

Д. Д. ИВЛЕВ, Л. В. ЕРШОВ

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ
В ТЕОРИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ТЕЛА



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

Метод возмущений в теории упругопластического тела. И в-
лев Д. Д., Ершов Л. В., Главная редакция физико-математи-
ческой литературы издательства «Наука», М., 1978, 208 стр.

Метод возмущений нашел широкое развитие в теоретической механике, гидро- и газодинамике. Сравнительно меньшее развитие он получил в теории пластичности, реологии. В монографии последовательно излагается метод возмущений применительно к статическим задачам теории идеальной пластичности и теории малых упругопластических деформаций, основанный на введении некоторого малого параметра. В рассмотренных конкретных задачах малый параметр характеризует возмущение статических и геометрических краевых условий. Получены решения сложных нелинейных задач с условиями сопряжения на неизвестной границе. Полученные решения могут быть также приложены к различным задачам теории устойчивости.

Книга будет интересна широкому кругу читателей: инженерам, научным работникам, аспирантам, студентам, специализирующимся в области механики твердого деформируемого тела.

Табл. 0, илл. 29, библи. 83.

Дюис Данилович Ивлев
Леонид Викторович Ершов

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

М., 1978 г., 208 стр. с илл.

Редакторы Л. Г. Корнейчук, Н. Н. Васина
Техн. редактор Н. В. Кошелева
Корректоры Е. А. Белицкая, Л. С. Сомова

ИБ № 2208

Сдано в набор 03.02.78. Подписано к печати 15.05.78. Т-08266.
Бумага $84 \times 108^{1/32}$, тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Усл. печ. л. 10,92. Уч.-изд. л. 12,07. Тираж 3800 экз. Зак. № 158
Цена книги 1 р. 30 к.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы 117071, Москва, В-71,
Ленинский проспект, 15
2-я типография издательства «Наука», Москва, Шубинский пер., 10

И $\frac{20304-089}{053(02)-78}$ 149-78

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1978

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Постановка задачи. Метод малого параметра	10
§ 1. Напряженное и деформированное состояния. Граничные условия	10
§ 2. Упругость и пластичность	14
§ 3. Идеально пластическое тело	30
§ 4. Плоская и осесимметричная задачи	40
§ 5. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности	52
§ 6. Линеаризация. Общие соотношения, граничные условия, условия сопряжения	58
§ 7. Линеаризация и интегрирование соотношений теории идеальной пластичности	64
§ 8. Линеаризация и интегрирование соотношений теории малых упругопластических деформаций	89
§ 9. Напряженное и деформированное состояние упругой круговой кольцевой пластины, нагруженной в своей плоскости	113
Глава 2. Задачи определения упругопластического состояния тел	125
§ 1. Решение упругопластических задач теории идеальной пластичности методом малого параметра	125
§ 2. Двусное растяжение толстой пластины с круглым отверстием	128
§ 3. Двусное растяжение толстой пластины с эллиптическим отверстием	138
§ 4. Эксцентричная труба под действием внутреннего давления	146
§ 5. Двусное растяжение тонкой пластины с круговым отверстием	150

§ 6. Двусное растяжение тонкой пластины с эллиптическим отверстием, свободным от усилий	160
§ 7. Двусное растяжение пространства со сферической выточкой	164
§ 8. Двусное растяжение пространства с эллипсоидальной полостью	171
§ 9. Коническая труба, находящаяся под действием равномерного внутреннего давления	174
Д о б а в л е н и е. Об учете упругой сжимаемости в случае плоской деформации	186
О потере устойчивости пространственных деформируемых тел	193
Литература	204

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга посвящена методу возмущений применительно к решению статических задач упругопластического состояния тел. Метод возмущений — метод приближенного решения задач, основанный на введении величин, малых по сравнению с некоторыми данными, так или иначе «возмущающих» те или иные исходные решения. В качестве «возмущающих» величин могут быть некоторые параметры, либо координаты пространство — время.

В механике твердого деформируемого тела метод возмущений нашел широкое применение в теории устойчивости.

В книге рассмотрены общие соотношения метода возмущений для плоских и осесимметричных задач теории идеальной пластичности и теории малых упругопластических деформаций, основанные на введении некоторого малого параметра. В конкретных задачах малый параметр характеризует возмущение либо статических, либо геометрических краевых условий. Метод возмущения позволил получить решения сложных нелинейных задач с условиями сопряжения на неизвестной границе.

Разумеется, приложения метода не ограничиваются кругом рассмотренных задач; он может найти приложения и дальнейшее развитие в теории упругопластических и различных сложных сред.

В понятие метода возмущений может быть вложено очень широкое содержание, к нему могут быть отнесены различные методы асимптотических разложений, линеаризации уравнений, развитые во многих областях механики твердых деформируемых тел. Поэтому библиография, помещенная в книге, ограничена: она содержит источники, либо непосредственно примыкающие к содержанию монографии, либо иллюстрирующие, по нашему мнению,

достаточно близкие по идее к ней приложения метода в разделах механики твердых деформируемых тел.

В процессе работы выявилась необходимость уточнения постановок упругопластических задач: вопросы, связанные с определением перемещений, учет упругой сжимаемости и т. п.

С. А. Вульман много помогала нам при написании книги, помощь ее трудно переоценить. Ю. М. Марушкой приняла активное участие в проверке выкладок, в работе над Добавлением, в оформлении рукописи монографии.

Мы благодарны С. А. Вульман и Ю. М. Марушкой за помощь в работе.

Д. Д. Ивлев, Л. В. Ершов

ВВЕДЕНИЕ

Метод возмущений берет свое начало от работ Пуанкаре, давшего ряд приближенных решений задачи о трех телах в небесной механике. Позднее этот метод нашел распространение в различных разделах механики, математики, физики.

В механике сплошных сред метод возмущений нашел широкое применение в гидро- и газодинамике. С достижениями в этой области можно познакомиться, например, по монографии Ван Дайка [3].

Теория устойчивости трехмерных твердых деформируемых тел, основанная на методе возмущений, ведет свое начало, по-видимому, от Саусвелла. Обзор работ в этой области дан А. Н. Гузем [8, 10].

А. А. Ильюшин [56] исследовал течение вязкопластической полосы при малых возмущениях границы в лагранжевых координатах. Позднее А. Ю. Ишлинский [60, 61] выполнил аналогичное исследование в эйлеровых координатах.

Одна из первых работ, выполненных по непосредственному приложению метода малого параметра к решению упругопластических задач, принадлежит А. П. Соколову [74]. Он определил в первом приближении двусосное напряженное состояние тонкой пластины с круговым отверстием при условии пластичности Треска.

Онат и Прагер [71] впервые дали решение задачи жесткопластического анализа, основанное на полной линеаризации уравнений для напряжений и скоростей перемещений. В этой работе они отмечают, что линеаризация по малому параметру позволила получить в гидродинамике важные приближенные решения ряда задач, недоступных для других методов. И продолжают: «...удивительно, что этот прием не используется столь широко в математической теории пластичности». Несколько позднее

был выполнен ряд исследований по определению упруго-пластического состояния тел методом малого параметра (см., например, [42, 43, 46] и др.). Было рассмотрено деформирование конической, эллиптической, эксцентрической, искривленной труб, находящихся под действием внутреннего давления [19, 29, 30, 32, 39], и ряд других задач. Было проведено исследование процесса вдавливания тонкого тела в жесткопластическую среду [16, 17, 44, 49, 50].

Исследованию ряда задач по упругопластическому деформированию плоских и осесимметричных тел посвящены также работы [4—6, 65, 66, 69, 70, 79]. Отметим, что решение задачи для трехосного растяжения упруго-пластического пространства, ослабленного сферическим отверстием, в первом приближении дано Т. Д. Семькиной [73]. Изложение некоторых решений упругопластических задач, полученных методом малого параметра, можно найти в монографии Г. Н. Савина [72].

Фундаментальное значение для метода малого параметра имеет вопрос о сходимости приближений. Для упруго-пластических задач этот вопрос нуждается в решении. В данной книге сходимость метода проиллюстрирована на двух примерах. Л. А. Галин [7] и Г. П. Черепанов [81] дали замечательные точные решения в напряжениях соответственно для двусосного растяжения толстой и тонкой пластины с круговым отверстием. Это пока единственные точные решения нетривиальных двумерных упруго-пластических плоских задач. Если ввести параметр δ , характеризующий разность между растягивающими усилиями (при $\delta = 0$ имеет место осесимметричное состояние пластин), то решения Галина и Черепанова могут быть разложены в ряд по δ . Показано, что четыре приближения, полученные непосредственно методом малого параметра, в точности совпадают с четырьмя членами разложения точных решений. Естественно, что единый алгоритм метода позволяет получить и последующие приближения, однако для описания точных решений в первом случае достаточно двух, а во втором — четырех приближений. Точные решения упругопластических задач основаны на знании аналитических выражений для напряжений в пластической зоне, для метода малого параметра не играют в принципе никакой роли отсутствие аналитичес-

кого решения в пластической зоне, статическая определенность или неопределенность задачи.

В теории устойчивости трехмерных твердых тел, в отличие от постановки Саусвелла, которая предполагает лагранжево представление о деформировании при потере устойчивости, определилась постановка Лейбензона — Ишлинского, в которой компоненты возмущенного состояния относятся к первоначальным координатам. Рассматриваемые в настоящей монографии методы линеаризации по параметру также относят возмущенное состояние к первоначальным координатам, поэтому различные решения, полученные в теории устойчивости в постановке Лейбензона — Ишлинского, могут быть использованы для решения упругопластических задач и наоборот. В связи с этим отметим цикл работ по теории устойчивости [1, 21—28, 31, 33, 40].

Малый параметр может быть введен в теории пластичности различным образом. А. А. Ильюшин [58] использовал в качестве малого параметра величину, обратную модулю объемного сжатия, и исследовал нормальные и касательные напряжения при чистом изгибе балки за пределом упругости. Отметим, что вопросы, связанные с линеаризацией по коэффициенту Пуассона, рассмотрены ниже в Добавлении. Методом малого параметра, характеризующего геометрию тел, Л. М. Качанов [63, 64] рассмотрел кручение круглых стержней переменного диаметра и ползучесть овальных и разностенных труб. В работе [30] малый параметр характеризует различие между плоским деформированным и осесимметричным состояниями. Б. А. Друянов [13, 14] при помощи метода малого параметра учел неоднородность пластического материала. Здесь малый параметр характеризовал возмущение условия пластичности. Свойства пластического материала характеризует малый параметр в работах Л. А. Толоконникова и его сотрудников [76—78], а также в [83].

Отметим также работы А. Н. Гузя и его сотрудников [11, 12]. Каудерер [62] предложил при помощи малого параметра учитывать физическую нелинейность упругого материала. Эти представления были использованы в [37]; дальнейшее развитие они получили в работах И. А. Цурпала [82].

§ 1. Напряженное и деформированное состояния. Граничные условия

1. Рассмотрим сплошное твердое тело, в котором определена ортогональная криволинейная система координат.

Напряженное состояние тела в данной точке сплошной среды характеризуется симметричным тензором напряжения

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} & \tau_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta & \tau_{\beta\gamma} \\ \tau_{\alpha\gamma} & \tau_{\beta\gamma} & \sigma_\gamma \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где σ_α , σ_β , σ_γ — нормальные, а $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\gamma}$, $\tau_{\alpha\gamma}$ — касательные напряжения на площадках, ортогональных к координатным осям.

В дальнейшем будем рассматривать три ортогональные системы координат: декартову, цилиндрическую и сферическую.

В данной точке тела всегда можно выбрать такие три ортогональных направления 1, 2, 3, вдоль которых касательные напряжения равны нулю. Эти направления называются главными, тензор напряжений в главных осях имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Пусть взаимная ориентация осей α , β , γ и главных направлений 1, 2, 3 в данной точке тела определяется таблицей направляющих косинусов

	1	2	3
α	l_1	l_2	l_3
β	m_1	m_2	m_3
γ	n_1	n_2	n_3

причем

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1, & l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1, & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1, & n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда связь между компонентами напряжений σ_{ij} и главными напряжениями определяется по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2, & \tau_{\alpha\beta} &= \sigma_1 l_1 m_1 + \sigma_2 l_2 m_2 + \sigma_3 l_3 m_3, \\ \sigma_\beta &= \sigma_1 m_1^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 m_3^2, & \tau_{\beta\gamma} &= \sigma_1 m_1 n_1 + \sigma_2 m_2 n_2 + \sigma_3 m_3 n_3, \\ \sigma_\gamma &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, & \tau_{\alpha\gamma} &= \sigma_1 l_1 n_1 + \sigma_2 l_2 n_2 + \sigma_3 l_3 n_3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Симметричный тензор (1.1) имеет три независимых инварианта, которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma), \\ \Sigma_2 &= -(\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\gamma + \sigma_\gamma \sigma_\alpha) + \tau_{\alpha\beta}^2 + \tau_{\beta\gamma}^2 + \tau_{\alpha\gamma}^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\Sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} & \tau_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta & \tau_{\beta\gamma} \\ \tau_{\alpha\gamma} & \tau_{\beta\gamma} & \sigma_\gamma \end{vmatrix}.$$

Тензор напряжений может быть представлен в виде суммы двух тензоров

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad (1.6)$$

где δ_{ij} — единичный тензор, а σ'_{ij} — девиатор напряжений

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha - \sigma & \tau_{\alpha\beta} & \tau_{\alpha\gamma} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta - \sigma & \tau_{\beta\gamma} \\ \tau_{\alpha\gamma} & \tau_{\beta\gamma} & \sigma_\gamma - \sigma \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Первый инвариант девиатора напряжений равен нулю, второй и третий могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} 6 \Sigma_2' &= (\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + (\sigma_\beta - \sigma_\gamma)^2 + (\sigma_\gamma - \sigma_\alpha)^2 + \\ &+ 6 (\tau_{\alpha\beta}^2 + \tau_{\beta\gamma}^2 + \tau_{\alpha\gamma}^2), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\Sigma_3' = \sigma'_\alpha \sigma'_\beta \sigma'_\gamma + 2\tau_{\alpha\beta} \tau_{\beta\gamma} \tau_{\alpha\gamma} - \sigma'_\alpha \tau_{\beta\gamma}^2 - \sigma'_\beta \tau_{\alpha\gamma}^2 - \sigma'_\gamma \tau_{\alpha\beta}^2.$$

Уравнения равновесия имеют вид:

в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0; \end{aligned} \quad (1.10)$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [2\sigma_z - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \\ + \tau_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} - (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta] &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta] &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

2. При деформировании сплошной среды точки получают смещение U , составляющие которого обозначим u_α , u_β , u_γ . Будем рассматривать случай малых деформаций; деформация среды может быть охарактеризована симметричным тензором деформации

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_\alpha & e_{\alpha\beta} & e_{\alpha\gamma} \\ e_{\alpha\beta} & e_\beta & e_{\beta\gamma} \\ e_{\alpha\gamma} & e_{\beta\gamma} & e_\gamma \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

причем компоненты деформации связаны с компонентами перемещений следующими соотношениями:

в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ e_{zx} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (1.13)$$

в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & e_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\
 e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], & e_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \\
 e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right);
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned}
 e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & e_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right], \\
 e_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & e_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right], \\
 e_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta, \\
 e_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Тензор (1.12) имеет три инварианта, вполне аналогичные (1.5):

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{1}{3} e_{ii} = \frac{1}{3} (e_\alpha + e_\beta + e_\gamma), \\
 I_2 &= - (e_\alpha e_\beta + e_\beta e_\gamma + e_\gamma e_\alpha) + e_{\alpha\beta}^2 + e_{\beta\gamma}^2 + e_{\gamma\alpha}^2, \\
 I_3 &= \begin{vmatrix} e_\alpha & e_{\alpha\beta} & e_{\alpha\gamma} \\ e_{\alpha\beta} & e_\beta & e_{\beta\gamma} \\ e_{\alpha\gamma} & e_{\beta\gamma} & e_\gamma \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Тензор (1.12) может быть представлен в виде суммы двух тензоров

$$e_{ij} = e \delta_{ij} + e'_{ij}, \tag{1.17}$$

где e'_{ij} — девиатор деформаций

$$e'_{ij} = \begin{pmatrix} e_\alpha - e & e_{\alpha\beta} & e_{\alpha\gamma} \\ e_{\alpha\beta} & e_\beta - e & e_{\beta\gamma} \\ e_{\alpha\gamma} & e_{\beta\gamma} & e_\gamma - e \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Первый инвариант девиатора деформаций равен нулю, второй и третий, аналогично (1.8), могут быть представлены

в виде

$$6I'_2 = (e_\alpha - e_\beta)^2 + (e_\beta - e_\gamma)^2 + (e_\gamma - e_\alpha)^2 + 6(e_{\alpha\beta}^2 + e_{\beta\gamma}^2 + e_{\alpha\gamma}^2), \quad (1.19)$$

$$I'_3 = e_\alpha e_\beta e_\gamma + 2e_{\alpha\beta} e_{\beta\gamma} e_{\alpha\gamma} - e_\alpha e_{\beta\gamma}^2 - e_\beta e_{\alpha\gamma}^2 - e_\gamma e_{\alpha\beta}^2.$$

3. На границе тела должны быть заданы граничные условия, которые могут быть определены различным образом. Предположим, что граница тела S состоит из двух частей, $S = S_1 + S_2$, причем на части S_1 определены усилия, на второй части S_2 — перемещения.

Пусть на некоторой элементарной площадке границы S_1 с нормалью $n = (\cos(\alpha n), \cos(\beta n), \cos(\gamma n))$ определена нагрузка $P = (P_\alpha, P_\beta, P_\gamma)$. Тогда граничные условия на S_1 записываются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha \cos(\alpha n) + \tau_{\alpha\beta} \cos(\beta n) + \tau_{\alpha\gamma} \cos(\gamma n) &= P_\alpha, \\ \tau_{\alpha\beta} \cos(\alpha n) + \sigma_\beta \cos(\beta n) + \tau_{\beta\gamma} \cos(\gamma n) &= P_\beta, \\ \tau_{\alpha\gamma} \cos(\alpha n) + \tau_{\beta\gamma} \cos(\beta n) + \sigma_\gamma \cos(\gamma n) &= P_\gamma. \end{aligned} \quad (1.20)$$

На части границы S_2 граничные условия записываются в виде

$$u_\alpha = u_{\alpha 0}, \quad u_\beta = u_{\beta 0}, \quad u_\gamma = u_{\gamma 0}, \quad (1.21)$$

где $u_{\alpha 0}, u_{\beta 0}, u_{\gamma 0}$ — фиксированные компоненты смещения на S_2 .

Помимо перечисленных встречаются разнообразные смешанные граничные условия, когда на части границы определены различные комбинации усилий, перемещений и деформаций (например, при действии абсолютно гладкого штампа на деформируемое тело на контактной поверхности определены нормальное перемещение и касательные контактные усилия, равные нулю, и т. п.).

§ 2. Упругость и пластичность

1. Упругое тело определяется следующим образом: предполагается, что существует однозначная связь $e_{ij} - \sigma_{ij}$ и работа усилий, приложенных к элементу тела, по любому замкнутому пути по напряжениям (или по деформациям; это безразлично, так как связь $e_{ij} - \sigma_{ij}$ предполагается однозначной) равна нулю. Элементарная работа равна

$$dA = \sigma_{ij} de_{ij}. \quad (1.22)$$

По определению упругого тела

$$\oint_{\sigma} dA = \oint_{\sigma} \sigma_{ij} de_{ij} = 0, \quad \oint_e \sigma_{ij} de_{ij} = 0. \quad (1.23)$$

Из (1.23) следует, что выражение dA является полным дифференциалом, откуда

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial A}{\partial e_{ij}} = - \frac{\partial U}{\partial e_{ij}}, \quad (1.24)$$

где $U(e_{ij}) = -A$ — потенциал напряжений.

Выражение $d(\sigma_{ij}e_{ij})$ является полным дифференциалом по определению

$$\oint_{\sigma} d(\sigma_{ij}e_{ij}) = 0, \quad \oint_e d(\sigma_{ij}e_{ij}) = 0,$$

следовательно, выражение

$$e_{ij} d\sigma_{ij} = d(\sigma_{ij}e_{ij}) - \sigma_{ij} de_{ij}$$

также есть полный дифференциал:

$$\oint_{\sigma} e_{ij} d\sigma = 0, \quad \oint_e e_{ij} d\sigma = 0.$$

Отсюда следует существование потенциала деформаций $W(\sigma_{ij})$ такого, что

$$e_{ij} = - \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.25)$$

Конкретный вид потенциала U (или W) определяет согласно (1.24) (или (1.25)) конкретные свойства упругой среды.

Рассмотрим соотношения $e_{ij} - \sigma_{ij}$ для изотропного линейно-упругого тела при малых деформациях. Для изотропного тела потенциал напряжений $U(e_{ij})$ может зависеть лишь от трех инвариантов тензора деформаций. В качестве трех независимых инвариантов выберем следующие:

$$e = 1/3 e_{ii}, \quad I'_2, \quad I'_3, \quad (1.26)$$

где e — первый инвариант тензора деформаций, I'_2, I'_3 — соответственно второй и третий инварианты девиатора деформаций (1.19).

Соотношения линейной теории упругости имеют место в случае, если потенциал $U(e_{ij})$ является квадратичной формой

$$U(e_{ij}) = \frac{9}{2} K e^2 + 2GI_2', \quad (1.27)$$

где K , G — произвольные постоянные, подлежащие экспериментальному определению ¹⁾.

Постоянные K и G определяются из соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p &= K(e_x + e_y + e_z), \\ \tau &= G\gamma, \end{aligned}$$

где p — равномерное давление, $e_x + e_y + e_z$ — объемная деформация, τ — касательное (сдвигающее) напряжение, γ — сдвиг, равный удвоенной деформации сдвига. Величина K носит название объемного модуля, G — модуля сдвига.

Согласно (1.27) и (1.24) получим соотношения линейного закона Гука ²⁾.

$$\sigma_x = 3Ke + 2G(e_x - e), \quad \tau_{xy} = 2Ge_{xy} \quad (xyz). \quad (1.28)$$

Здесь и ниже (xyz) означает, что недостающие выражения получаются из приведенных круговой перестановкой индексов.

Из (1.28) следует зависимость

$$\sigma = 3Ke. \quad (1.29)$$

Приведем другую форму записи закона Гука

$$e_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad e_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G} \quad (xyz), \quad (1.30)$$

где E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

Связь между постоянными K , G , с одной стороны, и E , μ , — с другой, определяется формулами

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad E = 2G(1 + \mu). \quad (1.31)$$

¹⁾ Третий инвариант не входит в выражение (1.27), так как в этом случае соотношения теории перестают быть линейными. Если к (1.27) присоединить слагаемое $C(e_{ij}e_{jk}e_{ki})^{2/3}$, где $C = \text{const}$, то будут иметь место соотношения теории упругости, которые при одноосном растяжении, сжатии или сдвиге приведут к соотношениям линейной теории упругости [53].

²⁾ Соотношения связи $\sigma_{ij} - e_{ij}$ справедливы в таком же виде в любой ортогональной системе координат.

Для несжимаемого материала $e = 0$, следовательно, $K = \infty$, $\mu = 1/2$, $E = 3G$.

2. Пластичность — свойство тела приобретать остаточные деформации. Тело начинает приобретать пластические деформации после достижения комбинацией напряжений некоторого вполне определенного предела пластичности. Будем считать, что при пластическом деформировании полная деформация складывается из двух частей: упругой и пластической,

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (1.32)$$

где e_{ij}^e — упругая, а e_{ij}^p — пластическая составляющая деформации.

Будем предполагать, что упругие свойства материала не зависят от пластических и упругая составляющая деформации определяется согласно закону Гука (1.30).

Пластическое деформирование представляется как результат элементарных сдвигов по различным направлениям в зависимости от вида напряженного состояния. При этом имеет место процесс необратимого деформирования в результате преодоления внутреннего сопротивления, в определенной степени аналогичный, с механической точки зрения, процессу преодоления сухого трения.

Работа усилий, приложенных к элементу тела на пластических деформациях по любому замкнутому пути по напряжениям (цикл нагрузки и разгрузки), больше нуля, если не все de_{ij}^p отличны от нуля:

$$\oint \sigma_{ij} de_{ij}^p > 0. \quad (1.33)$$

Процесс приобретения пластических деформаций по определению не зависит от времени, аналогично тому, как это имеет место в теории упругости: при фиксированных нагрузках изменения упругих и пластических деформаций не происходит. Время не входит явно в соотношения теории пластичности.

Работа напряжений на приращениях пластических деформаций существенно зависит от истории деформирования.

Соотношения связи σ_{ij} — e_{ij}^p в теории пластичности являются неголомомными и связывают между собой

приращения пластических деформаций de_{ij}^p и напряжения σ_{ij} . Подобные теории носят установившееся название теорий пластического течения, хотя более соответствующий существу дела термин — «теория приращений пластических деформаций».

В теории пластического течения формулируется предельное соотношение — функция нагружения

$$f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i) = 0, \quad (1.34)$$

где χ_i — некоторые неголомомные параметры, характеризующие зависимость изменения функции нагружения от пути нагружения.

Пока в теле не возникли пластические деформации, $e_{ij}^p = \chi_i = 0$, и соотношение (1.34) имеет вид

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0. \quad (1.35)$$

Если напряженное состояние таково, что $f(\sigma_{ij}) < 0$, тело деформируется упруго. Если при нагружении в некоторой точке тела впервые достигнуто состояние, при котором имеет место $f(\sigma_{ij}) = 0$, то в этой точке тела материал достиг предела пластичности.

Пластические деформации возникают при активном нагружении материала, которое имеет место при

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0, \quad (1.36)$$

и не возникают при нейтральном нагружении и разгрузке

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0. \quad (1.37)$$

Соотношения связи $de_{ij}^p - \sigma_{ij}$ в теории пластичности формулируются обычно на основе принципа максимума Мизеса: при фиксированных параметрах e_{ij}^p, χ_i для любого данного значения компонент приращений пластической деформации de_{ij}^p имеет место неравенство

$$\sigma_{ij} de_{ij}^p \geq \sigma_{ij}^* de_{ij}^p, \quad (1.38)$$

где σ_{ij} — действительные компоненты напряжения, а σ_{ij}^* — компоненты любого возможного напряженного

состояния, допускаемого данной функцией нагружения:

$$f(\sigma_{ij}^*, e_{ij}^p, \chi_i) \leq 0. \quad (1.39)$$

Из принципа максимума Мизеса следует ассоциированный закон течения — закон направленности приращения пластической деформации (или скорости пластической деформации) по градиенту к поверхности нагружения.

В самом деле, предположим (здесь и всюду ниже), что приращение пластической деформации de^p не зависит от приращения напряжений.

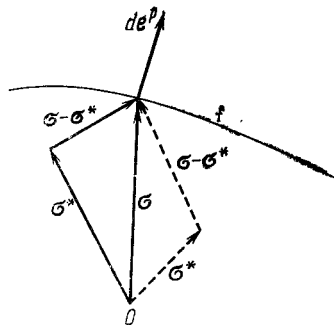


Рис. 1.

Рассмотрим рис. 1. Согласно (1.38) угол между векторами de^p и $\sigma - \sigma^*$ должен быть не тупым. В силу произвольности вектора σ^* , не выходящего за поверхность нагружения f , неравенство (1.38) может быть выполнено

только в случае ортогональности de^p к f , откуда имеем

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ij}^p = v \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{de_{ij}^p}{dt}, \quad v = \frac{d\lambda}{dt}. \quad (1.40)$$

Выражение (1.40) определяет ассоциированный закон пластического течения. Отметим, что из принципа Мизеса следует также невогнутость поверхности нагружения.

В теории пластичности при установлении ассоциированного закона течения (1.40) зачастую используются те или иные постулаты, касающиеся поведения материала. Эти постулаты приводят, как следствие, в первом приближении к неравенству (1.38), откуда и следуют соотношения (1.40).

Отметим, что подобные постулаты не являются следствием общих законов термодинамики; по существу, они являются средством классификации свойств среды, в этом и состоит их значение.

Рассмотрим замкнутый цикл нагружения $BA A_1 AB$ (рис. 2) по напряжениям. Пусть AA_1 достаточно мало, на этом отрезке нагружения пластические деформации получают приращение δe^p . Ограничимся всюду, пока это не будет оговорено, рассмотрением малых первого порядка.

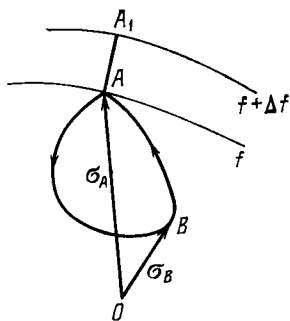


Рис. 2.

Очевидно, что если $C = \text{const}$, то можно записать

$$\oint_{\sigma} C d\sigma = 0, \quad \oint_{\sigma} C de = C \delta e^p. \quad (1.41)$$

Далее будем иметь

$$\oint_{\sigma} \sigma de = \sigma_A \delta e^p. \quad (1.42)$$

В самом деле, работа напряжений на упругих деформациях в замкнутом цикле по напряжениям равна нулю, а приращение пластической деформации отлично от нуля только в точке A . Можно получить также

$$\oint_{\sigma} e d\sigma = (\sigma_B - \sigma_A) \delta e^p. \quad (1.43)$$

В самом деле,

$$\oint_{\sigma} e^e d\sigma = 0, \quad \oint_{\sigma} e^p d\sigma = \int_A^B \delta e^p d\sigma = \delta e^p (\sigma_B - \sigma_A).$$

Если во втором соотношении (1.41) положить $C = \sigma$ и вычесть это выражение из (1.42), получим

$$\oint_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de = (\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p. \quad (1.44)$$

Рассмотрим циклы, замкнутые по деформациям. Циклу, замкнутому по деформациям в пространстве напряжений, соответствует незамкнутый цикл $BA A_1 AC$ (рис. 3). В точках B и C полные деформации одни и те же по определению.

По определению

$$\oint_e C de = 0, \quad C = \text{const}. \quad (1.45)$$

Но так как на отрезке AA_1 рис. 3 имеет место приращение пластических деформаций δe^p , то согласно (1.45) при разгрузке должно иметь место приращение упругих деформаций δe^e , компенсирующее приращение δe^p

$$\begin{aligned} \delta e^p + \delta e^e &= 0 \quad \text{или} \\ \delta e^e &= -\delta e^p. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Приращению δe^e соответствует приращение $\delta \sigma = \sigma_C - \sigma_B$ (см. рис. 3).

Предположим, что в точке B деформация является упругой. Если в точке B деформация является упругопластической $e_B = e_B^e + e_B^p$, то сместим начало отсчета на величину пластической деформации и соответствующую величину работы напряжений на участке BC будем подсчитывать только на величинах упругих деформаций.

Обозначим для краткости соотношения закона Гука

$$\sigma = Ae^e, \quad e^e = B\sigma, \quad B = A^{-1}. \quad (1.47)$$

Тогда

$$\oint_e C d\sigma = C(\sigma_C - \sigma_B) = C d\sigma = CA \delta e^e = -CA \delta e^p. \quad (1.48)$$

Рассмотрим далее интеграл

$$\oint_e \sigma de = \oint_e \sigma de^e + \oint_e \sigma de^p. \quad (1.49)$$

Здесь имеем

$$\begin{aligned} \oint_e \sigma de^e &= \oint_e B\sigma d\sigma = 1/2 B(\sigma_C^2 - \sigma_B^2) = \\ &= 1/2 B(\sigma_C + \sigma_B)(\sigma_C - \sigma_B) = 1/2 B(2\sigma_B + \delta\sigma) \delta\sigma = \\ &= B\sigma_B \delta\sigma = \sigma_B \delta e^e = -\sigma_B \delta e^p. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Вполне аналогично (1.42) получаем

$$\oint_e \sigma de^p = \sigma_A \delta e^p. \quad (1.51)$$

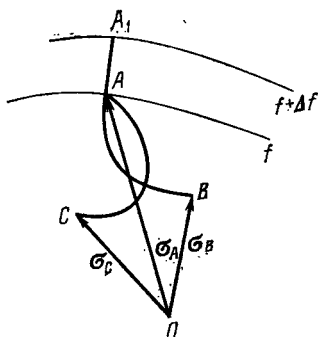


Рис. 3.

Из (1.49)—(1.51) находим

$$\oint_e \sigma de = (\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p. \quad (1.52)$$

Рассмотрим интеграл

$$\oint_e e d\sigma = \oint_e d(\sigma e) - \oint_e \sigma de. \quad (1.53)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \oint_e d(\sigma e) &= \sigma_C e_C - \sigma_B e_B = e_B^e (\sigma_C - \sigma_B) = \\ &= e_B^e \delta \sigma = \sigma_B \delta e^e = -\sigma_B \delta e^p. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Согласно (1.52), (1.53), (1.54) получим

$$\oint_e e d\sigma = -\sigma_A \delta e^p. \quad (1.55)$$

Если положить в (1.48) $C = e_B^e$, то будем иметь

$$\oint_e e_B^e d\sigma = -A e_B^e \delta e^p = -\sigma_B \delta e^p. \quad (1.56)$$

Из (1.55) и (1.56) найдем

$$\oint_e (e - e_B^e) d\sigma = -(\sigma_A - \sigma_B) \delta e^p. \quad (1.57)$$

Согласно (1.42) и (1.55) получим

$$\oint_\sigma \sigma de + \oint_e e d\sigma = 0. \quad (1.58)$$

Согласно (1.43) и (1.52) получим

$$\oint_\sigma e d\sigma + \oint_e \sigma de = 0. \quad (1.59)$$

Согласно (1.44) и (1.57) получим

$$\oint_\sigma (\sigma - \sigma_B) \delta e + \oint_e (e - e_B^e) d\sigma = 0. \quad (1.60)$$

Соотношение

$$\oint_\sigma e_B d\sigma + \oint_e \sigma_B de = 0 \quad (1.61)$$

имеет место, так как, по определению, равно нулю каждое из слагаемых (1.41), (1.45). Вычитая из (1.59) выражение (1.61), получим

$$\oint_{\sigma} (e - e_B) d\sigma + \oint_e (\sigma - \sigma_B) d\sigma = 0. \quad (1.62)$$

Неравенство Мизеса (1.38) будет иметь место согласно (1.44) и (1.43), если постулировать одно из неравенств

$$\begin{aligned} \oint_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de \geq 0, \quad \oint_{\sigma} e d\sigma \leq 0, \\ \oint_e (e - e_B) d\sigma \leq 0. \end{aligned} \quad (1.63)$$

В самом деле, неравенство $(\sigma_A - \sigma_B)de^p \geq 0$, следующее из каждого из выражений (1.63), с точностью до обозначений совпадает с неравенством (1.38).

Неравенство Мизеса (1.38) согласно (1.52) и (1.57) будет также иметь место, если постулировать одно из неравенств

$$\oint_e \sigma de \geq 0, \quad \oint_e (\sigma - \sigma_B) de \geq 0, \quad \oint_e (e - e_B) d\sigma \leq 0. \quad (1.64)$$

Первое соотношение (1.63) предложено Друккером¹⁾ («постулат устойчивости»), второе соотношение (1.63) — Хиллом²⁾. Первое соотношение (1.64) выдвинуто А. А. Ильюшиным³⁾ («постулат пластичности»), третье соотношение (1.63) и второе соотношение (1.64) можно рассматривать соответственно как обобщение постулатов Хилла и А. А. Ильюшина, которые имеют место при $e_B = \sigma_B = 0$. Третье соотношение (1.64) можно рассматривать как деформационный аналог постулата Друккера.

Рассмотрим соотношения (1.58)—(1.60), (1.62), не связывая себя предположениями о малости пути AA_1 (рис. 4).

¹⁾ D r u c k e r D. C., Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., 1950, vol. 7, № 4, pp. 411—418.

²⁾ H i l l R., On constitutive inequalities for simple materials. Parts I, II. J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, № 4, pp. 229—242; № 5, pp. 315—322.

³⁾ И л ь ю ш и н А. А., О постулате пластичности. Прикл. матем. и механ., 1961, т. 25, стр. 503—507.

Без ограничения общности можно считать, что путь A_1C , на котором происходит упругое деформирование, проходит через точку B (см. рис. 4). Тогда

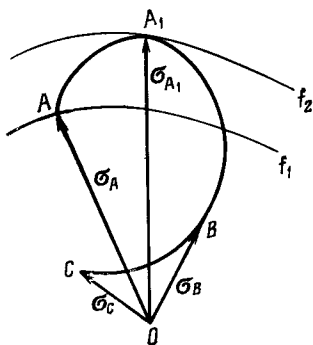


Рис. 4.

$$\oint_e = \oint_\sigma + \int_B^C. \quad (1.65)$$

Соотношение (1.58) примет вид

$$\begin{aligned} I_1 &= \oint_\sigma \sigma de + \oint_e e d\sigma = \\ &= \oint_\sigma d(\sigma e) + \int_B^C e d\sigma. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Пластическая деформация накапливается лишь на участке AA_1 (см. рис. 4), обозначим ее через Δe^p . На отрезке BC происходит упругое деформирование. Поэтому

$$I_1 = \sigma_B \Delta e^p + \left(\sigma_B + \frac{1}{2} \Delta \sigma \right) \Delta e^p, \quad \Delta \sigma = \sigma_C - \sigma_B. \quad (1.67)$$

По определению, $\Delta e^p + \Delta e^e = 0$, поэтому выражение (1.67) примет вид

$$I_1 = -\Delta W, \quad \Delta W = \frac{1}{2} \Delta \sigma \Delta e^e. \quad (1.68)$$

Аналогично получим

$$I_2 = \oint_\sigma e d\sigma + \oint_e \sigma de = \oint_\sigma d(\sigma e) + \int_B^C \sigma de = \Delta W. \quad (1.69)$$

Отметим, что

$$\oint_\sigma \sigma_B de + \oint_e e_B d\sigma = 0. \quad (1.70)$$

В самом деле,

$$\oint_\sigma \sigma_B de = \sigma_B \Delta e^p = -\sigma_B \Delta e^e, \quad \oint_e e_B d\sigma = e_B \Delta \sigma = \sigma_B \Delta e^e. \quad (1.71)$$

Вычитая из (1.66) выражение (1.70), получим

$$I_3 = \oint_{\sigma} (\sigma - \sigma_B) de + \oint_e (e - e_B) d\sigma = -\Delta W. \quad (1.72)$$

Вычитая из (1.69) выражение (1.61), справедливое для любых отрезков AA_1 (рис. 4), получим

$$I_4 = \oint_{\sigma} (e - e_B) d\sigma + \oint_e (\sigma - \sigma_B) de = \Delta W. \quad (1.73)$$

Таким образом, из (1.68), (1.69), (1.72), (1.73) найдем

$$-I_1 = I_2 = -I_3 = I_4 = \Delta W. \quad (1.74)$$

В первом приближении соотношения (1.74) равны нулю, так как величина $\Delta W = 1/2 \Delta\sigma\Delta e^e$ — второго порядка малости.

3. Возможен другой подход к определению соотношений теории пластического течения. Скорость диссипации механической энергии в единице объема тела $D = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p$, где $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p/dt$, будем называть диссипативной функцией.

Предположим, что

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p = D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i). \quad (1.75)$$

Введем принцип максимума, вполне аналогичный принципу максимума Мизеса (1.38):

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*p}, \quad (1.76)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^{*p}$ — компонента любой возможной скорости деформации, для которой имеет место

$$D(\varepsilon_{ij}^{*p}, e_{ij}^p, \chi_i) \leq D(\varepsilon_{ij}^p, e_{ij}^p, \chi_i). \quad (1.77)$$

Из неравенства (1.76) вполне аналогично (1.40) следует направленность σ по градиенту к поверхности $D = \text{const}$

$$\sigma_{ij} = \gamma \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p}. \quad (1.78)$$

Предположим, что D — однородная функция первого порядка относительно компонент ε_{ij}^p ; тогда

$$D = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \varepsilon_{ij}^p. \quad (1.79)$$

Из (1.78) и (1.79) получим, что $\gamma = 1$ и (1.78) принимает вид

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p}. \quad (1.80)$$

В этом случае производные $\partial D / \partial \varepsilon_{ij}^p$ — однородные функции нулевого порядка относительно ε_{ij}^p , поэтому шесть соотношений (1.80) можно рассматривать как функции пяти переменных, например, $\varepsilon_{ij}^p / \varepsilon_{11}^p$. Предполагая разрешимость соотношений (1.80) относительно $\varepsilon_{ij}^p / \varepsilon_{11}^p$, в результате исключения ε_{ij}^p получим конечное соотношение — функцию нагружения (1.34)

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \chi_i) = 0.$$

Дифференцируя (1.75), получим

$$\varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p. \quad (1.81)$$

Из (1.81) и (1.80) найдем

$$\varepsilon_{ij}^p d\sigma_{ij} = 0. \quad (1.82)$$

Дифференцируя функцию нагружения (1.34), получим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0. \quad (1.83)$$

Согласно (1.82) и (1.83) среди шести дифференциалов $d\sigma_{ij}$ независимых пять. Выбирая множитель ν таким образом, чтобы одно из слагаемых в выражении

$$\left(\varepsilon_{ij}^p - \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} = 0 \quad (1.84)$$

обратилось в нуль, из условия независимости оставшихся пяти дифференциалов получим ассоциированный закон течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \nu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (1.85)$$

Таким образом, модель пластического тела может быть введена двумя эквивалентными путями: либо через определение функции нагружения f , либо через определение диссипативной функции однородной первого порядка относительно компонент скорости D пластической деформации. В обоих случаях следует формулировать соответствующий принцип максимума (или приводящие к ним постулаты).

4. Запишем соотношения теории упругопластического состояния материала по теории пластического течения. Согласно (1.32)

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p. \quad (1.86)$$

Тогда из (1.30), (1.34), (1.40) следует

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + \frac{1}{2} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \quad (x \ y \ z), \\ f(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i) &= 0. \end{aligned} \quad (1.87)$$

В зависимости от конкретного вида функции нагружения f , будем иметь различные варианты соотношений теории упругопластического течения. Условия нагружения определены соотношением (1.36), в этом случае $d\lambda \neq 0$. В случае нейтрального нагружения и разгрузки (1.37) имеет место $d\lambda = 0$.

В случае, когда функция нагружения имеет особенности (ребра, угловые точки) и определена в виде совокупности конечного или бесконечного числа гладких функций нагружения

$$f^{(r)}(\sigma_{ij}, e_{ij}^p, \chi_i) = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.88)$$

определяется обобщенный ассоциированный закон пластического течения.

По отношению к каждой функции вводится определение разгрузки, нейтрального нагружения и нагружки. Напряженное состояние может соответствовать одной или нескольким функциям нагружения (1.88), причем остальные функции нагружения отрицательны:

$$f^{(i)} = 0, \quad f^{(j)} < 0, \quad (1.89)$$

Разгрузка происходит, если приращение напряжений $\Delta\sigma$ таково, что имеют место соотношения

$$f^{(i)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad f^{(j)} < 0. \quad (1.90)$$

В этом случае приращение пластических деформаций и параметров χ_i равно нулю ($de_{ij}^p = d\chi_i = 0$), а поверхность нагружения при разгрузке не изменяется.

При нейтральном нагружении приращение напряжений $\Delta\sigma$ таково, что конец вектора σ остается на фиксированной кусочногладкой поверхности нагружения, причем для некоторых кусков поверхности нагружения может происходить разгрузка

$$\begin{aligned} f^{(m)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \\ f^{(n)} < 0, \quad \frac{\partial f^{(n)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где индексы m, n различны и исчерпывают всю совокупность индексов i .

При нейтральном нагружении поверхность нагружения не изменяется, и не происходит приращения пластических деформаций и параметров χ_i , т. е. $de_{ij}^p = d\chi_i = 0$.

Нагружение будет иметь место, если приращение напряжений $\Delta\sigma$ таково, что хотя бы для одной или нескольких функций нагружения $f^{(m)}$ из совокупности $f^{(i)}$ (1.89) выполняются соотношения

$$f^{(m)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0. \quad (1.92)$$

Для других функций $f^{(n)}$ из совокупности $f^{(i)}$ может иметь место разгрузка или нейтральное нагружение

$$f^{(n)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(\mu)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0, \quad \frac{\partial f^{(\nu)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0, \quad (1.93)$$

где индексы μ, ν различны и исчерпывают всю совокупность индексов n .

Согласно обобщенному ассоциированному закону течения вектор приращения пластической деформации de^p складывается из составляющих $de^{p(m)}$, каждая из которых

ортогональна соответствующей поверхности нагружения $f^{(m)} = 0$, для которой имеет место нагружение.

Соотношения обобщенного закона течения имеют вид

$$de_{ij}^p = \sum_q de_{ij}^{p(q)} = \sum_q v_q \frac{\partial f^{(q)}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.94)$$

где

$$v_q > 0, \quad \text{если } f^{(q)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(q)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0,$$

$$v_q = 0, \quad \text{если } f^{(q)} < 0 \text{ или } f^{(q)} = 0, \quad \frac{\partial f^{(q)}}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \leq 0.$$

В определенных случаях соотношения теории пластического течения могут быть проинтегрированы и оказывается возможным от связи de_{ij} — $d\sigma_{ij}$ перейти непосредственно к связи между деформациями и напряжениями e_{ij} — σ_{ij} . В этом случае имеют место деформационные теории пластичности. Деформационные теории пластичности могут быть обоснованы при определенных условиях для пропорциональных (простых) нагружений, а также при наличии на поверхности нагружения особенностей: ребер, угловых точек и т. п. Среди деформационных теорий ниже рассмотрим теорию малых упругопластических деформаций.

5. Рассмотрим, как изменяются компоненты напряжения и деформации при переходе через поверхность S , разделяющую области V^e , V^p — упругого и упругопластического состояния среды.

Введем в некоторой точке этой поверхности декартову систему координат x, y, z так, чтобы оси x, y лежали в касательной плоскости, а ось z — по нормали к ней (рис. 5). Будем обозначать величины, относящиеся к области V^e , одним штрихом, к области V^p — двумя штрихами.

Условия равновесия элемента поверхности S приводят к равенствам

$$\sigma'_z = \sigma''_z, \quad \tau'_{xy} = \tau''_{xy}, \quad \tau'_{yz} = \tau''_{yz},$$

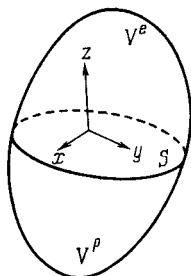


Рис. 5.

или

$$[\sigma_z] = [\tau_{xy}] = [\tau_{yz}] = 0, \quad (1.95)$$

где квадратные скобки означают величину разрыва соответствующей компоненты.

Предположим, что в теле не возникают разрывы перемещений

$$[u_x] = [u_y] = [u_z] = 0. \quad (1.96)$$

Тогда прямоугольный элемент на поверхности S со сторонами Δx , Δy деформируется вполне определенным образом, независимо от того, с какой стороны области — упругой или упругопластической — приближаются к нему. Последнее будет иметь место, если

$$e'_x = e''_x, \quad e'_y = e''_y, \quad e'_{xy} = e''_{xy}$$

или

$$[e_x] = [e_y] = [e_{xy}] = 0. \quad (1.97)$$

В упругой области V^e имеют место соотношения закона Гука (1.30), а в пластической области V^p имеют место соотношения (1.87). Но в силу непрерывности процесса деформирования на границе упругой и пластической областей приращения пластических деформаций de_{ij}^p равны нулю, т. е. на S в (1.87) величина $d\lambda = 0$. Таким образом по обе стороны поверхности S в бесконечно тонком слое имеют место соотношения закона Гука (1.30). Из (1.30) и условий (1.95) и (1.97) следует, что на поверхности раздела упругой и пластической областей все компоненты напряжений, деформаций и перемещений непрерывны.

Отметим, что если при переходе через границу S терпит разрыв одна из постоянных упругости, например, коэффициент Пуассона, то это приводит к разрывам напряжений и деформаций.

§ 3. Идеально пластическое тело

Простейшим вариантом теории пластичности является теория идеальной пластичности. В этом случае предельное условие (1.34) зависит только от напряжений, имеет вид (1.35)

$$f(\sigma_{ij}) = 0$$

и носит название условия пластичности.

Рассмотрим условие пластичности для изотропного идеально пластического тела. В этом случае условие пластичности может зависеть только от инвариантов тензора напряжений:

$$f(\sigma_{ij}) = f(\sigma, \Sigma'_2, \Sigma'_3) = 0. \quad (1.98)$$

Используя ассоциированный закон пластического течения (1.40), принимая во внимание (1.8), получим

$$de^p_x = d\lambda \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} (\sigma'_y \sigma'_z - \tau_{yz}^2 + \frac{1}{3} \Sigma'_2) \right\}, \quad (1.99)$$

$$de^p_{xy} = d\lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} \tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} (\tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma'_z \tau_{xy}) \right\} \quad (x y z).$$

Из первого соотношения (1.99) следует

$$de^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \quad (1.100)$$

Обычно металлы в достаточно широком диапазоне давлений не обнаруживают остаточных свойств при всестороннем растяжении-сжатии, другими словами, являются несжимаемыми по отношению к пластическим деформациям. Условие несжимаемости $de^p = 0$ будет иметь место, если согласно (1.100) условие пластичности не зависит от первого инварианта тензора напряжений σ . Условие пластичности (1.98) в этом случае принимает вид

$$f(\Sigma'_2, \Sigma'_3) = 0. \quad (1.101)$$

Условие пластичности изотропного тела может быть записано в другой форме. Вместо инвариантов σ , Σ'_2 , Σ'_3 в качестве трех независимых инвариантов можно взять величины трех главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 . Тогда условие (1.35) примет вид

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0. \quad (1.102)$$

Предположим, что на тело действует равномерное давление p , но пластические свойства материала не зависят

от действия всестороннего давления; тогда

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(\sigma_1 + p, \sigma_2 + p, \sigma_3 + p) = 0. \quad (1.103)$$

Дифференцируя соотношение (1.103) по p , получим

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} = 0. \quad (1.104)$$

Из решения дифференциального уравнения (1.104) следует, что условие пластичности (1.102) имеет вид

$$f(\sigma_1 - \sigma_2, \sigma_2 - \sigma_3, \sigma_3 - \sigma_1) = 0 \quad (1.105)$$

или

$$f(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = f(\sigma_1 - \sigma, \sigma_2 - \sigma, \sigma_3 - \sigma) = 0. \quad (1.106)$$

Условия пластичности (1.105), (1.106) определяют материал, пластические свойства которого не зависят от действия всестороннего давления, они вполне эквивалентны условию (1.101).

Введем декартово пространство главных напряжений σ_i . В этом пространстве условие пластичности (1.101) (эквивалентные ему условия (1.105), (1.106)) интерпретируется цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Введем девиаторную плоскость $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, ортогональную к прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Пересечение девиаторной плоскости с поверхностью пластичности назовем кривой пластичности.

Рассмотрим три условия пластичности: условие пластичности максимального касательного напряжения — условие Треска, условие пластичности октаэдрического напряжения — условие Мизеса и условие пластичности максимального приведенного напряжения.

Условие пластичности Треска (условие пластичности максимального касательного напряжения).

1. Условие пластичности Треска записывается в виде

$$|\tau_{\max}| \leq k, \quad k = \text{const}, \quad (1.107)$$

где τ_{\max} — максимальное касательное напряжение, или

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq 2k, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \leq 2k, \quad |\sigma_3 - \sigma_1| \leq 2k. \quad (1.108)$$

В пространстве главных напряжений условие пластичности Треска интерпретируется шестигранной призмой,

равнонаклоненной к осям координат (рис. 6, а). Соответствующий шестиугольник пластичности в девиаторной плоскости изображен на рис. 6, б.

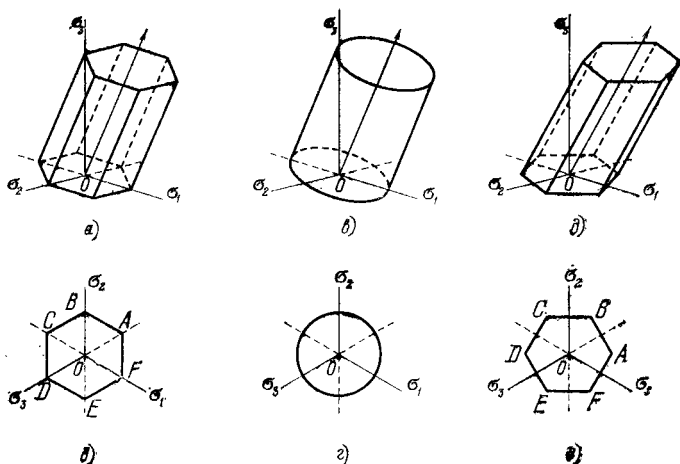


Рис. 6.

Предположим, что напряженное состояние соответствует одной из граней призмы Треска,

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad \sigma_1 - \sigma_2 \leq 2k, \quad \sigma_2 - \sigma_3 \leq 2k, \quad (1.109)$$

откуда

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (1.110)$$

Вообще в дальнейшем будем нумеровать главные напряжения таким образом, чтобы имело место (1.110).

Согласно ассоциированному закону течения (1.40), из (1.109) получим

$$de_1^p = d\lambda, \quad de_2^p = 0, \quad de_3^p = -d\lambda \quad (1.111)$$

или

$$de_1^p + de_3^p = 0, \quad de_2^p = 0. \quad (1.112)$$

Таким образом, одно из приращений главных компонент пластической деформации равно нулю, т. е. пластическое течение в этом случае оказывается весьма стесненным.

Запишем уравнение грани Треска в декартовых координатах. Из (1.4) и (1.109) получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 - 2kl_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)l_3^2, \\ \sigma_y &= \sigma_1 - 2km_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)m_3^2, \\ \sigma_z &= \sigma_1 - 2kn_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)n_3^2, \\ \tau_{xy} &= -2kl_2m_2 + (\sigma_2 - \sigma_1)l_3m_3, \\ \tau_{yz} &= -2km_2n_2 + (\sigma_2 - \sigma_1)m_3n_3, \\ \tau_{zx} &= -2kn_2l_2 + (\sigma_2 - \sigma_1)n_3l_3. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Обозначим $\sigma_2 - \sigma_1 = \xi$ и представим согласно (1.113) выражения второго и третьего инвариантов девиатора напряжений в виде

$$\begin{aligned} \Sigma'_2 &= \frac{1}{3}(4k^2 + 2k\xi - \xi^2), \\ \Sigma'_3 &= -\frac{1}{27}(-16k^3 - 12k^2\xi + 6k\xi^2 + 2\xi^3). \end{aligned} \quad (1.114)$$

Исключая из (1.114) величину ξ , получим

$$4(k^2 - \Sigma'_2)(4k^2 - \Sigma'_2)^2 + 27(\Sigma'_3)^2 = 0. \quad (1.115)$$

Используя условие пластичности (1.115), можно получить соотношения ассоциированного закона пластического течения

$$\begin{aligned} de_x^p &= -d\lambda \left[a\sigma'_x - 54\Sigma'_3 \left(\sigma'_y\sigma'_z - \tau_{yz}^2 + \frac{1}{3}\Sigma'_2 \right) \right], \\ de_{xy}^p &= -2d\lambda [a\tau_{xy} - 54\Sigma'_3(\tau_{yz}\tau_{xz} - \tau_{xy}\sigma'_z)] \quad (x y z), \\ a &= 12(4k^2 - \Sigma'_2)(2k^2 - \Sigma'_2). \end{aligned} \quad (1.116)$$

2. Рассмотрим пересечение двух граней призмы Треска. Для определенности выберем ребро $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, $\sigma_2 - \sigma_3 = 2k$ (ребро A на рис. 6, б), откуда

$$\sigma_1 = \sigma_2, \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k. \quad (1.117)$$

Для определения соотношений закона пластического течения в точках особенностей поверхностей пластичности используется обобщенный ассоциированный закон пластического течения. В рассматриваемом случае (1.117)

будет иметь место

$$\begin{aligned} f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0, \quad f_2 = \sigma_2 - \sigma_3 - 2k = 0, \\ de_1^p = d\lambda_1, \quad de_2^p = d\lambda_2, \quad de_3^p = -d\lambda_1 - d\lambda_2, \quad (1.118) \\ d\lambda_1 \geq 0, \quad d\lambda_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Из (1.118) следует $de_1^p + de_2^p + de_3^p = 0$. Очевидно, что ребрам призмы Треска соответствует бóльшая степень свободы пластического течения. Из рассмотрения рис. 6, б очевидно, что любое направление пластического течения (любое приращение пластических деформаций) может соответствовать ребрам призмы Треска.

Запишем уравнение ребра призмы Треска в декартовых координатах. Из (1.4) и (1.117) следует

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_1 - 2kl_3^2, \quad \tau_{xy} = -2kl_3m_3, \\ \sigma_y = \sigma_1 - 2km_3^2, \quad \tau_{yz} = -2km_3n_3, \quad (1.119) \\ \sigma_z = \sigma_1 - 2kn_3^2, \quad \tau_{zx} = -2kn_3l_3. \end{aligned}$$

Из (1.119) следует $\sigma_1 = \sigma + \frac{2}{3}k$. Исключая из (1.119) направляющие косинусы, получим три независимых соотношения

$$(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3}k)(\sigma_y - \sigma - \frac{2}{3}k) = \tau_{xy}^2 \quad (xyz), \quad (1.120)$$

или

$$(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3}k) \tau_{yz} = \tau_{xy} \tau_{xz} \quad (xyz). \quad (1.121)$$

Соотношения (1.120) или (1.121) определяют уравнение ребра призмы Треска в пространстве тензора напряжений.

Отметим, что три уравнения равновесия (1.9) и соотношения (1.120) или (1.121) образуют систему шести уравнений относительно шести неизвестных σ_{ij} . Если граничные условия заданы в напряжениях, то эта система уравнений является статически определимой.

Используя соотношения (1.120) или (1.121) в качестве обобщенного пластического потенциала, можно получить соотношения ассоциированного закона течения; ниже для этих целей изберем другой путь. Для изотропного тела ассоциированный закон течения утверждает совпадение главных направлений тензора напряжений и приращений (или скоростей) пластических деформаций. В этом легко

убедиться: согласно (1.99) из $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ сразу следует

$$de_{xy}^p = de_{yz}^p = de_{zx}^p = 0.$$

В основу вывода соотношений связи $de_{ij}^p - \sigma_{ij}$ положим условие совпадения главных направлений тензоров напряжений и скоростей пластических деформаций. В этом случае одна и та же таблица направляющих косинусов определяет ориентацию главных осей 1, 2, 3 в декартовой системе координат x, y, z и аналогично (1.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p l_1^2 + \varepsilon_2^p l_2^2 + \varepsilon_3^p l_3^2 &= \varepsilon_x^p, & \varepsilon_1^p l_1 m_1 + \varepsilon_2^p l_2 m_2 + \varepsilon_3^p l_3 m_3 &= \varepsilon_{xy}^p, \\ \varepsilon_1^p m_1^2 + \varepsilon_2^p m_2^2 + \varepsilon_3^p m_3^2 &= \varepsilon_y^p, & \varepsilon_1^p m_1 n_1 + \varepsilon_2^p m_2 n_2 + \varepsilon_3^p m_3 n_3 &= \varepsilon_{yz}^p, \\ \varepsilon_1^p n_1^2 + \varepsilon_2^p n_2^2 + \varepsilon_3^p n_3^2 &= \varepsilon_z^p, & \varepsilon_1^p n_1 l_1 + \varepsilon_2^p n_2 l_2 + \varepsilon_3^p n_3 l_3 &= \varepsilon_{zx}^p. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^p l_1^2 + \varepsilon_2^p l_2^2 + \varepsilon_3^p l_3^2 &= \varepsilon_x^p, \\ \varepsilon_1^p l_1 m_1 + \varepsilon_2^p l_2 m_2 + \varepsilon_3^p l_3 m_3 &= \varepsilon_{xy}^p, \\ \varepsilon_1^p l_1 n_1 + \varepsilon_2^p l_2 n_2 + \varepsilon_3^p l_3 n_3 &= \varepsilon_{xz}^p. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Определитель системы (1.123) равен $\Delta = l_1 l_2 l_3$. Из (1.123) следует

$$\varepsilon_3^p = \varepsilon_x^p + \varepsilon_{xy}^p \frac{m_3}{l_3} + \varepsilon_{xz}^p \frac{n_3}{l_3}. \quad (1.124)$$

Аналогично найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^p &= \varepsilon_{xy}^p \frac{l_3}{m_3} + \varepsilon_y^p + \varepsilon_{xz}^p \frac{n_3}{m_3}, \\ \varepsilon_3^p &= \varepsilon_{xz}^p \frac{l_3}{n_3} + \varepsilon_{yz}^p \frac{m_3}{n_3} + \varepsilon_z^p. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Таким образом, из (1.124), (1.123) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^p + \varepsilon_{xy}^p \frac{m_3}{l_3} + \varepsilon_{xz}^p \frac{n_3}{l_3} &= \varepsilon_{xy}^p \frac{l_3}{m_3} + \varepsilon_y^p + \varepsilon_{xz}^p \frac{n_3}{m_3} = \\ &= \varepsilon_{xz}^p \frac{l_3}{n_3} + \varepsilon_{yz}^p \frac{m_3}{n_3} + \varepsilon_z^p. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Используя уравнения (1.119), из (1.126), присоединяя условие несжимаемости, получим искомую систему

соотношений

$$\begin{aligned}
 de_x^p + de_{xy}^p \frac{\sigma_y - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xy}} + de_{xz}^p \frac{\sigma_z - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xz}} &= \\
 = de_{xy}^p \frac{\sigma_x - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xy}} + de_y^p + de_{yz}^p \frac{\sigma_z - \sigma - 2/3 k}{\tau_{yz}} &= \\
 = de_{xz}^p \frac{\sigma_x - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xz}} + de_{yz}^p \frac{\sigma_y - \sigma - 2/3 k}{\tau_{yz}} + de_z^p, \\
 de_x^p + de_y^p + de_z^p &= 0. \tag{1.127}
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, получим, что могут иметь место два случая соответствия напряженного состояния ребру призмы Треска: $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$, $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$; $\sigma_2 = \sigma_3$ — соответственно ребра A и F на рис. 6, б. Для ребра F в соотношениях (1.120), (1.124), (1.127) следует поменять знак у постоянной k .

Условие пластичности Мизеса.

Условие пластичности Мизеса утверждает равенство постоянной второго инварианта девиатора напряжений. В главных напряжениях оно имеет вид

$$\begin{aligned}
 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 &= k_0^2, \\
 k_0 &= \text{const.} \tag{1.128}
 \end{aligned}$$

В пространстве главных напряжений соотношение (1.128) интерпретируется круговым цилиндром, образующие которого равнонаклонены к осям координат (рис. 6, в), соответствующая окружность пластичности в девиаторной плоскости изображена на рис. 6, г.

Установим соответствие между константами k — пределом текучести при сдвиге (1.107) и k_0 в соотношении (1.128). Если постоянная k определена из опыта на чистый сдвиг: $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$, $\sigma_2 = 0$, то из (1.128) следует $k_0 = \sqrt{6}k$. В этом случае взаимное расположение кривых пластичности Треска и Мизеса показано на рис. 7, а. Если постоянная k определена из опыта на одноосное растяжение $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, то из (1.128) следует $k_0 = 2\sqrt{2}k$. В этом случае взаимное расположение кривых пластичности Треска и Мизеса показано на рис. 7, б. Возможны и другие эксперименты по определению константы k , при которых взаимное расположение кривых пластичности Треска и Мизеса будет иметь характер, изображенный на рис. 7, в.

Из (1.128) и соотношений ассоциированного закона течения (1.40) следует

$$de_1^p = 4d\lambda \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \right] \quad (1.23). \quad (1.129)$$

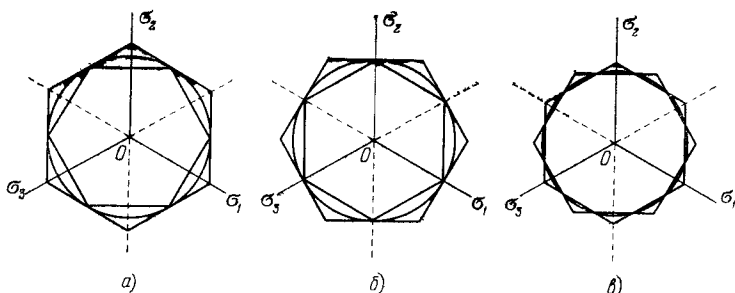


Рис. 7.

В декартовой системе координат условие пластичности Мизеса записывается в виде

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = k_0^2. \quad (1.130)$$

Согласно ассоциированному закону пластического течения (1.40) получим

$$de_x^p = 4d\lambda \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], \quad de_{xy}^p = 6d\lambda \tau_{xy} \quad (x \ y \ z). \quad (1.131)$$

Условие пластичности максимального приведенного напряжения. Условие пластичности максимального приведенного напряжения записывается в виде

$$|\sigma_i - \sigma|_{\max} \leq k_*, \quad k_* = \text{const}, \quad (1.132)$$

где $(\sigma_i - \sigma)_{\max}$ — максимальное приведенное напряжение, или

$$\begin{aligned} |\sigma_1 - 1/2(\sigma_2 + \sigma_3)| &\leq 3/2 k_*, & |\sigma_2 - 1/2(\sigma_3 + \sigma_1)| &\leq 3/2 k_*, \\ & & |\sigma_3 - 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)| &\leq 3/2 k_*. \end{aligned} \quad (1.133)$$

В пространстве главных напряжений условие пластичности максимального приведенного напряжения интер-

претируется шестигранной призмой, равнонаклоненной к осям координат (рис. 6, ∂). Соответствующий шестиугольник пластичности в девiatorной плоскости изображен на рис. 6, e .

Грань AF определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \sigma_1 - 1/2 (\sigma_2 + \sigma_3) = 3/2 k_*, \quad -\sigma_2 + 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3) \leq 3/2 k_*, \\ -\sigma_3 + 1/2 (\sigma_1 + \sigma_2) \leq 3/2 k_*. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Ребро A определяется уравнениями

$$\sigma_1 - 1/2 (\sigma_2 + \sigma_3) = 3/2 k_*, \quad -\sigma_3 + 1/2 (\sigma_1 + \sigma_2) = 3/2 k_*, \quad (1.135)$$

откуда

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k_*, \quad \sigma_2 = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_3). \quad (1.136)$$

Условия (1.134), (1.135) можно записать в компонентах декартовой системы координат; здесь мы ограничимся рассмотрением соотношений в главных осях.

Установим соответствие между константами k — пределом текучести при сдвиге (1.107) и k_* . Если постоянная k определена из опыта на чистый сдвиг, $\sigma_1 = -\sigma_3 = k$, $\sigma_2 = 0$, то из (1.136) следует $k_* = k$. Взаимное расположение кривых пластичности Треска и максимального приведенного напряжения показано на рис. 7, a . Если постоянная k определена из опыта на одноосное растяжение $\sigma_1 = 2k$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, то из (1.134) следует $k_* = 4/3k$. В этом случае взаимное расположение кривых пластичности Треска и максимального приведенного напряжения показано на рис. 7, b . В случае других экспериментов по определению константы k взаимное расположение кривых пластичности Треска и максимального приведенного напряжения может иметь вид, указанный на рис. 7, $в$.

Из (1.134) и соотношений ассоциированного течения (1.40) для грани AF следует

$$de_1^p = d\lambda, \quad de_2^p = -1/2 d\lambda, \quad de_3^p = -1/2 d\lambda. \quad (1.137)$$

Для ребра A согласно обобщенному ассоциированному закону пластического течения из (1.135) следует

$$\begin{aligned} de_1^p = d\lambda_1 + 1/2 d\lambda_2, \quad de_2^p = -1/2 d\lambda_1 + 1/2 d\lambda_2, \\ de_3^p = -1/2 d\lambda_1 - d\lambda_3, \quad d\lambda_i \geq 0. \end{aligned} \quad (1.138)$$

§ 4. Плоская и осесимметричная задачи

1. Плоская деформация реализуется в длинных призматических телах, когда нагрузка, нормальная к боковой поверхности, не меняется вдоль образующей. Введем декартову систему координат x, y, z , направим ось z вдоль оси тела. Тогда

$$u_z = e_{xz} = e_{yz} = e_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (1.139)$$

Все отличные от нуля компоненты напряжений, перемещений и деформаций зависят от x, y . Уравнения равновесия (1.9) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (1.140)$$

Соотношения (1.13) запишутся в виде

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (1.141)$$

Обозначим через L контур, образованный сечением тела с плоскостью, ортогональной к оси z . Пусть $L = L_1 + L_2$, где на L_1 определены усилия, на L_2 — перемещения. Тогда граничные условия (1.20), (1.21) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos(ny) &= P_x, \\ \tau_{xy} \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny) &= P_y \text{ на } L_1, \\ u_x &= u_{x0}, \quad u_y = u_{y0} \text{ на } L_2. \end{aligned} \quad (1.142)$$

В части тела, находящейся в упругом состоянии, имеет место закон Гука (1.30), откуда согласно (1.139) получим $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$. Исключая компоненту σ_z , получим искомое выражение закона Гука для случая плоской деформации

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1-\mu}{2G} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right), \quad e_y = \frac{1-\mu}{2G} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right), \\ e_{xy} &= \frac{1}{2G} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1.143)$$

Для несжимаемого материала $\mu = 1/2$ и соотношения (1.143) принимают вид

$$e_x = -e_y = \frac{1}{4G} (\sigma_x - \sigma_y), \quad e_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy}. \quad (1.144)$$

Перейдем к определению зависимостей между напряжениями и приращениями деформаций в упругопластической области. На основании (1.32) имеем

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p.$$

Согласно (1.32), (1.87), (1.99), учитывая, что рассматриваемые условия пластичности не зависят от σ и принимая во внимание (1.139), получим искомые соотношения для случая плоской деформации

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu (d\sigma_y + d\sigma_z)] + \\ &\quad + d\lambda \left[\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) + \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} (\sigma'_y \sigma'_z + \frac{1}{3} \Sigma'_2) \right], \\ de_y &= \frac{1}{E} [d\sigma_y - \mu (d\sigma_x + d\sigma_z)] + \\ &\quad + d\lambda \left[\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) + \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} (\sigma'_x \sigma'_z + \frac{1}{3} \Sigma'_2) \right], \\ 0 &= \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu (d\sigma_y + d\sigma_x)] + \\ &\quad + d\lambda \left[\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} (\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2 + \frac{1}{3} \Sigma'_2) \right], \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + d\lambda \left[\frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} \tau_{xy} - \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} \sigma'_z \tau_{xy} \right], \quad (1.145) \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = e_{xz} = e_{yz} = e_z = 0, \\ \Sigma'_2 &= 1/6 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2], \\ \Sigma'_3 &= \sigma'_z (\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2). \end{aligned}$$

Для условия пластичности Треска (1.115) имеет место

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} = -12(2k^2 - \Sigma'_2)(4k^2 - \Sigma'_2), \quad \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} = 54\Sigma'_3. \quad (1.146)$$

Для условия пластичности Мизеса (1.130)

$$\frac{\partial f}{\partial \Sigma'_2} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \Sigma'_3} = 0. \quad (1.147)$$

Согласно традиционной технике определения соотношений теории плоской деформации из третьего

соотношения (1.145)

$$\frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu (d\sigma_x + d\sigma_y)] + d\lambda \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \Sigma_2} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \right. \\ \left. + \frac{\partial f}{\partial \Sigma_3} (\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2 + \frac{1}{3} \Sigma_2') \right\} = 0. \quad (1.148)$$

следует найти компоненту σ_z , исключить ее из оставшихся соотношений (1.145) и получить зависимости относительно составляющих σ_x , σ_y , τ_{xy} . Существенные упрощения могут быть достигнуты за счет предположения о несжимаемости материала в упругой области. Тогда соотношение (1.148) удовлетворяется при

$$\sigma'_z = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_z = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y); \\ \frac{\partial f}{\partial \Sigma_3} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma'_z = 0. \quad (1.149)$$

Если $\sigma'_z = 0$, то $\Sigma_3' = \sigma'_z (\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy}^2) = 0$ и для условия пластичности Треска согласно (1.146) условия (1.149) выполнены. Для условия пластичности Мизеса условия (1.149) также имеют место.

Подставляя (1.149) в (1.115) и (1.130), получим, что с точностью до констант в правой части условия пластичности Треска и Мизеса совпадают и сводятся к виду

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (1.150)$$

Если определяющим является эксперимент на чистый сдвиг, то константы в правой части (1.150) совпадают для обоих условий.

Итак, условие пластичности (1.150) имеет место для упругопластического материала в случае плоской деформации только для несжимаемого материала как в упругой, так и в пластической области¹⁾. Если материал в упругой

¹⁾ При выполнении ассоциированного закона течения все условия пластичности для несжимаемого упругопластического материала в случае плоской деформации сводятся к (1.150). Идея доказательства состоит в следующем: так как $de_2^p = 0$, в девiatorной плоскости вектор de^p ортогонален вектору σ_2 ; тогда в силу ассоциированного закона течения кривая пластичности в точке приложения вектора de^p будет иметь касательную, параллельную плоскости $\sigma_1 - \sigma_3 = \text{const}$, откуда и следует соотношение (1.150).

области сжимаем, то условия пластичности Треска и Мизеса не сводятся к виду (1.150) и не совпадают между собой¹⁾.

В дальнейшем в случае плоской деформации будем исходить из условия пластичности (1.150). В этом случае соотношения ассоциированного закона течения имеют вид

$$de_x^p = \frac{d\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_y), \quad de_y^p = \frac{d\lambda}{2} (\sigma_y - \sigma_x),$$

$$de_{xy}^p = d\lambda \tau_{xy}, \quad d\lambda = \frac{1}{2k} \sqrt{(de_x^p - de_y^p)^2 + 4de_{xy}^{p2}}. \quad (1.151)$$

Учитывая (1.144), (1.151), можно выписать соотношения связи между напряженным и деформированным состоянием в упругопластической области для несжимаемого материала

$$de_x = \frac{1}{4G} (d\sigma_x - d\sigma_y) + \frac{d\lambda}{2} (\sigma_x - \sigma_y),$$

$$de_y = \frac{1}{4G} (d\sigma_y - d\sigma_x) + \frac{d\lambda}{2} (\sigma_y - \sigma_x), \quad (1.152)$$

$$de_{xy} = \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + d\lambda \tau_{xy},$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2.$$

Запишем исходные соотношения в полярной системе координат r, θ . Соотношения (1.140) — (1.142) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad (1.153)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0;$$

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad (1.154)$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right);$$

$$\sigma_r \cos(nr) + \tau_{r\theta} \cos(n\theta) = P_r,$$

$$\tau_{r\theta} \cos(nr) + \sigma_\theta \cos(n\theta) = P_\theta \text{ на } L_1, \quad (1.155)$$

$$u_r = u_{r0}, \quad u_\theta = u_{\theta0} \text{ на } L_2.$$

¹⁾ См. Добавление.

Соотношения связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ (1.143), (1.144), (1.152) сохраняют свой вид в любой ортогональной системе координат и записываются совершенно аналогично. Так, в упругой области при $\mu = 1/2$

$$e_r^e = -e_\theta^e = \frac{1}{4G} (\sigma_r - \sigma_\theta), \quad e_{r\theta}^e = \frac{\tau_{r\theta}}{2G}. \quad (1.156)$$

В упругопластической области при $\mu = 1/2$

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{1}{4G} (d\sigma_r - d\sigma_\theta) + \frac{d\lambda}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta), \\ de_\theta &= \frac{1}{4G} (d\sigma_\theta - d\sigma_r) + \frac{d\lambda}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r), \\ de_{r\theta} &= \frac{d\tau_{r\theta}}{2G} + d\lambda \tau_{r\theta}, \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2. \end{aligned} \quad (1.157)$$

2. Плоское напряженное состояние реализуется в тонких плоских пластинах, нагруженных в своей плоскости. Введем декартову систему координат x, y, z , направим ось z ортогонально плоскости пластины; тогда

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = e_{xz} = e_{yz} = 0. \quad (1.158)$$

Уравнения равновесия, соотношения связи между деформациями и перемещениями, граничные условия при плоском напряженном состоянии совпадают с соответствующими соотношениями при плоской деформации (1.140) — (1.142). Соотношения закона Гука (1.30) принимают вид

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu\sigma_y), & e_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ e_{xy} &= \frac{1}{2G} \tau_{xy}, & E &= 2G(1 + \mu). \end{aligned} \quad (1.159)$$

Для несжимаемого материала $\mu = 1/2$ и соотношения (1.159) записываются в виде

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{3G} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y}{2} \right), & e_y &= \frac{1}{3G} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x}{2} \right), \\ e_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}, & E &= 3G. \end{aligned} \quad (1.160)$$

Сравним соотношения (1.159) и (1.143). Обозначим

$$\mu_1 = \mu/(1 - \mu), \quad \mu = \mu_1/(1 + \mu_1) \quad (1.161)$$

и перепишем соотношения (1.143) в виде

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E_1} (\sigma_x - \mu_1 \sigma_y), & e_y &= \frac{1}{E_1} (\sigma_y - \mu_1 \sigma_x), \\ e_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{2G}, & E_1 &= 2G(1 + \mu_1). \end{aligned} \quad (1.162)$$

Из (1.159), (1.162) следует хорошо известный факт, что соотношения закона Гука для случаев плоской деформации и плоского напряженного состояния с точностью до обозначений совпадают между собой. Если в качестве основных выбраны постоянные упругости G , μ , то любое решение теории упругости для плоского напряженного состояния справедливо для случая плоской деформации, если заменить коэффициент Пуассона μ на μ_1 и модуль упругости E на E_1 .

Отметим, что если $\mu = 1/2$, то $\mu_1 = 1$; если $\mu_1 = 1/2$, то $\mu = 1/3$.

Перейдем к определению зависимостей между напряжениями и приращениями деформаций в упругопластической области.

2.1. Рассмотрим условие пластичности Треска, обозначим $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, тогда в плоскости главных напряжений σ_1, σ_2 сечение плоскости $\sigma_3 = 0$ с призмой Треска определит шестиугольник $ABCDEF$, изображенный на рис. 8.

Уравнения сторон шестиугольника $ABCDEF$ согласно (1.108) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2k, & 0 \leq \sigma_2 \leq 2k & \quad (AB), \\ \sigma_2 &= 2k, & 0 \leq \sigma_1 \leq 2k & \quad (BC), \\ \sigma_2 - \sigma_1 &= 2k, & -2k \leq \sigma_1 \leq 0 & \quad (CD), \\ \sigma_1 &= -2k, & -2k \leq \sigma_2 \leq 0 & \quad (DE), \\ \sigma_2 &= -2k, & -2k \leq \sigma_1 \leq 0 & \quad (EF), \\ \sigma_1 - \sigma_2 &= 2k, & 0 \leq \sigma_1 \leq 2k & \quad (FA). \end{aligned} \quad (1.163)$$

Запишем соотношения (1.163) в компонентах декартовой системы координат.

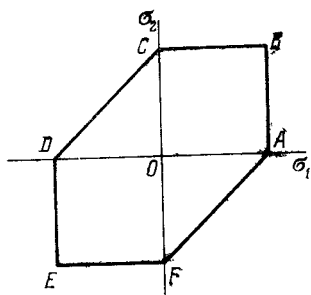


Рис. 8.

Примем в дальнейшем $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Отметим, что в этом случае достаточно рассмотреть стороны AB , FA , EF шестиугольника Треска, изображенного на рис. 8. Будем иметь

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (1.164)$$

Приведем таблицу, определяющую взаимную ориентацию осей x , y и главных направлений 1, 2

	1	2
x	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
y	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha, & \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.165)$$

Из (1.165), (1.163) получим для стороны AB

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2k - (2k - \sigma_2) \sin^2 \alpha, \\ \sigma_y &= 2k - (2k - \sigma_2) \cos^2 \alpha, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (2k - \sigma_2) \sin 2\alpha, \end{aligned} \quad (1.166)$$

откуда найдем

$$(\sigma_x - 2k)(\sigma_y - 2k) - \tau_{xy}^2 = 0. \quad (1.167)$$

Из (1.165), (1.163) получим для стороны FA

$$\sigma_x = \sigma_2 + 2k \cos^2 \alpha, \quad \sigma_y = \sigma_2 + 2k \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\alpha, \quad (1.168)$$

откуда

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (FA). \quad (1.169)$$

Аналогично получим, что для стороны EF имеет место условие

$$(\sigma_x + 2k)(\sigma_y + 2k) - \tau_{xy}^2 = 0. \quad (1.170)$$

Перейдем к соотношениям ассоциированного закона пластического течения. Будем иметь

$$\begin{aligned} de_1^p + de_3^p &= 0, & de_{21}^p &= 0 & (AB), \\ de_1^p + de_2^p &= 0, & de_3^p &= 0 & (FA), \\ de_2^p + de_3^p &= 0, & de_1^p &= 0 & (EF). \end{aligned} \quad (1.171)$$

Для изотропного тела аналогично (1.165) имеем

$$\begin{aligned} de_x^p &= de_1^p \cos^2 \alpha + de_2^p \sin^2 \alpha, \\ de_y^p &= de_1^p \sin^2 \alpha + de_2^p \cos^2 \alpha, \\ de_{xy}^p &= 1/2(de_1^p - de_2^p) \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Из (1.171), (1.172), (1.166) получим

$$\begin{aligned} \frac{de_x^p}{2k - \sigma_y} &= \frac{de_y^p}{2k - \sigma_x} = \frac{de_{xy}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda, \\ de_x^p + de_y^p + de_z^p &= 0 \quad (AB). \end{aligned} \quad (1.173)$$

Из (1.171), (1.172), (1.168) находим

$$\frac{de_x^p}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{de_y^p}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{de_{xy}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda, \quad de_z^p = 0 \quad (FA). \quad (1.174)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} \frac{de_x^p}{2k + \sigma_y} &= \frac{de_y^p}{2k + \sigma_x} = \frac{de_{xy}^p}{\tau_{xy}} = d\lambda, \\ de_x^p + de_y^p + de_z^p &= 0 \quad (EF). \end{aligned} \quad (1.175)$$

Окончательно при упругопластическом состоянии материала имеют место соотношения:

для стороны AB шестиугольника Треска (рис. 8) —

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + d\lambda (2k - \sigma_y), \\ de_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) + d\lambda (2k - \sigma_x), \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + d\lambda \tau_{xy}, \\ (\sigma_x - 2k)(\sigma_y - 2k) - \tau_{xy}^2 &= 0; \end{aligned} \quad (1.176)$$

для стороны FA —

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + d\lambda (\sigma_x - \sigma_y), \\ de_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) + d\lambda (\sigma_y - \sigma_x), \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + 2 d\lambda \tau_{xy}, \\ &(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2; \end{aligned} \quad (1.177)$$

для стороны EF —

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + d\lambda (2k + \sigma_y), \\ de_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) + d\lambda (2k + \sigma_x), \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + d\lambda \tau_{xy}, \\ &(\sigma_x + 2k)(\sigma_y + 2k) - \tau_{xy}^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.178)$$

2.2. Рассмотрим условие пластичности Мизеса. Кривая пластичности, являющаяся пересечением плоскости $\sigma_3 = 0$ с цилиндром Мизеса, представляет собой эллипс и дана на рис. 9. Согласно (1.128) для плоского напряженного состояния условие пластичности Мизеса имеет вид в главных напряжениях

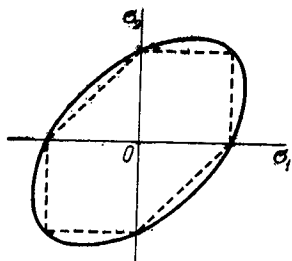


Рис. 9.

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{2} k_0^2. \quad (1.179)$$

В декартовой системе координат согласно (1.130) получим

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \frac{1}{2} k_0^2. \quad (1.180)$$

Согласно ассоциированному закону течения будем иметь

$$\begin{aligned} de_x^p &= d\lambda (2\sigma_x - \sigma_y), \\ de_y^p &= d\lambda (2\sigma_y - \sigma_x), \\ de_{xy}^p &= 3d\lambda \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1.181)$$

Окончательно запишем

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} (d\sigma_x - \mu d\sigma_y) + d\lambda (2\sigma_x - \sigma_y), \\ de_y &= \frac{1}{E} (d\sigma_y - \mu d\sigma_x) + d\lambda (2\sigma_y - \sigma_x), \\ de_{xy} &= \frac{1}{2G} d\tau_{xy} + 3 d\lambda \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (1.182)$$

В полярной системе координат r, θ для случая плоского напряженного состояния имеют место соотношения (1.153) — (1.155), соотношения связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ сохраняют свой вид с заменой индексов x, y на r, θ .

3. Осесимметричное состояние реализуется в телах вращения, когда нагрузка симметрична относительно оси вращения и изменяется лишь вдоль меридиональных сечений.

Осесимметричное состояние будем рассматривать в цилиндрической и сферической системах координат. В цилиндрической системе координат ось z направим вдоль оси вращения тела. По определению компоненты напряжений, деформаций и перемещений не зависят от угла θ и зависят лишь от r, z , причем

$$u_\theta = e_{r\theta} = e_{\theta z} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0. \quad (1.183)$$

Очевидно, что σ_θ — главное напряжение, поэтому положим $\sigma_\theta = \sigma_z$.

Согласно (1.10) уравнения равновесия для случая осесимметричной задачи будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (1.184)$$

Соотношения (1.14) примут вид

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ e_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (1.185)$$

При рассмотрении осесимметричного состояния достаточно ограничиться меридиональным сечением тела

$\theta = \text{const.}$ Обозначим через L контур в меридиональной плоскости (рис. 10). Пусть $L = L_1 + L_2$, где на L_1 определены усилия, а на L_2 — перемещения.

Тогда граничные условия (1.20), (1.21) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r \cos(nr) + \tau_{rz} \cos(nz) &= P_r, \\ \tau_{rz} \cos(nr) + \sigma_z \cos(nz) &= P_z \text{ на } L_1, \end{aligned} \quad (1.186)$$

$$u_r = u_{r0}, \quad u_z = u_{z0} \text{ на } L_2.$$

Переход в плоскости rz к полярной системе координат r, θ эквивалентен в осесимметричном случае замене цилиндрической системы координат на сферическую. Координате θ в цилиндрической системе координат соответствует координата φ в сферической.

Для осесимметричного состояния в сферической системе координат будет иметь место

$$u_\varphi = e_{r\varphi} = e_{\theta\varphi} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0. \quad (1.187)$$

Компонента σ_φ — главная; положим $\sigma_\varphi = \sigma_3$.

Согласно (1.11) уравнения равновесия для случая осесимметричной задачи будут иметь вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [2\sigma_r - (\sigma_\theta + \sigma_\varphi) + \tau_{r\theta} \text{ctg } \theta] = 0, \quad (1.188)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [3\tau_{r\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \text{ctg } \theta] = 0.$$

Соотношения (1.15) примут вид

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad e_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \text{ctg } \theta, \\ e_{r\theta} &= \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.189)$$

Перейдем к определению зависимостей между напряжениями и приращениями деформаций в упругопластической области.

3.1. Рассмотрим условие пластичности Треска. На рис. 11 показано сечение призмы Треска плоскостью $\sigma_3 = \text{const}$. Полагая, как всегда, $\sigma_1 \geq \sigma_2$, получим, что для вершин и ребер шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 11) имеют место четыре типа напряженных состояний

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 + 2k, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = \lambda_1 : \lambda_2 : (-\lambda_1 - \lambda_2) & (B), \\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = \lambda_1 : \lambda_2 : (-\lambda_1 - \lambda_2) & (E), \\ \sigma_1 = \sigma_3 + 2k, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = \lambda : 0 : \lambda & (AB), \\ \sigma_2 = \sigma_3 - 2k, \quad \sigma_3 > \sigma_1 > \sigma_2, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = 0 : (-\lambda) : \lambda & (EF), \\ \sigma_1 = \sigma_2 + 2k, \quad \sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = & \\ & = \lambda : (-\lambda) : 0 & (AF), \\ \sigma_1 = \sigma_2 + 2k, \quad \sigma_2 = \sigma_3, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = & \\ & = (\lambda_1 + \lambda_2) : (-\lambda_1) : (-\lambda_2) & (A), \\ \sigma_1 = \sigma_2 + 2k, \quad \sigma_1 = \sigma_3, & de_1^p : de_2^p : de_3^p = \lambda_1 : (-\lambda_1 - \lambda_2) : \lambda_2 & (F), \end{cases}$$

$$\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \quad (1.190)$$

Наибольший интерес для дальнейшего представляют состояния, соответствующие точкам A, F шестиугольника рис. 11. В этом случае имеет место наибольшая свобода пластического течения.

Так как

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_z)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad (1.191)$$

то точкам A, F соответствует условие пластичности

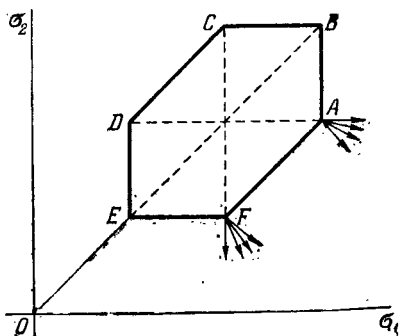


Рис. 11.

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm 2k. \quad (1.192)$$

Из условия изотропии следует

$$\frac{de_r^p - de_\theta^p}{\sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{de_{r\theta}^p}{\tau_{r\theta}} = d\lambda. \quad (1.193)$$

Имеет место также условие несжимаемости

$$de_r^p + de_\theta^p + de_z^p = 0. \quad (1.194)$$

3.2. Условие пластичности Мизеса для осесимметричного случая в цилиндрической системе координат имеет вид

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = k_0^2. \quad (1.195)$$

Соотношения ассоциированного закона течения записываются в виде

$$\begin{aligned} de_r^p &= d\lambda (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z), \\ de_\theta^p &= d\lambda (2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_z), \\ de_z^p &= d\lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta), \\ de_{rz}^p &= 3 d\lambda \tau_{rz}. \end{aligned} \quad (1.196)$$

Соотношения (1.194) — (1.196) имеют вполне аналогичный вид в сферической системе координат при соответствующей замене компонент $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}$ на $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{r\theta}$ и $e_r, e_z, e_{rz}, e_\theta$ на $e_r, e_\theta, e_{r\theta}, e_\varphi$.

§ 5. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности

Рассмотрим определение перемещений в статически определимых упругопластических задачах теории идеальной пластичности. Под статически определимыми понимаются задачи, когда краевые условия в напряжениях позволяют полностью определить напряженное состояние в пластической области.

1. Выпишем соотношения связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ для случая плоской задачи

$$de_x = de_x^e + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \quad de_y = de_y^e + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \quad (1.197)$$

$$de_{xy} = de_{xy}^e + \frac{d\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}},$$

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0.$$

Пусть в некоторый момент нагружения упругопластическая граница, распространяющаяся от контура тела L , занимает положение L_{s1} , а в последующий момент нагружения — положение L_{s2} (рис. 12). Будем предполагать, что задача является статически определимой в любой момент нагружения и напряженное состояние в пластической области полностью определяется усилиями на контуре L . Предположим, что усилия на контуре тела L фиксированы (например, контур L свободен от внешних усилий), а нагружение осуществляется на некотором контуре, прилегающем к упругой зоне. Тогда в любой точке A при достижении в ней пластического состояния все компоненты напряжения являются фиксированными и не зависят от изменения граничных условий вне контура L .

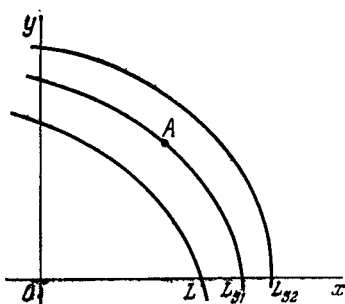


Рис. 12.

В рассматриваемом случае приращения напряжений в пластической области равны нулю

$$d\sigma_x = d\sigma_y = d\tau_{xy} = 0.$$

Тогда согласно закону Гука имеем

$$de_x^e = de_y^e = de_{xy}^e = 0.$$

Следовательно, для любого элемента, находящегося в пластическом состоянии, упругие деформации фиксированы.

В пластической зоне имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} de_x &= de_x^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \\ de_y &= de_y^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \\ de_{xy} &= de_{xy}^p = \frac{d\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \\ f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.198)$$

Из (1.198) следует

$$\frac{de_x}{\partial f/\partial \sigma_x} = \frac{de_y}{\partial f/\partial \sigma_y} = \frac{2de_{xy}}{\partial f/\partial \tau_{xy}} = d\lambda. \quad (1.199)$$

Величины $\partial f/\partial \sigma_x$, $\partial f/\partial \sigma_y$, $\partial f/\partial \tau_{xy}$ зависят от компонент напряжений и являются фиксированными в каждой точке пластической области. Так как в случае малых деформаций

$$de_{ij} \approx \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} dt,$$

то соотношения (1.199) могут быть проинтегрированы во времени, после чего будем иметь

$$\frac{e_x^p}{\partial f/\partial \sigma_x} = \frac{e_y^p}{\partial f/\partial \sigma_y} = \frac{2e_{xy}^p}{\partial f/\partial \tau_{xy}}. \quad (1.200)$$

В соотношениях (1.200) присутствуют компоненты пластической деформации, так как только они испытывают приращения в пластической зоне, причем при $t = 0$ имеют место равенства $e_x^p = e_y^p = e_{xy}^p = 0$. Момент времени $t = 0$ для каждой точки A отсчитывается от момента прохождения через нее упругопластической границы.

Полные деформации при $t = 0$, т. е. в момент возникновения пластических деформаций, отличны от нуля и совпадают с упругими деформациями, накопленными элементом тела к моменту достижения им предела текучести. Перепишем соотношения (1.200) в виде

$$\frac{e_x - e_x^e}{\partial f/\partial \sigma_x} = \frac{e_y - e_y^e}{\partial f/\partial \sigma_y} = \frac{2(e_{xy} - e_{xy}^e)}{\partial f/\partial \tau_{xy}}. \quad (1.201)$$

Переходя к компонентам перемещений, согласно (1.201) получим

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} - e_x^e}{\partial f/\partial \sigma_x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} - e_y^e}{\partial f/\partial \sigma_y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2e_{xy}^e}{\partial f/\partial \tau_{xy}}. \quad (1.202)$$

Два уравнения (1.202) образуют замкнутую систему относительно двух компонент перемещений u и v .

Определим тип уравнений (1.202). Характеристический определитель системы будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} (dy)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \right)^2 (dx)^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} dx dy, \quad (1.203)$$

откуда найдем уравнения характеристик

$$y_{1,2} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \pm \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 - 4 \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \right]^{1/2}}{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}}. \quad (1.204)$$

Для несжимаемого пластического материала при плоской деформации

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = 0; \quad (1.205)$$

в этом случае согласно (1.204) система (1.202) принадлежит к гиперболическому типу и имеет два действительных семейства характеристик:

$$y_{1,2} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \pm \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} \right)^2 \right]^{1/2}}{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}}. \quad (1.206)$$

Для плоского напряженного состояния при условиях пластичности (1.167) или (1.170) подкоренное выражение (1.204) равно нулю и система (1.202) принадлежит к параболическому типу.

Итак, характер изменения деформированного состояния в некоторой точке A в процессе нагружения в рассматриваемом случае представляется следующим образом: сначала возрастают упругие деформации; затем, когда граница упругопластического состояния материала достигает точки A , процесс изменения упругих деформаций прекращается. При дальнейшем возрастании нагрузок, несмотря на то, что напряженное состояние фиксировано, начинают возникать пластические деформации.

2. В случае плоской деформации условие пластичности имеет вид (1.150) и уравнения (1.202) в полярной

системе координат принимают вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = e_r^e + e_\theta^e, \quad (1.207)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1.208)$$

Если в пластической зоне напряженное состояние является осесимметричным, то $\tau_{r\theta} = 0$ и уравнение (1.208) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad (1.209)$$

В случае плоского напряженного состояния при условии пластичности Треска для стороны FA (см. рис. 8) согласно (1.174) исходные соотношения совпадают с соотношениями теории плоской деформации. Для сторон AB , EF условие пластичности согласно (1.167), (1.170) имеет вид

$$(\sigma_r \mp 2k)(\sigma_\theta \mp 2k) - \tau_{r\theta}^2 = 0 \quad (1.210)$$

и уравнение (1.202) в полярной системе координат записывается следующим образом:

$$\frac{\frac{\partial u_r}{\partial r}}{\sigma_\theta \mp 2k} - \frac{\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}}{\sigma_r \mp 2k} = \frac{e_r^e}{\sigma_\theta \mp 2k} - \frac{e_\theta^e}{\sigma_r \mp 2k}, \quad (1.211)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1.212)$$

Предположим, что $\sigma_\theta = \pm 2k$, $\tau_{r\theta} = 0$, тогда из (1.211) и (1.212) получим

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta), \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad (1.213)$$

Рассмотрим случай, когда напряженное состояние в пластической области не является фиксированным: на-

грузки на контуре L , охватываемом пластической зоной, изменяются в процессе нагружения.

Соотношение для определения перемещений

$$de_{r\theta}^p = \frac{d\lambda}{2} \frac{\partial f}{\partial \tau_{r\theta}} \quad (1.214)$$

в этом случае вообще не интегрируется. Исключение составляет случай осесимметричного состояния в пластической области. В этом случае (1.214) принимает вид

$$\text{откуда} \quad \tau_{r\theta} = \frac{\partial f}{\partial \tau_{r\theta}} = 0, \quad de_{r\theta}^p = 0, \quad (1.215)$$

$$2e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad (1.216)$$

3. В случае осевой симметрии рассмотрим условие полной пластичности. Соотношения ассоциированного закона пластического течения в цилиндрической системе координат имеют в этом случае вид (1.193), (1.194).

Если в пластической зоне компоненты σ_r , σ_z , τ_{rz} определены и фиксированы, то вполне аналогично (1.213) из (1.193), (1.194) будем иметь

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = e_r^e + e_\theta^e + e_z^e, \quad (1.217)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \tau_{rz} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) (\sigma_r - \sigma_z) = 0. \quad (1.218)$$

В случае, когда $\tau_{rz} = 0$, уравнение, аналогичное (1.214), принимает вид

$$e_{rz} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0. \quad (1.219)$$

Уравнения (1.217), (1.219) справедливы и в случае изменяющихся напряжений в пластической зоне при $\tau_{rz} = 0$.

В сферической системе координат уравнения, аналогичные (1.217), (1.218), будут иметь вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{2u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = e_r^e + e_\theta^e + e_\phi^e, \quad (1.220)$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) \tau_{r\theta} - \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (1.221)$$

Для случая изменяющихся напряжений в пластической зоне при $\tau_{r\theta} = 0$ наряду с уравнением (1.220) будет иметь место уравнение

$$e_{r\theta} = 0 \quad \text{или} \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad (1.222)$$

Отметим, что для материала, несжимаемого как по пластическим, так и по упругим деформациям, правые части уравнений (1.207), (1.217), (1.220) равны нулю.

§ 6. Линеаризация. Общие соотношения, граничные условия, условия сопряжения

1. Предположим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ . Будем искать решение в виде рядов по степеням этого параметра

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n u_i^{(n)}, \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}. \quad (1.223)$$

Линеаризация по параметру δ заключается в разложении всех исходных соотношений: уравнений равновесия, граничных условий, соотношений связи $e_{ij} - \sigma_{ij}$ и т. п. в ряды по этому параметру. Далее выделяются члены разложения при одинаковых степенях этого параметра, которые определяют систему уравнений, позволяющую развить метод последовательных приближений, если решение при $\delta = 0$ (компоненты нулевого приближения $\sigma_{ij}^{(0)}$, $e_{ij}^{(0)}$) являются известными.

Уравнения равновесия (1.9)—(1.11) линейны относительно компонент напряжений, поэтому они имеют место для любого приближения

$$\frac{\partial \sigma_x^{(n)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(n)}}{\partial z} = 0 \quad (x y z). \quad (1.224)$$

Соотношения связи между компонентами перемещений и деформаций (1.13)—(1.15) также линейны относительно компонент деформаций и перемещений, поэтому они сохраняют свой вид для любого приближения

$$e_x^{(n)} = \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x}, \quad e_{xy}^{(n)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(n)}}{\partial x} \right), \dots \quad (1.225)$$

Рассмотрим граничные условия в напряжениях (1.20). Ограничимся случаем, когда граничные условия заданы на контуре L_1 в плоскости двух переменных α, β . Пусть на границе заданы нормальные и касательные усилия

$$\sigma_\nu = P_\nu, \quad \tau_\nu = P_\tau \quad \text{на } L_1. \quad (1.226)$$

Для определенности рассмотрим полярные координаты r, θ . Уравнение границы L_1 представим в виде

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r_n(\theta) = r_0 + \delta \bar{r}, \quad \bar{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r_{n+1}(\theta). \quad (1.227)$$

Подставляя в (1.226) разложение (1.227) и учитывая, что для компонент σ_ν, τ_ν справедливы разложения, аналогичные (1.223), получим при $r = r_0$ разложения

$$\sum_{m,n=0} \delta^{m+n} \frac{d^m \sigma_\nu^{(n)}}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!} = \sum_{m=0} \delta^m \frac{d^m P_\nu}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!}, \quad (1.228)$$

$$\sum_{m,n=0} \delta^{m+n} \frac{d^m \tau_\nu^{(n)}}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!} = \sum_{m=0} \delta^m \frac{d^m P_\tau}{dr^m} \frac{\bar{r}^m}{m!}.$$

Ограничиваясь четвертым приближением, из (1.228) получим, что при $r = r_0$ имеет место

$$\sigma_\nu^{(I)} + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{dP_\nu}{dr} r_1, \quad (1.229_1)$$

$$\sigma_\nu^{(II)} + \frac{d\sigma_\nu^{(I)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(0)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr} r_2 = \frac{d^2P_\nu}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_\nu}{dr} r_2, \quad (1.229_2)$$

$$\sigma_\nu^{(III)} + \frac{d\sigma_\nu^{(II)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(I)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{d^3\sigma_\nu^{(0)}}{dr^3} + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr} r_3 + \frac{d\sigma_\nu^{(I)}}{dr} r_2 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(0)}}{dr^2} r_1 r_2 = \frac{d^3P_\nu}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2P_\nu}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dP_\nu}{dr} r_3, \quad (1.229_3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\nu^{(IV)} + \frac{d\sigma_\nu^{(III)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(II)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{d^3\sigma_\nu^{(I)}}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^4\sigma_\nu^{(0)}}{dr^4} \frac{r_1^4}{4!} + \\ + \frac{d\sigma_\nu^{(I)}}{dr} r_3 + \frac{d\sigma_\nu^{(0)}}{dr} r_4 + \frac{d\sigma_\nu^{(II)}}{dr} r_2 + \frac{d^2\sigma_\nu^{(0)}}{dr^2} \left(r_1 r_3 + \frac{r_2^2}{2} \right) + \\ + \frac{d^2\sigma_\nu^{(I)}}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{d^3\sigma_\nu^{(0)}}{dr^3} \frac{r_1^2 r_2}{2} = \frac{d^4P_\nu}{dr^4} \frac{r_1^4}{4!} + \frac{d^3P_\nu}{dr^3} \frac{r_1^2 r_2}{2!} + \\ + \frac{d^2P_\nu}{dr^2} \left(r_1 r_3 + \frac{r_2^2}{2} \right) + \frac{dP_\nu}{dr} r_4. \quad (1.229_4) \end{aligned}$$

Совершенно аналогично записываются выражения линейризованных граничных условий для τ_v : чтобы получить линейризованные граничные условия для τ_v ,

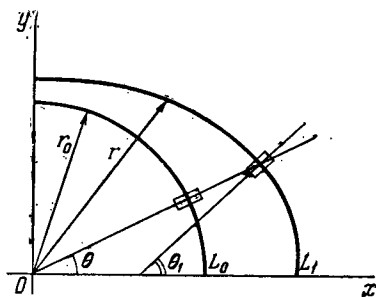


Рис. 13.

надо в (1.229) заменить σ_v на τ_v и P_v на P_τ . В линейризованных задачах теории пластичности необходимо уметь записывать граничные условия (1.226) через компоненты основной системы координат. Для этого следует учесть угол поворота напряжений при переносе их на исходную окружность ($r = r_0$). Рассмотрим рис. 13. Угол θ_1 образован нормалью к контуру L_1 ; $\theta^* = \theta_1 - \theta$ — угол поворота напряжений при переносе их на исходный контур. Из известных формул теории упругости будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_r \cos^2 \theta^* + \sigma_\theta \sin^2 \theta^* + 2\tau_{r\theta} \sin \theta^* \cos \theta^*, \\ \tau_v &= (\sigma_\theta - \sigma_r) \sin \theta^* \cos \theta^* + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*). \end{aligned} \quad (1.230)$$

Если уравнение границы тела L_1 записать в виде $x = x(\theta)$, $y = y(\theta)$, то

$$\cos \theta_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad \sin \theta_1 = -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \quad (1.231)$$

где точка наверху означает дифференцирование по θ . Согласно (1.227) можно записать

$$\begin{aligned} x &= (r_0 + \delta\bar{r}) \cos \theta, & y &= (r_0 + \delta\bar{r}) \sin \theta, \\ \dot{x} &= -(r_0 + \delta\bar{r}) \sin \theta + \delta\dot{\bar{r}} \cos \theta, \\ \dot{y} &= (r_0 + \delta\bar{r}) \cos \theta + \delta\dot{\bar{r}} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos \theta^* &= \cos \theta_1 \cos \theta + \sin \theta_1 \sin \theta, \\ \sin \theta^* &= \sin \theta_1 \cos \theta - \cos \theta_1 \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.233)$$

из (1.233), (1.231), (1.232) получим

$$\cos \theta^* = \frac{r_0 + \delta \bar{r}}{\sqrt{(r_0 + \delta \bar{r})^2 + (\delta \bar{r})^2}}, \quad \sin \theta^* = \frac{\bar{r}}{\sqrt{(r_0 + \delta \bar{r})^2 + (\delta \bar{r})^2}}. \quad (1.234)$$

Обозначая $R_i = r_i/r_0$, найдем

$$\begin{aligned} \cos \theta^* &= 1 + \delta C_1 + \delta^2 C_2 + \delta^3 C_3 + \delta^4 C_4 + \dots, \\ \sin \theta^* &= \delta S_1 + \delta^2 S_2 + \delta^3 S_3 + \delta^4 S_4 + \dots, \end{aligned} \quad (1.235)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= 0, \quad C_2 = -\frac{1}{2} \dot{R}_1^2, \quad C_3 = R_1 \dot{R}_1^2 - \dot{R}_1 \dot{R}_2, \\ C_4 &= \frac{7}{4} R_1^2 R_2 - \frac{1}{4} R_1^2 \dot{R}_1^2 - \frac{5}{4} R_1^4 - R_1^2 \dot{R}_2 - \dot{R}_1 \dot{R}_3 - \\ &\quad - \dot{R}_2^2 + 3R_1 \dot{R}_1 R_2, \\ S_1 &= -\dot{R}_1, \quad S_2 = -\dot{R}_2 + R_1 \dot{R}_1, \\ S_3 &= -\dot{R}_3 + R_1 \dot{R}_2 - R_1^2 \dot{R}_1 + \dot{R}_1 R_2 + \frac{1}{2} \dot{R}_1^3, \\ S_4 &= -\dot{R}_4 + R_1 \dot{R}_2 + \dot{R}_1 R_3 - R_1^2 \dot{R}_2 + R_2 \dot{R}_2 + \frac{1}{2} \dot{R}_1^2 \dot{R}_2 - \\ &\quad - 2R_1 R_2 \dot{R}_1 + R_1 \dot{R}_1 \dot{R}_2 - \frac{3}{2} R_1 \dot{R}_1^3 + R_1^3 \dot{R}_1. \end{aligned} \quad (1.236)$$

Используя (1.223), (1.229), (1.230), (1.235), (1.236), получим искомые линеаризированные граничные условия: при $r = r_0$ должно иметь место

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(I)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_1 &= \frac{dP_v}{dr} r_1, \quad \tau_{r\theta}^{(I)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{R}_1 = \frac{dP_v}{dr} r_1; \\ \sigma_r^{(II)} + \frac{d\sigma_r^{(I)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_r^{(0)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} - \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_2 + \\ &\quad + (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{R}_1^2 - 2\tau_{r\theta}^{(I)} \dot{R}_1 = \frac{d^2P_v}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_v}{dr} r_2, \\ \tau_{r\theta}^{(II)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) (\dot{R}_2 - R_1 \dot{R}_1) - (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_r^{(I)}) \dot{R}_1 + \\ &\quad + \frac{d}{dr} [\tau_{r\theta}^{(I)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{R}_1] r_1 = \frac{d^2P_v}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{dP_v}{dr} r_2; \end{aligned} \quad (1.237)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(III)} + \frac{d\sigma_r^{(II)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_r^{(I)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{d^3\sigma_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \\
+ 2(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})(\dot{R}_1\dot{R}_2 - R_1\dot{R}_1^2) + \frac{d(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})}{dr} \dot{R}_1^2 r_1 + \\
+ (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_r^{(I)}) \dot{R}_1^2 - 2\tau_{r\theta}^{(I)}(\dot{R}_2 - R_1\dot{R}_1) - 2\frac{d\tau_{r\theta}^{(I)}}{dr} \dot{R}r_1 - \\
- 2\tau_{r\theta}^{(II)}\dot{R}_1 + \frac{d\sigma_r^{(I)}}{dr} r_2 + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_1 r_2 + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_3 = \\
= \frac{d^3P_v}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2P_v}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dP_v}{dr} r_3, \\
\tau_{r\theta}^{(III)} - 2\tau_{r\theta}^{(I)}\dot{R}_2 - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})(\dot{R}_3 - R_1\dot{R}_2 + R_1^2\dot{R}_1 - \dot{R}_1R_2 - R_1^3) - \\
- (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_r^{(I)})(\dot{R}_2 - R_1\dot{R}_1) - (\sigma_\theta^{(II)} - \sigma_r^{(II)})\dot{R}_1 + \\
+ \frac{d}{dr}[\tau_{r\theta}^{(II)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})(\dot{R}_2 - R_1\dot{R}_1) - (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_r^{(I)})\dot{R}_1] r_1 + \\
+ \frac{d^2}{dr^2}[\tau_{r\theta}^{(I)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})\dot{R}_1] \frac{r_1^2}{2} + \\
+ \frac{d}{dr}[\tau_{r\theta}^{(I)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})\dot{R}_1] r_2 = \frac{d^3P_\tau}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \\
+ \frac{d^2P_\tau}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dP_\tau}{dr} r_3.
\end{aligned}$$

Четвертое и последующие приближения получаются аналогично; из-за громоздкости выражения их опустим.

Перейдем к условиям сопряжения решений. На L_s — границе упругой и пластической областей, должно иметь место

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = [u_r] = [u_\theta] = [e_r] = [e_\theta] = [e_{r\theta}] = 0. \quad (1.238)$$

Уравнение контура L_s запишем в виде

$$r_s = \sum_{n=0} \delta^n r_{n,s}(\theta) = r_{0,s} + \delta \bar{r}_s, \quad \bar{r}_s = \sum_{n=0} \delta^n r_{n+1,s}(\theta). \quad (1.239)$$

Учитывая разложения (1.223), подставляя в (1.238) выражения (1.239), получим исходное линейризованное условие сопряжения. Очевидно, что условия сопряжения могут быть получены из (1.229), если заключить левые части в квадратные скобки, поменять в них $\sigma_v^{(n)}$ на $\sigma_r^{(n)}$, . . . , а r_n на $r_{n,s}$.

Выпишем условия сопряжения для компоненты $\sigma_r^{(n)}$:

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_r^{(I)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_{1s} \right] = 0, \\ & \left[\sigma_r^{(II)} + \frac{d\sigma_r^{(I)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2\sigma_r^{(0)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_{2s} \right] = 0, \\ & \left[\sigma_r^{(III)} + \frac{d\sigma_r^{(II)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2\sigma_r^{(I)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{d^3\sigma_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^3}{3!} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_{3s} + \frac{d\sigma_r^{(I)}}{dr} r_{2s} + \frac{d^2\sigma_r^{(II)}}{dr^2} r_{1s} r_{2s} \right] = 0, \quad (1.240) \\ & \left[\sigma_r^{(IV)} + \frac{d\sigma_r^{(III)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2\sigma_r^{(II)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{d^3\sigma_r^{(I)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^3}{3!} + \frac{d^4\sigma_r^{(0)}}{dr^4} \frac{r_{1s}^4}{4!} + \right. \\ & \quad + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_{4s} + \frac{d\sigma_r^{(II)}}{dr} r_{2s} + \frac{d\sigma_r^{(I)}}{dr} r_{3s} + \frac{d^2\sigma_r^{(0)}}{dr^2} \left(r_{1s} r_{3s} + \frac{r_{2s}^2}{2} \right) + \\ & \quad \left. + \frac{d^2\sigma_r^{(I)}}{dr^2} r_{1s} r_{2s} + \frac{d^3\sigma_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^2 r_{2s}}{2!} \right] = 0 \quad \text{при } r = r_{0s}. \end{aligned}$$

Условия сопряжения для компонент σ_θ , $\tau_{r\theta}$, u_r , u_θ , e_r , e_θ , $e_{r\theta}$ имеют вид, вполне аналогичный (1.240).

Приведем условия сопряжения для компоненты u_r :

$$\begin{aligned} & \left[u_r^{(I)} + \frac{du_r^{(0)}}{dr} r_{1s} \right] = 0, \\ & \left[u_r^{(II)} + \frac{du_r^{(I)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2u_r^{(0)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{du_r^{(0)}}{dr} r_{2s} \right] = 0, \\ & \left[u_r^{(III)} + \frac{du_r^{(II)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2u_r^{(I)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{d^3u_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^3}{3!} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{du_r^{(0)}}{dr} r_{3s} + \frac{du_r^{(I)}}{dr} r_{2s} + \frac{d^2u_r^{(II)}}{dr^2} r_{1s} r_{2s} \right] = 0, \quad (1.241) \\ & \left[u_r^{(IV)} + \frac{du_r^{(III)}}{dr} r_{1s} + \frac{d^2u_r^{(II)}}{dr^2} \frac{r_{1s}^2}{2} + \frac{d^3u_r^{(I)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^3}{3!} + \frac{d^4u_r^{(0)}}{dr^4} \frac{r_{1s}^4}{4!} + \right. \\ & \quad + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_{4s} + \frac{du_r^{(I)}}{dr} r_{3s} + \frac{du_r^{(II)}}{dr} r_{2s} + \frac{d^2u_r^{(0)}}{dr^2} \left(r_{1s} r_{3s} + \frac{r_{2s}^2}{2!} \right) + \\ & \quad \left. + \frac{d^2u_r^{(I)}}{dr^2} r_{1s} r_{2s} + \frac{d^3u_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_{1s}^2 r_{2s}}{2!} \right] = 0 \quad \text{при } r = r_{0s}. \end{aligned}$$

Рассмотрим граничные условия в перемещениях (1.21):

$$u_\alpha = u_{\alpha 0}, \quad u_\beta = u_{\beta 0} \quad \text{на } L_2. \quad (1.242)$$

Уравнение границы L_2 представим в виде (1.227). Подставляя в (1.241) разложение (1.227) и учитывая, что для компонент u_α , u_β справедливы разложения, аналогичные (1.227), получим при $r = r_0$ разложения, вполне аналогичные (1.228), (1.229).

Отметим, что граничные условия, условия сопряжения в случае плоской и осесимметричной задач в декартовых, цилиндрических и сферических координатах совпадают с вышеприведенными с точностью до обозначений.

§ 7. Линеаризация и интегрирование соотношений теории идеальной пластичности

Ниже рассмотрены некоторые случаи интегрирования линеаризованных соотношений теории идеальной пластичности.

1. Плоское деформированное состояние.

1.1. Рассмотрим условие пластичности

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (k = \text{const}). \quad (1.243)$$

Подставляя в (1.243) разложения (1.223), приравнивая члены при одинаковых степенях δ , получим

$$(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})^2 + 4\tau_{xy}^{(0)2} = 4k^2,$$

$$\sum_{m=0}^n [(\sigma_x^{(m)} - \sigma_y^{(m)})(\sigma_x^{(n-m)} - \sigma_y^{(n-m)}) + 4\tau_{xy}^{(m)}\tau_{xy}^{(n-m)}] = 0 \quad (n \geq 1). \quad (1.244)$$

В дальнейшем, если не оговорено особо, будем полагать $\tau_{xy}^{(0)} = 0$; тогда

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)} &= 2\eta k, \quad \eta = \text{sign}(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}), \\ \sigma_x^{(I)} - \sigma_y^{(I)} &= 0, \\ (\sigma_x^{(II)} - \sigma_y^{(II)})\eta k + 2\tau_{xy}^{(I)2} &= 0, \\ (\sigma_x^{(III)} - \sigma_y^{(III)})\eta k + 4\tau_{xy}^{(II)}\tau_{xy}^{(I)} &= 0, \\ (\sigma_x^{(IV)} - \sigma_y^{(IV)})\eta k + \frac{1}{4}(\sigma_x^{(II)} - \sigma_y^{(II)})^2 + 2\tau_{xy}^{(I)}\tau_{xy}^{(III)} + \\ &+ \tau_{xy}^{(II)2} = 0 \dots \end{aligned} \quad (1.245)$$

Уравнениям равновесия (1.140) удовлетворим, полагая

$$\sigma_x^{(n)} = \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(n)} = \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}^{(n)} = -\frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial x \partial y}. \quad (1.246)$$

Из (1.245) и (1.246) получим

$$\frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial y^2} = \eta F^{(n-1)}(x, y), \quad (1.247)$$

где $F^{(n-1)}(x, y)$ — функция, зависящая от компонент не выше $(n-1)$ -го приближения.

Решение уравнения (1.247) представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (1.247), имеет вид

$$\frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U^{(n)}}{\partial y^2} = 0, \quad (1.248)$$

и не зависит от порядка приближения. Последнее обстоятельство имеет место во всех случаях, рассмотренных ниже. Поэтому в дальнейшем для краткости будем ограничиваться определением решения однородного уравнения (1.248) и аналогичных ему для первого приближения.

Полагая в (1.248) $n = 1$, запишем решение уравнения (1.248) в виде

$$U^{(1)}(x, y) = U_1^{(1)}(x - y) + U_2^{(1)}(x + y). \quad (1.249)$$

Из (1.249) и (1.246) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_y^{(1)} = f_1(x - y) + f_2(x + y), \\ \tau_{xy}^{(1)} &= f_1(x - y) - f_2(x + y). \end{aligned} \quad (1.250)$$

Уравнения, определяющие перемещения в пластической области (1.201) для материала, несжимаемого и по упругим составляющим деформаций, для условия пластичности (1.243) при $\tau_{xy}^{(0)} = 0$ после линеаризации примут вид

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} = 2 \frac{e_x^{(0)} - e_y^{(0)}}{\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}} \tau_{xy}^{(1)}, \quad (1.251)$$

$$\frac{\partial u^{(II)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(II)}}{\partial y} = 0, \quad (1.251)$$

$$\frac{\partial u^{(II)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(II)}}{\partial x} = 2 \frac{(e_x^{(0)} - e_y^{(0)}) \tau_{xy}^{(II)} + (e_x^{(I)} - e_y^{(I)}) \tau_{xy}^{(I)}}{\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}}.$$

Рассмотрим первое приближение. Первому уравнению (1.251) удовлетворим, полагая

$$u^{(I)} = -\frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial y}, \quad v^{(I)} = \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial x}. \quad (1.252)$$

Из (1.252) и второго уравнения (1.251) получим

$$\frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial y^2} = 0, \quad (1.253)$$

откуда

$$\psi^{(I)} = \psi_1^{(I)}(x - y) + \psi_2^{(I)}(x + y). \quad (1.254)$$

Из (1.254) и (1.252) можно определить выражения перемещений, а далее — деформаций

$$\begin{aligned} u^{(I)} &= \varphi_1^{(I)}(x - y) + \varphi_2^{(I)}(x + y), \\ v^{(I)} &= \varphi_1^{(I)}(x - y) - \varphi_2^{(I)}(x + y), \\ e_x^{(I)} &= \frac{\partial \varphi_1^{(I)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2^{(I)}}{\partial \eta}, \quad e_y^{(I)} = -\frac{\partial \varphi_1^{(I)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_2^{(I)}}{\partial \eta}, \quad e_{xy}^{(I)} = 0, \\ \xi &= x - y, \quad \eta = x + y. \end{aligned} \quad (1.255)$$

Отметим также, что решение волновых уравнений (1.248), (1.253) может быть найдено методом разделения переменных в виде тригонометрических рядов.

Определение последующих приближений сводится к решению неоднородного уравнения (1.253) с известной правой частью.

1.2. Рассмотрим условие пластичности

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2 \quad (k = \text{const}). \quad (1.256)$$

Подставляя в (1.256) разложения (1.223), приравнивая нулю члены при одинаковых степенях δ , вполне

аналогично (1.244) получим

$$\begin{aligned}
 & (\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})^2 + 4\tau_{r\theta}^{(0)2} = 4k^2, \\
 & \sum_{m=0}^n [(\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)})(\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_\theta^{(n-m)}) + 4\tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)}] = 0 \\
 & (n \geq 1).
 \end{aligned} \tag{1.257}$$

Положим $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$; тогда

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} &= 2\eta k, \quad \eta = \text{sign}(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}), \\
 \sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} &= 0, \\
 (\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)})\eta k + \tau_{r\theta}^{(I)2} &= 0, \\
 (\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)})\eta k + 2\tau_{r\theta}^{(I)}\tau_{r\theta}^{(II)} &= 0, \\
 (\sigma_r^{(IV)} - \sigma_\theta^{(IV)})\eta k + \frac{1}{4}(\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)})^2 + 2\tau_{r\theta}^{(I)}\tau_{r\theta}^{(III)} + \\
 &+ \tau_{r\theta}^{(II)2} = 0, \dots
 \end{aligned} \tag{1.258}$$

Уравнениям равновесия (1.153) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(I)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2}, \\
 \sigma_\theta^{(I)} &= \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial r^2}, \\
 \tau_{r\theta}^{(I)} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \right).
 \end{aligned} \tag{1.259}$$

Из (1.258) и (1.259) получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial r^2} - r \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2} = 0. \tag{1.260}$$

Будем искать решение в виде

$$\Phi^{(I)} = R(r) \cos(n\theta + \theta_0).$$

Тогда из (1.260) следует, что $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} - r \frac{dR}{dr} + n^2 R = 0, \tag{1.261}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 R &= C_{00} + C_{01}r^2 && \text{при } n = 0, \\
 R &= r(C_{11} + C_{12} \ln r) && \text{при } n = 1,
 \end{aligned}$$

$$R = r [C_{n1} \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln r) + C_{n2} \sin(\sqrt{n^2 - 1} \ln r)]$$

при $n \geq 2$, (1.262)

$$(C_{00}, C_{01}, C_{11}, C_{12}, C_{n1}, C_{n2} = \text{const}).$$

Окончательно получим

$$\sigma_r^{(I)} = C_{00} + \frac{C_{11}}{r} \cos(\theta + \theta_0) + \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \{ [C_{n1}(1 - n^2) +$$

$$+ \sqrt{n^2 - 1} C_{n2}] \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln r) + [-\sqrt{n^2 - 1} C_{n1} +$$

$$+ C_{n2}(1 - n^2)] \sin(\sqrt{n^2 - 1} \ln r) \} \cos(n\theta + \theta_0),$$

$$\sigma_{\theta}^{(I)} = \sigma_r^{(I)}, \quad (1.263)$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = \frac{C_{11}}{r} \sin(\theta + \theta_0) + \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} n \sqrt{n^2 - 1} \times$$

$$\times [C_{n2} \cos(\sqrt{n^2 - 1} \ln r) - C_{n1} \sin(\sqrt{n^2 - 1} \ln r)] \times$$

$$\times \sin(n\theta + \theta_0).$$

Уравнения, определяющие перемещения в пластической области (1.207), (1.208) для материала, несжимаемого и по упругим деформациям, после линеаризации будут иметь вид

$$\frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(I)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial u_{\theta}^{(I)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(I)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial \theta} = 2 \frac{e_r^{(0)} - e_{\theta}^{(0)}}{\sigma_r^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)}} \tau_{r\theta}^{(I)},$$

$$\frac{\partial u_r^{(II)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(II)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(II)}}{\partial \theta} = 0, \quad (1.264)$$

$$\frac{\partial u_{\theta}^{(II)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(II)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(II)}}{\partial \theta} =$$

$$= 2 \frac{(e_r^{(0)} - e_{\theta}^{(0)}) \tau_{r\theta}^{(II)} + (e_r^{(I)} - e_{\theta}^{(I)}) \tau_{r\theta}^{(I)}}{\sigma_r^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)}}.$$

Рассмотрим первое приближение. Полагая

$$u_r^{(I)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \theta}, \quad u_{\theta}^{(I)} = \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r},$$

удовлетворим тем самым первому из уравнений (1.264), из второго получим

$$\frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \theta^2} = 0. \quad (1.265)$$

Полагая

$$\psi^{(I)} = R^* (r) \sin (n\theta + \theta_0),$$

из (1.265) будем иметь

$$\frac{d^2 R^*}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR^*}{dr} + \frac{n^2}{r^2} R^* = 0. \quad (1.266)$$

Уравнение (1.266) совпадает с (1.261), его решение известно (1.262). Компоненты перемещения и деформации в пластической области определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_r^{(I)} &= \frac{C_{00}^*}{r} - (C_{11}^* + C_{12}^* \ln r) \cos (\theta + \theta_0) - \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} n [C_{n1}^* \cos (\sqrt{n^2 - 1} \ln r) + \\ &\quad \quad + C_{n2}^* \sin (\sqrt{n^2 - 1} \ln r)] \cos (n\theta + \theta_0), \\ u_{\theta}^{(I)} &= [C_{11}^* + C_{12}^* (1 + \ln r)] \sin (n\theta + \theta_0) + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} [(C_{n1}^* + \sqrt{n^2 - 1} C_{n2}^*) \cos (\sqrt{n^2 - 1} \ln r) + \\ &\quad + (-\sqrt{n^2 - 1} C_{n1}^* + C_{n2}^*) \sin (\sqrt{n^2 - 1} \ln r)] \sin (n\theta + \theta_0), \end{aligned} \quad (1.267)$$

$$\begin{aligned} e_r^{(I)} &= -e_{\theta}^{(I)} = -\frac{C_{00}^*}{r^2} - \frac{C_{12}^*}{r} \cos (\theta + \theta_0) + \\ &\quad + \frac{1}{r} \sum_{n=2}^{\infty} n \sqrt{n^2 - 1} [C_{n1}^* \sin (\sqrt{n^2 - 1} \ln r) - \\ &\quad \quad - C_{n2}^* \cos (\sqrt{n^2 - 1} \ln r)] \cos (n\theta + \theta_0), \\ e_{r\theta}^{(I)} &= 0. \end{aligned}$$

Определение последующих приближений сводится к решению неоднородного уравнения (1.265) с известной правой частью.

2. Плоское напряженное состояние. Рассмотрим условие пластичности Треска в полярных координатах

$$(\sigma_r - 2k)(\sigma_\theta - 2k) + \tau_{r\theta}^2 = 0 \quad (k = \text{const}). \quad (1.268)$$

Подставляя в (1.268) разложения (1.223), приравнявая члены при одинаковых степенях δ , получим

$$(\sigma_r^{(0)} - 2k)(\sigma_\theta^{(0)} - 2k) - \tau_{r\theta}^{(0)2} = 0,$$

$$\sum_{m=0}^n (\sigma_r^{(m)} - \mu^{(m)}2k)(\sigma_\theta^{(n-m)} - \mu^{(n-m)}2k) - \tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)} = 0 \quad (n \geq 1), \quad (1.269)$$

$$\mu^{(0)} = 1, \quad \mu^{(m)} = 0 \quad \text{при } m \geq 1.$$

При $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$ будем иметь

$$(\sigma_r^{(0)} - 2k)(\sigma_\theta^{(0)} - 2k) = 0. \quad (1.270)$$

Отметим, что в общем случае $\sigma_r^{(0)} \neq 2k$; в самом деле, если положить $\sigma_r^{(0)} = 2k$, то из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

сразу следует, что $\sigma_\theta^{(0)} = 2k$ и, следовательно, имеет место однородное напряженное состояние на пределе текучести. В дальнейшем положим

$$\sigma_\theta^{(0)} = 2k, \quad |\sigma_r^{(0)}| \leq 2k.$$

Остальные приближения примут вид

$$\sigma_\theta^{(I)} = 0,$$

$$\sigma_\theta^{(II)}(\sigma_r^{(0)} - 2k) + \tau_{r\theta}^{(I)2} = 0,$$

$$\sigma_\theta^{(III)}(\sigma_r^{(0)} - 2k) + \sigma_\theta^{(II)}\sigma_r^{(I)} + 2\tau_{r\theta}^{(I)}\tau_{r\theta}^{(II)} = 0, \quad (1.271)$$

$$\sigma_\theta^{(IV)}(\sigma_r^{(0)} - 2k) + \sigma_\theta^{(III)}\sigma_r^{(I)} + \sigma_\theta^{(II)}\sigma_r^{(II)} + 2\tau_{r\theta}^{(I)}\tau_{r\theta}^{(III)} + \tau_{r\theta}^{(II)2} = 0, \dots$$

Для первого приближения согласно (1.259), (1.271) имеем

$$\sigma_\theta^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0; \quad (1.272)$$

тогда из (1.272) и (1.259) следует, что

$$\sigma_r^{(I)} = \frac{\Theta_1(\theta)}{r} + \frac{i_1(\theta)}{r^2}, \quad \tau_{r\theta}^{(I)} = \frac{F_1(\theta)}{r^2}, \quad (1.273)$$

где $\Theta(\theta)$, $F(\theta)$ — произвольные функции, точка означает производную по θ .

Уравнения, определяющие перемещения в пластической области (1.211), (1.212), после линеаризации примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r^{(I)} - \mu \sigma_\theta^{(I)}) + \frac{\sigma_r^{(I)}}{\sigma_r^{(0)} - 2k} (e_r^{(0)e} - e_r^{(0)}), \\ \frac{\partial u_\theta^{(I)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(I)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial \theta} &= 2 \frac{e_r^{(0)} - e_\theta^{(0)}}{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}} \tau_{r\theta}^{(I)}, \end{aligned} \quad (1.274)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^{(II)}}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r^{(II)} - \mu \sigma_\theta^{(II)}) + \\ &+ \frac{(e_\theta^{(0)} - e_\theta^{(0)e}) \sigma_\theta^{(II)} - (e_r^{(0)} - e_r^{(0)e}) \sigma_r^{(II)} - (e_r^{(I)} - e_r^{(I)e}) \sigma_r^{(II)}}{\sigma_r^{(0)} - 2k}, \\ \frac{\partial u_\theta^{(II)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(II)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(II)}}{\partial \theta} &= \\ &= 2 \frac{(e_r^{(0)} - e_\theta^{(0)}) \tau_{r\theta}^{(II)} + (e_r^{(I)} - e_\theta^{(I)}) \tau_{r\theta}^{(I)} - (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}) e_{r\theta}^{(I)}}{\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} e_r^{(n)e} &= \frac{1}{E} (\sigma_r^{(n)} - \mu \sigma_\theta^{(n)}), \quad e_\theta^{(n)e} = \frac{1}{E} (\sigma_\theta^{(n)} - \mu \sigma_r^{(n)}), \\ e_{r\theta}^{(n)e} &= \frac{1}{2G} \tau_{r\theta}^{(n)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим однородную систему уравнений для компонент перемещений

$$\frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta^{(I)}}{\partial r} - \frac{u_\theta^{(I)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial \theta} = 0. \quad (1.275)$$

Очевидно, что $u_r^{(I)} = u(\theta)$. Положим

$$u_r^{(I)} = C_{n1} \cos(n\theta + \theta_0), \quad u_\theta^{(I)} = R(r) \sin(n\theta + \theta_0).$$

Из второго уравнения (1.275) следует

$$\frac{dR}{dr} - \frac{R}{r} - n \frac{C_{n1}}{r} = 0,$$

откуда

$$R_0 = C_{01}r, \quad R_n = -nC_{n1} + rC_{n2} \quad \text{при } n \geq 1. \quad (1.276)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_r^{(I)} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{n1} \cos(n\theta + \theta_0), \\ u_\theta^{(I)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-nC_{n1} + C_{n2}r) \sin(n\theta + \theta_0). \end{aligned} \quad (1.277)$$

Исходя из (1.277), могут быть определены компоненты деформации

$$\begin{aligned} e_r^{(I)} &= 0, \quad e_{r\theta}^{(I)} = 0, \\ e_\theta^{(I)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-n^2}{r} C_{n1} + nC_{n2} \right) \cos(n\theta + \theta_0), \end{aligned} \quad (1.278)$$

Определение последующих приближений сводится к решению неоднородных уравнений (1.275) с известной правой частью.

3. Осесимметричное состояние.

3.1. Рассмотрим условие пластичности (1.192) в цилиндрической системе координат

$$(\sigma_r - \sigma_z)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 4k^2, \quad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm 2k, \quad (1.279)$$

$$k = \text{const.}$$

Подставляя в (1.279) разложения компонент напряжений и полагая $\tau_{rz}^{(0)} = 0$, найдем

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)} &= 2\eta k, \quad \sigma_\theta^{(0)} = \frac{1}{2}(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}) \pm 2k, \\ \eta &= \text{sign}(\sigma_r^{(0)} - \sigma_z^{(0)}); \\ \sigma_r^{(I)} - \sigma_z^{(I)} &= 0, \quad \sigma_\theta^{(I)} = \frac{1}{2}(\sigma_r^{(I)} - \sigma_z^{(I)}); \\ (\sigma_r^{(II)} - \sigma_z^{(II)})\eta k + \tau_{rz}^{(I)2} &= 0, \quad \sigma_\theta^{(II)} = \frac{1}{2}(\sigma_r^{(II)} - \sigma_z^{(II)}); \end{aligned} \quad (1.280)$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_r^{(III)} - \sigma_z^{(III)}) \eta k + 2\tau_{rz}^{(I)} \tau_{rz}^{(II)} &= 0, \quad \sigma_\theta^{(III)} = \frac{1}{2} (\sigma_r^{(III)} - \sigma_z^{(III)}); \\
 (\sigma_r^{(IV)} - \sigma_z^{(IV)}) \eta k + \frac{1}{4} (\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)})^2 + 2\tau_{rz}^{(I)} \tau_{rz}^{(III)} + \tau_{rz}^{(II)^2} &= 0, \\
 \sigma_\theta^{(IV)} &= \frac{1}{2} (\sigma_r^{(IV)} - \sigma_z^{(IV)}). \quad (1.280)
 \end{aligned}$$

Из (1.280) получим

$$\sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_z^{(I)}. \quad (1.281)$$

Из (1.281) и (1.184) следует

$$\frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(I)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(I)}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}^{(I)}}{r} = 0. \quad (1.282)$$

Первому уравнению (1.282) удовлетворим, полагая

$$\sigma_r^{(I)} = -\frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial z}, \quad \tau_{rz}^{(I)} = \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r}. \quad (1.283)$$

Из (1.283) и второго уравнения (1.282) получим

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r} = 0. \quad (1.284)$$

Решение однородного уравнения (1.284) будем искать в виде

$$\Phi^{(I)} = R(r) \cos(nz + z_0). \quad (1.285)$$

Из (1.285) и (1.284) следует

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + n^2 R = 0,$$

откуда

$$\Phi^{(I)} = [C_1 I_0(nr) + C_2 N_0(nr)] \cos(nz + z_0), \quad (1.286)$$

где I_0 , N_0 — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка.

Согласно (1.283) и (1.286) можно получить выражение для компонент напряжений

$$\sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_z^{(I)} = n [C_1 I_0(nr) + C_2 N_0(nr)] \sin(nz + z_0), \quad (1.287)$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = \left[C_1 \frac{dI_0(nr)}{dr} + C_2 \frac{dN_0(nr)}{dr} \right] \cos(nz + z_0).$$

Определим также полиномиальные решения однородного уравнения (1.284):

$$\Phi_0 = A_0, \quad \Phi_1 = A_1 z, \quad \Phi_2 = A_2 (r^2 + 2z^2), \quad (1.288)$$

$$\Phi_3 = A_3 \left(r^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right), \quad \Phi_4 = A_4 \left(r^4 + 8r^2 z^2 + \frac{8}{3} z^4 \right), \dots$$

$$(A_i = \text{const}),$$

а также

$$B_0 \ln r, \quad B_1 z \ln r, \quad B_2 (r^2 + 2z^2) \ln r + D_2 r^2 + 2 (B_2 + D_2) z^2,$$

$$B_3 \left(r^2 z + \frac{2}{3} z^3 \right) \ln r + D_3 r^2 z + \frac{2}{3} (B_3 + D_3) z^3, \quad (1.289)$$

$$B_4 \left(r^4 + 8r^2 z^2 + \frac{8}{3} z^4 \right) \ln r + D_4 z^4 +$$

$$+ (4B_4 + 8D_4) r^2 z^2 + \left(4B_4 + \frac{8}{3} D_4 \right) z^4, \dots$$

$$(B_i, D_i = \text{const}).$$

При интегрировании линеаризированных соотношений, определяющих деформированное состояние, будем исходить из уравнений

$$e_r^{(I)} + e_\theta^{(I)} + e_z^{(I)} = \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(I)}}{r} + \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial z} = 0, \quad (1.290)$$

$$2e_{rz}^{(I)} = \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial r} = 0.$$

Второму уравнению (1.290) удовлетворим, полагая

$$u_r^{(I)} = \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r}, \quad u_z^{(I)} = - \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial z}. \quad (1.291)$$

Из (1.291) и первого уравнения (1.290) получим

$$\frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial z^2} = 0. \quad (1.292)$$

Уравнения (1.292) и (1.284) совпадают между собой и решение для $\psi^{(I)}$ имеет вид

$$\psi^{(I)} = [C_1^* I_0(nr) + C_2^* N_0(nr)] \sin(nz + z_0), \quad (1.293)$$

$$C_1^*, C_2^* = \text{const}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 u_r^{(I)} &= \left[C_1^* \frac{dI_0(nr)}{dr} + C_2^* \frac{dN_0(nr)}{dr} \right] \sin(nz + z_0), \\
 u_z^{(I)} &= -n [C_1^* I_0(nr) + C_2^* N_0(nr)] \cos(nz + z_0), \\
 e_z^{(I)} &= n^2 [C_1^* I_0(nr) + C_2^* N_0(nr)] \sin(nz + z_0), \\
 e_r^{(I)} &= - \left\{ C_1^* \left[n^2 I_0(nr) + \frac{1}{r} \frac{dI_0(nr)}{dr} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + C_2^* \left[n^2 N_0(nr) + \frac{1}{r} \frac{dN_0(nr)}{dr} \right] \right\} \sin(nz + z_0), \\
 e_\theta^{(I)} &= \frac{1}{r} \left[C_1^* \frac{dI_0(nr)}{dr} + C_2^* \frac{dN_0(nr)}{dr} \right] \sin(nz + z_0), \\
 e_{rz}^{(I)} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.294}$$

Определение последующих приближений может быть сведено к решению неоднородного уравнения (1.292) с известной правой частью.

3.2. Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 6k^2, \quad k = \text{const.} \tag{1.295}$$

Задача в этом случае не является статически определимой, соотношения ассоциированного закона пластического течения имеют вид

$$\frac{\frac{\partial u_r}{\partial r}}{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{\frac{u_r}{r}}{2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_r} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial z}}{2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}}{6\tau_{rz}}. \tag{1.296}$$

Подставляя в (1.295) разложения (1.223), приравнявая члены при одинаковых степенях δ , получим (при $\tau_{rz}^{(0)} = 0$)

$$\begin{aligned}
 \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} &= 2\eta k, \quad \eta = \text{sign}(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}), \\
 \sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} &= 0,
 \end{aligned} \tag{1.297}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^n [(\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)}) (\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_\theta^{(n-m)}) + \\
 + (\sigma_\theta^{(n)} - \sigma_z^{(n)}) (\sigma_\theta^{(n-n)} - \sigma_z^{(n-m)}) + \\
 + (\sigma_z^{(n)} - \sigma_r^{(n)}) (\sigma_z^{(n-m)} - \sigma_r^{(n-m)}) + 6\tau_{rz}^{(n)} \tau_{rz}^{(n-n)}] = 0.
 \end{aligned}$$

Подставив разложения (1.223) в (1.296), для первого приближения, полагая $u_z^{(0)} = 0$, $e_{rz}^{(0)} = 0$, $\tau_{rz}^{(0)} = 0$, получим

$$\frac{u_r^{(0)}}{r} (2\sigma_z^{(I)} - \sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}) = \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial z} (2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)}), \quad (1.298)$$

$$\frac{6u_r^{(0)}}{r} \tau_{rz}^{(I)} = \left(\frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial r} \right) (2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_z^{(0)} - \sigma_r^{(0)}).$$

Учитывая (1.297) и условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(0)}}{r} = 0,$$

из которого следует, что $u_r^{(0)} = C/r$, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_z^{(I)} - \frac{r^2}{A} \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial z}, \\ \tau_{rz}^{(I)} = \frac{r^2}{3A} \left(\frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial r} \right), \quad A = \frac{2C}{3\eta k}. \end{aligned} \quad (1.299)$$

Определим первое приближение. Будем исходить из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(I)}}{r} + \frac{\partial u_z^{(I)}}{\partial z} = 0, \quad (1.300)$$

которому удовлетворим, полагая

$$u_r^{(I)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial z}, \quad u_z^{(I)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r}. \quad (1.301)$$

Учитывая (1.297), (1.299), (1.301), после подстановки в уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{(I)}}{\partial z} + \frac{\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}^{(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z^{(I)}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}^{(I)}}{r} = 0, \end{aligned} \quad (1.302)$$

исключив $\sigma_z^{(I)}$, получим уравнение для определения $\psi^{(I)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial z^4} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r^2} - \\ - \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi^{(I)}}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial r^4} = 0. \end{aligned} \quad (1.303)$$

Решение уравнения (1.303) будем искать в виде

$$\psi^{(1)}(r, z) = rR(r) \cos nz. \quad (1.304)$$

После разделения переменных уравнение для определения функции $R(r)$ разбивается на два

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 R_1}{dr^2} + 3r \frac{dR_1}{dr} + (1 - \mu^2 r) R_1 &= 0, \\ r^2 \frac{d^2 R_2}{dr^2} + 3r \frac{dR_2}{dr} + (1 - \bar{\mu}^2 r) R_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.305)$$

где

$$\mu^2 = \frac{n^2}{2} (-1 + i\sqrt{3}), \quad \bar{\mu}^2 = \frac{n^2}{2} (-1 - i\sqrt{3}).$$

Окончательно будем иметь

$$\psi^{(1)} = [C_1 I_0(\mu r) + C_2 N_0(\mu r) + \bar{C}_1 I_0(\bar{\mu} r) + \bar{C}_2 N_0(\bar{\mu}, r)] \cos nz, \quad (1.306)$$

где I_0 , N_0 — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка; C_i и \bar{C}_i — сопряженные постоянные.

Компоненты напряжений, перемещений и деформаций могут быть определены из (1.299), (1.304), (1.302):

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} = \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{n}{3A} \left[(2 + e^{(2\pi/3)i}) r \frac{df_1}{dr} + \right. \\ &\quad \left. + (2 + e^{-(2\pi/3)i}) r \frac{df_2}{dr} - 2(f_1 + f_2) \right] \sin nz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= -\frac{n}{3A} \left[n^2 (1 - e^{(2\pi/3)i}) r \frac{df_1}{dr} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-(2\pi/3)i}) r \frac{df_2}{dr} + 2(f_1 + f_2) \right] \sin nz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(1)} &= \frac{1}{3A} \left[n^2 (1 - e^{(2\pi/3)i}) r f_1 + \right. \\ &\quad \left. + n^2 (1 - e^{-(2\pi/3)i}) r f_2 - 2 \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{df_2}{dr} \right) \right] \cos nz, \end{aligned} \quad (1.307)$$

$$u_r^{(1)} = \frac{n}{r} (f_1 + f_2) \sin nz,$$

$$u_z^{(1)} = \frac{1}{r} \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{df_2}{dr} \right) \cos nz,$$

$$e_r^{(1)} = n \frac{d}{dr} \left[(f_1 + f_2) \frac{1}{r} \right] \sin nz,$$

$$e_\theta^{(1)} = \frac{n}{r^2} (f_1 + f_2) \sin nz,$$

$$e_z^{(I)} = -\frac{n}{r} \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{df_2}{dr} \right) \sin nz,$$

$$e_{rz}^{(I)} = -\frac{1}{r^2} \left[n^2 (1 - e^{(2\pi/3)i}) r f_1 + \right. \\ \left. + n^2 (1 - e^{-(2\pi/3)i}) r f_2 - 2 \left(\frac{df_1}{dr} + \frac{df_2}{dr} \right) \right] \cos nz,$$

где

$$f_1 = C_1 I_0(\mu r) + C_2 N_0(\mu r), \quad f_2 = \bar{C}_1 I_0(\bar{\mu} r) + \bar{C}_2 N_0(\bar{\mu} r).$$

В ряде случаев необходимо использовать полиномиальные решения уравнения (1.303) вида

$$A_0, A_1 z, A_2 r^2 + A_3 z^3, A_4 r^3 z + A_5 z^3, \\ A_6 r^4 - (8A_6 + 3A_4) r^2 z^2 + A_7 z^4,$$

а также

$$B_0 \ln r, B_1 z \ln r, (B_2 r^2 + B_3 z^2) \ln r + D_2 r^2 + D_3 z^2, \\ (B_4 r^2 z + B_5 z^3) \ln r + (D_4 r^2 z + D_5 z^3), \quad (1.308) \\ [B_6 r^4 - (8B_6 + 3B_7) r^3 z^3 + B_7 z^4] \ln r + \\ + D_6 r^4 - (8/3 B_6 - 2B_7 + 5D_7 + 2D_8) r^2 z^2 + D_8 z^4, \dots$$

где A_i, B_i, D_i — произвольные постоянные.

3.3. Рассмотрим условие пластичности (1.192) в сферической системе координат:

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2 = 4k^2, \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) \pm 2k. \quad (1.309)$$

После линеаризации соотношений (1.309) при условии $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$, получим соотношения, вполне аналогичные (1.280). Аналогично (1.281) будем иметь

$$\sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_\varphi^{(I)}.$$

Тогда уравнения равновесия (1.188) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta}^{(I)} \operatorname{ctg} \theta = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^{(I)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{3}{r} \tau_{r\theta}^{(I)} = 0. \quad (1.310)$$

Второму уравнению (1.310) удовлетворим, полагая

$$\sigma_r^{(I)} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta}^{(I)} = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta}. \quad (1.311)$$

Тогда из первого уравнения (1.310) получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{(I)}}{\partial \theta^2} - 2r \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^{(I)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.312)$$

Полагая $\Phi = R(r) \Theta(\theta)$, после разделения переменных будем иметь

$$r^2 R'' - 2rR' + n(n+1)R = 0, \quad (1.313)$$

$$\Theta'' + \Theta' \operatorname{ctg} \theta + n(n+1)\Theta = 0. \quad (1.314)$$

Можно избрать другой путь решения. Первому уравнению (1.310) удовлетворим, полагая

$$\sigma_r^{(I)} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{*(I)}}{\partial \theta}, \quad \tau_{r\theta}^{(I)} = \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{*(I)}}{\partial r}. \quad (1.315)$$

Тогда из второго уравнения (1.310) получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \Phi^{*(I)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{*(I)}}{\partial \theta^2} + 4r \frac{\partial \Phi^{*(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \Phi^{*(I)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.316)$$

Полагая $\Phi^{*(I)} = R^*(r) \Theta^{*(I)}(\theta)$, после разделения переменных будем иметь

$$r^2 R^{*''} + 4rR^{*'} + n(n+1)R^* = 0, \quad (1.317)$$

$$\Theta^{*''} - \Theta^{*'} \operatorname{ctg} \theta + n(n+1)\Theta^* = 0. \quad (1.318)$$

При интегрировании линеаризированных соотношений, определяющих деформированное состояние, будем исходить из уравнений для первого приближения

$$e_r^{(I)} + e_\theta^{(I)} + e_\varphi^{(I)} = \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2u_r^{(I)}}{r} + \frac{u_\theta^{(I)}}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0, \quad (1.319)$$

$$2e_{r\theta}^{(I)} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta^{(I)}}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(I)}}{\partial \theta} = 0.$$

Второму уравнению (1.319) удовлетворим, полагая

$$u_r^{(I)} = r^2 \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r}, \quad u_\theta = -r \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \theta}; \quad (1.320)$$

тогда из первого уравнения (1.319) получим

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \theta^2} + 4r \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r} - \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.321)$$

Полагая $\psi^{(I)} = v(r) \varphi(\theta)$, после разделения переменных получим

$$r^2 v'' + 4rv' + n(n+1)v = 0, \quad (1.322)$$

$$\varphi'' + \varphi' \operatorname{ctg} \theta + n(n+1)\varphi = 0. \quad (1.323)$$

Можно избрать другой путь решения. Первому уравнению (1.319) удовлетворим, полагая

$$u_r^{(I)} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{*(I)}}{\partial \theta}, \quad u_\theta^{(I)} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{*(I)}}{\partial r}. \quad (1.324)$$

Тогда из второго уравнения (1.319) получим

$$\frac{\partial^2 \psi^{*(I)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \psi^{*(I)}}{\partial \theta^2} - 2r \frac{\partial \psi^{*(I)}}{\partial r} + \frac{\partial \psi^{*(I)}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.325)$$

Полагая $\psi^{*(I)} = v^*(r) \varphi^*(\theta)$, после разделения переменных будем иметь

$$r^2 v^{*''} - 2rv^{*'} + n(n+1)v^* = 0, \quad (1.326)$$

$$\varphi^{*''} - \varphi^{*' \operatorname{ctg} \theta} + n(n+1)\varphi^* = 0. \quad (1.327)$$

Уравнения (1.313) и (1.326) совпадают между собой и являются уравнениями Эйлера. Аналогично уравнения (1.317) и (1.322) тоже являются уравнениями Эйлера.

Уравнения (1.314) и (1.323) совпадают между собой и решением их являются функции Лежандра.

Уравнения (1.318) и (1.327) идентичны и решение их есть $y_v^1 \sin \theta$, где y_v^1 — присоединенные функции Лежандра первого порядка.

Решение уравнения (1.313) запишется в виде

$$R_0 = C_{00} + C_{01}r^3 \quad \text{при } n = 0,$$

$$R_2 = C_{11}r + C_{12}r^2 \quad \text{при } n = 1,$$

$$R_n = r^{n/2} \left\{ C_{n1} \cos \left[\left(\frac{4n(n+1)-9}{4} \right)^{1/2} \ln r \right] + \right. \\ \left. + C_{n2} \sin \left[\left(\frac{4n(n+1)-9}{4} \right)^{1/2} \ln r \right] \right\} \quad \text{при } n \geq 2. \quad (1.328)$$

Решение уравнения (1.317) запишется в виде

$$\begin{aligned} R_0^* &= C_{00}^* + C_{01}^* r^{-3} \quad \text{при } n = 0, \\ R_1^* &= C_{11}^* r^{-1} + C_{12}^* r^{-2} \quad \text{при } n = 1, \\ R_n^* &= r^{-3/2} \left\{ C_{n1}^* \cos \left[\left(\frac{4n(n+1)-9}{4} \right)^{1/2} \ln r \right] + \right. \\ &\quad \left. + C_{n2}^* \sin \left[\left(\frac{4n(n+1)-9}{4} \right)^{1/2} \ln r \right] \right\} \quad \text{при } n \geq 2. \end{aligned} \quad (1.329)$$

В дальнейшем нас будут интересовать решения, выраженные через полиномы Лежандра $P_n(\cos \theta)$, и поэтому можно записать

$$\Phi^{(I)} = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n P_n(\cos \theta), \quad (1.330)$$

$$\Phi^{*(I)} = R_0^* \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^* \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta. \quad (1.331)$$

Выражения для компонент напряжения можно получить из (1.311) согласно (1.330):

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(I)} = \sigma_{\theta}^{(I)} = \sigma_{\varphi}^{(I)} &= -C_{01} - \frac{1}{r^2} (C_{11} + 2C_{12}r) \cos \theta + \\ &+ r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(3/2 C_{n1} + \alpha C_{n2}) \cos(\alpha \ln r) + \\ &+ (3/2 C_{n2} - \alpha C_{n1}) \sin(\alpha \ln r)] P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad (1.332)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(I)} &= -\frac{1}{r^2} (C_{11} + C_{12}r) \sin \theta + \\ &+ r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [C_{n1} \cos(\alpha \ln r) + C_{n2} \sin(\alpha \ln r)] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\ \alpha &= 1/2 \sqrt{4n(n+1) - 9}. \end{aligned}$$

Используя (1.315) и (1.331), компоненты напряжения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(I)} = \sigma_{\theta}^{(I)} = \sigma_{\varphi}^{(I)} &= - \left(C_{00}^* - \frac{C_{01}^*}{r^3} \right) + \\ &+ \frac{1}{r^2} (rC_{11}^* + C_{12}^*) \cos \theta + r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) [C_{n1}^* \cos(\alpha \ln r) + \\ &+ C_{n2}^* \sin(\alpha \ln r)] P_n(\cos \theta), \end{aligned} \quad (1.333)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(I)} = & -\frac{3}{r^3} C_{01}^* + \frac{1}{r^2} (rC_{11}^* + C_{12}^*) \sin \theta + \\ & + r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(-\frac{3}{2}C_{n1}^* + \alpha C_{n2}^*) \cos(\alpha \ln r) - \\ & - (\frac{3}{2}C_{n2}^* + \alpha C_{n1}^*) \sin(\alpha \ln r)] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Так как в решении, не зависящем от θ , имеет место $\tau_{r\theta} = 0$, то в (1.333) $C_{01}^* = 0$ и очевидно, что (1.333) совпадает с (1.332).

Компоненты перемещения из (1.320), (1.322), (1.323) определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_r^{(I)} = & -\frac{3a_{01}}{r^2} + \left(-a_{11} - 2\frac{a_{12}}{r}\right) \cos \theta + \\ & + r^{-1/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(-\frac{3}{2}a_{n1} + \alpha a_{n2}) \cos(\alpha \ln r) - \\ & - (\frac{3}{2}a_{n2} + \alpha a_{n1}) \sin(\alpha \ln r)] P_n(\cos \theta), \quad (1.334) \\ u_{\theta}^{(I)} = & \left(a_{11} + \frac{a_{12}}{r}\right) \sin \theta - \\ & - r^{1/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(a_{n1} \cos(\alpha \ln r) + a_{n2} \sin(\alpha \ln r)] \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Перемещения можно определить также из (1.324) и (1.326), (1.327). В этом случае

$$\begin{aligned} u_r^{(I)} = & \frac{a_{00}^*}{r^2} + a_{01}^* r + \left(\frac{2a_{11}^*}{r} + 2a_{12}^*\right) \cos \theta - \\ & - r^{1/2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n+1) [a_{n1}^* \cos(\alpha \ln r) + a_{n2}^* \sin(\alpha \ln r)] P_n(\cos \theta), \quad (1.335) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\theta}^{(I)} = & -3a_{01}^* - \left(\frac{a_{11}^*}{r} + 2a_{12}^*\right) \sin \theta - \\ & - r^{1/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(\frac{3}{2}a_{n1}^* + \alpha a_{n2}^*) \cos(\alpha \ln r) + \\ & + (\frac{3}{2}a_{n2}^* - \alpha a_{n1}^*) \sin(\alpha \ln r)] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Из соображений симметрии $a_{01}^* = 0$ и (1.334) и (1.335) совпадают между собой.

Компоненты деформаций согласно (1.334) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 e_r^{(1)} &= \frac{6a_{01}}{r^3} + \frac{2a_{02}}{r^2} \cos \theta + r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} \{ (3/4 a_{n1} - 2\alpha a_{n2}) \cos(\alpha \ln r) + \\
 &\quad + [(-n(n+1) + 3) a_{n2} + 2\alpha a_{n1}] \sin(\alpha \ln r) \} P_n(\cos \theta), \\
 e_{\theta}^{(1)} &= -\frac{3a_{01}}{r^3} - \frac{a_{12}}{r^2} \cos \theta - \\
 &\quad - r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[\left(n(n+1) - \frac{3}{2} \right) a_{n1} + \alpha a_{n2} \right] \cos(\alpha \ln r) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(n(n+1) - \frac{3}{2} \right) a_{n2} + \alpha a_{n1} \right] \sin(\alpha \ln r) \right\} P_n(\cos \theta) - \\
 &\quad - r^{3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n1} \cos(\alpha \ln r) + a_{n2} \sin(\alpha \ln r)] \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 &\hspace{15em} (1.336)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\varphi}^{(1)} &= -\frac{3a_{01}}{r^3} - \frac{a_{12}}{r^3} \cos \theta + \\
 &\quad + r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [(-3/2 a_{n1} + \alpha a_{n2}) \cos(\alpha \ln r) - \\
 &\quad - (3/2 a_{n2} + \alpha a_{n1}) \sin(\alpha \ln r)] P_n(\cos \theta) + \\
 &\quad + r^{-3/2} \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n1} \cos(\alpha \ln r) + a_{n2} \sin(\alpha \ln r)] \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \\
 e_{r\theta}^{(1)} &= 0.
 \end{aligned}$$

3.4. Рассмотрим условие пластичности Мизеса

$$(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_r - \sigma_{\varphi})^2 + 6\tau_{r\theta}^2 = 6k^2. \quad (1.337)$$

При этом условии пластичности задача не является статически определяемой, и необходимо использовать

ассоциированный закон течения

$$\frac{\frac{\partial u_r}{\partial r}}{2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi} = \frac{\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r}{r(2\sigma_\theta - \sigma_r - \sigma_\varphi)} =$$

$$= \frac{u_\theta \operatorname{ctg} \theta + u_r}{r(2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_\theta)} = \frac{r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial \theta}}{6r\tau_{r\theta}} \quad (1.338)$$

и условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (1.339)$$

Подставляя разложения напряжений (1.223) в (1.337), получим

$$(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})^2 + (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)})^2 + (\sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)})^2 + 6\tau_{r\theta}^{(0)2} = 6k^2,$$

$$\sum_{m=0}^n [(\sigma_r^{(m)} - \sigma_\theta^{(m)})(\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_\theta^{(n-m)}) +$$

$$+ (\sigma_\theta^{(m)} - \sigma_\varphi^{(m)})(\sigma_\theta^{(n-m)} - \sigma_\varphi^{(n-m)}) +$$

$$+ (\sigma_r^{(m)} - \sigma_\varphi^{(m)})(\sigma_r^{(n-m)} - \sigma_\varphi^{(n-m)}) + 6\tau_{r\theta}^{(m)}\tau_{r\theta}^{(n-m)}] = 0, \quad n \geq 1.$$

Отметим, что если $\sigma_\varphi^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)}$ и $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$, то найдем

$$\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} = \eta \sqrt{3}k, \quad \eta = \operatorname{sign}(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}),$$

$$2\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)} = 0,$$

$$2\eta \sqrt{3}k (2\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)} - \sigma_\varphi^{(II)}) + (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)})^2 +$$

$$+ (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)})^2 + (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)})^2 + 6\tau_{r\theta}^{(I)2} = 0, \quad (1.340)$$

$$\eta \sqrt{3}k (2\sigma_r^{(III)} - \sigma_\theta^{(III)} - \sigma_\varphi^{(III)}) + (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)})(\sigma_r^{(II)} - \sigma_\theta^{(II)}) +$$

$$+ (\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)})(\sigma_\theta^{(II)} - \sigma_\varphi^{(II)}) + (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)})(\sigma_r^{(II)} - \sigma_\varphi^{(II)}) +$$

$$+ 6\tau_{r\theta}^{(I)}\tau_{r\theta}^{(II)} = 0.$$

Подставив разложения (1.223) в (1.338) и полагая $e_\varphi^{(0)} = e_\theta^{(0)} = -1/2 e_r^{(0)}$, $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$, получим для первого приближения

$$e_\theta^{(I)} (2\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}) =$$

$$= e_r^{(0)} (2\sigma_\theta^{(I)} - \sigma_r^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)}) + e_r^{(I)} (2\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_\varphi^{(0)}),$$

$$\begin{aligned}
 e_{\varphi}^{(I)} (2\sigma_r^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_{\varphi}^{(0)}) &= \\
 = e_r^{(0)} (2\sigma_{\varphi}^{(I)} - \sigma_r^{(I)} - \sigma_{\theta}^{(I)}) + e_r^{(I)} (2\sigma_{\varphi}^{(0)} - \sigma_r^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)}), & \quad (1.341) \\
 e_{r\theta}^{(I)} (2\sigma_r^{(0)} - \sigma_{\theta}^{(0)} - \sigma_{\varphi}^{(0)}) &= e_r^{(0)} \tau_{r\theta}^{(I)}.
 \end{aligned}$$

Так как из условия несжимаемости $u^{(0)} = C/r^2$, учитывая (1.340), запишем (1.341) в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta}^{(I)} &= \sigma_r^{(I)} - \frac{r^3}{2A} \left(e_{\theta}^{(I)} + \frac{e_r^{(I)}}{2} \right), \\
 \sigma_{\varphi}^{(I)} &= \sigma_r^{(I)} - \frac{r^3}{2A} \left(e_{\varphi}^{(I)} + \frac{e_r^{(I)}}{2} \right), \\
 \tau_{r\theta}^{(I)} &= -\frac{r^3}{A} e_{r\theta}^{(I)},
 \end{aligned} \quad (1.342)$$

где

$$A = \frac{3C}{\eta \sqrt{3} k}.$$

Условию несжимаемости (1.339) удовлетворим, положив

$$\begin{aligned}
 u_r^{(I)} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \theta}, \\
 u_{\theta}^{(I)} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r}.
 \end{aligned} \quad (1.343)$$

Выразив деформации через функцию $\psi^{(I)}$, подставим (1.342) в уравнения равновесия (1.188), откуда, исключив $\sigma_r^{(I)}$, получим уравнение для определения $\psi^{(I)}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial \theta^4} - \frac{2 \cos \theta}{r \sin^2 \theta} \frac{\partial^3 \psi^{(I)}}{\partial \theta^3} + \frac{2 + \cos^3 \theta}{4 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial \theta^2} - \\
 - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^3 \psi^{(I)}}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{3 \cos \theta}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial \theta} + \\
 + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi^{(I)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{6}{\sin \theta} \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial r} + \frac{6r^2}{\sin \theta} \frac{\partial^3 \psi^{(I)}}{\partial r^3} + \\
 + \frac{r^2}{\sin \theta} \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial r^4} + \frac{r \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^3 \psi^{(I)}}{\partial r^2 \partial \theta} = 0. \quad (1.344)
 \end{aligned}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\psi^{(I)}(r, \theta) = r^4 \varphi(\theta). \quad (1.345)$$

После разделения переменных получим уравнение для определения φ :

$$\varphi^{IV} - 2 \operatorname{ctg} \theta \varphi''' + \left(\frac{2 + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \mu^2 \right) \varphi'' + \left(-\frac{3 \cos \theta}{\sin^3 \theta} + \mu^3 \operatorname{ctg} \theta \right) \varphi' + \mu^2 (\mu^2 - 7) \varphi = 0. \quad (1.346)$$

Уравнение (1.346) разбивается на два:

$$\begin{aligned} \varphi_1'' - \operatorname{ctg} \theta \varphi_1' - \nu_1 (\nu_1 + 1) \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2'' - \operatorname{ctg} \theta \varphi_2' + \nu_2 (\nu_2 + 1) \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.347)$$

где

$$\begin{aligned} \nu_1 (\nu_1 + 1) &= -\frac{\mu}{2} (\mu + \sqrt{3\mu^2 - 7}), \\ \nu_2 (\nu_2 + 1) &= -\frac{\mu}{2} (\mu - \sqrt{3\mu^2 - 7}). \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (1.344) имеет вид

$$\psi = r^\mu [C_1 y_{\nu_1}^1(\theta) + C_2 y_{\nu_2}^1(\theta)] \sin \theta, \quad (1.348)$$

где $y_{\nu_1}^1, y_{\nu_2}^1$ — присоединенные функции Лежандра; C_1 и C_2 — комплексные постоянные.

В ряде случаев бывает необходимо использовать решения, где $P_n(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра.

Как следует из (1.347), показатель степени μ в (1.348) определяется

$$\begin{aligned} \mu_{1,2,3,4} &= \pm (k_1 \pm ik_2), \\ k_1 &= 1/2 \sqrt{n(n+1) + 7}, \quad k_2 = 1/2 \sqrt{3n(n+1) - 7}. \end{aligned} \quad (1.349)$$

Функция $\psi^{(I)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \psi^{(I)} &= \sum_0^\infty \psi_n, \\ \psi_0 &= a_{01} \cos \theta, \\ \psi_1 &= \left(a_{11} r + \frac{a_{12}}{r} + a_{13} r^3 + \frac{a_{14}}{r^2} \right) \sin^2 \theta, \\ \psi_n &= \left[a_{n1} r^{k_1} \cos(k_2 \ln r) - a_{n2} r^{k_1} \sin(k_2 \ln r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{n3}}{r^{k_1}} \cos(k_2 \ln r) - \frac{a_{n4}}{r^{k_1}} \sin(k_2 \ln r) \right] \sin \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned} \quad (1.350)$$

Используя (1.350), (1.342), (1.189), (1.343), получим следующие выражения для напряжений, перемещений и деформаций:

при $n = 0$

$$\sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_\varphi^{(I)} = a_{02},$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = 0,$$

$$u_r^{(I)} = -\frac{a_{01}}{r^3};$$

при $n = 1$

$$\sigma_r^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)} = \sigma_\varphi^{(I)} = 12A \left(\frac{a_{12}}{r} + \frac{a_{13}}{r^2} \right) P_1(\cos \theta),$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = -6A \left(\frac{a_{12}}{r} + \frac{2a_{13}}{r^2} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$u_r^{(I)} = 2 \left(\frac{a_{11}}{r} + \frac{a_{12}}{r^3} + \frac{a_{13}}{r^4} + a_{14} \right) P_1(\cos \theta),$$

$$u_\theta^{(I)} = \left(\frac{a_{11}}{r} - \frac{a_{12}}{r^3} - \frac{2a_{13}}{r^4} + 2a_{14} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (1.351)$$

$$e_r^{(I)} = -2 \left(\frac{a_{11}}{r^2} + \frac{3a_{12}}{r^4} + \frac{4a_{13}}{r^5} \right) P_1(\cos \theta),$$

$$e_\theta^{(I)} = e_\varphi^{(I)} = -\frac{1}{2} e_r^{(I)}, \quad e_{r\theta}^{(I)} = 6 \left(\frac{a_{11}}{r^4} + \frac{2a_{13}}{r^5} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta};$$

при $n \geq 2$

$$\sigma_r^{(I)} = n(n+1)A [(2k_1 - 3)(a_{n1} \cos \gamma - a_{n2} \sin \gamma)r^{k_1} - (2k_1 + 3)(a_{n3} \cos \gamma - a_{n4} \sin \gamma)r^{-k_1}] P_n(\cos \theta),$$

$$\sigma_\varphi^{(I)} = n(n+1)A \{ [L_1(r)a_{n1} + L_2(r)a_{n2}] r^{k_1} + [L_3(r)a_{n3} + L_4(r)a_{n4}] r^{-k_1} \} P_n(\cos \theta) + 2A \{ [L_5(r)a_{n1} - L_6(r)a_{n2}] r^{k_1} + [L_7(r)a_{n3} - L_8(r)a_{n4}] r^{-k_1} \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$\sigma_\theta^{(I)} = n(n+1)A \{ [L_9(r)a_{n1} - L_{10}(r)a_{n2}] r^{k_1} + [L_{11}(r)a_{n3} - L_{12}(r)a_{n4}] r^{-k_1} \} P_n(\cos \theta) - 2A \{ [L_5(r)a_{n1} - L_6(r)a_{n2}] r^{k_1} - [L_7(r)a_{n3} - L_8(r)a_{n4}] r^{-k_1} \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta};$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = -A \{ (2k_1 - 3) [L_5(r) a_{n1} - L_6(r) a_{n2}] r^{k_1} - \\ - (2k_1 + 3) [L_7(r) a_{n3} - L_8(r) a_{n4}] r^{-k_1} \} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$u_r^{(I)} = n(n+1) [(a_{n1} \cos \gamma - a_{n2} \sin \gamma) r^{k_1-2} + \\ + (a_{n3} \cos \gamma - a_{n4} \sin \gamma) r^{-(k_1+2)}] P_n(\cos \theta),$$

$$u_\theta^{(I)} = \{ [L_5(r) a_{n1} - L_6(r) a_{n2}] r^{k_1-2} + \\ + [L_7(r) a_{n3} - L_8(r) a_{n4}] r^{-(k_1+2)} \} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$e_r^{(I)} = n(n+1) \{ a_{n1} [-k_2 \sin \gamma + (k_1 - 2) \cos \gamma] r^{k_1-3} + \\ + a_{n2} [-k_1 \cos \gamma - (k_1 - 2) \sin \gamma] r^{k_1-3} - \\ - a_{n3} [k_2 \sin \gamma + (k_1 + 2) \cos \gamma] r^{-(k_1+3)} + \\ + a_{n4} [-k_2 \cos \gamma + (k_1 + 2) \sin \gamma] r^{-(k_1+3)} \} P_n(\cos \theta),$$

$$e_\theta^{(I)} = n(n+1) [(a_{n1} \cos \gamma - a_{n2} \sin \gamma) r^{k_1-3} + \\ + (a_{n3} \cos \gamma - a_{n4} \sin \gamma) r^{-(k_1+3)}] P_n(\cos \theta) + \\ + \{ [L_5(r) a_{n1} + L_6(r) a_{n2}] r^{k_1-3} + \\ + [L_7(r) a_{n3} - L_8(r) a_{n4}] r^{-(k_1+3)} \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$e_\theta^{(I)} = n(n+1) \{ a_{n1} [(-k_1 + 1) \cos \gamma + (k_2 - 1) \sin \gamma] r^{k_1-3} + \\ + a_{n2} [(k_1 - 1) \sin \gamma + (k_2 - 1) \cos \gamma] r^{k_1-3} + \\ + a_{n3} [(k_1 + 1) \cos \gamma + (k_2 - 1) \sin \gamma] r^{-(k_1+3)} - \\ - a_{n4} [(k_1 + 1) \sin \gamma + (k_2 - 1) \cos \gamma] r^{-(k_1+3)} \} P_n(\cos \theta) - \\ - \{ [L_5(r) a_{n1} - L_6(r) a_{n2}] r^{k_1-3} + \\ + [L_7(r) a_{n3} - L_8(r) a_{n4}] r^{-(k_1+3)} \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$e_{r\theta}^{(I)} = \{ (2k_1 - 3) [L_5(r) a_{n1} - L_6(r) a_{n2}] r^{k_1-3} - \\ - (2k_1 + 3) [L_7(r) a_{n3} - L_8(r) a_{n4}] r^{-(k_1+3)} \} \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Здесь

$$\gamma = k_2 \ln r,$$

$$L_1(r) = (k_1 - 3) \cos \gamma + k_2 \sin \gamma,$$

$$L_2(r) = k_2 \cos \gamma - (k_1 - 3) \sin \gamma,$$

$$L_3(r) = -(k_1 - 3) \cos \gamma + k_2 \sin \gamma,$$

$$\begin{aligned}
L_4(r) &= k_2 \cos \gamma + (k_1 + 3) \sin \gamma, \\
L_5(r) &= k_1 \cos \gamma - k_2 \sin \gamma, \\
L_6(r) &= k_1 \sin \gamma + k_2 \cos \gamma, \\
L_7(r) &= -k_1 \cos \gamma - k_2 \sin \gamma, \\
L_8(r) &= -k_1 \sin \gamma + k_2 \cos \gamma, \\
L_9(r) &= 3(k_1 - 1) \cos \gamma - k_2 \sin \gamma, \\
L_{10}(r) &= -k_2 \cos \gamma - 3(k_1 - 1) \sin \gamma, \\
L_{11}(r) &= -3(k_1 + 1) \cos \gamma - k_2 \sin \gamma, \\
L_{12}(r) &= -k_2 \cos \gamma + 3(k_1 + 1) \sin \gamma.
\end{aligned}$$

§ 8. Линеаризация и интегрирование соотношений теории малых упругопластических деформаций

Среди деформационных теорий ограничимся рассмотрением теории малых упругопластических деформаций.

Соотношения теории малых упругопластических деформаций имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_x - e), & \tau_{xy} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy}, \\
\sigma_y - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_y - e), & \tau_{yz} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{yz}, \\
\sigma_z - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_z - e), & \tau_{zx} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{zx}, \\
\sigma_i &= \Phi(e_i), & \sigma &= 3Ke, & K &= \text{const}, \quad (1.352)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\
&\quad + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{1/2}, \\
e_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(e_x - e_y)^2 + (e_y - e_z)^2 + (e_z - e_x)^2 + \\
&\quad + 6(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Соотношение $\sigma_i = \Phi(e_i)$ определяет характер упрочнения материала. Соотношение

$$\sigma_i = A e_i^\kappa, \quad A, \kappa = \text{const} \quad (1.353)$$

носит название степенного закона упрочнения.

Соотношение $\sigma = 3Ke$ определяет характер сжимаемости материала. Для несжимаемого материала можно записать

$$3e = e_x + e_y + e_z = 0, \quad K = \infty, \quad \sigma \neq 0. \quad (1.354)$$

Ниже рассмотрим некоторые случаи интегрирования линеаризованных соотношений теории малых упруго-пластических деформаций. Для простоты всюду будем считать материал несжимаемым.

1. В случае плоской деформации имеем

$$e_{xz} = e_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = e_z = 0, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y). \quad (1.355)$$

Соотношения (1.352) принимают вид

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_x, \quad \tau_{xy} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy}, \quad (1.356)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad e_i = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{e_x^2 + e_{xy}^2}.$$

Если обозначить $\Phi(e_i) = 3\Psi(e_i)e_i$, то соотношения (1.356) примут вид

$$\sigma_x - \sigma_y = 4\Psi(e_i)e_x, \quad \tau_{xy} = 2\Psi(e_i)e_{xy}. \quad (1.357)$$

Предполагая справедливость разложений, вполне аналогичных (1.223), получим

$$\sigma_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_i^{(n)}, \quad e_i = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_i^{(n)}. \quad (1.358)$$

1.1. Для определенности положим, что в начальном состоянии имеет место одноосное растяжение

$$\sigma_x^{(0)} = \text{const}, \quad \sigma_y^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0, \quad e_x^{(0)} = \text{const}; \quad (1.359)$$

тогда

$$\begin{aligned} e_i^{(0)} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e_x^{(0)}, & e_i^{(I)} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e_x^{(I)}, \\ e_x^{(II)} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} e_x^{(I)} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{e_{xy}^{(I)2}}{e_x^{(0)}}. \end{aligned} \quad (1.360)$$

Аналогичные выражения будут иметь место для σ_i .

Далее приходим к разложению $\Psi(e_i)$:

$$\Psi(e_i) = \Psi^{(0)}(e_i^{(0)}) + \delta \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} e_i^{(I)} + \delta^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^2\Psi^{(0)}}{de_i^2} e_i^{(II)} + \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} e_i^{(I)2} \right) + \dots \quad (1.361)$$

Здесь и в дальнейшем индекс «0» наверху у функции Ψ означает, что значения функции и ее производных взяты в исходном состоянии при $e_i = e_i^{(0)}$.

Используя разложения (1.223), (1.358), (1.360), (1.361), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(I)} &= \sigma^{(I)} + 2A_1 e_x^{(I)}, & \sigma_y^{(I)} &= \sigma^{(I)} - 2A e_x^{(I)}, & \tau_{xy}^{(I)} &= 2B_1 e_{xy}^{(I)}, \\ \sigma_x^{(II)} &= \sigma^{(II)} + 2A_1 e_x^{(II)} + A_2 e_x^{(I)2} + A_3 e_{xy}^{(I)2}, \\ \sigma_y^{(II)} &= \sigma^{(II)} - 2A_1 e_x^{(II)} - A_2 e_x^{(I)2} - A_3 e_{xy}^{(I)2}, & (1.362) \\ \tau_{xy}^{(II)} &= 2B_1 e_{xy}^{(II)} - B_2 e_{xy}^{(I)} e_x^{(I)}, \dots, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} e_x^{(0)} + \Psi^{(0)}, \\ A_2 &= 4 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i} + \frac{2}{3} \frac{d^2\Psi^{(0)}}{de_i^2} e_x^{(0)} \right), & A_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i}, \\ B_1 &= \Psi^{(0)}(e_i^{(0)}), & B_2 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{d\Psi^{(0)}}{de_i}. \end{aligned}$$

Из уравнений равновесия (1.140) и (1.362) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{(I)}}{\partial x} + 2A_1 \frac{\partial e_x^{(I)}}{\partial x} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}^{(I)}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma^{(I)}}{\partial y} + 2B_1 \frac{\partial e_{xy}^{(I)}}{\partial x} - 2A_1 \frac{\partial e_x^{(I)}}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1.363)$$

откуда следует:

$$B_1 \left(\frac{\partial^2 e_{xy}^{(I)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e_{xy}^{(I)}}{\partial y^2} \right) - 2A_1 \frac{\partial^2 e_x^{(I)}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.364)$$

Условию несжимаемости (1.354) удовлетворим, полагая

$$u_x^{(I)} = \frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial y}, \quad u_y^{(I)} = -\frac{\partial \psi^{(I)}}{\partial x}. \quad (1.365)$$

Подставляя (1.365) в (1.364), получим

$$\frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial x^4} + 2M^2 \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^{(I)}}{\partial y^4} = 0, \quad M^2 = \frac{2A_1 - B_1}{B_1}. \quad (1.366)$$

Соответствующее уравнение для n -го приближения будет иметь вид

$$\frac{\partial^4 \psi^{(n)}}{\partial x^4} + 2M^2 \frac{\partial^4 \psi^{(n)}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi^{(n)}}{\partial y^4} = f^{(n-1)}, \quad (1.367)$$

где $f^{(n-1)}$ — функция, зависящая от компонент не выше $(n-1)$ -го приближения.

Полагая

$$\psi^{(I)} = X(x) \cos(ny + y_0), \quad (1.368)$$

получим из (1.366) после деления переменных

$$X^{IV} - 2n^2 M^2 X'' + n^4 X = 0,$$

откуда

$$X = C_1 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + C_2 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ + C_3 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + C_4 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x), \quad (1.369)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{A_1/B_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{(B_1 - A_1)/B_1}.$$

Из (1.362), (1.365) можно легко получить выражения для компонент напряжений и деформаций:

$$\sigma_x^{(I)} = -2B_1 n^2 [(C_1 \lambda_1 - C_2 \lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ + (C_1 \lambda_2 + C_2 \lambda_1) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ + (C_3 \lambda_1 + C_4 \lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ + (-C_3 \lambda_2 + C_4 \lambda_1) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x)] \sin(ny + y_0),$$

$$\sigma_y^{(I)} = 2n^2 \{ [C_1 \lambda_1 (2A_1 - B_1) + 2A_1 C_2 \lambda_2] \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ + [-2A_1 C_1 \lambda_2 + C_2 \lambda_1 (2A_1 - B_1)] \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ + [2A_1 C_3 \lambda_2 + C_4 \lambda_1 (2A_1 - B_1)] \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ + [C_3 \lambda_1 (2A_1 - B_1)] \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) \} \sin(ny + y_0),$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(I)} = & -2n^2 [D_1 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ & + D_2 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + D_3 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + D_4 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x)] \cos(ny + y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x^{(I)} = & -n [C_1 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + C_2 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + C_3 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + C_4 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x)] \sin(ny + y_0), \quad (1.370) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y^{(I)} = & -n [(C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_2\lambda_1 - C_1\lambda_2) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_3\lambda_2 + C_4\lambda_1) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_3\lambda_1 - C_4\lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x)] \cos(ny + y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x^{(I)} = -e_y^{(I)} = & -n^2 [(C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_2\lambda_1 - C_1\lambda_2) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_3\lambda_2 + C_4\lambda_1) \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + \\ & + (C_3\lambda_1 - C_4\lambda_2) \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x)] \cos(ny + y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_{xy}^{(I)} = & -\frac{n^2}{B} [D_1 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x) + D_2 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + D_3 \operatorname{sh}(n\lambda_1 x) \sin(n\lambda_2 x) + \\ & + D_4 \operatorname{ch}(n\lambda_1 x) \cos(n\lambda_2 x)] \cos(ny + y_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 = A_1 C_1 + C_2 M, \quad D_2 = A_1 C_2 - C_1 M, \quad D_3 = A_1 C_3 - \\ - C_4 M, \quad D_4 = A_1 C_4 + C_3 M, \quad M = \sqrt{B_1 (B_1 - A_1)}. \end{aligned}$$

1.2. В случае плоской задачи в полярных координатах будут иметь место соотношения

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{4}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, \quad \sigma_i = \Phi(e_i),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{r\theta}, \quad e_r + e_\theta = 0, \quad (1.371)$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}, \quad e_i = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{e_r^2 + e_{r\theta}^2}.$$

Используя закон степенного упрочнения (1.353), из (1.371) получим

$$\begin{aligned}\sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{4}{3} A e_i^{\kappa-1} e_r, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{2}{3} A e_i^{\kappa-1} e_{r\theta}, \quad A, \kappa = \text{const.}\end{aligned}\quad (1.372)$$

В случае плоской деформации в полярных координатах для начального осесимметричного состояния

$$e_r^{(0)} + e_\theta^{(0)} = 0, \quad e_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad u_\theta^{(0)} = 0,$$

откуда

$$\frac{du_r^{(0)}}{dr} + \frac{u_r^{(0)}}{r} = 0. \quad (1.373)$$

Из (1.373) следует

$$u_r^{(0)} = -\frac{C}{r}, \quad e_r^{(0)} = \frac{C}{r^2}, \quad e_i^{(0)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{C}{r^2}, \quad C = \text{const.} \quad (1.374)$$

Используя разложения (1.223), (1.358), (1.360), (1.362), (1.361), записанные в полярных координатах, и выражения (1.374), из (1.372) получим

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(n)} - \sigma_\theta^{(n)} &= 4B\kappa r^q e_r^{(n)} + F^{(n-1)}, \\ \tau_{r\theta}^{(n)} &= 2B r^q e_{r\theta}^{(n)} + \Theta^{(n-1)},\end{aligned}\quad (1.375)$$

где $B = \frac{A}{3} \left(\frac{2C}{\sqrt{3}} \right)^{\kappa-1}$, $q = 2(1 - \kappa)$, а функции $F^{(n-1)}$, $\Theta^{(n-1)}$ зависят от компонент не выше $(n-1)$ -го приближения, причем $F^{(0)} = \Theta^{(0)} = 0$.

Уравнению несжимаемости

$$\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(1)}}{r} = 0$$

удовлетворим, полагая

$$u_r^{(1)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \theta}, \quad u_\theta^{(1)} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial r}.$$

Здесь примем также, что

$$\chi^{(1)} = rR(r) \varphi(\theta),$$

тогда

$$\begin{aligned} u_r^{(I)} &= -R\dot{\varphi}, & u_\theta^{(I)} &= \left(R + r \frac{dR}{dr}\right) \varphi, \\ e_r^{(I)} &= -e_\theta^{(I)} = -\dot{\varphi} \frac{dR}{dr}, \\ e_{r\theta}^{(I)} &= \frac{1}{2} \left[\left(r \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} - \frac{R}{r} \right) \varphi - \frac{R}{r} \ddot{\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (1.376)$$

Из (1.375) и (1.376) получим

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} &= -4\kappa Br^q \frac{dR}{dr} \dot{\varphi}, \\ \tau_{r\theta}^{(I)} &= Br^q \left[\left(r \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} - \frac{R}{r} \right) \varphi - \frac{R}{r} \ddot{\varphi} \right]. \end{aligned} \quad (1.377)$$

Из уравнений равновесия (1.153) и (1.377) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r^{(I)}}{\partial r} &= Br^{q-1} \left\{ \left[r \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{dR}{dr} (1 - 4\kappa) - \frac{R}{r} \right] \dot{\varphi} - \frac{R}{r} \ddot{\varphi} \right\}, \\ \frac{\partial \sigma_\theta^{(I)}}{\partial \theta} &= -Dr^q \left\{ \left[r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + (q+4)r \frac{dR}{dr} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (q+1) \frac{dR}{dr} + (q+1) \frac{R}{r} \right] \varphi - \left[\frac{dR}{dr} + (q+1) \frac{R}{r} \right] \ddot{\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (1.378)$$

Из первого уравнения (1.377) будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (\sigma_r^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)}) = -4\kappa B \left(qr^{q-1} \frac{dR}{dr} + r^q \frac{d^2R}{dr^2} \right) \ddot{\varphi}. \quad (1.379)$$

Дифференцируя первое выражение (1.378) по θ , а второе по r , вычитая одно из другого и используя (1.379), полагая при этом $\varphi = \cos n\theta$, получим уравнение

$$\begin{aligned} r^4 \frac{d^4R}{dr^4} + 2(q+3)r^3 \frac{d^3R}{dr^3} + \\ + [q^2 + 6q + 5 + 2n^2(1 - 2\kappa)] r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + \\ + r \frac{dR}{dr} [(q^2 - 1) - 2n^2(2\kappa - 1)(q + 1)] + \\ + R [n^4 + (1 - q^2) - (2 - q^2)n^2] = U^{(n-1)}, \end{aligned} \quad (1.380)$$

где $U^{(n-1)}$ определяется из решения $(n-1)$ -го приближения.

Для решения уравнения Эйлера (1.380) положим $R = r^\mu$, тогда для определения μ имеем уравнение

$$\mu^4 + 2q\mu^3 + [q^2 - 2 - 2(\kappa - 1)n^2]\mu^2 - \\ - 2q[1 - (2\kappa - 1)n^2]\mu + 1 - q^2 + (2 - q^2)n^2 + n^4 = 0. \quad (1.381)$$

При $n = 1$ уравнение (1.381) принимает вид

$$\mu[\mu^3 + 2q\mu^2 + \kappa(q^2 - 4\kappa) - 4q\kappa] = 0. \quad (1.382)$$

Корни уравнения (1.382) суть

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 2(1 - \kappa), \quad \mu_3 = 2\kappa, \quad \mu_4 = -2. \quad (1.383)$$

При $n > 1$ уравнение (1.381) раскладывается на сомножители

$$(\mu^2 + q\mu + a + ib)(\mu^2 + q\mu + a - ib) = 0, \quad (1.384)$$

где

$$a = -[1 + 2(\kappa - 1)^2 n^2],$$

$$b^2 = 4\{n^4 \kappa(1 - \kappa) + n^2[(1 - \kappa)^2 - \kappa] - (1 - \kappa^2)\},$$

$$a^2 + b^2 = (1 - n^2)^2 + a^2(n^2 - 1).$$

Из (1.384) следует, что корни уравнения (1.381) имеют вид

$$\mu_{1, 2, 3, 4} = \\ = \frac{1}{2} \left\{ -q \pm \sqrt{\frac{1}{2} [V(q^2 - 4a)^2 + 16b^2 + (q^2 - 4a)^2]} \right\} \pm \\ \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{1}{2} [V(q^2 - 4a)^2 + 16b^2 - (q^2 - 4a)^2]}. \quad (1.385)$$

Пользуясь значениями корней (1.383), (1.385), можно записать общее решение однородного уравнения (1.380), а далее получить выражения для первого приближения компонент напряженного и деформированного состояния: при $n = 0$

$$\sigma_r^{(I)} = -\frac{4\kappa BC_{01}}{q-2} r^{q-2} + C_{02}, \\ \sigma_\theta^{(I)} = -4\kappa BC_{01} \left(1 - \frac{1}{q-2}\right) r^{q-2} + C_{02}, \quad (1.386) \\ \tau_{r\theta}^{(I)} = 0, \quad u_r^{(I)} = -\frac{C_{01}}{r}, \quad e_r^{(I)} = \frac{C_{01}}{r^2};$$

при $n = 1$

$$\sigma_r^{(I)} = Br^q \{ (q^2 + 4q\kappa)C_{11}r^{-q-1} + 4\kappa^2C_{12}r^{2\kappa-1} + \\ + 4C_{13}r^{-3} \} \cos(\theta + \theta_0),$$

$$\sigma_\theta^{(I)} = Br^q \{ q^2C_{11}r^{-q-1} + 12\kappa^2C_{12}r^{2\kappa-1} + \\ + 4(1-2\kappa)C_{13}r^{-3} \} \cos(\theta + \theta_0),$$

$$\tau_{r\theta}^{(I)} = Br^q \{ q^2C_{11}r^{-q-1} + 4\kappa^2C_{12}r^{2\kappa-1} + 4C_{13}r^{-3} \} \sin(\theta + \theta_0),$$

$$u_r^{(I)} = - (C_{11}r^{-q} + C_{12}r^{2\kappa} + C_{13}r^{-2}) \cos(\theta + \theta_0),$$

$$u_\theta^{(I)} = [C_{11}(1-q)r^{-q} + C_{12}(2\kappa+1)r^{2\kappa} - C_{13}r^{-2}] \sin(\theta + \theta_0),$$

$$e_r^{(I)} = -e_\theta^{(I)} = - (-qC_{11}r^{-q} + 2\kappa C_{12}r^{2\kappa-1} + \\ + 2C_{13}r^{-3}) \cos(\theta + \theta_0),$$

$$e_{r\theta}^{(I)} = (q^2C_{11}r^{-q-1} + 4\kappa^2C_{12}r^{2\kappa-1} + 4C_{13}r^{-3}) \sin(\theta + \theta_0);$$

при $n \geq 2$

$$\sigma_r^{(I)} = \frac{B}{n} \{ r^{\alpha-1} C_{n1} [(m_1 - 1) [m_1 (m_1 - 2) + \beta^2] + \\ + (q + 4) [m_1 (m_1 - 1) + \beta^2] + (1 - q + n^2 - 4\kappa n^2) m_1 + \\ + (q + 1) (n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \beta (-m_1^2 - \beta^2 - 1 - \\ - n^2 + 4\kappa n^2) \sin(\beta \ln r)] + r^{\alpha-1} C_{n2} [(m_1 - 1) \times \\ \times [m_1 (m_1 - 2) - \beta^2] + (q + 4) [m_1 (m_1 - 1) - \beta^2] + \\ + (1 - q + n^2 - 4\kappa n^2) m_1 + (q + 1) (n^2 - 1) \times \\ \times \sin(\beta \ln r) + \\ + \beta (m_1^2 - \beta^2 - 1 + n^2 - 4\kappa n^2) \cos(\beta \ln r)] + \\ + r^{\alpha-1} C_{n3} [(m_2 - 1) [\beta^2 + m_2 (m_2 - 2)] + \\ + (q + 4) [m_2 (m_2 - 1) + \beta^2] + \\ + (1 - q + n^2 - 4\kappa n^2) m_2 + \\ + (q + 1) (n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \\ + \beta (-m_2^2 - \beta - 1 - n^2 + 4\kappa n^2) \sin(\beta \ln r)] + \\ + r^{-(\alpha+1)} C_{n4} [(m_2 - 1) [m_2 (m_2 - 1) - \beta^2] + \\ + (q + 4) [m_2 (m_2 - 1) - \beta^2] + (1 + q + n^4 - 4\kappa n^2) m_2 + \\ + (q + 1) (n^2 - 1) \sin(\beta \ln r) + \beta (m_2^2 - \beta^2 - 1 + \\ + n^2 - 4\kappa n^2) \cos(\beta \ln r)] \} \cos(n\theta + \theta_0),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta}^{(1)} &= \frac{B}{n} \{ r^{\alpha-1} C_{n_1} [(m-1) [m_1 (m_1 - 2) + \beta^2] + \\
&\quad + (q+4) [m_1 (m_1 - 1) + \beta^2] + \\
&\quad + (1+q+n^2)m_1 + (q+1)(n^2-1)] \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + \beta (-m_1^2 - \beta - 1 + n^2 - 4\kappa n^2) \sin(\beta \ln r) \} + \\
&\quad + r^{\alpha-1} C_{n_2} [(m_1-1) [m_1 (m_1 - 2) - \beta^2] + \\
&\quad + (q+4) [m_1 (m_1 - 1) - \beta^2] + \\
&\quad + (1+q+n^2)m_1 + (q+1)(n^2-1)] \sin(\beta \ln r) + \\
&\quad + \beta (m_1^2 - \beta - 1 + n^2 - 4\kappa n^2) \cos(\beta \ln r) \} + \\
&\quad + r^{\alpha-1} C_{n_3} [(m_2-1) [m_2 (m_2 - 1) + \beta^2] + \\
&\quad + (q+4) [m_2 (m_2 - 1) + \beta^2] + \\
&\quad + (1+q+n^2)m_2 + (q+1)(n^2-1)] \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + \beta (-m_2^2 - \beta - 1 + n^2 - 4\kappa n^2) \sin(\beta \ln r) \} + \\
&\quad + r^{\alpha-1} C_{n_4} [(m_2-1) [m_2 (m_2 - 1) - \beta^2] + \\
&\quad + (q+4) [m_2 (m_2 - 1) - \beta^2] + \\
&\quad + (1+q+n^2)m_2 + (q+1)(n^2-1)] \sin(\beta \ln r) + \\
&\quad + \beta (m_2^2 - \beta - 1 + n^2 - 4\kappa n^2) \cos(\beta \ln r) \} \cos(n\theta + \theta_0), \\
\tau_{r\theta}^{(1)} &= B \{ r^{\alpha-1} [C_{n_1} (m_1^2 + \beta^2 + n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + C_{n_2} (m_1^2 - \beta^2 + n^2 - 1) \sin(\beta \ln r)] + \\
&\quad + r^{\alpha-1} [C_{n_3} (m_2^2 + \beta^2 + n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + C_{n_4} (m_2^2 - \beta^2 + n^2 - 1) \sin(\beta \ln r)] \} \sin(n\theta + \theta_0), \\
u_r^{(1)} &= -nr^{-q} \{ (C_{n_1} r^{\alpha} - C_{n_3} r^{-\alpha}) \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + (C_{n_2} r^{\alpha} + C_{n_4} r^{-\alpha}) \sin(\beta \ln r) \} \cos(n\theta + \theta_0), \\
u_{\theta}^{(1)} &= r^{-q} \{ C_{n_1} r^{\alpha} [\alpha \cos(\beta \ln r) - \beta \sin(\beta \ln r) - q + 1] + \\
&\quad + C_{n_2} r^{\alpha} [\alpha \sin(\beta \ln r) + \beta \cos(\beta \ln r) - q + 1] - \\
&\quad - C_{n_3} r^{-\alpha} [\alpha \cos(\beta \ln r) + \beta \sin(\beta \ln r) + q - 1] - \\
&\quad - C_{n_4} r^{-\alpha} [\alpha \sin(\beta \ln r) - \beta \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + q - 1] \} \sin(n\theta + \theta_0), \\
e_r^{(1)} &= -e_{\theta}^{(1)} = -nr^{-q-1} \{ C_{n_1} r^{\alpha} [\alpha \cos(\beta \ln r) - \\
&\quad - \beta \sin(\beta \ln r) - q] + \\
&\quad + C_{n_2} r^{\alpha} [\alpha \sin(\beta \ln r) + \beta \cos(\beta \ln r) - q] - \\
&\quad - C_{n_3} r^{-\alpha} [\alpha \cos(\beta \ln r) + \\
&\quad + \beta \sin(\beta \ln r) + q] - C_{n_4} r^{-\alpha} [\alpha \sin(\beta \ln r) - \\
&\quad - \beta \cos(\beta \ln r) + q] \} \cos(n\theta + \theta_0),
\end{aligned}$$

$$e_{r\theta}^{(1)} = r^{-q-1} \{ r^\alpha C_{n1} (m_1^2 + \beta^2 + n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \\ + r^\alpha C_{n2} (m_1^2 - \beta^2 + n^2 - 1) \sin(\beta \ln r) + \\ + r^{-\alpha} C_{n3} (m_2^2 + \beta^2 + n^2 - 1) \cos(\beta \ln r) + \\ + r^{-\alpha} C_{n4} (m_2^2 - \beta^2 + n^2 - 1) \sin(\beta \ln r) \} \sin(n\theta + \theta_0),$$

где

$$m_1 = -q + \alpha, \quad m_2 = -q - \alpha,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} [V(q^2 - 4a)^2 + 16b^2 + (q^2 - 4a)]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} [V(q^2 - 4a)^2 + 16b^2 - (q^2 - 4a)]}.$$

2. В случае осесимметричной деформации соотношения теории малых упругопластических деформаций принимают вид

$$\sigma_r - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_r, \quad \sigma_z - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_z,$$

$$\sigma_\theta - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_\theta, \quad \tau_{rz} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{rz},$$

$$\sigma_i = \Phi(e_i), \quad e_r + e_\theta + e_z = 0, \quad (1.387)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2]^{1/2},$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(e_r - e_\theta)^2 + (e_\theta - e_z)^2 + (e_z - e_r)^2 + 6e_{rz}^2]^{1/2}.$$

2.1. Предположим, что в начальном состоянии имеет место простое растяжение

$$\sigma_z^{(0)} = \text{const}, \quad \sigma_r^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = \tau_{rz}^{(0)} = 0, \quad (1.388)$$

$$e_r^{(0)} = e_\theta^{(0)} = -1/2 e_z^{(0)}, \quad e_{r\theta}^{(0)} = 0.$$

Линеаризуя соотношения (1.387) и учитывая (1.388), найдем в первом приближении

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma^{(1)} + 2B e_r^{(1)} + (B - A) e_z^{(1)},$$

$$\sigma_\theta^{(1)} = \sigma^{(1)} + 2B e_\theta^{(1)} + (B - A) e_z^{(1)},$$

$$\sigma_z^{(1)} = \sigma^{(1)} + 2A e_z^{(1)}, \quad (1.389)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = 2B e_{rz}^{(1)}.$$

Второму приближению соответствует

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(II)} &= \sigma^{(II)} + 2Be_r^{(II)} + (B - A)e_z^{(II)} + 2(A - B)\frac{e_r^{(I)}e_z^{(I)}}{e_i^{(0)}} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(B - A)\left(\frac{\bar{e}_i^2}{e_i^{(0)}} - \frac{e_z^{(I)2}}{e_z^{(0)}}\right) - C\frac{e_z^{(I)2}}{e_i^{(0)}}, \\ \sigma_\theta^{(II)} &= \sigma^{(II)} + 2Be_\theta^{(II)} + (B - A)e_z^{(II)} + 2(A - B)\frac{e_z^{(I)}e_\theta^{(I)}}{e_i^{(0)}} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(B - A)\left(\frac{\bar{e}_i^2}{e_i^{(0)}} - \frac{e_z^{(I)2}}{e_z^{(0)}}\right) - C\frac{e_z^{(I)2}}{e_i^{(0)}}, \quad (1.390) \\ \sigma_z^{(II)} &= \sigma^{(II)} + 2Ae_z^{(II)} + (A - B)\left(\frac{\bar{e}_i}{e_i^{(0)}} - \frac{e_z^{(I)2}}{e_z^{(0)}}\right) + 2Ce_z^{(I)2}, \\ \tau_{rz}^{(II)} &= 2Be_{rz}^{(II)} + 2(A - B)\frac{e_z^{(I)}e_{rz}^{(I)}}{e_i^{(0)}},\end{aligned}$$

где

$$e_i^{(0)} = e_z^{(0)},$$

$$\bar{e}_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(e_r^{(I)} - e_\theta^{(I)})^2 + (e_\theta^{(I)} - e_z^{(I)})^2 + (e_z^{(I)} - e_r^{(I)})^2 + 6e_{rz}^{(I)2}]^{1/2}, \quad (1.391)$$

$$\frac{d\Psi}{de_i} e_z^{(0)} = A - B, \quad B = \Psi(e_i^{(0)}), \quad C = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial e_i^2} e_z^{(0)2}.$$

Уравнению неразрывности удовлетворим, полагая

$$u_r^{(n)} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial r}, \quad u_z^{(n)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial z}. \quad (1.392)$$

Используя (1.392), соотношения (1.389), (1.392) и уравнение равновесия (1.184), получим уравнение для определения функции $\Phi^{(n)}$:

$$\begin{aligned}B \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial z^4} + (3A - B) \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial r^2 \partial z^2} + B \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial z^4} - \frac{3A - B}{r} \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial z^2 \partial r} - \\ - \frac{3B}{r^3} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial r} + \frac{3B}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial r^2} - \frac{2B}{r} \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial r^3} = U^{(n-1)}.\end{aligned} \quad (1.393)$$

Решение однородного уравнения (1.393) ищем в виде

$$\Phi^{(1)} = R(r) \sin(\lambda z). \quad (1.394)$$

Для определения $R(r)$ будем иметь уравнение четвертого порядка]

$$B \frac{d^4 R}{dr^4} - \frac{2B}{r} \frac{d^3 R}{dr^3} + \left[(B - 3A)\lambda^2 + \frac{2B}{r^2} \right] \frac{d^2 R}{dr^2} - \\ - \left[\frac{B - 3A}{r} \lambda^2 + \frac{3B}{r^3} \right] \frac{dR}{dr} + B\lambda^4 R = 0, \quad (1.395)$$

которое разбивается на два:

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} + \mu^2 R_1 = 0, \\ \frac{d^2 R_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dR_2}{dr} + \bar{\mu}^2 R_2 = 0, \quad (1.396)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\lambda^2}{2B} [(B - 3A) + i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)}], \\ \bar{\mu}^2 = \frac{\lambda^2}{2B} [(B - 3A) - i\sqrt{3(B - A)(B + 3A)}].$$

Окончательно получим

$$\varphi^{(I)} = r [C_1 I_1(\mu r) + C_2 N_1(\mu r) + \\ + \bar{C}_1 I_1(\bar{\mu} r) + \bar{C}_2 N_1(\bar{\mu} r)] \sin \lambda z. \quad (1.397)$$

Здесь I_1 , N_1 — функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Соотношения для напряжений и деформаций имеют вид

$$\sigma_r^{(I)} = \frac{\lambda}{r^2} [2B(R_1 + R_2) + \\ + \sqrt{B(B + 3A)}(rR_1' e^{i\alpha} + rR_2' e^{-i\alpha})] \sin \lambda z, \\ \sigma_\theta^{(I)} = \frac{\lambda}{r^2} [-2B(R_1 + R_2) + \\ + \sqrt{3B(B - A)}(rR_1' e^{-i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} + rR_2' e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)})] \sin \lambda z, \\ \sigma_z^{(I)} = -\frac{\lambda}{r} \sqrt{B(B + 3A)}(R_1' e^{-i\alpha} + R_2' e^{i\alpha}) \sin \lambda z, \\ \tau_{zr}^{(I)} = \frac{\lambda}{r} \sqrt{B(B + 3A)}(R_1 e^{-i\alpha} + R_2 e^{i\alpha}) \cos \lambda z, \\ u_r^{(I)} = \frac{\lambda}{r} (R_1 + R_2) \sin \lambda z, \\ u_z^{(I)} = \frac{1}{r} (R_1' + R_2') \cos \lambda z, \quad (1.398)$$

$$\begin{aligned}
 e_r^{(I)} &= -\frac{\lambda}{r^2} [R_1 + R_2 - r (R_1' + R_2')] \sin \lambda z, \\
 e_\theta^{(I)} &= \frac{\lambda}{r^2} (R_1 + R_2) \sin \lambda z, \quad \alpha = \arctg \sqrt{\frac{B+3A}{3(B-A)}}, \\
 e_z^{(I)} &= -\frac{\lambda}{r^2} (R_1' + R_2') \sin \lambda z, \\
 e_{rz}^{(I)} &= \frac{\lambda^2}{2r} \sqrt{\frac{B+3A}{B}} (R_1 e^{-i\alpha} + R_2 e^{i\alpha}),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1 &= r [C_1 I_1 (\mu r) + C_2 N_1 (\mu r)], \\
 R_2 &= r [\bar{C}_1 I_1 (\bar{\mu} r) + \bar{C}_2 N_1 (\bar{\mu} r)].
 \end{aligned}$$

2.2. Рассмотрим линеаризованные соотношения осесимметричной задачи в случае, когда имеет место степенное упрочнение (1.353) и в качестве нулевого приближения берется решение осесимметричной задачи при плоском деформированном состоянии для трубы радиусов a и b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений p_1 и p_2 соответственно:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r^{(0)} &= \frac{(p_1 - p_2) \alpha^{2\kappa} (1 - \rho^{2\kappa})}{\rho^{2\kappa} (1 - \alpha^{2\kappa})}, \\
 \sigma_\theta^{(0)} &= \frac{(p_1 - p_2) \alpha^{2\kappa} [(2\kappa - 1) - \rho^{2\kappa}]}{\rho^{2\kappa} (1 - \alpha^{2\kappa})}, \quad (1.399)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_\xi^{(0)} = 1/2 (\sigma_r^{(0)} + \sigma_\theta^{(0)}), \quad \tau_{\rho\xi}^{(0)} = 0, \quad u_\rho^{(0)} = \frac{C\eta}{\rho}, \quad u_\xi^{(0)} = 0,$$

где

$$C = \frac{3}{2} \frac{\kappa}{A} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{\kappa-1} (p_2 - p_1),$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad \xi = \frac{z}{b}, \quad \eta = \text{sign} (p_2 - p_1).$$

Удовлетворяя уравнению несжимаемости при помощи функций, аналогичных (1.392), получим согласно (1.185) выражения для компонент деформации n -го приближения

$$\begin{aligned}
 e_\rho^{(n)} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi}, \quad e_\theta^{(n)} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \xi}, \\
 e_\xi^{(n)} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi}, \\
 e_{\rho\xi}^{(n)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi^{(n)}}{\partial \xi} \right). \quad (1.400)
 \end{aligned}$$

Подставляя разложение (1.223) в соотношение (1.387), учитывая (1.399) и (1.400), получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(n)} &= \sigma^{(n)} + \frac{B}{\rho^{2\kappa}} \left[2\kappa \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \xi} - (\kappa + 1) \rho \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi} \right] + f_1^{(n-1)}, \\ \sigma_{\theta}^{(n)} &= \sigma^{(n)} - \frac{B}{\rho^{2\kappa}} \left[2\kappa \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \xi} - (\kappa - 1) \rho \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi} \right] + f_2^{(n-1)}, \\ \sigma_{\xi}^{(n)} &= \sigma^{(n)} + \frac{2B}{\rho^{2\kappa}} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \xi} + f_3^{(n-1)},\end{aligned}\tag{1.401}$$

$$\tau_{\rho\xi}^{(n)} = -\frac{B}{\rho^{2\kappa}} \left(\frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2} + \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \xi^2} \right) + f_4^{(n-1)},$$

где

$$B = \frac{A}{3} \left(\frac{2C}{\sqrt{3}} \right)^{\kappa-1}, f_1^{(n-1)}, f_2^{(n-1)}, f_3^{(n-1)}, f_4^{(n-1)}$$

— функции, зависящие от компонент не выше $(n-1)$ -го приближения.

Подставляя соотношения (1.401) в уравнения равновесия (1.184) и исключая величину $\sigma^{(n)}$, получим одно уравнение для определения $\Phi^{(n)}$:

$$\begin{aligned}\frac{2\kappa^2 + \kappa - 1}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi^{(n-1)}}{\partial \rho^2 \partial \xi^2} - (\kappa + 1) \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2 \partial \xi^2} - \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{4\kappa^2 - 1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} - \frac{4\kappa^2 - 1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2} + \\ + \frac{4\kappa - 2}{\rho^2} \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^3} - \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^4} = \Phi^{(n-1)}.\end{aligned}\tag{1.402}$$

Рассмотрим решение уравнения (1.402) для первого приближения, когда $\Phi^{(n-1)}$ равно нулю. Положим

$$\Phi^{(1)} = R(\rho) \cos \lambda \xi.\tag{1.403}$$

Уравнение для определения R имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d^4 R}{d\rho^4} - \frac{4\kappa - 2}{\rho} \frac{d^3 R}{d\rho^3} + \left[\frac{4\kappa^2 - 1}{\rho^2} - \lambda^2 (\kappa + 1) \right] \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \\ + \left(-\frac{4\kappa - 1}{\rho^3} + \lambda^2 \frac{2\kappa^2 + \kappa - 1}{\rho} \right) \frac{dR}{d\rho} + \lambda^4 R = 0.\end{aligned}\tag{1.404}$$

Уравнение (1.404) можно представить в виде

$$\left(\frac{d}{d\rho^2} - \frac{2\kappa - 1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \mu^2\right) \left(\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{2\kappa - 1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \bar{\mu}^2 R\right) = 0, \quad (1.405)$$

причем

$$\begin{aligned} \mu^2 &= -\frac{\lambda^2}{2} [(\kappa + 1) + i\sqrt{(3 + \kappa)(1 - \kappa)}], \\ \bar{\mu}^2 &= -\frac{\lambda^2}{2} [(\kappa + 1) - i\sqrt{(3 + \kappa)(1 - \kappa)}]. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1.405) запишется в виде

$$R = \rho^\kappa [C_1 I_\kappa(\mu\rho) + C_2 N_\kappa(\mu\rho) + \bar{C}_1 I_\kappa(\bar{\mu}\rho) + \bar{C}_2 N_\kappa(\bar{\mu}\rho)]. \quad (1.406)$$

Здесь I_κ , N_κ — соответственно функции Бесселя и Неймана κ -го порядка, C_i , \bar{C}_i — сопряженные постоянные.

Напряженное и деформированное состояние для первого приближения определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)} &= \frac{B\lambda}{\rho^{2\kappa}} [- (R_1 + R_2) + \rho\sqrt{3 + \kappa} (R'_1 e^{-i\varphi} + R'_2 e^{i\varphi})] \sin \lambda\xi, \\ \sigma_\theta^{(I)} &= \frac{B\lambda}{\rho^{2\kappa}} \{ (2\kappa - 1)(R_1 + R_2)\rho\sqrt{1 - \kappa} \times \\ &\times [(\sqrt{1 - \kappa} + e^{-i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}) R'_1 + (\sqrt{1 - \kappa} + e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}) R'_1] \} \sin \lambda\xi, \\ \sigma_z^{(I)} &= \frac{B\lambda}{\rho^{2\kappa}} \{ 2(\kappa - 1)(R_1 + R_2) - \\ &- \rho\sqrt{3 + \kappa} (R'_1 e^{i\varphi} + R'_2 e^{-i\varphi}) \} \sin \lambda\xi, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)} &= \frac{B}{\rho^{2\kappa}} \{ 2(\kappa - 1)(R'_1 + R'_2) + \\ &+ \rho\sqrt{3 + \kappa} (R_1 e^{i\varphi} + R_2 e^{-i\varphi}) \} \cos \lambda\xi, \\ u_\rho^{(I)} &= \frac{\lambda}{\rho} (R_1 + R_2) \sin \lambda\xi, \\ u_z^{(I)} &= \frac{1}{\rho} (R'_1 + R'_2) \cos \lambda\xi, \\ e_\rho^{(I)} &= -\frac{\lambda}{\rho^2} [R_1 + R_2 - \rho(R'_1 + R'_2)] \sin \lambda\xi, \\ e_\theta^{(I)} &= \frac{\lambda}{\rho^2} (R_1 + R_2) \sin \lambda\xi, \end{aligned} \quad (1.407)$$

$$e_{\xi}^{(I)} = -\frac{\lambda}{\rho} (R_1' + R_2') \sin \lambda \xi,$$

$$e_{\rho \xi}^{(I)} = \frac{1}{2\rho} [2(\kappa - 1)(R_1' + R_2') + \\ + \rho \sqrt{3 + \kappa} (R_1 e^{i\varphi} + R_2 e^{-i\varphi})] \cos \lambda \xi,$$

$$R_1 = \rho^\kappa [C_1 I_\kappa(\mu\rho) + C_2 N_\kappa(\mu\rho)],$$

$$R_2 = \rho^\kappa [\bar{C}_1 I_\kappa(\bar{\mu}\rho) + \bar{C}_2 N_\kappa(\bar{\mu}\rho)].$$

2.3. Рассмотрим линейризованные соотношения осесимметричной задачи в случае, когда имеет место степенное упрочнение (1.353) и в качестве нулевого приближения берется решение для поллой сферы радиусов a , b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего и внешнего давления с интенсивностями p_1 и p_2 соответственно:

$$\sigma_\rho^{(0)} = \frac{(p_2 - p_1) \alpha^{3\kappa}}{1 - \alpha^{3\kappa}} \left(\frac{1}{\rho^{3\kappa}} - 1 \right) - p_2,$$

$$\sigma_\varphi^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = \frac{(p_2 - p_1) \alpha^{3\kappa}}{1 - \alpha^{3\kappa}} \left(\frac{2 - 3\kappa}{2\rho^{3\kappa}} - 1 \right) - p_2, \quad (1.408)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0,$$

$$u_\rho^{(0)} = -\frac{C}{\rho^2}.$$

Здесь

$$C = \frac{3\eta\alpha}{2} \sqrt{\frac{|p_2 - p_1|}{2A(1 - \alpha^{3\kappa})}},$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \rho = \frac{r}{b}, \quad \eta = \text{sign}(p_2 - p_1).$$

Условию (1.220) для материала несжимаемого и по упругим деформациям можно удовлетворить, полагая

$$u_\rho^{(n)} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta}, \quad u_\theta^{(n)} = -\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho}. \quad (1.409)$$

Учитывая (1.189), разложения (1.227) и соотношения (1.352), записанные в сферической системе координат при условии $\tau_{\rho\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0$, выразим компоненты напряжений

n -го приближения через функцию $\Phi^{(n)}$:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(n)} &= \sigma^{(n)} + \frac{D}{\rho^{3\kappa}} \left(-\frac{4\kappa}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \theta} \right) + f_\rho^{(n-1)}, \\ \sigma_\theta^{(n)} &= \sigma^{(n)} + \frac{D}{\rho^{3\kappa}} \left(\frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \rho \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} - \right. \\ &\quad \left. - (\kappa + 1) \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \theta} \right) + f_\theta^{(n-1)},\end{aligned}\tag{1.410}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\Phi^{(n)} &= \sigma^{(n)} + \frac{D}{\rho^{3\kappa}} \left(\frac{2\kappa}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta} - \frac{2\rho \cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa - 1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \theta} \right) + f_\Phi^{(n-1)}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(n)} &= \frac{D}{\rho^{3\kappa}} \left(\frac{2\rho}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} - \rho^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \theta^2} \right) + f_{\rho\theta}^{(n-1)},\end{aligned}$$

где

$$D = \frac{2}{3} A (2\eta C)^{(\kappa-1)}.$$

Здесь $f_\rho^{(n-1)}$, $f_\theta^{(n-1)}$, $f_\Phi^{(n-1)}$, $f_{\rho\theta}^{(n-1)}$ — функции, зависящие от компонент не выше $(n-1)$ -го приближения.

Подставляя соотношения (1.410) в уравнения равновесия (1.188), исключая $\sigma^{(n)}$, получим уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \theta^4} - 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial \theta^3} + \frac{(9\kappa^2 - 3\kappa - 1) \sin^2 \theta + 3}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \theta^2} - \\ - (3\kappa - 1)^2 \rho \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \theta^2} + (3\kappa - 1) \rho^2 \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} - \\ - (3\kappa - 1) \rho^2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2 \partial \theta} + (3\kappa - 1)^2 \rho \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \rho \partial \theta} - \\ - \frac{3\kappa(3\kappa - 1) \sin^2 \theta + 3}{\sin^2 \theta} \cos \theta \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \theta} - 6(\kappa - 1) \rho^3 \frac{\partial^3 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^3} - \\ - 6(3\kappa - 1)(\kappa - 1) \rho \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial \rho} + 9\kappa(\kappa - 1) \rho^3 \frac{\partial^2 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^2} + \\ + \rho^4 \frac{\partial^4 \Phi^{(n)}}{\partial \rho^4} = f^{(n-1)}.\end{aligned}\tag{1.411}$$

Функция $f^{(n-1)}$, зависящая от компонент не выше прибли-

жения $(n - 1)$, для первого приближения равна нулю. Решение для первого приближения будем искать в виде:

$$\Phi^{(1)}(\rho, \theta) = R(\rho) \Theta(\theta), \quad (1.412)$$

где $\Theta = \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta} \sin \theta$, $P_n(\cos \theta)$ — полином Лежандра.

После подстановки (1.412) в (1.411) будем иметь уравнение для определения R :

$$\begin{aligned} \rho^4 R^{IV} - 6(\kappa - 1) \rho^3 R''' + \\ + [9\kappa(\kappa - 1) - n(n - 1)(3\kappa - 1)] \rho^2 R'' - \\ - (3\kappa - 1) [6(\kappa - 1) - n(n + 1)(3\kappa - 1)] \rho R' + \\ + n(n + 1) [n(n + 1) - 3\kappa(3\kappa - 1)] R = 0. \end{aligned} \quad (1.413)$$

Для решения уравнения Эйлера (1.413) положим $R = \rho^\mu$. Тогда μ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \mu^4 - 6\kappa\mu^3 + [9\kappa^3 + 9\kappa - 7 - n(n + 1)(3\kappa - 1)]\mu^2 - \\ - 3\kappa\mu [9\kappa - 7 - n(n + 1)(3\kappa - 1)] + n(n + 1) - \\ - 3\kappa(3\kappa - 1) = 0. \end{aligned} \quad (1.414)$$

Уравнение (1.414) при $n \geq 2$, $\kappa < 0,8$ имеет четыре комплексных корня

$$\begin{aligned} \mu_{1, 2, 3, 4} = \frac{1}{2} \left\{ 3\kappa \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(9\kappa^2 - 4a) + 16b^2} + (9\kappa^2 - 4a)} \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(9\kappa^2 - 4a)^2 + 16b^2} - (9\kappa^2 - 4a)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.415)$$

Здесь

$$a = \frac{1}{2} [9\kappa - 7 - n(n + 1)(3\kappa - 1)],$$

$$\begin{aligned} b^2 = \frac{1}{4} [3n^2(n - 1)^2(1 - \kappa)(3\kappa + 1) + \\ + 2n(n + 1) - (9\kappa - 7)^2]. \end{aligned}$$

При $n = 1$ имеем

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 3\kappa - 2, \quad \mu_3 = -1, \quad \mu_4 = 3\kappa + 1.$$

Выпишем выражения для напряжений и перемещений в первом приближении:

при $n = 0$ (напряженное и деформированное состояние обладает центральной симметрией)

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)} &= D \left(C_{01} - \frac{4\kappa C_{02}}{\rho^{3\kappa}} \right), \\ \sigma_{\varphi}^{(I)} &= \sigma_{\theta}^{(I)} = D \left(C_{01} + \frac{2\kappa C_{02}}{\rho^{3\kappa}} \right), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)} &= 0, \\ u_{\rho}^{(I)} &= \frac{C_{02}}{\rho^2}, \\ e_{\rho}^{(I)} &= -\frac{2C_{02}}{\rho^3};\end{aligned}\tag{1.416}$$

при $n = 1$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(I)} &= \\ &= 6D \left[\frac{3\kappa^2 - \kappa - 6}{2\rho^2} C_{11} - \frac{2C_{12}}{\rho^{3\kappa+1}} - \kappa(3\kappa - 1)\rho C_{13} \right] P_1(\cos \theta), \\ \sigma_{\theta}^{(I)} &= \sigma_{\varphi}^{(I)} = \\ &= 3D \left[\frac{(\kappa - 1)(3\kappa - 4)}{\rho^2} C_{11} + \frac{2(3\kappa - 2)}{\rho^{3\kappa+1}} C_{12} - 4\kappa(3\kappa - 1)\rho C_{13} \right] \times \\ &\quad \times P_1(\cos \theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)} &= 3D \left[\frac{(\kappa - 1)(3\kappa + 4)}{\rho^2} C_{11} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\rho^{3\kappa+1}} C_{12} + \kappa(3\kappa - 1)\rho C_{13} \right] \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}, \\ e_{\rho\theta}^{(I)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\kappa - 1)(3\kappa + 4)}{\rho^{5-3\kappa}} C_{11} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2C_{12}}{\rho^4} + \frac{\kappa(3\kappa - 1)}{\rho^{2-3\kappa}} C_{13} \right] \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta},\end{aligned}\tag{1.417}$$

$$\begin{aligned}u_{\rho}^{(I)} &= 2 \left[\frac{C_{11}}{\rho^{4-3\kappa}} + \frac{C_{12}}{\rho^3} + \frac{C_{13}}{\rho^{1-3\kappa}} + C_{14} \right] P_1(\cos \theta), \\ u_{\theta}^{(I)} &= 2 \left[\frac{3\kappa - 9}{\rho^{4-3\kappa}} C_{11} - \frac{C_{12}}{\rho^3} + \frac{3\kappa + 1}{\rho^{1-3\kappa}} C_{13} + 2C_{14} \right] \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}, \\ e_{\rho}^{(I)} &= 2 \left[\frac{3\kappa - 4}{\rho^{5-3\kappa}} C_{11} - \frac{3C_{12}}{\rho^4} + \frac{3\kappa - 1}{\rho^{2-3\kappa}} C_{13} \right] P_1(\cos \theta), \\ e_{\theta}^{(I)} &= e_{\varphi}^{(I)} = - \left[\frac{3\kappa - 4}{\rho^{5-3\kappa}} C_{11} + \frac{3C_{12}}{\rho^4} + \frac{3\kappa - 1}{\rho^{2-3\kappa}} C_{13} \right] P_1(\cos \theta);\end{aligned}$$

при $n \geq 2$, $\kappa < 0,8$

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = n(n+1) D [M_1 \cos \gamma (x_1 C_{n1} - y_1 C_{n2}) - \\ - M_1 \sin \gamma (y_1 C_{n1} + x_1 C_{n2}) + M_2 \cos \gamma (x_2 C_{n3} - y_2 C_{n4}) - \\ - M_2 \sin \gamma (y_2 C_{n3} + x_2 C_{n4})] P_n(\cos \theta),$$

$$\sigma_{\theta}^{(I)} = n(n+1) D [M_1 \cos \gamma (z_1 C_{n1} - t_1 C_{n2}) - \\ - M_1 \sin \gamma (t_1 C_{n1} + z_1 C_{n2}) + M_2 \cos \gamma (z_2 C_{n3} - t_2 C_{n4}) - \\ - M_2 \sin \gamma (t_2 C_{n3} + z_2 C_{n4})] P_n(\cos \theta) - \\ - 2D [N_1 \cos \gamma (k_1 C_{n1} - \beta C_{n2}) - N_1 \sin \gamma (\beta C_{n1} + k_1 C_{n2}) + \\ + N_2 \cos \gamma (k_2 C_{n3} - \beta C_{n4}) - \\ - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_2 C_{n4})] \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$\sigma_{\varphi}^{(I)} = n(n+1) D [M_1 \cos \gamma (v_1 C_{n1} - w_1 C_{n2}) - \\ - M_1 \sin \gamma (w_1 C_{n1} + v_1 C_{n2}) + M_2 \cos \gamma (v_2 C_{n3} - w_2 C_{n4}) - \\ - M_2 \sin \gamma (w_2 C_{n3} + v_2 C_{n4})] P_n(\cos \theta) + \\ + 2D [N_1 \cos \gamma (k_1 C_{n1} - \beta C_{n2}) - \\ - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n1} + k_1 C_{n2}) + N_2 \cos \gamma (k_2 C_{n3} - \beta C_{n4}) - \\ - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_2 C_{n4})] \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)} = D [N_1 \cos \gamma (e_1 C_{n1} - f_1 C_{n2}) - N_1 \sin \gamma (f_1 C_{n1} + e_1 C_{n2}) + \\ + N_2 \cos \gamma (e_2 C_{n3} - f_2 C_{n4}) - N_2 \sin \gamma (f_2 C_{n3} + e_2 C_{n4})] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$u_{\rho}^{(I)} = \frac{n(n+1)}{\rho^{2-3\kappa}} [N_1 \cos \gamma C_{n1} - N_2 \sin \gamma C_{n2} + \\ + N_1 C_{n3} \cos \gamma - N_2 C_{n4} \sin \gamma] P_n(\cos \theta),$$

$$u_{\theta}^{(I)} = \rho^{3\kappa-2} [N_1 \cos \gamma (k_1 C_{n1} - \beta C_{n2}) - \\ - N_1 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_1 C_{n2}) + N_2 \cos \gamma (k_2 C_{n3} - \beta C_{n4}) - \\ - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_1 C_{n4})] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}, \quad (1.418)$$

$$e_{\rho}^{(I)} = (n+1) n \rho^{3(\kappa-1)} \{N_1 \cos \gamma [(k_1 - 2) C_{n1} - \beta C_{n2}] - \\ - N_1 \sin \gamma [\beta C_{n1} + (k_1 - 2) C_{n2}] + \\ + N_2 \cos \gamma [(k_2 - 2) C_{n3} - \beta C_{n4}] - \\ - N_2 \sin \gamma [\beta C_{n3} + (k_2 - 2) C_{n4}]\} P_n(\cos \theta),$$

$$e_{\theta}^{(I)} = n(n+1) \rho^{3(\kappa-1)} \{N_1 \cos \gamma [(1 - k_1) C_{n1} + \beta C_{n2}] + \\ + N_1 \sin \gamma [\beta C_{n1} + (k_1 - 1) C_{n2}] + N_2 \cos \gamma [(1 - k_2) C_{n3} + \beta C_{n4}] +$$

$$\begin{aligned}
 & + N_2 \sin \gamma [\beta C_{n3} + (k_2 - 1) C_{n4}] P_n(\cos \theta) - \\
 & - \rho^{3(\kappa-1)} \{ N_1 \cos \gamma (k_1 C_{n1} - \beta C_{n2}) - N_1 \sin \gamma (\beta C_{n1} + k_1 C_{n2}) + \\
 & \quad + N_2 \cos \gamma (k_2 C_{n3} - \beta C_{n4}) - \\
 & \quad - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_2 C_{n4}) \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{\varphi}^{(I)} = & n(n+1) \rho^{3(\kappa-1)} \{ N_1 \cos \gamma (C_{n1} - C_{n2}) - \\
 & - N_1 \sin \gamma (C_{n1} + C_{n2}) + N_2 \cos \gamma (C_{n3} - C_{n4}) - \\
 & - N_2 \sin \gamma (C_{n3} + C_{n4}) \} P_n(\cos \theta) + \\
 & + \rho^{3(\kappa-1)} \{ N_1 \cos \gamma (k_1 C_{n1} - \beta C_{n2}) - N_1 \sin \gamma (\beta C_{n1} + k_1 C_{n2}) + \\
 & \quad + N_2 \cos \gamma (k_2 C_{n3} - \beta C_{n4}) - \\
 & \quad - N_2 \sin \gamma (\beta C_{n3} + k_2 C_{n4}) \} \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{\rho\theta}^{(I)} = & \frac{1}{2\rho^{3(1-\kappa)}} [N_1 \cos \gamma (e_1 C_{n1} - f_1 C_{n2}) - \\
 & - N_1 \sin \gamma (f_1 C_{n1} + e_1 C_{n2}) + N_2 \cos \gamma (e_2 C_{n3} - f_2 C_{n4}) - \\
 & - N_2 \sin \gamma (f_2 C_{n3} + e_2 C_{n4})] \frac{dP_n(\cos \theta)}{d\theta}.
 \end{aligned}$$

Здесь использовались следующие обозначения:

$$\gamma = \beta \ln \rho, \quad M_i = \rho^{k_i - 3\kappa} [(3\kappa - k_i)^2 + \beta^2]^{-1}, \quad N_i = \rho^{k_i - 3\kappa},$$

$$\begin{aligned}
 x_i = & k_i^2 + 3k_i(\kappa - 1) + k_i [18\kappa^2 + 15\kappa - \beta^2 + \\
 & + n(n+1)] + 3\beta(\kappa + 1) - 3\kappa[12\kappa + n(n+1)],
 \end{aligned}$$

$$y_i = 2k_i^2\beta - 6k_i\beta\kappa + \beta[\beta^2 - 12\kappa - n(n+1)],$$

$$\begin{aligned}
 z_i = & -3k_i^3\kappa + 3k_i^2(3\kappa - 1)(2\kappa + 1) - \\
 & - k_i [3\kappa(\beta^2 + 9\kappa^2 + 9\kappa - 7) - n(n+1)] + \\
 & + 3\beta^2(\kappa - 1) + 3\kappa[9\kappa - n(n+1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_i = & -3k_i^3\beta\kappa + 18k_i\beta\kappa - \\
 & - \beta [3\kappa(9\kappa^2 - 3\kappa + 1 + \beta^2) - n(n+1)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_i = & k_i^2(2 - 3\kappa) + 3k_i^2(6\kappa^2 - 3\kappa - 1) + \\
 & + k_i [3\kappa(\beta^2 - 9\kappa^2 - 9\kappa + 7) + n(n+1)] + \\
 & + 3\kappa[18\kappa^2 - 12\kappa - n(n+1)] - 3\beta(\kappa + 1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_i = & -3k_i^2\beta\kappa + 6k_i\beta\kappa(\kappa - 1) + 3\beta^2(9 - \kappa\beta) - \\
 & - \beta^2 [3\kappa(9\kappa^2 - 9\kappa + 1) + n(n+1)],
 \end{aligned}$$

$$e_i = k_i^2 - \beta^2 + n(n+1) - 3\kappa, \quad f_i = 3(k_i - 1),$$

где

$$i = 1, 2,$$

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left[3\kappa \pm \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(9\kappa^2 - 4a)^2 + 16b^2} + (9\kappa^2 - 4a)} \right],$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{(9\kappa^2 - 4a)^2 + 16b^2} - (9\kappa^2 - 4a)}.$$

3. Малый параметр δ может характеризовать отклонение нелинейной диаграммы $\sigma - e$ от линейной.

Предположим, что имеют место соотношения теории малых упругопластических деформаций (1.352). Перепишем эти соотношения в виде

$$\sigma'_{ij} = \Psi(e_u) e'_{ij},$$

$$\sigma_u = \Phi(e_u), \quad \sigma = 3Ke, \quad (1.419)$$

$$\Psi(e_u) = 2\Phi(e_u)/(3e_u),$$

где σ_u и e_u соответствуют интенсивностям напряжений и деформаций (1.352). Положим

$$\Psi(e_u) = 2G + \Omega(e_u). \quad (1.420)$$

Тогда из (1.419) и (1.420) получим

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij} + \Omega(e_u) e'_{ij},$$

$$\sigma_u = 3Ge_u + \frac{3}{2} \Omega(e_u) e_u, \quad (1.421)$$

$$\sigma = 3Ke.$$

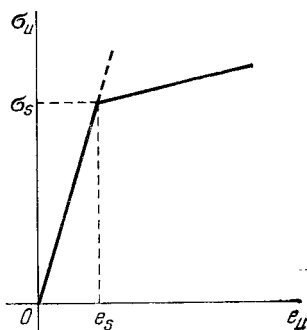


Рис. 14.

В случае линейного упрочнения (рис. 14) имеем

$$\sigma_u = 3Ge_u + 3(G_s - G)(e_u - e_s), \quad (1.422)$$

где $3G_s = d\sigma_u/de_u$. Следовательно, в этом случае

$$\Omega(e_u) = \frac{2(G_s - G)(e_u - e_s)}{e_u}. \quad (1.423)$$

Пусть малый параметр δ характеризует отклонение нелинейного участка диаграммы $\sigma_u - e_u$ от линейного. Величину Ω запишем в виде

$$\Omega(e_u) = \delta\omega(e_u). \quad (1.424)$$

Очевидно, что при $\delta = 0$ соотношения (1.421) переходят в соотношения линейного закона Гука. В случае

линейного упрощения можно положить $\delta = 2(G_s - G)$, тогда $\omega(e_u) = (e_u - e_s)/e_u$.

Соотношения (1.421) перепишем в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= 2Ge_{ij} + 3\lambda\delta_{ij}e + \delta\omega_{ij}, \\ \omega_{ij} &= \omega(e_u) e'_{ij}, \quad \lambda = K - 2/3G.\end{aligned}\quad (1.425)$$

Подставим выражения (1.425) в уравнения равновесия и при переходе к компонентам перемещений получим

$$G(u_{i,jj} + u_{j,ii}) + \delta_{ij}\lambda u_{i,jj} = \rho F_i - \delta\omega_{ij,j}. \quad (1.426)$$

Граничные условия для напряжений примут вид

$$(2Ge_{ij} + \lambda\delta_{ij}e) l_i = P_i - \delta\omega_{ij}l_j. \quad (1.427)$$

Решение будем искать в виде рядов по малому параметру. По определению $e_u = (V\sqrt{2}/2)(e_{ij}e_{ij})^{1/2}$, откуда

$$\begin{aligned}e_u &= \frac{V\sqrt{2}}{2} (e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)})^{1/2} \left\{ 1 + \delta \frac{e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(I)}}{e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)}} + \right. \\ &\quad \left. + \delta^2 \left[\frac{2e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(II)} + e_{ij}^{(I)}e_{ij}^{(I)}}{2e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)}} - \frac{(e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(I)})^2}{2(e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)})^2} \right] + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}e_u^{(0)} &= (V\sqrt{2}/2) (e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(0)})^{1/2}, \\ e_u^{(I)} &= \frac{V\sqrt{2}}{2} \frac{e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(I)}}{e_u^{(0)}}, \\ e_u^{(II)} &= \frac{V\sqrt{2}}{4} \left[\frac{2e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(II)} + e_{ij}^{(I)}e_{ij}^{(I)}}{e_u^{(0)}} - \frac{(e_{ij}^{(0)}e_{ij}^{(I)})^2}{e_u^{(0)3}} \right], \dots\end{aligned}\quad (1.428)$$

Аналогичные выражения имеют место для $\sigma_u^{(0)}$, $\sigma_u^{(I)}$, $\sigma_u^{(II)}$, ...
Выражения ω и ω_{ij} представимы в виде рядов:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \omega^{(n)} = \omega(e_u^{(0)} + \delta e_u^{(I)} + \delta^2 e_u^{(II)} + \dots), \\ \omega_{ij} &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \omega_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \delta^p \omega^{(p)} \right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \delta^q e_{ij}^{(q)} \right).\end{aligned}\quad (1.429)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\omega^{(0)} &= \omega(e_u^{(0)}), & \omega^{(I)} &= e_u^{(I)} \frac{d\omega}{de_u} \Big|_{e_u^{(0)}}, \\ \omega^{(II)} &= e_u^{(II)} \frac{d\omega}{de_u} \Big|_{e_u^{(0)}} + \frac{(e_u^{(I)})^2}{2} \frac{d^2\omega}{de_u^2} \Big|_{e_u^{(0)}} \dots, & (1.430) \\ \omega_{ij}^{(0)} &= \omega^{(0)} e'_{ij}{}^{(0)}, & \omega_{ij}^{(I)} &= \omega^{(I)} e'_{ij}{}^{(0)} + \omega^{(0)} e'_{ij}{}^{(I)}, \\ \omega_{ij}^{(II)} &= \omega^{(0)} e'_{ij}{}^{(II)} + \omega^{(I)} e'_{ij}{}^{(I)} + \omega^{(II)} e'_{ij}{}^{(0)}, \dots,\end{aligned}$$

Согласно (1.426) — (1.428) имеет место рекуррентная система уравнений:

$$G(u_{i,jj}^{(n)} + u_{j,ij}^{(n)}) + \delta_{ij} \lambda u_{i,jj}^{(n)} = \rho F_i^{(n)} - \omega_{ij,j}^{(n-1)} \quad (1.431)$$

и граничных условий:

$$\begin{aligned}(2Ge_{ij}^{(n)} + 3\lambda\delta_{ij}e^{(n)})l_j &= P_i^{(n)} - \omega_{ij}^{(n)}l_j & \text{на } S_p, \\ u_i^{(n)} &= u_{i0}^{(n)} & \text{на } S_u.\end{aligned} \quad (1.432)$$

Определение n -го приближения сводится к решению задачи теории упругости при массовых и поверхностных усилиях $\rho F_i^{(n)} - \omega_{ij,j}^{(n-1)}$, $P_i^{(n)} - \omega_{ij}^{(n-1)}l_j$ и перемещениях $u_{i0}^{(n)}$. Если внешние усилия, граничные условия не зависят от параметра δ , то

$$F_i^{(n)} = P_i^{(n)} = u_{i0}^{(n)} = 0, \quad \text{при } n \geq 1.$$

Метод последовательных приближений для решения задач теории малых упругопластических деформаций — «метод упругих решений» — был предложен А. А. Ильюшиным [57]. В отличие от указанного алгоритма А. А. Ильюшин не предполагал разложения функции ω_{ij} по степеням параметра δ .

§ 9. Напряженное и деформированное состояние упругой круговой кольцевой пластины, нагруженной в своей плоскости

Для решения ряда задач требуется знать напряженное и деформированное состояние в упругой круговой кольцевой пластине, нагруженной в своей плоскости.

Обозначим напряжения на внешнем контуре кольцевой пластины $r = r_0$ через σ_r^0 , $\tau_{r\theta}^0$, а на внутреннем контуре $r = r_i$ — через σ_r^i , $\tau_{r\theta}^i$ (рис. 15).

Разложим контурные напряжения в ряды Фурье ¹⁾.

$$\begin{aligned}\sigma_r^a &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta}^a &= a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin n\theta, \\ \sigma_r^i &= a''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a''_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b''_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta}^i &= a'''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'''_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b'''_n \sin n\theta.\end{aligned}\tag{1.433}$$

Отметим, что контурные нагрузки при $n = 0$ суть $\sigma_r^a = a_0$, $\sigma_r^i = a''_0$, а кроме того при любом $n > 1$ каждая из контурных нагрузок

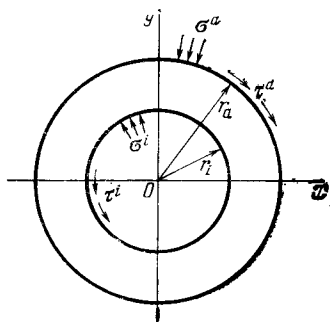


Рис. 15.

$$\begin{aligned}\sigma_r^a &= a_n \cos n\theta, & \sigma_r^a &= b_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta}^a &= a'_n \cos n\theta, & \tau_{r\theta}^a &= b'_n \sin n\theta, \\ \sigma_r^i &= a''_n \cos n\theta, & \sigma_r^i &= b''_n \sin n\theta, \\ \tau_{r\theta}^i &= a'''_n \cos n\theta, & \tau_{r\theta}^i &= b'''_n \sin n\theta.\end{aligned}$$

сама по себе образует систему, находящуюся в равновесии. Исключение составляют нагрузки при $n = 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_r^a &= a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta, & \tau_{r\theta}^a &= a'_0 + a'_1 \cos \theta + b'_1 \sin \theta, \\ \sigma_r^i &= a''_1 \cos \theta + b''_1 \sin \theta, & \tau_{r\theta}^i &= a'''_0 + a'''_1 \cos \theta + b'''_1 \sin \theta.\end{aligned}\tag{1.434}$$

Система нагрузок, соответствующая первому соотношению (1.434), статически эквивалентна силе величиной $\pi a_1 r_a$, направленной по полярной оси, и силе величиной $\pi b_1 r_a$, перпендикулярной к первой и проходящей через центр кольцевой пластины. Система нагрузок, соответствующая второму соотношению (1.434), эквивалентна силе $\pi b'_1 r_a$, направленной по полярной оси, силе $\pi a'_1 r_a$, перпен-

¹⁾ Здесь и ниже штрихи в верхнем индексе используются для обозначений коэффициентов рядов Фурье.

дикулярной к ней и проходящей через центр кольца и моменту величиной $2\pi a_0' r_a^2$ и т. д.

Для того чтобы нагрузки (1.434) находились в равновесии, необходимо выполнение соотношений

$$\begin{aligned} (a_1 - b_1') r_a - (a_1'' - b_1''') r_i &= 0, \\ (b_1 + a_1') r_a - (b_1'' + a_1''') r_i &= 0, \\ a_1' r_a^2 - a_0''' r_i^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.435)$$

Ниже для каждого частного случая самоуравновешенных нагрузок выпишем составляющие напряжений и перемещений ¹⁾:

$$\text{I.} \quad \sigma_r^a = a_0, \quad \sigma_r^i = a_0'', \quad \tau_{r\theta}^a = \tau_{r\theta}^i = 0;$$

тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{\beta^2 - 1} [a_0 \beta^2 - a_0'' - (a_0 - a_0'') \frac{\beta^2}{\rho^2}], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{\beta^2 - 1} [a_0 \beta^2 - a_0'' + (a_0 - a_0'') \frac{\beta^2}{\rho^2}], \quad \tau_{\rho\theta} = 0, \\ u &= \frac{1}{(\beta^2 - 1)E} [(1 - \mu)(a_0 \beta^2 - a_0'') + (1 + \mu)(a_0 - a_0'') \beta^2 / \rho^2] r_i \rho, \\ v &= 0. \end{aligned} \quad (1.436)$$

Здесь и всюду в дальнейшем обозначено

$$\frac{r_a}{r_i} = \beta, \quad \frac{r}{r_i} = \rho, \quad m = \frac{1}{\mu}.$$

$$\text{II.} \quad \sigma_r^a = \sigma_r^i = 0, \quad \tau_{r\theta}^a = a_0', \quad \tau_{r\theta}^i = a_0''', \quad a_0' r_a^2 - a_0''' r_i^2 = 0.$$

Тогда

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{a_0' \beta^2}{\rho^2} = \frac{a_0'''}{\rho^2}, \quad (1.437)$$

$$u = 0, \quad v = \frac{a_0'}{2G} r_i \left(\rho - \frac{\beta^2}{\rho} \right) = \frac{a_0'''}{2G} r_i \left(\frac{\rho}{\beta^2} - \frac{1}{\rho} \right).$$

$$\text{III.} \quad \sigma_r^a = a_1 \cos \theta, \quad \sigma_r^i = a_1'' \cos \theta, \quad \tau_{r\theta}^a = b_1' \sin \theta, \\ \tau_{r\theta}^i = b_1''' \sin \theta,$$

¹⁾ Подробный вывод этих соотношений содержится в книге В и е з е н о С. В., Г р а м м е л ь Р., Technische Dynamik. Berlin, Springer, 1 Aufl.: 1939; 2 Aufl.: 1953; русск. перев. В и ц е н о К. Б., Г р а м м е л ь Р. Техническая динамика, Л., Гостехиздат, 1950.

причем

$$(a_1 - b_1') r_a - (a_1'' - b_1'') r_i = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \left[\frac{\rho}{\beta} a_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (a_1 - b_1') \left(\frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta^4-1} (a_1 - a_1''\beta) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \left[3 \frac{\rho}{\beta} a_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (a_1 - b_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\beta^2}{\rho^3} - 3\rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (a_1 - a_1''\beta) \left(3 \frac{\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta} &= \left[\frac{\rho}{\beta} a_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (a_1 - b_1') \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (a_1 - a_1''\beta) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (1.438)$$

$$u = \frac{1}{E} \left[\frac{m+1}{m} \frac{3m-1}{3m+1} C_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{m+1}{m} \frac{\beta^2}{\rho^2} C_2 + \frac{m-3}{m} \frac{\rho^2}{\beta^2} C_3 \right] \beta r_i \cos \theta,$$

$$v = \frac{1}{E} \left[-\frac{m+1}{m} \frac{3m-1}{3m+1} C_1 \left(\ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{m+1}{3m-1} \right) + \frac{m+1}{m} \frac{\beta^2}{\rho^2} C_2 + \frac{5m+1}{m} \frac{\rho^2}{\beta^2} C_3 \right] \beta r_i \sin \theta,$$

где

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3m+1}{4m} (a_1 - b_1'), \\ C_2 &= \frac{3m+1}{8m} \frac{a_1 - b_1'}{\beta^2+1} + \frac{a_1 - a_1''\beta}{2(\beta^4-1)}, \\ C_3 &= \frac{a_1}{2} - \frac{3m+1}{8m} \frac{(a_1 - b_1')\beta^2}{\beta^2+1} + \frac{a_1 - a_1''\beta}{2(\beta^4-1)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV. } \sigma_r^a &= b_1 \sin \theta, \quad \sigma_r^i = b_1' \sin \theta, \quad \tau_{r\theta}^a = a_1' \cos \theta, \\ \tau_{r\theta}^i &= a_1'' \cos \theta, \end{aligned}$$

причем

$$(b_1 + a_1') r_a - (b_1'' + a_1'') r_i = 0.$$

Тогда

$$\sigma_{\rho} = \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a'_1) \left(\frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b''_1\beta) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta, \quad (1.439)$$

$$\sigma_{\theta} = \left[3 \frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a'_1) \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} + \frac{\beta^2}{\rho^3} - 3\rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b''_1\beta) \left(3 \frac{\rho}{\beta} + \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta,$$

$$\tau_{\rho\theta} = - \left[\frac{\rho}{\beta} b_1 + \frac{(3m+1)\beta}{4m(\beta^2+1)} (b_1 + a'_1) \left(-\frac{m-1}{3m+1} \frac{1+\beta^2}{\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^3} - \rho \right) + \frac{1}{\beta^4-1} (b_1 - b''_1\beta) \left(\frac{\rho}{\beta} - \frac{\beta^3}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta,$$

$$u = \frac{1}{E} \left[\frac{m+1}{m} \frac{3m-1}{3m+1} C_1 \ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{m+1}{m} \frac{\beta^2}{\rho^2} C_2 + \frac{m-3}{m} \frac{\rho^2}{\beta^2} C_3 \right] \beta r_i \sin \theta,$$

$$v = \frac{1}{E} \left[\frac{m+1}{m} \frac{3m-1}{3m+1} C_1 \left(\ln \frac{\rho}{\beta} + \frac{m+1}{3m-1} \right) - \frac{m+1}{m} \frac{\beta^2}{\rho^2} C_2 - \frac{5m+1}{m} C_3 \frac{\rho^2}{\beta^2} \right] \beta r_i \cos \theta,$$

где

$$C_1 = \frac{3m+1}{4m} (b_1 + a'_1), \quad C_2 = \frac{3m+1}{8m} \frac{b_1 + a'_1}{\beta^2+1} + \frac{b_1 - b''_1\beta}{2(\beta^4-1)},$$

$$C_3 = \frac{b_1}{2} - \frac{3m+1}{8m} \frac{(b_1 + a'_1)\beta^3}{1+\beta^2} + \frac{b_1 - b''_1\beta}{2(\beta^4-1)}.$$

$$V. \quad \sigma_r^a = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta,$$

$$\sigma_r^i = \tau_{r\theta}^a = \tau_{r\theta}^i = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} = & \frac{1}{2N} \left\{ n \left[(n-1) - \frac{n^2}{\beta^2} + \beta^{2n} \right] \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{n-2} + \right. \\ & + n \left[(n+1) - \frac{n}{\beta^2} - \beta^{-2n} \right] \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(n+2)} + (n-2) [(n+1) - \\ & - n\beta^2 - \beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^n + (n+2) [(n-1) - n\beta^2 + \beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-n} \left. \right\} \times \\ & \times (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & \frac{1}{2N} \left\{ n [-(n-1) + n\beta^{-2} - \beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-2} + \right. \\ & + n [-(n+1) + n\beta^{-2} + \beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+2)} + (n+2)[-(n+1) + \\ & \left. + n\beta^2 + \beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n + (n-2)[-(n-1) + n\beta^2 - \beta^{-2n}] \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-n} \right\} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned} \quad (1.440)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = & \frac{1}{2N} \left\{ n [-n(n-1) + n\beta^{-2} - \beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-2} + \right. \\ & + n [(n+1) - n\beta^{-2} - \beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+2)} + n [-(n+1) + \\ & \left. + n\beta^2 + \beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n + n [(n-1) - n\beta^2 + \beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-n} \right\} \times \\ & \times (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{E} \left[-n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + \right. \\ & + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} - \left(n - 2 + \frac{n+2}{m}\right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \\ & \left. + \left(n + 2 + \frac{n-2}{m}\right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{E} \left[n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + \right. \\ & + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} + \left(n + 4 + \frac{n}{m}\right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \\ & \left. + \left(n - 4 + \frac{n}{m}\right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{-(n-1) + n\beta^{-2} - \beta^{2n}}{2(n-1)N}, & C_2 = & \frac{-(n+1) + n\beta^{-2} + \beta^{-2n}}{2(n+1)N}, \\ C_3 = & \frac{-(n+1) + n\beta^2 + \beta^{2n}}{2(n+1)N}, & C_4 = & \frac{-(n-1) + n\beta^2 - \beta^{-2n}}{2(n-1)N}. \end{aligned}$$

Здесь и всюду ниже обозначено

$$N = 2(n^2 - 1) - n^2(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-2n} + \beta^{2n}).$$

$$\text{VI. } \sigma_r^a = 0, \sigma_r^i = a_n^i \cos n\theta + b_n^i \sin n\theta, \tau_{r\theta}^a = \tau_{r\theta}^i = 0.$$

Тогда

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{2N} \{n [(n-1) - n\beta^2 + \beta^{-2n}] \rho^{(n-2)} + \\ + n [(n+1) - n\beta^2 - \beta^{2n}] \rho^{-(n+2)} + \\ + (n-2) [(n+1) - n\beta^{-2} - \beta^{-2n}] \rho^n + \\ + (n+2) [(n-1) - n\beta^{-2} + \beta^{2n}] \rho^{-n}\} (a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta),$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2N} \{n [-(n-1) + n\beta^2 - \beta^{-2n}] \rho^{n-2} + \\ + n [-(n+1) + n\beta^2 + \beta^{2n}] \rho^{-(n+2)} + (n+2) [-(n+1) + \\ + n\beta^{-2} + \beta^{-2n}] \rho^n + (n-2) [-(n-1) + n\beta^{-2} - \beta^{2n}] \rho^{-n}\} \times \\ \times (a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2N} \{n [-(n-1) + n\beta^2 - \beta^{-2n}] \rho^{n-2} + \\ + n [(n+1) - n\beta^2 - \beta^{2n}] \rho^{-(n+2)} + n [-(n+1) + \\ + n\beta^{-2} + \beta^{-2n}] \rho^n + n [(n-1) - n\beta^{-2} + \beta^{2n}] \rho^{-n}\} \times \\ \times (a_n'' \sin n\theta - b_n'' \cos n\theta),$$

$$u = \frac{1}{E} \left[-n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} - \right. \\ \left. - \left(n-2 + \frac{n+2}{m}\right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \left(n+2 + \frac{n-2}{m}\right) C_4 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta), \quad (1.441)$$

$$v = \frac{1}{E} \left[n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + \right. \\ \left. + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} + \left(n+4 + \frac{n}{m}\right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \right. \\ \left. + \left(n-4 + \frac{n}{m}\right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (a_n'' \sin n\theta - b_n'' \cos n\theta),$$

где

$$C_1 = \frac{-(n-1) + n\beta^2 - \beta^{-2n}}{2(n-1)N} \beta^{-(n-2)},$$

$$C_2 = \frac{-(n+1) + n\beta^2 + \beta^{2n}}{2(n+1)N} \beta^{-(n+2)},$$

$$C_3 = \frac{-(n+1) + n\beta^{-2} + \beta^{-2n}}{2(n+1)N} \beta^n,$$

$$C_4 = \frac{-(n-1) - n\beta^{-2} - \beta^{2n}}{2(n-1)N} \beta^{-n}.$$

VII. $\sigma_r^a = \sigma_r^i = 0$, $\tau_{r\theta}^a = a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta$, $\tau_{r\theta}^i = 0$.
Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\rho = & \frac{1}{2N} \left\{ [-(n-1)(n+2) + n^2\beta^{-2} + (n-2)\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-2} + \right. \\ & + [(n-2)(n+1) - n^2\beta^{-2} + (n+2)\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+2)} + \\ & + [-(n-2)(n+1) + (n^2-4)\beta^2 - (n-2)\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n + \\ & \left. + [(n-1)(n+2) - (n^2-4)\beta^2 - (n+2)\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-n} \right\} \times \\ & \times (-a_n' \sin n\theta + b_n' \cos n\theta), \\ \sigma_\theta = & \frac{1}{2N} \left\{ [(n-1)(n+2) - n^2\beta^{-2} - (n-2)\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-2} + \right. \\ & + [-(n-2)(n+1) + n^2\beta^{-2} - (n+2)\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+2)} + \\ & + [(n+1)(n+2) - (n+2)^2\beta^2 + (n+2)\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n + \\ & \left. + [-(n-2)(n-1) + (n-2)^2\beta^2 + (n-2)\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-n} \right\} \times \\ & \times (-a_n' \sin n\theta + b_n' \cos n\theta), \end{aligned} \quad (1.442)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = & \frac{1}{2N} \left\{ [(n-1)(n+2) - n^2\beta^{-2} - (n-2)\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-2} + \right. \\ & + [(n-2)(n+1) - n^2\beta^{-2} + (n+2)\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+2)} + \\ & + [n(n+1) - n(n+2)\beta^2 + n\beta^{2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^n + [n(n-1) - \\ & \left. - n(n-2)\beta^2 - n\beta^{-2n}] \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-n} \right\} (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{E} \left[-n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} - \right. \\ & - \left(n - 2 + \frac{n+2}{m} \right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \left(n + 2 + \frac{n-2}{m} \right) C_4 \times \\ & \left. \times \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (-a_n' \sin n\theta + b_n' \cos n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = & \frac{1}{E} \left[n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} + \right. \\ & + \left(n + 4 + \frac{n}{m} \right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \left(n - 4 + \frac{n}{m} \right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \left. \right] \times \\ & \times \beta r_i (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta), \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \frac{(n-1)(n+2) - n^2\beta^{-2} - (n-2)\beta^{2n}}{2n(n-1)N},$$

$$C_2 = \frac{-(n-2)(n+1) + n^2\beta^{-2} - (n+2)\beta^{-2n}}{2n(n+1)N},$$

$$C_3 = \frac{(n+1) - (n+2)\beta^2 + \beta^{2n}}{2(n+1)N},$$

$$C_4 = \frac{-(n-1) + (n-2)\beta^2 + \beta^{-2n}}{2(n-1)N}.$$

$$\text{VIII. } \sigma_r^a = \sigma_r^i = \tau_{r\theta}^a = 0, \quad \tau_{r\theta}^i = a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\rho = \frac{1}{2N} \{ & [-(n-1)(n+2) + n^2\beta^2 + (n-2)\beta^{-2n}] \rho^{n-2} + \\ & + [(n-2)(n+1) + (n+2)\beta^{2n} - n^2\beta^2] \rho^{-(n+2)} + \\ & + [-(n-2)(n+1) + (n^2-4)\beta^{-2} - (n-2)\beta^{-2n}] \rho^n + \\ & + [(n-1)(n+2) - (n^2-4)\beta^{-2} - (n+2)\beta^{2n}] \rho^{-n} \} \times \\ & \times (-a_n'' \sin n\theta + b_n'' \cos n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \frac{1}{2N} \{ & [(n-1)(n+2) - n^2\beta^2 - (n-2)\beta^{-2n}] \rho^{n-2} + \\ & + [-(n-2)(n+1) + n^2\beta^2 - (n+2)\beta^{2n}] \rho^{-(n+2)} + \\ & + [(n+1)(n+2) - (n+2)^2\beta^{-2} + (n+2)\beta^{-2n}] \rho^n + \\ & + [-(n-2)(n-1) + (n-2)^2\beta^{-2} + (n-2)\beta^{2n}] \rho^{-n} \} \times \\ & \times (-a_n'' \sin n\theta + b_n'' \cos n\theta), \end{aligned} \quad (1.443)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = \frac{1}{2N} \{ & [(n-1)(n+2) - n^2\beta^2 - (n-2)\beta^{-2n}] \rho^{n-2} + \\ & + [(n-2)(n+1) - n^2\beta^2 + (n+2)\beta^{2n}] \rho^{-(n+2)} + \\ & + [n(n+1) - n(n+2)\beta^{-2} + n\beta^{-2n}] \rho^n + \\ & + [n(n-1) - n(n-2)\beta^{-2} - n\beta^{2n}] \rho^{-n} \} \times \\ & \times (a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{E} \left[& -n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n-1} + \\ & + n \left(1 + \frac{1}{m}\right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n+1)} - \left(n-2 + \frac{n+2}{m}\right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{n+1} + \\ & + \left(n+2 + \frac{n-2}{m}\right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta}\right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (-a_n'' \sin n\theta + b_n'' \cos n\theta), \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{E} \left[n \left(1 + \frac{1}{m} \right) C_1 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{n-1} + \right. \\ \left. + n \left(1 + \frac{1}{m} \right) C_2 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(n+1)} + \left(n + 4 + \frac{n}{m} \right) C_3 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{n+1} + \right. \\ \left. + \left(n - 4 + \frac{n}{m} \right) C_4 \left(\frac{\rho}{\beta} \right)^{-(n-1)} \right] \beta r_i (a_n''' \cos n\theta + b_n''' \sin n\theta),$$

где

$$C_1 = \frac{[(n-1)(n+2) - n^2\beta^2 - (n-2)\beta^{-2n}]\beta^{n-2}}{2n(n-1)N},$$

$$C_2 = \frac{[-(n-2)(n+1) + n^2\beta^2 - (n+2)\beta^{2n}]\beta^{-(n+2)}}{2n(n+1)N},$$

$$C_3 = \frac{[(n+1) - (n+2)\beta^{-2} + \beta^{-2n}]\beta^n}{2n(n+1)N},$$

$$C_4 = \frac{[-(n-1) + (n-2)\beta^{-2} + \beta^{2n}]\beta^{-n}}{2(n-1)N}.$$

Рассмотрим частный случай соотношений (1.436) — (1.443) для случая неограниченной пластины с круговым отверстием, когда $r_a = \infty$, $\beta = \infty$. После соответствующих предельных переходов получим:

I. Соотношения (1.436) примут вид

$$\sigma_\rho = \left[a_0 - (a_0 - a_0'') \frac{1}{\rho^2} \right],$$

$$\sigma_\theta = \left[a_0 + (a_0 - a_0'') \frac{1}{\rho^2} \right], \quad \tau_{\rho\theta} = 0, \quad (1.444)$$

$$u = \frac{1}{E} \left[(1 - \mu) a_0 + (1 + \mu) (a_0 - a_0'') \frac{1}{\rho^2} \right] r_i \rho, \quad v = 0.$$

II. Соотношения (1.437) примут вид

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{a_0'''}{\rho^2}, \quad (1.445)$$

$$u = 0, \quad v = -\frac{a_0'''}{2G} \frac{r_i}{\rho}.$$

III. Соотношения (1.438) рассмотрим в предположении $a_1 - b'_1 = 0$, $a''_1 - b''_1 = 0$. Тогда

$$\sigma_\rho = \frac{a''_1}{\rho^3} \cos \theta, \quad \sigma_\theta = -\frac{a''_1}{\rho^3} \cos \theta, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{a''_1}{\rho^3} \sin \theta, \quad (1.446)$$

$$u = -\frac{1}{E} \frac{m+1}{m} \frac{a''_1}{2\rho^2} r_i \cos \theta, \quad v = -\frac{1}{E} \frac{m+1}{m} \frac{a''_1}{2\rho^2} r_i \sin \theta.$$

IV. Соотношения (1.439) рассмотрим в предположении $b_1 + a'_1 = 0$, $b''_1 + a''_1 = 0$. Тогда

$$\sigma_\rho = \frac{b''_1}{\rho^3} \sin \theta, \quad \sigma_\theta = -\frac{b''_1}{\rho^3} \sin \theta, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{b''_1}{\rho^3} \cos \theta, \quad (1.447)$$

$$u = -\frac{1}{E} \frac{m+1}{m} \frac{b''_1}{2\rho^2} r_i \sin \theta, \quad v = \frac{1}{E} \frac{m+1}{m} \frac{b''_1}{2\rho^2} r_i \cos \theta.$$

Рассмотрим случай неограниченной кольцевой пластины, когда усилия приложены по внутреннему контуру пластины.

V. Соотношения (1.440) могут иметь отличные от нуля решения в случае неограниченной пластины, если $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \left[1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right] (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta), \\ \sigma_\theta &= - \left[1 + \frac{3}{\rho^4} \right] (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta} &= \left[-1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right] (a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta), \quad (1.448) \\ u &= \frac{1}{E} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\rho - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{4}{\rho} \right] r_i (a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta), \\ v &= -\frac{1}{E} \left[\left(1 + \frac{1}{m} \right) \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + 2 \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{1}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times r_i (a_2 \sin 2\theta - b_2 \cos 2\theta). \end{aligned}$$

VI. Соотношения (1.441) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{1}{2} \left(-\frac{n}{\rho^{n+2}} + \frac{n+2}{\rho^n} \right) (a''_n \cos n\theta + b''_n \sin n\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\rho^{n+2}} - \frac{n-2}{\rho^n} \right) (a''_n \cos n\theta + b''_n \sin n\theta), \quad (1.449) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{n}{\rho^{n+2}} + \frac{n}{\rho^n} \right) (a_n'' \sin n\theta - b_n'' \cos n\theta), \\
u &= \frac{1}{E} \left[\frac{n}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{\rho^{n+1}} - \frac{1}{2(n-1)} \left(n + 2 + \frac{n-2}{m} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\rho^{n-1}} \right] r_i (a_n'' \cos n\theta + b_n'' \sin n\theta), \\
v &= \frac{1}{E} \left[\frac{n}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{\rho^{n+1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(n-1)} \left(n - 4 + \frac{n}{m} \right) \frac{1}{\rho^{n-1}} \right] r_i (a_n'' \sin n\theta - b_n'' \cos n\theta).
\end{aligned} \tag{1.449}$$

VII. Соотношения (1.442) для неограниченной пластины решений не имеют.

VIII. Соотношения (1.443) примут вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\rho &= \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{\rho^{n+2}} - \frac{n+2}{\rho^n} \right) (-a_n''' \sin n\theta + b_n''' \cos n\theta), \\
\sigma_\theta &= \frac{1}{2} \left(-\frac{n+2}{\rho^{n+2}} + \frac{n-2}{\rho^n} \right) (-a_n''' \sin n\theta + b_n''' \cos n\theta), \\
\tau_{\rho\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{\rho^{n+2}} - \frac{n}{\rho^n} \right) (a_n''' \cos n\theta + b_n''' \sin n\theta),
\end{aligned} \tag{1.450}$$

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{E} \left[-\frac{n+2}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{\rho^{n+1}} + \frac{n+2 + \frac{n-2}{m}}{2(n-1)} \frac{1}{\rho^{n-1}} \right] \times \\
&\quad \times r_i (-a_n''' \sin n\theta + b_n''' \cos n\theta), \\
v &= \frac{1}{E} \left[-\frac{n+2}{2(n+1)} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{\rho^{n+1}} + \frac{n-4 + \frac{n}{m}}{2(n-1)} \frac{1}{\rho^{n-1}} \right] \times \\
&\quad \times r_i (a_n''' \cos n\theta + b_n''' \sin n\theta).
\end{aligned}$$

**ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ**

**§ 1. Решение упругопластических задач
теории идеальной пластичности методом малого
параметра**

Рассмотрим алгоритм решения упругопластических задач теории идеальной пластичности в случае, когда напряженное состояние в пластической зоне является статически определимым. В этих задачах уравнения равновесия, условие пластичности, статические граничные условия полностью определяют напряженное состояние в пластической зоне.

Статически определимые задачи сводятся к решению гиперболических уравнений (плоская деформация, осевая симметрия и пространственное состояние в случае полной пластичности) или параболических уравнений (плоское напряженное состояние при условии пластичности Треска ¹⁾).

Рассмотрим для примера случай плоской деформации. Пусть задано некоторое двусвязное тело, ограниченное достаточно гладкими контурами L_1 и L_2 (рис. 16), к которым приложена внешняя нагрузка. Пусть, далее, пластическая зона охватывает внутренний контур тела, а L_s — граница пластической зоны.

При решении задач теории пластичности необходимо рассматривать весь процесс нагружения. Распределение напряженного и деформированного состояния упругопластического тела, вообще говоря, будет зависеть от того, каким путем происходило изменение внешних нагрузок. Активный процесс нагружения идеально пластического тела имеет место в случае, когда пластическая

¹⁾ Анализ возможных случаев при плоском напряженном состоянии при различных условиях пластичности содержится в [51] и др. работах.

зона в любой последующий момент нагружения включает в себя пластическую зону в любой предыдущий момент нагружения. В противном случае в отдельных частях тела возникает разгрузка.

Для того чтобы задача была статически определимой, необходимо предположить, что имеет место активный процесс нагружения. Напряженное состояние в пласти-

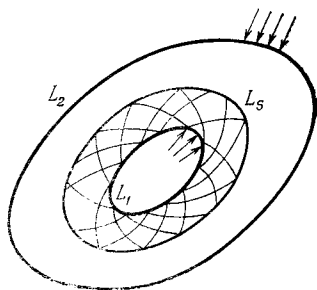


Рис. 16.

ческой зоне в статически определенных задачах полностью определяется условиями на контуре L_1 . Но положение границы пластической зоны L_3 может быть определено только из решения упругопластической задачи.

Если граница L_1 не возмущается и внешние усилия на внутреннем контуре L_1 фиксированы (например, контур L_1 свободен от внешних

усилий), то изменение границы L_3 происходит за счет изменения усилий на внешнем контуре L_2 , к которому примыкает зона упругого состояния материала.

Решение методом малого параметра определяется вблизи исходного известного «невозмущенного» состояния. Такими исходными решениями обычно являются хорошо известные точные решения задач: равномерно растягиваемые полоса или стержень, цилиндрическая труба, находящаяся под действием равномерного внутреннего и внешнего давления, кольцевая пластина под действием равномерно распределенных усилий, полая сфера под действием равномерного внутреннего и внешнего давления и т. п.

Решение в пластической зоне, как и всюду, ищется в виде рядов

$$\sigma_{ij}^p = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)p}. \quad (2.1)$$

Исходное напряженное состояние $\sigma_{ij}^{(0)}$ известно. Если напряженное состояние в пластической зоне фиксировано и

совпадает с $\sigma_{ij}^{(0)p}$, то

$$\sigma_{ij}^{(n)p} = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (2.2)$$

Если граница тела, примыкающая к пластической зоне, или внешняя нагрузка на этой границе варьируются, то

$$\sigma_{ij}^{(n)p} \neq 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (2.3)$$

Рассмотрим далее условия сопряжения (1.240). На контуре непрерывны все компоненты напряжения

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0. \quad (2.4)$$

Пусть исходное напряженное состояние является осесимметричным; тогда всюду

$$[\tau_{r\theta}^{(0)}] = 0. \quad (2.5)$$

Далее из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2.6)$$

и (2.4) следует, что

$$\left[\frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} \right] = 0 \quad \text{на } L_s^0. \quad (2.7)$$

Из (1.240), (2.5), (2.7) следует, что условия сопряжения для компонент σ_r , $\tau_{r\theta}$ для n -го приближения не содержат компоненты ρ_{ns} . Напомним, что условия сопряжения для любого приближения снесены на исходный контур L_s^0 — границу пластической зоны в нулевом исходном приближении. Для исходного осесимметричного состояния контур L_s^0 — окружность.

Итак, вначале полностью может быть определено напряженное состояние (2.1) в пластической зоне. Далее условия сопряжения для компонент σ_r , $\tau_{r\theta}$ определяют граничные условия на контуре L_s^0 в первом приближении для упругой зоны.

Для определения напряженного и деформированного состояний в упругой области решается задача при заданных граничных условиях на контуре L_s^0 и L_2 .

Из условия сопряжения компоненты σ_θ в первом приближении определяется величина ρ_{s1} . Условия сопряже-

ния для компонент σ_r , $\tau_{r\theta}$ определяют граничные условия на контуре L_s^0 во втором приближении для упругой зоны. После определения напряженного состояния в упругой зоне во втором приближении из условия сопряжения компоненты σ_θ во втором приближении определяется величина ρ_{s2} и т. д. По определенному напряженному состоянию в упругой зоне определяются компоненты перемещения в упругой зоне.

Условия сопряжения компонент перемещений (1.241) определяют граничные условия на контуре L_s^0 для определения перемещений в пластической зоне. Перемещения в пластической зоне полностью определяются заданием перемещений на L_s^0 .

Аналогично решаются статически определимые задачи плоского напряженного, осесимметричного и пространственного состояний.

Статически неопределимые задачи рассматриваются, в принципе, аналогично, но решение их требует совместного сопряжения компонент напряженного и деформированного состояний на исходном контуре L_s^0 . Примеры подобных решений содержатся ниже.

Отметим, что в упругопластических задачах особый интерес представляет определение положения упругопластической границы. Возникновение пластических зон ведет к перераспределению напряженного состояния, максимум напряженного состояния достигается на границе упругопластического состояния.

§ 2. Двухосное растяжение толстой пластины с круговым отверстием

1. Рассмотрим вначале упругопластическое состояние толстостенной трубы радиусов a , b ($a < b$), находящейся под действием внутреннего и внешнего давлений p_0 , p (рис. 17) в случае плоской деформации. Материал трубы будем предполагать несжимаемым.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, отнесем к величине предела текучести k , величины, имеющие размерность длины, — к некоторой характерной длине. В качестве характерной длины

выберем радиус пластической зоны r_s . Обозначим

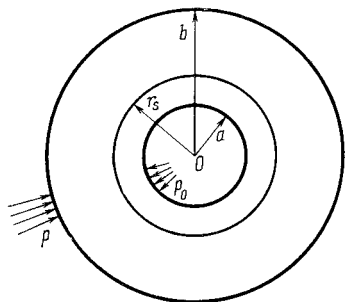
$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sigma_r/k, & \tau_{\rho\theta} &= \tau_{r\theta}/k, & q_0 &= p_0/k, \\ q &= p/k, & \rho &= r/r_s, & \alpha &= a/r_s, \\ \beta &= b/r_s, & u_\rho &= u_r/r_s, & u_\theta &= u_\theta/r_s. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для безразмерных величин σ_θ/k , G/k сохраним прежние обозначения σ_θ , G . Очевидно, всюду

$$\tau_{\rho\theta} = 0, \quad e_{\rho\theta} = 0, \quad u_\theta = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad (2.10)$$



граничные условия —

$$\sigma_\rho = -q_0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \quad (2.11)$$

$$\sigma_\rho = -q \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (2.12)$$

Рис. 17.

В пластической зоне, примыкающей к внутренней поверхности трубы, имеет место условие пластичности

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = 2k. \quad (2.13)$$

Знак k устанавливается ниже.

В упругой зоне ($1 \leq \rho \leq \beta$) распределение напряжений определяется по формулам (1.436)

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e &= A - B \frac{\beta^2}{\rho^2}, & \sigma_\theta^e &= A + B \frac{\beta^2}{\rho^2}, & u_\rho^e &= \frac{B\beta^2}{2G\rho}, \\ e_\rho^e &= -e_\theta^e = -\frac{B\beta^2}{2G\rho^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Определяя A из граничного условия (2.12), получим

$$e_\rho^e = -q + B \left(1 - \frac{\beta^2}{\rho^2}\right), \quad \sigma_\theta^e = -q + B \left(1 + \frac{\beta^2}{\rho^2}\right). \quad (2.15)$$

В пластической зоне ($\alpha \leq \rho \leq 1$) из (2.10), (2.12) и граничного условия (2.11) найдем

$$\sigma_r^p = -q_0 + 2\kappa \ln(\rho/\alpha), \quad \sigma_\theta^p = -q_0 + 2\kappa(1 + \ln(\rho/\alpha)). \quad (2.16)$$

На границе упругопластического состояния материала имеют место условия сопряжения

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.17)$$

Согласно (2.17) из (2.14) и (2.15) получим

$$-q + B(1 - \beta^2) = -q_0 - 2\kappa \ln \alpha, \quad (2.18)$$

$$-q + B(1 + \beta^2) = -q_0 + 2\kappa(1 - \ln \alpha).$$

Из (2.18) определяется постоянная

$$B = \frac{\kappa}{\beta^2}, \quad (2.19)$$

а также трансцендентное соотношение для определения радиуса пластической зоны

$$\frac{\kappa}{\beta^2} = q - q_0 + \kappa(1 + 2 \ln \alpha). \quad (2.20)$$

Знак κ определяется из условия возникновения пластической зоны на внутреннем контуре $a = r_s$, $\alpha = 1$. Из (2.20) получим

$$\kappa = \text{sign}(q_0 - q). \quad (2.21)$$

Согласно (2.21) соотношение (2.20) примет вид

$$(|q_0 - q| + 2 \ln \alpha - 1)\beta^2 + 1 = 0. \quad (2.22)$$

Компонента радиального перемещения всюду определяется из условия несжимаемости

$$\frac{du_r}{d\rho} + \frac{u_r}{\rho} = 0, \quad (2.23)$$

откуда

$$u_r = \frac{C}{\rho}, \quad e_r = -e_\theta = -\frac{C}{\rho^2}, \quad u_\theta = 0, \quad C = \frac{B\beta^2}{2G}. \quad (2.24)$$

Используя выражения (2.20), (2.19), можно окончательно записать соотношения для компонент напряжений, перемещений и деформаций. В случае растягиваемой

бесконечной плоскости с отверстием $\beta \rightarrow \infty$; соотношение (2.22) запишется следующим образом:

$$2 \ln \alpha = 1 - |q_0 - q|. \quad (2.25)$$

Из (2.25) можно в явном виде определить границу пластической зоны

$$r_s = a \exp\left(\frac{|q_0 - q| - 1}{2}\right). \quad (2.26)$$

Компоненты напряжения в упругой области согласно (2.15), (2.19) запишутся в виде

$$\sigma_\rho^e = q - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_\theta^e = q + \frac{1}{\rho^2}. \quad (2.27)$$

Компоненты перемещения и деформации примут вид

$$u_\rho = \frac{1}{2G\rho}, \quad e_\rho = -e_\theta = -\frac{1}{2G\rho^2}. \quad (2.28)$$

2. Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса a , растягиваемую на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями p_1 , p_2 , причем на контуре отверстия действует нормальное давление p_0 (рис. 18).

За параметр δ примем величину

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}. \quad (2.29)$$

Очевидно, что при $\delta = 0$ ($p_1 = p_2$) пластина находится в осесимметричном состоянии.

При $\delta = 1$ имеет место $p_1 - p_2 = 2k$. В этом случае на достаточном удалении от отверстия пластина находится в состоянии предельного сдвига.

Упругопластическое состояние пластины имеет место при $0 \leq \delta < 1$.

Переходя к безразмерным координатам, припишем индекс «0» наверху компонентам исходного состояния и

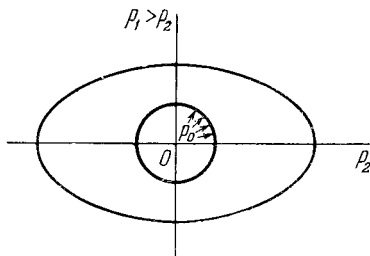


Рис. 18.

положим

$$\rho = \frac{r}{r_s^0}, \quad \rho_s^{(n)} = \frac{r_s^{(n)}}{r_s^0}, \quad q_i = \frac{P_i}{k}, \quad (2.30)$$

где r_s^0 определяется согласно (2.26).

Граничные условия на бесконечности перепишем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{\infty e} &= q - \delta \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{\infty e} &= q + \delta \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\infty e} &= \delta \sin 2\theta, \quad \text{где } q = \frac{P_1 + P_2}{2k}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

На контуре отверстия имеют место следующие условия:

$$\sigma_\rho^p = -q_0, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha. \quad (2.32)$$

Решение будем искать вблизи осесимметричного состояния $\delta = 0$. Осесимметричное состояние в пластической зоне согласно (2.16) определяется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(0)p} &= -q_0 + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\ \sigma_\theta^{(0)p} &= -q_0 + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right), \\ \tau_{\rho\theta}^{(0)p} &= 0, \quad \kappa = 1. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В рассматриваемой задаче внутренний контур и внешние нагрузки на нем не варьируются, поэтому согласно (2.2)

$$\sigma_{ij}^{(n)p} = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (2.34)$$

Пластическое напряженное состояние независимо от величин нагрузок на бесконечности полностью определяется соотношениями (2.33).

Компоненты напряженного состояния в упругой области в нулевом приближении определяются по формулам (2.27), деформированного состояния — (2.28).

Определим первое приближение. Граничные условия на бесконечности (2.31) примут вид

$$\sigma_\rho^{(1)\infty e} = -\cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)\infty e} = \sin 2\theta, \quad (2.35)$$

$$\sigma_\rho^{(n)\infty e} = \tau_{\rho\theta}^{(n)\infty e} = 0 \quad \text{для } n \geq 2. \quad (2.36)$$

Из условий сопряжения решения (1.240) согласно (2.33), (2.27) получим

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (2.37)$$

а также

$$\sigma_{\theta}^{(I)e} = 4\rho_s^{(I)} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.38)$$

Граничные условия (2.35), (2.37) определяют согласно (1.448), (1.449) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= -\left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4}\right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4}\right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Из (2.39) и (2.38) найдем

$$\rho_s^{(I)} = \cos 2\theta. \quad (2.40)$$

Определим второе приближение. Согласно (2.27), (2.33), (2.34), (2.39)—(2.40) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= -1 - \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= -4 \sin 4\theta \quad \text{при} \quad \rho = 1, \end{aligned} \quad (2.41)$$

а также

$$4\rho_s^{(II)} = \sigma_{\theta}^{(II)e} - 8 \cos^2 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.42)$$

Граничные условия (2.36), (2.41) определяют согласно (1.444), (1.449), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= -\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{9}{\rho^4} - \frac{10}{\rho^6}\right) \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(II)e} &= \frac{1}{\rho^2} + \left(-\frac{3}{\rho^4} + \frac{10}{\rho^6}\right) \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= 2\left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{5}{\rho^6}\right) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Из (2.43) и (2.42) найдем

$$\rho_s^{(II)} = -\frac{3}{4}(1 - \cos 4\theta), \quad (2.44)$$

Определим третье приближение. Согласно (2.27), (2.33) — (2.34), (2.39), (2.40), (2.43), (2.44) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(III)e} &= -3 \cos 2\theta - \frac{25}{3} \cos 6\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(III)e} &= -3 \sin 2\theta - 15 \sin 6\theta,\end{aligned}\quad \text{при } \rho = 1, \quad (2.45)$$

а также

$$4\rho_s^{(III)} = \sigma_{\theta}^{(III)e} - \frac{11}{2} \cos 2\theta - \frac{115}{6} \cos 6\theta \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.46)$$

Граничные условия (2.36), (2.45) определяют согласно (1.449), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(III)e} &= -\frac{3}{\rho^4} \cos 2\theta + \left(\frac{80}{3\rho^8} - \frac{35}{\rho^8}\right) \cos 6\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(III)e} &= \frac{3}{\rho^4} \cos 2\theta + \left(-\frac{40}{3\rho^8} + \frac{35}{\rho^8}\right) \cos 6\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(III)e} &= -\frac{3}{\rho^4} \sin 2\theta + \left(\frac{20}{\rho^8} - \frac{35}{\rho^8}\right) \sin 6\theta.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Из (2.47) и (2.46) найдем

$$\rho_s^{(III)} = \frac{5}{8} (-\cos 2\theta + \cos 6\theta). \quad (2.48)$$

Определим четвертое приближение. Согласно (2.27), (2.33), (2.34), (2.39), (2.40), (2.43), (2.44), (2.47), (2.48) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(IV)e} &= -10 \cos 4\theta - \frac{77}{2} \cos 8\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} &= -10 \sin 4\theta - 56 \sin 8\theta,\end{aligned}\quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.49)$$

а также

$$4\rho_s^{(IV)} = \sigma_{\theta}^{(IV)e} - \frac{7}{16} - \frac{47}{4} \cos 4\theta - \frac{1141}{16} \cos 8\theta \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.50)$$

Граничные условия (2.36), (2.49) определяют согласно (1.449), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(IV)e} &= -\frac{10}{\rho^6} \cos 4\theta + \left(\frac{175}{2\rho^8} - \frac{126}{\rho^{10}}\right) \cos 8\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(IV)e} &= \frac{10}{\rho^6} \cos 4\theta + \left(-\frac{105}{2\rho^8} + \frac{126}{\rho^{10}}\right) \cos 8\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} &= -\frac{10}{\rho^6} \sin 4\theta + \left(\frac{70}{\rho^8} - \frac{126}{\rho^{10}}\right) \sin 8\theta.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Из (2.51) и (2.50) найдем

$$\rho_s^{(IV)} = \frac{7}{64} (-1 - 4 \cos 4\theta + 5 \cos 8\theta). \quad (2.52)$$

Аналогично определяются последующие приближения.

Согласно (2.40), (2.44), (2.48), (2.50) выпишем приближения для упругопластической границы

$$\begin{aligned} \rho_s = 1 + \delta \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 (1 - \cos 4\theta) + \\ + \frac{5}{8} \delta^3 (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) + \\ + \frac{7}{64} \delta^4 (-1 - 4 \cos 4\theta + 5 \cos 8\theta) + \dots \quad (2.53) \end{aligned}$$

Компоненты напряжений в упругой области определены формулами (2.39), (2.43), (2.47), (2.51). Используя эти выражения, из соотношений закона Гука согласно (1.156) получим выражения компонент перемещений в упругой области:

$$\begin{aligned} \frac{4Gu^{(e)}}{k} = \frac{2}{\rho} - 2\delta \left(\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^3} \right) \cos 2\theta + \\ + 2\delta^2 \left[\frac{1}{\rho} + 2 \left(-\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho^5} \right) \right] \cos 4\theta + \\ + 2\delta^3 \left[\frac{1}{\rho^3} \cos 2\theta - \left(\frac{4}{\rho^5} - \frac{5}{\rho^7} \right) \cos 6\theta \right] + \\ + 4\delta^4 \left[\frac{1}{\rho^5} \cos 4\theta - \left(\frac{5}{\rho^7} - \frac{7}{\rho^9} \right) \cos 8\theta \right] + \dots, \quad (2.54) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4Gv^{(e)}}{k} = 2\delta \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) \sin 2\theta + 2\delta^2 \left(-\frac{1}{\rho^3} + \frac{2}{\rho^5} \right) \sin 4\theta + \\ + \delta^3 \left[\frac{2}{\rho^3} \sin 2\theta + 2 \left(-\frac{8}{3\rho^5} + \frac{5}{\rho^7} \right) \sin 6\theta \right] + \\ + \delta^4 \left[\frac{4}{\rho^5} \sin 4\theta - \left(\frac{15}{\rho^7} - \frac{28}{\rho^9} \right) \sin 8\theta \right] + \dots \end{aligned}$$

Зная выражения компонент перемещений в упругой области (2.54), выражения для радиуса пластической зоны (2.53), из условий сопряжения компонент перемещений (1.241) получим граничные условия для определения перемещений в пластической зоне:

$$u^{(I)\rho} = -\frac{1}{G} \cos 2\theta, \quad v^{(I)\rho} = \frac{1}{G} \sin 2\theta; \quad (2.55_1)$$

$$\begin{aligned} u^{(II)p} + \frac{du^{(I)p}}{d\rho} \cos 2\theta &= -\frac{1}{2G}, \\ v^{(II)p} + \frac{dv^{(I)p}}{d\rho} \cos 2\theta &= 0; \end{aligned} \quad (2.55_2)$$

$$\begin{aligned} u^{(III)p} + \frac{du^{(II)p}}{d\rho} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \frac{d^2u^{(I)p}}{d\rho^2} \cos^2 2\theta - \\ - \frac{3}{4} \frac{du^{(I)p}}{d\rho} (1 - \cos 4\theta) &= \frac{1}{8G} (9 \cos 2\theta - 5 \cos 6\theta), \\ v^{(III)p} + \frac{dv^{(II)p}}{d\rho} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \frac{d^2v^{(I)p}}{d\rho^2} \cos^2 2\theta - \\ - \frac{3}{4} \frac{dv^{(I)p}}{d\rho} (1 - \cos 4\theta) &= \frac{1}{4G} \left(\sin 2\theta - \frac{7}{3} \sin 6\theta \right); \end{aligned} \quad (2.55_3)$$

$$\begin{aligned} u^{(IV)p} + \frac{du^{(III)p}}{d\rho} \cos 2\theta + \frac{1}{2!} \frac{d^2u^{(II)p}}{d\rho^2} \cos^2 2\theta + \\ + \frac{1}{3!} \frac{d^3u^{(I)p}}{d\rho^3} \cos^3 2\theta \mp \frac{5}{8} \frac{du^{(I)p}}{d\rho} (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) - \\ - \frac{3}{4} (1 - \cos 4\theta) \left[\frac{du^{(II)p}}{d\rho} + \frac{d^2u^{(I)p}}{d\rho^2} \cos 2\theta \right] = \\ = \frac{1}{8G} (9 \cos 4\theta - 3 \cos 8\theta - 10), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^{(IV)p} + \frac{dv^{(III)p}}{d\rho} \cos 2\theta + \frac{d^2v^{(II)p}}{d\rho^2} \frac{\cos^2 2\theta}{2!} + \\ + \frac{1}{3!} \frac{d^3v^{(I)p}}{d\rho^3} \cos^3 2\theta + \frac{5}{8} \frac{dv^{(I)p}}{d\rho} (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) - \\ - \frac{3}{4} (1 - \cos 4\theta) \left[\frac{dv^{(II)p}}{d\rho} + \frac{d^2v^{(I)p}}{d\rho^2} \cos 2\theta \right] = \\ = \frac{1}{16G} (78 \sin 4\theta + 33 \sin 8\theta) \end{aligned} \quad (2.55_4)$$

при $\rho = 1$,

где G — безразмерный модуль упругости, отнесенный к величине k .

Для определения перемещений в пластической зоне в рассматриваемом случае следует использовать уравнения (1.207), (1.209). Так как $\tau_{\rho\theta}^p = 0$, то уравнения для любого приближения имеют вид (1.267), решения которых определены в виде (1.267).

Из (1.267) и граничных условий (2.55) найдем компоненты перемещения в пластической области

$$\begin{aligned} \frac{4Gu^p}{k} &= \frac{2}{\rho} - 4\delta \left[\cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta + \\ &+ \frac{2}{\rho} \delta^2 - 2\delta^3 \left\{ \left[\cos(\sqrt{3} \ln \rho) - \sqrt{3} \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[\cos(\sqrt{35} \ln \rho) - \frac{3}{\sqrt{35}} \sin(\sqrt{35} \ln \rho) \right] \cos 6\theta \right\} + \dots, \\ \frac{4Gv^p}{k} &= 2\delta \left[2 \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \times \\ &\times \sin 2\theta + 2\delta^2 \left[\cos(\sqrt{15} \ln \rho) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin(\sqrt{15} \ln \rho) \right] \sin 4\theta - \\ &- \delta^3 \left\{ \left[2 \cos(\sqrt{3} \ln \rho) + \left(\frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) \sin(\sqrt{3} \ln \rho) \right] \sin 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{2}{3} \cos(\sqrt{35} \ln \rho) + \left(\frac{1}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{35}}{3} \right) \sin(\sqrt{35} \ln \rho) \right] \sin 6\theta \right\} + \\ &\quad + \dots \quad (2.56) \end{aligned}$$

Точное решение рассмотренной задачи в напряжениях было дано Л. А. Галиным [7]. Показано, что в принятых обозначениях границей пластической зоны является эллипс

$$\frac{x^2}{(1+\delta)^2} + \frac{y^2}{(1-\delta)^2} = 1, \quad (2.57)$$

где координаты x, y отнесены к r_s^0 .

Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, перепишем уравнение (2.57) в виде

$$\rho = \frac{1 - \delta^2}{\sqrt{1 - 2\delta \cos 2\theta + \delta^2}}. \quad (2.58)$$

Разлагая соотношение (2.58) в ряд, можно убедиться, что первые четыре члена разложения (2.58) в точности совпадают с выражением (2.53), полученным методом малого параметра. Л. А. Галин показал, что условие статической определенности для данной задачи накладывает ограничение на отношение полуосей эллипса

$$\frac{1+\delta}{1-\delta} \leq \sqrt{2}, \quad \delta \leq (\sqrt{2}-1)^2 \approx 0,1713. \quad (2.59)$$

На рис. 19 показана граница пластической зоны, построенная по формуле (2.53) при $\delta = 0,17$. Здесь же пунктиром нанесена граница, полученная по точному решению.

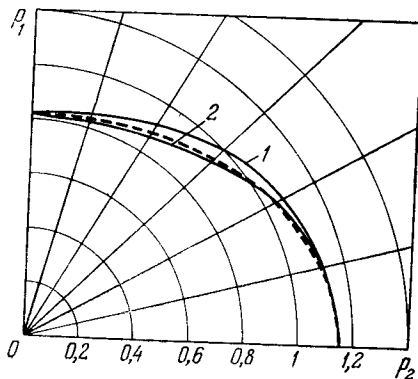


Рис. 19.

Очевидно, что уже первые два приближения (кривые 1 и 2) дают удовлетворительную картину сходимости к точному решению.

§ 3. Двуосное растяжение толстой пластины с эллиптическим отверстием

Рассмотрим бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием с полуосями $a(1+c)$, $a(1-c)$, растягиваемую на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями P_1 , P_2 , причем на контуре отверстия L действует нормальное давление p_0 (рис. 20).

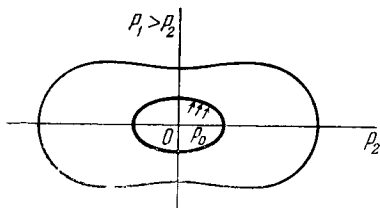


Рис. 20.

Положим

$$c = \delta d_1, \quad \frac{P_1 - P_2}{2k} = \delta d_2, \quad (2.60)$$

где δ , d_1 , d_2 — постоянные, принимающие значения в пределах: $0 \leq \delta \leq 1$, $0 \leq d_i \leq 1$.

Очевидно, что при $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ имеет место двусосное растяжение пластины, рассмотренное в предыдущем параграфе; при $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ — имеет место пластина с эллиптическим отверстием под действием нормального давления. В нулевом приближении (при $\delta = 0$) имеет место осесимметричное состояние плоскости с круговым отверстием.

Переходя к безразмерным координатам, запишем уравнение эллипса отверстия $r = r_*(\theta)$ аналогично (2.58) в виде

$$\rho_* = \frac{\alpha(1 - \delta^2 d_1^2)}{\sqrt{1 - 2\delta d_1 \cos 2\theta + \delta^2 d_1^2}}, \quad \rho_* = \frac{r_*}{r_s^0}, \quad \alpha = \frac{a}{r_s^0}, \quad (2.61)$$

откуда

$$\begin{aligned} \rho_* &= \alpha + \delta \rho_*^{(I)} + \delta^2 \rho_*^{(II)} + \delta^3 \rho_*^{(III)} + \dots = \\ &= \alpha \left[1 + \delta d_1 \cos 2\theta - \frac{3}{4} \delta^2 d_1^2 (1 - \cos 4\theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{8} \delta^3 d_1^3 (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] + \dots \quad (2.62) \end{aligned}$$

Предположим, что внутренний контур охвачен пластической зоной. Рассмотрим граничные условия (1.237). Так как $p_0 = \text{const}$, то правая часть в граничных условиях всюду равна нулю. В первом приближении граничные условия (1.237) с учетом (2.33), (2.62) примут вид

$$\sigma_\rho^{(I)p} = -2d_1 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -4d_1 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (2.63)$$

Из решения (1.263) и граничных условий (2.63) определим выражение напряжений в пластической зоне в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \frac{2d_1\alpha}{\rho} (\sqrt{3} \sin \chi - \cos \chi \cos 2\theta), \quad \sigma_\theta^{(I)p} = \sigma_\rho^{(I)p}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{4d_1\alpha}{\rho} \cos \chi \sin 2\theta, \quad \chi = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Из граничных условий (1.237) для второго приближения с учетом (2.33), (2.64), (2.62) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)p} &= d_1^2 (2 - 9 \cos 4\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)p} &= -6d_1^2 \sin 4\theta \end{aligned} \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (2.65)$$

Из решения (1.263) и граничных условий (2.65) определим выражение напряжений в пластической зоне во втором приближении:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(II)p} &= \frac{d_1^2}{2} \left\{ -1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} (4 - \sqrt{3} \sin 2\chi + \cos 2\chi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos 4\theta \left[\frac{\alpha}{\rho} (\cos \gamma - \sqrt{15} \sin \gamma) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha^2}{\rho^2} (8 + 11 \cos 2\chi - 7\sqrt{3} \sin 2\chi) \right] \right\}, \\ \sigma_{\theta}^{(II)p} &= \frac{d_1^2}{2} \left\{ -1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} (4 - 7 \cos 2\chi + \sqrt{3} \sin 2\chi) + \right. \\ &\quad \left. + \cos 4\theta \left[\frac{\alpha}{\rho} (\cos \gamma - \sqrt{15} \sin \gamma) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha^2}{\rho^2} (3 \cos 2\chi - 7\sqrt{3} \sin 2\chi) \right] \right\}, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)p} &= d_1^2 \sin 4\theta \left[\frac{2\alpha}{\rho} \cos \gamma - \frac{\alpha^2}{\rho^2} (1 + 7 \cos 2\chi + \sqrt{3} \sin 2\chi) \right], \\ &\quad \gamma = \sqrt{15} \ln(\rho/\alpha).\end{aligned}\quad (2.66)$$

Аналогично могут быть определены третьи и любые последующие приближения.

Определим решение в упругой области и радиус пластической зоны. Граничные условия на бесконечности аналогично (2.31) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{\infty e} &= q - \delta d_2 \cos 2\theta, & \sigma_{\theta}^{\infty e} &= q + \delta d_2 \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{\infty e} &= \delta d_2 \sin 2\theta.\end{aligned}\quad (2.67)$$

В первом приближении граничные условия на бесконечности примут вид

$$\sigma_{\rho}^{(I)\infty e} = -d_2 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)\infty e} = d_2 \sin 2\theta; \quad (2.68)$$

в последующих приближениях —

$$\sigma_{\rho}^{(n)\infty e} = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^{(n)\infty e} = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 2. \quad (2.69)$$

Из условий сопряжения решения (1.240) в первом приближении согласно (2.33), (2.64) получим

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = -2d_1\alpha (\cos \chi_0 + \sqrt{3} \sin \chi_0) \cos 2\theta, \quad \chi_0 = \sqrt{3} \ln \alpha, \quad (2.70)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)e} = -4d_1\alpha \cos \chi_0 \sin 2\theta \quad \text{при} \quad \rho = 1,$$

а также

$$\rho_s^{(I)} = \frac{1}{4} \sigma_\theta^{(I)e} + 2d_1\alpha (\cos \chi_0 + \sqrt{3} \sin \chi_0) \cos 2\theta$$

при $\rho = 1$.

(2.71)

Согласно граничным условиям (2.68), (2.70) из (1.448) определим компоненты напряжения в упругой зоне

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \cos 2\theta \left\{ -d_2 \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) + \right. \\ &+ 2d_1\alpha \left[\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \cos \chi_0 + \left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) \sqrt{3} \sin \chi_0 \right] \Big\}, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \cos 2\theta \left[d_2 \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) + \frac{2d_1\alpha}{\rho^4} (3 \cos \chi_0 - \sqrt{3} \sin \chi_0) \right], \end{aligned}$$
(2.72)

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \sin 2\theta \left\{ d_2 \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) + \right. \\ &+ 2d_1\alpha \left[\left(\frac{3}{\rho^2} - \frac{5}{\rho^4} \right) \cos \chi_0 + \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) \sqrt{3} \sin \chi_0 \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Из (2.72) и (2.71) найдем

$$\rho_s^{(I)} = (d_2 + 2d_1\alpha \cos \chi_0) \cos 2\theta. \quad (2.73)$$

Определим второе приближение. Из условий сопряжения решения (1.240) во втором приближении согласно (2.33), (2.64), (2.66) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)e} &= A + B \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= D \sin 4\theta \end{aligned} \quad \text{при } \rho = 1, \quad (2.74)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{d_1^2}{2} \left[-1 + \alpha^2 (4 + \cos 2\chi_0 + \sqrt{3} \sin 2\chi_0) \right] - \\ &\quad - (d_2 + 2d_1\alpha \cos \chi_0)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{d_1^2}{2} \left[\alpha (\cos \gamma_0 + \sqrt{15} \sin \gamma_0) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 (8 + 11 \cos 2\chi_0 + 7 \sqrt{3} \sin 2\chi_0) - (d_2 + 2d_1\alpha \cos \chi_0)^2, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= d_1^2 [2\alpha \cos \gamma_0 - \alpha^2 (1 + 7 \cos 2\chi_0 - \sqrt{3} \sin 2\chi_0)] - \\ &\quad - 4 (2d_1\alpha \cos \chi_0 + d_2) [d_1\alpha (3 \cos \chi_0 + \sqrt{3} \sin \chi_0) + d_2], \\ \gamma_0 &= \sqrt{15} \ln \alpha, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \rho_s^{(II)} = & \frac{1}{4} \sigma_\theta^{(II)e} + \frac{d_1^2}{8} \{1 + \alpha^2 (4 + 7 \cos 2\chi_0 - \sqrt{3} \sin 2\chi_0) - \\ & - \cos 4\theta [\alpha (\cos \gamma_0 + \sqrt{15} \sin \gamma_0) - \\ & - \alpha^2 (3 \cos^2 \chi_0 + 7 \sqrt{3} \sin 2\chi_0)]\} - \\ & - (1 - \cos 4\theta) (d_2 + 2d_1 \alpha \cos \chi_0) [d_2 + d_1 \alpha (3 \cos \chi_0 - \\ & - \sqrt{3} \sin \chi_0)]. \quad (2.75) \end{aligned}$$

Согласно граничным условиям (2.69), (2.74) из (1.444), (1.449), (1.450) определим компоненты напряжения в упругой области:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)e} &= \frac{A}{\rho^2} + \cos 4\theta \left[B \left(\frac{3}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^6} \right) + D \left(-\frac{3}{\rho^4} + \frac{3}{\rho^6} \right) \right], \\ \sigma_\theta^{(II)e} &= -\frac{A}{\rho^2} + \cos 4\theta \left[B \left(-\frac{1}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^6} \right) + D \left(\frac{1}{\rho^4} - \frac{3}{\rho^6} \right) \right], \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= \sin 4\theta \left[B \left(\frac{2}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^6} \right) + D \left(-\frac{2}{\rho^4} + \frac{3}{\rho^6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Из (2.75) и (2.76) найдем

$$\begin{aligned} \rho_s^{(II)} = & -\frac{3}{4} d_2^2 - d_1 d_2 \alpha (4 \cos \chi_0 - \sqrt{3} \sin \chi_0) + \\ & + \frac{d_1^2}{4} [1 - \alpha^2 (10 + 7 \cos 2\chi_0 - 3 \sqrt{3} \sin 2\chi_0)] + \\ & + \cos 4\theta \left\{ \frac{3}{4} d_2^2 + d_1 d_2 \alpha (4 \cos \chi_0 + 3 \sqrt{3} \sin \chi_0) + \right. \\ & \left. + d_1^2 \left[-\alpha \cos \chi_0 + \alpha^2 \left(2 + 5 \cos 2\chi_0 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \sin 2\chi_0 \right) \right] \right\}. \quad (2.77) \end{aligned}$$

Выражения для третьего приближения имеют громоздкий вид; ниже приведем уравнение границы пластической зоны с учетом третьего приближения, полученное В. В. Кузнецовым для случая равномерного растяжения пластины с эллиптическим отверстием, находящейся под действием равномерного внутреннего давления ($d_1 = 1$, $d_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \rho_s = & 1 + 2\delta \alpha \cos \chi_0 \cos 2\theta + \delta^2 \left\{ \frac{1}{4} [1 - \alpha^2 (10 + 7 \cos 2\chi_0 - \right. \\ & - 3 \sqrt{3} \sin 2\chi_0)] - \\ & \left. - \cos 4\theta \left[\alpha \cos \chi_0 - \alpha^2 \left(2 + 5 \cos 2\chi_0 + \frac{5\sqrt{3}}{2} \sin 2\chi_0 \right) \right] \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta^3 \cos 2\theta \left\{ -\frac{\alpha}{4} \left[(12 + 3\sqrt{5}) \cos \chi_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{15} \right) \sin \chi_0 \right] + \frac{\alpha^2}{16} [422 \cos (\gamma_0 - \chi_0) - \right. \\
& - (12\sqrt{3} + 14\sqrt{15}) \sin (\gamma_0 - \chi_0) - (168 + 6\sqrt{5}) \cos (\gamma_0 + \\
& \quad \left. + \chi_0) - (6\sqrt{3} + 17\sqrt{15}) \sin (\gamma_0 + \chi_0) \right] + \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^3}{4} (163 \cos \chi_0 - 100\sqrt{3} \sin \chi_0 + 140 \cos 3\chi_0 - \right. \\
& \quad \left. - 105\sqrt{3} \sin 3\chi_0) \right\} + \delta^3 \cos 6\theta \left\{ \frac{\alpha}{4} \left[\frac{9}{\sqrt{7}} \sin \eta_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 3(1 + \sqrt{5}) \cos \eta_0 \right] + \frac{\alpha^2}{16} [(312 + 6\sqrt{5}) \cos (\gamma_0 - \chi_0) + \right. \\
& \quad \left. + (14\sqrt{3} + 2\sqrt{15}) \sin (\gamma_0 - \chi_0) - (15\sqrt{5} + 285) \cos (\gamma_0 + \right. \\
& \quad \left. + \chi_0) - (23\sqrt{3} + 5\sqrt{15}) \sin (\gamma_0 + \chi_0) \right] + \\
& \quad \left. + \frac{\alpha^3}{4} (564 \cos \chi_0 - \sqrt{3} \sin \chi_0 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{580}{3} \cos 3\chi_0 + 11\sqrt{3} \sin 3\chi_0) \right\}, \\
& \quad \eta_0 = \sqrt{35} \ln \alpha. \tag{2.78}
\end{aligned}$$

На рис. 21 представлены кривые 1, 2, 3, рассчитанные по формуле (2.78) при $\alpha = 0,7$ и соответствующие первому,

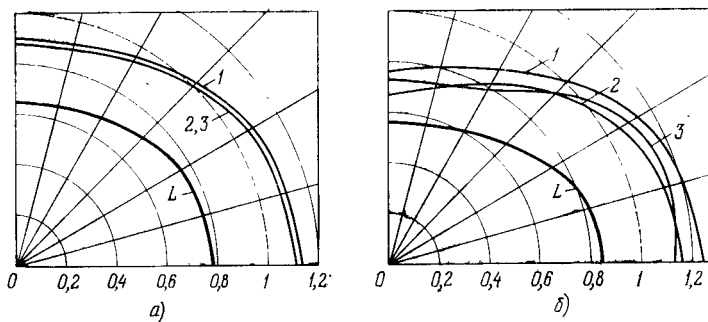


Рис. 21.

второму и третьему приближениям. На рис. 21, а принято $\delta = 0,1$, чему соответствует отношение малой полуоси эллипса отверстия к большой, равное $\approx 0,81$, на рис. 21, б

принято $\delta = 0,2$, отношение полуосей соответственно равно $\approx 0,67$.

Обратимся к определению перемещений в упругой и пластической областях.

По известным компонентам напряжений в упругой области (2.72), (2.76) из (1.30) можно получить выражения

$$u^{(I)e} = \frac{1}{2G} \left\{ -d_2 \left(\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{d_1 \alpha}{\rho} \left[\cos \chi_0 - \sqrt{3} \sin \chi_0 - \frac{1}{\rho^2} \left(\cos \chi_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \chi_0 \right) \right] \right\} \cos 2\theta, \quad (2.79)$$

$$v^{(I)e} = \frac{1}{2G} \left[d_2 \left(\rho + \frac{1}{\rho^3} \right) + \frac{2d_1 \alpha}{\rho^3} \left(\cos \chi_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \chi_0 \right) \right] \sin 2\theta,$$

где здесь и ниже модуль сдвига отнесен к пределу текучести, а также —

$$u^{(II)e} = \frac{1}{2G} \left\{ -\frac{1}{\rho} A + \cos 4\theta \left[\frac{2}{3} \frac{1}{\rho^3} (D - B) + \frac{1}{5} \frac{1}{\rho^5} (2B - 3D) \right] \right\}, \quad (2.80)$$

$$v^{(II)e} = \frac{1}{2G} \left[\frac{1}{3} \frac{1}{\rho^3} (D - B) + \frac{1}{5} \frac{1}{\rho^5} (2B - 3D) \right] \sin 4\theta,$$

где A, B, D определяются согласно (2.74).

Из условий сопряжения перемещений (1.241) в первом приближении и (2.79) получим при $\rho = 1$

$$u^{(I)p} = \frac{1}{2G} \left(-2d_2 - d_1 \alpha \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \chi_0 \right) \cos 2\theta, \quad (2.81)$$

$$v^{(I)p} = \frac{1}{2G} \left[2d_2 + 2d_1 \alpha \left(\cos \chi_0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \chi_0 \right) \right] \sin 2\theta.$$

Линеаризированные уравнения для определения перемещений в пластической области в первом приближении имеют вид (1.264). Используя решение однородной системы (1.264) и определяя частное решение уравнения (1.266) с известной правой частью, получим

$$u^{(I)p} = \left\{ -2 [C_1 \cos(\chi + \chi_0) + C_2 \sin(\chi + \chi_0)] + \frac{d_1 \alpha}{2G\rho^2} (\cos \chi - \sqrt{3} \sin \chi) \right\} \cos 2\theta, \quad (2.82)$$

$$v^{(I)p} = \left[(C_1 + \sqrt{3}C_2) \cos(\chi + \chi_0) + (C_2 - \sqrt{3}C_1) \sin(\chi + \chi_0) + \frac{d_1\alpha}{G\rho^2} \cos \chi \right] \sin 2\theta,$$

$$C_1 = \frac{1}{2G} \left[d_2 + \frac{d_1\alpha}{\sqrt{3}} \cos \left(\chi_0 + \frac{\pi}{6} \right) \right], \quad (2.82)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}G} \left[d_2 - d_1\alpha \cos \left(\chi_0 - \frac{\pi}{6} \right) \right].$$

Аналогично определяется второе приближение, для которого приведем окончательное выражение

$$u^{(II)p} = - \left\{ C_1 \cos(\gamma + \gamma_0) + C_2 \sin(\gamma + \gamma_0) + \frac{d_1\alpha}{G\rho} \left[R + Q \cos 2\chi_1 + T \sin 2\chi_1 + \frac{d_1}{8\rho} (\cos \gamma - \sqrt{15} \sin \gamma) - \frac{d_1^2\alpha}{\rho^2} (1 + \cos 2\chi - \sqrt{3} \sin 2\chi) \right] \right\} \cos 4\theta - C_3\rho^{-1}, \quad (2.83)$$

$$v^{(II)p} = \frac{1}{4} \left\{ (C_1 + \sqrt{15}C_2) \cos(\gamma + \gamma_0) + (C_2 - \sqrt{15}C_1) \sin(\gamma + \gamma_0) + \frac{2d_1\alpha}{G\rho} \left[\sqrt{3}T \cos 2\chi_1 - \sqrt{3}Q \sin 2\chi_1 - \frac{d_1}{\rho} \cos \gamma + \frac{d_1\alpha}{\rho^2} (1 + 4 \cos 2\chi) \right] \right\} \sin 4\theta,$$

где

$$\chi_1 = \sqrt{3} \ln \frac{\rho}{\sqrt{a}},$$

$$R = -\frac{1}{4} [2d_2(\cos \chi_0 - \sqrt{3} \sin \chi_0) - d_1\alpha(\cos 2\chi_0 + \sqrt{3} \sin 2\chi_0)],$$

$$Q = d_2 + d_1\alpha \cos \chi_0, \quad T = \sqrt{3}d_2 + d_1\alpha \sin \chi_0.$$

На рис. 22 представлены перемещения на контуре отверстия в случае равномерно растягиваемой толстой пластины с эллиптическим отверстием, находящейся под действием равномерного давления при $\alpha = 0,7$ для случаев, представленных на рис. 20. Кривые 1, 2 соответствуют первому и второму приближениям радиального перемеще-

ния. Кривые 1', 2' (рис. 22. б) и 3, 4 (рис. 22, а) соответствуют первому и второму приближениям тангенциального

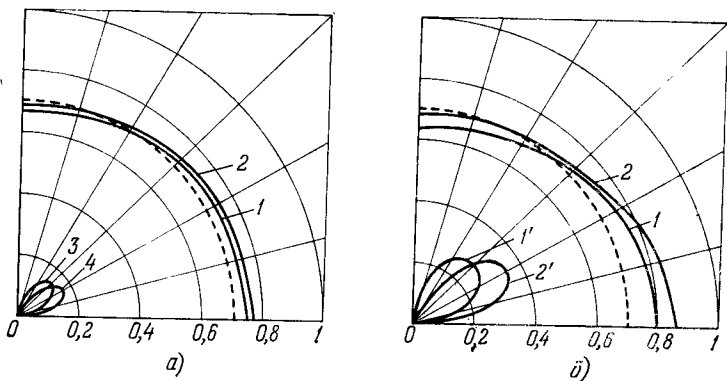


Рис. 22.

перемещения. Тангенциальные перемещения значительно меньше радиальных.

§ 4. Эксцентричная труба под действием внутреннего давления

Рассмотрим упругопластическое состояние эксцентричной трубы под действием внутреннего давления p . Пусть радиусы стенок трубы a и b ($a < b$), эксцентриситет — c (рис. 23). Уравнение внешнего контура трубы

$$(x - c)^2 + y^2 = b^2. \quad (2.84)$$

Полагая $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, перепишем (2.84)

$$\rho^2 - 2\delta\rho \cos \theta + (\delta^2 - \beta^2) = 0, \quad (2.85)$$

где $\delta = \frac{c}{r_s^0}$, $\rho = \frac{r}{r_s^0}$,

$$\beta = \frac{b}{r_s^0}, \quad \alpha = \frac{a}{r_s^0}.$$

Из (2.85) найдем

$$\rho = \delta \cos \theta + \sqrt{\beta^2 - \delta^2 \sin^2 \theta} = \beta + \delta \cos \theta - (\delta^2/2\beta) \sin^2 \theta + \dots \quad (2.86)$$

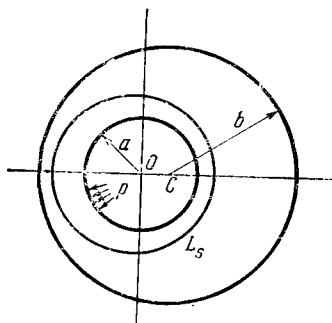


Рис. 23.

Решение будем искать вблизи известного осесимметричного напряженного состояния

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2 \ln \frac{\rho}{\alpha}, \quad (2.87)$$

$$\sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{\alpha} \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0,$$

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \quad (2.88)$$

где компоненты напряжения отнесены к величине предела текучести k , $\rho_{si} = r_{si}/r_s^0$.

Линеаризованные граничные условия на внутренней поверхности трубы

$$\sigma_{\rho}^{(n)p} = \tau_{\rho\theta}^{(n)p} = 0 \quad (n \geq 1) \quad \text{при} \quad \rho = \alpha, \quad (2.89)$$

откуда аналогично (2.2) всюду в пластической зоне

$$\sigma_{\rho}^{(n)p} = \tau_{\rho\theta}^{(n)p} = \sigma_{\theta}^{(n)p} = 0. \quad (2.90)$$

Из условий сопряжения решения (1.240), в первом приближении согласно (2.87), (2.88) получим

$$\sigma_{\rho}^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (2.91)$$

а также

$$\sigma_{\theta}^{(1)e} = 4\rho_{s1} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.92)$$

Граничные условия на внешней поверхности трубы в первом приближении согласно (1.237), (2.86), (2.88) примут вид

$$\sigma_{\rho}^{(1)e} = -2\beta^{-3} \cos \theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = -2\beta^{-3} \sin \theta \quad \text{при} \quad \rho = \beta. \quad (2.93)$$

Условия (2.91), (2.93) позволяют определить согласно (1.440) напряжения в упругой области:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(1)e} &= -\frac{2}{\beta^4} \left[\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta, \\ \sigma_{\theta}^{(1)e} &= -\frac{2}{\beta^4} \left[3\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(3\rho + \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right] \cos \theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= -\frac{2}{\beta^4} \left[\rho + \frac{1}{\beta^4 - 1} \left(\rho - \frac{\beta^4}{\rho^3} \right) \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Из (2.92) и (2.94) найдем

$$\rho_{s1} = - \frac{2\beta^{-1}}{\beta^4 - 1} \cos \theta. \quad (2.95)$$

Определим второе приближение. Из условий сопряжения решения для второго приближения (1.240) согласно (2.87), (2.88), (2.90), (2.94) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= - \frac{4}{(\beta^4 - 1)^2} (1 + \cos 2\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= - \frac{8}{(\beta^4 - 1)^2} \sin 2\theta, \text{ при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (2.96)$$

а также

$$\rho_{s2} = \frac{1}{4} \sigma_{\theta}^{(II)e} + \frac{2}{(\beta^4 - 1)^2} (1 + \cos 2\theta) \text{ при } \rho = 1. \quad (2.97)$$

Граничные условия на внешней поверхности трубы во втором приближении согласно (1.245), (2.88), (2.86), (2.94) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= \frac{1}{\beta^4 (\beta^4 - 1)} [4\beta^4 + (\beta^4 + 3) \cos 2\theta], \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= \frac{1}{\beta^4 (\beta^4 - 1)} (5\beta^4 + 3) \sin 2\theta \text{ при } \rho = \beta. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Условия (2.96), (2.98) позволяют определить согласно (1.436), (1.443) напряжения в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= \frac{4}{(\beta^2 - 1)(\beta^4 - 1)^2} \left[(\beta^6 - \beta^2 + 1) - \frac{\beta^6}{\rho^2} \right] + \\ &+ \frac{1}{2N} \left\{ \left[2 \left(1 - \frac{2}{\beta^2} + \beta^4 \right) + 2 \left(3\beta^4 - 2\beta^2 - 1 \right) \frac{1}{\rho^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left(\beta^2 - 2\beta^4 + \frac{1}{\beta^2} \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \frac{\beta^4 + 3}{\beta^2 (\beta^4 - 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left[2 \left(1 - 2\beta^2 + \frac{1}{\beta^4} \right) + 2 \left(3 - 2\beta^2 - \beta^4 \right) \frac{1}{\rho^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left(\frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta^3} + \frac{1}{\beta^5} \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \frac{4\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left[\left(-1 + \frac{1}{\beta^2} \right) + (1 - \beta^2) \frac{1}{\rho^4} + \frac{\beta^4 - 1}{\beta^2 \rho^2} \right] \frac{5\beta^4 + 3}{\beta^2 (\beta^4 - 1)} - \right. \\ &\quad \left. - 4 \left[\left(-1 + \beta^2 \right) + (\beta^4 - \beta^2) \frac{1}{\rho^4} + (1 - \beta^4) \frac{1}{\rho^2} \right] \frac{8\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} \right\} \cos 2\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(II)e} = & \frac{4}{(\beta^2-1)(\beta^4-1)^2} \left[(\beta^6 - \beta^2 + 1) + \frac{\beta^6}{\rho^2} \right] + \\ & + \frac{1}{2N} \left\{ \left[-2 \left(1 - \frac{2}{\beta^2} + \beta^4 \right) - 2(3\beta^4 - 2\beta^2 - 1) \frac{1}{\rho^4} + \right. \right. \\ & + 4 \left(2 - \frac{3}{\beta^2} + \beta^2 \right) \rho^2 \left. \right] \frac{\beta^4 + 3}{\beta^2(\beta^4 - 1)} - \left[-2 \left(1 - 2\beta^2 + \frac{1}{\beta^4} \right) - \right. \\ & - 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4) \frac{1}{\rho^4} + 4 \left(-3 + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) \rho^2 \left. \right] \frac{4\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} + \\ & + 4 \left[\left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + (\beta^2 - 1) \frac{1}{\rho^4} + \left(\frac{3}{\beta^2} - 4 + \beta^2 \right) \rho^2 \right] \frac{5\beta^4 + 3}{(\beta^4 - 1)\beta^2} - \\ & - 4 \left[(1 - \beta^2) + (\beta^2 - \beta^4) \frac{1}{\rho^4} + \left(3 - \frac{4}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) \rho^2 \right] \times \\ & \times \frac{8\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} \left. \right\} \cos 2\theta, \quad (2.99) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta\theta}^{(II)e} = & \frac{1}{N} \left\{ \left[2 \left(-1 + \frac{2}{\beta^2} - \beta^4 \right) + 2(3\beta^4 - 2\beta^2 - 1) \frac{1}{\rho^4} + \right. \right. \\ & + 2 \left(-\frac{3}{\beta^2} + 2 + \beta^2 \right) \rho^2 + 2 \left(3 - 2\beta^2 + \frac{1}{\beta^4} \right) \frac{\beta^2}{\rho^2} \left. \right] \frac{\beta^4 + 3}{(\beta^4 - 1)\beta^2} - \\ & - \left[2 \left(-1 + 2\beta^2 - \frac{1}{\beta^4} \right) + 2(3 - 2\beta^2 - \beta^4) \frac{1}{\rho^4} + \right. \\ & + 2 \left(-3 + \frac{2}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4} \right) \rho^2 + 2 \left(3 - \frac{2}{\beta^2} + \beta^4 \right) \frac{1}{\rho^2} \left. \right] \frac{4\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} + \\ & + \left[4 \left(1 - \frac{1}{\beta^2} \right) + 4(-\beta^2 + 1) \frac{1}{\rho^4} + \left(\frac{6}{\beta^2} - 8 + 2\beta^2 \right) \rho^2 + \right. \\ & + 2 \left(1 - \frac{1}{\beta^4} \right) \frac{\beta^2}{\rho^2} \left. \right] \frac{5\beta^4 + 3}{(\beta^4 - 1)\beta^2} - \left[4(1 - \beta^2) + \right. \\ & + 4(-\beta^2 + \beta^4) \frac{1}{\rho^4} + \left(6 - \frac{8}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^4} \right) \rho^2 + \\ & + 2(1 - \beta^4) \frac{1}{\rho^2} \left. \right] \frac{8\beta^2}{(\beta^4 - 1)^2} \left. \right\} \sin 2\theta, \quad N = \left(\frac{1}{\beta} - \beta \right)^4 \beta^2. \end{aligned}$$

Из (2.97) и (2.99) найдем

$$\begin{aligned} \rho_{s2} = & \frac{(2\beta^6 - \beta^2 + 1)}{(\beta^2 - 1)(\beta^4 - 1)^2} + \frac{2}{(\beta^4 - 1)^2} + \frac{1}{N} \left\{ -\frac{(\beta^2 - 1)(\beta^4 - 3)}{\beta^4} + \right. \\ & + \frac{(\beta^2 - 1)^2(5\beta^4 + 3)}{\beta^4(\beta^4 - 1)} - \frac{\beta^6}{(\beta^4 - 1)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right)^4 + \frac{4}{\beta^4} \left(2 - \frac{1}{\beta^2} \right)^2 - \right. \\ & \left. \left. - 4 \left(1 + \frac{4}{\beta^4} \right) + \frac{2(\beta^2 - 1)^2}{\beta^3(\beta^2 + 1)^2} \right] \right\} \cos 2\theta. \end{aligned}$$

На рис. 24 показана граница пластической зоны при $\delta = 0, 1$, $\beta = 10/6$ ($r_s^0 = 0,6 b$) в первом (1) и втором (2) приближениях.

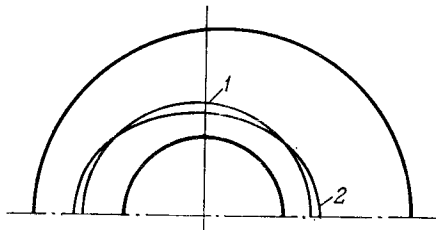


Рис. 24.

Определим перемещения в упругой и пластической областях в первом приближении. В нулевом приближении

$$u^{(0)} = \frac{1}{2G\rho}, \quad v^{(0)} = 0. \quad (2.100)$$

Перемещения в упругой области, соответствующие напряжениям (2.94), находятся согласно (1.156)

$$u^{(1)e} = \frac{1}{2G(\beta^4 - 1)} \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) \cos \theta, \quad (2.101)$$

$$v^{(1)e} = - \frac{1}{2G(\beta^4 - 1)} \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \right) \sin \theta.$$

Условия сопряжения (1.241) согласно (2.100), (2.101) примут вид

$$u^{(1)p} = 0, \quad v^{(1)p} = \frac{1}{G(1 - \beta^4)} \sin \theta \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.102)$$

Из (1.274) и (2.102) получим

$$u^{(1)p} = \frac{1}{G(\beta^4 - 1)} \ln \rho \cos \theta, \quad v^{(1)p} = - \frac{1}{G(\beta^4 - 1)} \left(\ln \rho + 1 \right) \sin \theta. \quad (2.103)$$

§ 5. Двусное растяжение тонкой пластины с круговым отверстием

1. Рассмотрим вначале упругопластическое состояние бесконечной пластины с круговым отверстием радиуса a . Предположим, что пластина растягивается на бесконечности равномерными усилиями p , а контур отверстия сво-

боден от усилий. Рассмотрим условие пластичности Треска. Напряженное состояние в пластической зоне соответствует стороне BC (см. рис. 8), если положить $\sigma_r = \sigma_1$, $\sigma_\theta = \sigma_2$. Переходя к безразмерным координатам (2.8), интегрируя дифференциальное уравнение (2.10) при условии $\sigma_\theta = 1$ и граничном условии $\sigma_\rho = 0$ при $\rho = \alpha$, получим

$$\sigma_\rho^p = \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_\theta^p = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0. \quad (2.104)$$

В упругой зоне ($1 < \rho < \infty$) распределение напряжений определяется по формулам (2.14). Удовлетворяя граничному условию $\sigma_\rho = q$ при $\rho = \infty$, где $q = p/k$, и условиям сопряжения $[\sigma_\rho] = [\sigma_\theta] = 0$ при $\rho = 1$, из (2.14) и (2.104) получим

$$\sigma_\rho^e = q - \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \sigma_\theta^e = q + \frac{\alpha}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^e = 0, \quad q = 1 - \frac{\alpha}{2}. \quad (2.105)$$

Из последнего условия (2.105) найдем

$$r_s = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)}. \quad (2.106)$$

Соотношения (2.105) определяют перемещения в упругой зоне (коэффициент Пуассона здесь и ниже принять равным $1/2$)

$$u_\rho^e = \frac{1}{4E} \left[(2-\alpha)\rho + \frac{3\alpha}{\rho} \right], \quad u_\theta^e = 0, \quad (2.107)$$

где E — безразмерный модуль упругости, отнесенный к пределу текучести k . Из (1.213), (2.104) получим

$$u_\rho^p = \frac{1}{2E} (\rho - 2\alpha \ln \rho) + C, \quad u_\theta^p = 0. \quad (2.108)$$

Из (2.108), (2.107) и условия сопряжения $[u_\rho] = 0$ при $\rho = 1$ получим окончательно

$$u_\rho^p = \frac{1}{2E} (\alpha + \rho - 2\alpha \ln \rho), \quad u_\theta^p = 0. \quad (2.109)$$

2. Постановка задачи о двусосном растяжении тонкой пластины с круговым (или эллиптическим и т. п.) отверстием совпадает с аналогичной постановкой задачи в случае плоской деформации (гл. 2 § 3). Отличие состоит в том,

что для случая плоского напряженного состояния имеет место другое условие пластичности и, следовательно, другое распределение напряженного и деформированного состояния.

Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса a , растягиваемую на бесконечности взаимноперпендикулярными усилиями p_1, p_2 . Контур отверстия будем считать свободным от усилий.

За параметр δ примем величину

$$\delta = \frac{p_1 - p_2}{2k}, \quad 0 \leq \delta \leq 1. \quad (2.110)$$

Граничные условия на бесконечности имеют вид (2.31), на контуре отверстия

$$\sigma_\rho^p = 0, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \alpha. \quad (2.111)$$

Решение будем искать вблизи осесимметричного состояния (2.104), (2.105), (2.107), (2.108). В рассматриваемой задаче внутренний контур и нагрузки на нем не варьируются, поэтому согласно (2.2)

$$\sigma_{ij}^{(n)p} = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 1. \quad (2.112)$$

Определим первое приближение. Граничные условия на бесконечности (2.31) принимают вид (2.35), (2.36). Из условия сопряжения решений (1.240) согласно (2.104), (2.105), получим

$$\sigma_\rho^{(1)e} = \tau_{\rho\theta}^{(1)e} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (2.113)$$

а также

$$\alpha \rho_{s1} = \sigma_\theta^{(1)e} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.114)$$

Граничные условия (2.35), (2.113) определяют согласно (1.448) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(1)e} &= - \left(1 - \frac{4}{\rho^2} + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta^{(1)e} &= \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(1)e} &= \left(1 + \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.115)$$

Из (2.115) и (2.114) найдем

$$\rho_{s1} = \frac{4}{\alpha} \cos 2\theta. \quad (2.116)$$

Определим второе приближение. Согласно (2.104), (2.105), (2.112), (2.115), (2.116) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\rho}^{(II)e} &= -4(1 + \cos 4\theta), \\ \alpha \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= -16 \sin 4\theta \quad \text{при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (2.117)$$

а также

$$\alpha^2 \rho_{s_2} = \alpha \sigma_{\theta}^{(II)e} - 12(1 + \cos 4\theta) \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.118)$$

Граничные условия (2.36), (2.117) определяют, согласно (1.444), (1.449), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \alpha \sigma_{\rho}^{(II)e} &= -\frac{4}{\rho^2} + \left(\frac{36}{\rho^4} - \frac{40}{\rho^6} \right) \cos 4\theta, \\ \alpha \sigma_{\theta}^{(II)e} &= \frac{4}{\rho^4} + \left(-\frac{12}{\rho^4} + \frac{40}{\rho^6} \right) \cos 4\theta, \\ \alpha \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= \left(\frac{24}{\rho^4} - \frac{40}{\rho^6} \right) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Из (2.118) и (2.119) найдем

$$\alpha^2 \rho_{s_2} = -8(1 - 2 \cos 4\theta). \quad (2.120)$$

Определим третье приближение. Согласно (2.104), (2.105), (2.112), (2.115), (2.116), (2.119), (2.120) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sigma_{\rho}^{(III)e} &= 56 \cos 2\theta - 136 \cos 6\theta, \\ \alpha^2 \tau_{\rho\theta}^{(III)e} &= -64 \sin 2\theta - 256 \sin 6\theta, \quad \text{при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (2.121)$$

а также

$$\alpha^3 \rho_{s_3} = \alpha^2 \sigma_{\theta}^{(III)e} - 152 \cos 2\theta - 296 \cos 6\theta \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.122)$$

Граничные условия (2.36), (2.121) определяют согласно (1.448), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sigma_{\rho}^{(III)e} &= \left(\frac{16}{\rho^2} - \frac{72}{\rho^4} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{480}{\rho^6} - \frac{616}{\rho^8} \right) \cos 6\theta, \\ \alpha^2 \sigma_{\theta}^{(III)e} &= \frac{72}{\rho^4} \cos 2\theta - \left(-\frac{240}{\rho^6} - \frac{616}{\rho^8} \right) \cos 6\theta, \\ \alpha^2 \tau_{\rho\theta}^{(III)e} &= \left(\frac{8}{\rho^2} - \frac{72}{\rho^4} \right) \sin 2\theta + \left(\frac{360}{\rho^6} - \frac{616}{\rho^8} \right) \sin 6\theta. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Из (2.123) и (2.122) найдем

$$\alpha^3 \rho_{s3} = -80 (\cos 2\theta - \cos 6\theta). \quad (2.124)$$

Определим четвертое приближение. Согласно (2.104), (2.105), (2.112), (2.115), (2.116), (2.119), (2.120), (2.123), (2.124), из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned} \alpha^3 \sigma_{\rho}^{(IV)e} &= -16 - 992 \cos 4\theta - 2800 \cos 8\theta, \\ \alpha^3 \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} &= -1088 \sin 4\theta - 4256 \sin 8\theta, \end{aligned} \quad (2.125)$$

а также

$$\alpha^4 \rho_{s4} = \alpha^3 \sigma_{\theta}^{(IV)e} + 1696 \cos 4\theta - 5264 \cos 8\theta \quad (2.126)$$

при $\rho = 1$.

Граничные условия (2.36), (2.125) определяют согласно (1.444), (1.449), (1.450) решение в упругой зоне

$$\begin{aligned} \alpha^2 \sigma_{\rho}^{(IV)e} &= -\frac{16}{\rho^2} + \left(\frac{288}{\rho^4} - \frac{1280}{\rho^6} \right) \cos 4\theta + \\ &\quad + \left(\frac{7280}{\rho^8} - \frac{10080}{\rho^{10}} \right) \cos 8\theta, \\ \alpha^3 \sigma_{\theta}^{(IV)e} &= \frac{16}{\rho^2} + \left(-\frac{96}{\rho^4} + \frac{1280}{\rho^6} \right) \cos 4\theta + \\ &\quad + \left(-\frac{4368}{\rho^8} + \frac{10080}{\rho^{10}} \right) \cos 8\theta, \\ \alpha^3 \tau_{\rho\theta}^{(IV)e} &= \left(\frac{192}{\rho^4} - \frac{1280}{\rho^6} \right) \sin 4\theta + \left(\frac{5824}{\rho^8} - \frac{10080}{\rho^{10}} \right) \sin 8\theta. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Из (2.127) и (2.126) найдем

$$\alpha^4 \rho_{s4} = 32(1 - 16 \cos 4\theta + 14 \cos 8\theta). \quad (2.128)$$

Аналогично определяются последующие приближения. Согласно (2.116), (2.120), (2.124), (2.128) выпишем приближение для упругопластической границы

$$\begin{aligned} \rho_s = 1 + 4\delta^* \cos 2\theta - 8\delta^{*2} (1 - 2 \cos 4\theta) - \\ - 80\delta^{*3} (\cos 2\theta - \cos 6\theta) + 32\delta^{*4} (1 - 16 \cos 4\theta + \\ + 14 \cos 8\theta) + \dots, \end{aligned} \quad (2.129)$$

где $\delta^* = \delta/\alpha$.

Компоненты напряжений в упругой области определены формулами (2.115), (2.119), (2.123), (2.127). Использ-

зная эти выражения, из соотношений закона Гука согласно (1.160) получим выражения компонент перемещений в упругой области:

$$\begin{aligned}
 Eu_{\rho}^e = & \frac{1}{4} \left[(2 - \alpha) \rho + \frac{3\alpha}{\rho} \right] + \\
 & + \left\{ \delta^* \left(-\frac{3}{2} \rho - \frac{4}{\rho} + \frac{3}{2\rho^3} \right) \cos 2\theta + 2\delta^{*2} \left[\frac{3}{\rho} - \left(\frac{7}{\rho^3} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{6}{\rho^5} \right) \cos 4\theta \right] - 4\delta^{*3} \left[\left(\frac{4}{\rho} - \frac{9}{\rho^3} \right) \cos 2\theta + \right. \\
 & \left. + 3 \left(\frac{10}{\rho^5} - \frac{11}{\rho^7} \right) \cos 6\theta \right] + 8\delta^{*4} \left[\frac{3}{\rho} - 2 \left(\frac{7}{\rho^3} - \frac{24}{\rho^5} \right) \cos 4\theta - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{169}{\rho^7} - \frac{210}{\rho^9} \right) \cos 8\theta \right] + \dots \right\} \alpha, \quad (2.130)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Eu_{\theta}^e = & \left\{ \delta^* \left(\frac{3}{2} \rho + \frac{1}{\rho} + \frac{3}{2\rho^3} \right) \sin 2\theta - \right. \\
 & - 4\delta^{*2} \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5} \right) \sin 4\theta + 4\delta^{*3} \left[\left(\frac{1}{\rho} + \frac{9}{\rho^3} \right) \sin 2\theta - \right. \\
 & \left. - 3 \left(\frac{5}{\rho^5} - \frac{11}{\rho^7} \right) \sin 6\theta \right] - 16\delta^{*4} \left[2 \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{12}{\rho^5} \right) \sin 4\theta + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{52}{\rho^7} - \frac{105}{\rho^9} \right) \sin 8\theta \right] + \dots \right\} \alpha.
 \end{aligned}$$

Зная выражения компонент перемещений в упругой области (2.130), выражение для радиуса пластической зоны (2.129) из условий сопряжения компонент перемещений (1.241) получим граничные условия для определения перемещений в пластической зоне:

$$u_{\rho}^{(I)p} = \frac{2}{E} \left(\frac{1}{\alpha} - 4 \right) \cos 2\theta,$$

$$u_{\theta}^{(I)p} = \frac{4}{E} \sin 2\theta;$$

$$u_{\rho}^{(II)p} = \frac{4}{E\alpha} \left[4 - \frac{1}{\alpha} + 2 \left(\frac{1}{\alpha} - 2 \right) \cos 4\theta \right],$$

$$u_{\theta}^{(II)p} = \frac{8}{E\alpha} \left(3 - \frac{1}{\alpha} \right) \sin 4\theta;$$

$$u_{\rho}^{(III)p} = \frac{8}{E\alpha^2} \left[\left(8 - \frac{5}{\alpha} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{5}{\alpha} - 8 \right) \cos 6\theta \right],$$

$$u_{\theta}^{(III)p} = \frac{16}{E\alpha^2} \left[\left(-4 + \frac{1}{\alpha} \right) \sin 2\theta + \left(10 - \frac{5}{\alpha} \right) \sin 6\theta \right];$$

(2.131)

$$u_{\rho}^{(IV)p} = \frac{16}{E\alpha^3} \left[\frac{1}{\alpha} - 4 + \left(24 - \frac{16}{\alpha} \right) \right] \cos 4\theta + \left(\frac{14}{\alpha} - 20 \right) \cos 8\theta,$$

$$u_{\theta}^{(IV)p} = \frac{32}{E\alpha^3} \left[\left(22 + \frac{10}{\alpha} \right) \sin 4\theta + \left(35 - \frac{21}{\alpha} \right) \sin 8\theta \right],$$

где E — безразмерный модуль упругости, отнесенный к величине k . Для определения перемещений в пластической зоне в рассматриваемом случае следует использовать уравнения (1.211), (1.212). Так как $\sigma_{ij}^{(n)p} = 0$, то уравнения для любого приближения имеют вид (1.275), решения которых определены в виде (1.277). Из (1.277) и граничных условий (2.131) найдем компоненты перемещения в пластической области

$$Eu_{\rho}^p = \frac{1}{2} (\alpha + \rho - 2\alpha \ln \rho) + \left\{ 2\delta^* \left(\frac{1}{\alpha} - 4 \right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + 4\delta^{*2} \left[4 - \frac{1}{\alpha} + 2 \left(\frac{1}{\alpha} - 2 \right) \cos 4\theta \right] + \right. \\ \left. + 8\delta^{*3} \left[\left(8 - \frac{5}{\alpha} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{5}{\alpha} - 8 \right) \cos 6\theta \right] - \right. \\ \left. - 16\delta^{*4} \left[4 - \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{16}{\alpha} - 24 \right) \cos 4\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(20 - \frac{14}{\alpha} \right) \cos 8\theta \right] + \dots \right\} \alpha, \quad (2.132)$$

$$Eu_{\theta}^p = \left\{ -4\delta^* \left[\left(3 - \frac{1}{\alpha} \right) \rho - \left(4 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \sin 2\theta + \right. \\ \left. + 8\delta^{*2} \left[\left(\frac{3}{\alpha} - 5 \right) \rho - 4 \left(\frac{1}{\alpha} - 2 \right) \right] \sin 4\theta - \right. \\ \left. - 16\delta^{*3} \left[\left[4 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) \rho - \left(\frac{5}{\alpha} - 8 \right) \right] \sin 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[2 \left(7 - \frac{5}{\alpha} \right) \rho - 3 \left(8 - \frac{5}{\alpha} \right) \right] \sin 6\theta \right] + \right. \\ \left. + 32\delta^{*4} \left\{ \left[2 \left(13 - \frac{11}{\alpha} \right) \rho - 16 \left(3 - \frac{2}{\alpha} \right) \right] \sin 4\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[5 \left(\frac{7}{\alpha} - 9 \right) \rho - 8 \left(\frac{7}{\alpha} - 10 \right) \right] \sin 8\theta + \dots \right\} \alpha. \right.$$

Точное решение рассмотренной задачи в напряжениях было дано Г. П. Черепановым [81]. Показано, что в принятых обозначениях границей пластической зоны является овал, уравнение которого может быть представлено

в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-\lambda^2} [(1+2\lambda)\cos t + \lambda^2\cos 3t], \\ y &= \frac{1}{1-\lambda^2} [(1-2\lambda)\sin t - \lambda^2\sin 3t], \end{aligned} \quad (2.133)$$

где координаты x , y отнесены к r_s^0 , определяемому из (2.106); t — параметр.

Величина λ в (2.133) является действительным корнем кубического уравнения

$$\lambda^3 + \lambda = \frac{p_1 - p_2}{2k - (p_1 + p_2)}. \quad (2.134)$$

Решение (2.133) справедливо при $\lambda < 1/3$, в этом случае упругопластическая граница представляет некоторый овал; при $\lambda > 1/3$ появляется петля, которая лишена механического смысла.

Определим отношение полуосей овала при $\lambda = 1/3$. Обозначая полуоси овала

$$a = x(t=0), \quad b = y\left(t = \frac{\pi}{2}\right),$$

из (2.133) получим

$$\frac{a}{b} = \frac{1+2\lambda+\lambda^2}{1-2\lambda+\lambda^2} = 4.$$

Таким образом, максимально возможное отношение большей полуоси овала (2.133) к меньшей равно четырем. Вводя параметр δ по формуле (2.110) и обозначая $(p_1 + p_2)/2k = q$, учитывая, что $1 - q = 1/2 \alpha$, перепишем (2.134) в виде

$$\lambda^3 + \lambda = 2\delta^*. \quad (2.135)$$

Из уравнения (2.135), если разложить λ в ряд по δ^* , получим

$$\lambda = 2\delta^* - 8\delta^{*3} + O(\delta^{*5}). \quad (2.136)$$

В осесимметричном случае ($\delta^* = 0$) $\lambda = \lambda_0 = 0$ и из (2.133) имеем

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad (2.137)$$

откуда следует, что $t = t_0 = \theta$, где θ — полярный угол.

Перейдем к полярной системе координат

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta. \quad (2.138)$$

Положим

$$t = \theta + \delta^* \bar{t}_1, \quad \bar{t}_1 = t_1 + \delta^* t_2 + \delta^{*2} t_3 + \delta^{*3} t_4 + \dots \quad (2.139)$$

Согласно (2.133), (2.138)

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(1 - 2\lambda) \sin t - \lambda^2 \sin 3t}{(1 + 2\lambda) \cos t + \lambda^2 \cos 3t}, \quad (2.140)$$

откуда имеем

$$-\sin \delta^* \bar{t}_1 + 2\lambda \sin (2\theta + \delta^* \bar{t}_1) + \lambda^2 \sin (4\theta + 3\delta^* \bar{t}_1) = 0. \quad (2.141)$$

Из разложения (2.140) по параметру δ^* определим

$$t_1 = 4 \sin 2\theta, \quad t_2 = 12 \sin 4\theta, \\ t_3 = -\frac{64}{3} \sin^3 2\theta + 48 \sin 6\theta - 16 \sin 2\theta, \quad (2.142)$$

$$t_4 = 16(-28 \sin^2 2\theta \sin 4\theta + 12 \sin 6\theta \cos 2\theta + \\ + \frac{9}{2} \sin 8\theta - 6 \sin 4\theta), \dots$$

Далее из (2.138) и (2.133) найдем

$$\rho = \frac{1}{1 - \lambda^2} [(1 + \lambda^2)^2 + 2\lambda^2(1 + \cos 4t) + 4\lambda(1 + \lambda^2) \cos 2t]^{1/2}, \quad (2.143)$$

где λ имеет разложение по δ^* (2.136), а для $\cos 2t$, $\cos 4t$ имеют место следующие разложения по δ^* :

$$\begin{aligned} \cos nt &= \cos n\theta - nt_1 \delta^* \sin 2\theta - \\ &\quad - \delta^{*2} \left(nt_2 \sin n\theta + \frac{n^2 t_1^2}{2!} \cos n\theta \right) - \\ &\quad - \delta^{*3} \left(nt_3 \sin n\theta + \frac{n^2}{2!} t_1 t_2 \cos n\theta - \frac{n^3}{3!} t_1^3 \sin n\theta \right) - \\ &\quad - \delta^{*4} \left[nt_4 \sin n\theta + \frac{n^2}{2!} (t_2^2 + 2t_1 t_3) \cos n\theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n^3}{3!} 3t_1^2 t_2 \sin n\theta - \frac{n^4}{4!} t_1^4 \cos n\theta \right] + \dots, \\ n &= 2, 4. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Разлагая (2.143) в ряд по параметру δ^* , используя разложения (2.136), (2.139), (2.142), (2.144), получим ¹⁾

$$\rho_s = 1 + 4\delta^* \cos 2\theta - 8\delta^{*2} (1 - 2 \cos 4\theta) - \\ - 80 \delta^{*3} (\cos 2\theta - \cos 6\theta) + 32\delta^{*4} (1 - 16 \cos 4\theta + \\ + 14 \cos 8\theta) + \dots \quad (2.145)$$

Выражение (2.145) представляет собой разложение в ряд по параметру δ^* границы пластической зоны (2.133)

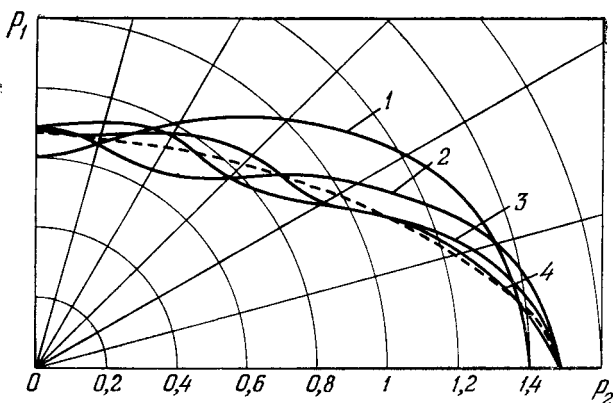


Рис. 25.

в полярной системе координат. Видно, что первые четыре члена разложения совпадают с соответствующими членами разложения (2.129).

Согласно (2.135) $\delta^* \approx 0,185$ при $\lambda = 1/3$. Следовательно, решение (2.129) следует использовать в пределах $0 < \delta^* < 0,185$.

На рис. 25 показана граница пластической зоны, построенная по формуле (2.129) при $\delta^* = 0,1$. Приведены четыре приближения (кривые 1, 2, 3 и 4). Здесь же нанесена пунктиром граница, полученная по точному решению.

¹⁾ Приведенное разложение решения (2.133) выполнено Ю. М. Марушкой.

§ 6. Двуосное растяжение тонкой пластины с эллиптическим отверстием, свободным от усилий

Для решения рассматриваемой задачи следует повторить процедуру решения задачи в случае плоской деформации, используя вместо соотношений (2.23), (2.27), (2.33) соответственно выражения (2.104), (2.105), (2.107), (2.108).

Определим напряженное состояние в пластической зоне. В первом приближении граничные условия (1.237) с учетом (2.104), (2.62) примут вид

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = -d_1 \cos 2\theta, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -2d_1 \sin 2\theta \quad \text{при } \rho = \alpha. \quad (2.146)$$

Из решений (1.272), (1.273) и граничных условий (2.146) определим выражение напряжений в пластической зоне в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= d_1 \left(\frac{3\alpha}{\rho} - \frac{4\alpha^2}{\rho^2} \right) \cos 2\theta, & \sigma_{\theta}^{(I)p} &= 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{2d_1\alpha^2}{\rho^2} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Из граничных условий (1.237) для второго приближения с учетом (2.104), (2.146), (2.62) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)p} &= d_1^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{19}{4} \cos 4\theta \right), & \tau_{\rho\theta}^{(II)p} &= -4d_1^2 \sin 4\theta \\ & \text{при } \rho = \alpha. \end{aligned} \quad (2.148)$$

Из решения (1.273) и граничных условий (2.148) определим выражения напряжений в пластической зоне во втором приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)p} &= d_1^2 \left[\left(-\frac{\alpha}{4\rho} + \frac{\alpha^3}{\rho^3} \right) - \left(\frac{15}{4} \frac{\alpha}{\rho} - \frac{16\alpha^2}{\rho^2} + \frac{17\alpha^3}{\rho^3} \right) \cos 4\theta \right], \\ \sigma_{\theta}^{(II)p} &= -\frac{2d_1^2\alpha^3}{\rho^3} (1 - \cos 4\theta), \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)p} &= 4d_1^2 \left(\frac{\alpha^2}{\rho^2} - \frac{2\alpha^3}{\rho^3} \right) \sin 4\theta. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Аналогично могут быть определены третьи и любые последующие приближения.

Определим решение в упругой области и радиус пластической зоны. Граничные условия на бесконечности

имеют вид (2.67), в первом приближении (2.68), в последующих — (2.69).

Из условия сопряжения решения (1.240) в первом приближении согласно (2.105), (2.147) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= d_1 \alpha (3 - 4\alpha) \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= -2d_1 \alpha^2 \sin 2\theta, \end{aligned} \quad \text{при } \rho = 1, \quad (2.150)$$

а также

$$\alpha \rho_{s1} = \sigma_{\theta}^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.151)$$

Согласно граничным условиям (2.68), (2.150) из (1.448), (1.449) определим компоненты напряжения в упругой зоне:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= \left[d_2 \left(-1 + \frac{4}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) + d_1 \alpha \left(-\frac{3}{\rho^4} - \frac{4\alpha - 6}{\rho^2} \right) \right] \cos 2\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(I)e} &= \left[d_2 \left(1 + \frac{3}{\rho^4} \right) + \frac{3\alpha d_1}{\rho^4} \right] \cos 2\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left[d_2 \left(1 - \frac{3}{\rho^4} + \frac{2}{\rho^2} \right) + \alpha d_1 \left(-\frac{3}{\rho^4} - \frac{2\alpha - 3}{\rho^2} \right) \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Из (2.151) и (2.152) найдем

$$\rho_{s1} = \left(\frac{4d_2}{\alpha} + 3d_1 \right) \cos 2\theta. \quad (2.153)$$

Определим второе приближение. Согласно (2.104), (2.105), (2.147), (2.149), (2.152), (2.153) из условий сопряжения (1.240) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(II)e} &= \alpha d_1^2 \left(-\frac{5}{2} + \alpha^2 \right) - d_2 \left(6d_1 + 4 \frac{d_2}{\alpha} \right) - \\ &\quad - \left[d_1^2 \alpha (6 - 16\alpha + 17\alpha^2) + d_2 \left(6d_1 + 4 \frac{d_2}{\alpha} \right) \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= - \left[d_1^2 \alpha (4\alpha - 8\alpha^2 + 9) + 8d_2 \left(\frac{2}{\alpha} d_2 + 3d_1 \right) \right] \sin 4\theta \\ &\quad \text{при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (2.154)$$

а также

$$\begin{aligned} \alpha \rho_{s2} &= \sigma_{\theta}^{(II)e} + \left(2d_1^2 \alpha^3 - 12 \frac{d_2^2}{\alpha} - 24d_1 d_2 - \frac{45}{4} d_1^2 \alpha^2 \right) - \\ &\quad - \left(2d_1^2 \alpha^3 + 12 \frac{d_2^2}{\alpha} + 24d_1 d_2 + \frac{45}{4} d_1^2 \alpha \right) \cos 4\theta \\ &\quad \text{при } \rho = 1. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Граничные условия (2.69), (2.154) определяют согласно (1.444), (1.449), (1.450) решение в упругой зоне:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(II)e} &= \frac{c_1}{\rho^2} - \left(\frac{c_2}{\rho^6} + \frac{3c_3}{\rho^4} \right) \cos 4\theta, \\ \sigma_{\theta}^{(II)e} &= -\frac{c_1}{\rho^2} + \left(\frac{c_2}{\rho^6} + \frac{c_3}{\rho^4} \right) \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(II)e} &= -\left(\frac{c_2}{\rho^6} + 2 \frac{c_3}{\rho^4} \right) \sin 4\theta,\end{aligned}\quad (2.156)$$

где

$$\begin{aligned}c_1 &= \alpha d_1^2 \left(\alpha^2 - \frac{5}{2} \right) - d_2 \left(6d_1 + 4 \frac{d_2}{\alpha} \right), \\ c_2 &= \alpha d_1^2 (15 + 44\alpha - 58\alpha^2) + d_2 \left(60 d_1 + 40 \frac{d_2}{\alpha} \right), \\ c_3 &= \alpha d_1^2 (25\alpha^2 - 20\alpha - 3) - d_2 \left(18d_1 + 12 \frac{d_2}{\alpha} \right).\end{aligned}\quad (2.157)$$

Из (2.155) и (2.156) получим

$$\begin{aligned}\rho_{s2} &= d_1^2 \left(\frac{1}{4} - 8\alpha^2 \right) - \frac{1}{\alpha^2} (18d_1 d_2 \alpha + 8d_2^2) + \\ &+ \left[-d_1^2 \left(\frac{15}{4} - 8\alpha - \frac{3}{2} \alpha^2 \right) + \frac{d_2}{\alpha} \left(18d_1 + 16 \frac{d_2}{\alpha} \right) \right] \cos 4\theta.\end{aligned}\quad (2.158)$$

Аналогично определяются последующие приближения.

Приведем уравнение границы пластической зоны с учетом второго приближения для случая равномерного растяжения пластинки с эллиптическим отверстием, свободным от усилий. Согласно (2.153), (2.158) получим

$$\begin{aligned}\rho_s &= 1 + 3\delta \cos 2\theta + \delta^2 \left[\left(\frac{1}{4} - 8\alpha^2 \right) - \right. \\ &\left. - \left(\frac{15}{4} - 8\alpha - \frac{3}{2} \alpha^2 \right) \cos 4\theta \right] + \dots\end{aligned}\quad (2.159)$$

На рис. 26 представлены кривые 1 и 2, рассчитанные по формуле (2.159) и соответствующие первому и второму приближениям. Кривые 1' и 2' соответствуют первому и второму приближениям, вычисленным по формуле (2.62) для внутреннего контура отверстия.

Обратимся к определению перемещений в упругой и пластической областях. Используя выражения для ком-

понтент напряжений в упругой области (2.105), (2.152), (2.156), из соотношений закона Гука согласно (1.160)

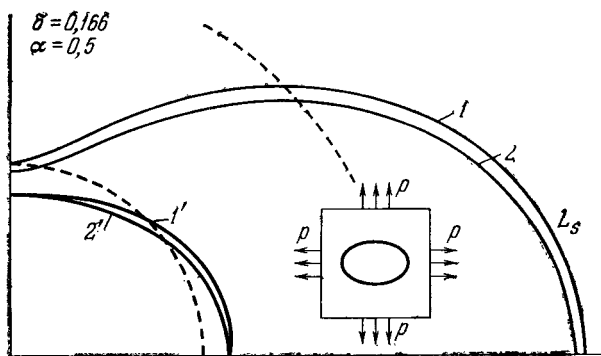


Рис. 26.

получим выражения компонент перемещений в упругой области:

$$\begin{aligned} \frac{E}{k} u^e = & \frac{1}{4} \left[(2 - \alpha) \rho + \frac{3\alpha}{\rho} \right] + \delta \left[d_2 \left(-\frac{3}{2} \rho - \frac{4}{\rho} + \frac{3}{2\rho^3} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha d_1 \left(\frac{3}{2\rho^3} - \frac{6 - 4\alpha}{\rho} \right) \right] \cos 2\theta_s + \\ & + \delta^2 \left[\frac{3c_1}{2\rho} + \left(\frac{3}{10} \frac{c_2}{\rho^5} + \frac{7}{6} \frac{c_3}{\rho^3} \right) \cos 4\theta \right] + \dots, \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} \frac{E}{k} v^e = & \delta \left[d_2 \left(\frac{3}{2} \rho + \frac{1}{\rho} + \frac{3}{2\rho^3} \right) + \right. \\ & \left. + \alpha d_1 \left(\frac{3}{2\rho^3} + \frac{6 - 4\alpha}{4\rho} \right) \right] \sin 2\theta + \delta^2 \left[\frac{3}{10} \frac{c_2}{\rho^5} + \frac{1}{3} \frac{c_3}{\rho^3} \right] \sin 4\theta + \dots \end{aligned}$$

Из условий сопряжения перемещений (1.241) в первом приближении и (2.159) получим при $\rho = 1$

$$u^{(1)p} = \frac{k}{E} \left[d_1 (1,5 + 4\alpha^2 - 7,5\alpha) + d_2 \left(\frac{2}{\alpha} - 8 \right) \right] \cos 2\theta, \quad (2.161)$$

$$v^{(1)p} = \frac{k}{E} [\alpha d_1 (3 - \alpha) + 4d_2] \sin 2\theta.$$

Линеаризированные уравнения для определения перемещений в пластической области в первом приближении

имеют вид (1.274). Используя решение однородной системы (1.275) и определяя частное решение системы (1.274) с известной правой частью, получим

$$u^{(I)p} = \frac{k}{E} \left[d_1 (1,5 + 4\alpha^2 - 7,5\alpha) + d_2 \left(\frac{2}{\alpha} - 8 \right) \right] \cos 2\theta, \quad (2.162)$$

$$v^{(I)p} = \frac{k}{E} \left\{ \left[d_1 (7\alpha^2 - 12\alpha + 3) + d_2 \left(\frac{4}{\alpha} - 12 \right) \right] \rho - \right. \\ \left. - 2 \left[d_1 (1,5 + 4,5\alpha^2 - 7,5\alpha) + d_2 \left(\frac{2}{\alpha} - 8 \right) \right] \right\} \sin 2\theta.$$

Аналогично определяется второе приближение, для которого приведем окончательное выражение:

$$u^{(II)p} = \frac{k}{E} \left\{ d_1^2 (-2,5\alpha^3 - 5,5\alpha^2 + 18,125\alpha - 10) + \right. \\ \left. + d_2^2 \left(\frac{16}{\alpha} - \frac{4}{\alpha^2} \right) + d_1 d_2 \left(36 - 8\alpha - \frac{9}{\alpha} \right) + \right. \\ \left. + \left[d_1^2 (10,5\alpha^3 - 23,5\alpha^2 + 9,875\alpha + 0,375) + \right. \right. \\ \left. \left. + d_2^2 \left(\frac{8}{\alpha^2} - \frac{16}{\alpha} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{9}{\alpha} - 8\alpha - 12 \right) \right] \cos 4\theta \right\}, \quad (2.163)$$

$$v^{(II)p} = \frac{k}{E} \left\{ \left[d_1^2 (42\alpha^3 - 104\alpha^2 + 52\alpha - 3) + \right. \right. \\ \left. \left. + d_2^2 \left(\frac{24}{\alpha^2} - \frac{40}{\alpha} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{24}{\alpha} - 44\alpha - 12 \right) \right] \rho - \right. \\ \left. - 4 \left[d_1^2 (10,5\alpha^3 - 23,5\alpha^2 + 9,875\alpha + 0,375) + \right. \right. \\ \left. \left. + d_2^2 \left(\frac{8}{\alpha^2} - \frac{16}{\alpha} \right) + d_1 d_2 \left(\frac{9}{\alpha} - 8\alpha - 12 \right) \right] \sin 4\theta \right\}.$$

§ 7. Двусное растяжение пространства со сферической выточкой

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние пространства, ослабленного сферической полостью радиуса a и растягиваемого на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями. Предположим, что начало системы координат совпадает с центром сферической полости. На бесконечности действуют растягивающее усилие P_2 , направленное по оси z , и усилия P_1 , направленные

по осям x и y . Предположим, что на поверхности сферы задана нагрузка в виде равномерного давления интенсивности p .

Решение будем искать в сферической системе координат r, θ, φ . Материал считаем несжимаемым, идеально пластическим. В качестве условия пластичности примем условие Треска (1.192)

$$(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta})^2 + 4\tau_{\rho\theta}^2 = 4, \quad \sigma_{\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta}) \pm 2, \quad (2.164)$$

где все компоненты напряжения отнесены к пределу текучести k .

Напряженное и деформированное состояние в пластической области определяется соотношениями (1.332), (1.334), (1.336). Напряженное и деформированное состояние в упругой области при осесимметричном нагружении записывается в виде рядов по полиномам Лежандра:

при $n = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -4 \frac{G}{k} \left(1,5b_{01} - \frac{b_{02}}{\rho^3} \right), \\ \sigma_{\theta} &= \sigma_{\varphi} = -2 \frac{G}{k} \left(3b_{01} + \frac{b_{02}}{\rho^3} \right), \\ \tau_{\rho\theta} &= 0, \quad u_{\rho} = -\frac{b_{02}}{\rho^3}, \quad u_{\theta} = 0; \end{aligned}$$

при $n = 1$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= -4 \frac{G}{k} \left(3b_{11}\rho + 1,5 \frac{b_{12}}{\rho^2} - 3 \frac{b_{13}}{\rho^4} \right) P_1(\cos \theta), \\ \sigma_{\theta} &= \sigma_{\varphi} = -\frac{2G}{k} \left(6b_{11}\rho + 3 \frac{b_{13}}{\rho^4} \right) P_1(\cos \theta), \\ \tau_{\rho\theta} &= \frac{2G}{k} \left(3b_{11}\rho - 3 \frac{b_{13}}{\rho^4} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}, \\ u_{\rho} &= -2 \left(-b_{11}\rho^2 - \frac{b_{12}}{\rho} + \frac{b_{13}}{\rho^3} \right) P_1(\cos \theta), \\ u_{\theta} &= 4 \left(b_{11}\rho^2 - \frac{b_{12}}{\rho} + \frac{b_{13}}{\rho^3} \right) \frac{dP_1(\cos \theta)}{d\theta}; \end{aligned} \quad (2.165)$$

при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \frac{2G}{k} \left[(n+1)(n^2 - n - 3)b_{n1}\rho^n + n(n-1)b_{n2}\rho^{n-2} - \right. \\ &\quad \left. - n(n^2 + 3n - 1) \frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} + (n+1)(n+2) \frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] P_n(\cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & -\frac{2G}{k} \left[(n+1)(n^2+4n+3)b_{n1}\rho^n + (n-1)b_{n2}\rho^{n-2} + \right. \\ & \left. + n^2(n-2)\frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} + (n+1)^2\frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] P_n(\cos\theta) - \\ & -\frac{2G}{k} \left[b_{n1}(n+1)\rho^n + b_{n2}\rho^{n-2} - (n-2)\frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} + \frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] \times \\ & \times \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} = & -\frac{2G}{k} \left[(n-1)(n+3)b_{n1}\rho^n - nb_{n2}\rho^{n-2} + \right. \\ & \left. + n(n-2)\frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} + (n+1)\frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] P_n(\cos\theta) + \\ & +\frac{2G}{k} \left[(n+3)b_{n1}\rho^n + b_{n2}\rho^{n-2} - (n-2)\frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} + \frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] \times \\ & \times \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \operatorname{ctg}\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = & \frac{2G}{k} \left[(n^2+2n)b_{n1}\rho^n + (n-1)b_{n2}\rho^{n-2} + \right. \\ & \left. + (n^2-1)\frac{b_{n3}}{\rho^{n+1}} - (n+2)\frac{b_{n4}}{\rho^{n+3}} \right] \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\rho} = & \left[n(n+1)b_{n1}\rho^{n+1} + nb_{n2}\rho^{n-1} + \right. \\ & \left. + n(n+1)\frac{b_{n3}}{\rho^n} - (n+1)\frac{b_{n4}}{\rho^{n+2}} \right] P_n(\cos\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{\theta} = & \left[(n+3)b_{n1}\rho^{n+1} + b_{n2}\rho^{n-1} - \right. \\ & \left. - (n-2)\frac{b_{n3}}{\rho^n} + \frac{b_{n4}}{\rho^{n+2}} \right] \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Граничные условия на бесконечности

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{\infty e} &= q - \delta \cos 2\theta = q - \frac{\delta}{3} [-1 + 4P_2(\cos\theta)], \\ \tau_{\rho\theta}^{\infty e} &= \delta \sin 2\theta = -\frac{2}{3} \delta \frac{dP_2(\cos\theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (2.166)$$

$$\text{где } q = \frac{P_1 + P_2}{2k}, \quad \delta = \frac{P_1 - P_2}{2k}.$$

На поверхности сферической полости

$$\sigma_{\rho}^p = -p, \quad \tau_{\rho\theta}^p = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha. \quad (2.167)$$

В качестве нулевого приближения примем напряженное и деформированное состояние пространства со сферической полостью, растянутого на бесконечности равномерными усилиями q ; на поверхности сферы задано равномерное давление p :

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(0)p} &= -p + 4 \ln \frac{\rho}{a}, \\ \sigma_{\theta}^{(0)p} &= \sigma_{\varphi}^{(0)p} = -p + 2 \left(2 \ln \frac{\rho}{a} + 1 \right), \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)p} = 0, \\ u_{\rho}^{(0)p} &= \frac{k}{3G} \frac{1}{\rho^2}, \quad u_{\theta}^{(0)p} = 0;\end{aligned}\tag{2.168}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(0)e} &= q - \frac{4}{3} \frac{1}{\rho^3}, \\ \sigma_{\theta}^{(0)e} &= \sigma_{\varphi}^{(0)e} = q + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho^3}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0, \\ u_{\rho}^{(0)e} &= \frac{k}{3G} \frac{1}{\rho^3}, \quad u_{\theta}^{(0)e} = 0, \quad \alpha = \frac{a}{r_{s0}}, \quad \rho = \frac{r}{r_{s0}}.\end{aligned}$$

Величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу пластической зоны r_{s0} , который определяется из уравнения

$$4 \left(\frac{1}{3} - \ln \alpha \right) = p + q.\tag{2.169}$$

В рассматриваемом случае внутренний контур и нагрузки на нем не варьируются, поэтому в пластической зоне

$$\sigma_{ij}^{(n)p} = 0 \quad \text{при } n \geq 1.\tag{2.170}$$

Исходя из граничных условий (2.166), решение в упругой зоне будем искать в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(1)e} &= -\frac{4G}{k} \left(1,5b_{01} - \frac{b_{02}}{\rho^3} \right) + \\ &+ \frac{4G}{k} \left(-2b_{21}\rho^3 + b_{22} - \frac{9b_{23}}{\rho^3} + \frac{6b_{24}}{\rho^5} \right) P_2(\cos \theta),\end{aligned}\tag{2.171}$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(1)e} = \frac{2G}{k} \left(8b_{21}\rho^2 + b_{22} + 3 \frac{b_{23}}{\rho^3} - 4 \frac{b_{24}}{\rho^5} \right) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Из (2.171), граничных условий (2.166), условий сопряжения (1.240) для компонент σ_{ρ} , $\tau_{\rho\theta}$, а также (2.170),

определим

$$b_{01} = -\frac{k}{18G}, \quad b_{02} = \frac{k}{12G}, \quad b_{21} = 0, \quad (2.172)$$

$$b_{22} = -\frac{k}{3G}, \quad b_{23} = \frac{5}{27} \frac{k}{G}, \quad b_{24} = -\frac{2}{9} \frac{k}{G}.$$

Выражения для компонент напряженного и деформированного состояния в упругой области для первого приближения примут вид:

$$\sigma_{\rho}^{(I)e} = \frac{1}{3} \left[\left(1 - \frac{1}{\rho^3} \right) + 4 \left(-1 + \frac{5}{\rho^3} - \frac{4}{\rho^5} \right) P_2(\cos \theta) \right],$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)e} = \frac{2}{3} \left(-1 - \frac{5}{3\rho^3} + \frac{8}{3\rho^5} \right) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta},$$

$$\sigma_{\theta}^{(I)e} = \frac{1}{3} \left[\left(-1 + \frac{1}{2\rho^3} - \frac{4}{3\rho^5} \right) + 4 \left(1 + \frac{7}{3\rho^5} \right) P_2(\cos \theta) \right], \quad (2.173)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(I)e} = \frac{1}{3} \left[\left(3 + \frac{1}{2\rho^3} + \frac{4}{3\rho^5} \right) + \frac{20}{3\rho^5} P_2(\cos \theta) \right],$$

$$u_{\rho}^{(I)e} = \frac{k}{3G} \left[\frac{1}{4\rho^2} + \left(-2\rho - \frac{10}{3\rho^2} + \frac{2}{\rho^4} \right) P_2(\cos \theta) \right],$$

$$u_{\theta}^{(I)e} = -\frac{k}{3G} \left(\rho + \frac{2}{3\rho^4} \right) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}.$$

Исходя из (2.168), (2.173) и условия сопряжения для интенсивности напряжений, вполне аналогичного (1.240),

$$\left[\sigma_i^{(I)} + \frac{d\sigma_i^{(0)}}{d\rho} \rho_{is} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (2.174)$$

где

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_{\rho} - \sigma_{\theta})^2 + (\sigma_{\theta} - \sigma_{\varphi})^2 + (\sigma_{\varphi} - \sigma_{\rho})^2 + 6\tau_{\rho\theta}^2]^{1/2},$$

найдем

$$\rho_{s1} = \frac{1}{36} [3 + 20P_2(\cos \theta)]. \quad (2.175)$$

Используя (2.172), условия сопряжения для компонент перемещений (1.241) и выражения (1.334), получим

$$u_{\rho}^{(I)p} = \frac{k}{3G} \left\{ \frac{1}{4\rho^2} + \frac{10}{3\sqrt{15}} \left(\frac{1}{\rho} \right)^{1/2} \left[-3 \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sqrt{15} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) \right] P_2(\cos \theta) \right\}, \quad (2.176)$$

$$u_{\theta}^{(I)p} = -\frac{5k}{3\sqrt{15}G} \left(\frac{1}{\rho}\right)^{1/2} \left[-\sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho\right) + \right. \\ \left. + \sqrt{15} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho\right) \right] \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}. \quad (2.176)$$

При определении второго приближения для напряженного состояния в упругой области воспользуемся граничными условиями на бесконечности

$$\sigma_{\rho}^{(II)\infty e} = \tau_{\rho\theta}^{(II)\infty e} = 0 \quad (2.177)$$

и условиями сопряжения σ_{ρ} и $\tau_{\rho\theta}$ для второго приближения:

$$\left[\sigma_{\rho}^{(II)} + \frac{d\sigma_{\rho}^{(I)}}{d\rho} \rho_{s1} + \frac{d^2\sigma_{\rho}^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_{s1}^2}{2} \right] = 0, \quad (2.240)$$

$$\left[\tau_{\rho\theta}^{(II)} + \frac{d\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{d\rho} \rho_{s1} \right] = 0 \quad \text{при } \rho = 1.$$

Исходя из (2.170), (2.168), (2.173) и (2.175), условия сопряжения (1.240) можно записать в виде

$$\sigma_{\rho}^{(II)e} = -[0,635P_4(\cos \theta) + 0,723P_2(\cos \theta) + 0,256], \quad (2.178)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(II)e} = \left[0,794 \frac{dP_4(\cos \theta)}{d\theta} + 0,904 \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \right] \quad \text{при } \rho = 1.$$

Решение в упругой области согласно крайвым условиям (2.177), (2.178) ищем в виде суммы трех слагаемых (2.165), соответствующих $n = 0, 2, 4$.

Компоненты напряженного состояния в упругой области для второго приближения имеют вид

$$\sigma_{\rho}^{(II)e} = \frac{1}{\rho^3} \left[-0,256 + \left(3,977 - \frac{4,7}{\rho^2} \right) P_2(\cos \theta) + \right. \\ \left. + \left(10,909 \frac{1}{\rho^2} - 11,544 \frac{1}{\rho^4} \right) P_4(\cos \theta) \right],$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(II)e} = \frac{1}{\rho^3} \left[\left(-0,663 + 1,567 \frac{1}{\rho^2} \right) \frac{dP_2}{d\theta} + \right. \\ \left. + \left(-1,515 \frac{1}{\rho^2} + 2,309 \frac{1}{\rho^4} \right) \frac{dP_4}{d\theta} \right], \quad (2.179)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}^{(II)e} &= \frac{1}{\rho^3} \left[\left(0,0128 - 0,0497 \frac{1}{\rho^2} - 0,385 \frac{1}{\rho^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(3,723 \frac{1}{\rho^2} - 1,925 \frac{1}{\rho^4} \right) P_2(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \left(2,424 \frac{1}{\rho^2} - 8,081 \frac{1}{\rho^4} \right) P_4(\cos \theta) \right], \\ \sigma_{\varphi}^{(II)e} &= \frac{1}{\rho^3} \left[\left(0,0128 - 0,0426 \frac{1}{\rho^2} + 0,385 \frac{1}{\rho^4} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1,616 \frac{1}{\rho^2} + 1,924 \frac{1}{\rho^4} \right) P_2(\cos \theta) + 3,463 \frac{1}{\rho^4} P_4(\cos \theta) \right].\end{aligned}$$

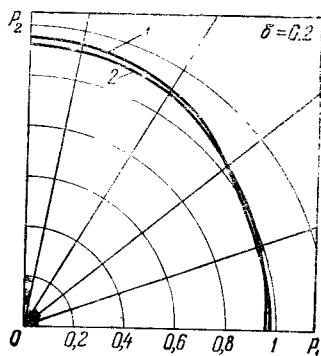


Рис. 27.

Второе приближение границы пластической зоны определим из условия сопряжения интенсивности напряжений, которое для второго приближения имеет вид, вполне аналогичный (1.240):

$$\begin{aligned}\left[\sigma_i^{(II)} + \frac{d\sigma_i^{(I)}}{d\rho} \rho_{s1} + \right. \\ \left. + \frac{d^2\sigma_i^{(0)}}{d\rho^2} \frac{\rho_{s1}^2}{2!} + \frac{d\sigma_i^{(0)}}{d\rho} \rho_{s2} \right] = 0\end{aligned}$$

при $\rho = 1$. (2.180)

Исходя из (2.168) и (2.170), условие (2.180) можно записать в виде

$$\begin{aligned}6\rho_{s2} = \frac{3}{8} \left(\sigma_{\varphi}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)e} \right) + \frac{1}{2} \left(\sigma_{\theta}^{(II)e} - \sigma_{\varphi}^{(II)e} \right) + 12\rho_{s1}^2 - \\ - \frac{\rho_{s1}}{2} \frac{d}{d\rho} \left(2\sigma_{\rho}^{(I)e} - \sigma_{\varphi}^{(I)e} - \sigma_{\theta}^{(I)e} \right)\end{aligned}$$

при $\rho = 1$.

Из (2.173), (2.179) и (2.181) получим

$$\rho_{s2} = 0,056 + 0,266 P_2(\cos \theta) + 1,288 P_4(\cos \theta). \quad (2.182)$$

Граница пластической зоны показана на рис. 27 в первом (кривая 1) и втором (кривая 2) приближениях.

§ 8. Двухосное растяжение пространства с эллипсоидальной полостью

Рассмотрим напряженное состояние вблизи эллипсоидальной полости в неограниченной среде, растягиваемой на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями. Начало системы координат выбираем в точке пересечения осей эллипсоида вращения. На бесконечности действуют: усилие P_2 , направленное по оси z , и усилие P_1 , направленное по осям x и y . На поверхности эллипсоида задано равномерное давление интенсивности p .

Решение ищем в сферической системе координат. Запишем уравнение поверхности эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{\alpha^2(1+\delta t_1)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2(1+\delta t_1)^2} + \frac{z^2}{\alpha^2(1-\delta t_1)^2} = 1,$$

где $0 \leq t_1 \leq 1$.

Полагая

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

преобразуем уравнение поверхности эллипсоида к виду

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2 [1 - (\delta t_1)^2]}{\sqrt{1 + 2\delta t_1 \cos \theta + (\delta t_1)^2}}.$$

Ограничиваясь вторым приближением, получим

$$\rho = \alpha \left(1 - \delta t_1 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \delta^2 t_1^2 \sin^2 2\theta \right). \quad (2.183)$$

Материал считаем идеально пластическим, подчиняющимся условию Треска (2.164), несжимаемым.

За нулевое приближение примем напряженное состояние пространства со сферической полостью, растянутого на бесконечности равномерными усилиями q ; на поверхности полости задано равномерное давление p (2.168). Условия на бесконечности аналогичны (2.166):

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{\infty e} &= q - \frac{\delta t_2}{3} [-1 + 4P_2(\cos \theta)], \\ \tau_{\rho\theta}^{\infty e} &= -\frac{2}{3} \delta t_2 \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (2.184)$$

где $q = \frac{P_1 + P_2}{2k}$, $\delta t_2 = \frac{P_1 - P_2}{2k}$, $0 \leq t_2 \leq 1$.

Линеаризированные граничные условия на поверхности эллипсоида (1.237) согласно (2.168), (2.183) для первого приближения запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^{(I)p} = 4t_1 \cos 2\theta = \frac{4}{3} t_1 [-1 + 4P_2(\cos \theta)], \quad (2.185)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = 4t_1 \sin 2\theta = -\frac{8}{3} t_1 \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \quad \text{при } \rho = \alpha.$$

Решение в пластической области согласно (1.332) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = \sigma_{\theta}^{(I)p} = \sigma_{\varphi}^{(I)p} = \\ = -C_{01} - \rho^{-3/2} \left[\left(\frac{3}{2} C_{21} + \frac{\sqrt{15}}{2} C_{22} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{2} C_{22} - \frac{\sqrt{15}}{2} C_{11} \right) \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) \right] P_2(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta}^{(I)p} = \rho^{-3/2} \left[C_{21} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) + \right. \\ \left. + C_{22} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \rho \right) \right] \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta}. \end{aligned}$$

Постоянные в (2.186) определяются из граничных условий на поверхности эллипсоида (2.185)

$$C_{01} = \frac{4}{3} t_1,$$

$$C_{21} = -\frac{8\alpha^{3/2}}{3\sqrt{15}} t_1 \left[\sqrt{15} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha \right) - \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha \right) \right],$$

$$C_{22} = -\frac{8\alpha^{3/2}}{3\sqrt{15}} t_1 \left[\sqrt{15} \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha \right) + \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha \right) \right].$$

Напряженное состояние в пластической области имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} = \sigma_{\theta}^{(I)p} = \sigma_{\varphi}^{(I)p} = \\ = -\frac{4}{3} t_1 \left\{ 1 - \frac{4}{\sqrt{15}} \left(\frac{\alpha}{\rho} \right)^{3/2} \left[\sqrt{15} \cos \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 3 \sin \left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \frac{\rho}{\alpha} \right) \right] P_2(\cos \varphi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(I)p} = -\frac{8}{3\sqrt{15}} t_1 \left(\frac{a}{\rho}\right)^{3/2} \left[\sqrt{15} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \frac{\rho}{a}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \frac{\rho}{a}\right) \right] \frac{dP_2(\cos\varphi)}{d\theta}.$$

Для определения напряженного состояния в упругой области воспользуемся граничными условиями на бесконечности (2.184) и условиями сопряжения σ_ρ и $\tau_{\rho\theta}$ на границе пластической зоны (1.240), которые в данном случае для первого приближения имеют вид

$$\sigma_\rho^{(I)e} = \sigma_\rho^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)e} = \tau_{\rho\theta}^{(I)p} \quad \text{при} \quad \rho = 1. \quad (2.188)$$

Решение в упругой зоне будем искать в виде (2.171). Постоянные в (2.171) в данном случае таковы:

$$\begin{aligned} b_{01} &= -\frac{t_2 k}{18G}, \quad b_{02} = -\frac{k}{12G} (4t_1 + t_2), \quad b_{21} = 0, \\ b_{22} &= -\frac{t_2 k}{3G}, \quad b_{23} = -\frac{5t_2 k}{27G} + \\ &+ \frac{4t_1 k}{27G \sqrt{15}} \left[\sqrt{15} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha\right) + 9 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha\right) \right], \end{aligned} \quad (2.189)$$

$$\begin{aligned} b_{24} &= -\frac{2t_2 k}{9G} + \frac{4t_1 k}{9\sqrt{15} G} \left[\sqrt{15} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha\right) + \right. \\ &\quad \left. + 3 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha\right) \right]. \end{aligned}$$

Первое приближение границы пластической зоны определим из условия сопряжения интенсивности σ_i , которое для первого приближения примет вид

$$\left[2\rho_{s1} \frac{d(\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})}{d\rho} + 2\sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} - \sigma_\varphi^{(I)} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1.$$

Исходя из (2.168) и (2.187), (2.189), найдем

$$\begin{aligned} \rho_{s1} &= \frac{t_1}{3} \left[1 + \frac{48}{\sqrt{15}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \alpha\right) P_2(\cos\theta) \right] + \\ &+ \frac{t_2}{36} [3 + 20P_2(\cos\theta)]. \end{aligned} \quad (2.190)$$

При $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq 0$ имеет место двусное растяжение пространства с эллиптической выточкой. При $t_1 = 0$,

$t_2 = 1$ — двусосное растяжение пространства со сферической выточкой, рассмотренное в предыдущем параграфе; при $t_1 = 1$, $t_2 = 0$ — равномерное растяжение пространства

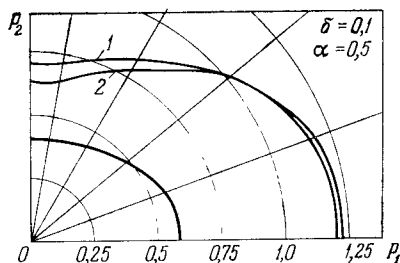


Рис. 28.

с эллиптической выточкой. На рис. 28 показано положение пластической зоны в первом приближении. Кривая 1 соответствует случаю $t_1 = t_2 = 1$, кривая 2 — случаю $t_1 = 1$, $t_2 = 0$.

§ 9. Коническая труба, находящаяся под действием равномерного внутреннего давления

Определим напряженное и деформированное состояние осесимметричной трубы под действием равномерного внутреннего давления. Материал трубы несжимаемый, упруго-идеально-пластический.

Решение будем искать вблизи известного состояния цилиндрической трубы с внутренним радиусом a и внешним b , нагруженной равномерным внутренним давлением p (плоская деформация):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho}^{(0)p} &= -q + 2 \ln \frac{\rho}{a}, & \sigma_{\rho}^{(0)e} &= \beta_0^2 \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right), \\
 \sigma_{\varphi}^{(0)p} &= -q + 2 \left(1 + \ln \frac{\rho}{a}\right), & \sigma_{\varphi}^{(0)e} &= \beta_0^2 \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right), \\
 \sigma_{\xi}^{(0)p} &= \frac{1}{2} (\sigma_{\rho}^{(0)p} + \sigma_{\varphi}^{(0)p}), & \sigma_{\xi}^{(0)e} &= \beta_0^2, \\
 \tau_{\rho\xi}^{(0)p} &= 0, & \tau_{\rho\xi}^{(0)e} &= 0, \\
 u_{\rho}^{(0)p} &= \frac{k\beta_0^2}{2G}, & u_{\rho}^{(0)e} &= \frac{k\beta_0^2}{2G}, & u_{\xi}^{(0)p} &= 0, & u_{\xi}^{(0)e} &= 0,
 \end{aligned} \tag{2.191}$$

где $q = \frac{p}{k}$, $\rho = \frac{r}{b}$, $\zeta = \frac{z}{b}$, $\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta_0 = \frac{r_{s0}}{b}$, $\beta_i = \frac{r_{si}}{b}$,

$$\beta_0^2 - 2 \ln \beta_0 = 1 - q + 2 \ln \alpha.$$

Здесь и ниже величины, имеющие размерность длины, отнесены к внешнему радиусу цилиндра.

Внутренний контур рассматриваемой трубы определяется уравнением $\rho = \alpha$; уравнение внешнего контура в общем случае может иметь вид

$$\rho = f(\zeta) = \Sigma \delta^n f_n(\zeta), \quad f_0 = 1. \quad (2.192)$$

Предположим, что внешний контур свободен от нагрузки, тогда

$$\tau_{\rho\zeta} \sin \gamma + \sigma_\rho \cos \gamma = 0, \quad \gamma = \pi - \psi,$$

$$\sigma_\zeta \sin \gamma + \tau_{\rho\zeta} \cos \gamma = 0, \quad \text{при } \rho = 1, \quad (2.193)$$

где ψ — угол между касательной к контуру и осью z :

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{df}{d\zeta}, \quad \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + (df/d\zeta)^2}}, \quad \sin \psi = \frac{df/d\zeta}{\sqrt{1 + (df/d\zeta)^2}}.$$

Учитывая (2.192), можно записать

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= -\cos \psi = -1 + \frac{1}{2} \delta^2 \left(\frac{df_1}{d\zeta} \right)^2 + \dots, \\ \sin \gamma &= \sin \psi = \delta \frac{df_1}{d\zeta} + \delta^2 \frac{df_2}{d\zeta} + \dots \end{aligned} \quad (2.194)$$

Так как для σ_ρ , σ_ζ , $\tau_{\rho\zeta}$ можно записать разложения, вполне аналогичные (1.223), запишем линеаризированные граничные условия (2.193) в виде

$$\sigma_\rho^{(I)} + \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} f_1 = 0, \quad -\tau_{\rho\zeta}^{(I)} + \sigma_\zeta^{(0)} \frac{df_1}{d\zeta} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_\rho^{(0)} \left(\frac{df_1}{d\zeta} \right)^2 - \left(\sigma_\rho^{(II)} + \frac{d\sigma_\rho^{(I)}}{d\rho} + \frac{d^2\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho^2} \frac{f_1^2}{2!} + \frac{d\sigma_\rho^{(0)}}{d\rho} f_2 \right) + \\ + \tau_{\rho\zeta}^{(II)} \frac{df_1}{d\zeta} = 0, \end{aligned} \quad (2.195)$$

$$-\left(\tau_{\rho\zeta}^{(II)} + \frac{d\tau_{\rho\zeta}^{(I)}}{d\rho} f_1 \right) + \sigma_\zeta^{(0)} \frac{df_2}{d\zeta} + \sigma_\zeta^{(I)} \frac{df_1}{d\zeta} + \frac{d\sigma_\zeta^{(0)}}{d\rho} f_1 \frac{df_1}{d\zeta} = 0$$

при $p = 1$.

Рассмотрим коническую трубу; уравнение внешней границы в этом случае можно представить в виде

$$f = 1 - \delta \zeta. \quad (2.196)$$

Используя (2.194), (2.196), перепишем граничные условия на внешнем контуре (2.195)

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)e} &= 2\beta_0^2 \zeta, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(I)e} &= -\beta_0^2, \\ \sigma_{\rho}^{(II)e} &= \frac{d\sigma_{\rho}^{(I)e}}{d\rho} \zeta + 3\beta_0^2 \zeta^2 - \tau_{\rho\zeta}^{(I)e}, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(II)e} &= \frac{d\tau_{\rho\zeta}^{(I)e}}{d\rho} \zeta - \sigma_{\rho}^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Граничные условия на внутреннем контуре

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(n)p} = \tau_{\rho\zeta}^{(n)p} &= 0 \\ \text{при } \rho = \alpha, n &\geq 1. \end{aligned} \quad (2.198)$$

Условия сопряжения решений в упругой и пластической областях представляют собой условие непрерывности на границе пластической зоны напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} [\sigma_{\rho}] = [\tau_{\rho\zeta}] = [u_{\rho}] = [u_{\zeta}] \\ \text{при } \rho = \beta_0. \end{aligned} \quad (2.199)$$

Линеаризованные соотношения (2.199) имеют вид (1.240).

1. Рассмотрим напряженное и деформированное состояние конической трубы, материал которой подчиняется условию пластичности Треска

$$\begin{aligned} (\sigma_{\rho} - \sigma_{\zeta})^2 + 4\tau_{\rho\zeta}^2 &= 4, \\ \sigma_{\theta} &= \frac{1}{2} (\sigma_{\rho} + \sigma_{\zeta}) \pm 2. \end{aligned}$$

В этом случае граничные условия на внутренней поверхности полностью определяют напряженное состояние в пластической области и, как следует из (2.198) и (1.294), для напряженного состояния в пластической области имеет место для всех приближений

$$\sigma_{ij}^{(n)p} = 0 \quad \text{при } n \geq 1. \quad (2.200)$$

Для определения первого приближения в упругой области используем граничные условия (2.197) и условие сопряжения σ_ρ и $\tau_{\rho\zeta}$ на границе пластической зоны, которое для первого приближения согласно (2.200) имеет вид

$$\sigma_\rho^{(I)e} = 0, \quad \tau_{\rho\zeta}^{(I)e} = 0 \quad \text{при } \rho = \beta_0. \quad (2.201)$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.197), (2.201), следуя [67], получим решение в упругой области

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \frac{2\beta_0^2\zeta}{1-\beta_0^2} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \frac{2\beta_0^2\zeta}{1-\beta_0^2} \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\rho^2}\right), \\ \sigma_\zeta^{(I)e} &= \frac{2\beta_0^2\zeta}{1-\beta_0^2}, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(I)e} &= -\frac{\beta_0^2}{1-\beta_0^2} \left(\rho - \frac{\beta_0^2}{\rho}\right), \\ u_\rho^{(I)e} &= \frac{k}{G} \frac{\beta_0^4}{1-\beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho}, \quad u_\zeta^{(I)e} = -\frac{k}{G} \frac{\beta_0^2}{2(1-\beta_0^2)} \rho^2. \end{aligned} \quad (2.202)$$

Первое приближение границы пластической зоны определим из условия сопряжения интенсивности напряжений σ_i , которое для первого приближения сводится к следующему:

$$\left[\frac{d}{d\rho} (\sigma_\rho^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)}) + \sigma_\rho^{(I)} - \sigma_\theta^{(I)} \right] = 0, \quad (2.203)$$

откуда

$$\rho_{s1} = \frac{\beta_0^3}{1-\beta_0^2} \zeta. \quad (2.204)$$

Для определения перемещений в пластической зоне воспользуемся условиями сопряжения u_ρ и u_ζ , которые в первом приближении имеют вид

$$\begin{aligned} u_\rho^{(I)p} = u_\rho^{(I)e} &= \frac{k}{G} \frac{\beta_0^3}{1-\beta_0^2} \zeta, \\ u_\zeta^{(I)p} = u_\zeta^{(I)e} &= -\frac{k}{2G} \frac{\beta_0^4}{1-\beta_0^2} \quad \text{при } \rho = \beta_0. \end{aligned} \quad (2.205)$$

Уравнению (1.292) удовлетворим, полагая

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= A_1 \zeta + A_2 \zeta \ln \rho, \quad A_i = \text{const}, \\ u_\rho^{(1)p} &= \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \rho}, \quad u_\zeta^{(1)p} = - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (2.206)$$

Из (2.206) и (2.205) получим

$$\begin{aligned} u_\rho^{(1)p} &= \frac{k}{G} \frac{\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho}, \\ u_\zeta^{(1)p} &= \frac{k}{G} \frac{\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \left(\ln \frac{\beta_0}{\rho} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.207)$$

Определим второе приближение. Как следует из (2.197) и (2.202), граничные условия на внешней контуре для второго приближения принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)e} &= \frac{\beta_0^2 (3 + \beta_0^2)}{1 - \beta_0^2} \zeta^2 + \beta_0^2, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(II)e} &= - \frac{\beta_0^2 (3 + \beta_0^2)}{1 - \beta_0^2} \zeta \end{aligned} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (2.208)$$

Условия сопряжения напряжений σ_ρ и $\tau_{\rho\zeta}$ (1.240) на границе пластической зоны для второго приближения с учетом (2.191), (2.200), (2.202), (2.204) сводятся к следующему:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)e} &= - \frac{2\beta_0^4}{(1 - \beta_0^2)^2} \zeta^2 \\ \tau_{\rho\zeta}^{(II)e} &= \frac{2\beta_0^5}{(1 - \beta_0^2)^2} \zeta, \end{aligned} \quad \text{при } \rho = \beta_0. \quad (2.209)$$

Для того чтобы удовлетворить краевым условиям (2.208), (2.209), возьмем в качестве функций Папковича [68] функции

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{B_1}{8} (8\zeta^4 - 24\zeta^2\rho^2 + 3\rho^4) + \frac{B_2}{2} (2\zeta^2 - \rho^2) \ln \rho + \\ &\quad + \frac{B_2}{3} (\rho^2 + \zeta^2), \\ B_z &= \frac{B_3}{2} (2\zeta^3 - 3\zeta\rho^2) + B_4 \zeta \ln \rho, \quad B_i = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.210)$$

Перемещения u_ρ и u_ζ согласно [67] определяются через B_0 и B_z :

$$u_\rho = -\frac{\partial}{\partial \rho} (\zeta B_z + B_0), \quad u_\zeta = 2B_z - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta B_z + B_0). \quad (2.211)$$

Краевые условия (2.208), (2.209) позволяют определить постоянные

$$B_1 = \frac{\beta_0^2 [(1 - \beta_0^2)^2 - 2]}{12(1 - \beta_0^2)^3}, \quad B_2 = 0, \\ B_3 = -\frac{\beta_0^2 [(1 - \beta_0^2)^2 - 2]}{6(1 - \beta_0^2)^3}, \quad B_4 = -\frac{\beta_0^4 (3 - \beta_0^4)}{2(1 - \beta_0^2)^3}. \quad (2.212)$$

Запишем решение в упругой области для второго приближения:

$$\sigma_\rho^{(II)e} = \zeta^2 \left(-12B_1 + 2\frac{B_4}{\rho^2} \right) + (-3B_1\rho^2 + 2B_4 \ln \rho) + \\ + \frac{\beta_0^2 (2B_4 \ln \beta_0 + 1) + 3B_1(1 - \beta_0^4)}{1 - \beta_0^2} - \\ - \frac{\beta_0^2 (2B_4 \ln \beta_0 + \beta_0^2) + 3B_1\beta_0^2(1 - \beta_0^2)}{(1 - \beta_0^2)\rho^2},$$

$$\sigma_\theta^{(II)e} = \zeta^2 \left(-12B_1 - \frac{2B_4}{\rho^2} \right) + (-3B_1\rho^2 + 2B_4 \ln \rho) + \\ + \frac{\beta_0^2 (2B_4 \ln \beta_0 + 1) + 3B_1(1 - \beta_0^4)}{1 - \beta_0^2} + \\ + \frac{\beta_0^2 (2B_4 \ln \beta_0 + \beta_0^2) + 3B_1\beta_0^2(1 - \beta_0^2)}{(1 - \beta_0^2)\rho^2}, \quad (2.213)$$

$$\sigma_\zeta^{(II)e} = -12B_1\zeta^2 + (2B_4 \ln \rho - 3B_1\rho^2) + \\ + \frac{\beta_0^2 (2B_4 \ln \rho + 1) + 3B_1(1 - \beta_0^4)}{1 - \beta_0^2},$$

$$\frac{G}{k} u_\rho^{(II)e} = -\frac{B_4}{\rho} \zeta^2 - \frac{3}{2} B_1 \rho^3 + \frac{3B_1(1 - \beta_0^2) + 2B_4 \ln \beta_0 + \beta_0^2 \beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \frac{\beta_0^2}{\rho}, \\ \frac{G}{k} u_\zeta^{(II)e} = 6B_1 \rho^2 \zeta.$$

Из условия сопряжения интенсивности напряжений σ_i определим второе приближение для границы пластической зоны. Учитывая (2.213), (2.191), (2.200), (2.204),

получим

$$\rho_{s2} = \frac{\beta_0^3 (12 + 3\beta_0^4 - 7\beta_0^2)^2}{8(1 - \beta_0^2)^3} \xi^2 + \frac{\beta_0 (2B_4 \ln \beta_0 + \beta_0^2) + 3B_1 \beta_0 (1 - \beta_0^2)}{2(1 - \beta_0^2)}. \quad (2.214)$$

Граница пластической зоны указана на рис. 29. Сплошной кривой дается первое приближение по условиям пластичности Треска и Мизеса. Штриховой линии соответствует второе приближение по Треска, штрих-пунктирной — второе приближение по Мизесу.

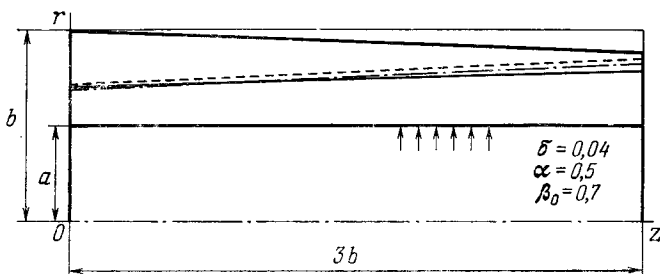


Рис. 29.

Для определения перемещений в пластической области выпишем условия сопряжения перемещений на границе пластической зоны, которые для второго приближения, как следует из (2.213), (2.202), (2.207), имеют вид

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(II)p} &= u_{\rho}^{(II)e} = \\ &= -\frac{B_4}{\beta_0} \xi^2 - \frac{3B_1 \beta_0^3}{2} + \frac{3B_1 \beta_0 (1 - \beta_0^2) + 2B_4 \beta_0 \ln \beta_0 + \beta_0^3}{1 - \beta_0^2}, \\ u_{\xi}^{(II)p} &= u_{\xi}^{(II)e} = 6B_1 \beta_0^3 \xi \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0. \end{aligned}$$

Функцию $\psi^{(II)}$, аналогичную $\psi^{(I)}$ (2.206), зададим в виде $\psi^{(II)} = B_5 \ln \rho + B_6(\rho^2 + 2\xi^2) \ln \rho + B_7 \rho^2 + 2(B_6 + B_7) \xi^2$, откуда

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(II)p} &= \frac{2B_6}{\rho} \xi^2 + \frac{B_5}{\rho} + B_6 \rho (2\rho \ln \rho + 1) + 2B_7 \rho, \\ u_{\xi}^{(II)p} &= -4\xi (B_6 \ln \rho + B_6 + B_7). \end{aligned} \quad (2.216)$$

Согласно (2.215), из (2.216) найдем

$$B_5 = \frac{\beta_0^2}{2(1 - \beta_0^2)} [3B_1(\beta_0^2 + 2) + B_4(4 \ln \beta_0 + \beta_0^2 - 1) + \beta_0^2], \quad (2.217)$$

$$B_6 = -\frac{B_4}{2}, \quad B_7 = \frac{B_4(\ln \beta_0 - 1) - 3B_1\beta_0^2}{2}.$$

2. Определим напряженное и деформированное состояние конической трубы, материал которой подчиняется условию пластичности Мизеса:

$$(\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\rho)^2 + 6\tau_{\rho z}^2 = 6. \quad (1.295)$$

В этом случае задача не является статически определимой.

Будем исходить из соотношений (1.301), (1.303), (1.308). Так как граничные условия для первого приближения имеют вид (2.197), (2.198), а условия сопряжения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \sigma_\rho^{(I)p}, & \tau_{\rho z}^{(I)e} &= \tau_{\rho z}^{(I)p}, \\ u_\rho^{(I)e} &= u_\rho^{(I)p}, & u_z^{(I)e} &= u_z^{(I)p}, \end{aligned} \quad \text{при } \rho = \beta_0, \quad (2.218)$$

то для определения решения в пластической зоне функцию $\psi^{(I)}$, согласно (1.308), зададим в виде

$$\begin{aligned} \psi^{(I)} &= C_1 \rho^2 + C_2 \zeta^2 + C_3 \rho^2 \zeta + C_4 \rho^4 - 8 C_4 \rho^2 \zeta^2 + \\ &+ C_5 \ln \rho + C_6 \rho^2 \ln \rho, \quad C_i = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.219)$$

Напряжения и перемещения в пластической зоне выражаются через функцию $\psi^{(I)}$ по формулам (1.299), (1.301). Отсюда и из (2.219) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} &= \sigma_\theta^{(I)p} = \frac{1}{A} [4(C_2 - C_6) - 2C_3\rho] \zeta, \\ \sigma_z^{(I)p} &= \frac{1}{A} [-32C_4\rho^2 + 4(C_2 - C_6)] \zeta, \quad A = \frac{k\beta_1^2}{3G}, \\ \tau_{\rho z}^{(I)p} &= -\frac{2}{3A} \left[-12C_4\rho^3 + \frac{C_5}{\rho} + (C_2 - C_6)\rho \right], \\ u_\rho^{(I)p} &= \left(-\frac{2C_2}{\rho} + 16C_4\rho \right) \zeta - C_3\rho, \\ v_\zeta^{(I)p} &= 2C_1 + 2C_3\zeta + 4C_4(\rho^2 - 4\zeta^2) + \frac{C_5}{\rho} + C_6(2 \ln \rho + 1). \end{aligned} \quad (2.220)$$

Условия сопряжения σ_ρ и $\tau_{\rho\zeta}$ (1.140) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)e} &= \sigma_\rho^{(I)p} = -q_1\zeta, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(I)e} &= \tau_{\rho\zeta}^{(I)p} = -\tau_1, \end{aligned} \quad \text{при } \rho = \beta_0, \quad (2.221)$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\zeta}{A} [4(C_2 - C_6) - 2C_3\rho], \\ \tau_1 &= \frac{2}{3A} \left[-12C_4\rho^3 + \frac{C_5}{\rho} + (C_2 - C_6)\rho \right]. \end{aligned}$$

Из условий (2.221) и (2.197) согласно [67] определим перемещения в упругой области в первом приближении

$$\begin{aligned} \frac{2G}{k} u_\rho^{(I)e} &= \frac{2\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho} + \frac{2}{3} \frac{(q_1\beta_0 + \tau_1)\beta_0}{1 - \beta_0^2} \rho\zeta + \frac{q_1\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho}, \\ \frac{2G}{k} u_\zeta^{(I)e} &= -\frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \rho^3 - \frac{q_1}{3} \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \left(\zeta^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\beta_0\tau_1}{1 - \beta_0^2} (\zeta^2 - \rho^2) - \frac{(q_1\beta_0 + \tau_1)\beta_0}{1 - \beta_0^2} \beta_0 \ln \rho. \end{aligned} \quad (2.222)$$

Для определения постоянных C_i , входящих в выражения q_1 , τ_1 , используем условия сопряжения перемещений

$$u_\rho^{(I)e} = u_\rho^{(I)p}, \quad u_\zeta^{(I)e} = u_\zeta^{(I)p} \quad \text{при } \rho = \beta_0 \quad (2.223)$$

и граничные условия (2.197). Приравнивая члены при одинаковых степенях ζ , найдем C_i . Первое приближение для напряженного и деформированного состояния в упругой и пластической области окончательно запишется так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(I)p} = \sigma_\theta^{(I)p} = \sigma_\zeta^{(I)p} = \tau_{\rho\zeta}^{(I)p} &= 0, \quad u_\rho^{(I)p} = \frac{k}{G} \frac{\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho}, \\ u_\zeta^{(I)p} &= \frac{k}{2G} \frac{\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \left(2 \ln \frac{\beta_0}{\rho} - 1 \right), \quad \sigma_\rho^{(I)e} = \frac{2\beta_0^2\zeta}{1 - \beta_0^2} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\rho^2} \right), \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= \frac{2\beta_0^2\zeta}{1 - \beta_0^2} \left(1 + \frac{\beta_0^2}{\rho^2} \right), \quad \sigma_\zeta^{(I)e} = \frac{2\beta_0\zeta}{1 - \beta_0^2}, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(I)e} &= -\frac{\beta_0\zeta}{1 - \beta_0^2} \left(\rho - \frac{\beta_0^2}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (2.224)$$

$$u_\rho^{(I)e} = \frac{k}{G} \frac{\beta_0^4}{1 - \beta_0^2} \frac{\zeta}{\rho}, \quad u_\zeta^{(I)e} = -\frac{k}{G} \frac{\beta_0^2}{2(1 - \beta_0^2)} \rho^2.$$

Сравнивая (2.200), (2.202), (2.207) с (2.224), можно убедиться в том, что первое приближение для напряженного и деформированного состояния конической трубы при условии Мизеса полностью совпадает с решением при условии пластичности Треска.

Уравнение границы пластической зоны для первого приближения также определяется уравнением (2.204).

Определим второе приближение. Граничные условия на внешнем контуре запишутся в виде (2.208). Условия сопряжения компонент напряжений σ_ρ и $\tau_{\rho\zeta}$ для второго приближения аналогично (2.209) запишутся так:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)e} - \sigma_\rho^{(II)p} &= -\frac{2\beta_0^4 \zeta^2}{(1 - \beta_0^2)^2}, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(II)e} - \tau_{\rho\zeta}^{(II)p} &= \frac{2\beta_0^5 \zeta}{(1 - \beta_0^2)^2} \end{aligned} \quad \text{при } \rho = \beta_0. \quad (2.225)$$

Исходя из (2.208) и (2.225), зададим функцию $\psi^{(II)}$ согласно (1.308),

$$\psi^{(II)} = D_1 \zeta + D_2 \zeta \ln \rho + (D_3 \rho^2 \zeta + D_4 \zeta^3) \ln \rho + D_5 \rho^2 \zeta + D_6 \zeta^3. \quad (2.226)$$

С учетом (1.301), (1.299), (2.226), найдем

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(II)p} = \sigma_\theta^{(II)p} &= \frac{2\zeta^2}{3A} [D_4 (\ln \rho + 1) + 3D_6 - D_3] - \\ &\quad - \frac{1}{A} [D_2 + D_3 \rho^2 (2 \ln \rho + 1) + 2D_5 \rho^2 + D_0], \\ \sigma_\zeta^{(II)p} &= \frac{\zeta^2}{3A} [3D_4 (2 \ln \rho + 1) + 6D_6 - 2D_3] - \frac{D_0}{A}, \\ \tau_{\rho\zeta}^{(II)p} &= -\frac{2\zeta}{3A} \left(3D_4 \rho \ln \rho + \frac{D_2}{\rho} + 3D_6 \rho - D_3 \rho \right) - \\ &\quad - \frac{2}{3A} \zeta^3 \frac{D_4}{\rho}, \quad (2.227) \\ u_\rho^{(II)p} &= -\zeta^2 (3D_4 \ln \rho + 3D_6) \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} [D_1 + \\ &\quad + (D_2 + D_3 \rho^2) \ln \rho + D_5 \rho^2], \\ u_\zeta^{(II)p} &= \zeta \frac{3D_4}{\rho^2} + [\zeta \left[\frac{D_2}{\rho^2} + D_3 (2 \ln \rho + 1) + 2D_5 \right]]. \end{aligned}$$

Из граничных условий на внутреннем контуре (2.198), приравнявая нулю члены при одинаковых степенях ζ ,

получим

$$\begin{aligned} D_2 &= 0, & D_4 &= 0, & 3D_6 - D_3 &= 0, \\ D_0 &= - [D_3\alpha^2 (2 \ln \alpha + 1) + 2D_5\alpha^2]. \end{aligned} \quad (2.228)$$

Согласно (2.228) найдем решение в пластической области (2.227):

$$\sigma_\rho^{(\text{II})p} = \sigma_\theta^{(\text{II})p} = -\frac{D_3}{A} (2\rho^2 \ln \rho - 2\alpha^2 \ln \alpha + \rho^2 - \alpha) - \frac{2D_5}{A} (\rho^2 - \alpha^2),$$

$$\sigma_\zeta^{(\text{II})p} = \frac{1}{A} [D_3\alpha^2 (2 \ln \alpha + 1) + 2D_5\alpha^2], \quad \tau_{\rho\zeta}^{(\text{II})p} = 0, \quad (2.229)$$

$$u_\rho^{(\text{II})p} = -\frac{3D_6}{\rho} \zeta^2 + \frac{1}{2\rho} (D_1 + D_3\rho^2 \ln \rho + D_5\rho^2),$$

$$u_\zeta^{(\text{II})p} = \zeta [D_3 (2 \ln \rho + 1) + 2D_5].$$

Используя (2.229), перепишем условия сопряжения

$$\sigma_\rho^{(\text{II})e} = -\frac{2\beta_0^4 \zeta^2}{(1 - \beta_0^2)^2} - p^*, \quad \tau_{\rho\zeta}^{(\text{II})e} = \frac{2\beta_0^5 \zeta}{(1 - \beta_0^2)^2}, \quad (2.230)$$

$$p^* = \frac{D_3}{A} (2\beta_0^2 \ln \beta_0 - 2\alpha^2 \ln \alpha + \beta_0^2 - \alpha^2) - \frac{2D_5}{A} (\beta_0^2 - \alpha^2).$$

Краевое условие (2.230) отличается от условия (2.209) константой p^* в правой части. Краевое условие (2.208) сохраняет свой вид. Поэтому решение краевой задачи для определения напряженного и деформированного состояния в упругой области складывается из решения (2.213), (2.212) и решения задачи Ламе

$$\sigma_\rho^{(\text{II})e} = \tau_{\rho\zeta}^{(\text{II})e} = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (2.231)$$

$$\sigma_\rho^{(\text{II})e} = -p^*, \quad \tau_{\rho\zeta}^{(\text{II})e} = 0 \quad \text{при } \rho = \alpha.$$

Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{(\text{II})e} &= \frac{1}{1 - \beta_0^2} \left[p^* \beta_0^2 - p_1 \beta_0^2 \frac{1}{\rho^2} \right], \\ \sigma_\theta^{(\text{II})e} &= \frac{1}{1 - \beta_0^2} \left(p^* \beta_0^2 + p_1 \beta_0^2 \frac{1}{\rho^2} \right), \end{aligned} \quad (2.232)$$

$$\sigma_\zeta^{(\text{II})e} = \frac{p^* \beta_0^2}{1 - \beta_0^2}, \quad \tau_{\rho\zeta}^{(\text{II})e} = 0, \quad \frac{G}{k} u_\rho^{(\text{II})e} = \frac{p^* \beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \frac{1}{\rho}, \quad u_\zeta^{(\text{II})e} = 0.$$

Таким образом, окончательное решение складывается из суммы решений (2.213), (2.212) и (2.232).

Для определения констант D_1 , D_3 , D_5 используем условия сопряжения перемещений. Из условий сопряжения перемещений для второго приближения

$$\begin{aligned} u_{\rho}^{(\text{II})e} &= u_{\rho}^{(\text{II})p}, \\ u_{\zeta}^{(\text{II})e} &= u_{\zeta}^{(\text{II})p} \end{aligned} \quad \text{при } \rho = \beta_0, \quad (2.233)$$

используя (2.213), (2.212), (2.232) и (2.229) и приравнивая члены при одинаковых степенях ζ , получим

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{k}{G} \left[\frac{(p_1 + \beta_0^2 + 3B_1)\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} - \frac{9}{2} B_1 \beta_0^4 + \frac{1}{2} \beta_0^4 B_4 \right], \\ D_3 &= \frac{k}{G} B_4, \quad D_5 = \frac{k}{2G} [6B_1 \beta_0^2 - B_4 (2 \ln \beta_0 + 1)], \end{aligned} \quad (2.234)$$

$$p^* = B_4 \left[4 \ln \beta_0 + 3 - \frac{3\alpha^2}{\beta_0^2} (2 \ln \alpha + 1) \right] - 3\beta_0^2 B_1.$$

Таким образом, второе приближение для напряженного и деформированного состояния определено.

Уравнение границы пластической зоны определим из условия сопряжения интенсивности напряжений σ_i , откуда

$$\rho_{s2} = \bar{\rho}_{s2} + \rho_{s2}^*, \quad (2.235)$$

где $\bar{\rho}_{s2}$ определяется выражением (2.214), а

$$\rho_{s2}^* = \frac{3}{\beta_0^2} \left[2B_4 \alpha^2 \ln \frac{\alpha}{\beta_0} + 6B_1 (\beta_0^2 - \alpha^2) \right]. \quad (2.236)$$

Таким образом, граница пластической зоны при условии пластичности Мизеса отличается от границы пластической зоны при условии пластичности Треска во втором приближении на величину константы ρ_{s2}^* (2.236). Граница пластической зоны показана на рис. 29.

ДОБАВЛЕНИЕ
**ОБ УЧЕТЕ УПРУГОЙ СЖИМАЕМОСТИ
 В СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Рассмотрим идеальное упругопластическое состояние упруго сжимаемого материала в случае плоской деформации. Соотношения закона связи $de - \sigma$ имеют вид (1.145).

1. Предположим, что имеет место условие пластичности Мизеса (1.130). Для случая плоской деформации из (1.145), (1.130) получим

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{E} [d\sigma_x - \mu (d\sigma_y + d\sigma_z)] + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z), \\ de_y &= \frac{1}{E} [d\sigma_y - \mu (d\sigma_z + d\sigma_x)] + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z), \end{aligned} \quad (1)$$

$$de_{xy} = \frac{1 + \mu}{E} d\tau_{xy} + d\lambda \tau_{xy},$$

$$0 = \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu (d\sigma_x + d\sigma_y)] + \frac{d\lambda}{3} (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y), \quad (2)$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 6k^2. \quad (3)$$

Для определения искомого соотношения связи $de - \sigma$ следует исключить из выражений (1), (3) компоненту σ_z , используя выражение (2). Из (2) следует

$$\frac{d\sigma_z}{d\lambda} + \frac{2}{3} E\sigma_z = Q, \quad Q = \mu \left(\frac{d\sigma_x}{d\lambda} + \frac{d\sigma_y}{d\lambda} \right) + \frac{E}{3} (\sigma_x + \sigma_y),$$

откуда искомого решение

$$\sigma_z = \exp\left(-\frac{2}{3} E\lambda\right) \int_0^\lambda \exp\left(\frac{2}{3} E\lambda\right) Q d\lambda. \quad (4)$$

Соотношение (4) легко может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \mu (\sigma_x + \sigma_y) \Big|_0^\lambda - \\ &- \frac{E}{3} \exp\left(-\frac{2}{3} E\lambda\right) \int_0^\lambda (2\mu - 1) \exp\left(\frac{2}{3} E\lambda\right) (\sigma_x + \sigma_y) d\lambda. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае несжимаемого материала $\mu = 1/2$, интегральный член в (5) исчезает и тогда первый член в правой части (5) представляет долю напряжения σ_z , накопленную за период изменения λ от нуля до текущего значения, т. е. за период развития пластических деформаций.

Соотношение (5) сводится к виду $\sigma_z = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y)$. При $\mu \neq 1/2$ соотношение (5) сохраняет интегральный характер и подстановка (5) в (3) приводит к условию пластичности, использование которого в приложениях затруднительно.

Представим коэффициент Пуассона в виде числового ряда

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_0 + \delta\mu_1 + \delta^2\mu_2 + \dots + \delta^n\mu_n + \dots, \\ \mu_0 &= 1/2, \quad \mu_i = \text{const}, \end{aligned} \quad (6)$$

где δ — малый фиксированный параметр, характеризующий упругую сжимаемость материала. Полагая

$$\sigma_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sigma_{ij}^{(n)}, \quad e_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n e_{ij}^{(n)}, \quad \lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \lambda_n, \quad (7)$$

разложим соотношения (1), (2) по малому параметру и получим

$$\begin{aligned} de_x^{(n)} &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_x^{(n)} - \frac{1}{2} (d\sigma_y^{(n)} + d\sigma_z^{(n)}) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^n \mu_m (d\sigma_y^{(n-m)} + d\sigma_z^{(n-m)}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{m=0}^n d\lambda_m (2\sigma_x^{(n-m)} - \sigma_y^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)}), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} de_{xy} &= \frac{3}{2E} d\tau_{xy}^{(n)} + \frac{1}{E} \sum_{m=1}^n \mu_m d\tau_{xy}^{(n-m)} + \sum_{m=0}^n d\lambda_m \tau_{xy}^{(n-m)}, \\ \frac{1}{E} \left[d\sigma_z^{(n)} - \frac{1}{2} (d\sigma_x^{(n)} + d\sigma_y^{(n)}) - \sum_{m=1}^n \mu_m (d\sigma_x^{(n-m)} + d\sigma_y^{(n-m)}) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{m=0}^n d\lambda_m (2\sigma_z^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)} - \sigma_y^{(n-m)}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Разложение условия пластичности Мизеса (3) по степеням имеет вид

$$\begin{aligned}
 &(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})^2 + (\sigma_y^{(0)} - \sigma_z^{(0)})^2 + (\sigma_z^{(0)} - \sigma_x^{(0)})^2 + 6\tau_{xy}^{(0)2} = 6k^2, \\
 &\sum_{m=0}^n [(\sigma_x^{(m)} - \sigma_y^{(m)}) (\sigma_x^{(n-m)} - \sigma_y^{(n-m)}) + \\
 &\quad + (\sigma_y^{(m)} - \sigma_z^{(m)}) (\sigma_y^{(n-m)} - \sigma_z^{(n-m)}) + \\
 &\quad + (\sigma_z^{(m)} - \sigma_x^{(m)}) (\sigma_z^{(n-m)} - \sigma_x^{(n-m)}) + 6\tau_{xy}^{(m)} \tau_{xy}^{(n-m)}] = 0 \\
 &\quad \text{при } n \geq 1.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Условие (9) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\frac{dZ_n}{d\lambda_0} + \frac{2}{3} EZ_n = Q_{n-1}(\lambda_0, P), \\
 &Z_n = 2\sigma_z^{(n)} - \sigma_x^{(n)} - \sigma_y^{(n)}, \\
 Q_{n-1} = &2 \sum_{m=1}^n \mu_m \left(\frac{d\sigma_x^{(n-m)}}{d\lambda_0} + \frac{d\sigma_y^{(n-m)}}{d\lambda_0} \right) - \\
 &- \frac{2}{3} E \sum_{m=1}^n \frac{d\lambda_m}{d\lambda_0} (2\sigma_z^{(n-m)} - \sigma_x^{(n-m)} - \sigma_y^{(n-m)}),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $P(x, y, z)$ — некоторая фиксированная точка тела, λ_0 — диссипативная функция при пластическом деформировании элемента тела в нулевом (основном) приближении.

Функция λ_0 характеризует процесс нагружения элемента тела при пластическом деформировании. При $\lambda_0 = 0$ имеет место упругое состояние рассматриваемого элемента тела в нулевом (основном) приближении в момент перехода его в упругопластическое состояние. В дальнейшем всем компонентам в момент $\lambda_0 = 0$ припишем индекс e внизу (индекс e вверху соответствует упругим составляющим деформированного состояния независимо от того, является элемент в упругом или упругопластическом состоянии).

Запишем соотношения закона Гука:

$$\begin{aligned}
 e_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad e_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)], \\
 e_{xy} = \frac{1 + \mu}{E} \tau_{xy}, \quad \sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Так как предполагается, что имеют место разложения (6), (7), то соотношения (12) могут быть пролинеаризированы по параметру δ . Получим

$$e_{xe}^{(n)} = \frac{1}{4E} \left[3(\sigma_{xe}^{(n)} - \sigma_{ye}^{(n)}) - Z_{ne} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{m=1}^n \mu_m (3\sigma_{ye}^{(n-m)} + \sigma_{xe}^{(n-m)} + Z_{n-m, e}) \right], \\ e_{ye}^{(n)} = \frac{1}{4E} \left[3(\sigma_{ye}^{(n)} - \sigma_{xe}^{(n)}) - Z_{ne} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{m=1}^n \mu_m (3\sigma_{xe}^{(n-m)} + \sigma_{ye}^{(n-m)} + Z_{n-m, e}) \right], \\ e_{xy}^{(n)} = \frac{1}{2G} \tau_{xye}^{(n)} + \frac{1}{E} \sum_{m=1}^n \mu_m \tau_{xye}^{(n-m)},$$

где

$$Z_{0e} = 0, \quad Z_{ne} = \sum_{m=0}^n \mu_m (4\sigma_{ze}^{(n-m)} - 2Z_{n-m, e}) \quad \text{при } n \geq 1. \quad (13)$$

Рассмотрим подробнее первое и второе приближения. В нулевом приближении уравнение (11) преобразуется в

$$\frac{dZ_0}{d\lambda_0} + \frac{2}{3}EZ_0 = 0, \quad (14)$$

откуда

$$Z_0 = C \exp(-2/3E\lambda_0). \quad (15)$$

В дальнейшем рассматриваем фиксированный элемент тела, где C — постоянная для фиксированной точки P . Так как при $\lambda_0 = 0$ имеет место $\widehat{\sigma_{ze}^{(0)}} = 1/2(\sigma_{xe}^{(0)} + \sigma_{ye}^{(0)})$, т. е. $Z_{0e} = 0$, то $C = 0$ и в случае упругопластического состояния тела всегда имеем

$$\sigma_z^{(0)} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)}). \quad (16)$$

Условие пластичности (10) упрощается

$$(\sigma_x^{(0)} + \sigma_y^{(0)})^2 + 4\tau_{xy}^{(0)2} = 4k^2. \quad (17)$$

Для первого приближения уравнение (11) записывается следующим образом:

$$\frac{dZ_1}{d\lambda_0} + 2/3EZ_1 = Q_0, \quad Q_0 = 4\mu_1 d\sigma_z^{(0)}/d\lambda_0. \quad (18)$$

Решением уравнения (18) будет

$$Z_1 = q^{-1} \left[\int_0^{\lambda_0} q Q_0 d\lambda_0 + Z_{1e} \right], \quad (19)$$

$$q = \exp(2/3 E \lambda_0).$$

Согласно (13) имеем

$$Z_{1e} = 4\mu_1 \sigma_{ze}^{(0)}. \quad (20)$$

Таким образом, решение полностью определено. Подставляя $\sigma_z^{(I)} = 1/2 (\sigma_x^{(I)} + \sigma_y^{(I)} + Z_1)$ в линеаризованное условие пластичности Мизеса для первого приближения (10), легко убедиться, что величина Z_1 не войдет в окончательное выражение условия пластичности

$$(\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})(\sigma_x^{(I)} - \sigma_y^{(I)}) + 4\tau_{xy}^{(0)}\tau_{xy}^{(I)} = 0. \quad (21)$$

Во втором приближении решение уравнения (11) представится следующим образом:

$$Z_2 = q^{-1} \left[\int_0^{\lambda_0} q Q_1 d\lambda_0 + Z_{2e} \right], \quad (22)$$

где согласно (13)

$$Z_{2e} = 4\mu_2 \sigma_{ze}^{(0)} + 4\mu_1 \sigma_{ze}^{(I)} - 2\mu_1 Z_{1e}. \quad (23)$$

Подставляя $\sigma_z^{(II)} = 1/2 (\sigma_x^{(II)} + \sigma_y^{(II)} + Z_2)$ в линеаризованное условие пластичности Мизеса для второго приближения (10), получим

$$\begin{aligned} (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)})(\sigma_x^{(II)} - \sigma_y^{(II)}) + 4\tau_{xy}^{(0)}\tau_{xy}^{(II)} = \\ = -1/2 [(\sigma_x^{(I)} - \sigma_y^{(I)})^2 + 4\tau_{xy}^{(I)2} + 1/3 Z_1^2]. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично определяются условия пластичности для последующих приближений.

2. Рассмотрим условие пластичности Треска (1.115). В этом случае уравнение, аналогичное (2), запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} [d\sigma_z - \mu (d\sigma_x + d\sigma_y)] + \\ + (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) [-4(2k^2 - \Sigma_2')(4k^2 - \Sigma_2') + \\ + 18(\sigma_x \sigma_y' - \tau_{xy}^2)(\sigma_x \sigma_y' - \tau_{xy}^2 + 1/3 \Sigma_2')] = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

В нулевом приближении ($\mu_0 = 1/2$) это уравнение удовлетворяется при $\sigma_z = 1/2 (\sigma_x + \sigma_y)$ и условие пластичности Треска сводится к (17).

Используя разложения (6), (7), запишем уравнение (25) для первого приближения

$$\frac{dZ_1}{d\lambda_0} - 4\mu_1 \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda_0} = 0, \quad Z_1 = 2\sigma_z^{(1)} - \sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)}. \quad (26)$$

Выражения (13) получены исходя из закона Гука, и не связаны с видом условия пластичности, поэтому выражение Z_{1e} определяется согласно (20).

Интегрируя уравнение (26) при условии (20), найдем

$$\sigma_z^{(1)} = 1/2(\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} + Z_1), \quad Z_1 = 4\mu_1\sigma_z^{(0)}. \quad (27)$$

Подставляя выражение (27) в линейризованное условие пластичности Треска, которое имеет громоздкий вид и здесь опущено, можно получить, что условие пластичности сводится к виду (21), т. е. в первом приближении линейризованные условия пластичности Треска и Мизеса для упруго сжимаемого материала совпадают.

Во втором приближении уравнение (25) изменится

$$\frac{dZ_2}{d\lambda_0} = 4\mu_1 \frac{d\sigma_z^{(1)}}{d\lambda_0} + 4(\mu_2 - 2\mu_1^2) \frac{d\sigma_z^{(0)}}{d\lambda_0}. \quad (28)$$

Интегрируя уравнение (28) при начальном условии (23),

получим

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(II)} &= 1/2(\sigma_x^{(II)} + \sigma_y^{(II)} + Z_2), \\ Z_2 &= 4\mu_1\sigma_z^{(1)} + 4(\mu_2 - 2\mu_1^2)\sigma_z^{(0)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя выражение (29) и линейризованное условие пластичности Треска во втором приближении, найдем

$$\begin{aligned} (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) (\sigma_x^{(II)} - \sigma_y^{(II)}) + 4\tau_{xy}^{(0)}\tau_{xy}^{(II)} &= \\ &= -1/2 (\sigma_x^{(1)} - \sigma_y^{(1)})^2 - 2\tau_{xy}^{(1)2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Аналогично определяются последующие приближения.

Проанализируем результаты. В первом приближении в условие пластичности Треска и Мизеса (21) коэффициенты

μ_i в явном виде не входят. Во втором приближении в условия пластичности Треска (30) также не входят в явном виде μ_i , но μ_i входит в явном виде во второе приближение условия пластичности Мизеса (24).

Условия пластичности (21), (30) совпадают с соответствующими разложениями (1.244) условия пластичности (1.243). Следовательно, для статически определимых задач выражения компонент σ_x , σ_y , τ_{xy} в пластической зоне в первом приближении будут совпадать как для упруго несжимаемого, так и для упруго сжимаемого материалов для обоих условий пластичности. Во втором приближении для статически определимых задач компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} для условия пластичности Треска (30) также не будут зависеть от упругой сжимаемости, но они будут зависеть от нее для условия Мизеса (24).

От упругой сжимаемости в первом и последующих приближениях будет зависеть компонента σ_z и компонента деформированного состояния.

Для статически неопределимых задач компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} будут зависеть от коэффициентов μ_i , начиная с первого приближения. Эта зависимость обусловлена необходимостью удовлетворения условий сопряжения напряжений при определении этих компонент.

3. Рассмотрим определение величины λ_0 для задач, нулевым приближением для которых является идеальное упругопластическое осесимметричное состояние толстой плиты с круговым отверстием. Согласно (2.28)

$$e_{\rho}^{(0)} = -\frac{1}{2G\rho^2}, \quad \rho = \frac{r}{r_s}. \quad (31)$$

Если величина r фиксирована, то с ростом нагрузок изменяется радиус пластической зоны r_s . Пластическое состояние впервые возникает в данной точке тела при $r = r_s^0$, т. е. при $\rho = 1$. Из условия пластичности (1.258) и ассоциированного закона течения (1.40) получим

$$de_{\rho}^{(0)p} = d\lambda_0, \quad (32)$$

откуда после интегрирования

$$\lambda_0 = e_{\rho}^{(0)} - e_{\rho e}^{(0)}. \quad (33)$$

Здесь $e_{\rho e}^{(0)} = e_{\rho}^{(0)} (\lambda_0 = 0) = e_{\rho}^{(0)} (\rho = 1)$.

Согласно (31) из (33) найдем

$$\lambda_0 = \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{\rho^2} - 1 \right). \quad (34)$$

Отсюда

$$d\lambda_0 = \frac{d\rho}{G\rho^3}. \quad (35)$$

Имея выражения для λ_0 , $d\lambda_0$, можно перейти в интегралах к интегрированию по ρ .

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Вопросам потери устойчивости пространственных деформируемых тел посвящена обширная литература, с состоянием вопроса можно ознакомиться по монографии А. Н. Гузя ¹⁾ и его же обзорам [8, 10]. Основные уравнения теории устойчивости, получаемые путем линеаризации нелинейных уравнений, содержат члены, где в виде множителей входят компоненты основного невозмущенного состояния. Следовательно, в основные уравнения входит параметр нагрузки, определяющий критические усилия, а это приводит к существенному усложнению задачи даже в случае, когда невозмущенное состояние является однородным. Л. С. Лейбензон ²⁾ и А. Ю. Ишлинский [59] использовали приближенный подход для исследования устойчивости пространственных упругих тел. В этом случае принимается, что компоненты возмущенного состояния $\sigma'_{ij} + \sigma_{ij}$, а вследствие чего и компоненты возмущений σ_{ij} , удовлетворяют исходным уравнениям равновесия (1.9) (здесь и ниже штрих наверху приписан компонентам возмущения). В то же время граничные условия записываются на возмущенной исходной поверхности тела, и таким образом именно в граничные условия вводится параметр нагружения. Задача при подобном подходе упрощается, параметр нагружения определяется из существенно более простых характеристических уравне-

¹⁾ Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.— Киев: Наукова думка, 1971.

²⁾ Лейбензон Л. С. О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек.— Собрание трудов. Том 1. М.: Изд-во АН СССР, 1951.

ний¹⁾. Л. С. Лейбензон получил решения задач устойчивости для упругих сферической и цилиндрической оболочек, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений. В этих случаях исходное невозмущенное состояние является неоднородным. При асимптотических разложениях решений, полученных на основе подхода Лейбензона — Ишлинского, первый член разложения для критической силы совпадает со значением критической силы, полученной на основе гипотез Кирхгофа — Лява.

Для решения задач устойчивости пространственных тел в постановке Лейбензона — Ишлинского могут быть использованы результаты, полученные в §§ 6—8 гл. 1. Ниже рассмотрены некоторые задачи.

1. Вначале остановимся на задаче об устойчивости сжатой упругой полосы в случае плоской деформации, рассмотренной Л. С. Лейбензоном и А. Ю. Ишлинским. Пусть полоса шириной $2h$ сжата продольными усилиями p . Направим ось x вдоль срединной линии, края полосы $y = \pm h$ будем считать свободными от усилий.

Невозмущенное напряженное состояние полосы имеет вид

$$\sigma_x^0 = -p, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0. \quad (1)$$

Очевидно, что для несжимаемого материала в этом случае можно непосредственно использовать решение, приведенное в § 8 гл. 1 при $\Psi(e_i) = G$.

Следуя [59], приведем несколько другой путь выкладки для сжимаемого упругого материала.

Компоненты возмущений связаны соотношениями закона Гука

$$\begin{aligned} \sigma'_x &= \lambda\theta' + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial x}, & \sigma'_y &= \lambda\theta' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y} \right), & \theta' &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь λ и μ — постоянные Ламе.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \mu \nabla^2 u' = 0, \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \mu \nabla^2 v' = 0. \quad (3)$$

¹⁾ Отметим, что на основе аналогичного подхода А. М. Жуков [38] рассмотрел процесс образования шейки как процесс потери устойчивости.

Положим

$$u' = f(\alpha y) \sin \alpha x, \quad v' = f(\alpha y) \cos \alpha x. \quad (4)$$

Если обозначить через l длину полуволны возмущения прямолинейной границы полосы, то $\alpha = \pi/l$. Введем безразмерный параметр $\eta = \alpha y$. Из (2) и (4) найдем

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= [\lambda(f + \dot{g}) + 2\mu g] \alpha \cos \alpha x, \\ \tau'_{xy} &= \mu(\dot{f} - g) + \alpha \sin \alpha x, \\ \theta' &= [f + \dot{g}] \alpha \cos \alpha x, \end{aligned} \quad (5)$$

где точка наверху означает дифференцирование по η . Из (3)–(5) получим

$$\begin{aligned} \mu \ddot{f} - (\lambda + 2\mu)f - (\lambda + \mu)\dot{g} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu)\ddot{g} - \mu g + (\lambda + \mu)\dot{f} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение линейной системы уравнений (6) легко определяется. Выпучивание полосы происходит в одну сторону вдоль оси y , поэтому функция $g(\eta)$ должна быть четной и искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned} f(\eta) &= -A \operatorname{sh} \eta - D \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta \right), \\ g(\eta) &= A \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta, \quad A, D - \text{const.} \end{aligned} \quad (7)$$

Из (4), (5), (7) найдем

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= 2\mu \left[A \operatorname{sh} \eta + D \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta \right) \right] \alpha \cos \alpha x, \\ \tau'_{xy} &= -2\mu \left[A \operatorname{ch} \eta + D \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \eta - \eta \operatorname{sh} \eta \right) \right] \alpha \sin \alpha x, \\ v' &= (A \operatorname{ch} \eta + D \eta \operatorname{sh} \eta) \cos \alpha x. \end{aligned} \quad (8)$$

Искавление границы будет иметь вид

$$h + h' = \sqrt{(h + v')^2 + u'^2} \approx h + v'. \quad (9)$$

Используя граничные условия (1.237), которые в декартовой системе координат имеют аналогичный вид, из (1), (9) получим

$$\sigma'_y = 0, \quad \tau'_{xy} = -p \frac{\partial v'}{\partial x}. \quad (10)$$

Из (8), (10) следует система линейных однородных уравнений относительно постоянных A и D :

$$A \operatorname{ch} \beta + D \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \beta - \beta \operatorname{sh} \beta \right) = \\ = - \frac{p}{2\mu} (A \operatorname{ch} \beta + D \beta \operatorname{sh} \beta), \quad (11)$$

$$A \operatorname{sh} \beta + D \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \operatorname{sh} \beta + \beta \operatorname{ch} \beta \right) = 0, \quad \beta = a h.$$

Приравнявая определитель системы уравнений (11) нулю, получим искомое значение критической силы

$$p_{\text{кр}} = 2\mu \frac{\operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta - \beta}{\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \operatorname{ch} \beta \operatorname{sh} \beta + \beta}. \quad (12)$$

Разлагая соотношение (12) в ряд по степеням параметра β , получим

$$p_{\text{кр}} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \beta^2 \left[1 + \frac{3\lambda - 4\mu}{15(\lambda + 2\mu)} \beta^2 + \dots \right]. \quad (13)$$

Первый член ряда (13) представляет значение критической силы, получаемое на основе гипотез Кирхгофа — Лява.

2. Уточненные уравнения теории устойчивости пространственных тел содержатся в монографиях В. В. Новожилова ¹⁾, В. В. Болотина ²⁾ и цитированной выше монографии А. Н. Гузя. В работе [34] дано решение задачи о потере устойчивости сжатой полосы по уточненной теории.

Ниже, следуя [36], рассмотрим более общее решение этой задачи.

Имеют место уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jk}^0 \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} \right) \right] + X_i^0 = 0, \quad \sigma_{jk}^0 \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i^0}{\partial x_k} \right) n_j = p_i^0, \\ \delta_{ij} = 1 \quad \text{для } i = j, \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{для } i \neq j. \quad (14)$$

Здесь n_j — компоненты нормали к поверхности тела.

¹⁾ Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1948.

²⁾ Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М.: Физматгиз, 1961.

Компоненты возмущенных форм движения запишутся в виде

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^0 + u'_i, & \sigma_{ik} &= \sigma_{ik}^0 + \sigma'_{ik}, \\ X_i &= X_i^0 + X'_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}, & p_i &= p_i^0 + p'_i. \end{aligned} \quad (15)$$

Заметим, что компоненты возмущений, вообще говоря, зависят от времени. Подстановка выражений (15) в соотношения (14) даст уравнения возмущенного движения; если с течением времени возмущения стремятся к нулю (или являются периодическими), то рассматриваемая форма равновесия устойчива, в противном случае — неустойчива.

Учитывая малость возмущений (т. е. пренебрегая их квадратами и произведениями по сравнению с единицей) и полагая, что невозмущенное состояние соответствует недеформированному, нетрудно получить уравнения равновесия и граничные условия для компонент возмущений в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ik}^0 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) + X'_i - \rho \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2} &= 0, \\ \sigma'_{ij} \nu_i + \sigma'_{jk} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} n_j &= p'_i. \end{aligned} \quad (16)$$

Естественно, что дополнительно к уравнениям (16) следует добавить соотношения, определяющие процесс деформирования среды. В случае изотропной упругой среды эти законы имеют вид

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (\lambda_{ij\alpha\beta} = \lambda \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \delta_{i\alpha} \delta_{j\beta}). \quad (17)$$

Рассмотрим задачу об устойчивости сжатой бесконечно длинной полосы шириной $2h$ в условиях плоской деформации. Невозмущенное состояние полосы определяется соотношениями (1).

Учитывая (1), (4) и (16) для компонент возмущений, получим следующие уравнения движения:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \mu \nabla^2 u' - p \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \mu \nabla^2 v' - p \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} &= 0, \\ \theta &= \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}. \end{aligned} \quad (18)$$

Будем искать решения системы уравнений (18) в виде

$$u' = f(ay) \sin axT(at), \quad v' = (ay) \cos axT(at) \quad (19)$$

$$(a = \pi/l).$$

Здесь l — длина полуволны «возмущения» границы.

Подставляя (19) в (18) и разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned} \frac{-(\lambda + \mu)(f + g') + \mu(f'' - f) + \rho f}{\rho f} &= \frac{T''}{T} = w, \\ \frac{(\lambda + \mu)(f' + g'') + \mu(g'' - g) + \rho g}{\rho g} &= \frac{T''}{T} = w. \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрируя систему уравнений (20) и используя (19), получим

$$\begin{aligned} u' &= \left(A \frac{p - \rho\omega - \mu}{k_1\mu} \operatorname{sh} k_1 ay - D \frac{1}{k_2} \operatorname{sh} k_2 ay \right) \sin axT, \\ v' &= (A \operatorname{ch} k_1 ay + D \operatorname{ch} k_2 ay) \cos axT, \\ k_1^2 &= \frac{\mu - p + \rho\omega}{\mu}, \quad k_2^2 = \frac{(\lambda + 2\mu) - p + \rho\omega}{\lambda + 2\mu}. \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, используя соотношения (17) и (21), найдем выражения для компонент напряжений возмущенного состояния. Подставляя найденные величины в граничные условия (16), получим систему линейных и однородных уравнений для определения произвольных постоянных A и D .

Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к характеристическому уравнению

$$(p - \rho\omega - 2\mu)^2 k_1 \operatorname{th} k_2 \beta + 4\mu k_2 (p - \rho\omega - \mu) \operatorname{th} k_1 \beta = 0, \quad (22)$$

$$\beta = \pi h/l.$$

Соотношение (22) можно рассматривать как неявную зависимость $p - \rho\omega$ от λ , μ и β .

При заданных параметрах λ , μ и β из уравнения (22) можно определить корень $p - \rho\omega = F(\lambda, \mu, \beta)$. При $p \leq F(\lambda, \mu, \beta)$ имеем $w \leq 0$, и из (20) следует, что состояние (1) устойчиво в определенном выше смысле ($T(t)$ — ограничено). Если же $p > F(\lambda, \mu, \beta)$, то состояние неустойчиво.

Отметим, что при $p = F(\lambda, \mu, \beta)$ имеет место бифуркационная форма потери устойчивости. В этом случае при

малых β для критического значения $p_{кр}$ имеем

$$p_{кр} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{3(\lambda + 2\mu)} \beta^2 \left(1 - \frac{3\lambda + 10\mu}{15(\lambda + 2\mu)} \beta^2 + \dots \right). \quad (23)$$

Сравним разложения (13) и (23). Первый член разложения, представляющий эйлерову критическую силу, совпадает в обоих разложениях. Уточненная теория несколько занижает значение критической силы; это обстоятельство связано с тем, что гипотезы Кирхгофа — Лява как бы «ужесточают» систему.

3. Рассмотрим задачу о выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Соотношения (1.352) можно рассматривать как соотношения нелинейной теории упругости. Пусть труба радиусов a и b ($a < b$) находится под действием внутреннего давления p .

Решение будем искать вблизи известного осесимметричного состояния трубы:

$$\sigma_\rho^0 = -p \frac{\alpha^{2m}(1 - \rho^{2m})}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}, \quad \sigma_\theta^0 = p \frac{\alpha^{2m}[(2m-1) + \rho^{2m}]}{\rho^{2m}(1 - \alpha^{2m})}, \quad (24)$$

$$\tau_{\rho\theta}^0 = 0.$$

Здесь $\rho = r/b$, $\alpha = a/b$, $\sigma_i = Ae_i^m$, r — текущий радиус, σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций.

В общем случае выпучивания толстостенной трубы уравнения ее внешней и внутренней границы могут быть представлены в виде

$$\rho = 1 + f_1(\theta), \quad \rho = \alpha + f_2(\theta).$$

Решение задачи в общем случае не представляет принципиальных трудностей. Ниже оно проводится для случая

$$f_1(\theta) = k_1 \cos \theta, \quad f_2(\theta) = k_2 \cos \theta, \quad (25)$$

где k_1 и k_2 — безразмерные параметры.

Представим решение в виде

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma'_\theta,$$

$$\sigma_i = \sigma_i^0 + \sigma'_i, \quad u = u^0 + u', \quad v = v^0 + v',$$

где u и v — перемещения в полярных координатах.

При выпучивании граница трубы становится неосесимметричной, точки границы получают возможные смещения u' , v' . Очевидно, что

$$\rho^* = \rho^*(\theta^*) \sim \rho + u'(\theta^*) \sim \rho + u'(\theta) + O^2 \quad (1). \quad (26)$$

Пользуясь общим решением (1.386), получим

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= B\rho^{2(1-m)} [4(1-m^2)C_1\rho^{2m-3} + 4m^2C_2\rho^{2m-1} + \\ &\quad + 4C_3\rho^{-3}] \cos \theta, \\ \sigma'_\theta &= B\rho^{2(1-m)} [4(1-m)^2C_1\rho^{2m-3} + 12m^2C_2\rho^{2m-1} + \\ &\quad + 4(1-2m)C_3\rho^{-3}] \cos \theta, \\ \tau'_{\rho\theta} &= B\rho^{2(1-m)} [4(1-m)^2C_1\rho^{2m-3} + 4m^2C_2\rho^{2m-1} + \\ &\quad + 4C_3\rho^{-3}] \sin \theta, \quad (27) \\ u' &= -[C_1\rho^{-2(1-m)} + C_2\rho^{2m} + C_3\rho^{-2}] \cos \theta, \\ v' &= [C_1(2m-1)\rho^{-2(1-m)} + C_2(2m+1)\rho^{2m} - \\ &\quad - C_3\rho^{-2}] \sin \theta, \end{aligned}$$

где C_1 , C_2 , C_3 — произвольные постоянные,

$$B = \left(\left[\frac{m}{1-\alpha^{2m}} \right]^{m-1} \frac{(\sqrt{3})^{m^2-m-2} p^{m-1} \alpha^{2m(m-1)}}{2^{(m-1)^2} A^{m-2}} \right)^{1/m}.$$

Из линеаризованных граничных условий имеем

$$\sigma'_\rho + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho} u' = 0, \quad \tau'_{\rho\theta} - (\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0) \frac{du'}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } \rho = 1;$$

$$\sigma'_\rho + \frac{d\sigma_\rho^0}{d\rho} u' = 0, \quad \tau'_{\rho\theta} - \frac{1}{\alpha} (\sigma_\theta^0 - \sigma_\rho^0) \frac{\partial u'}{\partial\theta} = 0$$

при $\rho = \alpha$.

Из (24), (26) получим систему уравнений для определения постоянных C_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 &= 0, & a_{21}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 &= 0, \\ a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 &= 0, & a_{41}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - m^2 + d_1, & a_{12} &= m^2 + d_1, \\ a_{13} &= 1 + d_1, & a_{21} &= (1 - m)^2 + d_1, \\ a_{32} &= 1 - m^2 + d_2, & a_{33} &= \frac{1}{\alpha^{2m}} (m^2 - d_2), \end{aligned}$$

$$a_{33} = \frac{1}{\alpha^{2m}} (1 - d_2), \quad \alpha_{41} = (1 - m)^2 - d_2,$$

$$d_1 = - \frac{m p \alpha^{2m}}{2B (1 - \alpha^{2m})}, \quad d_2 = \alpha^2 d_1.$$

Очевидно, что $C_1 = 0$, и система (28) сводится к однородной системе двух уравнений с двумя неизвестными. Приравнявая нулю ее определитель, получим уравнение, откуда

$$P_{кр} = \frac{(M - \sqrt{M^2 - N^2})^m}{Q},$$

где

$$M = \alpha^2 (1 - \alpha^{2m}) + m^2 [1 - \alpha^{2(m+2)}],$$

$$N = 2\alpha m [1 - \alpha^{2(2+m)}], \quad (29)$$

$$Q = \frac{2^{m^2-2m+2} m \alpha^{2m} A^{m-2} [(1 - \alpha^{2(1+m)})^m]}{(\sqrt{3})^{m^2-2m-2} (1 - \alpha^{2m})}.$$

4. Рассмотрим потерю устойчивости вращающегося диска. Обозначим через a — радиус диска, σ_s — предел текучести, ω — угловая скорость вращения, g — ускорение силы тяжести, γ — объемный вес, R^0 — радиус пластической зоны. Материал диска будем считать не сжимаемым.

Упругопластическое состояние круглого вращающегося диска определяется согласно [75]:

$$\sigma_{\rho}^{op} = 1 - \frac{\omega^2}{3g^2} \rho^2, \quad \sigma_{\theta}^{op} = 1, \quad \tau_{\rho\theta}^{op} = 0,$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{\rho}^{oe} \\ \sigma_{\theta}^{oe} \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{3} c \left(1 \mp \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{\omega^2}{16q^2} [7 - (6 \pm 1) \rho^2], \quad \tau_{\rho\theta}^{oe} = 0,$$

где

$$q = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s g}{\gamma}}, \quad c = \frac{5 \sqrt{3} \beta_0^4}{21 - 5\beta_0^2 (2 - \beta_0^2)},$$

$$\omega^2 = q^2 \frac{48}{21 - 5\beta_0^2 (2 - \beta_0^2)}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \beta_0 = \frac{R^0}{a}.$$

Всюду компоненты напряжения отнесены к σ_s .

Решение будем искать в виде

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \sigma_\rho', \quad u = u^0 + u', \quad v = v^0 + v',$$

где u и v соответственно радиальное тангенциальное смещения точек диска, которые будем считать отнесенными к радиусу a диска.

С точностью до бесконечно малых первого порядка уравнение внешней границы диска, потерявшего устойчивость, можно записать в виде $\rho = 1 + u'$.

Линеаризованные граничные условия имеют вид

$$\sigma_\rho'^e + \frac{d\sigma_\rho^{0e}}{d\rho} u'^e = 0, \quad \tau_{\rho\theta}'^e - (\sigma_\theta^{0e} - \sigma_\rho^{0e}) \frac{du'^e}{d\theta} = 0 \quad (30)$$

$$\text{при } \rho = 1.$$

Условия сопряжения решений для упругой и пластической области приводятся к виду

$$\sigma_\rho'^e = \sigma_\rho'^e, \quad \tau_{\rho\theta}'^e = 0, \quad u'^e = u'^p, \quad v'^e = v'^p, \quad \sigma_\theta'^e = \frac{d\sigma_\theta^{0e}}{d\rho} \beta_1 = 0$$

$$\text{при } \rho = \beta_0, \quad (31)$$

где $\beta_0 = r_0/a$ — безразмерный радиус пластической зоны.

Будем искать решение в случае, когда уравнение внешней границы диска после потери устойчивости с точностью до бесконечно малых первого порядка может быть представлено в виде

$$\rho = 1 + k \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad k = \text{const.} \quad (32)$$

В этом случае $\sigma_\rho'^p = 0$.

Пользуясь выражениями для компонент напряжений и перемещений в упругой области, граничными условиями (30) и условиями сопряжения (32), получим характеристическое уравнение для определения критического значения β_{0*} :

$$1 + \frac{1}{n^2 - 1} \frac{\sigma_s}{E} \left\{ \frac{5\beta_{0*}^4 - 21}{1 - 5\beta_{0*}^2(2 - \beta_{0*}^2)} \times \right.$$

$$\times \frac{-2(n^2 - 1)\beta_{0*}^{2n} - 3n^2\beta_{0*}^{2n+2} + 5n^2\beta_{0*}^{2n-2} + (4n - 1) - (4n + 1)\beta_{0*}^{4n}}{2(n^2 - 1)\beta_{0*}^{2n} - n^2\beta_{0*}^{2n+2} - n^2\beta_{0*}^{2n-2} + 1 + \beta_{0*}^{4n}} \left. + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5\beta_{0*}^4 + 3}{21 - 5\beta_{0*}^2(2 - \beta_{0*}^2)} [-6n^2(n^2 - 1)\beta_{0*}^{2n} + 3n^4\beta_{0*}^{2n+2} + \\
 & + 3(n^4 - 8n^2)\beta_{0*}^{2n-2} + (n^2 - 4n) + (n^2 + 4n)\beta_{0*}^{4n}] \times \\
 & \times [2(n^2 - 1)\beta_{0*}^{2n} - n^2\beta_{0*}^{2n+2} - n^2\beta_{0*}^{2n-2} + 1 + \beta_{0*}^{4n}]^{-1} = 0. \quad (33)
 \end{aligned}$$

По данному значению β_{0*} легко найти критическое значение относительной угловой скорости ω_*/q .

Приведем значения относительной критической скорости ω_*/q в зависимости от n :

n	2	3	4	5
ω_*/q	1,6701	1,7096	1,7218	1,7264

Здесь принято, что $\sigma_s/E = l_s = 0,01$.

В случае, если в (32) $n = 1$, то имеет место эксцентричная форма потери устойчивости, при которой в центре диска возникает уравновешивающая сосредоточенная сила. Таким образом, в условиях сопряжения (31) $\sigma_\rho^p \neq 0$ характеристическое уравнение принимает вид

$$\frac{\sigma_s}{E} \left[\frac{\beta_{0*}(1 + 3\beta_{0*}^2)}{32(1 + \beta_{0*}^2)} A_1 + \frac{\beta_{0*}(7 - 2\beta_{0*}^2 - 21\beta_{0*}^4)}{32(1 - \beta_{0*}^4)} A_2 \right] - \beta_{0*} = 0, \quad (34)$$

где

$$A_1 = \frac{2\sqrt{3}c}{3} - \frac{7\omega^2}{8q^2}, \quad A_2 = \frac{2\sqrt{3}c}{3} + \frac{\omega^2}{8q^2}.$$

Можно показать, что единственным корнем уравнения на отрезке $(0, 1)$ является $\beta_{0*} = 0$, которому соответствует

$$\omega_{*кр} = \frac{u}{a} \sqrt{\frac{\sigma_s g}{7\gamma}} \quad \left(\frac{\omega_{*кр}}{q} = 1,5118 \right).$$

Полученные значения критических скоростей соответствуют, очевидно, касательномодульным критическим нагрузкам в теории устойчивости упругопластических систем. Сплошной диск постоянной толщины может потерять устойчивость до исчерпания своей несущей способности.

1. А л и м ж а н о в М. Т., Е р ш о в Л. В. Устойчивость равновесия тел и некоторые задачи горного давления.— В сб. Проблемы механики твердого деформированного тела.— Л.: Судостроение, 1970.
2. Б е р е ж н о й И. А., И в л е в Д. Д. Об определяющих неравенствах в теории пластичности.— Докл. АН СССР, 1976, т. 227, № 4, 824—826.
3. В а н Д а й к М. Методы возмущений в механике жидкости.— М.: Мир, 1967, с. 310.
4. В у л ь м а н С. А. О решении осесимметричных упругопластических задач методом малого параметра.— Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1969, № 3.
5. В у л ь м а н С. А. Приближенное решение упругопластической задачи для полых тел, поверхность которых близка к сферической.— Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1971, № 1.
6. В у л ь м а н С. А. Решение осесимметричных упругопластических задач для тел из сжимаемого материала.— Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 7.
7. Г а л и н Л. А. Плоская упругопластическая задача.— Прикл. матем. и механика, 1946, т. 10, вып. 3.
8. Г у з ь А. Н. Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях.— Прикл. механика, 1972, т. 8, вып. 12.
9. Г у з ь А. Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях.— Киев: Наукова думка, 1973.
10. Г у з ь А. Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.— Прикл. механика, 1976, т. 12, № 6.
11. Г у з ь А. Н., Ч е р н ы ш е н к о И. С., Ш н е р е н к о К. И. Сферические днища, ослабленные отверстиями.— Киев: Наукова думка, 1970.
12. Г у з ь А. Н., Л у г о в о й П. З., Ш у л ь г а Н. А. Конические оболочки, ослабленные отверстиями.— Киев: Наукова думка, 1976.
13. Д р у я н о в Б. А. Вдавливание штампа в толстую пластически неоднородную полосу.— Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 3.
14. Д р у я н о в Б. А. Вдавливание шероховатого штампа в толстую пластически неоднородную полосу.— Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 6.
15. Д у р о в В. В. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду в условиях плоской деформации.— Труды Научно-иссл. ин-та матем. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 4.
16. Д у р о в В. В. К задаче о вдавливании тонкого жесткого тела в пластическую среду с упрочнением.— Прикл. матем. и механика, 1973, т. 37, вып. 4.
17. Д у р о в В. В., И в л е в Д. Д. О вдавливании тонкого жесткого тела в пластическую среду с упрочнением.— Прикл. матем. и механика, 1972, т. 36, вып. 3.
18. Е р ш о в Л. В. Упругопластическое состояние эксцентрика, насаженного с натягом на упругий вал.— Вестник МГУ, 1957, № 5.
19. Е р ш о в Л. В. Упругопластическое состояние конической и искривленной труб. Вестник МГУ, 1958, № 3.
20. Е р ш о в Л. В. Приближенное решение осесимметричных упругопластических задач.— Изв. АН СССР, Механика и машиностр., 1959, № 3.
21. Е р ш о в Л. В. Об осесимметричной потере устойчивости толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием равномерного давления.— Прикл. матем. и техн. физика, 1960, № 4.
22. Е р ш о в Л. В. Об образовании шейки в плоском образце при растяжении.— Прикл. матем. и техн. физика, 1961, № 1.
23. Е р ш о в Л. В. О постановке задачи устойчивости горных выработок.— Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 2.
24. Е р ш о в Л. В. К вопросу о проявлении горного давления в вертикальном шахтном стволе.— Изв. АН СССР, Механика и машиностр., 1962, № 6.
25. Е р ш о в Л. В. Об учете влияния эффекта Баушингера на потерю устойчивости сжатой полосы.— Прикл. матем. и механика, 1962, т. 26, вып. 3.
26. Е р ш о в Л. В. О проявлении горного давления в горизонтальных выработках.— Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 2.
27. Е р ш о в Л. В. Искусственное усиление устойчивости целиков путем установки подкрепляющих штанг.— Изв. АН СССР, Механика и машиностр., 1963, № 2.
28. Е р ш о в Л. В. Исследование вопросов проявления горного давления с позиций теории устойчивости упругопластических тел. Прикл. механика, 1963, т. 9, вып. 4.
29. Е р ш о в Л. В., И в л е в Д. Д. Упругопластическое состояние конической трубы, находящейся под действием внутреннего давления.— Вестник МГУ, 1957, № 2.
30. Е р ш о в Л. В., И в л е в Д. Д. Упругопластическое напряженное состояние полого толстостенного тора, находящегося под действием внутреннего давления.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
31. Е р ш о в Л. В., И в л е в Д. Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 8.
32. Е р ш о в Л. В., И в л е в Д. Д. Упругопластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 9.
33. Е р ш о в Л. В., И в л е в Д. Д. О потере устойчивости вращающихся дисков.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 1.

34. Ершов Л. В., Калужин А. А. Об устойчивости полосы при сжатии. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
35. Ершов Л. В., Телиянц В. Н. Об общих соотношениях метода малого параметра в осесимметричных задачах теории малых упругопластических деформаций.— Прикл. матем. и техн. физика, 1961, № 3.
36. Ершов Л. В., Телиянц В. Н. Об устойчивости равновесия упругой полосы.— Инженерный журнал, МГТ, 1967, № 6.
37. Жалнин В. А., К теории нелинейных вязко-упругих сред.— Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
38. Жуков А. М., К вопросу о возникновении шейки в образце при растяжении.— Инженерный сб., 1949, т. 5, вып. 2.
39. Ивлев Д. Д. Выпучивание эксцентричной трубы.— Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 10.
40. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 1.
41. Ивлев Д. Д. Выпучивание толстостенной трубы, ослабленной пологой осесимметричной выточкой.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.
42. Ивлев Д. Д. Приближенное решение упругопластических задач теории идеальной пластичности. Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 2.
43. Ивлев Д. Д. Приближенное решение задач теории малых упругопластических деформаций.— Докл. АН СССР, 1957, т. 113, № 3.
44. Ивлев Д. Д. Вдавливание тонкого лезвия в пластическую среду.— Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 10.
45. Ивлев Д. Д. Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина.— Прикл. матем. и механика, 1957, т. 21, вып. 5.
46. Ивлев Д. Д. Приближенное решение плоских упругопластических задач теории идеальной пластичности.— Вестник МГУ, 1957, № 5.
47. Ивлев Д. Д. К определению перемещений в задаче Л. А. Галина.— Прикл. матем. и механика, 1959, т. 23, вып. 5.
48. Ивлев Д. Д. Об уравнениях линеаризованных пространственных задач теории идеальной пластичности.— Докл. АН СССР, 1960, т. 130, № 6.
49. Ивлев Д. Д. О вдавлении тонкого тела вращения в пластическое полупространство.— Прикл. матем. и техн. физ., 1960, № 4.
50. Ивлев Д. Д. Об определении поверхности выпучившегося материала при вдавлении тонкого лезвия в пластическое полупространство.— Прикл. матем. и механика, 1961, т. 25, вып. 2.
51. Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности.— М.: Наука, 1966.
52. Ивлев Д. Д. Об определении перемещений в упругопластических задачах теории идеальной пластичности.— В сб. Успехи механики деформируемых сред.— М.: Наука, 1975.
53. Ивлев Д. Д. К построению теории упругости.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 6.

54. Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела.— М.: Наука, 1971.
55. Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Приближенное решение упругопластических осесимметричных задач теории идеальной пластичности.— Вестник МГУ, 1958, № 2.
56. Ильюшин А. А. Деформация вязкопластического тела.— Уч. записки МГУ, 1940, вып. 39.
57. Ильюшин А. А. Пластичность.— М.: Гостехиздат, 1948.
58. Ильюшин А. А. Нормальные и касательные напряжения при чистом изгибе балки за пределом упругости и аналогия с задачами об изгибе плит.— Инженерный сб., 1954, т. 19.
59. Ишлинский А. Ю., Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости.— Украинский матем. журнал, 1954, т. 6, № 2.
60. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения полосы и круглого прута.— Прикл. матем. и механика, 1943, т. 7, вып. 3.
61. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязкопластического течения круглой пластинки.— Прикл. матем. и механика, 1943, т. 7, вып. 6.
62. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.
63. Качанов Л. М. Пластическое кручение круглых стержней переменного диаметра.— Прикл. матем. и механика, 1948, т. 12, вып. 4.
64. Качанов Л. М. Ползучесть овальных и равностенных труб.— Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 9.
65. Кузнецов В. В. Концентрация напряжений вблизи эллиптического отверстия упругопластического тела.— Прикл. механика, 1972, № 5.
66. Кузнецов В. В. Об определении деформированного состояния упругопластической толстой плиты с эллиптическим отверстием.— Прикл. механика, 1973, т. 9, № 9.
67. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости.— М.: Гостехиздат, 1955.
68. Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970.
69. Марушкей Ю. М. Двухосное растяжение упругопластического пространства с включением.— Изв. вузов, Машиностроение, 1975, № 12.
70. Марушкей Ю. М. Об упругопластическом состоянии среды с включением в виде эллиптического цилиндра.— Прикл. механика, 1976, том 12, № 2.
71. Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца.— В сб. переводов «Механика», 1955, № 4 (32).
72. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий.— Киев: Наукова думка, 1968.
73. Семькина Т. Д. О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью.— Изв. АН СССР, Механика и машиностр., 1963, № 1.
74. Соколов А. П. Об упругопластическом состоянии пластинки.— Докл. АН СССР, 1948, т. 10, № 1.

75. Соколовский В. В. Теория пластичности.— М.: Высшая школа, 1969.
76. Тарасьев Г. С., Толоконников Л. А. Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале.— В сб. Концентрация напряжений.— Киев: Наукова думка, 1962, Вып. 1.
77. Тарасьев Г. С., Толоконников Л. А. Конечные плоские деформации сжимаемого материала.— Прикл. механика, 1966, т. 2, № 2.
78. Толоконников Л. А., Яковлев С. П., Кузин В. Ф. Плоская деформация со слабой пластической анизотропией.— Прикл. механика, 1969, т. 5, № 8.
79. Харченко А. П. Деформированное состояние вблизи эллиптического отверстия в упругопластическом теле.— Прикл. механика, 1974, т. 10, вып. 3.
80. Хилл Р. Математическая теория пластичности.— М.: Гостехиздат, 1956.
81. Черепанов Г. П. Об одном методе решения упругопластической задачи.— Прикл. матем. и механика, 1963, т. 27, вып. 3.
82. Цурпал И. А. Расчет элементов конструкций из нелинейно упругих материалов.— Киев, Техніка, 1976.
83. Вушавски Z., Корески Н. Sperezysto-plastyczna deformacja i pelzanie powloki kulisty.— Rozpr. inz., 1967, t. 15, № 2, ss. 227—248.

Д.Д.Ивлев
Л.В.Ершов

МЕТОД
ВОЗМУЩЕНИЙ
В ТЕОРИИ
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ТЕЛА

