

**ПРОБЛЕМЫ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
АСТРОФИЗИКИ**

В. В. ИВАНОВ

**ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ
И СПЕКТРЫ
НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ

Редакционная коллегия:

*В. А. АМБАРЦУМЯН, Э. Р. МУСТЕЛЬ,
А. Б. СЕВЕРНЫЙ, В. В. СОБОЛЕВ*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

В. В. ИВАНОВ

ПЕРЕНОС ИЗЛУЧЕНИЯ
И СПЕКТРЫ
НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

523. 8.

И 20

УДК 523. 035

Всеволод Владимирович Иванов

Перенос излучения и спектры небесных тел

М., 1969 г., 472 стр. с илл.

(Серия: «Проблемы теоретической астрофизики»)

Редактор *И. С. Щербина-Самойлова*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректор *И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 7/1 1969 г.	Подписано к печати 27/VIII 1969 г.	Бумага
84 × 108 ¹ / ₃₂ . Физ. печ. л. 14,75.	Условн. печ. л. 24,78.	Уч.-изд. л. 24,03.
Тираж 1700 экз.	Т-10892.	Цена книги 2 р. 24 к. Заказ № 1590

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд-ва «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	8
Введение.	11
Глава I. Основные понятия.	14
§ 1.1. Излучение.	14
§ 1.2. Вещество.	20
§ 1.3. Процессы взаимодействия.	27
§ 1.4. Уравнения стационарности.	37
§ 1.5. Рассеяние света в частотах спектральных линий	45
§ 1.6. Перенос излучения.	61
Глава II. Линейное приближение.	71
§ 2.1. Монохроматическое рассеяние	72
§ 2.2. Уравнение переноса в частотах линий	76
§ 2.3. Случай плоской и сферической геометрии	82
§ 2.4. Интегральные уравнения, выражающие условие стационарности	89
§ 2.5. Учет нелинейных эффектов для атома с двумя уровнями (плоская геометрия).	97
§ 2.6. Общие свойства ядер интегральных уравнений и связанных с ними функций.	105
§ 2.7. Ядра интегральных уравнений и связанные с ними функции для коэффициентов поглощения важнейших частных видов.	114
Глава III. Монохроматическое рассеяние в бесконечной и полубесконечной средах.	125
§ 3.1. Точечный источник в бесконечной однородной среде	125
§ 3.2. Диффузионная длина и связанные с нею величины.	132
§ 3.3. Точечный источник в бесконечной среде. Общий анализ решения.	135
§ 3.4. Точечный источник в бесконечной среде. Детальный анализ и численные результаты.	139
§ 3.5. Эффект накопления.	146
§ 3.6. Плоский изотропный источник.	149
§ 3.7. Полубесконечная среда.	156
§ 3.8. Частные задачи о рассеянии света в полубесконечной среде.	167

§ 3.9. Связь между асимптотиками решений для бесконечной и полубесконечной сред.	177
Г л а в а IV. Рассеяние в частотах линии в бесконечной среде .	179
§ 4.1. Точечный источник в однородной среде	180
§ 4.2. Поведение решения вблизи источника	187
§ 4.3. Поведение решения вдали от источника	189
§ 4.4. Преобразование решения	197
§ 4.5. Перераспределение по частотам и эффект накопления. Длина термализации	201
§ 4.6. Плоский изотропный источник.	210
Г л а в а V. Рассеяние в частотах линии в полубесконечной среде	217
§ 5.1. Основные уравнения	218
§ 5.2. Вероятностная трактовка.	227
§ 5.3. Функция Грина для полупространства	232
§ 5.4. <i>H</i> -функция	236
§ 5.5. Исследование резольвентной функции и связанных с ней величин.	246
§ 5.6. Случай доплеровского профиля.	253
§ 5.7. Случаи фойгтовского и лоренцовского профилей . . .	260
Г л а в а VI. Частные задачи о рассеянии света в полубесконечной среде.	274
§ 6.1. Среда с равномерным распределением источников. Обобщенная проблема Милна.	274
§ 6.2. Толщина пограничного слоя.	281
§ 6.3. Населенность первого возбужденного уровня атомов вблизи границы газа с вакуумом.	283
§ 6.4. Диффузное отражение света.	291
§ 6.5. Среда с экспоненциальным распределением источников.	301
§ 6.6. Степень возбуждения в газе, освещаемом извне излучением в непрерывном спектре	308
§ 6.7. Внутренние источники излучения других видов. . .	314
§ 6.8. Среднее число рассеяний.	317
Г л а в а VII. Рассеяние в линии с учетом поглощения и излучения в непрерывном спектре	322
§ 7.1. Ядра интегральных уравнений и связанные с ними функции.	323
§ 7.2. Бесконечная среда.	333
§ 7.3. Длина термализации.	339
§ 7.4. Бесконечная среда. Анализ решения.	347
§ 7.5. Полубесконечная среда.	350
§ 7.6. Образование линий в изотермической атмосфере . .	356
§ 7.7. О структуре пограничного слоя.	372

Г л а в а VIII. Среда конечной оптической толщины	376
§ 8.1. Основные уравнения.	377
§ 8.2. X- и Y-функции	382
§ 8.3. Роль диссипативных процессов.	395
§ 8.4. Асимптотический режим при монохроматическом рассеянии.	400
§ 8.5. Асимптотический режим при рассеянии с перераспределением по частотам.	409
§ 8.6. Задача Шустера	421
§ 8.7. Диффузное отражение и пропускание. Среда с равномерным распределением источников.	429
§ 8.8. Свечение однородного изотермического слоя газа (случай $\beta \neq 0$).	441
§ 8.9. Среднее число рассеяний.	454
Литература.	459
Основные обозначения.	469

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существует более десятка книг, посвященных теории переноса. Зачем же нужна еще одна? Ответ на этот естественный вопрос состоит в том, что в последние годы получила большое развитие новая важная область теории переноса — исследование многократного рассеяния излучения в частотах спектральных линий. Изложение относящихся к этому вопросов в имеющихся монографиях не отражает современного состояния проблемы. Между тем не подлежит сомнению, что этой области исследований принадлежит большое будущее, так как она составляет теоретическую основу интерпретации линейчатых спектров оптически плотной плазмы.

Теория переноса излучения в частотах линий создана в основном усилиями астрофизиков. Это, конечно, не случайно и объясняется той важной ролью, которую эти вопросы играют в астрофизике. Ведь именно из изучения линейчатых спектров и получена подавляющая часть наших сведений о небесных телах. К сожалению, теоретики все еще не могут ответить на многие, казалось бы, простые вопросы, давно уже поставленные перед ними астрофизиками-наблюдателями. Однако есть основания полагать, что столь нужные наблюдателям надежные методы расчета интенсивностей и профилей линий появятся в недалеком будущем. Они придут на смену тем во многом кустарным приемам, которыми приходится пользоваться в настоящее время. Залогом такой уверенности служат недавние успехи теории переноса излучения в частотах линий и, в частности, ее численных методов.

В этой книге какие-либо конкретные астрофизические объекты не рассматриваются. Поэтому может сложиться впечатление, что название книги не соответствует ее содержанию. По нашему мнению, это не так, поскольку боль-

шинство решаемых нами модельных задач возникло именно в связи с изучением спектров небесных тел. Рассматриваемые модели, как правило, слишком грубы, чтобы ими можно было непосредственно пользоваться для интерпретации наблюдений. Значение их состоит в том, что они позволяют хорошо понять физику явления и дают возможность научиться чувствовать проблему. Наконец, такие модели могут служить для оценки точности и границ применимости приближенных и численных методов теории переноса.

Книга написана в первую очередь для теоретиков, хотя отдельные вопросы должны представить интерес и для экспериментаторов. В самых общих чертах изложение построено по схеме «от физики задачи — к математике и затем опять к физике». Что касается места, отводимого математике, то здесь возможна критика с двух сторон. Одни читатели, вероятно, не будут удовлетворены строгостью изложения, другим же, наоборот, покажется неоправданным излишнее внимание к чисто математическим вопросам. Повидимому, правильнее всего будет сказать, что в книге дается решение ряда задач прикладной математической физики на физическом уровне строгости.

Отбор материала в значительной мере определялся личными интересами автора. Большое место отведено результатам, полученным в последние годы группой астрофизиков-теоретиков Ленинградского университета. Заметная часть материала публикуется впервые.

Список литературы не претендует на полноту. Из огромного числа имеющихся работ отобраны только те, которые имеют непосредственное отношение к разбираемым нами вопросам. Нелегким делом оказался выбор обозначений. По самой своей сути рассматриваемые задачи довольно громоздки, решения их зависят от многих параметров. Положение осложняется также разнообразием в обозначениях, используемых различными авторами. Для удобства читателей в конце книги дан список основных обозначений с указанием страниц, на которых они вводятся.

Формулы в пределах главы имеют двойную нумерацию. Первое число означает номер параграфа данной главы, второе — порядковый номер формулы, например, ссылка (6.56) в гл. II означает формулу (5.6) из § 2.6. При отсылке к формуле другой главы слева добавляется номер этой главы:

Скажем, при упоминании той же формулы (6.56) гл. II в любой другой главе она обозначается как (2.6.56).

Хочу выразить глубокую признательность В. В. Соболеву, влияние которого сыграло определяющую роль в формировании моих взглядов на проблемы теории переноса. В. В. Соболев прочитал книгу в рукописи и сделал множество замечаний, учтенных при ее доработке.

В течение нескольких лет автор работал в тесном контакте с Д. И. Нагирнером, что способствовало постановке и выяснению ряда важных вопросов. Д. И. Нагирнеру принадлежат многие результаты, приводимые в этой книге, в том числе большая часть не публиковавшегося ранее числового материала. Большую роль сыграла также переписка с Д. Хаммером (США), который, в частности, предоставил в мое распоряжение ряд важных результатов до их опубликования.

Нелегкий труд по проверке формул взял на себя сотрудник Потсдамской обсерватории Х. Домке. Большую помощь в изготовлении рисунков и подготовке рукописи к печати оказали Т. М. Максимова, И. И. Лебедева и Л. Ф. Громова.

Всем этим лицам я выражаю самую искреннюю благодарность.

В. Иванов

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга посвящена главным образом изложению теории переноса излучения в частотах спектральных линий. Основная задача этой теории состоит в исследовании многократного рассеяния света в газовых средах. Отличительной чертой проблем, с которыми нам придется иметь дело, является двусторонний характер взаимодействия излучения и вещества: с одной стороны, поле излучения определяется состоянием вещества, с другой стороны, само это состояние существенным образом зависит от поля излучения.

В достаточно разреженном газе населенности возбужденных уровней атомов определяются главным образом радиативными процессами, т. е. полем излучения. Расчет этих населенностей при отсутствии термодинамического равновесия и является той проблемой, которая составляет основное содержание настоящей книги. Задача эта чрезвычайно сложна, и с самого начала приходится вводить ряд приближений, довольно сильно суживающих область применимости результатов. Однако в настоящее время это, по-видимому, единственно возможный путь, или, во всяком случае, тот путь, который следует пройти, прежде чем обращаться к исследованию проблемы при менее ограничивающих предположениях.

Круг явлений, в которых мы имеем дело с излучением термодинамически неравновесного газа, непрозрачного в частотах спектральных линий, чрезвычайно широк. Недаром перед исследователями, занимающимися изучением столь различных по своим масштабам явлений, как свечение обычной люминесцентной лампы и гигантских облаков межзвездного газа, часто стоят по сути дела одни и те же проблемы.

Особенно часто с линейчатыми спектрами, излучаемыми неравновесной оптически плотной плазмой, приходится

иметь дело астрофизику. Наружные слои Солнца и звезд, где возникают линии поглощения и излучения, не находятся в состоянии термодинамического равновесия. Взаимодействие с излучением играет в них главную роль в заселении возбужденных уровней атомов. Другой не менее известный пример аналогичной проблемы — это определение поля излучения в резонансных линиях в туманностях и межзвездной среде. Список астрофизических проблем, в которых вопрос о переносе излучения в спектральной линии имеет важное значение, легко можно было бы продолжить. В этом списке оказались бы и проблемы солнечной хромосферы и переходного слоя от короны к хромосфере, и исследование атмосфер планет, в том числе земной атмосферы и даже отдельные вопросы, касающиеся интерпретации спектров квазаров.

Взаимодействие излучения и вещества в газовых массах космического масштаба в принципе ничем не отличается от аналогичных процессов, происходящих в плазме лабораторного газового разряда. Не случайно поэтому, что и в оптике газового разряда явления многократного рассеяния света или, как иногда говорят, пленения излучения, уже давно уделяют большое внимание.

Казалось бы, вопрос об экспериментальном определении сечений возбуждения электронным ударом далек от наших проблем. Однако это не так. Часто учет эффектов многократного рассеяния света оказывается совершенно необходимым и здесь.

В исследованиях высокотемпературной водородной плазмы видное место занимает изучение механизмов ее энергопотерь. Одним из них является линейчатое излучение многократно ионизованных атомов примесей. Вопрос о переносе излучения представляет интерес и в этой связи.

Общность проблем переноса излучения в спектральных линиях, встающих перед исследователями то в одной, то в другой области, совершенно очевидна. Именно этим и оправдывается, на наш взгляд, появление на свет этой книги. Основное внимание в ней намеренно уделяется не рассмотрению тех или иных конкретных задач, встречающихся в разных частных случаях, а выяснению общих черт проблемы в целом. С этой целью подробно разбирается несколько сильно идеализированных модельных задач, каждая из которых —

именно в силу своей идеализированности — представляет целый класс задач, которые могут встретиться в различных конкретных исследованиях.

Физика проблем переноса излучения сравнительно проста. Этого нельзя сказать о математической стороне дела. Уже простейшие задачи приводят к довольно сложным интегральным уравнениям. Решить эти уравнения удастся лишь в исключительных случаях. Поэтому в теории переноса очень важную роль играют приближенные и численные методы. Мы, однако, не касаемся этих методов. Отдавая должное их богатым возможностям, нельзя недооценивать и аналитический подход. В конечном счете, машинное решение задачи без предварительного исследования свойств ее решения — не больше чем математический аналог физического эксперимента. Поэтому основу теории переноса излучения, как и всякой теории, составляют ее аналитические методы.

К настоящему времени в астрофизике и нейтронной физике развиты эффективные методы строгого аналитического решения проблем переноса. Эти методы в полной мере применимы и к задачам о рассеянии излучения в спектральной линии. Это следует специально подчеркнуть, поскольку особенности процесса переноса линейчатого излучения затрудняют или даже делают невозможным использование многих стандартных приближенных методов. В частности, не годится диффузионное приближение, сослужившее столь верную службу в проблемах переноса нейтронов и рассеяния света в непрерывном спектре. Поэтому вполне естественно, что основой, на которой строится все изложение, является систематическое использование строгих аналитических методов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Изучение стационарных состояний газа в поле собственного излучения находится сейчас на том этапе, который с бóльшим правом можно назвать эпохой пионерских исследований, чем периодом подведения итогов и завершения построения теории. Поэтому полезно начать изложение с более или менее подробного анализа основных понятий. Вводить с самого начала те довольно специальные предположения, при которых уже на нынешнем этапе развития теории проблема может быть решена до конца, кажется нецелесообразным.

Настоящая глава преследует две цели. С одной стороны, она является введением ко всему дальнейшему изложению. С другой стороны, в ней выясняются границы применимости излагаемой в последующих главах теории и намечается более общий подход к проблеме.

§ 1.1. Излучение

В теории многократного рассеяния света излучение рассматривается как совокупность отдельных квантов, образующих фотонный газ. Считается, что кванты представляют собой частицы, движущиеся со скоростью света c . Соответственно этому, каждый квант характеризуется следующими параметрами:

1) энергией E или связанной с ней соотношением $E = h\nu$ частотой ν (h — постоянная Планка);

2) тремя компонентами радиуса-вектора \mathbf{r} , определяющего положение кванта в пространстве относительно некоторой системы отсчета;

§) двумя угловыми переменными, дающими направление движения кванта. Это направление будем характеризовать единичным вектором ω .

Совокупность шести переменных — частоты, трех пространственных координат и двух угловых переменных (например, направляющих косинусов вектора ω) — определяет некоторое шестимерное фазовое пространство. Каждый квант представляется точкой в этом пространстве.

Теория переноса является статистической теорией. Поле излучения рассматривается в ней как статистический ансамбль квантов, описываемых перечисленными параметрами. Полное описание этого статистического ансамбля дается соответствующей функцией распределения $f(\nu, \mathbf{r}, \omega, t)$. Величина $f(\nu, \mathbf{r}, \omega, t) d\nu dV d\omega$ есть число квантов с частотами от ν до $\nu + d\nu$, находящихся в момент времени t в объеме dV около точки \mathbf{r} и движущихся в телесном угле $d\omega$ около направления ω . Если фазовая плотность f не зависит от времени t , то поле излучения называется стационарным. Только такие поля мы и будем рассматривать.

В теории переноса излучения принято иметь дело не с самой функцией распределения f , а со связанной с ней величиной $I_\nu(\mathbf{r}, \omega)$, определяемой соотношением

$$I_\nu(\mathbf{r}, \omega) = ch\nu f(\nu, \mathbf{r}, \omega). \quad (1.1)$$

Величина I_ν называется *интенсивностью излучения*. Физический смысл интенсивности излучения состоит в следующем. Пусть имеются кванты с частотами от ν до $\nu + d\nu$, летящие в окрестности точки \mathbf{r} в направлениях, заключенных в пределах телесного угла $d\omega$ вокруг ω . Тогда $I_\nu(\mathbf{r}, \omega) d\nu d\sigma d\omega$ есть энергия, переносимая этими квантами за единицу времени через перпендикулярную ω площадку $d\sigma$, расположенную в точке \mathbf{r} . Интенсивность излучения I_ν , как и фазовая плотность f , полностью описывает поле излучения.

Важной интегральной характеристикой поля излучения в данной точке является *плотность излучения* $\rho_\nu(\mathbf{r})$, определяемая следующим образом: $\rho_\nu d\nu dV$ есть количество лучистой энергии в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$, содержащееся в объеме dV . В соответствии с этим определением

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = h\nu \int f(\nu, \mathbf{r}, \omega') d\omega', \quad (1.2)$$

где интегрирование производится по всем телесным углам. Учитывая (1.1), можем также написать

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\omega', \quad (1.3)$$

или

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{c} J_\nu(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

где J_ν — средняя интенсивность излучения:

$$J_\nu(\mathbf{r}) = \int I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (1.5)$$

Другой интегральной характеристикой поля излучения в данной точке является *вектор потока излучения* $\mathbf{H}_\nu(\mathbf{r})$, определяемый равенством

$$\mathbf{H}_\nu(\mathbf{r}) = \int \boldsymbol{\omega}' I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\omega'. \quad (1.6)$$

Проекция вектора потока на заданное направление называется потоком в этом направлении. Обозначив поток в направлении $\boldsymbol{\omega}$ через $H_\nu(\mathbf{r})$, будем иметь

$$H_\nu(\mathbf{r}) = \int I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') \cos \gamma d\omega', \quad (1.7)$$

где γ — угол между направлениями $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}'$, так что $\cos \gamma = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}'$. Из последнего равенства следует, что $H_\nu(\mathbf{r})$ есть энергия, протекающая за единицу времени в единичном интервале частот через единичную площадку, перпендикулярную $\boldsymbol{\omega}$. Задав направление $\boldsymbol{\omega}$, мы определили тем самым и ориентацию перпендикулярной к этому направлению площадки. Имея это в виду, величину $H_\nu(\mathbf{r})$ называют также потоком через площадку.

Поток излучения через площадку легко выразить через потоки в направлении координатных осей. Пусть направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$ есть $\cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2, \cos \vartheta_3$, так что

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} \cos \vartheta_1 + \mathbf{j} \cos \vartheta_2 + \mathbf{k} \cos \vartheta_3, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты координатных осей. Аналогичным образом, положим

$$\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{i} \cos \vartheta'_1 + \mathbf{j} \cos \vartheta'_2 + \mathbf{k} \cos \vartheta'_3. \quad (1.8')$$

Поскольку

$$\cos \varphi = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}' = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_1' + \cos \vartheta_2 \cos \vartheta_2' + \cos \vartheta_3 \cos \vartheta_3',$$

из (1.7) находим, что

$$H_\nu = H_{\nu x} \cos \vartheta_1 + H_{\nu y} \cos \vartheta_2 + H_{\nu z} \cos \vartheta_3, \quad (1.9)$$

где $H_{\nu x}$, $H_{\nu y}$ и $H_{\nu z}$ — потоки в направлении осей x , y и z соответственно. Первый из них равен

$$H_{\nu x}(\mathbf{r}) = \int I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') \cos \vartheta_1' d\omega'. \quad (1.10)$$

Аналогично определяются и $H_{\nu y}(\mathbf{r})$ и $H_{\nu z}(\mathbf{r})$.

Таким образом, запас лучистой энергии в элементе объема характеризуется плотностью излучения, а направление и скорость ее течения в данном месте — вектором потока. Однако одни эти величины, разумеется, не дают еще полной информации о поле излучения.

Интенсивность излучения полностью характеризует поле излучения лишь тогда, когда можно не принимать во внимание поляризационных эффектов. Вопрос об описании поля излучения с учетом поляризации подробно разбирается в книге С. Чандрасекара [II]. На современном этапе развития тех областей теории переноса излучения, которым посвящена эта книга, учет поляризационных эффектов не является первоочередным делом.

Основная проблема, которой мы будем заниматься в этой книге, состоит в исследовании физических условий в газе, не находящемся в состоянии термодинамического равновесия. Интенсивность излучения в таком газе, как правило, сильно меняется от точки к точке. Поле излучения существенно неизотропно, а его спектральный состав зависит как от координат, так и от направления. Таким образом, интенсивность излучения $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ в неравновесных системах зависит, вообще говоря, от всех фазовых координат. Однако иногда оказывается, что в то время как для одной области значений фазовых переменных условия не имеют ничего общего с термодинамическим равновесием, для других областей они более или менее близки к равновесным. Поэтому будет не лишним напомнить в нескольких словах свойства поля излучения при термодинамическом равновесии.

Интенсивность излучения при термодинамическом равновесии не зависит от координат и направления, так что поле излучения однородно и изотропно. Более того, интенсивность излучения, являющаяся, таким образом, функцией только частоты, представляет собой универсальную функцию температуры системы T и не зависит от свойств вещества, с которым это излучение взаимодействует. Интенсивность излучения при термодинамическом равновесии будет, как обычно, обозначаться через $B_\nu(T)$. Она дается формулой Планка

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (1.11)$$

где k и h — постоянные Больцмана и Планка. Плотность излучения, для которой в случае термодинамического равновесия удобно ввести специальное обозначение $u_\nu(T)$, дается выражением

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)^{-1}, \quad (1.12)$$

вытекающим из (1.11) при учете (1.3). Интегральная плотность излучения

$$u(T) = \int_0^\infty u_\nu(T) d\nu, \quad (1.13)$$

как это следует из (1.12), пропорциональна четвертой степени температуры (закон Стефана — Больцмана):

$$u(T) = aT^4, \quad (1.14)$$

где

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3}. \quad (1.15)$$

Величина a связана с постоянной Стефана σ соотношением $a = \frac{4\sigma}{c}$.

В «коротковолновой» области, т. е. при $\frac{h\nu}{kT} \gg 1$, формула Планка переходит в формулу Вина

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad \left(\frac{h\nu}{kT} \gg 1 \right), \quad (1.16)$$

а в «длинноволновой» области, где $\frac{h\nu}{kT} \ll 1$, — в формулу Рэлея — Джинса:

$$B_\nu(T) = \frac{2kT}{c^2} \nu^2 \left(\frac{h\nu}{kT} \ll 1 \right). \quad (1.17)$$

Заметим, что замена формулы Планка на формулу Вина соответствует пренебрежению вынужденным излучением по сравнению со спонтанным.

Интенсивность излучения при отсутствии термодинамического равновесия в ряде случаев удобно относить как к стандарту к планковской интенсивности, соответствующей надлежащим образом выбранной температуре T . Этот выбор можно сделать различным образом. Простейший путь состоит в том, чтобы выражать I_ν в долях $B_\nu(T)$. Однако отклонения I_ν от $B_\nu(T)$ часто оказываются очень большими. Поэтому удобнее поступить несколько иначе, введя *температуру излучения* T_r , определяемую равенством

$$I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{2h\nu^3}{c^2} (e^{\frac{h\nu}{kT_r}} - 1)^{-1}, \quad (1.18)$$

или

$$I_\nu = B_\nu(T_r). \quad (1.18')$$

Строго говоря, равенство (1.18) не есть определение температуры излучения. Излучение — это фотонный газ, и температура его должна вводиться в соответствии с общими принципами статистической физики, т. е. через энтропию. При таком подходе выясняется, что в действительности формула (1.18) есть следствие общего понятия температуры неравновесной системы, а не определение вводимого специально для данного случая интерполяционного параметра T_r (см., например, Дж. Оксиниус [1]).

Ясно, что температура излучения T_r является функцией тех же аргументов, от которых зависит I_ν , т. е., вообще говоря, $T_r = T_r(\nu, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$. Разность $T_r - T$ служит мерой отклонения I_ν от $B_\nu(T)$. Особенность такого способа описания поля излучения состоит в том, что в виновской области большим различиям в интенсивности соответствуют сравнительно небольшие различия в температуре излучения.

Аналогично температуре излучения, характеризующей интенсивность излучения частоты ν в данном месте и в

данном направлении, температурный параметр можно ввести и для описания средней интенсивности или плотности излучения. Величину \bar{T}_r , определяемую соотношением

$$J_\nu(\mathbf{r}) = B_\nu(\bar{T}_r), \quad (1.19)$$

или, что то же самое,

$$\rho_\nu(\mathbf{r}) = u_\nu(\bar{T}_r), \quad (1.19')$$

можно назвать *средней температурой излучения* частоты ν в данной точке. Понятно, что средняя температура излучения является функцией частоты и координат: $\bar{T}_r = \bar{T}_r(\nu, \mathbf{r})$.

С точки зрения теории описание поля излучения с помощью температурных параметров ничего нового, конечно, не дает. Более того, поскольку эти параметры связаны с интенсивностью излучения довольно сложным образом, их использование ведет лишь к неоправданному усложнению формул. Поэтому в исследованиях по теории переноса различного рода «температуры» встречаются редко. Однако благодаря наглядности температурного описания оно все же довольно широко используется (главным образом, наблюдателями и экспериментаторами). К сожалению, часто при этом не подчеркивается, что именно та или иная «температура» описывает. Делать же это совершенно необходимо, особенно если учесть, что для характеристики состояния вещества также используют разного рода температурные параметры. Отождествление друг с другом различных «температур» не раз служило причиной досадных недоразумений.

§ 1.2. Вещество

Рассмотрим теперь, как описывается состояние газа, с которым взаимодействует излучение. Химический состав газа, точнее говоря, относительное число атомов различных элементов, а также плотность газа в каждой точке будем считать известными. Свойства атомов, составляющих газ, такие, как расположение энергетических уровней, вероятности переходов, сечения столкновений и т. п., также считаются заданными. Задача состоит, таким образом, в описании состояния газа, рассматриваемого как совокупность отдельных частиц с заранее заданными свойствами.

В каждом элементе объема атомы одного сорта могут быть представлены ионами разных стадий ионизации. Для описания состояния газа должна быть поэтому найдена степень ионизации атомов. Кроме того, нужно знать распределение ионов по энергетическим уровням дискретного спектра, а также распределение скоростей ионов данной стадии ионизации, находящихся в данном энергетическом состоянии. Должна быть найдена и функция распределения скоростей свободных электронов, образующихся при ионизации атомов. Если все перечисленные параметры найдены, то состояние газа полностью охарактеризовано.

Обычно в силу тех или иных причин возникают (или, во всяком случае, вводятся при теоретическом рассмотрении) разного рода упрощения, так что в обсуждении вопроса в столь общем виде большой необходимости нет. Мы разберем сейчас типичные примеры ситуаций, с которыми приходится иметь дело.

Начнем с простейшего случая, когда можно считать, что газ находится в состоянии *термодинамического равновесия*. Для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1. Скорости частиц каждого сорта в отдельности (скажем, r -кратно ионизованных атомов l -го элемента, находящихся в i -м состоянии) должны иметь максвелловское распределение скоростей с одной и той же температурой T . Пусть n_i — полное число таких частиц в единице объема. Тогда число их со скоростями от v до $v + dv$ равно

$$dn_i = n_i 4\pi \frac{m^3}{(2\pi mkT)^{3/2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv, \quad (2.1)$$

где m — масса частицы. Скорости свободных электронов также должны быть распределены по закону Максвелла с той же температурой T .

2. Распределение атомов по уровням должно описываться формулой Больцмана

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{g_i}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{1i}}{kT}}, \quad (2.2)$$

где n_i — населенность i -го уровня, т. е. число атомов на этом уровне в единице объема, g_i — статистический вес i -го уровня, $h\nu_{1i}$ — энергия его возбуждения.

3. Ионизация должна следовать формуле Саха

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = \frac{g^+}{g_1} \frac{2 (2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_{1c}}{kT}}, \quad (2.3)$$

где n_1 — число атомов некоторой (например, r -й) стадии ионизации, находящихся в основном состоянии в 1 см^3 , n^+ — концентрация ионов следующей ($r + 1$ -й) стадии ионизации в основном состоянии, n_e — концентрация свободных электронов, g_1 и g^+ — статистические веса основных состояний «атома» и «иона» соответственно, m_e — масса электрона, $h\nu_{1c}$ — энергия ионизации r -кратно ионизованного атома из основного состояния.

4. Интенсивность излучения должна описываться формулой Планка (1.11) с той же температурой T , которая входит в выражения (2.1) — (2.3).

С достаточной для нас строгостью совокупность этих четырех условий можно рассматривать как определение термодинамически равновесного состояния. Ясно, что эти условия являются довольно жесткими и выполняются лишь в исключительных случаях.

Однако часто оказывается, что в то время как одно или несколько из перечисленных условий не выполняются, другие с достаточно высокой степенью точности все еще остаются в силе. Примером состояний такого типа является так называемое состояние *локального термодинамического равновесия*, или, сокращенно, ЛТР. Говорят, что газ находится в состоянии ЛТР, если в каждой точке выполнены условия 1—3. При этом температура T не обязательно должна быть постоянной, а может меняться при переходе от одного места к другому. Следует подчеркнуть, что в состоянии ЛТР интенсивность излучения может быть любой. Она может сколь угодно сильно отличаться от планковской интенсивности с локальной температурой T , если только это не приводит к нарушению условий 1—3. Когда в ионизации и возбуждении атомов процессы столкновений преобладают над радиативными процессами, состояние газа близко к ЛТР (подробнее см. § 1.4).

Значительно чаще, чем с ЛТР, приходится иметь дело с такими случаями, когда не выполняется уже не одно, а несколько из условий 1—4. Если при этом имеется хотя бы

один сорт частиц, скорости которых имеют максвелловское распределение, то для такого газа оказывается возможным ввести понятие кинетической температуры. Такой газ будем называть *частично равновесным*. Если же ни для одного сорта частиц кинетическую максвелловскую температуру ввести нельзя, то систему можно назвать *полностью неравновесной*.

Мы будем изучать только частично равновесные системы. Однако уже это позволит охватить большинство практически интересных задач. В самом деле, даже в столь крайних условиях, какие существуют в межзвездной среде, свободные электроны, а также атомы и ионы, находящиеся в основном состоянии, имеют максвелловское распределение скоростей. Более того, электронная и ионная температуры практически совпадают. Пожалуй, еще дальше от термодинамического равновесия состояние плазмы газового разряда. Однако и здесь в большинстве случаев можно говорить об электронной и ионной температурах. Правда, часто эти температуры сильно отличаются друг от друга.

Совокупность частиц одного сорта, имеющих максвелловское распределение скоростей, естественно назвать равновесной частью системы, или *равновесной подсистемой*. Таких равновесных подсистем может быть несколько, именно, столько, сколько типов частиц имеют максвелловское распределение скоростей. Может оказаться, что неравновесная в целом система целиком разбивается на совокупность отдельных равновесных подсистем. Так обстоит дело тогда, когда не существует ни одного типа частиц, скорости которых не были бы распределены по Максвеллу.

Кинетические температуры отдельных подсистем, вообще говоря, могут отличаться друг от друга. Однако даже если они совпадают, это не значит, что система в целом является термодинамически равновесной. Это лишь указывает на то, что в каждой точке среды существует единая кинетическая температура всех частиц, т. е. что выполнено условие 1 со стр. 21. В теории газового разряда такие системы иногда называют изотермическими, однако этот термин кажется неудачным, так как кинетическая температура может меняться от точки к точке. Можно предложить называть такие системы *однотемпературными*. Неравновесность однотемпературных систем проявляется в том, что отдельные

подсистемы не находятся в равновесии друг с другом: ионизация в таких системах, вообще говоря, не следует формуле Саха, а степень возбуждения не обязательно описывается формулой Больцмана. Хорошим примером однотемпературной системы, чрезвычайно далекой от термодинамического равновесия, может служить межзвездный газ. В тех областях межзвездной среды, где водород сильно ионизован (так называемые области H II), степень ионизации, например, атомов водорода (равная 10^3 — 10^4) на много порядков ниже термодинамически равновесного значения, отвечающего кинетической температуре газа ($T \simeq 10^{4^{\circ}} \text{ K}$) и его плотности ($n_e \simeq 10^1$ — 10^3).

Частицы, распределение скоростей которых немаксвелловское, образуют неравновесные подсистемы (скажем, подсистему r -кратно ионизованных атомов l -го сорта, находящихся на i -м уровне). Как мы увидим в дальнейшем, для возбужденных атомов, концентрации которых контролируются главным образом радиативными процессами, существование отклонений от максвелловского распределения является скорее правилом, чем исключением.

В соответствии с только что изложенным, для полного описания состояния частично равновесного газа в данном месте нужно знать: 1) концентрации частиц каждого сорта; 2) кинетические температуры тех частиц, скорости которых имеют максвелловское распределение и 3) функции распределения скоростей немаксвелловских компонент газа. Однако часто используются и другие способы описания, в принципе эквивалентные указанному, но в силу тех или иных соображений практического характера более удобные. Мы изложим сейчас эти способы применительно к чисто максвелловскому однотемпературному газу.

Первый из этих способов состоит в том, что для каждого места задаются кинетическая температура газа T , его электронная плотность n_e и концентрации ионов каждого типа в основных состояниях. Концентрации же r -кратно ионизованных атомов данного элемента на возбужденных уровнях выражаются в долях термодинамически равновесных концентраций, отвечающих этим значениям T , n_e и концентрации $r + 1$ раз ионизованных атомов этого элемента в данном месте. Пусть n_i — населенность i -го уровня r -кратно ионизованного атома l -го элемента, а n^+ — концентрация ато-

мов того же элемента в следующей стадии ионизации на основном уровне. Тогда в состоянии термодинамического равновесия, как следует из (2.2) и (2.3),

$$n_i = n_e n^+ \frac{g_i}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{\frac{h\nu_{ic}}{kT}}, \quad (2.4)$$

где $h\nu_{ic}$ — энергия ионизации r -кратно ионизованного атома из i -го состояния. Для частично равновесного однотемпературного газа полагают

$$n_i = n_e n^+ \frac{g_i}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{\frac{h\nu_{ic}}{kT}} b_i \quad (2.5)$$

и характеризуют населенность уровня безразмерным параметром b_i — так называемым мензеловским множителем (Д. Мензел [1]). Этот способ задания концентрации возбужденных атомов особенно удобен тогда, когда заселение уровней происходит в основном сверху, путем рекомбинаций и преходов из лежащих выше состояний.

Следует подчеркнуть, что значения b_i , большие единицы, еще не указывают на то, что по отношению к основному уровню населенность i -го уровня выше термодинамически равновесной населенности, отвечающей температуре T . Когда степень ионизации ниже равновесной, населенность i -го уровня и при $b_i > 1$ может быть ниже больцмановской.

Иногда используется другой способ описания состояния газа, отличающийся от только что изложенного лишь тем, что населенности возбужденных уровней вместо параметров b_i характеризуются числами c_i , вводимыми равенством

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{g_i}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{1i}}{kT}} c_i. \quad (2.6)$$

Безразмерный параметр c_i показывает, во сколько раз населенность i -го уровня r -кратно ионизованного атома отличается от больцмановской населенности, отвечающей локальной температуре T . При этом в качестве стандарта, к которому эта населенность относится, берется концентрация ионов той же (r -й) стадии ионизации, находящихся в основном состоянии, тогда как при использовании чисел b_i населенность относится к концентрации $(r + 1)$ -кратно иони-

зованных атомов. Заметим, что если обозначение b_i является вполне установившимся, то для величины c_i применяются разные обозначения (γ_i , b_i и др.). Величину c_i называют иногда приведенной концентрацией возбужденных атомов.

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = \frac{g^+}{g_1} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_{1c}}{kT}} \frac{c_i}{b_i}. \quad (2.7)$$

Таким образом, отношение c_i/b_i показывает, во сколько раз степень ионизации отличается от термодинамически равновесной, отвечающей локальной температуре T и электронной плотности n_e . Поскольку левая часть в (2.7) не зависит от i , заключаем, что величины c_i и b_i отличаются лишь на постоянный множитель.

Наконец, третий способ описания состояния газа, который можно назвать температурным, состоит в следующем. Задается локальная кинетическая температура T , электронная плотность n_e и концентрации ионов в основных состояниях. Населенности же возбужденных уровней представляются в виде

$$\frac{n_i}{n_1} = \frac{g_i}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{1i}}{kT_{ex}}} \quad (2.8)$$

и характеризуются значениями T_{ex} . Величина T_{ex} называется *температурой возбуждения* i -го уровня относительно основного. Аналогичным образом, степень ионизации описывается *температурой ионизации* T_{ion} , определяемой равенством

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = \frac{g^+}{g_1} \frac{2(2\pi m_e kT_{ion})^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_{1c}}{kT_{ion}}}. \quad (2.9)$$

При ЛТР значения T_{ex} и T_{ion} для всех уровней атомов всех элементов, находящихся в любых стадиях ионизации, равны между собой и совпадают с локальной температурой газа T . Отличие значений T_{ex} или T_{ion} от кинетической температуры T свидетельствует об отклонении от ЛТР и служит мерой того, насколько сильно нарушено равновесие между отдельными равновесными подсистемами, из которых состоит однотемпературный газ.

Мы обсудили в этом параграфе, как описывается неравновесный газ, находящийся в стационарном состоянии. Само это стационарное неравновесное состояние может существовать только тогда, когда есть какая-то внешняя по отношению к газу причина, которая поддерживает такое состояние. Этой причиной может быть, например, излучение, падающее на газ извне, хотя это и не единственная возможность. Во всяком случае, стационарный неравновесный газ никогда нельзя рассматривать как изолированную систему.

§ 1.3. Процессы взаимодействия

Стационарное состояние газа устанавливается в результате разного рода процессов взаимодействия. Обсудим кратко те из этих процессов, которые играют определяющую роль в условиях, с которыми приходится иметь дело в астрофизике. Прежде всего остановимся на взаимодействии частиц (атомов, ионов и свободных электронов), не связанном с процессами излучения и поглощения света, а потом разберем радиативные процессы, т. е. взаимодействие излучения и вещества.

Упругие столкновения вызывают лишь изменение скоростей частиц и не сопровождаются их внутренней перестройкой, т. е. ионизацией и переходами между уровнями. Эти процессы ведут к установлению максвелловского распределения скоростей. Можно считать, что если для частиц данного сорта упругие столкновения происходят гораздо чаще неупругих столкновений и радиативных процессов, то скорости этих частиц будут распределены по Максвеллу. Для атомов и ионов, находящихся в основных состояниях, эти условия обычно оказываются выполненными. Из-за большой величины сечения кулоновского взаимодействия электроны, как правило, также имеют максвелловское распределение скоростей.

Иначе обстоит дело с возбужденными атомами. Время жизни возбужденных состояний сравнительно мало, так что при достаточно низких плотностях атом успевает совершить переход вниз задолго до того, как произойдет хотя бы одно упругое столкновение. Поэтому для ответа на вопрос, будет ли распределение скоростей возбужденных атомов максвелловским, требуется внимательно рассмотреть

механизмы заселения возбужденных уровней. Оказывается, что если при этом радиативные процессы преобладают над процессами столкновений и интенсивность падающего на атомы излучения сильно меняется в пределах линии, в которой происходит возбуждение, то могут возникнуть заметные отклонения от максвелловского распределения. Мы еще вернемся к этому вопросу в одном из следующих параграфов и рассмотрим его более подробно.

При *неупругих столкновениях* происходит возбуждение атомов или их ионизация, а также противоположные процессы — девозбуждения и рекомбинации. В астрофизических условиях обычно наибольшую роль играют неупругие столкновения атомов и ионов со свободными электронами. Только о них и пойдет речь.

Рассмотрим в первую очередь ударные переходы между дискретными уровнями. Столкновение, в результате которого происходит возбуждение атома за счет кинетической энергии налетающего электрона, называется ударом первого рода. Противоположный процесс носит название удара второго рода, или деактивации. Пусть n_i и n_k — населенности соответственно нижнего и верхнего уровней, n_e — электронная концентрация. Число переходов под действием столкновений, происходящих в единице объема за единицу времени, обозначим следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{возбуждающие соударения } i \rightarrow k: n_i n_e C_{ik}, \\ \text{деактивации } k \rightarrow i \text{ (удары второго рода): } n_k n_e C_{ki} \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Величина C_{ik} связана с эффективным сечением возбуждения $q_{ik}(v)$ соотношением (v — скорость налетающего электрона):

$$C_{ik} = \int_{v_{ik}}^{\infty} q_{ik}^{(v)} f(v) dv, \quad (3.2)$$

где $f(v)$ — функция распределения скоростей электронов, v_{ik} — пороговая скорость, определяемая очевидным условием

$$\frac{m_e v_{ik}^2}{2} = h\nu_{ik}, \quad (3.3)$$

где $h\nu_{ik}$ — разность энергий уровней.

Если распределение скоростей электронов максвелловское с температурой T_e , коэффициенты C_{ki} и C_{ik} выражаются друг через друга, а именно,

$$C_{ik} = \frac{g_k}{g_i} e^{-\frac{h\nu_{ik}}{kT_e}} C_{ki}. \quad (3.4)$$

Действительно, в состоянии термодинамического равновесия каждый прямой процесс в точности компенсируется обратным, так что

$$n_i C_{ik} = n_k C_{ki}. \quad (3.5)$$

С другой стороны, отношение населенностей уровней определяется в этом случае формулой Больцмана (2.2). Из (3.5) и (2.2) сразу же следует, что при термодинамическом равновесии соотношение (3.4) в самом деле имеет место. Однако поскольку C_{ik} и C_{ki} определяются лишь атомными характеристиками (сечениями) и распределением электронов по скоростям, соотношение (3.4) остается в силе и при отсутствии термодинамического равновесия, если только распределение скоростей электронов такое же, как при термодинамическом равновесии, т. е. максвелловское.

Для получения порядковой оценки числа переходов под действием электронных ударов можно исходить из полуклассического выражения для сечения возбуждения $q_{ik}(v)$:

$$q_{ik}(v) = \frac{3e^2c^3}{4\pi v_{ik}^2 v^2} \frac{g_k}{g_i} A_{ki} \left(\frac{1}{h\nu_{ik}} - \frac{2}{m_e v^2} \right), \quad (3.6)$$

где A_{ki} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода $k \rightarrow i$, e — заряд электрона. Из (3.6) и (3.2) следует, что при максвелловском распределении электронов по скоростям с температурой T_e

$$C_{ik} = \frac{e^2 c^3 m_e}{\sqrt{3} h \nu_{ik}^3} \frac{A_{ki}}{(2\pi m_e k T_e)^{1/2}} \frac{g_k}{g_i} e^{-\frac{h\nu_{ik}}{kT_e}} P\left(\frac{h\nu_{ik}}{kT_e}\right), \quad (3.7)$$

где

$$P(X) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} [1 - X e^X E_1(X)], \quad (3.8)$$

Таблица 1

Функция $P(X)$

x	Атомы	Положительные ионы	x	Атомы	Положительные ионы
$<0,005$	$\frac{\sqrt{3}}{2\pi} E_1(X)$	$\frac{\sqrt{3}}{2\pi} E_1(X)$	0,4	0,209	0,290
0,01	1,160	1,160	1	0,100	0,214
0,02	0,956	0,977	2	0,063	0,201
0,04	0,758	0,788	4	0,040	0,200
0,1	0,493	0,554	10	0,023	0,200
0,2	0,331	0,403	>10	$0,066 X^{-\frac{1}{2}}$	0,200

а $E_1(X)$ — первая интегральная показательная функция:

$$E_1(X) = \int_x^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}. \quad (3.9)$$

Несколько лучшая оценка величины C_{ki} получается, если функцию $P\left(\frac{h\nu_{ik}}{kT_e}\right)$ вычислять не по формуле (3.8), а использовать ее значения, приведенные в табл. 1 (отдельно для столкновений с нейтральными атомами и с положительными ионами; по А. ван Регемортеру [11]). Значения функции $E_1(X)$, фигурирующей в таблице, в данном случае удобно вычислять, используя ее разложение в ряд:

$$E_1(X) = -\ln X - \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{X^j}{j \cdot j!}, \quad (3.10)$$

где $\gamma = 0,5772$ — постоянная Эйлера. Формула (3.7) применима тогда, когда переход $k \rightarrow i$ является разрешенным.

Переходы под действием электронных ударов между состояниями дискретного спектра и континуумом описываются аналогичным образом. Существуют два таких процесса — ионизация электронным ударом и рекомбинация при столкновении трех частиц, или тройная рекомбинация. При последнем процессе, являющемся аналогом удара второго рода, энергия, которая освобождается при захвате электрона, уносится третьей частицей. Будем сейчас считать, что эта

третья частица также есть электрон, хотя это и не всегда бывает так. Число переходов между i -м уровнем и континуумом (c), происходящих в единице объема за единицу времени, обозначим следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ионизации электронным ударом } i \rightarrow c : n_i n_e C_{ic}, \\ \text{тройные рекомбинации } c \rightarrow i : n^+ n_e^2 C_{ci}. \end{array} \right\} (3.11)$$

Величина C_{ic} связана с сечением ионизации $q_{ic}(v)$ соотношениями (3.2) — (3.3), в которых индекс k следует всюду заменить на c . Рассуждения, аналогичные тем, которые привели к формуле (3.4), показывают, что при максвелловском распределении электронов по скоростям

$$C_{ic} = \frac{g^+}{g_i} \frac{2(2\pi m_e kT_e)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}} C_{ci}. \quad (3.12)$$

Порядковая оценка коэффициента вероятности ионизации атома электронным ударом дается выражением

$$C_{ic} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{2n\pi e^4}{h\nu_{ic}} \frac{1}{(2\pi m_e kT_e)^{1/2}} e^{-\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}} P\left(\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}\right), \quad (3.13)$$

где n — число эквивалентных оптических электронов, а функция P дается формулой (3.8). Это выражение получается при использовании классической формулы Томсона для сечения ионизации:

$$q_{ic}(v) = \frac{2n\pi e^4}{m_e v^2} \left(\frac{1}{h\nu_{ic}} - \frac{2}{m_e v^2} \right). \quad (3.14)$$

Перейдем к *радиативным процессам*. Обсудим сначала те из них, которые связаны с переходами между дискретными уровнями. Пусть n_i и n_k — населенности соответственно нижнего и верхнего уровней, J_ν — средняя интенсивность излучения:

$$J_\nu = \int I_\nu \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (3.15)$$

Будем пока считать, что в пределах линии она не зависит от частоты и равна \bar{J}_{ik} . Тогда за единицу времени в единице

объема происходит

$$\left. \begin{array}{l} \text{спонтанных переходов } k \rightarrow i : \quad n_k A_{ki}, \\ \text{вынужденных переходов } k \rightarrow i : \quad n_k B_{ki} \bar{J}_{ik}, \\ \text{фотовозбуждений } i \rightarrow k : \quad n_i B_{ik} \bar{J}_{ik}. \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Величины A_{ki} , B_{ki} и B_{ik} есть эйнштейновские коэффициенты спонтанного и вынужденного излучения и поглощения соответственно (рассчитываемые на среднюю интенсивность, а не на плотность излучения). Они связаны между собой хорошо известными соотношениями

$$A_{ki} = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} B_{ki}, \quad (3.17)$$

$$B_{ki} = \frac{g_i}{g_k} B_{ik}, \quad (3.18)$$

так что достаточно иметь один из этих коэффициентов. Обычно задают коэффициент спонтанного перехода A_{ki} или силу осциллятора f_{ik} , связанную с A_{ki} соотношением

$$A_{ki} = \frac{g_i}{g_k} \frac{8\pi^2 e^2 \nu_{ik}^2}{m_e c^3} f_{ik}. \quad (3.19)$$

Имеются многочисленные сводки значений f_{ik} (см., например, К. Аллен [1]). Методы теоретического расчета и экспериментального определения сил осцилляторов, сечений ударного возбуждения и ионизации, а также вероятностей других элементарных процессов подробно рассматриваются в книгах И. И. Собельмана [1], Д. Бейтса [1] и Дж. Хастеда [1], к которым мы и отсылаем за дальнейшими сведениями. Подробная сводка данных о сечениях ионизации электронным ударом опубликована недавно В. Лотцем [1].

Число фотовозбуждений можно выразить не только через эйнштейновский коэффициент B_{ik} , но и через атомный коэффициент поглощения k_{ik} . Он определяется следующим образом. Пусть I_ν — интенсивность излучения в частоте ν в пределах линии $i \rightarrow k$. Тогда

$$\frac{1}{h\nu} I_\nu k_{ik}(\nu) n_i d\nu d\omega$$

есть число фотовозбуждений $i \rightarrow k$, происходящих за единицу времени в единице объема под действием излучения с частотами от ν до $\nu + d\nu$, падающего в пределах телесного угла $d\omega$ около некоторого направления. Если распределение скоростей атомов, находящихся на i -м уровне, изотропно, то $k_{ik}(\nu)$ не зависит от направления. Полное число фотовозбуждений $i \rightarrow k$ за 1 сек в 1 см³ равно тогда, очевидно,

$$n_i \int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu} \int I_\nu d\omega, \quad (3.20)$$

или

$$4\pi n_i \int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) J_\nu \frac{d\nu}{h\nu}. \quad (3.21)$$

Коэффициент поглощения $k_{ik}(\nu)$ имеет резкий максимум вблизи центра линии. Поэтому величина интеграла (3.21) целиком определяется значениями подынтегральной функции в узкой области частот вблизи центра линии, и последнее выражение можно заменить на

$$n_i \frac{4\pi}{h\nu_{ik}} \int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) J_\nu d\nu, \quad (3.22)$$

где ν_{ik} — центральная частота линии. Если средняя интенсивность излучения J_ν в пределах линии слабо зависит от частоты и равна \bar{J}_{ik} , то вместо (3.22) имеем

$$n_i \frac{4\pi}{h\nu_{ik}} \bar{J}_{ik} \int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) d\nu. \quad (3.23)$$

Это и есть искомое выражение для числа фотовозбуждений через коэффициент поглощения $k_{ik}(\nu)$. Приравнявая его $n_i B_{ik} \bar{J}_{ik}$, приходим к соотношению

$$\int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) d\nu = \frac{h\nu_{ik}}{4\pi} B_{ik}. \quad (3.24)$$

Если интенсивность излучения нельзя считать не зависящей от частоты в пределах линии, то для нахождения числа фотовозбуждений следует пользоваться выражением

(3.22). С помощью (3.24) его можно записать в виде $n_i B_{ik} \bar{J}_{ik}$, где

$$\bar{J}_{ik} = \frac{\int_0^{\infty} k_{ik}(v) J_\nu dv}{\int_0^{\infty} k_{ik}(v) dv} = \frac{\int_0^{\infty} k_{ik}(v) dv \int I_\nu \frac{d\Omega}{4\pi}}{\int_0^{\infty} k_{ik}(v) dv}. \quad (3.25)$$

Таким образом, при произвольной зависимости падающего на объем излучения от частоты число происходящих в нем радиативных процессов по-прежнему определяется выражениями (3.16), в которых \bar{J}_{ik} дается формулой (3.25).

Обратимся теперь к переходам, при которых одно из состояний принадлежит непрерывному спектру, а другое — дискретному. Таких процессов также существует три: спонтанные фоторекомбинации, вынужденные фоторекомбинации и фотоионизации. Пусть свободные электроны имеют максвелловское распределение скоростей при температуре T_e . Обозначим число указанных процессов, происходящих в единице объема за единицу времени, следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{спонтанные фоторекомбинации } c \rightarrow i: n_e n^+ A_{ic}, \\ \text{вынужденные фоторекомбинации } c \rightarrow i: n_e n^+ B_{ic} \bar{J}_{ic}, \\ \text{фотоионизации } i \rightarrow c: n_i B_{ic} \bar{J}_{ic}. \end{array} \right\} (3.26)$$

Коэффициент A_{ci} является функцией электронной температуры и равен

$$A_{ci} = \int_0^{\infty} \beta_i(v) v f(v) dv, \quad (3.27)$$

где $\beta_i(v)$ — эффективное сечение фоторекомбинации, $f(v)$ — функция распределения скоростей электронов. Что касается величины $B_{ci} \bar{J}_{ic}$, определяющей число вынужденных рекомбинаций, то она следующим образом выражается через среднюю интенсивность излучения J_ν и эффективное сечение захвата $\beta_i(v)$:

$$B_{ci} \bar{J}_{ic} = \int_0^{\infty} \beta_i(v) v f(v) \frac{c^2}{2h\nu^3} J_\nu dv, \quad (3.28)$$

где

$$h\nu = h\nu_{ic} + \frac{m_e v^2}{2}. \quad (3.29)$$

Наконец, число фотоионизаций с i -го уровня равно

$$n_i B_{ic} \bar{J}_{ic} = 4\pi n_i \int_{\nu_{ic}}^{\infty} k_{ic}(\nu) J_\nu \frac{d\nu}{h\nu}, \quad (3.30)$$

где $k_{ic}(\nu)$ — атомный коэффициент фотоионизации с i -го уровня. Величина $\beta_i(\nu)$ связана с $k_{ic}(\nu)$ соотношением Милна

$$\beta_i(\nu) = \frac{h^2 \nu^2}{c^2 m_e^2 v^2} \frac{g_i}{g^+} k_{ic}(\nu), \quad (3.31)$$

которое легко выводится из условия детального баланса при термодинамическом равновесии.

Формулы (3.27), (3.28) и (3.30) вместе с соотношением (3.31) показывают, что при известной средней интенсивности излучения для вычисления числа радиативных переходов с i -го уровня в континуум и обратно достаточно знать одну атомную характеристику — коэффициент фотоионизации с i -го уровня $k_{ic}(\nu)$.

Для водородоподобных ионов с зарядом Z

$$k_{ic}(\nu) = \frac{2^6 \pi^4 e^{10} m_e Z^4}{3 \sqrt{3} c h^6 i^5} \frac{1}{\nu^3} g_{ic}(\nu), \quad (3.32)$$

где $g_{ic}(\nu)$ — так называемый множитель Гаунта. В астрофизических расчетах при нахождении числа ионизаций излучением и фоторекомбинаций его часто заменяют на единицу, что приводит к ошибкам всего в несколько процентов. В приближении $g_{ic}(\nu) = 1$ (приближение Крамерса) величина A_{ci} , как это следует из (3.27), (3.31) и (3.32), оказывается равной

$$A_{ci} = K_0 \frac{1}{i^5} \frac{g_i}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi m_e k T_e)^{3/2}} e^{\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}} E_1\left(\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}\right), \quad (3.33)$$

где

$$K_0 = \frac{2^9 \pi^5 e^{10} m_e Z^4}{3 \sqrt{3} c^3 h^6}. \quad (3.34)$$

Если интенсивность излучения равна планковской интенсивности с $T = T_e$, то в том же приближении

$$B_{cl}\bar{J}_{ic} = K_0 \frac{1}{i^5} \frac{g_i}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi m_e k T_e)^{3/2}} e^{\frac{h\nu_{ic}}{kT_e}} Q^* \left(\frac{h\nu_{ic}}{kT_e} \right), \quad (3.35)$$

$$B_{ic}\bar{J}_{ic} = K_0 \frac{1}{i^5} I^* \left(\frac{h\nu_{ic}}{kT_e} \right), \quad (3.36)$$

где

$$Q^*(X) = \int_X^\infty \frac{e^{-x} dx}{x(e^x - 1)}, \quad (3.37)$$

$$I^*(X) = \int_X^\infty \frac{dx}{x(e^x - 1)}. \quad (3.38)$$

Заметим, что

$$I^*(X) = E_1(X) + Q^*(X) \quad (3.39)$$

и

$$I^*(X) = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} \ln X + \frac{\gamma}{2} - \ln \sqrt{2\pi} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j} X^{2j-1}}{(2j-1)(2j)!}, \quad (3.40)$$

где $\gamma = 0,5772$ — постоянная Эйлера, B_{2j} — числа Бернулли ($B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, ...).

Аналогичным образом описываются и переходы, при которых оба состояния принадлежат непрерывному спектру, т. е. спонтанное и вынужденное тормозное излучение и тормозное поглощение. Если электроны имеют максвелловское распределение скоростей с температурой T_e , то для водородоподобных ионов с зарядом Z коэффициент тормозного поглощения в расчете на один ион и один свободный электрон равен

$$k_{cc}(\nu) = \frac{8\pi e^6 Z^2}{3\sqrt{3} m_e c h} \frac{1}{(2\pi m_e k T_e)^{3/2}} \frac{1}{\nu^3} g_{cc}(\nu), \quad (3.41)$$

где $g_{cc}(\nu)$ — множитель Гаунта (в оптической области он порядка единицы).

§ 1.4. Уравнения стационарности

Если состояние газа, характеризуемое степенью ионизации атомов, их распределением по уровням и т. п., не меняется с течением времени, то говорят, что газ находится в стационарном состоянии. Уравнения, описывающие такие состояния, носят название *уравнений стационарности*. Они выражают условие баланса между различными элементарными процессами, ведущими к установлению этого состояния.

Огромное разнообразие стационарных состояний, весьма частными примерами которых являются состояния полного и локального термодинамического равновесия, обусловлено различиями в элементарных процессах, являющихся определяющими в том или ином конкретном случае. В дальнейшем будут исследоваться главным образом такие состояния, в установлении которых существенную роль играют фотовозбуждения собственным излучением газа. Однако не будем с самого начала ограничиваться тем или иным частным случаем и рассмотрим в общих чертах уравнения стационарности, учитывающие все основные типы элементарных процессов.

Для простоты будем считать газ максвелловским. Его состояние в данном месте будет полностью охарактеризовано, если найти распределение атомов по уровням, степень их ионизации, и, наконец, температуру. Рассмотрим уравнения стационарности, определяющие эти величины. Концентрация атомов на i -м уровне определяется равенством числа приходов на этот уровень числу уходов с него. За единицу времени в 1 см^3 различные элементарные процессы ведут к появлению следующего числа атомов данного элемента на i -м уровне:

а) радиативные переходы с расположенных выше дискретных уровней (спонтанные и вынужденные):

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} n_k (A_{ki} + B_{ki} \bar{J}_{ik});$$

б) спонтанные и вынужденные фоторекомбинации:

$$n_e n^+ (A_{ci} + B_{ci} \bar{J}_{ic});$$

в) переходы сверху под действием ударов второго рода:

$$n_e \sum_{k=i+1}^{\infty} n_k C_{ki};$$

г) тройные рекомбинации:

$$n_e^2 n^+ C_{ci};$$

д) фотовозбуждения с расположенных ниже уровней

$$\sum_{j=1}^{i-1} n_j B_{ji} \bar{J}_{ji};$$

е) возбуждения при ударах первого рода:

$$n_e \sum_{j=1}^{i-1} n_j C_{ji}.$$

Полное число переходов на i -й уровень за 1 сек в 1 см^3 равно, таким образом,

$$\sum_{k=i+1}^c n_k (A_{ki} + B_{ki} \bar{J}_{ik} + n_e C_{ki}) + \sum_{j=1}^{i-1} n_j (B_{ji} \bar{J}_{ji} + n_e C_{ji}), \quad (4.1)$$

где символ $\sum_{k=i+1}^c$ означает, что суммирование распространяется как на состояния дискретного спектра ($k = i + 1, i + 2, \dots, \infty$), так и на континуум ($k = c$), причем под n_c следует понимать $n_e n^+$.

Найдем теперь число уходов с i -го уровня при различных процессах:

а) радиативные переходы (спонтанные и вынужденные) на расположенные ниже уровни:

$$n_i \sum_{j=1}^{i-1} (A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ji});$$

б) переходы вниз под действием ударов второго рода:

$$n_e n_i \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij};$$

в) фотовозбуждения на расположенные выше уровни:

$$n_i \sum_{k=i+1}^{\infty} B_{ik} \bar{J}_{ik};$$

г) переходы вверх под действием электронных ударов:

$$n_e n_i \sum_{k=i+1}^{\infty} C_{ik};$$

д) фотоионизации:

$$n_i B_{ic} \bar{J}_{ic};$$

е) ионизации электронным ударом:

$$n_e n_i C_{ic}.$$

Для полного числа уходов с i -го уровня имеем поэтому

$$n_i \sum_{j=1}^{i-1} (A_{ij} + B_{ij} \bar{J}_{ji} + n_e C_{ij}) + n_i \sum_{k=i+1}^c (B_{ik} \bar{J}_{ik} + n_e C_{ik}). \quad (4.2)$$

Приравнивая число переходов на данный i -й уровень числу уходов с него, приходим к следующей системе уравнений для населенностей n_i :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=i+1}^c n_k (A_{ki} + B_{ki} \bar{J}_{ki} + n_e C_{ki}) + \sum_{j=1}^{i-1} n_j (B_{ji} \bar{J}_{ji} + n_e C_{ji}) = \\ & = n_i \sum_{j=1}^{i-1} (A_{ij} + B_{ji} \bar{J}_{ij} + n_e C_{ij}) + n_i \sum_{k=i+1}^c (B_{ik} \bar{J}_{ik} + n_e C_{ik}) \quad (4.3) \\ & \quad (\dot{i} = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Система (4.3) определяет состояние газа в данной точке среды лишь при выполнении ряда дополнительных условий: а) интенсивность излучения известна; б) температура задана; в) электронная плотность n_e и концентрация ионов n^+ также известны. Отказ от этих предположений ведет к дальнейшему усложнению задачи. Так, если концентрацию ионов n^+ нельзя считать известной, к системе (4.3) следует добавить уравнение ионизационного равновесия, выражающее равенство числа ионизаций и рекомбинаций в

элементарном объеме:

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_j (B_{jc} \bar{J}_{jc} + n_e C_{jc}) = n_e n^+ \sum_{j=1}^{\infty} (A_{cj} + B_{cj} \bar{J}_{jc} + n_e C_{cj}). \quad (4.4)$$

Здесь слева стоит сумма числа фотоионизаций и ионизаций электронным ударом со всех уровней, а справа — полное число рекомбинаций, слагающееся из числа спонтанных и вынужденных фоторекомбинаций на все уровни и числа рекомбинаций при столкновениях трех частиц.

Если нельзя считать заданной и температуру, то систему (4.3) — (4.4) следует решать совместно с уравнением энергетического баланса. Это уравнение выражает тот факт, что в стационарном состоянии энергия, приобретаемая элементарным объемом, должна быть равна теряемой им энергии. Когда газ однотемпературный, достаточно найти электронную температуру. Приток энергии к электронному газу, т. е. его нагрев, происходит за счет ряда процессов: 1) при тормозном поглощении электроны приобретают энергию поглощенного кванта; 2) при каждой тройной рекомбинации в тепло переходит энергия, равная энергии связи того уровня, на который захватывается электрон; 3) при ударе второго рода выделяется энергия, равная разности энергий уровней; 4) при фотоионизации электронный газ получает энергию, равную разности энергии ионизирующего кванта и энергии связи уровня, с которого произошла ионизация. В ряде случаев действуют также и другие источники нагрева электронного газа. Что касается его охлаждения, то оно происходит за счет тормозного излучения, фоторекомбинаций, ударных ионизаций и возбуждающих соударений.

Можно составить уравнение энергетического равновесия, учитывающее все перечисленные процессы. Однако обычно лишь немногие из этих процессов оказываются существенными, поэтому вряд ли целесообразно выписывать это общее уравнение. К тому же в дальнейшем температуру газа мы будем считать заданной.

Для решения уравнений стационарности (4.3) — (4.4) нужно знать поле излучения в среде, входящее в эти уравнения через величины J . Если эти величины известны, то расчет стационарного состояния в принципе не встречает трудностей. Он сводится к решению системы алгебраичес-

ких уравнений. Однако когда в газе заметную роль играют радиативные переходы под действием его собственного излучения, положение сильно усложняется. Поле излучения не может тогда быть найдено независимо от решения уравнений стационарности, которые должны решаться совместно с уравнениями переноса излучения. Уравнения стационарности оказываются в этом случае *интегральными*. Физически это означает, что условия в каждой точке определяются состоянием среды в целом. Эта нелокальность связана с тем, что удаленные друг от друга объемы эффективно взаимодействуют, обмениваясь излучением. Более подробное обсуждение уравнений стационарности для этого важнейшего случая дается в следующей главе.

Познакомимся теперь детальнее с некоторыми частными видами стационарных состояний однотемпературного газа.

1. *Полное термодинамическое равновесие*. Это такое состояние, при котором распределение скоростей всех частиц максвелловское, степень возбуждения следует формуле Больцмана, ионизация — формуле Саха, а интенсивность излучения дается формулой Планка. Состояние системы полностью определяется заданием одного параметра — температуры T .

В состоянии полного термодинамического равновесия каждый прямой процесс в точности компенсируется обратным (так называемый принцип детального равновесия). В частности, число радиативных переходов с верхнего i -го на нижний j -й уровень должно равняться числу фотовозбуждений $j \rightarrow i$:

$$n_i \left(A_{ij} + B_{ij} \frac{c}{4\pi} u_{\nu_{ji}} \right) = n_j B_{ji} \frac{c}{4\pi} u_{\nu_{ji}}, \quad (i = 2, \dots; j < i), \quad (4.5)$$

где $u_{\nu_{ji}}$ — планковская плотность излучения частоты ν_{ji} , определяемая формулой (1.12). Аналогичным образом, число ионизаций излучением с i -го уровня $n_i B_{ic} \frac{c}{4\pi} \bar{u}_{\nu_{ic}}$ равно числу фоторекомбинаций на этот уровень:

$$n_e n^+ \left(A_{ci} + B_{ci} \frac{c}{4\pi} \bar{u}_{\nu_{ic}} \right) = n_i B_{ic} \frac{c}{4\pi} \bar{u}_{\nu_{ic}} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.6)$$

Для переходов под действием столкновений соотношения

детального баланса имеют вид

$$n_i C_{ij} = n_j C_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots; i \neq j), \quad (4.7)$$

$$n_e n^+ C_{ci} = n_i C_{ic} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.8)$$

2. *Локальное термодинамическое равновесие* (ЛТР), как говорилось выше, есть такое состояние максвелловского газа, когда населенности уровней бoльцмановские, ионизация следует формуле Саха, а интенсивность излучения, вообще говоря, не дается формулой Планка. При этом, в отличие от полного термодинамического равновесия, температура может меняться от точки к точке. Выясним, каковы должны быть физические условия, чтобы установилось такое состояние. Ограничимся формулировкой достаточных условий.

Положим в уравнениях (4.3) и (4.4) (пока чисто формально) среднюю интенсивность \bar{J} и все коэффициенты A равными нулю. Получим

$$\sum_{k=i+1}^c n_k C_{ki} + \sum_{j=1}^{i-1} n_j C_{ji} = n_i \sum_{j=1}^{i-1} C_{ij} + n_i \sum_{k=i+1}^c C_{ik} \quad (4.9)$$

($i = 1, 2, \dots$),

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_j C_{jc} = n_e n^+ \sum_{j=1}^{\infty} C_{cj}. \quad (4.10)$$

Если населенности уровней бoльцмановские, а ионизация дается формулой Саха, выполняются соотношения детального баланса (4.7) и (4.8). Используя их, нетрудно убедиться в том, что уравнения (4.9) и (4.10) в этом случае также удовлетворяются. Поскольку эти уравнения линейны относительно величин $n_i/n_e n^+$, равновесные значения населенностей дискретных уровней и континуума являются их единственным решением. При этом температура, входящая в формулы Больцмана и Саха, может быть функцией точки. Таким образом, газ, стационарное состояние которого описывается уравнениями (4.9) и (4.10), находится в состоянии ЛТР.

Система (4.9) — (4.10) отличается от (4.3) — (4.4) отсутствием членов, учитывающих радиативные переходы. Возможность пренебрежения этими членами по сравнению с теми, которые описывают переходы под действием столкновений, и есть то условие, при выполнении которого газ можно считать находящимся в состоянии ЛТР. Иначе говоря,

достаточное условие применимости предположения о ЛТР состоит в малой роли радиативных переходов по сравнению с переходами под действием столкновений. Поскольку роль переходов, обусловленных столкновениями, тем больше, чем больше электронная концентрация, при достаточно высоких плотностях должно существовать ЛТР.

3. *Частичное локальное термодинамическое равновесие.* В условиях, с которыми приходится иметь дело в астрофизике, ЛТР в чистом виде встречается сравнительно редко, так как плотности, как правило, недостаточны для его установления. Значительно чаще газ находится в состоянии, которое можно назвать частичным ЛТР. Под этим термином понимается следующее. Предположим, что имеется некоторый объем газа, находящийся в заданном поле непланковского излучения. Проследим, как будет меняться его состояние, если уменьшать плотность. Пусть первоначально она была достаточно высока, так что газ находился в состоянии ЛТР. При уменьшении плотности наступит момент, когда пренебрегать радиативными переходами по сравнению с ударными можно будет уже не для всех уровней. Оказывается, что отклонения от ЛТР обычно в первую очередь проявляются для нижних уровней, тогда как населенности верхних уровней по отношению к континууму все еще остаются равновесными. По мере падения плотности число уровней, населенности которых заметно отличаются от равновесных, постепенно увеличивается. Существует широкий интервал плотностей, при которых верхние уровни заселены по отношению к континууму так же, как при ЛТР, тогда как для нижних уровней пренебрегать вкладом радиативных переходов по сравнению с переходами под действием столкновений уже нельзя. В этом случае населенности нижних уровней могут сильно отличаться от равновесных. Это и есть состояние частичного ЛТР.

Грубо говоря, всю область отрицательных энергий можно разбить в этом случае на две зоны — равновесную и неравновесную. Пусть i_0 — номер уровня, разделяющего эти зоны. Относительные населенности уровней, расположенных в равновесной зоне, т. е. достаточно близко к континууму, такие же, как при ЛТР ($b_i \simeq 1$ при $i \gtrsim i_0$). Населенности же уровней, лежащих в неравновесной энергетической зоне ($i < i_0$), определяются уже не только локальной температу-

рой и плотностью, но и полем излучения в данном месте, так что, вообще говоря, числа b_i для этих уровней могут сильно отличаться от единицы. Разумеется, размер неравновесного энергетического «зазора», характеризующийся номером критического уровня i_0 , определяется, во-первых, свойствами атомов, из которых состоит газ, во-вторых, его плотностью и, наконец, в-третьих, полем излучения в данном месте.

В звездных атмосферах, в верхних слоях планетных атмосфер, в туманностях и межзвездной среде газ находится в состоянии частичного ЛТР. Конечно, число уровней, скажем, водородного атома, населенности которых не находятся в равновесии с континуумом, в случае звездных атмосфер и областей Н II межзвездной среды существенно различно. Однако нет оснований для априорного предположения, что в атмосферах звезд всех типов населенности всех уровней атомов любых элементов являются равновесными. Это предположение составляет так называемую *гипотезу о ЛТР*, вот уже около пятидесяти лет используемую в теории звездных атмосфер. Применимость этой гипотезы, столь привлекательной теми огромными упрощениями, которые ею вводятся, в каждом конкретном случае нуждается в специальном обосновании. Последовательный подход к теории звездных атмосфер должен основываться на детальном рассмотрении элементарных процессов. Пока в этом направлении делаются только первые шаги. Трудно предвидеть, насколько сильно результаты будут отличаться от того, что дают расчеты, основанные на гипотезе о ЛТР.

4. *Локально-контролируемое состояние.* Если состояние газа в данном месте среды не зависит от условий в других частях системы, можно говорить о локально-контролируемом состоянии. ЛТР — пример состояний такого типа, хотя и не единственный.

Взаимодействие между удаленными друг от друга объемами осуществляется через поле излучения. Поэтому, чтобы условия в данном месте не зависели от состояния среды в целом, не должны играть заметной роли те радиативные процессы, которые обусловлены собственным излучением газа. Если столкновения преобладают над всеми радиативными процессами (тогда существует ЛТР), это условие, очевидно, выполнено. Если же это не так и радиативными пере-

ходами пренебрегать нельзя, то для существования локально-контролируемого состояния радиативные переходы, обусловленные излучением, падающим на среду извне, должны преобладать над переходами, которые вызываются собственным излучением газа. Поэтому, чтобы газ находился в таком состоянии, он должен или иметь достаточно высокую плотность (тогда будет существовать ЛТР), или быть практически прозрачным. Первый случай осуществляется, например, в лабораторном газовом разряде высокого давления. Второму случаю соответствуют условия в солнечной короне. Уравнения стационарности при этом являются алгебраическими, и их решение не встречает каких-либо принципиальных трудностей, если не считать, конечно, того, что вероятности элементарных процессов, как правило, известны плохо.

§ 1.5. Рассеяние света в частотах спектральных линий

Радиативные процессы, связанные с переходами между дискретными уровнями, заслуживают более внимательного изучения.

В первую очередь следует обсудить вопрос о зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты. Согласно квантовой теории излучения, для изолированного неподвижного атома коэффициент поглощения в линии, соответствующей переходу $i \rightarrow k$, равен (см. В. Гайтлер [1])

$$k_{ik}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi^2\nu_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} A_{ki} \frac{\Delta\nu_R}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta\nu_R)^2}, \quad (5.1)$$

где

$$4\pi\Delta\nu_R = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} + \sum_{l=1}^{k-1} A_{kl}. \quad (5.2)$$

Величину $\Delta\nu_R$ называют естественной, или радиационной шириной линии. На расстоянии $\Delta\nu_R$ от центра линии коэффициент поглощения вдвое меньше, чем в центральной частоте (при $\nu = \nu_0$).

Если атом не изолирован, то действие окружающих частиц приводит к увеличению ширины линии (так называемые эффекты давления). Как известно (см., например, И. И. Собельман [1]), форма линии при этом часто по-прежнему

описывается формулой (5.1), с той разницей, что величину Δv_R следует заменить на

$$\Delta v_* = \Delta v_R + \Delta v_C, \quad (5.3)$$

где Δv_C — ширина линии, обусловленная столкновениями.

В действительности атомы не неподвижны, а находятся в тепловом движении. Пусть излучение распространяется вдоль оси z , а проекция скорости атома на это направление равна v_z . Тогда вследствие эффекта Доплера центральная частота линии смещается и становится равной

$$v'_0 = v_0 + v_0 \frac{v_z}{c}. \quad (5.4)$$

Коэффициент поглощения такого движущегося атома в частоте ν в пределах линии равен, очевидно,

$$k_{ik}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi^2\nu_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} A_{ki} \frac{\Delta v_*}{(\nu - \nu'_0)^2 + (\Delta v_*)^2}. \quad (5.5)$$

Чтобы получить коэффициент поглощения в расчете на один атом элемента объема газа, выражение (5.5) следует усреднить по функции распределения z -компонент скоростей поглощающих атомов. Если атомы, находящиеся на исходном (нижнем) уровне, имеют максвелловское распределение скоростей с температурой T , то доля атомов с z -компонентой скорости от v_z до $v_z + dv_z$ равна

$$\frac{m}{(2\pi mk)T^{1/2}} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right) dv_z, \quad (5.6)$$

где m — масса атома. Усредняя (5.5) по распределению (5.6) с учетом (5.4), находим, что

$$k_{ik}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} \frac{A_{ki}}{\Delta v_D} U(a, x), \quad (5.7)$$

где

$$U(a, x) = \frac{a}{\pi^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(x-y)^2 + a^2}. \quad (5.8)$$

Обозначения, использованные в двух последних формулах,

имеют следующий смысл. Величина

$$\Delta v_D = \frac{v_{ik}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (5.9)$$

есть так называемая доплеровская ширина линии, x — безразмерная частота, представляющая собой расстояние от центра линии, измеренное в доплеровских ширинах:

$$x = \frac{v - v_0}{\Delta v_D}, \quad (5.10)$$

и, наконец,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta v_D} = \frac{\Delta v_R + \Delta v_C}{\Delta v_D}. \quad (5.11)$$

Функция $U(a, x)$ известна под названием (нормированной) функции Фойгта. Она определяет зависимость коэффициента поглощения в линии от частоты и играет поэтому важнейшую роль во всех вопросах, связанных с интерпретацией формы спектральных линий.

Выражение (5.7) применимо лишь в том случае, когда распределение скоростей поглощающих атомов максвелловское. Если рассматриваются линии резонансной серии, возникающие при переходе из основного состояния, то это предположение, как правило, не вызывает сомнений. Если же речь идет о линиях субординатных серий, то, как мы вскоре увидим, предположение о максвелловском распределении скоростей поглощающих атомов может быть довольно грубым. Однако за неимением лучшего оно все же используется и в этих случаях.

При тех плотностях, с которыми приходится иметь дело в астрофизике, параметр a мал ($a \sim 10^{-2} \div 10^{-4}$). Оказывается, что в этом случае зависимость коэффициента поглощения от частоты в центральных частях линии и в далеких крыльях существенно различна. Именно, существует некоторое критическое расстояние от центра линии (обозначим его $|x_0|$), такое, что при $|x|$, заметно меньших $|x_0|$, с достаточно высокой степенью точности

$$U(a, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (5.12)$$

При $|x|$, заметно бóльших $|x_0|$, можно считать, что в первом

приближении

$$U(a, x) \simeq \frac{a}{\pi x^2}. \quad (5.13)$$

Значение $|x_0|$ определяется уравнением

$$e^{-x_0^2} = \frac{a}{\sqrt{\pi} x_0^2}. \quad (5.14)$$

Оно тем больше, чем меньше a :

a	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$ x_0 $	2,67	3,12	3,51

Наряду с коэффициентом поглощения, определяемым формулами (5.7) — (5.8), в дальнейшем будут рассматриваться также две его предельные формы, соответствующие $a = 0$ и $a = \infty$. В первом из этих случаев получаем так называемый доплеровский коэффициент поглощения:

$$k_{ik}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi^{3/2} \nu_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} \frac{A_{ki}}{\Delta \nu_D} e^{-x^2}. \quad (5.15)$$

Во втором случае имеем

$$k_{ik}(\nu) = \frac{c^2}{8\pi^2 \nu_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} \frac{A_{ki}}{\Delta \nu_*} \frac{1}{1+x^2}. \quad (5.16)$$

В отличие от предыдущих формул этого параграфа в (5.16) безразмерная частота x измеряется не в доплеровских ширинах $\Delta \nu_D$, а в единицах $\Delta \nu_*$:

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu_*}. \quad (5.17)$$

Коэффициент поглощения (5.16) называют лоренцовским.

Сравнивая эти формулы с приближенными выражениями для $U(a, x)$ при $|x| < |x_0|$ и $|x| > |x_0|$, видим, что при малых a в центральных частях линии коэффициент поглощения мало отличается от доплеровского, а вдали от центра линии его можно считать лоренцовским. Соответственно этому, часто говорят о доплеровском ядре и лоренцовских крыльях линии.

Рассмотрим немного подробнее доплеровский коэффициент поглощения. Он соответствует $a = 0$, т. е. случаю, когда Δv_* пренебрежимо мало по сравнению с Δv_D . При $\Delta v_* \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{\Delta v_*}{(v - v_0)^2 + (\Delta v_*)^2} \rightarrow \pi \delta(v - v_0),$$

где $\delta(v - v_0)$ — дельта-функция. Поэтому коэффициент поглощения неподвижного атома в этом предельном случае оказывается равным

$$k_{ik}(v) = \frac{c^2}{8\pi v_{ik}^2} \frac{g_k}{g_i} A_{ki} \delta(v - v_0). \quad (5.18)$$

Усредняя (5.18) по максвелловскому распределению (5.6) с учетом доплеровского смещения центральной частоты линии для движущегося атома, приходим к (5.15). Такой способ вывода (5.15), в отличие от перехода к пределу при $a \rightarrow 0$ в общей формуле (5.7), делает совершенно очевидным физический смысл зависимости от частоты, описываемой доплеровским коэффициентом поглощения. Она является непосредственным отражением максвелловского распределения скоростей поглощающих атомов.

Зависимость коэффициента поглощения в линии от частоты обычно описывают так называемым *профилем коэффициента поглощения* $\alpha(x)$. Он представляет собой отношение коэффициента поглощения в частоте ν к коэффициенту поглощения в центре линии:

$$\alpha(x) = \frac{k_{ik}(\nu)}{k_{ik}(\nu_0)}. \quad (5.19)$$

Профили коэффициентов поглощения, отвечающие трем рассмотренным выше случаям ($a = 0$, $0 < a < \infty$ и $a = \infty$), будем называть соответственно доплеровским, фойгтовским и лоренцовским, используя для их обозначения индексы D , V и L :

$$\alpha_D(x) = e^{-x^2}, \quad (5.20)$$

$$\alpha_V(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)}, \quad (5.21)$$

$$\alpha_L(x) = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (5.22)$$

Характерный интервал частот, в единицах которого измеряется безразмерная частота x (равный $\Delta\nu_D$ в случаях D и V и $\Delta\nu_*$ в случае L), будет в дальнейшем обозначаться просто через $\Delta\nu$. Нормировочная константа A , определяемая условием

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = \frac{A}{\Delta\nu} \int_0^{\infty} \alpha(x) d\nu = 1, \quad (5.23)$$

в случаях D , V и L равна соответственно

$$\left. \begin{aligned} A_D &= \frac{1}{V\pi}; \\ A_V &= U(a, 0); \\ A_L &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Заканчивая на этом обсуждение вопроса о коэффициенте поглощения в спектральной линии, отметим, что если условия в среде (такие, как ее температура и плотность) меняются от точки к точке, то коэффициент поглощения оказывается функцией не только частоты, но и координат. Если же распределение скоростей поглощающих атомов неизотропно, то он зависит и от направления.

Досих пор речь шла о процессах фотовозбуждения атомов. Теперь нам предстоит рассмотреть процессы излучения при радиативных переходах. Вопрос этот гораздо сложнее, и мы вынуждены будем приводить большинство результатов без доказательств.

Остановимся сначала на терминологии. Процесс фотовозбуждения $i \rightarrow k$ с последующим радиативным переходом $k \rightarrow i$ будем называть *рассеянием* кванта в линии. Если всеми процессами опустошения верхнего k -го уровня можно пренебречь по сравнению с радиативными переходами $k \rightarrow i$, будем говорить, что происходит чистое, или консервативное, рассеяние в линии. Все процессы переходов с k -го уровня вслед за фотовозбуждением $i \rightarrow k$, за исключением радиативных переходов $k \rightarrow i$, будем объединять под общим названием процессов (истинного) *поглощения* излучения данной линии. Примерами процессов истинного поглощения слу-

жат удары второго рода, ионизации с верхнего уровня, спонтанные переходы $k \rightarrow j$ ($j \neq i$) и т. п. Последний процесс сводится к тому, что квант энергии $h\nu_{ik}$ превращается в квант $h\nu_{ij}$. Следует специально подчеркнуть, что такой процесс также считается процессом истинного поглощения для излучения в линии $i \rightarrow k$. Будем, далее, говорить, что квант в линии, соответствующей переходу между i -м и k -м уровнями, пришел от *первичных источников*, или, короче, родился, если его излучение при радиативном переходе $k \rightarrow i$ произошло не непосредственно вслед за фотовозбуждением $i \rightarrow k$ под действием собственного излучения среды в линии. Таким образом, если произошла следующая цепочка радиативных переходов: $i \rightarrow k \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$, то считается, что один квант в линии $i \rightarrow k$ «погиб» вследствие истинного поглощения, а затем родился новый квант, пришедший от первичных источников. Сколь ни странной может показаться эта терминология с первого взгляда, она оказывается очень удобной.

Рассмотрим подробнее процессы рассеяния. Начнем с простого иллюстративного примера. Проследим судьбу квантов резонансной линии, соответствующей переходу $1 \rightarrow 2$. Предположим, что происходит чистое рассеяние и газ достаточно разрежен, так что эффекты давления не играют роли. Более того, пренебрежем сначала для простоты и размытостью верхнего уровня, т. е. примем, что коэффициент поглощения неподвижного атома дается формулой (5.18). Распределение скоростей поглощающих атомов будем считать максвелловским. Рассмотрим элементарный объем газа, освещаемый со всех сторон монохроматическим излучением частоты ν_1 , интенсивность которого не зависит от направления. Спрашивается, какова будет форма линии, излучаемой этим объемом за счет резонансного рассеяния возбуждающего излучения? Поспешный вывод, что она будет «конечно, доплеровской», оказывается неверным.

Убедиться в этом можно, например, так. При сделанных предположениях профиль эмиссионной линии непосредственно отражает распределение скоростей возбужденных атомов, подобно тому как чисто доплеровский коэффициент поглощения отражает максвелловское распределение скоростей поглощающих атомов. Между тем скорости возбужденных атомов не будут в данном случае распределены по

Максвеллу. Частота поглощаемого атомом излучения равна $\nu = \nu_0 + \nu_0 \frac{v_z}{c}$, где v_z — проекция его скорости на направление распространения излучения. Поэтому, чтобы атом мог поглотить квант частоты ν_1 , его полная скорость должна быть не меньше

$$v_1 = c \frac{|\nu_1 - \nu_0|}{\nu_0}. \quad (5.25)$$

Значит, среди возбужденных атомов вовсе не будет таких, скорости которых были бы меньше v_1 .

Анализ показывает, что функция распределения скоростей возбужденных атомов имеет в данном случае вид

$$dn_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } v < v_1, \\ n_2 \frac{m}{kT} \exp \left[-\frac{m(v^2 - v_1^2)}{2kT} \right] v dv & \text{при } v \geq v_1, \end{cases} \quad (5.26)$$

где n_2 — населенность верхнего уровня, dn_2 — число возбужденных атомов со скоростями от v до $v + dv$, T — кинетическая температура атомов, находящихся в основном состоянии. Распределение скоростей (5.26) совершенно не похоже на максвелловское.

Чтобы ответить на поставленный выше вопрос о форме излучаемой объемом линии, нужно перейти от распределения полных скоростей атомов к распределению их проекций на луч зрения, который удобно принять за ось z . Выполняя это, находим, что нормированная функция распределения z -компонент скоростей имеет вид

$$f(v_z) = \frac{m}{2kT} \exp \left(\frac{mv_1^2}{2kT} \right) \int_{|\bar{v}|}^{\infty} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) dv, \quad (5.27)$$

где $|\bar{v}| = v_1$ при $|v_z| < v_1$ и $|\bar{v}| = |v_z|$ при $|v_z| \geq v_1$. Очевидно, что интенсивность излучения частоты ν_2 , испускаемого объемом вследствие резонансного рассеяния падающего на него излучения, определяется условием

$$I_{\nu_2} dv = \frac{h\nu_2}{4\pi} A_{21} n_2 f(v_z) dv_z,$$

где ν_2 и v_z связаны соотношением $\nu_2 = \nu_0 + \nu_0 \frac{v_z}{c}$,

так что

$$I_{\nu_2} = \frac{h\nu_{12}}{4\pi} A_{21} n_2 f \left(x_2 \sqrt{\frac{2kT}{m}} \right) \frac{c}{\nu_0}, \quad (5.28)$$

где x_2 — безразмерная частота, отвечающая ν_2 . Населенность верхнего уровня определяется уравнением стационарности, имеющим в данном случае вид

$$n_2 A_{21} = \frac{4\pi}{h\nu_{12}} n_1 k_{12}(\nu_1) I_{\nu_1}^0,$$

или

$$n_2 A_{21} = \frac{4\pi}{h\nu_{12}} n_1 k_{12}(\nu_0) I_{\nu_1}^0 e^{-x_1^2}, \quad (5.29)$$

где $I_{\nu_1}^0$ — интенсивность возбуждающего излучения, x_1 — безразмерная частота, соответствующая ν_1 . Из (5.28) и (5.29) находим, учитывая (5.27),

$$I_{\nu_2} = n_1 k_{12}(\nu_0) I_{\nu_1}^0 r(x_1, x_2) \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (5.30)$$

где

$$r(x_1, x_2) = \int_{|\bar{x}|}^{\infty} e^{-t^2} dt \quad (5.31)$$

и $|\bar{x}|$ — большее из чисел $|x_1|$, $|x_2|$. Таким образом, форма линии описывается функцией $r(x_1, x_2)$. Ее график (для $x_1 = 0,5$) приведен на рис. 1. Профиль линии совершенно не похож на доплеровский и определяется частотой возбуждающего излучения. Чем больше $|x_1|$, тем шире плосковершинная часть профиля.

Функция $r(x_1, x_2)$ описывает преобразование квантов одних частот в кванты других, происходящее в элементарном объеме газа. В рассмотренном простейшем примере это преобразование

вызывается эффектом Доплера. В более сложных случаях, как мы вскоре увидим, действуют и другие механизмы перераспределения квантов по частотам в пределах

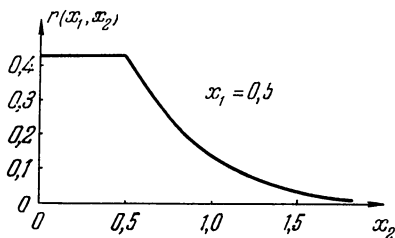


Рис. 1. Функция перераспределения по частотам при чисто доплеровском уширении.

линии. Однако во всех случаях, когда падающее на объем излучение изотропно, а функция распределения скоростей атомов, находящихся на исходном (нижнем) уровне, максвелловская, интенсивность рассеянного объемом излучения можно представить в виде (5.30). Конечно, функция $r(x_1, x_2)$ не будет при этом, вообще говоря, даваться формулой (5.31).

Величина $r(x_1, x_2)$ называется функцией перераспределения излучения по частотам, или просто *функцией перераспределения*. Во всех случаях, перечисляемых ниже, как и в частном примере, который только что обсуждался, функции перераспределения нормированы так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} r(x_1, x_2) dx_2 = \alpha(x_1). \quad (5.32)$$

Физический смысл $r(x_1, x_2)$ определяется формулой (5.30) и состоит в следующем. Величина $r(x_1, x_2) dx_2$ есть коэффициент поглощения излучения частоты x_1 с последующим испусканием квантов с частотами $(x_2, x_2 + dx_2)$, рассчитанный на один поглощающий атом и выраженный в долях коэффициента поглощения в центре линии.

Вернемся опять к нашему примеру, немного его видоизменив. Заменим изотропное освещение объема направленным, а остальные предположения оставим в силе. Пусть возбуждающее излучение распространяется в направлении ω_1 . Понятно, что распределение скоростей возбужденных атомов в объеме будет теперь зависеть от направления. Сферическая симметрия, которая существовала при изотропном освещении, уступает место аксиальной, причем ось симметрии направлена по ω_1 . Интенсивность рассеянного излучения должна зависеть не только от частоты, но и от угла с направлением первоначального распространения света. Вместо (5.30) будем иметь

$$I_{\nu_2}(\omega_2) = n_1 k_{12}(\nu_0) I_{\nu_1}^0(\omega_1) r(x_1, x_2; \gamma) \frac{1}{\Delta\nu}, \quad (5.33)$$

где γ — угол между направлениями ω_1 и ω_2 , так что

$$\cos \gamma = \omega_1 \cdot \omega_2. \quad (5.34)$$

Функции $r(x_1, x_2; \gamma)$ и $r(x_1, x_2)$ связаны между собой очевидным соотношением

$$r(x_1, x_2) = 2\pi \int_0^{\pi} r(x_1, x_2; \gamma) \sin \gamma d\gamma. \quad (5.35)$$

Величину $r(x_1, x_2; \gamma)$ будем называть функцией перераспределения излучения по частотам и направлениям. В том частном случае, когда естественная ширина линии считается равной нулю,

$$r(x_1, x_2; \gamma) = \frac{1}{4\pi^{3/2} \sin \gamma} \exp \left[-\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \right]. \quad (5.36)$$

Функция $r(x_1, x_2)$, соответствующая (5.36), дается формулой (5.31).

Существует дополнительный эффект, которым мы пренебрегали. Атом может рассеивать падающее на него излучение неизотропно. Обозначим через $\chi(\gamma) \frac{d\omega}{4\pi}$ вероятность рассеяния излучения в пределах телесного угла $d\omega$ около направления, образующего угол γ с первоначальным пучком. Функция $\chi(\gamma)$ называется *индикатрисой рассеяния*, или фазовой функцией. Выше принималось, что атомы рассеивают падающее на них излучение во все стороны с одной и той же вероятностью (изотропное рассеяние). Соответствующая индикатриса рассеяния

$$\chi(\gamma) = 1 \quad (5.37)$$

называется сферической. В действительности приходится иметь дело с дипольным рассеянием, которому отвечает рэлеевская индикатриса рассеяния:

$$\chi(\gamma) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \gamma). \quad (5.38)$$

Строго говоря, это обстоятельство должно учитываться. Однако при исследовании процессов многократного рассеяния света в частотах линий отличием индикатрисы рассеяния от сферической, как правило, пренебрегают. Это не самое грубое из приближений, которые делаются в этой теории.

Отказ от предположения о нулевой естественной ширине линии ведет к дальнейшему усложнению функций перерас-

пределения. Если по-прежнему рассматривается резонансная линия, а плотность газа настолько мала, что эффектами давления можно пренебречь, то и здесь перераспределение квантов по частотам вызывается только эффектом Доплера. Оказывается (В. Г. Левич [1], Л. Хенъи [1], В. Унно [1]), что в этом случае

$$r(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi^{3/2} U(a, 0)} \int_0^{\infty} e^{-(y+t)^2} \left[\arctg \frac{y+s}{a} + \arctg \frac{y-s}{a} \right] dy, \quad (5.39)$$

$$r(x_1, x_2; \gamma) = \frac{1}{4\pi^{3/2} U(a, 0) \sin \gamma} \exp\left(-t^2 \csc^2 \frac{\gamma}{2}\right) \times \\ \times U\left(a \sec \frac{\gamma}{2}, \quad s \sec \frac{\gamma}{2}\right), \quad (5.40)$$

где

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{2}; \quad s = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad (5.41)$$

a — отношение естественной ширины линии к доплеровской, $U(a, x)$ — функция Фойгта, определяемая формулой (5.8). При $a = 0$ формулы (5.39) и (5.40) переходят соответственно в (5.31) и (5.36).

Если эффектами давления пренебрегать нельзя, то картина меняется. До сих пор в системе координат, связанной с атомом, частоты кванта до и после рассеяния не отличались друг от друга, хотя с точки зрения наблюдателя они и были разными. Теперь же к эффекту Доплера добавляется новый механизм перераспределения по частотам. За время жизни атома в возбужденном состоянии расположение окружающих частиц, которые вызывают смещение уровня, успевает полностью измениться. Так, если плотность порядка 10^{12} см^{-3} , то среднее расстояние между частицами $\sim 10^{-4} \text{ см}$. При температуре 10^{40} К средняя относительная скорость водородных атомов $\sim 2 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$, так что путь $\sim 10^{-4} \text{ см}$ атом проходит за $5 \cdot 10^{-11} \text{ сек}$. Поскольку время жизни атома в возбужденном состоянии $\sim 10^{-8} \text{ сек}$, никакой корреляции между расположением окружающих частиц в момент поглощения и в момент излучения ожидать не приходится. Хотя такая трактовка является очень приближенной и в действительности вопрос гораздо сложнее, основной вывод об отсутствии кор-

реляции между частотами поглощаемого и излучаемого кванта оказывается верным. Можно считать, что в системе координат, связанной с атомом, вероятность излучения кванта частоты ν_2 вслед за поглощением кванта частоты ν_1 не зависит от ν_1 и пропорциональна коэффициенту поглощения в частоте ν_2 . Дополнительным механизмом перераспределения по частотам является эффект Доплера, влияние которого было довольно подробно рассмотрено выше. Результирующая функция перераспределения имеет очень сложный вид, и приводить ее мы не будем. Свойства этой функции исследованы недавно Дж. Финном [1]. На одно обстоятельство следует специально обратить внимание. Если $|x_1|$ и $|x_2|$ велики, то

$$r(x_1, x_2) \propto x_1^{-2} \cdot x_2^{-2}. \quad (5.42)$$

Этот результат отражает отсутствие корреляции между частотами поглощаемого и излучаемого квантов. Он справедлив в той области, где ролью эффекта Доплера в перераспределении по частотам можно пренебречь.

До сих пор говорилось о резонансных линиях. Для линий субординатных серий положение еще сложнее. Во-первых, предположением о максвелловском распределении скоростей возбужденных атомов нужно пользоваться с осторожностью. В этой связи следует напомнить, что весь приведенный выше анализ базировался на том, что скорости атомов, которые находятся на исходном (нижнем) уровне, считались распределенными по Максвеллу. Во-вторых, так как время жизни атома на обоих уровнях конечно, ни один из них нельзя считать бесконечно тонким. Вследствие этого даже при рассеянии на изолированном неподвижном атоме частота кванта может меняться. Этот механизм перераспределения служил предметом многочисленных исследований. Он подробно обсуждается в книге Р. Вулли и Д. Стиббса [1], где имеются ссылки на более ранние работы (недавно Д. Хаммер [1] указал на то, что обычный подход не вполне корректен).

Главным объектом нашего исследования будут служить резонансные линии. Поэтому не будем разбирать подробнее вопрос о функциях перераспределения для линий субординатных серий. Это тем более оправдано, что на практике для них всегда используются приближенные выражения, причем делается то же приближение, которое вводится и для

резонансных линий (так называемое приближение полного перераспределения по частотам; см. ниже).

Всестороннее обсуждение вопроса о функциях перераспределения в различных случаях, в том числе вывод формул, приведенных выше без доказательства, а также исчерпывающую библиографию по этому вопросу можно найти в работах Д. Хаммера [1], [2].

Чрезвычайно громоздкий вид функций перераспределения настоятельно диктует необходимость ввести приближение, которое описывало бы основные черты процесса перераспределения излучения по частотам, отвлекаясь в то же время от несущественных деталей. Такое приближение впервые было предложено, насколько нам известно, Дж. Хаутгастом [1], а затем и рядом других авторов. Это приближение, известное под названием приближения полного перераспределения по частотам при рассеянии, сводится к следующему. Во-первых, принимается, что зависимостью функций перераспределения от угла рассеяния можно пренебречь, т. е. всюду вместо $r(x_1, x_2; \gamma)$ используется $r(x_1, x_2)$. Во-вторых, точную функцию перераспределения $r(x_1, x_2)$ заменяют на приближенную, полагая

$$r(x_1, x_2) = A\alpha(x_1)\alpha(x_2), \quad (5.43)$$

где $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в рассматриваемой линии.

Это приближение является сейчас общепринятым. Оно положено в основу всего нашего дальнейшего изложения. Какие соображения можно привести в пользу этого приближения и когда оно обеспечивает разумную точность? Что касается пренебрежения зависимостью функций перераспределения от угла, то главный аргумент в пользу этого состоит в том, что обычно возбуждающее излучение падает со всех сторон. За исключением областей в непосредственной близости к границам занимаемого газом объема, интенсивность излучения, как правило, не очень сильно зависит от направления. Гораздо серьезнее второе приближение, выражаемое формулой (5.43). Оно базируется на двух фактах. Во-первых, если профиль коэффициента поглощения фойгтовский, то в лоренцовских крыльях, как это следует из

(5.21) и (5.13),

$$\alpha_V(x) \sim \frac{a}{\pi U(a, 0)} x^{-2}, \quad (5.44)$$

так что при достаточно больших $|x_1|$ и $|x_2|$, согласно (5.43),

$$r(x_1, x_2) \sim \frac{a^2}{\pi^2 U(a, 0)} x_1^{-2} \cdot x_2^{-2}. \quad (5.45)$$

В том случае, когда эффекты давления существенны, тот же результат получается и при использовании точной функции перераспределения [см. формулу (5.42)]. Во-вторых, в ядре линии, где перераспределение по частотам практически целиком обусловлено эффектом Доплера, некоторая доля квантов всегда будет рассеиваться с полным перераспределением по частотам. Это следует из формулы (5.36), показывающей, что для тех квантов, которые рассеиваются под прямым углом к направлению первоначального распространения ($\gamma = \frac{\pi}{2}$),

$$r(x_1, x_2; \pi/2) \propto e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} = \alpha_D(x_1) \alpha_D(x_2). \quad (5.46)$$

Эти соображения позволяют надеяться, что в случае, когда эффекты давления играют существенную роль ($\Delta\nu_C \gg \gg \Delta\nu_R$), предположение о полном перераспределении по частотам является разумным приближением для всех частот. Если же роль эффектов давления мала, то приближением полного перераспределения можно пользоваться лишь для центральных частот линии. При этом возбуждение атомов должно в основном производиться излучением, приходящим в пределах доплеровского ядра. Детальные расчеты подтверждают эти качественные соображения.

Дальнейшие сведения по вопросу о точности приближения полного перераспределения по частотам можно найти в монографии В. В. Соболева [1] и в статьях Р. Томаса [1], Дж. Джефриса и О. Уайта [1], А. Хёрна [1], Д. Хаммера [2, 3], Дж. Оксиниуса [2], М. Добровольного и Ф. Ингельмана [1] и автора [1].

Согласно основной идее приближения полного перераспределения по частотам, доля энергии, излучаемая элементарным объемом при спонтанных переходах $k \rightarrow i$ в интервале

частот ($\nu, \nu + d\nu$), равна

$$e_{ik}(\nu) d\nu,$$

где функция $e_{ik}(\nu)$ не зависит от механизма заселения верхнего уровня и пропорциональна коэффициенту поглощения $k_{ik}(\nu)$. Условие нормировки

$$\int_0^{\infty} e_{ik}(\nu) d\nu = 1 \quad (5.47)$$

вместе с соотношением (3.24) позволяет определить коэффициент пропорциональности. Оказывается, что

$$e_{ik}(\nu) = \frac{8\pi\nu_{ik}^2 g_i}{c^2 g_h} A_{ki}^{-1} k_{ik}(\nu), \quad (5.48)$$

или

$$e_{ik}(\nu) = \frac{A}{\Delta\nu} \alpha(x). \quad (5.48')$$

Это выражение для $e_{ik}(\nu)$ будет использовано в следующем параграфе при выводе уравнения переноса излучения в частотах спектральной линии.

В течение почти полувека в астрофизической литературе широко использовалось, да и сейчас еще иногда применяется приближение, в некотором смысле диаметрально противоположное приближению полного перераспределения по частотам. Оно состоит в постулировании неизменности частоты кванта при рассеянии, так что

$$r(x_1, x_2) = \alpha(x_1) \delta(x_1 - x_2), \quad (5.49)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Если при полном перераспределении по частотам квант полностью «забывает» при рассеянии свою первоначальную частоту, то здесь, наоборот, он ее «помнит» и сохраняет.

Приближение (5.49) не имеет реальных физических оснований и должно быть оставлено. Результаты расчетов, основанных на этом приближении, находятся в прямом противоречии с рядом экспериментальных данных. Наоборот, эксперименты, специально поставленные с целью проверки применимости предположения о полном перераспределении по частотам, показали, что оно действи-

тельно является хорошим приближением (Л. М. Биберман и И. М. Гуревич [1]; А. Фелпс [1]; П. Уолш [1]; А. Фелпс и А. Маккобри [1]).

В заключение — замечание о терминологии. Рассеяние с полным перераспределением по частотам часто называют полностью некогерентным. Для обозначения рассеяния без изменения частоты широко используется термин «когерентное рассеяние». Эту терминологию вряд ли можно признать удачной — ведь речь идет не о фазовых соотношениях между падающей и рассеянной волнами, а об изменении частоты кванта при рассеянии. «Когерентное» рассеяние мы будем называть монохроматическим, а «полностью некогерентное» — рассеянием с полным перераспределением по частотам. В последнем случае иногда используют также термин «некоррелированное рассеяние».

§ 1.6. Перенос излучения

Для решения уравнений стационарности нужно знать поле излучения в каждой точке среды. Оно определяется уравнением переноса излучения.

Будем сначала считать, что мы имеем дело с излучением в частотах некоторой спектральной линии, соответствующей переходу между нижним i -м и верхним k -м уровнями. Предположим, далее, что в рассматриваемом интервале частот единственными существенными процессами взаимодействия излучения и вещества являются фотовозбуждения $i \rightarrow k$ и обратные переходы $k \rightarrow i$. Пусть $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ — интенсивность излучения частоты ν в точке \mathbf{r} в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Тогда, по определению, $I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) dv d\sigma d\omega$ есть энергия, протекающая за единицу времени через перпендикулярную $\boldsymbol{\omega}$ площадку $d\sigma$ в интервале частот $(\nu, \nu + dv)$ в телесном угле $d\omega$. Уравнение переноса описывает изменение интенсивности вдоль луча. В точке $\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} ds$ интенсивность в направлении $\boldsymbol{\omega}$ равна $I_\nu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} ds, \boldsymbol{\omega})$. Разность

$$[I_\nu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} ds, \boldsymbol{\omega}) - I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})] dv d\sigma d\omega \quad (6.1)$$

и характеризует изменение интенсивности на пути ds .

Это изменение обусловлено двумя причинами. С одной стороны, энергия затрачивается на возбуждение атомов. Если $k_{ik}(\nu)$ — коэффициент поглощения в линии в расчете на

один атом, находящийся в i -м состоянии, то на пути ds за единицу времени на возбуждение атомов расходуется энергия

$$n_i k_{ik}(\nu) I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) d\nu d\sigma ds d\omega. \quad (6.2)$$

С другой стороны, атомы, находящиеся на верхнем k -м уровне, сами излучают при переходах $k \rightarrow i$, что ведет к увеличению интенсивности. Энергия, излучаемая при спонтанных переходах $k \rightarrow i$ объемом $d\sigma ds$ за единицу времени в пределах телесного угла $d\omega$, равна $\frac{h\nu_{ik}}{4\pi} A_{ki} n_k d\sigma ds d\omega$. В приближении полного перераспределения по частотам доля этой энергии, излучаемая в частотах $(\nu, \nu + d\nu)$, равна $e_{ik}(\nu) d\nu$. Таким образом, вклад в первоначальный пучок за счет спонтанного излучения составляет

$$\frac{h\nu_{ik}}{4\pi} e_{ik}(\nu) n_k A_{ki} d\nu d\sigma ds d\omega. \quad (6.3)$$

Необходимо еще учесть вынужденные переходы. Поле излучения представляет собой бозонный газ. Поэтому, согласно общим принципам квантовой статистики, для учета вынужденного излучения вероятность спонтанного перехода в некоторую ячейку фазового пространства координат и импульсов нужно умножить на $1 + N$, где N — число частиц (в данном случае квантов света) в этой ячейке. Если f — фазовая плотность квантов в пространстве $(\nu, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ (она связана с интенсивностью излучения I_ν соотношением $I_\nu = ch\nu f$; см. § 1.1), N — число квантов в ячейке фазового пространства координат \mathbf{r} и импульсов \mathbf{p} , то

$$f d\nu dV d\omega = 2N \frac{d\Gamma}{h^3},$$

где $d\Gamma$ — элемент объема пространства (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , т. е. $d\Gamma = d^3p dp dV d\omega$. Здесь p — импульс кванта: $p = h\nu/c$; множитель 2 учитывает два возможных состояния поляризации. Отсюда

$$N = \frac{c^3}{2\nu^2} f, \quad (6.4)$$

или

$$N = \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu.$$

Учет вынужденного излучения сводится поэтому к умножению вероятности спонтанного перехода на

$$1 + N = 1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu.$$

Таким образом, вследствие радиативных переходов $k \rightarrow i$ энергия первоначального пучка возрастает на

$$\frac{h\nu_{ik}}{4\pi} e_{ik}(\nu) n_k A_{ki} \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right] d\nu d\sigma ds d\omega. \quad (6.5)$$

Воспользовавшись (5.48), можем переписать (6.5) в виде

$$\frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right] d\nu d\sigma ds d\omega. \quad (6.6)$$

Собирая вместе выражения (6.1), (6.2) и (6.6), на основании закона сохранения энергии имеем

$$\begin{aligned} [I_\nu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} ds, \boldsymbol{\omega}) - I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})] d\nu d\sigma d\omega = \\ = \left\{ -k_{ik}(\nu) n_i I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k \times \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right] \right\} d\nu d\sigma ds d\omega. \end{aligned}$$

Разлагая $I_\nu(\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} ds, \boldsymbol{\omega})$ по формуле Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_1 \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})}{\partial x} + \cos \vartheta_2 \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})}{\partial y} + \cos \vartheta_3 \frac{\partial I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})}{\partial z} = \\ = -k_{ik}(\nu) n_i I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) + \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k \times \\ \times \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right], \quad (6.7) \end{aligned}$$

где $\cos \vartheta_i$ — направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i} \cos \vartheta_1 + \mathbf{j} \cos \vartheta_2 + \mathbf{k} \cos \vartheta_3. \quad (6.8)$$

Уравнение (6.7) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = -k_{ik}(\nu) n_i I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) + \\ + \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k \left[I_\nu + \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right], \quad (6.9) \end{aligned}$$

или, перегруппировав члены в правой части,

$$\omega \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) = -k_{ik}(\nu) \left(n_i - \frac{g_i}{g_k} n_k \right) I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k. \quad (6.9')$$

Это.— *уравнение переноса излучения в частотах спектральной линии* (в приближении полного перераспределения по частотам).

Множитель при $-I_{\nu}$ в правой части уравнения (6.9') называется *объемным коэффициентом поглощения* в спектральной линии:

$$\sigma_{ik}(\nu) = k_{ik}(\nu) \left(n_i - \frac{g_i}{g_k} n_k \right). \quad (6.10)$$

Второе слагаемое в правой части (6.9') есть энергия, излучаемая в линии единицей объема в единичном интервале частот около частоты ν за единицу времени в единичном телесном угле за счет спонтанного излучения. Эту величину называют *коэффициентом излучения* $\varepsilon_{ik}(\nu)$:

$$\varepsilon_{ik}(\nu) = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} k_{ik}(\nu) n_k. \quad (6.11)$$

Отношение коэффициента излучения к объемному коэффициенту поглощения известно под названием *функции источников* S . Из (6.11) и (6.10) следует, что в приближении полного перераспределения по частотам функция источников не зависит от частоты и направления, являясь функцией точки. Она связана с населенностями уровней следующим образом:

$$S_{ik}(\mathbf{r}) = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \left(\frac{g_k}{g_i} \frac{n_i}{n_k} - 1 \right)^{-1}. \quad (6.12)$$

Обозначая через T_{ex} температуру возбуждения k -го уровня относительно i -го, определяемую аналогично (2.8), можем переписать (6.12) в виде

$$S_{ik}(\mathbf{r}) = B_{\nu_{ik}}(T_{ex}(\mathbf{r})), \quad (6.12')$$

где $B_\nu(T)$ — функция Планка. Учитывая (6.10) и (6.12), уравнение переноса (6.9') можно представить в форме

$$\omega \operatorname{grad}_r I_\nu(\mathbf{r}, \omega) = -\sigma_{ik}(\nu) [I_\nu(\mathbf{r}, \omega) - S_{ik}(\mathbf{r})]. \quad (6.13)$$

Получим теперь уравнение переноса излучения в непрерывном спектре. Изменение интенсивности на пути ds обусловлено, с одной стороны, ее уменьшением за счет потерь на фотоионизацию атомов и тормозное поглощение и, с другой стороны, возрастанием вследствие излучения при спонтанных и вынужденных фоторекомбинациях и тормозном излучении.

Если на объем $d\sigma ds$ падает излучение с частотами $(\nu, \nu + d\nu)$, распространяющееся в пределах телесного угла $d\omega$ около направления ω , то энергия, затрачиваемая этим излучением за 1 сек на фотоионизацию атомов, равна

$$\sum_{j=1}^{\infty} k_{jc}(\nu) n_j I_\nu(\mathbf{r}, \omega) d\nu d\sigma ds d\omega, \quad (6.14)$$

где $k_{jc}(\nu)$ — коэффициент поглощения за границей j -й серии, так что

$$k_{jc}(\nu) = 0 \text{ при } \nu < \nu_{jc} (j = 1, 2, \dots). \quad (6.15)$$

Потери энергии на тормозное поглощение составляют

$$n_e n^+ k_{cc}(\nu) I_\nu(\mathbf{r}, \omega) d\nu d\sigma ds d\omega, \quad (6.16)$$

где $k_{cc}(\nu)$ — соответствующий коэффициент поглощения. Объединяя (6.14) и (6.16), находим, что полная потеря энергии равна

$$\sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) n_j I_\nu(\mathbf{r}, \omega) d\nu d\sigma ds d\omega, \quad (6.17)$$

где, как и в § 1.4, символ $\sum_{j=1}^c$ означает, что суммирование распространяется как на состояния дискретного спектра ($j = 1, 2, \dots$), так и на континуум ($j = c$), причем $n_c = n_e n^+$.

Энергия, излучаемая при спонтанных фоторекомбинациях на j -й уровень в элементе фазового объема $d\nu dV d\omega$, лежащем около точки фазового пространства с

координатами $(\nu, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$, равна $(dV = d\sigma \, d\Omega)$

$$k_{jc}(\nu) \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} n_e n^+ \frac{g_j}{g^+} \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT_e)^{3/2}} e^{\frac{h\nu jc}{kT_e}} d\nu d\sigma ds d\boldsymbol{\omega}. \quad (6.18)$$

Это выражение получается при предположении о максвелловском распределении скоростей электронов с температурой T_e . Вывод его, не представляющий каких-либо трудностей, основан на использовании соотношения (3.31).

Энергия, излучаемая за счет спонтанных тормозных процессов, дается формулой (6.18), если в ней заменить j на c , приняв, что $\nu_{cc} = 0$ и

$$g_c = g^+ \frac{2(2\pi m_e kT_e)^{3/2}}{h^3}. \quad (6.19)$$

В соответствии с общим рецептом, для учета вынужденных переходов надо умножить (6.18) на $1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu$. Суммируя получающиеся выражения по всем j , включая континуум, находим окончательно, что полная энергия, излучаемая при фоторекомбинациях и тормозном излучении, есть

$$\frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right] n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu jc}{kT_e}} \times \\ \times d\nu d\sigma ds d\boldsymbol{\omega}. \quad (6.20)$$

Из (6.1), (6.17) и (6.20) следует, что

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = - \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) n_j I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) + \\ + \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) \right] n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu jc}{kT_e}}. \quad (6.21)$$

Уравнение (6.21) есть уравнение переноса излучения в непрерывном спектре для максвелловского газа.

Иногда оказывается удобным сгруппировать члены в правой части (6.21) несколько иначе, а также перейти от населенностей уровней n_j к мензеловским параметрам b_j , определяемым соотношением (2.5). Уравнение (6.21)

принимает тогда вид

$$\begin{aligned} \omega \operatorname{grad}_r I_\nu(\mathbf{r}, \omega) = & - n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu_{jc}}{kT_e}} (b_j - e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}) \times \\ & \times I_\nu(\mathbf{r}, \omega) + \frac{2h\nu^3}{c} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu_{jc}}{kT_e}}, \end{aligned} \quad (6.21')$$

причем $b_c = 1$.

Величина

$$\sigma^c(\nu) = n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu_{jc}}{kT_e}} (b_j - e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}) \quad (6.22)$$

есть объемный коэффициент поглощения в непрерывном спектре. Функция $\sigma^c(\nu)$ имеет скачки у границ серий (знаменитая «пила», схематическое изображение которой приводится во всех учебниках астрофизики).

Коэффициент излучения в непрерывном спектре $\varepsilon^c(\nu)$ равен

$$\varepsilon^c(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT_e}} n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu_{jc}}{kT_e}}. \quad (6.23)$$

Отношение $\varepsilon^c(\nu)/\sigma^c(\nu)$ есть функция источников в частотах непрерывного спектра:

$$S_\nu^c(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon^c(\nu)}{\sigma^c(\nu)}. \quad (6.24)$$

Пользуясь введенными только что обозначениями, приводим уравнение переноса (6.21') к стандартной форме:

$$\omega \operatorname{grad}_r I_\nu(\mathbf{r}, \omega) = -\sigma^c(\nu) [I_\nu(\mathbf{r}, \omega) - S_\nu^c(\mathbf{r})]. \quad (6.25)$$

Уравнение переноса необходимо дополнить граничными условиями. Пусть газ занимает объем, ограниченный выпуклой поверхностью. Будем считать, что эта поверхность не отражает падающего на нее излучения. В этом случае граничное условие имеет вид

$$I_\nu(\mathbf{r}_0, \omega) = I_\nu^0(\mathbf{r}_0, \omega) \quad \text{при} \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (6.26)$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор произвольной точки граничной по-

верхности, \mathbf{n} — орт внешней нормали к границе в точке \mathbf{r}_0 , $I_\nu^0(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\omega})$ — заданная функция, представляющая собой интенсивность излучения частоты ν , падающего извне на границу среды в точке \mathbf{r}_0 в направлении $\boldsymbol{\omega}$. Если граница отражает часть падающего на нее излучения или если граничная поверхность не является выпуклой, условие (6.26) должно быть соответствующим образом видоизменено.

Строго говоря, мы были не вполне последовательны при выводе системы уравнений переноса, так как не учли взаимодействия непрерывного и линейчатого спектра. Примером процесса, обуславливающего такое взаимодействие, может служить фотоионизация возбужденных атомов линейчатым излучением того же элемента. Так, лайман-альфа кванты могут ионизовать водородные атомы, находящиеся в возбужденных состояниях. Существует еще одно предположение, которое мы молчаливо считали выполненным. Оно состоит в том, что газ должен быть однокомпонентным, т. е. состоящим из атомов только одного элемента. Более того, неявно предполагалось, что этот элемент представлен ионами всего двух стадий ионизации, причем ионы более высокой стадии ионизации находятся лишь в основном состоянии. Эти предположения, очевидно, строго выполняются только для газа, состоящего из чистого водорода.

Если отказаться от всех перечисленных сейчас предположений, то в уравнении переноса в частотах линии наряду с радиативными процессами, обусловленными переходами $i \rightleftharpoons k$, следует учесть потери на фотоионизацию атомов того элемента, который является основным источником поглощения в непрерывном спектре, а также излучение при фото-рекомбинациях, обусловленное этим элементом, и тормозное поглощение и излучение. Уравнение переноса в частотах линии принимает тогда вид

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_r I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = - [\sigma_{ik}(\nu) + \sigma_{ik}^c] I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) + \sigma_{ik}(\nu) S_{ik}(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ik}^c, \quad (6.27)$$

где σ_{ik}^c и ε_{ik}^c — коэффициенты поглощения и излучения в непрерывном спектре в частоте ν_{ik} . В пределах линии их можно считать не зависящими от частоты.

Несколько слов о локальном термодинамическом равновесии. При ЛТР система уравнений стационарности и пе-

переноса излучения радикально упрощается. Решение уравнений стационарности для дискретных уровней и континуума дается формулами Больцмана и Саха. Поскольку населенности уровней известны, уравнения переноса оказываются дифференциальными уравнениями первого порядка. Рассмотрим немного подробнее ту предельную форму, которую они принимают в этом случае.

Так как населенности уровней бальцмановские, объемный коэффициент поглощения в линии, определяемый формулой (6.10), равен

$$\sigma_{ik}(\nu) = k_{ik}(\nu) n_i (1 - e^{-\frac{h\nu_{ik}}{kT_e}}). \quad (6.28)$$

Функция источников (6.12) переходит в функцию Планка с температурой, равной локальной кинетической температуре:

$$S_{ik}(\mathbf{r}) = B_{\nu_{ik}}(T_e(\mathbf{r})), \quad (6.29)$$

так что уравнение переноса (6.13) превращается в

$$\omega \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) = -\sigma_{ik}(\nu) \{I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) - B_{\nu_{ik}}(T_e(\mathbf{r}))\}. \quad (6.30)$$

Аналогичным образом, коэффициент поглощения в непрерывном спектре (6.22) принимает вид

$$\sigma^c(\nu) = n_e n^+ \sum_{j=1}^c k_{jc}(\nu) \frac{g_j}{g_c} e^{\frac{h\nu_{jc}}{kT_e}} (1 - e^{-\frac{h\nu}{kT_e}}), \quad (6.31)$$

а функция источников оказывается равной функции Планка:

$$S_{\nu}^c(\mathbf{r}) = B_{\nu}(T_e(\mathbf{r})), \quad (6.32)$$

так что вместо (6.25) имеем

$$\omega \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) = -\sigma^c(\nu) \{I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) - B_{\nu}(T_e(\mathbf{r}))\}. \quad (6.33)$$

Как следует из (6.30) и (6.33), при известной зависимости температуры от координат расчет интенсивности излучения сводится к простым в принципе, но подчас громоздким квадратурам. Так как при ЛТР температура может меняться от точки к точке, коэффициенты поглощения, вообще говоря, меняются при переходе от одного места к другому.

До сих пор кинетическая температура среды всегда считалась заданной. В действительности же она должна нахо-

даться из уравнения энергетического равновесия, которое следует решать совместно с уравнениями стационарности и переноса излучения. Если поглощение и излучение радиации являются единственными механизмами нагрева и охлаждения газа и его состояние не меняется с течением времени, то говорят, что такой газ находится в состоянии *лучистого равновесия*. Уравнение, выражающее условие энергетического баланса, называется в этом случае уравнением лучистого равновесия. Для однокомпонентного газа оно имеет, очевидно, вид

$$\int_0^{\infty} [\sigma^c(\nu) + \sum_{\substack{i, k \\ (i < k)}} \sigma_{ik}(\nu)] J_{\nu}(\mathbf{r}) d\nu = \int_0^{\infty} [\varepsilon^c(\nu) + \sum_{\substack{i, k \\ (i < k)}} \varepsilon_{ik}(\nu)] d\nu, \quad (6.34)$$

и, в частности, при ЛТР

$$\int_0^{\infty} [\sigma^c(\nu) + \sum_{\substack{i, k \\ (i < k)}} \sigma_{ik}(\nu)] \{J_{\nu}(\mathbf{r}) - B_{\nu}(T_e(\mathbf{r}))\} d\nu = 0. \quad (6.35)$$

Даже при ЛТР совместное решение уравнений переноса и лучистого равновесия является довольно трудным. Приходится вводить разного рода приближения. Это есть центральная проблема «классической» теории непрерывных спектров звезд, исходящей из априорного предположения о существовании ЛТР в звездных атмосферах (см. Г. Мюнч [1]).

В дальнейшем мы всегда будем считать температуру известной. Однако если плотность газа мала и ЛТР нет, то и в этом случае положение оказывается очень сложным. В уравнениях стационарности есть члены, зависящие от интенсивности излучения в данной точке среды. С другой стороны, интенсивность излучения, которая должна находиться из решения уравнения переноса, в свою очередь зависит от населенностей уровней. Поэтому, если радиативные процессы играют существенную роль в создании населенностей уровней, расчет стационарного состояния сводится к совместному решению уравнений стационарности и переноса излучения. Это как раз и есть тот вопрос, которому, по существу, посвящена эта книга.

ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Система уравнений стационарности и переноса излучения нелинейна. Ее решение сопряжено с огромными трудностями, полностью преодолеть которые до сих пор не удалось. Приходится ограничиваться довольно грубыми моделями. В таком положении естественно по возможности подробно исследовать все те частные случаи, когда можно получить точные решения уравнений в замкнутой форме. Таких случаев не так уж много. Все они относятся к сильно идеализированным ситуациям, подчас довольно далеким от тех конкретных задач, которые интересуют астрофизика, пытающегося интерпретировать наблюдения. Тем не менее, такие модельные задачи представляют большой интерес.

Во-первых, на примере простейших моделей можно выявить специфические черты проблемы в целом. Исследование модельных задач позволяет составить ясное представление о физической стороне дела и дает ту свободу ориентировки, без которой в более сложных случаях за деталями трудно было бы уловить главное. Во-вторых, модельные задачи, допускающие решение в явном виде, могут служить в качестве своего рода стандартов при оценке точности и границ применимости различных приближенных и численных методов. Наконец, в-третьих, эти задачи сами по себе все же представляют, как правило, известный практический интерес. Исследованию таких стандартных задач и посвящена большая часть этой книги.

Вполне естественно, что точное решение много легче получить в тех случаях, когда систему уравнений стационарности и переноса излучения можно линеаризовать. Имея это в виду, мы рассматриваем в настоящей главе линеаризованную форму этих уравнений.

Линейная теория переноса излучения в частотах спектральных линий является некоторым обобщением ставшей к настоящему времени уже классической теории монохроматического рассеяния. Поэтому изложение начинается с краткого обзора основных понятий феноменологической теории переноса излучения без изменения частоты. Затем подробно обсуждаются упрощения, возникающие в системе уравнений стационарности и переноса излучения в линейном случае. После этого показывается, что в некоторых случаях существенно нелинейные задачи можно свести к линейным. Наконец, в конце главы исследуются свойства ряда специальных функций, играющих важную роль при изучении стационарных состояний газа, находящегося в поле собственного излучения.

§ 2.1. Монохроматическое рассеяние

В классической теории многократного рассеяния света делаются два основных предположения. Во-первых, считается, что воздействием излучения на среду, в которой оно распространяется, можно пренебречь. Тем самым обеспечивается линейность уравнения переноса. Во-вторых, предполагается, что взаимодействие излучения и вещества не приводит к изменению частоты квантов. Это предположение определенно не выполняется в отношении многократного рассеяния в частотах линий (см. § 1.5). Однако существует множество задач, где оно является очень хорошим приближением к действительности. В качестве примера можно указать на проблемы многократного рассеяния света на частицах, размеры которых сравнимы с длиной волны излучения. Условие применимости предположения о неизменности частоты состоит в том, что в спектральном интервале, охватывающем возможные частоты кванта как до, так и после рассеяния, оптические свойства среды меняются мало. В этом случае их зависимостью от частоты можно пренебречь. Очевидно, что частота кванта не играет тогда никакой роли. Поэтому можно принять, что частоты всех диффундирующих квантов совпадают, т. е. говорить о рассеянии монохроматического излучения без изменения частоты.

Теория многократного рассеяния света чрезвычайно близка к теории переноса нейтронов. Когда изменения энер-

гии нейтронов при рассеянии на ядрах малы (тепловые нейтроны), зависимость сечения рассеяния от энергии можно не принимать во внимание. В теории переноса нейтронов говорят в этом случае о приближении постоянных сечений, или однокрупном приближении. Задачи о переносе нейтронов в этом приближении математически ничем не отличаются от проблем монохроматического рассеяния света. Поэтому, хотя мы будем говорить о квантах света и пользоваться терминологией, принятой в теории рассеяния излучения, все результаты этого параграфа (а также гл. III) в равной мере применимы и к нейтронам.

Оптические свойства элемента объема среды описываются в теории монохроматического рассеяния тремя величинами — объемным коэффициентом поглощения σ , вероятностью выживания кванта при рассеянии λ и индикатрисой рассеяния χ (γ). Эти величины определяются следующим образом. Пусть на единичный объем в единичном телесном угле около некоторого направления падает излучение интенсивности I (индекс ν в теории монохроматического рассеяния можно всюду опускать). Тогда σI есть лучистая энергия, испытывающая взаимодействие с веществом за единицу времени. Это взаимодействие может быть двух типов. Часть энергии претерпевает истинное поглощение, т. е. переходит в другие формы энергии (например, в тепло). Обозначим эту энергию через $\sigma_a I$. Величину σ_a называют объемным коэффициентом истинного поглощения. Другая часть излучения первоначального пучка в результате взаимодействия с веществом лишь изменяет направление своего распространения, сохраняя первоначальную частоту. Обозначим эту, как говорят, рассеиваемую энергию через $\sigma_s I$. Величина σ_s называется объемным коэффициентом рассеяния. Очевидно, что

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_a. \quad (1.1)$$

Отношение

$$\lambda = \frac{\sigma_s}{\sigma} = \frac{\sigma_s}{\sigma_s + \sigma_a} \quad (1.2)$$

есть вероятность выживания кванта при рассеянии, или альbedo однократного рассеяния (другие часто встречающиеся в литературе обозначения той же величины: $\tilde{\omega}_0$,

$\omega_0, 1 - \epsilon$). Если $\lambda = 1$, то говорят, что в среде происходит чистое, или консервативное, рассеяние. Что касается индикатрисы рассеяния $\chi(\gamma)$ (обозначаемой также часто через $x(\gamma)$, $P(\gamma)$ и т. д.), то, как уже говорилось в § 1.5, она представляет собой плотность вероятности рассеяния на угол γ с первоначальным направлением. Ее нормировка:

$$\frac{1}{4\pi} \int \chi(\gamma) d\omega = 1. \quad (1.3)$$

Среда может не только поглощать, но и испускать лучистую энергию. Энергия, излучаемая единицей объема за единицу времени в единичном телесном угле, называется коэффициентом излучения ϵ . При монохроматическом рассеянии коэффициент излучения ϵ , как и интенсивность I , не обязательно рассчитывать на единичный интервал частот. Их можно относить к любому спектральному интервалу, в пределах которого оптические свойства среды не зависят от частоты.

Коэффициент излучения $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$ является, вообще говоря, функцией точки и направления и складывается из двух частей. Во-первых, объем рассеивает часть падающего на него со всех сторон излучения. Вклад в коэффициент излучения $\epsilon(\mathbf{r}, \omega)$, обусловленный рассеянием, равен, очевидно,

$$\frac{\lambda\sigma}{4\pi} \int I(\mathbf{r}, \omega') \chi(\gamma) d\omega',$$

где γ — угол между направлениями ω и ω' . Во-вторых, в объеме могут быть внутренние источники излучения, мощность которых не зависит от интенсивности падающего на него излучения и считается заданной (первичные, или истинные, источники). Обозначая их вклад в коэффициент излучения через $\epsilon^*(\mathbf{r}, \omega)$, имеем

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\lambda\sigma}{4\pi} \int I(\mathbf{r}, \omega') \chi(\gamma) d\omega' + \epsilon^*(\mathbf{r}, \omega). \quad (1.4)$$

Отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения есть так называемая функция источников:

$$S(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\epsilon(\mathbf{r}, \omega)}{\sigma(\mathbf{r})}. \quad (1.5)$$

Если индикатриса рассеяния сферическая, т. е. $\chi(\gamma) = 1$, а истинные источники изотропны, так что $\epsilon^* = \epsilon^*(\mathbf{r})$, то

функция источников не зависит от направления и равна

$$S(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi} \int I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + S^*(\mathbf{r}), \quad (1.6)$$

где S^* — первичная функция источников:

$$S^* = \frac{\varepsilon^*}{\sigma}. \quad (1.7)$$

Уравнение переноса излучения получается, как всегда, из рассмотрения изменения интенсивности вдоль луча. При монохроматическом рассеянии оно имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_r I = -\sigma I + \varepsilon, \quad (1.8)$$

или

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_r I = -\sigma(I - S). \quad (1.9)$$

По форме это уравнение не отличается от (1.6.13) и (1.6.25). Однако в (1.9) коэффициент поглощения σ считается заданным, тогда как величины $\sigma_{ih}(\mathbf{v})$ и $\sigma^c(\mathbf{v})$ зависят от населенностей уровней, которые, вообще говоря, заранее неизвестны.

При сферической индикатрисе рассеяния и изотропии первичных источников имеем из (1.9), учитывая (1.6),

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_r I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) &= \\ &= -\sigma(\mathbf{r}) [I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) - \frac{\lambda}{4\pi} \int I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' - S^*(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

В дальнейшем, чтобы избежать излишних усложнений, мы будем иметь дело исключительно с уравнением (1.10). Граничное условие, при котором должно решаться это уравнение, имеет вид

$$I(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\omega}) = I^0(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\omega}) \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (1.11)$$

где \mathbf{r}_0 — произвольная точка граничной поверхности, \mathbf{n} — орт внешней нормали к границе в точке \mathbf{r}_0 . Однако, не ограничивая общности, это условие можно заменить на

$$I(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad \text{при} \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} < 0. \quad (1.12)$$

Действительно, если $I^0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ — интенсивность излучения в точке \mathbf{r} в направлении $\boldsymbol{\omega}$, пришедшего непосредственно от внешних источников (и ослабленного средой), то можно

ПОЛОЖИТЬ

$$S^*(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon^*}{\sigma} + \frac{\lambda}{4\pi} \int I^0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' \quad (1.13)$$

и решать уравнение переноса (1.10) при граничном условии (1.12). При этом для получения полной интенсивности излучения в данной точке к $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$ надо добавить $I^0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega})$. Величины I^0 и I называют соответственно интенсивностью прямого и диффузного излучения.

В случае, когда коэффициент поглощения не зависит от координат ($\sigma = \text{const}$), уравнение переноса (1.10) вместе с граничным условием (1.12) эквивалентно следующему интегральному уравнению для функции источников:

$$S(\mathbf{r}) = \sigma \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{\exp(-\sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} S(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + S^*(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

где интегрирование распространяется на весь объем, занимаемый средой. Уравнение (1.14) называется уравнением Пайерлса (его вывод можно найти, например, в книге Б. Дэвисона [1]; см. также § 2.4). Если функция источников найдена, то, как видно из (1.9), решение уравнения переноса сводится к квадратурам.

Когда среда и распределение первичных источников излучения обладают той или иной симметрией, уравнения (1.10) и (1.14) упрощаются. Однако мы немного отложим рассмотрение этих упрощений. Это позволит особенно ясно увидеть аналогии, существующие между задачами о монохроматическом рассеянии и проблемами линейной теории переноса излучения в спектральных линиях.

§ 2.2. Уравнение переноса в частотах линий

Простейшая задача о расчете стационарного состояния газа, находящегося в поле собственного излучения, состоит в следующем. Изотермический газ, состоящий из атомов, имеющих только два дискретных уровня, занимает некоторый заданный объем. Плотность газа и электронная концентрация являются известными функциями координат. Газ не освещается излучением извне и имеет достаточно низкую температуру, так что средняя энергия теплового движения частиц много меньше энергии возбуждения верхнего

уровня: $kT \ll h\nu_{12}$. Требуется найти степень возбуждения и рассчитать поле излучения в линии.

Очевидно, что при сделанных предположениях населенность возбужденного уровня n_2 во всех точках будет мала по сравнению с концентрацией атомов в основном состоянии n_1 . Действительно, если изотермическая среда бесконечна, она находится в состоянии термодинамического равновесия. Тогда населенности уровней следуют формуле Больцмана. Поскольку $h\nu_{12} \gg kT$, даже в бесконечной среде степень возбуждения оказывается очень низкой. Если же газ занимает ограниченный объем, то она будет, разумеется, еще ниже. Поэтому полная концентрация атомов $n = n_1 + n_2$ с высокой степенью точности равна населенности нижнего уровня: $n = n_1$. Далее, в бесконечной среде интенсивность излучения в линии была бы планковской, и множитель $1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu$

с точностью до членов порядка $e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}}$ был бы равен единице. В ограниченной среде эта величина еще ближе к единице, так как часть излучения выходит из среды, и интенсивность излучения меньше равновесной. Значит, процессами вынужденного излучения можно пренебречь. Поэтому уравнения стационарности и переноса излучения имеют вид

$$n_2 (A_{21} + n_e C_{21}) = n_1 (B_{12} \bar{J}_{12} + n_e C_{12}), \quad (2.1)$$

$$\omega \operatorname{grad}_r I_\nu(\mathbf{r}, \omega) = -k_{12}(\nu) n_1 I_\nu(\mathbf{r}, \omega) + \frac{2h\nu_{12}^3 g_1}{c^2 g_2} k_{12}(\nu) n_2. \quad (2.2)$$

Пользуясь соотношениями между эйнштейновскими коэффициентами, выражая C_{12} через C_{21} и вводя явное выражение для \bar{J}_{12} , даваемое формулой (1.3.25), имеем вместо (2.1)

$$n_2 (A_{21} + n_e C_{21}) = n_1 \left[\frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \frac{g_2}{g_1} A_{21} \frac{\int_0^\infty k_{12}(\nu') J_\nu d\nu'}{\int_0^\infty k_{12}(\nu') d\nu'} + \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}} n_e C_{21} \right]. \quad (2.3)$$

Положим

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}}, \quad (2.4)$$

$$S = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \frac{g_1 n_2}{g_2 n_1}. \quad (2.5)$$

Величина λ есть вероятность того, что вслед за возбуждением атома совершится радиативный переход вниз. Иначе говоря, λ есть вероятность выживания кванта при рассеянии. Величина S представляет собой функцию источников при пренебрежении вынужденным излучением.

С учетом (2.4) и (2.5) условие стационарности (2.3) принимает вид

$$S = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\int_0^\infty \sigma_{12}(\nu') d\nu' \int I_{\nu'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'}{\int_0^\infty \sigma_{12}(\nu') d\nu'} + S^*, \quad (2.6)$$

где

$$S^* = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}} (1 - \lambda) \quad (2.7)$$

и $\sigma_{12}(\nu)$ — объемный коэффициент поглощения в линии:

$$\sigma_{12}(\nu) = k_{12}(\nu) n_1. \quad (2.8)$$

Уравнение переноса переписывается в форме

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = -\sigma_{12}(\nu) [I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) - S(\mathbf{r})]. \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6) в (2.9), приходим окончательно к следующему линейному интегро-дифференциальному уравнению переноса:

$$\boldsymbol{\omega} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) = -\sigma_{12}(\nu) \times \\ \times \left[I_{\nu}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}) - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\int_0^\infty \sigma_{12}(\nu') d\nu' \int I_{\nu'}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'}{\int_0^\infty \sigma_{12}(\nu') d\nu'} - S^*(\mathbf{r}) \right]. \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что в рассматриваемом случае коэффициент поглощения в линии известен, так как n_1 можно принимать равным полной концентрации атомов n , которая считается заданной. Уравнение переноса (2.10) должно решаться при граничном условии

$$I(\mathbf{r}_0, \omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega \cdot \mathbf{n} < 0, \quad (2.11)$$

выражающем отсутствие излучения, падающего на среду извне. Если интенсивность излучения найдена, задача решена, так как уравнение стационарности позволяет тогда сразу же получить и населенность верхнего уровня.

Для линейризации уравнения переноса предположение о том, что атом имеет только два уровня, не является обязательным. Если можно пренебречь вынужденным излучением и считать населенность нижнего уровня заданной, линейность уравнения переноса будет обеспечена. В самом деле, пусть задача состоит в расчете поля излучения в линии, возникающей при переходах между i -м и k -м уровнями. При пренебрежении вынужденным излучением уравнение переноса излучения в частотах линии (1.6.9) принимает вид

$$\omega \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) = -k_{ik}(\nu) n_i I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{2h\nu_{ik}^3 g_i}{c^2 g_k} k_{ik}(\nu) n_k, \quad (2.12)$$

а условие стационарности может быть записано в форме

$$n_k(A_{ki} + D_k) = n_i B_{ik} \bar{J}_{ik} + E_k, \quad (2.13)$$

где $n_k D_k$ — число переходов с k -го уровня за единицу времени всеми возможными способами, кроме радиативных переходов $k \rightarrow i$, а E_k — число переходов на k -й уровень за счет всех процессов, за исключением фотовозбуждений $i \rightarrow k$. Повторяя дословно рассуждения, использовавшиеся при выводе (2.10), из (2.12) и (2.13) получаем следующее линейное уравнение переноса:

$$\omega \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) = -\sigma(\nu) \times \left[I_{\nu}(\mathbf{r}, \omega) - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\int_0^{\infty} \sigma(\nu') d\nu' \int I_{\nu'}(\mathbf{r}, \omega') d\omega'}{\int_0^{\infty} \sigma(\nu') d\nu'} - S^*(\mathbf{r}) \right], \quad (2.14)$$

где

$$\lambda = \frac{A_{ki}}{A_{ki} + D_k}, \quad (2.15)$$

$$S^* = \frac{2h\nu_{ik}^3 g_i}{c^2 g_k n_i (A_{ki} + D_k)} E_k. \quad (2.16)$$

Так как населенность нижнего уровня считается заданной, коэффициент поглощения $\sigma(\nu) = k_{ik}(\nu) n_i$ известен. Сложнее обстоит дело с величинами λ и S^* . Через посредство D_k и E_k они зависят, вообще говоря, от населенностей всех уровней, кроме k -го, а также от полей излучения во всех линиях и континуумах, кроме поля излучения в линии $i \rightleftharpoons k$. В некоторых случаях, однако, и эти величины можно считать известными (см., например, [2]).

Повсюду в этой книге мы будем считать, что зависимость коэффициента поглощения в линии от частоты во всех точках среды одна и та же. Тогда можно положить

$$\sigma(\nu) = \sigma(\nu_0) \alpha(x) = n_i k_{ik}(\nu_0) \alpha(x), \quad (2.17)$$

причем профиль коэффициента поглощения $\alpha(x)$ не зависит от координат. Если рассматривается линия, уширение которой обусловлено эффектом Доплера, то это предположение эквивалентно тому, что среда считается изотермичной (так как с изменением температуры изменяется доплеровская ширина, в единицах которой измеряется безразмерная частота x). Если же уширение линии целиком обусловлено столкновениями (лоренцовский профиль), то должна быть постоянной и плотность. Если существенны оба механизма уширения линии одновременно (фойгтовский профиль), то предположение о независимости коэффициента поглощения от координат также означает, что как температура, так и концентрация частиц, вызывающих эффекты давления, должны быть всюду в среде одни и те же.

Подставляя (2.17) в (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \omega \operatorname{grad}_r I(\mathbf{r}, \omega, x) = & -\sigma(\nu_0) \alpha(x) I(\mathbf{r}, \omega, x) + \\ & + \sigma(\nu_0) \frac{\lambda}{i\pi} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\lambda') dx' \int I(\mathbf{r}, \omega', x') d\omega' + \\ & + \sigma(\nu_0) \alpha(x) S^*(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

или

$$\omega \operatorname{grad}_r I(\mathbf{r}, \omega, x) = -\sigma(v_0) \alpha(x) [I(\mathbf{r}, \omega, x) - S(\mathbf{r})], \quad (2.19)$$

где $S(\mathbf{r})$ — функция источников в линии

$$S(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int I(\mathbf{r}, \omega', x') d\omega' + S^*(\mathbf{r}), \quad (2.20)$$

а A — нормировочная постоянная:

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1. \quad (2.21)$$

Хотя в качестве переменной, описывающей частоту, мы используем теперь x , *нормировка интенсивности осталась прежней*, так что $I(\mathbf{r}, \omega, x) d\sigma d\omega dv$ есть энергия, протекающая за 1 сек через перпендикулярную к направлению луча площадку $d\sigma$ в пределах телесного угла $d\omega$ в интервале частот $(v, v + dv)$, где $v = v_0 + x\Delta v$.

В тех случаях, когда необходимо учитывать поглощение в непрерывном спектре, уравнение переноса излучения в частотах линии принимает вид [см. формулу (1.6.27)]

$$\omega \operatorname{grad}_r I(\mathbf{r}, \omega, x) = -\sigma(v_0) \alpha(x) [I(\mathbf{r}, \omega, x) - S(\mathbf{r})] - \sigma^c [I(\mathbf{r}, \omega, x) - S^c(\mathbf{r})], \quad (2.22)$$

где $S^c(\mathbf{r})$ — функция источников в непрерывном спектре:

$$S^c = \frac{\varepsilon^c}{\sigma^c}. \quad (2.23)$$

Заметим, что функции S^* и S^c описывают распределение «истинных» источников излучения в данной линии. Таким образом, как уже говорилось в § 1.5, всякий раз, когда радиативный переход $k \rightarrow i$ происходит не непосредственно вслед за фотовозбуждением $i \rightarrow k$ собственным излучением среды в линии, считается, что квант пришел от первичных источников.

Уравнение переноса (1.10), описывающее изотропное монохроматическое рассеяние, является частным случаем уравнения (2.18). Действительно, будем считать, что

профиль коэффициента поглощения прямоугольный, так что

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \quad (2.24)$$

Из (2.18) тогда следует, что в пределах линии (в данном случае при $|x| \leq 1$) интенсивность излучения не зависит от частоты, а само уравнение (2.18) превращается в (1.10).

§ 2.3. Случаи плоской и сферической геометрии

Если среда обладает симметрией того или иного рода, уравнение переноса упрощается. Рассмотрим случаи плоской и сферической геометрии.

Плоская геометрия. Когда коэффициент поглощения в центре линии $\sigma_0(\nu_0)$, коэффициент непрерывного поглощения σ^c , вероятность выживания кванта при рассеянии λ и функции S^* и S^c , описывающие распределение источников, зависят только от одной пространственной координаты (например, z), система обладает плоской симметрией. Интенсивность излучения I является тогда функцией z , частоты и угла между положительным направлением оси z и направлением распространения излучения. Этот угол, который в предыдущей главе (в §1.1 и 1.6) обозначался через ϑ_3 , будем впредь обозначать просто через ϑ (рис. 2). Вместо (2.22) имеем тогда, учитывая (2.20),

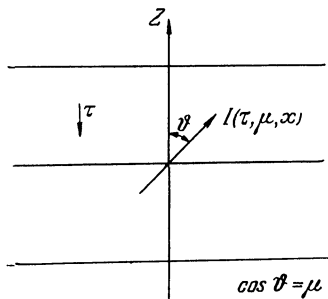


Рис. 2. Обозначения, используемые в уравнении переноса при плоской геометрии.

Вместо (2.22) имеем тогда, учитывая (2.20),

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{dI(z, \vartheta, x)}{dz} = & - [\sigma(\nu_0) \alpha(x) + \sigma^c] I(z, \vartheta, x) + \\ & + \sigma(\nu_0) \frac{\lambda}{4\pi} A\alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int I(z, \vartheta', x') d\omega' + \\ & + \sigma(\nu_0) \alpha(x) S^*(z) + \sigma^c S^c(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Положим

$$\tau = \int_z^{z_0} \sigma(v_0) dz' = k_{ik}(v_0) \int_z^{z_0} n_i(z') dz' \quad (3.2)$$

и назовем эту величину *оптическим расстоянием* в центре линии от плоскости $z = z_0$. Величина τ представляет собой расстояние от плоскости $z = z_0$, измеренное в длинах свободного пробега кванта, имеющего центральную частоту линии (при $\sigma^c = 0$). Полагая $\mu = \cos\vartheta$, имеем окончательно

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = & [\alpha(x) + \beta] I(\tau, \mu, x) - \\ & - \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - \\ & - \alpha(x) S^*(\tau) - \beta S^c(\tau), \end{aligned} \quad (3.3)$$

или

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = & \alpha(x) [I(\tau, \mu, x) - S(\tau)] + \\ & + \beta [I(\tau, \mu, x) - S^c(\tau)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + S^*(\tau) \quad (3.5)$$

и β — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии:

$$\beta = \frac{\sigma^c}{\sigma(v_0)}. \quad (3.6)$$

Получим теперь граничные условия, которым должна удовлетворять интенсивность излучения. Если интеграл

$$\tau_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(v_0) dz' \quad (3.7)$$

сходится, то говорят, что среда имеет конечную *оптическую толщину* τ_0 . Чтобы не иметь дела с отрицательными оптическими расстояниями, систему отсчета τ удобно

определить условием

$$\tau = \int_z^{\infty} \sigma(\nu_0) dz', \quad (3.8)$$

т. е. в формуле (3.2) выбрать $z_0 = \infty$. Величина τ , называемая в этом случае *оптической глубиной*, изменяется от 0 до τ_0 , а граничные условия, выражающие отсутствие падающего на среду излучения, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} I(0, \mu, x) &= 0 & \text{при} & \mu < 0, \\ I(\tau_0, \mu, x) &= 0 & \text{при} & \mu > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Если среда освещается внешним излучением, уравнение переноса можно по-прежнему решать при граничных условиях (3.9), переопределив соответствующим образом функции, описывающие распределение первичных источников и отделив поля прямого и диффузного излучения (см. § 2.1).

Считая функцию источников $S(\tau)$ известной, решение уравнения (3.4) при граничных условиях (3.9) можно написать сразу же:

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu, x) &= - \int_0^{\tau} [\alpha(x) S(\tau') + \beta(\tau') S^c(\tau')] \exp \left\{ - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\mu} [\alpha(x)(\tau' - \tau) + \int_{\tau}^{\tau'} \beta(t) dt] \right\} \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu < 0), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu, x) &= \int_{\tau}^{\tau_0} [\alpha(x) S(\tau') + \beta(\tau') S^c(\tau')] \times \\ &\times \exp \left\{ - \frac{1}{\mu} [\alpha(x)(\tau' - \tau) + \int_{\tau}^{\tau'} \beta(t) dt] \right\} \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu > 0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Эти формулы дают лишь формальное решение уравнения переноса, так как функция источников $S(\tau)$, как видно из (3.5), сама выражается через интенсивность.

Если интеграл (3.7) расходится, а (3.8) сходится при любом $z \neq -\infty$, то среду называют полубесконечной, или слоем бесконечно большой оптической толщины. Систему отсчета τ и в этом случае удобно определять формулой (3.8). Первое из граничных условий (3.9) остается при этом в силе,

а второе заменяется требованием, чтобы при $\tau_0 = \infty$ интеграл (3.11) сходиллся для всех x . Наконец, если при любом z интегралы

$$\int_z^{\infty} \sigma(v_0) dz' \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^z \sigma(v_0) dz'$$

расходятся одновременно, то среду можно считать оптически бесконечной.

подавляющее большинство работ по теории переноса излучения в спектральных линиях посвящено решению уравнения (3.3) при тех или иных дополнительных предположениях. Чаще всего принимается, что величины λ и β не зависят от оптической глубины. Кроме того, так как обычно $\beta \ll 1$, часто полагают $\beta = 0$. Тогда уравнение переноса принимает вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} &= \alpha(x) I(\tau, \mu, x) - \frac{\lambda}{2} A\alpha(x) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - \alpha(x) S^*(\tau). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Его формальное решение записывается так:

$$I(\tau, \mu, x) = - \int_0^{\tau} S(\tau') e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} (\tau' - \tau)} \alpha(x) \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu < 0), \quad (3.13)$$

$$I(\tau, \mu, x) = \int_{\tau}^{\tau_0} S(\tau') e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} (\tau' - \tau)} \alpha(x) \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu > 0). \quad (3.14)$$

В частности, интенсивность излучения, выходящего через границу $\tau = 0$, равна

$$I(0, \mu, x) = \int_0^{\tau_0} S(\tau') e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau'} \alpha(x) \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu > 0). \quad (3.15)$$

Физический смысл этой формулы становится совершенно очевидным, если для $S(\tau)$ подставить выражение (2.5) и от интегрирования по τ' перейти к интегрированию по

геометрической глубине z' . После небольших преобразований получим

$$I(0, \mu, x) = \frac{h\nu_{ik}}{4\pi} \frac{A\alpha(x)}{\Delta\nu} \int_{-\infty}^{\infty} A_{ki}n_k(z') e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau'(z')} \frac{dz'}{\mu}. \quad (3.16)$$

Уравнение переноса, описывающее изотропное монохроматическое рассеяние в средах плоской геометрии, как это следует из (1.10), имеет вид

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' - S^*(\tau), \quad (3.17)$$

где τ — оптическая глубина, определяемая соотношением

$$\tau = \int_z^{\infty} \sigma(z') dz'. \quad (3.18)$$

Для слоя оптической толщины τ_0 , не освещаемого извне формальное решение (3.17) имеет вид

$$I(\tau, \mu) = - \int_0^{\tau} S(\tau') e^{-\frac{\tau' - \tau}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu < 0), \quad (3.19)$$

$$I(\tau, \mu) = \int_{\tau}^{\tau_0} S(\tau') e^{-\frac{\tau' - \tau}{\mu}} \frac{d\tau'}{\mu} \quad (\mu > 0). \quad (3.20)$$

Многие методы, развитые для решения уравнения (3.17), можно с успехом применить и к уравнению (3.12). Поэтому следующая глава целиком посвящена исследованию проблем монохроматического рассеяния. В частности, в ней обсуждается и решение уравнения (3.17). В последующих главах та же методика используется для решения уравнения переноса в частотах линий. В главах IV—VI изучается уравнение (3.12). В гл. IV принимается, что среда бесконечна, в гл. V и VI изучается полубесконечная среда. В гл. VII условие $\beta = 0$ заменяется более слабым требованием $\beta = \text{const}$. Наконец, в гл. VIII рассматривается случай конечных τ_0 , причем особое внимание уделяется исследованию поля излучения в оптически толстом слое ($\tau_0 \gg 1$).

Сферическая геометрия. Пусть оптические свойства среды, определяемые величинами λ , $\sigma(v_0)$ и σ^c , и мощность источников зависят только от расстояния r от некоторой точки, которую мы примем за начало координат. В силу симметрии интенсивность должна зависеть только от частоты, от r и от ϑ , где ϑ — угол между радиусом-вектором точки и направлением излучения. Имеем в этом случае

$$\omega \operatorname{grad}_r I = \cos \vartheta \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial I}{\partial \vartheta}. \quad (3.21)$$

Обозначая $\mu = \cos \vartheta$, из (2.22) и (3.21) находим

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(r, \mu, x)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(r, \mu, x)}{\partial \mu} = & - [\sigma(v_0) \alpha(x) + \\ & + \sigma^c] I(r, \mu, x) + \sigma(v_0) \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(r, \mu', x') d\mu' + \sigma(v_0) \alpha(x) S^*(r) + \sigma^c S^c(r). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Если $\sigma(v_0)$ и σ^c не зависят от r (однородная среда), то, вводя оптическое расстояние в центре линии

$$\tau = \sigma(v_0)r, \quad (3.23)$$

получаем

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \mu} = & - [\alpha(x) + \beta] I(\tau, \mu, x) + \\ & + \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + \\ & + \alpha(x) S^*(\tau) + \beta S^c(\tau). \end{aligned} \quad (3.24)$$

При тех же предположениях о симметрии при монохроматическом рассеянии и $\beta = 0$ уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \mu} = \\ = - I(\tau, \mu) + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + S^*(\tau), \end{aligned} \quad (3.25)$$

Уравнение (3.24) для бесконечной среды с $\lambda = \text{const}$ и $\beta = 0$ изучается в гл. IV. В гл. VII результаты обобщаются на случай $\beta = \text{const} \neq 0$.

В заключение — замечание о способе выбора оптических расстояний. Мы пользуемся оптическими расстояниями τ , измеренными в *центре линии*. Иногда употребляют оптическое расстояние $\bar{\tau}$, связанное с τ соотношением

$$\tau = A\bar{\tau}. \quad (3.26)$$

Величина $\bar{\tau}$ обладает тем достоинством, что не зависит от формы профиля. В самом деле, при пренебрежении вынужденным излучением $\tau = k_{ik}(\nu_0) N_i$, где N_i — число атомов на нижнем уровне на луче зрения, $k_{ik}(\nu_0)$ — коэффициент поглощения в центре линии в расчете на один атом. Воспользуемся известным соотношением (см. § 1.3)

$$\int_0^{\infty} k_{ik}(\nu) d\nu = \frac{h\nu_{ik}}{4\pi} B_{ik}.$$

Так как $\alpha(x) = k_{ik}(\nu)/k_{ik}(\nu_0)$, можем написать

$$k_{ik}(\nu_0) \int_0^{\infty} \alpha(x) d\nu = \frac{h\nu_{ik}}{4\pi} B_{ik},$$

откуда

$$k_{ik}(\nu_0) = A \frac{h\nu_{ik}}{4\pi\Delta\nu} B_{ik},$$

и поэтому

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{A} = \frac{h\nu_{ik}}{4\pi\Delta\nu} B_{ik} N_i. \quad (3.27)$$

Таким образом, $\bar{\tau}$, в отличие от τ , зависит только от числа поглощающих атомов и атомных характеристик (а также от характерной ширины линии $\Delta\nu$), но не от формы профиля. Использование $\bar{\tau}$ вместо τ необходимо в тех случаях, когда нужно сравнивать между собой результаты, полученные для различных коэффициентов поглощения (скажем, для фойгтовских профилей с различными значениями a).

§ 2.4. Интегральные уравнения, выражающие условие стационарности

В линейном случае решение интегро-дифференциального уравнения переноса в частотах линии, как уже отмечалось, эквивалентно определению населенности верхнего уровня n_k в функции координат. Действительно, зная интенсивность излучения, по формуле (2.20) легко найти функцию источников $S(\mathbf{r})$ или, что то же самое, величину $n_k(\mathbf{r})$. Теперь мы покажем, что для нахождения n_k может служить также интегральное уравнение, непосредственно выражающее условие стационарности. Решение этого уравнения дает возможность найти функцию источников. После этого легко рассчитать и поле излучения в среде.

Будем исходить из уравнения баланса (2.13), которое для удобства выпишем еще раз:

$$n_k(A_{ki} + D_k) = n_i B_{ik} \bar{J}_{ik} + E_k. \quad (4.1)$$

Обозначим через n_k^* населенность k -го уровня при отсутствии фотовозбуждений $i \rightarrow k$. Она определяется условием стационарности

$$n_k^*(A_{ki} + D_k) = E_k. \quad (4.2)$$

Заметим, что из (4.2) и (2.16) следует, что

$$S^* = \frac{2h\nu_{ik}^3}{c^2} \frac{g_i}{g_k} \frac{n_k^*}{n_i}. \quad (4.3)$$

Этой формулой определяется физический смысл функции S^* . Из (4.1) и (4.2) имеем, учитывая обозначение (2.15),

$$n_k(\mathbf{r}) = \lambda n_i(\mathbf{r}) \frac{B_{ik}}{A_{ki}} \bar{J}_{ik}(\mathbf{r}) + n_k^*(\mathbf{r}). \quad (4.4)$$

Член, описывающий фотовозбуждения $i \rightarrow k$, можно получить в явном виде. Правда, это требует определенной внимательности.

Пусть dV — элемент объема около точки \mathbf{r} , а dV' — элемент объема около \mathbf{r}' (рис. 3). Радиативные переходы $i \rightarrow k$ в dV происходят под действием излучения, приходящего в этот объем из всех точек среды. Подсчитаем вклад, который

дает излучение объема dV' . В dV' за единицу времени в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$ в линии $k \rightarrow i$ излучается энергия $[\hbar\nu_{ik}A_{ki}n_k(\mathbf{r}')A \frac{\alpha(x)}{\Delta\nu} + 4\pi\epsilon^c(\mathbf{r}')]d\nu dV'$. Обозначим через $d\sigma$ проекцию объема dV на плоскость, перпендикулярную к прямой, соединяющей точки \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Объем dV виден из

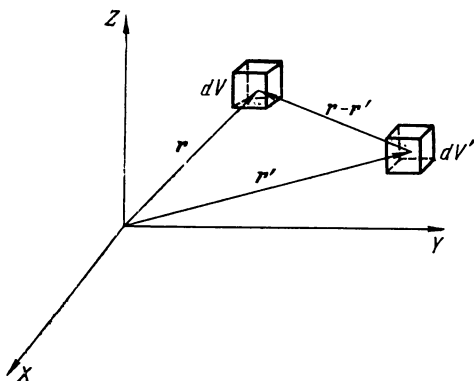


Рис. 3. К выводу интегрального уравнения, выражающего условие стационарности.

dV' под телесным углом $d\sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$. В этом телесном угле за 1 сек в частотах от ν до $\nu + d\nu$ в dV' излучается энергия

$$\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left[\hbar\nu_{ik}A_{ki}n_k(\mathbf{r}')A \frac{\alpha(x)}{\Delta\nu} + 4\pi\epsilon^c(\mathbf{r}') \right] d\nu d\sigma dV'. \quad (4.5)$$

На пути от \mathbf{r}' до \mathbf{r} энергия частично поглощается, а частично рассеивается средой во всех направлениях, так что до dV доходит не вся эта энергия, а лишь ее доля

$$\exp \{ -\alpha(x)\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tau^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \}, \quad (4.6)$$

где $\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — оптическое расстояние между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' в центре линии, т. е.

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k_{ik}(\nu_0) \int_0^s n_i(\mathbf{r}'') ds', \quad (4.7)$$

причем $s = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ и интегрирование ведется по прямой, соединяющей \mathbf{r}' и \mathbf{r} . Аналогичным образом, $\tau^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — оптическое расстояние между \mathbf{r} и \mathbf{r}' в непрерывном спектре.

Из всей падающей на объем dV энергии, излучаемой объемом dV' в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, в нем поглощается доля

$$k_{ik}(\nu_0) n_i(\mathbf{r}) \alpha(x) ds, \quad (4.8)$$

где ds — высота объема dV в направлении распространения излучения.

Перемножая (4.5), (4.6) и (4.8), интегрируя по всем частотам и учитывая, что $d\sigma ds = dV$, получаем полную энергию, поглощаемую в dV из излучения объема dV' в частотах линии $k \rightleftharpoons i$:

$$\frac{h\nu_{ik}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} n_i(\mathbf{r}) k_{ik}(\nu_0) \left[M_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n_k(\mathbf{r}') A_{ki} + \right. \\ \left. + M_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{4\pi\Delta\nu}{Ah\nu_{ik}} \varepsilon^c(\mathbf{r}') \right] dV dV', \quad (4.9)$$

где

$$M_n(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^n(x) \exp\{-\alpha(x) \tau(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \tau^c(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dx \\ (n = 1, 2). \quad (4.10)$$

Наконец, деля эту энергию на $h\nu_{ik}$ и на dV и интегрируя по всему объему среды, получаем полное число фотовозбуждений $i \rightarrow k$ в единице объема около точки \mathbf{r} :

$$n_i(\mathbf{r}) B_{ik} \bar{J}_{ik}(\mathbf{r}) = n_i(\mathbf{r}) k_{ik}(\nu_0) \frac{1}{4\pi} \int \frac{A_{ki} n_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \times \\ \times M_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' + n_i(\mathbf{r}) k_{ik}(\nu_0) \frac{1}{4\pi} \int \frac{M_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{4\pi\Delta\nu}{Ah\nu_{ik}} \varepsilon^c(\mathbf{r}') dV'. \quad (4.11)$$

Подставляя это выражение в (4.4), окончательно приходим к следующему уравнению стационарности для k -го уровня:

$$n_k(\mathbf{r}) = n_i(\mathbf{r}) k_{ik}(\nu_0) \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{M_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} n_k(\mathbf{r}') dV' + \\ + n_i(\mathbf{r}) k_{ik}(\nu_0) \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{M_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{4\pi\Delta\nu}{AA_{ki} h\nu_{ik}} \varepsilon^c(\mathbf{r}') dV' + \\ + n_k^*(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения. Если населенность нижнего уровня n_i и коэффициент поглощения в непрерывном спектре σ^c не зависят от координат, вместо (4.12) получаем после несложных преобразований следующее уравнение для функции источников $S(\tau)$:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int e^{-\beta |\tau - \tau'|} \frac{M_2(|\tau - \tau'|)}{|\tau - \tau'|^2} S(\tau') d\tau' + \\ + \beta \frac{\lambda}{4\pi} \int e^{-\beta |\tau - \tau'|} \frac{M_1(|\tau - \tau'|)}{|\tau - \tau'|^2} S^c(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (4.13)$$

где $\tau = n_i k_{ik}(v_0) \mathbf{r}$ — оптический радиус-вектор, $d\tau'$ — элемент объема τ' -пространства, $\beta = \sigma^c / n_i k_{ik}(v_0)$ — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии,

$$M_k(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x) e^{-\alpha(x)\tau} dx. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.13) (для частного случая $\beta = 0$) было получено независимо друг от друга и почти одновременно Л. М. Биберманом [1] и Т. Холстейном [1] и называется поэтому иногда уравнением Бибермана — Холстейна. Оно описывает рассеяние света в однородных средах при пренебрежении нелинейными эффектами. За счет предположения об однородности достигается существенное упрощение: ядро уравнения становится функцией переменной $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, а самих величин \mathbf{r} и \mathbf{r}' , как это имеет место в общем случае. Когда среда обладает той или иной симметрией, уравнение (4.13) принимает более простой вид. Рассмотрим важнейшие частные случаи.

Плоская геометрия. Этот случай наиболее важен с точки зрения приложений, в первую очередь астрофизических. Требование однородности среды было бы здесь очень существенным ограничением, так как обычно (например, в звездных атмосферах) плотность сравнительно быстро меняется с глубиной. Однако в плоском случае предположение об однородности не является обязательным. Интегральное уравнение, выражающее условие стационарности, в случае плоской геометрии сводится к уравнению с ядром,

зависящим от модуля разности аргументов, при произвольной зависимости концентрации атомов на нижнем уровне от глубины. Достаточно потребовать, чтобы от глубины не зависело лишь отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии ($\beta = \text{const}$).

Чтобы получить уравнение для функции источников в случае плоского слоя оптической толщины τ_0 , можно поступить так. Подставим формальное решение уравнения переноса (3.10) — (3.11) в формулу (3.5), выражающую функцию источников через интенсивность излучения. При $\beta = \text{const}$ будем иметь

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \left\{ - \int_{-1}^0 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_0^{\tau} [\alpha(x') S(\tau') + \beta S^c(\tau')] e^{-[\alpha(x') + \beta] \frac{\tau' - \tau}{\mu'}} d\tau' + \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu'} \int_{\tau}^{\tau_0} [\alpha(x') S(\tau') + \beta S^c(\tau')] e^{-[\alpha(x') + \beta] \frac{\tau' - \tau}{\mu'}} d\tau' \right\} + S^*(\tau). \quad (4.15)$$

Отсюда находим, что

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) S^c(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (4.16)$$

где

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1 [(\alpha(x) + \beta)\tau] dx, \quad (4.17)$$

$$K_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_1 [(\alpha(x) + \beta)\tau] dx, \quad (4.18)$$

а $E_1(t)$ — интегральная показательная функция:

$$E_1(t) = \int_0^1 e^{-\frac{t}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}. \quad (4.19)$$

Физический смысл отдельных членов в правой части (4.16) следующий. Первое слагаемое учитывает переходы атомов на верхний k -й уровень с нижнего i -го при фотовозбуждениях собственным излучением среды в линии $k \rightarrow i$, второе — фотовозбуждения излучением среды в непрерывном спектре, наконец, третье описывает все другие возможные пути появления атомов на k -м уровне, кроме фотовозбуждений $i \rightarrow k$. Очевидно, решение уравнения (4.16) эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения переноса (3.3) при $\beta = \text{const}$ и граничных условиях (3.9).

Если оптическая толщина в центре линии бесконечна (полубесконечная среда), то в уравнении (4.16) нужно положить $\tau_0 = \infty$. Если же среда имеет бесконечную в обоих направлениях оптическую толщину (бесконечная среда), то функция источников определяется уравнением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + \\ + \beta \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) S^c(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (4.20)$$

Коэффициент поглощения в непрерывном спектре обычно много меньше коэффициента поглощения в центре линии. Если поглощение и излучение в непрерывном спектре не учитывать вовсе, то уравнение (4.16) переходит в следующее:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (4.21)$$

где

$$K(\tau) \equiv K(\tau, 0) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx, \quad (4.22)$$

а вместо (4.20) имеем

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (4.23)$$

В соответствии с рецептом, указанным в конце § 2.2, для получения уравнений, описывающих монохроматичес-

кое рассеяние, следует рассмотреть прямоугольный профиль коэффициента поглощения [формула (2.24)]. Из (4.22) следует тогда, что в этом частном случае $K(\tau) = E_1(\tau)$. Таким образом, при монохроматическом рассеянии функция источников в плоском слое определяется уравнением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (4.24)$$

тогда как для бесконечной среды основное интегральное уравнение имеет вид

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (4.25)$$

Свойства функции $K(\tau)$, через которую выражаются ядра интегральных уравнений, а также различных величин, связанных с $K(\tau)$, исследуются в § 2.6 и 2.7. Решение интегральных уравнений монохроматического рассеяния (4.25) и (4.24) подробно обсуждается в гл. III (для случая $\lambda = \text{const}$). В гл. IV результаты переносятся на уравнение (4.23). Уравнение (4.21) при $\tau_0 = \infty$ изучается в гл. V и VI, причем сначала (гл. V) рассматривается случай произвольной функции $S^*(\tau)$, а затем (в гл. VI) результаты детализируются для некоторых частных видов зависимости мощности источников $S^*(\tau)$ от глубины. Уравнение (4.16) при $\tau_0 = \infty$ исследуется в гл. VII, случай же конечных τ_0 изучается в гл. VIII.

Сферическая геометрия. Рассмотрим сначала рассеяние в однородной сфере оптического радиуса τ_0 . Для простоты будем считать, что поглощения и излучения в непрерывном спектре нет ($\beta = 0$). В силу предположения о сферической симметрии функция источников S и распределение первичных источников S^* должны зависеть только от расстояния от центра симметрии, который естественно принять за начало координат. Вместо (4.13) будем тогда иметь

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{M_2(|\tau - \tau'|)}{|\tau - \tau'|^2} S(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (4.26)$$

где $\tau = |\tau|$, а интегрирование ведется по всей сфере радиуса τ_0 .

Вводя сферические координаты τ' , ϑ' , φ' , имеем

$$\begin{aligned} d^3\tau' &= \tau'^2 d\tau' \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi', \\ |\tau - \tau'|^2 &= \tau^2 + \tau'^2 - 2\tau\tau' \cos \vartheta'. \end{aligned}$$

Полагая $\mu' = \cos \vartheta'$ и пользуясь (4.14), вместо (4.26) находим

$$\begin{aligned} S(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} S(\tau') \tau'^2 d\tau' A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' \times \\ &\times \int_{-1}^1 \frac{\exp\{-\alpha(x') \sqrt{\tau^2 + \tau'^2 - 2\tau\tau'\mu'}\}}{\tau^2 + \tau'^2 - 2\tau\tau'\mu'} d\mu' + S^*(\tau). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Переходя к новой переменной

$$t = \alpha(x') \sqrt{\tau^2 + \tau'^2 - 2\tau\tau'\mu'},$$

получаем

$$\begin{aligned} S(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} S(\tau') \tau'^2 d\tau' A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' \int_{\alpha(x')|\tau-\tau'|}^{\alpha(x')(\tau+\tau')} e^{-t} \frac{dt}{t\tau'} + \\ &+ S^*(\tau), \end{aligned} \quad (4.28)$$

и, окончательно,

$$\begin{aligned} \tau S(\tau) &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} [K(|\tau - \tau'|) - K(\tau + \tau')] \tau' S(\tau') d\tau' + \\ &+ \tau S^*(\tau), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где $K(\tau)$ по-прежнему дается формулой (4.22). Решение этого интегрального уравнения эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения переноса (3.24) при $\beta = 0$ и граничном условии $I(\tau_0, \mu, x) = 0$ при $\mu < 0$.

Аналогичным образом можно рассмотреть и более сложные системы, обладающие сферической симметрией. Так, для функции источников в однородной сферической оболочке, окружающей абсолютно черную сферу и не

освещаемой извне, можно получить следующее уравнение:

$$\tau S(\tau) = -\frac{\lambda}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} [K(|\tau - \tau'|) - K(\sqrt{\tau^2 - \tau_1^2} + \sqrt{\tau'^2 - \tau_1^2}) \tau' S(\tau')] d\tau' + \tau S^*(\tau), \quad (4.30)$$

где $\tau = \sigma_{ik}(\nu_0)r$ — оптическое расстояние от центра, τ_1 — внутренний оптический радиус оболочки, $\tau_2 - \tau_1$ — ее оптическая толщина. Для полой сферической оболочки уравнение оказывается еще сложнее (см. Т. А. Гермогенова [1]). Однако если толщина оболочки мала по сравнению с ее радиусом (скажем, внутренним), уравнение сильно упрощается и принимает вид

$$S(\tau) = -\frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} [K(|\tau - \tau'|) + K(\tau + \tau')] S(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (4.31)$$

Интегральное уравнение (4.29) при $\lambda = \text{const}$ рассматривалось в работах С. Купермана, Ф. Ингельмана и Дж. Оксинюса [1], [2] и В. В. Соболева [2], содержащих результаты его численного решения для некоторых частных случаев. М. Вайнштейн [1] получил более общее уравнение, описывающее рассеяние в однородной сфере с частично отражающей границей. Уравнение (4.30) при $\lambda = \text{const}$ и $K(\tau) = E_1(\tau)$ (монохроматическое рассеяние) было изучено Т. А. Гермогеновой [2]. Наконец, уравнение (4.31) рассматривалось В. В. Соболевым [3] в связи с задачей о переносе излучения в газовых туманностях.

Имея в виду применение результатов к исследованию переноса резонансного излучения в газоразрядных трубках, ряд авторов рассмотрели также среды с цилиндрической симметрией (Т. Холстейн [2], Л. М. Биберман и Б. А. Векленко [1], М. Вайнштейн [1], М. Хислет и Р. Уорминг [1]):

§ 2.5. Учет нелинейных эффектов для атома с двумя уровнями (плоская геометрия)

Под воздействием излучения часть атомов переходит с нижнего уровня на верхний. Поэтому, строго говоря, концентрация атомов на нижнем уровне не может считаться заданной, а должна находиться из решения уравнений ста-

ционарности. Если интенсивность излучения в линии, вызывающего перераспределение атомов по уровням, не слишком велика, этим эффектом в первом приближении можно пренебречь. До сих пор мы так и поступали. Однако при больших интенсивностях излучения картина иная. Здесь должно происходить «просветление» среды в частотах линии, обусловленное переходом заметной доли атомов с нижнего уровня на верхний. Одновременно с этим начинает играть роль и вынужденное излучение.

Учет этих нелинейных эффектов, вообще говоря, связан со значительными трудностями. Существуют, однако, частные случаи, когда нелинейные задачи удается свести к линейным. Обсуждению одного такого случая посвящен этот параграф.

Пусть среда обладает плоской симметрией, так что все величины зависят только от одной пространственной координаты — геометрической глубины z , отсчитываемой от границы среды. Будем предполагать, что газ состоит из двухуровневных атомов. Полная концентрация атомов

$$n = n_1(z) + n_2(z) \quad (5.1)$$

и электронная плотность n_e считаются заданными постоянными. Газ изотермичен. Каково будет стационарное состояние такого газа?

Если температура газа мала ($kT \ll h\nu_{12}$) и интенсивность падающего на него снаружи излучения не слишком велика, то мы имеем вариант задачи, обсуждавшейся в начале § 2.2. Уравнение переноса (2.9) в случае плоской геометрии принимает вид (см. § 2.3)

$$\mu \frac{dI(z, \mu, x)}{dz} = -\alpha(x) k_{12}(\nu_0) n_1 [I(z, \mu, x) - S(z)], \quad (5.2)$$

или

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = \alpha(x) [I(\tau, \mu, x) - S(\tau)], \quad (5.3)$$

где оптическая глубина τ определяется соотношением

$$\tau = \int_z^{z_0} k_{12}(\nu_0) n_1 dz = k_{12}(\nu_0) n_1 (z_0 - z) \quad (5.4)$$

(z_0 — геометрическая толщина слоя). В линейном случае величина n_1 известна. Ее можно полагать равной полной концентрации атомов n , так как $n_2 \ll n_1$. Функция источников $S(\tau)$ в уравнении (5.3) связана с населенностями уровней соотношением (2.5) и согласно (3.5) и (2.7) выражается через интенсивность диффузного излучения следующим образом:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + \\ + \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}} (1 - \lambda) + S_0^*(\tau), \quad (5.5)$$

где

$$S_0^*(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x_0) dx_0 \int_0^1 I_0(0, \mu_0, x_0) e^{-\frac{\alpha(x_0)\tau}{\mu_0}} d\mu_0. \quad (5.6)$$

Здесь $I_0(0, \mu_0, x_0)$ — интенсивность излучения, падающего под углом $\arccos \mu_0$ к внутренней нормали к границе в частоте x_0 , усредненная по азимуту (для простоты считается, что освещается только граница $\tau = 0$). Последнее слагаемое в правой части (5.5) учитывает фотовозбуждения внешним излучением, ослабленным средой. Вероятность выживания кванта при рассеянии λ равна

$$\lambda = \frac{A_{01}}{A_{21} + n_e C_{21}}. \quad (5.7)$$

При $n_e = \text{const}$ и $T = \text{const}$ она не зависит от координат.

Подставляя формальное решение (5.3) в (5.5), приходим к следующему уравнению для функции источников:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + \\ + \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT}} (1 - \lambda) + S_0^*(\tau), \quad (5.8)$$

в котором $K(\tau)$ дается формулой (4.22), а оптическая

толщина слоя равна

$$\tau_0 = k_{12}(\nu_0) \int_0^{z_0} n_1(z) dz,$$

или, так как $n_2 \ll n_1$,

$$\tau_0 = k_{12}(\nu_0) n z_0.$$

Если температура газа высока ($kT \gtrsim h\nu_{12}$) или велика интенсивность падающего на него излучения, пренебрегать вынужденными переходами уже нельзя, и задача становится нелинейной. Уравнение переноса излучения имеет тогда вид (см. § 1.6)

$$\mu \frac{dI(z, \mu, x)}{dz} = -\alpha(x) k_{12}(\nu_0) n_1(z) \left[1 - \frac{g_1 n_2(z)}{g_2 n_1(z)} \right] I(z, \mu, x) + \alpha(x) k_{12}(\nu_0) \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} n_2(z), \quad (5.9)$$

а уравнение стационарности записывается в форме

$$n_2 (A_{21} + B_{21} \bar{J}_{12} + n_e C_{21}) = n_1 (B_{12} \bar{J}_{12} + n_e C_{12}), \quad (5.10)$$

или

$$\begin{aligned} n_2 \left[A_{21} + A_{21} \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \frac{1}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 (I(z, \mu' x') + \right. \\ \left. + I^0(z, \mu', x')) d\mu' + n_e C_{21} \right] = \\ = n_1 \left[A_{21} \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \frac{g_2}{g_1} \frac{1}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 (I(z, \mu', x') + \right. \\ \left. + I^0(z, \mu', x')) d\mu' + n_e C_{12} \right], \quad (5.11) \end{aligned}$$

где I и I^0 — интенсивности соответственно диффузного и усредненного по азимуту прямого излучения. Покажем, что совместное решение нелинейных уравнений (5.9) и (5.11) можно свести к линейной задаче. Положим

$$\tau = k_{12}(\nu_0) \int_z^{z_0} n_1(z') \left[1 - \frac{g_1 n_2(z')}{g_2 n_1(z')} \right] dz'. \quad (5.12)$$

Величина τ представляет собой оптическую глубину в центре линии с учетом вынужденного излучения, рассматриваемого как отрицательное поглощение. В уравнении переноса (5.9) можно перейти от геометрического расстояния z к оптической глубине τ . Этот переход носит, правда, формальный характер, так как до тех пор, пока населенности уровней не найдены в функции z , зависимость τ от z остается неизвестной.

Если ввести функцию источников

$$S = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \left[\frac{g_2}{g_1} \frac{n_1}{n_2} - 1 \right]^{-1}, \quad (5.13)$$

то в переменной τ уравнение переноса (5.9) записывается в той же самой форме (5.3), в которой оно фигурировало в линейном случае.

С другой стороны, из уравнения стационарности (5.11) отношение населенностей уровней $\frac{n_2}{n_1}$, а следовательно, и функцию источников легко выразить через интенсивность излучения. После простых преобразований находим, что

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + (1 - \lambda) B_{\nu_{12}}(T) + S_0^*(\tau), \quad (5.14)$$

где

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21} \left[1 - \exp\left(\frac{h\nu_{12}}{kT}\right) \right]}, \quad (5.15)$$

$B_{\nu_{12}}(T)$ — функция Планка:

$$B_{\nu_{12}}(T) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \left[\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (5.16)$$

а $S_0^*(\tau)$ дается формулой (5.6), в которой τ определено согласно (5.12). Наконец, подставляя в (5.14) формальное решение уравнения переноса (5.3), даваемое (3.13) и (3.14),

получаем для $S(\tau)$ следующее линейное уравнение:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\bar{\tau}_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + (1 - \lambda) B_{\nu_{12}}(T) + S_0^*(\tau). \quad (5.17)$$

На первый взгляд может показаться, что нелинейный случай почти не отличается от линейного: достаточно вместо (2.5) использовать для функции источников выражение (5.13), параметр λ вместо (5.7) рассчитывать по формуле (5.15) и, наконец, заменить коэффициент при $1 - \lambda$ в интегральном уравнении для $S(\tau)$ с функции Вина на функцию Планка [ср. (5.8) и (5.17)]. В действительности дело не ограничивается только этим, так как нам неизвестно то значение τ_0 , при котором должно решаться уравнение (5.17). Согласно (5.12) под оптической толщиной всего слоя τ_0 следует понимать величину

$$\tau_0 = k_{12}(\nu_0) \int_0^{z_0} n_1(z') \left[1 - \frac{g_1 n_2(z')}{g_2 n_1(z')} \right] dz', \quad (5.18)$$

которую, как кажется, можно вычислить лишь после того, как населенности уровней уже найдены в функции z , т. е. только когда задача уже решена. Можно, однако, указать путь получения τ_0 без предварительного определения населенностей уровней в функции z .

Обозначим через τ_0^* предельное значение оптической толщины среды, которое она имела бы, если бы все атомы находились на нижнем уровне:

$$\tau_0^* = k_{12}(\nu_0) n z_0 = k_{12}(\nu_0) \int_0^{z_0} [n_1(z') + n_2(z')] dz'. \quad (5.19)$$

Назовем эту величину *предельной оптической толщиной* среды. Очевидно, что действительная оптическая толщина среды τ_0 меньше τ_0^* , так как часть атомов находится на верхнем уровне. Введем также *предельную оптическую глубину*

$$\tau^* = k_{12}(\nu_0) n(z_0 - z) = k_{12}(\nu_0) \int_z^{z_0} [n_1(z') + n_2(z')] dz'. \quad (5.20)$$

Если будет определено значение τ_0 и затем тем или иным способом функция источников будет найдена в функции предельной оптической глубины τ^* , то задача будет полностью решена.

Для дальнейшего существенно, что функция источников, определяемая уравнением (5.17), зависит от τ_0 как от параметра: $S = S(\tau, \tau_0)$. Чтобы получить «реальное» значение τ_0 , при котором решение уравнения (5.17) дает функцию источников в зависимости от оптической глубины τ , поступим следующим образом. Из (5.12) и (5.20) имеем

$$\frac{d\tau^*}{d\tau} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \left[1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{n_2}{n_1} \right]}, \quad (5.21)$$

или

$$\frac{d\tau^*}{d\tau} = 1 + \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} S(\tau, \tau_0), \quad (5.22)$$

откуда

$$\tau_0^* = \tau_0 + \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \int_0^{\tau_0} S(\tau, \tau_0) d\tau. \quad (5.23)$$

Это соотношение можно использовать для определения τ_0 . В самом деле, если уравнение (5.17) решить для всех τ_0 , меньших τ_0^* , то правая часть в (5.23) будет известной функцией τ_0 . Найдя значение τ_0 , являющееся корнем уравнения (5.23), мы тем самым получаем возможность выбрать из всех функций $S(\tau, \tau_0)$ ($\tau_0 \leq \tau_0^*$) ту, которая отвечает реальному значению τ_0 .

Теперь остается в этой функции перейти от переменной τ к предельной оптической глубине τ^* . Это можно сделать при помощи соотношения

$$\tau^* = \tau + \left(1 + \frac{g_2}{g_1} \right) \frac{c^2}{2h\nu_{12}^3} \int_0^{\tau} S(\tau', \tau_0) d\tau', \quad (5.24)$$

вытекающего из (5.22). Следует подчеркнуть, что величина τ_0 в этой формуле есть реальная оптическая толщина среды, являющаяся корнем уравнения (5.23).

Итак, решение нелинейной задачи разбивается на три этапа: 1) решение уравнения (5.17) для всех τ_0 , меньших τ_0^* ; 2) определение реального значения оптической толщины τ_0 из соотношения (5.23); 3) переход в функции источников $S(\tau, \tau_0)$ от τ к предельной оптической глубине τ^* и тем самым к z [формула (5.24)]. Таким образом, если линейная задача сводится к решению одного интегрального уравнения для $S(\tau, \tau_0)$, то в нелинейном случае нужно уже решать семейство таких уравнений с $\tau_0 \leq \tau_0^*$. Это и есть та главная цена, которую приходится заплатить за нелинейность.

Существуют, правда, два важных частных случая, когда дело обстоит совсем просто. Это случаи бесконечной и полубесконечной сред. Рассмотрим, например, полубесконечную среду. Ясно, что и с учетом «просветления» она по-прежнему остается полубесконечной. Поэтому определять «реальную» оптическую толщину τ_0 здесь не нужно. Для получения функции источников в зависимости от τ достаточно решить одно линейное интегральное уравнение, именно уравнение (5.17), при $\tau_0 = \infty$. После этого по формуле (5.24) с $\tau_0 = \infty$ легко осуществить переход от оптических глубин к геометрическим. Если же интересоваться не самой функцией источников, а лишь интенсивностью выходящего излучения, то можно вообще ограничиться определением $S(\tau)$, не находя S в зависимости от z , так как

$$I(0, \mu, x) = \int_0^{\infty} S(\tau') e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau'} \alpha(x) \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (5.25)$$

Последнее замечание остается в силе и для слоя конечной оптической толщины.

Задача, обсуждавшаяся в этом параграфе, была впервые рассмотрена Э. Милном [1], считавшим, однако, что частота кванта остается при рассеянии неизменной (точнее говоря, принимался прямоугольный профиль коэффициента поглощения). С учетом перераспределения по частотам эту задачу исследовал Р. Томас [1]. Как Милн, так и Томас считали среду полубесконечной и не касались вопроса о переходе от оптических глубин к геометрическим. Метод определения τ_0 и перехода от τ к z был указан В. А. Амбарцумяном [2], [3]; см. также работы В. Ю. Теребижа [1] и Ю. Ю. Абрамова, А. М. Дыхне и А. П. Напартовича [1].

§ 2.6. Общие свойства ядер интегральных уравнений и связанных с ними функций

Функция $K(\tau)$, определяющая ядро интегрального уравнения для функции источников, и ряд связанных с ней функций играют важнейшую роль во всех задачах о переносе излучения в частотах спектральных линий. В этом параграфе исследуются наиболее часто встречающиеся из этих специальных функций (для случая, когда поглощением в непрерывном спектре можно пренебречь). Приводимые результаты постоянно используются в последующих главах. Значительная часть материала этого и следующего параграфов заимствована из работы Д. И. Нагирнера и автора [1].

Обозначим

$$M_k(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x) e^{-\alpha(x)\tau} dx \quad (\tau \geq 0; k = 1, 2, \dots) \quad (6.1)$$

и

$$N_{k;n}(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^k(x) E_n[\alpha(x)\tau] dx \quad (\tau \geq 0; k, n = 1, 2, \dots), \quad (6.2)$$

где $E_n(t)$ — n -я интегральная показательная функция:

$$E_n(t) = \int_0^1 e^{-\frac{t}{\mu}} \mu^{n-2} d\mu. \quad (6.3)$$

Функцию $M_1(\tau)$ будем называть *функцией ослабления*, $M_2(\tau)$ — *функцией вклада*. Величина $N_{12}(\tau)$ есть не что иное, как введенная выше функция $K(\tau)$, определяющая ядро интегрального уравнения для функции источников при плоской и сферической геометрии. Для краткости будем называть $K(\tau)$ *ядром*. Удобно ввести специальное обозначение и для функции $N_{12}(\tau)$:

$$L(\tau) \equiv N_{12}(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_2[\alpha(x)\tau] dx. \quad (6.4)$$

Заметим, что

$$L(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau') d\tau' \quad (6.5)$$

и, вообще,

$$N_{kn}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} N_{k+1, n-1}(\tau') d\tau'. \quad (6.6)$$

Из (6.1) — (6.3) следует соотношение

$$N_{kn}(\tau) = \tau^{n-1} \int_{\tau}^{\infty} M_k(t) \frac{dt}{t^n} \quad (k, n = 1, 2, \dots). \quad (6.7)$$

Из (6.6) и (6.7) находим

$$\dot{N}_{kn}(\tau) = \frac{1}{n-1} [M_k(\tau) - \tau N_{k+1, n-1}(\tau)] \\ (k = 1, 2, \dots; n = 2, 3, \dots). \quad (6.8)$$

Подставляя (6.3) в (6.8) и делая замену

$$z = \frac{\mu}{\alpha(x)}, \quad (6.9)$$

имеем

$$N_{kn}(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{k+n-1}(x) dx \int_0^{\frac{1}{\alpha(x)}} e^{-\frac{\tau}{z}} z^{n-2} dz. \quad (6.10)$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем считать, что $\alpha(x)$ — четная монотонно убывающая с ростом $|x|$ функция. Меняя в (6.10) порядок интегрирования, получаем

$$N_{kn}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G_{k+n-2}(z) z^{n-2} dz, \quad (6.11)$$

где

$$G_m(z) = 2A \int_0^{\infty} \alpha^{m+1}(x') dx' \quad (z \leq 1), \quad (6.12)$$

$$G_m(z) = 2A \int_x^{\infty} \alpha^{m+1}(x') dx' \quad (z > 1), \quad (6.13)$$

причем $x(z)$ определяется из условия

$$\alpha(x(z)) = \frac{1}{z}; \quad x(z) \geq 0. \quad (6.14)$$

Индекс 1 у $G_1(z)$ будем опускать, так что

$$G_1(z) \equiv G(z). \quad (6.15)$$

Тогда, в частности,

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z}, \quad (6.16)$$

$$L(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz. \quad (6.17)$$

Наряду с $M_h(\tau)$ и $N_{hn}(\tau)$ рассмотрим также функции

$$V(u) = \int_0^{\infty} \frac{G(z)}{1+u^2z^2} dz \quad (6.18)$$

и

$$\mathcal{U}(z) = z^2 \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{z^2 - z'^2} dz'. \quad (6.19)$$

Первая из них с точностью до множителя совпадает с преобразованием Фурье от ядра:

$$V(u) = \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \tau u \, d\tau, \quad (6.20)$$

откуда, между прочим, следует, что

$$K(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V(u) \cos \tau u \, du. \quad (6.21)$$

Вторая связана с односторонним преобразованием Лапласа от ядра

$$\bar{K}(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sz} K(\tau) \, d\tau = \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{1+sz'} \, dz' \quad (6.22)$$

соотношением

$$\mathcal{U}(z) = \frac{1}{2} \bar{K} \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \bar{K} \left(-\frac{1}{z} \right). \quad (6.23)$$

Подставляя в (6.18) и (6.19) явное выражение для $G(z)$ и интегрируя по частям, получаем

$$V(u) = \frac{1}{u} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \operatorname{arctg} \frac{u}{\alpha(x)} dx, \quad (6.24)$$

$$\mathcal{U}(z) = z \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \ln \frac{z\alpha(x) + 1}{z\alpha(x) - 1} dx. \quad (6.25)$$

При вещественных z величина, стоящая в последней формуле под знаком логарифма, должна браться по абсолютной величине, а интеграл (6.19) пониматься в смысле главного значения.

При монохроматическом рассеянии ядро есть $E_1(\tau)$, функция $L(\tau)$ переходит в $E_2(\tau)$, а функции $V(u)$ и $\mathcal{U}(z)$ равны

$$V_M(u) = \frac{\operatorname{arctg} u}{u}, \quad (6.26)$$

$$\mathcal{U}_M(z) = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad (6.27)$$

причем при $-1 < z < 1$ значение $\frac{z+1}{z-1}$ следует брать по абсолютной величине. Индекс M будет использоваться всюду в дальнейшем для обозначения величин, относящихся к монохроматическому рассеянию.

Для функций $M_h(\tau)$ и $N_{hn}(\tau)$ легко получить разложения в ряды. Обозначим

$$a_j = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{j+1}(x) dx \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (6.28)$$

$$\tilde{a} = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \ln \alpha(x) dx. \quad (6.29)$$

Разлагая экспоненту в подынтегральной функции в (6.1),

находим

$$M_k(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{j+k-1} \frac{\tau^j}{j!} . \quad (6.30)$$

Аналогичным образом, если воспользоваться известными разложениями интегральных показательных функций (см., например, В. Курганов [1]), из (6.2) можно получить ряды для $N_{kn}(\tau)$. В частности,

$$K(\tau) \equiv N_{21}(\tau) = -a_1 \ln \tau - a_1 \gamma - \tilde{a} + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_{j+2} \frac{\tau^{j+1}}{(j+1)(j+1)!} , \quad (6.31)$$

$$L(\tau) \equiv N_{12}(\tau) = 1 + a_1 \tau \ln \tau + (a_1 \gamma - a_1 + \tilde{a}) \tau + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} a_{j+2} \frac{\tau^{j+2}}{(j+1)(j+2)!} , \quad (6.32)$$

где $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера. Эти ряды сходятся при всех τ ($0 < \tau < \infty$), однако они удобны для вычислений лишь тогда, когда τ невелико.

Из (6.24) и (6.25) имеем

$$V(u) = \frac{\pi}{2} a_1 \frac{1}{u} + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{a_{2j+2}}{2j+1} u^{-2(j+1)} \quad (u \geq 1), \quad (6.33)$$

$$\mathcal{U}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{2j+2}}{2j+1} z^{2j+2} \quad (0 \leq z < 1). \quad (6.34)$$

Исследуем асимптотическое поведение $M_k(\tau)$ и $N_{kn}(\tau)$ при больших τ . Полагая $\alpha(x) = 1/z$ и переходя в (6.1) от интегрирования по x к интегрированию по z , получаем

$$M_k(\tau) = 2A \int_1^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} x'(z) \frac{dz}{z^k} , \quad (6.35)$$

где $x(z)$ — функция, определенная согласно (6.14). Отсюда

$$M_k(\tau) = 2A \int_0^{\tau} e^{-y} y^{k-2} \frac{x'\left(\frac{\tau}{y}\right)}{x'(\tau)} dy \frac{x'(\tau)}{\tau^{k-1}} . \quad (6.36)$$

Предположим, что существует предел

$$f(y) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{x' \left(\frac{\tau}{y} \right)}{x'(\tau)} = y \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{x \left(\frac{\tau}{y} \right)}{x(\tau)}. \quad (6.37)$$

Из (6.36) находим тогда, что

$$M_k(\tau) \sim 2A \int_0^{\infty} e^{-y} y^{k-2} f(y) dy \cdot \frac{x'(\tau)}{\tau^{k-1}} \quad (\tau \rightarrow \infty). \quad (6.38)$$

Если коэффициент поглощения убывает в крыльях линии по степенному закону, так что

$$\alpha(x) \sim W|x|^{-\kappa} \quad (|x| \rightarrow \infty), \quad (6.39)$$

где W и κ — некоторые постоянные ($1 < \kappa < \infty$), то

$$x(z) \sim W \frac{1}{\kappa} z^{\frac{1}{\kappa}} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (6.40)$$

и

$$f(y) = y^{2\gamma}, \quad (6.41)$$

где

$$\gamma = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}. \quad (6.42)$$

При доплеровском коэффициенте поглощения $\alpha_D(x) = e^{-x^2}$ имеем $x_D(z) = \sqrt{\ln z}$, так что $f_D(y) = y$.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие коэффициенты поглощения, для которых функция $f(y)$ существует и дается выражением (6.41) с γ , удовлетворяющим неравенствам $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$. Легко убедиться, что хотя мы пришли к такому выражению для $f(y)$, рассматривая только профили вида (6.39) и доплеровский профиль, функция $f(y)$ имеет вид (6.41) при много более общих предположениях о профиле коэффициента поглощения.

Из (6.38) и (6.41) находим теперь окончательно, что асимптотика функций $M_k(\tau)$ имеет вид

$$M_k(\tau) \sim 2A \Gamma(k + 2\gamma - 1) \frac{x'(\tau)}{\tau^{k-1}} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (6.43)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция. Идея изложенного только что способа получения асимптотики $M_k(\tau)$ заимствована нами

из статьи Ю. Ю. Абрамова, А. М. Дыхне и А. П. Напартовича [1].

Чтобы получить $N_{kn}(\tau)$ при $\tau \gg 1$, подставим (6.43) в (6.7). Пользуясь тем же приемом, который был использован при переходе от (6.35) к (6.43), находим

$$N_{kn}(\tau) \sim \frac{2A\Gamma(k+2\gamma-1)}{k+n+2\gamma-2} \frac{x'(\tau)}{\tau^{k-1}}. \quad (6.44)$$

В частности,

$$K(\tau) \sim 2A \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{2\gamma+1} \frac{x'(\tau)}{\tau}, \quad (6.45)$$

$$L(\tau) \sim 2A \frac{\Gamma(2\gamma)}{2\gamma+1} x'(\tau). \quad (6.46)$$

Найдем, далее, $G_m(z)$ при $z \gg 1$. Подстановка $\alpha(x') = \frac{1}{z'}$ приводит (6.13) к виду

$$G_m(z) = 2A \int_z^\infty x'(z') \frac{dz'}{(z')^{m+1}}. \quad (6.47)$$

Отсюда при $z \gg 1$

$$G_m(z) \sim 2A \int_1^\infty f\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y^{m+1}} \frac{x'(z)}{z^m}, \quad (6.48)$$

или, учитывая (6.41),

$$G_m(z) \sim \frac{2A}{2\gamma+m} \frac{x'(z)}{z^m} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (6.49)$$

Между прочим, из (6.43), (6.46) и (6.49) следует, что

$$L(\tau) \sim \frac{M_1(\tau)}{2\gamma+1} \sim \Gamma(2\gamma) \tau G(\tau) \quad (\tau \rightarrow \infty). \quad (6.50)$$

Чтобы получить асимптотику $V(u)$ при $u \rightarrow 0$, заметим прежде всего, что

$$\int_0^\infty G(z) dz = 1. \quad (6.51)$$

Для доказательства достаточно положить $\tau = 0$ в (6.4) и в (6.17) и приравнять правые части. Пользуясь (6.51),

из (6.18) находим

$$V(u) = 1 - u^2 \int_0^{\infty} \frac{z^2 G(z)}{1 + u^2 z^2} dz. \quad (6.52)$$

Полагая здесь $uz = y$, имеем

$$V(u) = 1 - \frac{1}{u} G\left(\frac{1}{u}\right) \int_0^{\infty} \frac{y^2}{1 + y^2} \frac{G\left(\frac{y}{u}\right)}{G\left(\frac{1}{u}\right)} dy. \quad (6.53)$$

Согласно (6.49), (6.37) и (6.41), при $u \rightarrow 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^2}{1 + y^2} \frac{G\left(\frac{y}{u}\right)}{G\left(\frac{1}{u}\right)} dy \sim \int_0^{\infty} \frac{y}{1 + y^2} \frac{x'\left(\frac{y}{u}\right)}{x'\left(\frac{1}{u}\right)} dy \sim \int_0^{\infty} \frac{y^{1-2\gamma}}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2 \sin \pi\gamma} \quad (6.54)$$

так что

$$V(u) \sim 1 - \frac{\pi}{2 \sin \pi\gamma} \frac{1}{u} G\left(\frac{1}{u}\right) \quad (u \rightarrow 0), \quad (6.55)$$

или, воспользовавшись еще раз (6.49),

$$V(u) \sim 1 - \frac{\pi A}{(2\gamma + 1) \sin \pi\gamma} x'\left(\frac{1}{u}\right). \quad (6.56)$$

Из (6.19) аналогичным образом находим, что

$$\mathcal{U}(z) \sim 1 - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi\gamma \cdot z G(z) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (6.57)$$

или

$$\mathcal{U}(z) \sim 1 - \frac{\pi A}{2\gamma + 1} \operatorname{ctg} \pi\gamma \cdot x'(z). \quad (6.58)$$

Ясно, что асимптотики ядра и связанных с ним функций во многом определяют и поведение решения интегрального уравнения для функции источников. Между тем, как мы только что убедились, эти асимптотики определяются поведением функции $x(z)$ при больших z , или, что то же самое, поведением коэффициента поглощения в крыльях линии. Поэтому, даже не имея детальных сведений о коэффициенте поглощения в ядре линии, а зная лишь его поведение в крыльях, можно надеяться получить важную информацию

о стационарных состояниях газа, находящегося в поле собственного излучения. Как мы увидим в следующих главах, эти надежды вполне оправдываются.

Сделаем еще одно замечание, касающееся постоянной γ . В том определении ее, которое применялось до сих пор, была использована представимость ядра в форме (4.22). Более того, принималось, что $\alpha(x)$ есть строго убывающая функция $|x|$ [в противном случае нельзя ввести функцию $x(z)$]. Предположения эти довольно жесткие. Например, при монохроматическом рассеянии, которому соответствует прямоугольный профиль коэффициента поглощения, они не удовлетворяются. Можно, однако, указать другой способ введения постоянной γ , который вообще не связан с представимостью ядра в форме (4.22). Он состоит в следующем. Пусть $K(\tau)$ — заданное (произвольное) ядро, нормированное на промежутке $(0, \infty)$ на единицу, $V(u)$ — функция, связанная с $K(\tau)$ соотношением (6.20) (по существу, его преобразование Фурье). Предположим, что при $u \rightarrow 0$

$$1 - V(u) \sim \varphi(u) u^{2\gamma}, \quad (6.59)$$

где γ — постоянная ($0 < \gamma \leq 1$), а $\varphi(u)$ — медленно меняющаяся функция, т. е. такая функция, что при любом a

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi(au)}{\varphi(u)} = 1, \quad 0 < a < \infty. \quad (6.60)$$

Соотношение (6.59) может служить определением γ . Оно не противоречит определению, данному ранее. Это следует из (6.56) при учете (6.37) и (6.41). Вместе с тем определение (6.59) является более общим. Например, оно позволяет найти значение γ , соответствующее монохроматическому рассеянию. Действительно,

$$V_M(u) = \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \sim 1 - \frac{1}{3} u^2 \quad (u \rightarrow 0), \quad (6.61)$$

так что в этом случае $\gamma = 1$.

В заключение отметим без доказательства следующие интегральные соотношения:

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(z) G(z) dz = \frac{1}{2}, \quad (6.62)$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(z) G(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V^2(u) du, \quad (6.63)$$

$$\int_0^{\infty} \mathcal{U}(z) G(z) \frac{dz}{z^2} = \frac{\pi^2}{8} a_1^2. \quad (6.64)$$

Эти соотношения непосредственно не применимы к монохроматическому рассеянию. В этом случае существуют некоторые их аналоги, не представляющие, впрочем, особого интереса, так как $\mathcal{U}_M(z)$ и $V_M(u)$ являются элементарными функциями.

§ 2.7. Ядра интегральных уравнений и связанные с ними функции для коэффициентов поглощения важнейших частных видов

Конкретизировав вид коэффициента поглощения, можно получить более детальные сведения о функциях, рассмотренных в предыдущем параграфе.

1) *Доплеровский профиль*:

$$\alpha_D(x) = e^{-x^2}. \quad (7.1)$$

В этом случае

$$A_D = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

см. формулу (1.5.23)] и, согласно (6.12)—(6.14),

$$G_D(z) = \begin{cases} a_1^D = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{при } z \leq 1, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{2 \ln z}} e^{-t^2} dt \right) & \text{при } z > 1. \end{cases} \quad (7.2)$$

При $z \gg 1$ находим из (7.2) асимптотическое разложение

$$G_D(z) \sim \frac{1}{2 \sqrt{\pi} z^2 \sqrt{\ln z}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_j}{(\ln z)^j}, \quad (7.3)$$

где

$$g_j = (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{2^{2j}}. \quad (7.4)$$

Постоянные a_j^D и \tilde{a}^D , входящие в разложения исследуемых функций в степенные ряды, равны

$$a_j^D = \frac{1}{\sqrt{j+1}} ; \quad \tilde{a}^D = -\frac{1}{4\sqrt{2}} . \quad (7.5)$$

Легко получить асимптотические ряды для $M_k^D(\tau)$ и $N_{kn}^D(\tau)$ при $\tau \gg 1$ (В. В. Иванов и В. Т. Щербаков [1], Ю. Эвретт и Д. Хаммер [1]). Оказывается, что

$$M_k^D(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\tau} \sqrt{\ln \tau}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \Gamma^{(j)}(k) \frac{1}{(\ln \tau)^j} , \quad (7.6)$$

где $\Gamma^{(j)}(s)$ — j -я производная гамма-функции. В частности,

$$M_1^D(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\tau} \sqrt{\ln \tau}} \left[1 - \frac{0,28361}{\ln \tau} + \frac{0,74179}{(\ln \tau)^2} - \frac{1,7015}{(\ln \tau)^3} + \frac{6,4426}{(\ln \tau)^4} \dots \right] , \quad (7.7)$$

$$M_2^D(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^2} \sqrt{\ln \tau}} \left[1 + \frac{0,21139}{\ln \tau} + \frac{0,30888}{(\ln \tau)^2} + \frac{0,15296}{(\ln \tau)^3} + \frac{0,48726}{(\ln \tau)^4} \dots \right] . \quad (7.8)$$

При $\tau = 10^3$ разложение (7.7) с учетом всех выписанных членов дает $M_1^D(\tau)$ с тремя значащими цифрами, а (7.8) определяет $M_2^D(10^3)$ с ошибкой в несколько единиц пятого знака. Таблицы $M_1^D(\tau)$ и $M_2^D(\tau)$ для $\tau \leq 10^3$ можно найти в работе В. В. Иванова и В. Т. Щербакова [1]. Функция $M_1^D(\tau)$ табулирована недавно также Т. Томацу и Т. Огава [1].

Асимптотическое разложение $N_{kn}^D(\tau)$ при $\tau \gg 1$ имеет вид

$$N_{kn}^D(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^k} \sqrt{\ln \tau}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{jkn} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \frac{1}{(\ln \tau)^j} , \quad (7.9)$$

где

$$a_{jkn} = \sum_{i=0}^j (-1)^i C_j^i \Gamma^{(j-i)}(k) \frac{i!}{(n+k-1)^{i+1}} \quad (7.10)$$

и C_j^i — биномиальные коэффициенты. В частности,

$$K_D(\tau) \sim \frac{1}{2 \sqrt{\pi} \tau \sqrt{\ln \tau}} \left[1 - \frac{0,03861}{\ln \tau} + \frac{0,33784}{(\ln \tau)^2} - \frac{0,26933}{(\ln \tau)^3} + \dots \right], \quad (7.11)$$

$$L_D(\tau) \sim \frac{1}{2 \sqrt{\pi} \tau \sqrt{\ln \tau}} \left[1 - \frac{0,53861}{\ln \tau} + \frac{1,14576}{(\ln \tau)^2} - \frac{3,1337}{(\ln \tau)^3} + \dots \right]. \quad (7.12)$$

Формулы (7.11) и (7.12) с учетом всех выписанных членов дают значения $K_D(\tau)$ и $L_D(\tau)$ при $\tau = 100$ с точностью до двух единиц третьей значащей цифры. В работах В. В. Иванова и В. Т. Щербакова [1] и Т. Томацу и Т. Огава [1] даются подробные таблицы этих функций. Для $K_D(\tau)$ получены также различные приближенные представления, специально приспособленные для быстрого вычисления этой функции на электронных счетных машинах (Д. Хаммер и Г. Рыбицкий [1], Ю. Эвретт и Р. Лёзер [1]).

Асимптотическое разложение $V_D(u)$ при $u \rightarrow 0$ можно получить так. Из (6.24) имеем

$$\frac{d}{du} \{u [1 - V(u)]\} = 2Au^2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha(x) dx}{u^2 + \alpha^2(x)}. \quad (7.13)$$

При доплеровском коэффициенте поглощения, полагая $e^{-x^2} = ut$, находим

$$\frac{d}{du} \{u [1 - V_D(u)]\} = \frac{u}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{1}{u} + \ln \frac{1}{t}\right)^{-1/2} dt}{1 + t^2},$$

откуда при $u \ll 1$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \{u [1 - V_D(u)]\} &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{1}{u}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{(\ln t)^n dt}{1+t^2} \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{u}\right)^n}. \end{aligned}$$

Вычисляя входящие сюда интегралы, получаем

$$\frac{d}{du} \{u [1 - V_D(u)]\} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{1}{u}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n-1)!!}{(4n)!!} \times \\ \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} |E_{2n}| \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{u}\right)^{2n}}, \quad (7.14)$$

где E_{2n} — числа Эйлера ($E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$, $E_6 = -61, \dots$). Будем искать $V_D(u)$ при малых u в виде

$$V_D(u) \sim 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{u}{\sqrt{\ln \frac{1}{u}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v_j}{\left(\ln \frac{1}{u}\right)^j}, \quad (7.15)$$

где v_j — неизвестные постоянные. Подставляя (7.15) в (7.14), выполняя дифференцирование и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $\ln \frac{1}{u}$, приходим к следующим рекуррентным соотношениям для определения чисел v_j :

$$v_{2n+1} = -\frac{4n+1}{4} v_{2n},$$

$$v_{2n+2} = \frac{(4n+3)!!}{[4(n+1)!!]} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2} |E_{2n+2}| + \frac{(4n+3)(4n+1)}{16} v_{2n} \\ (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.16)$$

причем $v_0 = 1$. Приведем несколько первых коэффициентов v_j :

$$v_1 = -0,25000; \quad v_2 = 1,1128; \quad v_3 = -1,3910; \quad v_4 = 10,7577; \\ v_5 = -24,205.$$

Формула (7.15) с учетом членов до $j = 5$ включительно дает $1 - V_D(u)$ при $u \leq 10^{-5}$ с четырьмя значащими цифрами, а при $u \leq 10^{-8}$ — уже с шестью знаками.

Асимптотический ряд для $\mathcal{U}_D(z)$ получается сходным образом. Из (6.25) имеем

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z} \mathcal{U}(z) \right] = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^3(x) dx}{1 - z^2 \alpha^2(x)}. \quad (7.17)$$

Отсюда можно получить, что при доплеровском коэффициенте поглощения и $z \rightarrow \infty$

$$z^2 \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{z} [\mathcal{U}_D(z) - 1] \right\} \sim \frac{\pi^{3/2}}{z (\ln z)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+1)!!}{(4n+2)!!} \times \\ \times \frac{1-2^{2n+2}}{2n+2} \pi^{2n} |B_{2n+2}| \frac{1}{(\ln z)^{2n}}, \quad (7.18)$$

где B_{2j} — числа Бернулли:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots$$

Ищем $\mathcal{U}_D(z)$ при $z \gg 1$ в виде

$$\mathcal{U}_D(z) \sim 1 + \frac{\pi^{3/2}}{16z (\ln z)^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{u_j}{(\ln z)^j}. \quad (7.19)$$

Из (7.18) и (7.19) получаем следующие рекуррентные соотношения для нахождения u_j :

$$u_{2n+1} = -\frac{4n+3}{4} u_{2n}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ u_{2n+2} = 4 \frac{(4n+5)!!}{(4n+6)!!} [2^{2n+4} - 1] \frac{\pi^{2n+2}}{n+2} |B_{2n+4}| + \\ + \frac{(4n+5)(4n+3)}{16} u_{2n}, \quad (7.20)$$

причем $u_0 = 1$. В частности,

$$u_1 = -0,75000; \quad u_2 = 4,0218; \quad u_3 = -7,0381; \quad u_4 = 63,779; \\ u_5 = -175,39.$$

2) Фойгтовский профиль:

$$\alpha_V(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)}, \quad (7.21)$$

где $U(a, x)$ — нормированная функция Фойгта, определяемая формулой (1.5.8). Поскольку коэффициент поглощения дается довольно сложной неэлементарной функцией, нельзя получить простые выражения даже для $G_V(z)$, не говоря уже о $M_k^V(\tau)$ и $N_{kn}^V(\tau)$. Единственные величины, которые удается вычислить точно, выразив их через табулированные функции, — это нормировочная константа A и

постоянная a_1 :

$$A_V = U(a, 0) = \frac{2}{\pi} e^{a^2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad (7.22)$$

$$a_1^V = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U(a\sqrt{2}, 0)}{U(a, 0)}. \quad (7.23)$$

В отношении всех остальных величин приходится довольствоваться более ограниченной информацией.

Что касается самой функции $U(a, x)$, то она может считаться известной. Детальное исследование ее свойств можно найти в обзоре Б. Армстронга [1], содержащем исчерпывающую библиографию. Имеются и многочисленные таблицы $U(a, x)$, наиболее полными из которых являются 8-значные таблицы Д. Хаммера [4] ($x = 0,00$ (0,05) 5,00 (0,1) 10,0; 24 значения a от $a = 10^{-4}$ до $a = 0,5$). При больших $|x|$ для $U(a, x)$ можно получить следующее асимптотическое разложение:

$$U(a, x) \sim \frac{a}{\pi x^2} \sum_{j=0}^{\infty} C_j(a) \frac{(2j+1)!}{x^{2j}}, \quad (7.24)$$

где

$$C_j(a) = \sum_{i=0}^j (-1)^i \frac{a^{2i}}{(2i+1)!(j-i)! 2^{2(j-i)}}. \quad (7.25)$$

При $a \geq 10^{-4}$ и $x \geq 5$ формула

$$U(a, x) \sim \frac{a}{\pi x^2} \left[1 + \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{1}{x^2} + \left(\frac{15}{4} - 5a^2 + a^4 \right) \frac{1}{x^4} \right] \quad (7.26)$$

обеспечивает точность в четыре значащие цифры; при $x \geq 10$ она дает уже шесть верных знаков.

Пользуясь (7.26), из (6.13) находим, что

$$G_V(z) \sim \frac{2}{3} \frac{\sqrt{aU(a, 0)}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{1}{az} + \dots \right] \quad (z \rightarrow \infty). \quad (7.27)$$

Можно также показать, что при достаточно больших τ

$$M_1^V(\tau) \sim \sqrt{aU(a, 0)} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{1}{a\tau} + \dots \right], \quad (7.28)$$

$$L_V(\tau) \sim \frac{2}{3} \sqrt{aU(a, 0)} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left[1 - \frac{3}{20} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{1}{a\tau} + \dots \right]. \quad (7.29)$$

Асимптотики $M_2^V(\tau)$ и $K_V(\tau)$ получаются отсюда дифференцированием по τ , так как

$$M_2(\tau) = -\frac{d}{d\tau} M_1(\tau), \quad K(\tau) = -\frac{d}{d\tau} L(\tau). \quad (7.30)$$

Имеем поэтому

$$M_2^V(\tau) \sim \frac{\sqrt{aU(a, 0)}}{2} \frac{1}{\tau^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \pi U(a, 0) \frac{1}{a\tau} + \dots \right], \quad (7.31)$$

$$K_V(\tau) \sim \frac{\sqrt{aU(a, 0)}}{3} \frac{1}{\tau^{3/2}} \left[1 - \frac{9}{20} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{1}{a\tau} + \dots \right]. \quad (7.32)$$

Следует сказать несколько слов об области применимости этих асимптотических выражений. Возьмем к примеру $M_1^V(\tau)$. Из (7.28) ясно, что этим разложением можно пользоваться лишь тогда, когда второе слагаемое в квадратных скобках мало по сравнению с единицей. Поскольку во всех практически интересных случаях значение a мало, множитель при $1/a\tau$ в квадратных скобках по порядку не отличается от единицы, и сформулированное только что условие принимает вид

$$a\tau \gg 1. \quad (7.33)$$

Только при таких τ и годится формула (7.28). То же самое можно сказать и о формулах (7.29), (7.31) и (7.32). Область их применимости зависит, таким образом, от значения a и тем шире, чем больше a .

Значения функции $\frac{A}{2} K(A\tau)$ для фойгтовского коэффициента поглощения с $a = 0,001$ и $0,01$, а также для доплеровского ($a = 0$) и лоренцовского ($a = \infty$) профилей приведены в табл. 2, заимствованной из работы Ю. Эвретта и

Таблица 2

Функция $\frac{A}{2} K(A\tau)$

$\lg \tau$	$a = 0$	$a = 0,001$	$a = 0,01$	$a = \infty$
-4	1,8861	1,8833	1,8587	8,0883 -1
-3	1,4269	1,4249	1,4067	6,2561 -1
-2	9,6842 -1	9,6711 -1	9,5549 -1	4,4255 -1
-1	5,1728 -1	5,1668 -1	5,1137 -1	2,6102 -1
0	1,3071 -1	1,3066 -1	1,3016 -1	9,3712 -2
+1	2,1316 -3	2,1363 -3	2,1803 -3	6,4738 -3
+2	1,2570 -5	1,2718 -5	1,4547 -5	1,6913 -4
+3	9,9495 -8	1,1142 -7	3,2428 -7	5,2779 -6
+4	8,5043 -10	2,6470 -9	1,6138 -8	1,6669 -7
+5	7,5518 -12	1,5907 -10	5,2591 -10	5,2705 -9
+6	6,8624 -14	5,2592 -12	1,6663 -11	1,6667 -10
+7	6,3334 -16	1,6663 -13	5,2704 -13	5,2705 -12
+8	5,9108 -18	5,2705 -15	1,6667 -14	1,6667 -13
+9	5,5630 -20	1,6667 -16	5,2705 -16	5,2705 -15
+10	5,2703 -22	5,2705 -18	1,6667 -17	1,6667 -16

Д. Хаммера [1]. Здесь, как всегда, A есть постоянная, нормирующая на единицу интеграл от $\alpha(x)$ по всем x . Для $K_V(\tau)$ получены также приближенные представления в виде сумм экспонент, позволяющие с довольно высокой точностью быстро вычислять $K_V(\tau)$ на ЭВМ, не прибегая к численному интегрированию (Ю. Эвретт и Р. Лёзер [1]).

Что касается функций $V_V(u)$ и $\mathcal{U}_V(z)$, то

$$V_V(u) \sim 1 - \frac{\sqrt{2\pi a U(a, 0)}}{3} u^{1/2} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{u}{a} + \dots \right] \quad (u \rightarrow 0), \quad (7.34)$$

$$\mathcal{U}_V(z) \sim 1 - \frac{\sqrt{\pi a U(a, 0)}}{3} \frac{1}{z^{1/2}} \left[1 + \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{1}{az} + \dots \right] \quad (z \rightarrow \infty). \quad (7.35)$$

3) Лоренцовский профиль:

$$\alpha_L(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (7.36)$$

При лоренцовском коэффициенте поглощения удастся получить значительно более подробную информацию, чем в двух предыдущих случаях. Большинство интересующих нас величин выражается через известные функции.

Нормировочная постоянная A_L равна $1/\pi$. Далее,

$$G_L(z) = \begin{cases} a_1^L = \frac{1}{2} & \text{при } z \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z-1}}{z} \right) & \text{при } z > 1. \end{cases} \quad (7.37)$$

При $z > 1$ функция $G_L(z)$ разлагается в ряд

$$G_L(z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{z^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j+3)(2j)!!} \frac{1}{z^j}. \quad (7.38)$$

Постоянные a_j^L и \tilde{a}^L равны

$$a_j^L = \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!}; \quad \tilde{a}^L = \frac{1}{2} - \ln 2. \quad (7.39)$$

Функции $M_1^L(\tau)$ и $M_2^L(\tau)$ выражаются через бesselевы функции чисто мнимого аргумента:

$$M_1^L(\tau) = e^{-\frac{\tau}{2}} I_0\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad (7.40)$$

$$M_2^L(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\tau}{2}} \left[I_0\left(\frac{\tau}{2}\right) - I_1\left(\frac{\tau}{2}\right) \right], \quad (7.41)$$

так что их можно считать известными. Подставив сюда асимптотики бesselевых функций, получим ($\tau \gg 1$)

$$M_1^L(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau^{1/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(2j-1)!!]^2}{2^j (2j)!!} \frac{1}{\tau^j}, \quad (7.42)$$

$$M_2^L(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau^{3/2}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!! (2j+1)!!}{2^{j+1} (2j)!!} \frac{1}{\tau^j}. \quad (7.43)$$

Вообще,

$$M_k^L(\tau) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}^{k-\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!! (2j+2k-3)!!}{2^{j+k-1} (2j)!!} \frac{1}{\tau^j}. \quad (7.44)$$

Из (7.44) с помощью (6.7) легко получить асимптотические разложения функций $N_{kn}^L(\tau)$ при $\tau \gg 1$:

$$N_{kn}^L(\tau) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}^{k-\frac{1}{2}}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!! (2j+2k-3)!!}{2^{j+k-2} [2(j+k+n)-3] (2j)!!} \frac{1}{\tau^j}. \quad (7.45)$$

В частности,

$$K_L(\tau) \sim \frac{1}{3\sqrt{\pi}\tau^{3/2}} \left(1 + \frac{9}{20} \frac{1}{\tau} + \frac{135}{224} \frac{1}{\tau^2} + \frac{175}{128} \frac{1}{\tau^3} + \dots \right), \quad (7.46)$$

$$L_L(\tau) \sim \frac{2}{3\sqrt{\pi}\tau^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{20} \frac{1}{\tau} + \frac{27}{224} \frac{1}{\tau^2} + \frac{25}{128} \frac{1}{\tau^3} + \dots \right). \quad (7.47)$$

Функции $V_L(u)$ и $\mathcal{U}_L(z)$ имеют вид

$$V_L(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2u}} (\sqrt{1+u^2} + u)^{1/2} + \frac{1}{2u} \operatorname{arctg} [\sqrt{2u} \times \\ \times (\sqrt{1+u^2} + u)^{1/2}], \quad (7.48)$$

$$\mathcal{U}_L(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1+z} - \frac{1}{2} \sqrt{1-z} + \frac{z}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1+z}}{1 + \sqrt{1-z}} \\ \text{при } 0 \leq z \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1+z} + \frac{z}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1+z}}{\sqrt{z}} \\ \text{при } z > 1 \end{cases} \quad (7.49)$$

и разлагаются в ряды

$$V_L(u) = 1 - \sqrt{2u} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{(2j-1)!!}{(2j+3)(2j)!!} u^j \quad (0 < u < 1), \quad (7.50)$$

$$\mathcal{U}_L(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{(2j+3)(2j)!!} \frac{1}{z^j} \quad (z > 1), \quad (7.51)$$

где $[a]$ — наибольшее целое, не превосходящее a .

Формулы (7.48) и (7.49) проще всего получаются с помощью соотношений (7.13) и (7.17). При лоренцовском коэффициенте поглощения интегралы, входящие в правые части этих формул, сравнительно легко вычисляются. Имеем

$$\frac{d}{du} [uV_L(u)] = 1 - \left[\frac{u(u + \sqrt{1+u^2})}{2(1+u^2)} \right]^{1/2}, \quad (7.52)$$

$$-z^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{z} \mathcal{U}_L(z) \right] = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+z}}, & 1 \leq z < \infty, \\ 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+z}} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-z}}, & \end{cases} \quad (7.53)$$

причем второе из выражений (7.53) справедливо при всех комплексных z с $\operatorname{Re} z \geq 0$, за исключением точек вещественной оси $[1, \infty)$. Интегрируя (7.52) и (7.53) соответственно по u и z , приходим к (7.48) и (7.49).

МОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ РАССЕЯНИЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДАХ

Перенос излучения в частотах спектральных линий обладает рядом особенностей, существенно отличающих эти проблемы от классических задач о монохроматическом рассеянии и эквивалентных им в математическом отношении проблем диффузии тепловых нейтронов. Нам не раз придется говорить об этих различиях. Поэтому кажется целесообразным предпослать решению проблем переноса излучения в частотах спектральных линий специальную главу, посвященную монохроматическому рассеянию. Она призвана сообщить читателю некоторые важные факты, относящиеся к этой области. Дальнейшие сведения можно найти в ряде монографий (Э. Хопф [1], С. Чандрасекар [1], В. Курганов [1], К. Кейс, Ф. Гофман и Г. Плачек [1], В. В. Соболев [1], Б. Дэвисон [1], И. Басбридж [1], Дж. Винг [1]) и в многочисленных оригинальных работах. Некоторые из них будут указаны ниже.

§ 3.1. Точечный источник в бесконечной однородной среде

Первый вопрос теории монохроматического рассеяния, который мы рассмотрим, — это расчет поля излучения изотропного точечного источника, находящегося в бесконечной однородной среде. Совместим начало координат с источником и обозначим через S_r функцию источников этой задачи, т. е. отношение коэффициента излучения к коэффициенту поглощения. Индикатрису рассеяния будем считать сферической. Из соображений симметрии ясно, что

функция источников должна зависеть только от расстояния от источника r , которое удобно измерять в оптических единицах (в длинах свободного пробега кванта). Функция $S_p(\tau, \lambda)$ определяется интегральным уравнением Пайерлса (см. § 2.1)

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{\exp[-|\tau - \tau'|]}{|\tau - \tau'|^2} S_p(\tau', \lambda) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}. \quad (1.1)$$

Здесь $\tau = \{\tau_x, \tau_y, \tau_z\}$ — оптический радиус-вектор, $\tau = |\tau|$ — оптическое расстояние от источника, λ — вероятность выживания кванта при рассеянии (отношение сечения рассеяния к полному сечению). Интегрирование в (1.1) распространяется на все пространство. При написании этого уравнения принято, что мощность источника (в расчете на единичный интервал частот) равна $4\pi/\sigma^2$, где σ — коэффициент поглощения, или, точнее, коэффициент экстинкции (полное макроскопическое сечение). Индекс p у функции источников подчеркивает, что она описывает поле излучения точечного источника (сокращение от *point*).

Физический смысл уравнения (1.1) состоит в следующем. Излучение объема, расположенного на расстоянии τ от источника, складывается из двух частей — рассеянного этим объемом прямого излучения источника и переизлучаемой им радиации, приходящей из всех других точек среды. Это уравнение есть частный случай обсуждавшегося в § 2.4 уравнения (2.4.26), описывающего перенос излучения в частотах линии в сферически-симметричной среде, соответствующий прямоугольному профилю коэффициента поглощения, $\lambda = \text{const}$ и $S^*(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}$.

Прежде чем решать уравнение (1.1), несколько его преобразуем. Пусть компоненты оптического радиуса-вектора точки наблюдения M есть τ_x, τ_y, τ_z . Проинтегрируем функцию источников $S_p(\tau, \lambda)$ вдоль плоскости $\tau_z = \text{const}$. Обозначим получающуюся в результате величину через $\Phi_\infty(\tau_z, \lambda)$, т. е. положим

$$\Phi_\infty(\tau_z, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\tau, \lambda) d\tau_x d\tau_y. \quad (1.2)$$

Переходя от прямоугольных координат τ_x, τ_y, τ_z к цилиндрическим (τ_1, φ, τ_z ; см рис. 4), находим

$$\Phi_{\infty}(\tau_z, \lambda) = 2\pi \int_0^{\infty} S_p(\tau, \lambda) \tau_1 d\tau_1. \quad (1.3)$$

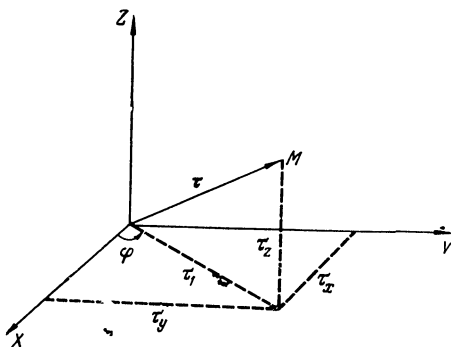


Рис. 4. К преобразованию уравнения для функции источников.

Учитывая, что

$$\tau^2 = \tau_1^2 + \tau_z^2,$$

окончательно имеем

$$\Phi_{\infty}(\tau_z, \lambda) = 2\pi \int_{|\tau_z|}^{\infty} S_p(\tau, \lambda) \tau d\tau. \quad (1.4)$$

Аналогичным образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} d\tau_x d\tau_y = 2\pi \int_{|\tau_z|}^{\infty} \frac{e^{\tau}}{\tau} d\tau = 2\pi E_1(|\tau_z|) \quad (1.5)$$

и, наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-|\tau - \tau'|]}{|\tau - \tau'|^2} d\tau_x d\tau_y = 2\pi E_1(|\tau_z - \tau'|). \quad (1.6)$$

Поэтому, если уравнение (1.1) проинтегрировать по всем

τ_x и τ_y , получим

$$\Phi_{\infty}(\tau_z, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau_z - \tau'_z|) d\tau'_z \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_p(\tau', \lambda) d\tau'_x d\tau'_y + \\ + \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau_z|). \quad (1.7)$$

Пользуясь еще раз (1.2) и заменяя для простоты обозначение независимой переменной τ_z на τ , окончательно приходим к следующему уравнению для $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$:

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \Phi_{\infty}(\tau', \lambda) d\tau' + \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau|). \quad (1.8)$$

Из него видно, что $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ является четной функцией, так что достаточно найти ее для $\tau > 0$.

Решив уравнение (1.8), мы получаем и решение уравнения (1.1), так как $S_p(\tau, \lambda)$ и $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ связаны соотношением

$$S_p(\tau) = -\frac{1}{2\pi\tau} \frac{d}{d\tau} \Phi_{\infty}(\tau), \quad (1.9)$$

вытекающим из (1.4).

Уравнение (1.8) относится к классу уравнений, стандартным методом решения которых является использование преобразования Фурье или двустороннего преобразования Лапласа (см., например, Е. Титчмарш [1], Ф. Морс и Г. Фешбах [1]). Условимся обозначать одностороннее преобразование Лапласа от функции $f(\tau)$ через $\bar{f}(s)$:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} f(\tau) d\tau. \quad (1.10)$$

В результате применения к уравнению (1.8) двустороннего преобразования Лапласа и использования теоремы о свертке получим

$$\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda) + \bar{\Phi}_{\infty}(-s, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{\bar{E}_1(s) + \bar{E}_1(-s)}{1 - \frac{\lambda}{2} \bar{E}_1(s) - \frac{\lambda}{2} \bar{E}_1(-s)}. \quad (1.11)$$

Но

$$\bar{E}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} E_1(\tau) d\tau = \int_0^1 \frac{d\mu}{1+s\mu} = \frac{1}{s} \ln(1+s), \quad (1.12)$$

так что последнюю формулу можно записать также в виде

$$\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda) + \bar{\Phi}_{\infty}(-s, \lambda) = \frac{\frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}}{1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}}. \quad (1.13)$$

Для получения $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ при $\tau > 0$ нужно обратить преобразование Лапласа, т. е. вычислить контурный интеграл

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda) e^{s\tau} ds, \quad (1.14)$$

где σ_0 должно быть таким, чтобы все особенности $\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda)$ лежали слева от прямой $\operatorname{Re} s = \sigma_0$. Нас интересует решение уравнения (1.8), ограниченное на бесконечности. Преобразование Лапласа такого решения $\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda)$ представляет собой функцию комплексной переменной s , регулярную в правой полуплоскости. Поэтому в формуле (1.14) можно положить $\sigma_0 = 0$, взяв за путь интегрирования мнимую ось. Воспользовавшись (1.13) и учтя регулярность $\bar{\Phi}_{\infty}(-s, \lambda)$ в левой полуплоскости, вытекающую из регулярности $\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda)$ в правой полуплоскости, вместо (1.14) можем написать

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}} - 1 \right) e^{s\tau} ds. \quad (1.15)$$

Замена $s = iu$ приводит этот интеграл к виду

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{arctg} u}{u - \lambda \operatorname{arctg} u} \cos \tau u du. \quad (1.16)$$

Наконец, применение соотношения (1.9) дает

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi^2\tau} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \operatorname{arctg} u}{u - \lambda \operatorname{arctg} u} u \sin \tau u du. \quad (1.17)$$

Эта формула неудобна для вычислений, так как под интегралом стоит осциллирующая функция. Можно, однако, указать другой путь преобразования интеграла (1.15), приводящий к выражению, свободному от этого недостатка.

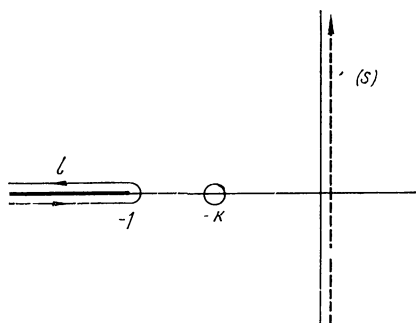


Рис. 5. Контур интегрирования для вычисления функции источников при монохроматическом рассеянии.

Этот путь состоит в деформировании контура интегрирования.

При $\text{Re } s < 0$ подынтегральная функция имеет следующие особенности:

1) полюс на вещественной оси в точке $s = -k$, где k — положительный корень так называемого характеристического уравнения

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1; \quad (1.18)$$

2) точку ветвления $s = -1$, в которой $\ln(1+s)$ неоднозначен. Проведем разрез вдоль вещественной оси от $-\infty$ до -1 и деформируем контур интегрирования в (1.15) так, чтобы он охватывал все особенности подынтегральной функции, лежащие в левой полуплоскости (рис. 5). Для вычисления интеграла вдоль разреза заметим, что на верхнем его берегу $s = x + i0$, и

$$1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s} = 1 - \frac{\lambda}{2x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{\lambda\pi}{2x} i,$$

тогда как на нижнем $s = x - i0$, так что

$$1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s} = 1 - \frac{\lambda}{2x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{\lambda\pi}{2x} i.$$

Поэтому интеграл по контуру l , охватывающему разрез, равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + \frac{\lambda\pi}{2x} i} - 1 \right] e^{\tau x} dx + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{1}^{-\infty} \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2x} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{\lambda\pi}{2x} i} - 1 \right] e^{\tau x} dx, \end{aligned}$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}} - 1 \right) e^{\tau s} ds =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau x}}{\left(1 - \frac{\lambda}{2x} \ln \frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\lambda \frac{\pi}{2x}\right)^2} \frac{dx}{x}. \quad (1.19)$$

Подсчитаем теперь вклад в интеграл (1.15), даваемый полюсом $s = -k$. Вычет в этом полюсе равен

$$\operatorname{Res} = \frac{k(1-k^2)}{\lambda-1+k^2} e^{-k\tau}.$$

Дифференцируя (1.18) по λ , убеждаемся в том, что коэффициент при $e^{-k\tau}$ есть не что иное, как $\lambda \left| \frac{dk}{d\lambda} \right|$. Поэтому полюсной член записывается как

$$\lambda \left| \frac{dk}{d\lambda} \right| e^{-k\tau}.$$

Полагая в (1.19) $x = \frac{1}{\mu}$, добавляя вклад от полюса и учитывая четность $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$, окончательно получаем

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| e^{-k|\tau|} + \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{|\tau|}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu} \right\}, \quad (1.20)$$

где

$$R(\mu, \lambda) = \left\{ \left(1 - \frac{\lambda\mu}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 + \left(\lambda \frac{\pi}{2} \mu\right)^2 \right\}^{-1}. \quad (1.21)$$

С помощью соотношения (1.9) из (1.20) находим, что поле излучения изотропного точечного источника мощности $4\pi / \sigma^2$, находящегося в бесконечной однородной среде, характеризуется функцией источников

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \left\{ \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| e^{-k\tau} + \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu^2} \right\}. \quad (1.22)$$

Вывод этого выражения и составлял основную задачу настоящего параграфа. В дальнейшем мы детально его проанализируем. В большинстве стандартных руководств по теории переноса такой анализ либо отсутствует, либо дается очень кратко, причем ряд вопросов, представляющих для

нас особый интерес, вовсе остается в стороне. Исключение составляет редко встречающаяся у нас книга К. Кейса, Ф. Гофмана и Г. Плачека [1], из которой в основном и взяты результаты, приводимые в ближайших параграфах.

§ 3.2. Диффузионная длина и связанные с нею величины

Характер светового поля при монохроматическом рассеянии в значительной мере определяется введенным выше параметром k . Как мы помним, величина k представляет собой положительный корень трансцендентного характеристического уравнения (1.18)

и определяет положение полюса преобразования Лапласа функции $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$. В § 3.3 показывается, что вдали от источника поле излучения целиком определяется значением k .

Корень характеристического уравнения и ряд связанных с ним величин играют важную роль и в других задачах о монохроматическом рассеянии. Рассмотрим их поведение в функции параметра λ .

Величина k представляет собой монотонную функцию λ , изменяющуюся от $k = 1$ при $\lambda = 0$ до $k = 0$ при $\lambda = 1$

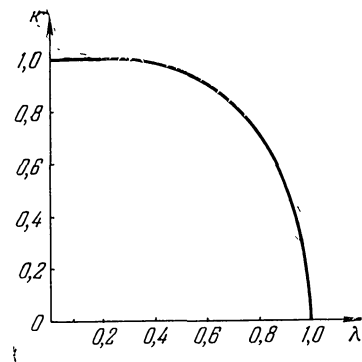


Рис. 6. Корень характеристического уравнения k как функция альбедо однократного рассеяния λ .

(рис. 6). Величина, обратная k , называется *диффузионной длиной*. Мы будем обозначать ее τ_d . Существенно подчеркнуть, что диффузионная длина заметно отличается от единицы, т. е. от длины свободного пробега кванта, только тогда, когда относительная роль поглощения мала. Например, если при рассеянии выживает каждый второй квант ($\lambda = 0,5$), диффузионная длина больше длины свободного пробега кванта еще всего примерно на 5%. При $\lambda = 0,9$ она становится приблизительно вдвое больше, и только при очень малом поглощении ($1 - \lambda \lesssim 0,01$) диффузионная длина и длина свободного пробега становятся величинами разного порядка.

Из (1.18) нетрудно получить следующие асимптотические разложения, удобные для расчетов при малых λ :

$$k \sim 1 - 2e^{-\frac{2}{\lambda}} \left(1 + \frac{4-\lambda}{\lambda} e^{-\frac{2}{\lambda}} + \frac{24-12\lambda+\lambda^2}{\lambda^2} e^{-\frac{4}{\lambda}} + \dots \right), \quad (2.1)$$

$$k^2 \sim 1 - 4e^{-\frac{2}{\lambda}} \left(1 + \frac{4-2\lambda}{\lambda} e^{-\frac{2}{\lambda}} + \frac{24-20\lambda+3\lambda^2}{\lambda^2} e^{-\frac{4}{\lambda}} + \dots \right). \quad (2.2)$$

В противоположном случае, когда $1 - \lambda \ll 1$, имеем

$$\frac{k}{\sqrt{3(1-\lambda)}} = 1 - \frac{2}{5}(1-\lambda) - \frac{12}{175}(1-\lambda)^2 - \frac{2}{125}(1-\lambda)^3 + \dots, \quad (2.3)$$

$$\frac{k^2}{3(1-\lambda)} = 1 - \frac{4}{5}(1-\lambda) + \frac{4}{175}(1-\lambda)^2 + \frac{4}{175}(1-\lambda)^3 + \dots \quad (2.4)$$

Отсюда видно, что в предельном случае очень слабого поглощения диффузионная длина равна $1/\sqrt{3(1-\lambda)}$.

Из (1.18) следует, что

$$-\frac{dk^2}{d\lambda} = \frac{2k^2(1-k^2)}{\lambda(\lambda-1+k^2)}. \quad (2.5)$$

Эта величина уже встречалась нам — она стоит множителем при экспоненциальном члене в формуле (1.22). Дифференцируя (2.2) и (2.4), находим для нее следующие полезные разложения:

$$-\frac{dk^2}{d\lambda} \sim \frac{8}{\lambda^2} e^{-\frac{2}{\lambda}} \left(1 + \frac{8-6\lambda}{\lambda} e^{-\frac{2}{\lambda}} + \frac{72-84\lambda+19\lambda^2}{\lambda^2} e^{-\frac{4}{\lambda}} + \dots \right) \quad (\lambda \ll 1), \quad (2.6)$$

$$-\frac{dk^2}{d\lambda} = 3 \left[1 - \frac{8}{5}(1-\lambda) + \frac{12}{175}(1-\lambda)^2 + \frac{16}{175}(1-\lambda)^3 + \dots \right] \quad (1-\lambda \ll 1). \quad (2.7)$$

Таблица 3

Корень характеристического уравнения и связанные с ним величины

λ	k	k^2	$-\frac{dk^2}{d\lambda}$	D	δ
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000
0,1	1,0000	1,0000	$0,1649 \cdot 10^{-5}$	0,9000	$0,1484 \cdot 10^{-5}$
0,2	0,9999	0,9998	$0,9094 \cdot 10^{-2}$	0,8001	$0,7277 \cdot 10^{-2}$
0,3	0,9974	0,9948	0,1162	0,7036	$0,8176 \cdot 10^{-1}$
0,4	0,9856	0,9715	0,3733	0,6176	0,2305
0,5	0,9575	0,9168	0,7319	0,5454	0,3992
0,6	0,9073	0,8233	1,1460	0,4859	0,5568
0,7	0,8286	0,6866	1,5900	0,4369	0,6947
0,8	0,7104	0,5047	2,0511	0,3963	0,8128
0,9	0,5254	0,2761	2,5224	0,3622	0,9136
0,92	0,4740	0,2247	2,6175	0,3561	0,9320
0,94	0,4140	0,1714	2,7128	0,3501	0,9498
0,96	0,3408	0,1162	2,8083	0,3443	0,9670
0,98	0,2430	0,0590	2,9041	0,3388	0,9838
0,99	0,1725	0,0298	2,9520	0,3360	0,9919
1,00	0,0000	0,0000	3,0000	0,3333	1,0000

Величина D , определяемая равенством

$$D = \frac{1 - \lambda}{k^2}, \quad (2.8)$$

называется коэффициентом диффузии. Можно показать, что

$$D \sim (1 - \lambda) \left(1 + 4e^{-\frac{2}{\lambda}} + 8 \frac{\lambda + 2}{\lambda} e^{-\frac{4}{\lambda}} + \dots \right) \quad (\lambda \ll 1), \quad (2.9)$$

$$D = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{4}{5} (1 - \lambda) + \frac{108}{175} (1 - \lambda)^2 + \frac{396}{875} (1 - \lambda)^3 + \dots \right] \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (2.10)$$

Кроме того, полезно иметь в виду, что правая часть формулы (2.3) дает разложение $(3D)^{-1/2}$ при $1 - \lambda \ll 1$.

В следующем параграфе мы встретимся с величиной

$$\delta = - \frac{1 - \lambda}{k^2} \frac{dk^2}{d\lambda} = \frac{2(1 - \lambda)(1 - k^2)}{\lambda(\lambda - 1 + k^2)}, \quad (2.11)$$

которая, как оказывается, имеет очень простой физический смысл. Для нее можно получить следующие разложения:

при $\lambda \ll 1$

$$\delta \sim \frac{8}{\lambda^2} e^{-\frac{2}{\lambda}} (1 - \lambda) \left(1 + \frac{8 - 2\lambda}{\lambda} e^{-\frac{2}{\lambda}} + \frac{72 - 36\lambda + 3\lambda^2}{\lambda^2} e^{-\frac{4}{\lambda}} + \dots \right), \quad (2.12)$$

при $1 - \lambda \ll 1$

$$\delta = 1 - \frac{4}{5} (1 - \lambda) - \frac{104}{175} (1 - \lambda)^2 - \frac{68}{175} (1 - \lambda)^3 + \dots \quad (2.13)$$

Значения всех перечисленных только что величин даны в табл. 3.

§ 3.3. Точечный источник в бесконечной среде. Общий анализ решения

Переходим к обсуждению полученного в § 3.1 решения задачи о точечном источнике, находящемся в бесконечной однородной среде. Из формулы (1.22) видно, что функция $\tau S_p(\tau, \lambda)$ представляет собой сумму двух слагаемых. Одно из них — внеинтегральный член — убывает с расстоянием как $e^{-k\tau}$, причем $k < 1$. Второе же, являясь суперпозицией функций $e^{-\frac{\tau}{\mu}}$ с $\mu \leq 1$, должно убывать по крайней мере как $e^{-\tau}$ (в действительности оно стремится к нулю немного быстрее; см. ниже). Поэтому на достаточно больших расстояниях от источника внеинтегральный член должен стать преобладающим. Он описывает асимптотическое поведение решения при $\tau \rightarrow \infty$. Наоборот, интегральное слагаемое можно рассматривать как отклонение от этого асимптотического решения, которое существенно только при сравнительно небольших τ , т. е. вблизи источника. Таким образом, функцию источников (1.22) можно представить в виде

$$S_p(\tau, \lambda) = S_{as}(\tau, \lambda) + S_{ir}(\tau, \lambda), \quad (3.1)$$

где

$$S_{as}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| e^{-k\tau}, \quad (3.2)$$

а $S_{ir}(\tau, \lambda)$ описывает световой режим в ближней зоне.

Индексы «*as*» и «*tr*» означают соответственно «асимптотический» и «переходный». Возможность такого разбиения на асимптотическую и неасимптотическую части является важнейшей особенностью найденного выше решения. Как станет ясно из дальнейшего, эта особенность присуща не одной только задаче о точечном источнике в бесконечной однородной среде, но и всему классу проблем монохроматического рассеяния в целом.

Однако столь ли универсальна в действительности возможность такого разбиения решения на две части? На «достаточно больших» расстояниях от источника экспоненциальный член, конечно, является доминирующим, и указанное разбиение становится законным. Но не оказываются ли эти расстояния одновременно достаточно большими и для того, чтобы можно было просто считать, что сюда излучение источника уже практически не доходит? Когда вероятность выживания кванта заметно отличается от единицы, дело так именно и обстоит.

Чтобы как следует разобраться в этом вопросе, исследуем прежде всего интегральные свойства решения (1.22). Выясним, какую долю из находящихся в среде квантов составляют кванты, которые описываются асимптотической частью решения? Иначе говоря, найдем, чему равно отношение

$$\delta = \frac{\int S_{as}(\tau, \lambda) d\tau}{\int S_p(\tau, \lambda) d\tau}, \quad (3.3)$$

где интегрирование в обоих случаях распространяется на все пространство.

Что касается числителя этого выражения, то он вычисляется непосредственно:

$$\int S_{as}(\tau, \lambda) d\tau = \lambda \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \int_0^{\infty} \tau e^{-k\tau} d\tau = \frac{\lambda}{k^2} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|. \quad (3.4)$$

Несколько сложнее находится интеграл, стоящий в знаменателе. С помощью соотношения (1.9) интегрированием по частям убеждаемся в том, что (при $\lambda < 1$)

$$\int \tau^{2n} S_p(\tau, \lambda) d\tau = 2(2n+1) \int_0^{\infty} \tau^{2n} \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) d\tau \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

При небольших n входящий в правую часть интеграл можно вычислить так. В области регулярности функции $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda)$, т. е. при $\operatorname{Re} s > -k$, ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\infty(s, \lambda) \equiv \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda) e^{-s\tau} d\tau = \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau - \\ - s \int_0^\infty \tau \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau + \frac{s^2}{2} \int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau - \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда следует, что в полосе $-k < \operatorname{Re} s < k$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\infty(s, \lambda) + \bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda) = 2 \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau + \\ + s^2 \int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau + \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.13), получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau + s^2 \int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau + \dots = \\ = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2s} \ln \frac{1+s}{1-s}} - 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Разлагая правую часть в степенной ряд и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s , находим значения интересующих нас интегралов. В частности, оказывается, что

$$\int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}, \quad (3.9)$$

$$\int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{3(1-\lambda)^2}. \quad (3.10)$$

Из (3.5) и (3.9) следует, что

$$\int S_p(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Эта формула имеет очень простой физический смысл. Чтобы понять его, заметим, что отношение полного числа квантов, излучаемых в среде за 1 сек, к числу квантов, поставляемых источниками за единицу времени, дает среднее число рассеяний кванта \bar{N} , так что

$$\bar{N} = \frac{\int S d\tau}{\int S^* d\tau}, \quad (3.12)$$

где S^* — первичная функция источников, а интегрирование распространяется по всему объему рассеивающей среды (подробнее см. § 6.8). Применим эту формулу к разбираемой задаче. В качестве S^* нужно подставить свободный член исходного интегрального уравнения (1.1), а в качестве S — решение этого уравнения $S_p(\tau, \lambda)$. Получим

$$\bar{N} = \frac{\int S_p(\tau, \lambda) d\tau}{4\pi \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2} \tau^2 d\tau} = \frac{1}{\lambda} \int S_p(\tau, \lambda) d\tau, \quad (3.13)$$

что в комбинации с (3.11) дает

$$\bar{N} = \frac{1}{1 - \lambda}. \quad (3.14)$$

Итак, формула (3.11) есть непосредственное следствие того физически очевидного факта, что в однородной бесконечной среде среднее число рассеяний кванта равно $(1 - \lambda)^{-1}$.

После этого небольшого отступления возвратимся к вычислению доли квантов, описываемой асимптотической частью решения. Подставляя (3.4) и (3.11) в (3.3), получаем для нее такое окончательное выражение:

$$\delta = \frac{1 - \lambda}{k^2} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|. \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что она совпадает с величиной δ , введенной в предыдущем параграфе [формулы (2.11)—(2.13)].

Обращаясь к значениям δ , приведенным в табл. 3 (стр. 135), видим, что при сильном поглощении (малые λ) асимптотическая часть решения описывает сравнительно небольшую долю всех квантов. Так, при $\lambda = 0,4$ эта доля не превышает 25%, а при $\lambda = 0,3$ она уже меньше 10%. Лишь при почти чистом рассеянии ($1 - \lambda \ll 1$) кванты, находящиеся в той зоне, где уже установился асимптотический

режим, описываемый формулой (3.2), становятся подавляюще преобладающими. Следовательно, чем больше роль поглощения, тем осторожнее нужно быть с заключениями о характере поля излучения, делаемыми по одной лишь асимптотической части решения. В лучшем случае они справедливы в отношении небольшой доли всех квантов. В действительности область значений параметров, где замена точного решения на асимптотическое обеспечивает разумную точность, еще уже, чем можно думать на основании только что приведенных цифр. Основной вклад в интеграл от $S_{as}(\tau, \lambda)$ дают те области, где $S_{tr}(\tau, \lambda)$ еще не мало по сравнению с $S_{as}(\tau, \lambda)$. Поэтому доля квантов, находящихся в асимптотической области, т. е. там, где $S_{as}(\tau, \lambda) \gg \gg S_{tr}(\tau, \lambda)$, оказывается существенно меньше δ .

§ 3.4. Точечный источник в бесконечной среде. Детальный анализ и численные результаты

Обсудив в целом свойства поля излучения точечного источника и выяснив в общих чертах границы применимости асимптотической теории, перейдем теперь к детальному анализу формулы (1.22). Этот анализ, по существу, сводится к исследованию поля излучения в «ближней» зоне, где невозможна замена точного решения (1.22) на асимптотику (3.2). Слово «ближняя» стоит здесь в кавычках потому, что в действительности, как мы видели выше, при малых λ размеры этой зоны очень велики. Существуют особые причины, пробуждающие нас исследовать световой режим в «ближней» зоне со всей возможной тщательностью: изучая рассеяние света в частотах спектральных линий, мы все время будем иметь дело с положением, чрезвычайно сильно напоминающим положение в этой «ближней» зоне.

Рассмотрим сначала поле излучения в непосредственной окрестности источника, т. е. при малых τ . Будем исходить из интегрального уравнения (1.1). Умножая обе его части на τ^2 и переходя к пределу при $\tau \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} + \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{\exp[-|\tau - \tau'|]}{|\tau - \tau'|^2} \times \\ \times S_p(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (4.1)$$

Предел справа равен нулю. Поэтому при достаточно малых τ функция источников

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2}. \quad (4.2)$$

Вклад в $S_p(\tau, \lambda)$, обусловленный излучением, приходящим от источника без рассеяний, равен

$$S^*(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}, \quad (4.3)$$

что при $\tau \ll 1$ совпадает с (4.2). Такого результата, конечно, можно было ожидать заранее.

Поведение $S_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \ll 1$ можно исследовать и более детально. Методика такого исследования, основанного на использовании формул (1.17) и (1.22), излагается со всеми подробностями в § 4.2. Результат оказывается следующим:

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \left[1 + \left(\frac{\lambda\pi^2}{4} - 1 \right) \tau + \left(2\lambda - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \tau^2 \ln \tau \right] + O(1) \quad (\tau \ll 1). \quad (4.4)$$

Что касается интенсивности излучения I , то очевидно, что она зависит от двух переменных — расстояния от источника и угла ϑ между радиусом-вектором и направлением распространения излучения. Можно показать (М. Смит [1]), что при $\mu = \cos \vartheta > 0$ и $\tau \ll 1$

$$I(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \left(\pi - \arcsin \sqrt{1-\mu^2} \right) \frac{1}{\tau} + \left. \begin{array}{l} + O(\ln \tau), \\ I(\tau, -\mu) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} \arcsin \sqrt{1-\mu^2} \frac{1}{\tau} + \\ + O(\ln \tau), \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

или, если перейти от переменной μ к углу ϑ ,

$$I(\tau, \vartheta) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\pi - \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{1}{\tau} + O(\ln \tau) \quad (0 \leq \vartheta \leq \pi; \tau \ll 1). \quad (4.5')$$

Заметим, что в приводимые в статье М. Смита выражения вкрались ошибки: в главном члене разложения пропущен множитель $\lambda/2$, второй же член вообще неверен. Вместо

этого члена в формулах (4.5) и (4.5') дана только оценка порядка его роста при $\tau \rightarrow 0$.

Вернемся к рассмотрению функции источников. Из сравнения формулы (4.4) с (1.22) видно, что при малых τ основной вклад в функцию источников дает неасимптотическая часть решения, т. е. величина

$$S_{tr}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu^2}. \quad (4.6)$$

Ее удобно представить в виде

$$S_{tr}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} e^{-\tau} \xi_p(\tau, \lambda), \quad (4.7)$$

где $\xi_p(\tau, \lambda)$ учитывает отклонение $S_{tr}(\tau, \lambda)$ от «прямопролетного» выражения (4.3). Таким образом,

$$\xi_p(\tau, \lambda) = \tau e^{\tau} \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu^2}. \quad (4.8)$$

Такая форма записи $S_{tr}(\tau, \lambda)$ целесообразна потому, что при не очень больших τ (скажем, при $\tau \leq 20$), функция $\xi_p(\tau, \lambda)$ по порядку величины не отличается от единицы. Ее можно рассматривать как поправочный множитель и при грубых оценках полагать равной единице. Когда же τ велико, функция $\xi_p(\tau, \lambda)$ заметно упрощается, и для нее можно получить сравнительно несложное асимптотическое представление. Покажем, как это делается. Подстановка

$$\mu = \frac{1}{1+x} \quad (4.9)$$

приводит (4.8) к виду

$$\xi_p(\tau, \lambda) = \tau \int_0^{\infty} R\left(\frac{1}{1+x}, \lambda\right) e^{-\tau x} dx. \quad (4.10)$$

При больших τ основной вклад в этот интеграл дают малые x . Но в этой области значений x функцию $R\left(\frac{1}{1+x}, \lambda\right)$ можно приближенно заменить на

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{2}{x}\right)^2 + \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{x}{x_0}\right)^2}, \quad (4.11)$$

где

$$x_0 = 2e^{-\frac{2}{\lambda}}.$$

Подставляя (4.11) вместо R в (4.10) и полагая $y = \tau x$, для $\xi_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \gg 1$ получаем окончательно

$$\xi_p(\tau, \lambda) \sim \left(\frac{2}{\lambda\pi}\right)^2 F(t), \quad (4.12)$$

где

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{1 + \left(\frac{\ln y - t}{\pi}\right)^2} \quad (4.13)$$

и

$$t = \ln 2\tau - \frac{2}{\lambda}. \quad (4.14)$$

Формула (4.12) и дает искомое асимптотическое выражение для $\xi_p(\tau, \lambda)$ при больших τ . Замечательной его особенностью является то, что величина $\lambda^2 \xi_p(\tau, \lambda)$, зависящая от двух переменных, в предельном случае больших τ оказывается довольно простой функцией одной переменной t . Разумеется, это чрезвычайно сильно упрощает дело. В последующих главах мы увидим, что аналогичные упрощения играют огромную роль при исследовании рассеяния в частотах спектральных линий.

Для получения функции источников нужно иметь значения $F(t)$. При $t^2 \ll \pi^2$ эта функция разлагается в ряд Тейлора

$$F(t) = 0,88322 - 0,04684t - 0,11500 \frac{t^2}{2} + 0,01863 \frac{t^3}{3!} + \\ + 0,08280 \frac{t^4}{4!} - 0,0202 \frac{t^5}{5!} \dots, \quad (4.15)$$

который с учетом всех выписанных членов дает $F(t)$ при $|t| \lesssim 0,5$ с четырьмя значащими цифрами. При $t^2 \gg \pi^2$ имеет место асимптотическое разложение

$$F(t) \sim \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 \left[1 - \frac{2\gamma}{t} - \frac{\pi^2 - 6\gamma^2}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^3}\right)\right], \quad (4.16)$$

где γ — постоянная Эйлера. При t , не удовлетворяющих

ни одному из неравенств $|t| \ll \pi$, $|t| \gg \pi$, значения $F(t)$ находятся по формуле (4.13) численным интегрированием (табл. 4).

Таблица 4

Функция $F(t)$

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
-20	0,0259	-2	0,7670	5	0,2600
-18	0,0320	-1	0,8723	8	0,1236
-16	0,0407	-0,5	0,8920	10	0,0835
-14	0,0535	0	0,8832	12	0,0601
-12	0,0732	0,5	0,8460	14	0,0452
-10	0,1058	1	0,7851	16	0,0352
-8	0,1640	2	0,6256	18	0,0281
-5	0,3624	3	0,4686	20	0,0230
-3	0,6208				

Формулы (4.12)—(4.14) определяют $\xi_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \gg 1$. В противоположном предельном случае $\tau \ll 1$ из (4.4) находим

$$\xi_p(\tau, \lambda) = 1 + \left(\frac{\lambda\pi^2}{4} - \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \right) \tau + \left(2\lambda - \frac{\lambda^2\pi^2}{4} \right) \tau^2 \ln \tau + O(\tau^2). \quad (4.17)$$

Для полного определения функции источников $S_p(\tau, \lambda)$ нам недостает теперь только значений $\xi_p(\tau, \lambda)$ в промежуточной области. Их можно найти численным интегрированием по формуле (4.8). В книге К. Кейса, Ф. Гофмана и Г. Плачека [1] приводятся четырехзначные таблицы $\xi_p(\tau, \lambda)$ для $\tau \leq 20$. К сожалению, эти таблицы неточны. Мы даем трехзначную таблицу $\xi_p(\tau, 1)$, полученную округлением значений $\xi_p(\tau, 1)$, приводимых К. Кейсом и др. (табл. 5). При $\tau = 20$ асимптотическое выражение (4.12) обеспечивает уже достаточно хорошую точность (рис. 7).

После исследования неасимптотической части решения полезно еще раз вернуться к вопросу об области применимости асимптотической теории, соответствующей пренебрежению $S_{tr}(\tau, \lambda)$ по сравнению с $S_{as}(\tau, \lambda)$. Пользуясь приведенными выше результатами, легко найти отношение $S_{as}(\tau, \lambda)/S_p(\tau, \lambda)$ в функции τ для различных значений λ .

Соответствующие данные представлены в графической форме на рис. 8.

Функция $\xi_p(\tau, 1)$

Таблица 5

τ	$\xi_p(\tau, 1)$	τ	$\xi_p(\tau, 1)$	τ	$\xi_p(\tau, 1)$
0,0	1,000	0,8	0,791	4,0	0,544
0,1	0,956	0,9	0,775	4,5	0,525
0,2	0,922	1,0	0,761	5,0	0,508
0,3	0,893	1,5	0,702	6,0	0,479
0,4	0,868	2,0	0,657	7,0	0,455
0,5	0,846	2,5	0,621	8,0	0,435
0,6	0,826	3,0	0,591	9,0	0,417
0,7	0,808	3,5	0,565	10,0	0,402

Из рисунка видно, что при слабом поглощении, когда λ близко к единице, уже на расстоянии одной длины свобод-

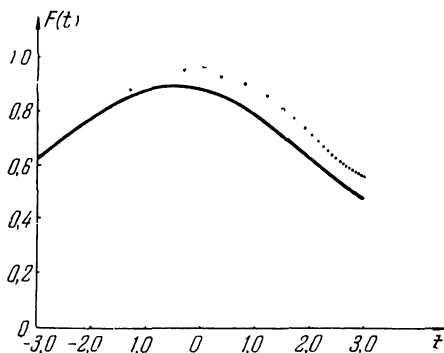


Рис. 7. К оценке точности асимптотики $\xi_p(\tau, \lambda)$.

Сплошная кривая — функция $F(t)$, точки — значения $\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 \xi_p(20, \lambda)$, полученные численным интегрированием по формуле (4.8).

ного пробега от источника основной вклад в функцию источников дает асимптотическая часть решения. В консервативном случае ($\lambda = 1$) пренебрежение $S_{tr}(\tau, 1)$ по сравнению

с $S_{as}(\tau, 1)$ при $\tau \geq 2$ дает ошибку менее 2%. При $\tau \geq 3$ ошибка уже не превышает 0,5%.

Таким образом, при $1 - \lambda \ll 1$ член $S_{tr}(\tau, \lambda)$ следует принимать во внимание лишь при сравнительно небольших τ . Между тем в этой области при $1 - \lambda \ll 1$ можно

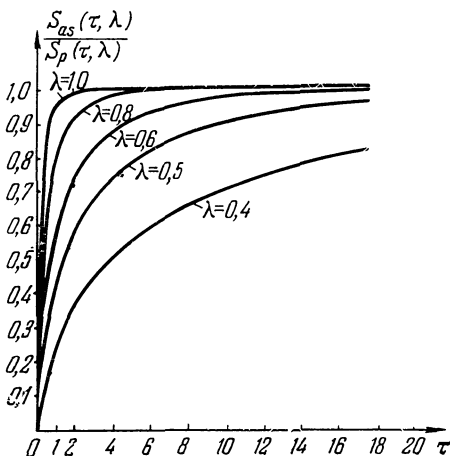


Рис. 8. Доля квантов, описываемая асимптотической частью решения, в функции оптического расстояния от источника.

приближенно принять $S_{tr}(\tau, \lambda)$ равным $S_{tr}(\tau, 1)$. Поэтому при почти консервативном рассеянии функцию источников можно приближенно представить в виде

$$S_p(\tau, \lambda) \sim S_{as}(\tau, \lambda) + S_{tr}(\tau, 1) \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (4.18)$$

Далее, в выражении (3.2) для $S_{as}(\tau, \lambda)$ множитель $\lambda \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|$ можно без большой потери точности заменить главным членом его разложения при $1 - \lambda \ll 1$ [формула (2.7)], а от $S_{tr}(\tau, 1)$ по формуле (4.6) перейти к $\xi_p(\tau, 1)$. Тогда (4.18) примет вид:

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} [3\tau e^{-k\tau} + e^{-\tau} \xi_p(\tau, 1)] \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (4.19)$$

Отсюда следует, что при $\tau \ll \tau_d = \frac{1}{k}$ с точностью до главного члена разложения по $(1-\lambda)^{1/2}$ функция $S_p(\tau, \lambda)$ не отличается от $S_p(\tau, 1)$. Иными словами, при почти консервативном рассеянии на расстояниях от источника, малых по сравнению с диффузионной длиной, поглощением в первом приближении можно пренебрегать. Оно начинает заметно сказываться только с расстояний порядка диффузионной длины. В следующей главе мы увидим, что аналогичная картина наблюдается и при рассеянии света в частотах линий, с той разницей, что размеры «области консервативного рассеяния» определяются не диффузионной длиной, а так называемой длиной термализации.

§ 3.5. Эффект накопления

Выясним теперь, к чему сводится суммарный эффект многократных рассеяний. Точнее говоря, рассмотрим, как изменяется функция источников на заданном расстоянии от источника в результате взаимодействия излучения со средой.

Представим себе, что источник мощности $4\pi/\sigma^2$ находится в пустоте, а на расстоянии r от него помещен «пробный» объем с веществом. Свойства этого вещества (его коэффициент поглощения σ , значение параметра λ и т. д.) будем считать теми же самыми, которыми мы ранее наделяли все вещество, заполняющее пространство. Пусть объем имеет форму цилиндра сечением 1 см^2 и толщиной dr , ось которого направлена на источник. Поток излучения, падающего на этот объем, равен $\frac{4\pi}{\sigma^2} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{1}{r^2}$. Из него за единицу времени поглощается энергия $\sigma dr/r^2$. Доля λ этой энергии излучается затем во все стороны. Поэтому функция источников в таком пробном объеме равна

$$S_0(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2}. \quad (5.1)$$

Если тот же источник находится в бесконечной однородной среде, то на расстоянии τ от него функция источников равна $S_p(\tau, \lambda)$. Поэтому отношение

$$i_p(\tau, \lambda) = \frac{S_p(\tau, \lambda)}{S_0(\tau, \lambda)} = \frac{4\pi\tau^2}{\lambda} S_p(\tau, \lambda) \quad (5.2)$$

показывает, во сколько раз изменяется под влиянием среды излучение пробного объема, находящегося на расстоянии $r = \tau / \sigma$ от источника. Величину $i_p(\tau, \lambda)$ можно назвать

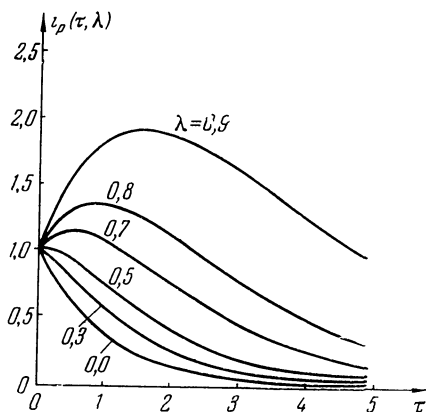


Рис. 9. Коэффициент влияния среды $i_p(\tau, \lambda)$.

коэффициентом влияния среды. Графики $i_p(\tau, \lambda)$ для нескольких значений λ , построенные с использованием данных из книги К. Кейса, Ф. Гофмана и Г. Плачека [1], приведены на рис. 9. Наша цель состоит в обсуждении общего поведения кривых $i_p(\tau, \lambda)$.

При большом поглощении (малые λ) среда сильно ослабляет излучение. В предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ это ослабление происходит экспоненциально ($e^{-\tau}$). С ростом λ убывание коэффициента влияния при возрастании τ становится все более медленным. При $\lambda > \frac{4}{\pi^2} = 0,405$ вокруг источника существует область, где среда действует как своего рода усилитель или, правильнее сказать, накопитель. Однако пока поглощение играет сравнительно большую роль, размеры этой области и «накопление» квантов не очень велики. Так, даже при $\lambda = 0,9$ максимальное значение коэффициента влияния составляет лишь около 1,9, а радиус зоны накопления, где $i_p(\tau, \lambda) > 1$, не превышает 4,8 длин свободного пробега кванта. Только при очень слабом поглощении ($1 - \lambda \ll 1$) эффект накопления становится значительным.

Представляет известный интерес рассмотреть случай почти консервативного рассеяния немного подробнее. Из (5.2) и (4.19) следует, что

$$i_p(\tau, \lambda) \sim 3\tau e^{-k\tau} + e^{-\tau} \xi_p(\tau, 1) \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (5.3)$$

При больших τ второе слагаемое в правой части этой формулы пренебрежимо мало по сравнению с первым, так что при $\tau \gg 1$

$$i_p(\tau, \lambda) \sim 3\tau e^{-k\tau}. \quad (5.4)$$

Из рис. 9 видно, что с уменьшением роли поглощения максимум $i_p(\tau, \lambda)$ быстро сдвигается в сторону больших τ . Поэтому при оценке положения максимума можно исходить из последней формулы. Дифференцируя ее по τ и приравнявая производную нулю, находим, что максимум накопления приходится на расстояние от источника, равное $\tau_{\max} = \frac{1}{k}$. Иначе говоря, при почти консервативном рассеянии максимальное накопление наблюдается на расстоянии, одной диффузионной длины от источника. Принимая во внимание, что при почти консервативном рассеянии $k \sim \sqrt{3(1-\lambda)}$, для коэффициента влияния в максимуме находим из (5.4)

$$i_p(\tau_{\max}, \lambda) \sim \sqrt{\frac{3}{1-\lambda}} e^{-1} \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (5.5)$$

Для определения радиуса зоны накопления τ_1 нужно в (5.4) приравнять $i_p(\tau, \lambda)$ единице:

$$3\tau_1 e^{-k\tau_1} = 1. \quad (5.6)$$

При разумно малых значениях k решение этого уравнения дает для радиуса зоны накопления величину, в несколько раз превышающую диффузионную длину $\tau_d = 1/k$. Например, при $\lambda = 0,99$ из (5.6) находим $\tau_1 \simeq 4,3\tau_d$, при $\lambda = 0,9999$ имеем $\tau_1 \simeq 7,1\tau_d$.

Какова физическая природа эффекта накопления? В пустоте траектории квантов были бы лучами, исходящими из источника. Когда источник окружен веществом, кванты испытывают рассеяния. Их траектории из лучей превращаются в ломаные линии. В результате отток квантов от источника затрудняется, что и служит причиной обсуждае-

мого эффекта. Предел накоплению квантов в бесконечной среде кладет поглощение.

Мы специально столь подробно говорим об этих понятных, почти очевидных вещах. В следующей главе будет исследоваться поле излучения источника, излучающего в частотах спектральной линии. Казалось бы, и здесь положение должно быть таким же. Однако это не так, или, вернее, не совсем так. Возможность изменения частоты при рассеянии сильно меняет картину, в одних случаях резко уменьшая, а в других и вовсе сводя на нет эффект накопления в консервативной области.

§ 3.6. Плоский изотропный источник

Найдя функцию $S_p(\tau, \lambda)$, мы в принципе решили все задачи о рассеянии в бесконечной среде, отличающиеся друг от друга расположением и мощностью первичных источников. В силу линейности уравнения переноса расчет функции источников сводится к простому интегрированию $S_p(\tau, \lambda)$ по распределению источников.

Рассмотрим один важный частный случай. Будем считать, что источники равномерно распределены вдоль некоторой плоскости и излучают во всех направлениях изотропно. Мощность источников в единичном интервале частот в расчете на 1 см^2 излучающей поверхности примем равной 4π . Выберем систему отсчета так, чтобы начало координат лежало на плоскости, в которой сосредоточены источники. Тогда функция источников будет зависеть только от оптического расстояния τ от этой плоскости. Обозначим функцию источников через $S_{pl}(\tau, \lambda)$ (индекс «*pl*» — сокращение от *plane*, т. е. «плоский»). Пусть τ' — оптическое расстояние от точки наблюдения M до произвольной точки на излучающей плоскости, σr — оптическое расстояние этой точки от основания перпендикуляра, опущенного из M на плоскость (рис. 10). Функция источников $S_{pl}(\tau, \lambda)$ есть суперпозиция вкладов, даваемых каждым из «точечных» источников, распределенных вдоль плоскости $\tau = 0$. Учитывая, что S_p относится к источнику мощности $4\pi/\sigma^2$, имеем

$$S_{pl}(\tau, \lambda) = 2\pi \int_0^{\infty} \sigma^2 S_p(\tau', \lambda) r dr. \quad (6.1)$$

Но

$$\tau'^2 = \tau^2 + \sigma^2 r^2.$$

Поэтому

$$S_{pl}(\tau, \lambda) = 2\pi \int_{|\tau|}^{\infty} S_p(\tau', \lambda) \tau' d\tau'. \quad (6.2)$$

Из сопоставления (6.2) с (1.4) заключаем, что

$$S_{pl}(\tau, \lambda) = \Phi_{\infty}(\tau, \lambda). \quad (6.3)$$

Таким образом, функция $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ имеет двойкий физический смысл. С одной стороны, как было показано в § 3.1,

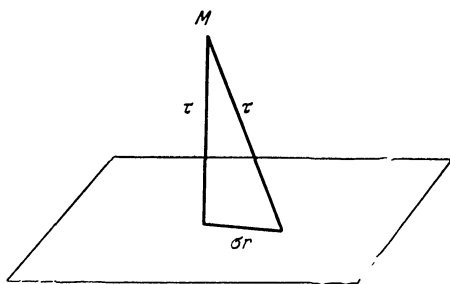


Рис. 10. К выводу формулы (6.2).

она представляет собой интеграл от функции S для точечного изотропного источника мощности $4\pi/\sigma^2$, взятый вдоль плоскости, находящейся на расстоянии τ от него. С другой стороны, как мы только что убедились, она дает функцию источников на расстоянии τ от плоскости, изотропно излучающей за 1 сек с каждого квадратного сантиметра энергию 4λ . Никакой неожиданности в этом совпадении, конечно, нет. То, что дело так именно и должно обстоять, вытекает из простых физических соображений.

Теперь можно воспользоваться многими готовыми результатами из предыдущих параграфов. Самый важный из этих результатов — это явное выражение для функции $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$, даваемое формулой (1.20). Подобно $S_p(\tau, \lambda)$, функция $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ есть сумма двух членов — асимптотического

$$\Phi_{as}(\tau, \lambda) = \lambda \left| \frac{dk}{d\lambda} \right| e^{-k|\tau|} \quad (6.4)$$

и неасимптотического

$$\Phi_{tr}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{|\tau|}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}, \quad (6.5)$$

первый из которых преобладает при больших $|\tau|$, а второй — при малых. Неасимптотическую часть целесообразно записать в форме

$$\Phi_{tr}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau|) \xi_{\infty}(\tau, \lambda), \quad (6.6)$$

где $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ показывает, во сколько раз функция $\Phi_{tr}(\tau, \lambda)$ отличается от того значения, которое она имела бы, если бы была обусловлена только рассеянием первого порядка. Значения $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ для $\tau \leq 30$ и $\lambda = 1$ приведены в табл. 6

Функция $\xi_{\infty}(\tau, 1)$

Таблица 6

τ	$\xi_{\infty}(\tau, 1)$	τ	$\xi_{\infty}(\tau, 1)$	τ	$\xi_{\infty}(\tau, 1)$	τ	$\xi_{\infty}(\tau, 1)$
0,0	1,0000	1,2	0,6733	6,0	0,4594	16	0,3352
0,1	0,8679	1,4	0,6548	7,0	0,4385	17	0,3283
0,2	0,8320	1,6	0,6382	8,0	0,4208	18	0,3220
0,3	0,8051	1,8	0,6232	9,0	0,4054	19	0,3161
0,4	0,7830	2,0	0,6095	10	0,3919	20	0,3105
0,5	0,7640	2,5	0,5798	11	0,3799	22	0,3005
0,6	0,7473	3,0	0,5550	12	0,3692	24	0,2916
0,7	0,7322	3,5	0,5338	13	0,3595	26	0,2836
0,8	0,7185	4,0	0,5153	14	0,3507	28	0,2764
0,9	0,7059	4,5	0,4990	15	0,3426	30	0,2698
1,0	0,6943	5,0	0,4844				

(соответствующая таблица в книге К. Кейса, Ф. Гофмана и Г. Плачека [1] неточна; значения $\xi_{\infty}(\tau, 1)$ были вычислены заново).

При $|\tau| \ll 1$ для $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ можно получить следующее разложение:

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left\{ -\ln|\tau| + \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| - \gamma + \rho_{-1}^*(\lambda) \right] + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda\pi^2}{4} \right) |\tau| + \frac{1}{2} \left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{4} - 2\lambda \right) \tau^2 \ln|\tau| \right\} + O(\tau^2), \quad (6.7)$$

где γ — постоянная Эйлера и

$$\rho_{-1}^*(\lambda) = \int_0^1 \frac{R(\mu, \lambda) - 1}{\mu} d\mu. \quad (6.8)$$

Значения $\rho_{-1}^*(\lambda)$ даны в табл. 7. Из (6.7) и (6.6) следует, что при $|\tau| \ll 1$

$$\xi_{\infty}(\tau, \lambda) \sim 1 - \frac{\rho_{-1}^*(\lambda)}{\ln|\tau| + \gamma}. \quad (6.9)$$

Для полного определения функции $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ осталось найти ее при больших $|\tau|$. Так как при $\tau \gg 1$

$$E_1(\tau) \sim \frac{e^{-\tau}}{\tau}, \quad (6.10)$$

из (6.6) находим, что

$$\xi_{\infty}(\tau, \lambda) \sim |\tau| e^{|\tau|} \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{|\tau|}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}. \quad (6.11)$$

Сравним это выражение с (4.8). При больших $|\tau|$ в обоих интегралах основной вклад дают μ , близкие к единице.

Таблица 7

Функция $\rho_{-1}^*(\lambda)$

λ	$\rho_{-1}^*(\lambda)$	λ	$\rho_{-1}^*(\lambda)$
0,0	0,0000	0,6	0,1668
0,1	0,1478	0,7	0,0459
0,2	0,3083	0,8	-0,0715
0,3	0,3991	0,9	-0,1825
0,4	0,3744	1,0	-0,2861
0,5	0,2830		

Поэтому различие на множитель μ в подынтегральных функциях несущественно, и $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ имеет ту же асимптотику, что и $\xi_p(\tau, \lambda)$. Она дается формулами (4.12)—(4.14). Результаты, приведенные в § 3.4, непосредственно применимы и здесь.

На этом можно было бы закончить обсуждение плоского изотропного источника. Однако кажется не лишним сделать ряд дополнительных замечаний. Первое из них касается поведения решения при слабом поглощении. Из (2.3) находим, что при $1 - \lambda \ll 1$ с точностью до главного члена разложения

$$\left| \frac{dk}{d\lambda} \right| \sim \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-\lambda}} \sim \frac{3}{2k}. \quad (6.12)$$

Следовательно, при $\lambda \rightarrow 1$ функция $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$ расходится [см. формулу (1.20)]. Это означает, что в бесконечной консервативно рассеивающей среде с плоским изотропным источником стационарного поля излучения существовать не может. В действительности рассеяние никогда не бывает строго консервативным, а среда — бесконечной. Этим и устраняется расходимость.

Однако стремление $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$ к бесконечности при $\lambda \rightarrow 1$ заметно сказывается на особенностях поля излучения при почти консервативном рассеянии. Здесь имеется в виду следующее. Неасимптотическая часть решения $\Phi_{lr}(\tau, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 1$ остается конечной, и вся расходимость обусловлена асимптотическим членом (6.4). Поэтому, какое бы малое значение τ мы ни взяли, найдется такое λ , начиная с которого $\Phi_{as}(\tau, \lambda)$ будет превосходить $\Phi_{lr}(\tau, \lambda)$. Значит, чем меньше роль поглощения, тем с меньших расстояний точное выражение для $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$ можно заменять на асимптотику $\Phi_{as}(\tau, \lambda)$. В предельном случае очень слабого поглощения ($1 - \lambda \ll 1$) имеем приближенно

$$\Phi_\infty(\tau, \lambda) \sim \frac{3}{2k} e^{-k|\tau|} + \frac{1}{2} E_1(|\tau|) \xi_\infty(\tau, 1). \quad (6.13)$$

Эта формула является аналогом выражения (4.19).

Второе замечание состоит в следующем. До сих пор среда считалась однородной. Для точечного источника это предположение было принципиальным. В случае же плоского источника его можно заменить более слабым требованием, чтобы коэффициент поглощения σ зависел только от расстояния от плоскости, в которой сосредоточены источники (см. § 2.4). Все результаты настоящего параграфа остаются при этом в силе. Изменяется только формула перехода от оптических расстояний к геометрическим.

Вместо $\tau = \sigma z$ имеем

$$\tau = \int_0^z \sigma(z') dz', \quad (6.14)$$

где z — геометрическое расстояние от излучающей плоскости.

Если источники распределены в бесконечной среде таким образом, что их мощность зависит только от одной пространственной координаты τ , то определение функций источников сводится к решению уравнения

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (6.15)$$

где $S^*(\tau)$ описывает распределение и мощность первичных источников. Обозначим через $\Gamma_{\infty}(\tau, \tau')$ резольвенту (6.15), т. е. решение уравнения

$$\Gamma_{\infty}(\tau, \tau') = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau - t|) \Gamma_{\infty}(t, \tau') dt + \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau - \tau'|). \quad (6.16)$$

Из него следует, что резольвента зависит не от самих величин τ и τ' , а лишь от $|\tau - \tau'|$. Поэтому

$$\Gamma_{\infty}(\tau, \tau') = \Gamma_{\infty}(\tau', \tau) \quad (6.17)$$

и

$$\Gamma_{\infty}(\tau + \tau_1, \tau' + \tau_1) = \Gamma_{\infty}(\tau, \tau'), \quad (6.18)$$

где τ_1 — произвольное число. Последнее равенство выражает трансляционную инвариантность резольвенты, т. е. независимость ее от выбора системы отсчета τ .

Иногда вместо резольвенты вводят функцию Грина $G_{\infty}(\tau, \tau')$, определяемую как решение уравнения

$$G_{\infty}(\tau, \tau') = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|\tau - t|) G_{\infty}(t, \tau') dt + \delta(\tau - \tau'), \quad (6.19)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция. Резольвента и функция Грина связаны между собой следующим образом:

$$G_{\infty}(\tau, \tau') = \Gamma_{\infty}(\tau, \tau') + \delta(\tau - \tau'). \quad (6.20)$$

Сравнивая уравнения (6.16) и (1.8) и пользуясь трансляционной инвариантностью резольвенты, находим, что

$$\Gamma_{\infty}(\tau, \tau') = \Gamma_{\infty}(0, \tau - \tau') = \Phi_{\infty}(\tau - \tau'). \quad (6.21)$$

Отметим еще, что резольвента, являясь функцией модуля разности своих аргументов, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial \Gamma_{\infty}}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma_{\infty}}{\partial \tau'} = 0. \quad (6.22)$$

Имея резольвенту уравнения (6.15), его решение можно написать сразу же:

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\tau') \Gamma_{\infty}(\tau, \tau') d\tau', \quad (6.23)$$

или, с учетом (6.21),

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\tau') \Phi_{\infty}(\tau - \tau') d\tau', \quad (6.24)$$

или, наконец, еще так:

$$S(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\tau') G_{\infty}(\tau, \tau') d\tau'. \quad (6.25)$$

Сейчас предполагалось, что мощность источников зависит только от одной из координат. Если же это не так, и $S^* = S^*(\tau)$, то функция источников находится по формуле

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int S^*(\tau') S_p(|\tau - \tau'|) d\tau', \quad (6.26)$$

в которой интегрирование ведется по всему пространству. Величина

$$G_{\infty}(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') + S_p(|\tau - \tau'|) \quad (6.27)$$

является функцией Грина для бесконечной однородной среды.

В дальнейшем будут рассматриваться только такие случаи, когда все величины зависят от одной пространственной координаты. Поэтому мы будем иметь дело только с функцией Грина (6.20), которую также будем называть функцией Грина для бесконечной среды.

§ 3.7. Полубесконечная среда

До сих пор речь шла о рассеянии света в бесконечной среде. Теперь нам предстоит исследовать влияние границ на поле излучения в среде. Геометрия рассеивающего объема может быть самой разнообразной, и изучить влияние границ в общем виде, для объема произвольной формы, конечно, невозможно. Однако если радиус кривизны граничной поверхности по порядку величины превосходит длину свободного пробега кванта, границу приближенно можно считать плоской, и мы приходим к классической задаче о рассеянии света в полубесконечной среде. Такую полубесконечную среду, ограниченную плоскостью, можно, в частности, рассматривать¹ как очень хорошую идеализацию звездной атмосферы. Именно в этой связи и изучалась первоначально эта проблема. Впоследствии с аналогичными задачами пришлось встретиться и при изучении переноса нейтронов.

Полубесконечная среда может считаться хорошей моделью лишь для тех областей среды, где на поле излучения заметным образом влияет только одна (ближайшая) граница. При необходимости учитывать «интерференцию» границ проблема оказывается гораздо сложнее.

Уравнение переноса излучения для плоскопараллельной среды имеет вид (см. § 2.3)

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' - S^*(\tau), \quad (7.1)$$

где μ — косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к границе, τ — оптическая глубина, $S^*(\tau)$ — функция, описывающая распределение первичных источников в среде. Уравнение переноса должно решаться при граничном условии

$$I(0, \mu) = 0 \quad \text{при} \quad \mu < 0, \quad (7.2)$$

соответствующем тому, что на границу среды извне излучение не падает.

Задача (7.1) — (7.2) эквивалентна решению следующего интегрального уравнения для функции источников $S(\tau)$

(см. § 2.4):

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (7.3)$$

Функция источников связана с интенсивностью излучения соотношением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + S^*(\tau). \quad (7.4)$$

Исследованию приведенных только что уравнений посвящена огромная литература, и в любом руководстве по теории многократного рассеяния света можно найти обсуждение методов их решения. Мы ограничимся поэтому простым перечнем основных фактов, отсылая за всеми подробностями к монографиям, упомянутым в начале главы, и к указанным ниже оригинальным работам. Хотя точное решение уравнения (7.3) и получено в явном виде, использование этого решения в практических расчетах крайне обременительно вследствие его громоздкости. Поэтому, не ограничиваясь сводкой формул, мы приводим также таблицы вспомогательных величин, облегчающих их использование. Заметим, что многие из приводимых формул справедливы и в случае рассеяния с полным перераспределением по частотам. Вывод таких соотношений общего характера можно найти в гл. V.

Решение уравнения (7.3) при произвольном свободном члене $S^*(\tau)$ сводится к отысканию его резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$, удовлетворяющей уравнению

$$\Gamma(\tau, \tau') = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - t|) \Gamma(t, \tau') dt + \frac{\lambda}{2} E_1(|\tau - \tau'|). \quad (7.5)$$

Если резольвента $\Gamma(\tau, \tau')$ известна, функция источников находится простым интегрированием:

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int_0^{\infty} S^*(\tau') \Gamma(\tau, \tau') d\tau'. \quad (7.6)$$

Оказывается (см. § 5.1), что для получения резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$, зависящей от двух аргументов, τ и τ' , достаточно найти ее частное значение $\Gamma(0, \tau) = \Gamma(\tau, 0)$, которое мы обозначим через $\Phi(\tau)$:

$$\Phi(\tau) \equiv \Gamma(0, \tau). \quad (7.7)$$

Как следует из (7.5) и (7.7), функция $\Phi(\tau)$ есть (ограниченное на бесконечности) решение уравнения

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau') d\tau' + \frac{\lambda}{2} E_1(\tau). \quad (7.8)$$

Что касается выражения резольвенты через функцию $\Phi(\tau)$, то оно имеет вид

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau' - t) dt, \quad (7.9)$$

где τ — меньшее из чисел τ, τ' (Б. Дэвисон [1], гл. VI; В. В. Соколов [1], гл. VI; см. также § 5.1).

Функция $\Phi(\tau)$ имеет следующий физический смысл. Пусть в полубесконечной среде на оптической глубине τ находится плоский изотропный источник, мощность которого в расчете на 1 см^2 равна 4π . Тогда функция источников на границе среды равна $\Phi(\tau)$. На $\Phi(\tau)$ можно смотреть также как на функцию источников на глубине τ в среде, на границе которой находится плоский изотропный источник с мощностью на единицу площади, равной 4π . Возможность такого двойственного толкования физического смысла функции $\Phi(\tau)$ есть частное проявление принципа обратимости.

Для функции $\Phi(\tau)$ получено следующее явное выражение (И. Н. Минин [1]; см. также § 5.3):

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{e^{-k\tau}}{\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} + \int_0^1 R(\mu, \lambda) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{1}{\varphi(\mu, \lambda)} \frac{d\mu}{\mu} \right], \quad (7.10)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в формуле

(1.20), а $\varphi(\mu, \lambda)$ — решение уравнения

$$\varphi(\mu, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu, \lambda) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu', \lambda)}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (7.11)$$

Функцию $\varphi(\mu)$ будем называть функцией Амбарцумяна (В. А. Амбарцумян [4], [5], см. также [1]). Она играет важную роль во всех задачах об изотропном монохроматическом рассеянии в полубесконечной среде. Справедливости ради следует отметить, что уравнение (7.11) было впервые получено и решено О. Гальперном, Р. Люнебургом и О. Кларком [1], однако их исследование, в отличие от работ В. А. Амбарцумяна, не привлекло к себе должного внимания.

Прежде чем рассматривать функцию $\Phi(\tau, \lambda)$, нужно познакомиться со свойствами функции Амбарцумяна $\varphi(\mu, \lambda)$. Для нее можно получить явное выражение в виде некоторого интеграла. Впервые интегральное представление $\varphi(\mu, \lambda)$ (для частного случая консервативного рассеяния) было найдено Э. Хопфом [1]. Впоследствии для $\varphi(\mu, \lambda)$ были найдены и другие представления. Так, О. Гальперн, Р. Люнебург и О. Кларк [1], а затем независимо от них В. А. Фок [1] показали, что

$$\varphi(\mu, \lambda) = \exp \left\{ -\frac{\mu}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left(1 - \lambda \frac{\operatorname{arctg} u}{u} \right) \frac{du}{1 + \mu^2 u^2} \right\}. \quad (7.12)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при $0 \leq \mu \leq \infty$ функция $\varphi(\mu, \lambda)$ монотонно возрастает с ростом μ , причем

$$\varphi(0, \lambda) = 1; \quad \varphi(\infty, \lambda) = (1 - \lambda)^{-1/2}. \quad (7.13)$$

В большинстве работ функция $\varphi(\mu, \lambda)$ рассматривается только для значений аргумента μ из промежутка $[0, 1]$. Как видно из (7.11), имея $\varphi(\mu, \lambda)$ для этого «основного» промежутка, простым интегрированием можно найти ее значения и при любых других μ .

Имеются многочисленные таблицы $\varphi(\mu, \lambda)$ для $0 \leq \mu \leq 1$. Укажем, в частности, на таблицы, приводимые в книге С. Чандрасекара [1]. Они были составлены путем численного решения уравнения (7.11) методом итераций. Наиболее полными являются таблицы Д. Стиббса и Р. Уира [1], исходивших при их составлении из интегрального представ-

ления $\varphi(\mu, \lambda)$. Табл. 8 является извлечением из данных Д. Стиббса и Р. Уира. Д. Стиббс [1] опубликовал также таблицу $\varphi(\mu, 1)$ для $\mu > 1$.

Таблица 8

Функция $\varphi(\mu, \lambda)$

μ	λ							
	0,5	0,7	0,8	0,9	0,950	0,975	0,995	1,000
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	1,000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,05	1,0443	1,0677	1,0819	1,0997	1,1115	1,1194	1,1293	1,1366
0,10	1,0724	1,1130	1,1388	1,1721	1,1952	1,2111	1,2316	1,2474
0,15	1,0947	1,1503	1,1866	1,2349	1,2694	1,2936	1,3256	1,3508
0,20	1,1135	1,1825	1,2286	1,2914	1,3373	1,3703	1,4146	1,4504
0,25	1,1297	1,2109	1,2663	1,3433	1,4007	1,4427	1,5001	1,5473
0,30	1,1439	1,2364	1,3006	1,3914	1,4605	1,5117	1,5829	1,6425
0,35	1,1566	1,2595	1,3320	1,4363	1,5171	1,5778	1,6635	1,7364
0,40	1,1680	1,2806	1,3611	1,4785	1,5710	1,6414	1,7421	1,8293
0,45	1,1783	1,3000	1,3881	1,5183	1,6225	1,7027	1,8191	1,9213
0,50	1,1877	1,3179	1,4133	1,5560	1,6718	1,7621	1,8946	2,0128
0,55	1,1964	1,3346	1,4368	1,5918	1,7192	1,8196	1,9688	2,1037
0,60	1,2043	1,3501	1,4590	1,6259	1,7647	1,8753	2,0417	2,1941
0,65	1,2117	1,3646	1,4798	1,6583	1,8086	1,9295	2,1134	2,2842
0,70	1,2186	1,3781	1,4995	1,6893	1,8509	1,9822	2,1840	2,3740
0,75	1,2249	1,3909	1,5182	1,7190	1,8918	2,0334	2,2536	2,4635
0,80	1,2309	1,4029	1,5358	1,7474	1,9313	2,0834	2,3222	2,5527
0,85	1,2365	1,4142	1,5526	1,7746	1,9695	2,1320	2,3398	2,6417
0,90	1,2417	1,4250	1,5685	1,8008	2,0065	2,1785	2,4565	2,7306
0,95	1,2466	1,4351	1,5837	1,8259	2,0424	2,2258	2,5223	2,8193
1,00	1,2513	1,4447	1,5982	1,8501	2,0771	2,2710	2,5873	2,9078

Рассмотрим интегральные свойства $\varphi(\mu, \lambda)$. Обозначим через α_i i -й момент функции $\varphi(\mu, \lambda)$, т. е.

$$\alpha_i(\lambda) = \int_0^1 \mu^i \varphi(\mu, \lambda) d\mu \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (7.14)$$

Устремляя в (7.11) μ к бесконечности и пользуясь вторым из равенств (7.13), находим, что

$$\alpha_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}). \quad (7.15)$$

Все остальные моменты выразить через элементарные или специальные функции не удастся, и их приходится находить численным интегрированием. Исключение составляет α_1 при $\lambda = 1$. Можно показать, что при $1 - \lambda \ll 1$

$$\alpha_1(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[1 - \sqrt{3} q(\infty) \sqrt{1 - \lambda} + \frac{7}{5} (1 - \lambda) + \dots \right]. \quad (7.16)$$

Отметим еще, что

$$\alpha_2(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} q(\infty); \quad \alpha_3(1) = \sqrt{3} \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} q^2(\infty) \right]. \quad (7.17)$$

Здесь $q(\infty)$ — значение функции Хопфа $q(\tau)$ на бесконечности (см. § 3.8). Нам встретится в дальнейшем также величина

$$\alpha_{-1}^*(\lambda) = \int_0^1 \frac{\varphi(\mu, \lambda) - 1}{\mu} d\mu, \quad (7.18)$$

представляющая собой сходящуюся часть минус первого момента функции $\varphi(\mu, \lambda)$. Оказывается (Дж. Чемберлин и М. Макэлрой [1]), что

$$\alpha_{-1}^*(\lambda) = 2 \ln \varphi(1, \lambda). \quad (7.19)$$

Значения α_{-1}^* , α_0 , α_1 и α_2 приведены в табл. 9.

Можно показать (см., например, В. В. Соболев [1], гл. IV), что наряду с (7.11) функция $\varphi(\mu, \lambda)$ удовлетворяет также уравнению

$$\varphi(\mu, \lambda) \left(1 - \frac{\lambda \mu}{2} \ln \frac{\mu + 1}{\mu - 1} \right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \mu \int_0^1 \frac{\varphi(\mu', \lambda)}{\mu - \mu'} d\mu', \quad (7.20)$$

причем при $0 \leq \mu \leq 1$ аргумент логарифма следует брать по абсолютной величине, а интеграл в правой части понимать в смысле главного значения. Это уравнение справедливо при всех комплексных μ , кроме $-1 \leq \mu < 0$. Полагая в (7.20) $\mu = 1/k$ и учитывая (1.18), находим, что

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu', \lambda)}{1 - k\mu'} d\mu' = 1. \quad (7.21)$$

Таблица 9

Моменты функции $\varphi(\mu, \lambda)$

λ	α_{-1}^*	α_0	α_1	α_2
0,1	0,0723	1,0263	0,5156	0,3444
0,2	0,1514	1,0557	0,5332	0,3568
0,3	0,2388	1,0889	0,5531	0,3710
0,4	0,3368	1,1270	0,5762	0,3875
0,5	0,4483	1,1716	0,6035	0,4070
0,6	0,5785	1,2251	0,6366	0,4309
0,7	0,7359	1,2922	0,6787	0,4614
0,8	0,9378	1,3820	0,7358	0,5032
0,85	1,0671	1,4416	0,7744	0,5316
0,90	1,2305	1,5195	0,8253	0,5694
0,925	1,3336	1,5700	0,8588	0,5944
0,950	1,4620	1,6345	0,9019	0,6268
0,975	1,6404	1,7269	0,9645	0,6741
0,985	1,7435	1,7818	1,0021	0,7027
0,995	1,9013	1,8679	1,0617	0,7485
1,000	2,1348	2,0000	1,1547	0,8204

Приведем формулы, характеризующие $\varphi(\mu, \lambda)$ при малых и больших μ . Из (7.11) легко получить, что при $\mu \ll 1$

$$\varphi(\mu, \lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \mu + \frac{\lambda}{2} \alpha_{-1}^*(\lambda) \mu + O[(\mu \ln \mu)^2], \quad (7.22)$$

так что производная $\varphi(\mu, \lambda)$ по μ при $\mu \rightarrow 0$ логарифмически расходится. Комбинируя (7.12) и (7.22), можно показать, что при $\mu \rightarrow 0$

$$\ln \varphi(\mu, \lambda) = -\frac{\lambda}{2} \mu \ln \mu + \frac{\lambda}{2} \alpha_{-1}^*(\lambda) \mu + \frac{1}{4} \left(2\lambda - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} \right) \mu^2 + O(\mu^3 \ln \mu). \quad (7.22')$$

Для частного случая $\lambda = 1$ это соотношение было найдено К. Марком [1]. С помощью (7.22') легко получить коэффициенты всех членов разложения $\varphi(\mu, \lambda) - 1$, которые стремятся к нулю при $\mu \rightarrow 0$ медленнее, чем $\mu^3 \ln \mu$. При $\mu > 1$ из (7.11) с помощью (7.15) можно найти, что

$$\frac{1}{\varphi(\mu, \lambda)} = \sqrt{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{2} \left[\frac{\alpha_1(\lambda)}{\mu} - \frac{\alpha_2(\lambda)}{\mu^2} + \frac{\alpha_3(\lambda)}{\mu^3} - \dots \right]. \quad (7.23)$$

Отсюда при $\mu > \frac{\lambda}{2} (1 - \lambda)^{-1/2} \alpha_1(\lambda)$

$$\varphi(\mu, \lambda) = (1 - \lambda)^{-1/2} \left[1 - \frac{\lambda}{2} (1 - \lambda)^{-1/2} \alpha_1(\lambda) \frac{1}{\mu} + \dots \right], \quad (7.24)$$

тогда как при $1 < \mu < \frac{\lambda}{2} (1 - \lambda)^{-1/2} \alpha_1(\lambda)$

$$\varphi(\mu, \lambda) = \frac{2}{\lambda} \frac{\mu}{\alpha_1(\lambda)} \left[1 + \frac{\alpha_2(\lambda)}{\alpha_1(\lambda)} \frac{1}{\mu} + \dots - \frac{2}{\lambda} (1 - \lambda)^{1/2} \frac{\mu}{\alpha_1(\lambda)} + \dots \right]. \quad (7.25)$$

В частности, при чистом рассеянии ($\lambda = 1$) из последней формулы находим, принимая во внимание (7.16) и (7.17),

$$\varphi(\mu, 1) = \sqrt{3} \mu + \sqrt{3} q(\infty) - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{3}{5} - q^2(\infty) \right] \frac{1}{\mu} + O(\mu^{-2}) \quad (\mu > 1). \quad (7.26)$$

Как следует из (7.10), для вычисления $\Phi(\tau, \lambda)$ нужно иметь значения $\varphi(\mu, \lambda)$ при $\mu = 1/k$. Они приведены в

Таблица 10

Значения функции $\varphi(\mu, \lambda)$ при $\mu = \frac{1}{k}$

λ	$\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)$	λ	$\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)$
0,1	1,0363	0,8	1,6955
0,2	1,0786	0,85	1,8743
0,3	1,1269	0,90	2,1710
0,4	1,1843	0,925	2,4193
0,5	1,2552	0,950	2,8340
0,6	1,3479	0,975	3,7656
0,7	1,4799		

табл. 10 (по И. Куцере [1]). При малых $1 - \lambda$ полезно следующее разложение:

$$\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right) = \frac{\sqrt{3}}{2k} + \frac{\sqrt{3}}{2} q(\infty) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left[q^2(\infty) - \frac{13}{15} \right] k + O(k^2). \quad (7.27)$$

При почти консервативном рассеянии ($1 - \lambda \ll 1$) функция $\varphi(\mu, \lambda)$ на «основном» промежутке $[0, 1]$ следующим образом выражается через $\varphi(\mu, 1)$:

$$\varphi(\mu, \lambda) = \varphi(\mu, 1) \left\{ 1 - \sqrt{3}\mu (1 - \lambda)^{1/2} + [3\mu^2 - r(\mu)] \times \right. \\ \left. \times (1 - \lambda) + \sqrt{3}\mu \left[\frac{2}{5} - 3\mu^2 + r(\mu) \right] (1 - \lambda)^{3/2} + \right. \\ \left. + O[(1 - \lambda)^2] \right\}, \quad (7.28)$$

где

$$r(\mu) = \frac{\mu}{2} \int_0^1 R(\mu', 1) \frac{d\mu'}{\mu + \mu'}. \quad (7.29)$$

Значения функции $r(\mu)$ даны в табл. 11. Относительно доказательства этой формулы см. § 5.4. Первые два члена раз-

Таблица 11

Функция $r(\mu)$

μ	$r(\mu)$	μ	$r(\mu)$	μ	$r(\mu)$
0,00	0,0000	0,35	0,2040	0,70	0,2622
0,05	0,0695	0,40	0,2154	0,75	0,2677
0,10	0,1077	0,45	0,2255	0,80	0,2728
0,15	0,1356	0,50	0,2344	0,85	0,2774
0,20	0,1576	0,55	0,2424	0,90	0,2818
0,25	0,1757	0,60	0,2497	0,95	0,2858
0,30	0,1909	0,65	0,2562	1,00	0,2896

ложения легко получить непосредственно из (7.11) с учетом (7.15).

Теперь мы можем перейти к обсуждению свойств функции $\Phi(\tau, \lambda)$. Поступая примерно так же, как и при рассмотрении функции источников для бесконечной среды (см. § 4.2), можно показать, что при $\tau \ll 1$

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left[-\ln \tau - \gamma + \alpha_{-1}^*(\lambda) + \frac{\lambda}{4} \tau \ln^2 \tau - \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{2} (\alpha_{-1}^* + 1 - \gamma) \tau \ln \tau \right] + O(\tau), \quad (7.30)$$

где $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера. Вывод этой формулы, прстой по существу, требует длинных выкладок.

В противоположном предельном случае $\tau \gg 1$ имеем из (7.10)

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} e^{-k\tau}. \quad (7.31)$$

При тех τ , где нельзя воспользоваться ни одной из этих формул, функцию $\Phi(\tau, \lambda)$ следует находить численно из ее явного выражения (7.10). При этом $\Phi(\tau, \lambda)$, подобно $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$, целесообразно представить в форме

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} e^{-k\tau} + E_1(\tau) \xi(\tau, \lambda) \right] \quad (7.32)$$

и табулировать медленно меняющийся поправочный множитель $\xi(\tau, \lambda)$. Этот множитель при не слишком больших τ по порядку величины не отличается от единицы. При больших же τ для него можно получить такое асимптотическое представление:

$$\xi(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{\varphi(1, \lambda)} \left(\frac{2}{\lambda\pi} \right)^2 F(t), \quad (7.33)$$

где $F(t)$ и t даются соответственно формулами (4.13) и (4.14). Таким образом, в асимптотической области $\xi(\tau, \lambda)$ отличается от $\xi_p(\tau, \lambda)$ и $\xi_\infty(\tau, \lambda)$ лишь на постоянный множитель $[\varphi(1, \lambda)]^{-1}$.

При почти консервативном рассеянии вклад второго слагаемого в (7.10) существен лишь при сравнительно небольших τ , где $\xi(\tau, \lambda)$ мало отличается от $\xi(\tau, 1)$. Пользуясь (2.7) и (7.27), находим поэтому, что приближенно

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \sqrt{3} e^{-k\tau} + \frac{1}{2} E_1(\tau) \xi(\tau, 1) \quad (1 - \lambda \ll 1), \quad (7.34)$$

или

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \sqrt{3} (e^{-k\tau} - 1) + \Phi(\tau, 1). \quad (7.35)$$

В отличие от $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$, коэффициент при полюсном экспоненциальном члене в $\Phi(\tau, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 1$ остается ограниченным (он стремится к $\sqrt{3}$). Это связано с влиянием границы, через которую происходит отток квантов, кладущий предел их накоплению.

Функция $\Phi(\tau, \lambda)$ удовлетворяет ряду полезных интегральных соотношений. Приведем их для справок, опуская доказательства.

$$\int_0^{\infty} E_1(\tau) \Phi(\tau, \lambda) d\tau = \alpha_{-1}^*(\lambda), \quad (7.36)$$

$$\int_0^{\infty} E_n(\tau) \Phi(\tau, \lambda) d\tau = \alpha_{n-2}(\lambda) - \frac{1}{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots), \quad (7.37)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau, \lambda) d\tau = (1 - \lambda)^{-1/2} - 1, \quad (7.38)$$

$$\int_0^{\infty} \tau \Phi(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{2} \frac{\alpha_1(\lambda)}{1 - \lambda}, \quad (7.39)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi^2(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{2} \left[\rho_{-1}^*(\lambda) - \alpha_{-1}^*(\lambda) + \frac{1}{k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \right], \quad (7.40)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{\tau} \left[\Phi(\tau, \lambda) - \frac{\lambda}{2k} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{e^{-k\tau}}{\Phi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} \right] d\tau = \\ = \frac{\lambda}{2k(1-k)} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} - 1. \end{aligned} \quad (7.41)$$

При $\lambda = 1$ вместо (7.38)—(7.41) имеем соответственно

$$\int_0^{\infty} [\Phi(\tau, 1) - \sqrt{3}] d\tau = \sqrt{3}q(\infty) - 1, \quad (7.42)$$

$$\int_0^{\infty} \tau [\Phi(\tau, 1) - \sqrt{3}] d\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{3}{5} - q^2(\infty) \right], \quad (7.43)$$

$$\int_0^{\infty} [\Phi^2(\tau, 1) - 3] d\tau = 2q(\infty) - \frac{1}{2}, \quad (7.44)$$

$$\int_0^{\infty} e^{\tau} [\Phi(\tau, 1) - \sqrt{3}] d\tau = \sqrt{3} - 1. \quad (7.45)$$

Все эти соотношения можно получить элементарными средствами. Правда, в ряде случаев выкладки довольно утомительны [в особенности при доказательстве (7.44)].

Интересно также отметить, что функция $\Phi(\tau, 1)$, являющаяся, по определению, ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$ решением интегрального уравнения второго рода

$$\Phi(\tau, 1) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', 1) d\tau' + \frac{1}{2} E_1(\tau), \quad (7.46)$$

есть одновременно решение следующего уравнения первого рода:

$$\int_0^{\infty} E_3(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', 1) d\tau' = \frac{2}{V^3} - E_3(\tau). \quad (7.47)$$

Кроме того, $\Phi(\tau, 1)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_{\tau}^{\infty} E_2(\tau' - \tau) \Phi(\tau', 1) d\tau' - \int_0^{\tau} E_2(\tau - \tau') \Phi(\tau', 1) d\tau' = E_2(\tau). \quad (7.48)$$

Для доказательства этих утверждений продифференцируем (7.47) и (7.48) соответственно два и один раз. В обоих случаях мы приходим к (7.46). Далее, при $\tau = 0$ (7.47) и (7.48) удовлетворяются, так как дают соотношения, непосредственно вытекающие из (7.37). Этим и завершается доказательство.

§ 3.8. Частные задачи о рассеянии света в полубесконечной среде

Расчет светового режима в полубесконечной среде при том или ином распределении в ней первичных источников излучения можно выполнить с помощью общих формул, приведенных в предыдущем параграфе. Поэтому мы ограничимся сводкой результатов, относящихся к двум задачам, которые будут в дальнейшем подробно рассмотрены применительно к рассеянию в частотах спектральных линий.

1. Равномерное распределение источников. Проблема Милна. Нахождение поля излучения в среде с равномерно распределенными источниками сводится к решению уравнения переноса (7.1) или интегрального уравнения

(7.3) при $S^* = \text{const}$. Функция источников равна в этом случае (В. В. Соболев [4]; см. также § 6.1)

$$S(\tau, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}} \Psi(\tau, \lambda), \quad (8.1)$$

где

$$\Psi(\tau, \lambda) = 1 + \int_0^\tau \Phi(\tau', \lambda) d\tau', \quad (8.2)$$

причем она монотонно возрастает от $S(0, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}}$

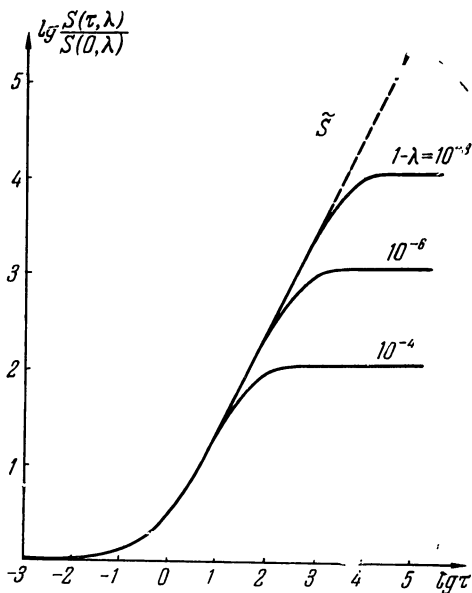


Рис. 11. Зависимость функции источников от глубины в среде с равномерно распределенными источниками (монокроматическое рассеяние).

до $S(\infty, \lambda) = \frac{S^*}{1-\lambda}$ (рис. 11). Интенсивность выходящего излучения оказывается пропорциональной функции

Амбарцумяна $\varphi(\mu, \lambda)$:

$$I(0, \mu) = S^* \frac{\Phi(\mu, \lambda)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (8.3)$$

С увеличением угла выхода излучения из среды интенсивность излучения уменьшается, причем это уменьшение происходит тем быстрее, чем больше λ (рис. 12).

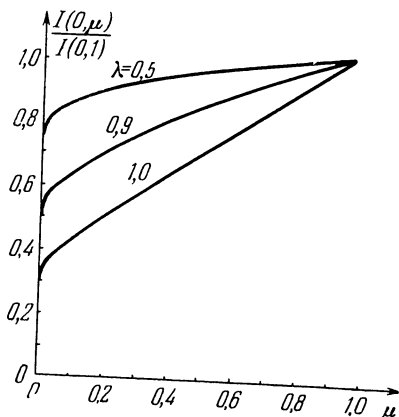


Рис. 12. Угловая зависимость интенсивности излучения, выходящего из полубесконечной среды с равномерным распределением источников.

Рассмотрим подробнее один важный частный случай. Положим $S^* = \sqrt{1-\lambda}$ и перейдем затем к пределу $\lambda \rightarrow 1$. Тогда мы найдем, что решение однородного уравнения

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \tilde{S}(\tau') d\tau', \quad (8.4)$$

нормированное таким образом, что $\tilde{S}(0) = 1$, можно представить в виде

$$\tilde{S}(\tau) = \Psi(\tau, 1) \equiv \sqrt{3} [\tau + q_-(\tau)], \quad (8.5)$$

где

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', 1) d\tau' \right) - \tau. \quad (8.6)$$

Согласно (8.3) интенсивность выходящего излучения равна в этом случае

$$I(0, \mu) = \varphi(\mu, 1). \quad (8.7)$$

С помощью (7.16) из последней формулы находим, что поток выходящего излучения равен при этом $\frac{4}{\sqrt{3}} \pi$.

Решение уравнения (8.4) и определение соответствующей интенсивности выходящего излучения составляет содержание так называемой проблемы Милна, исследованию которой были посвящены десятки, если не сотни работ [см., в частности, книгу В. Курганова [1], почти целиком посвященную этой проблеме]. Формулы (8.5) — (8.7) дают решение проблемы Милна.

Функция $q(\tau)$, входящая в выражение для $\tilde{S}(\tau)$, известна как функция Хопфа¹⁾. Ее явное выражение получается из (8.6) с учетом (7.10). При $\lambda = 1$ из (7.10) находим, пользуясь (2.7) и (7.27),

$$\Phi(\tau, 1) = \sqrt{3} + \frac{1}{2} \int_0^1 R(\mu, 1) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\varphi(\mu, 1) \mu}. \quad (8.8)$$

Подставляя (8.8) в (8.6), приходим к следующему явному выражению для $q(\tau)$, впервые найденному К. Марком [1]:

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 R(\mu, 1) (1 - e^{-\frac{\tau}{\mu}}) \frac{d\mu}{\varphi(\mu, 1)}. \quad (8.9)$$

Из него непосредственно видно, что функция Хопфа монотонно возрастает, причем $q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577\dots$ Значение $q(\infty)$, равное согласно (8.9)

$$q(\infty) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 R(\mu, 1) \frac{d\mu}{\varphi(\mu, 1)}, \quad (8.10)$$

¹⁾ Обобщение функции Хопфа на задачи о рассеянии в частотах линий с перераспределением по частотам дается в работе автора, готовящейся к печати.

было вычислено еще Э. Хопфом [1], который показал, что

$$q(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{1 - \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta} \right) d\vartheta = 0,710 \dots \quad (8.11)$$

Наряду с (8.10) и (8.11), для $q(\infty)$ можно получить множество других интегральных представлений, например,

$$q(\infty) = 1 - r(1),$$

$$q(\infty) = \frac{1}{2} [\alpha_{-1}^*(1) - \rho_{-1}^*(1) - 1],$$

где $r(\mu)$, $\alpha_{-1}^*(\lambda)$ и $\rho_{-1}^*(\lambda)$ даются формулами (7.29), (7.18) и (6.8). Г. Плачек и В. Зайдель [1] переписали (8.11) в форме

$$q(\infty) = \frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{\vartheta^2} - \frac{1}{1 - \vartheta \operatorname{ctg} \vartheta} \right) d\vartheta \quad (8.12)$$

и использовали это выражение для вычисления $q(\infty)$ с восемью знаками. Соу-Шу Хуан [1] и Дж. Кинг, Р. Силларс и Р. Гаррисон [1] различными путями получили $q(\infty)$ с десятью знаками, что, конечно, намного превосходит любые практические потребности. Согласно Соу-Шу Хуану

$$q(\infty) = 0,710\ 446\ 089\ 4\dots,$$

тогда как Дж. Кинг с сотрудниками нашли, что $q(\infty)$ на две единицы последнего знака больше этого значения¹⁾.

Имеются многочисленные таблицы $q(\tau)$ разной точности и подробности. Долгое время рекорд в смысле точности принадлежал таблицам В. Курганова [1], дающим $q(\tau)$ с семью знаками. И здесь пальма первенства недавно перешла к Дж. Кингу, Р. Силларсу и Р. Гаррисону [1], опубликовавшим 8-значную таблицу функции Хопфа. Мы приведем $q(\tau)$ с пятью знаками (табл. 12). При $\tau \ll 1$, как следует из (7.30) и (8.6),

$$q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{2} \tau \ln \tau - \left(\sqrt{3} - \frac{1 + \alpha_{-1}^* - \gamma}{2} \right) \tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} (\tau \ln \tau)^2 - \frac{2\alpha_{-1}^* + 3 - 2\gamma}{16} \tau^2 \ln \tau \right] + O(\tau^2). \quad (8.13)$$

¹⁾ В только что опубликованной работе Ван де Хюлста (J. Comput. Phys. 3, 291, 196) приводится вычисленное К. Гроссманом значение $q(\infty)$ с 12 знаками: $q(\infty) = 0,710\ 446\ 039\ 800\dots$

Таблица 12

Функция Хопфа $q(\tau)$

τ	$q(\tau)$	τ	$q(\tau)$	τ	$q(\tau)$	τ	$q(\tau)$
0,00	0,57735	0,08	0,62185	0,70	0,69011	2,00	0,70792
0,01	0,53824	0,09	0,62499	0,80	0,69353	2,25	0,70367
0,02	0,59539	0,10	0,62792	0,90	0,69629	2,50	0,70919
0,03	0,60124	0,20	0,64955	1,00	0,69854	2,75	0,70955
0,04	0,60629	0,30	0,66337	1,25	0,70257	3,00	0,70931
0,05	0,61076	0,40	0,67309	1,50	0,70513	3,25	0,70999
0,06	0,61479	0,50	0,68029	1,75	0,70630	∞	0,71045
0,07	0,61847	0,60	0,68580				

Это разложение другим путем было получено К. Марком [1]. Его можно использовать для вычисления $q(\tau)$ при малых τ .

Два обстоятельства вызвали столь большой интерес к функции Хопфа. Одно из них имеет практическую или, правильнее сказать, прикладную основу и состоит в том, что решение проблемы Милна теснейшим образом связано с расчетом распределения температуры с глубиной в атмосферах солнечного типа (см., например, А. Унзольд [1]). Второе обстоятельство имеет совсем другой характер. Как видно из (8.6), резольвента интегрального уравнения (7.3) в случае чистого рассеяния связана с функцией Хопфа простым соотношением. Поэтому через $q(\tau)$ можно выразить не только решение самой проблемы Милна, но и всех других задач о консервативном рассеянии в полубесконечной среде.

Возвратимся к изучению среды с равномерно распределенными источниками. Рассмотрим подробнее случай почти консервативного рассеяния ($1-\lambda \ll 1$). Учитывая (7.35) и (8.6), вместо (8.1) имеем приближенно

$$S(\tau, \lambda) \sim \frac{\sqrt{3} S^*}{k \sqrt{1-\lambda}} [1 - e^{-k\tau} + kq(\tau)], \quad (8.14)$$

или, так как $k \sim \sqrt{3(1-\lambda)}$ при $1-\lambda \ll 1$,

$$S(\tau, \lambda) \sim \frac{3S^*}{k^2} [1 - e^{-k\tau} + kq(\tau)]. \quad (8.15)$$

Что касается интенсивности выходящего излучения, то с точностью до главных членов разложения по степеням k находим из (8.3), учитывая (7.28),

$$I(0, \mu) \sim \frac{V\sqrt{3}S^*}{k} \varphi(\mu, 1) (1 - k\mu) \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (8.16)$$

Из (8.15) следует, что на больших расстояниях от границы

$$S(\tau, \lambda) \sim \frac{3S^*}{k^2} (1 - e^{-k\tau}) \quad (\tau \gg 1, 1 - \lambda \ll 1), \quad (8.17)$$

откуда видно, что в этой области величина $k^2 S(\tau, \lambda)$ зависит не от τ и λ , а лишь от их комбинации $t = k\tau$. При $t < 1$ функция источников сравнительно быстро возрастает с удалением от границы. Когда t становится порядка единицы, начинает наступать насыщение (см. рис. 11, стр. 168), и функция источников приближается к своему предельному значению $S(\infty, \lambda) = S^* / 1 - \lambda$. Таким образом, влияние границы заметно сказывается вплоть до глубин, которым соответствуют значения t порядка единицы, т. е. до τ порядка $\tau_d = 1 / k$. Аналогичная картина наблюдается и при рассеянии в частотах линий. Разница состоит только в том, что толщина пограничного слоя дается в этом случае не диффузионной длиной, а некоторой другой величиной (см. § 6. 2).

2. *Диффузное отражение света.* Пусть на полубесконечную среду под углом $\arcs \cos \mu_0$ к внутренней нормали падают параллельные лучи, создающие на перпендикулярной к ним площадке освещенность I_0 . Требуется найти интенсивность диффузно-отраженного средой излучения. Эта задача восходит еще к А. Эддингтону, рассмотревшему ее в связи с эффектом отражения у двойных звезд. Для консервативного случая ее решение было дано Э. Хопфом [1], а для произвольного $\lambda \leq 1$ — О. Гальперном, Р. Люнебургом и О. Кларком [1], показавшими, что

$$I(0, \mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4\pi} I_0 \frac{\varphi(\mu, \lambda) \varphi(\mu_0, \lambda)}{\mu + \mu_0} \mu_0. \quad (8.18)$$

Эта задача представляет большой интерес также в связи с изучением рассеяния света в планетных атмосферах. В. А. Амбарцумян [5] (см. также [1]) указал новый подход

к решению задачи о диффузном отражении, вошедший в теорию переноса под названием принципа инвариантности. Этот подход позволил из простых физических соображений получить формулу (8.18) и уравнение (7.11) для функции $\Phi(\mu, \lambda)$, носящей теперь его имя. Метод В. А. Амбарцумяна, оказавшийся чрезвычайно плодотворным, был развит С. Чандрасекаром [1], В. В. Соболевым [1] и Р. Беллманом с сотрудниками (см., в частности, книгу Дж. Винга [1], где можно найти многочисленные ссылки на работы группы Р. Беллмана по применениям принципов инвариантности в теории многократного рассеяния и в других областях физики). Мы и.e. будем касаться этого круга вопросов.

Наряду с интенсивностью диффузно-отраженного излучения полезно иметь и соответствующую функцию источников. Легко понять, что она должна удовлетворять уравнению

$$S(\tau, \mu_0, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) S(\tau', \mu_0, \lambda) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} I_0 e^{-\frac{\tau}{\mu_0}}. \quad (8.19)$$

Его решение имеет вид (см., например, В. В. Соболев [1], гл. III, а также § 6.4)

$$S(\tau, \mu_0, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} I_0 \Phi(\mu_0, \lambda) \left[e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu_0}} \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right]. \quad (8.20)$$

В частности,

$$S(0, \mu_0, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi} I_0 \Phi(\mu_0, \lambda), \quad (8.21)$$

а при $\tau \gg 1$

$$S(\tau, \mu_0, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi} I_0 \frac{\lambda}{2k\Phi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{\mu_0 \Phi(\mu_0, \lambda)}{1 - k\mu_0} e^{-k\tau}. \quad (8.22)$$

Последняя формула получается из (8.20) при использовании явного выражения для $\Phi(\tau, \lambda)$, даваемого (7.10).

Подставляя (8.22) в уравнение переноса

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S, \quad (8.23)$$

находим, что при $\tau \gg 1$

$$I(\tau, \mu, \mu_0) \sim \frac{\lambda}{4\pi} I_0 \frac{\lambda}{2k\varphi\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right| \frac{\mu_0 \varphi(\mu_0, \lambda)}{(1 - k\mu_0)(1 + k\mu)} e^{-k\tau}. \quad (8.24)$$

Отсюда следует, что в глубоких слоях среды распределение интенсивности излучения по направлениям тем ближе к изотропному, чем меньше роль поглощения. В частности, при $\lambda = 1$ имеем $k = 0$, и (с точностью до членов по крайней мере порядка $e^{-\tau}$) интенсивность излучения не зависит от направления, а поток равен нулю. При этом средняя интенсивность излучения

$$J(\tau) = \int I(\tau, \mu) \frac{d\omega}{4\pi} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad (8.25)$$

в пределах той же точности не зависит от глубины и равна

$$J(\tau) \sim \frac{1}{4\pi} I_0 \sqrt{3} \mu_0 \varphi(\mu_0, 1) \quad (\lambda = 1, \tau \gg 1). \quad (8.26)$$

Если среда освещается изотропным излучением интенсивности I_0 , то интенсивность отраженного излучения и функцию источников можно получить из (8.18) и (8.20) интегрированием по направлениям:

$$I(0, \mu) = 2\pi \int_0^1 I(0, \mu, \mu_0) d\mu_0, \quad (8.27)$$

$$S(\tau, \lambda) = 2\pi \int_0^1 S(\tau, \mu_0, \lambda) d\mu_0. \quad (8.28)$$

Опираясь на соотношения, приведенные в § 3.7, можно показать, что

$$I(0, \mu) = I_0 [1 - \sqrt{1 - \lambda} \varphi(\mu, \lambda)], \quad (8.29)$$

$$S(\tau, \lambda) = I_0 [1 - \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau, \lambda)], \quad (8.30)$$

где $\Psi(\tau, \lambda)$ определяется формулой (8.2).

При слабом поглощении второй член в выражении для функции источников становится порядка первого только

при больших τ , где уже для $\Psi(\tau, \lambda)$ можно взять асимптотическое выражение, вытекающее из (7.10) и (8.2) при $1 - \lambda \ll 1$:

$$\Psi(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} (1 - e^{-k\tau}) \quad (\tau \gg 1, 1 - \lambda \ll 1). \quad (8.31)$$

Поэтому при почти консервативном рассеянии имеем приближенно

$$S(\tau, \lambda) \sim I_0 e^{-k\tau}. \quad (8.32)$$

Как ясно из доказательства, это выражение справедливо при $\tau \gg 1$. Однако непосредственно из (8.30) и (8.31) следует, что при небольших τ и $1 - \lambda \ll 1$ функция источников мало отличается от I_0 . Тот же результат дает и формула (8.32), которая оказывается поэтому справедливой при всех τ .

Из (8.32) следуют два вывода. Первый сводится к тому, что хотя прямое излучение ослабляется как $e^{-\tau}$, диффузное излучение проникает в среду до больших глубин, тем больше, чем меньше k , определяемое ролью поглощения. Характерный масштаб глубины проникновения внешнего излучения равен диффузионной длине $\tau_d = \frac{1}{k}$. Второй вывод состоит в следующем. Пусть имеются две почти чисто рассеивающие среды со значениями λ , равными λ_1 и λ_2 (соответствующие значения k равны

$$k_1 \sim \sqrt{3(1 - \lambda_1)}$$

и

$$k_2 \sim \sqrt{3(1 - \lambda_2)}.$$

Тогда функция источников в первой среде на глубине τ_1 будет асимптотически ($\lambda \rightarrow 1$) равна функции источников во второй среде на глубине τ_2 , где τ_1 и τ_2 связаны соотношением

$$k_1 \tau_1 = k_2 \tau_2, \quad (8.33)$$

или

$$(1 - \lambda_1) \tau_1^2 = (1 - \lambda_2) \tau_2^2. \quad (8.34)$$

Соотношение (8.34) выражает своего рода принцип подобия. Он выполняется тем точнее, чем ближе λ_1 и λ_2 к единице (ср. § 6.6).

§ 3.9. Связь между асимптотиками решений для бесконечной и полубесконечной сред

В случае чистого рассеяния между асимптотиками решений для бесконечной и полубесконечной сред существует простая связь, до сих пор, по-видимому, не отмечавшаяся. Как будет показано в § 6.1, аналогичная связь существует и при рассеянии в частотах линий.

Обозначим ($\tau \geq 0$)

$$\Psi_{\infty}(\tau, \lambda) = 1 + 4\pi \int_0^{\tau} \tau'^2 S_p(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (9.1)$$

Эта функция монотонно возрастает от $\Psi_{\infty}(0, \lambda) = 1$ до

$$\Psi_{\infty}(\infty, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}. \quad (9.2)$$

Из (9.1) и (1.9) следует, что функция $\Psi_{\infty}(\tau, \lambda)$ следующим образом связана с резольвентой основного уравнения для бесконечной среды:

$$\Psi_{\infty}(\tau, \lambda) = 1 - 2\tau\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) + 2 \int_0^{\tau} \Phi_{\infty}(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (9.3)$$

Подставляя сюда явное выражение для $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$, даваемое формулой (1.20), выполняя интегрирование и полагая $\tau = \infty$, с учетом (9.2) приходим к соотношению

$$\int_0^1 R(\mu, \lambda) d\mu = \frac{1}{1-\lambda} - \frac{1}{k^2} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|. \quad (9.4)$$

В частном случае $\lambda = 1$ находим отсюда с помощью (2.4) и (2.7)

$$\int_0^1 R(\mu, 1) d\mu = \frac{4}{5}. \quad (9.5)$$

Для $\Psi_{\infty}(\tau, \lambda)$ при $\lambda = 1$ удобно ввести специальное обозначение:

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) \equiv \Psi_{\infty}(\tau, 1). \quad (9.6)$$

Хотя при $\lambda \rightarrow 1$ резольвента $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ расходится, однако

разность

$$\tau \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) - \int_0^{\tau} \Phi_{\infty}(\tau', \lambda) d\tau'$$

остаётся конечной, так что

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) = 1 - 2 \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left[\tau \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) - \int_0^{\tau} \Phi_{\infty}(\tau', \lambda) d\tau' \right]. \quad (9.7)$$

Из (9.7) и (1.20) находим, учитывая (9.5), что $\tilde{S}_{\infty}(\tau)$ можно представить в виде

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) = \frac{3}{2} [\tau^2 + q_{\infty}(\tau)], \quad (9.8)$$

где

$$q_{\infty}(\tau) = \frac{6}{5} - \frac{2}{3} \int_0^1 R(\mu, 1) \left(1 + \frac{\tau}{\mu}\right) e^{-\frac{\tau}{\mu}} d\mu. \quad (9.9)$$

Величина $q_{\infty}(\tau)$ является аналогом функции Хопфа: $q_{\infty}(\tau)$ есть монотонно возрастающая функция, которая изменяется в довольно узких пределах:

$$\frac{2}{3} = q_{\infty}(0) \leq q_{\infty}(\tau) \leq q_{\infty}(\infty) = \frac{6}{5}. \quad (9.10)$$

При $\tau \gg 1$ (8.5) и (9.8) принимают вид

$$\tilde{S}(\tau) \sim \sqrt{3} [\tau + q(\infty)], \quad (9.11)$$

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) \sim \frac{3}{2} [\tau^2 + q_{\infty}(\infty)]. \quad (9.12)$$

Отсюда вытекает, что (с точностью до главного члена асимптотики) между решениями для бесконечной и полубесконечной среды существует следующая простая связь:

$$\tilde{S}(\tau) \sim \sqrt{2} [\tilde{S}_{\infty}(\tau)]^{1/2} \quad (\tau \rightarrow \infty). \quad (9.13)$$

Иначе говоря, асимптотика решения проблемы Милна оказывается просто связанной с асимптотикой функции $S_p(\tau, 1)$, описывающей поле излучения точечного источника в бесконечной однородной среде. Замечательно, что функциональная форма связи между $\tilde{S}(\tau)$ и $\tilde{S}_{\infty}(\tau)$ — пропорциональность $\tilde{S}(\tau)$ и $[\tilde{S}_{\infty}(\tau)]^{1/2}$ — сохраняется и при рассеянии в частотах линии, причем коэффициент пропорциональности во всех случаях близок к единице (см. § 6.1).

РАССЕЯНИЕ В ЧАСТОТАХ ЛИНИИ В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

В главе I мы познакомились с тем, как описываются стационарные состояния газа и поля излучения при отсутствии термодинамического равновесия. Были также указаны элементарные процессы, ведущие к установлению таких состояний, и выведены уравнения стационарности макроскопических масс газа. В гл. II эти уравнения были рассмотрены более подробно. Поскольку задачи о переносе излучения в частотах линий и проблемы монохроматического рассеяния очень близки друг к другу, следующая, третья глава была целиком посвящена исследованию решений уравнения переноса излучения для монохроматического рассеяния.

Теперь мы переходим к выполнению своей основной задачи — решению уравнения переноса излучения в частотах линии. Главные предположения можно сформулировать так: полное перераспределение по частотам при рассеянии и $\lambda = \text{const}$. Сначала (гл. IV—VI) для простоты считается также, что коэффициент поглощения в непрерывном спектре пренебрежимо мал по сравнению с коэффициентом поглощения в линии. Более громоздкие задачи, возникающие при необходимости одновременно учитывать поглощение в линии и непрерывном спектре, обсуждаются в гл. VII.

В настоящей главе исследуется поле излучения в бесконечной среде. Разумеется, в действительности среда никогда не бывает бесконечной. Однако очень часто размеры области, занятой газом, много больше длины свободного пробега кванта, имеющего частоту центра линии, т. е. газ имеет большую оптическую толщину в линии. К внутренним частям таких систем и относится излагаемая в этой главе

теория. Она была развита в совместных работах Д. И. Нагирнера и автора (Д. И. Нагирнер и В. В. Иванов [1], В. В. Иванов и Д. И. Нагирнер [1]).

Детальное исследование рассеяния в бесконечной среде предпринято по двум соображениям. Во-первых, как уже упоминалось, при выполнении определенных условий среду конечных размеров можно приближенно считать бесконечной. Во-вторых, и это главное, знание поля излучения в бесконечной среде значительно облегчает изучение сложных эффектов, наблюдающихся в близких к границам областях газа, занимающего конечный объем. Анализ поля излучения в этих пограничных областях, где обязательно должен учитываться выход излучения, составляет содержание следующих глав.

§ 4.1. Точечный источник в однородной среде

Рассчитаем (в линейном приближении) пространственное распределение возбужденных атомов в бесконечной однородной среде, содержащей изотропный точечный источник. Считается, что среда состоит из двухуровневных атомов. Если начало координат совмещено с источником, то уравнение переноса имеет вид (см. § 2.3)

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \mu} = -\alpha(x) I(\tau, \mu, x) + \\ + \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + \alpha(x) S^*(\tau), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $S^*(\tau)$ — первичная функция источников, обусловленная рассеянием излучения, пришедшего непосредственно от источника, $I(\tau, \mu, x)$ — интенсивность диффузного излучения.

Найдем $S^*(\tau)$. Пусть полная мощность источника, проинтегрированная по всем частотам в линии и по всем направлениям, равна Q . Рассмотрим единичный объем, имеющий форму цилиндра с площадью основания 1 см^2 и осью, направленной на источник. Пусть этот объем находится на геометрическом расстоянии r от источника. Тогда он виден из начала координат под телесным углом r^{-2} . В этом

телесном угле источник излучает за единицу времени энергию $Q / 4\pi r^2$, в том числе в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$

$$\frac{Q}{4\pi r^2} A \alpha(x) \frac{d\nu}{\Delta\nu}.$$

На пути от источника до объема происходит ослабление излучения, так что на объем падает энергия

$$\frac{Q}{4\pi r^2} A \alpha(x) e^{-\tau\alpha(x)} \frac{d\nu}{\Delta\nu},$$

где τ — оптическое расстояние объема от источника ($\tau = k_{12}(\nu_0) n_1 r$). Из этой энергии в объеме поглощается или, точнее говоря, затрачивается на возбуждение атомов доля $\alpha(x) k_{12}(\nu_0) n_1$. Полная энергия, приобретаемая объемом за единицу времени под воздействием прямого излучения источника, равна поэтому

$$\frac{Q}{4\pi r^2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) e^{-\tau\alpha(x)} dx \cdot k_{12}(\nu_0) n_1,$$

или

$$\frac{M_2(\tau)}{4\pi\tau^2} Q [k_{12}(\nu_0) n_1]^3,$$

где $M_2(\tau)$ дается формулой (2.6.1). Доля этой энергии, переизлучаемая в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, равна $\lambda A \alpha(x) \times \times \frac{d\nu}{\Delta\nu}$. Поэтому «первичный» коэффициент излучения рассматриваемого объема есть

$$\varepsilon_{12}^*(\nu) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{M_2(\tau)}{\tau^2} \alpha(x) \frac{QA}{4\pi\Delta\nu} [k_{12}(\nu_0) n_1]^3.$$

Соответствующая функция источников

$$S^*(\tau) = \frac{\varepsilon_{12}^*(\nu)}{\sigma_{12}(\nu)} = \frac{\varepsilon_{12}^*(\nu)}{\alpha(x) k_{12}(\nu_0) n_1}$$

равна

$$S^*(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{M_2(\tau)}{\tau^2} \frac{A [k_{12}(\nu_0) n_1]^2}{4\pi\Delta\nu} Q. \quad (1.2)$$

Полагая для простоты

$$Q = \frac{4\pi\Delta\nu}{A [k_{12}(\nu_0) n_1]^2} * \quad (1.3)$$

приходим к следующему уравнению переноса:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \tau} + \frac{1 - \mu^2}{\tau} \frac{\partial I(\tau, \mu, x)}{\partial \mu} = -\alpha(x) I(\tau, \mu, x) + \\ + \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} \alpha(x) \frac{M_2(\tau)}{\tau^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Как было показано в § 2.4, уравнение переноса (1.4) эквивалентно интегральному уравнению для функции источников $S_p(\tau)$, имеющему вид

$$S_p(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{M_2(|\tau - \tau'|)}{|\tau - \tau'|^2} S_p(\tau') d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{M_2(\tau)}{\tau^2}. \quad (1.5)$$

Функция источников $S_p(\tau)$ представляет собой сумму двух последних членов в правой части (1.4), деленную на $\alpha(x)$, и связана с населенностями уровней n_1 и n_2 соотношением

$$S_p(\tau) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.6)$$

Интегрирование в (1.5) ведется по всему пространству. Обсуждение физического смысла этого уравнения и объяснение всех обозначений было дано в гл. II. Что же касается его решения, то оно получается в общем так же, как и для монохроматического рассеяния. Отсылая за всеми подробностями к § 3.1 (см. также § 7.2), наметим кратко лишь общий ход рассуждений, остановившись более подробно на тех моментах, которые отличают эти две задачи.

Интегрированием обеих частей уравнения (1.5) вдоль плоскости $\tau_z = \text{const}$ его решение можно свести к решению следующего уравнения для функции $\Phi_\infty(\tau)$:

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi_\infty(\tau') d\tau' + \frac{\lambda}{2} K(|\tau|), \quad (1.7)$$

где $K(\tau)$ определяется формулой (2.4.22). Функции $S_p(\tau)$ и $\Phi_\infty(\tau)$ связаны между собой соотношением

$$S_p(\tau) = -\frac{1}{2\pi\tau} \frac{d}{d\tau} \Phi_\infty(\tau). \quad (1.8)$$

Для получения $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$ к уравнению (1.7) применяется двустороннее преобразование Лапласа, после чего оно принимает вид

$$\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda) + \bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{\bar{K}(s) + \bar{K}(-s)}{1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(s) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-s)}, \quad (1.9)$$

где $\bar{f}(s)$ — одностороннее преобразование Лапласа функции $f(\tau)$. Учитывая (2.6.23), вместо последнего уравнения имеем

$$\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda) + \bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda) = \frac{\lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{s}\right)}{1 - \lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{s}\right)}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что стремящееся к нулю при $|\tau| \rightarrow \infty$ решение уравнения (1.7) можно представить в виде интеграла

$$\Phi_\infty(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{s}\right)}{1 - \lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{s}\right)} e^{s\tau} ds, \quad (1.11)$$

или

$$\Phi_\infty(\tau, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda V(u)}{1 - \lambda V(u)} \cos \tau u du, \quad (1.12)$$

где $V(u)$ определяется формулой (2.6.24). Из (1.12) и (1.8) находим, что

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi^2\tau} \int_0^\infty \frac{\lambda V(u)}{1 - \lambda V(u)} u \sin \tau u du. \quad (1.13)$$

В дальнейшем эта формула будет использована для исследования поведения $S_p(\tau, \lambda)$ в непосредственной окрестности источника (при $\tau \ll 1$). Заметим, что формулы (1.12) и (1.13) не меняют своего вида и тогда, когда рассматривается монохроматическое рассеяние. В этом случае $V(u)$ дается формулой (2.6.26), а (1.12) и (1.13) переходят соответственно в (3.1.16) и (3.1.17).

Деформированием контура интегрирования в (1.11) можно получить представление $S_p(\tau, \lambda)$, более удобное для практических расчетов. Мы ищем решение уравнения (1.17),

стремящееся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Преобразование Лапласа такого решения $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda)$ регулярно в правой полуплоскости. Из (1.10) следует тогда, что при $\operatorname{Re} s < 0$ особенности $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda)$ должны совпадать с особенностями выражения, стоящего в правой части этой формулы. Рассмотрим поэтому функцию

$$T\left(\frac{1}{s}\right) \equiv 1 - \lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{s}\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(s) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-s). \quad (1.14)$$

Как видно из (2.6.22), $\bar{K}(s)$ есть интеграл типа Коши.

Из общих свойств интегралов типа Коши следует (см., например, Н. И. Мусхелишвили [1], Ф. Д. Гахов [1]), что при некотором достаточно общем предположении относительно функции $G(z)$, которое выполняется во всех рассматриваемых ниже конкретных случаях (условие Гёльдера), функция $\bar{K}(s)$ регулярна на всей плоскости комплексной переменной s , за исключением точек, лежащих на отрицатель-

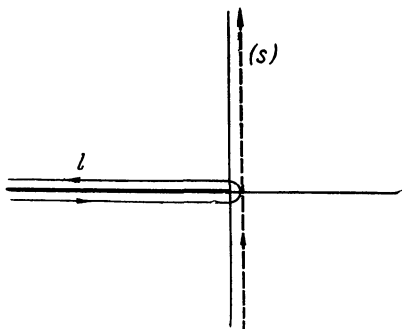


Рис. 13. Контур [интегрирования при вычислении функции источников (расcеяние с полным перераспределением по частотам).

ной части вещественной оси, где она неоднозначна. Кроме того, можно показать, что функция (1.14) не обращается в нуль (см. § 7.2). Поэтому единственной особенностью $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda)$ в левой полуплоскости является линия ветвления $(-\infty, 0]$, и в формуле (1.11) интегрирование вдоль мнимой оси можно заменить интегрированием по контуру l , изображенному на рис. 13. В результате для $\Phi_\infty(\tau, \lambda)$ при $\tau > 0$ получаем

$$\Phi_\infty(\tau, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-x - i0) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(x)} - \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-x + i0) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(x)} \right] e^{-\tau x} dx. \quad (1.15)$$

Согласно формулам Сохоцкого—Племеля (см., например, Н. И. Мухелишвили [1], Ф. Д. Гахов [1])

$$\bar{K}(-x \pm i0) = \bar{K}(-x) \mp \pi i G\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x}, \quad (1.16)$$

где

$$\bar{K}-(x) = \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{1-xz'} dz', \quad (1.17)$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения. Подставляя (1.16) в (1.15), полагая $z = 1/x$ и учитывая, что $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ — четная функция, находим

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} R(z, \lambda) e^{-\frac{|\tau|}{z}} G(z) \frac{dz}{z}, \quad (1.18)$$

где

$$R(z, \lambda) = \left\{ [1 - \lambda \mathcal{U}(z)]^2 + \left[\lambda \frac{\pi}{2} z G(z) \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (1.19)$$

а $\mathcal{U}(z)$ дается формулой (2.6.19) или (2.6.25). Для интересующей нас сейчас функции источников $S_p(\tau, \lambda)$ получаем отсюда с помощью (1.8) такое окончательное выражение:

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \int_0^{\infty} R(z, \lambda) e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z^2}. \quad (1.20)$$

В такой форме функции $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ и $S_p(\tau, \lambda)$ были получены впервые Д. И. Нагирнером [1], [2].

В следующих параграфах это решение будет тщательно проанализировано и табулировано. Пока же нам хотелось бы сделать два замечания. Первое из них относится к выводу формулы (1.20) и состоит в следующем. В случае монохроматического рассеяния для вычисления интеграла вдоль разреза не было нужды прибегать к формулам Сохоцкого—Племеля. Функция $T_M(1/s)$ настолько проста, что вполне можно обойтись и без их помощи. Иное дело — задачи о переносе излучения в линиях. Применение этих формул является здесь тем шагом, который легко позволяет довести дело до конца.

Второе замечание касается структуры решения (1.20). В отличие от случая монохроматического рассеяния, здесь нет экспоненциально убывающего полюсного члена. Этот факт имеет далеко идущие последствия. Он приводит к тому, что в задачах о переносе излучения в частотах спектральных линий диффузионное приближение, основанное на пренебрежении интегральным слагаемым по сравнению с полюсным членом, оказывается неприменимым принципиально. На основании других соображений этот вывод был сделан еще в пионерских работах Л. М. Бибермана [1] и Т. Холстейна [1]; см. также С. И. Брагинский и Г. И. Будкер [1].

В заключение этого параграфа приведем три интегральных соотношения, которым удовлетворяет функция $R(z, \lambda)$:

$$\int_0^{\infty} R(z, \lambda) G(z) dz = \frac{1}{1-\lambda}, \quad (1.21)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z} G(z) dz = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V^2(u)}{1 - \lambda V(u)} du, \quad (1.22)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz = \frac{\lambda \pi^2}{4} a_1^2, \quad (1.23)$$

где a_1 определяется формулой (2.6.28).

Первое из этих соотношений можно получить, например, так. Ясно, что среднее число рассеяний кванта в бесконечной однородной среде равно $(1 - \lambda)^{-1}$. На этом основании можно утверждать (см. § 3.3), что

$$4\pi \int_0^{\infty} S_p(\tau, \lambda) \tau^2 d\tau = \frac{\lambda}{1-\lambda}. \quad (1.24)$$

Подставляя (1.20) в (1.24), приходим к (1.21). Что касается соотношений (1.22) и (1.23), то они будут доказаны соответственно в § 4.6 и 4.2. Заметим, что формулы (1.21)—(1.23) непосредственно применять к монохроматическому рассеянию нельзя. В этом случае существуют, однако, некоторые аналоги этих соотношений. Так, аналогом формулы (1.21) является соотношение (3.9.4).

§ 4.2. Поведение решения вблизи источника

Перейдем к исследованию функции источников $S_p(\tau, \lambda)$. Рассмотрим в первую очередь, как она ведет себя при малых τ , т. е. в непосредственной окрестности источника.

Перепишем (1.20) в виде

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \left[\int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z^2} \right] \quad (2.1)$$

и изучим поведение входящих сюда интегралов при $\tau \ll 1$. Дифференцируя (2.6.16) и (2.6.31), находим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) \frac{dz}{z^2} = \frac{a_1}{\tau} - a_2 + O(\tau). \quad (2.2)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz &= \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz + \\ &+ \int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} (e^{-\frac{\tau}{z}} - 1) G(z) dz + \\ &+ \int_1^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} (e^{-\frac{\tau}{z}} - 1) G(z) dz. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $\tau \ll 1$ для третьего слагаемого в правой части имеем оценку

$$\int_1^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} (e^{-\frac{\tau}{z}} - 1) G(z) dz = O(\tau). \quad (2.4)$$

Обращаясь ко второму слагаемому, замечаем, что при $z < 1$, как это следует из (1.19), (2.6.12) и (2.6.34),

$$\frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} = (2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2) + O(z^2), \quad (2.5)$$

так что

$$\int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} (e^{-\frac{\tau}{z}} - 1) G(z) dz = \\ = a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) [E_2(\tau) - 1] + O(\tau), \quad (2.6)$$

или

$$\int_0^1 \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} (e^{-\frac{\tau}{z}} - 1) G(z) dz = \\ = a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau \ln \tau + O(\tau). \quad (2.7)$$

Поэтому вместо (2.3) при $\tau \ll 1$ можем написать

$$\int_0^\infty \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz = \int_0^\infty \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz + \\ + a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau \ln \tau + O(\tau). \quad (2.8)$$

Объединяя этот результат с (2.2), для функции источников $S_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \ll 1$ находим

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \left\{ a_1 + \left[\int_0^\infty \frac{R(z, \lambda) - 1}{z^2} G(z) dz - a_2 \right] \tau + \right. \\ \left. + a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau^2 \ln \tau \right\} + O(1). \quad (2.9)$$

Входящий в эту формулу интеграл просто выражается через постоянную a_1 . Изучая поведение функции источников при $\tau \ll 1$, мы могли бы исходить из представления решения в форме (1.13). Подстановка $y = \tau u$ дала бы тогда

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{1}{1 - \lambda V\left(\frac{y}{\tau}\right)} - 1 \right] \frac{y \sin y}{\tau} dy. \quad (2.10)$$

При $u > 1$ с помощью (2.6.33) получаем

$$\frac{1}{1 - \lambda V(u)} - 1 = \frac{\pi}{2} \lambda a_1 \frac{1}{u} - \frac{\pi}{2} \lambda \left(\frac{2}{\pi} a_2 - \lambda \frac{\pi}{2} a_1^2 \right) \frac{1}{u^2} + \dots \quad (2.11)$$

Из (2.10) и (2.11) находим, что при $\tau \ll 1$

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \left\{ a_1 + \left(\lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 - a_2 \right) \tau + O(\tau^2 \ln \tau) \right\}. \quad (2.12)$$

Сравнивая (2.12) и (2.9), приходим к (1.23). Учитывая это соотношение, вместо (2.9) имеем окончательно

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \left\{ a_1 + \left(\lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 - a_2 \right) \tau + \right. \\ \left. + a_1 \left(2\lambda a_2 - \lambda^2 \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \tau^2 \ln \tau \right\} + O(1). \quad (\tau \ll 1) \quad (2.13)$$

Отметим, что первый член зависит от λ линейно, второй член содержит λ^2 , третий — уже λ^3 . Это означает, что чем дальше от источника находится элемент объема, тем большее в среднем число рассеяний совершают те кванты, которые вызывают возбуждение атомов в этом объеме. Такого результата можно было ожидать и из физических соображений.

§ 4.3. Поведение решения вдали от источника

Упрощения в решении в другом предельном случае — на больших расстояниях от источника — определяются поведением коэффициента поглощения в крыльях линии.

Пусть $x(z)$ — неотрицательная функция, определяемая условием

$$\alpha(x(z)) = \frac{1}{z}. \quad (3.1)$$

Предположим, что предел

$$f(y) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{x' \left(\frac{\tau}{y} \right)}{x'(\tau)} = y \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{x \left(\frac{\tau}{y} \right)}{x(\tau)} \quad (3.2)$$

существует и равен

$$f(y) = y^{2\gamma}, \quad (3.3)$$

где $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$. В частности, как было показано в § 2.6, эти условия выполняются как при доплеровском профиле (при этом $\gamma = 1/2$), так и при коэффициентах поглощения, убывающих в крыльях пропорционально $|x|^{-\kappa}$, где $1 < \kappa < \infty$. В последнем случае

$$\gamma = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}, \quad (3.4)$$

так что $0 < \gamma < \frac{1}{2}$. Таким образом, предположение о выполнении соотношения (3.3) является достаточно общим и позволяет охватить все практически интересные случаи. Исследуем поведение $S_p(\tau, \lambda)$ при $\tau \gg 1$, считая это условие выполненным.

При $\tau \gg 1$ основной вклад в интеграл (1.20) вносят значения подынтегральной функции при больших z . Поэтому согласно (2.6.57) и (1.19) при выполнении условия (3.3) функцию $R(z, \lambda)$ в (1.20) можно приближенно заменить на

$$\left\{ \left[1 - \lambda + \lambda \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi \gamma \cdot z G(z) \right]^2 + \left[\lambda \frac{\pi}{2} z G(z) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (3.5)$$

Подставляя это выражение для $R(z, \lambda)$ в (1.20) и полагая $\frac{\tau}{z} = y$, получаем

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \int_0^{\infty} \left\{ \left[1 - \lambda + \lambda \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi \gamma \cdot \frac{\tau}{y} G\left(\frac{\tau}{y}\right) \right]^2 + \left[\lambda \frac{\pi}{2} \frac{\tau}{y} G\left(\frac{\tau}{y}\right) \right]^2 \right\}^{-1} e^{-y} G\left(\frac{\tau}{y}\right) dy. \quad (3.6)$$

Как было показано в § 2.6, при $z \rightarrow \infty$

$$G(z) \sim \frac{2A}{2\gamma + 1} \frac{x'(z)}{z}. \quad (3.7)$$

Поэтому при $\tau \gg 1$ находим, учитывая (3.2) и (3.3),

$$\frac{G\left(\frac{\tau}{y}\right)}{G(\tau)} \sim y^{1+2\gamma}, \quad (3.8)$$

так что

$$G\left(\frac{\tau}{y}\right) \sim \frac{2A}{2\gamma + 1} \frac{x'(\tau)}{\tau} y^{1+2\gamma} \sim y^{1+2\gamma} G(\tau). \quad (3.9)$$

Обозначим

$$t = \frac{1 - \lambda}{\lambda \frac{\pi}{2} \tau G(\tau)} \sim (1 - \lambda) \frac{2\gamma + 1}{\lambda \pi A x'(\tau)}. \quad (3.10)$$

Пользуясь формулами (3.9) и (3.10), вместо (3.6) получаем

окончательно

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \Gamma(2\gamma + 2) \frac{G(\tau)}{(1 - \lambda)^2} F_p(t), \quad (3.11)$$

где

$$F_p(t) = \frac{t^2}{\Gamma(2\gamma + 2)} \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^{1+2\gamma} dy}{(t + y^{2\gamma} \operatorname{ctg} \pi\gamma)^2 + y^{4\gamma}} \quad (3.12)$$

и $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Формула (3.11) и дает искомое асимптотическое представление $S_p(\tau, \lambda)$ при больших τ . Главное упрощение состоит в том, что величина

$$\frac{4\pi\tau^2(1 - \lambda)^2}{\lambda} \frac{S_p(\tau, \lambda)}{G(\tau)},$$

зависящая от двух переменных (τ и λ), в асимптотической области превращается в функцию одной переменной t , просто выражающейся через τ и λ . С аналогичными упрощениями мы уже встречались в § 3.4 при исследовании монохроматического рассеяния.

Когда роль поглощения мала ($1 - \lambda \ll 1$), в асимптотической области ($\tau \gg 1$) можно выделить три зоны:

1. *Зона почти консервативного рассеяния.* Здесь влияние поглощения мало. Это та область, где уже $\tau \gg 1$, но еще $t \ll 1$. Размер ее тем больше, чем ближе λ к единице. В этой области, как следует из (3.10) — (3.12),

$$S_p(\tau, \lambda) \sim S_p(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{2}{\pi} \frac{(1 - 2\gamma) \operatorname{tg} \pi\gamma}{\Gamma(2\gamma)} \frac{1}{\tau^2 G(\tau)}. \quad (3.13)$$

В частности, при доплеровском коэффициенте поглощения $\gamma = 1/2$ и

$$G_D(\tau) \sim \frac{1}{2 \sqrt{\pi} \tau^2 \sqrt{\ln \tau}} \quad (\tau \gg 1). \quad (3.14)$$

Переходя в (3.13) к пределу $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ и пользуясь (3.14), получаем

$$S_p^D(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{4 \tau^2 \pi^{1/2}} \frac{8}{\tau^{1/2}} \sqrt{\ln \tau}. \quad (3.15)$$

При $\lambda = 1$ условие $t \ll 1$ не ограничивает значений τ сверху. Поэтому при строго консервативном рассеянии (3.15) дает асимптотику функции источников, справедливую при

всех $\tau \gg 1$. Если в разложениях $\mathcal{U}_D(z)$ и $G_D(z)$ при $z \gg 1$ взять несколько первых членов [см. формулы (2.7.3) и (2.7.19)], то из (1.20) можно получить не только первый, но и следующие члены асимптотики $S_p^D(\tau, 1)$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$S_p^D(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \left(1 + \frac{1+2\gamma}{4} \frac{1}{\ln \tau} - \frac{2\pi^2 + 3\gamma^2 + 3\gamma + 3}{24} \frac{1}{(\ln \tau)^2} + \dots \right), \quad (3.16)$$

или

$$S_p^D(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{8}{\pi^{3/2}} \sqrt{\ln \tau} \left(1 + \frac{0,5386}{\ln \tau} - \frac{1,0613}{(\ln \tau)^2} + \dots \right). \quad (3.17)$$

В (3.16) $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера.

Фойгтовскому коэффициенту поглощения соответствует $\gamma = 1/4$. Учитывая (2.7.27), из (3.13) находим, что в той части зоны консервативного рассеяния, где уже можно пользоваться фойгтовскими асимптотиками,

$$S_p^V(\tau, \lambda) \sim S_p^V(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{2\pi \sqrt{aU(a, 0)}} \frac{1}{\tau^{1/2}}. \quad (3.18)$$

Устремив здесь a к бесконечности, получим асимптотику, отвечающую лоренцовскому профилю. Как следует из (2.7.22),

$$aU(a, 0) \rightarrow \frac{1}{\pi} \quad \text{при } a \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Поэтому

$$S_p^L(\tau, \lambda) \sim S_p^L(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}}. \quad (3.20)$$

При строго консервативном рассеянии можно вывести и более точную формулу, аналогичную разложению (3.16) в доплеровском случае:

$$S_p^L(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left(1 + \frac{9}{20} \frac{1}{\tau} - \frac{1053}{1120} \frac{1}{\tau^2} + \dots \right). \quad (3.21)$$

Последнее разложение справедливо при всех $\tau \gg 1$.

2. *Переходная зона.* Здесь поглощение уже заметно сказывается, хотя и не играет еще определяющей роли. Этой области соответствуют расстояния от источника, для которых параметр t по порядку не отличается от единицы. Функция источников должна находиться по формуле (3.11).

3. *Зона сильного поглощения.* Это та область, где уже $t \gg 1$. Функция источников дается следующим выражением, вытекающим из (3.11) и (3.12):

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \Gamma(2\gamma + 2) \frac{G(\tau)}{(1 - \lambda)^2}. \quad (3.22)$$

Поскольку эта зона существует всегда, в том числе и тогда, когда λ не близко к единице, мы сохранили в этом выражении множитель λ . Разумеется, при $1 - \lambda \ll 1$ его можно заменить на единицу.

Для полного определения функции источников при $\tau \gg 1$ осталось найти значения $F_p(t)$. Рассмотрим случаи доплеровского и фойгтовского коэффициентов поглощения. Для доплеровского профиля $\gamma = \frac{1}{2}$, и (3.12) принимает вид

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^2 dy}{t^2 + y^2}. \quad (3.23)$$

Этот интеграл выражается через известные функции, а именно:

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} (\text{ci } t \cdot \sin t - \text{si } t \cdot \cos t), \quad (3.24)$$

где $\text{si } t$ и $\text{ci } t$ — интегральные синус и косинус:

$$\text{si } t = - \int_t^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{ci } t = - \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx. \quad (3.25)$$

Из (3.24) можно получить разложение $F_p^D(t)$, быстро сходящееся при малых t . Несколько первых членов этого разложения таковы:

$$F_p^D(t) = \frac{t^2}{2} \left[1 - \frac{\pi}{2} t - t^2 \ln t + (1 - \gamma) t^2 + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4} t^3 + \frac{1}{6} t^4 \ln t + O(t^4) \right], \quad (3.26)$$

где $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера. При больших t функция $F_p^D(t)$ разлагается в асимптотический ряд

$$F_p^D(t) \sim \frac{1}{2} \left(2 - \frac{4!}{t^2} + \frac{6!}{t^4} - \frac{8!}{t^6} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^n \frac{(2n+2)!}{t^{2n}} + \dots \right), \quad (3.27)$$

который нетрудно получить из ее интегрального представления (3.23). Значения $F_p^D(t)$ даны в табл. 13.

Таблица 13

Функция $F_p^D(t)$

t	$F_p^D(t)$	t	$F_p^D(t)$	t	$F_p^D(t)$	t	$F_p^D(t)$
0,0	0,00000	2,6	0,5034	6,4	0,8122	13,6	0,9434
0,1	0,00435	2,8	0,5320	6,8	0,8275	14,0	0,9462
0,2	0,01545	3,0	0,5586	7,2	0,8411	14,4	0,9489
0,3	0,03118	3,2	0,5833	7,6	0,8533	14,8	0,9513
0,4	0,05011	3,4	0,6062	8,0	0,8642	15,2	0,9535
0,5	0,07122	3,6	0,6275	8,4	0,8740	15,6	0,9557
0,6	0,09377	3,8	0,6474	8,8	0,8828	16,0	0,9577
0,7	0,1172	4,0	0,6658	9,2	0,8907	16,4	0,9596
0,8	0,1411	4,2	0,6830	9,6	0,8979	16,8	0,9613
0,9	0,1652	4,4	0,6991	10,0	0,9045	17,2	0,9629
1,0	0,1893	4,6	0,7140	10,4	0,9104	17,6	0,9645
1,2	0,2365	4,8	0,7280	10,8	0,9159	18,0	0,9659
1,4	0,2820	5,0	0,7411	11,2	0,9209	18,4	0,9673
1,6	0,3252	5,2	0,7533	11,6	0,9254	18,8	0,9686
1,8	0,3658	5,4	0,7647	12,0	0,9296	19,2	0,9698
2,0	0,4039	5,6	0,7755	12,4	0,9335	19,6	0,9709
2,2	0,4395	5,8	0,7855	12,8	0,9371	20,0	0,9720
2,4	0,4726	6,0	0,7950	13,2	0,9404		

Фойгтовскому профилю соответствует $\gamma = \frac{1}{4}$, и (3.12) дает

$$F_p^V(t) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{3/2} dy}{(t + \sqrt{y})^2 + y}. \quad (3.28)$$

При $t \ll 1$ значения $F_p^V(t)$ можно найти из ее разложения

$$F_p^V(t) = \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} t^3 + \frac{1}{3} t^4 + \dots, \quad (3.29)$$

а при $t \gg 1$ — по асимптотической формуле

$$\begin{aligned} F_p^V(t) &\sim \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^{\frac{k+1}{2}} \sin \frac{(k+1)\pi}{4} \cdot \Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right) \frac{1}{t^k} = \\ &= 1 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{t} + 5 \frac{1}{t^2} + \dots \quad (3.30) \end{aligned}$$

Для промежуточных t значения $F_p^V(t)$ находятся из (3.28) численным интегрированием (табл. 14).

Таблица 14

Функция $F_p^V(t)$

t	$F_p^V(t)$	t	$F_p^V(t)$	t	$F_p^V(t)$	t	$F_p^V(t)$
0,0	0,00000	2,8	0,3963	7,2	0,6710	14,8	0,8190
0,1	0,00299	3,0	0,4173	7,6	0,6844	15,2	0,8232
0,2	0,01078	3,2	0,4372	8,0	0,6968	15,6	0,8272
0,3	0,02199	3,4	0,4553	8,4	0,7033	16,0	0,8311
0,4	0,03562	3,6	0,4734	8,8	0,7189	16,4	0,8347
0,5	0,05091	3,8	0,4899	9,2	0,7283	16,8	0,8383
0,6	0,06733	4,0	0,5055	9,6	0,7331	17,2	0,8416
0,7	0,08445	4,2	0,5203	10,0	0,7467	17,6	0,8443
0,8	0,1020	4,4	0,5342	10,4	0,7549	18,0	0,8470
0,9	0,1197	4,6	0,5474	10,8	0,7625	18,4	0,8510
1,0	0,1374	4,8	0,5609	11,2	0,7696	18,8	0,8539
1,2	0,1722	5,0	0,5719	11,6	0,7763	19,2	0,8566
1,4	0,2060	5,2	0,5832	12,0	0,7828	19,6	0,8593
1,6	0,2382	5,4	0,5939	12,4	0,7883	20,0	0,8619
1,8	0,2687	5,6	0,6041	12,8	0,7945	30,0	0,9052
2,0	0,2974	5,8	0,6133	13,2	0,8000	50,0	0,9418
2,2	0,3245	6,0	0,6232	13,6	0,8050	100,0	0,9704
2,4	0,3499	6,4	0,6405	14,0	0,8099		
2,6	0,3733	6,8	0,6564	14,4	0,8145		

Подчеркнем, что вид функции $F_p^V(t)$ не зависит от значения параметра a , входящего в выражение для фойгтовского профиля. В частности, при $a = \infty$ фойгтовский профиль переходит в лоренцовский (см. § 1.5). Поэтому оказывается, что $F_p^V(t) = F_p^L(t)$. Однако область применимости формулы (3.11) с $\gamma = \frac{1}{4}$ при разных a различна. Чем меньше a , тем больше минимальное τ , при котором эта формула уже может служить разумным приближением.

Асимптотики $S_p(\tau, \lambda)$ при $1 - \lambda \ll 1$ и $\tau \gg 1$ можно получить и другим способом, который интересен тем, что позволяет рассматривать рассеяние в линии и монохроматическое рассеяние единым образом. Поскольку наша цель состоит сейчас лишь в иллюстрации метода, исследуем только

простейший случай $\lambda = 1$. Будем исходить из представления функции источников в форме (1.13). При больших τ и $1 - \lambda \ll 1$ основной вклад в интеграл (1.13) дает область малых u , в которой $V(u)$ можно заменить на (см. конец § 2.6)

$$V(u) \sim 1 - \varphi(u)u^{2\gamma} \quad (u \rightarrow 0), \quad (3.31)$$

где $\varphi(u)$ — некоторая медленно меняющаяся функция u (в частности, это может быть постоянная). Из сравнения (3.31) и (2.6.56) видно, что в тех случаях, которые до сих пор рассматривались в этом параграфе,

$$\varphi(u) = \frac{\pi A}{(2\gamma + 1) \sin \pi\gamma} u^{-2\gamma} x' \left(\frac{1}{u} \right). \quad (3.32)$$

При монохроматическом же рассеянии $\gamma = 1$ и $\varphi(u) = 1/3$. Подставляя (3.31) в (1.13), находим, что при $\lambda = 1$ и $\tau \gg 1$

$$S_p(\tau, 1) \sim \frac{1}{2\pi^2\tau} \int_0^\infty \frac{u^{1-2\gamma} \sin \tau u}{\varphi(u)} du. \quad (3.33)$$

Полагая $\tau u = y$ и учитывая (2.6.60), имеем отсюда

$$S_p(\tau, 1) \sim \frac{1}{2\pi^2\tau^{3-2\gamma} \varphi\left(\frac{1}{\tau}\right)} \int_0^\infty y^{1-2\gamma} \sin y dy. \quad (3.34)$$

Интеграл в правой части следует понимать в некотором обобщенном смысле, например, как предел интеграла

$$\int_0^\infty e^{-cy} y^{1-2\gamma} \sin y dy$$

при $c \rightarrow 0$. Вычисляя его и пользуясь еще раз (3.31), находим окончательно

$$S_p(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{1-2\gamma}{\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma} \frac{1}{\tau \left[1 - V\left(\frac{1}{\tau}\right) \right]} \quad (\tau \gg 1). \quad (3.35)$$

Выведенная ранее формула (3.13) является частным случаем (3.35). Она получается из (3.35) при использовании (2.6.55). В случае монохроматического рассеяния $V(1/\tau) \sim$

$\sim 1 - \frac{1}{3} \tau^{-2}$ при $\tau \rightarrow \infty$, и (3.35) дает

$$S_p^M(\tau, 1) \sim \frac{3}{4\pi\tau} \quad (\tau \gg 1), \quad (3.36)$$

что совпадает с результатом, полученным в гл. III другим путем.

Случай ненулевых $1 - \lambda$ исследуется аналогично.

§ 4.4. Преобразование решения

Выполненное в предыдущем параграфе исследование асимптотического поведения функции источников при больших τ подсказывает представление решения в несколько иной форме, имеющей с практической точки зрения известные преимущества перед (1.20).

Начнем с более простого случая строго консервативного рассеяния ($\lambda = 1$). С помощью (2.6.43) и (2.6.49) асимптотику (3.13) можно представить в форме

$$S_p(\tau, 1) \sim \frac{C_p}{4\pi\tau^2} \frac{M_\tau(\tau)}{[M_1(\tau)]^2}, \quad (4.1)$$

где

$$C_p = \frac{1 - 4\gamma^2}{\pi\gamma} \lg \pi\gamma. \quad (4.2)$$

Весьма существенно, что коэффициент C_p во всех случаях близок к единице. Он монотонно убывает с ростом γ от $C_p = 1$ при $\gamma = 0$ до $C_p = \frac{8}{\pi^2} = 0,811$ при $\gamma = 1/2$.

Представим теперь $S_p(\tau, 1)$ при всех τ в виде

$$S_p(\tau, 1) = \frac{C_p}{4\pi\tau^2} \frac{M_2(\tau)}{[M_1(\tau)]^2} \xi_p(\tau, 1), \quad (4.3)$$

где $\xi_p(\tau, 1)$ — поправочный множитель к асимптотике (4.1), существенный только при сравнительно небольших τ . Последнее равенство есть определение функции $\xi_p(\tau, 1)$.

Сравнивая (4.3) и (2.13) и принимая во внимание (2.6.30), находим, что

$$\begin{aligned} \xi_p(\tau, 1) = C_p^{-1} \left[1 + \frac{\pi^2 - 8}{4} a_1 \tau + \left(2a_2 - \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \tau^2 \ln \tau + O(\tau^2) \right] \quad (\tau \ll 1). \quad (4.4) \end{aligned}$$

Таким образом, при малых τ функция $\xi_p(\tau, 1)$ не очень сильно отличается от единицы. Для доплеровского и лоренцовского профилей легко получить и оценку скорости стремления $\xi_p(\tau, 1)$ к единице при $\tau \rightarrow \infty$. Приравнявая правые части (4.3) и (3.16) и пользуясь (2.7.6), можно показать, что

$$\xi_p^D(\tau, 1) \sim 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{\ln \tau} - \frac{\pi^2 - 12\gamma}{48} \frac{1}{(\ln \tau)^2} + \dots \quad (\tau \gg 1), \quad (4.5)$$

где γ — постоянная Эйлера. Аналогично доказывается, что

$$\xi_p^L(\tau, 1) \sim 1 + \frac{1}{5} \frac{1}{\tau} - \frac{283}{140} \frac{1}{\tau^2} + \dots \quad (\tau \gg 1). \quad (4.6)$$

Значения функции $S_p^L(\tau, 1)$, найденные по формуле (1.20)

Таблица 15

Функция $S_p^L(\tau, 1)$

τ	$S_p^L(\tau, 1)$	τ	$S_p^L(\tau, 1)$	τ	$S_p^L(\tau, 1)$
0,01	3,998 +2	1,9	1,198 -2	6,5	6,515 -4
0,05	1,627 +1	2,0	1,070 -2	7,0	5,410 -4
0,1	4,144 0	2,2	8,671 -3	7,5	4,549 -4
0,2	1,068 0	2,4	7,135 -3	8,0	3,867 -4
0,3	4,855 -1	2,6	5,950 -3	8,5	3,320 -4
0,4	2,778 -1	2,8	5,019 -3	9,0	2,874 -4
0,5	1,800 -1	3,0	4,277 -3	9,5	2,503 -4
0,6	1,261 -1	3,2	3,677 -3	10,0	2,204 -4
0,7	9,316 -2	3,4	3,187 -3	11	1,733 -4
0,8	7,154 -2	3,6	2,781 -3	12	1,391 -4
0,9	5,658 -2	3,8	2,444 -3	13	1,137 -4
1,0	4,579 -2	4,0	2,159 -3	14	9,432 -5
1,1	3,775 -2	4,2	1,918 -3	15	7,927 -5
1,2	3,160 -2	4,4	1,713 -3	16	6,737 -5
1,3	2,679 -2	4,6	1,536 -3	18	5,007 -5
1,4	2,297 -2	4,8	1,384 -3	20	3,840 -5
1,5	1,937 -2	5,0	1,251 -3	22	3,021 -5
1,6	1,733 -2	5,5	9,884 -4	24	2,427 -5
1,7	1,523 -2	6,0	7,958 -4	25	2,191 -5
1,8	1,347 -2				

численным интегрированием, даны в табл. 15. Имея $S_p^L(\tau, 1)$, из соотношения (4.3) легко найти и $\xi_p(\tau, 1)$, так как функции

$M_1(\tau)$ и $M_2(\tau)$ для лоренцовского профиля известны (см. § 2.7). График $\xi_p^L(\tau, 1)$ приведен на рис. 14.

Замечательной особенностью представления (4.3) является то, что функция $\xi_p(\tau, 1)$ не сильно отличается от единицы при всех τ . Поэтому $\xi_p(\tau, 1)$ можно рассматривать как не очень существенный поправочный множитель. Для получения оценки функции источников его вполне можно заменять на единицу. Пренебрегая также отличием C_p от единицы, приходим к простой приближенной формуле

$$S_p(\tau, 1) \approx \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{M_c(\tau)}{[M_1(\tau)]^2}. \quad (4.7)$$

Откажемся теперь от предположения о том, что $\lambda = 1$. С помощью (2.6.50) величину t , определяемую выражением (3.10), можно представить в форме

$$t = \frac{\Gamma(2\gamma + 2)}{\pi\gamma} \frac{1 - \lambda}{\lambda M_1(\tau)}, \quad (4.8)$$

а формула (3.11) с учетом (2.6.43) и (2.6.49) принимает вид

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2(\tau)}{(1 - \lambda)^2} F_p(t). \quad (4.9)$$

Оба этих соотношения относятся к значениям τ , по порядку величины бóльшим единицы. Однако (4.8) позволяет вычислять величину t для любых τ , в том числе и тех, где асимптотики неприменимы. С учетом только что сказанного, функцию источников при всех τ естественно представить в виде (точное равенство!)

$$S_p(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_c(\tau)}{(1 - \lambda)^2} F_p(t) \xi_p(\tau, \lambda), \quad (4.10)$$

где $\xi_p(\tau, \lambda)$ — поправочный множитель к асимптотике (4.9).

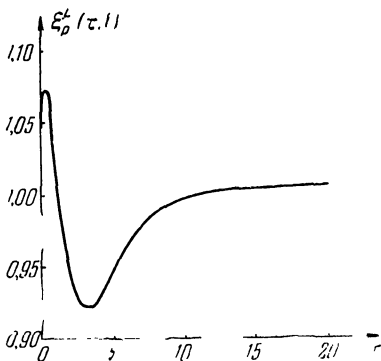


Рис. 14. Функция $\xi_p^L(\tau, 1)$.

При $1 - \lambda \ll 1$ поглощение начинает существенно сказываться лишь на больших расстояниях от источника, а $\xi_p(\tau, \lambda)$ заметно отличается от единицы только при сравнительно небольших τ . Поэтому величину $\xi_p(\tau, \lambda)$ можно в этом случае с очень хорошей точностью заменить на $\xi_p(\tau, 1)$. В результате будем иметь

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p(t) \xi_p(\tau, 1) \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (4.11)$$

Формула (4.11) является аналогом (3.4.19). Мы не вполне последовательны в обозначениях. Если быть строго последовательными и всюду, где возможно, использовать в задачах о переносе излучения в частотах линий те же обозначения, которые применялись для монохроматического рассеяния, то в формуле (4.11) через ξ_p следовало бы обозначить множитель при величине $\frac{\lambda}{4\pi\tau^2} M_2(\tau)$.

В зоне консервативного рассеяния, т. е. при таких τ , для которых $t \ll 1$, из (4.10) и (4.11) имеем

$$S_p(\tau, \lambda) \sim S_p(\tau, 1) = \frac{C_p}{4\pi\tau^2} \frac{M_i(\tau)}{[M_1(\tau)]^2} \xi_p(\tau, 1). \quad (4.12)$$

При этом отличие $\xi_p(\tau, 1)$ от единицы существенно только в части этой зоны, соответствующей сравнительно небольшим расстояниям от источника. Для переходной зоны и зоны сильного поглощения, в которых значения t по порядку не меньше единицы, (4.11) можно заменить на

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2(\tau)}{(1-\lambda)^2} F_p(t). \quad (4.13)$$

В частности, при $t \gg 1$ (зона сильного поглощения) находим из (3.12)

$$F_p(t) \sim 1, \quad (4.14)$$

так что (4.13) принимает вид

$$S_p(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} \frac{M_2(\tau)}{(1-\lambda)^2}. \quad (4.15)$$

Сколь бы мало ни отличалось λ от единицы, на достаточно больших расстояниях от источника в конце концов устанавливается асимптотический режим, описываемый формулой (4.15).

На этом мы заканчиваем формальное исследование функции источников для бесконечной однородной среды, содержащей точечный источник излучения. В следующем параграфе будет дана физическая интерпретация результатов. Однако прежде чем переходить к этому, упомянем о том, что в работах Б. А. Векленко [1], [2] и Ю. Ю. Абрамова и А. П. Напартовича [1] было изучено нестационарное поле излучения «мгновенного» источника, находящегося в бесконечной однородной среде, рассеивающей излучение с полным перераспределением по частотам. В этих работах, в частности, исследовано поведение решений нестационарных задач в различных предельных случаях (на больших расстояниях от места вспышки, а также по прошествии большого времени после нее).

§ 4.5. Перераспределение по частотам и эффект накопления. Длина термализаций

В предыдущей главе (§ 3.5) было показано, что в случае монохроматического рассеяния в слабо поглощающей среде вокруг источника существует область накопления. В этой области функция источников больше, чем она была бы в пробном объеме, находящемся в пустоте на том же расстоянии от этого источника. Посмотрим теперь, как сказывается на эффекте накопления перераспределение по частотам.

При рассеянии с полным перераспределением по частотам функция источников в пробном объеме, находящемся в пустоте на расстоянии r от источника, имеющего мощность

$$Q = \frac{4\tau \cdot \Delta\nu}{A [k_{12}(\nu_0) n_1]^2},$$

равна

$$S_0(\tau) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{a_1}{\tau^2}, \quad (5.1)$$

где $\tau = k_{12}(\nu_0) n_1 r$. Множитель a_1 есть значение $M_2(\tau)$ при $\tau = 0$. Он появляется из-за того, что число квантов с частотами от x до $x + dx$, излучаемых источником и вызывающих затем фотовозбуждения в пробном объеме, пропорционально $\alpha^2(x) dx$. При интегрировании этой величины по всем

частотам и появляется коэффициент a_1 . Учитывая (5.1), для коэффициента влияния среды имеем по определению (см. § 3.5)

$$i_p(\tau, \lambda) = \frac{4\pi\tau^2}{\lambda a_1} S_p(\tau, \lambda). \quad (5.2)$$

Будем сначала считать, что коэффициент поглощения доплеровский. При $1 - \lambda \ll 1$ и $\tau \gg 1$ находим из (5.2), пользуясь (4.13) и (3.23),

$$i_p^D(\tau, \lambda) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} V \ln \tau \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y}}{t_D^2 + y^2} dy. \quad (5.3)$$

График этой функции приведен на рис. 15. Качественно все обстоит так же, как и при монохроматическом рассеянии, — вокруг источника существует зона накопления, в которой

$$i_p^D(\tau, \lambda) > 1, \text{ причем}$$

размер ее тем больше, чем меньше $1 - \lambda$. Однако с количественной стороны различия огромны. При доплеровском профиле коэффициент влияния в зоне накопления по порядку величины не отличается от единицы, тогда как при монохроматическом рассеянии он может достигать очень больших значений. Например, при $1 - \lambda = 10^{-6}$ имеем $i_p^D(\tau_{\max}) \simeq 5,6$, тогда как $i_p^M(\tau_{\max}) \simeq 0,6 \cdot 10^3$ [см. формулу (3.5.5)]. Причиной этого различия служит перераспределение по частотам при элементарном акте рассеяния, приводящее к постепенной «перекачке» квантов из ядра линии в крылья. В крыльях коэффициент поглощения мал. Поэтому квант, появившийся в крыло, проходит без рассеяний относительно большое расстояние. Это значит, что такой квант обладает много меньшей способностью возбуждать атомы, чем квант с частотой, близкой к центру линии.

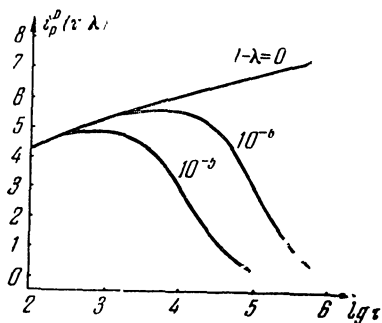


Рис. 15. Коэффициент влияния среды при рассеянии с доплеровским профилем.

да как $i_p^M(\tau_{\max}) \simeq 0,6 \cdot 10^3$ [см. формулу (3.5.5)]. Причиной этого различия служит перераспределение по частотам при элементарном акте рассеяния, приводящее к постепенной «перекачке» квантов из ядра линии в крылья. В крыльях коэффициент поглощения мал. Поэтому квант, появившийся в крыло, проходит без рассеяний относительно большое расстояние. Это значит, что такой квант обладает много меньшей способностью возбуждать атомы, чем квант с частотой, близкой к центру линии.

Итак, при рассеяниях происходят два явления, действующие в противоположных направлениях. Во-первых, меняются направления движения квантов, что ведет к «запутыванию» их траекторий и вызывает эффект накопления. Во-вторых, меняется частота. После каждого рассеяния в крыльях линии оказывается все бóльшая доля излучения. С увеличением пути, пройденного излучением в среде, растет число испытанных квантами рассеяний, и излучение постепенно утрачивает способность возбуждать атомы. В случае доплеровского коэффициента поглощения первый эффект все еще преобладает над вторым, хотя и в очень слабой степени. Поэтому $i_p^D(\tau, \lambda)$ в зоне накопления и не отличается по порядку от единицы.

При рассеянии с лоренцовским коэффициентом поглощения доминирует уже эффект перераспределения. Даже в строго консервативном случае, когда эффект накопления должен был бы быть наибольшим, его не существует, поскольку, как видно из (5.2) и (3.21),

$$i_p^L(\tau, 1) \sim \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\tau^{1/2}} \left(1 + \frac{9}{20} \frac{1}{\tau} - \dots \right) \quad (\tau \gg 1). \quad (5.4)$$

Правда, в непосредственной окрестности источника существует небольшая область, где $i_p^L(\tau, 1) > 1$. Это видно, например, из формул (5.2) и (2.13), показывающих, что при малых τ

$$i_p^L(\tau, 1) = 1 + \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{4} \right) \tau + \dots \quad (5.5)$$

Однако уже при небольших τ рост $i_p^L(\tau, 1)$ сменяется убыванием (рис. 16), и во всей асимптотической области ($\tau \gg 1$)

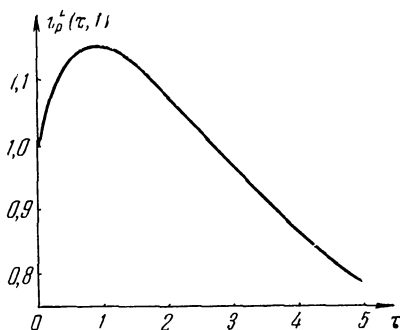


Рис. 16. Коэффициент влияния среды при консервативном рассеянии с лоренцовским профилем.

коэффициент влияния оказывается много меньше единицы. В противоположность этому, при монохроматическом рассеянии и в доплеровском случае $i_p(\tau, 1) > 1$ при всех $\tau > 0$.

Таким образом, при лоренцовском коэффициенте поглощения присутствие даже чисто рассеивающей среды уменьшает концентрацию возбужденных атомов на больших расстояниях от источника по сравнению с той, которая была бы в пробном объеме, находящемся в пустоте на том же расстоянии от источника. Спад концентрации возбужденных атомов в рассеивающей среде происходит при этом пропорционально $r^{-5/2}$, где r — расстояние от источника [см. формулу (3.21)]. На первый взгляд этот результат может показаться странным. В чисто рассеивающей среде поток излучения через площадку убывает как r^{-2} , а потому, казалось бы, не может убывать быстрее и концентрация возбужденных атомов. На самом деле это не так. Поток, проинтегрированный по всем частотам в линии, действительно убывает как r^{-2} . Однако с расстоянием изменяется и распределение излучения по частотам. Вследствие сильной зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты это обстоятельство должно обязательно приниматься во внимание. Оно может обеспечить и более быстрое убывание концентрации возбужденных атомов. Решающим здесь является поведение коэффициента поглощения в далеких крыльях линии. Чем медленнее убывает коэффициент поглощения с удалением от центра линии, тем быстрее спадает вдали от источника концентрация возбужденных атомов в чисто рассеивающей среде. Так, можно показать, что если

$\alpha(x) \propto |x|^{-\kappa}$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $S_p(\tau, 1) \propto \tau^{\frac{2\kappa+1}{\kappa}}$ при $\tau \gg 1$. Между прочим, отсюда следует, что если коэффициент поглощения убывает в крыльях по произвольному степенному закону, то на больших расстояниях от источника в чисто рассеивающей среде $i_p(\tau, 1) < 1$, т. е. накопления не существует.

Кванты, испускаемые источником, испытывают в среде многократные рассеяния, каждое из которых представляет собой возбуждение атома с последующим спонтанным переходом. Чем дальше от источника находится возбужденный атом, тем большее в среднем число рассеяний должен

был испытать квант, дошедший сюда и вызвавший возбуждение. Между тем, за возбуждением атома с вероятностью $1 - \lambda$ следует безызлучательный переход, и квант «гибнет». Поэтому, сколь бы мала ни была величина $1 - \lambda$, на достаточно больших расстояниях от источника гибель квантов должна начать сказываться. Вблизи же источника, где возбуждение в основном производится квантами, испытанными относительно небольшое число рассеяний, поле излучения должно быть почти таким же, как если бы гибели квантов не было вовсе.

Согласно только что сказанному при $1 - \lambda \ll 1$ вокруг источника должна существовать область, где рассеяние приближенно можно считать консервативным, т. е. полагать $\lambda = 1$. Понятно, что размеры этой области консервативного рассеяния должны быть тем больше, чем меньше роль поглощения. Это качественное заключение справедливо во всех случаях (при любой зависимости коэффициента поглощения в линии от частоты, любой индикатрисе и т. п.). Если же говорить о количественной стороне, то здесь уже все определяется процессами, происходящими при элементарном акте рассеяния.

Как мы видели в гл. III (§ 3.4), при изотропном монохроматическом рассеянии размер консервативной области по порядку величины равен диффузионной длине $\tau_d = \frac{1}{k}$. Поскольку считается, что $1 - \lambda \ll 1$, из (3.2.3) имеем $k \sim \sqrt{3(1 - \lambda)}$, так что

$$\tau_d \sim \frac{1}{\sqrt{3(1 - \lambda)}}. \quad (5.6)$$

При рассеянии в частотах линий все определяется поведением коэффициента поглощения в крыльях линии. Из результатов, полученных в двух предыдущих параграфах, ясно, что поглощением можно в первом приближении пренебрегать на расстояниях от источника, которым соответствуют значения параметра t , по порядку меньшие единицы. Поглощение начинает существенно сказываться только тогда, когда t приближается к единице. Порядковая оценка размеров области консервативного рассеяния дается поэтому значением τ , которому соответствует t , равное единице.

Приведенные сейчас соображения показывают, что для любой среды, в которой наряду с рассеянием происходят также процессы «истинного» поглощения, должна существовать некоторая характерная длина. Она характеризует среднее расстояние, отделяющее место рождения кванта

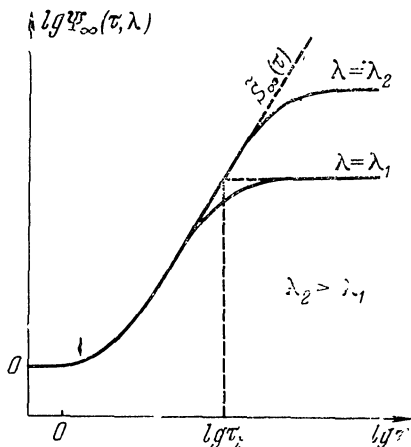


Рис. 17. К определению длины термализации τ_t (кривые схематические).

от места его гибели. Иначе говоря, это есть некоторое среднее расстояние от места первичного возбуждения атома до того места, где энергия, затраченная на возбуждение, превращается в тепло. Эта единица длины называется *длиной термализации*. Определяется она следующим образом.

Обозначим, как и в § 3.9,

$$\Psi_{\infty}(\tau, \lambda) = 1 + 4\pi \int_0^{\tau} \tau'^2 S_p(\tau', \lambda) d\tau', \quad (5.7)$$

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) = \Psi_{\infty}(\tau, 1) \quad (5.8)$$

и заметим, что в силу (1.24) $\Psi_{\infty}(\infty, \lambda) = (1 - \lambda)^{-1}$. Назовем длиной термализации τ_t корень уравнения

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau_t) = (1 - \lambda)^{-1}. \quad (5.9)$$

Чтобы сделать это определение более наглядным, на рис. 17 приводится его графическое пояснение.

Рассмотрим, что дает (5.9) в некоторых частных случаях. При $\lambda = 0$ имеем $\tau_t = 0$, что соответствует тому факту, что за каждым актом возбуждения атома сразу же следует безызлучательный переход вниз. Значительно интереснее противоположный предельный случай $1 - \lambda \ll 1$. Из (4.1), (5.7) и (5.8) следует, что при $\tau \gg 1$

$$\tilde{S}_\infty(\tau) \sim \frac{C_p}{M_1(\tau)}. \quad (5.10)$$

Поэтому (5.9) принимает вид

$$M_1(\tau_t) \sim C_p (1 - \lambda). \quad (5.11)$$

Пользуясь асимптотиками функций $M_1(\tau)$, приведенными в § 2.7, находим из (5.11) для коэффициентов поглощения важнейших частных видов:

$$\text{Доплер: } \tau_t \sim \frac{\pi^{3/2}}{8} \left[(1 - \lambda) \sqrt{\ln \frac{1}{1 - \lambda}} \right]^{-1}, \quad (5.11a)$$

$$\text{Фойгт: } \tau_t \sim \frac{\pi^2}{9} aU(a, 0) (1 - \lambda)^{-2}, \quad (5.11б)$$

$$\text{Лоренц: } \tau_t \sim \frac{\pi}{9} (1 - \lambda)^{-2}. \quad (5.11в)$$

Отметим, что область применимости формулы (5.11б) ограничена теми значениями τ_t , при которых для функции $M_1(\tau_t)$ уже можно пользоваться фойгтовскими асимптотиками [см. по этому поводу стр. 120]. Для профилей, убывающих в крыльях пропорционально $|x|^{-\kappa}$, (5.11) дает

$$\tau_t \propto (1 - \lambda)^{-\frac{1}{2\gamma}}, \quad (5.11г)$$

где $\gamma = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}$. Наконец, для прямоугольного профиля коэффициента поглощения [монохроматическое рассеяние] при $1 - \lambda \ll 1$ из (5.9) и (3.9.12) получаем

$$\tau_t \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3(1 - \lambda)}} \sim \sqrt{2} \tau_d, \quad (5.12)$$

где τ_d — диффузионная длина.

Из (3.35) и (5.7) — (5.8) следует, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) \sim \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma} \left[1 - V\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^{-1}. \quad (5.13)$$

Подставляя это выражение в (5.9), приходим к следующему соотношению для определения τ_i при $1 - \lambda \ll 1$:

$$1 - V\left(\frac{1}{\tau_i}\right) \sim \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma} (1 - \lambda). \quad (5.14)$$

Эта формула применима как при рассеянии в частотах линии, так и при монохроматическом рассеянии. В первом случае из нее следует (5.11), а во втором получаем (5.12).

Общий вывод, который можно сделать из приведенных только что результатов, сводится к следующему. При почти консервативном рассеянии длина термализации очень чувствительна к поведению коэффициента поглощения в крыльях линии. Чем медленнее убывает коэффициент поглощения в крыльях, тем больше длина термализации. Насколько велико влияние различий в коэффициенте поглощения, можно судить по такому примеру. Когда $1 - \lambda = 10^{-4}$ (в действительности часто приходится иметь дело и с много меньшими значениями $1 - \lambda$), при доплеровском коэффициенте поглощения длина термализации равна примерно $2 \cdot 10^3$, при лоренцовском — $3 \cdot 10^7$, тогда как при монохроматическом рассеянии она составляет всего $0,8 \cdot 10^2$. Таким образом, различие достигает многих порядков. Однако и сейчас еще приходится иногда встречаться с одной очень распространенной в недавнем прошлом ошибкой. Длину термализации отождествляют с диффузионной длиной не только при монохроматическом рассеянии (что вполне допустимо при порядковых оценках), но и при рассеянии в частотах линий с любым коэффициентом поглощения, что уже совершенно недопустимо. К каким огромным ошибкам это может приводить, мы только что видели.

Понятие длины термализации чрезвычайно полезно для качественного суждения о характере решения большинства задач о переносе излучения в частотах линий. Значение τ_i определяет радиус своего рода «сферы влияния» точечного источника, в пределах которой происходит «размазывание» первоначального возбуждения. Пусть в среде имеются

распределенные источники, мощность которых на расстояниях порядка τ_l меняется мало. Тогда зависимость функции источников от координат будет почти в точности повторять зависимость мощности первичных источников. Наоборот, если на расстояниях порядка τ_l мощность первичных источников меняется сильно, влияние «размазывания» становится существенным, и столь простой связи между $S(\tau)$ и $S^*(\tau)$ более не существует. Грубо говоря, функция источников в данном месте есть тогда результат некоторого осреднения $S^*(\tau)$ по области размером порядка τ_l . Подробное качественное обсуждение этого вопроса можно найти в монографии Р. Томаса [2].

Конечная цель оптической диагностики плазмы состоит в том, чтобы по наблюдаемым характеристикам излучения восстановить физические параметры среды — распределение температуры и плотности в ней. Очевидно, что интенсивность излучения непосредственно отражает распределение возбужденных атомов, тогда как для нахождения температуры и плотности нужно по полю излучения найти распределение первичных источников. Эффект «размазывания», о котором только что говорилось, кладет теоретический предел возможностям оптической диагностики разреженной плазмы. Именно, можно утверждать, что в пределах масштабов, заметно меньших длины термализации, восстановить распределение температуры и плотности по полю излучения в частотах одной линии невозможно в принципе.

Систематическое использование длины термализации в теории переноса началось после опубликования работы Ю. Эвретта и Д. Хаммера [1], в которой была выяснена важная роль этой характерной длины. Первоначальное определение τ_l было в ряде отношений не совсем удачным, и предпринимались попытки его улучшить. Поэтому в литературе можно найти слегка отличающиеся друг от друга варианты способа введения τ_l (см. В. В. Иванов [2], В. В. Иванов и Д. И. Нагирнер [1]). Однако все они обладают более или менее серьезными недостатками. Вопрос о наилучшем способе введения τ_l служил в последнее время предметом специального обсуждения ряда лиц, работающих в области проблем теории переноса в частотах линий (Д. Хаммер, Г. Рыбицкий, Дж. Стюарт, В. В. Иванов).

Определение (5.9) выражает ту точку зрения, которая выработалась у автора в ходе этого обсуждения.

Заметим в заключение, что термин «длина термализации» употребляется также в нейтронной физике, однако в совершенно другом смысле.

§ 4.6. Плоский изотропный источник

До сих пор речь шла о точечном источнике. Пусть теперь в бесконечной среде имеется плоский изотропный источник. Будем считать, что мощность его в расчете на единицу площади равна $\frac{4\pi \cdot \Delta v}{A}$. Если τ — оптическое расстояние от излучающей плоскости (в центре линии), $S_{pl}(\tau)$ — соответствующая функция источников, то, как и при монохроматическом рассеянии (см. § 3.6),

$$S_{pl}(\tau) = \Phi_{\infty}(\tau). \quad (6.1)$$

Явные выражения для $\Phi_{\infty}(\tau)$ были получены в § 4.1. Они даются формулами (1.12) и (1.18). Поступая так же, как в § 4.2, из (1.18) можно получить, что при малых $|\tau|$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = & \frac{\lambda}{2} \left\{ -a_1 \ln |\tau| + [-a_1 \gamma - \tilde{a} + \rho_{-1}^*(\lambda)] + \right. \\ & \left. + \left(a_2 - \lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) |\tau| + a_1 \left(\lambda^2 \frac{\pi^2}{8} a_1^2 - \lambda a_2 \right) \tau^2 \ln |\tau| \right\} + O(\tau^2), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где

$$\rho_{-1}^*(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{R(z, \lambda) - 1}{z} G(z) dz. \quad (6.3)$$

С другой стороны, (1.12) и (2.6.21) дают

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \left\{ K(|\tau|) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V^2(u)}{1 - \lambda V(u)} \cos \tau u du \right\}, \quad (6.4)$$

так что при малых $|\tau|$

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = & \frac{\lambda}{2} \left\{ -a_1 \ln |\tau| + \left[-a_1 \gamma - \tilde{a} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V^2(u)}{1 - \lambda V(u)} du \right] \right\} + O(|\tau|) \end{aligned} \quad (6.5)$$

и, таким образом, наряду с представлением (6.3), $\rho_{-1}^*(\lambda)$ можно записать также в виде

$$\rho_{-1}^*(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V^2(u)}{1 - \lambda V(u)} du. \quad (6.6)$$

Тем самым, между прочим, мы доказали тождество (1.22). Однако сейчас нас интересует не это тождество само по себе, а одно интересное следствие, вытекающее из (6.6). Если коэффициент поглощения убывает в крыльях по произвольному степенному закону, т. е. пропорционален $|x|^{-\kappa}$ ($1 < \kappa < \infty$), то величина $\rho_{-1}^*(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow 1$ остается конечной. При доплеровском профиле картина иная. Как видно из (6.6) и (2.7.15), при стремлении λ к единице величина $\rho_{-1}^*(\lambda)$ неограниченно возрастает. Значит, в бесконечной чисто рассеивающей среде стационарного поля излучения существовать в этом случае не может. В этом отношении рассеяние при доплеровском коэффициенте поглощения не отличается от монохроматического рассеяния (см. § 3.6). Причина этого сходства состоит в том, что в обоих случаях существует эффект накопления (см. § 3.5 и 4.5).

Приведем асимптотики, описывающие поведение $\Phi_{\infty}(\tau)$ при больших $|\tau|$. Для профилей, удовлетворяющих условию (3.3),

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) \sim \frac{2}{\lambda \pi^2} \frac{1}{\tau^2 G(|\tau|)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma} dy}{(t + y^{2\gamma} \operatorname{ctg} \pi\gamma)^2 + y^{4\gamma}}, \quad (6.7)$$

где

$$t = (1 - \lambda) \frac{2\gamma + 1}{\lambda \pi A x'(|\tau|)} \sim \frac{1 - \lambda}{\lambda \frac{\pi}{2} |\tau| G(|\tau|)}. \quad (6.8)$$

Формула (6.7) выводится непосредственно из (1.18). При этом следует воспользоваться асимптотиками $G(z)$ и $\mathcal{U}(z)$, найденными в § 2.6. Использование асимптотики $S_p(\tau, \lambda)$, полученной в § 4.3, в сочетании с (1.8) также приводит к (6.7), однако этот путь оказывается гораздо длиннее.

При строго консервативном рассеянии (а при $1 - \lambda \ll 1$ в случае $\gamma < \frac{1}{2}$ — также и в асимптотической части зоны

консервативного рассеяния) имеем из (6.7)

$$\Phi_{\infty}(\tau, 1) \sim \frac{\operatorname{ctg} \pi \gamma}{\pi \Gamma(2\gamma)} \frac{1}{\tau^2 G(|\tau|)} \quad (|\tau| \rightarrow \infty). \quad (6.9)$$

В частности, для фойгтовского профиля $\gamma = \frac{1}{4}$, а асимптотика функции G дается выражением (2.7.27). Из (6.9) находим

$$\Phi_{\infty}^V(\tau, 1) \sim \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{aU(a, 0)}} |\tau|^{-1/2} \quad (a|\tau| \gg 1). \quad (6.10)$$

Переходя здесь к пределу $a \rightarrow \infty$, получаем асимптотику функции $\Phi_{\infty}(\tau, 1)$ при лоренцовском профиле:

$$\Phi_{\infty}^L(\tau, 1) \sim \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\tau|^{-1/2} \quad (|\tau| \gg 1). \quad (6.11)$$

Так же, как это делалось в случае точечного источника, путем соответствующего переопределения аргументов можно добиться того, что при $\gamma < \frac{1}{2}$ асимптотика (6.7) будет хорошо работать и в неасимптотической области. Функцию источников при любых τ и λ можно представить в форме

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{K(|\tau|)}{(1-\lambda)^2} F_{\infty}(t) \xi_{\infty}(\tau, \lambda), \quad (6.12)$$

где

$$F_{\infty}(t) = \frac{t^2}{\Gamma(2\gamma + 1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma} dy}{(t + y^{2\gamma} \operatorname{ctg} \pi \gamma)^2 + y^{4\gamma}}, \quad (6.13)$$

$$t = \frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \frac{1-\lambda}{\lambda L(|\tau|)}, \quad (6.14)$$

а $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ — поправочный множитель к асимптотике.

При почти консервативном рассеянии ($1 - \lambda \ll 1$) и $\gamma < \frac{1}{2}$ множитель $\xi_{\infty}(\tau, \lambda)$ можно заменять на $\xi_{\infty}(\tau, 1)$, а для получения грубой оценки функции источников просто полагать равным единице. При строго консервативном рассеянии ($\lambda = 1$) имеем из (6.12) — (6.14)

$$\Phi_{\infty}(\tau, 1) = \frac{C_{\infty}}{2} \frac{K(|\tau|)}{L^2(|\tau|)} \xi_{\infty}(\tau, 1), \quad (6.15)$$

где

$$C_{\infty} = \frac{\lg \pi \gamma}{\pi \gamma}. \quad (6.16)$$

Если $\lambda \neq 1$, то при $|\tau| \rightarrow \infty$

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \frac{K(|\tau|)}{(1-\lambda)^2}, \quad (6.17)$$

однако при $1 - \lambda \ll 1$ область применимости этого асимптотического представления ограничена очень большими значениями $|\tau|$ (именно, теми, которым соответствуют значения t , существенно большие единицы).

Подчеркнем, что, в отличие от аналогичных формул, относящихся к точечному источнику, переход к пределу $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$ в (6.7) — (6.8) и (6.12) — (6.14) с целью получить доплеровские асимптотики невозможен.

Таблица 16

Функция $\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$

τ	$\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$	τ	$\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$	τ	$\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$	τ	$\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$
0,01	2,017	1,4	0,7013	3,8	0,4438	9,0	0,2861
0,05	1,610	1,5	0,6819	4,0	0,4326	9,5	0,2783
0,1	1,431	1,6	0,6638	4,2	0,4221	10,0	0,2711
0,2	1,248	1,7	0,6470	4,4	0,4123	11	0,2582
0,3	1,138	1,8	0,6312	4,6	0,4031	12	0,2470
0,4	1,059	1,9	0,6165	4,8	0,3945	13	0,2372
0,5	0,9960	2,0	0,6023	5,0	0,3864	14	0,2284
0,6	0,9442	2,2	0,5772	5,5	0,3681	15	0,2205
0,7	0,9001	2,4	0,5545	6,0	0,3521	16	0,2134
0,8	0,8617	2,6	0,5340	6,5	0,3380	18	0,2010
0,9	0,8278	2,8	0,5155	7,0	0,3254	20	0,1906
1,0	0,7975	3,0	0,4986	7,5	0,3141	22	0,1816
1,1	0,7701	3,2	0,4832	8,0	0,3039	24	0,1738
1,2	0,7452	3,4	0,4690	8,5	0,2946	25	0,1702
1,3	0,7223	3,6	0,4559				

Приведем теперь некоторые численные результаты. В табл. 16 даны значения функции $\Phi_{\infty}(\tau)$ при консервативном рассеянии с лоренцовским профилем, полученные из

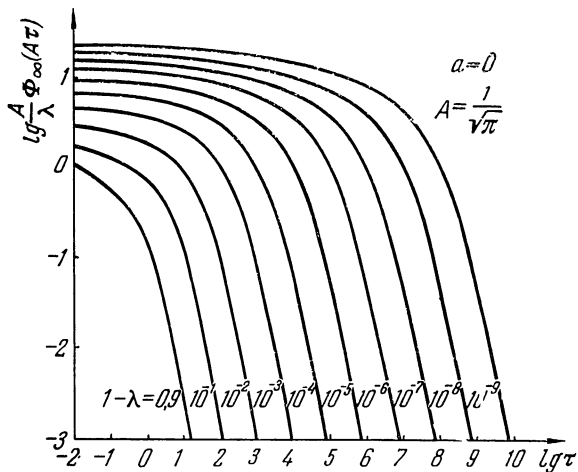


Рис. 18. Функция $\Phi_{\infty}(\tau)$ при доплеровском профиле.

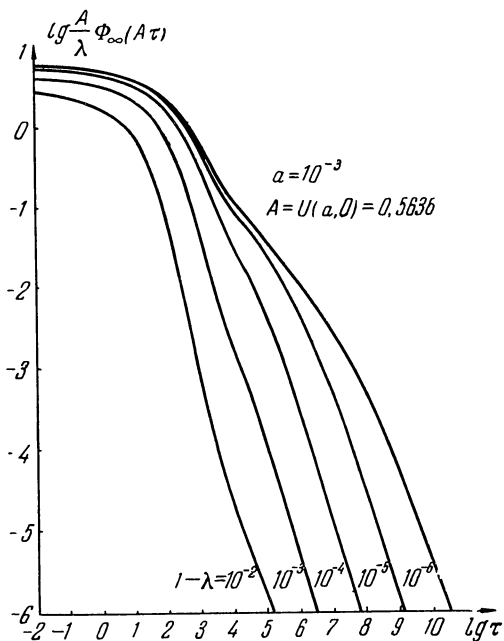


Рис. 19. Функция $\Phi_{\infty}(\tau)$ при фойгтовском профиле с $a = 10^{-3}$

(1.18) численным интегрированием. С помощью приведенных в таблице значений $\Phi_{\infty}^L(\tau, 1)$ по формуле (6.15) были найдены значения $\xi_{\infty}^L(\tau, 1)$ [предварительно были табулиро-

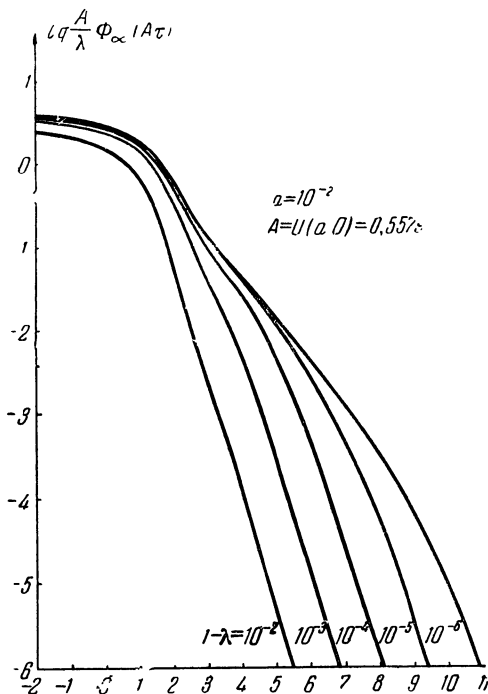


Рис. 20. Функция $\Phi_{\infty}^L(\tau)$ при фойгтовском профиле с $a = 10^{-2}$.

ваны $K_L(\tau)$ и $L_L(\tau)$]. Оказалось, что функция $\xi_{\infty}^L(\tau, 1)$ возрастает от $\pi/4 = 0,79$ при $\tau = 0$ до 1,46 при $\tau = 0,1$, а затем довольно быстро убывает. При $\tau \geq 1$ отличие $\xi_{\infty}^L(\tau, 1)$ от единицы не превышает 8%. Таким образом, при лоренцовском профиле представление (6.15) с $\xi_{\infty}^L(\tau, 1) = 1$ обеспечивает при всех τ точность выше 50%; при $\tau \geq 1$ погрешность не превышает 8%; при $\tau \geq 5$ она меньше 3%.

Влияние фойгтовского параметра a на вид $\Phi_{\infty}^L(\tau)$ наглядно иллюстрируется рис. 18—21, любезно предоставленными

автору Д. Хаммером. Значения $\Phi_\infty(\tau)$, использованные для построения кривых, были найдены численным решением уравнения (1.7). Рис. 18, относящийся к доплеровскому профилю, хорошо иллюстрирует сделанный выше вывод о

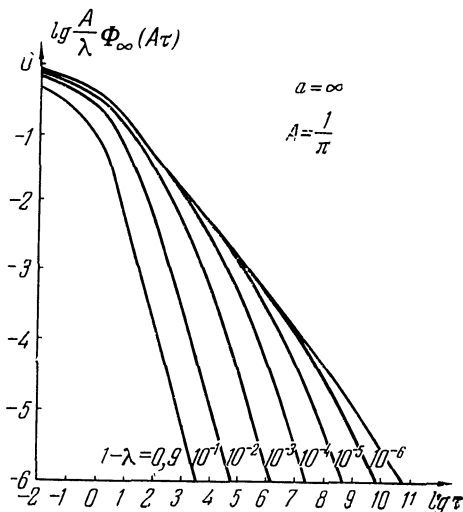


Рис. 21. Функция $\Phi_\infty(\tau)$ при лоренцовском профиле.

расходимости $\Phi_\infty^D(\tau, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 1$. Когда $a = 10^{-3}$, область значений τ , где с достаточной точностью $\Phi_\infty^V(\tau, \lambda)$ можно считать равной $\Phi_\infty^V(\tau, 1)$, существует лишь при $1 - \lambda \lesssim 10^{-5} \div 10^{-6}$. Это видно из рис. 19. Практическая область применимости асимптотики (6.10) при $a = 10^{-3}$ оказывается поэтому довольно узкой. Из сопоставления рис. 19—21 следует, что по мере роста a она расширяется. При лоренцовском профиле ($a = \infty$) область значений τ , где можно полагать $\Phi_\infty^L(\tau, \lambda) \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}} |\tau|^{-1/2}$, существует уже при $1 - \lambda = 10^{-3}$. С уменьшением $1 - \lambda$ она быстро увеличивается в размерах.

Глава V

РАССЕЯНИЕ В ЧАСТОТАХ ЛИНИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

В предыдущей главе среда считалась бесконечной. Тем самым были исключены из рассмотрения области, расположенные вблизи границ, в которых наряду с поглощением важную роль играет выход излучения. Теперь нам предстоит исследовать поле излучения в этих пограничных областях. Эти области дают основной вклад в выходящее излучение, и потому их исследование представляет собой чрезвычайно важную проблему. В качестве первого шага естественно рассмотреть идеализированную среду, занимающую полупространство. Этому и будут посвящены ближайшие главы.

Задача о рассеянии света в полубесконечной среде принадлежит к числу тех немногих проблем теории многократного рассеяния, точное решение которых удается получить в замкнутой форме. Поэтому, не говоря уже об интересе к этой задаче как таковой, она приобретает еще и роль «пробного камня», служащего для проверки точности и границ применимости различных приближенных и численных методов теории переноса. Этим оправдывается то большое место, которое отводится этой задаче, а также наше стремление привести имеющиеся численные результаты, к сожалению, еще далеко не полные. Большое внимание уделяется изучению асимптотических свойств решения. Это обстоятельство также не случайно. Как будет показано ниже, когда рассеяние почти консервативно, так что за фотовозбуждением атома в большинстве случаев следует радиативный переход вниз, толщина пограничного слоя оказывается очень большой. Асимптотики, о которых только что упоминалось, отражают упрощения в структуре этого толстого

пограничного слоя на оптических глубинах, по порядку больших единицы. Подобные упрощения имеют общий характер и должны быть свойственны не только среде, ограниченной плоскостью, но и средам более сложной геометрии.

В настоящей главе дается формальное решение задачи о расчете поля излучения в полупространстве, справедливое при произвольной зависимости мощности источников от глубины. Функции, через которые выражается решение, подробно исследуются и некоторые из них табулируются. Применение этих общих результатов к различным конкретным частным случаям, а также обсуждение физической стороны дела составляет содержание следующей главы.

§ 5.1. Основные уравнения

Будем предполагать, что мощность первичных источников излучения, вызывающих возбуждение атомов и тем самым свечение среды, зависит только от одной пространственной координаты — расстояния от границы. Вдоль любой плоскости, параллельной границе среды, она постоянна. В силу симметрии задачи интенсивность излучения должна зависеть только от глубины, от угла с нормалью и, наконец, от частоты. Пусть x — обычная безразмерная частота, τ — оптическая глубина, т. е. расстояние по нормали от границы среды, измеренное в длинах свободного пробега кванта частоты $x = 0$, и μ — косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью. Тогда $I = I(\tau, \mu, x)$. При отсутствии поглощения в непрерывном спектре и $\lambda = \text{const}$ уравнение переноса в частотах линии записывается в виде (см. § 2.3)

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = \alpha(x) I(\tau, \mu, x) - \\ - \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - \alpha(x) S^*(\tau), \end{aligned} \quad (1.1)$$

а граничное условие, выражающее отсутствие падающего извне излучения, выглядит так:

$$I(0, \mu, x) = 0 \text{ при } \mu < 0. \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.1) при граничном условии (1.2) и произвольной «первичной» функции источников $S^*(\tau)$ и составляет содержание настоящей главы.

Введя функцию источников

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + S^*(\tau), \quad (1.3)$$

уравнение переноса можно переписать в виде

$$\frac{\mu}{\alpha(x)} \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = I(\tau, \mu, x) - S(\tau), \quad (1.4)$$

из которого видно, что в действительности интенсивность излучения зависит не от самих величин μ и x , а лишь от отношения

$$z = \frac{\mu}{\alpha(x)}. \quad (1.5)$$

Интенсивность как функцию τ и z будем по-прежнему обозначать через I , что не должно привести к недоразумениям. Ее нормировка остается прежней, так что $I(\tau, z) d\sigma d\omega dv$ есть энергия, протекающая за единицу времени в пределах телесного угла $d\omega$ в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$ через площадку $d\sigma$, находящуюся на оптической глубине τ и ориентированную перпендикулярно к направлению распространения излучения.

Пользуясь обозначением (1.5), вместо (1.4) и (1.2) имеем соответственно

$$z \frac{dI(\tau, z)}{d\tau} = I(\tau, z) - S(\tau), \quad (1.6)$$

$$I(0, z) = 0 \text{ при } z < 0. \quad (1.7)$$

Выражение для функции источников $S(\tau)$ также можно преобразовать, сделав во внутреннем интеграле в (1.3) замену $z' = \mu'/\alpha(x')$:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' \int_{\frac{1}{\alpha(x')}}^1 I(\tau, z') dz' + S^*(\tau). \quad (1.8)$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} I(\tau, z') G(z') dz' + S^*(\tau), \quad (1.9)$$

где

$$G(z) = \begin{cases} a_1 = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x') dx' & \text{при } |z| \leq 1 \\ 2A \int_{x(z)}^{\infty} \alpha^2(x') dx' & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \quad (1.10)$$

причем $x(z)$ определяется из условия

$$\alpha(x(z)) = \frac{1}{|z|}, \quad x(z) \geq 0.$$

Заметим, что

$$G(z) = G(-z). \quad (1.11)$$

Далее, из (1.9) и (1.3) следует тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\tau, z') G(z') dz' = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I\left(\tau, \frac{\mu'}{\alpha(x')}\right) d\mu'.$$

Полагая в нем $I \equiv 1$ и учитывая (1.11), находим

$$\int_0^{\infty} G(z) dz = 1. \quad (1.12)$$

Явные выражения для $G(z)$ при доплеровском и лоренцовском коэффициентах поглощения были даны в § 2.7.

Для интенсивности излучения, распространяющегося на глубине τ , из (1.6) при учете (1.7) находим [ср. формулы (2.3.13) и (2.3.14)]

$$I(\tau, z) = - \int_0^{\tau} S(\tau') e^{-\frac{\tau'-\tau}{z}} \frac{d\tau'}{z} \quad (\mu < 0), \quad (1.13)$$

$$I(\tau, z) = \int_{\tau}^{\infty} S(\tau') e^{-\frac{\tau'-\tau}{z}} \frac{d\tau'}{z} \quad (\mu > 0). \quad (1.14)$$

В частности, интенсивность выходящего излучения равна

$$I(0, z) = \int_0^{\infty} S(\tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} \frac{d\tau'}{z}. \quad (1.15)$$

Нетрудно получить интегральное уравнение для $S(\tau)$, решение которого эквивалентно решению уравнения переноса (1.1) при граничном условии (1.2). Для этого достаточно подставить в (1.9) выражения для интенсивности излучения, даваемые (1.13) и (1.14). Таким путем получается следующее уравнение для функции источников $S(\tau)$ (подробности см. в § 2.4):

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S^*(\tau), \quad (1.16)$$

где

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} G(z') \frac{dz'}{z'}. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.16) представляет собой основное интегральное уравнение рассматриваемой проблемы. В дальнейшем мы будем исходить именно из него, а не из уравнения переноса в дифференциальной форме. Относительно свойств ядра $K(\tau)$ и связанных с ним функций см. § 2.6 и 2.7.

Для решения интегрального уравнения (1.16) используем метод, развитый В. В. Соболевым [1], [5] — [7] и К. Кейсом [1], [2]. Этот метод в последние годы получил довольно широкое применение в теории переноса излучения.

Решение уравнения (1.16) при произвольном свободном члене $S^*(\tau)$ сводится к отысканию его функции Грина $G(\tau, \tau')$, определяемой уравнением

$$\mathcal{G}(\tau, \tau') = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) G(t, \tau') dt + \delta(\tau - \tau') \quad (1.18)$$

(где $\delta(x)$ — дельта-функция), или, что эквивалентно, к нахождению резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$, удовлетворяющей уравнению

$$\Gamma(\tau, \tau') = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \Gamma(t, \tau') dt + \frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau'|). \quad (1.19)$$

Функция Грина и резольвента связаны между собой

следующим образом:

$$G(\tau, \tau') = \Gamma(\tau, \tau') + \delta(\tau - \tau'). \quad (1.20)$$

Если $\Gamma(\tau, \tau')$ найдена, то функция источников $S(\tau)$ получается простым интегрированием по распределению первичных источников:

$$S(\tau) = S^*(\tau) + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') S^*(\tau') d\tau'. \quad (1.21)$$

В силу симметрии ядра уравнения (1.16) функция Грина и резольвента должны быть симметричными функциями своих аргументов, т. е.

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Gamma(\tau', \tau). \quad (1.22)$$

Можно показать, что резольвента, зависящая от двух переменных, просто выражается через функцию одного аргумента $\Phi(\tau)$, являющуюся частным значением $\Gamma(\tau, \tau')$ при $\tau' = 0$:

$$\Phi(\tau) \equiv \Gamma(\tau, 0) = \Gamma(0, \tau). \quad (1.23)$$

Докажем для этого вначале, что если функция $f(\tau)$ ограничена при $\tau \rightarrow 0$, то

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) f(t) dt = \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) f'(t) dt + f(0) K(\tau). \quad (1.24)$$

Разбивая интеграл, стоящий справа, на два — один от 0 до τ и другой от τ до ∞ и производя в первом из них замену $y = \tau - t$, а во втором $y = t - \tau$, получаем

$$\int_0^{\infty} K(|\tau - t|) f(t) dt = \int_0^{\tau} K(y) f(\tau - y) dy + \int_0^{\infty} K(y) f(\tau + y) dy. \quad (1.25)$$

Отсюда

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) f(t) dt = f(0) K(\tau) + \int_0^{\tau} K(y) f'(\tau - y) dy + \int_0^{\infty} K(y) f'(\tau + y) dy. \quad (1.26)$$

Преобразуя сумму двух последних членов, стоящих в правой части, с помощью *тождества* (1.25) сразу же приходим к (1.24).

Продифференцируем теперь (1.19) сначала по τ , затем по τ' и сложим почленно получающиеся равенства. Учитывая (1.24) и (1.23), находим

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} \right) dt + \Phi(\tau') \frac{\lambda}{2} K(\tau). \quad (1.27)$$

Из уравнения (1.19) с учетом обозначения (1.23) имеем

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - t|) \Phi(t) dt + \frac{\lambda}{2} K(\tau). \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.27) и (1.28), заключаем, что

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} = \Phi(\tau) \Phi(\tau'). \quad (1.29)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию (1.23), при $\tau' > \tau$ имеет вид

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(\tau' - \tau) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau' - t) dt. \quad (1.30)$$

В силу симметрии резольвенты отсюда следует, что при произвольном соотношении между τ и τ'

$$\Gamma(\tau, \tau') = \Phi(|\tau - \tau'|) + \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t) \Phi(\tau' - t) dt, \quad (1.31)$$

где τ — меньшее из чисел τ, τ' .

Формула (1.31) показывает, что определение резольвенты уравнения (1.16) действительно сводится к нахождению функции одной переменной $\Phi(\tau)$. Эта функция определяется уравнением (1.28). Она играет фундаментальную роль в задаче о рассеянии света в полубесконечном слое.

Соотношение (1.31) для частного случая $K(\tau) = E_1(\tau)$ было найдено Г. Плачеком в 1945 г. (см. по этому поводу Б. Дэвисон [1], гл. VI). Изложенный выше вывод принад-

лежит В. В. Соболеву [5]. Интересно, что формулу (1.30) можно написать непосредственно из физических соображений (см. следующий параграф).

Переходя к выводу соотношений, которые используются для определения $\Phi(\tau)$, введем в рассмотрение функцию $P(\tau, z)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (1.32)$$

Сравним это уравнение с (1.28). В силу (1.17) свободный член (1.28) является суперпозицией свободных членов уравнения (1.32). Из линейности этих уравнений вытекает, что и решение (1.28) должно поэтому быть суперпозицией решений уравнения (1.32). На этом основании можно утверждать, что

$$\Phi(\tau) = 2\pi \int_0^{\infty} P(\tau, z) G(z) \frac{dz}{z}. \quad (1.33)$$

Дифференцируя (1.32) по τ и используя (1.24), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\tau, z)}{\partial \tau} &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \frac{\partial P(\tau', z)}{\partial \tau'} d\tau' + \\ &+ P(0, z) \frac{\lambda}{2} K(\tau) - \frac{1}{z} \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Из (1.34), (1.32) и (1.28) следует, что

$$\frac{\partial P(\tau, z)}{\partial \tau} = -\frac{1}{z} P(\tau, z) + P(0, z) \Phi(\tau). \quad (1.35)$$

Из последней формулы имеем

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{4\pi} H(z) \left(e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau') d\tau' \right), \quad (1.36)$$

где введено обозначение

$$H(z) = \frac{4\pi}{\lambda} P(0, z). \quad (1.37)$$

Подставляя (1.36) в (1.33), получаем для $\Phi(\tau)$ следующее уравнение Вольтерра с разностным ядром (уравнение типа свертки):

$$\Phi(\tau) = N(\tau) + \int_0^{\tau} N(\tau - \tau') \Phi(\tau') d\tau', \quad (1.38)$$

где

$$N(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} H(z') G(z') \frac{dz'}{z'}. \quad (1.39)$$

Оно показывает, что вид $\Phi(\tau)$ целиком определяется свойствами $H(z)$. Мы сейчас получим для этой функции нелинейное интегральное уравнение.

Из (1.21) и (1.32) имеем

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}} + \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} d\tau', \quad (1.40)$$

или, учитывая (1.20),

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{4\pi} \int_0^{\infty} G(\tau, \tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} d\tau'. \quad (1.41)$$

Итак, функция $P(\tau, z)$ по существу является преобразованием Лапласа от функции Грина по одной из переменных. Этим объясняется большое значение, которое $P(\tau, z)$ будет иметь в дальнейшем. Полагая в (1.40) $\tau = 0$, получаем

$$H(z) = 1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau') e^{-\frac{\tau'}{z}} d\tau'. \quad (1.42)$$

Входящий сюда интеграл с помощью (1.38) можно выразить через $H(z)$ и тем самым получить уравнение, определяющее эту функцию. Для этого обе части (1.38) нужно умножить на $e^{-\frac{\tau}{z}}$ и проинтегрировать по τ от 0 до ∞ . После небольших преобразований получим

$$H(z) = 1 + \frac{\lambda}{2} z H(z) \int_0^{\infty} \frac{H(z')}{z+z'} G(z') dz'. \quad (1.43)$$

Это и есть искомое уравнение, определяющее $H(z)$. Оно играет чрезвычайно важную роль при исследовании рассеяния света в полубесконечной среде.

Формула (1.42) показывает, что $H(1/s) - 1$ есть не что иное, как преобразование Лапласа от $\Phi(\tau)$. Определение $\Phi(\tau)$ сводится поэтому к обращению преобразования Лапласа, то есть к вычислению интеграла

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \left[H\left(\frac{1}{s}\right) - 1 \right] e^{s\tau} ds. \quad (1.44)$$

Впрочем, в дальнейшем для определения $\Phi(\tau)$ будет использован другой путь, который позволит выразить $\Phi(\tau)$ через $\Phi_\infty(\tau)$ и $H(z)$, исходя непосредственно из физических соображений.

Отметим, что интенсивность выходящего излучения $I(0, z)$ наряду с выражением (1.15) дается также формулой

$$I(0, z) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^\infty S^*(\tau) P(\tau, z) \frac{d\tau}{z}. \quad (1.45)$$

В самом деле, из (1.15) и (1.21) следует, что

$$I(0, z) = \int_0^\infty \left[S^*(\tau') + \int_0^\infty S^*(\tau) \Gamma(\tau', \tau) d\tau \right] e^{-\frac{\tau'}{z}} \frac{d\tau'}{z}. \quad (1.46)$$

Меняя порядок интегрирования во втором члене, получаем

$$I(0, z) = \int_0^\infty S^*(\tau) \left[e^{-\frac{\tau'}{z}} + \int_0^\infty e^{-\frac{\tau'}{z}} \Gamma(\tau', \tau) d\tau' \right] \frac{d\tau}{z}. \quad (1.47)$$

Учитывая симметрию резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$, находим, что величина, стоящая в квадратных скобках, есть не что иное, как $(4\pi/\lambda P)(\tau, z)$. Это следует из (1.40). Поэтому последняя формула тождественна (1.45).

Резюмируем главные моменты изложенного метода решения основного интегрального уравнения (1.16). Ищется резольвента этого уравнения $\Gamma(\tau, \tau')$. Она выражается через функцию одной переменной $\Phi(\tau)$ [формула (1.31)]. Для $\Phi(\tau)$ получается уравнение типа свертки (1.38). Его решение сводится к обращению преобразования Лапласа от функции $H(1/s) - 1$, где $H(z)$ — решение нелинейного

интегрального уравнения (1.43). Таким образом, оказывается, что в конечном счете вид резольвенты $\Gamma(\tau, \tau')$ определяется свойствами $H(z)$.

Описанный метод непосредственно применим для решения уравнения (1.16) тогда, когда его ядро представимо в виде суперпозиции экспонент. При довольно широких предположениях о виде $K(\tau)$ уравнение (1.16) изучено в работах В. А. Фока [1], К. Кейса [1] и др. Наиболее полное исследование уравнений типа (1.16) принадлежит М. Г. Крейну [1].

§ 5.2. Вероятностная трактовка

Линейным задачам теории переноса излучения можно дать простое вероятностное истолкование, предложенное В. В. Соболевым [8], [1]. Само по себе оно не дает какого-либо нового метода решения проблемы, однако позволяет взглянуть на нее под иным углом зрения. Более того, такой подход дает возможность получить многие важные соотношения непосредственно из вероятностных соображений, минуя длинный ряд промежуточных преобразований.

Рассмотрим возбужденный атом, находящийся на некоторой глубине τ . С вероятностью λ атом перейдет на нижний уровень с излучением кванта в линии. В приближении полного перераспределения по частотам вероятность того, что этот квант будет излучен в пределах телесного угла $d\omega$ в интервале безразмерных частот от x до $x + dx$, равна

$$\lambda A\alpha(x) dx \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (2.1)$$

Если квант излучен в направлении, образующем угол $\arcs \cos \mu < \frac{\pi}{2}$ к слоям, то с вероятностью

$$e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau}$$

он выйдет из среды, не испытав по пути ни одного акта взаимодействия с веществом. Таким образом,

$$\frac{\lambda}{4\pi} A\alpha(x) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} d\omega dx \quad (2.2)$$

есть вероятность того, что возбужденный атом, расположенный на глубине τ , излучит квант с частотой от x до $x + dx$,

который сразу же, без последующих рассеяний, выйдет из среды под углом $\arccos \mu$ к нормали в пределах телесного угла $d\omega$. Интегрируя (2.2) по всем частотам и углам выхода, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int_0^1 e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu}} d\mu &= \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_2[\tau\alpha(x)] dx = \\ &= \frac{\lambda}{2} L(\tau), \end{aligned}$$

где $L(\tau)$ — функция, подробно исследованная в § 2.6. Итак, полная вероятность того, что возбужденный атом, лежащий на оптической глубине τ , излучит квант в линии, который выйдет из среды без рассеяний, равна $(\lambda/2) L(\tau)$.

В § 2.6 было показано, что

$$L(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz.$$

Теперь легко понять, что $(\lambda/2) G(z) dz$ есть вероятность излучения возбужденным атомом кванта с такой частотой и в таком направлении, что отношение $\mu/\alpha(x)$ заключено между z и $z + dz$. Заметим, что соотношение (1.12) получает тем самым очевидное вероятностное истолкование.

Рассмотрим, далее, два возбужденных атома, один из которых расположен на глубине τ , а другой — на $\tau + d\tau$. Соответствующие вероятности излучения квантов, сразу же выходящих из среды, равны $(\lambda/2)L(\tau)$ и $(\lambda/2)L(\tau + d\tau)$. Очевидно, что разность между ними, равная, как следует из (2.6.5), $(\lambda/2)K(\tau) d\tau$, дает вероятность того, что квант будет излучен и впервые поглотится в плоском слое толщиной $d\tau$, расположенном на расстоянии τ от излучающего атома. Тем самым мы выяснили вероятностный смысл ядра основного интегрального уравнения (1.16).

До сих пор речь шла о вероятностной интерпретации величин, характеризующих однократное рассеяние. Перейдем теперь к проблемам многократного рассеяния, ограничившись рассмотрением полубесконечной среды. Пусть $p(\tau, \mu, x) d\omega dx$ есть вероятность того, что возбужденный атом, находящийся на глубине τ , излучит квант, который выйдет через границу (вообще говоря, после многократных

рассеяний) под углом $\arcs \cos \mu$ к нормали в пределах телесного угла $d\omega$ в интервале частот от x до $x + dx$. С вероятностью $(\lambda/2) K(|\tau - \tau'|) d\tau'$ квант будет излучен и в первый раз вызовет фотовозбуждение где-то в слое, лежащем между τ' и $\tau' + d\tau'$. В этом слое возникнет возбужденный атом. Этот атом в свою очередь с вероятностью $p(\tau', \mu, x) d\omega dx$ излучит квант, который выйдет из среды под углом $\arcs \cos \mu$ в частоте x . Интегрируя величину $(\lambda/2) K(|\tau - \tau'|) p(\tau', \mu, x) \times d\omega dx$ по всем τ' , получим вероятность выхода кванта с глубины τ после по крайней мере одного рассеяния. Добавляя к ней вероятность непосредственного выхода кванта (2.2), мы должны получить $p(\tau, \mu, x) d\omega dx$. Таким путем приходим к следующему уравнению для $p(\tau, \mu, x)$:

$$p(\tau, \mu, x) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) p(\tau', \mu, x) d\tau' + A\alpha(x) \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau}. \quad (2.3)$$

Функция $p(\tau, \mu, x)$ называется *вероятностью выхода кванта из среды*. Из уравнения (2.3) видно, что отношение

$$P(\tau, z) = \frac{p(\tau, \mu, x)}{A\alpha(x)} \quad (2.4)$$

зависит не от самих величин μ и x , а лишь от их комбинации $z = \mu/\alpha(x)$ и удовлетворяет уравнению

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (2.5)$$

Переписывая (2.4) в виде

$$p(\tau, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} A\alpha(x) \cdot \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau, z)$$

и сравнивая это выражение с (2.1), заключаем, что вследствие взаимодействия излучения со средой вероятность выхода кванта в заданной частоте и направлении изменяется в $(4\pi/\lambda) P(\tau, z)$ раз. Этим определяется физический смысл функции $P(\tau, z)$, которую мы будем называть *приведенной вероятностью выхода кванта из среды*.

Формула (1.37) показывает, что $(\lambda/4\pi)H(z)$ есть приведенная вероятность выхода кванта с границы среды. Иначе говоря, величина $(\lambda/2)G(z)H(z)dz$ есть вероятность того, что появление на границе полубесконечной среды возбужденного атома приведет к выходу из нее такого кванта, для которого величина $z = \mu/\alpha(x)$ будет заключена между z и $z + dz$. Интегрируя эту вероятность по всем z , получим полную вероятность того, что если на границе среды появился возбужденный атом, то из нее выйдет квант. Эта вероятность равна $(\lambda/2)H_0$, где

$$H_0 = \int_0^{\infty} H(z)G(z)dz. \quad (2.6)$$

С вероятностью $1 - (\lambda/2)H_0$ квант «застрянет» в среде или, точнее говоря, энергия первоначального возбуждения перейдет в тепло. Этим замечанием мы воспользуемся в дальнейшем.

Рассмотрим теперь резольвенту $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$. Учитывая вероятностный смысл функции $K(\tau)$, из (1.19) заключаем, что $\Gamma(\tau_1, \tau_2)d\tau_2$ есть вероятность того, что появление возбужденного атома на глубине τ_1 рано или поздно вызовет фотовозбуждение атома в слое между τ_2 и $\tau_2 + d\tau_2$. Это утверждение становится совершенно очевидным, если $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ представить в виде ряда Неймана

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(|\tau_1 - \tau_2|), \quad (2.7)$$

где

$$K_n(|\tau_1 - \tau_2|) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau_1 - \tau'|)K_{n-1}(|\tau' - \tau_2|)d\tau', \quad (2.8)$$

$$K_1(|\tau_1 - \tau_2|) = \frac{\lambda}{2} K(|\tau_1 - \tau_2|). \quad (2.9)$$

Ясно, что n -й член этого ряда есть вероятность миграции возбуждения с глубины τ_1 на τ_2 , происходящей с $n - 1$ промежуточным фотовозбуждением.

Указанный только что вероятностный смысл резольвенты позволяет легко получить соотношение (1.30), выражающее резольвенту через функцию $\Phi(\tau)$. Передача возбуждения с глубины τ_1 на глубину τ_2 происходит следующим образом. Возбужденный атом, находящийся на глубине τ_1 , излучает квант. Этот квант совершает затем случайные блуждания в среде, в ходе которых он может попасть на уровень τ_2 и вызвать здесь фотовозбуждение атома. Вероятность того, что появление возбужденного атома на глубине τ_1 рано или поздно повлечет за собой фотовозбуждение атома в слое единичной оптической толщины, лежащем на глубине τ_2 , будем для краткости называть вероятностью перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$. Будем для определенности считать, что $\tau_2 > \tau_1$. Разобьем все траектории, которые может описать квант, на два типа.

К первому типу отнесем те из них, которые ни разу не пересекают плоскости $\tau = \tau_1$, ко второму — все остальные (рис. 22). Очевидно, что вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ по всем траекториям первого типа совпадает с вероятностью перехода $0 \rightarrow \tau_2 - \tau_1$, т. е. равна $\Gamma(0, \tau_2 - \tau_1)$. Обратимся к траекториям второго типа. Пусть $\tau = t$ — наиболее близкий к границе $\tau = 0$ уровень, которого квант достигает в ходе блужданий, происходящих по какой-то из траекторий второго типа ($t < \tau_1$). Очевидно, что на этой глубине должно произойти фотовозбуждение атома, так как в противном случае квант продолжал бы двигаться в сторону уменьшающихся τ . Траектория, описываемая квантом, вызывающим фотовозбуждение где-то в слое между t и $t + dt$, не пересекает уровня $\tau = t$, а в остальном произвольна. Поэтому вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow t$ с фотовозбуждением в слое толщиной dt равна $\Gamma(\tau_1 - t, 0) dt$. Возбуждение с уровня t передается затем на уровень τ_2 , причем единственное ограничение, накладываемое на траекто-

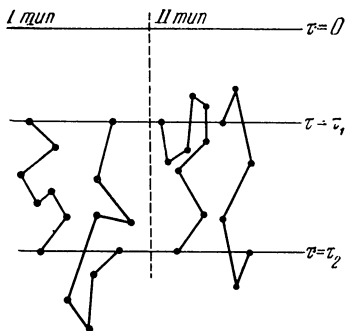


Рис. 22. К выводу выражения для $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ через $\Phi(\tau)$.

раекториям, вызывающим фотовозбуждение где-то в слое между t и $t + dt$, не пересекает уровня $\tau = t$, а в остальном произвольна. Поэтому вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow t$ с фотовозбуждением в слое толщиной dt равна $\Gamma(\tau_1 - t, 0) dt$. Возбуждение с уровня t передается затем на уровень τ_2 , причем единственное ограничение, накладываемое на траекто-

рию, состоит в том, что она не пересекает плоскости $\tau = t$. Соответствующая вероятность перехода равна $\Gamma(0, \tau_2 - t)$. Таким образом, вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ по тем траекториям второго типа, для которых самое близкое к границе $\tau = 0$ фотовозбуждение происходит между t и $t + dt$, равна

$$\Gamma(\tau_1 - t, 0) \Gamma(0, \tau_2 - t) dt.$$

Интегрируя это выражение по t от 0 до τ_1 и учитывая вклад от траекторий первого типа, получаем полную вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$, равную $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$. Таким путем приходим к соотношению ($\tau_2 > \tau_1$):

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \Gamma(0, \tau_2 - \tau_1) + \int_0^{\tau_1} \Gamma(\tau_1 - t, 0) \Gamma(0, \tau_2 - t) dt, \quad (2.10)$$

которое в силу (1.23) тождественно (1.30).

Легко показать также, что

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \Gamma_\infty(\tau_1, \tau_2) - \int_0^\infty \Phi(\tau_1 + t) \Phi(\tau_2 + t) dt. \quad (2.11)$$

Эта формула выражает тот факт, что в полубесконечной среде, в отличие от бесконечной, траектории квантов, пересекающие плоскость $\tau = 0$, являются «запрещенными».

Сходные соображения позволяют дать вероятностное толкование и многих других соотношений, полученных в предыдущем параграфе.

§ 5.3. Функция Грина для полупространства

В главе IV было рассчитано поле излучения точечного источника, находящегося в бесконечной однородной среде, т. е. получена функция Грина уравнения переноса излучения для неограниченного пространства. Теперь мы найдем резольвенту интегрального уравнения (1.16), или, что есть, по существу, то же самое, функцию Грина для полупространства. Имея решение задачи о точечном источнике в бесконечной среде, это можно сделать очень просто (В.В. Иванов [3]).

Функция Грина для полупространства есть

$$G(\tau_1, \tau_2) = \delta(\tau_1 - \tau_2) + \Gamma(\tau_1, \tau_2), \quad (3.1)$$

где $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ — решение уравнения

$$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau_1 - \tau'|) \Gamma(\tau', \tau_2) d\tau' + \frac{\lambda}{2} K(|\tau_1 - \tau_2|). \quad (3.2)$$

Наиболее прямой путь получения $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ состоит в решении этого уравнения методом итераций. В результате получается представление $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ в виде ряда Неймана [см. формулы (2.7) — (2.9)]. Физически решение методом итераций соответствует последовательному учету рассеяний разных порядков. Однако такое решение представляет лишь весьма ограниченный практический интерес, так как при не слишком малых λ ряд сходится медленно. Между тем именно случай, когда λ близко к единице, интереснее всего. Ясно, что здесь нужен какой-то другой подход, который позволил бы учитывать все рассеяния сразу и дал бы возможность получить $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ в замкнутой форме.

Такой подход может основываться, например, на вероятностных соображениях того типа, которые были использованы в предыдущем параграфе для вывода соотношения (2.10). Разобьем все траектории, по которым может совершиться переход $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ в *бесконечной* среде, на два типа. К первому типу отнесем те траектории, которые ни разу не пересекают плоскости $\tau = 0$, а ко второму — все остальные (предполагается, что τ_1 и τ_2 неотрицательны). Подсчитаем отдельно вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ в бесконечной среде по траекториям того и другого типа.

Поскольку траектории первого типа не пересекают плоскости $\tau = 0$, а в остальном произвольны, вероятность перехода по ним равна полной вероятности перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ в полубесконечной среде, т. е. $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$. Найдем вероятность перехода по траекториям второго типа. Кванты, описывающие такие траектории, испытывают хотя бы одно рассеяние в полупространстве $\tau < 0$, так как иначе, выйдя из области $\tau > 0$, они бы не могли вернуться на уровень $\tau_2 > 0$. Поэтому траектории второго типа можно классифицировать по той глубине, на которой совершается первое рассеяние в полупространстве $\tau < 0$. Получим вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ по тем траекториям, для которых первое рассеяние в области отрицательных τ происходит в слое от

— t до $-t + dt$, где $t > 0$. Для перехода по такой траектории квант должен выйти с глубины τ_1 из полупространства $\tau > 0$, пройти без рассеяний в полупространстве $\tau < 0$ до глубины $-t$, поглотиться между $-t$ и $-t + dt$ и затем с этого уровня попасть на уровень $\tau_2 > 0$ (вообще говоря, снова после диффузии во всем бесконечном пространстве). Легко сообразить, что вероятность этого сложного события равна

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-1}^1 d\mu' p(\tau_1, \mu', x') e^{-\frac{\alpha(x')}{\mu'} t} \Gamma_{\infty}(-t, \tau_2) \alpha(x') \frac{dt}{\mu'}, \quad (3.3)$$

или

$$2\pi \int_0^{\infty} P(\tau_1, z') G(z') e^{-\frac{t}{z'}} \Gamma_{\infty}(-t, \tau_2) \frac{dt}{z'} dz', \quad (3.4)$$

где $\Gamma_{\infty}(\tau, \tau')$ — функция Грина для бесконечной среды. Множитель 2π и интегрирование по z' в этом выражении учитывают возможность выхода кванта из полупространства $\tau > 0$ под любым углом и в любой частоте. Если это выражение проинтегрировать по t от 0 до ∞ , то мы тем самым учтем все траектории второго типа. Таким образом, полная вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ по таким траекториям равна

$$2\pi \int_0^{\infty} P(\tau_1, z') G(z') dz' \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} \Gamma_{\infty}(-t, \tau_2) \frac{dt}{z'}. \quad (3.5)$$

Переход $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ в бесконечной среде совершается или по траектории первого типа, или по траектории второго типа. Поэтому сумма $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ и (3.5) должна быть равна полной вероятности перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ для бесконечной среды, т. е. $\Gamma_{\infty}(\tau_1, \tau_2)$. Следовательно,

$$\Gamma_{\infty}(\tau_1, \tau_2) = \Gamma(\tau_1, \tau_2) + 2\pi \int_0^{\infty} P(\tau_1, z') G(z') dz' \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} \Gamma_{\infty}(-t, \tau_2) \frac{dt}{z'}. \quad (3.6)$$

Эта формула дает важную связь между функциями Грина бесконечной и полубесконечной сред. С ее помощью функцию $\Phi(\tau)$ легко выразить через $\Phi_{\infty}(\tau)$ и H -функцию.

Положим для этого в (3.6) $\tau_1 = 0$, заметив предварительно, что согласно (1.37) $P(0, z) = (\lambda/4\pi) H(z)$. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi_\infty(\tau_2) = \Phi(\tau_2) + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \Gamma_\infty(-t, \tau_2) dt \times \\ \times \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z'}} H(z') G(z') \frac{dz'}{z'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Воспользуемся теперь тем физически очевидным фактом, что в бесконечной среде вероятность перехода $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ зависит не от самих величин τ_1 и τ_2 , а лишь от абсолютной величины их разности $|\tau_1 - \tau_2|$ (см. § 3.6). На основании этого можно утверждать, что $\Gamma_\infty(-t, \tau_2) = \Phi_\infty(\tau_2 + t)$. Поэтому, заменяя в (3.7) обозначение независимой переменной τ_2 на τ , находим

$$\Phi(\tau) = \Phi_\infty(\tau) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau + t) dt \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z'}} H(z') G(z') \frac{dz'}{z'}. \quad (3.8)$$

Поскольку $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ полностью определяется функцией $\Phi(\tau)$, эта формула, по существу, выражает функцию Грина для полупространства через функцию Грина для бесконечной среды и H -функцию. Мы вывели здесь это соотношение из простых физических соображений. Разумеется, его можно получить и чисто формальным путем (см. К. Кейс [1], [2]).

Подставим в (3.8) явное выражение для $\Phi_\infty(\tau)$ при $\tau > 0$, полученное в § 4.1:

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} R(z) G(z) \frac{dz}{z}, \quad (3.9)$$

где $R(z)$ дается формулой (4.1.19). Выполнив интегрирование по t , после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{z}} R(z) \left[1 - \frac{\lambda}{2} z \int_0^\infty \frac{H(z')}{z+z'} G(z') dz' \right] \times \\ \times G(z) \frac{dz}{z}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Величина, стоящая в квадратных скобках, есть не что иное, как $H^{-1}(z)$. Это следует из основного уравнения (1.43) для $H(z)$. Поэтому окончательно

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} R(z, \lambda) G(z) \frac{dz}{zH(z, \lambda)}. \quad (3.11)$$

Таким образом, $\Phi(\tau)$ отличается от $\Phi_{\infty}(\tau)$ лишь тем, что в подынтегральной функции есть множитель $H^{-1}(z)$. Это сходство, конечно, не случайно. Оно связано с тем, что вся физика задачи уже содержится в $\Phi_{\infty}(\tau)$, и различие между $\Phi_{\infty}(\tau)$ и $\Phi(\tau)$ целиком вызвано различием в геометрии. Множитель $H^{-1}(z)$ и учитывает это различие.

Для H -функции известно явное выражение (см. следующий параграф). Поэтому (3.11) в явном виде выражает $\Phi(\tau)$, а вместе с нею и $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ через $\alpha(x)$. Формула (3.11) была впервые получена Д. И. Нагирнером [1], [2] иным путем.

Из (3.8) и (3.1.20) легко также получить выражение для $\Phi(\tau)$ при монохроматическом рассеянии, приведенное в § 3.7. Оно было найдено И. Н. Мининым [1] другим способом.

§ 5.4. H -функция

Функция $H(z)$ играет весьма важную роль во всех задачах о рассеянии света в полубесконечной среде. Как мы только что видели, она входит в явное выражение для соответствующей функции Грина. Более того, в ряде случаев интенсивность выходящего излучения непосредственно выражается через $H(z)$ (см., в частности, § 6.4 и 6.6). Эта функция встречается и при изучении рассеяния в оптически толстом слое.

Функция $H(z)$ является обобщением функции Амбарцумяна $\varphi(\mu)$, рассматривавшейся в § 3.7, для случая рассеяния с полным перераспределением по частотам. Нелинейное интегральное уравнение, которому она удовлетворяет,

$$H(z) = 1 + \frac{\lambda}{2} zH(z) \int_0^{\infty} \frac{H(z')}{z+z'} G(z') dz', \quad (4.1)$$

обобщает уравнение Амбарцумяна

$$\varphi(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \mu \varphi(\mu) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (4.2)$$

Как уже неоднократно отмечалось, изотропное монохроматическое рассеяние есть частный случай рассеяния с полным перераспределением по частотам, отвечающий прямоугольному профилю коэффициента поглощения, т. е.

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

При $z \leq 1$ имеем тогда $z \equiv \frac{\mu}{\alpha(x)} = \mu$, а функция $G(z)$ согласно (2.6.12) и (2.6.13) равна единице при $z \leq 1$ и 0 при $z > 1$, так что (4.1) в этом частном случае переходит в (4.2). С другой стороны, само уравнение (4.1) есть частный случай более общего уравнения, которое было получено В. В. Соболевым [9], [10] при исследовании рассеяния излучения в частотах линий с учетом поглощения и излучения в непрерывном спектре (см. § 7.5 и 7.6). Задачи о монохроматическом рассеянии с несферической индикатрисой также приводят к H -функциям. Они определяются уравнением (4.1), в котором $G(z) = 0$ при $z > 1$ (С. Чандрасекар [1]). Если индикатриса рассеяния представима в виде суммы конечного числа полиномов Лежандра, то при $z \leq 1$ функция $G(z)$ представляет собой полином четного порядка по z (так называемая характеристическая функция Чандрасекара). Поэтому можно считать, что $G(z)$ есть обобщение обычной характеристической функции на задачи о рассеянии с перераспределением по частотам. Относительно физического смысла $G(z)$ в этих задачах см. § 5.2.

Исследованию H -функций теории монохроматического рассеяния посвящена огромная литература (см., в частности, С. Чандрасекар [1] и И. Басбридж [1]). Некоторые из полученных результатов переносятся и на случай рассеяния в частотах линий. Однако перераспределение по частотам существенно сказывается на поведении H -функций, приводя к появлению принципиальных отличий от случая монохроматического рассеяния.

Знание функции Грина для бесконечной среды позволяет получить явное выражение для $H(z)$ путем совершенно элементарных преобразований, без привлечения аппарата теории функций комплексной переменной. Дифференцируя (1.28) по λ , получаем

$$\frac{\partial \Phi(\tau, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \frac{\partial \Phi(\tau', \lambda)}{\partial \lambda} d\tau' + \frac{1}{\lambda} \Phi(\tau, \lambda). \quad (4.4)$$

Если считать функцию $\Phi(\tau, \lambda)$ известной, это соотношение можно рассматривать как интегральное уравнение для $\frac{\partial \Phi(\tau, \lambda)}{\partial \lambda}$. Согласно (3.11), свободный член этого уравнения,

т. е. $(1/\lambda)\Phi(\tau, \lambda)$, есть суперпозиция функций вида $e^{-\frac{\tau}{z}}$. Поэтому решение (4.4) должно быть суперпозицией решений уравнения (1.32), а именно:

$$\frac{\partial \Phi(\tau, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} P(\tau, z') R(z', \lambda) \frac{G(z') dz'}{z' H(z', \lambda)}. \quad (4.5)$$

Умножая обе части этого равенства на $e^{-\frac{\tau}{z}}$, интегрируя по τ от 0 до ∞ и пользуясь (1.42) и (1.36), после простых преобразований находим

$$\frac{\partial \ln H(z, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{z}{2} \int_0^{\infty} R(z', \lambda) \frac{G(z')}{z + z'} dz'. \quad (4.6)$$

Учитывая (4.1.18), имеем отсюда

$$\ln H(z, \lambda) = \int_0^{\lambda} \bar{\Phi}_{\infty}\left(\frac{1}{z}, \lambda'\right) \frac{d\lambda'}{\lambda'}, \quad (4.7)$$

где $\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda)$ — одностороннее преобразование Лапласа функции $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ по переменной τ :

$$\bar{\Phi}_{\infty}(s, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} R(z', \lambda) \frac{G(z')}{1 + sz'} dz'.$$

Из (4.7) следует, что

$$H(z, \lambda) = H(z, 1) \exp \left\{ - \int_{\lambda}^1 \bar{\Phi}_{\infty} \left(\frac{1}{z}, \lambda' \right) \frac{d\lambda'}{\lambda'} \right\}. \quad (4.7')$$

Легко убедиться в том, что это соотношение, как и представление (4.7), справедливо и при монохроматическом рассеянии (тогда как в правые части (4.5) и (4.6) при монохроматическом рассеянии надо добавить слагаемые, учитывающие полюсной член). Пользуясь (3.1.20), из (4.7') находим следующую связь между функциями Амбарцумяна при $\lambda < 1$ и в консервативном случае:

$$\varphi(\mu, \lambda) = \frac{\varphi(\mu, 1)}{1 + k\mu} \exp \left\{ - \frac{\mu}{2} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu + \mu'} \int_{\lambda}^1 R_M(\mu', \lambda') d\lambda' \right\}. \quad (4.7'')$$

Отсюда нетрудно получить разложение $\varphi(\mu, \lambda)$ по степеням $\sqrt{1 - \lambda}$, приведенное в § 3.7 [формула (3.7.28)].

Интегрирование по λ в (4.6) можно выполнить непосредственно. Обозначим

$$\vartheta(z, \lambda) = \operatorname{arctg} \frac{\lambda \frac{\pi}{2} z G(z)}{1 - \lambda \mathcal{U}(z)}. \quad (4.8)$$

Прямое вычисление дает:

$$\frac{\partial \vartheta(z, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\pi}{2} z R(z, \lambda) G(z).$$

Из (4.6) находим поэтому, что

$$H(z, \lambda) = \exp \left\{ \frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \vartheta(z', \lambda) \frac{dz'}{z'(z+z')} \right\}. \quad (4.9)$$

Вспомнив (4.1.21), при $\lambda < 1$ (4.6) можно переписать:

$$\frac{\partial \ln H(z, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2(1-\lambda)} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} R(z', \lambda) G(z') \frac{z' dz'}{z+z'}, \quad (4.6')$$

откуда приходим к следующему представлению $H(z, \lambda)$, которое, однако, в отличие от (4.9), не годится при $\lambda = 1$:

$$H(z, \lambda) = (1 - \lambda)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \vartheta(z', \lambda) \frac{dz'}{z+z'} \right\}. \quad (4.9')$$

Из сопоставления (4.9) и (4.9'), между прочим, следует, что

$$\exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \mathfrak{F}(z, \lambda) \frac{dz}{z} \right\} = 1 - \lambda. \quad (4.10)$$

Аналогичные интегральные представления можно получить и для функции Амбарцумяна $\varphi(\mu, \lambda)$. Отличие этих представлений от (4.9) и (4.9') обусловлено учетом вклада от полюсного члена.

Другой способ вывода формул (4.9), (4.9') и аналогичных им, а также подробное их исследование можно найти в статьях Т. Малликина (см., в частности, работу Дж. Карлстедта и Т. Малликина [1], где дана сводка полученных результатов и приведены ссылки на более ранние работы).

Наряду с (4.9), для $H(z, \lambda)$ известен и ряд других интегральных представлений. С вычислительной точки зрения особенно удобным является следующее выражение:

$$H(z, \lambda) = \exp \left\{ -\frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 - \lambda V(u)] \frac{du}{1 + z^2 u^2} \right\}, \quad (4.11)$$

где $V(u)$ дается формулой (2.6.18) [или (2.6.24)]. Вывод формулы (4.11) можно найти, например, в книге С. Чандрасекара [1]. Связь между различными представлениями $H(z)$ обсуждается в работе Д. И. Нагирнера [3].

Рассмотрим поведение $H(z, \lambda)$ более подробно. Как следует из основного уравнения для $H(z, \lambda)$, переписанного в форме

$$H(z, \lambda) = \left\{ 1 - \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\infty} \frac{H(z', \lambda)}{z + z'} G(z') dz' \right\}^{-1}, \quad (4.12)$$

эта функция монотонно возрастает при увеличении z от 0 до ∞ , причем

$$H(0, \lambda) = 1. \quad (4.13)$$

Можно показать, что при $z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \ln H(z, \lambda) = & -\frac{\lambda}{2} a_1 z \ln z + \frac{\lambda}{2} [H_{-1}^*(\lambda) - \tilde{a}] z + \\ & + \frac{\lambda}{4} \left(2a_2 - \lambda \frac{\pi^2}{4} a_1^2 \right) z^2 + O(z^3 \ln z), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$H_{-1}^*(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{H(z, \lambda) - 1}{z} G(z) dz, \quad (4.15)$$

а постоянные a_1 и \tilde{a} определяются соответственно формулами (2.6.28) и (2.6.29). Из (4.14) следует, что производная $H(z)$ логарифмически расходится при $z \rightarrow 0$.

Отметим без доказательства, что

$$H_{-1}^*(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \rho_{-1}^*(\lambda') d\lambda', \quad (4.16)$$

где $\rho_{-1}^*(\lambda)$ дается формулой (4.6.3) или (4.6.6). Пользуясь этими выражениями для $\rho_{-1}^*(\lambda)$, находим следующие представления для $H_{-1}^*(\lambda)$:

$$H_{-1}^*(\lambda) = -\frac{2}{\lambda\pi} \int_0^{\infty} \{\ln [1 - \lambda V(u)] + \lambda V(u)\} du, \quad (4.16')$$

$$H_{-1}^*(\lambda) = \frac{2}{\lambda\pi} \int_0^{\infty} \left[\Phi(z, \lambda) - \lambda \frac{\pi}{2} z G(z) \right] \frac{dz}{z^2}. \quad (4.16'')$$

Из формулы, следующей непосредственно за (4.7), и из (4.1.21) имеем

$$\bar{\Phi}_{\infty}(0, \lambda) = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}.$$

Полагая в (4.7) $z = \infty$, находим поэтому, что

$$H(\infty, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (4.17)$$

В консервативном случае ($\lambda = 1$) H -функция неограниченно возрастает при $z \rightarrow \infty$. Характер расходимости $H(z, 1)$ при $z \rightarrow \infty$, как и скорость стремления $H(z, \lambda)$ при $\lambda < 1$ к своему предельному значению $H(\infty, \lambda) = (1 - \lambda)^{-1/2}$, определяются поведением коэффициента поглощения в крыльях линии. Однако мы немного отложим обсуждение этих важных вопросов и получим вначале одно интегральное соотношение, которое удовлетворяется при произвольном профиле.

Обозначим

$$H_0(\lambda) = \int_0^{\infty} H(z, \lambda) G(z) dz \quad (4.18)$$

и назовем эту величину обобщенным моментом H -функции (относительно его физического смысла см. § 5.2). Переходя в (4.1) к пределу $z \rightarrow \infty$, находим

$$H(\infty, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} H(\infty, \lambda) H_0(\lambda). \quad (4.19)$$

Учитывая (4.17), получаем

$$H_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1 - \lambda}). \quad (4.20)$$

Соотношение (4.20) находит множество применений.

С помощью (4.20) уравнение для $H(z, \lambda)$ можно преобразовать к другой форме. Используя тождество

$$\frac{z}{z + z'} = 1 - \frac{z'}{z + z'},$$

можем переписать (4.1) в виде

$$H(z, \lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} H(z, \lambda) H_0(\lambda) - \frac{\lambda}{2} H(z, \lambda) \int_0^{\infty} \frac{z' H(z', \lambda)}{z + z'} \times \\ \times G(z') dz',$$

откуда окончательно

$$H(z, \lambda) \left(\sqrt{1 - \lambda} + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{z' H(z', \lambda)}{z + z'} G(z') dz' \right) = 1. \quad (4.21)$$

Особенно простую форму это уравнение принимает при $\lambda = 1$:

$$\frac{1}{2} H(z, 1) \int_0^{\infty} \frac{z' H(z', 1)}{z + z'} G(z') dz' = 1. \quad (4.21')$$

Укажем, что $H(z, \lambda)$ удовлетворяет также следующему линейному уравнению:

$$H(z, \lambda) [1 - \lambda \mathcal{U}(z)] = 1 - \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\infty} \frac{H(z', \lambda)}{z - z'} G(z') dz', \quad (4.22)$$

являющемуся обобщением (3.7.20). Это уравнение справедливо при любых комплексных z , за исключением z , лежащих на отрицательной вещественной полуоси. Когда z — положительное вещественное число, интеграл в правой части следует понимать в смысле главного значения.

Из (4.21') легко получить асимптотику $H(z, 1)$ при $z \rightarrow \infty$ (В. В. Иванов [4]). Умножая и деля подынтегральное выражение на $H(z, 1) G(z)$, имеем

$$\frac{1}{2} H^2(z, 1) G(z) \int_0^{\infty} \frac{z'}{z+z'} \frac{H(z', 1) G(z')}{H(z, 1) G(z)} dz' = 1. \quad (4.23)$$

Положим $z' = zy$ и предположим, что существует (пока не известный) предел

$$f_H(y) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{H(zy, 1) G(zy)}{H(z, 1) G(z)}. \quad (4.24)$$

Тогда из (4.23) находим, что при $z \rightarrow \infty$

$$H(z, 1) \sim \frac{C_H}{\sqrt{zG(z)}}, \quad (4.25)$$

где

$$C_H = \left[\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{y f_H(y)}{1+y} dy \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25) в (4.24) и пользуясь (2.6.49), обнаруживаем, что

$$f_H(y) = \frac{1}{y} \sqrt{f\left(\frac{1}{y}\right)}, \quad (4.27)$$

где

$$f(y) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{x'\left(\frac{z}{y}\right)}{x'(z)}, \quad (4.28)$$

а $x(z)$ — функция, определяемая условием $\alpha(x(z)) = 1/z$. Как и в § 2.6, считаем, что

$$f(y) = y^{2\gamma}, \quad (4.29)$$

где $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$. В частности, при доплеровском коэффициенте поглощения $\gamma = 1/2$, а для профилей, убывающих в

крыльях пропорционально $|x|^{-\kappa}$,

$$\gamma = \frac{\kappa - 1}{2\kappa}. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.27) в (4.26), с учетом (4.29) находим

$$C_H = \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \pi \gamma}. \quad (4.31)$$

Формулы (4.25) и (4.31) и дают искомую асимптотику $H(z, 1)$ при $z \rightarrow \infty$. В частном случае доплеровского профиля получаем отсюда, учитывая (2.7.3),

$$H_D(z, 1) \sim 2\pi^{-1/4} z^{1/2} (\ln z)^{1/4} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.32)$$

Для фойгтовского профиля (4.25) в комбинации с (2.7.27) дает

$$H_V(z, 1) \sim \left[\frac{9}{2\pi a U(a, 0)} \right]^{1/4} z^{1/4} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.33)$$

Устремляя здесь a к бесконечности и принимая во внимание (4.3.19), получаем главный член асимптотики лоренцевской H -функции:

$$H_L(z, 1) \sim \left(\frac{9}{2} \right)^{1/4} z^{1/4} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (4.34)$$

Формулы (4.32) — (4.34) были найдены впервые в работе автора [5] другим, несколько более сложным способом. Асимптотика $H(z, 1)$ при $z \rightarrow \infty$, по существу совпадающая с (4.25), была найдена недавно Ю. Ю. Абрамовым, А. М. Дыхне и А. П. Напартовичем [2], использовавшими, однако, для ее получения более тонкие рассуждения, чем те, которые привели нас к формуле (4.25).

Поведение H -функций при больших z в неконсервативном случае ($\lambda < 1$) сложнее. Этот случай проще всего исследовать, исходя из представления H -функции в форме (4.11). При этом будем предполагать, что выполнено соотношение (4.29).

Когда z велико, основной вклад в интеграл в правой части (4.11) дают значения подинтегральной функции при u , близких к нулю. Поэтому $V(u)$ в (4.11) можно заменить

асимптотикой (2.6.55). В результате будем иметь

$$\ln H(z, \lambda) \sim -\frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[1 - \lambda + \lambda \frac{\pi}{2} \frac{G\left(\frac{1}{u}\right)}{u \sin \pi \gamma} \right] \frac{du}{1 + z^2 u^2} \quad (z \gg 1). \quad (4.35)$$

Полагая $zu = y$ и пользуясь (2.6.49), (4.28) и (4.29), находим, что с той же точностью

$$\ln H(z, \lambda) \sim -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[1 - \lambda + \lambda \frac{\pi}{2} \frac{zG(z)}{\sin \pi \gamma} y^{2\gamma} \right] \frac{dy}{1 + y^2}, \quad (4.36)$$

или

$$H(z, \lambda) \sim \frac{h(q)}{\sqrt{1-\lambda}} \quad (z \gg 1), \quad (4.37)$$

где

$$\ln h(q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln(1 + qy^{2\gamma}) \frac{dy}{1 + y^2} \quad (4.38)$$

и

$$q = \frac{\lambda z G(z)}{(1-\lambda) C_H^2} \sim \frac{\lambda \pi A}{(1-\lambda)(2\gamma+1) \sin \pi \gamma} x'(z). \quad (4.39)$$

Таким образом, в асимптотической области ($z \gg 1$) функция $\sqrt{1-\lambda} H(z, \lambda)$, зависящая от двух переменных — z и λ — превращается в функцию одной переменной q , просто связанной с z и λ . В этом состоит главное упрощение. Асимптотическое представление (4.37) было получено в совместной работе автора и Д. И. Нагирнера [2].

Что касается функции $h(q)$, то оказывается, что ее достаточно получить для $0 < q \leq 1$, так как имеет место соотношение

$$h\left(\frac{1}{q}\right) = \sqrt{q} h(q). \quad (4.40)$$

Его легко доказать, исходя непосредственно из (4.38).

Из (4.38) следует, что $h(q) \rightarrow 1$ при $q \rightarrow 0$. Поэтому из (4.37) получаем, что

$$H(z, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \quad (4.41)$$

при $q \ll 1$, т. е. при

$$\lambda z G(z) \ll C_H^2 (1 - \lambda). \quad (4.42)$$

Когда λ близко к единице, существует область значений z , где z уже по порядку больше единицы, а величина q все еще велика. Это — та область, где одновременно выполняются неравенства

$$z \gg 1, \quad zG(z) \gg C_H^2 (1 - \lambda). \quad (4.43)$$

Из (4.40) следует, что при $q \gg 1$

$$h(q) \sim \frac{1}{\sqrt{q}}. \quad (4.44)$$

Поэтому из (4.37) и (4.39) находим, что в этой области

$$H(z, \lambda) \sim \frac{C_H}{\sqrt{zG(z)}} \sim H(z, 1). \quad (4.45)$$

Из (4.25) и (4.39) видно, что при $1 - \lambda \ll 1$ величину можно представить в форме

$$q = \frac{1}{(1 - \lambda) H^2(z, 1)}. \quad (4.46)$$

Исходя из этого представления q и принимая во внимание (4.40), имеем из (4.37)

$$H(z, \lambda) \sim H(z, 1) h\left(\frac{1}{q}\right) \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (4.47)$$

В отличие от (4.37), последняя формула справедлива при всех $z \geq 0$, а не только при $z \gg 1$, и выполняется тем точнее, чем ближе λ к единице.

§ 5.5. Исследование резольвентной функции и связанных с ней величин

Изучив свойства H -функций, мы можем теперь исследовать поведение фундаментальной функции $\Phi(\tau, \lambda)$, через которую выражается резольвента основного интегрального уравнения для функции источников. Будем для краткости называть $\Phi(\tau, \lambda)$ *резольвентной функцией*.

Непосредственно из интегрального уравнения, определяющего $\Phi(\tau, \lambda)$,

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau', \lambda) d\tau' + \frac{\lambda}{2} K(\tau), \quad (5.1)$$

следует, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\Phi(\tau, \lambda) - \frac{\lambda}{2} K(\tau) \right] = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(\tau') \Phi(\tau', \lambda) d\tau'. \quad (5.2)$$

Но

$$\int_0^{\infty} K(\tau') \Phi(\tau', \lambda) d\tau' = \int_0^{\infty} G(z) \frac{dz}{z} \int_0^{\infty} \Phi(\tau', \lambda) e^{-\frac{\tau'}{z}} d\tau'. \quad (5.3)$$

Учитывая (1.42), имеем отсюда

$$\int_0^{\infty} K(\tau') \Phi(\tau', \lambda) d\tau' = \int_0^{\infty} \frac{H(z, \lambda) - 1}{z} G(z) dz \equiv H_{-1}^*(\lambda). \quad (5.4)$$

Из (5.2) находим теперь, принимая во внимание (2.6.31), что при $\tau \ll 1$

$$\Phi(\tau, \lambda) = -\frac{\lambda}{2} a_1 \ln \tau + \frac{\lambda}{2} [H_{-1}^*(\lambda) - a_1 \gamma - \tilde{a}] + \dots \quad (5.5)$$

Путем простых по существу, но довольно громоздких преобразований из явного выражения для $\Phi(\tau, \lambda)$, даваемого формулой (3.11), можно получить и следующие члены разложения. Оказывается, что

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, \lambda) = & -\frac{\lambda}{2} a_1 \ln \tau + \frac{\lambda}{2} [H_{-1}^*(\lambda) - a_1 \gamma - \tilde{a}] + \\ & + \frac{\lambda^2}{8} a_1^2 \tau (\ln \tau)^2 + \frac{\lambda^2}{4} a_1 [a_1 (\gamma - 1) + \tilde{a} - H_{-1}^*(\lambda)] \tau \ln \tau + \\ & + O(\tau) \quad (\tau \ll 1). \end{aligned} \quad (5.6)$$

В двух последних формулах γ есть постоянная Эйлера.

В противоположном предельном случае, т. е. при больших τ , резольвентная функция также упрощается. Пусть

$x(z)$ — такая функция, что $\alpha(x(z)) = 1/z$. Если

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{x' \left(\frac{\tau}{y} \right)}{x'(\tau)} = y^{2\gamma},$$

причем $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$, то при $\tau \gg 1$

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \frac{\Gamma(2\gamma + 1) G(\tau)}{(1 - \lambda)^{3/2}} F(t), \quad (5.7)$$

где

$$F(t) = \frac{t^2}{\Gamma(2\gamma + 1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y y^{2\gamma} dy}}{\left\{ [t + y^{2\gamma} \operatorname{ctg} \pi\gamma]^2 + y^{4\gamma} \right\} h \left(\frac{y^{2\gamma}}{t \sin \pi\gamma} \right)}. \quad (5.8)$$

Здесь функция $h(q)$ дается выражением (4.38), а величина t связана с τ и λ следующим образом:

$$t = \frac{1 - \lambda}{\lambda \frac{\pi}{2} \tau G(\tau)} \sim (1 - \lambda) \frac{2\gamma + 1}{\lambda \pi A x'(\tau)}. \quad (5.9)$$

Формула (5.7) получается из явного выражения для $\Phi(\tau, \lambda)$. Вывод ее ничем не отличается от того, который был использован в § 4.3 при исследовании поведения $S_p(\tau, \lambda)$ при больших τ . Хотя представление (5.7) никак нельзя назвать простым, оно все же много проще точной формулы (3.11). Согласно (5.7) в асимптотической области ($\tau \gg 1$) функция $\sqrt{1 - \lambda} \tau \Phi(\tau, \lambda)$ зависит не от переменных τ и λ в отдельности, а лишь от одного аргумента t , что очень сильно упрощает дело.

Точно так же, как это делалось в гл. IV при изучении рассеяния в бесконечной среде, резольвентную функцию при всех τ можно представить в виде

$$\Phi(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \frac{K(\tau)}{(1 - \lambda)^{3/2}} F(t) \xi(\tau, \lambda), \quad (5.10)$$

где $F(t)$ дается формулой (5.8), а величина t связана с τ и λ соотношением

$$t = \frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \frac{1 - \lambda}{\lambda L(\tau)}. \quad (5.11)$$

В отличие от формулы (5.7), в (5.10) равенство не асимптотическое, а строгое. При достаточно больших τ значения t , даваемые (5.9) и (5.11), асимптотически равны, так что (5.10) переходит в (5.7), причем $\xi(\tau, \lambda) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. Множитель $\xi(\tau, \lambda)$ учитывает, таким образом, отклонение от асимптотики при не слишком больших τ . Когда λ очень близко к единице, имеем $\xi(\tau, \lambda) \sim \xi(\tau, 1)$, так что

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \frac{K(\tau)}{(1-\lambda)^{3/2}} F(t) \xi(\tau, 1) \quad (1-\lambda \ll 1). \quad (5.12)$$

Чтобы получить выражение для резольвентной функции при строго консервативном рассеянии, нужно в (5.10) устремить λ к единице. Согласно (5.11) в этом случае $t \rightarrow 0$. Принимая во внимание (4.44), из (5.8) легко найти, что при $t \ll 1$

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\sin \pi \gamma} \frac{1}{\gamma \Gamma(\gamma) \Gamma(2\gamma)} t^{3/2} + \dots \quad (5.13)$$

Из (5.10) и (5.13) следует, что

$$\Phi(\tau, 1) = \frac{C}{2} \frac{K(\tau)}{L^{3/2}(\tau)} \xi(\tau, 1), \quad (5.14)$$

где

$$C = \frac{1}{\gamma \Gamma(\gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \sin \pi \gamma}. \quad (5.15)$$

Величина C монотонно уменьшается с ростом γ от $C = 1$ при $\gamma = 0$ до $C = 2^{3/2} \pi^{-1} = 0,900$ при $\gamma = 1/2$, так что чем медленнее убывает коэффициент поглощения в крыльях линии, тем ближе C к единице.

Представление функции $\Phi(\tau, 1)$ в форме (5.14) было предложено в работе автора [6]. Оно удобно тем, что $\xi(\tau, 1)$ не сильно отличается от единицы при всех τ . Как следует из сравнения (5.14) и (5.6),

$$\xi(0, 1) = C^{-1}. \quad (5.16)$$

С другой стороны, при $\tau \gg 1$

$$\xi(\tau, 1) \sim 1. \quad (5.17)$$

Если нужна только оценка резольвентной функции при $\lambda = 1$, отличаем $\xi(\tau, 1)$ и C от единицы можно пренебречь. В результате получаем очень простую приближенную

формулу

$$\Phi(\tau, 1) \approx \frac{1}{2} \frac{K(\tau)}{L^{3/2}(\tau)}, \quad (5.18)$$

справедливую при всех τ и произвольном профиле коэффициента поглощения.

Из (5.14) и (5.17) находим, что главный член асимптотики $\Phi(\tau, 1)$ при $\tau \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\Phi(\tau, 1) \sim \frac{C}{2} \frac{K(\tau)}{L^{1/2}(\tau)} \quad (\tau \rightarrow \infty). \quad (5.19)$$

В частности, при доплеровском профиле получаем отсюда

$$\Phi^D(\tau, 1) \sim 2\pi^{-3/4} \tau^{-1/2} (\ln \tau)^{1/4}, \quad (5.20)$$

тогда как при фойгтовском и лоренцовском коэффициентах поглощения

$$\Phi^V(\tau, 1) \sim \frac{\sqrt{3}}{[2\pi a U(a, 0)]^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4}, \quad (5.21)$$

$$\Phi^L(\tau, 1) \sim \sqrt{3} \cdot 2^{-1/4} \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \tau^{-3/4}. \quad (5.22)$$

Область применимости соотношения (5.21) ограничена значениями τ , удовлетворяющими неравенству $a\tau \gg 1$. Она тем шире, чем больше значение a . Формулы (5.20) — (5.22) и их аналоги для одномерной полубесконечной среды, в которой рассеяние происходит только строго вперед или назад, были найдены в работах автора [5], [7], [8]. В этих работах асимптотики были получены иным путем, без использования явного выражения для резольвентной функции.

Как и в случае бесконечной среды, когда λ близко к единице, существуют три различные зоны. При τ , для которых значения t , вычисляемые по формуле (5.11), по порядку меньше единицы, можно полагать

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \Phi(\tau, 1) \quad (t \ll 1). \quad (5.23)$$

Это — зона почти консервативного рассеяния. В асимптотической ($\tau \gg 1$) части этой зоны можно пользоваться асимптотикой (5.19). При дальнейшем возрастании τ значения t становятся порядка единицы. Здесь резольвентную функ-

цию следует вычислять по формуле (5.7), находя $F(t)$ численным интегрированием (переходная зона). Наконец, когда τ настолько велико, что $t \gg 1$, мы находимся в зоне сильного поглощения. Здесь дело обстоит совсем просто. Поскольку $F(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, из (5.10) находим

$$\Phi(\tau, \lambda) \sim \frac{\lambda}{2} \frac{K(\tau)}{(1-\lambda)^{3/2}} \quad (t \gg 1). \quad (5.24)$$

При $\lambda < 1$ зона сильного поглощения есть всегда, тогда как зона консервативного рассеяния существует только при $1 - \lambda \ll 1$ (причем ее размер тем меньше, чем больше λ отличается от единицы).

Функция $\Phi(\tau, \lambda)$ удовлетворяет, помимо (5.4), еще трем полезным интегральным соотношениям, а именно:

$$\int_0^{\infty} L(\tau) \Phi(\tau, \lambda) d\tau = \frac{2}{\lambda} (1 - \sqrt{1-\lambda}) - 1, \quad (5.25)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(\tau, \lambda) d\tau = (1-\lambda)^{-1/2} - 1, \quad (5.26)$$

$$\int_0^{\infty} \Phi^2(\tau, \lambda) d\tau = \frac{\lambda}{2} [\rho_{-1}^*(\lambda) - H_{-1}^*(\lambda)], \quad (5.27)$$

где $\rho_{-1}^*(\lambda)$ дается формулой (4.6.3) [или (4.6.6.)]. Первое из них доказывается аналогично (5.4), второе следует из (1.42) при $z = \infty$, наконец, третье выводится с помощью формулы (2.11). Полагая в ней $\tau_2 = 0$ и устремляя затем τ_1 к нулю, находим, что

$$\int_0^{\infty} \Phi^2(\tau, \lambda) d\tau = \lim_{\tau \rightarrow 0} [\Phi_{\infty}(\tau, \lambda) - \Phi(\tau, \lambda)]. \quad (5.28)$$

Подставляя в правую часть разложения $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda)$ и $\Phi(\tau, \lambda)$ при $\tau \ll 1$, даваемые формулами (4.6.2) и (5.6), приходим к (5.27).

Наряду с $\Phi(\tau, \lambda)$, часто приходится иметь дело также с функцией

$$\Psi(\tau, \lambda) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \lambda) d\tau', \quad (5.29)$$

которая с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией источников в среде с равномерно распределенными первичными источниками (см. § 6.1). Из (5.6) и (5.29) находим, что при малых τ она разлагается в ряд

$$\Psi(\tau, \lambda) = 1 - \frac{\lambda}{2} a_1 \tau \ln \tau + \frac{\lambda}{2} [H_{-1}^*(\lambda) + a_1(1 - \gamma) - \tilde{a}] \tau + \frac{\lambda^2}{16} a_1^2 \tau^2 (\ln \tau)^2 + \frac{\lambda^2}{8} a_1 \left[a_1 \gamma + \tilde{a} - \frac{3a_1}{2} - H_{-1}^*(\lambda) \right] \tau^2 \ln \tau + O(\tau^2). \quad (5.30)$$

Представив $\Psi(\tau, \lambda)$ в форме

$$\Psi(\tau, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} - \int_{\tau}^{\infty} \Phi(\tau', \lambda) d\tau', \quad (5.31)$$

которая следует из (5.29) и (5.26), и воспользовавшись (5.24), получаем асимптотику этой функции при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\Psi(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{L(\tau)}{1-\lambda} + \dots \right) (\tau \rightarrow \infty). \quad (5.32)$$

Эта формула применима в зоне сильного поглощения, т. е. при $t \gg 1$. Когда $1 - \lambda \ll 1$, существует также переходная зона ($t \sim 1$) и зона почти консервативного рассеяния ($t \ll 1$).

Как и в случае монохроматического рассеяния (см. § 3.8), для функции $\Psi(\tau, 1)$ удобно ввести специальное обозначение:

$$\tilde{S}(\tau) \equiv \Psi(\tau, 1). \quad (5.33)$$

Из (5.23) и (5.29) следует, что в зоне почти консервативного рассеяния

$$\Psi(\tau, \lambda) \sim \tilde{S}(\tau) \quad (t \ll 1). \quad (5.34)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ из (5.29) и (5.19) находим

$$\tilde{S}(\tau) \sim \frac{C}{\sqrt{L(\tau)}} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (5.35)$$

где C дается формулой (5.15). Функцию $\tilde{S}(\tau)$ при всех τ

удобно представить в форме

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{C}{\sqrt{L(\tau)}} \tilde{\xi}(\tau), \quad (5.36)$$

где $\tilde{\xi}(\tau)$ — мало меняющийся поправочный множитель к асимптотике (5.35). Заметим мимоходом, что (5.35) есть следствие общего асимптотического представления

$$\tilde{S}(\tau) \sim \Gamma^{-1} (1 + \gamma) \left[1 - V \left(\frac{1}{\tau} \right) \right]^{-1/2} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (5.35')$$

одинаково пригодного как при рассеянии в частотах линии (при этом $0 < \gamma \leq 1/2$), так и при монохроматическом рассеянии. Последнему случаю соответствует $\gamma = 1$.

Можно показать, что при $1 - \lambda \ll 1$ функция $\Psi(\tau, \lambda)$ при всех $\tau \geq 0$ асимптотически представима в виде

$$\Psi(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \tilde{F}(t) \tilde{\xi}(\tau) \quad (1 - \lambda \ll 1), \quad (5.37)$$

где t дается формулой (5.11), а функция $\tilde{F}(t)$ монотонно возрастает от нуля при $t = 0$ до единицы при $t = \infty$, причем при $t \ll 1$

$$\tilde{F}(t) \sim \frac{\sqrt{\sin \pi \gamma}}{\gamma \Gamma(\gamma)} t^{1/2}. \quad (5.38)$$

Явного выражения для $\tilde{F}(t)$ мы не приводим ввиду его громоздкости. Заметим, что в пределе при $\lambda \rightarrow 1$ формула (5.37) переходит в (5.36). Упрощения, описываемые формулой (5.37), имеют хорошо уже нам знакомый характер: величина, зависящая от двух переменных, при $1 - \lambda \ll 1$ выражается через функции одного аргумента.

§ 5.6. Случай доплеровского профиля

В этом параграфе для частного случая доплеровского профиля ряд полученных выше результатов несколько уточняется, а также приводятся различные численные данные.

Начнем с рассмотрения строго консервативного рассеяния ($\lambda = 1$). В § 5.4 был найден главный член асимптотики $H_D(z, 1)$ при $z \gg 1$, даваемый формулой (4.32). Из (4.22) можно получить рекуррентную формулу для нахождения коэффициентов асимптотического ряда, главный член

которого дается выражением (4.32) (выкладки, однако, очень громоздки). Оказывается, что

$$H_D(z, 1) \sim 2\pi^{-1/4} z^{1/2} (\ln z)^{1/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k}{(\ln z)^k} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (6.1)$$

где h_k — постоянные, определяемые рекуррентным соотношением

$$h_k = \frac{1}{4k} \sum_{j=0}^{k-1} h_j \left[u_{k-j} - \sum_{l=0}^{k-j} g_l f_{k-l-j} \prod_{m=j+l}^k (4m+1) \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6.2)$$

причем $h_0 = 1$. Здесь g_i даются формулой (2.7.4),

$$f_i = \frac{2^{i+2} - 1}{2^{i-2} (i+2)!} \pi^i |B_{i+2}|, \quad (6.3)$$

где B_n — числа Бернулли, а u_i определены согласно (2.7.20). Из (6.2) находим, в частности,

$$h_1 = 0,125\,000; \quad h_2 = -\frac{10\pi^2 + 9}{128} = -0,84138.$$

Постоянные h_1 и h_2 были получены ранее различными способами Д. И. Нагирнером (не опубликовано) и автором [4]. Эти способы, однако, не позволяют получить общего рекуррентного соотношения (6.2), которое является новым¹⁾.

Значения функции $H_D(z, 1)$ даны в табл. 17. Они были получены по формуле (4.11) численным интегрированием (В. В. Иванов и Д. И. Нагирнер [2]). При больших z значения $H_D(z, 1)$ можно находить по разложению (6.1). При $z = 100$ учет одного только главного члена обеспечивает точность около 1%; если же удержать три члена разложения, ошибка уменьшается до 0,05%.

Обратимся теперь к функциям $\tilde{S}^D(\tau)$ и $\Phi^D(\tau, 1)$. Так же как и для H -функции, можно уточнить асимптотики этих функций при больших τ , полученные в предыдущем

¹⁾ Доказательство (6.2) будет опубликовано в отдельной статье.

Таблица 17

Функция $H_D(z)$ при консервативном рассеянии

z	$H_D(z)$	z	$H_D(z)$	z	$H_D(z)$	z	$H_D(z)$
0,00	1,0000	8,0	5,3180	90	20,556	1000	76,897
0,05	1,0887	8,5	5,4970	95	21,185	1100	80,950
0,1	1,1566	9,0	5,6718	100	21,793	1200	84,832
0,2	1,2743	9,5	5,8427	110	22,935	1300	88,563
0,3	1,3791	10	6,0100	120	24,123	1400	92,161
0,4	1,4759	11	6,3349	130	25,218	1500	95,639
0,5	1,5671	12	6,6478	140	26,575	1600	99,003
0,6	1,6538	13	6,9502	150	27,298	1700	102,28
0,7	1,7369	14	7,2431	160	28,290	1800	105,46
0,8	1,8168	15	7,5273	170	29,254	1900	108,56
0,9	1,8941	16	7,8038	180	30,192	2000	111,58
1,0	1,9691	17	8,0730	190	31,105	2200	117,42
1,2	2,1129	18	8,3356	200	31,997	2400	123,01
1,4	2,2491	19	8,5921	220	33,721	2600	128,33
1,6	2,3809	20	8,8429	240	35,374	2300	133,56
1,8	2,5070	22	9,3289	260	36,963	3000	138,57
2,0	2,6288	24	9,7963	280	38,497	3200	143,42
2,2	2,7466	26	10,247	300	39,980	3400	148,12
2,4	2,8610	28	10,683	320	41,418	3600	152,70
2,6	2,9722	30	11,106	340	42,814	3800	157,16
2,8	3,0805	32	11,516	360	44,173	4000	161,50
3,0	3,1863	34	11,915	380	45,497	4200	165,75
3,2	3,2896	36	12,304	400	46,788	4400	169,90
3,4	3,3906	38	12,684	420	48,050	4600	173,96
3,6	3,4896	40	13,055	440	49,283	4800	177,94
3,8	3,5866	42	13,418	460	50,491	5000	181,83
4,0	3,6818	44	13,773	480	51,674	5500	191,27
4,2	3,7753	46	14,121	500	52,835	6000	200,30
4,4	3,8671	48	14,462	550	55,644	6500	208,98
4,6	3,9575	50	14,797	600	58,335	7000	217,35
4,8	4,0464	55	15,610	650	60,923	7500	225,43
5,0	4,1339	60	16,389	700	63,419	8000	233,26
5,5	4,3471	65	17,140	750	65,832	8500	240,86
6,0	4,5531	70	17,866	800	68,170	9000	248,25
6,5	4,7526	75	18,568	850	70,440	9500	255,45
7,0	4,9463	80	19,249	900	72,648	10000	262,47
7,5	5,1346	85	19,911	950	74,799		

параграфе, указав способ вычисления коэффициентов соответствующих асимптотических рядов. Проще всего это делается так. Из (1.42), (5.33) и (5.29) имеем

$$zH(z, 1) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \tilde{S}(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

Будем искать $\tilde{S}^D(\tau)$ при больших τ в виде

$$\tilde{S}^D(\tau) \sim 4\pi^{-3/4} \tau^{1/2} (\ln \tau)^{1/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{(\ln \tau)^j}. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) и (6.1) в (6.4) и выполняя ряд довольно громоздких преобразований, можно показать, что

$$s_k = h_k - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^k (-1)^j \frac{\Gamma^{(j)}\left(\frac{3}{2}\right)}{2^{2j} j!} \prod_{m=k-j}^{k-1} (4m-1) s_{k-j} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (6.6)$$

Учитывая, что $s_0 = 1$, из (6.6) находим

$$s_1 = \frac{1}{8} [2(\gamma + 2 \ln 2) - 3] = 0,11588,$$

$$s_2 = -\frac{1}{128} [4\pi^2 + 12(\gamma + 2 \ln 2)^2 - 36(\gamma + 2 \ln 2) + 81] = -0,75044.$$

При необходимости можно получить и последующие коэффициенты s_k . Значения производных гамма-функции, которые нужно иметь при таких вычислениях, можно найти в работе Х. Джеффри [1].

Дифференцируя (6.5) и пользуясь тем, что

$$\tilde{S}(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', 1) d\tau', \quad (6.7)$$

получаем

$$\Phi^D(\tau, 1) \sim 2\pi^{-3/4} \tau^{-1/2} (\ln \tau)^{1/4} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi_j}{(\ln \tau)^j} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (6.8)$$

где

$$\varphi_0 = 1; \quad \varphi_k = s_k + \frac{5-4k}{2} s_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (6.9)$$

В частности, $\varphi_1 = 0,61588$, $\varphi_2 = -0,92426$.

Перейдем к средам с поглощением, ограничившись рассмотрением H -функций. Значения $H_D(z, \lambda)$ даны в табл. 18.

Таблица 18

Функция $H_D(z, \lambda)$

$\lg(1-\lambda)$	$\lg(1-\lambda)$				
	-2	-3	-4	-5	-6
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,1503	1,1556	1,1565	1,1566	1,1566
0,2	1,2611	1,2721	1,2739	1,2742	1,2742
0,5	1,5301	1,5608	1,5662	1,5670	1,5671
1,0	1,8840	1,9539	1,9667	1,9687	1,9690
2	2,4274	2,5906	2,6227	2,6279	2,6286
5	3,5045	4,0002	4,1118	4,1307	4,1335
10	4,5765	5,6651	5,9500	6,0011	6,0088
20	5,7702	7,9761	8,6207	8,8180	8,8394
50	7,2797	12,069	14,212	14,702	14,784
100	8,2025	15,762	20,307	21,541	21,760
200	8,8791	19,583	28,356	31,314	31,894
500	9,4389	24,095	41,909	50,452	52,449
1000	9,6796	26,718	53,602	70,994	75,876
2000	9 8211	28,539	65,233	97,557	108,93
5000	9,9192	30,110	78,623	141,19	172,82
10000	9,9563	30,759	86,179	177,89	240,55

Значительно более подробные таблицы имеются в работе В. В. Иванова и Д. И. Нагирнера [2]. При малых $1 - \lambda$ и $z \gg 1$ для расчета H -функций можно использовать асимптотическое представление (4.37). В рассматриваемом сейчас случае доплеровского профиля имеем

$$\ln h_D(q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln(1+qy) \frac{dy}{1+y^2} \quad (6.10)$$

и

$$q = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{4z \sqrt{\ln z}}. \quad (6.11)$$

Дифференцируя (6.10) и вычисляя получающийся справа интеграл, находим

$$\frac{d}{dq} \ln h_D(q) = -\frac{1}{2} \frac{q}{1+q^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\ln q}{1+q^2}. \quad (6.12)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \ln h_D(q) = & -\frac{1}{4} \ln(1+q^2) + \frac{1}{\pi} \ln q \cdot \operatorname{arctg} q - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^q \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx. \end{aligned} \quad (6.13)$$

При малых q имеем разложение

$$\ln h_D(q) = \frac{1}{\pi} q \ln q - \frac{q}{\pi} - \frac{q^2}{4} + \dots \quad (q \ll 1). \quad (6.14)$$

При $q \gg 1$ (6.14) и (4.40) дают

$$\ln h_D(q) = -\frac{1}{2} \ln q - \frac{\ln q}{\pi q} - \frac{1}{\pi q} + \dots \quad (q \gg 1). \quad (6.15)$$

Значения функции $h_D(q)$ для $0 \leq q \leq 1$ даны в табл. 19. При $q > 1$ функцию $h_D(q)$ легко вычислить по табулированным значениям с помощью соотношения (4.40).

Относительно точности, которую обеспечивает при доплеровском профиле асимптотическое представление (4.37), можно сказать следующее. Уже при $z = 10$ эта формула дает значения $H_D(z, \lambda)$ для всех $\lambda \geq 0,9$ с максимальной ошибкой около 3%. Когда $z > 1000$, точность выше 1,7%, а при $z = 10\,000$ ошибка не превышает 1,1%.

Таким образом, область применимости асимптотических выражений очень широка. В комбинации с имеющимися таблицами $H_D(z, \lambda)$ они позволяют находить значения H -функции при любых λ и z с точностью, вполне достаточной для любых применений теории. Для практических целей достаточно иметь H -функции с 2—3 знаками. Может

Таблица 19

Функция $h_D(q)$

q	$h_D(q)$	q	$h_D(q)$	$h_D(q)$	q	$h_D(q)$	q	$h_D(q)$	
0,00	1,000	0,20	0,840	0,40	0,761	0,60	0,705	0,80	0,663
0,01	0,982	0,21	0,835	0,41	0,758	0,61	0,703	0,81	0,661
0,02	0,969	0,22	0,830	0,42	0,755	0,62	0,701	0,82	0,659
0,03	0,958	0,23	0,826	0,43	0,751	0,63	0,698	0,83	0,657
0,04	0,947	0,24	0,821	0,44	0,748	0,64	0,696	0,84	0,655
0,05	0,938	0,25	0,817	0,45	0,745	0,65	0,694	0,85	0,653
0,06	0,929	0,26	0,813	0,46	0,742	0,66	0,692	0,86	0,652
0,07	0,921	0,27	0,808	0,47	0,740	0,67	0,689	0,87	0,650
0,08	0,913	0,28	0,804	0,48	0,737	0,68	0,687	0,88	0,648
0,09	0,905	0,29	0,800	0,49	0,734	0,69	0,685	0,89	0,646
0,10	0,898	0,30	0,796	0,50	0,731	0,70	0,683	0,90	0,645
0,11	0,891	0,31	0,792	0,51	0,728	0,71	0,681	0,91	0,643
0,12	0,885	0,32	0,789	0,52	0,726	0,72	0,679	0,92	0,641
0,13	0,879	0,33	0,785	0,53	0,723	0,73	0,677	0,93	0,640
0,14	0,873	0,34	0,781	0,54	0,720	0,74	0,675	0,94	0,638
0,15	0,867	0,35	0,778	0,55	0,718	0,75	0,673	0,95	0,636
0,16	0,861	0,36	0,774	0,56	0,715	0,76	0,671	0,96	0,635
0,17	0,856	0,37	0,771	0,57	0,713	0,77	0,669	0,97	0,633
0,18	0,850	0,38	0,767	0,58	0,710	0,78	0,667	0,98	0,631
0,19	0,845	0,39	0,764	0,59	0,708	0,79	0,665	0,99	0,630
								1,00	0,628

поэтому возникнуть вопрос, оправдано ли вообще табулирование $H_D(z, \lambda)$ столь высокой точностью, как это было сделано выше. Нам представляется, что ответ на этот вопрос должен быть положительным. В самом деле, в большинстве случаев при решении уравнения переноса используются различные приближенные методы, точность которых оценить заранее очень трудно. Поэтому кажется полезным табулировать с высокой точностью строгие решения нескольких простейших стандартных задач.

Как будет показано в следующей главе, во многих важных частных случаях интенсивность выходящего излучения просто выражается через H -функцию. Чтобы избежать интерполирования табличных значений $H_D(z, \lambda)$, интенсивность выходящего излучения удобно вычислять для тех значений частоты χ , которым соответствуют имеющиеся

в таблицах значения z . Например, значению $z \equiv \mu e^{x^2} = 10$ при $\mu = 1$ соответствует $x = 1,52$ и т. д.

Что касается функций $\Phi^D(\tau, \lambda)$ и $\Psi^D(\tau, \lambda)$, то их табулирование является делом ближайшего будущего.

§ 5.7. Случаи фойгтовского и лоренцовского профилей

Так же как и в доплеровском случае при строго консервативном рассеянии с фойгтовским и лоренцовским профилями асимптотики, полученные в § 5.4 и 5.5, можно несколько уточнить.

Начнем с H -функций. Из (4.11) находим, что

$$\frac{d}{dz} \ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda V'(u)}{1 - \lambda V(u)} \frac{u du}{1 + z^2 u^2}. \quad (7.1)$$

При $z > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{V'(u)}{1 - \lambda V(u)} \frac{u du}{1 + z^2 u^2} = O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Поэтому

$$\frac{d}{dz} \ln H(z, \lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\lambda V'(u)}{1 - \lambda V(u)} \frac{u du}{1 + z^2 u^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (z > 1). \quad (7.2)$$

В § 2.7 было показано, что при $u \rightarrow 0$

$$V_V(u) \sim 1 - \frac{\sqrt{2\pi a U(a, 0)}}{3} u^{1/2} \left[1 - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \pi U(a, 0) \frac{u}{a} + \dots \right].$$

Подставляя это разложение в (7.2), находим, что при фойгтовском коэффициенте поглощения и $\lambda = 1$

$$\frac{d}{dz} \ln H_V(z, 1) = \frac{1}{4z} - \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{U(a, 0)}{a} \frac{\ln z}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (7.3)$$

Из (7.3) и (4.33) следует, что

$$H_V(z, 1) = \left[\frac{9}{2\pi a U(a, 0)} \right]^{1/4} z^{1/4} \left\{ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{U(a, 0)}{a} \times \right. \\ \left. \times \frac{\ln z}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}. \quad (7.4)$$

При малых a (скажем, при $a \leq 0,1$) второе слагаемое в фигурных скобках мало по сравнению с единицей лишь при $z \gg a^{-1}$. Этим неравенством определяется область значений z , где для H -функции применимы фойгтовские асимптотики.

Устремляя в (7.4) a к бесконечности и учитывая, что $aU(a, 0) \rightarrow 1/\pi$ при $a \rightarrow \infty$ (см. § 2.7), для лоренцовского профиля получаем

$$H_L(z, 1) = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} z^{1/4} \left[1 - \frac{3}{10\pi} \frac{\ln z}{z} + O\left(\frac{1}{z}\right)\right] \quad (z > 1). \quad (7.5)$$

Рассмотрим, далее, поведение $\Phi^V(\tau, 1)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Пользуясь (7.4) и разложениями $\mathcal{U}_V(z)$ и $G_V(z)$ при $z \rightarrow \infty$, приведенными в § 2.7, из явного выражения для $\Phi(\tau)$, даваемого (3.11), можно найти, что

$$\begin{aligned} \Phi^V(\tau, 1) = & \left(\frac{9}{2\pi a U(a, 0)}\right)^{1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4} \left[1 - \frac{9}{40} \left(\frac{3}{2} - a^2\right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{U(a, 0) \ln \tau}{a \tau} + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]. \quad (7.6) \end{aligned}$$

В пределе при $a \rightarrow \infty$ имеем отсюда

$$\Phi^L(\tau, 1) = \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4} \left[1 + \frac{9}{40\pi} \frac{\ln \tau}{\tau} + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]. \quad (7.7)$$

Из (7.6) можно сделать вывод, что асимптотика резольвентной функции, соответствующая фойгтовскому профилю, применима не при всех $\tau \gg 1$, а лишь при $\tau \gg a^{-1}$ (см. по этому поводу также § 2.7). Формула (7.6) позволяет получить любопытное интегральное соотношение, которому удовлетворяет функция $\Phi^V(\tau, 1)$, а именно

$$\int_0^{\infty} \left[\left(\frac{9}{2\pi a U(a, 0)}\right)^{1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4} - \Phi^V(\tau, 1) \right] d\tau = 1. \quad (7.8)$$

Действительно, как было показано в § 5.1,

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau, 1) d\tau = H(z, 1) - 1.$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \left[\left(\frac{9}{2\pi a U(a, 0)} \right)^{1/4} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4} - \Phi^V(\tau, 1) \right] d\tau = \\ = 1 - H_V(z, 1) + \left(\frac{9}{2\pi a U(a, 0)} \right)^{1/4} z^{1/4}. \quad (7.9)$$

Устремляя здесь z к бесконечности и пользуясь (7.4), приходим к (7.8). В предельном случае лоренцовского профиля (7.8) принимает вид

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{V\bar{3}}{2^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \tau^{-3/4} - \Phi^L(\tau, 1) \right] d\tau = 1. \quad (7.10)$$

Перейдем к обсуждению численных данных, относящихся к H -функциям. Рассмотрим прежде всего, какое влияние оказывает значение параметра a , т. е. отношения ширины линии, обусловленной столкновениями и затуханием, к доплеровской ширине. В табл. 20 для нескольких a приведены значения H -функций при консервативном рассеянии ($\lambda = 1$). Доплеровская H -функция соответствует $a = 0$, а лоренцовской отвечает $a = \infty$. При $z \leq 1$ в таблице даны значения $H(z, 1)$, а при $z > 1$ — величины $H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$, табулированные по аргументу x . Для построения профилей линий удобно иметь именно значения $H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$ в функции x .

На основании данных табл. 20 и 17 (стр. 255) был построен рис. 23, дающий представление о влиянии параметра a на H -функции при чистом рассеянии. Один из выводов, который следует из этого рисунка, состоит в том, что даже при $a = 10^{-3}$ значения $H_V(z, 1)$ близки к $H_D(z, 1)$ лишь при сравнительно небольших z . Поэтому практическая область применимости результатов, полученных для доплеровского профиля, оказывается довольно узкой. Это в особенности относится к асимптотическим результатам, соответствующим $z \gg 1$ (и $\tau \gg 1$). Конечно, это не означает, что асимптотическая теория, подробно развитая в предыдущем параграфе, лишена какого-либо интереса. С чисто

Таблица 20

H-функции при фойгтовском и лоренцовском профилях
(консервативное рассеяние)

$1 - \lambda = 0$	$H(z, 1)$			
$z \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,041	1,041	1,038	1,027
0,06	1,103	1,102	1,094	1,064
0,1	1,156	1,154	1,141	1,096
0,2	1,273	1,269	1,243	1,161
0,3	1,378	1,370	1,332	1,216
0,4	1,474	1,464	1,411	1,264
0,5	1,565	1,551	1,485	1,307
0,6	1,651	1,634	1,554	1,347
0,7	1,733	1,713	1,618	1,383
0,8	1,813	1,789	1,680	1,418
0,9	1,889	1,862	1,738	1,450
1,0	1,963	1,933	1,793	1,480

$$H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$$

$x \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
0,0	1,963	1,933	1,793	1,480
0,2	1,993	1,960	1,813	1,492
0,4	2,087	2,048	1,874	1,525
0,6	2,263	2,211	1,983	1,577
0,8	2,552	2,476	2,151	1,643
1,0	3,013	2,890	2,394	1,718
1,1	3,336	3,173	2,549	1,759
1,2	3,742	3,523	2,729	1,800
1,3	4,252	3,951	2,935	1,842
1,4	4,896	4,475	3,168	1,885
1,5	5,707	5,109	3,427	1,928
1,6	6,730	5,871	3,711	1,971
1,7	8,021	6,775	4,016	2,015
1,8	9,645	7,831	4,339	2,058
1,9	11,68	9,040	4,674	2,101
2,0	14,22	10,39	5,014	2,144
2,1	17,34	11,87	5,353	2,187
2,2	21,14	13,43	5,685	2,230
2,3	25,64	15,05	6,004	2,272

Таблица 20 (продолжение)

$$H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$$

$x \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
2,4	30,85	16,67	6,305	2,314
2,5	36,66	18,26	6,585	2,355
2,6	42,90	19,77	6,843	2,396
2,7	49,36	21,18	7,080	2,436
2,8	55,81	22,44	7,297	2,477
2,9	62,08	23,54	7,497	2,516
3,0	68,01	24,47	7,682	2,556
3,1	73,44	25,26	7,856	2,594
3,2	78,19	25,92	8,019	2,633
3,3	82,12	26,50	8,174	2,671
3,4	85,25	27,02	8,323	2,709
3,5	87,70	27,48	8,466	2,746
3,75	92,00	28,54	8,806	2,837
4,00	95,17	29,51	9,126	2,926
4,25	98,00	30,43	9,430	3,013
4,50	100,7	31,31	9,721	3,098
4,75	103,3	32,16	10,002	3,180
5,00	105,8	32,99	10,27	3,261
5,5	110,7	34,57	10,79	3,418
6,0	115,3	36,08	11,28	3,568
6,5	119,7	37,52	11,75	3,712
7,0	124,0	38,90	12,20	3,851
7,5	128,2	40,24	12,63	3,986
8,0	132,2	41,53	13,05	4,116
8,5	136,1	42,78	13,45	4,243
9,0	139,9	44,00	13,84	4,366
9,5	143,6	45,18	14,22	4,485
10,0	147,2	46,34	14,59	4,601

теоретической точки зрения она призвана обслуживать внутренние потребности теории как таковой. Однако и при более практическом подходе она оказывается полезной, так как идеализированный случай доплеровского профиля обычно служит тем стандартом, на котором опробуются различные приближенные и численные методы решения проблем переноса излучения в линиях.

Второй вывод из рис. 23 состоит в том, что, в согласии с полученным выше результатом, при $a \neq 0$ функция $H(z, 1)$ при достаточно больших z возрастает пропорцио-

нально $z^{1/4}$. Область применимости этого столь привлекательного своей простотой асимптотического результата оказывается очень широкой. Вопрос этот заслуживает самого внимательного обсуждения, к которому мы и переходим.

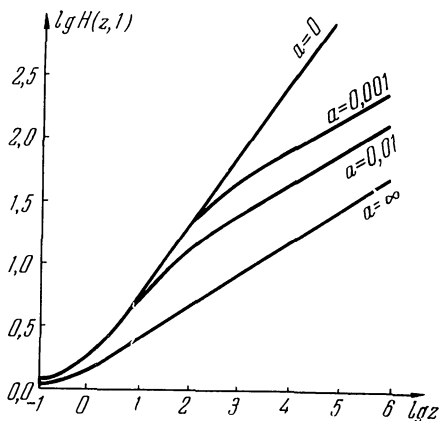


Рис. 23. H -функции при консервативном рассеянии.

Главные члены всех асимптотик, относящихся к фойгтовскому профилю, получаются заменой нормированной функции Фойгта $U(a, x)$ ее асимптотическим представлением

$$U(a, x) \sim \frac{a}{\pi x^2}, \quad (7.11)$$

справедливым при достаточно больших $|x|$ (см. § 1.5). Поэтому

$$\alpha_V(x) = \frac{U(a, x)}{U(a, 0)} \sim \frac{a}{\pi U(a, 0)} \frac{1}{x^2}. \quad (7.12)$$

Подставляя это выражение в (7.4), находим, что с точностью до главного члена разложения при больших $|x|$

$$H_V\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right) \sim \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{|x|}{a}}. \quad (7.13)$$

Сравнение точных значений H -функций, приведенных в табл. 20, со значениями, даваемыми этой формулой, пока-

зывает, что когда $a = 10^{-3}$, формула (7.13) обеспечивает точность 5% при всех $|x| \geq 3,2$; точность 1% обеспечивается при $|x| \geq 10$. При $a = 10^{-2}$ погрешность не превосходит 5% при $|x| \geq 2,9$ и 1% при $|x| \geq 6,7$. Когда $a = 0,1$, соответствующие значения $|x|$ составляют примерно 2,9 и 4,0.

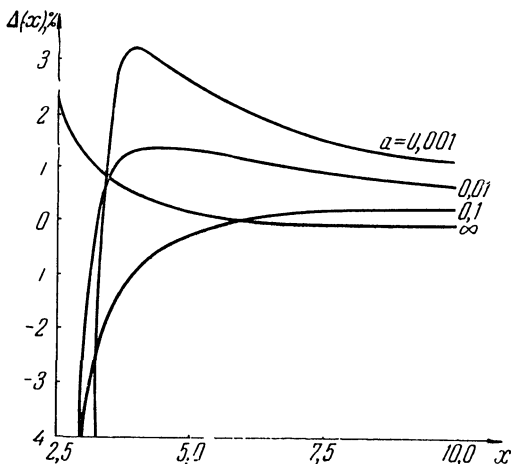


Рис. 24. К оценке точности асимптотических представлений (7.13) и (7.14)

При лоренцовском профиле ($a = \infty$) из (7.5) имеем

$$H_L\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right) \sim \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} \sqrt{|x|}. \quad (7.14)$$

Это выражение по существу совпадает с (7.13), так как при рассеянии с лоренцовским профилем частота измеряется в единицах ширины, обусловленной столкновениями, а не в доплеровских ширинах (т. е. $x_L = \frac{x}{a}$). При вычислении лоренцовской H -функции по асимптотике (7.14) точность 5% достигается при $|x| \approx 1,8$; при $|x| \geq 3,3$ погрешность не превышает 1%. Более детальные сведения о точности, обеспечиваемой представлениями (7.13) и (7.14), можно почерпнуть из рис. 24, на котором для ряда значений a

приведены кривые относительной погрешности

$$\Delta(x) = \frac{H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right) - H_{as}\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)}{H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)} \quad (7.15)$$

в функции x . В последней формуле $H_{as}\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$ есть асимптотика H -функции, вычисленная по (7.13) при $0 < a < \infty$ и по (7.14) при $a = \infty$.

Резюмируя, можно сказать, что при консервативном рассеянии асимптотическая теория очень хорошо описывает поведение H -функций вне доплеровского ядра линии. Асимптотика $H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, 1\right)$ обеспечивает при данном x по порядку величины ту же точность, какую имеет при этом x представление (7.11).

Обратимся теперь к численным результатам и асимптотикам, относящимся к неконсервативному случаю. В табл. 21—23 приведены значения H -функций при $\lambda < 1$. Они были получены из представления $H(z)$ в форме (4.11) численным интегрированием (значения H -функций при $\lambda = 1$ находились таким же образом). Приводимые нами таблицы были составлены Д. И. Нагирнером, предполагающим опубликовать в ближайшее время более подробные численные данные, а также описание методики вычислений.

Для расчета H -функций вне доплеровского ядра при всех $\lambda < 1$ можно воспользоваться асимптотической теорией, которая, так же как и при $\lambda = 1$, обеспечивает здесь вполне удовлетворительную точность. Как было показано в § 5.4, в асимптотической области

$$H_V(z, \lambda) \sim \frac{h_V(q)}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (7.16)$$

где

$$\ln h_V(q) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln(1 + q\sqrt{y}) \frac{dy}{1+y^2} \quad (7.17)$$

и

$$q^{-1} = (1-\lambda) \frac{3}{\sqrt{2\pi a U(a, 0)}} z^{1/2}. \quad (7.18)$$

Таблица 21

H-функции при фойгтовском и лоренцовском профилях ($\lambda = 0,99$)

$1 - \lambda = 10^{-2}$		$H(z, \lambda)$			
z	a	0,001	0,01	0,1	∞
0,00		1,000	1,000	1,000	1,000
0,02		1,040	1,040	1,037	1,026
0,06		1,099	1,098	1,092	1,063
0,10		1,150	1,149	1,138	1,094
0,2		1,261	1,258	1,236	1,158
0,3		1,358	1,353	1,321	1,211
0,4		1,447	1,440	1,397	1,258
0,5		1,529	1,521	1,467	1,300
0,6		1,607	1,597	1,532	1,338
0,7		1,680	1,669	1,593	1,374
0,8		1,750	1,737	1,650	1,407
0,9		1,818	1,802	1,704	1,438
1,0		1,882	1,865	1,755	1,467

$H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, \lambda\right)$

x	a	0,001	0,01	0,1	∞
0,0		1,882	1,865	1,755	1,467
0,2		1,908	1,889	1,774	1,478
0,4		1,988	1,967	1,830	1,510
0,6		2,136	2,108	1,930	1,560
0,8		2,373	2,332	2,083	1,622
1,00		2,733	2,670	2,300	1,694
1,25		3,425	3,303	2,677	1,790
1,50		4,461	4,240	3,175	1,890
1,75		5,835	5,440	3,760	1,991
2,00		7,326	6,713	4,363	2,091
2,25		8,564	7,778	4,906	2,188
2,50		9,329	8,486	5,341	2,282
3,0		9,838	9,088	5,910	2,462
3,5		9,912	9,258	6,265	2,629
4,0		9,926	9,346	6,534	2,785
4,5		9,934	9,411	6,755	2,931
5,0		9,941	9,464	6,944	3,068
6,0		9,950	9,543	7,254	3,319
7,5		9,960	9,625	7,605	3,647
10,0		9,969	9,710	8,015	4,103

Т а б л и ц а 22

H-функции при фойгтовском и лоренцовском профилях ($\lambda = 0,999$)

$1 - \lambda = 10^{-3}$		$H(z, \lambda)$			
z	a	0,001	0,01	0,1	∞
0,00		1,000	1,000	1,000	1,000
0,02		1,041	1,041	1,038	1,027
0,06		1,102	1,101	1,093	1,064
0,10		1,156	1,153	1,141	1,096
0,2		1,272	1,267	1,242	1,161
0,3		1,375	1,368	1,330	1,215
0,4		1,470	1,461	1,410	1,263
0,5		1,559	1,547	1,483	1,306
0,6		1,644	1,629	1,551	1,346
0,7		1,725	1,707	1,616	1,382
0,8		1,803	1,782	1,675	1,417
0,9		1,878	1,854	1,734	1,448
1,0		1,950	1,924	1,789	1,479

 $H\left(\frac{1}{\alpha(x)}, \lambda\right)$

x	a	0,001	0,01	0,1	∞
0,0		1,950	1,924	1,789	1,479
0,2		1,979	1,951	1,803	1,490
0,4		2,071	2,037	1,869	1,524
0,6		2,242	2,197	1,974	1,575
0,8		2,522	2,457	2,144	1,641
1,00		2,954	2,859	2,384	1,716
1,25		3,877	3,664	2,811	1,818
1,50		5,444	4,969	3,395	1,924
1,75		8,050	6,951	4,123	2,032
2,00		12,05	9,618	4,928	2,139
2,25		17,24	12,62	5,715	2,244
2,50		22,33	15,38	6,402	2,347
2,75		25,05	17,47	6,957	2,447
3,00		28,04	18,81	7,401	2,545
3,25		28,97	19,61	7,771	2,640
3,50		29,36	20,15	8,096	2,733
3,75		29,54	20,57	8,394	2,823
4,00		29,66	20,94	8,670	2,910
4,25		29,76	21,28	8,931	2,995

Таблица 22 (продолжение)

$x \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
4,50	29,85	21,59	9,178	3,079
4,75	29,93	21,88	9,414	3,160
5,00	30,00	22,15	9,640	3,239
5,5	30,12	22,63	10,06	3,392
6,0	30,23	23,07	10,46	3,538
6,5	30,32	23,46	10,84	3,679
7,0	30,40	23,81	11,19	3,814
7,5	30,47	24,13	11,52	3,945
8,0	30,53	24,42	11,84	4,071
8,5	30,58	24,69	12,14	4,193
9,0	30,63	24,94	12,42	4,311
9,5	30,68	25,17	12,70	4,425
10,0	30,72	25,38	12,95	4,538

Таблица 23)

H-функции при фойгтовском и лоренцовском профилях ($\lambda = 0,9999$)

$1 - \lambda = 10^{-4}$	<i>H</i> (<i>z</i> , λ)			
$z \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000
0,02	1,041	1,041	1,038	1,027
0,06	1,103	1,101	1,094	1,064
0,10	1,156	1,154	1,141	1,096
0,2	1,273	1,268	1,243	1,161
0,3	1,377	1,370	1,331	1,216
0,4	1,474	1,463	1,411	1,264
0,5	1,564	1,551	1,485	1,307
0,6	1,650	1,634	1,554	1,347
0,7	1,732	1,713	1,618	1,383
0,8	1,811	1,788	1,679	1,418
0,9	1,888	1,861	1,737	1,450
1,0	1,962	1,932	1,793	1,480

Т а б л и ц а 23 (продолжение)

$$H\left(\frac{1}{a(x)}, \lambda\right)$$

$x \backslash a$	0,001	0,01	0,1	∞
0,0	1,962	1,932	1,793	1,480
0,2	1,991	1,959	1,812	1,492
0,4	2,035	2,047	1,873	1,525
0,6	2,260	2,210	1,982	1,577
0,8	2,548	2,474	2,151	1,643
1,00	3,007	2,887	2,393	1,718
1,25	3,969	3,719	2,827	1,821
1,50	5,672	5,094	3,423	1,928
1,75	8,683	7,246	4,170	2,036
2,00	13,88	10,30	5,005	2,144
2,25	22,20	14,03	5,832	2,250
2,50	33,49	17,86	6,565	2,354
2,75	45,33	21,19	7,165	2,456
3,00	54,65	23,58	7,652	2,554
3,25	61,03	25,14	8,061	2,651
3,50	64,24	26,25	8,425	2,744
3,75	65,93	27,17	8,760	2,836
4,00	67,11	28,00	9,074	2,925
4,25	68,12	28,78	9,373	3,011
4,50	69,03	29,53	9,659	3,096
4,75	69,88	30,24	9,934	3,173
5,00	70,68	30,92	10,20	3,259
5,5	72,13	32,22	10,71	3,415
6,0	73,43	33,43	11,18	3,565
6,5	74,70	34,57	11,64	3,709
7,0	75,66	35,65	12,08	3,848
7,5	76,63	36,67	12,49	3,982
8,0	77,52	37,65	12,90	4,112
8,5	78,34	38,58	13,29	4,237
9,0	79,10	39,48	13,66	4,360
9,5	79,80	40,33	14,03	4,479
10,0	80,46	41,16	14,38	4,595

Т а б л и ц а 24

Функция $h_V(q)$ (фойгтовский и лоренцовский профили)

q	h	q	$h_V(q)$	q	$h_V(q)$	q	$h_V(q)$
0,00	1,0000	0,26	0,8690	0,51	0,7882	0,76	0,7282
0,01	0,9931	0,27	0,8652	0,52	0,7854	0,77	0,7262
0,02	0,9865	0,28	0,8614	0,53	0,7827	0,78	0,7241
0,03	0,9801	0,29	0,8577	0,54	0,7801	0,79	0,7220
0,04	0,9740	0,30	0,8541	0,55	0,7775	0,80	0,7200
0,05	0,9680	0,31	0,8505	0,56	0,7749	0,81	0,7180
0,06	0,9621	0,32	0,8469	0,57	0,7723	0,82	0,7160
0,07	0,9565	0,33	0,8435	0,58	0,7697	0,83	0,7140
0,08	0,9510	0,34	0,8400	0,59	0,7672	0,84	0,7120
0,09	0,9456	0,35	0,8366	0,60	0,7647	0,85	0,7101
0,10	0,9403	0,36	0,8333	0,61	0,7623	0,86	0,7082
0,11	0,9351	0,37	0,8300	0,62	0,7598	0,87	0,7062
0,12	0,9301	0,38	0,8268	0,63	0,7574	0,88	0,7044
0,13	0,9252	0,39	0,8236	0,64	0,7551	0,89	0,7025
0,14	0,9204	0,40	0,8204	0,65	0,7527	0,90	0,7006
0,15	0,9156	0,41	0,8173	0,66	0,7504	0,91	0,6988
0,16	0,9110	0,42	0,8142	0,67	0,7480	0,92	0,6969
0,17	0,9064	0,43	0,8112	0,68	0,7458	0,93	0,6951
0,18	0,9020	0,44	0,8082	0,69	0,7435	0,94	0,6933
0,19	0,8976	0,45	0,8052	0,70	0,7413	0,95	0,6915
0,20	0,8933	0,46	0,8022	0,71	0,7390	0,96	0,6898
0,21	0,8891	0,47	0,7994	0,72	0,7368	0,97	0,6880
0,22	0,8849	0,48	0,7965	0,73	0,7347	0,98	0,6863
0,23	0,8808	0,49	0,7937	0,74	0,7325	0,99	0,6845
0,24	0,8768	0,50	0,7909	0,75	0,7304	1,00	0,6828
0,25	0,8729						

Значения функции $h_V(q)$ для $0 \leq q \leq 1$ даны в табл. 24. Для нахождения $h_V(q)$ при $q > 1$ следует использовать соотношение (4.40). Заметим, что при $q \ll 1$

$$h_V(q) = 1 - \frac{q}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\pi} q^2 \ln q + \dots, \quad (7.19)$$

тогда как при $q \gg 1$

$$h_V(q) = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}q} + \frac{1}{\pi} \frac{\ln q}{q^2} + \dots \right). \quad (7.20)$$

Функция $h(q)$, соответствующая лоренцовскому профилю, совпадает с $h_V(q)$.

При почти консервативном рассеянии удобнее применять другое асимптотическое выражение, также найденное в § 5.4 [см. формулы (4.47) и (4.46)], а именно:

$$H(z, \lambda) \sim H(z, 1) h [(1 - \lambda) H^2(z, 1)] \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (7.21)$$

Оно справедливо *при всех* z и тем точнее, чем меньше $1 - \lambda$. Представление о порядке погрешности дает такой пример. При $1 - \lambda = 10^{-4}$ и $a = 0,01$ значения $H(z, \lambda)$,^{*} вычисленные по (7.21) с использованием данных табл. 20 и 24, отличаются от точных, приведенных в табл. 23, не более чем на доли процента.

Глава VI

ЧАСТНЫЕ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ СВЕТА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Результаты предыдущей главы позволяют написать в явном виде решение интегрального уравнения, описывающего рассеяние света в полубесконечном слое при произвольной зависимости мощности источников от глубины. Однако оно оказывается довольно громоздким. Между тем, если мощность источников меняется с глубиной по какому-нибудь простому закону, например, убывает экспоненциально, остается постоянной и т. д., это решение можно сильно упростить и придать ему более компактную форму. Естественно рассмотреть простейшие случаи более подробно. На подобных простых примерах можно составить ясное представление о физической картине явления и лучше понять специфику задач о переносе излучения в спектральной линии, обусловленную возможностью изменения частоты кванта при рассеянии.

Применение общих результатов, полученных выше, к решению нескольких простейших задач и составляет содержание настоящей главы. Она имеет двоякую цель. С одной стороны, она призвана проиллюстрировать, как следует применять развитые выше общие методы в конкретных случаях. С другой стороны, она должна служить чем-то вроде справочника, содержащего готовые решения ряда задач, доведенные до числа.

§ 6.1. Среда с равномерным распределением источников. Собобщенная проблема Милна

Исследуем в первую очередь поле излучения в среде с равномерно распределенными источниками, когда $S^*(\tau) = S^* = \text{const}$. Основное интегральное уравнение для

функции источников имеет в этом случае вид

$$S(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \lambda) d\tau' + S^*. \quad (1.1)$$

Нетрудно показать, что

$$S(\tau, \lambda) = S(0, \lambda) \left(1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right). \quad (1.2)$$

Действительно, дифференцируя (1.1) по τ , с учетом (5.1.24) имеем

$$S'(\tau, \lambda) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S'(\tau', \lambda) d\tau' + S(0, \lambda) \frac{\lambda}{2} K(\tau). \quad (1.3)$$

Из сопоставления с (5.1.28) заключаем, что

$$S'(\tau, \lambda) = S(0, \lambda) \Phi(\tau, \lambda), \quad (1.4)$$

откуда непосредственно следует (1.2).

Значение $S(0, \lambda)$ можно получить таким образом. При $\tau \rightarrow \infty$ величина $S(\tau, \lambda)$ должна стремиться к функции источников в бесконечной среде при $S^*(\tau) = S^*$. В самом деле, когда источники распределены равномерно, условия в достаточно глубоких слоях полубесконечной среды мало отличаются от условий в среде, бесконечной во всех направлениях. Это связано с тем, что на больших глубинах процессы поглощения преобладают над выходом излучения через границу. В бесконечной среде каждый квант испытывает в среднем $(1 - \lambda)^{-1}$ рассеяний. Поэтому функция источников для бесконечной среды при $S^*(\tau) = S^*$ равна $\frac{S^*}{1 - \lambda}$. Согласно только что сказанному имеем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S(\tau, \lambda) = \frac{S^*}{1 - \lambda}, \quad (1.5)$$

или

$$\frac{S^*}{1 - \lambda} = S(0, \lambda) \left(1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right). \quad (1.6)$$

Пользуясь (5.5.26), находим

$$S(0, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (1.7)$$

и, окончательно,

$$S(\tau, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 + \int_0^\tau \Phi(\tau', \lambda) d\tau' \right), \quad (1.8)$$

или, если воспользоваться обозначением (5.5.29),

$$S(\tau, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}} \Psi(\tau, \lambda). \quad (1.9)$$

Разумеется, это выражение можно получить и из общих соотношений, приведенных в § 5.1. Формула (5.1.21) при $S^*(\tau) = S^*$ дает

$$S(\tau, \lambda) = S^* \left(1 + \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau', \lambda) d\tau' \right). \quad (1.10)$$

Можно показать (см. ниже § 6.8), что

$$1 + \int_0^\infty \Gamma(\tau, \tau', \lambda) d\tau' = \frac{\Psi(\tau, \lambda)}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (1.11)$$

и мы снова приходим к (1.9).

Зная функцию источников $S(\tau, \lambda)$, легко найти интенсивность излучения в любой точке среды. Ограничимся определением интенсивности выходящего излучения $I(0, \mu, x)$. Обычно именно она представляет наибольший интерес, так как проще всего может быть найдена из эксперимента. В задачах же астрофизики $I(0, \mu, x)$, как правило, является вообще единственной величиной, которую могут дать наблюдения. Как известно,

$$I(0, \mu, x, \lambda) = \int_0^\infty S(\tau, \lambda) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \alpha(x) \frac{d\tau}{\mu}. \quad (1.12)$$

Подставляя сюда (1.8), интегрируя по частям и пользуясь (5.1.42), получаем

$$I(0, \mu, x, \lambda) = \frac{S^*}{\sqrt{1-\lambda}} H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right). \quad (1.13)$$

Итак, при равномерном распределении источников в среде относительное распределение выходящего излучения по частотам и углам дается функцией $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right)$.

Из (1.9) видно, что при чистом рассеянии ($\lambda = 1$) уравнение (1.1) решения не имеет. Однако в (1.1) и (1.9) можно положить $S^* = \sqrt{1 - \lambda}$ и затем уже устремить λ к единице. Тогда (1.1) переходит в однородное уравнение

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \tilde{S}(\tau') d\tau', \quad (1.14)$$

а из (1.9) следует, что его решение, нормированное таким образом, что $\tilde{S}(0) = 1$, есть

$$\tilde{S}(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau', 1) d\tau' \equiv \Psi(\tau, 1). \quad (1.15)$$

Исследование уравнения (1.14) составляет обобщенную проблему Милна (ср. § 3.8). Поскольку явное выражение для $\Phi(\tau, \lambda)$ известно (см. § 5.3), формула (1.15) дает решение обобщенной проблемы Милна в виде некоторого интеграла, т. е. в замкнутой, хотя и довольно громоздкой форме. В §§ 5.5—5.7 были получены простые выражения, описывающие поведение $\tilde{S}(\tau)$ при малых и больших τ . Было бы очень полезно иметь подробные таблицы $\tilde{S}(\tau)$ для коэффициентов поглощения, чаще всего встречающихся в приложениях. Пока в этом направлении сделано очень мало: опубликована лишь небольшая трехзначная таблица $\tilde{S}^D(\tau)$ (Ю. Эвретт и Д. Хаммер [1], табл. 2). Шаг по τ очень большой, к тому же (по крайней мере при больших τ) имеются ошибки в третьей значащей цифре.

Существует простая и весьма общая связь между решением обобщенной проблемы Милна и функцией $S_p(\tau, 1)$, описывающей поле излучения точечного источника в бесконечной однородной консервативно рассеивающей среде.

Обозначим

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) = 1 + 4\pi \int_0^{\tau} t^2 S_p(t, 1) dt. \quad (1.16)$$

В § 4.3 было показано, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$S_p(\tau, 1) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{1-2\gamma}{\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma} \frac{1}{\tau \left[1 - V\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]}. \quad (1.17)$$

Подставляя это выражение в (1.16) и пользуясь тем, что при $u \rightarrow 0$

$$V(u) \sim 1 - \varphi(u) u^2 \mu,$$

где $\varphi(u)$ — медленно меняющаяся функция (см. конец § 2.6), получаем

$$\tilde{S}_\infty(\tau) \sim \frac{1-2\gamma}{2\gamma\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma} \left[1 - V\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]^{-1}. \quad (1.18)$$

Сравнивая (1.18) с (5.5.35'), приходим к искомому соотношению:

$$\tilde{S}(\tau) \sim c \sqrt{\tilde{S}_\infty(\tau)} \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (1.19)$$

где

$$c = \left[\frac{2\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma}{\gamma\Gamma^2(\gamma) (1-2\gamma)} \right]^{1/2}. \quad (1.20)$$

При изменении γ от 0 до 1/2 величина c монотонно возрастает от 1 до $\sqrt{2}$. При $\gamma = 1$ (монохроматическое рассеяние) (1.20) также дает $c = \sqrt{2}$, что согласуется с результатом, полученным в § 3.9.

Заметим, что уравнение переноса в случае обобщенной проблемы Милна имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = & \alpha(x) I(\tau, \mu, x) - \\ & - \frac{1}{2} A\alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu', \end{aligned} \quad (1.21)$$

а граничное условие есть $I(0, \mu, x) = 0$ при $\mu < 0$. Функция источников $\tilde{S}(\tau)$ совпадает с интенсивностью излучения, усредненной по частотам [с весом $A\alpha(x)$] и по направлениям:

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{1}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu'. \quad (1.22)$$

Интегрируя уравнение переноса по μ от -1 до $+1$ и по x от $-\infty$ до $+\infty$, находим, что

$$\frac{d}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-1}^1 \mu I(\tau, \mu, x) d\mu = 0. \quad (1.23)$$

Величина, стоящая под знаком производной, есть не что иное, как полный поток в линии. Соотношение (1.23) показывает, что он не зависит от глубины. В этом отношении обобщенная проблема Милна ничем не отличается от классической. Однако если в случае монохроматического рассеяния величина потока конечна, в обобщенной проблеме Милна поток в линии бесконечно велик (хотя производная от него согласно (1.23) равна нулю).

Интегральное уравнение (1.14) для функции $\tilde{S}(\tau)$ есть обобщение (первого) уравнения Милна

$$\tilde{S}^M(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \tilde{S}^M(\tau') d\tau' \quad (1.24)$$

на случай произвольного профиля линии. Как известно, наряду с (1.24) функция $\tilde{S}^M(\tau)$, нормированная так, что $\tilde{S}^M(0) = 1$, удовлетворяет также уравнению

$$\int_{\tau}^{\infty} E_2(\tau' - \tau) \tilde{S}^M(\tau') d\tau' - \int_0^{\tau} E_2(\tau - \tau') \tilde{S}^M(\tau') d\tau' = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad (1.25)$$

которое называют иногда вторым уравнением Милна. С помощью (3.7.37) легко показать, что

$$\int_0^{\infty} E_2(\tau') \tilde{S}^M(\tau') d\tau' = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (1.26)$$

Поэтому (1.25) может быть переписано также в форме

$$\int_{\tau}^{\infty} [E_2(\tau' - \tau) - E_2(\tau')] \tilde{S}^M(\tau') d\tau' - \int_0^{\tau} [E_2(\tau - \tau') + E_2(\tau')] \tilde{S}^M(\tau') d\tau' = 0. \quad (1.27)$$

Обобщение этого уравнения на случай произвольного профиля имеет вид

$$\int_0^{\infty} [L(\tau' - \tau) - L(\tau')] \tilde{S}(\tau') d\tau' - \\ - \int_0^{\tau} [L(\tau - \tau') + L(\tau')] \tilde{S}(\tau') d\tau' = 0. \quad (1.28)$$

Как видно из (1.14), обобщенная проблема Милна соответствует случаю, когда источники на конечной глубине отсутствуют. Можно считать, что поле излучения создается источником бесконечной мощности, находящимся в бесконечно глубоких слоях среды. Физически это означает, что возбуждение атомов в поверхностных слоях производится в основном излучением, приходящим с больших глубин.

Отметим еще, что функция

$$\Phi(\tau, 1) = \frac{d}{d\tau} \tilde{S}(\tau),$$

кроме уравнения (5.1.28) с $\lambda = 1$, удовлетворяет также следующим двум уравнениям:

$$\int_{\tau}^{\infty} L(\tau' - \tau) \Phi(\tau', 1) d\tau' - \int_0^{\tau} L(\tau - \tau') \Phi(\tau', 1) d\tau' = L(\tau), \quad (1.29)$$

$$\int_0^{\infty} [M(\tau') - M(|\tau - \tau'|)] \Phi(\tau', 1) d\tau' = M(\tau), \quad (1.30)$$

где

$$M(\tau) = \int_0^{\tau} L(\tau') d\tau'. \quad (1.31)$$

В частном случае прямоугольного профиля, т. е. при монохроматическом рассеянии, (1.29) и (1.30) переходят соответственно в (3.7.48) и (3.7.47).

Обобщенная проблема Милна была поставлена и исследована в работах автора [8], [6], [4] (см. также статью Д. Хаммера и Дж. Стюарта [1]). Ее следует рассматривать как простейшую стандартную задачу о переносе излучения в частотах линий.

В следующих двух параграфах будет продолжено рассмотрение среды с равномерно распределенными в ней источниками. Основное внимание будет уделено физической стороне вопроса.

§ 6.2. Толщина пограничного слоя

Влияние границы сводится к тому, что из близких к ней областей среды излучение выходит наружу. Граница играет роль поглощающей стенки. Чем ближе к границе, тем большую роль должен приобретать выход излучения. Поэтому при равномерном распределении первичных источников средняя интенсивность излучения, а вместе с ней и эффективность фотовозбуждений вблизи границы должны становиться меньше. Это ничем не компенсируемое уменьшение числа фотовозбуждений будет вызывать падение степени возбуждения при приближении к границе. Таким образом, в газе будет существовать пограничный слой.

Из (1.8) следует, что

$$\frac{S(0, \lambda)}{S(\infty, \lambda)} = \sqrt{1 - \lambda}, \quad (2.1)$$

т. е. в пределах пограничного слоя функция источников уменьшается в $(1 - \lambda)^{-1/2}$ раз. Отвлекаясь пока от всех деталей поведения $S(\tau)$, постараемся дать ответ на важный вопрос о том, какова по порядку величины толщина пограничного слоя. Порядковую оценку можно получить из простых физических соображений (В. В. Иванов [2], [6]). Вероятность гибели кванта вследствие неупругих процессов в расчете на одно рассеяние есть $1 - \lambda$. Вероятность же того, что возбужденный атом, находящийся на глубине τ , излучит квант, который затем сразу же (без рассеяний) покинет среду, равна $(\lambda/2)L(\tau)$ (см. § 5.2). Ясно, что при таких τ , для которых $(\lambda/2)L(\tau) \ll 1 - \lambda$, выходом излучения можно в первом приближении пренебречь. Наоборот, при $(\lambda/2)L(\tau) \gg 1 - \lambda$ роль неупругих процессов мала по сравнению с влиянием границы. Обозначим оптическую толщину пограничного слоя через τ_b (индекс b — сокращение от *boundary*, т. е. граница). Тогда по порядку величины при $1 - \lambda \ll 1$ она должна определяться условием

$$\frac{1}{2} L(\tau_b) = 1 - \lambda. \quad (2.2)$$

Это равенство можно было бы принять за определение τ_b . Однако по ряду соображений мы предпочтем определить τ_b несколько иначе, но, разумеется, так, чтобы это определение не противоречило порядковой оценке, даваемой (2.2). Именно, назовем оптической толщиной пограничного слоя значение $\tau = \tau_b$ такое, что

$$\tilde{S}(\tau_b) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}, \quad (2.3)$$

где $\tilde{S}(\tau)$ — решение однородного уравнения (1.14).

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\lambda = 0$ имеем $\tilde{S}(\tau_b) = 1$, откуда $\tau_b = 0$. В предельном случае $\lambda \rightarrow 0$ роль радиативных переходов пренебрежимо мала, а потому влияние границы не сказывается на степени возбуждения. Пограничный слой отсутствует.

В противоположном предельном случае $1 - \lambda \ll 1$ имеем из (2.3), принимая во внимание (5.5.35'),

$$1 - V\left(\frac{1}{\tau_b}\right) \sim \frac{1}{\Gamma^2(1+\gamma)}(1-\lambda). \quad (2.4)$$

При монохроматическом рассеянии получаем отсюда с помощью (2.6.26)

$$\tau_b \sim \frac{1}{\sqrt{3(1-\lambda)}} \sim \tau_d, \quad (2.5)$$

т. е. при почти консервативном рассеянии толщина пограничного слоя асимптотически равна диффузионной длине. Если же речь идет о рассеянии в частотах линии, то (2.4) в комбинации с (2.6.56) и (2.6.44) дает

$$L(\tau_b) \sim C^2(1-\lambda), \quad (2.6)$$

где

$$C = \frac{1}{\gamma\Gamma(\gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma}. \quad (2.7)$$

Так как C близко к единице, значения τ_b , даваемые (2.2) и (2.6), по порядку величины не отличаются друг от друга.

При почти консервативном рассеянии существует простая асимптотическая связь между толщиной пограничного

слоя τ_b и длиной термализации τ_t , а именно:

$$\tau_t \sim \tilde{c}\tau_b, \quad (2.8)$$

где

$$\tilde{c} = \left[\frac{2\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma}{\gamma\Gamma^2(\gamma) 1 - 2\gamma} \right]^{\frac{1}{2\gamma}}. \quad (2.9)$$

Коэффициент \tilde{c} монотонно убывает при возрастании γ от 0 до 1, причем $\tilde{c}(0) = e = 2,718$; $\tilde{c}(1/4) = 2,327$; $\tilde{c}(1/2) = 2,000$ и $\tilde{c}(1) = \sqrt{2} = 1,414$. Для доказательства (2.8) заметим, что согласно (2.4) и (4.5.14) при $1 - \lambda \ll 1$

$$\frac{1 - V\left(\frac{1}{\tau_b}\right)}{1 - V\left(\frac{1}{\tau_t}\right)} \sim \frac{2\Gamma(2\gamma) \cos \pi\gamma}{\gamma\Gamma^2(\gamma) 1 - 2\gamma}. \quad (2.10)$$

Но при $u \rightarrow 0$

$$V(u) \sim 1 - u^{2\gamma}\varphi(u), \quad (2.11)$$

где $\varphi(u)$ — некоторая медленно меняющаяся функция, т. е. такая функция, что $\varphi(au) \sim \varphi(u)$ при $u \rightarrow 0$ (см. § 2.6). Подставляя (2.11) в (2.10) и пользуясь медленностью изменения $\varphi(u)$, приходим к (2.8) и (2.9).

Таким образом, при почти консервативном рассеянии длина термализации τ_t и толщина пограничного слоя τ_b есть величины одного порядка. Поэтому при грубых оценках нет особой нужды проводить между ними четкое различие. В частности, все выводы о влиянии поведения коэффициента поглощения в крыльях линии на длину термализации, которые были сделаны в § 4.5, полностью переносятся и на толщину пограничного слоя. Чем медленнее убывает коэффициент поглощения в крыльях линии, тем больше толщина пограничного слоя, причем зависимость τ_b от формы линии очень сильная.

§ 6.3. Населенность первого возбужденного уровня атомов вблизи границы газа с вакуумом

Рассмотрим простейшую физическую задачу, сводящуюся к решению уравнения, которое обсуждалось в § 6.1. Эта задача как нельзя лучше может служить для уяснения

физики явления. Вместе с тем она представляет и несомненный самостоятельный интерес.

Пусть имеется однородный однотемпературный газ, заполняющий полупространство. Кинетическая температура T во всех точках одна и та же. Газ состоит из атомов, населенности основного и первого возбужденного уровней которых равны соответственно n_1 и n_2 . Пусть, кроме атомов, имеются еще свободные электроны, концентрация которых n_e везде одна и та же. Поскольку газ однотемпературный, электронная температура T_e равна кинетической температуре атомов и, таким образом, также не зависит от координат.

Будем учитывать два процесса, ведущих к заселению возбужденного уровня, — переходы с основного уровня под действием электронных ударов и фотовозбуждения, и два процесса опустошения верхнего уровня — радиативные переходы вниз (спонтанные и вынужденные) и удары второго рода. Задача состоит в том, чтобы рассчитать степень возбуждения $\frac{n_2}{n_1}$ в функции расстояния от границы. Считается, что извне на газ излучение не падает.

Как было показано в § 2.5, эта задача сводится к решению следующего интегрального уравнения для $S(\tau)$:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + B_{v_{12}}(T_e)(1 - \lambda). \quad (3.1)$$

Здесь $S(\tau)$ — функция источников:

$$S(\tau) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{n_1}{n_2} - 1 \right)^{-1}, \quad (3.2)$$

$B_{v_{12}}(T_e)$ — функция Планка, λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, в данном случае связанная с вероятностями элементарных процессов следующим образом:

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT_e}\right) \right]}. \quad (3.3)$$

Таким образом, мы имеем дело с уравнением, рассмотренным в § 6.1, в котором

$$S^* = (1 - \lambda) B_{v_{12}}(T_e). \quad (3.4)$$

Пользуясь (1.9), находим, что решение (3.1) есть

$$S(\tau) = \sqrt{1 - \lambda} B_{v_{12}}(T_e) \Psi(\tau, \lambda). \quad (3.5)$$

Как было показано в § 5.5, функцию $\Psi(\tau, \lambda)$ при $1 - \lambda \ll 1$ можно представить в форме

$$\Psi(\tau, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \tilde{F}(t) \tilde{\xi}(\tau), \quad (3.6)$$

где

$$t = \frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \frac{1 - \lambda}{L(\tau)}. \quad (3.7)$$

Достоинство такого представления $\Psi(\tau, \lambda)$ состоит в том, что функция $\tilde{\xi}(\tau)$ меняется в сравнительно узких пределах. При порядковых оценках ее вполне можно полагать равной единице.

При $t \ll 1$, т. е. при $\tau \ll \tau_b$ [практически при $\tau \leq 0,01\tau_b$], получаем из (3.5) и (3.6), пользуясь (5.5.38),

$$S(\tau) \sim \sqrt{1 - \lambda} B_{v_{12}}(T_e) \frac{C}{\sqrt{L(\tau)}} \tilde{\xi}(\tau) \quad (\tau \ll \tau_b), \quad (3.8)$$

где C дается формулой (2.7). Этот результат можно записать также в виде

$$S(\tau) \sim \sqrt{1 - \lambda} B_{v_{12}}(T_e) \tilde{S}(\tau) \quad (\tau \ll \tau_b), \quad (3.9)$$

где $\tilde{S}(\tau)$ — решение однородного уравнения (1.14), нормированное таким образом, что $\tilde{S}(0) = 1$. Итак, в поверхностных слоях функция источников с точностью до постоянного множителя совпадает с решением однородного уравнения (1.14). По мере роста τ значения t увеличиваются. Когда t становится порядка единицы, т. е. τ — порядка толщины пограничного слоя τ_b , рост функции источников заметно замедляется. При $t \gg 1$ он практически прекращается. Из (3.5) и (5.5.32) находим, что в этой области значений τ

$$S(\tau) = B_{v_{12}}(T_e) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{L(\tau)}{1 - \lambda} + \dots \right) \quad (\tau \gg \tau_b). \quad (3.10)$$

Д. Хаммер и Дж. Стюарт [1] предложили следующую простую эмпирическую формулу для $S(\tau)$:

$$S(\tau) \approx B_{v_{12}}(T_e) \frac{\sqrt{1 - \lambda} \tilde{S}(\tau)}{[1 + (1 - \lambda) \tilde{S}^2(\tau)]^{1/2}}. \quad (3.11)$$

Максимальная ошибка, даваемая этой формулой при $1-\lambda \ll 1$, составляет несколько процентов.

Приведенные только что результаты наглядно иллюстрируются рис. 25, на котором для доплеровского коэффициента поглощения даны графики $\lg \frac{S(\tau)}{S(0)}$ в функции $\lg \sqrt{\pi} \tau$ (по Д. Хаммеру и Дж. Стюарту [1]). Параметром кривых служат значения $1-\lambda$. Из рисунка видно, что при $\tau \rightarrow \infty$ функция источников стремится к постоянной. Этот результат означает следующее. Поскольку газ изотермичен и не освещается внешним излучением, единственной причиной, вызывающей отклонения от термодинамического равновесия, является выход излучения через границу. Чем дальше от нее мы уходим, тем меньшую роль играет этот процесс, и степень возбуждения должна в конце концов приближаться к равновесной.

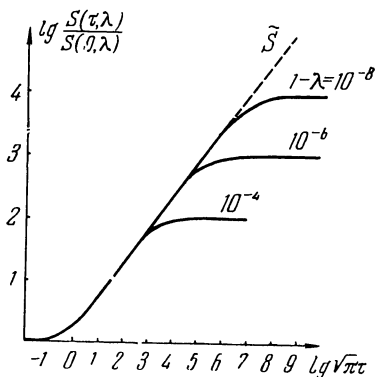


Рис. 25. Зависимость функции источников от глубины в среде с равномерно распределенными источниками. Коэффициент поглощения — доплеровский.

Наоборот, вблизи границы отклонения от равновесия быстро увеличиваются и могут стать очень большими. Прием для простоты, что температура газа не слишком велика, так что средняя энергия теплового движения частиц мала по сравнению с энергией возбуждения верхнего уровня ($kT_e \ll h\nu_{12}$). Предположим также, что плотность газа достаточно низка, так что спонтанные переходы происходят много чаще ударов второго рода ($A_{21} \gg n_e C_{21}$). Оба эти предположения не являются принципиальными и делаются только ради того, чтобы выводы были более наглядными.

Первое из предположений позволяет пренебречь вынужденным излучением по сравнению со спонтанным. Формально это сводится к следующему. Во-первых, λ вместо (3.3)

следует вычислять по формуле

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}}. \quad (3.12)$$

Во-вторых, функцию Планка можно заменить на функцию Вина. Наконец, в-третьих, (3.2) следует заменить на

$$S(\tau) = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} \frac{n_2}{n_1}. \quad (3.13)$$

Обсудим второе предположение. По порядку величины $C_{21} \approx v\bar{q}_{21}$, где v — средняя скорость теплового движения электронов (порядка 10^8 см/сек при $T_e = 10^4^\circ$), \bar{q}_{21} — среднее значение сечения, по порядку не отличающееся от газокинетического (10^{-16} см²). Для разрешенных оптических переходов $A_{21} \approx 10^8$ сек⁻¹. Поэтому неравенство $A_{21} \gg n_e C_{21}$ при температурах около 10^4° выполняется при электронных плотностях, по порядку меньших 10^{16} см⁻³. В задачах астрофизики обычно приходится иметь дело со значительно меньшими плотностями. В высокотемпературных плазмах, исследуемых в лабораторных установках, плотности и температуры таковы, что и здесь условие $A_{21} \gg n_e C_{21}$ часто выполняется. В этом случае можно полагать

$$1 - \lambda \sim n_e \frac{C_{21}}{A_{21}}, \quad (3.14)$$

причем $1 - \lambda \ll 1$.

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.5) и заменяя функцию Планка на функцию Вина, находим, что

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e}} \sqrt{n_e} \left(\frac{C_{21}}{A_{21}} \right)^{1/2} \Psi(\tau, \lambda). \quad (3.15)$$

В частности, при тех τ , которым соответствуют $t \ll 1$,

$$n_2 = \sqrt{n_e} n_1 \frac{g_2}{g_1} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e}} \left(\frac{C_{21}}{A_{21}} \right)^{1/2} \tilde{S}(\tau). \quad (3.16)$$

Таким образом, при малых электронных концентрациях и не слишком высоких температурах населенность первого возбужденного уровня атомов вблизи границы изотермического полубесконечного слоя газа пропорциональна корню из

электронной концентрации. Подчеркнем, что это заключение справедливо лишь в том случае, когда, во-первых, гибель квантов в полете можно не учитывать и, во-вторых, роль фотоионизаций с возбужденного уровня мала по сравнению с ролью тушащих соударений, так что единственным процессом, конкурирующим со спонтанными переходами, являются удары второго рода.

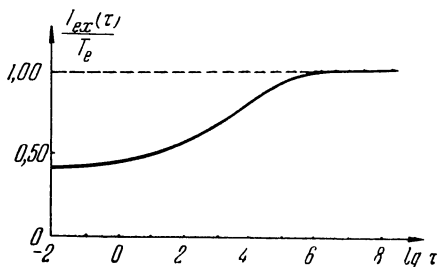


Рис. 26. Зависимость температуры возбуждения от глубины в однородном изотермичном газе (доплеровский профиль, $\frac{h\nu_{12}}{kT_e} = 5$, $1 - \lambda = 10^{-6}$).

Как следует из (3.7) и (2.4), значения t по порядку меньше единицы при $\tau \ll \tau_b$. Поэтому область применимости формулы (3.16) ограничена значениями τ , много меньшими толщины пограничного слоя. С уменьшением электронной концентрации величина $1 - \lambda$ уменьшается пропорционально n_e [см. формулу (3.14)]. Толщина пограничного слоя ⁻¹γ растает при этом пропорционально n_e^2 , где γ — параметр, характеризующий скорость убывания коэффициента поглощения в крыльях линии.

Спад степени возбуждения к границе можно описать в терминах температуры возбуждения T_{ex} , определяемой равенством

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{\frac{h\nu_{12}}{kT_{ex}}}, \quad (3.17)$$

или, что то же самое,

$$S(\tau) = B_{\nu_{12}} [T_{ex}(\tau)]. \quad (3.18)$$

На рис. 26 в качестве иллюстраций приведен график T_{ex}/T_e в функции $\lg \tau$. Кривая относится к доплеровскому коэффициенту поглощения, $1 - \lambda = 10^{-6}$ и $\frac{h\nu_{12}}{kT_e} = 5$.

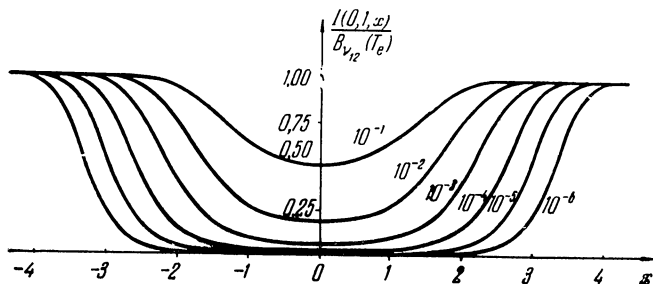


Рис. 27. Интенсивность излучения, выходящего по нормали из однородного изотермичного газа, занимающего полупространство, выраженная в долях планковской интенсивности. Коэффициент поглощения доплеровский. Числа у кривых — значения $1 - \lambda$.

Отклонения населенности возбужденного уровня от больцмановской должны приводить к тому, что интенсивность излучения будет отличаться от планковской. Согласно (1.13) и (3.4)

$$I(0, \mu, x) = B_{\nu_{12}}(T_e) \sqrt{1 - \lambda} H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right). \quad (3.19)$$

Профили линий, определяемые этим выражением, приведены для ряда значений λ на рис. 27. Графики относятся к случаю, когда коэффициент поглощения доплеровский и излучение выходит по нормали к границе, так что $\mu = 1$. Для построения кривых использованы численные данные, приведенные в § 5.6. Из рисунка видно, что граница однородной изотермичной плазмы, занимающей полупространство, испускает планковское излучение, на фоне которого видна линия поглощения. С уменьшением μ линия становится немного глубже, а ее ширина слегка увеличивается (рис. 28).

На протяжении всего этого параграфа для иллюстрации общих положений использовались численные данные, относящиеся к доплеровскому профилю. Приведем некоторые результаты также для фойгтовского и лоренцовского про-

филей. Влияние фойгтовского параметра a на зависимость функции источников от глубины иллюстрируется рис. 29

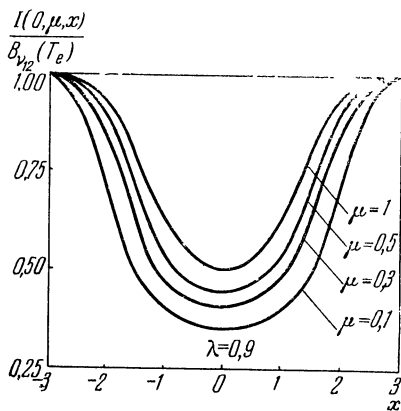


Рис. 28. Профиль линии при различных углах выхода излучения (доплеровский коэффициент поглощения, $\lambda = 0,9$).

методом итераций для двух значений λ . Недавно А. Хёрн [2],

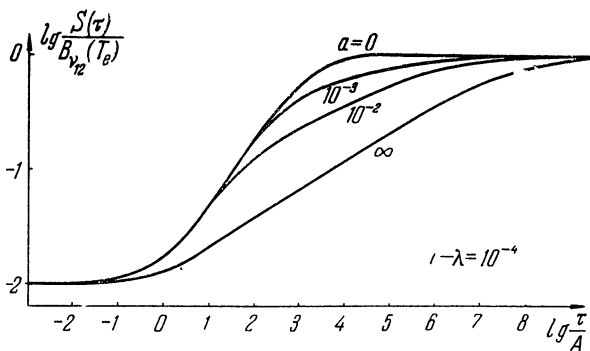


Рис. 29. Функция источников в однородном изотермичном газе, занимающем полупространство. Числа у кривых — значения фойгтовского параметра a . Графики относятся к $1 - \lambda = 10^{-4}$.

(по Ю. Эвретту и Д. Хаммеру [1]). Соответствующие профили линий, рассчитанные по таблицам H -функций и асимптотикам, приведенным в § 5.7, показаны на рис. 30. Из этих рисунков видно, что с увеличением a толщина пограничного слоя довольно быстро возрастает, а у линий существует ясно выраженное доплеровское ядро и широкие крылья затухания.

Задача, рассмотренная в этом параграфе, была впервые исследована Л. М. Биберманом [2]. Он получил уравнение (3.1) для случая $h\nu_{12} \gg kT_e$ и решил его мето-

[3] вновь рассмотрел эту же задачу. Пользуясь численными

методами, он нашел функцию источников и рассчитал профили линий для ряда значений λ , в том числе довольно близких к единице. В этих работах считалось, что уширение линии целиком определяется эффектом Доплера. Для более общего случая, когда уширение линии обусловлено совместным действием эффекта Доплера и влиянием столкновений, задача была впервые рассмотрена Ю. Эвреттом и Д. Хаммером [1]. Уравнение (3.1) решалось численно не только при постоянном λ , но и при λ , зависящем от τ (Ю. Эвретт [1]).

§ 6.4. Диффузное отражение света

Рассчитаем поле излучения в среде, освещаемой извне. Будем предполагать, что интенсивность падающего излучения не меняется от точки к точке вдоль границы среды. Примем, далее, что среда освещается параллельными лучами, причем падающее излучение монохроматическое. Особенно интересно определить для этого случая распределение выходящего излучения по частотам и по углам. Это есть так называемая задача о диффузном отражении.

Строгое решение этой задачи для изотропного монохроматического рассеяния было получено Э. Хопфом [1] (для случая $\lambda = 1$). Он выразил интенсивность выходящего излучения через соответствующую H -функцию (φ -функцию Амбарцумяна) и получил для этой функции явное выражение в виде некоторого интеграла. Результат Э. Хопфа можно обобщить на случай рассеяния с полным перераспреде-

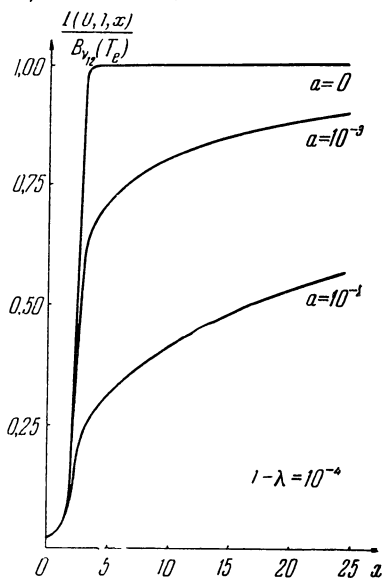


Рис. 30. Интенсивность излучения, выходящего по нормали из однородного изотермичного газа, занимающего полупространство. Числа у кривых — значения фойгтовского параметра a . Графики относятся к $1 - \lambda = 10^{-4}$.

ленем по частотам при произвольном профиле коэффициента поглощения.

Пусть падающее излучение создает единичную освещенность на перпендикулярной к нему площадке и пусть x_0 — его безразмерная частота, μ_0 — косинус угла падения. Обозначим через μ косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью. Тогда задача сводится к решению уравнения переноса

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = & \alpha(x) I(\tau, \mu, x) - \\ & - \frac{\lambda}{2} A\alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - \\ & - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{A}{\Delta\nu} \alpha(x) \alpha(x_0) e^{-\frac{\alpha(x_0)}{\mu_0} \tau} \end{aligned} \quad (4.1)$$

при граничном условии

$$I(0, \mu, x) = 0 \quad (\mu < 0). \quad (4.2)$$

Функция источников, соответствующая этой задаче, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} S(\tau, \mu_0, x_0) = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \mu_0, x_0) d\tau' + \\ & + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{A}{\Delta\nu} \alpha(x_0) e^{-\frac{\alpha(x_0)}{\mu_0} \tau}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Из него видно, что величина

$$P(\tau, z_0) = \frac{\Delta\nu}{A\alpha(x_0)} S(\tau, \mu_0, x_0) \quad (4.4)$$

зависит только от τ и от отношения

$$z_0 = \frac{\mu_0}{\alpha(x_0)} \quad (4.5)$$

и определяется уравнением

$$P(\tau, z_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z_0) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z_0}}, \quad (4.6)$$

т. е. совпадает с приведенной вероятностью выхода кванта из среды (см. § 5.2).

Интенсивность выходящего излучения $I(0, \mu, x; \mu_0, x_0)$ выражается через функцию источников следующим образом:

$$I(0, \mu, x; \mu_0, x_0) = \int_0^{\infty} S(\tau, \mu_0, x_0) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \alpha(x) \frac{d\tau}{\mu}. \quad (4.7)$$

Согласно (4.4) отсюда следует, что $I(0, \mu, x; \mu_0, x_0)$ можно представить в виде произведения $\alpha(x_0)$ на функцию, зависящую только от z и z_0 . Будем для краткости опускать аргументы μ_0 и x_0 и писать интенсивность выходящего излучения просто как $I(0, z)$.

Чтобы найти $I(0, z)$, можно вместо (4.7) использовать также формулу (5.1.45), которая в данном случае запишется так:

$$I(0, z) = \frac{A}{\Delta v} \int_0^{\infty} P(\tau, z) e^{-\frac{\tau}{z_0}} \alpha(x_0) \frac{d\tau}{z}. \quad (4.8)$$

Ею мы и воспользуемся для решения задачи о диффузном отражении.

Интеграл, стоящий в правой части (4.8), легко находится из уравнения (5.1.35). Умножим для этого (5.1.35) на $e^{-\frac{\tau}{z_0}}$ и проинтегрируем его по τ от 0 до ∞ . Получим

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} \frac{\partial P(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau = -\frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) d\tau + \frac{\lambda}{4\pi} H(z) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} \Phi(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Для интеграла, стоящего слева, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} \frac{\partial P(\tau, z)}{\partial \tau} d\tau &= -P(0, z) + \frac{1}{z_0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) d\tau = \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi} H(z) + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) d\tau. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поэтому вместо (4.9) имеем

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z_0}\right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} H(z) \left(1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} \Phi(\tau) d\tau\right) \quad (4.11)$$

откуда с учетом (5.1.42)

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{H(z) H(z_0)}{z + z_0} z z_0. \quad (4.12)$$

Окончательно получаем, подставляя (4.12) в (4.8) и используя (4.5):

$$I(0, z) = \frac{\lambda A}{4\pi \Delta v} \frac{H(z) H(z_0)}{z + z_0} \mu_0. \quad (4.13)$$

Поскольку функцию $H(z)$ можно считать известной, эта формула дает решение задачи о диффузном отражении от полубесконечной среды.

Функция источников $S(\tau, \mu_0, x_0)$ дается формулой

$$S(\tau, \mu_0, x_0) = \frac{\lambda}{4\pi \Delta v} A\alpha(x_0) H(z_0) \left(e^{-\frac{\tau}{z_0}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau - \tau'}{z_0}} \Phi(\tau') d\tau' \right), \quad (4.14)$$

вытекающей из (4.4) и (5.1.36). Конечно, это выражение можно было бы получить и из общей формулы (5.1.21), воспользовавшись (5.1.30). Однако в том простом случае, который мы сейчас рассматриваем, такой путь вряд ли был бы самым простым. Заметим, что интегральный член в (4.14) можно преобразовать интегрированием по частям. В результате получим

$$S(\tau, \mu_0, x_0) = \frac{\lambda}{4\pi \Delta v} A\alpha(x_0) H(z_0) \left(\Psi(\tau) - \frac{1}{z_0} \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau - \tau'}{z_0}} \Psi(\tau') d\tau' \right). \quad (4.15)$$

При вычислениях это выражение имеет некоторые преимущества перед (4.14).

Ясно, что формулы (4.13) и (4.14) определяют интенсивность выходящего излучения и функцию источников не только при освещении среды монохроматическим пучком параллельных лучей, но и во всех тех случаях, когда в среде имеются внутренние источники излучения, мощность которых экспоненциально убывает с глубиной. Соответствующий пример подробно разбирается в следующем параграфе.

Посмотрим, что дают полученные формулы. Спектральное распределение выходящего излучения, т. е. профиль линии, оказывается весьма своеобразным. Перепишем (4.13), введя в явном виде зависимость от частоты x и от угловой переменной μ , для чего подставим $z = \mu/\alpha(x)$. Получим

$$I(0, \mu, x) = \frac{\lambda A}{4\pi\Delta\nu} \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right) H(z_0)}{\mu + z_0\alpha(x)} \alpha(x) \mu_0. \quad (4.16)$$

Профиль линии $r(\mu, x)$, нормированный таким образом, что интенсивность излучения, выходящего по нормали ($\mu = 1$) в центральной частоте линии ($x = 0$), принята за единицу, дается тогда выражением

$$r(\mu, x) = \frac{I(0, \mu, x)}{I(0, 1, 0)} = \frac{(1 + z_0)\alpha(x)}{\mu + z_0\alpha(x)} \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)}{H(1)}. \quad (4.17)$$

Если угол падения внешнего излучения приближается к $\pi/2$, то величины μ_0 и z_0 стремятся к нулю. Из (4.17) видно, что при $z_0 = 0$

$$r(\mu, x) = \frac{\alpha(x)}{\mu} \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)}{H(1)}. \quad (4.18)$$

В этом случае внешние лучи практически не проникают внутрь среды, а освещают лишь ее самый наружный слой. Поэтому здесь мы, по существу, имеем дело с задачей о свечении среды, в которой источники сосредоточены на границе. Из формулы (4.18) следует, что при этом излучается эмиссионная линия. В самом деле, хотя с увеличением расстояния от центра линии, т. е. с увеличением $|x|$, функ-

ция $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$ и возрастает, это возрастание более чем компенсируется убывающим множителем $\alpha(x)$. В результате $r(\mu, x)$ оказывается монотонно убывающей функцией $|x|$.

Противоположный предельный случай получается тогда, когда на среду под каким-то углом $\arcs \cos \mu_0 \neq \pi/2$ падает излучение в далеком крыле линии ($|x_0| \gg 1$). Тогда $\alpha(x_0) \ll 1$, и параметр z_0 оказывается большим. В пределе при $z_0 \rightarrow \infty$ имеем

$$r(\mu, x) = \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)}{H(1)}. \quad (4.19)$$

С увеличением расстояния от центра линии величина $\frac{\mu}{\alpha(x)}$, а вместе с ней и $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$, растет. Поэтому $r(\mu, x)$ является теперь возрастающей функцией $|x|$, т. е. мы имеем линию поглощения. Сравнивая последнюю формулу с выражением (1.13), видим, что они, по существу, совпадают. Это и неудивительно. Чем больше величина z_0 , тем до больших глубин внешнее излучение проникает без заметного ослабления. В пределе при $z_0 \rightarrow \infty$ мы получаем равномерное распределение источников в среде, для которого и была найдена формула (1.13).

При любом конечном z_0 образуется линия излучения, ширина которой тем больше, чем больше z_0 (рис. 31). При достаточно больших z_0 в центре линии имеется провал. С ростом z_0 его глубина возрастает. Одновременно увеличивается расстояние между максимумами интенсивности. Предельная форма этого центрального самообращения и дается формулой (4.19). Наоборот, в далеком крыле линии, где уже $\mu/\alpha(x) \gg z_0$, вместо (4.17) с точностью до главного члена имеем

$$r(\mu, x) \sim (1 + z_0) \frac{\alpha(x)}{\mu} \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)}{H(1)}. \quad (4.20)$$

Таким образом, в крыле линии зависимость от частоты оказывается такой же, как и при $z_0 = 0$ — интенсивность убывает с ростом $|x|$ пропорционально $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)\alpha(x)$. Рассмотрим эту зависимость более подробно.

Если λ не очень близко к единице, то можно приближенно принять, что $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right) \approx (1 - \lambda)^{-1/2}$, так как в крыле линии $\mu/\alpha(x) \gg 1$. Поэтому вместо (4.20) получаем

$$r(\mu, x) = \frac{1 + z_0}{H(1)} \frac{\alpha(x)}{\mu \sqrt{1 - \lambda}} + \dots, \quad (4.21)$$

причем отброшенные члены стремятся к нулю быстрее, чем $\alpha(x)$. Видим, что интенсивность в далеком крыле линии пропорциональна коэффициенту поглощения.

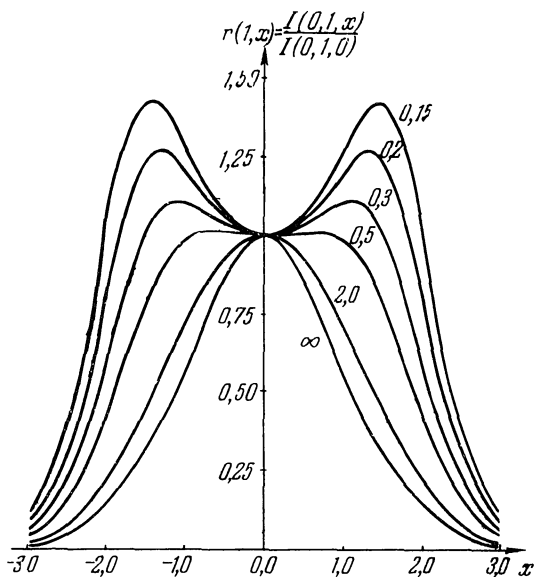


Рис. 31. Профили линий при экспоненциальном распределении первичных источников. Коэффициент поглощения доплеровский. Кривые относятся к $\lambda = 1$, $\mu = 1$. Числа у кривых — значения $\frac{1}{z_0}$.

Когда λ близко к единице, положение немного сложнее. Разумеется, формула (4.20) и здесь остается в силе. Однако теперь возможно существование такой области частот $|x|$,

для которой условие применимости формулы (4.20), т. е. неравенство $\mu/\alpha(x) \gg z_0$, уже выполнено, но $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$ еще значительно меньше своего предельного значения, равного $(1-\lambda)^{-1/2}$. При таких частотах функция $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$ сравнительно быстро возрастает с ростом $|x|$, и поэтому $r(\mu, x)$ убывает заметно медленнее, чем $\alpha(x)$. В этом случае для $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$ следует воспользоваться общими асимптотическими выражениями, полученными в § 5.4. Может даже оказаться, что существуют такие частоты $|x| \gg 1$, где формула (4.20) уже применима, а для $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right)$ еще можно использовать асимптотики, соответствующие чистому рассеянию. С таким случаем приходится иметь дело всякий раз, когда при $1-\lambda \ll 1$ значение z_0 по порядку величины меньше толщины пограничного слоя τ_b . Если это условие выполнено, то, например, при доплеровском коэффициенте поглощения для излучения, выходящего по нормали, в этой области частот имеем из (4.20) и (5.4.32)

$$r(1, x) \sim \frac{1+z_0}{H_D(1)} e^{-x^2} H_D(e^{x^2}) \sim \\ \sim 2\pi^{-1/4} \frac{1+z_0}{H_D(1)} \sqrt{|x|} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.22)$$

Таким образом, здесь интенсивность убывает с удалением от центра линии пропорционально $\sqrt{|x|} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, т. е. значительно медленнее, чем коэффициент поглощения $[\exp(-x^2)]$.

При дальнейшем увеличении расстояния от центра линии достигаются настолько большие значения $z = \mu/\alpha(x)$, что рост $H(z, \lambda)$ замедляется, сначала незначительно, а потом все сильнее и сильнее. В конце концов он практически прекращается — $H(z, \lambda)$ приближается к своему асимптотическому значению $H(\infty, \lambda)$. Одновременно интенсивность выходящего излучения делается пропорциональной коэффициенту поглощения $\alpha(x)$.

Формула (4.17) позволяет также проследить, как профили линий изменяются с изменением μ , иначе говоря, в за-

висимости от угла выхода излучения из среды. Зависимость от μ описывает изменение формы линии при переходе от центра диска звезды или планеты ($\mu = 1$) к ее краю ($\mu = 0$). Общий характер происходящих изменений ясен из рис. 32: с уменьшением μ линия расширяется, а центральный провал становится глубже.

В ряде случаев важно знать суммарную энергию, излучаемую единицей поверхности среды во всех направлениях. Обозначим эту величину через E .

Энергия во всей спектральной линии, выходящая из среды через единицу поверхности за единицу времени в телесном угле $d\omega$, равна

$$\int_0^{\infty} I(0, \mu, x) dv \cdot \mu d\omega.$$

Полная энергия E , излучаемая за единицу времени во всех направлениях, есть

$$E = 2\pi \int_0^{\infty} dv \int_0^1 I(0, \mu, x) \mu d\mu. \quad (4.23)$$

Подставляя сюда (4.13), получаем

$$E = \frac{\lambda A}{2} \mu_0 H(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 \frac{H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)}{\frac{\mu}{\alpha(x)} + z_0} \mu d\mu. \quad (4.24)$$

Введем вместо μ переменную $z = \mu/\alpha(x)$. Тогда

$$E = \frac{\lambda A}{2} \mu_0 H(z_0) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) dx \int_0^{\frac{1}{\alpha(x)}} \frac{zH(z)}{z+z_0} dz. \quad (4.25)$$

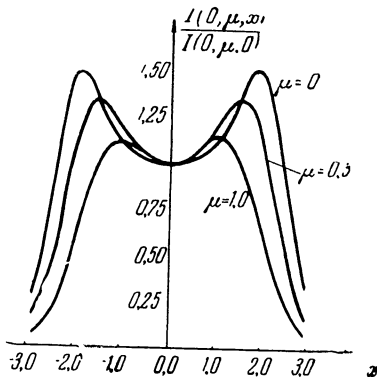


Рис. 32. Изменение профилей линий с изменением угла выхода излучения. Кривые относятся к доплеровскому профилю, $\lambda = 1$ и $\frac{1}{z_0} = 0,30$.

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$E = \frac{\lambda}{2} \mu_0 H(z_0) \int_0^{\infty} \frac{zH(z)}{z+z_0} G(z) dz. \quad (4.26)$$

Из уравнения (5.4.21) следует, что

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{zH(z)}{z+z_0} G(z) dz = \frac{1}{H(z_0)} - \sqrt{1-\lambda}. \quad (4.27)$$

Поэтому окончательно

$$E = \mu_0 (1 - H(z_0) \sqrt{1-\lambda}). \quad (4.28)$$

Поскольку в этом параграфе мы считаем, что свечение среды вызывается освещением ее параллельными лучами, отраженную энергию естественно выразить в долях падающей. Эта последняя в расчете на единицу площади равна $E_0 = \mu_0$. Поэтому находим, что из всей падающей на границу среды энергии доля

$$A_0 = \frac{E}{E_0} = 1 - H(z_0) \sqrt{1-\lambda} \quad (4.29)$$

отражается, а доля

$$1 - A_0 = H(z_0) \sqrt{1-\lambda} \quad (4.30)$$

поглощается в самой среде. Величина A_0 называется, как известно, альбедо среды.

Из (4.30) следует, что роль поглощения возрастает с увеличением z_0 . Это связано с тем, что чем больше z_0 , тем глубже проникает в среду внешнее излучение и тем большее число рассеяний кванты должны совершить, чтобы выйти наружу. Между тем при каждом рассеянии есть некоторая вероятность того, что квант «погибнет». Все это и ведет к возрастанию $1 - A_0$ с ростом z_0 .

Из (4.30) легко получить явное выражение для среднего числа рассеяний \bar{N} , испытываемых квантом. Для этого достаточно поделить долю квантов, поглощаемых в среде, на вероятность гибели кванта при одном рассеянии, равную $1 - \lambda$. В результате получим

$$\bar{N} = \frac{H(z_0)}{\sqrt{1-\lambda}} \quad (4.31)$$

(см. также § 6.8, посвященный расчету среднего числа рассеяний, где эта формула находится из других соображений).

Специально исследовать зависимость функции источников $S(\tau, \mu_0, x_0)$ от τ , т. е. изменение степени возбуждения с расстоянием от границы, мы не будем. Ограничимся лишь краткими замечаниями. Когда z_0 мало, степень возбуждения монотонно убывает с глубиной. В этом случае образуется эмиссионная линия (см. рис. 31, стр. 297). С увеличением z_0 близ границы появляется спад возбуждения, так что на кривой, изображающей зависимость $S(\tau, \mu_0, x_0)$ от τ , образуется максимум. В этом случае испускается линия излучения с центральным самообращением, наличие которого и отражает падение температуры возбуждения к границе. Когда при дальнейшем росте величины z_0 она становится по порядку больше толщины пограничного слоя τ_b , наступает своего рода насыщение. Отношение степени возбуждения в максимуме и на границе почти перестает расти с ростом z_0 , а максимум на кривой $S(\tau, \mu_0, x_b)$ становится все более плоским. Соответственно этому изменяется и профиль линии излучения — максимумы интенсивности делаются все менее и менее резкими.

Как уже указывалось в начале параграфа, многие, если не большинство, из приведенных в нем соотношений являются аналогами формул, полученных ранее при изучении монохроматического рассеяния.

Использованный нами метод решения принадлежит В. В. Соболеву [1]. Изложение в общих чертах соответствует статье автора [8], но содержит гораздо больше подробностей.

§ 6.5. Среда с экспоненциальным распределением источников

В предыдущем параграфе упоминалось о том, что его результаты применимы не только тогда, когда на среду падает пучок параллельных лучей, но и при наличии в среде внутренних источников излучения, мощность которых меняется с глубиной экспоненциально. Разберем подробно пример, когда задача приближенно сводится к такому случаю.

Выше, в § 6.3, была рассчитана концентрация атомов на первом возбужденном уровне в однородном изотермичном газе. При этом предполагалось, что уширение линии целиком обусловлено тепловыми движениями атомов, т. е. коэффициент поглощения принимался доплеровским. Считалось, что населенность верхнего уровня определяется балансом между возбуждениями под действием излучения и столкновений, с одной стороны, и радиативными переходами вниз и тушащими соударениями, с другой. Вернемся к задаче, отказавшись от предположения об изотермичности газа.

Неизотермичность газа приведет к тому, что вероятности электронных ударов первого и второго рода C_{12} и C_{21} , зависящие от электронной температуры T_e , будут теперь некоторыми функциями τ , явный вид которых определяется зависимостью температуры от глубины. Однако дело не ограничивается только этим. Доплеровская ширина линии, в единицах которой измеряются частоты, также оказывается функцией τ . Это ведет к тому, что уравнение стационарности не сводится более к интегральному уравнению с ядром, зависящим от модуля разности. Поэтому при строгом подходе задача оказывается значительно сложнее, чем все рассмотренные до сих пор.

Мы пренебрежем зависимостью доплеровской ширины линии $\Delta\nu_D$ от температуры. В этом будет состоять первое дополнительное приближение. Оно будет использоваться на протяжении всего этого параграфа. В этом приближении уравнение стационарности при пренебрежении вынужденным излучением имеет вид

$$n_2(\tau)(A_{21} + n_e C_{21}) = \frac{A_{21}}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) n_2(\tau') d\tau' + n_1 n_e C_{12}. \quad (5.1)$$

Величина C_{21} зависит от температуры слабо, и при приближенном решении задачи этой зависимостью также можно пренебречь. Что же касается влияния изменения температуры на вероятность возбуждающих соударений C_{12} , то здесь положение иное. Из-за наличия экспоненциального множителя в соотношении, связывающем C_{21} и C_{12} , зависимость C_{12} от температуры оказывается сильной, и пренебрегать ею нельзя. Только этот вид зависимости вероятно-

стей элементарных процессов от температуры и будет учитываться. В этом будет состоять второе дополнительное приближение. Значение C_{21} можно брать, например, соответствующим температуре на глубине $\tau = 0$. При этих предположениях уравнение (5.1) можно переписать так:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + (1 - \lambda) \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e(\tau)}}, \quad (5.2)$$

где $S(\tau)$ — обычная функция источников, связанная с населенностями уровней соотношением (3.13), а величина λ выражается через вероятности элементарных процессов по формуле (3.12).

Если зависимость температуры от глубины имеет вид

$$T_e(\tau) = \frac{T_e(0)}{1 + m\tau}, \quad (5.3)$$

где m — некоторая постоянная, то (5.2) переписывается в форме

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + Q e^{-\frac{\tau}{z_0}}, \quad (5.4)$$

где

$$Q = \frac{n_e C_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}} \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu_{12}}{kT_e(0)}}, \quad (5.5)$$

$$z_0 = \frac{kT_e(0)}{h\nu_{12}} \cdot \frac{1}{m}. \quad (5.6)$$

Таким образом, в этом случае мы имеем дело со свечением среды с экспоненциально распределенными в ней источниками квантов, т. е. снова пришли к задаче, подробно разобранный в предыдущем параграфе. Пользуясь полученными там результатами, можем сразу же написать выражение для интенсивности выходящего излучения:

$$I(0, \mu, x) = Q z_0 \frac{H(z) H(z_0)}{z + z_0}, \quad (5.7)$$

где $z = \mu/\alpha(x)$. Нашей задачей сейчас будет анализ этого выражения, имеющий целью показать, как по форме

испускаемой средой линии можно судить об изменении температуры с глубиной. Следует, впрочем, отдавать себе ясный отчет в том, что этот анализ справедлив лишь при тех крайне специальных предположениях, которые были сделаны выше. Он не дает готового рецепта, которым можно было бы пользоваться на практике. Наоборот, этот анализ скорее может служить предостережением для тех, кто пытается вывести заключения о физических условиях в газе на основе исследования формы самообращенных линий.

Как видно из (5.7), форма линии, испускаемой газом, различна при различных значениях параметра z_0 . В свою очередь согласно (5.6) этот параметр определяется величиной m , т. е. зависит от распределения температуры с глубиной. Этот факт можно использовать для получения зависимости $T_e(\tau)$ по профилю линии.

Вероятность выживания кванта при рассеянии λ с уменьшением электронной концентрации стремится к единице, тогда как значение z_0 согласно (5.6) от плотности не зависит и при сделанных предположениях определяется только распределением температуры с глубиной. Толщина пограничного слоя с уменьшением плотности увеличивается. При достаточно малых n_e она становится по порядку величины больше z_0 . В этом предельном случае, как было указано в предыдущем параграфе, форма линии перестает зависеть от λ (величину λ в (5.4) можно при этом положить равной единице). Она целиком определяется значением параметра z_0 . Таким образом, профиль линии в предельном случае низких плотностей определяется только зависимостью температуры от глубины.

На рис. 31 (стр. 297) были приведены профили линий, рассчитанные по формуле (5.7) для доплеровского коэффициента поглощения и $\lambda = 1$. Считается, что излучение выходит по нормали к границе ($\mu = 1$). Параметром кривых служит значение $\frac{1}{z_0} = \frac{h\nu_{12}}{kT_e(0)} m$. Из рисунка видно, что чем меньше m , т. е. чем медленнее температура убывает с глубиной, тем шире становится линия и тем больше делается глубина центрального самообращения.

Первый вывод, который следует из этого рисунка, состоит в том, что сам по себе факт роста кинетической температуры наружу еще не гарантирует появления эмиссион-

ной линии без самообращения. Только тогда, когда этот рост происходит достаточно быстро (малые m), линия не имеет провала в центре. В чем же состоит причина появления этого минимума интенсивности? Из-за роста температуры к границе число возбуждений столкновениями растет с уменьшением τ . Однако одновременно с этим увеличивается и роль выхода излучения из среды, обуславливающая уменьшение числа фотовозбуждений. Если рост температуры происходит не слишком быстро, влияние второго фактора оказывается более существенным, и вблизи границы имеется спад концентрации возбужденных атомов. Он и служит причиной появления самообращения в центре линии.

Второе заключение, которое можно сделать на основании рис. 31, сводится к тому, что глубина центрального минимума значительно чувствительнее к распределению температуры, чем ширина линии, определяемая, например, по расстоянию между максимумами интенсивности. Рассмотрим этот вопрос немного подробнее. Частота, при которой интенсивность достигает максимума, определяется условием

$$\frac{\partial I(0, \mu, x)}{\partial x} = 0, \quad (5.8)$$

которое с помощью (5.7) может быть приведено к виду

$$\frac{dH(z)}{dz} = \frac{H(z)}{z + z_0}. \quad (5.9)$$

Обозначим корень этого уравнения через z_m . Зная его, частоты x_m максимумов интенсивности можно вычислить из условия

$$\alpha(x_m) = \frac{\mu}{z_m}. \quad (5.10)$$

В частности, при доплеровском профиле

$$x_m = \pm \sqrt{\ln \frac{z_m}{\mu}}. \quad (5.11)$$

При малых m , когда температура изменяется с глубиной медленно, ширина линии очень слабо зависит от m . Убедимся в этом, найдя зависимость $|x_m|$ от m при малых m в явном виде. Когда m достаточно мало, значение z_0 , как видно

из (5.6), оказывается большим. В этом случае и корень уравнения (5.9), т. е. z_m , также должен быть большим. Поэтому при решении уравнения (5.9) для $H(z)$ можно взять асимптотическое выражение (см. § 5.4)

$$H_D(z) \sim 2\pi^{-1/4} \sqrt{z \sqrt{\ln z}}, \quad (5.12)$$

с учетом которого уравнение для определения z_m принимает вид

$$\frac{z_m}{z_m + z_0} \sim \frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

откуда $z_m \sim z_0$. Поэтому при достаточно малых m вместо (5.11) имеем

$$|x_m| \sim \sqrt{\ln \frac{z_0}{\mu}}. \quad (5.14)$$

Поскольку z_0 пропорционально m^{-1} , из последней формулы следует, что при малых m расстояние между максимумами растет примерно как $\sqrt{\ln 1/m}$, т. е. действительно очень медленно.

Что касается глубины центрального минимума, то при малых m ее также нетрудно оценить. В самом деле, из (5.7) имеем

$$\frac{I(0, \mu, x_m)}{I(0, \mu, 0)} = \frac{\mu + z_0}{z_m + z_0} \frac{H(z_m)}{H(\mu)}. \quad (5.15)$$

Когда m мало, как только что говорилось, при доплеровском профиле $z_m \sim z_0 \gg 1$, и вместо последнего выражения приближенно получаем

$$\frac{I(0, \mu, x_m)}{I(0, \mu, 0)} \sim \frac{\pi^{-1/4}}{H_D(\mu)} \sqrt{z_0 \sqrt{\ln z_0}}. \quad (5.16)$$

Таким образом, максимальная интенсивность, выраженная в долях интенсивности в центре линии, растет с уменьшением m , грубо говоря, пропорционально $\sqrt{z_0}$, т. е. как $1/\sqrt{m}$. Хотя эта зависимость не очень сильная, ее все же можно использовать для определения значения m по профилю линии. Общий вывод, который можно сделать из изложенного, сводится к следующему. Когда имеется линия, излучаемая однородным неизотермичным газом, температура

которого медленно убывает с глубиной, а уширение линии обусловлено эффектом Доплера, параметром линии, наиболее чувствительным к распределению температуры, является глубина центрального самообращения.

Положение существенно меняется, если уширение линии обусловлено столкновениями, так что коэффициент поглощения можно считать лоренцовским. Ограничимся рассмотрением случая, когда температура меняется с глубиной медленно (малые m). Выясним, как зависит при этом от m ширина линии и глубина депрессии в ее центре. Все рассуждения, проведенные выше для доплеровской линии, остаются в силе и здесь, за тем единственным исключением, что для получения корня уравнения (5.9) при малых m мы должны теперь взять асимптотическое выражение не доплеровской H -функции, а лоренцовской, имеющее вид (см. § 5.4)

$$H_L(z) \sim \left(\frac{9}{2}\right)^{1/4} z^{1/4}. \quad (5.17)$$

Подставляя это выражение в (5.9), получаем следующее уравнение для z_m :

$$\frac{z_m}{z_m + z_0} \sim \frac{1}{4}, \quad (5.18)$$

откуда $z_m \sim \frac{z_0}{3}$. С учетом этого из (5.10) при лоренцовском профиле и $z_0 \gg 1$ имеем

$$|x_m| \sim \sqrt{\frac{z_0}{3\mu}}, \quad (5.19)$$

где $|x_m|$ — расстояние максимумов интенсивности от центра линии, выраженное в ширинах, обусловленных столкновениями. Что касается высоты максимумов, то из (5.15) и (5.17) следует, что

$$\frac{I(0, \mu, x_m)}{I(0, \mu, 0)} \sim \frac{3^{5/4}}{2^{9/4} H_L(\mu)} z_0^{1/4}. \quad (5.20)$$

Величина z_0 пропорциональна $1/m$. Поэтому согласно (5.19) с уменьшением m расстояние между максимумами интенсивности растет пропорционально $1/\sqrt{m}$, тогда как высота макси-

мумов увеличивается лишь как $m^{-1/2}$. Последнее вытекает из формулы (5.20). Это означает, что при лоренцовском профиле ширина линии чувствительнее к распределению температуры, чем глубина центральной депрессии. Как мы помним, при доплеровском коэффициенте поглощения положение было прямо противоположным. Это может служить наглядным примером того, сколь осторожным нужно быть при анализе профилей эмиссионных линий с целью получения информации о физических условиях в среде.

Весь анализ в этом параграфе основывался на допущении, что влиянием изменения температуры на доплеровскую ширину можно пренебречь. Это и другие приближения, о которых говорилось в начале параграфа, являются очень грубыми. Строгое рассмотрение вопроса об образовании линий в среде с зависящей от глубины температурой можно найти в статьях Д. Хаммера и Г. Рыбицкого [2] и Г. Рыбицкого и Д. Хаммера [1].

§ 6.6. Степень возбуждения в газе, освещаемом извне излучением в непрерывном спектре

Опираясь на результаты § 6.4, легко найти интенсивность диффузно-отраженного излучения и степень возбуждения атомов также и в некоторых других простейших случаях.

Получим в первую очередь функцию источников в среде, освещаемой изотропным излучением, интенсивность которого в пределах линии не зависит от частоты. Это соответствует тому, что на среду под всеми углами падает излучение в непрерывном спектре. Освещающее излучение можно представить как суперпозицию отдельных пучков, каждый из которых характеризуется своим углом падения $\mu_0 \cos \theta_0$ и частотой ν_0 . Ясно, что и функция источников должна быть суперпозицией функций $S(\tau, \mu_0, \nu_0)$, определяемых уравнением (4.3). Поэтому если интенсивность падающего излучения равна I_0 , то функция источников этой задачи

$$S(\tau) = I_0 2\pi \int_0^1 d\mu_0 \int_0^\infty S(\tau, \mu_0, \nu_0) d\nu_0. \quad (6.1)$$

Из (4.3) следует тогда, что она определяется уравнением

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + I_0 \cdot \frac{\lambda}{2} L(\tau), \quad (6.2)$$

где

$$L(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx \int_0^1 e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} d\mu = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} G(z) dz. \quad (6.3)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$S(\tau) = I_0 [1 - \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau)], \quad (6.4)$$

где, как обычно,

$$\Psi(\tau) = 1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau') d\tau'. \quad (6.5)$$

В этом нетрудно убедиться непосредственной подстановкой (6.4) в (6.2), если воспользоваться тождеством

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) d\tau' = 1 - \frac{1}{2} L(\tau) \quad (6.6)$$

и результатами, полученными в § 6.1. Интенсивность выходящего излучения, соответствующая функции источников (6.4), как легко видеть, равна

$$I(0, \mu, x) = I_0 \left[1 - \sqrt{1 - \lambda} H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right) \right]. \quad (6.7)$$

Поясним физический смысл полученных результатов. Прежде всего перейдем от интенсивности падающего на границу излучения I_0 к температуре излучения T_r , определяемой равенством (см. § 1.1)

$$I_0 = B_{\nu_{12}}(T_r), \quad (6.8)$$

где $B_{\nu}(T)$ — функция Планка. Введем также вместо функции источников $S(\tau)$ температуру возбуждения T_{ex} , т. е. положим

$$S(\tau) = B_{\nu_{12}}(T_{ex}(\tau)). \quad (6.9)$$

Тогда (6.4) примет вид

$$B_{\nu_{12}}(T_{ex}) = B_{\nu_{12}}(T_r) [1 - \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau)]. \quad (6.10)$$

Рассмотрим наиболее интересный с астрофизической точки зрения случай, когда λ очень близко к единице. Тогда, как было указано в § 5.5, с тем большей точностью, чем ближе λ к единице,

$$\sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau) \sim \tilde{F}(t) \tilde{\xi}(\tau), \quad (6.11)$$

где

$$t = \frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \frac{1 - \lambda}{L(\tau)}. \quad (6.12)$$

Заменив здесь $\tilde{\xi}(\tau)$ на единицу, мы получим выражение, которое будет давать заметную ошибку только при малых τ . Однако сама величина $\sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau)$ при небольших τ мала, и в формуле (6.10) ею можно пренебречь по сравнению с единицей. Поэтому, подставив в (6.10) выражение (6.11) с $\tilde{\xi}(\tau) = 1$, мы получим асимптотическую формулу, которая справедлива при всех τ и тем точнее, чем ближе λ к единице:

$$B_{\nu_{12}}(T_{ex}) \sim B_{\nu_{12}}(T_r) [1 - \tilde{F}(t)] \quad (1 - \lambda \ll 1). \quad (6.13)$$

На глубинах, малых по сравнению с толщиной пограничного слоя τ_b , параметр t мал, и из последней формулы следует, что

$$T_{ex} \sim T_r \quad (\tau \ll \tau_b), \quad (6.14)$$

так как $\tilde{F}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ [см. формулу (5.5.38)]. Таким образом, при $\tau \ll \tau_b$ степень возбуждения практически не зависит от глубины и соответствует температуре возбуждения верхнего уровня относительно нижнего, равной температуре падающего на среду излучения. Начиная с глубин порядка τ_b степень возбуждения начинает падать. Ситуация здесь прямо противоположна той, с которой мы имели дело в § 6.3 при изучении самосвещающегося изотермичного газа. Там τ_b давала толщину неравновесного пограничного слоя, в котором температура возбуждения T_{ex} заметно ниже электронной температуры T_e . Теперь же, наоборот, τ_b определяет толщину слоя, в котором излучение и населенность верхнего уровня находятся в равновесии в том смыс-

ле, что $T_{ex} = T_r$. Иначе говоря, τ_b представляет собой глубину, в пределах которой между внешним излучением в непрерывном спектре и атомами среды происходит эффективное взаимодействие.

Из формулы (6.13) вытекает одно любопытное следствие: при $1 - \lambda \ll 1$ степень возбуждения зависит не от τ и λ в отдельности, а лишь от их комбинации (6.12). Иначе говоря, выполняется следующий *принцип подобия*: степень возбуждения на оптической глубине $\tau = \tau_1$ в среде с $\lambda = \lambda_1$, освещаемой излучением в непрерывном спектре, такая же, как и в среде с $\lambda = \lambda_2$ на глубине $\tau = \tau_2$, где τ_1 и τ_2 связаны соотношением

$$(1 - \lambda_2) L(\tau_1) = (1 - \lambda_1) L(\tau_2). \quad (6.15)$$

Принцип подобия выполняется тем точнее, чем ближе λ_1 и λ_2 к единице.

Когда температура падающего на среду излучения велика, в пограничных областях заметная доля атомов переходит в возбужденное состояние, и становится существенным эффект «просветления». В случае полубесконечной среды этот эффект не сказывается на распределении выходящего излучения по частотам и по углам, однако его нужно учитывать при переходе от оптических глубин к геометрическим. Соответствующая методика была изложена в § 2.5.

До сих пор считалось, что внешнее излучение является единственной причиной появления возбужденных атомов в среде. Можно исследовать и более сложные случаи, когда одновременно с внешним излучением действуют и внутренние источники. Разберем один пример.

Будем считать, что на однородный изотермичный газ кинетической температуры T_e , занимающий полупространство, падает изотропное излучение, интенсивность которого в пределах линии не зависит от частоты. Пусть температура этого излучения есть T_r . Действуют два механизма заселения верхнего уровня — электронный удар и фотовозбуждения, и два механизма ухода с него — радиативные переходы и удары второго рода. Короче говоря, сохраняются все предположения § 6.3, кроме одного: считается, что на газ падает внешнее излучение, тогда как в § 6.3 предполагалось, что такого излучения нет.

Легко понять, что функция источников в этом случае определяется следующим уравнением:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + \\ + B_{\nu_{12}}(T_r) \frac{\lambda}{2} L(\tau) + B_{\nu_{12}}(T_e)(1 - \lambda), \quad (6.16)$$

где λ по-прежнему дается формулой (3.3). Здесь последний член справа учитывает ударные возбуждения, второе слабое — фотовозбуждения под действием внешнего излучения и, наконец, интегральный член — радиативные возбуждения собственным излучением газа. Решение (6.16) является линейной комбинацией решений уравнений (6.2) и (3.1) и имеет вид

$$S(\tau) = B_{\nu_{12}}(T_r) [1 - \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau)] + B_{\nu_{12}}(T_e) \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau). \quad (6.17)$$

Наша задача состоит в выяснении характера этого решения. Чтобы придать результатам большую физическую наглядность, перейдем от функции источников $S(\tau)$ к температуре возбуждения $T_{ex}(\tau)$, т. е. положим $S = B_{\nu_{12}}(T_{ex})$. Обозначим еще через $T_{ex}^0(\tau)$ температуру возбуждения верхнего уровня в той же самой среде при отсутствии падающего извне излучения, т. е. при $T_r = 0$. Очевидно, что она определяется соотношением

$$B_{\nu_{12}}(T_{ex}^0) = B_{\nu_{12}}(T_e) \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau). \quad (6.18)$$

Если функция $\Psi(\tau)$ известна, расчет температуры возбуждения в функции τ по формуле (6.17) не представляет трудностей. Мы ограничимся лишь одним иллюстративным примером и постараемся выяснить на этом примере общий характер результатов в различных случаях. Расчеты, о которых пойдет речь, были выполнены для чисто доплеровского коэффициента поглощения при следующих значениях параметров: $1 - \lambda = 10^{-6}$; $h\nu_{12}/kT_e = 5$; $T_r/T_e = 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,5; 0,0$. Для нахождения $\Psi(\tau)$ были использованы результаты численного решения уравнения переноса, предоставленные автору Д. Хаммером (см. также Ю. Эвретт и Д. Хаммер [1]). По вычисленным значениям температуры

возбуждения $T_{ex}(\tau)$ были построены графики $T_{ex}(\tau)/T_e$ в функции $\lg \tau$, приведенные на рис. 33. Этот рисунок позволяет понять, как будут вести себя аналогичные кривые и при других значениях параметров. Существуют три области значений T_r , которым соответствуют три типа кривых на рис. 33:

1. Температура излучения T_r заметно выше электронной температуры T_e . Тогда на глубинах, по порядку много

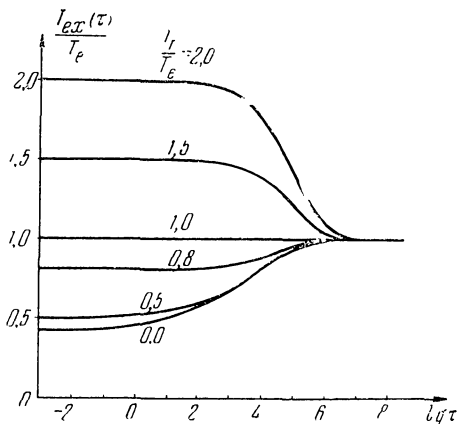


Рис. 33. Изменение с глубиной температуры возбуждения второго уровня в изотермичном газе температуры T_e , освещаемом излучением температуры T_r . Коэффициент поглощения

доплеровский, $\frac{h\nu_{12}}{kT_e} = 5$, $1 - \lambda = 10^{-6}$.

меньших толщины пограничного слоя τ_b , температура возбуждения T_{ex} практически постоянна и близка к T_r . Затем она начинает падать и в конце концов становится равной T_e (кривые, соответствующие $T_r/T_e = 2,0$ и $1,5$);

2. Температура излучения T_r ниже T_e , но заметно выше $T_{ex}^0(0)$, т. е. температуры возбуждения на границе среды, не освещаемой извне. В этом случае близ границы также существует область, где температура возбуждения близка к T_r и меняется мало. Однако размер этой области определяется теперь не толщиной пограничного слоя, а разностью

$T_e - T_r$, увеличиваясь с уменьшением этой разности. На больших глубинах температура возбуждения возрастает, приближаясь к T_e (кривые $T_r/T_e = 0,8$ и $0,5$);

3. Температура излучения T_r заметно ниже не только электронной температуры среды T_e , но и T_{ex}^0 (0). В этом случае внешнее излучение вообще не играет заметной роли в создании населенности возбужденного уровня. На всех глубинах, начиная от самой границы, $T_{ex}(\tau)$ мало отличается от $T_{ex}^0(\tau)$ (кривая $T_r/T_e = 0$).

Профиль линии, излучаемой газом, и в разбираемой сейчас задаче просто выражается через функцию $H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right)$. Не останавливаясь на этом вопросе подробно, укажем только, что если температура падающего на среду излучения T_r выше электронной температуры T_e , на фоне непрерывного спектра видна линия излучения, тем более интенсивная, чем больше разность между T_r и T_e . При $T_r = T_e$ мы имеем чисто непрерывный спектр без каких-либо следов линии, а при $T_r < T_e$ образуется линия поглощения, глубина которой возрастает с уменьшением T_r .

§ 6.7. Внутренние источники излучения других видов

Интенсивность выходящего излучения можно выразить через функцию $H(z)$ и при некоторых более сложных видах зависимости мощности источников от глубины. В этом параграфе мы разберем один такой случай, именно, тот, когда мощность источников дается произведением полинома от τ на экспоненту (В. В. Иванов и Д. И. Нагирнер [2]).

Очевидно, что достаточно выразить через $H(z)$ интенсивность выходящего излучения при

$$S^*(\tau) = S_n^*(\tau) = \tau^n e^{-\frac{\tau}{z_0}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; 0 < z_0 < \infty). \quad (7.1)$$

Обозначим соответствующую функцию источников через $S_n(\tau, z_0)$, а интенсивность выходящего излучения — через $I_n(0, z, z_0)$. Для $S_n(\tau, z_0)$ имеем следующее уравнение:

$$S_n(\tau, z_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) S_n(\tau', z_0) d\tau' + \tau^n e^{-\frac{\tau}{z_0}}. \quad (7.2)$$

Дифференцируя его по z_0 , получаем

$$\frac{\partial S_n(\tau, z_0)}{\partial z_0} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \frac{\partial S_n(\tau', z_0)}{\partial z_0} d\tau' + \frac{\tau^{n+1}}{z_0^2} e^{-\frac{\tau}{z_0}}. \quad (7.3)$$

Сравнивая эти два уравнения, заключаем, что

$$\frac{\partial S_n(\tau, z_0)}{\partial z_0} = \frac{1}{z_0^2} S_{n+1}(\tau, z_0). \quad (7.4)$$

Из формулы

$$I_n(0, z, z_0) = \int_0^{\infty} S_n(\tau, z_0) e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{d\tau}{z} \quad (7.5)$$

следует поэтому, что

$$\frac{\partial I_n(0, z, z_0)}{\partial z_0} = \frac{1}{z_0^2} I_{n+1}(0, z, z_0). \quad (7.6)$$

Из (7.2) при $n = 0$ имеем $S_0(\tau, z_0) = \frac{i\pi}{\lambda} P(\tau, z_0)$, и поэтому

$$I_0(0, z, z_0) = \frac{i\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} P(\tau, z_0) e^{-\frac{\tau}{z}} \frac{d\tau}{z}. \quad (7.7)$$

Входящий сюда интеграл уже встречался нам выше в § 6.4 [формула (4.12)]. Пользуясь полученным ранее результатом, находим

$$I_0(0, z, z_0) = \frac{H(z) H(z_0)}{z + z_0} z_0. \quad (7.8)$$

Формулы (7.6) и (7.8) дают решение поставленной задачи, выражая $I_n(0, z, z_0)$ через $H(z)$ и ее производные при любом целом $n \geq 0$. Производные же H -функции с помощью уравнения, определяющего $H(z)$, легко выражаются через $H(z)$ и интегралы от нее.

В виде примера найдем $I_1(0, z, z_0)$. Из (7.6) и (7.8) имеем

$$I_1(0, z, z_0) = z_0^2 H(z) \frac{d}{dz} \left(\frac{z_0 H(z_0)}{z + z_0} \right) = z_0^2 z \frac{H(z) H(z_0)}{(z + z_0)^2} + z_0^3 \frac{H(z)}{z + z_0} \frac{dH(z_0)}{dz_0}. \quad (7.9)$$

Из (5.4.21) следует, что

$$\frac{dH(z_0)}{dz_0} = H^2(z_0) \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \frac{zH(z)}{(z_0+z)^2} G(z) dz. \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в (7.9), находим окончательно

$$I_1(0, z, z_0) = \frac{H(z)H(z_0)}{z+z_0} z_0^2 \left[\frac{z}{z+z_0} + \frac{\lambda}{2} z_0 H(z_0) \Omega(z_0) \right], \quad (7.11)$$

где

$$\Omega(z) = \int_0^{\infty} \frac{z'H(z')}{(z+z')^2} G(z') dz'. \quad (7.12)$$

Таблица функции $\Omega(z)$ при доплеровском профиле и $\lambda = 1$ имеется в работе В. В. Иванова и Д. И. Нагирнера [2].

Рекуррентную формулу для $I_n(0, z, z_0)$ можно привести к виду, более удобному для вычислений. Поступим для этого следующим образом. Согласно (5.1.45)

$$I_n(0, z, z_0) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} \tau^n e^{-\frac{\tau}{z_0}} P(\tau, z) \frac{d\tau}{z}. \quad (7.13)$$

Умножая (5.1.35) на $\tau^n e^{-\frac{\tau}{z_0}}$ и интегрируя по τ от 0 до ∞ , после простых преобразований находим

$$I_n(0, z, z_0) = \frac{nz z_0}{z+z_0} I_{n-1}(0, z, z_0) + \frac{z_0}{z+z_0} H(z) D_n(z_0) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7.14)$$

где

$$D_n(z_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} I_n(0, z, z_0) G(z) dz. \quad (7.15)$$

Подставляя (7.14) в (7.15), для определения $D_n(z_0)$ получаем следующее соотношение:

$$D_n(z_0) = n \frac{\lambda}{2} z_0 H(z_0) \int_0^{\infty} \frac{z}{z+z_0} I_{n-1}(0, z, z_0) G(z) dz. \quad (7.16)$$

Поскольку $I_0(0, z, z_0)$ известно, формулы (7.15) и (7.16) позволяют последовательно находить I_1, I_2 и т. д. В частности, подстановка (7.8) в (7.15) и (7.16) снова приводит нас к формуле (7.11).

§ 6.8. Среднее число рассеяний

Определение среднего числа рассеяний \bar{N} , испытываемых квантом, представляет несомненный интерес. Это связано в первую очередь с тем, что произведение времени жизни атома в возбужденном состоянии на \bar{N} и на общее число квантов, поступающих в единицу времени от источников, дает полное число возбужденных атомов в среде.

Для получения \bar{N} поступим следующим образом. Рассмотрим цилиндр геометрической толщины dl , имеющий поперечное сечение 1 см^2 . Если для простоты пренебречь вынужденным излучением, то оптическая толщина такого цилиндра будет равна $d\tau = k_{ik}(v_0)n_i dl$, где $k_{ik}(v_0)$ — атомный коэффициент поглощения в центре линии, n_i — населенность нижнего уровня. В таком цилиндре за единицу времени источники поставляют $A_{ki}n_k^* dl$ квантов, где n_k^* — населенность верхнего уровня, обусловленная действием только первичных источников, без учета фотовозбуждений излучением рассматриваемой линии (см. § 2.4). Пользуясь связью n_k^* и S^* , даваемой формулой (2.4.3), находим

$$A_{ki}n_k^* dl = A_{ki} \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} \frac{g_k}{g_i} n_i S^* dl.$$

Во всем полубесконечном слое в столбе сечением 1 см^2 за единицу времени от источников приходит следующее число квантов:

$$\begin{aligned} N^* &= A_{ki} \int_0^\infty n_k^* dl = A_{ki} \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} \frac{g_k}{g_i} \int_0^\infty S^* n_i dl = \\ &= A_{ki} \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} \frac{g_k}{g_i} \frac{1}{k_{ik}(v_0)} \int_0^\infty S^*(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Однако полное число квантов, излучаемых тем же столбом, больше N^* , так как происходят многократные

рассеяния. Если населенность верхнего уровня есть n_k , то полное число квантов, излучаемых в столбе высотой dl , есть $A_{ki}n_k dl$. Пользуясь известной связью между функцией источников S и населенностями уровней, находим

$$A_{ki}n_k dl = A_{ki} \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} \frac{g_k}{g_i} n_i S dl.$$

Поэтому полное число квантов, излучаемых во всем столбе за 1 сек, равно

$$N = A_{ki} \int_0^{\infty} n_k dl, \quad (8.2)$$

можно записать также в виде

$$N = A_{ki} \frac{c^2}{2h\nu_{ik}^3} \frac{g_k}{g_i} \frac{1}{k_{ik}(\nu_0)} \int_0^{\infty} S(\tau) d\tau. \quad (8.3)$$

Очевидно, что отношение N/N^* дает среднее число рассеяний кванта \bar{N} , т. е.

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\infty} S(\tau) d\tau}{\int_0^{\infty} S^*(\tau) d\tau}. \quad (8.4)$$

Таким образом, определение среднего числа рассеяний сводится к вычислению интеграла от функции источников. Покажем, что при произвольном $S^*(\tau)$ этот интеграл просто выражается через фундаментальную функцию $\Phi(\tau)$.

Пусть источники сосредоточены в пределах бесконечно тонкого слоя, лежащего на глубине $\tau = \tau_1$, так что $S^*(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$. Функцией источников служит тогда функция Грина $G(\tau, \tau_1)$, и для определения \bar{N} нужно найти интеграл

$$\int_0^{\infty} G(\tau, \tau_1) d\tau = 1 + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau. \quad (8.5)$$

Вспользуемся соотношением (см. § 5.1)

$$\frac{\partial \Gamma(\tau, \tau_1)}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma(\tau, \tau_1)}{\partial \tau_1} = \Phi(\tau) \Phi(\tau_1). \quad (8.6)$$

Проинтегрируем это равенство по τ в пределах от 0 до ∞ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \Gamma(\tau, \tau_1)}{\partial \tau} d\tau + \frac{d}{d\tau_1} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau = \Phi(\tau_1) \int_0^{\infty} \Phi(\tau) d\tau. \quad (8.7)$$

Пользуясь тем, что

$$1 + \int_0^{\infty} \Phi(\tau) d\tau = H(\infty) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \quad (8.8)$$

и

$$\Gamma(\infty, \tau_1) = 0, \quad (8.9)$$

получаем

$$\frac{d}{d\tau_1} \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau = \frac{\Phi(\tau_1)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (8.10)$$

Отсюда находим

$$1 + \int_0^{\infty} \Gamma(\tau, \tau_1) d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 + \int_0^{\tau_1} \Phi(\tau) d\tau \right), \quad (8.11)$$

так что при $S^*(\tau) = \delta(\tau - \tau_1)$

$$\bar{N} = \frac{\Psi(\tau_1)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (8.12)$$

В силу линейности основного интегрального уравнения функция $S(\tau)$ при произвольном распределении источников получается из $G(\tau, \tau_1)$ простым интегрированием:

$$S(\tau) = \int_0^{\infty} S^*(\tau_1) G(\tau, \tau_1) d\tau_1, \quad (8.13)$$

и поэтому среднее число рассеяний \bar{N} оказывается равным

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\infty} S^*(\tau) \Psi(\tau) d\tau}{\sqrt{1-\lambda} \int_0^{\infty} S^*(\tau) d\tau}. \quad (8.14)$$

Следует обратить внимание на то, что среднее число рассеяний кванта, начавшего свой путь в среде на глубине τ_1 , даваемое формулой (8.12), с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией источников для среды с равномерно распределенными в ней первичными источниками (см. § 6.1 и 6.3). Поэтому анализ, проведенный в § 6.3, можно целиком перенести и на разбираемую сейчас задачу. В частности, оказывается, что до тех пор, пока τ_1 по порядку величины меньше толщины пограничного слоя τ_b , среднее число рассеяний довольно быстро возрастает с τ_1 . Когда источники находятся на границе ($\tau_1 = 0$), средняя кратность рассеяния минимальна и равна $(1 - \lambda)^{-1/2}$. Рост \bar{N} с τ_1 замедляется, когда τ_1 становится порядка τ_b , а при $\tau_1 \gg \tau_b$ вообще практически прекращается. При этом \bar{N} оказывается близким к своему значению для бесконечной среды, равному $(1 - \lambda)^{-1}$.

Увеличение \bar{N} с ростом τ_1 объясняется весьма просто. Существуют две причины, вызывающие выбывание квантов из процесса многократных рассеяний. Одна из них — это гибель квантов при рассеяниях за счет неупругих процессов, превращения в кванты других линий и т. п. Поскольку λ считается не зависящим от τ , этот механизм действует на всех глубинах с одинаковой эффективностью. Второй причиной, ограничивающей число рассеяний, служит выход квантов из среды. Очевидно, что эффективность этого механизма выбывания квантов из процесса рассеяний убывает с удалением от границы. Это и ведет к тому, что \bar{N} возрастает с увеличением глубины расположения источников.

При чистом рассеянии \bar{N} оказывается бесконечным. В действительности среднее число рассеяний всегда конечно, так как всегда есть процессы, вызывающие гибель квантов при рассеяниях (удары второго рода, фотоионизации из возбужденного состояния и т. п.), так что в чистом виде консервативный случай никогда не осуществляется.

В тех случаях, когда интенсивность выходящего излучения выражается через H -функцию, через нее можно выразить и \bar{N} . В виде примера возьмем экспоненциальное распределение источников:

$$S^*(\tau) = e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (8.15)$$

Подставляя это выражение для $S^*(\tau)$ в (8.14), после простых преобразований получаем

$$\bar{N} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \left(1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau) d\tau \right). \quad (8.16)$$

Воспользовавшись связью между преобразованием Лапласа от $\Phi(\tau)$ и H -функцией (см. § 5.1), находим окончательно

$$\bar{N} = \frac{H(z)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (8.17)$$

Это выражение уже было получено в § 6.4 другим путем. Теперь мы нашли его как следствие общей формулы (8.14). Вычисление \bar{N} по формуле (8.17) не составляет никакого труда, так как значения $H(z)$ для коэффициентов поглощения важнейших видов известны (см. § 5.6 и 5.7).

При

$$S^*(\tau) = \tau e^{-\frac{\tau}{z}} \quad (8.18)$$

среднее число рассеяний оказывается равным

$$\bar{N} = \frac{H(z)}{\sqrt{1-\lambda}} \left[1 + \frac{\lambda}{2} z H(z) \Omega(z) \right], \quad (8.19)$$

где $\Omega(z)$ дается формулой (7.12). На доказательстве этого соотношения мы останавливаться не будем.

Все соотношения, полученные в этом параграфе, справедливы при произвольном профиле коэффициента поглощения, в том числе прямоугольном (монохроматическое рассеяние). Это следует из того, что конкретный вид функции $G(z)$ нигде не использовался.

В § 8.9 мы еще возвратимся к вопросу о расчете среднего числа рассеяний. Будет учтено влияние непрерывного поглощения и конечности оптической толщины среды, а также указан ряд статей, специально посвященных определению \bar{N} .

Глава VII

РАССЕЯНИЕ В ЛИНИИ С УЧЕТОМ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ

До сих пор при решении уравнения переноса считалось, что излучение в частотах рассматриваемой линии выбывает из процесса многократных рассеяний либо выходя из среды, либо претерпевая «истинное» поглощение *при рассеяниях* (за счет ударов второго рода, переизлучения в других линиях и т. п.). Возможность гибели квантов *в полете* не принималась во внимание. Наиболее важным процессом, приводящим к такой гибели, является ионизация атомов излучением исследуемой линии. Так же действует и поглощение линейчатого излучения макроскопическими частицами (например, частицами межзвездной пыли).

Другим важным процессом, которым мы до сих пор также пренебрегали при решении уравнения переноса, является собственное излучение среды в непрерывном спектре. Оно приводит к появлению континуума, на фоне которого обычно и видны линии. Это излучение может поглощаться атомами, вызывая переходы между дискретными уровнями. Тем самым оно становится дополнительным источником возбуждения атомов.

Уравнение переноса с учетом процессов излучения и поглощения в непрерывном спектре было выведено в § 1.6. В § 2.3 были рассмотрены частные виды этого уравнения, соответствующие средам плоской и сферической геометрии. Наконец, в § 2.4 была приведена интегральная форма уравнения переноса, непосредственно выражающая условие стационарности. Теперь мы получим решения этих уравнений для нескольких простейших случаев. На протяжении всей главы будет предполагаться, что вероятность выжи-

вания кванта при рассеянии λ , отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии β и профиль коэффициента поглощения в линии $\alpha(x)$ не зависят от координат. Предполагается также, что вынужденным излучением можно пренебречь.

Многие из приводимых в этой главе результатов были получены в диссертации Д. И. Нагирнера (1966 г., не опубликовано; см. также Д. И. Нагирнер [3]). Важные сведения содержатся также в работе Д. Хаммера [5].

§ 7.1. Ядра интегральных уравнений и связанные с ними функции

Решению уравнения переноса излучения в частотах линии с учетом поглощения и излучения в непрерывном спектре полезно предпослать исследование свойств ядра соответствующего интегрального уравнения для функции источников и ряда связанных с ним функций.

В § 2.4 были введены следующие две функции:

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[(\alpha(x) + \beta)\tau] dx, \quad (1.1)$$

$$K_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_1[(\alpha(x) + \beta)\tau] dx. \quad (1.2)$$

Через первую из них выражается ядро основного интегрального уравнения для сред с плоской и сферической геометрией, тогда как вторая входит в член уравнения, описывающий возбуждение атомов под действием излучения среды в непрерывном спектре. Обозначим также

$$L(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2(x)}{\alpha(x) + \beta} E_2[(\alpha(x) + \beta)\tau] dx, \quad (1.3)$$

$$L_0(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta} E_2[(\alpha(x) + \beta)\tau] dx. \quad (1.4)$$

При $\beta \rightarrow 0$ функции $K(\tau, \beta)$ и $L(\tau, \beta)$ переходят соответственно в функции $K(\tau)$ и $L(\tau)$, подробно исследованные в

§ 2.6 и 2.7, $K_0(\tau, \beta)$ превращается в $N_{11}(\tau)$, а $L_0(\tau, \beta)$ стремится к бесконечности.

Аргументация, использованная в § 5.2 при выяснении физического смысла $K(\tau)$ и $L(\tau)$, сохраняет силу и для сред с непрерывным поглощением. Оказывается, что $\frac{\lambda}{2} K(\tau, \beta) d\tau$ есть вероятность того, что возбужденный атом излучит квант и этот квант поглотится затем в первый раз где-то в слое толщиной $d\tau$, находящемся на расстоянии τ от излучающего атома, вызвав в этом слое возбуждение атома. Отсюда следует, что величина

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau|, \beta) d\tau = \lambda \int_0^{\infty} K(\tau, \beta) d\tau, \quad (1.5)$$

равная, согласно (1.1),

$$\tilde{\lambda} = \lambda A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2(x)}{\alpha(x) + \beta} dx, \quad (1.6)$$

представляет собой вероятность того, что в бесконечной среде за первоначальным актом возбуждения атома последует излучение кванта и этот квант затем где-то снова возбудит атом. Понятно, что эта величина должна играть важную роль во всех задачах о переносе излучения в линии с учетом непрерывного поглощения, определяя (наряду с геометрией среды) роль многократных рассеяний. Зависимость $\tilde{\lambda}$ от β для коэффициентов поглощения различных видов подробно рассматривается в § 7.3.

Покажем, что ядро $K(\tau, \beta)$ можно представить в форме

$$K(\tau, \beta) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (1.7)$$

Дифференцируя (1.1) по τ и учитывая соотношение

$$E_1'(t) = -\frac{e^{-t}}{t},$$

находим

$$\frac{\partial K(\tau, \beta)}{\partial \tau} = -e^{-\beta\tau} \frac{A}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) e^{-\alpha(x)\tau} dx, \quad (1.8)$$

или

$$\frac{\partial K(\tau, \beta)}{\partial \tau} = e^{-\beta\tau} \frac{dK(\tau)}{d\tau}. \quad (1.9)$$

Но из (2.6.16) следует, что

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = - \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} G(z') \frac{dz'}{z'^2}. \quad (1.10)$$

Подставляя это выражение в (1.9) и интегрируя, получаем

$$K(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} \frac{G(z')}{1 + \beta z'} \frac{dz'}{z'}. \quad (1.11)$$

Замена $z' = \frac{z}{1 - \beta z}$ приводит (1.11) к виду (1.7).Для $K_0(\tau, \beta)$ можно также получить представление в виде суперпозиции экспонент. В § 2.6 было показано, что функцию

$$N_{11}(\tau) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) E_1[\alpha(x)\tau] dx \quad (1.12)$$

можно представить так:

$$N_{11}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} G_0(z') \frac{dz'}{z'}, \quad (1.13)$$

где $G_0(z)$ определяется формулами (2.6.12) и (2.6.13). Исходя из этого и дословно повторяя рассуждения, которые привели нас к формулам (1.11) и (1.7), находим

$$K_0(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} \frac{G_0(z')}{1 + \beta z'} \frac{dz'}{z'}, \quad (1.14)$$

или

$$K_0(\tau, \beta) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) \frac{dz}{z}, \quad (1.15)$$

Очевидно, что

$$L(\tau, \beta) = \int_{\tau}^{\infty} K(\tau', \beta) d\tau'. \quad (1.16)$$

Такая же связь существует и между функциями K_0 и L_0 . Пользуясь ею, получаем

$$L(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} \frac{G(z')}{(1 + \beta z')^2} dz' = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz, \quad (1.17)$$

$$L_0(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z'}} \frac{G_0(z')}{(1 + \beta z')^2} dz' = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz. \quad (1.18)$$

Полагая в (1.17) $\tau = 0$ и учитывая (1.16) и (1.5), находим

$$\tilde{\lambda} = \lambda L(0, \beta) = \lambda \int_0^{\infty} \frac{G(z')}{(1 + \beta z')^2} dz' = \lambda \int_0^{\frac{1}{\beta}} G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz. \quad (1.19)$$

Обычно коэффициент поглощения в непрерывном спектре много меньше коэффициента поглощения в центре линии, т. е. $\beta \ll 1$. Значения β порядка $10^{-4} \div 10^{-8}$ являются скорее правилом, чем исключением. Малость β очень сильно упрощает дело. В частности, она позволяет выразить введенные выше функции через их предельные значения, соответствующие $\beta = 0$. Вообще при $\beta \ll 1$ непрерывное поглощение может рассматриваться как малое возмущение. Правда, как мы вскоре убедимся, эффекты, вызываемые этим малым возмущением, часто оказываются большими.

Рассмотрим ядро $K(\tau, \beta)$ при $\beta \ll 1$. Замена $\frac{\tau}{z'} = y$ приводит (1.11) к виду

$$K(\tau, \beta) = e^{-\beta\tau} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{G\left(\frac{\tau}{y}\right)}{y + \beta\tau} dy. \quad (1.20)$$

С помощью (2.6.49) находим отсюда, что при $\tau \gg 1$

$$K(\tau, \beta) \sim e^{-\beta\tau} \frac{2A}{2\gamma+1} \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-y} \frac{x'(\frac{\tau}{y})}{y+\beta\tau} y dy. \quad (1.21)$$

Учитывая (2.6.37) и (2.6.41), имеем

$$K(\tau, \beta) \sim e^{-\beta\tau} \frac{2A}{2\gamma+1} \frac{x'(\tau)}{\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma+1}}{y+\beta\tau} dy. \quad (1.22)$$

Но, как было показано в § 2.6, при $\tau \gg 1$

$$K(\tau) \sim 2A \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{2\gamma+1} \frac{x'(\tau)}{\tau}. \quad (1.23)$$

Поэтому (1.22) можно переписать в виде

$$K(\tau, \beta) \sim K(\tau) e^{-\beta\tau} k(\beta\tau) \quad (\beta \ll 1), \quad (1.24)$$

где

$$k(s) = \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma+1}}{y+s} dy. \quad (1.25)$$

Когда $\beta \ll 1$, формула (1.24) справедлива при всех τ . Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что (1.24) выполняется при всех τ , совместимых с неравенством $\beta\tau \ll 1$, а не только при $1 \ll \tau \ll \beta^{-1}$. При $\beta\tau \ll 1$ (1.24) и (1.25) дают

$$K(\tau, \beta) \sim K(\tau) \quad (\tau \ll \beta^{-1}), \quad (1.26)$$

что совпадает с результатом, получающимся непосредственно из (1.11). Этим и доказывается наше утверждение. В противоположном предельном случае $\beta\tau \gg 1$ находим из (1.24) и (1.25), что

$$K(\tau, \beta) \sim (2\gamma+1) \frac{K(\tau)}{\beta\tau} e^{-\beta\tau} \quad (\tau \gg \beta^{-1}). \quad (1.27)$$

Таким образом, наличие даже очень слабого поглощения приводит к тому, что при достаточно больших τ ядро интегрального уравнения для функции источников становится экспоненциально убывающим (точнее говоря, оно стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ как $\frac{x'(\tau)}{\tau^2} e^{-\beta\tau}$).

Формула (1.24) показывает, что при $\beta \ll 1$ ядро $K(\tau, \beta)$, являющееся функцией двух переменных, выражается через функции одной переменной. Впрочем, здесь нужно сделать одну оговорку. При фойгтовском профиле представление (1.24) с $k(\beta\tau)$, даваемым формулой (1.25) при $\gamma = 1/4$, применимо лишь тогда, когда $\beta\tau$ становится порядка единицы в той области, где для $K(\tau)$ уже можно пользоваться фойгтовскими асимптотиками. Эта область определяется неравенством $\tau \gg a^{-1}$, где a — параметр функции Фойгта (см. § 2.7). Поэтому оказывается, что при фойгтовском профиле формулы (1.24) и (1.25) применимы лишь при $\beta \ll a$ (практически при $\beta \lesssim 0,01a$).

Поступая аналогичным образом, из (1.14) получаем

$$K_0(\tau, \beta) \sim N_{II}(\tau) e^{-\beta\tau} k_0(\beta\tau), \quad (1.28)$$

где

$$k_0^-(s) = \frac{1}{\Gamma(2\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma} dy}{y+s}, \quad (1.29)$$

тогда как (1.17) дает

$$L(\tau, \beta) \sim L(\tau) e^{-\beta\tau} l(\beta\tau), \quad (1.30)$$

где

$$l(s) = \frac{1}{\Gamma(2\gamma)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} y^{2\gamma+1} dy}{(y+s)^2}. \quad (1.31)$$

Заметим, что

$$k_0^-(s) = \frac{2\gamma}{s} [1 - k(s)]. \quad (1.32)$$

При доплеровском профиле

$$k(s) = 1 - s + s^2 e^s E_1(s); \quad k_0(s) = 1 - s e^s E_1(s);$$

$$l(s) = 1 - 2s e^s E_1(s) + s e^s E_2(s).$$

Наглядное представление о поведении ядра $K(\tau, \beta)$ при разных β можно получить из рис. 34—36, заимствованных из работы Ю. Эвретта и Р. Лёзера [1]. В этой работе даются таблицы $AK\left(A\tau, \frac{\beta}{A}\right)$ и $K_0\left(A\tau, \frac{\beta}{A}\right)$ для доплеровского ($a = 0$) и фойгтовского ($a = 10^{-3}$ и 10^{-2}) профилей, а также коэффициенты приближенного представления этих функций в виде сумм экспонент.

Наряду с функциями K и L важную роль играют еще две функции, а именно:

$$V(u, \beta) = \int_0^{\infty} K(\tau, \beta) \cos u\tau \, d\tau, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{U}(z, \beta) = \frac{1}{2} \bar{K}\left(\frac{1}{z}, \beta\right) + \frac{1}{2} \bar{K}\left(-\frac{1}{z}, \beta\right), \quad (1.34)$$

где $\bar{K}(s, \beta)$ — одностороннее преобразование Лапласа ядра

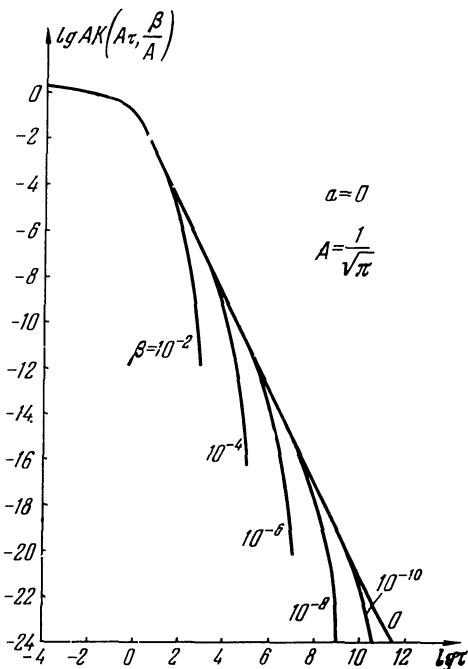


Рис. 34. Функции $K(\tau, \beta)$ при доплеровском профиле.

$K(\tau, \beta)$ по переменной τ :

$$\bar{K}(s, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} K(\tau, \beta) \, d\tau. \quad (1.35)$$

Они связаны между собой следующим образом:

$$V(u, \beta) = \mathcal{U}\left(\frac{i}{u}, \beta\right). \quad (1.36)$$

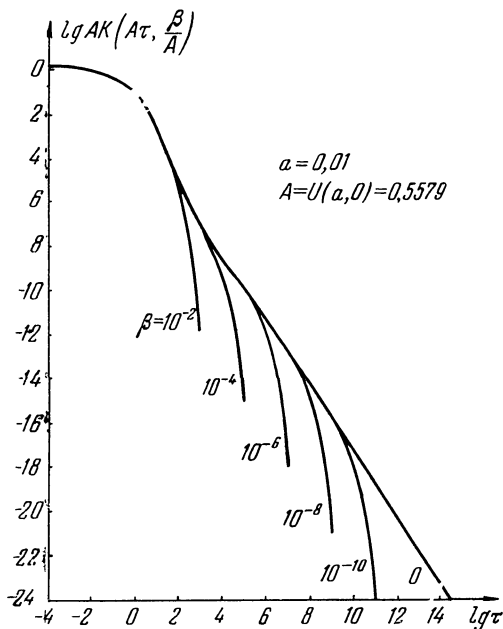


Рис. 35. Функции $K(\tau, \beta)$ при фойгтовском профиле с $a = 10^{-3}$.

С помощью (1.7) находим, что

$$V(u, \beta) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{1+u^2 z^2} = \int_0^{\infty} \frac{G(z') dz'}{(1+\beta z')^2 + u^2 z'^2}, \quad (1.37)$$

$$\mathcal{U}(z, \beta) = z^2 \int_0^{\frac{1}{\beta}} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z^2 - z'^2} = z^2 \int_0^{\infty} \frac{G(z') dz'}{z^2 (1+\beta z')^2 - z'^2}. \quad (1.38)$$

тогда как подстановка (1.1) в (1.33) и (1.34) дает

$$V(u, \beta) = \frac{A}{u} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \operatorname{arctg} \frac{u}{\alpha(x) + \beta} dx, \quad (1.39)$$

$$\mathcal{U}(z, \beta) = z \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) \ln \frac{z(\alpha(x) + \beta) + 1}{z(\alpha(x) + \beta) - 1} dx. \quad (1.40)$$

При вещественных z с $|z| < \beta^{-1}$ величину, стоящую под знаком логарифма, следует брать по модулю, а интегралы в 1.38) понимать в смысле главного значения.

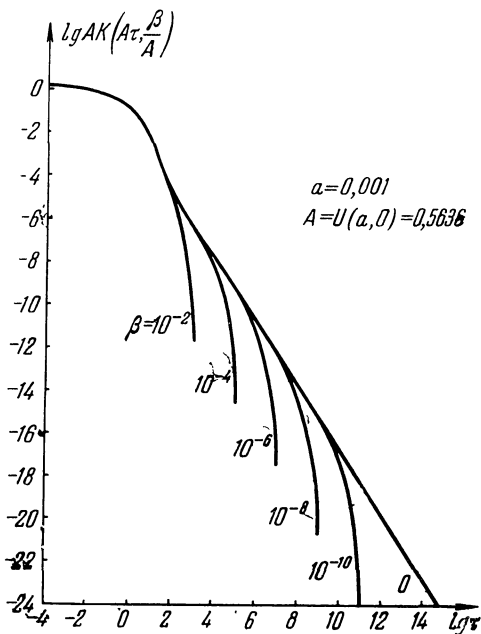


Рис. 36. Функции $K(\tau, \beta)$ при фойгтовском профиле с $a = 10^{-2}$.

Для исследования асимптотического поведения решений уравнения переноса нужно иметь асимптотики $V(u, \beta)$

и $\mathcal{U}(z, \beta)$ при $u \ll 1$ и $z \gg 1$ соответственно. При фойгтовском профиле их можно получить, например, так. Из (1.37) имеем

$$V(u, \beta) = 1 - \int_0^{\infty} \frac{2\beta z' + (\beta^2 + u^2) z'^2}{(1 + \beta z')^2 + u^2 z'^2} G(z') dz'. \quad (1.41)$$

Когда β и u одновременно малы, основной вклад в интеграл в правой части дают значения подынтегральной функции при больших z' . Поэтому $G(z')$ можно заменить главным членом асимптотики (2.7.27), так что

$$V_V(u, \beta) \sim 1 - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{aU(a, 0)}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{2\beta z' + (\beta^2 + u^2) z'^2}{(1 + \beta z')^2 + u^2 z'^2} \frac{dz'}{z'^{3/2}}. \quad (1.42)$$

Вычисляя входящий сюда интеграл, окончательно получаем

$$V_V(u, \beta) \sim 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\pi aU(a, 0)} \frac{\sqrt{u^2 + \beta^2 + 2\beta}}{(\sqrt{u^2 + \beta^2 + \beta})^{3/2}}. \quad (1.43)$$

Эта формула справедлива при $u \ll 1$, $\beta \ll 1$ и произвольном значении отношения $\frac{\beta}{u}$. При $\beta/u \rightarrow 0$ она дает главный член разложения $1 - V_V(u)$ при $u \ll 1$, полученного в § 2.7 [формула (2.7.34)]. Из (1.38) аналогичным образом находим, что при $z \gg 1$ и $\beta \ll 1$, удовлетворяющих условию $\beta z \ll 1$,

$$\mathcal{U}_V(z, \beta) \sim 1 - \frac{1}{3} \sqrt{\pi aU(a, 0)} \frac{(1 + \beta z)^{3/2}}{\sqrt{z}}. \quad (1.44)$$

Асимптотики функций $V(u, \beta)$ и $\mathcal{U}(z, \beta)$ при лоренцовском профиле получаются из (1.43) и (1.44) переходом к пределу $a \rightarrow \infty$. При этом следует учесть, что $aU(a, 0) \rightarrow \frac{1}{\pi}$ при $a \rightarrow \infty$.

Асимптотик, соответствующих доплеровскому профилю, мы не приводим, так как они имеют очень громоздкий вид и мало чем могут помочь при изучении асимптотического поведения решений уравнения переноса.

§ 7.2. Бесконечная среда

В качестве первой стандартной задачи о рассеянии с учетом поглощения в непрерывном спектре рассмотрим бесконечную однородную среду с изотропным точечным источником, излучение которого распределено по частотам пропорционально $\alpha(x)$. Расчет функции источников сводится в этом случае к решению уравнения (см. § 2.4)

$$S_p(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{\exp\{-\beta|\tau - \tau'|\} M_2(|\tau - \tau'|)}{|\tau - \tau'|^2} \times \\ \times S_p(\tau', \lambda, \beta) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\beta\tau} \frac{M_2(\tau)}{\tau^2}, \quad (2.1)$$

где $\tau = |\tau|$ и интегрирование распространяется на все пространство τ' . При $\beta = 0$ (2.1) переходит в уравнение, подробно изученное в гл. IV. Главной задачей будет обсуждение тех новых эффектов, которые появляются при учете поглощения в непрерывном спектре, а также выяснение границ применимости развитой в предыдущих главах теории, основанной на предположении об отсутствии поглощения в непрерывном спектре.

Как и в случае $\beta = 0$, введем функцию Φ_∞ , связанную с S_p соотношением

$$S_p(\tau, \lambda, \beta) = -\frac{1}{2\pi\tau} \frac{d}{d\tau} \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) \quad (2.2)$$

и удовлетворяющую уравнению

$$\Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) \Phi_\infty(\tau', \lambda, \beta) d\tau' + \\ + \frac{\lambda}{2} K(|\tau|, \beta). \quad (2.3)$$

Относительно физического смысла $\Phi_\infty(\tau)$ см. § 3.6.

Применяя к (2.3) двустороннее преобразование Лапласа по τ и пользуясь теоремой о свертке, получаем

$$\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta) + \bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda, \beta) = T^{-1}\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) - 1, \quad (2.4)$$

где

$$T\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(s, \beta) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-s, \beta), \quad (2.5)$$

а черта сверху означает, как и в предыдущих главах, одно-стороннее преобразование Лапласа по пространственной переменной.

Исследуем функцию, стоящую в правой части (2.4). В силу (1.11)

$$\bar{K}(s, \beta) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} K(\tau, \beta) d\tau = \int_0^{\infty} \frac{G(z) dz}{(1 + \beta z)(1 + \beta z + sz)}. \quad (2.6)$$

Подстановка $t = (1 + \beta z)/z$ дает

$$\bar{K}(s, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{G\left(\frac{1}{t - \beta}\right)}{t(t + s)} dt. \quad (2.7)$$

Итак, $\bar{K}(s, \beta)$ есть интеграл типа Коши. Из (2.7) заключаем, что функция $\bar{K}(s, \beta)$ регулярна на плоскости комплексной переменной s с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\beta$. Из (2.5) теперь видно, что $T(1/s)$ регулярна на плоскости s с разрезами по вещественной оси от $-\infty$ до $-\beta$ и от β до ∞ . Покажем, что в области регулярности она не обращается в нуль. Корни $T(1/s)$ могут лежать только на вещественной оси. Действительно, из (2.5) и (2.6) имеем

$$T\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) = 1 - \lambda \int_0^{\infty} \frac{G(z) dz}{(1 + \beta z)^2 - s^2 z^2}. \quad (2.8)$$

При $s = x + iy$ с $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в силу положительности $G(z)$ мнимая часть интеграла не может обратиться в нуль, а при $s = iy$ из (2.8) следует, что $T(1/s) > 1 - \lambda \geq 0$, чем и доказывается это утверждение. Чтобы показать, что $T(1/s) \neq 0$ также и при вещественных s , лежащих в области регулярности ($-\beta < s < \beta$), перепишем (2.8) в виде

$$T\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) = 1 - \lambda \int_0^{\infty} \frac{G(z) dz}{1 + 2\beta z + z^2(\beta^2 - s^2)}. \quad (2.9)$$

Так как $G(z) > 0$, в рассматриваемой области значений s при $\beta > 0$

$$\int_0^{\infty} \frac{G(z) dz}{1 + 2\beta z + z^2(\beta^2 - s^2)} < \int_0^{\infty} \frac{G(z) dz}{1 + 2\beta z} < \int_0^{\infty} G(z) dz = 1.$$

Следовательно, $T\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) > 1 - \lambda \geq 0$, что и доказывает отсутствие корней (Д. И. Нагирнер, 1966; не опубликовано; Ю. Ю. Абрамов, А. М. Дыхне, А. П. Напартович [2]).

Поскольку $\Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta)$ стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, функция $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta)$ должна быть регулярна при $\operatorname{Re} s > 0$. Однако в силу доказанных сейчас свойств функции $T(1/s)$ правая часть в (2.4) регулярна в полосе $-\beta < \operatorname{Re} s < \beta$. Значит, $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta)$ регулярна в более широкой области, а именно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > -\beta$. Поэтому $\bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda, \beta)$ регулярна при $\operatorname{Re} s < \beta$.

Из (2.4), не находя $\Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta)$ в явном виде, можно получить моменты $\Phi_\infty(\tau)$ четных порядков. Оказывается, что они выражаются через соответствующие моменты ядра $K(\tau, \beta)$. В области регулярности $\bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta)$ (т. е. при $\operatorname{Re} s > -\beta$) имеем

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta) &\equiv \int_0^\infty e^{-s\tau} \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau = \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau - \\ &- s \int_0^\infty \tau \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau + \frac{s^2}{2} \int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau - \dots \end{aligned}$$

Поэтому в полосе $-\beta < \operatorname{Re} s < \beta$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_\infty(s, \lambda, \beta) + \bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda, \beta) &= \\ &= 2 \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau + s^2 \int_0^\infty \tau^2 \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) d\tau + \dots \quad (2.10) \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \bar{K}(s, \beta) &\equiv \int_0^\infty e^{-s\tau} K(\tau, \beta) d\tau = \\ &= \int_0^\infty K(\tau, \beta) d\tau - s \int_0^\infty \tau K(\tau, \beta) d\tau + \frac{s^2}{2} \int_0^\infty \tau^2 K(\tau, \beta) d\tau - \dots, \end{aligned}$$

так что согласно (2.5)

$$T\left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta\right) = 1 - \lambda \int_0^\infty K(\tau, \beta) d\tau - s^2 \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \tau^2 K(\tau, \beta) d\tau + \dots$$

Отсюда

$$T^{-1} \left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta \right) = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}} + s^2 \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \tau^2 K(\tau, \beta) d\tau}{(1 - \tilde{\lambda})^2} + \dots, \quad (2.11)$$

где $\tilde{\lambda}$ дается (1.5) или (1.6). Подставляя (2.10) и (2.11) в (2.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях s в левой и правой части, находим, что

$$2 \int_0^{\infty} \Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) d\tau = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}} - 1, \quad (2.12)$$

$$\int_0^{\infty} \tau^2 \Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) d\tau = \frac{\frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \tau^2 K(\tau, \beta) d\tau}{(1 - \tilde{\lambda})^2}. \quad (2.13)$$

Подобные выражения можно получить и для моментов более высоких порядков. Заметим, что с помощью (2.2) соотношение (2.12) можно переписать в виде

$$1 + 4\pi \int_0^{\infty} \tau^2 S_p(\tau, \lambda, \beta) d\tau = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}}. \quad (2.14)$$

В предельном случае $\beta = 0$ все моменты $\Phi_{\infty}(\tau)$, кроме нулевого, расходятся, что связано с медленным убыванием $K(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Разумеется, это не относится к случаю прямоугольного профиля, который при $\beta = 0$ дает обычное монохроматическое рассеяние. Соотношения (2.12) и (2.13) переходят при этом соответственно в (3.3.9) и (3.3.10).

Найдем теперь явное выражение для $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta)$. Из (2.4) имеем

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \left[T^{-1} \left(\frac{1}{s}, \lambda, \beta \right) - 1 - \bar{\Phi}_{\infty}(-s, \lambda, \beta) \right] e^{s\tau} ds. \quad (2.15)$$

Чтобы получить $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta)$ при $\tau > 0$, заметим, что функция, стоящая в квадратных скобках, регулярна в левой полуплоскости с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-\beta$. Поэтому контур интегрирования можно сместить

влево и деформировать, заменив интегрирование вдоль мнимой оси интегрированием по контуру, показанному на рис. 37. Интеграл по дугам окружности большого радиуса R с центром в начале координат при $R \rightarrow \infty$ стремится

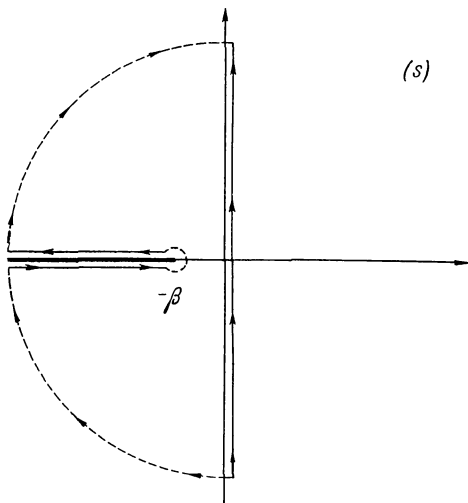


Рис. 37. Контур интегрирования при вычислении функции источников для рассеяния с полным перераспределением по частотам при учете поглощения в непрерывном спектре.

к нулю. Интеграл по окружности малого радиуса r с центром в точке $s = -\beta$ при $r \rightarrow 0$ также стремится к нулю (эти части контура показаны на рисунке пунктиром). Поэтому интеграл вдоль мнимой оси равен интегралу по берегам разреза $(-\infty, -\beta]$. Учитывая регулярность $\bar{\Phi}_\infty(-s, \lambda, \beta)$ при $\text{Re } s < 0$, находим

$$\begin{aligned} \Phi_\infty(\tau, \lambda, \beta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\beta} T^{-1}\left(\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) e^{x\tau} dx + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta}^{-\infty} T_+^{-1}\left(\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) e^{x\tau} dx, \end{aligned}$$

или

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta}^{\infty} \left[T^{-1}\left(-\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) - T_{+}^{-1}\left(-\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) \right] e^{-x\tau} dx, \quad (2.16)$$

где

$$T_{\pm}\left(\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) = T\left(\frac{1}{x \pm i0}, \lambda, \beta\right). \quad (2.17)$$

Из (2.5) при $x > \beta$ имеем

$$T_{\pm}\left(-\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-x \pm i0, \beta) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(x, \beta).$$

Принимая во внимание (2.7) и пользуясь известными выражениями для граничных значений интегралов типа Коши, получаем

$$T_{\pm}\left(-\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) = 1 - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(-x, \beta) - \frac{\lambda}{2} \bar{K}(x, \beta) \pm \frac{\lambda}{2} i\pi G\left(\frac{1}{x-\beta}\right) \frac{1}{x},$$

или

$$T_{\pm}\left(-\frac{1}{x}, \lambda, \beta\right) = 1 - \lambda \mathcal{U}\left(\frac{1}{x}, \beta\right) \pm \frac{\lambda}{2} i\pi G\left(\frac{1}{x-\beta}\right) \frac{1}{x}, \quad (2.18)$$

где $\mathcal{U}(1/x, \beta)$ дается формулой (1.38). Вводя (2.18) в (2.16), полагая $z = 1/x$ и учитывая четность $\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta)$, получаем

$$\Phi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} R(z, \lambda, \beta) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z}, \quad (2.19)$$

где

$$R(z, \lambda, \beta) = \left\{ [1 - \lambda \mathcal{U}(z, \beta)]^2 + \left[\lambda \frac{\pi}{2} z G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \right]^2 \right\}^{-1} \quad (2.20)$$

и $\mathcal{U}(z, \beta)$ дается формулой (1.38). Из (2.19) и (2.2) находим окончательно, что

$$S_p(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi\tau} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} R(z, \lambda, \beta) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z^2}. \quad (2.21)$$

Эта формула принадлежит Д. И. Нагирнеру. При $\beta \rightarrow 0$ (2.19) и (2.21) переходят соответственно в (4.1.18) и (4.1.20).

Полученные выражения едва ли можно назвать простыми. Использование их для расчета функции источников не намного проще прямого численного решения основного интегрального уравнения. Однако они важны в том отношении, что позволяют сравнительно просто исследовать зависимость решения от параметров задачи λ и β и выделить все случаи, когда возникают те или иные упрощения. Относящиеся к этому вопросы обсуждаются в двух ближайших параграфах.

§ 7.3. Длина термализации

Как было выяснено в § 4.5, при рассеянии в средах без поглощения в непрерывном спектре ($\beta = 0$) существует некоторая характерная длина — так называемая длина термализации, являющаяся мерой оптического расстояния от места рождения кванта до места его гибели. Определение длины термализации, использованное в § 4.5, очевидным образом обобщается на среды с поглощением в непрерывном спектре. Обозначим

$$\Psi_{\infty}(\tau, \lambda, \beta) = 1 + 4\pi \int_0^{\tau} S_p(\tau', \lambda, \beta) \tau'^2 d\tau'. \quad (3.1)$$

Функция Ψ_{∞} монотонно возрастает от единицы при $\tau = 0$ до

$$\Psi_{\infty}(\infty, \lambda, \beta) = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}}, \quad (3.2)$$

где $\tilde{\lambda}$ дается формулой (1.6). Последнее равенство есть не что иное, как формула (2.14), записанная в иных обозначениях. Обозначим, как и в § 4.5,

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau) \equiv \Psi_{\infty}(\tau, 1, 0) \quad (3.3)$$

и назовем длиной термализации τ_t корень уравнения

$$\tilde{S}_{\infty}(\tau_t) = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}}. \quad (3.4)$$

Длина термализации есть, грубо говоря, то оптическое

расстояние от источника, на котором $\Psi_\infty(\tau, \lambda, \beta)$ приближается к своему асимптотическому значению при $\tau = \infty$.

Поскольку $\tilde{\lambda}$ зависит как от λ , так и от β , длина термализации, вообще говоря, есть функция обоих этих параметров. Однако существуют предельные случаи, когда зависимость от одной из этих величин практически исчезает. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Из (1.6) имеем

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda\beta\delta(\beta), \quad (3.5)$$

где

$$\delta(\beta) \equiv A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta} dx = L_0(0, \beta). \quad (3.6)$$

Полагая здесь $\alpha(x) = \frac{1}{t}$, находим

$$\delta(\beta) = 2A \int_1^{\infty} \frac{x'(t) dt}{1 + \beta t}, \quad (3.7)$$

где функция $x(t)$ такова, что $\alpha(x(t)) = \frac{1}{t}$, причем $x(t) \geq 0$.

Интегрированием по частям из (3.7) получаем

$$\delta(\beta) = 2A\beta \int_1^{\infty} \frac{x(t) dt}{(1 + \beta t)^2}. \quad (3.8)$$

Изучим поведение $\delta(\beta)$ при малых β . Из (3.8) видно, что оно определяется поведением $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Перепишем (3.8) в форме

$$\delta(\beta) = 2A \int_{\beta}^{\infty} x\left(\frac{u}{\beta}\right) \frac{du}{(1+u)^2} \quad (3.9)$$

и воспользуемся тем, что при $\beta \rightarrow 0$ (см. § 2.6)

$$x\left(\frac{u}{\beta}\right) \sim u^{1-2\gamma} x\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем

$$\delta(\beta) \sim 2A \int_0^{\infty} \frac{u^{1-2\gamma} du}{(1+u)^2} x\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (3.11)$$

откуда окончательно

$$\delta(\beta) \sim \frac{2\tau A(1-2\gamma)}{\sin 2\pi\gamma} x\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad (\beta \rightarrow 0). \quad (3.12)$$

Переходя здесь к пределу $\gamma \rightarrow \frac{1}{2}$, находим, что в случае доплеровского профиля

$$\delta_D(\beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}}. \quad (3.13)$$

Асимптотическое разложение $\delta_D(\beta)$ при $\beta \rightarrow 0$ идет не по степеням β^{-1} , а по обратным степеням $\ln \frac{1}{\beta}$. Поэтому очень полезно иметь не только главный, но и все последующие члены асимптотического ряда. Их можно найти, например, так.

При доплеровском коэффициенте поглощения (3.9) принимает вид

$$\delta_D(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}} \int_{\beta}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{\ln u}{\ln \frac{1}{\beta}}\right)^{\frac{1}{2}} du}{(1+u)^2}. \quad (3.14)$$

Отсюда при $\beta \rightarrow 0$

$$\delta_D(\beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} \times \int_0^{\infty} \frac{(\ln u)^j du}{(1+u)^2} \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{\beta}\right)^j} \right]. \quad (3.15)$$

Но

$$\int_0^{\infty} \frac{(\ln u)^j du}{(1+u)^2} = \begin{cases} 0, & j = 2n-1, \\ 2(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}|B_{2n}|, & j = 2n, \end{cases}$$

где B_{2n} — числа Бернулли, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому (3.15) дает

$$\delta_D(\beta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{2n}}{\left(\ln \frac{1}{\beta}\right)^{2n}}, \quad (3.16)$$

причем $\delta_0 = 1$ и

$$\delta_{2n} = -2 \frac{(4n-3)!!}{(4n)!!} (2^{2n-1} - 1) \pi^n |B_{2n}| \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3.17)$$

Приведем несколько первых чисел δ_{2n} :

$$\delta_2 = -0,41123; \delta_4 = -1,77569; \delta_6 = -29,1046.$$

При фойгтовском профиле асимптотику (3.12) также можно несколько уточнить. Оказывается, что

$$\delta_V(\beta) \sim \sqrt{\frac{\pi U(a, 0)}{\beta}} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - a^2 \right) \frac{\pi U(a, 0)}{a} \beta + \dots \right]. \quad (3.18)$$

При лоренцовском же профиле интеграл (3.6) выражается через элементарные функции, а именно

$$\delta_L(\beta) = \frac{1}{\sqrt{\beta(1+\beta)}}. \quad (3.19)$$

Значения функции $\delta(\beta)$ для доплеровского ($a = 0$), фойгтовского ($a = 0,001; 0,01$ и $0,1$) и лоренцовского ($a = \infty$) профилей приведены в табл. 25. Д. Хаммер [5] опубликовал недавно 5-значную таблицу $\frac{1}{A} \delta(\beta/A)$ для $\lg \beta = -10,0$ (0,5) 0,0 и $-\lg a = \infty; 4,0$ (0,5) 0,5; $-\infty$. Стоит отметить, что функция $\frac{1}{A} \delta(\beta/A)$ есть не что иное, как мензеловская «кривая роста» для модели Шварцшильда — Шустера (Д. Мензел [2]).

Исследовав поведение $\delta(\beta)$, можно вернуться к вопросу о зависимости $\tilde{\lambda}$ от λ и β . При выполнении неравенства

$$1 - \lambda \gg \lambda \beta \delta(\beta) \quad (3.20)$$

величина $1 - \tilde{\lambda}$, как следует из (3.5), практически не зависит от β и равна

$$1 - \tilde{\lambda} \sim 1 - \lambda.$$

Согласно (3.4) длина термализации в этом предельном случае также почти перестает зависеть от β , приближаясь к своему значению при $\beta = 0$ (см. § 4.5). Физический смысл этого результата состоит в следующем. Как было показано

Функция $\delta(\beta)$

$\beta \backslash \alpha$	0	0 001	0.01	0,1	∞
10	9,346 -2	9,346 -2	9,349 -2	9,374 -2	9,535 -2
8	1,150 -1	1,150 -1	1,150 -1	1,154 -1	1,179 -1
6	1,494 -1	1,494 -1	1,494 -1	1,501 -1	1,543 -1
4	2,132 -1	2,132 -1	2,134 -1	2,148 -1	2,236 -1
2	3,738 -1	3,733 -1	3,743 -1	3,789 -1	4,032 -1
1	6,049 -1	6,051 -1	6,066 -1	6,206 -1	7,071 -1
$8 \cdot 10^{-1}$	6,925 -1	6,927 -1	6,949 -1	7,145 -1	8,333 -1
$6 \cdot 10^{-1}$	8,124 -1	8,127 -1	8,160 -1	8,455 -1	1,021 0
$4 \cdot 10^{-1}$	9,893 -1	9,905 -1	9,961 -1	1,047 0	1,336 0
$2 \cdot 10^{-1}$	1,297 0	1,299 0	1,312 0	1,428 0	2,041 0
$1 \cdot 10^{-1}$	1,588 0	1,591 0	1,620 0	1,861 0	3,015 0
$8 \cdot 10^{-2}$	1,676 0	1,680 0	1,716 0	2,017 0	3,402 0
$6 \cdot 10^{-2}$	1,785 0	1,791 0	1,838 0	2,234 0	3,965 0
$4 \cdot 10^{-2}$	1,931 0	1,939 0	2,009 0	2,581 0	4,903 0
$2 \cdot 10^{-2}$	2,159 0	2,174 0	2,309 0	3,337 0	7,001 0
$1 \cdot 10^{-2}$	2,364 0	2,394 0	2,646 0	4,409 0	9,950 0
$8 \cdot 10^{-3}$	2,426 0	2,462 0	2,770 0	4,847 0	1,114 +1
$6 \cdot 20^{-3}$	2,504 0	2,551 0	2,947 0	5,496 0	1,287 +1
$4 \cdot 10^{-3}$	2,609 0	2,677 0	3,239 0	6,597 0	1,578 +1
$2 \cdot 10^{-3}$	2,778 0	2,907 0	3,911 0	9,128 0	2,234 +1
$1 \cdot 10^{-3}$	2,937 0	3,177 0	4,923 0	1,276 +1	3,161 +1
$8 \cdot 10^{-4}$	2,986 0	3,280 0	5,344 0	1,423 +1	3,534 +1
$6 \cdot 10^{-4}$	3,048 0	3,429 0	5,989 0	1,639 +1	4,081 +1
$4 \cdot 10^{-4}$	3,133 0	3,681 0	7,097 0	2,003 +1	4,999 +1
$2 \cdot 10^{-4}$	3,273 0	4,278 0	9,689 0	2,825 +1	7,070 +1
$1 \cdot 10^{-4}$	3,407 0	5,210 0	1,346 +1	3,991 +1	1,000 +2
$8 \cdot 10^{-5}$	3,449 0	5,612 0	1,500 +1	4,461 +1	1,118 +2
$6 \cdot 10^{-5}$	3,502 0	6,222 0	1,726 +1	5,150 +1	1,291 +2
$4 \cdot 10^{-5}$	3,576 0	7,290 0	2,106 +1	6,306 +1	1,531 +2
$2 \cdot 10^{-5}$	3,698 0	9,834 0	2,969 +1	8,915 +1	2,236 +2
$1 \cdot 10^{-5}$	3,816 0	1,358 +1	4,192 +1	1,261 +2	3,162 +2
$8 \cdot 10^{-6}$	3,854 0	1,512 +1	4,686 +1	1,409 +2	3,536 +2
$6 \cdot 10^{-6}$	3,901 0	1,738 +1	5,409 +1	1,627 +2	4,082 +2
$4 \cdot 10^{-6}$	3,967 0	2,119 +1	6,623 +1	1,993 +2	5,000 +2
$2 \cdot 10^{-6}$	4,077 0	2,985 +1	9,364 +1	2,819 +2	7,071 +2
$1 \cdot 10^{-6}$	4,185 0	4,214 +1	1,324 +2	3,976 +2	1,000 +3
$8 \cdot 10^{-7}$	4,219 0	4,710 +1	1,480 +2	4,457 +2	1,118 +3
$6 \cdot 10^{-7}$	4,262 0	5,437 +1	1,703 +2	5,146 +2	1,291 +3
$4 \cdot 10^{-7}$	4,323 0	6,657 +1	2,093 +2	6,303 +2	1,581 +3
$2 \cdot 10^{-7}$	4,424 0	9,411 +1	2,960 +2	8,913 +2	2,236 +3
$1 \cdot 10^{-7}$	4,523 0	1,331 +2	4,186 +2	1,261 +3	3,162 +3
$8 \cdot 10^{-8}$	4,554 0	1,488 +2	4,681 +2	1,409 +3	3,536 +3
$6 \cdot 10^{-8}$	4,594 0	1,718 +2	5,405 +2	1,627 +3	4,032 +3
$4 \cdot 10^{-8}$	4,650 0	2,104 +2	6,619 +2	1,993 +3	5,000 +3
$2 \cdot 10^{-8}$	4,745 0	2,975 +2	9,361 +2	2,819 +3	7,071 +3
$1 \cdot 10^{-8}$	4,837 0	4,203 +2	1,324 +3	3,986 +3	1,000 +4

в § 7.1, $\tilde{\lambda}$ есть вероятность того, что за появлением возбужденного атома последует излучение кванта, который затем снова возбудит атом. Следовательно, $1 - \tilde{\lambda}$ есть полная вероятность гибели кванта в расчете на одно рассеяние, а

$$\bar{N} = \frac{1}{1 - \tilde{\lambda}}$$

представляет собой среднее число рассеяний кванта в бесконечной среде. При выполнении неравенства (3.20) \bar{N} практически не зависит от β и почти в точности равно своему значению при $\beta = 0$. Значит, (3.20) есть то условие, при выполнении которого подавляющая доля квантов гибнет при рассеяниях, а гибель их в полете (за счет поглощения в непрерывном спектре) играет незначительную роль.

Пользуясь только что полученными асимптотиками $\delta(\beta)$, находим, что при $\beta \ll 1$ для коэффициентов поглощения важнейших частных видов условие (3.20) имеет вид

$$\text{Доплер: } 1 - \lambda \gg \lambda \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}}, \quad (3.20a)$$

$$\text{Фойгт: } 1 - \lambda \gg \lambda \sqrt{\pi U(a, 0)} (a\beta)^{1/2}, \quad (3.20б)$$

$$\text{Лоренц: } 1 - \lambda \gg \lambda \beta^{1/2}. \quad (3.20в)$$

Как следует из (3.18), применимость формулы (3.20б) ограничена значениями β , малыми по сравнению с a .

При $1 - \lambda \ll 1$ может осуществляться неравенство, противоположное (3.20),

$$1 - \lambda \ll \beta \delta(\beta) \quad (3.21)$$

(множитель λ в правой части в этом случае можно заменить на единицу, так как $1 - \lambda \ll 1$). В этом предельном случае основным механизмом выбывания квантов из процесса рассеяний служит поглощение их в непрерывном спектре (происходящее в полете), а гибель квантов при рассеяниях можно не принимать во внимание. Среднее число рассеяний \bar{N} и длину термализации τ_t можно считать не зависящими от λ , принимая, что $\lambda = 1$.

Следует специально подчеркнуть, что при фойгтовском профиле гибель квантов при рассеяниях практически не играет роли по сравнению с их гибелью за счет поглощения

в непрерывном спектре, если $1 - \lambda$ по порядку величины меньше $\sqrt{a\beta}$ (a не β !). Этот важный вывод следует из неравенства, противоположного (3.20б). Он справедлив при $\beta \ll a$.

Теперь легко найти зависимость длины термализации от β при $\beta \ll 1$, удовлетворяющих условию (3.21). Поскольку $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$, для получения τ_t при доплеровском, фойгтовском и лоренцовском профилях можно воспользоваться выражениями (4.5.11а) — (4.5.11в), заменив в них $1 - \lambda$ на $1 - \tilde{\lambda}$ [это следует из определений τ_t при $\beta = 0$ и $\beta > 0$, даваемых соответственно формулами (4.5.9) и (3.4)]. Учитывая, что при выполнении неравенства (3.21) величину $1 - \tilde{\lambda}$ можно заменить на $\beta\delta(\beta)$ и пользуясь найденными выше асимптотиками $\delta(\beta)$ при $\beta \ll 1$, получаем

$$\text{Доплер: } \tau_t \sim \frac{\pi^2}{16} \left(\beta \ln \frac{1}{\beta} \right)^{-1}, \quad 1 - \lambda \ll \beta \ll 1, \quad (3.22a)$$

$$\text{Фойгт: } \tau_t \sim \frac{\pi}{9} \beta^{-1}, \quad (1 - \lambda^2) \ll a\beta \ll a^2 \ll 1, \quad (3.22б)$$

$$\text{Лоренц: } \tau_t \sim \frac{\pi}{9} \beta^{-1}, \quad (1 - \lambda^2) \ll \beta \ll 1. \quad (3.22в)$$

Таким образом, при фойгтовском и лоренцовском профилях длина термализации есть величина порядка β^{-1} . Когда профиль коэффициента поглощения доплеровский, τ_t примерно в $\ln 1/\beta$ раз меньше β^{-1} . На первый взгляд этот результат может показаться странным. Чтобы могло проявиться действие непрерывного поглощения, квант должен пройти в среде путь порядка β^{-1} . Поэтому, казалось бы, если поглощение в непрерывном спектре является основной причиной гибели квантов, длина термализации должна отличаться от β^{-1} лишь на множитель порядка единицы. В действительности это не так, поскольку длина термализации определяет не *путь*, проходимый квантом в среде, а его *среднее смещение* от места рождения до места гибели. Траектории квантов в среде представляют собой не прямые, а некоторые ломаные, и потому среднее смещение квантов может оказаться существенно меньше пути, проходимого ими в среде. Изломанность траекторий квантов и служит причиной того, что при рассеянии с доплеровским профилем длина

термализации по порядку в $\ln 1/\beta$ раз меньше β^{-1} . При монохроматическом рассеянии этот эффект сказывается еще сильнее. Поскольку монохроматическое рассеяние представляет собой процесс диффузионного типа, следует ожидать, что смещение кванта будет порядка корня из пройденного им пути. Поэтому длина термализации с точностью до множителя порядка единицы должна равняться $1/\sqrt{\beta}$. Легко убедиться, что так оно и есть. При прямоугольном профиле имеем из (3.6)

$$\delta_M(\beta) = \frac{1}{1+\beta},$$

следовательно,

$$1 - \tilde{\lambda} = 1 - \lambda + \frac{\lambda\beta}{1+\beta}. \quad (3.23)$$

Поскольку при монохроматическом рассеянии $\tilde{S}_\infty(\tau) \sim \frac{3}{2}\tau^2$ при $\tau \gg 1$ (см. § 3.9), из (3.4) и (3.23) находим, что при прямоугольном профиле

$$\tau_t \sim \sqrt{\frac{2}{3}}\beta^{1/2}, \quad 1 - \lambda \ll \beta \ll 1, \quad (3.22г)$$

что полностью согласуется с приведенной только что оценкой.

Сопоставляя полученные сейчас результаты с обсуждением, приведенным в § 4.5, можно прийти к следующему общему заключению. Если роль гибели квантов при рассеяниях пренебрежимо мала по сравнению с ролью поглощения в непрерывном спектре и если коэффициент поглощения в линии убывает в крыльях настолько быстро, что существует эффект накопления, то длина термализации существенно меньше β^{-1} . Отличие τ_t от β^{-1} тем больше, чем сильнее эффект накопления.

В § 4.5 было показано, что для коэффициентов поглощения, убывающих в крыльях пропорционально некоторой степени частоты, накопления нет. Происходящее при рассеяниях перераспределение квантов между ядром линии и ее периферией оказывается здесь более существенным, чем изменение направления их движения. Соответственно этому, для всех таких профилей при выполнении неравенства (3.21) длина термализации с точностью до множителя порядка единицы равна β^{-1} .

Если не выполнено ни одно из неравенств (3.20), (3.21), длина термализации зависит как от λ , так и от β . Однако, как следует из (3.4) и (3.5), для двух сред (1 и 2), в которых значения λ и β таковы, что

$$1 - \lambda_1 + \lambda_1 \beta_1 \delta(\beta_1) = 1 - \lambda_2 + \lambda_2 \beta_2 \delta(\beta_2),$$

а профили коэффициентов поглощения одинаковы, длины термализации совпадают.

§ 7.4. Бесконечная среда. Анализ решения

Детальный анализ решения задачи о точечном источнике в бесконечной среде мы проведем только для наиболее интересного случая фойгтовского профиля. Кроме того, будем с самого начала предполагать, что $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$. Это условие означает, что одновременно выполняются два неравенства: $1 - \lambda \ll 1$ и $\beta \ll 1$. Из физических соображений следует ожидать (и это будет подтверждено вскоре прямым вычислением), что вокруг источника в этом случае должна существовать область, в которой гибель квантов почти не сказывается. В этой области функция источников мало отличается от функции источников в консервативно рассеивающей среде, т. е. $S_p(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p(\tau, 1, 0)$. Функция $S_p(\tau, 1, 0)$ была подробно рассмотрена в гл. IV. Поэтому исследование функции источников при $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$ сводится к изучению поведения $S_p(\tau, \lambda, \beta)$ при больших τ .

Полагая $y = \tau \left(\frac{1}{z} - \beta \right)$, из (2.21) получаем

$$S_p(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi\tau^2} e^{-\beta\tau} \int_0^\infty e^{-y} R\left(\frac{\tau}{y + \beta\tau}, \lambda, \beta\right) G\left(\frac{\tau}{y}\right) dy. \quad (4.1)$$

Из-за наличия экспоненциального множителя вклад в этот интеграл, даваемый областью больших y , несуществен. Поэтому при фойгтовском профиле для достаточно больших τ находим из (4.1), учитывая (2.7.27), (2.20) и (1.44) и принимая во внимание, что $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$,

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{aU(a, 0)}{\pi}} \frac{e^{-\beta\tau}}{\tau^{3/2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{3/2} \tilde{R}(y) dy, \quad (4.2)$$

где

$$\tilde{R}^{-1}(y) = \left[1 - \lambda + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi a U(a, 0)}{\tau} \frac{(y + 2\beta\tau)^{3/2}}{y + \beta\tau}} \right]^2 + \left[\frac{1}{3} \sqrt{\frac{\pi a U(a, 0)}{\tau} \frac{y^{3/2}}{y + \beta\tau}} \right]^2. \quad (4.3)$$

Асимптотическое выражение (4.2) довольно сложно. Существуют, однако, два важных предельных случая, когда оно сильно упрощается.

1) β -решение. Если

$$1 - \lambda \ll \sqrt{\pi U(a, 0)} (a\beta)^{1/2}, \quad (4.4)$$

зависимость функции источников S_p^V от λ практически исчезает. Как следует из (4.3), в этом случае можно полагать $\lambda = 1$, так что

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p^V(\tau, 1, \beta) \sim \frac{1}{4\pi\tau^2} \frac{3}{2\pi \sqrt{U(a, 0)} a\tau} s_p^V(\beta\tau), \quad (4.5)$$

где

$$s_p^V(\beta\tau) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta\tau} \int_0^\infty e^{-y} \frac{y^{3/2} (y + \beta\tau)^2}{(y + 2\beta\tau)^2 + y^2} dy. \quad (4.6)$$

Представление (4.5) применимо при $a\tau \gg 1$ и $a \gg \beta$. Однако если (4.5) переписать в форме

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p^V(\tau, 1) s_p^V(\beta\tau), \quad (4.7)$$

где $S_p^V(\tau, 1)$ — функция источников в среде с $\beta = 0$ и $\lambda = 1$ (см. гл. IV), то мы получаем представление, которое, в отличие от (4.5), годится при всех τ , а не только при $\tau \gg a^{-1}$. Условие его применимости состоит в выполнении неравенств $a \gg \beta$ и (4.4). Мы имеем огромное упрощение — функция, зависящая от трех переменных (τ, λ, β), в рассматриваемом предельном случае выражается через две функции, каждая из которых зависит всего от одного аргумента.

Из (4.6) находим

$$s_p^V(\beta\tau) \sim 1 \quad (\beta\tau \ll 1), \quad (4.8)$$

$$s_p^V(\beta\tau) \sim \frac{3}{8} \frac{e^{-\beta\tau}}{\beta\tau} \quad (\beta\tau \gg 1), \quad (4.9)$$

так что при $\tau \ll \frac{1}{\beta}$ (4.7) дает

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p^V(\tau, 1). \quad (4.10)$$

Иначе говоря, на расстояниях от источника, по порядку величины малых по сравнению с длиной термализации, функция $S_p^V(\tau, \lambda, \beta)$ близка к функции источников в консервативно рассеивающей среде (т. е. среде с $1 - \lambda = \beta = 0$).

Функцию источников, соответствующую $\lambda = 1$ и $\beta \neq 0$, будем называть β -решением. Когда $\lambda \neq 1$, функция источников при всех τ мало отличается от β -решения, если только выполнено условие (4.4).

2) λ -решение. Функцию источников, соответствующую $\beta = 0$, будем называть λ -решением. В предыдущих главах исследовались как раз λ -решения.

Из (4.3) следует, что при

$$1 - \lambda \gg \sqrt{\pi U(a, 0)} (a\beta)^{1/2} \quad (4.11)$$

зависимость правой части от β почти исчезает, причем значения $\tilde{R}(y)$ оказываются практически равными значениям этой функции при $\beta = 0$. Поэтому в (4.3) в этом предельном случае можно положить $\beta = 0$, и (4.2) дает

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p^V(\tau, \lambda) e^{-\beta\tau}. \quad (4.12)$$

Иначе говоря, при выполнении условия (4.11) функцию источников можно получить из λ -решения умножением его на $e^{-\beta\tau}$. Поскольку $S_p(\tau, \lambda)$ при $1 - \lambda \ll 1$ выражается через функции одной переменной (см. § 4.4), в итоге оказывается, что в предельном случае (4.11) $S_p^V(\tau, \lambda, \beta)$ также выражается через функции одного аргумента.

Если ни одно из неравенств (4.4), (4.11) не выполняется, столь больших упрощений уже не возникает. Как следует из (4.2) и (4.3), при произвольном соотношении между $1 - \lambda$ и $a\beta$ функцию $S_p^V(\tau, \lambda, \beta)$ при $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$ можно представить в форме

$$S_p^V(\tau, \lambda, \beta) \sim S_p^V(\tau, 1) s_p^V(t, \beta\tau), \quad (4.13)$$

где

$$s_p^V(t, \beta\tau) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta\tau} \int_0^\infty e^{-y} \frac{y^{3/2} (y + \beta\tau)^2 dy}{[t(y + \beta\tau) + (y + 2\beta\tau)^{3/2}]^2 + y^3}, \quad (4.14)$$

$$t = \frac{3(1 - \lambda)}{\sqrt{\pi a U(a, 0)}} \tau^{1/2}. \quad (4.15)$$

Отсюда, в частности, заключаем, что при $\tau \ll \beta^{-1}$ функцию источников $S_p^V(\tau, \lambda, \beta)$ можно считать равной $S_p^V(\tau, \lambda)$, т. е. полагать $\beta = 0$ и использовать результаты, полученные в гл. IV.

§ 7.5. Полубесконечная среда

В случае полубесконечной среды интегральное уравнение для функции источников имеет вид

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau), \quad (5.1)$$

где $S_1^*(\tau)$ — первичная функция источников, равная, как было показано в § 2.4,

$$S_1^*(\tau) = \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) S^c(\tau') d\tau' + S^*(\tau). \quad (5.2)$$

Функция $K(\tau, \beta)$ представима в виде суперпозиции экспонент, а именно (см. § 7.1):

$$K(\tau, \beta) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z}.$$

Поэтому уравнение (5.1) может быть решено методом, который применялся в гл. V в случае $\beta = 0$. Опуская все выкладки, приведем только сводку результатов. Фундаментальная функция $\Phi(\tau)$, являющаяся решением уравнения

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) \Phi(\tau') d\tau' + \frac{\lambda}{2} K(\tau, \beta) \quad (5.3)$$

и связанная с резольвентой $\Gamma(\tau, \tau')$ уравнения (5.1) соотношением (5.1.31), равна

$$\Phi(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} R(z, \lambda, \beta) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{zH(z, \lambda, \beta)}, \quad (5.4)$$

где $R(z, \lambda, \beta)$ дается формулой (2.20), а $H(z)$ удовлетворяет уравнению

$$H(z) = 1 + \frac{\lambda}{2} z H(z) \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{H(z')}{z+z'} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz'. \quad (5.5)$$

Ввиду важной роли H -функции рассмотрим ее подробнее. Обозначим

$$H_n = \int_0^{\frac{1}{\beta}} H(z) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) z^n dz \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (5.6)$$

Величина H_n есть момент функции $H(z)$ порядка n , взятый с весом $G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)$. Пусть, далее,

$$G_n = \int_0^{\frac{1}{\beta}} z^n G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) dz \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (5.7)$$

Из (5.5) легко получить, что

$$H_{2n} = G_{2n} + \frac{\lambda}{4} \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j H_{2n-j} H_j. \quad (5.8)$$

Относительно доказательства этого соотношения см. И. Басбридж [1]. При $n = 0$ из (5.8) имеем

$$\lambda H_0 = \tilde{\lambda} + \frac{\lambda^2}{4} H_0^2,$$

откуда, учитывая ограниченность H_0 при $\lambda \rightarrow 0$,

$$H_0 = \frac{2}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \tilde{\lambda}}\right). \quad (5.9)$$

При $\beta = 0$ это выражение переходит в (5.4.20), так как в этом случае $\tilde{\lambda} = \lambda$. Следует указать, что при непрямоугольном профиле и $\beta = 0$ все моменты H_n , кроме H_0 , расходятся. Наряду с H_n во многих задачах встречаются также величины

$$\alpha_{ik} = \int_0^{\frac{1}{\beta}} H(z) G_k\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) z^i dz \quad (i, k = 0, 1, \dots), \quad (5.10)$$

где функции $G_k(z)$ определяются выражениями (2.6.12) и (2.6.13). Очевидно, что $\alpha_{n1} \equiv H_n$. Величины α_{ih} приходится находить численно (исключение составляет $\alpha_{01} \equiv H_0$).

Из (5.5) и (5.9) следует, что при возрастании z от 0 до ∞ функция $H(z)$ монотонно возрастает от $H(0) = 1$ до

$$H(\infty) = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{\lambda}}}. \quad (5.11)$$

Явное выражение для $H(z, \lambda, \beta)$ при $z \geq 0$ имеет вид

$$H(z, \lambda, \beta) = \exp \left\{ -\frac{z}{\pi} \int_0^{\infty} \ln [1 - \lambda V(u, \beta)] \frac{du}{1+z^2u^2} \right\}, \quad (5.12)$$

где $V(u, \beta)$ дается формулой (1.37) или (1.39). При $\beta = 0$ оно превращается в (5.4.11).

Рассмотрим один важный предельный случай (5.12). Когда профиль коэффициента поглощения фойгтовский, $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$ и, кроме того, $1 - \lambda \ll (a\beta)^{1/2}$, в (5.12) λ можно заменить на единицу (β -решение). H -функция сильно упрощается. При $z \ll \beta^{-1}$ она практически не зависит от β и асимптотически равна функции $H_V(z, 1)$, соответствующей

Таблица 26

Функция $h_1(\beta z)$

βz	$h_1(\beta z)$	βz	$h_1(\beta z)$	βz	$h_1(\beta z)$	βz	$h_1(\beta z)$
0,000	1,0000	0,075	0,9025	0,19	0,8297	0,475	0,7322
0,005	0,9870	0,080	0,8984	0,20	0,8248	0,500	0,7261
0,010	0,9774	0,085	0,8944	0,22	0,8156	0,525	0,7204
0,015	0,9690	0,090	0,8905	0,24	0,8069	0,550	0,7148
0,020	0,9615	0,095	0,8867	0,26	0,7988	0,575	0,7095
0,025	0,9545	0,10	0,8830	0,28	0,7911	0,60	0,7044
0,030	0,9481	0,11	0,8760	0,30	0,7838	0,65	0,6947
0,035	0,9420	0,12	0,8692	0,32	0,7768	0,70	0,6857
0,040	0,9363	0,13	0,8628	0,34	0,7702	0,75	0,6772
0,045	0,9308	0,14	0,8567	0,36	0,7639	0,80	0,6693
0,050	0,9256	0,15	0,8509	0,38	0,7578	0,85	0,6618
0,055	0,9206	0,16	0,8453	0,400	0,7520	0,90	0,6547
0,060	0,9158	0,17	0,8399	0,425	0,7451	0,95	0,6480
0,065	0,9112	0,18	0,8347	0,450	0,7385	1,00	0,6417
0,070	0,9068						

Т а б л и ц а 27

Функции $H(z, 1, \beta)$ и $W(z, 1, \beta)$ при фойгтовском профиле и $\beta = 10^{-4}$

a	0,001		0,01		0,1	
$z = \frac{z'}{1 + \beta z'}$						
z'	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$
0,0	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	1,156	0,476	1,154	0,486	1,141	0,524
0,2	1,273	0,791	1,268	0,811	1,243	0,889
0,3	1,377	1,044	1,370	1,076	1,331	1,195
0,4	1,473	1,259	1,463	1,302	1,411	1,464
0,5	1,563	1,448	1,550	1,503	1,485	1,708
0,6	1,649	1,616	1,633	1,683	1,553	1,932
0,7	1,731	1,770	1,712	1,849	1,618	2,141
0,8	1,810	1,911	1,788	2,002	1,679	2,338
0,9	1,886	2,041	1,860	2,144	1,737	2,525
1,0	1,960	2,163	1,931	2,278	1,792	2,703
$z = \frac{1}{\alpha(x) + \beta}$						
x						
0,00	1,960	2,163	1,931	2,278	1,792	2,703
0,25	2,006	2,237	1,974	2,359	1,823	2,802
0,50	2,158	2,470	2,116	2,617	1,920	3,117
0,75	2,459	2,894	2,394	3,093	2,101	3,707
1,00	3,000	3,565	2,882	3,871	2,391	4,692
1,25	3,952	4,584	3,710	5,115	2,823	6,288
1,50	5,625	6,128	5,070	7,154	3,416	8,854
1,75	8,537	8,533	7,180	10,68	4,154	12,92
2,00	13,39	12,44	10,12	17,13	4,972	18,97
2,25	20,60	19,03	13,56	28,89	5,772	26,96
2,50	29,04	30,04	16,82	47,80	6,466	35,89
2,75	35,89	46,01	19,24	70,34	7,022	44,52
3,00	39,48	61,48	20,69	88,64	7,462	52,34
3,25	40,79	69,88	21,49	100,6	7,824	59,46
3,50	41,21	73,04	21,99	108,8	8,139	66,15
3,75	41,37	74,37	22,36	115,4	8,423	72,58
4,00	41,46	75,17	22,67	121,1	8,683	78,84
4,25	41,54	75,77	22,94	125,2	8,926	84,97
4,50	41,59	76,27	23,17	130,8	9,153	90,97
4,75	41,64	76,69	23,38	135,1	9,366	96,86
5,0	41,68	77,05	23,56	138,9	9,567	102,6
5,5	41,75	77,63	23,87	145,5	9,938	113,8

Т а б л и ц а 27 (продолжение)

a	0,001		0,01		0,1	
	$H(z, 1, \beta)$	$\mathcal{W}(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$\mathcal{W}(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$\mathcal{W}(z, 1, \beta)$
6,0	41,79	78,06	24,11	151,3	10,27	124,6
6,5	41,83	78,40	24,32	156,0	10,57	134,9
7,0	41,86	78,67	24,48	160,1	10,85	144,7
7,5	41,88	78,89	24,62	163,6	11,10	154,1
8,0	41,90	79,07	24,74	166,6	11,33	163,1
8,5	41,92	79,22	24,84	169,1	11,54	171,7
9,0	41,93	79,34	24,93	171,4	11,74	179,8
9,5	41,94	79,45	25,00	173,3	11,92	187,6
10,0	41,95	79,54	25,07	175,0	12,08	194,9
$\alpha_{00} \equiv \mathcal{W}(\infty, 1, \beta)$		102,3		246,4		448,9

консервативному рассеянию ($1 - \lambda = \beta = 0$), которая была табулирована в § 5.7. Когда z становится порядка β^{-1} , «включается» непрерывное поглощение. H -функция в этой области значений z может быть найдена по асимптотической формуле

$$H_V(z, \lambda, \beta) \sim H_V(z, 1) h_1(\beta z), \quad (5.13)$$

где

$$\ln h_1(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{\sqrt{t^2 + s^2} + 2s}{(\sqrt{t^2 + s^2} + s)^{1/2} (1 + t^2)} dt. \quad (5.14)$$

Эта формула получается из (5.12) при использовании (1.43). Условие ее применимости:

$$(1 - \lambda)^2 \ll a\beta \ll a^2.$$

Значения функции $h_1(\beta z)$ даны в табл. 26.

Функции $H_V(z, \lambda, \beta)$ и ряд связанных с ними величин были недавно табулированы Д. И. Нагирнером для большого набора значений λ и β и нескольких значений фойгтговского параметра a . Табл. 27 и 28, в которых приведены

Т а б л и ц а 28

Функции $H(z, 1, \beta)$ и $W(z, 1, \beta)$ при фойгтовском профиле и $\beta=10^{-6}$

a	0,001		0,01		0,1	
$z = \frac{z'}{1+\beta z'}$						
z'	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$
0,0	1,000	0,000	1,000	0,000	1,000	0,000
0,1	1,156	0,485	1,154	0,500	1,141	0,546
0,2	1,273	0,808	1,269	0,839	1,243	0,934
0,3	1,378	1,070	1,370	1,116	1,332	1,263
0,4	1,474	1,294	1,464	1,357	1,411	1,555
0,5	1,565	1,492	1,551	1,571	1,485	1,822
0,6	1,651	1,669	1,634	1,765	1,554	2,069
0,7	1,733	1,831	1,713	1,944	1,618	2,301
0,8	1,813	1,981	1,789	2,110	1,680	2,521
0,9	1,889	2,119	1,862	2,266	1,738	2,730
1,00	1,963	2,250	1,933	2,413	1,793	2,931
$z = \frac{1}{\alpha(x)+\beta}$						
x						
0,00	1,963	2,250	1,933	2,413	1,793	2,931
0,25	2,010	2,329	1,976	2,503	1,824	3,043
0,50	2,163	2,581	2,119	2,789	1,922	3,401
0,75	2,466	3,044	2,398	3,327	2,103	4,081
1,00	3,013	3,796	2,890	4,230	2,394	5,238
1,25	3,982	4,982	3,726	5,735	2,828	7,162
1,50	5,706	6,899	5,109	8,355	3,426	10,37
1,75	8,733	10,21	7,283	13,28	4,175	15,66
2,00	14,21	16,50	10,39	23,28	5,013	23,98
2,25	23,26	29,89	14,22	44,22	5,845	35,56
2,50	36,51	61,44	18,23	84,76	6,583	49,32
2,75	52,14	138,0	21,77	145,7	7,188	63,41
3,00	66,81	296,2	24,37	203,9	7,678	76,63
3,25	77,85	503,2	26,03	259,4	8,092	89,62
3,50	84,15	658,5	27,31	300,0	8,460	102,1
3,75	87,62	755,3	28,34	336,5	8,798	114,6
4,00	90,11	829,3	29,27	372,0	9,116	127,2
4,25	92,27	896,7	30,15	407,3	9,419	140,1
4,50	94,27	961,7	30,99	442,8	9,709	153,1
4,75	96,14	1025	31,80	478,5	9,988	166,3
5,00	97,92	1037	32,59	514,4	10,26	179,7
5,5	101,2	1203	34,07	586,6	10,77	207,1

Т а б л и ц а 28 (продолжение)

a	0,001		0,01		0,1	
	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$	$H(z, 1, \beta)$	$W(z, 1, \beta)$
6,0	104,2	1322	35,47	659,3	11,26	235,3
6,5	106,9	1432	36,80	732,5	11,72	264,2
7,0	109,4	1537	33,06	805,9	12,16	293,6
7,5	111,6	1636	39,27	879,5	12,59	323,8
8,0	113,7	1730	40,42	953,2	13,00	354,5
8,5	115,6	1820	41,52	1027	13,39	385,8
9,0	117,3	1905	42,57	1100	13,78	417,5
9,5	118,9	1936	43,59	1173	14,15	449,7
10,0	120,4	2062	44,57	1246	14,51	482,4
$\alpha_{00} \equiv W(\infty, 1, \beta)$		4607		8213		$142,5 \cdot 10^2$

значения H -функции, момента α_{00} и функции

$$W(z, \lambda, \beta) = z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{H(z', \lambda, \beta)}{z + z'} G_0\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) dz', \quad (5.15)$$

встречающейся в следующем параграфе, являются извлечением из гораздо более обширных таблиц Д. И. Нагирнера, подготовляемых в настоящее время к опубликованию.

§ 7.6. Образование линий в изотермической атмосфере

Применим результаты предыдущего параграфа к решению задачи об образовании линий поглощения в звездных спектрах. Подробный обзор работ в этой области можно найти у А. Унзоляда [1] и К.-Х. Бёма [1]. Мы ограничимся лишь несколькими замечаниями.

Сильные линии образуются в самых наружных слоях атмосферы, оптическая глубина которых в частотах непрерывного спектра невелика. Поэтому с хорошим приближением можно считать, что такие линии формируются в изотермической атмосфере.

Первоначально принимали, что частота кванта остается при рассеянии неизменной (так называемое когерентное рассеяние). В этом предположении задача об образовании линий с учетом рассеяния и поглощения в непрерывном спектре была рассмотрена А. Эддингтоном [1], получившим ее приближенное решение. Точное решение было найдено С. Чандрасекаром [1]. Однако, как было выяснено в § 1.5, предположение о неизменности частоты при рассеянии не может считаться разумным приближением. Отказавшись от этого предположения, Дж. Хаутгаст [1] сформулировал ту же задачу в предположении полного перераспределения по частотам при рассеянии. Точное решение этой задачи было получено В. В. Соболевым [9], [10] (см. также [1], гл. VIII). В этих работах находились только профили линий. Вопросу об одновременном нахождении функции источников и профилей линий были посвящены работы Дж. Джефриса и Р. Томаса [1], [2], М. Саведова [1] и др., где задача решалась приближенными методами. Значительно более полные и точные результаты получены недавно Д. Хаммером [5], применившим для решения уравнения переноса лучишие из имеющихся сейчас численных методов. Ряд результатов Д. Хаммера будет приведен в этом и следующем параграфах.

Рассматриваемая ниже задача является простейшей модельной задачей об образовании сильных линий в звездных атмосферах. Получаемые при ее решении результаты представляют скорее теоретический, чем практический интерес. Вряд ли была бы оправданной попытка их непосредственного использования для интерпретации наблюдаемых профилей сильных линий. Однако некоторые общие заключения о характере зависимости решения от параметров, как нам кажется, могут оказаться полезными.

После этих предварительных замечаний перейдем к математической формулировке задачи. Имеется изотермичная полубесконечная не освещаемая извне атмосфера, состоящая из смеси двухуровневных атомов (соответствующая частота перехода ν_{12}) с атомами некоторого другого сорта, которые могут ионизоваться излучением частоты ν_{12} . Кинетическая температура газа T такова, что $h\nu_{12} \gg kT$, так что вынужденным излучением в линии можно пренебречь. Вероятность выживания кванта при рассеянии λ и отношение β коэффициента поглощения в непрерывном спектре, обуслов-

ленного фотоионизацией атомов «примеси», к коэффициенту поглощения в центре линии считаются не зависящими от глубины. Предполагается, далее, что атомы «примеси» находятся в ЛТР. При этих допущениях расчет поля излучения в газе и определение степени возбуждения в функции глубины сводятся к решению уравнения переноса

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = [\alpha(x) + \beta] I(\tau, \mu, x) - \frac{\lambda}{2} A \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \times \\ \times \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - B_{\nu_{12}}(T) [(1 - \lambda)\alpha(x) + \beta] \quad (6.1)$$

при граничном условии

$$I(0, \mu, x) = 0, \quad \mu < 0. \quad (6.2)$$

Здесь $B_{\nu}(T)$ — функция Планка, λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, в данном случае равная

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e^* C_{21}}.$$

Введя функцию источников в линии

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + B_{\nu_{12}}(T) (1 - \lambda), \quad (6.3)$$

связанную с населенностями уровней обычным образом,

$$S = \frac{2h\nu_{12}^3}{c^2} \frac{g_1}{g_2} \frac{n_2}{n_1},$$

из (6.1) и (6.2) получаем следующее интегральное уравнение для S :

$$S(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau', \lambda, \beta) d\tau' + S_1^*(\tau, \lambda, \beta), \quad (6.4)$$

где

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \right]. \quad (6.5)$$

В последних двух формулах мы специально указали в явном виде все параметры, от которых зависят S и S_1^* , так как в последующем обсуждении значения этих параметров играют важную роль. Заметим, что уравнения (6.1) и (6.4) являются частными случаями соответственно (2.3.4) и (2.4.16) при $S^*(\tau) = B_{\nu_{12}}(T)(1 - \lambda)$ и $S^c(\tau) = B_{\nu_{12}}(T)$. Наряду с функцией источников большой интерес представляет также интенсивность выходящего излучения. Она равна (см. § 2.3)

$$I(0, \mu, x) = \int_0^{\infty} [\alpha(x) S(\tau, \lambda, \beta) + \beta B_{\nu_{12}}(T)] e^{-\frac{\alpha(x) + \beta \tau}{\mu}} \frac{d\tau}{\mu}. \quad (6.6)$$

Анализ приведенных уравнений мы начнем с рассмотрения источникового члена в (6.4), т. е. функции $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$. Переписав (6.5) в виде

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \left(2 \int_0^{\infty} K_0(t, \beta) dt - \int_{\tau}^{\infty} K_0(t, \beta) dt \right) \right]$$

и воспользовавшись соотношениями, приведенными в § 7.1, можно получить

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \tilde{\lambda} - \frac{\lambda}{2} \beta L_0(\tau, \beta) \right]. \quad (6.7)$$

Функция $L_0(\tau, \beta)$ монотонно убывает от $L_0(0, \beta) = \delta(\beta)$ до нуля при $\tau = \infty$. Соответственно этому, $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$ монотонно возрастает от

$$S_1^*(0, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \frac{1}{2} \lambda \beta \delta(\beta) \right] \quad (6.8)$$

до

$$S_1^*(\infty, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) [1 - \lambda + \lambda \beta \delta(\beta)], \quad (6.9)$$

т. е. изменяется не более чем в два раза (рис. 38; по Д. Хаммеру [5]).

Как было показано в § 7.3, при $1 - \lambda \gg \lambda\beta\delta$ (β) гибелью квантов в линии за счет поглощения их в непрерывном спектре можно пренебречь по сравнению с гибелью при рассеяниях. Из (6.7) и (6.8) следует, что в этом случае также

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) \sim B_{\nu_{12}}(T) (1 - \lambda). \quad (6.10)$$

Это означает, что в первичном возбуждении атомов электронные удары доминируют над фотовозбуждениями излу-

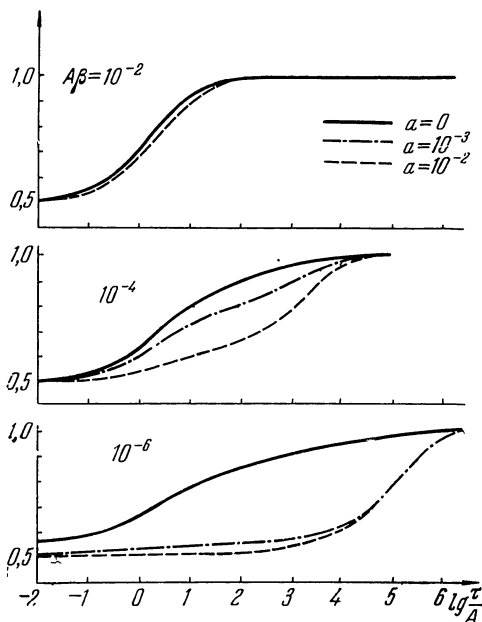


Рис. 38. Зависимость первичной функции источников от глубины в изотермической атмосфере с $1 - \lambda = 10^{-6}$.

По оси ординат отложено отношение $S_1(\tau)/S_1^*(\infty)$.

чением континуума. Поскольку ни рождение, ни гибель квантов не контролируются континуумом, функция источников $S(\tau, \lambda, \beta)$ должна быть близка к соответствующей функции при $\beta = 0$, исследованной в § 6.3, т. е.

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim S(\tau, \lambda) = B_{\nu_{12}}(T) \sqrt{1 - \lambda} \Psi(\tau, \lambda). \quad (6.11)$$

Хотя поглощение в непрерывном спектре в этом предельном случае на населенностях уровней практически и не сказывается, при вычислении интенсивности выходящего излучения отличие β от нуля должно учитываться. Подставляя (6.11) в (6.6), после несложных преобразований получаем следующее выражение для $I(0, \mu, x)$ через H -функцию для $\beta = 0$:

$$I(0, \mu, x) \sim B_{\nu_{12}}(T) \left\{ 1 - \frac{\alpha(x)}{\alpha(x) + \beta} \left[1 - \sqrt{1 - \lambda} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times H\left(\frac{\mu}{\alpha(x) + \beta}, \lambda\right) \right] \right\}. \quad (6.12)$$

Для тех частей линии, где $\alpha(x) \gg \beta$, находим отсюда

$$I(0, \mu, x) \sim B_{\nu_{12}}(T) \sqrt{1 - \lambda} H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}, \lambda\right). \quad (6.13)$$

При $|x| \rightarrow \infty$ интенсивность выходящего излучения, как и следовало ожидать, стремится к $B_{\nu_{12}}(T)$. Когда $\beta = 0$, формулы (6.12) и (6.13) переходят в (6.3.19) (с заменой асимптотических равенств на точное).

Рассмотренный только что предельный случай можно назвать λ -решением для полубесконечной изотермичной среды, поскольку функция источников зависит здесь только от λ (но не от β).

Обратимся к противоположному предельному случаю, когда $1 - \lambda \ll \beta\delta(\beta)$. Гибелью квантов при рассеяниях вследствие ударов второго рода можно в этом случае пренебречь по сравнению с их гибелью в полете (см. § 7.3), а первоначальная «накачка» осуществляется в основном собственным излучением среды в континууме, а не ударным путем. Последнее следует из соотношений (6.7) и (6.8), так как

$$1 - \lambda \ll \frac{1}{2} \beta\delta(\beta) \ll \beta\delta(\beta) - \frac{1}{2} \beta L_0(\tau, \beta).$$

Поскольку и в рождении, и в гибели квантов роль ударных процессов мала, можно положить $\lambda = 1$. Решение, соответствующее этому случаю, удобно назвать β -решением. Функция источников $S(\tau, \lambda, \beta)$ близка к β -решению $S(\tau, 1, \beta)$, если $1 - \lambda \ll \beta\delta(\beta)$.

Для β -решения первичная функция источников $S_1^*(\tau, 1, \beta)$ на границе среды ровно вдвое меньше, чем в бесконечно

глубоких слоях:

$$\frac{S_1^*(0, 1, \beta)}{S_1^*(\infty, 1, \beta)} = \frac{1}{2}. \quad (6.14)$$

Это следует из (6.8) и (6.9), а также непосредственно из физических соображений: в бесконечно глубоких слоях излучение в континууме, вызывающее первичное возбуждение, изотропно, а его интенсивность равна $B_\nu(T)$, тогда как на границе излучение в непрерывном спектре падает на атомы лишь со стороны среды, т. е. в пределах телесного угла 2π , а не 4π , причем его интенсивность по-прежнему равна $B_\nu(T)$.

С помощью (6.14), не решая уравнения для функции источников, можно получить, что асимптотически при $\beta \rightarrow 0$

$$S(0, 1, \beta) \sim b \sqrt{\beta \delta(\beta)} B_{\nu_{12}}(T), \quad (6.15)$$

где b — некоторая постоянная, зависящая от вида профиля, но во всех случаях заключенная между единицей и половиной. Действительно, мы имеем

$$S(\tau, \lambda, \beta) = S_1^*(\tau, \lambda, \beta) + \int_0^\infty S_1^*(\tau', \lambda, \beta) \Gamma(\tau', \tau) d\tau', \quad (6.16)$$

где $\Gamma(\tau', \tau)$ — резольвента уравнения (6.4) (разумеется, она зависит также от параметров λ и β). Отсюда

$$S(0, \lambda, \beta) = S_1^*(0, \lambda, \beta) + \int_0^\infty S_1^*(\tau', \lambda, \beta) \Phi(\tau') d\tau'.$$

Учитывая монотонность S_1^* , получаем

$$\begin{aligned} S_1^*(0, \lambda, \beta) \left(1 + \int_0^\infty \Phi(\tau') d\tau' \right) &\leq S(0, \lambda, \beta) \leq \\ &\leq S_1^*(\infty, \lambda, \beta) \left(1 + \int_0^\infty \Phi(\tau') d\tau' \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

причем равенства достигаются только при $\beta = 0$. Но

$$1 + \int_0^\infty \Phi(\tau') d\tau' = H(\infty) = \frac{1}{V_{1-\tilde{\lambda}}} = \frac{1}{V_{1-\lambda+\lambda\beta\delta(\beta)}}. \quad (6.18)$$

Поэтому, полагая в (6.17) $\lambda = 1$ и пользуясь (6.8) и (6.9), находим

$$\frac{1}{2} \sqrt{\beta\delta(\beta)} B_{v_{12}}(T) < S(0, 1, \beta) < \sqrt{\beta\delta(\beta)} B_{v_{12}}(T),$$

откуда при $\beta \rightarrow 0$ и следует приведенное выше утверждение.

Формула (6.15) или, точнее говоря, коэффициент при $B_{v_{12}}(T)$ в правой части дает оценку отклонения от ЛТР в поверхностном слое для β -решения при малых β . Эта оценка годится и при $\lambda \neq 1$, если только $1 - \lambda \ll \beta\delta(\beta)$.

Когда $1 - \lambda$ и $\beta\delta(\beta)$ одного порядка, как S_1^* , так и S зависят от всех трех величин — τ , λ и β . Однако и при произвольном соотношении между $1 - \lambda$ и $\beta\delta(\beta)$ довольно важную информацию о зависимости функции источников от глубины можно получить из простого анализа исходного уравнения для S , без его решения.

Из физических соображений очевидно, что функция источников в рассматриваемой задаче должна быть монотонно возрастающей функцией τ [этот вывод следует также из (6.16)]. Так как среда считается изотермической, с удалением от границы условия должны приближаться к термодинамическому равновесию. Поэтому

$$S(\infty, \lambda, \beta) = B_{v_{12}}(T). \quad (6.19)$$

Это следует также из (6.4) и (6.9). Важнейшая характеристика решения — величина изменения $S(\tau, \lambda, \beta)$. Для $S(0, \lambda, \beta)$ из (6.17) можно получить следующие оценки:

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - \tilde{\lambda}} B_{v_{12}}(T) < S(0, \lambda, \beta) \leq \sqrt{1 - \tilde{\lambda}} B_{v_{12}}(T), \quad (6.20)$$

причем равенство достигается только при $\beta = 0$. Из (6.19) и (6.20) следует, что при увеличении τ от 0 до ∞ функция источников возрастает не менее чем в $1/2 \sqrt{1 - \tilde{\lambda}}$ и не более чем в $\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}$ раз. Таким образом, когда $1 - \tilde{\lambda}$ мало (а именно этот случай интереснее всего), функция источников изменяется во много раз. Положение здесь совершенно такое же, как и в частном случае λ -решения, подробно рассмотренного в § 6.1—6.3.

Качественно картину можно описать следующим образом. В однородном изотермичном газе существует пограничный слой, в пределах которого функция источников изменяется по порядку величины в $\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}$ раз. Чем меньше вероятность гибели кванта в расчете на одно рассеяние $1 - \tilde{\lambda}$, тем толще этот слой. В важнейшем случае почти консервативного рассеяния ($1 - \tilde{\lambda} \ll 1$) структура пограничного слоя оказывается очень простой. Действительно, если в уравнении (6.4) устремить $\tilde{\lambda}$ к единице (это означает, что одновременно $\lambda \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 0$), то оно переходит в однородное уравнение

$$\tilde{S}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|) \tilde{S}(\tau') d\tau', \quad (6.21)$$

решение которого мы будем считать нормированным так, что $\tilde{S}(0) = 1$. Иначе говоря,

$$\lim_{\tilde{\lambda} \rightarrow 1} \frac{S(\tau, \lambda, \beta)}{S(0, \lambda, \beta)} = \tilde{S}(\tau), \quad (6.22)$$

т. е. функция источников, нормированная на единицу на границе среды, при $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$ переходит в решение обобщенной проблемы Милна (см. § 6.1). Обобщая результат, полученный в гл. VI при исследовании λ -решения, в качестве толщины пограничного слоя можно принять, по определению, значение $\tau = \tau_b$ такое, что

$$\tilde{S}(\tau_b) = (1 - \tilde{\lambda})^{-1/2}. \quad (6.23)$$

Тогда при τ , много меньших τ_b ,

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim S(0, \lambda, \beta) \tilde{S}(\tau), \quad (6.24)$$

тогда как при $\tau \gg \tau_b$

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim B_{v_{12}}(T). \quad (6.25)$$

Из (6.20) вытекает одно важное следствие. Если $\tilde{\lambda} \rightarrow 1$ и при этом отношение $(1 - \lambda)/\beta\delta$ (β) изменяется монотонно (в частности, оно может оставаться постоянным), то

можно найти эмпирически, из анализа результатов численно-го решения уравнения для $S(\tau, \lambda, \beta)$. Впрочем, большой необходимости в этом нет.

Формула (6.24) показывает, что при малых $1 - \tilde{\lambda}$ структура пограничного слоя очень проста: вплоть до глубин порядка τ_b степень возбуждения возрастает при всех λ и β

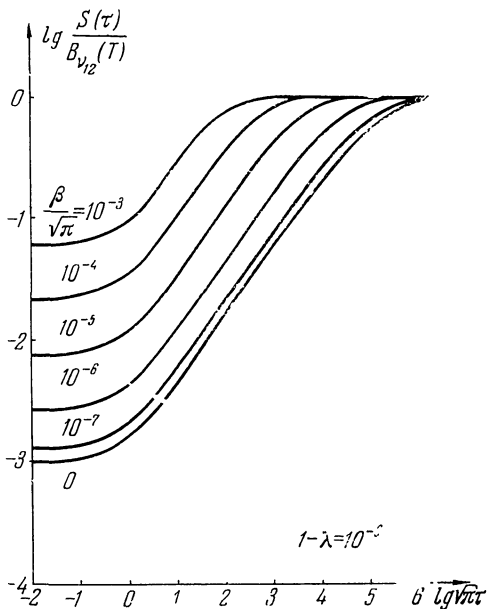


Рис. 39. Зависимость функции источников от глубины в изотермической атмосфере при доплеровском профиле и $1 - \lambda = 10^{-6}$.

одинаковым образом, именно, так же, как и в обобщенной проблеме Милна. По мере приближения τ к τ_b наступает насыщение. В этой области значений τ поведение функции источников не является уже универсальным — оно зависит от λ и β . Результаты численного решения уравнения переноса хорошо иллюстрируют эти выводы (табл. 29 и рис. 39 и 40; по Д. Хаммеру [5]). Так, данные табл. 29 показывают, что при доплеровском профиле во всей той области, где $S(\tau) < 0,2 S(\infty)$, максимальная погрешность формулы (6.24) составляет около 1%.

Из рис. 39 и 40, а также из формулы (6.27) следует, что при $1 - \lambda \ll 1$ добавление даже очень слабого поглощения в непрерывном спектре сильно уменьшает отклонения от ЛТР. Это, пожалуй, один из самых важных результатов этой главы. Его физическая интерпретация такова. Электроны имеют максвелловское распределение скоростей. Поэтому

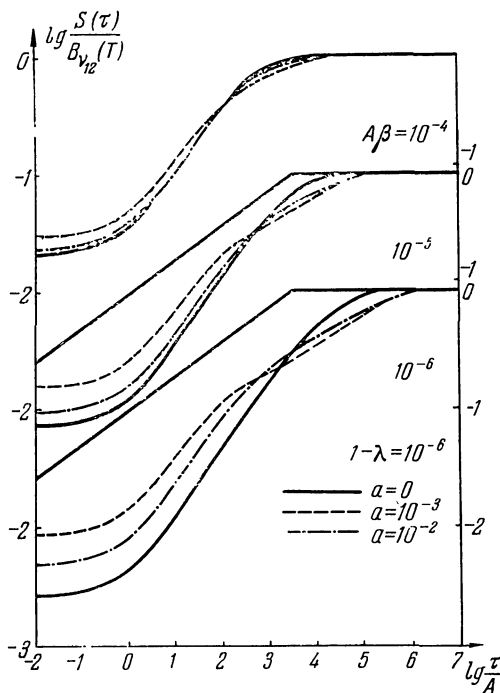


Рис. 40. Зависимость функции источников от глубины в изотермической атмосфере при фойгтовском профиле и $1 - \lambda = 10^{-6}$.

поле излучения в линии, а вместе с ним и степень возбуждения атомов, будут тем ближе к равновесным, чем сильнее взаимодействие излучения с электронным газом. Такое взаимодействие происходит при процессах двух типов. Процессы первого типа — это ударные возбуждения с последующим излучением в линии и противоположные им деакти-

вазии, происходящие после фотовозбуждений. Процессы второго типа — это излучение при рекомбинациях, приходящееся на частоты линии, и непрерывное поглощение, т. е. фотоионизация атомов «примеси» излучением рассматриваемой линии. Резкое уменьшение отклонений от ЛТР при «включении» континуума говорит о том, что процессы второго типа — весьма эффективный механизм взаимодействия электронного газа с полем излучения.

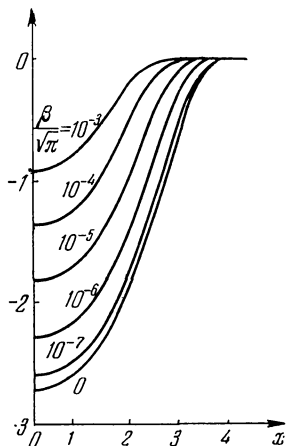


Рис. 41. Профили линий, образующихся в изотермической атмосфере при доплеровском профиле и $1 - \lambda = 10^{-6}$. По оси ординат отложены

$$\lg \frac{I(0,1, x)}{B_{\nu_{12}}(T)}.$$

ответствующей части линии. Иначе говоря, центральная интенсивность по порядку величины должна быть равна $S(0, \lambda, \beta)$, или $\sqrt{1 - \tilde{\lambda}} B_{\nu_{12}}(T)$. Так как в континууме изотермичная полубесконечная атмосфера излучает как черное тело, центральная остаточная интенсивность оказывается порядка $\sqrt{1 - \tilde{\lambda}}$. При $1 - \lambda \gg \beta \delta(\beta)$ она не зависит от β (λ -решение), при $1 - \lambda \ll \beta \delta(\beta)$ остается только зависимость от β (β -решение). Для β -решения порядок величины центральной остаточной интенсивности равен $\sqrt{\beta \delta(\beta)}$. Когда профиль фойгтовский и $\beta \ll \alpha$, так что для $\delta_{\nu}(\beta)$ можно

Зависимость функции источников от глубины определяет профиль линии. Он очень чувствителен к значению β . С ростом β линия становится уже, а центральная остаточная интенсивность быстро увеличивается (рис. 41; по Д. Хаммеру [5]).

Порядковую оценку центральной остаточной интенсивности можно получить из следующих соображений. Формирование центральных частей линии происходит в самых поверхностных слоях, где функция источников по порядку величины не отличается от $S(0, \lambda, \beta)$. Интенсивность же излучения, выходящего в некоторой частоте, должна быть близка к функции источников на глубине формирования со-

взять главный член асимптотики (3.18), это составляет примерно $(a\beta)^{1/4}$. Поэтому, скажем, при $a = 10^{-2}$, $\beta = 10^{-6}$ и $1 - \lambda \ll 10^{-4}$ центральная остаточная интенсивность по порядку величины равна 0,01, т. е. довольно велика. Из рис. 39 и 41 следует, что приведенные только что оценки хорошо согласуются с имеющимися численными данными. Заметим, что большая часть кривых на рис. 39 и 41 соответствует β -решениям.

Вопрос о влиянии параметров λ и β на величину центральных остаточных интенсивностей впервые был рассмотрен В. В. Соболевым [10] (см. также [1]), которому и принадлежат приведенные оценки. Однако использованный нами способ их получения сильно отличается от того, который применялся В. В. Соболевым.

Интенсивность выходящего излучения в разбираемой задаче можно выразить через H -функцию. Перепишем формулу (6.6) в виде

$$I(0, \mu, x) = \frac{\beta}{\alpha(x) + \beta} B_{\nu_{12}}(T) + \frac{\alpha(x)}{\mu} \bar{S}\left(\frac{\alpha(x) + \beta}{\mu}, \lambda, \beta\right), \quad (6.29)$$

где черта сверху, как и раньше, означает преобразование Лапласа по пространственной переменной. Согласно (6.7) и (1.18) источниковый член в уравнении для функции источников можно записать в форме

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \tilde{\lambda} - \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz \right]. \quad (6.30)$$

Поэтому в силу принципа суперпозиции

$$S(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[(1 - \tilde{\lambda}) \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau, \infty, \lambda, \beta) - \beta 2\pi \int_0^{\frac{1}{\beta}} P(\tau, z, \lambda, \beta) G_0\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz \right], \quad (6.31)$$

где $P(\tau, z, \lambda, \beta)$ — решение уравнения

$$P(\tau, z, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} K(|\tau - \tau'|, \beta) P(\tau', z, \lambda, \beta) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}, \quad (6.32)$$

следующим образом выражающееся через H -функцию и резольвентную функцию Φ (см. § 5.1):

$$P(\tau, z, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{4\pi} H(z, \lambda, \beta) \times \left(e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau', \lambda, \beta) d\tau' \right). \quad (6.33)$$

Применим к (6.31) преобразование Лапласа по τ . Пользуясь (6.33) и учитывая соотношения

$$H(z, \lambda, \beta) = 1 + \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau, \lambda, \beta) d\tau \quad (6.34)$$

и (5.11), после небольших преобразований находим, что

$$I(0, \mu, x) = \frac{B_{v_{12}}(T)}{\alpha(x) + \beta} \left\{ \beta + \alpha(x) H(\tilde{z}, \lambda, \beta) [\sqrt{1 - \tilde{\lambda}} - \beta \frac{\lambda}{2} \alpha_{00}(\lambda, \beta) + \beta \frac{\lambda}{2} W(\tilde{z}, \lambda, \beta)] \right\}, \quad (6.35)$$

где α_{00} и W определяются соответственно формулами (5.10) и (5.15), а величина \tilde{z} равна

$$\tilde{z} = \frac{\mu}{\alpha(x) + \beta}.$$

Все величины, входящие в это выражение, табулированы для большого набора значений λ и β и нескольких значений фойгтовского параметра α . Поэтому формулу (6.35) легко использовать для практического расчета профилей линий.

Формула (6.35) принадлежит В. В. Соболеву [10]. Для частного случая $\lambda = 1$ выражение, лишь обозначениями отличающееся от (6.35), было найдено в более ранней работе того же автора [9] с использованием принципа инвариантности. Затем [10] результат был обобщен на случай произ-

вольных λ и β , т. е. получено выражение, с точностью до обозначений совпадающее с (6.35). Вывод основан на некотором обобщении вероятностного подхода, изложенного в § 5.2. Содержание этих работ подробно изложено в монографии В. В. Соболева [1].

На протяжении всего этого параграфа предполагалось, что атмосфера изотермична. Однако в звездных атмосферах температура растет с глубиной. Для приближенного учета этого факта часто поступают следующим образом. В уравнении переноса (6.1) считают $B_{\nu_2}(T)$ некоторой заданной функцией глубины, а влиянием изменения температуры (и плотности) на зависимость коэффициента поглощения от частоты ν , а также на параметры λ и β , пренебрегают. Для простейших видов зависимости $B_{\nu_2}(T)$ от глубины τ (например, линейной), интенсивность выходящего излучения удастся выразить через H -функцию. Такие выражения можно найти в работах В. В. Соболева [10] (см. также [1]), И. Басбридж [2], С. Уэно [1] и др.

Наконец, последнее замечание. До сих пор считалось, что гибель квантов при рассеяниях происходит только за счет ударов второго рода. Однако в условиях звездных атмосфер фотоионизация из возбужденного состояния часто оказывается более существенной, чем удары второго рода (Б. Стрёмгрен [1]). Аналогичным образом, рекомбинации могут служить более важным механизмом заселения верхнего уровня, чем ударные возбуждения. В том случае, когда рекомбинации и ионизации с верхнего уровня преобладают над ударными процессами, уравнение переноса по-прежнему имеет вид (6.1), причем вероятность выживания кванта при рассеянии λ равна теперь

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + B_{2c} \bar{J}_{2c}},$$

где $n_2 B_{2c} \bar{J}_{2c}$ — число фотоионизаций с верхнего уровня в единице объема за единицу времени. Линии, для которых ударные механизмы заселения и опустошения верхнего уровня преобладают над рекомбинационно-ионизационным механизмом, называют иногда линиями ударного типа. Если, наоборот, рекомбинации и ионизации с верхнего уровня играют более важную роль, чем ударные процессы, то говорят о линии фотоионизационного типа. Возможны и

другие варианты (скажем, ударное заселение и опустошение за счет фотоионизаций и т. п.). Эти вопросы подробно обсуждаются Р. Томасом [2], [3]; см. также Р. Томас и Р. Эйти [1].

§ 7.7. О структуре пограничного слоя

Выше было показано, что в разреженном однородном газе, занимающем полупространство, степень возбуждения монотонно спадает к границе. Вблизи границы газа с вакуумом существует, таким образом, пограничный слой, обязанный своим появлением выходу излучения из среды¹⁾.

В предыдущем параграфе было найдено, что структура пограничного слоя в однородном изотермичном газе универсальна в том смысле, что при почти консервативном рассеянии в пределах большей части этого слоя функция источников пропорциональна решению обобщенной проблемы Милна $\tilde{S}(\tau)$. В действительности вывод о пропорциональности функции источников и $\tilde{S}(\tau)$ в поверхностных слоях справедлив при гораздо более общих предположениях. Собственно говоря, именно эта универсальность поведения функции источников вблизи границы газа и позволяет говорить о пограничном слое как о некотором характерном явлении.

Рассмотрим прежде всего, какие выводы можно сделать из пропорциональности функции источников и $\tilde{S}(\tau)$ в по-

¹⁾ Заимствование из гидродинамики термина «пограничный слой» представляется вполне оправданным: у нас речь идет о влиянии границы на распределение атомов по состояниям возбуждения, тогда как в гидродинамической теории ламинарного пограничного слоя, по существу, исследуется влияние границы на распределение частиц по поступательным степеням свободы. Заметим мимоходом, что в динамике разреженных газов при изучении пристеночных эффектов нужно исходить не из гидродинамических уравнений, а из уравнения Больцмана. Уравнение Больцмана для модели Бхатнагара — Гросса — Крукса весьма близко по своим математическим свойствам к уравнениям переноса, исследуемым в этой книге. В качестве примера можно указать на полную аналогию так называемой постоянной скольжения константе Хопфа $q(\infty)$. Некоторые из изложенных выше результатов можно непосредственно перенести на задачи, возникающие в динамике разреженных газов. С проблематикой этой области можно ознакомиться, например, по монографии М. Н. Когана [1]. Обсуждение этих вопросов далеко выходит за рамки настоящей книги.

верхностных слоях *однородного изотермического* газа. В случае λ -решения первичная функция источников $S_1^*(\tau, \lambda, 0)$ не зависит от глубины [она равна $(1 - \lambda) V_{v_{12}}(T)$]. Для β -решения, представляющего собой противоположный крайний случай, первичная функция источников в пределах пограничного слоя возрастает вдвое. Однако в обоих случаях функция источников в пограничном слое пропорциональна решению обобщенной проблемы Милна. Отсюда можно заключить, что в известных пределах детали поведения $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$ вблизи границы не сказываются на форме зависимости функции источников от глубины в пограничном слое. Разумеется, здесь (как и всюду в дальнейшем в этом параграфе) речь идет о средах с почти консервативным рассеянием ($1 - \tilde{\lambda} \ll 1$).

Рассмотрим теперь среду с постоянными λ и β и некоторой произвольной заданной первичной функцией источников $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$. Спрашивается, каковы должны быть свойства S_1^* , чтобы в поверхностном слое функцию источников можно было считать пропорциональной $\tilde{S}(\tau)$? Ответ на этот вопрос можно получить из простых физических соображений. Решение обобщенной проблемы Милна $\tilde{S}(\tau)$ соответствует случаю, когда в консервативно рассеивающей среде возбуждение создается источником бесконечной мощности, лежащим в бесконечно глубоких слоях среды, а на конечных расстояниях от границы источников нет. Если консервативно рассеивающую среду ($\tilde{\lambda} = 1$) заменить средой с $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$, то в поверхностных слоях гибелью квантов можно пренебречь по сравнению с их выходом через границу. Если, далее, мощность источников, находящихся в поверхностных слоях, достаточно мала по сравнению с мощностью источников, лежащих в глубине, то условия оказываются близкими к тем, которые характерны для проблемы Милна. Поэтому следует ожидать, что в этом случае функция источников в поверхностных слоях будет примерно пропорциональна $\tilde{S}(\tau)$. Коэффициент пропорциональности определяется значением $\tilde{\lambda}$ и зависимостью мощности источников от глубины.

Исходя из этих соображений, можно утверждать, что в пограничном слое функция источников будет пропорцио-

нальна $\tilde{S}(\tau)$, если, во-первых, $1 - \tilde{\lambda} \ll 1$, во-вторых, функция $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$ не очень сильно меняется в пределах поверхностного слоя и, в-третьих,

$$\int_0^{\tau b} S_1^*(\tau, \lambda, \beta) d\tau \ll \int_0^{\infty} S_1^*(\tau, \lambda, \beta) d\tau.$$

Результаты расчетов полностью подтверждают эти качественные соображения. Рассмотрим в качестве иллюстрации два примера. Первый пример мы заимствуем из работы Д. Хаммера [5], в которой имеются результаты численного решения уравнения (6.4) при $S_1^* = \text{const}$. Значения $S(\tau)/S(0)$ для этого случая при доплеровском профиле, $1 - \lambda = 10^{-6}$ и нескольких β приведены в табл. 30. Сопоставление данных табл. 29 и 30 наглядно показывает сходство

Т а б л и ц а 30

Функция $\frac{S(\tau)}{S(0)}$ при равномерном
распределении источников (доплеровский
профиль, $1 - \lambda = 10^{-6}$)

$\tau \sqrt{V\pi}$ \diagdown $\beta / V\pi$	10^{-7}		10^{-6}		10^{-5}	
1	1,63	0	1,63	0	1,68	0
10	4,83	0	4,83	0	4,82	0
10^2	1,78	+1	1,78	+1	1,75	+1
10^3	6,31	+1	6,19	+1	5,55	+1
10^4	2,06	+2	1,82	+2	1,10	+2
10^5	5,18	+2	3,23	+2	1,22	+2
10^6	7,27	+2	3,48	+2		
10^7	7,48	+2				

в структуре пограничного слоя. В качестве второго примера можно использовать задачу о диффузном отражении от консервативно рассеивающей среды ($1 - \lambda = \beta = 0$), рассмотренную в § 6.4. В этом случае $S_1^*(\tau)$ пропорционально $e^{-\frac{\tau}{z_0}}$, где $z_0 = \mu_0/\alpha(x_0)$ (μ_0 — косинус угла падения излучения, x_0 — его частота). Когда z_0 велико, внешнее излучение проникает глубоко в среду, т. е. кванты поля диффузно

ного излучения «рождаются» в основном в глубоких слоях. Поэтому следует ожидать, что в поверхностном слое функция источников будет пропорциональна $\tilde{S}(\tau)$. Что дело так именно и обстоит, можно убедиться на основании анализа профилей линий. Центральные части линий формируются в поверхностных слоях, и их вид отражает зависимость функции источников от глубины вблизи границы. Для проблемы Милна интенсивность выходящего излучения следующим образом выражается через H -функцию для консервативного рассеяния (см. § 6.1):

$$I(0, \mu, x) = H\left(\frac{\mu}{\alpha(x)}\right).$$

Как было показано в § 6.4, выражение, отличающееся от этого лишь на постоянный множитель, получается и для центральных частей линии в задаче о диффузном отражении при $z_0 \gg 1$ [см. формулу (6.4.19)]. Значит, действительно, функция источников в поверхностном слое пропорциональна $\tilde{S}(\tau)$.

Из приведенного только что рассуждения следует важный вывод: универсальность структуры пограничного слоя влечет за собой универсальность формы центральных частей линий поглощения (а также достаточно глубоких центральных депрессий эмиссионных линий). Этот факт, заслуживающий дальнейшего более детального количественного исследования, вероятно, может быть использован для получения информации о физических условиях в наружных слоях звездных атмосфер из анализа профилей сильных линий.

В заключение укажем, что при рассмотрении структуры пограничного слоя предположение о независимости λ и β от глубины не является принципиальным. Сделанные выше выводы должны сохранять силу и в более общем случае, когда λ и β изменяются с глубиной таким образом, что вплоть до достаточно больших τ выполняются неравенства $1 - \lambda \ll 1$ и $\beta \ll 1$. В то же время предположение о постоянстве доплеровской ширины (или другой характерной единицы частоты) является принципиальным.

СРЕДА КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНЫ

Бесконечная и полубесконечная среды являются, по-видимому, единственными примерами систем, для которых решение уравнения переноса можно получить в замкнутой форме. Для плоского слоя конечной оптической толщины сделать это уже не удастся. Приходится довольствоваться значительно более скромными результатами. Самое большее, на что здесь можно надеяться, — это развить строгую асимптотическую теорию для случая оптически толстого слоя. Для монохроматического рассеяния сделать это не так уж трудно. Однако как только мы переходим к проблемам переноса излучения в линиях с учетом перераспределения по частотам, трудности резко возрастают. Поэтому даже такая асимптотическая теория построена еще не до конца, хотя большинство важных с практической точки зрения результатов уже, видимо, найдено.

По содержанию эту главу можно разбить на три части. В § 8.1 и 8.2 выводятся различные уравнения и соотношения, справедливые при произвольных значениях параметров, характеризующих оптические свойства среды. Таких параметров теперь имеется три — вероятность выживания кванта при рассеянии λ , отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии β и, наконец, оптическая толщина среды в центральной частоте линии τ_0 . В § 8.3—8.5 исследуются упрощения, появляющиеся при $\tau_0 \gg 1$, т. е. строится асимптотическая теория. В конце главы (§ 8.6—8.9) подробно рассматривается несколько частных задач, которые исследовались ранее применительно к полубесконечной среде.

§ 8.1. Основные уравнения

Будем исходить из интегрального уравнения для функции источников $S(\tau)$, которое в случае плоского слоя оптической толщины τ_0 имеет вид

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau), \quad (1.1)$$

где $S_1^*(\tau)$ — некоторая заданная функция, характеризующая мощность первичных источников. Исследуем вначале общие свойства уравнения (1.1), не задаваясь конкретным видом $S_1^*(\tau)$. Напомним, что функция $K(\tau, \beta)$, определяющая ядро уравнения (1.1), есть

$$K(\tau, \beta) = A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2(x) E_1[(\alpha(x) + \beta)\tau] dx. \quad (1.2)$$

Обозначим через $\Gamma(\tau, \tau'; \tau_0)$ резольвенту (1.1), т. е. решение уравнения

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) \Gamma(t, \tau'; \tau_0) dt + \\ + \frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau'|, \beta). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Функция $S(\tau)$ выражается через резольвенту следующим образом:

$$S(\tau) = S_1^*(\tau) + \int_0^{\tau_0} \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) S_1^*(\tau') d\tau'. \quad (1.4)$$

Как и в случае полубесконечной среды, резольвента является симметричной функцией τ и τ' :

$$\Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) = \Gamma(\tau', \tau; \tau_0), \quad (1.5)$$

что вытекает из симметрии ядра уравнения (1.3). Кроме того,

$$\Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) = \Gamma(\tau_0 - \tau, \tau_0 - \tau'; \tau_0). \quad (1.6)$$

Это соотношение, легко доказываемое с помощью (1.3), выражает инвариантность резольвенты относительно выбора

направления отсчета оптических глубин, т. е. неизменность резольвенты при замене отсчета τ от верхней границы на отсчет от нижней.

Резольвенту $\Gamma(\tau, \tau'; \tau_0)$ можно выразить через функцию меньшего числа переменных $\Phi(\tau; \tau_0)$, являющуюся частным значением $\Gamma(\tau, \tau'; \tau_0)$:

$$\Phi(\tau; \tau_0) \equiv \Gamma(\tau, 0; \tau_0) = \Gamma(0, \tau; \tau_0) \quad (1.7)$$

и удовлетворяющую поэтому уравнению

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) \Phi(t; \tau_0) dt + \frac{\lambda}{2} K(\tau, \beta). \quad (1.8)$$

Действительно, поступая как и в § 5.1, находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) f(t) dt &= \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) f'(t) dt + \\ &+ f(0) K(\tau, \beta) - f(\tau_0) K(\tau_0 - \tau, \beta). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Пользуясь (1.6) и (1.7), из (1.3) получаем теперь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} &= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} \right) dt + \\ &+ \Phi(\tau'; \tau_0) \frac{\lambda}{2} K(\tau, \beta) - \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) \frac{\lambda}{2} K(\tau_0 - \tau, \beta). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Сравнение с (1.8) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau'} &= \Phi(\tau; \tau_0) \Phi(\tau'; \tau_0) - \\ &- \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Отсюда можно найти, что

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) &= \Phi(|\tau - \tau'|; \tau_0) + \\ &+ \int_0^{\tau} [\Phi(\tau - t; \tau_0) \Phi(\tau' - t; \tau_0) - \Phi(\tau_0 - \tau + t; \tau_0) \times \\ &\times \Phi(\tau_0 - \tau' + t; \tau_0)] dt, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где τ — меньшее из чисел τ, τ' . При $\tau_0 = \infty$ формулы (1.11) и (1.12) переходят соответственно в (5.1.29) и (5.1.31).

Получим еще одно соотношение, которому удовлетворяет функция $\Phi(\tau; \tau_0)$. Дифференцируя (1.3) по τ_0 , находим

$$\frac{\partial \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0)}{\partial \tau_0} = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - t|, \beta) \frac{\partial \Gamma(t, \tau'; \tau_0)}{\partial \tau_0} dt + \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) \frac{\lambda}{2} K(\tau_0 - \tau, \beta). \quad (1.13)$$

Из сопоставления (1.13) и (1.8) следует, что

$$\frac{\partial \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0)}{\partial \tau_0} = \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0). \quad (1.14)$$

Полагая здесь $\tau' = 0$, получаем

$$\frac{\partial \Phi(\tau; \tau_0)}{\partial \tau_0} = \Phi(\tau_0; \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0). \quad (1.15)$$

Это соотношение окажется в дальнейшем очень полезным. Единственное свойство ядра $K(|\tau - \tau'|, \beta)$, которое было использовано при выводе (1.12) и (1.15), это то, что оно есть функция $|\tau - \tau'|$. Следовательно, формулы (1.12) и (1.15) имеют место для широкого класса интегральных уравнений с ядрами, зависящими от модуля разности аргументов. Эти формулы были найдены В. В. Соболевым [5], [11].

Функция $K(\tau, \beta)$ представима в виде суперпозиции экспонент, а именно (см. § 7.1):

$$K(\tau, \beta) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (1.16)$$

Воспользуемся этим фактом. Введем вспомогательную функцию $P(\tau, z; \tau_0)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\tau, z; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) P(\tau', z; \tau_0) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}}. \quad (1.17)$$

Согласно (1.16) свободный член в (1.8) есть суперпозиция свободных членов уравнения (1.17). В силу линейности этих

уравнений заключаем, что

$$\Phi(\tau; \tau_0) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\beta}} P(\tau, z; \tau_0) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z}. \quad (1.18)$$

Из (1.17) с помощью (1.9) можно получить, что $P(\tau, z; \tau_0)$ удовлетворяет также уравнению

$$\frac{\partial P(\tau, z; \tau_0)}{\partial \tau} = -\frac{1}{z} P(\tau, z; \tau_0) + \frac{\lambda}{4\pi} X(z; \tau_0) \Phi(\tau; \tau_0) - \\ - \frac{\lambda}{4\pi} Y(z; \tau_0) \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0), \quad (1.19)$$

где

$$X(z; \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(0, z; \tau_0), \quad (1.20)$$

$$Y(z; \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau_0, z; \tau_0). \quad (1.21)$$

Отсюда

$$P(\tau, z; \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi} X(z; \tau_0) \left(e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' \right) - \\ - \frac{\lambda}{4\pi} Y(z; \tau_0) \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{z}} \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) d\tau'. \quad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.18), приходим к следующему уравнению для $\Phi(\tau; \tau_0)$:

$$\Phi(\tau; \tau_0) = N(\tau; \tau_0) + \int_0^{\tau} [\Phi(\tau'; \tau_0) N(\tau - \tau'; \tau_0) - \\ - \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) M(\tau - \tau'; \tau_0)] d\tau', \quad (1.23)$$

где

$$N(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z'}} X(z'; \tau_0) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}, \quad (1.24)$$

$$M(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau}{z'}} Y(z'; \tau_0) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}. \quad (1.25)$$

Как было показано в § 5.3, в случае полубесконечной среды функцию $\Phi(\tau)$ можно выразить через $\Phi_\infty(\tau)$ и H -функцию. Аналогичным образом, $\Phi(\tau; \tau_0)$ выражается через $\Phi_\infty(\tau)$ и X - и Y -функции, а именно:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau; \tau_0) = & \Phi_\infty(\tau) - \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau + \tau') N(\tau'; \tau_0) d\tau' - \\ & - \int_0^\infty \Phi_\infty(\tau_0 - \tau + \tau') M(\tau'; \tau_0) d\tau'. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Действительно, уравнение для $\Gamma_\infty(\tau, \tau')$

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty(\tau, \tau') = & \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^\infty K(|\tau - \tau''|, \beta) \Gamma_\infty(\tau'', \tau') d\tau'' + \\ & + \frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau'|, \beta) \end{aligned}$$

при $0 \leq \tau, \tau' \leq \tau_0$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty(\tau, \tau') = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau''|, \beta) \Gamma_\infty(\tau'', \tau') d\tau'' + \\ & + \frac{\lambda}{2} K(|\tau - \tau'|, \beta) + \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(\tau + \tau'', \beta) \Gamma_\infty(-\tau'', \tau') d\tau'' + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_0}^\infty K(\tau'' - \tau, \beta) \Gamma_\infty(\tau'', \tau') d\tau''. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Сопоставляя (1.27) с (1.3) и (1.17) и принимая во внимание (1.16), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_\infty(\tau, \tau') = & \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) + \\ & + 2\pi \int_0^{\frac{1}{\beta}} P(\tau, z; \tau_0) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z} \int_0^\infty e^{-\frac{\tau''}{z}} \Gamma_\infty(-\tau'', \tau') d\tau'' + \\ & + 2\pi \int_0^{\frac{1}{\beta}} P(\tau_0 - \tau, z; \tau_0) G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) \frac{dz}{z} \times \\ & \times \int_0^\infty e^{-\frac{\tau''}{z}} \Gamma_\infty(\tau_0 + \tau'', \tau') d\tau''. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Положим здесь $\tau = \Theta$ и изменим обозначение переменной τ' на τ . Учитывая обозначения (1.20) — (1.21) и (1.24) — (1.25), находим

$$\begin{aligned} \Phi_{\infty}(\tau) = \Phi(\tau; \tau_0) + \int_0^{\infty} \Gamma_{\infty}(-\tau', \tau) N(\tau'; \tau_0) d\tau' + \\ + \int_0^{\infty} \Gamma_{\infty}(\tau_0 + \tau', \tau) M(\tau'; \tau_0) d\tau'. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Формула (1.26) сразу же следует отсюда, если вспомнить, что $\Gamma_{\infty}(\tau_1, \tau_2) = \Phi_{\infty}(\tau_2 - \tau_1)$ (см. § 3.6). Интересно, что соотношение (1.26) можно получить также из простых вероятностных соображений (В. В. Иванов [3]).

Когда $\tilde{\lambda} = 1$, функция $\Phi_{\infty}(\tau)$ может не существовать, как это имеет место, например, при доплеровском профиле (см. § 4.6). Можно, однако, выразить $\Phi(\tau; \tau_0)$ через резольвенту $\Gamma(\tau, \tau')$ для полубесконечной (а не бесконечной) среды и X - и Y -функции. Соответствующие выражения, свободные от указанного только что недостатка, имеют вид

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \Phi(\tau) - \int_0^{\infty} \Gamma(\tau_0 + \tau', \tau) M(\tau'; \tau_0) d\tau', \quad (1.30)$$

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \Gamma(\tau_0, \tau_0 - \tau) - \int_0^{\infty} \Gamma(\tau_0 + \tau', \tau_0 - \tau) N(\tau'; \tau_0) d\tau'. \quad (1.31)$$

Они выводятся аналогично (1.26).

Приведенные соотношения показывают, что для получения в замкнутой форме функции Грина для слоя конечной оптической толщины было бы достаточно найти функции $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ в явном виде. Хотя сделать это и не удастся, оказывается все же возможным выявить многие важные свойства этих функций.

§ 8.2. X - и Y -функции

Для слоя конечной оптической толщины функции $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ играют ту же роль, какую для полубесконечной среды играет H -функция. При $\tau_0 \rightarrow \infty$ функция

$X(z; \tau_0)$ переходит в $H(z)$, а $Y(z; \tau_0)$ стремится к нулю:

$$X(z; \infty) = H(z); \quad Y(z; \infty) = 0. \quad (2.1)$$

Это следует из (1.20) и (1.21).

Впервые X- и Y-функции были введены В. А. Амбарцумяном [5] (см. также [1]) при изучении изотропного монохроматического рассеяния. Для задач с анизотропным монохроматическим рассеянием функции X и Y были изучены С. Чандрасекаром [1], И. Басбридж [1] и другими. Подавляющая часть приводимых в этом параграфе соотношений является простым перенесением на случай рассеяния в частотах линий тех результатов, которые были получены ранее при излучении монохроматического рассеяния (см. С. Чандрасекар [1], И. Басбридж [1], В. В. Соболев [1], [12]). Было бы неверно думать, что специфические особенности проблем переноса излучения в частотах линий, связанные с возможностью изменения частоты при рассеяниях, мало сказываются на свойствах X- и Y-функций. При изучении асимптотического поведения $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ при больших τ_0 эти особенности оказываются решающими. Однако существует большое число соотношений, которые справедливы при весьма широких предположениях о характере взаимодействия излучения и вещества. Исследованию таких соотношений общего характера и посвящен главным образом этот параграф.

Согласно (1.4) и (1.17)

$$\frac{4\pi}{\lambda} P(\tau, z; \tau_0) = e^{-\frac{\tau}{z}} + \int_0^{\tau_0} \Gamma(\tau, \tau'; \tau_0) e^{-\frac{\tau'}{z}} d\tau'. \quad (2.2)$$

Положим здесь последовательно $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$. В силу (1.6) и (1.7), $\Gamma(\tau_0, \tau'; \tau_0) = \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0)$. Принимая это во внимание, а также учитывая (1.20) и (1.21), приходим к важным формулам

$$X(z; \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau, \quad (2.3)$$

$$Y(z; \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z}} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau, \quad (2.4)$$

которые позволяют выявить многие существенные свойства X - и Y -функций и получить уравнения, служащие для их определения.

Величина z в уравнении (1.17), а следовательно, и в соотношениях (2.3) и (2.4) может принимать любые (вообще говоря, комплексные) значения. Заменяя в (2.3) z на $-z$, умножая обе части на $e^{-\frac{\tau_0}{z}}$ и сравнивая результат с (2.4), находим следующую связь между функциями X и Y :

$$Y(z; \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{z}} X(-z; \tau_0). \quad (2.5)$$

Выведем уравнения для $X(z)$ и $Y(z)$. Получим в первую очередь следующие нелинейные уравнения, обобщающие уравнения Амбарцумяна — Чандрасекара:

$$\left. \begin{aligned} X(z) &= 1 + \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{X(z) X(z') - Y(z) Y(z')}{z + z'} G \left(\frac{z'}{1 - \beta z'} \right) dz', \\ Y(z) &= e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{X(z) Y(z') - X(z') Y(z)}{z' - z} G \left(\frac{z'}{1 - \beta z'} \right) dz'. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Для этого подставим в (2.3) вместо $\Phi(\tau; \tau_0)$ правую часть (1.23). Учитывая (1.24) и (1.25) и меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned} X(z; \tau_0) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} G \left(\frac{z'}{1 - \beta z'} \right) \frac{dz'}{z'} \left\{ X(z'; \tau_0) \times \right. \\ &\times \int_0^{\tau_0} e^{-\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\tau} d\tau \left[1 + \int_0^{\tau} e^{\frac{\tau'}{z'}} \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' \right] - \\ &\left. - Y(z'; \tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\tau} d\tau \int_0^{\tau} e^{\frac{\tau'}{z'}} \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) d\tau' \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Преобразуя интегралы по τ интегрированием по частям и пользуясь (2.3) и (2.4), приходим к первому из уравнений (2.6). Второе уравнение сразу же получается из первого, если использовать (2.5).

Из (2.3) и (2.4) можно получить и другие уравнения для X- и Y-функций. Дифференцируя эти соотношения по τ_0 и принимая во внимание (1.15), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= \Phi(\tau_0; \tau_0) \left(e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{z}} \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0) d\tau \right), \\ \frac{\partial Y(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= -\frac{1}{z} Y(z; \tau_0) + \\ &+ \Phi(\tau_0; \tau_0) \left(1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z}} \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0) d\tau \right), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= Y(z; \tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0), \\ \frac{\partial Y(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= -\frac{1}{z} Y(z; \tau_0) + X(z; \tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

причем согласно (1.18)

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\frac{1}{\beta}} Y(z'; \tau_0) G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}. \quad (2.9)$$

Граничные условия, при которых должны решаться уравнения (2.8), также получаются из (2.3) и (2.4) и имеют вид

$$X(z; 0) = Y(z; 0) = 1. \quad (2.10)$$

Из (2.8) видно, что для нахождения функций X и Y достаточно определить предварительно только функцию $\Phi(\tau_0; \tau_0)$. Этот факт лежит в основе исследования асимптотического поведения $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ при больших τ_0 , которое дается в § 8.5.

Уравнения (2.8) — (2.9) при граничных условиях (2.10) эквивалентны следующей системе нелинейных

интегральных уравнений для X и Y :

$$\left. \begin{aligned} X(z; \tau_0) &= 1 + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} Y(z; \tau) d\tau \int_0^{\frac{1}{\beta}} Y(z'; \tau) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}, \\ Y(z; \tau_0) &= e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z}} X(z; \tau) d\tau \int_0^{\frac{1}{\beta}} Y(z'; \tau) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Пользуясь способом, указанным В. В. Соболевым [12], можно получить еще одну систему нелинейных интегральных уравнений для X - и Y -функций:

$$\left. \begin{aligned} X(z; \tau_0) &= 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} X(z; \tau) d\tau \times \\ &\times \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)(\tau_0-\tau)} X(z'; \tau) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'}, \\ Y(z; \tau_0) &= e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \\ &+ \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} Y(z; \tau) d\tau \int_0^{\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\tau_0-\tau}{z'}} X(z'; \tau) G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) \frac{dz'}{z'} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Функции X и Y удовлетворяют также системе линейных интегральных уравнений. Она получается из уравнения

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{\lambda} [1 - \lambda \mathcal{U}(z, \beta)] P(\tau, z; \tau_0) &= e^{-\frac{\tau}{z}} + \\ &+ 2\pi z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{P(\tau, z'; \tau_0)}{z' - z} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz' - \\ &- e^{-\frac{\tau_0}{z}} 2\pi z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{P(\tau_0 - \tau, z'; \tau_0)}{z' + z} G\left(\frac{z'}{1-\beta z'}\right) dz', \end{aligned} \quad (2.13)$$

если положить в нем $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$, и имеет вид

$$\begin{aligned}
 & [1 - \lambda \mathcal{U}(z; \beta)] X(z; \tau_0) = \\
 & = 1 + \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{X(z'; \tau_0)}{z' - z} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) dz' - \\
 & \quad - e^{-\frac{\tau_0}{z}} \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{Y(z'; \tau_0)}{z' + z} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) dz', \\
 & [1 - \lambda \mathcal{U}(z; \beta)] Y(z; \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{z}} + \\
 & + \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{Y(z'; \tau_0)}{z' - z} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) dz' - \\
 & \quad - e^{-\frac{\tau_0}{z}} \frac{\lambda}{2} z \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{X(z'; \tau_0)}{z' + z} G\left(\frac{z'}{1 - \beta z'}\right) dz'.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь $\mathcal{U}(z, \beta)$ определяется формулами (7.1.38) или (7.1.40). Формула (2.13) является обобщением уравнений, полученных недавно в задачах о монохроматическом рассеянии Э. Г. Яновицким [1] и Т. Малликином [1]. Хотя можно указать более прямой путь получения (2.13), чем те, которые были предложены Э. Г. Яновицким и Т. Малликином, мы все же не будем доказывать (2.13). Отчасти это связано с тем, что уравнение (2.13) как и система (2.14), не будут использованы в дальнейшем и приводятся в справочных целях.

Получим теперь некоторые интегральные соотношения между функциями $X(z)$ и $Y(z)$. Обозначим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{1}{\beta}} X(z; \tau_0) z^n G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz, \\
 Y_n(\tau_0) = & \int_0^{\frac{1}{\beta}} Y(z; \tau_0) z^n G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz \\
 & (n = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Величины X_n и Y_n представляют собой моменты n -го порядка функций $X(z)$ и $Y(z)$, взятые с весом $G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)$. Обозначим также

$$G_n = \int_0^{\frac{1}{\beta}} z^n G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) dz. \quad (2.16)$$

Согласно (7.1.7)

$$G_n = \int_0^{\infty} K(\tau, \beta) \tau^n d\tau, \quad (2.17)$$

т. е. G_n есть не что иное, как n -й момент функции, определяющей ядро основного интегрального уравнения. Следует подчеркнуть, что интегралы G_n , начиная с некоторого n , могут расходиться. В этом случае соответствующие X_n и Y_n также расходятся. Важнейший пример такого случая — рассеяние в линии без поглощения в непрерывном спектре ($\beta = 0$), когда существуют только моменты нулевого порядка.

Из (2.8) находим, учитывая (2.15) и (2.9),

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_0(\tau_0)}{d\tau_0} &= Y_0(\tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0), \\ \frac{dY_0(\tau_0)}{d\tau_0} &= \left[-\frac{2}{\lambda} + X_0(\tau_0)\right] \Phi(\tau_0; \tau_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

откуда

$$\left(-\frac{2}{\lambda} + X_0\right) dX_0 = Y_0 dY_0. \quad (2.19)$$

Полагая в (2.15) $n = 0$ и $\tau_0 = 0$ и принимая во внимание (2.10) и (7.1.19), получаем

$$X_0(0) = Y_0(0) = \int_0^{\frac{1}{\beta}} G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) dz = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}. \quad (2.20)$$

Поэтому

$$\lambda X_0 = \tilde{\lambda} + \frac{\lambda^2}{4} (X_0^2 - Y_0^2). \quad (2.21)$$

Когда $\tilde{\lambda} = 1$ (т. е. при $\beta = 1 - \lambda = 0$), эта формула переходит в следующую:

$$X_0 + Y_0 = 2. \quad (2.22)$$

Формула (2.21) является частным случаем общего соотношения

$$X_{2n} = G_{2n} + \frac{\lambda}{4} \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j (X_{2n-j} X_j - Y_{2n-j} Y_j) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.23)$$

которое может быть получено из первого уравнения (2.6). На доказательстве его мы не останавливаемся (см. И. Басбридж [1]). Это соотношение справедливо, разумеется, только в том случае, когда все входящие в него моменты существуют. При $\tau_0 = \infty$ оно переходит в (7.5.8). Отметим еще, что при $0 \leq \tilde{\lambda} \leq 1$

$$\int_0^{\frac{1}{\beta}} [1 - \sqrt{1 - \tilde{\lambda}} H(z)] z G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} Y_0^2(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Эта формула имеет место и в том случае, когда G_1 расходится. Когда G_1 конечно (в частности, при монохроматическом рассеянии),

$$\int_0^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{2} X_0(\tau)\right] Y_0(\tau) d\tau = G_1. \quad (2.25)$$

Доказательства этих формул мы опускаем.

При $\tilde{\lambda} = 1$ выполняются также следующие соотношения:

$$\int_0^{\infty} [X(z; \tau_0) - Y(z; \tau_0)] z G(z) dz = \tau_0 Y_0(\tau_0), \quad (2.26)$$

$$\int_0^{\infty} \{2 - [X(z; \tau_0) + Y(z; \tau_0)] Y_0(\tau_0)\} z G(z) dz = \int_0^{\tau_0} Y_0^2(\tau) d\tau, \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\infty} \{(\tau_0 + 2z) Y_0(\tau_0) [X(z; \tau_0) + Y(z; \tau_0)] - 4z\} z G(z) dz = 0. \quad (2.28)$$

Подчеркнем, что интеграл, стоящий в (2.26), вообще говоря, нельзя представить как разность $X_1(\tau_0)$ и $Y_1(\tau_0)$, так как порознь эти моменты могут расходиться. То же самое относится и к интегралам, входящим в (2.27) и (2.28).

Переходя к доказательству (2.26), введем обозначение

$$Z(\tau_0) = \int_0^{\infty} [X(z; \tau_0) - Y(z; \tau_0)] z G(z) dz. \quad (2.29)$$

Дифференцируя это равенство и принимая во внимание (2.8), находим

$$\frac{dZ(\tau_0)}{d\tau_0} = Y_0(\tau_0) - \Phi(\tau_0; \tau_0) Z(\tau_0). \quad (2.30)$$

Но из (2.18) и (2.22) следует, что при $\tilde{\lambda} = 1$

$$\Phi(\tau_0, \tau_0) = -\frac{1}{Y_0(\tau_0)} \frac{dY_0(\tau_0)}{d\tau_0}, \quad (2.31)$$

так что (2.30) можно записать в виде

$$\frac{Y_0(\tau_0) dZ(\tau_0) - Z(\tau_0) dY_0(\tau_0)}{Y_0^2(\tau_0)} = d\tau_0. \quad (2.32)$$

Из (2.29) и (2.10) имеем $Z(0) = 0$. Поэтому (2.32) дает $Z(\tau_0) = \tau_0 Y_0(\tau_0)$, что и требовалось доказать. Соотношения (2.27) и (2.28) доказываются сходным образом.

В тех случаях, когда при $\tilde{\lambda} = 1$ моменты X - и Y -функций первого и второго порядков существуют (например, при монохроматическом рассеянии), интегралы в (2.26) — (2.28) можно разбить на суммы интегралов. Соотношение (2.28) оказывается тогда частным случаем (2.23), соответствующим $n = 1$ и $\tilde{\lambda} = 1$.

Обобщение (2.26) и (2.27) на случай произвольных $\tilde{\lambda}$ ($0 \leq \tilde{\lambda} \leq 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} X(\infty; \tau_0) \int_0^{\frac{1}{\beta}} [X(z; \tau_0) - Y(z; \tau_0)] z G\left(\frac{z}{1 - \beta z}\right) dz = \\ = \int_0^{\tau_0} X(\infty; \tau) Y_0(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.26')$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \int_0^1 [2X(\infty; \tau_0) - X(z; \tau_0) - Y(z; \tau_0)] z G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right) dz = \\ = X(\infty; \tau_0) \int_0^{\tau_0} \frac{Y_0(\tau)}{X(\infty; \tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (2.27')$$

Доказательства этих формул в принципе не отличаются от доказательства (2.26).

При возрастании z от 0 до ∞ функции $X(z)$ и $Y(z)$ монотонно возрастают соответственно от 1 и 0 до

$$X(\infty; \tau_0) = Y(\infty; \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau. \quad (2.33)$$

Это следует из (2.3) и (2.4). Переходя в любом из уравнений (2.6) к пределу $z \rightarrow \infty$, находим

$$X(\infty; \tau_0) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{2} [X_0(\tau_0) - Y_0(\tau_0)]}, \quad (2.34)$$

или, если воспользоваться (2.21),

$$X(\infty; \tau_0) = \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{\lambda} + \frac{\lambda^2}{4} Y_0^2(\tau_0) + \frac{\lambda}{2} Y_0(\tau_0)}}. \quad (2.35)$$

В частности, при $\tilde{\lambda} = 1$

$$X(\infty; \tau_0) = \frac{1}{Y_0(\tau_0)}. \quad (2.36)$$

При $z \neq 0$ из (2.3) и (2.4) для $X(z)$ и $Y(z)$ получаются следующие разложения в ряды по обратным степеням z :

$$X(z; \tau_0) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x_i(\tau_0)}{i!} z^{-i}, \quad (2.37)$$

$$Y(z; \tau_0) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{y_i(\tau_0)}{i!} z^{-i}, \quad (2.38)$$

где

$$x_0(\tau_0) = y_0(\tau_0) = X(\infty; \tau_0) \quad (2.39)$$

и при $i \geq 1$

$$x_i(\tau_0^-) = \int_0^{\tau_0} \tau^i \Phi(\tau; \tau_0) d\tau, \quad (2.40)$$

$$y_i(\tau_0^-) = \int_0^{\tau_0} (\tau_0 - \tau)^i \Phi(\tau; \tau_0) d\tau + \tau_0^i, \quad (2.41)$$

так что

$$y_i(\tau_0) = \sum_{j=0}^i (-1)^j C_i^j \tau_0^{i-j} x_j(\tau_0), \quad (2.42)$$

где C_i^j — биномиальные коэффициенты. В частности, при $i = 1$ (2.42) дает

$$x_1(\tau_0) + y_1(\tau_0) = \tau_0 X(\infty; \tau_0). \quad (2.43)$$

Подставляя (2.37) и (2.38) в (2.8) и приравнявая коэффициенты при z^0 и z^{-1} в обеих частях получающихся разложений, находим, что

$$\frac{dX(\infty; \tau_0)}{d\tau_0} = X(\infty; \tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0^-) \quad (2.44)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1(\tau_0)}{d\tau_0} &= y_1(\tau_0^-) \Phi(\tau_0^-; \tau_0), \\ \frac{dy_1(\tau_0)}{d\tau_0} &= X(\infty; \tau_0) + x_1(\tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0), \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

откуда

$$y_1(\tau_0) - x_1(\tau_0^-) = \frac{1}{X(\infty; \tau_0)} \int_0^{\tau_0} X^2(\infty; \tau) d\tau. \quad (2.46)$$

Соотношение (2.46) понадобится в дальнейшем.

Значение X - и Y -функций на бесконечности, т. е. $X(\infty; \tau_0)$, часто встречается при решении различных задач. Покажем, следуя В. В. Соболеву [13], что

$$\frac{1}{1 - \tilde{\lambda} + \frac{12\lambda}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} L(\tau, \beta) \tau (\tau_0 - \tau) d\tau} < X^2(\infty; \tau_0) < \frac{1}{1 - \tilde{\lambda} + \lambda L(\tau_0, \beta)}. \quad (2.47)$$

Что касается верхней оценки, то она получается следующим образом. Умножая (2.4) на $G\left(\frac{z}{1-\beta z}\right)$ и интегрируя по z от 0 до $1/\beta$, находим

$$Y_0(\tau_0) = L(\tau_0, \beta) + \int_0^{\tau_0} L(\tau_0 - \tau, \beta) \Phi(\tau; \tau_0) d\tau. \quad (2.48)$$

Так как $L(\tau, \beta)$ монотонно убывает с ростом τ , имеем

$$Y_0(\tau_0) > L(\tau_0, \beta) \left(1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau\right),$$

или

$$Y_0(\tau_0) > L(\tau_0, \beta) X(\infty; \tau_0). \quad (2.49)$$

Комбинируя это неравенство с соотношением

$$(1 - \tilde{\lambda}) X^2(\infty; \tau_0) + \lambda X(\infty; \tau_0) Y_0(\tau_0) = 1, \quad (2.50)$$

являющимся следствием (2.34) и (2.21), получаем оценку $X(\infty; \tau_0)$ сверху, т. е. правое неравенство (2.47). Нижняя оценка получается немного сложнее. Уравнение (1.17) при $z = \infty$ принимает вид

$$P(\tau, \infty; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) P(\tau', \infty; \tau_0) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi}. \quad (2.51)$$

Заменяя здесь τ на $\tau_0 - \tau$, находим

$$P(\tau, \infty; \tau_0) = P(\tau_0 - \tau, \infty; \tau_0). \quad (2.52)$$

Умножая (2.51) на $\tau(\tau_0 - \tau)$, интегрируя по τ в пределах от 0 до τ_0 и учитывая (2.52), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) \tau(\tau_0 - \tau) d\tau = \\ & = \lambda \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} K(\tau', \beta) (\tau - \tau') (\tau_0 - \tau + \tau') d\tau' + \\ & \qquad \qquad \qquad + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\tau_0^3}{6}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 (1 - \tilde{\lambda}) \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) \tau (\tau_0 - \tau) d\tau + \\
 + 2\lambda \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} L(\tau', \beta) \tau' d\tau' = \\
 = \lambda \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) (2\tau - \tau_0) d\tau \int_0^{\tau} L(\tau', \beta) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\tau_0^3}{6}. \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Далее, (1.22) дает

$$\begin{aligned}
 P(\tau, \infty; \tau_0) = \frac{\lambda}{4\pi} X(\infty; \tau_0) \left(1 + \int_0^{\tau} \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' - \right. \\
 \left. - \int_0^{\tau} \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) d\tau' \right), \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 P(\tau, \infty; \tau_0) \leq P\left(\frac{\tau_0}{2}, \infty; \tau_0\right) = \frac{\lambda}{4\pi} X(\infty; \tau_0) \times \\
 \times \left(1 + \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' - \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} \Phi(\tau_0 - \tau'; \tau_0) d\tau' \right) < \\
 < \frac{\lambda}{4\pi} X(\infty; \tau_0) \left(1 + \int_0^{\tau_0} \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' \right) = \frac{\lambda}{4\pi} X^2(\infty; \tau_0). \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в правой части (2.53), положителен. Отбрасывая его и мажорируя функцию $P(\tau, \infty; \tau_0)$ в левой части величиной $\frac{\lambda}{4\pi} X^2(\infty; \tau_0)$, приходим к левому неравенству (2.47).

Из (2.47) при $\tilde{\lambda} = 1$ имеем

$$\left[\frac{12}{\tau_0^3} \int_0^{\tau_0} L(\tau) \tau (\tau_0 - \tau) d\tau \right]^{-\frac{1}{2}} < X(\infty; \tau_0) < [L(\tau_0)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.56)$$

Используя асимптотические свойства функции $L(\tau)$, доказанные в § 2.6, можно показать, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$

$$\int_0^{\tau_0} L(\tau) \tau (\tau_0 - \tau) d\tau \sim \frac{\tau_0^3 L(\tau_0)}{(2 - 2\gamma)(3 - 2\gamma)}, \quad (2.57)$$

где γ — постоянная, определяющая скорость убывания коэффициента поглощения в крыльях линии. Учитывая монотонность $X(\infty; \tau_0)$, из (2.56) и (2.57) можно заключить, что в случае $\tilde{\lambda} = 1$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$

$$X(\infty; \tau_0) \sim \frac{c_1}{\sqrt{L(\tau_0)}}, \quad (2.58)$$

где c_1 — некоторая (пока неизвестная) постоянная. В § 8.5 будет показано, что

$$c_1 = \Gamma(\gamma) \sqrt{\frac{\sin \pi\gamma}{2\pi\Gamma(2\gamma)}}. \quad (2.59)$$

В частности, $c_1 \rightarrow 1$ при $\gamma \rightarrow 0$, $c_1 = 0,914$ при $\gamma = 1/4$ (фойгтовский и лоренцовский профили) и $c_1 = 0,707$ при $\gamma = 1/2$ (доплеровский профиль).

Асимптотику (2.58) можно переписать также в виде

$$X(\infty; \tau_0) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{2\Gamma(2\gamma)} \left[1 - V\left(\frac{1}{\tau_0}\right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.60)$$

Опыт, накопленный при исследовании бесконечной и полубесконечной сред, подсказывает, что это представление должно быть более общим, чем (2.58). В частности, следует ожидать, что при $\gamma = 1$ формула (2.60) будет давать главный член асимптотики функции $X(\infty; \tau_0)$, соответствующей монохроматическому рассеянию. В § 8.4 мы убедимся, что так оно и есть на самом деле.

§ 8.3. Роль диссипативных процессов

Большое количество параметров, от которых зависит решение уравнения переноса для плоского слоя, делает крайне желательным выявление всех предельных случаев, когда возникают какие-нибудь упрощения. В этом параграфе мы исследуем характер тех упрощений, которые

встречаются при изучении наиболее интересного случая почти консервативного рассеяния ($1 - \tilde{\lambda} \ll 1$) в оптически толстом слое ($\tau_0 \gg 1$).

Существуют три механизма выбывания квантов из процесса случайных блужданий в среде — гибель во время рассеяний, поглощение в полете и выход через границы. Первые два из этих процессов приводят к тому, что энергия поля излучения превращается в другие формы, т. е. происходит диссипация лучистой энергии. Гибель квантов при рассеяниях и поглощение их в полете удобно объединить поэтому под общим названием *диссипативных процессов*. Выход излучения из среды, очевидно, не есть диссипативный процесс, так как энергия остается в форме излучения.

Роль диссипативных процессов в расчете на одно рассеяние определяется значением $1 - \tilde{\lambda}$. Однако из малости $1 - \tilde{\lambda}$ еще не следует, что в среде в целом диссипация энергии мала. Она определяется не только величиной $1 - \tilde{\lambda}$, но и оптической толщиной среды τ_0 , возрастая с ростом τ_0 . Оказывается очень полезным ввести количественную характеристику роли диссипативных процессов в среде. Назовем *диссипативностью среды* величину

$$\omega = \frac{1 - \tilde{\lambda}}{1 - V\left(\frac{1}{\tau_0}\right)}, \quad (3.1)$$

где τ_0 — оптическая толщина слоя, $V(u)$ — функция, подробно изученная в § 2.6 и 2.7. Среды с $\omega \ll 1$ будем называть слабо диссипативными. Предельный случай слабо диссипативной среды — консервативная среда, для которой $\omega = 0$. Если $\omega \gg 1$, будем говорить, что среда сильно диссипативна.

Чтобы понять, почему величина ω действительно характеризует диссипативные свойства среды как целого, проще всего обратиться к тем частным случаям, которые представляют практический интерес.

При монохроматическом рассеянии

$$V_M(u) = \frac{\text{arc tg } u}{u} = 1 - \frac{u^2}{3} + \dots,$$

и (3.1) дает при $\beta =$

$$\omega \sim 3(1 - \lambda) \tau_0^2 \quad k\tau_0)^2, \quad (3.1a)$$

где k^{-1} — диффузионная длина (см. § 3.2). Соотношение (3.1а) находится в полном соответствии с тем, чего следовало ожидать, исходя из результатов гл. III: роль диссипации энергии должна определяться значением характерного параметра $k\tau_0$. При доплеровском, фойгтовском и лоренцовском профилях, пользуясь асимптотиками функций $V(u)$, найденными в § 2.7, получаем из (3.1)

$$\text{Доплер: } \omega \sim \frac{4}{\sqrt{\pi}} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0} (1 - \tilde{\lambda}), \quad (3.1б)$$

$$\text{Фойгт: } \omega \sim \frac{3}{\sqrt{2\pi U(a, 0)}} \left(\frac{\tau_0}{a}\right)^{1/2} (1 - \tilde{\lambda}) \quad \left(\tau_0 \gg \frac{1}{a}\right), \quad (3.1в)$$

$$\text{Лоренц: } \omega \sim \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_0^{1/2} (1 - \tilde{\lambda}). \quad (3.1г)$$

Рассмотрим подробнее, что эти выражения дают в тех частных случаях, когда один из диссипативных процессов преобладает над другим. Будем сначала считать, что поглощением в непрерывном спектре можно пренебречь по сравнению с гибелью квантов при рассеяниях, т. е. что $1 - \lambda \gg \beta\delta$ (β) (см. § 7.3). В этом случае $1 - \tilde{\lambda}$ можно заменить на $1 - \lambda$. Из сопоставления (2.6.56) и (2.6.46) находим, что

$$1 - V\left(\frac{1}{\tau_0}\right) \sim \frac{\pi}{2\Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma} L(\tau_0).$$

Подставляя это соотношение в (3.1), получаем, что при $1 - \lambda \gg \beta\delta$ (β)

$$\omega \sim \frac{2}{\pi} \Gamma(2\gamma) \sin \pi\gamma \frac{1 - \lambda}{L(\tau_0)}. \quad (3.2)$$

Таким образом, с точностью до множителя порядка единицы диссипативность среды равна в этом случае $\frac{1 - \lambda}{L(\tau_0)}$. Из предыдущих глав ясно, что это отношение как раз и должно быть той характерной величиной, которой определяется относительная роль гибели квантов при рассеяниях и их выхода из среды, т. е. роль диссипативных процессов.

В противоположном предельном случае $1 - \lambda \ll \beta\delta$ (β) поглощение в непрерывном спектре доминирует над

гибелью квантов при рассеяниях. При каких τ_0 должна начать сказываться роль диссипативных процессов в этом случае? Ответ очевиден: при *смещении* кванта на расстояние порядка τ_0 оптический *путь* в непрерывном спектре, измеренный вдоль траектории кванта, должен быть по порядку равен единице. При фойгтовском и лоренцовском профилях «изломанностью» траекторий можно пренебречь (см. § 7.3). Поэтому при смещении на τ_0 квант проходит оптический путь в непрерывном спектре, равный по порядку $\beta\tau_0$. Следовательно, при фойгтовском и лоренцовском профилях диссипативные процессы начинают играть роль, когда τ_0 становится порядка β^{-1} . При доплеровском профиле положение иное, так как нужно принимать во внимание «изломанность» траекторий. Из обсуждения, приведенного в § 7.3, следует, что поглощение в непрерывном спектре должно будет начать сказываться уже тогда, когда τ_0 станет порядка $(\beta \ln 1/\beta)^{-1}$.

Сопоставим эти физические соображения с тем, что дают формулы (3.1б) — (3.1г). Заменяя в них $1 - \tilde{\lambda} \equiv 1 - \lambda + \lambda\beta\delta(\beta)$ на $\beta\delta(\beta)$ и беря главные члены асимптотик $\delta(\beta)$ из § 7.3, находим, что в рассматриваемом случае

$$\text{Доплер: } \omega \sim \frac{8}{\pi} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0} \beta \sqrt{\ln \frac{1}{\beta}}, \quad (3.3a)$$

$$\text{Фойгт и Лоренц: } \omega \sim \frac{3}{\sqrt{2}} (\beta\tau_0)^{1/2}. \quad (3.3б)$$

Отсюда следует, что величина ω возрастает с τ_0 , становясь по порядку равной единице, когда $\tau_0 = (\beta \ln 1/\beta)^{-1}$ при доплеровском профиле и $\tau_0 = \beta^{-1}$ при фойгтовском и лоренцовском профилях. Такое поведение ω находится в полном соответствии с тем, как должна вести себя величина, определяющая роль диссипативных процессов в среде.

Резюмируя, можно сказать, что значение параметра ω , определенного согласно (3.1), во всех случаях должно быть хорошей мерой роли диссипативных процессов. При $\omega \ll 1$ диссипация должна быть мала, так что почти вся энергия, вырабатываемая в среде, выходит наружу. При $\omega \gg 1$, наоборот, лишь малая доля энергии, затрачиваемой на возбуждение верхнего уровня, выносится из среды линейчатым излучением.

Теперь можно перейти непосредственно к обсуждению упрощений в решении уравнения переноса в различных предельных случаях. Наибольшие упрощения появляются, когда диссипативность среды мала ($\omega \ll 1$). В этом случае в первом приближении можно считать, что диссипации энергии не происходит вовсе, т. е. рассматривать среду как строго консервативную ($\omega = 0$). В соответствии с этим, в интегральном члене уравнения для функции источников $S(\tau)$

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau) \quad (3.4)$$

можно положить $\lambda = 1$ и $\beta = 0$, и вместо (3.4) решать уравнение

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau). \quad (3.5)$$

Следует специально подчеркнуть, что источниковый член $S_1^*(\tau)$ в (3.5) тот же самый, что и в (3.4). Обычно $S_1^*(\tau)$ зависит от параметров λ и β , и эта зависимость должна быть сохранена. Таким образом, в предельном случае слабо диссипативной среды функция источников $S(\tau)$ зависит от λ и β практически только через посредство источникового члена $S_1^*(\tau)$, что, конечно, является огромным упрощением.

Обратимся теперь к средам с заметной диссипацией. И здесь можно выделить случаи, когда возникают некоторые упрощения. Если $1 - \lambda \gg \beta\delta(\beta)$, поглощением в непрерывном спектре можно пренебречь по сравнению с гибелью квантов при рассеяниях. Соответственно этому, уравнение (3.4) можно заменить на

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau), \quad (3.6)$$

т. е. положить в интегральном члене $\beta = 0$. При $1 - \lambda \ll \beta\delta(\beta)$ кванты, наоборот, гибнут в основном за счет поглощения в непрерывном спектре, и вместо (3.4) функцию

источников $S(\tau)$ можно находить из уравнения

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\bar{\tau}} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + S_1^*(\tau). \quad (3.7)$$

До сих пор считалось, что λ и β не зависят от координат. Аргументация, использованная в этом параграфе, позволяет утверждать, что иногда эти (вообще говоря, довольно жесткие) условия могут быть существенно ослаблены. Так, если в среде с переменными λ и β диссипативные процессы несут существенны, функцию источников по-прежнему можно находить из уравнения (3.5). Переменность λ и β сказывается только на виде функции $S_1^*(\tau)$. Однако вряд ли можно получить простой и вместе с тем достаточно общий критерий того, что в среде с переменными λ и β диссипацией энергии можно пренебречь.

Классификация сред по роли диссипативных процессов в них, по существу, известна в теории переноса очень давно, но устоявшейся терминологии здесь нет. Ю. Эвретт и Д. Хаммер [1] и Д. Хаммер [5] называют слабо диссипативные среды эффективно тонкими, сильно диссипативные — эффективно толстыми. Имеются работы, в которых среды с $\omega \ll 1$ предлагается называть оптически тонкими, — и это несмотря на то, что $\tau_0 \gg 1$! Количественной характеристики роли диссипативных процессов до сих пор, по-видимому, не вводилось. Следует, впрочем, указать, что между понятиями диссипативности среды, длины термализации и толщины пограничного слоя существует теснейшая связь.

§ 8.4. Асимптотический режим при монохроматическом рассеянии

Переходим к исследованию асимптотического поведения решений уравнения переноса в оптически толстом слое. Рассмотрим вначале монохроматическое рассеяние с $\beta = 0$. Этот случай является самым простым, что связано со следующим обстоятельством. Преобразование Лапласа от резольвентной функции $\Phi(\tau)$ в случае монохроматического рассеяния имеет линию ветвления ($-\infty, -1$) и полюс $s = -k$ ($0 \leq k < 1$), где k — корень характеристического

уравнения (см. гл. III)

$$\frac{\lambda}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} = 1. \quad (4.1)$$

Тот факт, что самой правой особенностью $\bar{\Phi}(s)$ является полюс (а не правый конец линии ветвления, как это имеет место в задачах о рассеянии в частотах линии), очень сильно упрощает дело.

Исследование асимптотического поведения решений уравнения переноса при больших τ_0 сводится к отысканию асимптотики резольвентной функции $\Phi(\tau; \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$. Поскольку для полупространства точные решения уравнения переноса известны, достаточно выразить $\Phi(\tau; \tau_0)$ при больших τ_0 через величины, относящиеся к полубесконечной среде.

Функция $\Phi(\tau; \tau_0)$ при монохроматическом рассеянии удовлетворяет уравнению

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) \Phi(\tau'; \tau_0) d\tau' + \frac{\lambda}{2} E_1(\tau). \quad (4.2)$$

Пусть $\rho(\tau, \mu, \tau_0)$ — решение уравнения

$$\rho(\tau, \mu; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu; \tau_0) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}}. \quad (4.3)$$

Параметр μ может принимать любые (вообще говоря, комплексные) значения. Когда μ вещественно и заключено в промежутке от 0 до 1, величина $\rho(\tau, \mu; \tau_0)$ имеет смысл вероятности выхода кванта с глубины τ (см. § 5.2). Так как

$$E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\frac{\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu}, \quad (4.4)$$

то

$$\Phi(\tau; \tau_0) = 2\pi \int_0^1 \rho(\tau, \mu; \tau_0) \frac{d\mu}{\mu}. \quad (4.5)$$

Функцию $\rho(\tau, \mu; \tau_0)$ при $\tau_0 = \infty$ обозначим через $\rho(\tau, \mu)$. Она представляет собой ограниченное при $\tau \rightarrow \infty$

решение уравнения

$$\rho(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \quad (4.6)$$

и равна [см. формулу (5.1.36)]

$$\rho(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{4\pi} \varphi(\mu) \left(e^{-\frac{\tau}{\mu}} + \int_0^{\tau} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\mu}} \Phi(\tau') d\tau' \right), \quad (4.7)$$

где $\Phi(\tau) \equiv \Phi(\tau; \infty)$, а $\varphi(\mu)$ — функция Амбарцумяна, т. е. H -функция, соответствующая монохроматическому рассеянию. Функции $\Phi(\tau)$ и $\varphi(\mu)$ были исследованы в § 3.7. В частности, было указано, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$\Phi(\tau) \sim C_1 \varphi\left(\frac{1}{k}\right) e^{-k\tau}, \quad (4.8)$$

где

$$C_1 = \frac{\lambda}{2k\varphi^2\left(\frac{1}{k}\right)} \left| \frac{dk^2}{d\lambda} \right|. \quad (4.9)$$

Подставляя это выражение в (4.7), находим, что при $0 \leq \mu < 1$ и $\tau \gg 1$

$$\rho(\tau, \mu) \sim \frac{\lambda}{4\pi} C_1 \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \frac{\mu\varphi(\mu)}{1-k\mu} e^{-k\tau}. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.6) при $\tau \leq \tau_0$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho(\tau, \mu) = & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu) d\tau' + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} E_1(\tau' - \tau) \rho(\tau', \mu) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

При $0 < \mu \leq 1$ и $\tau_0 \gg 1$ во второе слагаемое в правой части можно подставить (4.10). Выполняя это, получаем

$$\begin{aligned} \rho(\tau, \mu) \sim & \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} E_1(|\tau - \tau'|) \rho(\tau', \mu) d\tau' + \\ & + \frac{\lambda}{2} \rho(\tau_0, \mu) \int_0^1 e^{-\frac{\tau_0-\tau}{\mu}} \frac{d\mu}{1+k\mu} + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{\mu}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Сравнение с (4.3) дает

$$p(\tau, \mu) \sim p(\tau, \mu; \tau_0) + p(\tau_0, \mu) D(\tau_0 - \tau; \tau_0), \quad (4.13)$$

где

$$D(\tau; \tau_0) = 2\pi \int_0^1 \frac{p(\tau, \mu; \tau_0)}{1 + k\mu} d\mu. \quad (4.14)$$

Из (4.13) находим

$$D(\tau; \tau_0) \sim \frac{D(\tau) - D(\tau_0) D(\tau_0 - \tau)}{1 - D^2(\tau_0)}, \quad (4.15)$$

где

$$D(\tau) = 2\pi \int_0^1 \frac{p(\tau, \mu)}{1 + k\mu} d\mu. \quad (4.16)$$

Таким образом, функцию $D(\tau; \tau_0)$ можно считать известной, так как она выражена через величины, относящиеся к полубесконечной среде. Величину $D(\tau_0)$, входящую в (4.15), можно заменить ее асимптотикой, получающейся при подстановке (4.10) в (4.16):

$$D(\tau_0) \sim C_1 \Phi\left(\frac{1}{k}\right) \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\mu \Phi(\mu)}{1 - k^2 \mu^2} d\mu e^{-k\tau_0}, \quad (4.17)$$

а функцию $D(\tau)$ при всех $\tau \geq 0$ выразить через $\Phi(\tau)$:

$$D(\tau) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{k}\right)} \int_{\tau}^{\infty} \Phi(\tau') e^{k(\tau - \tau')} d\tau'. \quad (4.18)$$

Для получения последней формулы заметим прежде всего, что

$$\frac{\partial p(\tau, \mu)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\mu} p(\tau, \mu) + \frac{\lambda}{4\pi} \Phi(\mu) \Phi(\tau) \quad (4.19)$$

и

$$\Phi\left(\frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\Phi(\mu')}{1 + k\mu'} d\mu'\right) = 1. \quad (4.20)$$

Первое из этих соотношений есть частный случай (5.1.35), соответствующий монохроматическому рассеянию, второе получается из (3.7.11) при $\mu = 1/k$. Дифференцируя (4.16) и принимая во внимание (4.19) и (4.20), нетрудно получить

$$\frac{dD(\tau)}{d\tau} = kD(\tau) - \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{k}\right)} \Phi(\tau),$$

откуда сразу же следует (4.18).

Если в (4.18) подставить явное выражение для $\Phi(\tau)$, даваемое (3.7.10), и выполнить интегрирование по τ' , мы получим для $D(\tau)$ сравнительно простое интегральное представление. Оно было использовано М. Хислетом и Р. Уормингом [2] при составлении таблиц функции $D(\tau)$ [обозначаемой ими через $f(\tau)$].

Полагая в (4.18) $\tau = \tau_0 \gg 1$ и пользуясь (4.8), находим

$$D(\tau_0) \sim \frac{C_1}{2k} e^{-k\tau_0}. \quad (4.21)$$

Сопоставляя этот результат с (4.17) и подставляя для C_1 выражение (4.9), приходим к выводу, что

$$\int_0^1 \frac{\mu\Phi(\mu)}{1-k^2\mu^2} d\mu = \frac{1}{\lambda k\Phi\left(\frac{1}{k}\right)}. \quad (4.22)$$

Напомним, что $\Phi\left(\frac{1}{k}\right)$ (и $\frac{dk^2}{d\lambda}$) в функции λ были приведены в гл. III.

Наконец, подставляя (4.13) в (4.5), приходим к следующему окончательному выражению для $\Phi(\tau; \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$:

$$\Phi(\tau; \tau_0) \sim \Phi(\tau) - \Phi(\tau_0) \frac{D(\tau_0 - \tau) - D(\tau_0)D(\tau)}{1 - D^2(\tau_0)}. \quad (4.23)$$

Область применимости этой формулы зависит от значения λ : чем больше роль истинного поглощения, тем больше то минимальное τ_0 , при котором (4.23) обеспечивает уже разумную точность. При $1 - \lambda \ll 1$ ошибка не будет превышать нескольких процентов, по-видимому, уже при $\tau_0 = 2 \div 3$.

При $\lambda = 1$ непосредственно использовать формулу (4.23) нельзя, так как дробь в правой части дает неопределенность

вида $\frac{0}{0}$. Раскроем ее. Перепишем (4.18) в виде

$$D(\tau) = D(0) e^{k\tau} - [1 - D(0)] \int_0^{\tau} \Phi(\tau') e^{k(\tau-\tau')} d\tau'. \quad (4.24)$$

Согласно (4.16) и (4.20)

$$D(0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{1 + k\mu} d\mu = 1 - \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{k}\right)}. \quad (4.25)$$

При $1 - \lambda \ll 1$ находим отсюда, учитывая (3.7.27), что точно до членов порядка k

$$D(0) \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} k. \quad (4.26)$$

Далее, при $k = 0$ (т. е. при $\lambda = 1$)

$$\int_0^{\tau} \Phi(\tau') d\tau' = [\tau + q(\tau)] \sqrt{3} - 1,$$

где $q(\tau)$ — функция Хопфа (см. § 3.8). Из (4.24) получаем теперь, что при $k\tau \ll k\tau_0 \ll 1$

$$D(\tau) \sim 1 - k[\tau + 2q(\tau)]. \quad (4.27)$$

В частности, при $\tau = \tau_0 \gg 1$ можно положить

$$D(\tau_0) \sim 1 - k[\tau_0 + 2q(\infty)]. \quad (4.28)$$

Вводя (4.27) и (4.28) в (4.23) и учитывая, что $\Phi(\tau_0) \sim \sqrt{3}$ при $\tau_0 \gg 1$ и $k\tau_0 \ll 1$, находим

$$\Phi(\tau; \tau_0) \sim \Phi(\tau) - \frac{\tau + q(\tau) - q(\tau_0 - \tau) + q(\infty)}{\tau_0 + 2q(\infty)} \sqrt{3}. \quad (4.29)$$

Как ясно из вывода, при $\lambda = 1$ эта асимптотика годится при всех $\tau_0 \gg 1$. Когда $1 - \lambda \ll 1$, она применима при тех $\tau_0 \gg 1$, для которых $k\tau_0 \ll 1$ (т. е. для слабо диссипативных оптически толстых сред).

Теперь нетрудно получить и асимптотики X - и Y -функций для изотропного монохроматического рассеяния при $\beta = 0$. Эти функции мы будем обозначать через $\varphi(\mu; \tau_0)$ и

$\psi(\mu; \tau_0)$. Они связаны с $\Phi(\tau; \tau_0)$ соотношениями (см. § 8.2)

$$\varphi(\mu; \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau, \quad (4.30)$$

$$\psi(\mu; \tau_0) = e^{-\frac{\tau_0}{\mu}} + \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\mu}} \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0) d\tau. \quad (4.31)$$

Подробные таблицы $\varphi(\mu; \tau_0)$ и $\psi(\mu; \tau_0)$ опубликованы Ю.Собоути [1] и Дж. Карлстедтом и Т. Малликином [1].

Подставляя (4.23) в (4.30) и (4.31) и пользуясь (4.18), (4.21) и (4.8), можно показать, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$ и $0 \leq \mu \leq 1$

$$\varphi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \varphi(\mu, \lambda) - \frac{C e^{-2k\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}} \frac{\mu}{1 - k\mu} \varphi(\mu, \lambda), \quad (4.32)$$

$$\psi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \frac{C_1 e^{-k\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}} \frac{\mu}{1 - k\mu} \varphi(\mu, \lambda), \quad (4.33)$$

где C_1 дается формулой (4.9) и

$$2kC = C_1^2. \quad (4.34)$$

С увеличением роли поглощения минимальное τ_0 , при котором эти формулы могут служить разумным приближением, быстро возрастает. Поэтому практическая область применимости асимптотик (4.32) и (4.33) ограничена λ , достаточно близкими к единице. Этим фактом можно воспользоваться для дальнейшего упрощения (4.32) и (4.33).

При $1 - \lambda \ll 1$ имеем $k \sim \sqrt{3(1-\lambda)}$ и $\varphi(\mu, \lambda) \sim (1 - k\mu) \varphi(\mu, 1)$ (см. § 3.7). Далее, согласно (3.2.7) и (3.7.27) при $k \ll 1$ (4.9) и (4.34) дают

$$\left. \begin{aligned} C_1 &\sim 2k [1 - 2kq(\infty)], \\ C &\sim 2k [1 - 4kq(\infty)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Поэтому при слабом поглощении с точностью до главных членов разложения по k

$$\varphi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \varphi(\mu, 1) - \frac{2ke^{-2k\tau_0}}{1 - [1 - 4kq(\infty)] e^{-2k\tau_0}} \mu \varphi(\mu, 1), \quad (4.36)$$

$$\psi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \frac{2ke^{-k\tau_0}}{1 - [1 - 4kq(\infty)] e^{-2k\tau_0}} \mu \varphi(\mu, 1). \quad (4.37)$$

При $k\tau_0 \ll 1$ (в частности, при $\lambda = 1$) находим отсюда

$$\varphi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \varphi(\mu, 1) - \frac{\mu\varphi(\mu, 1)}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \quad (4.38)$$

$$\psi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \frac{\mu\varphi(\mu, 1)}{\tau_0 + 2q(\infty)}. \quad (4.39)$$

До сих пор считалось, что $0 \leq \mu \leq 1$. Для некоторых задач представляют интерес также и значения μ , большие единицы. Можно показать, что при $\mu > 1$ и $\tau \gg 1$

$$\begin{aligned} \rho(\tau, \mu) \sim \frac{\lambda}{4\pi} C_1 \varphi\left(\frac{1}{k}\right) \frac{\mu\varphi(\mu)}{1 - k\mu} e^{-k\tau} + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

и с помощью этого соотношения получить асимптотики $\varphi(\mu; \tau_0)$ и $\psi(\mu; \tau_0)$ при $\mu > 1$. Они имеют следующий вид: при $\lambda < 1$

$$\begin{aligned} \varphi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \varphi(\mu, \lambda) - \frac{C e^{-2k\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}} \frac{\mu\varphi(\mu, \lambda)}{1 - k\mu} - \\ - \frac{C_1 e^{-(k + \frac{1}{\mu})\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}} \frac{\mu}{1 + k\mu} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \varphi(\mu, \lambda)}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \psi(\mu; \tau_0, \lambda) \sim \frac{C_1 e^{-k\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}} \frac{\mu\varphi(\mu, \lambda)}{1 - k\mu} + \\ + \frac{e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}}{\left(1 - \frac{\lambda}{2} \mu \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \varphi(\mu, \lambda)} \left(1 + \frac{\mu}{1 + k\mu} \frac{C e^{-2k\tau_0}}{1 - \frac{C}{2k} e^{-2k\tau_0}}\right); \end{aligned} \quad (4.42)$$

при $\lambda = 1$

$$\varphi(\mu; \tau_0, 1) \sim \varphi(\mu, 1) - \frac{\mu \varphi(\mu, 1)}{\tau_0 + 2q(\infty)} - \frac{\mu}{\left(1 - \frac{\mu}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \varphi(\mu, 1)} \frac{e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}}{\tau_0 + 2q(\infty)}, \quad (4.43)$$

$$\psi(\mu; \tau_0, 1) \sim \frac{\mu \varphi(\mu, 1)}{\tau_0 + 2q(\infty)} + \frac{e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}}{\left(1 - \frac{\mu}{2} \ln \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) \varphi(\mu, 1)} \times \left(1 + \frac{\mu}{\tau_0 + 2q(\infty)}\right). \quad (4.44)$$

При $\mu \ll \tau_0$ члены, содержащие множитель $e^{-\frac{\tau_0}{\mu}}$, можно отбросить, и формулы (4.41) — (4.44) переходят в (4.32) — (4.33) и (4.38) — (4.39).

Если в любой из формул (4.43) или (4.44) устремить μ к бесконечности и воспользоваться (3.7.26), то можно убедиться, что при $\lambda = 1$

$$\varphi(\infty; \tau_0) = \psi(\infty; \tau_0) \sim \frac{\sqrt{3}}{2} [\tau_0 + 2q(\infty)]. \quad (4.45)$$

Пренебрегая величиной $2q(\infty)$ по сравнению с τ_0 , приходим к выражению, получающемуся также как частный случай (2.60). Из (4.45) и (2.44) следует, что при $\lambda = 1$ и $\tau_0 \gg 1$

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) \sim \frac{1}{\tau_0 + 2q(\infty)}. \quad (4.46)$$

Это выражение можно получить и из (4.29), полагая $\tau = \tau_0$.

Асимптотика $\varphi(\infty; \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ и $\lambda < 1$ имеет вид

$$\varphi(\infty; \tau_0) = \psi(\infty; \tau_0) \sim \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{2k - C_1 e^{-k\tau_0}}{2k + C_1 e^{-k\tau_0}}. \quad (4.47)$$

Она может быть получена, например, переходом к пределу $\mu \rightarrow \infty$ в (4.41). При $k\tau_0 \rightarrow 0$ (4.47) превращается в (4.45), как это и должно быть.

Асимптотики $\Phi(\tau; \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ и $\varphi(\mu; \tau_0)$ и $\psi(\mu; \tau_0)$ при больших τ_0 и $\mu < 1$ были получены в работе В. В. Со-

болева [14], которой мы в основном и следовали в изложении. Вывод асимптотических выражений для φ и ψ при $\mu > 1$, приведенных здесь без доказательства, имеется в работе автора [9]. Другие способы получения асимптотик функций $\varphi(\mu; \tau_0)$ и $\psi(\mu; \tau_0)$ при $0 \leq \mu \leq 1$ можно найти в статьях В. В. Соболева [12], Г. ван де Хюлста [1], Г. ван де Хюлста и Ф. Терхуфе [1] и В. В. Иванова и В. В. Леонова [1]. Наиболее полное исследование асимптотического поведения X - и Y -функций, возникающих в задачах о монохроматическом (вообще говоря, анизотропном) рассеянии, принадлежит Т. Малликину (см. Дж. Карлстедт и Т. Малликин [1]). Много полезных сведений по вопросам, рассмотренным в этом параграфе, имеется в статье М. Хислета и Р. Уорминга [2]. По-видимому, первым по времени исследованием асимптотического поведения точного решения уравнения переноса в оптически толстом слое была выполненная в конце тридцатых годов и опубликованная лишь десять лет спустя работа О. Гальперна и Р. Люнебурга [1]. В ней, в частности, были получены асимптотические выражения для интенсивностей излучения, диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного оптически толстым слоем, освещаемым параллельными лучами. Формулы (4.32) — (4.33) и (4.38) — (4.39) есть прямое следствие выражений, найденных О. Гальперном и Р. Люнебургом.

§ 8.5. Асимптотический режим при рассеянии с перераспределением по частотам

Переходим к рассеянию в частотах линий. Рассмотрим в первую очередь асимптотическое поведение X - и Y -функций при консервативном рассеянии, когда $\tilde{\lambda} = 1$ (т. е. $1 - \lambda = \beta = 0$).

Как было показано в § 8.3 это условие можно считать выполненным, если диссипативность среды ω по порядку величины меньше единицы.

Основой исследования является асимптотика функции $\Phi(\tau_0; \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Из (2.44) имеем

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) = \frac{d \ln X(\infty; \tau_0)}{d\tau_0}.$$

Вводя сюда (2.60) и учитывая (2.6.59), находим, что

$\tilde{\lambda} = 1$ и $\tau_0 \rightarrow \infty$]

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) \sim \frac{\gamma}{\tau_0}. \quad (5.2)$$

Следует подчеркнуть, что значение численного коэффициента в (2.60) несущественно. Асимптотика (5.2) полностью определяется функциональной формой $X(\infty; \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$.

При любом конечном z и $\tau_0 \rightarrow \infty$ функция $X(z; \tau_0)$ стремится к $H(z)$. Однако стремление это неравномерное, так как $X(\infty; \tau_0)$ есть величина конечная, а $H(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \infty$. Поэтому, вообще говоря, не следует ожидать, что условие

$$X(z; \infty) = H(z); \quad Y(z; \infty) = 0 \quad (5.3)$$

обеспечит получение асимптотических формул для $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$, годных при всех z . Это условие можно использовать для получения асимптотик при z , которые не слишком велики по сравнению с τ_0 . Наоборот, условие конечности $X(\infty; \tau_0)$ будет соответствовать случаю, когда z не очень мало по сравнению с τ_0 . В промежуточной области, т. е. при z , примерно равных τ_0 , обе формулы должны давать один и тот же результат с одинаковой точностью. Этим можно воспользоваться для определения асимптотического значения $X(\infty; \tau_0)$ (мы, однако, получим асимптотику $X(\infty; \tau_0)$ другим способом).

Будем искать асимптотики $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ при больших τ_0 и значениях z , не очень малых по сравнению с τ_0 , в виде

$$X(z; \tau_0) \sim X(\infty; \tau_0) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{a_i \tau_0^i}{i!} z^{-i}, \quad (5.4)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim X(\infty; \tau_0) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{b_i \tau_0^i}{i!} z^{-i}, \quad (5.5)$$

где a_i и b_i при $i \geq 1$ — неизвестные постоянные,

$$a_0 = b_0 = 1. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.4) и (5.5) в уравнения (см. § 8.2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= Y(z; \tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0), \\ \frac{\partial Y(z; \tau_0)}{\partial \tau_0} &= -\frac{1}{z} Y(z; \tau_0) + X(z; \tau_0) \Phi(\tau_0; \tau_0) \end{aligned} \right\} (5.7)$$

и пользуясь (5.2) и (2.44), приходим к следующим рекуррентным соотношениям для определения a_i и b_i :

$$\begin{aligned}(\gamma + i) a_i &= \gamma b_i, \\(\gamma + i) b_i &= i b_{i-1} + \gamma a_i \\(i &= 1, 2, \dots),\end{aligned}$$

откуда при учете (5.6) находим

$$a_i = \frac{\gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + i - 1)}{(2\gamma + 1)(2\gamma + 2) \dots (2\gamma + i)}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}b_i &= \frac{(\gamma + 1)(\gamma + 2) \dots (\gamma + i)}{(2\gamma + 1)(2\gamma + 2) \dots (2\gamma + i)} \\(i &= 1, 2, \dots).\end{aligned} \quad (5.9)$$

Отметим, что из сопоставления (5.4) и (5.5) с (2.37) и (2.38) следует, что

$$\left. \begin{aligned}x_i(\tau_0) &\sim a_i \tau_0^i X(\infty; \tau_0), \\y_i(\tau_0) &\sim b_i \tau_0^i X(\infty; \tau_0).\end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Вводя (5.8) и (5.9) в (5.4) и (5.5), убеждаемся, что

$$X(z; \tau_0) \sim X(\infty; \tau_0) {}_1F_1\left(\gamma, 2\gamma + 1; -\frac{\tau_0}{z}\right), \quad (5.11)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim X(\infty; \tau_0) {}_1F_1\left(\gamma + 1, 2\gamma + 1; -\frac{\tau_0}{z}\right), \quad (5.12)$$

где ${}_1F_1(a, c; t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция:

$$\begin{aligned}{}_1F_1(a, c; t) &= 1 + \frac{a}{c} \frac{t}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{t^2}{2!} + \\&+ \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{t^3}{3!} + \dots\end{aligned} \quad (5.13)$$

Приведем ряд функциональных соотношений, которым удовлетворяет ${}_1F_1(a, c; t)$ (см., например, И. С. Градштейн и И. М. Рыжик [1]):

$${}_1F_1(a, c; t) = e^t {}_1F_1(c - a, c; -t), \quad (5.14)$$

$$\frac{t}{c} {}_1F_1(a + 1, c + 1; t) = {}_1F_1(a + 1, c; t) - {}_1F_1(a, c; t), \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}a {}_1F_1(a + 1, c + 1; t) &= (a - c) {}_1F_1(a, c + 1; t) + \\&+ c {}_1F_1(a, c; t),\end{aligned} \quad (5.16)$$

а также следующую связь бесселевой функции мнимого аргумента I_ν с вырожденной гипергеометрической функцией:

$$I_\nu\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{t^\nu}{2^{2\nu}\Gamma(\nu+1)} e^{-\frac{t}{2}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \nu, 1 + 2\nu; t\right). \quad (5.17)$$

Пользуясь (5.14) — (5.17), из (5.11) и (5.12) можно получить

$$X(z; \tau_0) \sim 2^{2\gamma-1} \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) t^{\frac{1}{2}-\gamma} e^{-\frac{t}{2}} \left[I_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) + I_{\gamma+\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \right] X(\infty; \tau_0), \quad (5.18)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim 2^{2\gamma-1} \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) t^{\frac{1}{2}-\gamma} e^{-\frac{t}{2}} \left[I_{\gamma-\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) - I_{\gamma+\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \right] X(\infty; \tau_0), \quad (5.19)$$

где $t = \frac{\tau_0}{z}$. Величина $X(\infty; \tau_0)$, входящая в эти выражения, пока неизвестна, так как хотя в § 8.2 и было доказано, что $X(\infty; \tau_0) \sim \frac{c_1}{\sqrt{L(\tau_0)}}$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$, значение c_1 до сих пор найдено не было. Теперь мы можем это сделать. Будем исходить из следующего соотношения, вытекающего из (2.26) и (2.36):

$$\int_0^\infty [X(z; \tau_0) - Y(z; \tau_0)] z G(z) dz = \frac{\tau_0}{X(\infty; \tau_0)}. \quad (5.20)$$

При $\tau_0 \rightarrow \infty$ правая часть неограниченно возрастает. Отсюда следует, что основной вклад в интеграл в левой части дает область больших z . Поэтому вместо $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ можно подставить их асимптотические представления (5.11) и (5.12). В результате получим

$$\frac{X^2(\infty; \tau_0)}{\tau_0} \int_0^\infty \left[{}_1F_1\left(\gamma, 2\gamma + 1; -\frac{\tau_0}{z}\right) - {}_1F_1\left(\gamma + 1, 2\gamma + 1; -\frac{\tau_0}{z}\right) \right] z G(z) dz \sim 1. \quad (5.21)$$

Положим $t = \frac{\tau_0}{z}$. Из результатов, полученных в § 2.6, следует, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$

$$G\left(\frac{\tau_0}{t}\right) \sim \frac{L(\tau_0)}{\tau_0 \Gamma(2\gamma)} t^{2\gamma+1}. \quad (5.22)$$

Используя (5.15) и (5.22), приводим (5.21) к виду

$$X^2(\infty; \tau_0) L(\tau_0) \frac{2\gamma}{\Gamma(2\gamma+2)} \int_0^\infty t_1^{2\gamma-1} F_1(\gamma+1; 2\gamma+2; -t) dt \sim \sim 1, \quad (5.23)$$

откуда

$$X(\infty; \tau_0) \sim \frac{c_1}{\sqrt{L(\tau_0)}}, \quad (5.24)$$

где

$$c_1 = \left[\frac{2\gamma}{\Gamma(2\gamma+2)} \int_0^\infty t_1^{2\gamma-1} F_1(\gamma+1, 2\gamma+2; -t) dt \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.25)$$

Интеграл, входящий в выражение для c_1 , можно выразить через Γ -функцию (см. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик [1], стр. 872). Оказывается, что

$$c_1 = \Gamma(\gamma) \sqrt{\frac{\sin \pi\gamma}{2\pi\Gamma(2\gamma)}}. \quad (5.26)$$

Этот результат уже был приведен без доказательства в § 8.2 (однако нигде в последующих выводах значение c_1 не играло роли).

Формулы (5.18) и (5.19), в которых $X(\infty; \tau_0)$ дается (5.24) и (5.26), и есть искомые асимптотики X - и Y -функций при больших τ_0 и значениях z , не очень малых по сравнению с τ_0 .

Получим теперь асимптотики, которые годятся при z , не очень больших по сравнению с τ_0 . Подставляя (5.2) в (5.7), полагая $t = \tau_0/z$ и обозначая дифференцирование по t штрихом, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X' &= \frac{\gamma}{t} Y, \\ Y' &= -Y + \frac{\gamma}{t} X. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Решение этой системы, удовлетворяющее условию $X(z; \infty) = H(z)$ и соотношению (2.5), и дает асимптотику X - и Y -функций. Можно показать (доказательства мы не приводим), что

$$X(z; \tau_0) \sim H(z) f_1(t) + H(-z) g_1(t), \quad (5.28)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim H(z) f_2(t) + H(-z) g_2(t), \quad (5.29)$$

где

$$f_{1,2}(t) = \frac{\sqrt{\pi t}}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left\{ I_{\gamma - \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \pm I_{\gamma + \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\cos \pi \gamma}{\pi} \left[K_{\gamma - \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \mp K_{\gamma + \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \right] \right\}, \quad (5.30)$$

$$g_{1,2}(t) = \frac{\sqrt{t}}{2 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{t}{2}} \left[K_{\gamma - \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \mp K_{\gamma + \frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) \right], \quad (5.31)$$

причем верхние знаки соответствуют индексу 1, нижние — индексу 2. Здесь $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — бесселевы функции много аргумента, причем $K_\nu(x)$ определена так, что

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu \pi}. \quad (5.32)$$

Функция $H(z)$ для рассеяния в частотах линий в средах без поглощения в непрерывном спектре ($\beta = 0$) имеет отрицательную вещественную полуось линией ветвления. Величина $H(-z)$, входящая в (5.28) и (5.29), при $z > 0$ представляет собой полусумму значений H -функции на берегах разреза. Ее можно найти следующим образом. Когда z не лежит на вещественной оси, уравнение (5.4.22) можно записать (при $\lambda = 1$) в виде

$$[H(z) H(-z) [1 - \mathcal{U}(z)]] = 1, \quad (5.33)$$

где

$$\mathcal{U}(z) = z^2 \int_0^\infty \frac{G(z')}{z^2 - z'^2} dz'. \quad (5.34)$$

Отсюда с помощью формул для граничных значений интегралов типа Коши находим, что при $z > 0$

$$H(-z \pm i0) = \frac{1}{1 - \mathcal{U}(z) \pm i \frac{\pi}{2} z G(z)} \frac{1}{H(z)}, \quad (5.35)$$

где $\mathcal{U}(z)$ понимается в смысле главного значения. Значение $H(-z)$ при $z > 0$ есть

$$H(-z) = \frac{1}{2} [H(-z + i0) + H(-z - i0)]. \quad (5.36)$$

Согласно (5.35) оно равно

$$H(-z) = [1 - \mathcal{U}(z)] \frac{R(z, 1)}{H(z)}, \quad (5.37)$$

где

$$R(z, 1) = \left\{ [1 - \mathcal{U}(z)]^2 + \left[\frac{\pi}{2} z G(z) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (5.38)$$

Формулы (5.28) — (5.31), в которых $H(-z)$ дается выражением (5.37), и есть асимптотики X - и Y -функций при $\tau_0 \gg 1$ и значениях z , не очень больших по сравнению с $\tau_0^{\frac{1}{2}}$. Для практического использования полученных выражений нужно иметь таблицы $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$. Значения этих функций при $\nu = 0$ и 1 , входящие в асимптотики X - и Y -функций при доплеровском профиле ($\gamma = 1/2$), имеются во всех руководствах по теории бесселевых функций, а также во многих справочных изданиях. При фойгтовском профиле ($\gamma = 1/4$) в асимптотики входят I_ν и K_ν для $\nu = -1/4$ и $3/4$. Таблицы $I_{-1/4}(x)$ и $I_{3/4}(x)$ имеются у Г. Ватсона [1], функции $K_{-1/4}(x)$ и $K_{3/4}(x)$ табулированы Г. Карстеном и Н. Маккерроу [1].

Выясним, какую предельную форму принимают асимптотические выражения для X - и Y -функций при $z \ll \tau_0$, т. е. для центральных частей линии. Пользуясь тем, что при $t \gg 1$

$$I_\nu\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{\pi t}} \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t} + \dots \right),$$

$$K_\nu\left(\frac{t}{2}\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{t}{2}} \left(1 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{t} + \dots \right),$$

¹⁾ В тех случаях, когда $H(z)$ имеет степенную асимптотику при $z \rightarrow \infty$, формулы (5.28) — (5.31) применимы при всех $z > 0$. Из них, в частности, следуют тогда и формулы (5.18) и (5.19).

из (5.28) и (5.29) легко получить

$$X(z; \tau_0) \sim H(z) \left(1 - \gamma^2 \frac{z}{\tau_0} + \dots \right), \quad (5.39)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim zH(z) \frac{\gamma}{\tau_0} + \dots \quad (5.40)$$

$$(\tau_0 \gg 1, z \ll \tau_0).$$

Формулы (5.28) и (5.29) применимы и к монохроматическому рассеянию. Как мы знаем, этому случаю соответствует $\gamma = 1$. В выражения для $f_{1,2}(t)$ и $g_{1,2}(t)$ входят тогда функции $I_\nu(t/2)$ и $K_\nu(t/2)$ полуцелых индексов. Они являются элементарными функциями, в частности,

$$I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \right); \quad I_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[e^{\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{2}{t} \right) + e^{-\frac{t}{2}} \left(1 + \frac{2}{t} \right) \right],$$

$$K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{t}{2}};$$

$$K_{\frac{3}{2}}\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{t}{2}} \left(1 + \frac{2}{t} \right).$$

Обозначая, как и в предыдущем параграфе, X - и Y -функции для монохроматического рассеяния через $\varphi(z; \tau_0)$ и $\psi(z; \tau_0)$, а H -функцию — через $\varphi(z)$, из (5.28) и (5.29) находим, что при $\tau_0 \gg 1$

$$\varphi(z; \tau_0) \sim \varphi(z) \left(1 - \frac{1}{t} \right) - \varphi(-z) \frac{e^{-t}}{t}, \quad (5.41)$$

$$\psi(z; \tau_0) \sim \varphi(z) \frac{1}{t} + \varphi(-z) \left(1 + \frac{1}{t} \right) e^{-t}. \quad (5.42)$$

Функция $\varphi(z)$ регулярна на плоскости z с разрезом от 0 до -1 . Поэтому при z , лежащих вне отрезка вещественной оси $[-1, +1]$, уравнение (3.7.20) можно записать в виде (для $\lambda = 1$)

$$\varphi(z) \varphi(-z) \left(1 - \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} \right) = 1,$$

откуда

$$\varphi(-z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} \right) \varphi(z)} \quad (z > 1)$$

Подставляя это выражение в (5.41) и (5.42) и вспоминая, что $t = \tau_0/z$, находим окончательно

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z; \tau_0) &\sim \varphi(z) \left(1 - \frac{z}{\tau_0}\right) - \frac{ze^{-\frac{\tau_0}{z}}}{\left(1 - \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}\right) \varphi(z)} \frac{1}{\tau_0}, \\ \psi(z; \tau) &\sim \frac{z\varphi(z)}{\tau_0} + \frac{e^{-\frac{\tau_0}{z}}}{\left(1 - \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}\right) \varphi(z)} \left(1 + \frac{z}{\tau_0}\right) \end{aligned} \right\} (5.43)$$

$(\tau_0 \gg 1, z > 1).$

Сравнивая эти результаты с формулами (4.43) и (4.44), видим, что если в этих последних пренебречь величиной $2q(\infty)$ по сравнению с τ_0 , то они переходят в (5.43). Таким образом, как и в случае проблемы Милна, общие выражения, полученные для произвольного профиля, в случае монохроматического рассеяния дают асимптотики, верные с точностью до пренебрежения поправочным слагаемым $2q(\infty)$ по сравнению с τ_0 .

На этом мы заканчиваем исследование X - и Y -функций для консервативного случая и переходим к изучению сред с заметной диссипацией энергии в них. Рассмотрение общего случая, по-видимому, привело бы к столь громоздким выражениям, что вряд ли вообще было оправданным. Ниже обсуждается несколько частных результатов, которые удастся получить в обозримом виде. Все эти результаты относятся к тому случаю, когда поглощением квантов в полете можно пренебречь по сравнению с их гибелью при рассеяниях. Иначе говоря, принимается, что $\beta = 0$, $\lambda \neq 1$. Как было показано в § 7.3, тем самым предполагается, что выполнено неравенство $\lambda\beta\delta(\beta) \ll 1 - \lambda$.

Пусть среда сильно диссипативна ($\omega \gg 1$). При сделанных только что предположениях это означает, что

$$\lambda L(\tau_0) \ll 1 - \lambda. \quad (5.44)$$

Покажем, что в этом случае при $\tau_0 \gg 1$

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} K(\tau_0). \quad (5.45)$$

При $\tau \leq \tau_0$ уравнение (5.1.32) можно переписать в виде

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z) d\tau' + \\ + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}} + \frac{\lambda}{2} \int_{\tau_0}^{\infty} K(\tau' - \tau) P(\tau', z) d\tau',$$

или

$$P(\tau, z) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) P(\tau', z) d\tau' + \frac{\lambda}{4\pi} e^{-\frac{\tau}{z}} + \\ + \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} P(\tau_0 + t, z) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z'}} e^{-\frac{t}{z'}} G(z') \frac{dz'}{z'} . \quad (5.46)$$

Сравнивая это уравнение с (1.17) при $\beta = 0$ и пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что

$$P(\tau, z; \tau_0) = P(\tau, z) - \\ - 2\pi \int_0^{\infty} P(\tau_0 + t, z) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} P(\tau_0 - \tau, z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} . \quad (5.47)$$

Умножая (5.47) на $2\pi G(z) \frac{1}{z}$ и интегрируя по z от 0 до ∞ , получаем

$$\Phi(\tau; \tau_0) = \Phi(\tau) - \\ - 2\pi \int_0^{\infty} \Phi(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} P(\tau_0 - \tau, z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} , \quad (5.48)$$

откуда

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) = \Phi(\tau_0) - \\ - \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} X(z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} . \quad (5.49)$$

Это соотношение мы и используем для доказательства формулы (5.45).

Внутренний интеграл в правой части (5.49) имеет логарифмическую особенность при $t = 0$. С ростом t он быстро убывает. В то же время при $\tau_0 \gg 1$ функция $\Phi(\tau_0 + t)$ убывает с возрастанием t сравнительно медленно. Поэтому при больших τ_0 интеграл, входящий в (5.49), с точностью до главного члена разложения равен

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} \Phi(\tau_0 + t) dt \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} X(z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} &\sim \\ \sim \Phi(\tau_0) \frac{\lambda}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{z'}} dt \int_0^{\infty} X(z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} &= \\ = \frac{\lambda}{2} \Phi(\tau_0) X_0(\tau_0), \end{aligned} \quad (5.50)$$

и (5.49) дает

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) \sim \Phi(\tau_0) \left[1 - \frac{\lambda}{2} X_0(\tau_0) \right]. \quad (5.51)$$

Из (2.21) при $\beta = 0$ находим

$$X_0(\tau_0) = \frac{2}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{4} Y_0^2(\tau_0)} \right). \quad (5.52)$$

Но из (2.47) и (2.35) следует, что если выполнено условие (5.44), то

$$1 - \lambda \gg \frac{\lambda^2}{4} Y_0^2(\tau_0). \quad (5.53)$$

Поэтому (5.51) и (5.52) дают

$$\Phi(\tau_0; \tau_0) \sim \sqrt{1 - \lambda} \Phi(\tau_0). \quad (5.54)$$

В § 5.5 показано, что при выполнении неравенства (5.44)

$$\Phi(\tau_0) \sim \frac{\frac{\lambda}{2} K(\tau_0)}{(1 - \lambda)^{3/2}}. \quad (5.55)$$

Из двух последних соотношений и следует (5.45).

Формулу (5.45) можно использовать для получения ряда полезных результатов. Так, легко доказывается, что

$$X(\infty; \tau_0) \sim \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda}} \left(1 - \frac{\frac{\lambda}{2} L(\tau_0)}{1 - \lambda} \right). \quad (5.56)$$

Это следует из (2.44) и (5.45) при учете того, что $X(\infty; \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$ стремится к $H(\infty) = (1 - \lambda)^{-1/2}$. Далее, комбинируя (5.56) с (2.35) и принимая во внимание (5.53), находим

$$Y(\tau_0) \sim \frac{L(\tau_0)}{\sqrt{1-\lambda}}. \quad (5.57)$$

Теперь (5.52) дает

$$X_0(\tau_0) \sim \frac{2}{\lambda} \left(1 - \sqrt{1-\lambda} - \frac{\lambda^2}{8} \frac{[L(\tau_0)]^2}{(1-\lambda)^{3/2}} \right). \quad (5.58)$$

С помощью (5.45) можно также получить асимптотики функций $X(z; \tau_0)$ и $Y(z; \tau_0)$ при $\tau_0 \gg 1$ для значений z , удовлетворяющих неравенству $\tau_0 \gg z$. Полагая в (5.47) $\tau = \tau_0$, находим

$$Y(z; \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau_0, z) - 2\pi \int_0^\infty P(\tau_0 + t, z) dt \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z'}} X(z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'}. \quad (5.59)$$

Из (5.1.35) следует, что при $\tau \gg 1$ для z , много меньших τ ,

$$P(\tau, z) \sim \frac{\lambda}{4\pi} z H(z) \Phi(\tau) \quad (\tau \gg 1, z \ll \tau). \quad (5.60)$$

Поэтому

$$Y(z; \tau_0) \sim z H(z) \left[\Phi(\tau_0) - \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty \Phi(\tau_0 + t) dt \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z'}} X(z'; \tau_0) G(z') \frac{dz'}{z'} \right],$$

или, при учете (5.49),

$$Y(z; \tau_0) \sim z H(z) \Phi(\tau_0; \tau_0) \quad (\tau_0 \gg 1, z \ll \tau_0). \quad (5.61)$$

Первое из уравнений (5.7) вместе с (5.3) дает

$$X(z; \tau_0) = H(z) - \int_{\tau_0}^\infty Y(z; \tau) \Phi(\tau; \tau) d\tau. \quad (5.62)$$

Подставляя сюда (5.61), получаем

$$X(z; \tau_0) \sim H(z) - zH(z) \int_{\tau_1}^{\infty} \Phi^2(\tau; \tau) d\tau \quad (\tau_0 \gg 1, z \ll \tau_0). \quad (5.63)$$

Наконец, вводя в (5.63) и (5.61) $\Phi(\tau; \tau)$ из (5.45) и пользуясь асимптотическими свойствами $K(\tau)$, доказанными в § 2.6, окончательно находим, что при выполнении неравенства (5.44) и $z \ll \tau_0$

$$X(z; \tau_0) \sim H(z) - zH(z) \frac{\tau_0}{4\gamma + 1} \left[\frac{\frac{\lambda}{2} K(\tau_0)}{1 - \lambda} \right]^2, \quad (5.64)$$

$$Y(z; \tau_0) \sim zH(z) \frac{\frac{\lambda}{2} K(\tau_0)}{1 - \lambda}. \quad (5.65)$$

Стоит упомянуть о том, что при выводе (5.61) и (5.63) предположение (5.44) не использовалось. Поэтому эти формулы справедливы для сред с произвольной диссипативностью. В частности, при $\omega \ll 1$ имеем $\Phi(\tau_0; \tau_0) \sim \gamma/\tau_0$, и (5.63) и (5.61) переходят в полученные выше другим способом выражения (5.39) и (5.40).

Основой для написания этого параграфа послужили работы автора [9], [10] и Д. И. Нагирнера [4]. Полученные в них результаты были в ряде отношений переработаны (в частности, была исправлена ошибка в коэффициенте главного члена асимптотики $X_D(\infty; \tau_0)$ при $\lambda = 1$, имевшаяся в работе автора [10]) и довольно существенно упрощены¹⁾.

§ 8.6. Задача Шустера

В качестве первой стандартной задачи о рассеянии в плоском слое рассмотрим известную задачу Шустера, состоящую в следующем. Имеется плоский слой газа, опти-

¹⁾ Для консервативного рассеяния с доплеровским профилем приведенные выше результаты можно несколько уточнить. В частности, удастся получить второй член асимптотического разложения $X_D(\infty; \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Относящиеся к этому вопросы излагаются в статье автора, находящейся сейчас в печати.

ческая толщина которого в центре линии равна τ_0 . Слой полностью прозрачен в частотах непрерывного спектра ($\beta = 0$) и не содержит внутренних источников излучения. На границу $\tau = \tau_0$ падает изотропное излучение в непрерывном спектре, интенсивность которого в пределах линии считается не зависящей от частоты и равной I_0 . Обычно предполагается, что в среде происходит чистое рассеяние ($\lambda = 1$), однако в интересах общности мы будем считать λ произвольным ($\lambda \leq 1$). В классической постановке задачи предполагается, что частоты квантов при рассеянии не изменяются (так называемое когерентное рассеяние). Как было показано в § 1.5, это предположение нереалистично. Мы заменим его предположением о полном перераспределении по частотам, т. е. будем считать, что квант «забывает» свою частоту при каждом рассеянии. Задача состоит в нахождении интенсивности излучения $I(0, \mu, x)$, выходящего через границу $\tau = 0$. Наряду с определением интенсивности пропущенного излучения $I(0, \mu, x)$ мы получим также интенсивность диффузно-отраженного излучения $I(\tau_0, \mu, x)$, которая может представить интерес для ряда задач. Будет рассмотрен и вопрос о так называемой «кривой роста» для задачи Шустера.

При сформулированных только что предположениях задача Шустера сводится к решению уравнения переноса

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = \alpha(x) I(\tau, \mu, x) - \frac{\lambda A}{2} \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' \quad (6.1)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} I(0, \mu, x) &= 0, & \mu < 0 \\ I(\tau_0, \mu, x) &= I_0, & \mu > 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Если ввести функцию источников

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu', \quad (6.3)$$

то для интересующих нас интенсивностей выходящего излучения будем иметь

$$I(0, \mu, x) = I_0 e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau_0} + \int_0^{\tau_0} S(\tau) e^{-\frac{\alpha(x)}{\mu} \tau} \alpha(x) \frac{d\tau}{\mu} \quad (\mu > 0), \quad (6.4)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = \int_0^{\tau_0} S(\tau) e^{-\frac{\alpha(x)}{|\mu|} (\tau_0 - \tau)} \alpha(x) \frac{d\tau}{|\mu|} \quad (\mu < 0). \quad (6.5)$$

Интегральное уравнение для функции источников имеет в данном случае вид

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + I_0 \frac{\lambda}{2} L(\tau_0 - \tau). \quad (6.6)$$

Оно легко выводится из (6.3) — (6.5). Сравнивая это уравнение с (1.17) и учитывая, что

$$L(\tau_0 - \tau) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z'}} G(z') dz',$$

в силу принципа суперпозиции можем написать

$$S(\tau) = I_0 \cdot 2\pi \int_0^{\infty} P(\tau_0 - \tau, z') G(z') dz'. \quad (6.7)$$

Функции S и P зависят также, конечно, от τ_0 , однако для сокращения записи мы не будем указывать это явно.

Подставляя (6.7) в (6.4) и (6.5), вводя в получающиеся выражения вместо $P(\tau_0 - \tau, z')$ его представление из (1.22) и пользуясь (2.3) и (2.4) и обобщенными уравнениями Амбарцумяна — Чандрасекара для X - и Y -функций, после ряда простых, но довольно громоздких выкладок можно получить, что

$$I(0, \mu, x) = I_0 \left[\frac{\lambda}{2} Y_0 X(z) + \left(1 - \frac{\lambda}{2} X_0\right) Y(z) \right] \quad (\mu > 0), \quad (6.8)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = I_0 \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{2} X_0\right) X(z) - \frac{\lambda}{2} Y_0 Y(z) \right] \quad (\mu < 0), \quad (6.9)$$

где

$$z = \frac{|\mu|}{\alpha(x)},$$

а X_0 и Y_0 — нулевые моменты X - и Y -функций, определенные согласно (2.15). Формулы (6.8) и (6.9) и дают решение задачи Шустера.

При чистом рассеянии приведенные сейчас выражения несколько упрощаются. Пользуясь (2.22) и (2.36), находим, что при $\lambda = 1$

$$I(0, \mu, x) = \frac{I_0}{2X(\infty)} [X(z) + Y(z)] \quad (\mu > 0), \quad (6.10)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = \frac{I_0}{2X(\infty)} [2X(\infty) - X(z) - Y(z)] \quad (\mu < 0). \quad (6.11)$$

Формула (6.10) показывает, что в выходящем через границу $\tau = 0$ излучении на фоне континуума интенсивности I_0 видна линия поглощения. Оценим ее центральную интенсивность, считая оптическую толщину слоя τ_0 достаточно большой. Если излучение выходит по нормали ($\mu = 1$), то для центра линии ($x = 0$) имеем $z = 1$. Далее, при $\tau_0 \gg 1$ величина $X(1) + Y(1)$ асимптотически равна $H(1)$, где $H(z)$ — H -функция для консервативного рассеяния. Пользуясь асимптотикой $X(\infty)$ при $\tau_0 \gg 1$, даваемой формулой (2.58), из (6.10) находим, что интенсивность излучения, выходящего в центре линии по нормали к границе $\tau = 0$, асимптотически равна

$$I(0, 1, 0) \sim I_0 \frac{H(1)}{2c_1} \sqrt{L(\tau_0)} \quad (\tau_0 \gg 1), \quad (6.12)$$

где c_1 дается выражением (2.59). В частности, при фойгтовском профиле и $a\tau_0 \gg 1$ находим отсюда, пользуясь (2.7.29)

$$I(0, 1, 0) \sim I_0 \frac{H_V(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \left[\frac{2\pi^3 U(a, 0)}{9} \right]^{1/4} \left(\frac{a}{\tau_0} \right)^{1/4}. \quad (6.13)$$

Используя легко доказываемое тождество

$$\frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) d\tau' = 1 - \frac{1}{2} L(\tau) - \frac{1}{2} L(\tau_0 - \tau), \quad (6.14)$$

из уравнения (6.6) можно получить, что при $\lambda = 1$ функция источников удовлетворяет соотношению

$$S(\tau) + S(\tau_0 - \tau) = I_0. \quad (6.15)$$

Как следует из (6.7), она монотонно возрастает с τ , причем

$$S(0) = \frac{I_0}{2} Y_0; \quad S(\tau_0) = I_0 \left(1 - \frac{1}{2} Y_0\right). \quad (6.16)$$

В частности, при больших τ_0

$$S(0) \sim \frac{I_0}{2c_1} \sqrt{L(\tau_0)}; \quad S(\tau_0) \sim I_0 \left(1 - \frac{1}{2c_1} \sqrt{L(\tau_0)}\right). \quad (6.17)$$

Обобщенная проблема Милна, подробно исследованная в § 6.1, является предельным случаем задачи Шустера при $\tau_0 \rightarrow \infty$. В самом деле, будем одновременно с τ_0 увеличивать интенсивность возбуждающего излучения I_0 таким образом, чтобы все время соблюдалось условие $I_0 = \frac{2}{Y_0} = 2X(\infty)$. При $\lambda = 1$ свободный член уравнения (6.6) оказывается тогда равным $X(\infty) L(\tau_0 - \tau)$. Так как для чистого рассеяния $X(\infty) \sim \frac{c_1}{\sqrt{L(\tau_0)}}$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$, при любом конечном τ этот член стремится к нулю при неограниченном увеличении τ_0 . Следовательно, уравнение (6.6) при $\lambda = 1$ переходит в пределе в однородное уравнение, соответствующее обобщенной проблеме Милна. Согласно первой из формул (6.16) решение его оказывается нормированным на единицу при $\tau = 0$. Далее, полагая в (6.10) $I_0 = 2X(\infty)$, находим, что интенсивность выходящего излучения оказывается в пределе при $\tau_0 \rightarrow \infty$ равной $I(0, \mu, x) = H(z)$, что согласуется с результатом, полученным другим путем в § 6.1.

Интересно, что дадут аналогичные рассуждения, если считать, что в среде происходит неконсервативное рассеяние. Как показано в § 8.5, в этом случае $Y_0 \sim (1 - \lambda)^{1/2} L(\tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$. Поэтому, полагая $I_0 = \frac{2}{\lambda} Y_0^{-1}$, находим, что при $\tau_0 \rightarrow \infty$ уравнение (6.6) переходит в следующее:

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^\infty K(|\tau - \tau'|) S(\tau') d\tau' + \sqrt{1 - \lambda}, \quad (6.18)$$

а формула (6.8) дает

$$I(0, \mu, x) = H(z). \quad (6.19)$$

Мы пришли к задаче о свечении среды с равномерным распределением источников, подробно исследованной в § 6.1—6.3. В рассмотренной сейчас модели первоначальное возбуждение атомов производится, однако, не электронным ударом, как это считалось в § 6.3, а излучением в далеких крыльях линии, приходящим с бесконечно больших глубин и создающимся там бесконечно мощным источником, излучающим в непрерывном спектре. Формула (6.19) показывает, что функция $H(z)$ дает угловое и частотное распределение излучения, пропущенного бесконечно толстым слоем.

Возвратимся к задаче Шустера. Как уже говорилось, в выходящем с границы $\tau = 0$ излучении видна абсорбционная линия. Найдем ее эквивалентную ширину в функции τ_0 . Для простоты будем считать среду чисто рассеивающей ($\lambda = 1$). По определению, эквивалентной шириной линии (в потоке) называется величина

$$W = \int_0^{\infty} (1 - r_\nu) d\nu, \quad (6.20)$$

где r_ν — остаточный поток, т. е. отношение потока в частоте ν в линии к потоку в соседнем участке непрерывного спектра. Поскольку в исследуемой модели выходящее в континууме излучение изотропно и его интенсивность равна I_0 , соответствующий поток равен πI_0 . Поэтому

$$r_\nu = \frac{2}{I_0} \int_0^1 I(0, \mu, x) \mu d\mu. \quad (6.21)$$

Напомним, что хотя в качестве переменной, описывающей частоту, мы пишем x , интенсивность излучения рассчитана на единичный интервал обычных частот ν . Подставляя (6.10) в (6.21), вводя получающееся выражение в (6.20) и переходя от интегрирования по ν к интегрированию по x , находим

$$W = \frac{\Delta\nu}{X(\infty)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^1 [2X(\infty) - X(z) - Y(z)] \mu d\mu, \quad (6.22)$$

где $\Delta\nu$ — характерный интервал частот, в единицах которого измеряется безразмерная частота x (например, $\Delta\nu_D$). Полагая $\mu = \alpha(x)z$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$W = \frac{\Delta\nu}{AX(\alpha)} \int_0^{\infty} [2X(\infty) - X(z) - Y(z)] zG(z) dz, \quad (6.23)$$

где A — обычная нормировочная постоянная ($A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x) dx = 1$).

Наконец, использование (2.27) и (2.36) приводит к следующему окончательному выражению:

$$W = \Delta\nu \frac{1}{A} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{X^2(\infty; \tau)}. \quad (6.24)$$

Наиболее интересен случай оптически толстого слоя ($\tau_0 \gg 1$). Из (6.24) и (2.58) следует, что при доплеровском коэффициенте поглощения

$$W \sim \Delta\nu_D 2 \sqrt{\pi} \int_0^{\tau_0} L_D(\tau) d\tau \sim \Delta\nu_D 2 \sqrt{\ln \tau_0} \quad (\tau_0 \gg 1), \quad (6.25)$$

тогда как при фойгтовском профиле

$$\begin{aligned} W &\sim \Delta\nu_D \frac{1}{c_1^2 U(a, 0)} \int_0^{\tau_0} L_V(\tau) d\tau \sim \\ &\sim \Delta\nu_D \frac{4}{3c_1^2 \sqrt{U(a, 0)}} (a\tau_0)^{1/2} \quad (a\tau_0 \gg 1), \quad (6.26) \end{aligned}$$

где c_1 дается формулой (2.59) при $\gamma = 1/4$ (именно, $c_1 = 0,914$).

Полученные выражения относятся к чисто рассеивающей среде ($\lambda = 1$). Насколько чувствительна эквивалентная ширина к значению λ ? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим противоположный предельный случай — среду с чистым поглощением ($\lambda = 0$). Очевидно, что в этом случае интенсивность выходящего излучения равна

$$I(0, \mu, x) = I_0 e^{-\frac{\tau_0}{x}}$$

(это следует также из (6.8) при $\lambda = 0$). Подставляя это выражение в (6.21), из (6.20) совершенно так же, как и при выводе (6.23), находим, что

$$W = \Delta v \frac{2}{A} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\frac{\tau_1}{z}}) z G(z) dz,$$

или

$$W = \Delta v \frac{2}{A} \int_0^{\tau_0} L(\tau) d\tau. \quad (6.27)$$

Сравнение этой формулы с (6.25) показывает, что для доплеровского профиля при $\tau_0 \gg 1$ главные члены асимптотических разложений величины $W(\tau_0)$ при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$ не отличаются друг от друга. Аналогичным образом, из сопоставления (6.27) с (6.26) заключаем, что когда профиль фойгтовский и $a\tau_0 \gg 1$, эквивалентная ширина при $\lambda = 0$ асимптотически в $2c_1^2 = 1,67$ раза больше, чем при $\lambda = 1$. Тот факт, что W при $\lambda = 1$ меньше, чем при $\lambda = 0$, физически вполне понятен: когда среда чисто рассеивающая, в частотах линии наряду с прямо пропущенным излучением выходят также кванты, испытавшие рассеяния. При доплеровском профиле роль этого эффекта столь мала, что он вообще не сказывается на главном члене асимптотики. При фойгтовском профиле самое большее, что может дать учет диффузно-пропущенного излучения, — это уменьшение эквивалентной ширины в 1,67 раза (очевидно, что при $\lambda < 1$ влияние этого эффекта должно быть еще меньше). Общий вывод состоит в том, что в задаче Шустера эквивалентная ширина линии очень мало чувствительна к значению λ .

Зависимость эквивалентной ширины линии от числа поглощающих атомов известна под названием кривой роста. При построении семейства теоретических кривых роста эквивалентная ширина W должна наноситься не в функции τ_0 , а величины τ_0/A . Причина этого состоит в том, что величина τ_0 зависит не только от числа поглощающих атомов и вероятности перехода, но и от формы линии (в данном случае — от значения фойгтовского параметра a). Величина же τ_0/A от a не зависит (подробнее см. конец § 2.3)

Наконец, последнее замечание. До сих пор мы всегда говорили о доплеровских и фойгтовских асимптотиках от-

дельно. Однако когда a достаточно мало, область применимости доплеровских асимптотик существует и при фойгтовском профиле. Если говорить об асимптотиках по τ , то эта область определяется неравенствами $1 \ll \tau \ll 1/a$. Для асимптотик по z «доплеровская область» асимптотик фойгтовских функций дается неравенствами $1 \ll z \ll 1/a$. При $a\tau \gg 1$ и $az \gg 1$ работают уже обычные фойгтовские асимптотики. При использовании для фойгтовских функций асимптотик по τ , полученных для доплеровского профиля, строго говоря, должно учитываться влияние формы линии на шкалу τ (множитель $A_V = U(a, 0)$; см. предыдущий абзац). Однако поскольку доплеровская асимптотическая область у фойгтовских функций существует только при $a \ll 1$ (практически при $a \lesssim 10^{-2}$), этим эффектом можно пренебречь, так как $U(a, 0) \sim U(0, 0) = 1 / \sqrt{\pi}$ при $a \ll 1$.

§ 8.7. Диффузное отражение и пропускание — Среда с равномерным распределением источников

Рассмотрим теперь так называемую задачу о диффузном отражении и пропускании, состоящую в следующем. На границу $\tau = 0$ среды оптической толщины τ_0 падают параллельные лучи, создающие на перпендикулярной к ним площадке полную (проинтегрированную по всем частотам) освещенность I_0 . Падающее излучение считается монохроматическим, его безразмерная частота x_0 , а угол падения μ_0 . Предполагается, что внутренних источников излучения в среде нет, так что ее свечение вызывается только освещением извне. Требуется найти интенсивности выходящего из среды излучения.

Интенсивность диффузного излучения $I(\tau, \mu, x)$ определяется в этом случае уравнением переноса

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu, x)}{d\tau} = & (\alpha(x) + \beta) I(\tau, \mu, x) - \\ & - \frac{\lambda A}{2} \alpha(x) \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' - \\ & - I_0 \frac{\lambda}{4\pi} \frac{A\alpha(x)}{\Delta\nu} \alpha(x_0) e^{-\frac{\alpha(x_0) + \beta}{\mu_0} \tau} \end{aligned} \quad (7.1)$$

при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} I(0, \mu, x) &= 0, & \mu < 0, \\ I(\tau_0, \mu, x) &= 0, & \mu > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Из (7.1) и (7.2) следует, что функция источников

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} A \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') dx' \int_{-1}^1 I(\tau, \mu', x') d\mu' + \\ + I_0 \frac{\lambda}{4\pi} \frac{A\alpha(x_0)}{\Delta v} e^{-\frac{\alpha(x_0)+\beta}{\mu} \tau} \quad (7.3)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$S(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau') d\tau' + I_0 \frac{\lambda}{4\pi} \frac{A\alpha(x_0)}{\Delta v} e^{-\frac{\tau}{z_0}}, \quad (7.4)$$

где

$$\tilde{z}_0 = \frac{\mu_0}{\alpha(x_0) + \beta}. \quad (7.5)$$

Сопоставление (7.4) и (1.17) дает

$$S(\tau) = I_0 \frac{A\alpha(x_0)}{\Delta v} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0). \quad (7.6)$$

В силу линейности основных уравнений мы не ограничим общности, если в дальнейшем будем считать, что

$$I_0 = \frac{\Delta v}{A\alpha(x_0)}. \quad (7.7)$$

Интенсивности диффузно-отраженного и диффузно-пропущенного излучения можно выразить через функции X и Y . Принимая во внимание (7.6) и (7.7), имеем

$$I(0, \mu, x) = \int_0^{\tau_0} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0) e^{-\frac{\tau}{z}} d\tau \frac{\alpha(x)}{\mu} \quad (\mu > 0), \quad (7.8)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = \int_0^{\tau_0} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{z}} d\tau \frac{\alpha(x)}{|\mu|} \quad (\mu < 0), \quad (7.9)$$

где

$$\tilde{z} = \frac{|\mu|}{\alpha(x) + \beta}. \quad (7.10)$$

Полагая в (1.19) $z = \tilde{z}_0$, умножая это уравнение на $e^{-\frac{z}{\tau}}$ и интегрируя по τ от 0 до ∞ , находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} \frac{\partial P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0)}{\partial \tau} d\tau &= -\frac{1}{\tilde{z}_0} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0) d\tau + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi} X(\tilde{z}_0; \tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} \Phi(\tau; \tau_0) d\tau - \\ &- \frac{\lambda}{4\pi} Y(\tilde{z}_0; \tau_0) \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} \Phi(\tau_0 - \tau; \tau_0) d\tau, \end{aligned}$$

или, при учете (2.3) и (2.4),

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} \frac{\partial P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0)}{\partial \tau} d\tau &= -\frac{1}{\tilde{z}_0} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0) d\tau + \\ &+ \frac{\lambda}{4\pi} X(\tilde{z}_0; \tau_0) [X(\tilde{z}; \tau_0) - 1] - \\ &- \frac{\lambda}{4\pi} Y(\tilde{z}; \tau_0) [Y(\tilde{z}; \tau_0) - e^{-\frac{\tau_1}{\tilde{z}}}] . \end{aligned}$$

Преобразуя интеграл в левой части интегрированием по частям и пользуясь (1.20) и (1.21), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} P(\tau, \tilde{z}_0; \tau_0) d\tau &= \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \frac{X(\tilde{z}_0; \tau_0) X(\tilde{z}; \tau_0) - Y(\tilde{z}_0; \tau_0) Y(\tilde{z}; \tau_0)}{\tilde{z}_0 + \tilde{z}} \tilde{z} \tilde{z}_0. \quad (7.11) \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, можно выразить через X - и Y -функции и интеграл, входящий в (7.9). Окончательные выражения для интенсивностей выходящего из среды

диффузного излучения имеют вид

$$I(0, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{X(\tilde{z}_0)X(\tilde{z}) - Y(\tilde{z}_0)Y(\tilde{z})}{\tilde{z}_0 + \tilde{z}} \tilde{z} \tilde{z}_0 \frac{\alpha(x)}{\mu} \quad (\mu > 0), \quad (7.12)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{X(\tilde{z})Y(\tilde{z}_0) - X(\tilde{z}_0)Y(\tilde{z})}{\tilde{z}_0 - \tilde{z}} \tilde{z} \tilde{z}_0 \frac{\alpha(x)}{|\mu|} \quad (\mu < 0), \quad (7.13)$$

где \tilde{z}_0 и \tilde{z} определены согласно (7.5) и (7.10). Эти формулы и дают решение задачи о диффузном отражении и пропускании. Они обобщают выражения, полученные впервые В. А. Амбарцумяном [5] в задаче о диффузном отражении и пропускании при изотропном монохроматическом рассеянии. Стоит отметить, что при изотропном монохроматическом рассеянии X - и Y -функции при $\beta \neq 0$ просто выражаются через соответствующие функции для $\beta = 0$, обозначенные в § 8.4 φ и ψ . Учитывая, что при монохроматическом рассеянии $G(z) = 1$ при $z \leq 1$ и $G(z) = 0$ при $z > 1$, из (2.6) можно получить

$$X(z; \tau_0, \lambda, \beta) = \varphi\left(z(1+\beta); \tau_0(1+\beta), \frac{\lambda}{1+\beta}\right),$$

$$Y(z; \tau_0, \lambda, \beta) = \psi\left(z(1+\beta); \tau_0(1+\beta), \frac{\lambda}{1+\beta}\right).$$

Таким образом, учет поглощения в непрерывном спектре оказывается в этом частном случае очень простым и сводится к введению некоторых масштабных множителей в аргументы.

В пределе при $\tau_0 \rightarrow \infty$ (7.12) принимает вид

$$I(0, \mu, x) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{H(\tilde{z})H(\tilde{z}_0)}{\tilde{z} + \tilde{z}_0} \tilde{z} \tilde{z}_0 \frac{\alpha(x)}{\mu}. \quad (7.14)$$

Этой формулой дается решение задачи о диффузном отражении от полубесконечной среды, в которой наряду с гибелью квантов при рассеяниях играет роль также и поглощение в непрерывном спектре. При $\beta = 0$ (7.14) переходит в выражение, полученное в § 6.4 (при этом следует учесть, что в § 6.4 считалось $I_0 = 1$, тогда как здесь принято $I_0 = \frac{\Delta v}{A\alpha(x_0)}$).

Анализ формы линий, описываемых выражениями (7.12) и (7.13), можно выполнить подобно тому, как это сделано в § 6.4 в отношении линий, образующихся при диффузном отражении от полубесконечной атмосферы без поглощения в непрерывном спектре. Хотя функции X и Y табулированы пока далеко не полностью¹⁾, для оптически толстых слабо диссипативных атмосфер их легко найти с помощью асимптотических выражений, полученных в § 8.5.

Значение формул (7.12) и (7.13) не ограничивается тем, что они дают решение задачи о диффузном отражении и пропускании. Фактически они описывают профили линий, возникающих в среде с экспоненциально распределенными первичными источниками. В задачах, представляющих практический интерес, первичную функцию источников $S_1^*(\tau)$ обычно можно хорошо аппроксимировать выражением

$$S_1^*(\tau) = \sum_{i=1}^n S_i^* e^{-\frac{\tau}{z_i}}, \quad (7.15)$$

где S_i^* и z_i — некоторые постоянные. Если $S_1^*(\tau)$ имеет такой вид, интенсивности диффузного излучения, выходящего из среды, равны

$$I(0, \mu, x) = \sum_{i=1}^n S_i^* \frac{X(\tilde{z})X(z_i) - Y(\tilde{z})Y(z_i)}{z_i + \tilde{z}} z_i \tilde{z} \frac{\alpha(x)}{\mu} \quad (\mu > 0), \quad (7.16)$$

$$I(\tau_0, \mu, x) = \sum_{i=1}^n S_i^* \frac{X(\tilde{z})Y(z_i) - X(z_i)Y(\tilde{z})}{z_i - \tilde{z}} z_i \tilde{z} \frac{\alpha(x)}{|\mu|} \quad (\mu < 0),$$

где \tilde{z} по-прежнему дается (7.10). Рассмотрим подробнее один важный частный случай.

¹⁾ Единственными известными автору таблицами X - и Y -функций для рассеяния с перераспределением по частотам являются только что появившиеся таблицы Ф. Фаллера и Б. Хайетта [1]. Пользоваться ими надо с осторожностью, так как не все приводимые численные данные верны (так, значения $Y_0(\tau_0)$ при больших τ_0 ошибочны).

Пусть свечение среды вызывается равномерно распределенными внутренними источниками, т. е. в уравнении (1.1) $S_1^*(\tau) = S^* = \text{const}$. Полагая в (7.15) и (7.16) $n = 1$,

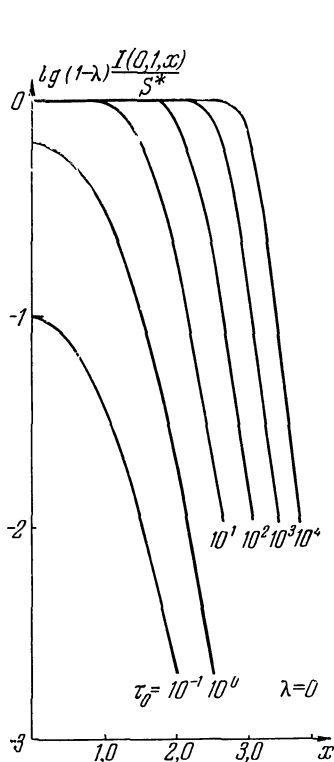


Рис. 42. Профили линий, образующихся в плоском слое с равномерным распределением источников. Коэффициент поглощения доплеровский, $\lambda = 0$, $\beta = 0$.

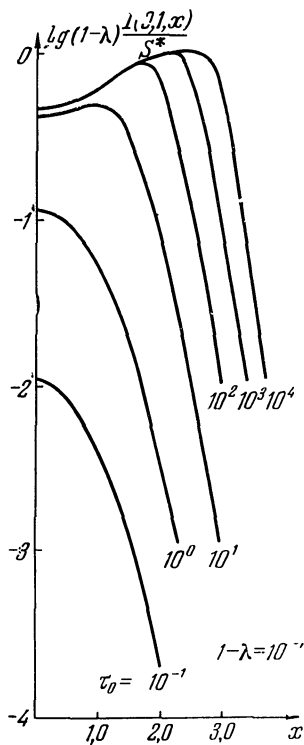


Рис. 43. Профили линий, образующихся в плоском слое с равномерным распределением источников. Коэффициент поглощения доплеровский, $\lambda = 0,9$, $\beta = 0$.

$z_1 = \infty$ и $S_1^* = S^*$, находим, что в этом случае ($\mu > 0$)

$$I(0, \mu, x) = I(\tau_0, -\mu, x) = S^* X(\infty) [X(\tilde{z}) - Y(\tilde{z})] \tilde{z} \frac{\alpha(x)}{\mu}. \quad (7.17)$$

Профиль линии существенно зависит от значений параметров λ , β и τ_0 , а также, конечно, и от вида коэффициента поглощения. Остановимся на случае $\beta = 0$. На рис.42—45

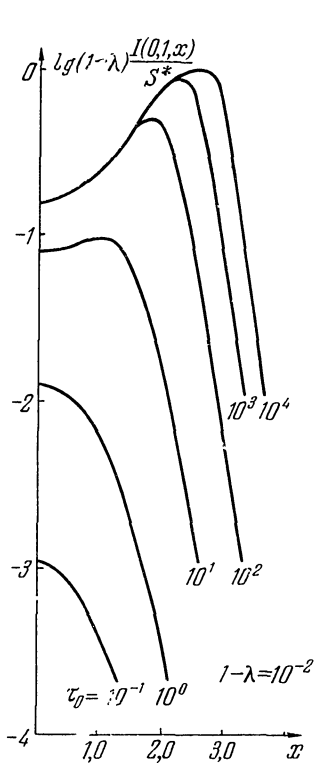


Рис. 44. Профили линий, образующихся в плоском слое с равномерным распределением источников. Коэффициент поглощения доплеровский, $\lambda = 0,99$, $\beta = 0$.

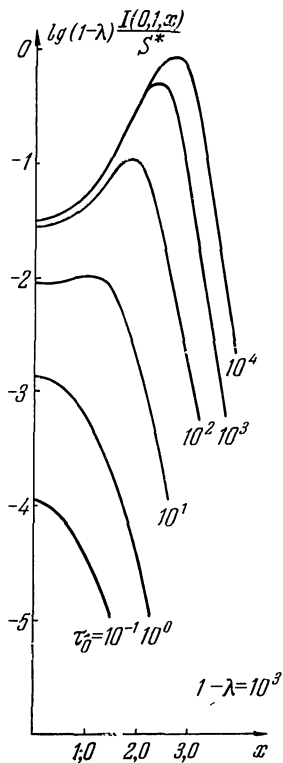


Рис. 45. Профили линий, образующихся в плоском слое с равномерным распределением источников. Коэффициент поглощения доплеровский, $\lambda = 0,999$, $\beta = 0$.

для ряда τ_0 и λ показаны профили линий, соответствующие доплеровскому коэффициенту поглощения, полученные численными методами А. Хёрном [2]. На рис. 46 приведены профили, рассчитанные Ю. Эвреттом и Д. Хаммером [1]

(также путем численного решения уравнения для $S(\tau)$ и последующего вычисления интенсивностей выходящего излучения) для нескольких значений фойгтовского параметра a , $1 - \lambda = 10^{-4}$ и ряда τ_0 . Из рисунков видно, что с увеличением τ_0 линии постепенно расширяются. Когда $\lambda = 0$ и $\tau_0 \gg 1$, при любом профиле коэффициента поглощения линия должна иметь плосковершинную часть. По мере уменьшения $1 - \lambda$ развивается характерный провал в центре линии, появление которого вызвано спадом степени возбуждения к границам из-за выхода излучения.

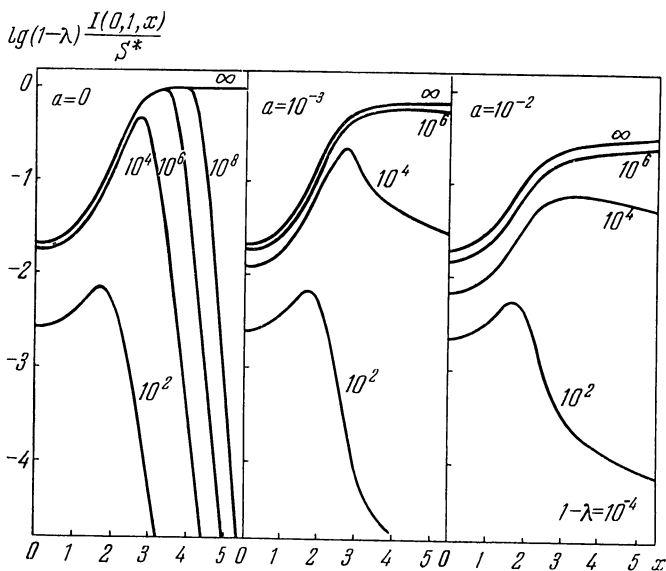


Рис. 46. Профили линий, образующихся в плоском слое с равномерным распределением источников, $1 - \lambda = 10^{-4}$ и $\beta = 0$, для трех значений фойгтовского параметра a : $a = 0$; 0,001 и 0,01. Числа у кривых — значения $\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{A}$.

$$\bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{A}.$$

Сравнение рис. 44 и 45 показывает, что при малых $1 - \lambda$ существует область значений τ_0 , в которой форма линии (при заданном коэффициенте поглощения) целиком определяется значением τ_0 и не зависит от λ (кривые, соответству-

ющие $\tau_0 \leq 10$). Это слабо диссипативные среды. В предельном случае строго консервативной среды профили линий имеют вид, изображенный на рис. 47 (для доплеровского коэффициента поглощения, по А. Хёрну [1]). При больших τ_0 для расчета профилей по формуле (7.17) можно в этом случае использовать асимптотики X- и Y-функций, полученные в § 8.5. Результаты полностью согласуются с тем, что дает применение численных методов (такое сравнение можно найти в работе Д. И. Нагирнера [4]; см. также М. Хислет и Р. Уорминг [3]). Характерная особенность профилей, изображенных на рис. 47, — провал в центре линии при больших τ_0 . Положение максимумов интенсивности можно легко оценить (В. В. Иванов [2]). Рассмотрим в виде примера случай доплеровского профиля. Из (7.17), (5.18) и (5.19) находим, что при тех x , для которых величина

$$t = \frac{\tau_0}{\mu} \alpha(x) \quad (7.18)$$

не очень велика, т. е. достаточно далеко от центра линии,

$$I(0, \mu, x) \sim 2S^* X^2(\infty) e^{-\frac{t}{2}} I_1\left(\frac{t}{2}\right) \quad (7.19)$$

(в данном случае $\gamma = 1/2$ и $\alpha(x) = e^{-x^2}$). Дифференцируя это выражение по x и приравнявая производную нулю, для

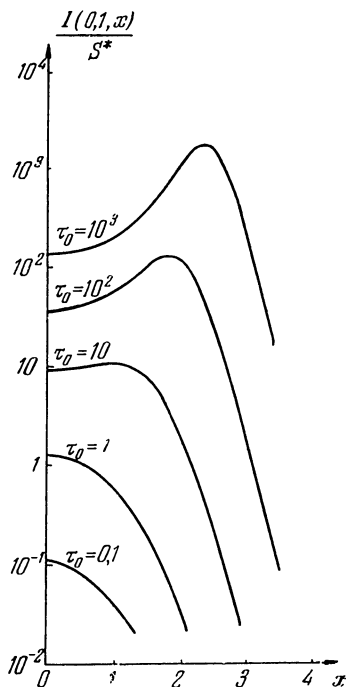


Рис. 47. Профили линий, образующихся в консервативно рассеивающем плоском слое с равномерно распределенными источниками. Коэффициент поглощения доплеровский.

определения

$$t_{\max} = \frac{\tau_0}{\mu} \alpha(x_{\max})$$

приходим к следующему уравнению

$$I_1' \left(\frac{t_{\max}}{2} \right) - I_1 \left(\frac{t_{\max}}{2} \right) = 0,$$

или, если воспользоваться известными свойствами бесселевых функций,

$$I_0 \left(\frac{t_{\max}}{2} \right) - \left(1 + \frac{2}{t_{\max}} \right) I_1 \left(\frac{t_{\max}}{2} \right) = 0.$$

Значение t_{\max} , являющееся корнем этого уравнения, равно 3,09, так что

$$\frac{\tau_0}{\mu} e^{-x_{\max}^2} \sim 3,09.$$

Отсюда

$$x_{\max} \sim \pm \sqrt{\ln \frac{\tau_0}{\mu} - 1,13}. \quad (7.20)$$

Это строгая асимптотическая формула. Она тем точнее, чем больше τ_0 . На практике ею вполне можно пользоваться, начиная с $\tau_0 = 10$. Из нее, между прочим, видно, что в том случае, когда уширение линии обусловлено эффектом Доплера, ее ширина является плохим критерием для определения оптической толщины среды, в которой эта линия формируется. Значительно чувствительнее к изменению τ_0 глубина центрального провала. Однако когда коэффициент поглощения фойгтовский и $\tau_0 \gg 1/a$, положение оказывается обратным. Расстояние между максимумами возрастает в этом случае пропорционально $\tau_0^{1/2}$, тогда как отношение интенсивности в максимумах к интенсивности в центре линии растет лишь как $\tau_0^{1/4}$ (ср. § 6.5).

Важнейшая физическая задача, сводящаяся к решению уравнения переноса с равномерным распределением первичных источников, — это расчет поля излучения и определение степени возбуждения в однородном изотермичном слое газа, состоящего из двухуровневых атомов. Если заселение верхнего уровня вызывается электронным ударом

и фотовозбуждением собственным излучением газа, его опустошение — радиативными переходами вниз и ударами

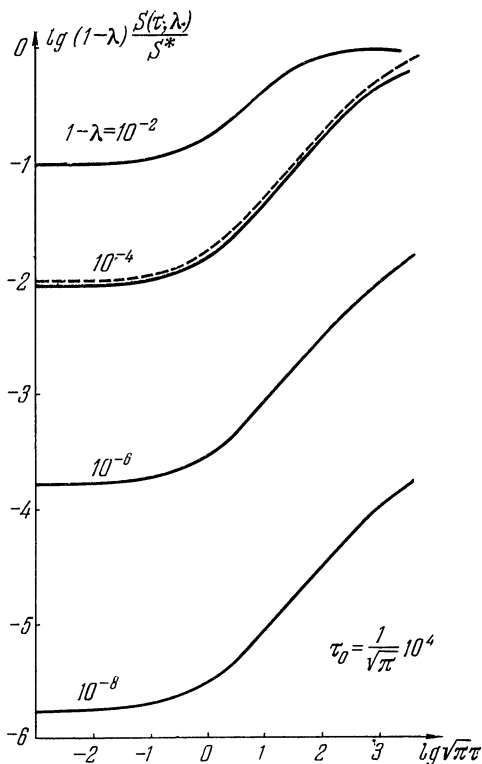


Рис. 48. Функции источников в плоском слое оптической толщины $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^4$ с $1-\lambda=10^{-4}$ и равномерно распределенными источниками. Коэффициент поглощения доплеровский. Пунктир—функция источников при $\tau_0 = \infty$ и $1-\lambda = 10^{-4}$.

второго рода, и поглощения и излучения в континууме нет ($\beta = 0$), то

$$S^* = (1 - \lambda) B_{\nu_{12}}(T_e), \quad (7.21)$$

$$\lambda = \frac{A_{21}}{A_{21} + n_e C_{21}}. \quad (7.22)$$

В этом случае величина $(1 - \lambda)I(0,1, x) / S^*$, логарифм которой служит ординатой кривых на рис. 42—46, равна, очевидно, $I(0,1, x) / B_{\nu_{12}}(T_e)$. Из рисунков видно, что для слабо диссипативных сред интенсивность на всех частотах

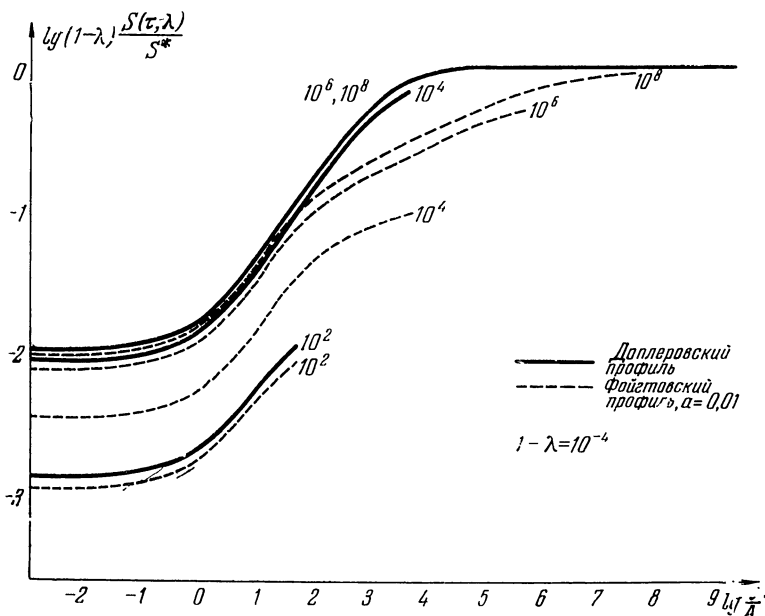


Рис. 49. Функция источников в плоском слое с равномерно распределенными источниками для доплеровского и фойгтовского ($\alpha = 0,01$) профилей при $\beta = 0$, $1 - \lambda = 10^{-4}$ и нескольких значениях $\frac{\tau_0}{\Delta}$, указанных у кривых. Кривые даны только для $0 < \tau \leq \frac{\tau_0}{2}$.

много меньше планковской. Следовательно, степень возбуждения на всех глубинах мала по сравнению с больцмановской степенью возбуждения. С ростом диссипативности ω интенсивность в максимумах приближается к планковской. Это значит, что степень возбуждения в середине слоя становится близкой к больцмановской. При $\omega \gg 1$ в середине слоя существует область, где условия близки к ЛТР (рис. 48—50, по Ю. Эвретту и Д. Хаммеру [1]).

Более подробное обсуждение рассмотренной только что задачи, в частности ее физической стороны, а также дальнейшие численные данные можно найти в работах

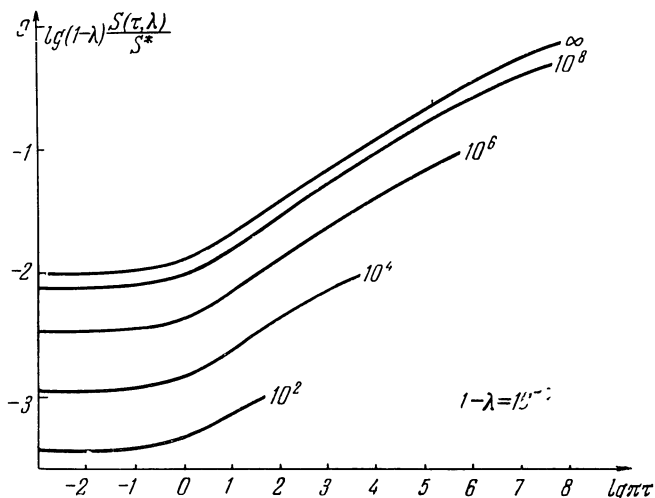


Рис. 50. Функция источников для тех же значений параметров, что и на рис. 49, соответствующая лоренцовскому профилю.

А. Хёрна [2], [3] и Ю. Эвретта и Д. Хаммера [1]; см. также следующий параграф.

§ 8.8. Свечение однородного изотермического слоя газа (случай $\beta \neq 0$)

Вернемся к задаче, исследованной в § 7.6, сохранив все использованные в этом параграфе предположения, кроме одного, именно, вместо среды бесконечно большой оптической толщины рассмотрим теперь слой, оптическая толщина которого в центре линии равна τ_0 .

Интегральное уравнение для функции источников в линии $S(\tau, \lambda, \beta)$ имеет в этом случае вид

$$S(\tau, \lambda, \beta) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) S(\tau', \lambda, \beta) d\tau' + S_1^*(\tau, \lambda, \beta), \quad (8.1)$$

где первичная функция источников S_1^* равна

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K_0(|\tau - \tau'|, \beta) d\tau' \right]. \quad (8.2)$$

Интенсивность выходящего излучения дается выражением

$$I(0, \mu, x) = I(\tau_0, -\mu, x) = \int_0^{\tau_0} [\alpha(x) S(\tau, \lambda, \beta) + \beta B_{\nu_{12}}(T)] e^{-\frac{(x)+\beta}{\mu}\tau} \frac{d\tau}{\mu} \quad (\mu > 0). \quad (8.3)$$

Линия накладывается на непрерывный спектр, интенсивность которого можно получить из (8.3), если положить $x = \infty$:

$$(0, \mu, \infty) = I(\tau_0, -\mu, \infty) = B_{\nu_{12}}(T) (1 - e^{-\frac{\beta\tau_0}{\mu}}) \quad (\mu > 0). \quad (8.4)$$

Заметим, что $\frac{\beta\tau_0}{\mu}$ есть не что иное, как оптическая толщина слоя в непрерывном спектре, измеренная вдоль луча.

Задача состоит в нахождении профиля линии и определении функции источников (т. е. степени возбуждения в зависимости от глубины). Многие важные сведения можно получить непосредственно из анализа основного уравнения для функции источников, без его решения.

Начнем с рассмотрения источников члена S_1^* . Выражение (8.2) можно переписать в виде

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \tilde{\lambda} - \beta \frac{\lambda}{2} L_0(\tau, \beta) - \beta \frac{\lambda}{2} L_0(\tau_0 - \tau, \beta) \right], \quad (8.5)$$

или

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = B_{\nu_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau} K_0(t, \beta) dt + \beta \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0 - \tau} K_0(t, \beta) dt \right]. \quad (8.6)$$

Очевидно, что S_1^* (а значит, и S) симметричны относительно $\tau = \tau_0/2$:

$$S_1^*(\tau, \lambda, \beta) = S_1^*(\tau_0 - \tau, \lambda, \beta). \quad (8.7)$$

Так как $K_0(\tau, \beta)$ положительно и монотонно убывает с τ , функция S_1^* максимальна в середине слоя (при $\tau = \tau_0/2$) и спадает к границам. Это следует из (8.6). Легко показать, что при $\tau_0 < \infty$

$$S_1^*\left(\frac{\tau_0}{2}, \lambda, \beta\right) < 2S_1^*(0, \lambda, \beta). \quad (8.8)$$

Действительно, в силу монотонности $K_0(\tau, \beta)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_0} K_0(t, \beta) dt &\leq \int_0^{\tau} K_0(t, \beta) dt + \int_0^{\tau_0 - \tau} K_0(t, \beta) dt \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\frac{\tau_0}{2}} K_0(t, \beta) dt < 2 \int_0^{\tau_0} K_0(t, \beta) dt, \end{aligned} \quad (8.9)$$

что в комбинации с (8.6) и приводит к (8.8).

Из (8.6) и (8.9) следует, что если

$$1 - \lambda \gg \lambda \beta \int_0^{\tau_0} K_0(t, \beta) dt, \quad (8.10)$$

то возбуждением атомов излучением в непрерывном спектре можно пренебречь по сравнению с ударным возбуждением. Если же

$$1 - \lambda \ll \frac{\beta}{2} \int_0^{\tau_0} K_0(t, \beta) dt, \quad (8.11)$$

основным механизмом первичного заселения верхнего уровня служат возбуждения излучением континуума.

Когда оптическая толщина среды велика ($\tau_0 \gg 1$), можно получить простые достаточные условия выполнимости соотношения (8.10). Так как при $\tau_0 < \infty$

$$\int_0^{\tau_0} K_0(t, \beta) dt < \int_0^{\infty} K_0(t, \beta) dt = L_0(0, \beta) = \delta(\beta),$$

неравенство (8.10) будет выполнено, если

$$1 - \lambda \gg \lambda \beta \delta(\beta). \quad (8.12)$$

Другое достаточное условие мы получим, если заметим, что

при $\beta > 0$

$$K_0(\tau, \beta) < K_0(\tau, 0) \equiv N_{11}(\tau).$$

Поэтому, если

$$1 - \lambda \gg \lambda \beta \int_0^{\tau_0} N_{11}(t) dt, \quad (8.13)$$

неравенство (8.10) также будет выполнено. Согласно (2.6.44) при достаточно больших τ

$$N_{11}(\tau) \sim A \frac{\Gamma(2\gamma)}{\gamma} x'(\tau), \quad (8.14)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{\tau_0} N_{11}(t) dt \sim A \frac{\Gamma(2\gamma)}{\gamma} x(\tau_0).$$

Поэтому, когда τ_0 достаточно велико, условие (8.13) принимает вид

$$1 - \lambda \gg \lambda \beta A \frac{\Gamma(2\gamma)}{\gamma} x(\tau_0). \quad (8.15)$$

В частности, для коэффициентов поглощения важнейших видов:

$$\text{Доплер: } 1 - \lambda \gg \lambda \beta \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \tau_0}, \quad (8.15a)$$

$$\text{Фойгт: } 1 - \lambda \gg \lambda \beta 4 \sqrt{U(a, 0)} (a \tau_0)^{1/2} \quad (a \tau_0 \gg 1), \quad (8.15b)$$

$$\text{Лоренц: } 1 - \lambda \gg \lambda \beta \frac{4}{\sqrt{\pi}} \tau_0^{1/2}. \quad (8.15b)$$

В предельном случае сильно диссипативной среды ($\omega \gg 1$) условие (8.12) тождественно (8.10). Однако если диссипативность невелика ($\omega \leq 1$), неравенство (8.12) накладывает на $1 - \lambda$ более жесткие ограничения, чем (8.10). В этом случае предпочтительнее пользоваться не (8.12), а условием (8.15). В предельном случае слабо диссипативной среды ($\omega \ll 1$) большой оптической толщины оно совпадает с (8.10).

Если неравенство (8.10) выполнено, положение сильно упрощается, так как первичную функцию источников можно считать равной $B_{\nu_{12}}(T)(1 - \lambda)$. Тем самым мы приходим к задаче о свечении среды с равномерным распределением источников, рассмотренной в предыдущем параграфе. Следует отметить, что интенсивность выходящего излучения должна находиться по формуле (8.3), т. е. к интенсивности диффузного излучения, найденной в § 8.7, нужно добавить интенсивность излучения в континууме, выходящего из среды без рассеяний. Окончательное выражение имеет вид

$$I(0, \mu, x) = I(\tau_0, -\mu, x) = \frac{B_{\nu_{12}}(T)}{\alpha(x) + \beta} \left\{ (1 - \lambda) X(\infty) \times \right. \\ \times \left[X\left(\frac{\mu}{\alpha(x) + \beta}\right) - Y\left(\frac{\mu}{\alpha(x) + \beta}\right) \right] \alpha(x) + \\ \left. + \beta \left(1 - e^{-\frac{\alpha(x) + \beta}{\mu} \tau_0} \right) \right\} \quad (\mu > 0). \quad (8.16)$$

До сих пор мы рассматривали источниковый член и исследовали только те упрощения, которые обусловлены преобладанием одного из механизмов первичного заселения верхнего уровня — ударного возбуждения или возбуждения излучением континуума — над другим. Теперь мы изучим упрощения, вызываемые другими причинами.

Если диссипативность среды мала ($\omega \ll 1$), то с хорошим приближением среду можно считать консервативной (см. § 8.3). Функцию источников $S(\tau, \lambda, \beta)$ вместо (8.1) можно в этом случае находить из уравнения

$$S(\tau, \lambda, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S(\tau', \lambda, \beta) d\tau' + S_1^*(\tau, \lambda, \beta) \\ (\omega \ll 1), \quad (8.17)$$

где первичная функция источников $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$ дается выражением (8.2). Далее, поскольку среда слабо диссипативна, то $\tau_0 \ll 1/\beta$ и $1 - \lambda \ll 1$. Поэтому в (8.2) функцию $\lambda K_0(|\tau - \tau'|, \beta)$ можно заменить на $K_0(|\tau - \tau'|, 0) \equiv$

$\equiv N_{11}(|\tau - \tau'|)$ (см. § 7.1), так что при $\omega \ll 1$

$$\begin{aligned} S_1^*(\tau, \lambda, \beta) &= B_{v_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \frac{\beta}{2} \int_0^{\tau_0} N_{11}(|\tau - \tau'|) d\tau' \right] = \\ &= B_{v_{12}}(T) \left[1 - \lambda + \frac{\beta}{2} \int_0^{\tau} N_{11}(t) dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{\tau_0 - \tau} N_{11}(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Подставляя это выражение в (8.17), находим, что функцию источников $S(\tau, \lambda, \beta)$ можно представить в виде

$$S(\tau, \lambda, \beta) = B_{v_{12}}(T) [(1 - \lambda) S_1(\tau) + \beta S_2(\tau)], \quad (8.19)$$

где $S_1(\tau)$ и $S_2(\tau)$ — решения уравнений

$$S_1(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S_1(\tau') d\tau' + 1, \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} S_2(\tau) &= \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|) S_2(\tau') d\tau' + \frac{1}{2} \int_0^{\tau} N_{11}(t) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\tau_0 - \tau} N_{11}(t) dt. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Весьма существенно, что $S_1(\tau)$ и $S_2(\tau)$ зависят только от τ (и τ_0), но не от λ и β . Таким образом, когда среда слабо диссипативна, зависимость функции источников от параметров λ и β оказывается чрезвычайно простой.

Если наряду с условием $\omega \ll 1$ выполнено также неравенство (8.15) или противоположное ему, появляются дальнейшие упрощения. В первом из этих случаев

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim B_{v_{12}}(T)(1 - \lambda) S_1(\tau), \quad (8.22)$$

тогда как во втором

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim B_{v_{12}}(T)\beta S_2(\tau). \quad (8.23)$$

Стоит также отметить, что при больших τ_0 отношение $\frac{S_1(\tau)}{S_2(\tau)}$ должно очень слабо зависеть от τ . Это следует из того, что свободный член уравнения (8.21) изменяется в этом случае в сравнительно узких пределах.

Откажемся теперь от предположения о том, что диссипативность среды ω мала. Диссипативность в расчете на одно рассеяние $1 - \tilde{\lambda}$ будем по-прежнему считать малой, а ω — произвольным. Оказывается, что при $\tau_0 \gg 1$ и в этом случае все еще можно получить важные сведения о зависимости функции источников от глубины без решения уравнения для $S(\tau)$. Как было показано выше, первичная функция источников $S_1^*(\tau, \lambda, \beta)$ имеет максимум при $\tau = \tau_0/2$ и спадает к границам, так что при $\tau \ll \tau_0$

$$\int_0^{\tau} S_1^*(\tau, \lambda, \beta) d\tau \ll \int_{\tau}^{\tau_0} S_1^*(\tau, \lambda, \beta) d\tau.$$

Соображения, изложенные в § 7.7, позволяют поэтому утверждать, что при τ , малых по порядку по сравнению с τ_b , где τ_b — толщина пограничного слоя (а если $\tau_0 \lesssim \tau_b$, то при τ , заметно меньших $\tau_0/2$), функция источников $S(\tau, \lambda, \beta)$ должна быть асимптотически ($\tau_0 \gg 1$) пропорциональна решению обобщенной проблемы Милна $\tilde{S}(\tau)$, т. е.

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim S(0, \lambda, \beta) \tilde{S}(\tau) \quad (8.24)$$

при

$$\tau \ll \min\left(\tau_b, \frac{\tau_0}{2}\right).$$

В силу симметрии задачи $S(\tau, \lambda, \beta) = S(\tau_0 - \tau, \lambda, \beta)$, что в комбинации с (8.24) дает

$$S(\tau, \lambda, \beta) \sim S(0, \lambda, \beta) \tilde{S}(\tau_0 - \tau) \quad (8.24')$$

при

$$\tau_0 - \tau \ll \min\left(\tau_b, \frac{\tau_0}{2}\right).$$

Тот факт, что с удалением от границ функция источников вплоть до довольно больших глубин возрастает пропорционально $\tilde{S}(\tau)$, позволяет сделать полезное качественное заключение о форме центральных частей линии. Именно, можно утверждать, что в центральных частях линии интенсивность должна зависеть от частоты примерно так же, как и в обобщенной проблеме Милна, т. е. должна возрастать с удалением от центра линии.

Заканчивая на этом анализ предельных случаев, переходим к обсуждению имеющихся численных данных. Все они заимствованы из работы Д. Хаммера [5] и были получены путем численного решения уравнения переноса методом дискретных ординат. Зависимость функции источников

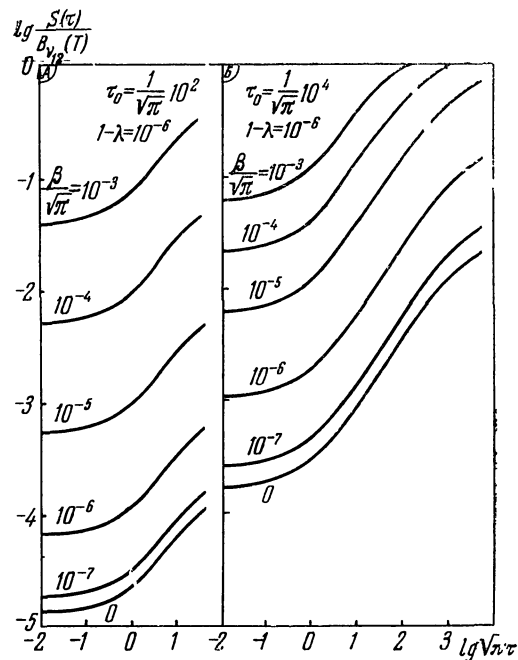


Рис. 51. Функция источников в однородном изотермичном слое при доплеровском коэффициенте поглощения, $\tau_0 \sqrt{\pi} = 10^2$ и 10^4 и $1 - \lambda = 10^{-6}$.

$S(\tau)$ от глубины для сред с $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^2$ и $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^4$ показана на рис. 51. Кривые относятся к доплеровскому профилю и $1 - \lambda = 10^{-6}$. При всех значениях β , указанных у кривых, соответствующих $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^2$, диссипативность среды ω мала, причем она уменьшается с убыванием β .

Кривые, соответствующие $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^4$, показывают переход от слабо диссипативных сред ($\beta \lesssim \sqrt{\pi} 10^{-5}$) к сильно диссипативным ($\beta \gtrsim \sqrt{\pi} 10^{-3}$).

При $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^2$ оптическая толщина среды в непрерывном спектре $\beta \tau_0$ для всех значений β , указанных на рис. 51, малá. Тем не менее континуум оказывает огромное влияние на функцию источников в линии. Причина этого состоит в том, что при малых $1 - \lambda$ первичное возбуждение атомов излучением континуума преобладает над возбуждением электронным ударом (кривые, соответствующие $\beta \gtrsim \sqrt{\pi} \times 10^{-6}$). Как было выяснено выше, функция источников в этом случае дается формулой (8.23). Она должна быть пропорциональна β , а форма кривой $S(\tau)$ не должна зависеть от β . Эти выводы хорошо иллюстрируются кривыми, соответствующими $\beta = \sqrt{\pi} 10^{-5}$ и $\beta = \sqrt{\pi} 10^{-4}$ (при $\beta = \sqrt{\pi} \times 10^{-3}$ уже начинают сказываться диссипативные процессы, при $\beta = \sqrt{\pi} 10^{-6}$ становится заметной роль первичного возбуждения электронным ударом). Сходство формы кривых для $\beta = 0$ и $\beta = \sqrt{\pi} 10^{-5}$ находится в соответствии с отмеченным выше примерным постоянством отношения $S_1(\tau)/S_2(\tau)$.

Рассмотрение трех нижних кривых для $\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 10^4$ еще раз подтверждает вывод об очень слабой зависимости $S(\tau)/S(0)$ от λ и β для сред с $\omega \ll 1$. Когда диссипативность велика,

Т а б л и ц а 31

Функция $S(\tau)/S(0)$ в однородном изотермичном слое (доплеровский профиль, $1 - \lambda = 10^{-6}$)

$\tau_0 \sqrt{\pi}$	$\frac{\beta/\sqrt{\pi}}{\tau \sqrt{\pi}}$						
		0	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}
10^2	1	1,67	1,68	1,70	1,71	1,71	1,71
	10	4,54	4,63	4,78	4,83	4,83	4,76
	50	8,12	8,33	8,71	8,83	8,80	8,37
10^3	1	1,63	1,68	1,69	1,69	1,69	1,70
	10	4,81	4,83	4,87	4,88	4,87	4,79
	100	16,9	17,1	17,4	17,4	16,7	12,8
	500	30,3	30,8	31,5	31,4	28,1	16,0

функция источников $S(\tau)$ при $\tau \leq \tau_0/2$ почти в точности совпадает с соответствующей функцией источников для полубесконечной среды (на рис. 51, Б и 39, стр. 366, кривые, отвечающие $\beta = \sqrt{\pi} 10^{-3}$, неотличимы).

В табл. 31 приведены значения $S(\tau)/S(0)$ для $\sqrt{\pi}\tau_0 = 10^2$ и 10^3 , нескольких значений β и $1 - \lambda = 10^{-6}$ (профиль — доплеровский). Сопоставление табл. 31 и 29 (стр. 366)

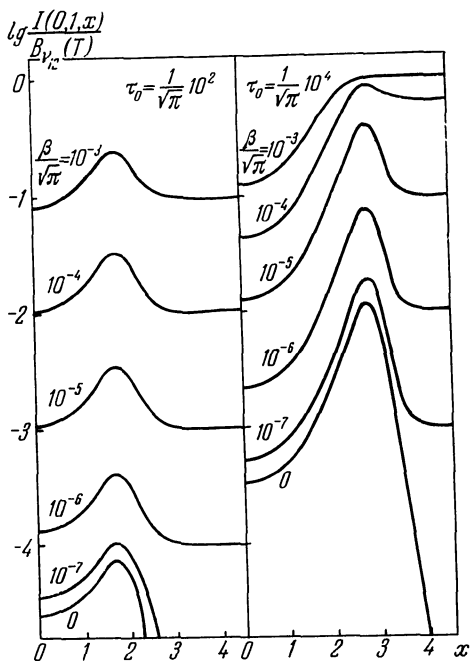


Рис. 52. Интенсивности излучения, выходящего по нормали из однородного изотермичного слоя ($\tau_0 \sqrt{\pi} = 10^2$ и 10^4 , $1 - \lambda = 10^{-6}$, доплеровский коэффициент поглощения).

показывает, что вблизи границы функция источников пропорциональна решению обобщенной проблемы Милна, что согласуется со сделанным ранее выводом.

Интенсивности излучения в направлении $\mu = 1$, соответствующие функциям источников, приведенным на рис. 51,

даны на рис. 52. Линии имеют сложный профиль, и в ряде случаев бессмысленно даже говорить о том, имеем ли мы дело с линией поглощения или с эмиссионной линией. Эквивалентную ширину линии вряд ли можно использовать здесь для получения физической информации.

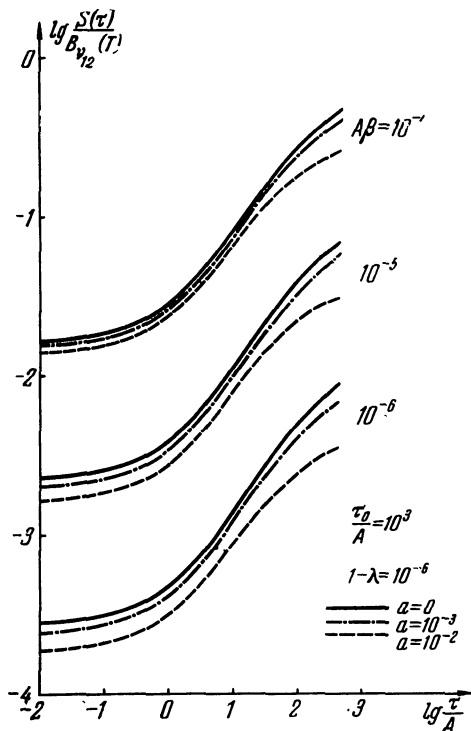


Рис. 53. Функция источников в однородном изотермичном слое с $\tau_0/A = 10^3$, $1 - \lambda = 10^{-6}$ при различных значениях фойгтовского параметра a .

Зависимость функции источников от глубины при фойгтовском профиле для нескольких τ_0 и β показана на рис. 53—55. Когда фойгтовский параметр a мал и $\tau_0 \ll 1/a$, следует ожидать, что функция источников будет мало отличаться от соответствующей функции источников при $a = 0$,

т. е. при доплеровском профиле (см. конец § 8.6.) Близость кривых для $a=0$ и $a=10^{-3}$ на рис. 53 показывает, что при $a\tau_0$ порядка единицы влияние отличия коэффициента поглощения от доплеровского все еще невелико. Однако при больших $a\tau_0$ форма профиля существенно сказывается на зависимости функции источников от глубины. Детальное

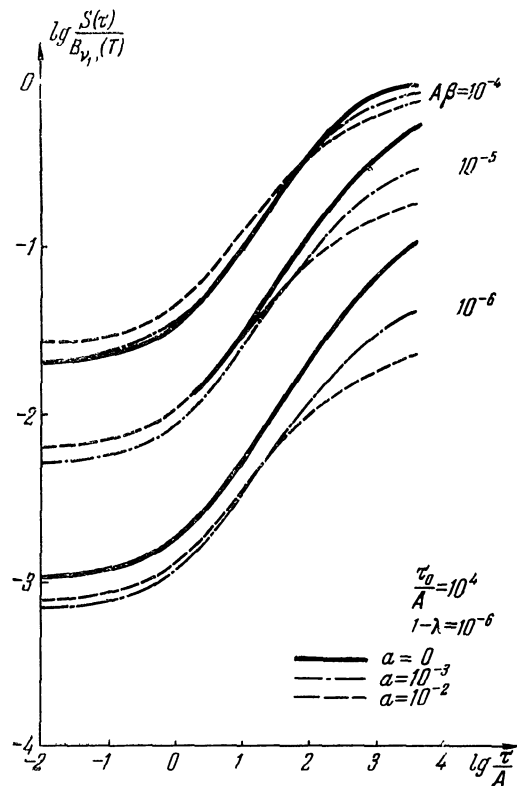


Рис. 54. Функция источников в однородном изотермичном слое с $\tau_0/A=10^4$, $1-\lambda=10^{-6}$ при различных значениях фойтзовского параметра a .

сопоставление и обсуждение особенностей кривых, приведенных на рис. 40 (стр. 367) и 53—55, дается в работе Д. Хаммера [5]. Наиболее характерная черта состоит в том,

что для сильно диссипативных сред значения $S(\tau)$ вблизи границы с ростом a монотонно возрастают (см. рис. 40,

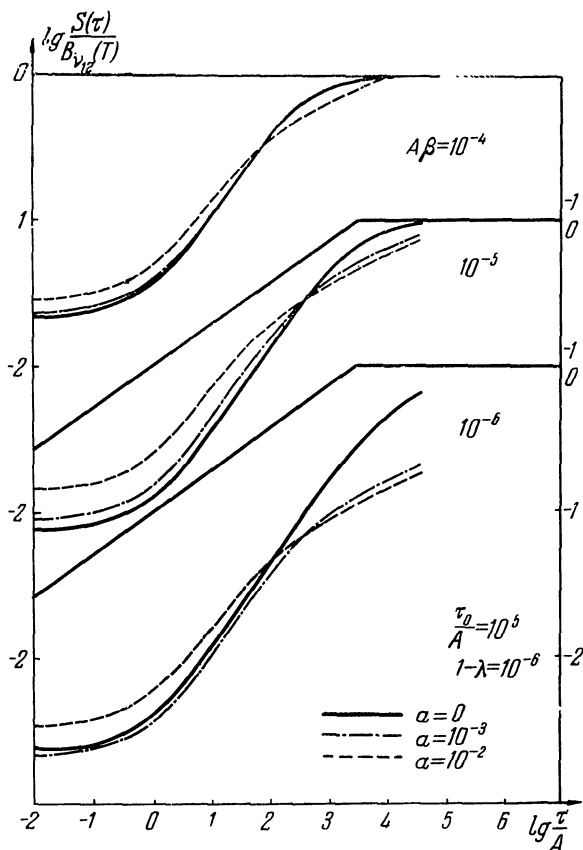


Рис. 55. Функция источников в однородном изотермическом слое с $\frac{\tau_0}{A} = 10^6$, $1 - \lambda = 10^{-6}$ при различных значениях фойтговского параметра a .

стр. 367), а для слабо диссипативных — убывают (рис. 53). Пересечения кривых на рис. 54 и 55 отражают переход от одного из этих предельных случаев к другому.

§ 8.9. Среднее число рассеяний

Среднее число рассеяний \bar{N} , испытываемых квантами поля диффузного излучения, при заданной первичной функции источников $S_1^*(\tau)$ равно (подробности см. в § 6.8)

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} S(\tau) d\tau}{\int_0^{\tau_0} S_1^*(\tau) d\tau}. \quad (9.1)$$

Это выражение (как и весь дальнейший анализ) справедливо как в том случае, когда среда не поглощает и не излучает в непрерывном спектре ($\beta = 0$), так и тогда, когда эти процессы играют роль ($\beta \neq 0$).

Пусть на глубине $\tau = \tau_1$ имеется плоский изотропный источник, излучающий в частотах линии. Тогда с точностью до постоянного множителя (в данном случае несущественного)

$$S^*(\tau) = \delta(\tau - \tau_1), \quad (9.2)$$

а функция источников $S(\tau)$ равна функции Грина $G(\tau, \tau_1; \tau_0)$, или, что то же самое,

$$S(\tau) = \Gamma(\tau, \tau_1; \tau_0) + \delta(\tau - \tau_1). \quad (9.3)$$

Обозначая среднее число рассеяний в этом случае через $\bar{N}(\tau_1; \tau_0)$, из (9.1) имеем

$$\bar{N}(\tau_1; \tau_0) = 1 + \int_0^{\tau_0} \Gamma(\tau, \tau_1; \tau_0) d\tau. \quad (9.4)$$

Полагая в (2.2) $z = \infty$, находим

$$\bar{N}(\tau_1; \tau_0) = \frac{4\pi}{\lambda} P(\tau_1, \infty; \tau_0). \quad (9.5)$$

Поэтому согласно (1.17) $\bar{N}(\tau; \tau_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{N}(\tau; \tau_0) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} K(|\tau - \tau'|, \beta) \bar{N}(\tau'; \tau_0) d\tau' + 1, \quad (9.6)$$

т. е. равна функции источников в среде с $S_1^* = 1$.

Когда в среде имеются распределенные источники, описываемые первичной функцией источников $S_1^*(\tau)$, то

$$S(\tau) = S_1^*(\tau) + \int_0^{\tau_0} S_1^*(\tau_1) \Gamma(\tau, \tau_1; \tau_0) d\tau_1, \quad (9.7)$$

и (9.1) и (9.4) дают

$$\bar{N} = \frac{\int_0^{\tau_0} S_1^*(\tau) \bar{N}(\tau; \tau_0) d\tau}{\int_0^{\tau_0} S_1^*(\tau) d\tau}. \quad (9.8)$$

Таким образом, если решено уравнение (9.6), т. е. найдена функция источников в среде с равномерно распределенными источниками, среднее число рассеяний при любом распределении источников можно найти простым интегрированием.

Из формулы (9.8) следует, что каково бы ни было распределение источников, среднее число рассеяний не может стать меньше $\bar{N}(0, \tau_0)$, но не может и превзойти $\bar{N}(\tau_0/2; \tau_0)$, т. е.

$$\bar{N}(0; \tau_0) \leq \bar{N} \leq \bar{N}\left(\frac{\tau_0}{2}; \tau_0\right), \quad (9.9)$$

или, если воспользоваться (9.5) и (2.55),

$$X(\infty; \tau_0) \leq \bar{N} < X^2(\infty; \tau_0). \quad (9.10)$$

Чем сильнее источники концентрируются к середине слоя, тем ближе \bar{N} к $\bar{N}(\tau_0/2; \tau_0)$. Однако, как нетрудно показать (см. В. В. Соболев [13]), даже при равномерном распределении источников среднее число рассеяний \bar{N} отличается от $\bar{N}(\tau_0/2; \tau_0)$ менее чем вдвое, т. е. в этом случае

$$\frac{1}{2} \bar{N}\left(\frac{\tau_0}{2}; \tau_0\right) < \bar{N} < \bar{N}\left(\frac{\tau_0}{2}; \tau_0\right). \quad (9.11)$$

И только когда мощность источников во внутренних слоях среды много меньше их мощности вблизи границ, среднее число рассеяний становится близким к своему наименьшему возможному значению $\bar{N}(0; \tau_0) = X(\infty; \tau_0)$.

Для среды с равномерно распределенными источниками ($S_1^* = \text{const}$) среднее число рассеяний, которое мы будем обозначать в дальнейшем через \bar{N}_0 , можно выразить через функцию $X(\infty; \tau)$. Из (9.8) и (9.5) имеем

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{\tau_0} \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) d\tau. \quad (9.12)$$

Полагая в (7.11) $\tilde{z}_0 = \infty$, находим

$$\int_0^{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tilde{z}}} P(\tau, \infty; \tau_0) d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} X(\infty; \tau_0) [X(\tilde{z}; \tau_0) - Y(\tilde{z}; \tau_0)] \tilde{z}. \quad (9.13)$$

Устремляя здесь \tilde{z} к бесконечности и пользуясь (2.37) и (2.38), получаем

$$\int_0^{\tau_0} P(\tau, \infty; \tau_0) d\tau = \frac{\lambda}{4\pi} X(\infty; \tau_0) [y_1(\tau_0) - x_1(\tau_0)], \quad (9.14)$$

так что

$$\bar{N}_0 = \frac{X(\infty; \tau_0)}{\tau_0} [y_1(\tau_0) - x_1(\tau_0)]. \quad (9.15)$$

Наконец, использование (2.46) дает окончательно

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} X^2(\infty; \tau) d\tau. \quad (9.16)$$

В предельном случае слабо диссипативной среды большой оптической толщины находим из (9.16), (2.58) и (2.6.59)

$$\bar{N}_0 \sim \frac{(2\gamma + 1)\pi}{2^{4\gamma+2}\Gamma^2\left(\frac{2\gamma+3}{2}\right)} \frac{1}{1 - V\left(\frac{1}{\tau_0}\right)} \quad (\tau_0 \gg 1, \omega \ll 1). \quad (9.17)$$

В частности, для коэффициентов поглощения важнейших видов:

$$\text{Доплер: } \bar{N}_0 \sim \frac{V\sqrt{\pi}}{2} \tau_0 \sqrt{\ln \tau_0}, \quad (9.17a)$$

$$\text{Фойгт: } \bar{N}_0 \sim \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{[8\pi^3 U(a,0)]^{1/2}} \left(\frac{\tau_0}{a}\right)^{1/2} \quad \left(\tau_0 \gg \frac{1}{a}\right), \quad (9.176)$$

$$\text{Лоренц: } \bar{N}_0 \sim \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{2}\pi} \tau_0^{1/2}. \quad (9.17B)$$

При консервативном монохроматическом рассеянии

$$\bar{N}_0 \sim \frac{\tau_0^2}{4} + \frac{3}{2} q(\infty) \tau_0 + 3q^2(\infty). \quad (9.17Г)$$

Этот результат следует из (9.16) и (4.45).

В противоположном предельном случае сильно диссипативной среды (9.16) и (5.56) дают, как и следовало ожидать,

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{1 - \tilde{\chi}} \quad (\omega \gg 1). \quad (9.18)$$

В табл. 32 приведены значения \bar{N}_0 , найденные Ю. Эвреттом и Д. Хаммером [1] путем численного решения уравнения для функции источников при $\beta = 0$ и $S_1^* = \text{const}$ и последующего использования формулы (9.1). Значения \bar{N}_0 , данные в таблице, в предельных случаях $\omega \ll 1$ и $\omega \gg 1$ хорошо согласуются с теми, которые получаются по найденным только что формулам.

Аналогичным образом можно оценить среднее число рассеяний и в других случаях. Как правило, интерес представляет не точное значение \bar{N} , а его порядковая оценка. Иногда ее удается получить без предварительного нахождения функции источников, подобно тому, как это было сделано для среды с равномерно распределенными источниками. В качестве примера оценим \bar{N} в задаче, рассмотренной в предыдущем параграфе. Как уже отмечалось, первичная функция источников $S_1^*(\tau)$ в этом случае максимальна при $\tau = \tau_0/2$ и минимальна при $\tau = 0$. Пользуясь этим, из (9.8) получаем для \bar{N} следующие строгие оценки:

$$\frac{S_1^*(0)}{S_1^*\left(\frac{\tau_0}{2}\right)} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} N(\tau; \tau_0) d\tau < \bar{N} < \frac{S_1^*\left(\frac{\tau_0}{2}\right)}{S_1^*(0)} \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} N(\tau; \tau_0) d\tau,$$

Т а б л и ц а 32

Среднее число рассеяний \bar{N}_0 при равномерном распределении источников и $\beta=0$

a	$\lg(1-\lambda)$			
	$\lg \frac{\tau_0}{A}$	-4	-6	-8
0	2	8,20 +1	8,28 +1	9,09 +1
	4	5,52 +3	1,34 +4	1,36 +4
	6	9,88 +3	6,10 +5	1,71 +6
	8	1,00 +4	9,90 +5	6,45 +7
0,001	2	7,95 +1	8,05 +1	
	4	2,71 +3	3,77 +3	
	6	7,22 +3	2,60 +4	
	8	9,60 +3	2,15 +5	
0,01	2	6,51 +1	6,56 +1	
	4	8,27 +2	9,03 +2	
	6	4,51 +3	8,30 +3	
	8	8,87 +3	7,71 +4	
∞	2	8,14		
	4	8,31 +1		
	6	7,72 +2		
	8	4,52 +3		

или

$$\frac{S_1^*(0)}{S_1^*\left(\frac{\tau_0}{2}\right)} < \frac{\bar{N}}{\bar{N}_0} < \frac{S_1^*\left(\frac{\tau_0}{2}\right)}{S_1^*(0)}. \quad (9.19)$$

Так как $S_1^*(\tau)$ изменяется в узких пределах ($S_1^*(\tau_0/2)$ превосходит $S_1^*(0)$ не более чем в два раза; см. предыдущий параграф), неравенства (9.19) заключают \bar{N}/\bar{N}_0 в достаточно узких пределах. Заметим, что оценки \bar{N} для этой задачи имеются и в [5], однако они неверны, так как исходная формула Хаммера для \bar{N} в средах с $\beta \neq 0$ содержит ошибку.

Вопрос об оценке среднего числа рассеяний рассматривается в работах В. А. Амбарцумяна [6] (см. также [1]), В. В. Соболева [15], [13], Д. Хаммера [6], Д. Остерброка [1], Ю. Каприотти [1] и др., к которым мы и отсылаем читателя за дальнейшими сведениями.

ЛИТЕРАТУРА

Абрамов Ю. Ю., Дыхне А. М., Напартович А. П.

1. О переносе резонансного излучения большой интенсивности, ЖЭТФ 52, 536, 1967.

2. Перенос резонансного излучения в полупространстве, Астрофизика 3, 459, 1967.

Абрамов Ю. Ю., Напартович А. П.

1. Волна возбуждения, вызванная световой вспышкой, Астрофизика 4, 195, 1968.

Аллен К. (C. W. Allen)

1. Astrophysical Quantities, 2nd ed., Athlone Press, London, 1963 (русский перевод первого издания: Астрофизические величины, ИЛ, М., 1960).

Амбарцумян В. А.

1. Научные труды, т. I, изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1960.

2. Об одном случае просветления среды под воздействием излучения, Докл. АН Арм.ССР, 39, 159, 1964.

3. О некоторых нелинейных задачах теории переноса излучения, в сборнике «Теория звездных спектров», стр. 91, «Наука», М., 1966.

4. О рассеянии света атмосферами планет, Астрон. ж. 19, 30, 1942.

5. К вопросу о диффузном отражении света мутной средой, Докл. АН СССР 38, 257, 1943.

6. О числе рассеяний при диффузии фотонов в мутной среде, Докл. АН Арм. ССР 8, 101, 1948.

Армстронг Б. (B. H. Armstrong)

1. Spectrum line profiles: the Voigt function, J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer 7, 61, 1967.

Басбридж И. (I. W. Busbridge)

1. Mathematics of Radiative Transfer, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960.

2. Coherent and non-coherent scattering in the theory of line formation, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 113, 52, 1953.

Бейтс Д., ред. (D. R. Bates, ed.)

1. Atomic and Molecular Processes, Academic Press, New York, 1962 (русский перевод: Атомные и молекулярные процессы, Изд. «Мир», М., 1964).

Б ё м К. (K. - H. B ö h m)

1. Basic theory of line formation, Ch. 3 in «Stellar Atmospheres», ed. J. L. Greenstein, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1960 (русский перевод: Звездные атмосферы, под ред. Дж. Л. Гринштейна, ИЛ, М., 1963).

Б и б е р м а н Л. М.

1. К теории диффузии резонансного излучения, ЖЭТФ 17, 416, 1947.

2. Нарушение термодинамического равновесия в плазме, вызванное выходом излучения, ЖЭТФ 19, 584, 1949.

Б и б е р м а н Л. М., В е к л е н к о Б. А.

1. Диффузия излучения в разряде цилиндрической конфигурации, Физический сборник Львовского ун-та, вып. 4(9), стр. 99, Львов, 1958.

Б и б е р м а н Л. М., Г у р е в и ч И. М.

1. Прозрачность ртутных паров для резонансной линии ртути $\lambda 2537 \text{ \AA}$ при малых оптических плотностях поглощающего слоя, ЖЭТФ 19, 507, 1949.

Б р а г и н с к и й С. И., Б у д к е р Г. И.

1. Физические явления в процессе разгорания разряда при неполной ионизации, в сборнике «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. I, изд. АН СССР, М., 1958.

В а й н ш т е й н М. (M. Weinstein)

1. Effect of reflecting boundaries on transport of resonance radiation, J. Appl. Phys. 33, 587, 1962.

В а т с о н Г. (G. N. Watson)

1. A Treatise on the Theory of Bessel Functions, vol. II, 1945 (русский перевод: Теория бесселевых функций, том II, ИЛ, М., 1949).

В е к л е н к о Б. А.

1. О функции Грина уравнения диффузии излучения, ЖЭТФ 33, 817, 1957.

2. О функции Грина уравнения диффузии резонансного излучения, ЖЭТФ 36, 204, 1959.

В и н г Дж. (G. M. Wing)

1. An Introduction to Transport Theory, J. Wiley, New York, 1962.

В у л л и Р., С т и б б с Д. (R. V. D. Woolley, D. W. N. Stibbs)

1. The Outer Layers of a Star, Clarendon Press, Oxford, 1953.

Г а й т л е р В. (W. Heitler)

1. Quantum Theory of Radiation, Clarendon Press, Oxford, 1954 (русский перевод: Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956).

Г а л ь п е р н О., Л ю н е б у р г Р. (O. Halpern, R. K. Luneburg)

1. Multiple scattering of neutrons. II. Diffusion in a plate of finite thickness, Phys. Rev. 76, 1811, 1949.

Г а л ь п е р н О., Л ю н е б у р г Р., К л а р к О. (O. Halpern, R. K. Luneburg, O. Clark)

1. On multiple scattering of neutrons. I. Theory of the albedo of a plane boundary, Phys. Rev. 53, 173, 1938.

Гахов Ф. Д.

1. Краевые задачи, Физматгиз, М., 1963.

Гермогенова Т. А.

1. О диффузии излучения в сферической оболочке, окружающей точечный источник, *Астрофизика* 2, 251, 1966.

2. Экстраполированная длина и плотность вблизи границы в сферической задаче Милна, в сб. «Некоторые математические задачи нейтронной физики», стр. 80, изд. МГУ, М., 1960.

Градштейн И. С., Рыжик И. М.

1. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, Физматгиз, М., 1962.

Джефри Х. (H. M. Jeffery)

1. On the derivatives of the gamma functions, *Quart. J. Math.* 6, 82, 1864.

Джефрис Дж., Томас Р. (J. T. Jefferies, R. N. Thomas)

1. The source functions in a non-equilibrium atmosphere. II. Depth dependence of source function for resonance and strong subordinate lines, *Astrophys. J.* 127, 667, 1958.

2. The source function in a non-equilibrium atmosphere. III. Influence of a chromosphere, *Astrophys. J.* 129, 401, 1959.

Джефрис Дж., Уайт О. (J. T. Jefferies, O. R. White)

1. The source function in a non-equilibrium atmosphere. VI. The frequency dependence of the source function for resonance lines, *Astrophys. J.* 132, 767, 1960.

Добровольный М., Ингельман Ф. (M. Dobrowolny, F. Engelman)

1. Absorption and emission profiles of line radiation in nonequilibrium, *Nuovo Cimento* 39, 965, 1965.

Дэвисон Б. (B. Davison)

1. Neutron Transport Theory, Clarendon Press, Oxford, 1958 (русский перевод: Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960).

Иванов В. В.

1. Time variation of the profile of a Doppler broadened resonance line, *Bull. Astron. Inst. Netherl.* 19, 192, 1967.

2. Определение населенностей возбужденных уровней в оптически толстом слое газа, в сборнике «Теория звездных спектров», стр. 127, Изд. «Наука», М., 1966.

3. Рассеяние света в плоском слое, *Астрон. ж.* 41, 44, 1964.

4. К проблеме Милна в теории образования спектральных линий, *Астрофизика* 4, 5, 1968.

5. Диффузия излучения с перераспределением по частоте в полубесконечной среде, *Уч. Зап. Ленингр. ун-та*, № 307, 52, 1962.

6. О переносе излучения в спектральной линии, *Уч. Зап. Ленингр. ун-та*, № 328, 44, 1965.

7. О диффузии излучения с перераспределением по частоте в одномерной среде, *Вестник Ленингр. ун-та*, № 19, 117, 1960.

8. Диффузия резонансного излучения в атмосферах звезд и туманностях. I. Полубесконечная среда, *Астрон. ж.* 39, 1020, 1962.

9. К задаче о рассеянии света в атмосфере конечной оптической толщины, Астрон. ж. **41**, 1097, 1964.

10. Диффузия резонансного излучения в атмосферах звезд и туманностях. II. Слой конечной толщины, Астрон. ж. **40**, 257, 1963.

И в а н о в В. В., Л е о н о в В. В.

1. Рассеяние света в оптически толстой атмосфере при несферической индикатрисе, Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, I, **803**, 1965.

И в а н о в В. В., Н а г и р н е р Д. И.

1. Перенос резонансного излучения в бесконечной среде. II, Астрофизика **2**, 147, 1966.

2. H -функции в теории переноса резонансного излучения, Астрофизика **1**, 143, 1965.

И в а н о в В. В., Щ е р б а к о в В. Т.

1. Таблицы функций, встречающихся в теории переноса резонансного излучения. I, Астрофизика **1**, 22, 1965; II, там же, **1**, 31, 1965.

К а п р и о т т и Ю. (E. Capriotti)

1. Mean escape probabilities of line photons, Astrophys. J. **142**, 1101, 1965.

К а р л с т е д т Дж., М а л л и к и н Т. (J. L. Carlstedt, T. W. Mullikin)

1. Chandrasekhar's X - and Y -functions, Astrophys. J. Suppl. **12**, № 113, 1966.

К а р с т е н Г., М а к к е р р о у Н. (H. R. F. Carsten, N. W. McKerrow)

1. The tabulation of some Bessel functions $K_\nu(x)$ of fractional order, Phil. Mag. (7) **35**, 812, 1944.

К е й с К. (K. M. Case)

1. On Wiener — Hopf equations, Ann. Phys. **2**, 384, 1957.

2. Transfer problems and reciprocity principle, Rev. Mod. Phys. **29**, 651, 1957.

К е й с К., Г о ф м а н Ф., П л а ч е к Г. (K. M. Case, F. de Hoffman, G. Placzek)

1. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, U. S. Government Printing Office, Washington, 1953.

К и н г Дж., С и л л а р с Р., Г а р р и с о н Р. (J. I. F. King, R. V. Sillars, R. H. Harrison)

1. Hopf q -function evaluated to eight-digit accuracy, Astrophys. J. **142**, 1655, 1965.

К о г а н М. Н.

1. Динамика разреженного газа, Изд. «Наука», М., 1967.

К р е й н М. Г.

1. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук **13**, № 5, 3, 1958.

Куперман С., Ингельман Ф., Оксиниус Дж. (S. Cuerman, F. Engelmann, J. Oxenius)

1. Nonthermal impurity radiation from a spherical plasma, *Phys. Fluids* **6**, 108, 1963.

2. Nonthermal impurity radiation from a spherical plasma. II, *Phys. Fluids* **7**, 428, 1964.

Курганов В. (V. Kourganoff)

1. *Basic Methods in Transfer Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1952

Кущер И. (I. Kuščer)

1. Penetration of radiation through a thick slab of isotropically scattering material, *Canad. J. Phys.* **31**, 1187, 1953.

Левич В. Г.

1. К теории резонансной флуоресценции, *ЖЭТФ* **10**, 1293, 1940.

Лотц В. (W. Lotz)

1. Electron-impact ionization cross-sections and ionization rate coefficients for atoms and ions, *Astrophys. J. Suppl.* **14**, 207, 1967.

Малликин Т. (T. W. Mullikin)

1. Radiative transfer in finite homogeneous atmospheres with anisotropic scattering. I. Linear singular equations, *Astrophys. J.* **139**, 379, 1964.

Марк К. (C. Mark)

1. Neutron density near a plane surface, *Phys. Rev.* **72**, 558, 1947.

Мензел Д. (D. Menzel)

1. Absorption and emission of radiation, *Astrophys. J.* **85**, 330, 1937 (русский перевод см. в сборнике Д. Мензел и др., *Физические процессы в газовых туманностях*, ИЛ, М., 1948).

2. The theoretical interpretation of equivalent breadths of absorption lines, *Astrophys. J.* **84**, 462, 1936.

Милн Э. (E. Milne)

1. Thermodynamics of the stars, Ch. II in *Handbuch der Astrophys.*, Bd. III/1, J. Springer, Berlin, 1930.

Минин И. Н.

1. К теории диффузии излучения в полубесконечной среде, *Докл. АН СССР* **120**, 63, 1958.

Морс Ф., Фешбах Г. (P. Morse, H. Feshbach)

1. *Methods of Theoretical Physics*, Part I, McGraw-Hill Book Co., New York, 1953 (русский перевод: *Методы теоретической физики*, т. I, ИЛ, М., 1958).

Мусхелишвили Н. И.

1. Сингулярные интегральные уравнения, *Физматгиз*, М., 1962.

Мюнч Г. (G. Münch)

1. Theory of model stellar atmospheres, Ch. 1 in «*Stellar Atmospheres*», ed. J. L. Greenstein, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1960 (русский

перевод: Звездные атмосферы, под ред. Дж. Л. Гринстейна, ИЛ, М., 1963).

Нагирнер Д. И.

1. О решении интегральных уравнений теории рассеяния света, *Астрон. ж.* **41**, 669, 1964.

2. О многократном рассеянии света в спектральной линии, *Вестник Ленингр. ун-та*, № 1, 142, 1964.

3. Многократное рассеяние света в полубесконечной среде, *Уч. Зап. Ленингр. ун-та*, № 337, 3, 1968.

4. Об асимптотических формулах для X - и Y -функций в теории многократного рассеяния излучения в линии, *Астрофизика* **3**, 293, 1967.

Нагирнер Д. И., Иванов В. В.

1. Перенос резонансного излучения в бесконечной среде. I, *Астрофизика* **2**, 5, 1966.

Оксиниус Дж. (J. Oxenius)

1. Radiative transfer and irreversibility, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **6**, 65, 1966.

2. Emission and absorption profiles in a scattering atmosphere, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **5**, 711, 1965.

Остерброк Д. (D. E. Osterbrock)

1. The escape of resonance-line radiation from an optically thick nebula, *Astrophys. J.* **135**, 195, 1962.

Плачек Г., Зайдель В. (G. Placzek, W. Seidel)

1. Milne's problem in transport theory, *Phys. Rev.* **72**, 550, 1947.

Регемортер А. ван (H. van Regemorter)

1. Rate of collisional excitation in stellar atmospheres, *Astrophys. J.* **136**, 906, 1962.

Рыбickий Г., Хаммер Д. (G. B. Rybicki, D. G. Hummer)

1. Spectral line formation in variable-property media. I. The Riccati method, *Astrophys. J.* **150**, part I, 607, 1967.

Саведов М. (M. P. Savedoff)

1. Formation of absorption lines by noncoherent scattering, *Astrophys. J.* **115**, 509, 1952.

Смит М. (M. G. Smith)

1. The isotropic scattering of a concentrated ray pencil from a point source, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **60**, 105, 1964.

Собельман И. И.

1. Введение в теорию атомных спектров, *Физматгиз*, М., 1963.

Соболев В. В.

1. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, *Гостехиздат*, М., 1956.

2. Линии водорода в спектрах протуберанцев, *Астрон. ж.* **39**, 632, 1962.

3. О некоторых задачах теории диффузии излучения, Докл. АН СССР 129, 1265, 1959.
4. Диффузия излучения в полубесконечной среде, Докл. АН СССР, 116, 45, 1957.
5. К теории диффузии излучения, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем. наук 11, 39, 1958.
6. К теории диффузии излучения в атмосферах звезд, Астрон. ж. 36, 576, 1959.
7. Курс теоретической астрофизики, «Наука», М., 1967.
8. Новый метод в теории рассеяния света, Астрон. ж. 28, 355, 1951.
9. Некогерентное рассеяние света в звездных атмосферах, Астрон. ж. 26, 129, 1949.
10. Образование линий поглощения при некогерентном рассеянии света, Астрон. ж. 31, 231, 1954.
11. Диффузия излучения в плоском слое, Докл. АН СССР 120, 69, 1958.
12. Диффузия излучения в среде конечной оптической толщины, Астрон. ж. 34, 336, 1957.
13. Число рассеяний при диффузии фотонов. IV, Астрофизика 3, 137, 1967.
14. Диффузия излучения в плоском слое большой оптической толщины, Докл. АН СССР 155, 316, 1964.
15. Число рассеяний при диффузии фотонов. I—III, Астрофизика 2, 135; 239, 1966; 3, 5, 1967.

С о б о у т и Ю. (Y. Sobouti)

1. Chandrasekhar's X-, Y-and related functions, Astrophys. J. Suppl. 7, № 72, 1963.

С т и б б с Д. (D. W. N. Stibbs)

1. Scattering functions for planetary atmospheres, Mém. Soc. roy. sci., Liège 7, 169, 1963.

С т и б б с Д., У и р Р. (D. W. N. Stibbs, R. E. Wier)

1. On the H -functions for isotropic scattering, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 119, 512, 1959.

С т р ё м г р е н Б. (B. Strömngren)

1. The influence of electron capture on the contours of Fraunhofer lines, Z. Astrophys. 10, 237, 1935.

Т е р е б и ж В. Ю.

1. О некоторых нелинейных задачах теории переноса излучения в спектральных линиях, Астрофизика 3, 281, 1967.

Т и т ч м а р ш Е. (E. C. Titchmarsh)

1. Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford Univ. Press, London, 1937 (русский перевод: Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М. — Л., 1948).

Т о м а с Р. (R. N. Thomas)

1. The source function in a non-equilibrium atmosphere. I. The resonance lines, Astrophys. J. 125, 260, 1957.
2. Some aspects of non-equilibrium thermodynamics in the presence of a radiation field, Univ. of Colorado Press, Boulder, Colorado, 1965.

3. Computation of the line source function. A review of the physical problem, p. 71 in Proc. Second Harvard — Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres, Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report № 174, 1965.

Томас Р., Эйти Р. (R. N. Thomas, R. G., Athay)

1. Physics of the Solar Chromosphere, Interscience Publ., New York—London, 1961 (русский перевод: Физика солнечной хромосферы, Изд. «Мир», М., 1965).

Томасу Т., Огава Т. (T. Tomatsu, T. Ogawa)

1. Theoretical studies of the airglow resonant emission transfer, Report of Ionosphere and Space Research in Japan, 20, 418, 1966.

Унзольд А. (A. Unsöld)

1. Physik der Sternatmosphären, 2 Aufl., Springer, Berlin, 1955 (русский перевод первого издания: Физика звездных атмосфер, ИЛ., М., 1949).

Унно В. (W. Unno)

1. Note on the Zanstra redistribution in planetary nebulae, Publ. Astron. Soc. Japan 4, 100, 1952.

Уолш П. (P. J. Walsh)

1. Effect of simultaneous Doppler and collision broadening and hyperfine structure on the imprisonment of resonance radiation, Phys. Rev. 116, 511, 1959.

Уэно С. (S. Ueno)

1. The formation of absorption lines by coherent and noncoherent scattering. I—IV, Contr. Inst. Astrophys. Kyoto, № 58, 1955; № 62, 1956; № 63, 1956; № 64, 1956.

Фаллер Ф., Хайетт Б. (F. B. Fuller, B. J. Hyett)

1. Calculations of Chandrasekhar's X- and Y-functions and their analogs for noncoherent isotopic scattering, NASA Technical Note D-4712, August 1968.

Фелпс А. (A. V. Phelps)

1. Diffusion, de-excitation and three-body collision coefficients for excited neon atoms, Phys. Rev. 114, 1011, 1959.

Фелпс А., Маккобри А. (A. V. Phelps, A. O. McCobrey)

1. Experimental verification of the «incoherent» scattering theory for the transfer of resonance radiation, Phys. Rev. 118, 1561, 1960.

Финн Дж. (G. D. Finn)

1. Frequency redistribution on scattering, Astrophys. J. 147, 1085, 1967.

Фок В. А.

1. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб. 14 (56), № 1—2, 3, 1944.

Хаммер Д. (D. G. Hummer)

1. Non-coherent scattering. I. The redistribution functions with Doppler broadening, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **125**, 21, 1965.

2. The emission coefficient, p. 13 in *Proc. Second Harvard — Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres*, *Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report N 174*, 1965.

3. Numerical solution of the transfer equation with noncoherent scattering, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **3**, 101, 1963.

4. The Voigt function. An eight-significant-figure table and generating procedure, *Mem. Roy. Astron. Soc.* **70**, 1, 1965.

5. Non-coherent scattering. III. The effect of continuous absorption on the formation of spectral lines, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **138**, 73, 1968.

6. The mean number of scatterings by a resonance-line photon, *Astrophys. J.* **140**, 276, 1964.

Хаммер Д., Рыбичкий Г. (D. G. Hummer, G. Rybicki)

1. Computational methods for non-LTE line transfer problems, p. 53 in *Methods in Computational Physics*, vol. 7, Academic Press, New York, 1967.

2. Non-LTE line formation with spatial variations in the Doppler widths, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **6**, 661, 1966.

Хаммер Д., Стюарт Дж. (D. G. Hummer, J. C. Stewart)

1. Thermalization lengths and the homogeneous transfer equation in line formation, *Astrophys. J.* **146**, 290, 1966.

Хастед Дж. (J. B. Hasted)

1. *Physics of Atomic Collisions*, Butterworths, London, 1964 (русский перевод: *Физика атомных столкновений*, «Мир», М., 1965).

Хутгаст Дж. (J. Houtgast)

1. The Variations in the Profiles of Strong Fraunhofer Lines along a Radius of the Solar Disc, Utrecht, 1942.

Хенъи Л. (L. G. Henyey)

1. The Doppler effect in resonance lines, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **26**, 50, 1940.

Хёрн А. (A. G. Hearn)

1. Radiative transfer of Doppler broadened resonance lines. II, *Proc. Phys. Soc.* **84**, 11, 1964.

2. Radiative transfer of Doppler broadened resonance lines, UK Atomic Energy Authority, Report CLM-P-16, 1962.

3. Radiative transfer of Doppler broadened resonance lines, *Proc. Phys. Soc.* **81**, 648, 1964.

Хислет М., Уорминг Р. (M. A. Heaslet, R. F. Warming)

1. Theoretical predictions of radiative transfer in a homogeneous cylindrical medium, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **6**, 751, 1966.

2. Radiative source-functions predictions for finite and semi-infinite non-conservative atmospheres, *Astrophys. and Space Sci.* **1**, 460, 1968.

3. Theoretical predictions of spectral line formation by noncoherent scattering, *J. Quantit. Spectrosc. and Radiat. Transfer* **8**, 1101, 1968.

Х о л с т е й н Т. (T. Holstein)

1. Imprisonment of resonance radiation in gases, *Phys. Rev.* **72**, 1212, 1947.

2. Imprisonment of resonance radiation in gases. II, *Phys. Rev.* **83**, 1159, 1951.

Х о п ф Э. (E. Hopf)

1. *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

Х у а н С о у - Ш у (Su - shu Huang)

1. The variational method for problems of neutron diffusion and of radiative transfer, *Phys. Rev.* **88**, 50, 1952.

Х ю л с т Г. в а н д е (H. C. van de Hulst)

1. Diffuse reflection and transmission by a very thick plane-parallel atmosphere with isotropic scattering, *Icarus* **3**, 336, 1964.

Х ю л с т Г. в а н д е, Т е р х у ф е Ф. (H. C. van de Hulst, F. Therhoeve)

1. The escape of radiation from a semi-infinite nonconservative atmosphere, *Bull. Astron. Inst. Netherl.* **18**, 377, 1966.

Ч а н д р а с е к а р С. (S. Chandrasekhar)

1. *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford, 1950 (русский перевод: Перенос лучистой энергии, ИЛ., М., 1953).

Ч е м б е р л и н Дж., М а к э л р о й М. (J. W. Chamberlain, M. B. McElroy)

1. Diffuse reflection by an inhomogeneous planetary atmosphere, *Astrophys. J.* **144**, 1148, 1966.

Э в р е т т Ю. (E. Avrett)

1. Solutions of the two - level line transfer problem with complete redistribution, p. 101 in *Proc. Second Harvard — Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres*, Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report N 174, 1965.

Э в р е т т Ю., Л ё з е р Р. (E. H. Avrett, R. Loeser)

1. Kernel representations in the solution of line-transfer problems, *Smithsonian Astrophys. Obs. Special Report N 201*, 1966.

Э в р е т т Ю., Х а м м е р Д. (E. H. Avrett, D. G. Hummer)

1. Non-coherent scattering. II. Line formation with a frequency independent source function, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **130**, 295, 1965.

Э д д и н г т о н А. (A. S. Eddington)

1. The formation of absorption lines, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.* **89**, 620, 1929.

Я н о в и ц к и й Э. Г.

1. О диффузии излучения в плоском слое при изотропном рассеянии, *Астрон. журн.* **41**, 898, 1964.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Необходимым (но не достаточным) условием включения обозначения в приводимый список является использование его более чем в одном параграфе. Иногда обозначения, указанные ниже, применяются в книге также в других смыслах (например, буква a , широко используемая нами для обозначения параметра функции Фойгта, в § 1.1 означает постоянную в законе Стефана — Больцмана и т. п.). Во всех таких случаях смысл применяемого обозначения либо специально оговорен в соответствующем месте, либо ясен из контекста.

Как правило, смысл обозначения поясняется, затем даются номер страницы, где обозначение впервые вводится, и (иногда) номера страниц, где соответствующая величина изучается более подробно. Когда пояснять смысл обозначения по тем или иным причинам было нецелесообразно, даются только отсылки к соответствующему месту книги. Общеупотребительные обозначения (такие как h — постоянная Планка, c — скорость света и т. п.) в список не включены.

A — постоянная, нормирующая к единице интеграл от профиля коэффициента поглощения в линии по всем безразмерным частотам x , 50

A_{ki} — эйнштейновский коэффициент спонтанного перехода, 32

A_{ci} — число рекомбинаций на i -й уровень за 1 сек в расчете на 1 ион и единичную электронную концентрацию, 34

a — отношение ширины линии, обусловленной затуханием вследствие излучения и столкновений, к доплеровской ширине, 47

a_j — 108

\tilde{a}_j — 108

$B_\nu(T)$ — функция Планка, 18

B_{ik}, B_{ki} — эйнштейновские коэффициенты поглощения и вынужденного излучения (в расчете на среднюю интенсивность излучения), 32

$B_{ic} \bar{J}_{ic}$ — число фотоионизаций с i -го уровня за 1 сек в расчете на 1 атом на i -м уровне, 34

$B_{ci} \bar{J}_{ic}$ — число вынужденных фоторекомбинаций на i -й уровень за 1 сек в расчете на 1 ион и единичную электронную концентрацию, 34

b_i — мензеловский параметр, 25

C_{ik} — число переходов $i \rightarrow k$ под действием электронных ударов за 1 сек в расчете на 1 атом на i -м уровне и единичную электронную концентрацию, 23

C_{ic} — число ударных ионизаций с i -го уровня за 1 сек в расчете на 1 атом на i -м уровне и единичную электронную концентрацию, 31

- C_{ci} — число тройных рекомбинаций на i -й уровень за 1 сек в расчете на 1 ион и единичную электронную концентрацию, 31
 C — коэффициент в асимптотике резольвентной функции $\Phi(\tau)$ для консервативного рассеяния в частотах линии (полубесконечная среда), 249
 C_p — коэффициент в асимптотике функции источников для точечного источника в бесконечной однородной среде, консервативно рассеивающей в частотах линии, 197
 c_1 — коэффициент в асимптотике $X(\infty; \tau_0)$ при $\tau_0 \rightarrow \infty$ (консервативное рассеяние в частотах линий), 395
 $E_1(x)$ — первая интегральная показательная функция, 30
 $E_n(x)$ — n -я интегральная показательная функция ($n=1,2,\dots$), 105
 $G(z)$ — 107
 $G_m(z)$ ($m=0, 1, \dots$) — 106
 g_i — статистический вес i -го уровня, 21
 $H(z)$ — H -функция для рассеяния в линиях: а) в средах без поглощения в непрерывном спектре — 224, 236—246
 б) в средах с поглощением в непрерывном спектре — 351
 H_0 — момент H -функции, 242, 351
 $h(q)$ — функция, входящая в асимптотику $H(z)$ при $z \gg 1$, 245
 I_ν, I — интенсивность излучения, 15, 81
 J_ν — средняя интенсивность излучения, 16
 \bar{J}_i^k — средняя интенсивность излучения в линии $i \rightarrow k$, взвешенная по профилю коэффициента поглощения, 34
 $K(\tau)$ — ядро основного интегрального уравнения для сред без поглощения в непрерывном спектре, 94, 105—111
 $K(\tau, \beta)$ — ядро основного интегрального уравнения для сред с поглощением в непрерывном спектре, 93, 323—331
 $K_0(\tau, \beta)$ — 93, 323—328
 k — корень характеристического уравнения (монохроматическое рассеяние), 130, 132—133
 $k_{ik}(\nu)$ — атомный коэффициент поглощения в линии $i \rightarrow k$, 32
 $k_{ic}(\nu)$ — атомный коэффициент поглощения за границей i -й серии, 35
 $L(\tau)$ — 105—111
 $L(\tau, \beta)$ — 323
 $L_0(\tau, \beta)$ — 323
 $M_k(\tau)$ ($k=1, 2, \dots$) — 92, 105—110
 \bar{N} — среднее число рассеяний кванта, 138, 317—321, 454
 $N_{kn}(\tau)$ — 105—111
 n_i — населенность i -го уровня, 21
 n_e — электронная концентрация, 22
 n^+ — концентрация ионов в основном состоянии, 22
 $P(\tau, z)$ — приведенная вероятность выхода кванта из полубесконечной среды с глубины τ , 224, 229
 $P(\tau, z; \tau_0)$ — приведенная вероятность выхода кванта с глубины τ из слоя оптической толщины τ_0 , 379
 $p_\bullet(\tau, \mu, x)$ — вероятность выхода кванта из полубесконечной среды с глубины τ , 223—229

- $q(\tau)$ — функция Хопфа, 169—170
 $R(\mu, \lambda)$ — 131
 $R(z, \lambda)$ — 185
 $R(z, \lambda, \beta)$ — 338
 S_{ik}, S — функция источников в линии, 64
 S_v^c, S^c — функция источников в непрерывном спектре, 67
 S^* — первичная функция источников, 75, 80, 89
 S_1^* — первичная функция источников в средах с излучением в непрерывном спектре, 350
 $\tilde{S}(\tau)$ — решение однородного уравнения для функции источников в консервативной полубесконечной среде: а) монохроматическое рассеяние — 169; б) рассеяние в линии — 277
 $\tilde{S}_\infty(\tau)$ — а) монохроматическое рассеяние — 177; б) рассеяние в линии — 206
 T — температура, кинетическая температура, 18, 21
 T_e — электронная температура, 29
 T_{ex} — температура возбуждения, 26
 T_r — температура излучения, 19
 $\mathcal{U}(z)$ — 107—108, 112
 $\mathcal{U}(z, \beta)$ — 330—332
 $U(a, x)$ — нормированная функция Фойгта, 46
 $V(u)$ — 107—113
 $V(u, \beta)$ — 330—332
 $X(z)$ — обобщенная X-функция Амбарцумяна — Чандрасекара, 380, 382—395
 $X_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ — n -й момент функции $X(z)$, 387
 x — безразмерная частота, измеряемая от центра линии, 47—50
 $x(z)$ — 107
 x_i — 391—392
 $Y(z)$ — обобщенная Y-функция Амбарцумяна — Чандрасекара, 380, 382—395
 $Y_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ — n -й момент функции $Y(z)$, 387
 y_i — 391—392
 $z = \frac{\mu}{\alpha(x)}$ — 219
 $\alpha(x)$ — профиль коэффициента поглощения в линии, нормированный так, что $\alpha(0) = 1$, 49—50
 α_i, α_{-1}^* — моменты φ -функции Амбарцумяна, 160—161
 β — отношение коэффициента поглощения в непрерывном спектре к коэффициенту поглощения в центре линии, 83
 $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, 110
 $\Gamma(\tau, \tau')$ — резольвента уравнения для функции источников для полубесконечной среды: а) монохроматическое рассеяние — 157; б) рассеяние в линии — 221—222
 γ — константа, характеризующая скорость убывания коэффициента поглощения в крыльях линии, 110—113

$\Delta\nu$ — характерный интервал частот, в единицах которого измеряется безразмерная частота x , 50

$\delta(\beta)$ — 340

$\varepsilon_{ik}(\nu)$, $\varepsilon(\nu)$ — коэффициент излучения в линии, 64

$\varepsilon^c(\nu)$ — коэффициент излучения в непрерывном спектре, 67

ϑ — в задачах с плоской геометрией — угол между некоторым направлением и внешней нормалью к границе $\tau = 0$, 82

λ — вероятность выживания кванта при рассеянии, 73, 78, 80

$\tilde{\lambda}$ — вероятность выживания кванта в расчете на одно рассеяние (среды с поглощением в непрерывном спектре), 324

$\mu = \cos \vartheta$ — 83

ν_{ik} , ν_0 — центральная частота линии, 28, 45

ν_{ic} — частота ионизации с i -го уровня, 25

$\xi_p(\tau, \lambda)$ — а) монохроматическое рассеяние — 141; б) рассеяние в линии — 197—199

$\xi_\infty(\tau, \lambda)$ — а) монохроматическое рассеяние — 151; б) рассеяние в линии — 212

$\xi(\tau, \lambda)$ — а) монохроматическое рассеяние — 165; б) рассеяние в линии — 248—249

$\tilde{\xi}(\tau)$ — 253

$\sigma_{ik}(\nu)$, $\sigma(\nu)$ — объемный коэффициент поглощения в линии, 64

$\sigma^c(\nu)$ — объемный коэффициент поглощения в непрерывном спектре, 67

τ — оптическая глубина в центре линии, 83—88

τ_0 — оптическая толщина, 83

τ_b — толщина пограничного слоя, 281—283, 364

τ_d — диффузионная длина (монохроматическое рассеяние), 132

τ_t — длина термализации,

$\Phi(\tau)$ — резольвентная функция для полубесконечной среды; а) монохроматическое рассеяние—158; б) рассеяние в линии—222, 246—251

$\Phi(\tau, \tau_0)$ — резольвентная функция для слоя толщины τ_0 , 378

$\varphi(\mu)$ — функция Амбарцумяна (H -функция для изотропного монохроматического рассеяния), 159

$\varphi(\mu; \tau_0)$ — функция X для изотропного монохроматического рассеяния, 405—406

$\Psi(\tau)$ — 168, 251—253

$\psi(\mu; \tau_0)$ — функция Y для изотропного монохроматического рассеяния, 405—406

ω — диссипативность среды, 396

Индексы D , V , L и M используются для обозначения величин, относящихся соответственно к доплеровскому, фойгтовскому и лоренцовскому коэффициентам поглощения и к монохроматическому рассеянию. Нижний индекс p показывает, что величина относится к точечному источнику в бесконечной среде, индексом ∞ отмечаются функции, относящиеся к бесконечной среде.