad. Sci. USSR. M., 1975.
519. Костюкович Н. Н. Тезисы Гр-4. Минск, 1976, с. 240.
520. Debney G., Kerr R. P., Schild A. «J. Math. Phys.», 1969, **10**, 1842.
521. Różga K. «Repts. on Math. Phys.», 1977, **11**, 197.
522. Carmeli M., Kaye M. «Ann. of Phys.», 1975, **99**, 188.
523. Hogan P. A. «Nuovo Cimento», 1976, **B32**, 407.
524. Carmeli M. In: *Group theory in Nonlinear Problems*, D. Reidei, 1974, p. 54.
525. Carmeli M. «Lett. Nuovo Cimento», 1977, **18**, 17.
526. Carmeli M. «J. Math. Phys.», 1970, **11**, 2728.
527. Wódkiewicz K. «J. Math. Phys.», 1977, **18**, 441.
528. Carmeli M., Kaye M. «Nuovo Cimento», 1977, **B39**, 187.
529. Carmeli M. «Phys. Rev. D», 1976, **14**, 2518.
530. Синг Дж. *Общая теория относительности*. М., 1963.
531. Родичев В. И. *Теория тяготения в ортогональном репере*. М., 1974.
532. Infeld L. *Zur nichtholonomen Geometrie*. Warszawa, Wydaw. redak. Prac. Mat.-fiz., 1931.
533. Anderson J. L. *Principles of relativity physics*. London, 1967, p. 51.
534. Ricci G. *Dei sistemi di congruenze ortogonale in una varieta qualunque*. Memorie Accad. Lincei, 1895, **2**, 276.
535. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии*. М., 1939.
536. Схоутен Я. А. *Тензорный анализ для физиков*. М., «Наука», 1965.
537. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия*. М., ИЛ, 1948.
538. Норден А. П. *Пространства аффинной связности*. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
539. Weitzenböck R. *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 1928, S. 446.
540. Cartan E. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*, 1962 (Казан. ун-т).
541. Mandelstam S. «Ann. of Phys.», 1962, **19**, 1.
542. Вагнер В. *Труды семинара по векторному и тензорному анализу*, 1941, вып. 5, 173.
543. Сягло И. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1971, № 5, с. 89.
544. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. Т. 1. М., 1970.
545. Иваницкая О. С., Митянок В. В. *Классы калибровок Ламе и локальных преобразований Лоренца для гравитационных потенциалов*. Минск, 1974 (препринт ИФ АН БССР).
546. Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1972, № 4, с. 58.
547. Иваницкая О. С. Препринт ИТФ-73-88Р. Киев, 1973.

548. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник, 1968. М., 1971, с. 115; Эйнштейновский сборник, 1974. М., 1976, с. 286.
549. Иваницкая О. С., Выблый Ю. П. Препринт № 87, 1975 (ИФ АН БССР).
550. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. М., 1947.
551. Digas P. A. M. Interacting gravitational and spinor fields.—In: Recent developments in general relativity. Warszawa, 1962, p. 197.
552. Фок В. А. «Изв. АН СССР. Сер. физ. наук», 1966, 30, 1229.
553. Сягло И. С. Тезисы докл. Всесоюз. симпозиума «Новейшие проблемы гравитации». М., 1973, с. 79.
554. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. М., 1960.
555. Холл М. Теория групп. М., 1962.
556. Treder H. J. Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitations theorie. Berlin, Acad. Verlag., 1966, s. 58.
557. Тредер Г. Ю. «Вопросы философии» (с предисловием В. А. Фока), 1974, № 3, 49.
558. Сягло И. С. Калибровочные условия и подгруппы локальных преобразований Лоренца в тетрадной теории гравитации. Автореф. канд. дис. Минск, 1972.
559. Иваницкая О. С. «ДАН СССР», 1974, 218, 540.
560. Иваницкая О. С., Выблый Ю. П. Препринт № 103, 1976 (ИФ АН БССР).
561. Фомин П. И. «ЖЭТФ», 1968, 54, 905.
562. Сягло И. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук». 1973, № 3, с. 74.
563. Владимиров Ю. С. Диадный метод в ОТО. Депон. рукопись, № 7228-73, 1973 (ВИНИТИ АН СССР).
564. Митянок В. В. Некоторые следствия специальной теории относительности в эйнштейновой теории гравитации. Автореф. канд. дис. Минск, 1975.
565. Новиков И. Д. «Сообщения ГАИШ», 132, 3, 1964.
566. Varignon P. C. «Proc. Roy. Soc.», 1965, A284, 204.
567. Мицкевич Н. В. Эйнштейновский сборник, 1971. М., 1972, с. 67.
568. Иваницкая О. С. Гравитация и теория относительности, № 4—5, 202, 1968 (Казан. ун-т).
569. Митянок В. В. Теоретическая физика и физика плазмы.—Сб. трудов ИФ АН БССР. Минск, 1975, с. 7.
570. Plebański J. «Acta Phys. Polon.», 1965, 28, 141.
571. Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1970, № 5, с. 82.
572. Мицкевич Н. В., Захаров В. Н. «ДАН СССР», 1970, 195, 321.
573. Sallie N. Raumzeitliche Aufspaltung des vierdimensionalen Riemannschen Raumes innerhalb eines festen Bezugssystem. Ubergang auf beliebig bewegte Bezugssysteme. Dissertation. Jena, 1964.
574. Выблый Ю. П. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1976, № 4, с. 93
575. Федоров Ф. И. В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, 1967, с. 97.
576. Сусурин Г. Э., Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук» 1971, № 5, с. 84.
577. Унг В. А. О центрально-симметрических гравитационных полях в ОТО. Автореф. канд. дис. Тарту, 1962.
578. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.—Л., 1950.
579. Пельх В. А. В кн.: Математические методы и физико-механические поля. Киев, «Наукова думка», 1976, вып. 3.
580. Скоробогатько В. Я., Каленюк П. У. Якісні методи теорії диференціальних рівнянь. Київ, «Наукова думка», 1977, раздел 2, § 8.
581. Карган Э. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям в Сорбонне в 1926—1927 гг.) Под ред. С. П. Финникова. М., 1960.
582. Зельманов А. А. Тезисы GR-5. Тбилиси, 1968, с. 116.

583. **Иваницкая О. С.** «ДАН СССР», 1971, 201, 315.
584. **Сягло И. С., Иваницкая О. С.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1974, № 5.
585. **Иваницкая О. С., Выблый Ю. П.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 5, с. 66.
586. **Сягло И. С.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1970, № 1, с. 83.
587. **Фок В. А.** В кн.: Recent developments in general relativity. Warszawa, 1962.
588. **Levy-Civita T.** The Absolute Differential Calculus. London, 1927.
589. **Laue M.** Die Relativitätstheorie. Braunschweig, 1921, bd. I.
590. **Weyl H.** Raum, Zeit und Materie. Berlin, 1923.
591. **Galbrun H.** Introduction á la theorie de la relativité. Paris, 1923.
592. **Кармикаэль Р. Д.** Новые идеи в математике. Принцип относительности в математике. Спб., 1914, № 5, с. 102.
593. **Eckart C.** «Phys. Rev.», 1940, 58, 919.
594. **Зельманов А. Л.** Труды шестого совещания по вопросам космогонии. Изд-во АН СССР, 1959, с. 144.
595. **Зельманов А. Л.** О деформации и кривизне сопутствующего пространства. Автореф. канд. дис., 1944 (МГУ).
596. **Cattaneo C.** «Nuovo Cimento», 1958, 10, 318; 1959, 13, 237.
597. **Massa E.** «Nuovo Cimento», 1966, 42, 78.
598. **Massa E.** «GRG», 1974, 5, 555.
599. **Мицкевич Н. В.** Физические поля в общей теории относительности. М., 1969.
600. **Захаров В. Д.** Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., 1972
601. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1948, 61, 993.
602. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1956, 107, 815.
603. **Laue M.** Die Relativitätstheorie. Braunschweig, 1923, bd. 2.
604. **Berenda W.** «Phys. Rev.», 1942, 62, 280.
605. **Gordon W.** «Ann. der Phys.», 1923, 72, 421.
606. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1960, 135, 1367.
607. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1959, 124, 1030.
608. **Новиков И. Д.** «Вестник МГУ», 1960, № 2, 59.
609. **Твердохлебова В. А.** Тезисы докл. Всесоюз. конф. Гр-4. Минск, 1976, с. 56.
610. **Григорьева Л. Б.** «ДАН СССР», 1970, 192, 1251.
611. **Григорьева Л. Б., Захаров В. Д.** В кн.: Гравитация и теория относительности, 1971, с. 46 (Казан. ун-т).
612. **Григорьева Л. Б., Захаров В. Д.** «ДАН СССР», 1972, 207, 814
613. **Полищук Р. Ф.** «Вестник МГУ. Сер. физ., астр.», 1972, 13, 612; 1973, 14, 3.
614. **Полищук Р. Ф.** «ДАН СССР», 1973, 208, 1321; 1973, 209, 76.
615. **Полищук Р. Ф.** «ЖЭТФ», 1972, 62, 5.
616. **Владимирова Л. Ф.** К проблеме гравитационных волн. Автореф. канд. дис. М., 1977.
617. **Digac P. A. M.** «Proc. Roy. Soc.», 1958, A246, 333.
618. **Дирак П.** В кн.: Новейшие проблемы гравитации. М., 1961.
619. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1973, 209, 822.
620. **Владимиров Ю. С.** Эйнштейновский сборник, 1972, М., 1974, с. 280.
621. **Владимиров Ю. С., Антонов В. И.** Препринт ИТФ-72-137Р. Киев, 1972.
622. **Алиев Б. Г., Владимиров Ю. С.** Препринт ИТФ-74-7Р. Киев, 1974.
623. **Антонов В. И., Ефремов В. Н., Владимиров Ю. С.** В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. 1976, с. 34; «GRG», 1978, 9, 9.
624. **Сягло И. С.** «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1971, № 6, с. 82.
625. **Зельманов А. Л.** «ДАН СССР», 1976, 227, 78.
626. **Schmutzer E.** «Z. f. Naturforsch.», 1964, 19, Heft 6.

627. Шмутцер Э. В кн.: Современные проблемы гравитации. Тбилиси, 1967, с. 236.
628. Schutze E. Relativistische physik. Leipzig, 1968.
629. Иваницкая О. С. «ДАН БССР», 1970, 14, 701.
630. Федоров Ф. И. «ДАН БССР», 1958, 2, 408; 5, 101, 161; 1961, 5, 194; 1973, 17, 208.
631. Федоров Ф. И. «ДАН СССР», 1962, 143, 56.
632. Федоров Ф. И. В кн.: Труды международной школы по физике высоких энергий. ОИЯИ, 2-6371. Дубна, 1971.
633. Федоров Ф. И. Группа Лоренца. М., «Наука», 1979.
634. Федоров Ф. И. В кн.: Гравитация. Киев, 1972, с. 296.
635. Крылов Б. В. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1977, № 5, с. 60.
636. Сягло И. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1978, № 4, с. 69.
637. Федоров Ф. И., Богуш А. А. «ДАН БССР», 1962, 6, 690.
638. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. «Ядерная физика», 1967, 5, 327.
639. Федоров Ф. И. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1967, № 2, с. 65.
640. Богуш А. А., Федоров Ф. И. «ДАН БССР», 1961, 5, 327.
641. Богуш А. А., Федоров Ф. И. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1962, № 2, с. 26.
642. Федоров Ф. И. «Ядерная физика», 1973, 17, 882; «ТМФ», 1974, 18, 329.
643. Федоров Ф. И., Тхарев Е. Е. «Ядерная физика», 1968, 7, 189.
644. Федоров Ф. И. «ТМФ», 1970, 2, 343.
645. Тхарев Е. Е., Федоров Ф. И. «ТМФ», 1971, 7, 322.
646. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Конечные преобразования группы Лоренца и их представлений, 1970 (препринт ИФ АН БССР).
647. Bogush A. A., Fedorov F. I. Finite transformations in continuous symmetry group theory and its application in the field theory of elem. particl. Препринт № 90. Минск, 1976 (ИФ АН БССР).
648. Bogush A. A., Fedorov F. I. «Repts. on Math. Phys.», 1977, 11, 37.
649. Богуш А. А., Федоров Ф. И. «ТМФ», 1972, 13, 67.
650. Богуш А. А. О векторной (регулярной) параметризации комплексной группы Лоренца $SO(4, C)$, 1972 (препринт ИФ АН БССР).
651. Богуш А. А., Федоров Ф. И. В кн.: Тр. международной школы по физике высоких энергий. ОИЯИ, P1, 2-76, 42, 1973, с. 5.
652. Богуш А. А., Мироненко А. А. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1973, № 6, с. 56.
653. Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Лапковский Л. К., Федоров Ф. И. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1976, № 1.
654. Курочкин Ю. А. Кватернионы и некоторые приложения их в физике. Препринт № 109, 1976 (ИФ АН БССР).
655. Богуш А. А., Курочкин Ю. А., Федоров Ф. И. «ДАН СССР», 1977, 236, 58.
656. Вейль Г. Классические группы. М., 1947.
657. Богуш А. А. О некоторых свойствах ортогональных преобразований, 1972 (препринт ИФ АН БССР).
658. Богуш А. А., Федоров Ф. И. «ДАН СССР», 1972, 206, 1033.
659. Богуш А. А., Мороз Л. Г., Федоров Ф. И. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1970, № 4, с. 85.
660. Иваницкая О. С. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1967, вып. 3, с. 138; 1968, вып. 4—5, с. 202.
661. Rainich G. Y. «Trans. AmMath. Soc.», 1925, 27, 106.
662. Сягло И. С., Иваницкая О. С. «ДАН БССР», 1969, 13, 34.
663. Вук С. В. «Nuovo Cimento», 1958, 10, 854.
664. Богуш А. А., Федоров Ф. И. «ДАН БССР», 1961, 5, 241.
665. Иваницкая О. С. В кн.: Гравитация и теория относительности. Казань, 1968, вып. 4—5, с. 202.
666. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М., 1970.

667. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
668. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск, 1958.
669. Hoggak Z. «Ceskosl. cas. pro fyziku», 1977, 27, 525.
700. De Bra D. In: 7-th Int. Symp. IFAC, Munich, 1976, 1, 142.
701. Schöpf H. G. «Mathemat. Nachrichten», 1968, 38, 181.
702. Иваницкая О. С. «Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1972, № 6, с. 65.
703. Pellegrinni C., Plebański J. «Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.», 1963, 2, N 4.
704. Pandres Dave. «Phys. Rev. D.», 1976, 14, 3322.
705. Туняк В. Н. «Изв. вузов. Физика», 1976, № 4, 124.
706. Элементарные частицы и компенсирующие поля. Под ред. Д. Д. Иваненко. М., 1964.
707. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., 1972.
708. Левашев А. Е. Труды физ.-тех. ин-та АН УзССР, 1949, 2, 12.
709. Levashev A. E., Ivanitskaja O. S. «Acta Phys. Polonica», 1963, 23, 647.
710. Родичев В. И. Эйнштейновский сборник, 1974. М., 1976, с. 286.
711. Марцке Р., Уилер Дж. В кн.: Гравитация и относительность. Под ред. Х. Цзю и В. Гоффмана. М., 1965.
712. Левашев А. Е. В кн.: Методологические проблемы теории измерения. Киев, «Наукова думка», 1966, с. 70.
713. Левашев А. Е. В кн.: Гравитация. Проблемы, перспективы. Киев, «Наукова думка», 1972, с. 129.
714. Everitt C. W. F. In: Proc. First Marcel Grossmann Meeting on General Relativity. Trieste, 1977, p. 545.
715. Walker M. «Phys. in Canada», 1977, 33, 68.
716. Scientific application of Lunar Laser Ranginig (Proc. Symp. in Austin, 1976), D. Reidel, 1977.
717. Руденко В. Н. «УФН», 1978, 126, вып. 3, 361.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автономные неполные наборы калибровок 171
— подсистемы 186, 189, 230
Аномалистический период 90
Арифметизация 209
Бивектор (двухлистный, простой, круговой, изотропный, или нулевой) 306
Вектор-параметры лоренцева преобразования 284, 285, 289
«Викинг» 59
Вторая геометрия со специальной связностью 258, 262
Вырождение калибровочных условий 179, 207
Генерирование подгрупп преобразований 174, 192, 193
Гравитационные поля Вадьи 80
— — Вейля — Леви-Чивита 13
— — гравитационной волны 16
— — Керра 15
— — Котлера — Трефтца — де Ситтера 15
— — Лензе—Тирринга 15
— — Нордстрема—Рейсснера 14
— — Шварцшильда 13
Гравитационные потенциалы метрические 12
— — тетрадные 134
Гравитационный ток 278
Гравитационные эффекты ОТО (см. эффекты)
Группа Лоренца 282
Девииции уравнение 36
Декартов базис (триада) 11
Десинхронизации время 54, 152
Дефект параллелограмма 88
— кинематический 212, 265
Диадные наборы калибровок 191, 206
Динамические характеристики систем отсчета 167, 168, 244
Добавочная аномалия 27, 28, 34, 48, § 24
— — квазиньютонова предела ОТО § 24
Дуальный поворот (преобразования) 293, 294
— тензор 145, 234
Естественно измеряемая величина по Эйнштейну 116, 131, 137, 143, 238
Измерения основное уравнение 109
Инварианты бивектора 293, 298, 307
— относительно R -подгруппы 212, 213
— хронометрические 211, 221, 226, 227, 229
— кинеметрические 211, 238, 240
Индексы лоренцевы (локальные) 129, 233, 234
Инерциальная навигация 167
Калибровочные постоянные 203
— условия (калибровка тетрадных гравитационных потенциалов) 134, 135, 166, 167, 169, 170
Квадрупольный момент 20
Квазары 46, 51, 103
Кеплерова частота 37
Класс транзитивности тетрад 178, 199, 203
Класс калибровок Ламе 182, 208
— — сопутствия 194, 198, 199, 200
— — х. и.-подобных 204, 205, 208
— — групповых 204, 241

- Комплексная группа Лоренца 285, 286, 302
- Композиции закон 284, 288, 294, 295, 303, 304
- Конгруенция наблюдателей 168
- Координатные представления (выражения, координатные аналоги) R -подгруппы 175, 180, 247
- Коринальдеси—Папапетру условие 39, 52
- Космологическая постоянная 15, 33, 49, 60, 75, 98
- Коэффициенты вращения Риччи 161, 162, 214, 251, 252, 256
- Кривизна 164
- Критерии гравитационно-инерционного излучения 229
- Кручение 164, 165, 262, 265
- Ламе коэффициенты 120, 121, 125, 126, 131, 133, 137, 170, 171
- условия 125
- матрица 166
- Леви-Чивита (псевдотензор) дискриминантный тензор 145, 288, 290
- Лоренцев базис (тетрада) 8, 115, 127, 151, 170, 171, 282
- полином 287, 292, 297, 299
- Лоренцево представление (выражение, лоренцев аналог) R -подгруппы 175
- «Маринер» 58, 61
- Матрицы само- и антидуальные 283, 284
- Мировые тензоры (компоненты) 136
- Монада (хоро-, хроно-) 189, 190, 205, 219, 223, 224
- Наблюдаемые 238
- Наблюдатель заинтересованный 194
- одиночный 168
- Набор калибровок Ламе канонический 183
- — — двойственный 185
- — — неполный, полный 170, 173, 175, 198, 199
- — — побочный 185
- — — обратный 186
- Наименьшее уклонение тетрад от единичных 208
- Нулевая (изотропная) тетрада 155
- Ньюмена—Пенроуза формализм 155
- Объект неголономности 160, 220
- Операция дуальности (разные варианты) 297, 298
- присвоения 212
- Опережение изотропного сигнала 59
- Ортометрическая величина 249
- Ортометричности условие 249, 250, 253, 255, 257
- Параметризация лоренцевых преобразований 282
- — — векторная 284
- — — бивекторная 290
- Параметры гравитирующие 9, 10
- пробные 10
- Перелицовка компонент полная 212, 215, 245, 246, 255, 261
- — усеченная, частичная 215, 255
- Переобозначения координат 189
- Перигелия Меркурия смещение 30
- Пиани условие 38, 39, 52
- Подгруппа пространственных вращений (R -подгруппа) 175, 203, 211
- Пределы ОТО (квазиньютоновы приближения) 11, 276, 277, 278, 279
- Представление ОТО R -ковариантное 216, 217, 218
- Преобразования кинеметрические 240
- Лоренца локальные (обобщенные) 139, 140, 166, 257
- с R -скалярными коэффициентами 219, 220
- хронометрические 199, 258
- Пробное тело 9, 10
- Производные R -инвариантные (ковариантные) 214, 215
- хронометрически-инвариантные 228
- кинеметрически-инвариантные 240
- ортометрические 254
- Пульсар 95, 99
- Расщепление $(3+1)$ 146, 151, 218, 226
- Реакция спина на кривизну 279
- Референционные условия 177, 199

- Римана—Кристоффеля тензор 215, 216
- Само-, антидуальность 283, 284, 291
- Семейство бивектор-параметров Лоренца преобразования 293, 294
- Сидерический период 89, 94
- Символы Кристоффеля трехмерные 236, 242
- Сингулярности тетрад калибровочные 181
- — координатные 181
- Синхронизма условие 36, 54
- Система отсчета 143, 177, 179, 210, 223, 224, 225, 237
- Соотношение Кэли 287
- Составляющие криволинейные 119
- физические 120, 122, 123, 124
- Специальные (ограниченные, стандартные) мировые компоненты 147, 148, 149, 172, 232, 233
- подгрупповые ковариантности 176, 179
- Спрятанная триада (триэдр) 149, 210
- Тетрадное представление (формулировка) 133, 136, 158
- Тетрады, сопутствующие пробным телам в поле Шварцшильда 199
- Трансформационные свойства, заданные на подгруппах 176
- Усеченные метрические тензоры 184, 185, 187, 250
- Ферми—Уолкера калибровка 167, 196
- Физические время, расстояние 222, 265
- Физические компоненты 118, 121, 123, 135, 136, 137, 143, 145, 230, 237, 260
- Физическая (нефизическая) часть калибровок 177
- Френе—Серре калибровка 196
- Хроно-, хоро-величины 146
- Хронометрически инвариантные (х. и.) промежутки времени, скорость, ускорение и др. 228
- Эйнштейново обобщение понятия источника гравитационного поля 9, 27
- Эффекты**
- ван Паттена и Эверитта 86
- Вебера—Брагинского 70
- Гравитационные аналоги эффектов Штарка 99
- — — Зеемана 99, 100
- — — Саньяка 100
- — — Фарадея 101
- — — Черенкова 100
- Гравитационные отталкивания 67, 68, 69, 70
- — периодические 70
- — спин-спиновые 70
- Гравитационные притяжения 65, 66, 68, 69, 70
- — периодические 70
- — спин-спиновые 70
- Дрейф луча света 51
- точки встречи частиц 92, 93, 94
- Зависание в гравитационном поле 68
- Запаздывание (задержка) сигналов полями 54, 55
- — — Керра (анизотропное) 60
- — — Коттлера—де Ситтера 60
- — — Нордстрема—Рейсснера 59, 60
- — — Шварцшильда (эффект Шапиро) 57, 58
- Запаздывание пробных частиц 56, 155
- Захваты гравитационные пробных частиц 78
- — лучей света 73, 79, 80, 81
- Зеркало гравитационное 108
- Кручение светового луча 87
- Либрация 87
- Линза гравитационная 104
- — изображения 104, 105
- — усиление яркости 104, 105
- — фокусировка 103, 104, 105
- Массы дефект 97, 98
- Ограничения на радиусы орбит круговых 72, 74, 75, 76
- — углы вылета светового луча 72, 75
- — углы наклона 77

- Отклонения лучей полями 43
- — — Вейля—Леви-Чивита 47
- — — ГВ (периодическое) 51, 52
- — — Керра 50, 51
- — — Котлера—де Ситтера 49
- — — Нордстрема—Рейснера 48
- — — Шварцшильда 45, 53
- ультрарелятивистских частиц 44, 48, 50, 52
- Парадокс близнецов 88, 91
- Параллакс годовичных уменьшение 46
- Периода дефект 89, 90, 93, 94, 95, 268
- Перицентра смещение гравитирующего заряда 37
- — — магнитного диполя 38
- Перицентра смещения полями 28
- — — Вейля—Леви-Чивита 30, 31
- — — ГВ (плоской) резонансное 36
- — — Керра 34, 35
- — — Котлера—де Ситтера 33
- — — Нордстрема—Рейснера 32, 33
- — — Шварцшильда 29
- Перицентра смещение пробного осциллятора 36
- — — заряда 40
- — — спина 38, 41, 42
- Поворот орбиты в поле ГВ 87
- Поляризованного света дисперсия (эффект Машхуна) 102
- Прецессии (пробного спина) де Ситтера 83
- О'Коннелла 83
- резонансная 84
- Шиффа 84
- Прецессия Лензе—Тирринга 35, 85
- Пробного спина изменения 85
- Разделения круговых орбит 73, 76, 77, 78
- — — пробных антипараллельных спинов 39, 41, 42
- — — пробных зарядов 40
- — — пробных осцилляторов 36, 37
- Расстояния дефект 96, 97
- Резонанс гравитационно-электромагнитный 106
- Резонансное влияние ГВ на орбиты 82
- Самозамыкание световых лучей 73, 80
- Сдвиги частот (смещения спектральных линий) красные 18, 19, 20, 24
- — голубые 20, 22, 24
- — анизотропные 20, 22
- — периодические 23
- — доплеровские (утроение доплеримпульса) 24
- Сдвигов частот резонансное накопление 24
- — коротко-временные измерения 26
- Скоростей дефект 97
- Сцинтилляции в поле ГВ 107
- Увлечение в прямое движение полем Керра 81
- Фокусировка в поле ГВ 106
- «Хвост» излучения 107
- Числа колебаний дефект 95
- Эха расщепление гравитационное 109

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Основные обозначения	5

Глава I

Систематизация гравитационных эффектов, предсказываемых ОТО (некоторые эффекты, связанные с четырьмя критическими эффектами)

Введение	7
§ 1. Параметры гравитационных эффектов ОТО	9
§ 2. Сдвиги частот в гравитационных полях	16
§ 3. Добавочные аномалии и смещения перицентров при квази-эллиптическом движении	27
§ 4. Отклонение электромагнитных сигналов и добавочные аномалии при квазигиперболическом движении	43
§ 5. Запаздывание частиц и электромагнитных сигналов, вызванное десинхронизацией	53

Глава II

Продолжение систематизации эффектов ОТО (некоторые другие предсказанные эффекты)

Введение	63
§ 6. Эффекты гравитационного ускорения пробных тел	65
§ 7. Ограничения параметров орбит пробных тел	71
§ 8. Прецессии, повороты плоскостей орбит и либрация	83
§ 9. Дефекты времени, пути и массы	88
§ 10. Гравитационные аналоги некоторых оптических явлений	98
§ 11. Два разряда величин в выражениях для гравитационных эффектов ОТО	109

Глава III

Тетрадное представление эйнштейновой ОТО

Введение	116
§ 12. Триадный метод Ламе	118
§ 13. Представление ОТО в лоренцевском базисе (алгебраическая часть)	130

§ 14. $(3+1)$ -расщепление. Обобщение на изотропный базис	146
§ 15. Математический аппарат тетрадного представления ОТО (элементы анализа)	159

Глава IV

Построение теории калибровочных условий

Введение	166
§ 16. Общий анализ калибровочных условий	170
§ 17. Класс калибровок Ламе	182
§ 18. Класс калибровок сопутствия	194
§ 19. Класс x . и-подобных калибровок	204

Глава V

Специальные формулировки ОТО, выделяющие подгруппы преобразований

Введение	209
§ 20. R -ковариантное представление ОТО	212
§ 21. Переход к хроно- и кинематрическим формулировкам ОТО	220
§ 22. Сопоставление R -ковариантного и ортоматрического представлений ОТО	247
§ 23. Сопоставление R -ковариантного представления ОТО с формулировкой Шмутцера	257
§ 24. Сопоставление кинематических дефектов друг с другом и с добавочными аномалиями	265

Глава VI

Бивекторная запись комплексной векторной параметризации группы Лоренца

Введение	282
§ 25. Группа Лоренца с комплексными вектор-параметрами (матричная запись)	284
§ 26. Группа Лоренца $SO(3,1)$ с вещественным бивектор-параметром (тензорная запись)	290
§ 27. Группа Лоренца $SO(4,c)$ с комплексными бивектор-параметрами (тензорная запись)	295
Заключение	308
Литература	314
Предметный указатель	330

ОЛЬГА СЕМЕНОВНА ИВАНИЦКАЯ
ЛОРЕНЦЕВ БАЗИС
И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ
В ЭЙНШТЕЙНОВОЙ ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Редактор И. А. Шарфанович
Обложка Л. И. Соколова
Художественный редактор В. Ф. Гринкевич
Технический редактор И. В. Волоханович
Корректор Т. А. Зайцева

ИБ № 880

Печатается по постановлению РИСО АН БССР.
Сдано в набор 14.12.78. Подписано в печать
14.05.79. АТ 11099. Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 1.
Гарнитура литературная. Печать высочайш. Печ. л.
21,0. Уч.-изд. л. 20,0. Тираж 1250 экз. Зак № 366.

Цена 2 р. 30 к.

Издательство «Наука и техника». Минск, Ленинский
проспект, 68. Типография им. Франциска (Георгия)
Скорины издательства «Наука и техника» АН БССР
и Государственного комитета БССР по делам изда-
тельств, полиграфии и книжной торговли Минск,
Ленинский проспект, 68.