

Е. ЯНКЕ

ФЭМДЕ

Ф. ЛЁШ

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

JANKE—EMDE—LÖSCH

# TAFELN HÖHERER FUNKTIONEN

SECHSTE AUFLAGE

Neubearbeitet von F. LÖSCH

Е. ЯНКЕ, Ф. ЭМДЕ, Ф. ЛЕШ

B161.6  
902

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

## ФОРМУЛЫ, ГРАФИКИ, ТАБЛИЦЫ

ПЕРЕВОД С 6-го ПЕРЕРАБОТАННОГО  
НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Л. И. СЕДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1964

517.2 (03)

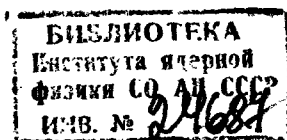
Я 62

УДК 517.6/8(088.3)

## АННОТАЦИЯ

Настоящая книга является переводом существенно переработанного Ф. Лёшем издания широко известного во всем мире справочника Е. Янке и Ф. Эмде. Она является совершенно особой энциклопедией по специальным функциям: содержит их определения и множество формул, 73 таблицы и 210 оригинальных чертежей и графиков, представляющих особую ценность. Таблицы дают достаточную для многих прикладных вопросов точность и удобны в обращении, а чертежи ярко иллюстрируют качественную сторону поведения функций (как в действительной, так и в комплексной областях).

Обилие материала и тщательность его обработки делают книгу необходимым подручным пособием для специалистов в области механики, физики, техники. Она будет очень полезна студентам вычислительных специальностей и инженерно-техническим работникам, встречающимся в своей практической деятельности с многочисленными расчетами.



*Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш*

Специальные функции (Формулы, графики, таблицы)

М., 1964 г., 344 стр. с илл.

Редактор *Н. Х. Розов*.

Техн. редактор *В. Н. Крючкова*.

Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 28/V 1963 г. Подписано к печати 7/1 1964 г. Бумага 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 21,5. Условн. печ. л. 29,46. Уч.-изд. л. 33,46. Тираж 10 500 экз.  
Цена книги 1 р. 87 к. Заказ № 669.

Издательство «Наука».  
Редакция физико-математических справочников.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Гос. типография «Пяргале», г. Вильнюс, ул. Латако, 6. Заказ № 538.

## СОДЕРЖАНИЕ

Перечень таблиц . . . . .	8
Предисловие к русскому изданию . . . . .	10
Из предисловия к 6-му немецкому изданию . . . . .	11
Замечания об устройстве таблиц . . . . .	13
<b>I. Некоторые константы и вспомогательные таблицы . . . . .</b>	<b>15</b>
A. Часто встречающиеся постоянные . . . . .	15
B. Постоянные Эйлера $C, \gamma$ . . . . .	15
C. Числа Бернулли $B_n$ . . . . .	15
D. Числа Эйлера $E_n$ . . . . .	16
E. Постоянная Каталана $G$ . . . . .	16
F. Вспомогательные таблицы для вычислений с комплексными числами . . . . .	16
1. Обратные величины . . . . .	16
2. Квадратные корни . . . . .	18
3. Прямоугольные и полярные координаты . . . . .	20
4. Сложение векторов . . . . .	21
<b>II. Тригонометрические функции . . . . .</b>	<b>24</b>
1. Некоторые специальные тригонометрические функции . . . . .	24
2. Элементарные трансцендентные уравнения . . . . .	24
<b>III. Гиперболические функции . . . . .</b>	<b>30</b>
1. Определения . . . . .	30
2. Частные значения . . . . .	30
3. Основные соотношения . . . . .	31
4. Представление одной функции через другие . . . . .	31
5. Формулы сложения . . . . .	31
6. Функции кратных аргументов . . . . .	31
7. Степени . . . . .	32
8. Связь с показательными функциями и логарифмами . . . . .	32
9. Формулы дифференцирования и интегрирования . . . . .	32
10. Представления при малых значениях аргументов . . . . .	33
11. Асимптотика при больших значениях аргументов . . . . .	33
12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан) . . . . .	33
13. Некоторые трансцендентные уравнения . . . . .	35
<b>IV. Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного . . . . .</b>	<b>36</b>
1. Синус, косинус . . . . .	36
2. Арксинус . . . . .	39
3. Тангенс . . . . .	40
4. Арктангенс . . . . .	43
5. Переход от одной функции к другой . . . . .	44
6. Знак действительной и мнимой части функции . . . . .	45
7. Приведение к положительным острым углам . . . . .	46
8. Поведение функций в комплексной плоскости . . . . .	47
<b>V. Гамма-функции . . . . .</b>	<b>49</b>
Определения и обозначения . . . . .	49
A. Гамма-функция $\Gamma(z)$ . . . . .	52
1. Представления . . . . .	52
2. Частные значения . . . . .	54
3. Функциональные уравнения . . . . .	54
4. Некоторые интегральные формулы . . . . .	55

<b>B.</b>	Логарифмическая производная $\psi(z)$ гамма-функции . . . . .	56
1.	Представления . . . . .	56
2.	Частные значения . . . . .	57
3.	Функциональные уравнения . . . . .	57
4.	Производная $\psi'(z)$ . . . . .	57
<b>C.</b>	Неполные гамма-функции $\Gamma(a, z)$ , $\gamma(a, z)$ . . . . .	60
<b>VI.</b>	Интегральная показательная функция и родственные функции . . . . .	62
1.	Интегральная показательная функция и интегральный логарифм . . . . .	62
2.	Интегральный синус и интегральный косинус . . . . .	65
3.	Некоторые интегральные формулы . . . . .	67
<b>VII.</b>	Интеграл ошибок и связанные с ним функции . . . . .	70
1.	Интеграл ошибок . . . . .	70
2.	Интегралы Френеля . . . . .	82
<b>VIII.</b>	Дзета-функция Римана . . . . .	88
1.	Определение и представления . . . . .	88
2.	Частные значения . . . . .	91
3.	Функциональные уравнения . . . . .	91
<b>IX.</b>	Эллиптические интегралы . . . . .	94
	Определения и обозначения . . . . .	94
<b>A.</b>	Приведение эллиптических интегралов к нормальной форме . . . . .	96
1.	Общие замечания . . . . .	96
2.	Приведение к нормальной форме действительных интегралов . . . . .	96
<b>B.</b>	Нормальная форма неполных интегралов . . . . .	99
1.	Представления . . . . .	99
2.	Функциональные уравнения . . . . .	109
<b>C.</b>	Нормальная форма полных интегралов . . . . .	109
1.	Представления . . . . .	109
2.	Функциональные уравнения . . . . .	116
<b>X.</b>	Эллиптические функции . . . . .	120
	Определения и обозначения . . . . .	120
<b>A.</b>	Эллиптические функции Якоби . . . . .	120
1.	Амплитуда Якоби $\operatorname{am}(u, k)$ . . . . .	120
2.	Функции Якоби $\operatorname{sn} u$ , $\operatorname{cn} u$ , $\operatorname{dn} u$ . . . . .	122
3.	Частные значения . . . . .	123
4.	Функциональные уравнения . . . . .	125
5.	Дзета-функция Якоби $\zeta(u, k)$ . . . . .	127
<b>B.</b>	Эллиптические функции Вейерштрасса . . . . .	127
1.	Функции Вейерштрасса $\wp u$ , $\zeta u$ , $\sigma u$ . . . . .	127
2.	Представления . . . . .	129
3.	Функциональные уравнения . . . . .	130
4.	Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса . . . . .	130
<b>C.</b>	Тэта-функции . . . . .	130
1.	Определение и представления . . . . .	130
2.	Частные значения . . . . .	131
3.	Функциональные уравнения . . . . .	132
4.	Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Модулярная функция . . . . .	133
<b>XI.</b>	Ортогональные полиномы . . . . .	144
<b>A.</b>	Полиномы Чебышева . . . . .	144
<b>B.</b>	Полиномы Лагерра . . . . .	147
<b>C.</b>	Полиномы Эрмита (функции параболического цилиндра) . . . . .	151
<b>XII.</b>	Функции Лежандра (сферические функции) . . . . .	158
1.	Определения и обозначения . . . . .	158
2.	Функции Лежандра 1-го и 2-го рода . . . . .	159
3.	Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода . . . . .	162
4.	Интегральные представления . . . . .	163
5.	Частные значения. Асимптотика . . . . .	164
6.	Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра . . . . .	164

<b>XIII. Функции Бесселя (цилиндрические функции)</b> . . . . .	178
<b>A. Функции Бесселя 1-го, 2-го и 3-го рода</b> . . . . .	178
1. Определения и обозначения . . . . .	178
2. Представления с помощью рядов . . . . .	181
3. Интегральные представления . . . . .	221
4. Асимптотика . . . . .	222
5. Нули . . . . .	229
6. Функциональные уравнения . . . . .	243
7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя . . . . .	245
<b>B. Модифицированные функции Бесселя</b> . . . . .	247
1. Определения и обозначения . . . . .	247
2. Функции $I_\nu(z)$ , $K_\nu(z)$ . . . . .	247
3. Функции Кельвина . . . . .	264
<b>C. Функции, связанные с функциями Бесселя</b> . . . . .	287
1. Функции Ангера и Вебера . . . . .	287
2. Функции Струве . . . . .	288
<b>XIV. Функции Матье (функции эллиптического цилиндра)</b> . . . . .	298
1. Определения и обозначения . . . . .	298
2. Представления для собственных значений . . . . .	305
3. Разложение в ряды Фурье . . . . .	305
4. Нули . . . . .	306
5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье . . . . .	306
<b>XV. Конфлюэнтные гипергеометрические функции</b> . . . . .	308
1. Функция $\Phi(a, c; z)$ . . . . .	308
2. Функция $\Psi(a, c; z)$ . . . . .	315
3. Функции $M_{\chi, \mu}(z)$ , $W_{\chi, \mu}(z)$ . . . . .	316
4. Частные случаи . . . . .	317
<b>XVI. Некоторые специальные функции физики</b> . . . . .	318
<b>A. Функция излучения Плаика</b> . . . . .	318
<b>B. Функция Ланжевена</b> . . . . .	320
<b>C. Функции Планка—Эйнштейна и Дебая</b> . . . . .	320
1. Функции Планка—Эйнштейна . . . . .	320
2. Функции Дебая . . . . .	323
<b>D. Функции распространения тепла от источников</b> . . . . .	326
Библиография . . . . .	329
Предметный указатель . . . . .	343

## ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

<b>I.</b>	<b>Некоторые константы и вспомогательные таблицы</b> . . . . .	15
	1. Обратные величины для комплексных чисел . . . . .	17
	2. Квадратные корни из комплексных чисел . . . . .	18
	3. Тригонометрическая форма комплексных чисел . . . . .	20
	4. Сложение векторов . . . . .	22
<b>II.</b>	<b>Тригонометрические функции</b> . . . . .	24
	5. Функции $x \operatorname{tg} x$ , $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ и $\frac{\sin x}{x}$ . . . . .	26
	6. Функции $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ и $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$ . . . . .	29
	7. Экстремумы функции $\sin x/x$ . . . . .	29
<b>III.</b>	<b>Гиперболические функции</b> . . . . .	30
	8. Показательные и гиперболические функции . . . . .	34
	9. Некоторые вспомогательные величины . . . . .	35
<b>IV.</b>	<b>Тригонометрические и гиперболические функции комплексного переменного</b> . . . . .	36
	10. Функция $\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$ . . . . .	39
	11. Функция $\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$ . . . . .	42
<b>V.</b>	<b>Гамма-функции</b> . . . . .	49
	12. Гамма-функция $\Gamma(x) = (x-1)!$ . . . . .	58
	13. Функции $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ . . . . .	58
	14. Величины, обратные к гамма-функции: $\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!}$ и $\frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$ . . . . .	59
<b>VI.</b>	<b>Интегральная показательная функция и родственные функции</b> . . . . .	62
	15. Интегральные показательные функции $Ei^*(x)$ и $-Ei(-x)$ . . . . .	64
	16. Интегральный синус $Si(x)$ и интегральный косинус $Ci(x)$ . . . . .	68
	17. Экстремумы функций $ci(x)$ и $si(x)$ . . . . .	69
<b>VII.</b>	<b>Интеграл ошибок и связанные с ним функции</b> . . . . .	70
	18. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ . . . . .	73
	19. Производные интеграла ошибок $\Phi(x)$ . . . . .	74
	20. Функции $e^{x^2} [1 - \Phi(x)]$ и $e^{-x^2}$ . . . . .	80
	21. Функция $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ . . . . .	80
	22. Интеграл ошибок $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и его производная $\varphi(x)$ . . . . .	81
	23. Интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ . . . . .	84
	24. Интегралы Френеля $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ и $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ . . . . .	85
<b>VIII.</b>	<b>Дзета-функция Римана</b> . . . . .	88
	25. Нули $0,5 + ia_n$ дзета-функции Римана $\zeta(x)$ . . . . .	91
	26. Дзета-функция Римана $\zeta(x)$ . . . . .	92



<b>IX.</b>	<b>Эллиптические интегралы</b> . . . . .	94
	27. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода $F(\varphi, k)$ . . . . .	103
	28. Неполный эллиптический интеграл 2-го рода $E(\varphi, k)$ . . . . .	106
	29. Полные эллиптические интегралы $K(\sin \alpha)$ и $E(\sin \alpha)$ . . . . .	117
	30. Полные эллиптические интегралы $K(k)$ и $E(k)$ . . . . .	118
	31. Полные эллиптические интегралы $B(k)$ , $C(k)$ и $D(k)$ . . . . .	118
	32. Вспомогательные функции $h(k)$ , $c(k)$ и $d(k)$ . . . . .	119
<b>X.</b>	<b>Эллиптические функции</b> . . . . .	120
	33. Тэта-функции и их производные . . . . .	138
	34. Вспомогательная таблица для тэта-функций . . . . .	139
	35. Функция $\ln q$ . . . . .	140
<b>XI.</b>	<b>Ортогональные полиномы</b> . . . . .	144
	36. Функции Лагерра $l_n(x)$ . . . . .	149
	37. Функции параболического цилиндра $\Phi_n(x)$ . . . . .	155
<b>XII.</b>	<b>Функции Лежандра</b> . . . . .	158
	38. Полиномы Лежандра $P_n(x)$ . . . . .	169
	39. Полиномы Лежандра $P_n(\cos \vartheta)$ . . . . .	171
	40. Производные полиномов Лежандра $\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos \vartheta)$ . . . . .	173
	41. Функции Лежандра 2-го рода $Q_n(x)$ . . . . .	175
<b>XIII.</b>	<b>Функции Бесселя</b> . . . . .	178
	42. Функции $\Lambda_n(x) = n!(x/2)^{-n} J_n(x)$ . . . . .	193
	43. Функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$ . . . . .	203
	44. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$ . . . . .	208
	45. Функции Бесселя $J_{n/2}(x)$ и $J_{n/4}(x)$ . . . . .	210
	46. Функции Бесселя $J(n)$ . . . . .	211
	47. Функции Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$ . . . . .	216
	48. Нули $j_{0,s}$ функции $J_0(x)$ и соответствующие значения функции $J_1(x)$ . . . . .	232
	49. Нули $j_{1,s}$ функции $J_1(x)$ и экстремумы функции $J_0(x)$ . . . . .	232
	50. Нули $j_{n,s}$ функций $J_n(x)$ . . . . .	232
	51. Два первых нуля $j_{n,1}$ и $j_{n,2}$ функций $J_n(x)$ . . . . .	233
	52. Первые шесть корней $x_{n,s}$ уравнения $J_n(x) N_n(kx) - J_n(kx) N_n(x) = 0$ . . . . .	242
	53. Модифицированные функции Бесселя $I_0(x)$ и $I_1(x)$ . . . . .	251
	54. Модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$ . . . . .	255
	55. Модифицированные функции Бесселя $\frac{2}{\pi} K_0(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_1(x)$ . . . . .	256
	56. Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(x)$ и $\frac{2}{\pi} K_\nu(x)$ для $\nu=1/3, 2/3$ . . . . .	262
	57. Первые корни $x_{n,s}$ уравнения $I_n(x) J'_n(x) - J_n(x) I'_n(x) = 0$ . . . . .	263
	58. Функции $\text{ber}(x)$ , $\text{bei}(x)$ . . . . .	274
	59. Функции $\text{ber}'(x)$ , $\text{bei}'(x)$ . . . . .	276
	60. Функции $\text{her}(x)$ , $\text{hei}(x)$ . . . . .	278
	61. Функции $\text{her}'(x)$ , $\text{hei}'(x)$ . . . . .	280
	62. Функции $\text{ber}(x)$ , $\text{bei}(x)$ , $\text{ber}'(x)$ , $\text{bei}'(x)$ , $\text{her}(x)$ , $\text{hei}(x)$ , $\text{her}'(x)$ , $\text{hei}'(x)$ (продолжение) . . . . .	282
	63. Функции $J_n(r\sqrt{i}) = b_n e^{i\beta n}$ и $H_n^{(1)}(r\sqrt{i}) = h_n e^{i\alpha n}$ ( $n=0, 1$ ) . . . . .	283
	64. Функции $J_0(r\sqrt{i})/J_1(r\sqrt{i})$ и $H_0^{(1)}(r\sqrt{i})/H_1^{(1)}(r\sqrt{i})$ . . . . .	285
	65. Функции Вебера $E_0(x)$ , $E_1(x)$ и функции Струве $H_0(x)$ , $H_1(x)$ . . . . .	289
	66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера . . . . .	297
<b>XVI.</b>	<b>Некоторые специальные функции физики</b> . . . . .	318
	68. Функция излучения Планка . . . . .	319
	69. Функция Ланжевена . . . . .	321
	70. Функции Планка—Эйнштейна $C_\nu$ и $(U-U_0)/T$ . . . . .	322
	71. Функции Планка—Эйнштейна $-(F-F_0)/T$ и $S$ . . . . .	323
	72. Функции Дебая $C_\nu$ и $(U-U_0)/T$ . . . . .	324
	73. Функции Дебая $-(F-F_0)/T$ и $S$ . . . . .	325

## ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Написанный много лет назад, справочник Е. Янке и Ф. Эмде получил широкое распространение как в Советском Союзе, так и за границей. Он являлся и является сейчас ценным пособием при решении различных инженерных и прикладных задач, требующих применения аппарата специальных функций. Эта книга будет полезна не только при различного рода численных расчетах, но и при изучении разнообразных задач механики, физики, техники, а также для знакомства со специальными функциями или для быстрого наведения какой-нибудь справки.

В 1960 году появилось новое немецкое издание этого справочника, значительно усовершенствованное, переработанное и расширенное Ф. Лёшем. Внесенные им изменения настолько существенны, что, по существу, можно говорить о появлении новой книги. Нет необходимости останавливаться здесь на этих изменениях — они подробно перечислены в предисловии самого Ф. Лёша к немецкому изданию.

Предлагаемая русскому читателю книга представляет собой заново выполненный перевод с немецкого издания 1960 года. Перевод этот был сделан Г. В. Толстовой; значительное участие в обработке рукописи и ее подготовке к печати принял редактор издательства Н. Х. Розов.

Необходимо указать следующие изменения, внесенные в русское издание по сравнению с немецким оригиналом.

В последних зарубежных изданиях был целиком опущен первый раздел справочника Янке и Эмде, посвященный элементарным функциям. Однако он содержал важные и далеко не «элементарные» сведения о гиперболических функциях, о тригонометрических функциях комплексного аргумента и т. п., а также полезные таблицы. Поэтому издательство сочло целесообразным восстановить подавляющее большинство материала этого раздела, используя третье русское издание (опущены только главы, посвященные степеням и кубическим уравнениям, стоящие в стороне от основной темы книги). Деление книги на два раздела — элементарные и специальные функции — признано излишним.

В нескольких местах материал немецкого издания был перепланирован по-иному для удобства пользования книгой (так, таблица коэффициентов для квадратичной интерполяции, находившаяся в конце книги, перенесена в предисловие о пользовании таблицами и т. п.) или пополнен из третьего русского издания.

Подстрочные примечания, а также добавления в тексте, взятые в квадратные скобки, включены в книгу Н. Х. Розовым.

В подготовке библиографии для настоящего издания большое участие приняла Н. С. Мельникова.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К 6-МУ НЕМЕЦКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание заново тщательно переработано. Вследствие широкого распространения и исключительного одобрения, которые эта книга нашла повсюду, переработка была произведена с чувством глубокой ответственности. Я старался не изменять характера книги, но, с другой стороны, стремился расширить ее и облегчить, насколько возможно, пользование ею.

С этой целью я часто располагал материал по-новому. Объяснению функций и обозначений отведено гораздо больше места, чем это было раньше. При выборе обозначений, которые в области специальных функций все еще не являются единичными, я отдавал предпочтение тем, которые в настоящее время наиболее употребительны в литературе\*).

Все таблицы тщательно пересмотрены с целью обеспечить их надежность. В помощь вычислителю большая часть таблиц снабжена разностями, которые позволяют удобным образом производить линейную или квадратичную интерполяцию.

Обновленная библиография находится в конце книги. Так как число учебников и собраний формул и таблиц специальных функций значительно увеличилось за последние десятилетия, то при их перечислении пришлось ограничиться только наиболее значительными работами\*\*).

Выбор материала в прежних изданиях оказался настолько хорошим, что его можно было бы сохранить целиком. Однако значение, которое новые классы специальных функций приобретают в приложениях, было принято во внимание, и поэтому сделаны многочисленные расширения и добавления. Это касается почти всех разделов книги; ниже перечислены только наиболее существенные изменения.

1. Для интеграла ошибок и его производной, чаще всего применяемых в теории вероятности и в статистике, добавлены новые таблицы.

2. Расширены таблицы интегралов Френеля.

3. В разделе об эллиптических функциях приведена таблица для  $\operatorname{In} q$ , в которой использованы десятые доли градуса. К таблице зэта-функций, по предложению Ф. Трикоми\*\*\*), добавлена вспомогательная таблица, которая позволяет удобно получать значения функций вплоть до окрестности  $\alpha = 90^\circ$ .

4. Изложения полиномов Лагерра и Эрмита, которые были разбросаны в различных местах, собраны в расширенном виде в разделе об ортогональных полиномах и дополнены изложением полиномов Чебышева.

---

\*) В настоящем русском издании все обозначения величин и функций приведены по возможности в соответствие с обозначениями, установившимися в отечественной литературе. Для биномиальных коэффициентов сохранено обозначение  $\binom{n}{m}$  вместо распространенной у нас записи  $C_m^n$ . — *Прим. ред.*

\*\*) В настоящем русском издании в список литературы добавлены многочисленные отечественные книги, справочники и таблицы, более доступные советскому читателю. — *Прим. ред.*

\*\*\*) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, *Funzioni Ellittiche*, Bologna, 1951. — *Прим. ред.*

5. Раздел о функциях Бесселя подвергся самым многочисленным изменениям: специальный раздел посвящен модифицированным функциям Бесселя; заново вычислена таблица корней уравнения  $J_\nu(x) N_\nu(kx) - J_\nu(kx) N_\nu(x) = 0$ ; таблица функций Струве, которая была выброшена в двух предыдущих изданиях, вновь включена согласно многочисленным пожеланиям.

6. Раздел о конфлюэнтных гипергеометрических функциях написан заново на основании известных работ Ф. Трикоми\*).

7. Раздел о некоторых специальных функциях физики содержит функцию излучения Планка, функцию Ланжевена и функции распространения тепла от источников, а также вновь вычисленные таблицы функций Планка—Эйнштейна и Дебая, имеющие существенное значение в физической химии.

Желание не увеличивать объем книги заставило меня компенсировать принятые расширения сокращениями в других местах. Так, были выброшены таблицы функций последействия и индуктивности катушек, которые могут быть взяты из соответствующей технической литературы.

*Фридрих Лейб*

---

\*) Имеется в виду книга F. G. Tricomi, *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Roma, 1954. См. также работу F. G. Tricomi, *Mem. Sciences Math.*, № 140, Paris, 1959. — *Прим. ред.*

## ЗАМЕЧАНИЯ ОБ УСТРОЙСТВЕ ТАБЛИЦ

Значения функций, содержащиеся в последующих таблицах, получены из более точных значений округлением их обычным образом, а именно: последний десятичный знак увеличен на 1, если величина последующих цифр превосходит  $1/2$  единицы последнего десятичного знака. Эти табличные значения, следовательно, вообще имеют ошибку самое большее в  $1/2$  единицы последнего десятичного знака. Только в немногих таблицах возможна ошибка в единицу последнего десятичного знака.

Если для всех табличных значений какого-нибудь столбца (или строки) одна или несколько начальных цифр совпадают, то эти цифры отделены и поставлены жирным шрифтом сверху и снизу этого столбца (или в начале строки). Таким же образом мы поступили, когда отброшенные начальные цифры в рассматриваемом столбце отличаются только на единицу в последнем десятичном знаке. Тогда те табличные значения, для которых происходит изменение, отмечены звездочкой (\*).

[В некоторых таблицах употребляются также следующие обозначения: число  $(-n)$ , прибавленное в скобках после табличного значения, указывает, что это значение должно быть умножено на множитель  $10^{-n}$ . Например, из таблицы 37 получаем:  $\Phi_2(1,20) = -0,030\ 396$ , а  $\Phi_2(1,30) = +0,092\ 024$ .]

Табличный шаг везде равен 1, 2 или 5 единицам последнего десятичного знака табличного аргумента. В большинстве случаев нужные значения функций нельзя взять непосредственно из таблицы; тогда их надо получить интерполяцией. Почти все таблицы приспособлены для линейной или квадратичной интерполяции, причем предполагается, что при интерполяции допустима наибольшая ошибка в 2 единицы последнего десятичного знака. Разности 1-го и 2-го порядков, необходимые для интерполяции, присоединены к таблицам; их всегда надо понимать в единицах последнего десятичного знака. В некоторых случаях разности 1-го порядка снабжены предупреждающим знаком (!); он означает, что ошибка при линейной интерполяции, возможно, превосходит 2 единицы, но ни в коем случае не 5 единиц последнего десятичного знака, а для большей степени точности надо применить квадратичную интерполяцию.

**Линейная интерполяция.** Разности 1-го порядка, служащие для линейной интерполяции, обозначены обычным шрифтом и стоят между строками таблицы. Для удобства вычислителя они всегда приведены для табличного шага, равного 1 (в единицах последнего десятичного знака табличного аргумента). Для значения аргумента  $x$ , лежащего в табличном интервале  $\langle x_0, x_1 \rangle$ , значение функции  $y = f(x)$ , следовательно, получается прибавлением к табличному значению  $y_0 = f(x_0)$  произведения разности аргументов  $x - x_0$  (в единицах последнего знака табличного аргумента) на табличную разность, соответствующую  $\langle x_0, x_1 \rangle$ .

**Примеры.** 1) Из таблицы 38 надо получить  $P_2(0,6635)$ . Находим:  $x_0 = 0,66$ ,  $f(x_0) = -0,2713$ , табличная разность равна 182,  $x - x_0 = 0,35$ ; отсюда

$$P_2(0,6635) = f(x) = -0,2713 + 0,35 \cdot 185 \cdot 10^{-4} = -0,2649.$$

Точное значение равно  $-0,2650$ .

2) Из таблицы 69 надо получить  $L(3,126)$ . Находим:  $x_0 = 3,10$ ,  $f(x_0) = 0,6815$ , табличная разность равна 9,4,  $x - x_0 = 2,6$ ; отсюда

$$L(3,126) = f(x) = 0,6815 + 2,6 \cdot 9,4 \cdot 10^{-4} = 0,6839.$$

Точное значение равно 0,6840.

**Квадратичная интерполяция.** Разности 2-го порядка, служащие для квадратичной интерполяции, напечатаны курсивом и стоят в табличных строках. Обозначив

табличные аргументы	табличные значения	разности 2-го порядка
$x_0$	$y_0 = f(x_0)$	$\delta^2 y_0$
$x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$\delta^2 y_1$

вычисляют значение функции  $y=f(x)$  для значения аргумента  $x$ , лежащего в табличном интервале  $\langle x_0, x_1 \rangle$ , по формуле Эверетта — Лапласа:

$$y = (1-t)y_0 E_0^2 \delta^2 y_0 + t y_1 + E_1^2 \delta^2 y_1,$$

где  $t = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ , а значения коэффициентов  $E_0^2, E_1^2$  должны быть взяты из следующей таблицы.

таблицы.

1	$E_0^2$	$E_1^2$	1	$E_0^2$	$E_1^2$	1	
0,00	0,0000 33	0,0000 17	1,00	0,25	-0,0547 11	-0,0391 13	0,75
01	-0,0033 32	-0,0017 16	0,99	26	0,558 10	0,404 13	74
02	0065 31	0033 17	98	27	0568 10	0417 13	73
03	0096 29	0050 17	97	28	0578 9	0430 13	72
04	0125 29	0067 16	96	29	0587 8	0443 12	71
0,05	-0,0154 28	-0,0083 17	0,95	0,30	-0,0595 7	-0,0455 12	0,70
06	0182 27	0100 16	94	31	0602 7	0467 12	69
07	0209 27	0116 16	93	32	0609 6	0479 11	68
08	0236 25	0132 17	92	33	0615 6	0490 11	67
09	0261 24	0149 16	91	34	0621 5	0501 11	66
0,10	-0,0285 23	-0,0165 16	0,90	0,35	-0,0626 4	-0,0512 10	0,65
11	0308 23	0181 16	89	36	0630 3	0522 10	64
12	0331 21	0197 16	88	37	0633 3	0532 10	63
13	0352 21	0213 16	87	38	0636 2	0542 9	62
14	0373 20	0229 15	86	39	0638 2	0551 9	61
0,15	-0,0393 19	-0,0244 16	0,85	0,40	-0,0640 1	-0,0560 8	0,60
16	0412 18	0260 15	85	41	0641 0	0568 9	59
17	0430 18	0275 15	83	42	0641 0	0577 7	58
18	0448 16	0290 15	82	43	0641 0	0584 7	57
19	0464 16	0305 15	81	44	0641 2	0591 7	56
0,20	-0,0480 15	-0,0320 15	0,80	0,45	-0,0639 1	-0,0598 6	0,55
21	0495 14	0335 14	79	46	0638 3	0604 6	54
22	0509 13	0349 16	78	47	0635 3	0610 6	53
23	0522 13	0363 16	77	48	0632 3	0616 5	52
24	0535 12	0377 14	76	49	0629 4	0621 4	51
0,25	-0,0547	-0,0391	0,75	0,50	-0,0625	-0,0625	0,50
	$E_1^2$	$E_0^2$	1	$E_1^2$	$E_0^2$	1	

Можно получить улучшение формулы Эверетта—Лапласа, если заменить в ней разности 2-го порядка  $\delta^2 y$  на видоизмененные разности 2-го порядка

$$\hat{\delta}^2 y = \delta^2 y - 0,184 \delta^4 y.$$

[Формула Эверетта—Лапласа примет тогда вид

$$y = (1-t)y_0 + E_0^2 \hat{\delta}^2 y_0 + t y_1 + E_1^2 \hat{\delta}^2 y_1;$$

остальные обозначения имеют тот же смысл, что и выше.] В тех случаях, когда это оказывается существенным для получения требуемой точности, в таблицах вместо разностей 2-го порядка даются прямо видоизмененные разности 2-го порядка.

Примеры. 1). Из таблицы 16 надо получить  $Si(12,2)$ . Находим:

$$x_0 = 12,0, \quad y_0 = 1,5050, \quad \hat{\delta}^2 y_0 = 190, \quad x_1 = 12,5, \quad y_1 = 1,4923, \quad \hat{\delta}^2 y_1 = 205.$$

Так как  $t=0,4$ , то, согласно приведенной выше таблице,  $E_0^2 = -0,064, E_1^2 = -0,056$ . Поэтому

$$y = Si(12,2) = 0,6 \cdot 1,5050 - 0,064 \cdot 190 \cdot 10^{-4} + 0,4 \cdot 1,4923 - 0,056 \cdot 205 \cdot 10^{-4} = 1,4976.$$

Точное значение равно 1,4975.

2). Из таблицы 40 надо получить  $Q_1(0,8835)$ . Находим:

$$x_0 = 0,88, \quad y_0 = 0,21068, \quad \hat{\delta}^2 y_0 = 391, \quad x_1 = 0,89, \quad y_1 = 0,26551, \quad \hat{\delta}^2 y_1 = 460.$$

Так как  $t=0,35$ , то  $E_0^2 = -0,0626, E_1^2 = -0,0512$ . Поэтому

$$y = Q_1(0,8835) = 0,65 \cdot 0,21068 - 0,0626 \cdot 391 \cdot 10^{-5} + 0,35 \cdot 0,26551 - 0,0512 \cdot 460 \cdot 10^{-5} = 0,22939.$$

Точное значение равно 0,22939.

## І. НЕКОТОРЫЕ КОНСТАНТЫ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ

### А. ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ

$\sqrt{2} = 1,414\ 213\ 562 = 1:0,707\ 106\ 781$	$\frac{\pi}{2} = 1,570\ 796\ 327 = 1:0,636\ 619\ 772$
$\sqrt{3} = 1,732\ 050\ 808 = 1:0,577\ 350\ 269$	$\pi^2 = 9,869\ 604\ 401 = 1:0,101\ 321\ 184$
$\sqrt{10} = 3,162\ 277\ 660 = 1:0,316\ 227\ 766$	$\pi^3 = 31,006\ 276\ 680 = 1:0,032\ 251\ 534$
$\sqrt[3]{2} = 1,259\ 921\ 050 = 1:0,793\ 700\ 526$	$\pi\sqrt{2} = 4,442\ 882\ 938 = 1:0,225\ 079\ 079$
$\sqrt[3]{10} = 2,154\ 434\ 690 = 1:0,464\ 158\ 883$	$\sqrt{\pi} = 1,772\ 453\ 851 = 1:0,564\ 189\ 584$
$e = 2,718\ 281\ 828 = 1:0,367\ 879\ 441$	$\sqrt{2\pi} = 2,506\ 628\ 275 = 1:0,398\ 942\ 280$
$e^2 = 7,389\ 056\ 099 = 1:0,135\ 335\ 283$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,253\ 314\ 137 = 1:0,797\ 884\ 561$
$\sqrt{e} = 1,648\ 721\ 271 = 1:0,606\ 530\ 660$	$\sqrt[3]{\pi} = 1,464\ 591\ 888 = 1:0,682\ 784\ 063$
$\ln 10 = 2,302\ 585\ 093 = 1:0,434\ 294\ 482$	$e^\pi = 23,140\ 692\ 633 = 1:0,043\ 213\ 918$
$\lg e = 0,434\ 294\ 482$	$e^{\pi/2} = 4,810\ 477\ 381 = 1:0,207\ 879\ 576$
$\ln 2 = 0,693\ 147\ 181$	$\lg \pi = 0,497\ 149\ 873$
$\ln 3 = 1,098\ 612\ 289$	$\ln \pi = 1,144\ 729\ 886$
$\pi = 3,141\ 592\ 654 = 1:0,318\ 309\ 886$	

### В. ПОСТОЯННЫЕ ЭЙЛЕРА С, $\gamma$

*Постоянная Эйлера (или Эйлера—Маскерони) С* [определяется как предел

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right];$$

так же называют постоянную  $\gamma$ , связанную с С соотношениями]

$$\begin{aligned} C &= \ln \gamma, & \gamma &= e^C, \\ C &= 0,577\ 215\ 665, & \gamma &= 1,781\ 072\ 418. \end{aligned}$$

### С. ЧИСЛА БЕРНУЛЛИ $B_n$

*Числами Бернулли  $B_n$*  называются коэффициенты в разложении

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Именно, справедливы равенства

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_{2k+1} = 0, \quad B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2 \cdot (2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

в частности,

$$\begin{array}{ll}
 B_2 = 1:6 = 0,166\ 666\ 667 & B_{12} = -691:2730 = -0,253\ 113\ 553 \\
 B_4 = -1:30 = -0,033\ 333\ 333 & B_{14} = 7:6 = 1,166\ 666\ 667 \\
 B_6 = 1:42 = 0,023\ 809\ 524 & B_{16} = -3617:510 = -7,092\ 156\ 863 \\
 B_8 = -1:30 = -0,033\ 333\ 333 & B_{18} = 43\ 867:798 = 54,971\ 177\ 945 \\
 B_{10} = 5:66 = 0,075\ 757\ 576 & B_{20} = -174\ 611:330 = -529,124\ 242\ 424
 \end{array}$$

Иногда  $(-1)^{n+1}B_{2n}$  называется *n-м числом Бернулли* и обозначается через  $B_n$ .

#### Д. ЧИСЛА ЭЙЛЕРА $E_n$

[Числами Эйлера  $E_n$  называются коэффициенты в разложении

$$\frac{2}{e^z + e^{-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Именно, справедливы равенства

$$E_0 = 1, \quad E_{2k+1} = 0, \quad E_{2k} = (-1)^k \cdot \frac{4^{k+1} \cdot (2k)!}{\pi^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

в частности,

$$\begin{array}{ll}
 E_2 = -1 & E_{12} = 2\ 702\ 765 \\
 E_4 = 5 & E_{14} = -199\ 360\ 981 \\
 E_6 = -61 & E_{16} = 19\ 391\ 512\ 145 \\
 E_8 = 1385 & E_{18} = -2\ 404\ 879\ 675\ 441 \\
 E_{10} = -50\ 251 & E_{20} = 370\ 371\ 188\ 237\ 525
 \end{array}$$

#### Е. ПОСТОЯННАЯ КАТАЛАНА $G$

Постоянной Каталана  $G$  называется величина

$$G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx, \quad G = 0,915\ 965\ 594.]$$

#### Ф. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Все следующие формулы остаются верными, если в обеих частях равенств заменить  $i$  на  $-i$ .

##### 1. Обратные величины

Таблица 1 позволяет находить величины (рис. 1)

$$\frac{1}{1+ix} = u - iv = \frac{1-ix}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x+i} = v - iu.$$

В общем случае

$$\begin{array}{ll}
 0 < b < a: & x = \frac{b}{a}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{u}{a} - i \frac{v}{a}; \\
 0 < a < b: & x = \frac{a}{b}, \quad \frac{1}{\pm a + ib} = \pm \frac{v}{b} - i \frac{u}{b}.
 \end{array}$$



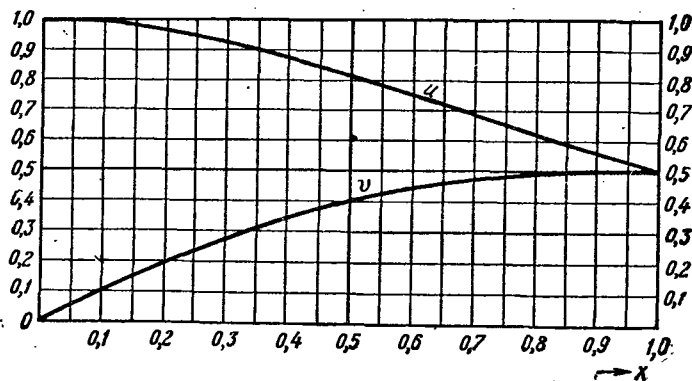


Рис. 1.  $\frac{1}{1+ix} = u - iv$ ,  $\frac{1}{x+i} = v - iu$ .

Таблица 1. Обратные величины для комплексных чисел

$1:(1+ix) = u - iv$

$1:(x+i) = v - iu$

x	u	v	x	u	v	x	u	v
0	1	0	0,35	0,8909	0,3118	0,70	0,6711	0,4698
0,01	0,9999	0,029999	0,36	0,8853	0,3187	0,71	0,6648	0,4720
0,02	0,9996	0,01999	0,37	0,8796	0,3254	0,72	0,6586	0,4742
0,03	0,9991	0,02997	0,38	0,8738	0,3321	0,73	0,6524	0,4762
0,04	0,9984	0,03994	0,39	0,8680	0,3385	0,74	0,6462	0,4782
0,05	0,9975	0,04988	0,40	0,8621	0,3448	0,75	0,6400	0,4800
0,06	0,9964	0,05978	0,41	0,8561	0,3510	0,76	0,6339	0,4817
0,07	0,9951	0,06966	0,42	0,8501	0,3570	0,77	0,6278	0,4834
0,08	0,9936	0,07949	0,43	0,8440	0,3629	0,78	0,6217	0,4850
0,09	0,9920	0,08928	0,44	0,8378	0,3685	0,79	0,6157	0,4864
0,10	0,9901	0,09901	0,45	0,8316	0,3742	0,80	0,6098	0,4878
0,11	0,9880	0,10868	0,46	0,8254	0,3797	0,81	0,6038	0,4891
0,12	0,9858	0,11830	0,47	0,8191	0,3850	0,82	0,5979	0,4903
0,13	0,9834	0,12784	0,48	0,8127	0,3901	0,83	0,5921	0,4914
0,14	0,9808	0,13731	0,49	0,8064	0,3951	0,84	0,5863	0,4925
0,15	0,9780	0,14670	0,50	0,8000	0,4000	0,85	0,5806	0,4935
0,16	0,9750	0,15601	0,51	0,7936	0,4047	0,86	0,5748	0,4944
0,17	0,9719	0,16523	0,52	0,7872	0,4093	0,87	0,5692	0,4952
0,18	0,9686	0,17435	0,53	0,7807	0,4138	0,88	0,5636	0,4959
0,19	0,9652	0,1834	0,54	0,7742	0,4181	0,89	0,5580	0,4966
0,20	0,9615	0,1923	0,55	0,7678	0,4223	0,90	0,5525	0,4972
0,21	0,9578	0,2011	0,56	0,7613	0,4263	0,91	0,5470	0,4978
0,22	0,9538	0,2098	0,57	0,7548	0,4302	0,92	0,5416	0,4983
0,23	0,9498	0,2184	0,58	0,7483	0,4340	0,93	0,5362	0,4987
0,24	0,9455	0,2269	0,59	0,7418	0,4377	0,94	0,5309	0,4990
0,25	0,9412	0,2353	0,60	0,7353	0,4412	0,95	0,5256	0,4993
0,26	0,9367	0,2435	0,61	0,7288	0,4446	0,96	0,5204	0,4996
0,27	0,9321	0,2517	0,62	0,7223	0,4478	0,97	0,5152	0,4998
0,28	0,9273	0,2596	0,63	0,7159	0,4510	0,98	0,5101	0,4999
0,29	0,9224	0,2675	0,64	0,7094	0,4540	0,99	0,5050	0,5000
0,30	0,9174	0,2752	0,65	0,7030	0,4569	1,00	0,5000	0,5000
0,31	0,9123	0,2828	0,66	0,6966	0,4597			
0,32	0,9071	0,2903	0,67	0,6902	0,4624			
0,33	0,9018	0,2976	0,68	0,6838	0,4650			
0,34	0,8964	0,3048	0,69	0,6775	0,4674			

## 2. Квадратные корни

Таблица 2 позволяет находить величины (рис. 2)

$$\sqrt{1+ix} = \pm (u+iv), \quad \left. \begin{matrix} u^2 \\ v^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{1+x^2} \pm 1}{2},$$

$$\sqrt{x+i} = \pm (U+iV), \quad \left. \begin{matrix} U^2 \\ V^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sqrt{1+x^2} \pm x}{2}.$$

Положив  $x = \operatorname{sh} 2t$ , получим также

$$u = \operatorname{ch} t, \quad v = \operatorname{sh} t, \quad U = \sqrt{0,5} e^t, \quad V = \sqrt{0,5} e^{-t}.$$

В общем случае

$$0 < b < a: \quad x = \frac{b}{a}, \quad \left. \begin{matrix} \sqrt{a+ib} = \pm (u\sqrt{a} + iv\sqrt{a}), \\ \sqrt{-a+ib} = \pm (v\sqrt{a} + iu\sqrt{a}); \end{matrix} \right\}$$

$$0 < a < b: \quad x = \frac{a}{b}, \quad \left. \begin{matrix} \sqrt{a+ib} = \pm (U\sqrt{b} + iV\sqrt{b}), \\ \sqrt{-a+ib} = \pm (V\sqrt{b} + iU\sqrt{b}). \end{matrix} \right\}$$

Таблица 2. Квадратные корни из комплексных чисел

 $\sqrt{1+ix} = u+iv$ 
 $\sqrt{-1+ix} = v+iu$ 

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,0	1,00 0,0	00 000	00 050	00 100	01 150	02 200	03 250	04 300	06 350	08 400	10 450
0,1	1,00 0,0	12 499	15 549	18 599	21 649	24 698	28 748	32 798	36 847	40 896	45 946
0,2	1,00 0,0	49 995	54 *044	60 *093	65 *142	71 *192	77 *240	83 *289	89 *338	96 *387	*02 *435
0,3	1,01 0,1	09 484	17 532	24 580	32 629	40 677	48 724	56 772	64 820	73 868	82 915
0,4	1,0 0,1	191 963	200 *010	209 *057	219 *104	229 *151	239 *198	249 *244	259 *291	269 *337	280 *383
0,5	1,0 0,2	291 429	302 475	313 521	324 567	336 612	347 658	359 703	371 748	383 793	395 838
0,6	1,0 0,2	407 883	420 927	432 972	445 *016	458 *060	471 *104	484 *148	497 *192	510 *235	524 *278
0,7	1,0 0,3	537 322	551 365	565 408	579 450	593 493	607 536	621 578	635 620	649 662	664 704
0,8	1,0 0,3	678 746	693 787	708 829	723 870	738 911	753 952	768 993	783 *034	798 *075	814 *115
0,9	1,0 0,4	829 156	844 196	860 236	876 276	891 315	907 355	923 394	939 434	955 473	971 512

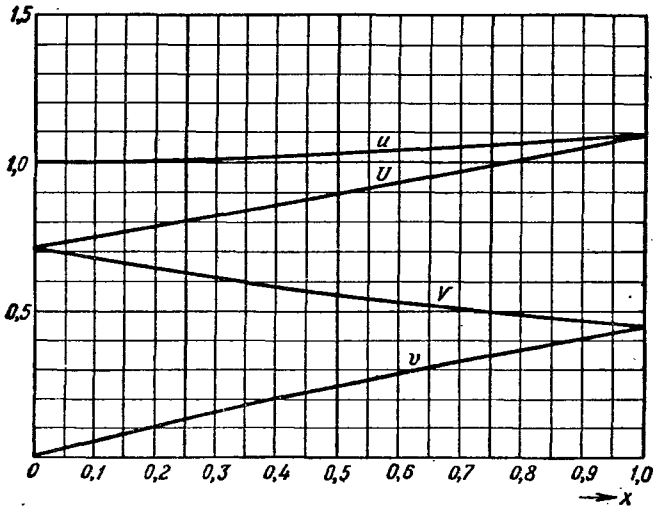


Рис. 2.  $\sqrt{1+ix} = \pm(u+iv)$ ,  $\sqrt{x+i} = \pm(U+iV)$ .

Продолжение табл. 2

$\sqrt{x+i} = U+iV$

$\sqrt{-x+i} = V+iU$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,7	071	107	142	178	214	250	286	323	359	396
	0,7	071	036	001	*966	*931	*897	*862	*828	*794	*760
0,1	0,7	433	470	507	545	582	620	657	695	733	771
	0,6	727	693	660	627	595	562	530	497	466	434
0,2	0,7	810	848	886	925	964	*002	*041	*080	*119	*158
	0,6	402	371	340	309	279	248	218	188	158	129
0,3	0,8	198	237	276	316	355	395	435	474	514	554
	0,6	099	070	041	013	*984	*956	*928	*900	*873	*845
0,4	0,8	594	634	674	714	754	794	834	874	914	954
	0,5	818	791	765	738	712	686	660	634	609	584
0,5	0,8	995	*035	*075	*115	*156	*196	*236	*276	*317	*357
	0,5	559	534	510	485	461	437	414	390	367	344
0,6	0,9	397	438	478	518	558	599	639	679	719	759
	0,5	321	298	275	253	231	209	187	166	144	123
0,7	0,9	800	840	880	920	960	*000	*040	*080	*120	*160
	0,5	102	081	061	040	020	000	*980	*960	*941	*921
0,8	1,0	200	239	279	319	359	398	438	477	517	556
	0,4	902	883	864	845	827	809	790	772	754	737
0,9	1,0	596	635	674	714	753	792	831	870	909	948
	0,4	719	701	684	667	650	633	616	600	583	567

3. Прямоугольные и полярные координаты

Таблица 3 позволяет находить величины (рис. 3)

$$1 + ix = me^{i\mu}, \quad x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \mu = x, \quad m = \sqrt{1 + x^2} = 1 + x \operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{1}{\cos \mu}$$

В общем случае пусть

$$\pm a + ib = re^{i\varrho}$$

Даны  $a, b$ ; определяются  $r, \varrho$ :

$$\begin{aligned} 0 < b < a: & \quad x = \frac{b}{a}, \quad r = am, \quad \left\{ \begin{array}{l} \varrho = \mu, \\ \varrho = 180^\circ - \mu; \end{array} \right. \\ 0 < a < b: & \quad x = \frac{a}{b}, \quad r = bm, \quad \varrho = 90^\circ \mp \mu. \end{aligned}$$

Даны  $r, \varrho$ ; определяются  $a, b$ :

$$\begin{aligned} 0 < \varrho < 45^\circ: & \quad \mu = \varrho, \\ 135^\circ < \varrho < 180^\circ: & \quad \mu = 180^\circ - \varrho, \\ 45^\circ < \varrho < 135^\circ: & \quad \mu = |90^\circ - \varrho|, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} a = \frac{r}{m}, \\ b = \frac{r}{m} x; \\ a = \frac{r}{m} x, \\ b = \frac{r}{m}. \end{array} \right\}$$

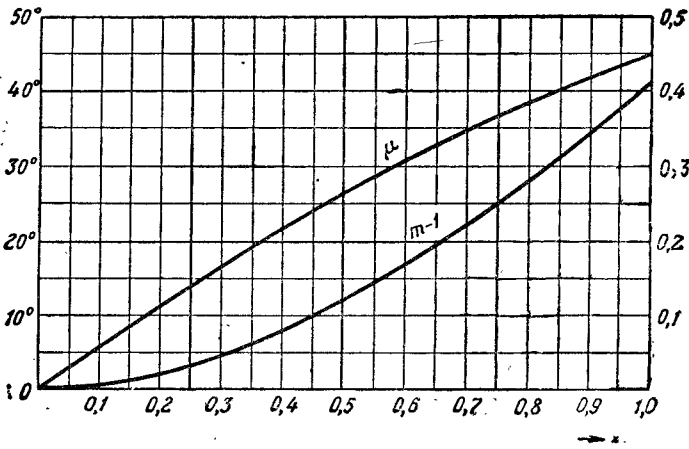


Рис. 3.  $1 + ix = me^{i\mu}, \quad x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}$

Таблица 3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

$$1 + ix = me^{i\mu}$$

$$x + i = me^{i(90^\circ - \mu)}$$

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0,00	1,0000 0,	000 0000°	005 0573°	020 1146°	045 1719°	080 2292°	125 2865°	180 3438°	245 4011°	320 4584°	405 5157°
1	1,000 0,	0500 5729°	0605 6302°	0720 6875°	0845 7448°	0980 8021°	1125 8594°	1280 9167°	1445 9740°	1620 *0312°	1805 *0885°
2	1,000 1,	2000 1458°	2205 2030°	2420 2603°	2645 3176°	2880 3748°	3124 4321°	3379 4894°	3644 5466°	3919 6039°	4204 6611°
0,03	1,000 1,	4499 7184°	4804 7756°	5119 8328°	5444 8901°	5778 9473°	6123 *0045°	6478 *0618°	6843 *1190°	7217 *1762°	7602 *2334°

Продолжение табл. 3

$$1+ix = me^{i\mu}$$

$$x+i = me^{i(90^\circ-\mu)}$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,04	1,000	7997	8401	8816	9241	9675	*0120	*0573	*1037	*1513	*1998
	2,	2906°	3478°	4050°	4622°	5194°	5766°	6337°	6909°	7481°	8052°
5	1,001	2492	2997	3511	4035	4569	5114	5668	6232	6806	7390
	2,	8624°	9196°	9767°	*0338°	*0910°	*1481°	*2052°	*2623°	*3194°	*3765°
6	1,001	7984	8588	9202	9825	*0459	*1103	*1756	*2420	*3093	*3777
	3,	4836°	4907°	5478°	6049°	6619°	7190°	7760°	8331°	8901°	9472°
7	1,002	4470	5173	5886	6610	7343	8086	8839	9601	*0374	*1156
	4,	0042°	0612°	1182°	1752°	2322°	2891°	3461°	4031°	4600°	5170°
8	1,003	1948	2751	3564	4386	5218	6060	6912	7774	8645	9527
	4,	5739°	6308°	6878°	7447°	8016°	8585°	9153°	9722°	*0291°	*0859°
9	1,004	0418	1320	2231	3152	4083	5024	5974	6935	7905	8886
	5,	1428°	1996°	2564°	3132°	3700°	4268°	4836°	5404°	5971°	6539°
0,1	1,0	0499	0603	0717	0841	0975	1119	1272	1435	1607	1789
	—	5,711°	6,277°	6,843°	7,407°	7,970°	8,531°	9,090°	9,648°	10,204°	10,758°
2	1,0	1980	2181	2391	2611	2840	3078	3325	3581	3846	4120
	10×1,	1310°	1860°	2407°	2953°	3496°	4036°	4574°	5110°	5642°	6172°
3	1,0	4403	4695	4995	5304	5622	5948	6283	6626	6977	7336
	10×1,	6699°	7223°	7745°	8263°	8778°	9290°	9799°	*0305°	*0807°	*1306°
4	1,0	7703	8079	8462	8853	9252	9659	*0073	*0494	*0923	*1360
	10×2,	1801°	2294°	2782°	3268°	3750°	4228°	4702°	5174°	5641°	6105°
5	1,1	1803	2254	2712	3177	3649	4127	4613	5105	5603	6108
	10×2,	6565°	7022°	7474°	7924°	8369°	8811°	9249°	9683°	*0114°	*0541°
6	1,1	6619	7137	7661	8190	8727	9269	9817	*0371	*0930	*1495
	10×3,	0964°	1383°	1799°	2211°	2619°	3024°	3425°	3822°	4216°	4606°
7	1,2	2066	2642	3224	3811	4403	5001	5603	6211	6823	7440
	10×3,	4992°	5375°	5754°	6129°	6501°	6870°	7235°	7596°	7954°	8309°
8	1,2	8063	8690	9322	9958	*0599	*1245	*1894	*2548	*3207	*3870
	10×3,	8660°	9008°	9352°	9693°	*0030°	*0365°	*0696°	*1023°	*1348°	*1669°
9	1,3	4537	5208	5882	6562	7242	7932	8623	9316	*0015	*0716
	10×4,	1987°	2302°	2614°	2923°	3229°	3531°	3831°	4128°	4421°	4712°

4. Сложение векторов

[Таблица 4 позволяет находить величины

$$1 + re^{i\frac{\pi}{2}\varrho} = se^{i\frac{\pi}{2}\sigma}, \quad r + e^{i\frac{\pi}{2}\varrho} = se^{i\frac{\pi}{2}(\varrho-\sigma)}$$

Очевидно, что

$$s = \sqrt{1 + r^2 + 2r \cos \varrho}, \quad \text{ctg } \sigma = \text{ctg } \varrho + \frac{1}{r \sin \varrho}$$

Если в общем случае надо сложить заданные векторы  $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha}$  и  $be^{i\frac{\pi}{2}\beta}$ ,

$0 < b < a$ , то их сумма  $ae^{i\frac{\pi}{2}\alpha} + be^{i\frac{\pi}{2}\beta} = ce^{i\frac{\pi}{2}\gamma}$  находится так: определим по таблице 4 величины  $s$  и  $\sigma$ , соответствующие

$$r = \frac{b}{a}, \quad \varrho = |\alpha - \beta|;$$

тогда

$$c = as, \quad \gamma = \begin{cases} \alpha + \sigma, & \text{если } \alpha < \beta, \\ \alpha - \sigma, & \text{если } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Таблица 4. Сложение векторов

s

$\alpha$	$r=0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,00	1,1000	1,2000	1,3000	1,4000	1,5000	1,6000	1,7000	1,8000	1,9000	2,0000
0,05	1,0997	1,1995	1,2993	1,3991	1,4990	1,5988	1,6987	1,7986	1,8985	1,9985
0,10	1,0989	1,1979	1,2972	1,3965	1,4959	1,5954	1,6949	1,7945	1,8942	1,9938
0,15	1,0977	1,1954	1,2936	1,3921	1,4908	1,5896	1,6886	1,7877	1,8869	1,9861
0,20	1,0955	1,1918	1,2887	1,3859	1,4836	1,5815	1,6797	1,7781	1,8767	1,9754
0,25	1,0931	1,1872	1,2823	1,3781	1,4744	1,5712	1,6684	1,7658	1,8636	1,9616
0,30	1,0900	1,1817	1,2746	1,3685	1,4632	1,5586	1,6545	1,7509	1,8477	1,9447
0,35	1,0865	1,1752	1,2655	1,3572	1,4500	1,5438	1,6382	1,7333	1,8289	1,9249
0,40	1,0825	1,1677	1,2552	1,3443	1,4349	1,5267	1,6195	1,7130	1,8073	1,9021
0,45	1,0780	1,1594	1,2435	1,3298	1,4179	1,5075	1,5983	1,6902	1,7829	1,8764
0,50	1,0730	1,1501	1,2306	1,3137	1,3990	1,4861	1,5748	1,6647	1,7558	1,8478
0,55	1,0677	1,1401	1,2164	1,2960	1,3782	1,4626	1,5489	1,6368	1,7260	1,8163
0,60	1,0619	1,1292	1,2011	1,2768	1,3556	1,4371	1,5208	1,6064	1,6935	1,7820
0,65	1,0557	1,1176	1,1847	1,2562	1,3314	1,4096	1,4905	1,5735	1,6585	1,7450
0,70	1,0492	1,1053	1,1672	1,2342	1,3054	1,3801	1,4579	1,5383	1,6209	1,7053
0,75	1,0424	1,0923	1,1487	1,2108	1,2778	1,3488	1,4233	1,5008	1,5808	1,6629
0,80	1,0353	1,0787	1,1293	1,1863	1,2486	1,3156	1,3866	1,4610	1,5383	1,6180
0,85	1,0280	1,0646	1,1091	1,1605	1,2180	1,2807	1,3479	1,4190	1,4934	1,5706
0,90	1,0204	1,0500	1,0881	1,1336	1,1859	1,2441	1,3073	1,3749	1,4462	1,5208
0,95	1,0128	1,0351	1,0663	1,1058	1,1526	1,2059	1,2648	1,3287	1,3969	1,4686
1,00	1,0050	1,0198	1,0440	1,0770	1,1180	1,1662	1,2207	1,2806	1,3454	1,4142
1,05	0,9972	1,0043	1,0212	1,0475	1,0824	1,1251	1,1748	1,2306	1,2918	1,3576
1,10	0,9893	0,9886	0,9981	1,0173	1,0457	1,0827	1,1274	1,1789	1,2363	1,2989
1,15	0,9815	0,9729	0,9746	0,9865	1,0082	1,0392	1,0785	1,1251	1,1789	1,2382
1,20	0,9738	0,9573	0,9511	0,9554	0,9700	0,9946	1,0283	1,0703	1,1197	1,1756
1,25	0,9662	0,9418	0,9276	0,9240	0,9313	0,9491	0,9769	1,0138	1,0589	1,1111
1,30	0,9588	0,9265	0,9042	0,8926	0,8922	0,9029	0,9243	0,9558	0,9964	1,0450
1,35	0,9516	0,9116	0,8812	0,8614	0,8529	0,8562	0,8709	0,8967	0,9325	0,9772
1,40	0,9447	0,8972	0,8587	0,8305	0,8138	0,8091	0,8168	0,8364	0,8672	0,9080
1,45	0,9381	0,8833	0,8369	0,8003	0,7750	0,7620	0,7621	0,7753	0,8006	0,8373
1,50	0,9320	0,8701	0,8159	0,7709	0,7363	0,7151	0,7071	0,7131	0,7329	0,7654
1,55	0,9262	0,8578	0,7951	0,7427	0,6997	0,6690	0,6523	0,6507	0,6643	0,6922
1,60	0,9210	0,8464	0,7776	0,7161	0,6641	0,6238	0,5978	0,5879	0,5948	0,6180
1,65	0,9162	0,8360	0,7605	0,6913	0,6304	0,5804	0,5443	0,5251	0,5246	0,5429
1,70	0,9120	0,8268	0,7452	0,6687	0,5992	0,5393	0,4925	0,4630	0,4541	0,4669
1,75	0,9084	0,8188	0,7319	0,6488	0,5711	0,5013	0,4434	0,4022	0,3834	0,3902
1,80	0,9054	0,8121	0,7207	0,6318	0,5468	0,4677	0,3981	0,3440	0,3132	0,3129
1,85	0,9031	0,8069	0,7117	0,6181	0,5269	0,4395	0,3587	0,2902	0,2444	0,2351
1,90	0,9014	0,8031	0,7053	0,6082	0,5122	0,4181	0,3275	0,2443	0,1793	0,1569
1,95	0,9003	0,8008	0,7013	0,6021	0,5031	0,4046	0,3071	0,2120	0,1247	0,0785
2,00	0,9000	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,0000



## II. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 1. Некоторые специальные тригонометрические функции

Таблицы 5, 6 позволяют находить значения часто встречающихся функций  $x \operatorname{tg} x$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  (рис. 4).

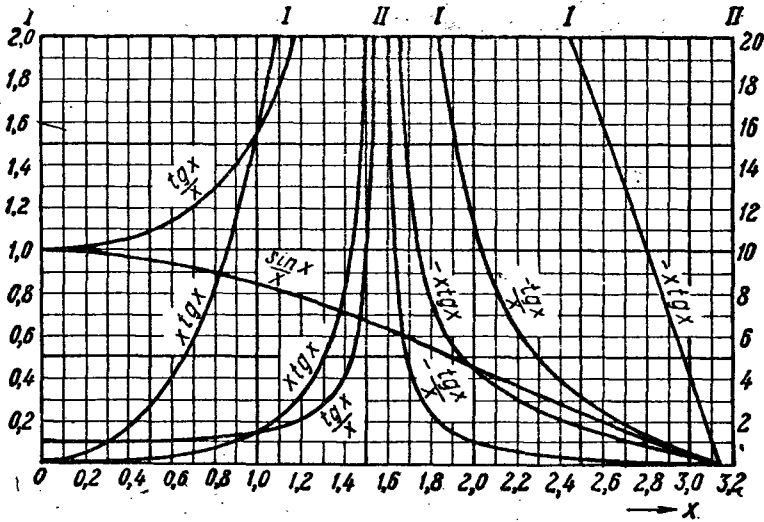


Рис. 4. Функции  $x \operatorname{tg} x$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$  и  $\frac{\sin x}{x}$ .

[Рис. 5, 6 дают представление о корнях трансцендентных уравнений  $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x = u$  и  $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x = v$ , а таблица 7 — об экстремальных точках функции  $\frac{\sin x}{x}$ .]

### 2. Элементарные трансцендентные уравнения

а)  $\operatorname{tg} x = x$  или  $\operatorname{tg} \xi = \frac{1}{x}$ , где  $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \xi = a - \xi$ .

Решение:  $x = a - \frac{1}{a} - \frac{2}{3a^3} - \frac{13}{15a^5} - \frac{146}{105a^7} - \dots$

б)  $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-x^2}$ :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 119,26 \cdot \frac{\pi}{180}$ ,  $x_3 = 340,35 \cdot \frac{\pi}{180}$ , ...

в)  $\operatorname{tg} x = \frac{x^2 - 9x}{4x^2 - 9}$ :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3,3422$ , ...



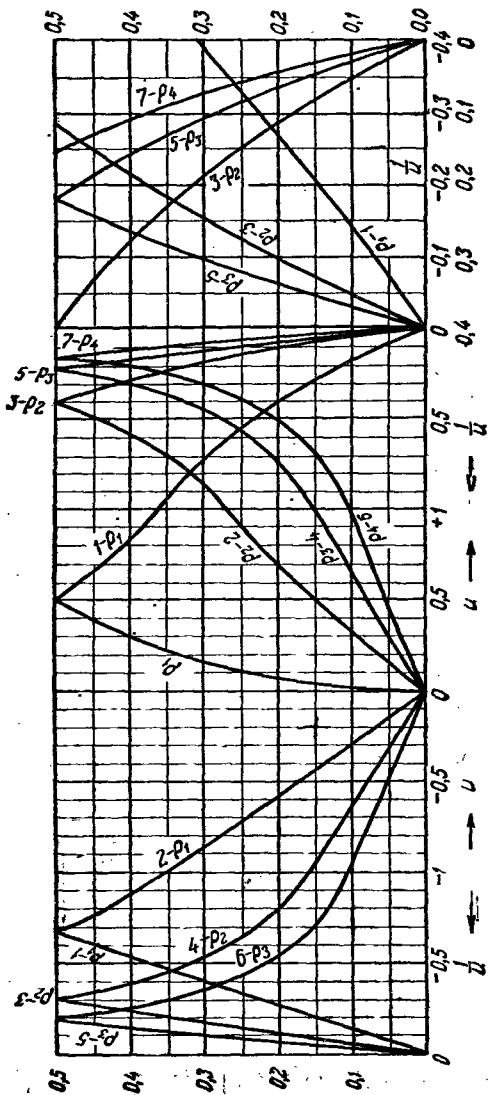


Рис. 5. Корни  $Q_n$  уравнения  $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x = u$  как функции  $u$ .

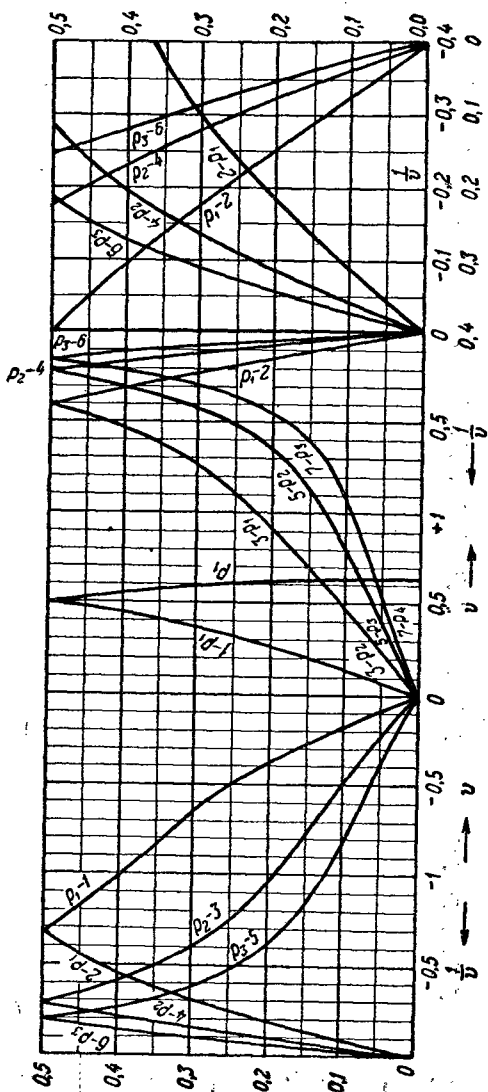


Рис. 6. Корни  $Q_n$  уравнения  $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x = v$  как функции  $v$ .

Таблица 5. Функции  $x \operatorname{tg} x$ ,  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$  и  $\frac{\sin x}{x}$ 

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
0,00	0	1	1	0,53	0,3105	1,1055	0,9538
0,01	0,0 <sup>3</sup> 10000	1,0000	1,0000	0,54	0,3237	1,1101	0,9521
0,02	0,0 <sup>3</sup> 4001	1,0001	0,9999	0,55	0,3372	1,1147	0,9503
0,03	0,0 <sup>3</sup> 9003	1,0003	0,9998	0,56	0,3511	1,1196	0,9485
0,04	0,0 <sup>3</sup> 16009	1,0005	0,9997	0,57	0,3654	1,1245	0,9467
0,05	0,0 <sup>3</sup> 2502	1,0008	0,9996	0,58	0,3800	1,1296	0,9449
0,06	0,0 <sup>3</sup> 3604	1,0012	0,9994	0,59	0,3950	1,1348	0,9430
0,07	0,0 <sup>3</sup> 4908	1,0016	0,9992	0,60	0,4105	1,1402	0,9411
0,08	0,0 <sup>3</sup> 6414	1,0021	0,9989	0,61	0,4263	1,1458	0,9391
0,09	0,0 <sup>3</sup> 8122	1,0027	0,9987	0,62	0,4426	1,1515	0,9372
0,10	0,010033	1,0033	0,9983	0,63	0,4593	1,1573	0,9352
0,11	0,012149	1,0041	0,9980	0,64	0,4765	1,1633	0,9331
0,12	0,014470	1,0048	0,9976	0,65	0,4941	1,1695	0,9311
0,13	0,016996	1,0057	0,9972	0,66	0,5122	1,1759	0,9290
0,14	0,01973	1,0066	0,9967	0,67	0,5308	1,1825	0,9268
0,15	0,02267	1,0076	0,9953	0,68	0,5499	1,1892	0,9247
0,16	0,02582	1,0086	0,9957	0,69	0,5695	1,1961	0,9225
0,17	0,02918	1,0097	0,9952	0,70	0,5896	1,2033	0,9203
0,18	0,03275	1,0109	0,9946	0,71	0,6103	1,2106	0,9181
0,19	0,03654	1,0122	0,9940	0,72	0,6315	1,2181	0,9158
0,20	0,04054	1,0136	0,9933	0,73	0,6533	1,2259	0,9135
0,21	0,04476	1,0150	0,9927	0,74	0,6757	1,2339	0,9112
0,22	0,04920	1,0165	0,9920	0,75	0,6987	1,2421	0,9089
0,23	0,05385	1,0180	0,9912	0,76	0,7223	1,2506	0,9065
0,24	0,05873	1,0197	0,9904	0,77	0,7466	1,2593	0,9041
0,25	0,06384	1,0214	0,9896	0,78	0,7716	1,2683	0,9016
0,26	0,06917	1,0232	0,9888	0,79	0,7973	1,2775	0,8992
0,27	0,07473	1,0250	0,9879	0,80	0,8237	1,2870	0,8967
0,28	0,08051	1,0270	0,9870	0,81	0,8509	1,2969	0,8942
0,29	0,08654	1,0290	0,9860	0,82	0,8788	1,3070	0,8916
0,30	0,09280	1,0311	0,9851	0,83	0,9075	1,3174	0,8891
0,31	0,09930	1,0333	0,9841	0,84	0,9371	1,3281	0,8865
0,32	0,10604	1,0356	0,9830	0,85	0,9676	1,3392	0,8839
0,33	0,11303	1,0380	0,9819	0,86	0,9989	1,3506	0,8812
0,34	0,12027	1,0404	0,9808	0,87	1,0312	1,3624	0,8785
0,35	0,12776	1,0429	0,9797	0,88	1,0645	1,3746	0,8758
0,36	0,13550	1,0456	0,9785	0,89	1,0988	1,3872	0,8731
0,37	0,14351	1,0483	0,9773	0,90	1,1341	1,4002	0,8704
0,38	0,15178	1,0511	0,9761	0,91	1,1706	1,4136	0,8676
0,39	0,16031	1,0540	0,9748	0,92	1,2082	1,4275	0,8648
0,40	0,16912	1,0570	0,9735	0,93	1,2470	1,4418	0,8620
0,41	0,1782	1,0601	0,9722	0,94	1,2871	1,4566	0,8591
0,42	0,1876	1,0633	0,9709	0,95	1,3285	1,4720	0,8562
0,43	0,1972	1,0666	0,9695	0,96	1,3712	1,4879	0,8533
0,44	0,2071	1,0700	0,9680	0,97	1,4154	1,5043	0,8504
0,45	0,2174	1,0735	0,9666	0,98	1,4611	1,5214	0,8474
0,46	0,2279	1,0771	0,9651	0,99	1,5084	1,5391	0,8445
0,47	0,2387	1,0808	0,9636	1,00	1,5574	1,5574	0,8415
0,48	0,2499	1,0846	0,9620	1,01	1,6081	1,5764	0,8384
0,49	0,2614	1,0885	0,9605	1,02	1,6607	1,5962	0,8354
0,50	0,2732	1,0926	0,9589	1,03	1,7152	1,6167	0,8323
0,51	0,2853	1,0968	0,9572	1,04	1,7718	1,6381	0,8292
0,52	0,2977	1,1011	0,9555	1,05	1,8305	1,6603	0,8261

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
1,06	1,891	1,6834	0,8230	$\frac{\pi}{2}$	$\infty$	$\infty$	0,6366
1,07	1,955	1,7075	0,8198				
1,08	2,021	1,7326	0,8166	1,58	-171,67	-68,77	0,6329
1,09	2,090	1,7588	0,8134	1,59	-82,79	-32,75	0,6288
1,10	2,161	1,7861	0,8102	1,60	-54,77	-21,40	0,6247
1,11	2,236	1,8147	0,8069	1,61	-41,05	-15,835	0,6206
1,12	2,314	1,845	0,8037	1,62	-32,90	-12,535	0,6165
1,13	2,395	1,876	0,8004	1,63	-27,50	-10,350	0,6124
1,14	2,481	1,909	0,7970	1,64	-23,66	-8,797	0,6083
1,15	2,570	1,943	0,7937	1,65	-20,79	-7,636	0,6042
1,16	2,663	1,979	0,7903	1,66	-18,56	-6,735	0,6000
1,17	2,761	2,017	0,7870	1,67	-16,779	-6,016	0,5959
1,18	2,864	2,057	0,7836	1,68	-15,323	-5,429	0,5917
1,19	2,973	2,099	0,7801	1,69	-14,110	-4,940	0,5875
1,20	3,087	2,143	0,7767	1,70	-13,084	-4,527	0,5833
1,21	3,207	2,190	0,7732	1,71	-12,205	-4,174	0,5791
1,22	3,334	2,240	0,7698	1,72	-11,442	-3,868	0,5749
1,23	3,468	2,293	0,7663	1,73	-10,775	-3,600	0,5707
1,24	3,611	2,348	0,7627	1,74	-10,185	-3,364	0,5665
1,25	3,762	2,408	0,7592	1,75	-9,661	-3,155	0,5623
1,26	3,923	2,471	0,7556	1,76	-9,191	-2,967	0,5580
1,27	4,094	2,538	0,7520	1,77	-8,768	-2,799	0,5538
1,28	4,277	2,610	0,7484	1,78	-8,384	-2,646	0,5495
1,29	4,473	2,688	0,7448	1,79	-8,035	-2,508	0,5453
1,30	4,683	2,771	0,7412	1,80	-7,715	-2,381	0,5410
1,31	4,909	2,860	0,7375	1,81	-7,422	-2,265	0,5368
1,32	5,152	2,957	0,7339	1,82	-7,151	-2,159	0,5325
1,33	5,416	3,062	0,7302	1,83	-6,901	-2,061	0,5282
1,34	5,703	3,176	0,7265	1,84	-6,669	-1,970	0,5239
1,35	6,015	3,300	0,7228	1,85	-6,453	-1,885	0,5196
1,36	6,356	3,436	0,7190	1,86	-6,251	-1,807	0,5153
1,37	6,731	3,586	0,7153	1,87	-6,062	-1,7336	0,5110
1,38	7,145	3,752	0,7115	1,88	-5,885	-1,6651	0,5067
1,39	7,604	3,936	0,7077	1,89	-5,719	-1,6009	0,5024
1,40	8,117	4,141	0,7039	1,90	-5,561	-1,5406	0,4981
1,41	8,693	4,373	0,7001	1,91	-5,413	-1,4838	0,4937
1,42	9,345	4,635	0,6962	1,92	-5,273	-1,4304	0,4894
1,43	10,089	4,934	0,6924	1,93	-5,140	-1,3799	0,4851
1,44	10,947	5,279	0,6885	1,94	-5,014	-1,3321	0,4807
1,45	11,945	5,681	0,6846	1,95	-4,893	-1,2869	0,4764
1,46	13,123	6,157	0,6807	1,96	-4,779	-1,2440	0,4720
1,47	14,534	6,726	0,6768	1,97	-4,670	-1,2033	0,4677
1,48	16,255	7,421	0,6729	1,98	-4,566	-1,1646	0,4634
1,49	18,40	8,288	0,6690	1,99	-4,466	-1,1277	0,4590
1,50	21,15	9,401	0,6650	2,00	-4,370	-1,0925	0,4546
1,51	24,81	10,880	0,6610	2,01	-4,278	-1,0590	0,4503
1,52	29,90	12,940	0,6570	2,02	-4,190	-1,0269	0,4459
1,53	37,48	16,012	0,6531	2,03	-4,106	-0,9963	0,4416
1,54	49,99	21,08	0,6490	2,04	-4,024	-0,9669	0,4372
1,55	74,52	31,02	0,6450	2,05	-3,945	-0,9388	0,4329
1,56	144,49	59,37	0,6410	2,06	-3,870	-0,9118	0,4285
1,57	1971,55	799,85	0,6369	2,07	-3,796	-0,8860	0,4241

Продолжение табл. 5

$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$	$\pm x$	$x \operatorname{tg} x$	$\frac{\operatorname{tg} x}{x}$	$\frac{\sin x}{x}$
2,08	-3,726	-0,8611	0,4198	2,62	-1,5057	-0,2193	0,1902
2,09	-3,657	-0,8372	0,4154	2,63	-1,4766	-0,2135	0,1861
				2,64	-1,4477	-0,2077	0,1821
2,10	-3,591	-0,8142	0,4111	2,65	-1,4189	-0,2021	0,17812
2,11	-3,526	-0,7921	0,4067	2,66	-1,3902	-0,1965	0,17413
2,12	-3,464	-0,7707	0,4023	2,67	-1,3616	-0,1910	0,17015
2,13	-3,403	-0,7502	0,3980	2,68	-1,3331	-0,1856	0,16618
2,14	-3,345	-0,7303	0,3936	2,69	-1,3047	-0,1803	0,16223
2,15	-3,287	-0,7112	0,3893	2,70	-1,2764	-0,17508	0,15829
2,16	-3,232	-0,6926	0,3849	2,71	-1,2481	-0,16994	0,15436
2,17	-3,177	-0,6747	0,3805	2,72	-1,2199	-0,16488	0,15045
2,18	-3,124	-0,6574	0,3762	2,73	-1,1917	-0,15990	0,14655
2,19	-3,073	-0,6407	0,3718	2,74	-1,1636	-0,15499	0,14266
2,20	-3,022	-0,6245	0,3675	2,75	-1,1355	-0,15015	0,13879
2,21	-2,973	-0,6088	0,3632	2,76	-1,1075	-0,14538	0,13493
2,22	-2,925	-0,5935	0,3588	2,77	-1,0795	-0,14069	0,13108
2,23	-2,878	-0,5787	0,3545	2,78	-1,0515	-0,13605	0,12725
2,24	-2,832	-0,5644	0,3501	2,79	-1,0235	-0,13148	0,12344
2,25	-2,787	-0,5505	0,3458	2,80	-0,9955	-0,12697	0,11964
2,26	-2,743	-0,5370	0,3415	2,81	-0,9675	-0,12253	0,11585
2,27	-2,699	-0,5239	0,3372	2,82	-0,9395	-0,11814	0,11208
2,28	-2,657	-0,5111	0,3328	2,83	-0,9115	-0,11381	0,10833
2,29	-2,615	-0,4987	0,3285	2,84	-0,8835	-0,10954	0,10459
2,30	-2,574	-0,4866	0,3242	2,85	-0,8554	-0,10532	0,10087
2,31	-2,534	-0,4749	0,3199	2,86	-0,8273	-0,10115	0,09716
2,32	-2,494	-0,4634	0,3156	2,87	-0,7992	-0,09703	0,09347
2,33	-2,455	-0,4523	0,3113	2,88	-0,7711	-0,09296	0,08980
2,34	-2,417	-0,4414	0,3070	2,89	-0,7428	-0,08894	0,08614
2,35	-2,379	-0,4308	0,3028	2,90	-0,7146	-0,08497	0,08250
2,36	-2,342	-0,4205	0,2985	2,91	-0,6862	-0,08104	0,07888
2,37	-2,305	-0,4104	0,2942	2,92	-0,6579	-0,07715	0,07527
2,38	-2,269	-0,4006	0,2899	2,93	-0,6294	-0,07331	0,07168
2,39	-2,234	-0,3910	0,2857	2,94	-0,6008	-0,06951	0,06811
2,40	-2,198	-0,3817	0,2814	2,95	-0,5722	-0,06575	0,06455
2,41	-2,164	-0,3725	0,2772	2,96	-0,5435	-0,06203	0,06101
2,42	-2,129	-0,3636	0,2730	2,97	-0,5147	-0,05835	0,05749
2,43	-2,095	-0,3549	0,2687	2,98	-0,4858	-0,05470	0,05399
2,44	-2,062	-0,3463	0,2645	2,99	-0,4568	-0,05109	0,05051
2,45	-2,029	-0,3380	0,2603	3,00	-0,4276	-0,04752	0,04704
2,46	-1,996	-0,3298	0,2561	3,01	-0,3984	-0,04397	0,04359
2,47	-1,963	-0,3218	0,2519	3,02	-0,3690	-0,04046	0,04016
2,48	-1,931	-0,3140	0,2477	3,03	-0,3395	-0,03698	0,03675
2,49	-1,899	-0,3063	0,2436	3,04	-0,3099	-0,03353	0,03336
2,50	-1,868	-0,2988	0,2394	3,05	-0,2801	-0,03011	0,02999
2,51	-1,836	-0,2915	0,2352	3,06	-0,2502	-0,02672	0,02663
2,52	-1,8051	-0,2843	0,2311	3,07	-0,2202	-0,02336	0,02330
2,53	-1,7743	-0,2772	0,2269	3,08	-0,1899	-0,02002	0,01998
2,54	-1,7437	-0,2703	0,2228	3,09	-0,15956	-0,016711	0,016689
2,55	-1,7133	-0,2635	0,2187	3,10	-0,12901	-0,013425	0,013413
2,56	-1,6831	-0,2568	0,2146	3,11	-0,09829	-0,010162	0,010157
2,57	-1,6531	-0,2503	0,2105	3,12	-0,06738	-0,006922	0,006920
2,58	-1,6233	-0,2439	0,2064	3,13	-0,03629	-0,003704	0,003704
2,59	-1,5936	-0,2376	0,2023	3,14	-0,0°5072	-0,0°5072	0,0°5072
2,60	-1,5642	-0,2314	0,1983	$\pi$	0	0	0
2,61	-1,5348	-0,2253	0,1942				

Таблица 6. Функции  $x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$  и  $x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$ 

$x$	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$	$x$	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$	$x$	$x \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$	$x \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} x$
0,0	0,000000	0,6366	3,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	6,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$
0,1	0,015838	0,6314	3,1	-19,573	-0,4910	6,1	+0,9861	+38,51
0,2	0,06498	0,6155	3,2	-9,849	-1,0397	6,2	2,0145	19,082
0,3	0,15286	0,5888	3,3	-6,477	-1,6814	6,3	3,210	12,364
0,4	0,2906	0,5506	3,4	-4,680	-2,470	6,4	4,650	8,839
0,5	0,5000	0,5000	3,5	-3,500	-3,500	6,5	6,500	6,500
0,6	0,8258	0,4359	3,6	-2,616	-4,955	6,6	9,084	4,795
0,7	1,3738	0,3567	3,7	-1,8852	-7,262	6,7	13,149	3,414
0,8	2,462	0,2599	3,8	-1,2347	-11,695	6,8	20,93	2,209
0,9	5,682	0,14255	3,9	-0,6177	-24,62	6,9	43,56	1,0928
1,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	4,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	7,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$
1,1	-6,945	-0,17422	4,1	+0,6494	+25,89	7,1	-44,83	-1,1245
1,2	-3,693	-0,3899	4,2	1,3647	12,926	7,2	-22,159	-2,3394
1,3	-2,551	-0,6624	4,3	2,191	8,439	7,3	-14,327	-3,720
1,4	-1,9269	-1,0172	4,4	3,197	6,056	7,4	-10,185	-5,376
1,5	-1,5000	-1,5000	4,5	4,500	4,500	7,5	-7,500	-7,500
1,6	-1,1625	-2,202	4,6	6,331	3,342	7,6	-5,522	-10,461
1,7	-0,8662	-3,336	4,7	9,224	2,395	7,7	-3,923	-15,112
1,8	-0,5849	-5,540	4,8	14,773	1,5596	7,8	-2,5344	-24,006
1,9	-0,3009	-11,996	4,9	30,94	0,7761	7,9	-1,2512	-49,879
2,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	5,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	8,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$
2,1	0,3326	+13,259	5,1	-32,20	-0,8078	8,1	+1,2839	+51,14
2,2	0,7148	6,771	5,2	-16,004	-1,6896	8,2	2,6643	25,237
2,3	1,1719	4,514	5,3	-10,402	-2,700	8,3	4,229	16,290
2,4	1,7437	3,303	5,4	-7,432	-3,923	8,4	6,103	11,562
2,5	2,5000	2,500	5,5	-5,500	-5,500	8,5	8,500	8,500
2,6	3,579	1,8890	5,6	-4,069	-7,708	8,6	11,837	6,248
2,7	5,299	1,3757	5,7	-2,904	-11,187	8,7	17,075	4,433
2,8	8,617	0,9098	5,8	-1,8845	-17,851	8,8	27,084	2,8593
2,9	18,310	0,4593	5,9	-0,9345	-37,25	8,9	56,19	1,4096
3,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$	6,0	$\mp 0,0000$	$\mp \infty$	9,0	$\pm \infty$	$\pm 0,0000$

Таблица 7. Экстремумы функции  $\frac{\sin x}{x}$ 

$n$	$x_n$	$\max$ $\min \left( \frac{\sin x}{x} \right)$	$n$	$x_n$	$\max$ $\min \left( \frac{\sin x}{x} \right)$
1	0	1	9	26,6661	+0,0375
2	4,4934	-0,2172	10	29,8116	-0,0335
3	7,7253	+0,1284	11	32,9554	+0,0303
4	10,9041	-0,0913	12	36,1006	-0,0277
5	14,0662	+0,0709	13	39,2444	+0,0255
6	17,2208	-0,0580	14	42,3879	-0,0236
7	20,3713	+0,0490	15	45,5311	+0,0220
8	23,5195	-0,0425	16	48,6741	-0,0205
			17	51,8170	+0,0193

### III. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

#### 1. Определения

$$\operatorname{sh} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v+1}}{(2v+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v}}{(2v)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots \left( |x| < \frac{\pi}{2} \right), \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x};$$

$$\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots \left( |x| < 1 \right), \quad \operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\operatorname{Arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \left( |x| < 1 \right).$$

Графики функций см. на рис. 7.

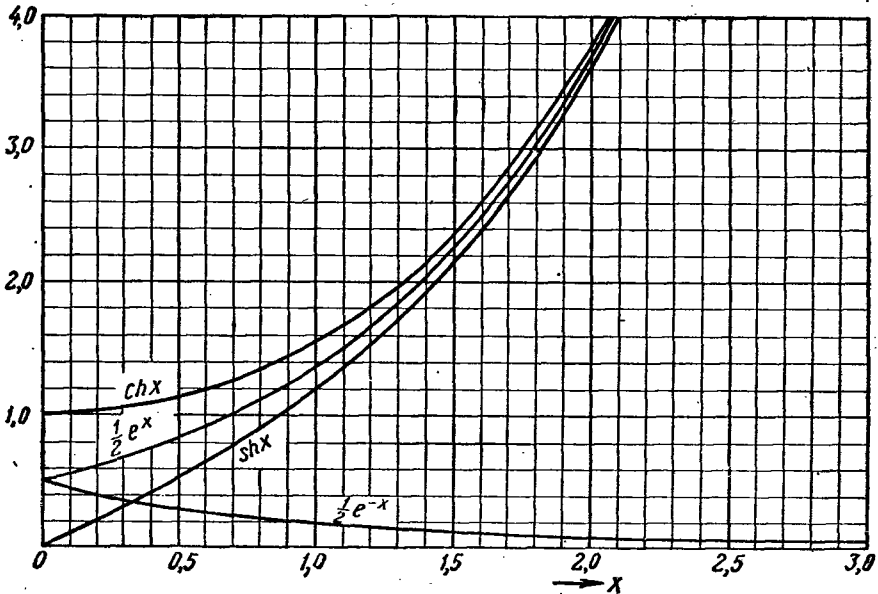


Рис. 7. Показательная функция, гиперболические синус и косинус.

#### 2. Частные значения

$$\operatorname{sh} 0 = 0, \quad \operatorname{ch} 0 = 1, \quad \operatorname{th} 0 = 0, \quad \operatorname{sh} \infty = \infty, \quad \operatorname{ch} \infty = \infty, \quad \operatorname{th} \infty = 1.$$

Другие значения приведены ниже в таблице 8.

## 3. Основные соотношения

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad (\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx.$$

## 4. Представление одной функции через другие

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}, \quad \operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}, \quad \frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x};$$

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2 + 1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = 2 \operatorname{Arch} \sqrt{\frac{x+1}{2}} = 2 \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{x-1}{2}},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{Arsh} \frac{2x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arch} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Arth} \frac{2x}{1+x^2}.$$

## 5. Формулы сложения

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y};$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}, \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y};$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y), \quad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y),$$

$$2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y), \quad 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y = \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y);$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}(x \sqrt{1+y^2} \pm y \sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy};$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}),$$

$$A \operatorname{ch} x + B \operatorname{sh} x = \sqrt{A^2 - B^2} \operatorname{ch}\left(x + \operatorname{Arth} \frac{B}{A}\right) = \sqrt{B^2 - A^2} \operatorname{sh}\left(x + \operatorname{Arth} \frac{A}{B}\right).$$

## 6. Функции кратных аргументов

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{sh} 3x = 4 \operatorname{sh}^3 x + 3 \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x (4 \operatorname{ch}^2 x - 1),$$

$$\operatorname{sh}(n+1)x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} nx - \operatorname{sh}(n-1)x,$$

$$\operatorname{sh} nx = n \operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x + \binom{n}{3} \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^{n-3} x + \binom{n}{5} \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^{n-5} x + \dots;$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \frac{1 + \operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{ch} 3x = 4 \operatorname{ch}^3 x - 3 \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x (4 \operatorname{sh}^2 x + 1),$$

$$\operatorname{ch}(n+1)x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{ch} nx - \operatorname{ch}(n-1)x,$$

$$\operatorname{ch} nx = \operatorname{ch}^n x + \binom{n}{2} \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^{n-2} x + \binom{n}{4} \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^{n-4} x + \dots;$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{th} 3x = \frac{\operatorname{th}^3 x + 3 \operatorname{th} x}{3 \operatorname{th}^2 x + 1}, \quad 2 \operatorname{cth} 2x = \operatorname{th} x + \operatorname{cth} x,$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}.$$

## 7. Степени

$$\begin{aligned}
 2 \operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{ch} 2x - 1, & 4 \operatorname{sh}^3 x &= \operatorname{sh} 3x - 3 \operatorname{sh} x, & 8 \operatorname{sh}^4 x &= \operatorname{ch} 4x - 4 \operatorname{ch} 2x + 3, \\
 16 \operatorname{sh}^5 x &= \operatorname{sh} 5x - 5 \operatorname{sh} 3x + 10 \operatorname{sh} x, \\
 32 \operatorname{sh}^6 x &= \operatorname{ch} 6x - 6 \operatorname{ch} 4x + 15 \operatorname{ch} 2x - 10, \\
 64 \operatorname{sh}^7 x &= \operatorname{sh} 7x - 7 \operatorname{sh} 5x + 21 \operatorname{sh} 3x - 35 \operatorname{sh} x, \\
 128 \operatorname{sh}^8 x &= \operatorname{ch} 8x - 8 \operatorname{ch} 6x + 28 \operatorname{ch} 4x - 56 \operatorname{ch} 2x + 35; \\
 2 \operatorname{ch}^2 x &= \operatorname{ch} 2x + 1, & 4 \operatorname{ch}^3 x &= \operatorname{ch} 3x + 3 \operatorname{ch} x, & 8 \operatorname{ch}^4 x &= \operatorname{ch} 4x + 4 \operatorname{ch} 2x + 3, \\
 16 \operatorname{ch}^5 x &= \operatorname{ch} 5x + 5 \operatorname{ch} 3x + 10 \operatorname{ch} x, \\
 32 \operatorname{ch}^6 x &= \operatorname{ch} 6x + 6 \operatorname{ch} 4x + 15 \operatorname{ch} 2x + 10, \\
 64 \operatorname{ch}^7 x &= \operatorname{ch} 7x + 7 \operatorname{ch} 5x + 21 \operatorname{ch} 3x + 35 \operatorname{ch} x, \\
 128 \operatorname{ch}^8 x &= \operatorname{ch} 8x + 8 \operatorname{ch} 6x + 28 \operatorname{ch} 4x + 56 \operatorname{ch} 2x + 35.
 \end{aligned}$$

## 8. Связь с показательными функциями и логарифмами

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, & \operatorname{th} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \\
 \operatorname{th} x &= 1 - \frac{e^{-x}}{\operatorname{ch} x}, & \operatorname{cth} x &= 1 + \frac{e^{-x}}{\operatorname{sh} x}; \\
 e^x &= \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2} + \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1 + \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{th} \frac{x}{2}}, & e^{-x} &= \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{2} - \operatorname{sh} \frac{x}{2}}{\operatorname{ch} \frac{x}{2} + \operatorname{sh} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{th} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{th} \frac{x}{2}};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Arsh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x), \\
 \operatorname{Arch} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), \\
 \operatorname{Arth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, & \operatorname{Arth} \frac{1}{x} &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}; \\
 \ln x &= \operatorname{Arsh} \frac{x^2 - 1}{2x} = \operatorname{Arch} \frac{x^2 + 1}{2x} = \operatorname{Arth} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

## 9. Формулы дифференцирования и интегрирования

$$\begin{aligned}
 d \operatorname{sh} x &= \operatorname{ch} x dx, & d \operatorname{ch} x &= \operatorname{sh} x dx, & d \operatorname{th} x &= \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}; \\
 d \operatorname{Arsh} x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, & d \operatorname{Arch} x &= \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\
 d \operatorname{Arth} x &= \frac{dx}{1 - x^2} \quad (|x| < 1), & d \operatorname{Arcth} x &= \frac{-dx}{x^2 - 1} \quad (|x| > 1). \\
 \int \operatorname{sh} x dx &= \operatorname{ch} x, & \int \operatorname{ch} x dx &= \operatorname{sh} x, & \int \operatorname{th} x dx &= \ln \operatorname{ch} x, \\
 \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} &= \ln \operatorname{th} \frac{x}{2}, & \int \frac{dx}{\operatorname{th} x} &= \ln \operatorname{sh} x, & \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \operatorname{arcsin} \operatorname{th} x = \operatorname{amph} x, \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \operatorname{Arsh} x, & \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} &= \operatorname{Arch} x, & \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= -\operatorname{Arcth} x \quad (x > 1), \\
 \int \frac{dx}{1 - x^2} &= \operatorname{Arth} x \quad (x < 1), & \int \frac{dx}{x \sqrt{1 + x^2}} &= -\operatorname{Arsh} \frac{1}{x}, & \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - x^2}} &= -\operatorname{Arch} \frac{1}{x}, \\
 \int \operatorname{sh}^n x dx &= \frac{\operatorname{sh}^{n-1} x \operatorname{ch} x}{n} - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} x dx, \\
 \int \operatorname{ch}^n x dx &= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} x dx, \\
 \int \operatorname{th}^n x dx &= -\frac{\operatorname{th}^{n-1} x}{n-1} + \int \operatorname{th}^{n-2} x dx \quad (n \geq 2),
 \end{aligned}$$



$$\int \frac{dx}{\text{sh}^n x} = \frac{\text{ch } x}{(n-1) \text{sh}^{n-1} x} \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\text{sh}^{n-2} x} \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{\text{ch}^n x} = \frac{\text{sh } x}{(n-1) \text{ch}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\text{ch}^{n-2} x} \quad (n \geq 2),$$

$$\int \frac{dx}{\text{th}^n x} = -\frac{1}{(n-1) \text{th}^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\text{th}^{n-2} x} \quad (n \geq 2);$$

$$\int \text{Arsh } x \, dx = x \text{Arsh } x - \sqrt{x^2 + 1},$$

$$\int \text{Arch } x \, dx = x \text{Arch } x - \sqrt{x^2 - 1},$$

$$\int \text{Arth } x \, dx = x \text{Arth } x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2).$$

### 10. Представления при малых значениях аргументов

$$\frac{\text{sh } x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{6} \approx \sqrt[3]{\text{ch } x}, \quad \text{ch } x \approx 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \frac{\text{th } x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3} \approx \frac{2}{\sqrt[3]{\text{ch}^2 x}};$$

$$\text{ch } x + \cos y \approx 2, \quad \text{sh } x + \sin y \approx x + y, \quad \frac{\text{sh } x}{x} - \frac{\sin y}{y} \approx \frac{x^2 + y^2}{6},$$

$$\text{ch } x - \cos y \approx \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \text{sh } x - \sin y \approx \frac{x^3}{3};$$

$$\frac{\text{Arsh } x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}, \quad \frac{\text{Arth } x}{x} \approx 1 + \frac{x^2}{3}, \quad \text{Arch } x \approx \sqrt{2(x-1)},$$

$$\text{Arch}(1+x) = \sqrt{2x} - \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{3x^2}{80} \sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{5x^3}{448} \sqrt{\frac{x}{2}} + \dots$$

### 11. Асимптотика при больших значениях аргументов

$$\text{sh } x \approx \text{ch } x \approx \frac{1}{2} e^x, \quad \text{th } x \approx 1 - 2e^{-2x}; \quad \lg(2 \text{sh } x) \approx \lg(2 \text{ch } x) \approx x \lg e;$$

$$\text{Arsh } x \approx \ln(2x) + \frac{1}{(2x)^2}, \quad \text{Arch } x \approx \ln(2x) - \frac{1}{(2x)^2}, \quad \text{Arth}(1-x) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{2}{x} - \frac{x}{4}.$$

### 12. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)

Гудерманиан определяется равенством (рис. 8, таблица 8)

$$\gamma = \int_0^x \frac{dt}{\text{ch } t} = 2 \text{arctg } e^x - \frac{\pi}{2} \equiv \text{amph } x \equiv \text{gd } x.$$

$$x = \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \ln \text{tg} \left( \frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \ln 10 \cdot \lg \text{tg} \left( \frac{\gamma}{2} + 45^\circ \right);$$

$$\text{sh } x = \text{tg } \gamma, \quad \text{ch } x = \frac{1}{\cos \gamma}, \quad \text{th } x = \sin \gamma, \quad e^x = \frac{1 + \text{tg } \frac{\gamma}{2}}{1 - \text{tg } \frac{\gamma}{2}}, \quad \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \text{th } \frac{x}{2};$$

$$\frac{\pi}{2} - \gamma = \frac{1}{\text{ch } x} + \frac{1}{6 \text{ch}^3 x} + \dots, \quad \frac{\gamma}{2} = \text{th } \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \text{th}^3 \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \text{th}^5 \frac{x}{2} - \dots,$$

$$\frac{x}{2} = \text{tg } \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3} \text{tg}^3 \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{5} \text{tg}^5 \frac{\gamma}{2} + \dots,$$

$$\gamma = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{24} - \frac{61x^7}{5040} + \dots, \quad x = \gamma + \frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^5}{24} + \frac{61\gamma^7}{5040} + \dots \quad \left( \gamma < \frac{\pi}{2} \right);$$

$$d \text{amph } x = d \text{gd } x = \frac{dx}{\text{ch } x}.$$

Если  $\gamma = \operatorname{amph} x$ , то  $ix = \operatorname{amph} iy$ . Если положить

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad x = x_1 + ix_2,$$

то получим

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{\operatorname{sh} x_1}{\cos x_2}, \quad \operatorname{th} x_1 = \frac{\sin \gamma_1}{\operatorname{ch} \gamma_2}, \quad \operatorname{th} \gamma_2 = \frac{\sin x_2}{\operatorname{ch} x_1}, \quad \operatorname{tg} x_2 = \frac{\operatorname{sh} \gamma_2}{\cos \gamma_1}.$$

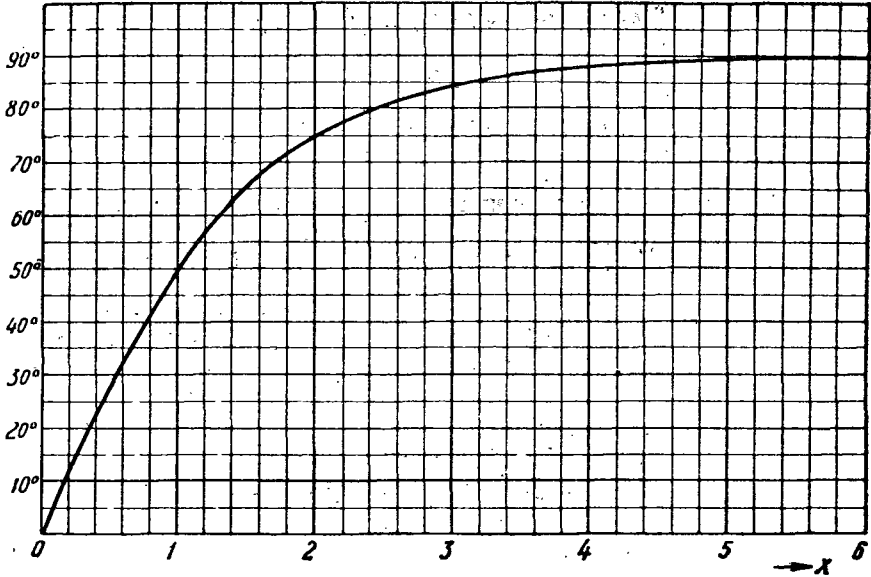


Рис. 8. Гиперболическая амплитуда (гудерманиан)  $\operatorname{amph} x = \operatorname{gd} x$ .

Таблица 8. Показательные и гиперболические функции

$x$	$\frac{\pi}{2} x$ $e^{\frac{\pi}{2} x}$	$-\frac{\pi}{2} x$ $e^{-\frac{\pi}{2} x}$	$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{th} \frac{\pi}{2} x$	$\operatorname{cth} \frac{\pi}{2} x$	$\frac{2}{\pi} \operatorname{amph} \frac{\pi}{2} x$
0,0	1,0000	1,0000	0,00000	1,0000	0,00000	$\infty$	0,00000
0,1	1,1701	0,8546	0,15773	1,0124	0,15580	6,418	0,09959
0,2	1,3691	0,7304	0,3194	1,0498	0,3042	3,287	19679
0,3	1,6020	0,6242	0,4889	1,1131	0,4392	2,2769	2895
0,4	1,8745	0,5335	0,6705	1,2040	0,5569	1,7957	3760
0,5	2,1933	0,4559	0,8687	1,3246	0,6558	1,5249	4553
0,6	2,5663	0,3897	1,0883	1,4780	0,7364	1,3580	5269
0,7	3,003	0,3330	1,3349	1,6679	0,8003	1,2495	5907
0,8	3,514	0,2846	1,6145	1,8991	501	1,1763	6470
0,9	4,111	0,24324	1,9340	2,1772	883	1,1258	6898
1,0	4,811	0,2088	2,3013	2,5092	0,9172	1,0903	7390
1,1	5,629	0,17766	2,726	2,903	388	652	7761
1,2	6,586	0,15184	3,217	3,369	549	472	0,8081
1,3	7,706	0,12976	3,788	3,918	669	343	357
1,4	9,017	0,11090	4,453	4,564	757	249	594
1,5	10,551	0,09478	5,228	5,323	822	181	797
1,6	12,345	0,08100	6,132	6,213	870	132	971
1,7	14,445	0,06923	7,188	7,257	905	1,0096	0,9120
1,8	16,902	0,05916	8,421	8,481	930	70	248
1,9	19,777	0,05056	9,863	9,914	949	51	357
2,0	23,141	0,04321	11,549	11,592	963	37	450

## 13. Некоторые трансцендентные уравнения

а)  $x \operatorname{th} x = 1$  или  $c \operatorname{th} x = x$ :  $x = 1,199\,678 \dots$

б) а)  $\operatorname{th} x = -\operatorname{ctg} x$ , или  $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{i}$  ( $c$  — вещественное), или  $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$ , где  $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$ , или  $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$ , или \*)  $\operatorname{gd} 2x = (2n-1)\pi \pm 2x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ :

$$x_0 = 0,93755, \quad x_1 = 2,3470, \quad x_2 = 5,4978, \dots$$

б)  $\operatorname{th} x = -\operatorname{tg} x$ , или  $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{-i}$  ( $s$  — действительное), или  $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$ , где  $x = \left(n - \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$ , или  $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$ :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 2,3650, \quad x_2 = 5,4978, \dots$$

с)  $\operatorname{th} x = \operatorname{tg} x$ , или  $\sin(x\sqrt{2i}) = s\sqrt{i}$  ( $s$  — действительное), или  $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$ , где  $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi - \xi$ , или  $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = +1$ :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 3,9266, \quad x_2 = 7,0686, \dots$$

д)  $\operatorname{th} x = \operatorname{ctg} x$  или  $\cos(x\sqrt{2i}) = c\sqrt{-i}$  ( $c$  — действительное), или  $\operatorname{tg} \xi = e^{-2x}$ , где  $x = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi + \xi$ , или  $\cos 2x \operatorname{ch} 2x = -1$ :

$$x_0 = 0,9375, \quad x_1 = 3,9274, \quad x_2 = 7,0686, \dots$$

е) Общее для этих четырех случаев уравнение:

$$\cos 2x \operatorname{ch} 2x = \pm 1;$$

его решения:

$$x_{n+1} = \left(n + 1 \pm \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} + (-1)^n \xi_n,$$

где

$$\xi_n = \frac{1}{a} \pm (-1)^n \frac{2}{a^2} + \frac{17}{3a^3} \pm (-1)^n \frac{56}{3a^4} + \dots, \quad a = e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

[Для вычисления величин  $\left(n \pm \frac{1}{4}\right)\pi$  и  $\frac{1}{a} = e^{-\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}$  может быть использована таблица 9.]

Таблица 9. Некоторые вспомогательные величины

$n$	$\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi$	$\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$	$\frac{1}{a}$
0	—	0,785 398	0,207 880
1	2,356 195	3,926 991	0,898 329 (—2)
2	5,497 787	7,068 534	0,388 203 (—3)
3	8,639 380	10,210 176	0,167 758 (—4)
4	11,780 973	13,351 769	0,724 947 (—6)

\*) Исправления внесены по книге Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 196, стр. 46. — Прим. ред.

#### IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

$$z = x + iy = re^{i\sigma}$$

##### 1. Синус, косинус

$$\sin z = se^{i\sigma} = u + iv \quad (\text{рис. 9, 10, 11; таблица 10}),$$

$$\cos z = ce^{i\gamma} = u_1 + iv_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm z\right);$$

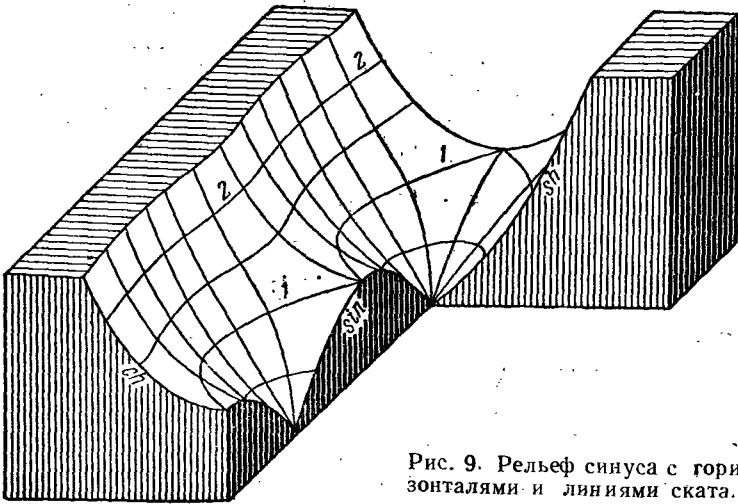


Рис. 9. Рельеф синуса с горизонтальными и линиями ската.

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y, \quad u_1 = \cos x \operatorname{ch} y, \quad v_1 = -\sin x \operatorname{sh} y;$$

$$s^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad c^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y, \quad 2s^2 = \operatorname{ch} 2y - \cos 2x, \quad 2c^2 = \operatorname{ch} 2y + \cos 2x,$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \operatorname{ctg} x \operatorname{th} y, \quad \operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{tg} x \operatorname{th} y.$$

Для  $r \ll 1$  имеем:

$$s = r - \frac{r^2}{6} \cos 2\sigma + \frac{r^4}{144} \left(1 + \frac{1}{5} \cos 4\sigma\right) - \dots, \quad \sigma = \sigma - \frac{r^2}{6} \sin 2\sigma - \frac{r^4}{180} \sin 4\sigma - \dots,$$

$$c = 1 - \frac{r^2}{2} \cos 2\sigma + \frac{r^4}{16} \left(1 - \frac{1}{3} \cos 4\sigma\right) - \dots, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{r^2}{2} \sin 2\sigma - \frac{r^4}{12} \sin 4\sigma - \dots;$$

для  $y \gg 1$

$$s = 0,5e^y - 0,5e^{-y} \cos 2x + 0,125e^{-2y} (1 - \cos 4x) - \dots,$$

$$\sigma = \pi/2 - x - e^{-2y} \sin 2x - 0,5e^{-4y} \sin 4x - \dots,$$

$$c = 0,5e^y + 0,5e^{-y} \cos 2x + 0,125e^{-2y} (1 - \cos 4x) + \dots,$$

$$\gamma = -x + e^{-2y} \sin 2x - 0,5e^{-4y} \sin 4x + \dots$$

Между  $s$ ,  $\sigma$ ,  $c$  и  $\gamma$  существуют соотношения

$$s^2 \cos 2\sigma + c^2 \cos 2\gamma = 1, \quad \operatorname{ctg} 2\sigma + \operatorname{ctg} (\frac{\pi}{2} - 2\gamma) = \frac{1}{s^2 \sin 2\sigma} = \frac{1}{c^2 \sin (\frac{\pi}{2} - 2\gamma)},$$

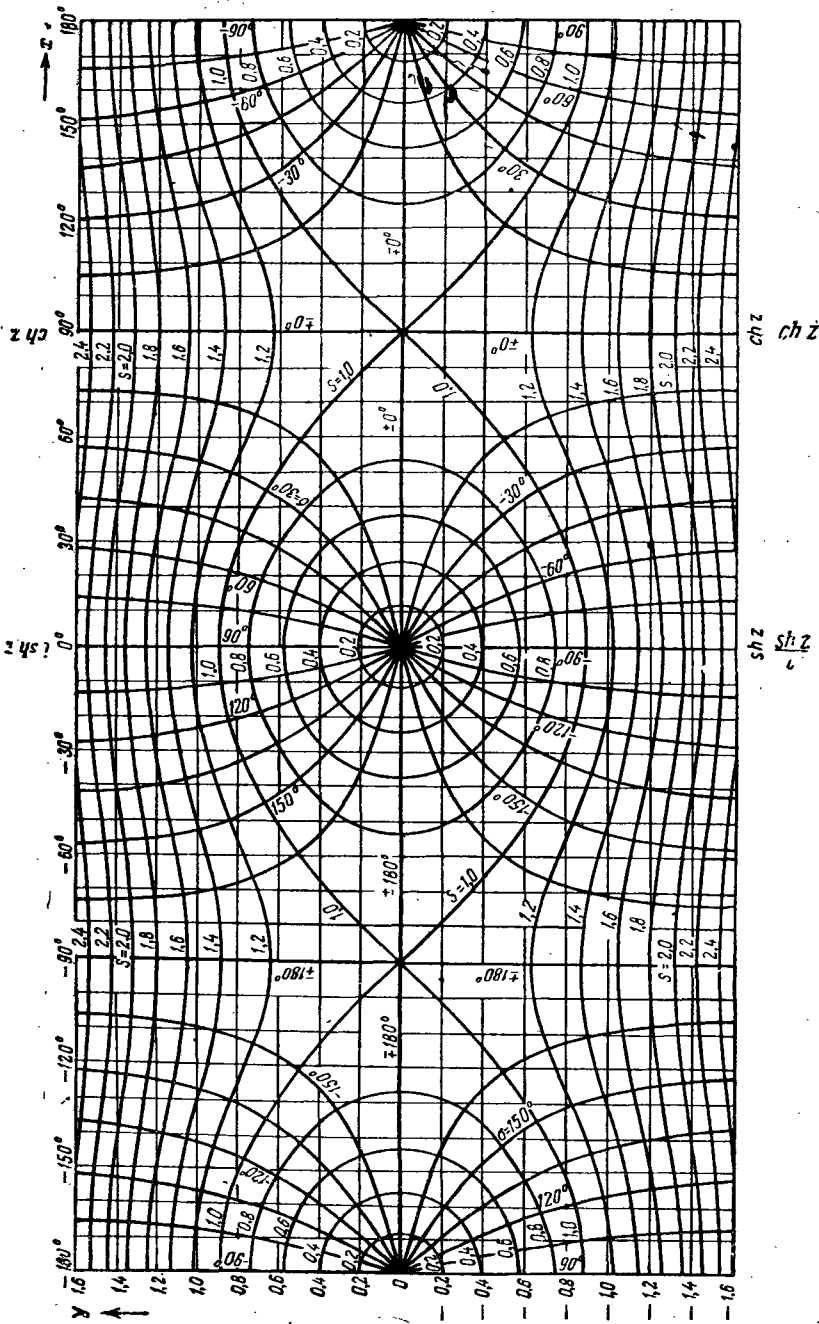


Рис. 10. Функция  $\sin(x+iy) = se^{\rho}$ . Карта горизонталей рельефа синуса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $ch z$ ,  $\pm i sh z$  в зависимости от выбора начала координат.



Таблица 10. Функция  $\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$  $x$  в радианах

$s$	$\sigma=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	0,2014	0,1941	0,1732	0,1405	0,0987	0,0508	0,0000
0,4	0,4115	0,3941	0,3457	0,2748	0,1901	0,0967	0,0000
0,6	0,6435	0,6059	0,5136	0,3957	0,2673	0,1345	0,0000
0,8	0,9273	0,8311	0,6656	0,4959	0,3286	0,1637	0,0000
1,0	1,5708	1,0371	0,7854	0,5719	0,3747	0,1857	0,0000
1,2	1,5708	1,1585	0,8667	0,6261	0,4084	0,2019	0,0000
1,4	1,5708	1,2149	0,9182	0,6640	0,4329	0,2139	0,0000
1,6	1,5708	1,2439	0,9511	0,6906	0,4509	0,2228	0,0000
1,8	1,5708	1,2608	0,9730	0,7097	0,4643	0,2297	0,0000
2,0	1,5708	1,2717	0,9881	0,7237	0,4745	0,2349	0,0000
2,2	1,5708	1,2792	0,9991	0,7342	0,4823	0,2390	0,0000

 $x$  в градусах

$s$	$\sigma=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	11,54	11,12	9,92	8,05	5,65	2,91	0,00
0,4	23,58	22,58	19,81	15,75	10,89	5,54	0,00
0,6	36,87	34,71	29,43	22,67	15,31	7,70	0,00
0,8	53,13	47,62	38,14	28,41	18,83	9,38	0,00
1,0	90,00	59,42	45,00	32,76	21,47	10,64	0,00
1,2	90,00	66,37	49,66	35,87	23,40	11,57	0,00
1,4	90,00	69,61	52,61	38,05	24,80	12,25	0,00
1,6	90,00	71,27	54,49	39,57	25,84	12,77	0,00
1,8	90,00	72,24	55,75	40,66	26,60	13,16	0,00
2,0	90,00	72,86	56,62	41,46	27,18	13,46	0,00
2,2	90,00	73,29	57,24	42,07	27,63	13,70	0,00

 $y$ 

$s$	$\sigma=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	0,0000	0,0527	0,1013	0,1423	0,1732	0,1923	0,1987
0,4	0,0000	0,1119	0,2110	0,2898	0,3458	0,3790	0,3900
0,6	0,0000	0,1878	0,3380	0,4450	0,5156	0,5558	0,5688
0,8	0,0000	0,3026	0,4884	0,6055	0,6787	0,7195	0,7327
1,0	0,0000	0,4890	0,6585	0,7643	0,8314	0,8692	0,8814
1,2	0,6224	0,7130	0,8287	0,9143	0,9719	1,0051	1,0160
1,4	0,8670	0,9093	0,9853	1,0520	1,1000	1,1285	1,1380
1,6	1,0462	1,0721	1,1248	1,1767	1,2165	1,2408	1,2490
1,8	1,1929	1,2099	1,2485	1,2896	1,3226	1,3434	1,3504
2,0	1,3170	1,3293	1,3588	1,3920	1,4197	1,4375	1,4436
2,2	1,4254	1,4349	1,4583	1,4855	1,5090	1,5244	1,5297

## 2. Арксинус

$$\cos 2x = c^2 - s^2,$$

$$\operatorname{ch} 2y = c^2 + s^2,$$

$$2 \cos^2 x = c^2 + (1 + s)(1 - s), \quad 2 \operatorname{sh}^2 y = c^2 + (s + 1)(s - 1),$$

где

$$c^2 = \sqrt{1 - 2s^2 \cos 2\sigma + s^4}, \quad s^2 = \sqrt{1 - 2c^2 \cos 2\gamma + c^4},$$

$$c^2 = \sqrt{(s^2 - 1)^2 + (2s \sin \sigma)^2}, \quad s^2 = \sqrt{(c^2 - 1)^2 + (2c \sin \gamma)^2}.$$

При  $s \ll 1$  имеем:

$$x = s \cos \sigma + \frac{s^3}{6} \cos 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \cos 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \cos 7\sigma + \dots,$$

$$y = s \sin \sigma + \frac{s^3}{6} \sin 3\sigma + \frac{3s^5}{40} \sin 5\sigma + \frac{5s^7}{112} \sin 7\sigma + \dots,$$

а при  $s \gg 1$

$$x = \frac{\pi}{2} - \sigma - \frac{\sin 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3 \sin 4\sigma}{2 (2s)^4} - \frac{10 \sin 6\sigma}{3 (2s)^6} - \frac{35 \sin 8\sigma}{4 (2s)^8} - \dots,$$

$$y = \ln 2s - \frac{\cos 2\sigma}{(2s)^2} - \frac{3 \cos 4\sigma}{2 (2s)^4} - \frac{10 \cos 6\sigma}{3 (2s)^6} - \frac{35 \cos 8\sigma}{4 (2s)^8} - \dots$$

Если  $|s-1| \ll 1$  и  $\sigma \ll 0,5$ , то сначала подсчитывается

$$\frac{c^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 (s-1)^2 + (s \sin \sigma)^2} \approx \sqrt{(s-1)^2 + \sin^2 \sigma},$$

и тогда

$$\cos x = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{1+s}{2}(1-s)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + 1 - s},$$

$$\operatorname{sh} y = \sqrt{\frac{c^2}{2} + \frac{s+1}{2}(s-1)} \approx \sqrt{\frac{c^2}{2} + s - 1}.$$

### 3. Тангенс

$\operatorname{tg} z = te^{i\tau} = U + iV$  (рис. 12, 13, 14; таблица 11),  $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{t} e^{-i\tau} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ ,

$$U = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y},$$

$$t^2 = \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x},$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\sin 2x}.$$

Для  $x = 45^\circ$  получим  $t = 1$ ,  
 $\tau = \operatorname{amph} 2y$ ,

$$U = \cos \tau = \frac{1}{\operatorname{ch} 2y},$$

$$V = \sin \tau = \operatorname{th} 2y,$$

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{sh} 2y.$$

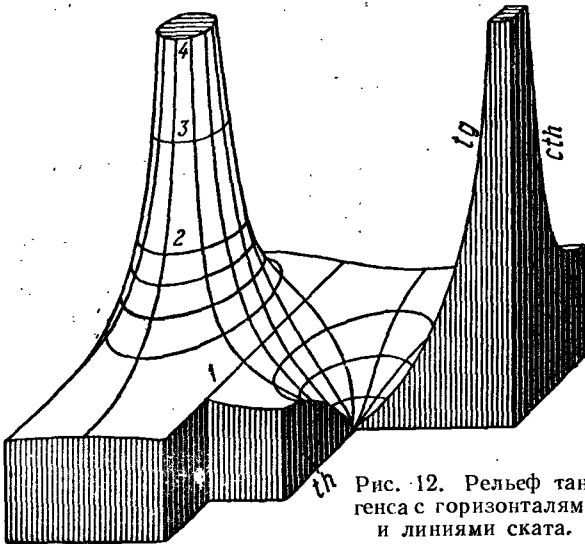


Рис. 12. Рельеф тангенса с горизонталями и линиями ската.

Если  $r \ll 1$ , то имеем:

$$t = r + \frac{r^3}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^5}{36} \left(1 + \frac{19}{4} \cos 4\varrho\right) + \dots,$$

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{r} - \frac{r}{3} \cos 2\varrho + \frac{r^2}{36} \left(1 - \frac{9}{5} \cos 4\varrho\right) - \dots, \quad \tau = \varrho + \frac{r^2}{3} \sin 2\varrho + \frac{7r^4}{90} \sin 4\varrho + \dots$$



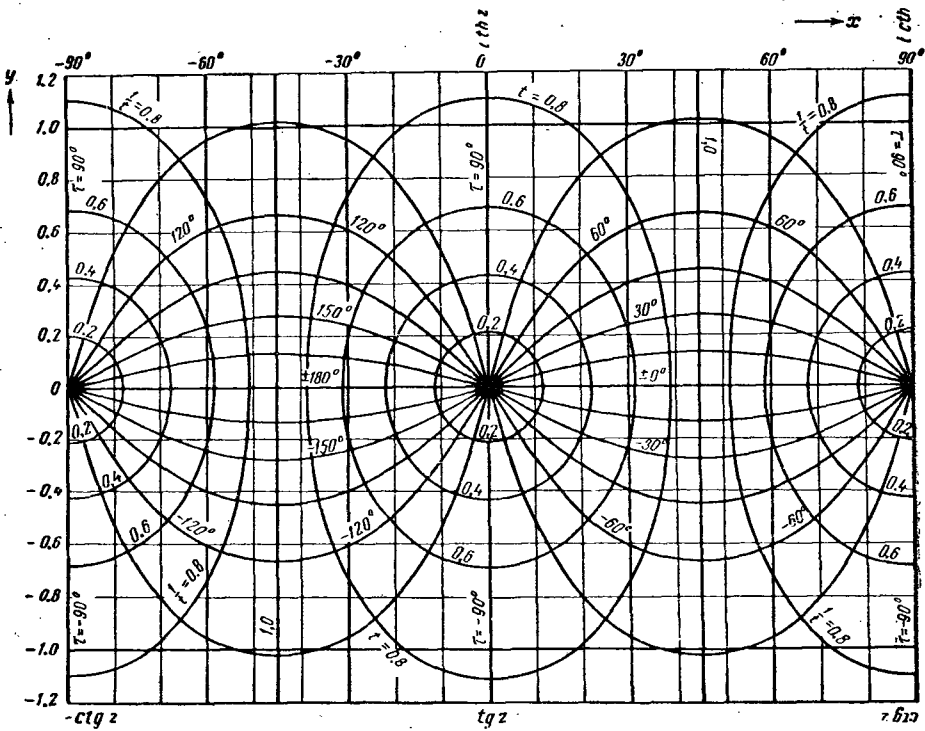


Рис. 13. Функция  $\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$ . Карта горизонталей рельефа тангенса. Если рассматривать карту с различных сторон, то получим функции  $\operatorname{tg} z$ ,  $-\operatorname{ctg} z$ ,  $i \operatorname{th} z$ ,  $i \operatorname{cth} z$ ,  $\operatorname{ctg} z$  в зависимости от выбора начала координат.

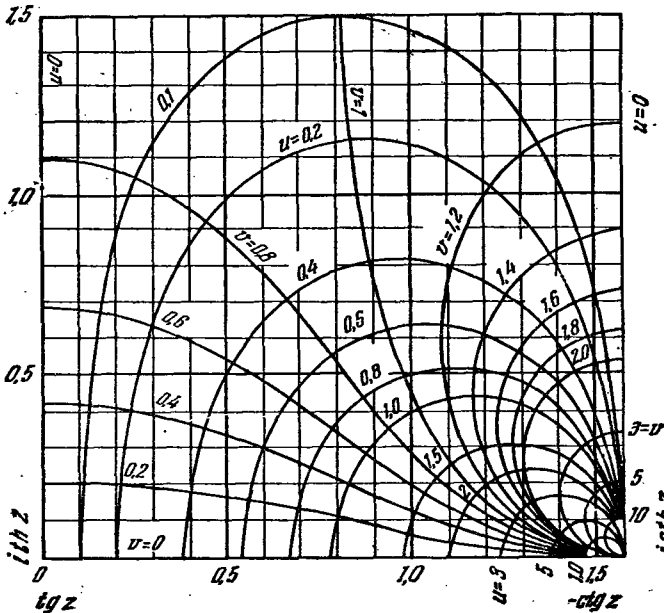


Рис. 14. Функция  $\operatorname{tg} z = u + iv$ . Кривые  $u = \operatorname{const}$  и  $v = \operatorname{const}$  в плоскости  $z = x + iy$ . Карта дает представление также о функциях  $-\operatorname{ctg} z$ ,  $i \operatorname{th} z$ ,  $i \operatorname{cth} z$ .

Если  $y \gg 1$ , то имеем:

$$\begin{aligned}
 U &= 2e^{-2y} \sin 2x - 2e^{-4y} \sin 4x + \dots, \\
 V &= 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + 2e^{-4y} \cos 4x - \dots, \\
 t &= 1 - 2e^{-2y} \cos 2x + e^{-4y} (1 + \cos 4x) - \dots, \\
 \operatorname{ctg} \tau &= 2e^{-2y} \sin 2x (1 + e^{-4y} + \dots);
 \end{aligned}$$

затем при  $p = \frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}$

$$t = \sqrt{\frac{1-p}{1+p}} = 1 - p + \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{2} + \frac{3p^4}{8} - \dots$$

и при  $q = \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh} 2y} = \operatorname{ctg} \tau$

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} q = \frac{\pi}{2} - q + \frac{q^3}{3} - \frac{q^5}{5} + \dots$$

Таблица II. Функция  $\operatorname{tg}(x + iy) = te^{i\tau}$   
y

t	$\tau=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	0,0000	0,0499	0,0974	0,1395	0,1732	0,1951	0,2027
0,4	0,0000	0,0902	0,1798	0,2665	0,3444	0,4019	0,4237
0,6	0,0000	0,1162	0,2368	0,3657	0,5030	0,6322	0,6931
0,8	0,0000	0,1290	0,2666	0,4239	0,6190	0,8794	1,0987
1,0	0,0000	0,1324	0,2747	0,4407	0,6585	1,0137	$\infty$

x в радианах

t	$\tau=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	0,1974	0,1913	0,1732	0,1433	0,1027	0,0537	0,0000
0,4	0,3805	0,3719	0,3448	0,2963	0,2222	0,1208	0,0000
0,6	0,5404	0,5332	0,5094	0,4623	0,3766	0,2259	0,0000
0,8	0,6747	0,6710	0,6583	0,6314	0,5740	0,4276	0,0000
1,0	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	0,7854	x

x в градусах

t	$\tau=0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
0,2	11,31	10,96	9,92	8,21	5,88	3,08	0,00
0,4	21,80	21,31	19,76	16,98	12,73	6,92	0,00
0,6	30,96	30,55	29,19	26,49	21,58	12,94	0,00
0,8	38,66	38,44	37,72	36,17	32,89	24,50	0,00
1,0	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	45,00	x

1/y

t	$\tau=75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$	t	$\tau=75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$
0,80	1,1371	1,0225	0,9409	0,9102	0,96	0,9922	0,8300	0,6595	0,5139
0,82	1,1087	0,9879	0,8991	0,8644	0,98	0,9878	0,8232	0,6441	0,4352
0,84	1,0830	0,9557	0,8584	0,8189					
0,86	1,0603	0,9262	0,8191	0,7732	0,990	0,9867	0,8215	0,6401	0,3778
0,88	1,0405	0,8997	0,7814	0,7269	0,999	0,9864	0,8209	0,6387	0,2631
0,90	1,0238	0,8765	0,7455	0,6792	$1-10^{-8}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,1378
0,92	1,0102	0,8569	0,7124	0,6293	$1-10^{-9}$	0,9864	0,8209	0,6387	0,0934
0,94	0,9996	0,8413	0,6831	0,5754	1,00	0,9864	0,8209	0,6387	0,0000

Продолжение табл. 11  
x в градусах

x в радианах					x в градусах				
t	$\tau=75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$	t	$\tau=75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$
0,80	0,4277	0,3986	0,1848	0,0000	0,80	24,50	18,83	10,59	0,00
0,82	0,4567	0,3578	0,2057	0,0000	0,82	26,17	20,50	11,79	0,00
0,84	0,4877	0,3904	0,2308	0,0000	0,84	27,95	22,37	13,22	0,00
0,86	0,5208	0,4269	0,2612	0,0000	0,86	29,84	24,46	14,96	0,00
0,88	0,5555	0,4475	0,2986	0,0000	0,88	31,83	26,78	17,11	0,00
0,90	0,5 18	0,5123	0,3451	0,0000	0,90	33,91	29,35	19,77	0,00
0,92	0,6294	0,5613	0,4035	0,0000	0,92	36,06	32,16	23,12	0,00
0,94	0,6680	0,6141	0,4766	0,0000	0,94	38,27	35,19	27,30	0,00
0,96	0,7072	0,6699	0,5663	0,0000	0,96	40,52	38,38	32,45	0,00
0,98	0,7464	0,7275	0,6715	0,0000	0,98	42,77	41,68	38,47	0,00
0,990	0,7660	0,7565	0,7280	0,0000	0,990	43,89	43,34	41,71	0,00
0,999	0,7835	0,7825	0,7797	0,0000	0,999	44,89	44,83	44,67	0,00
$1-10^{-6}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000	$1-10^{-6}$	45,00	45,00	45,00	0,00
$1-10^{-9}$	0,7854	0,7854	0,7854	0,0000	$1-10^{-9}$	45,00	45,00	45,00	0,00
1,00	0,7854	0,7854	0,7854	x	1,00	45,00	45,00	45,00	x

## 4. Арктангенс

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cos \tau}{1-t} = \frac{2U}{1-U^2-V^2} = \frac{\cos \tau}{\operatorname{sh} \vartheta},$$

$$\operatorname{th} 2y = \frac{2 \sin \tau}{1+t} = \frac{2V}{1+U^2+V^2} = \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \vartheta},$$

где  $\vartheta = \ln t$ ; следовательно,  $\ln z = \vartheta + i\tau$ .

Положив

$$N^2 = \operatorname{sh}^2 \vartheta + \cos^2 \tau = \operatorname{ch}^2 \vartheta - \sin^2 \tau, \quad 2N^2 = \operatorname{ch} 2\vartheta + \cos 2\tau,$$

получим:

$$\begin{aligned} N \sin 2x &= \cos \tau, & N \cos 2x &= -\operatorname{sh} \vartheta, \\ N \operatorname{sh} 2y &= \sin \tau, & N \operatorname{ch} 2y &= \operatorname{ch} \vartheta. \end{aligned}$$

Для  $t=1$  и  $-90^\circ < \tau < 90^\circ$  получим:

$$x = 45^\circ, \quad \operatorname{th} y = \operatorname{tg} \frac{\tau}{2}.$$

Для  $\tau = 90^\circ$  имеем соответственно:

$$\begin{aligned} t < 1, & & t = 1, & & t > 1 \\ x = 0, & & x \text{ произвольно,} & & x = \pm 90^\circ, \\ y = \operatorname{Arth} t, & & y = \infty, & & y = \operatorname{Arcth} t. \end{aligned}$$

Если  $t \ll 1$ , то

$$x = t \cos \tau - \frac{t^3}{3} \cos 3\tau + \frac{t^5}{5} \cos 5\tau - \dots, \quad y = t \sin \tau - \frac{t^3}{3} \sin 3\tau + \frac{t^5}{5} \sin 5\tau - \dots,$$

а при  $t \gg 1$ 

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos \tau}{t} + \frac{\cos 3\tau}{3t^3} - \frac{\cos 5\tau}{5t^5} + \dots, \quad y = \frac{\sin \tau}{t} - \frac{\sin 3\tau}{3t^3} + \frac{\sin 5\tau}{5t^5} - \dots$$

Пусть  $t$  стремится к 1 и  $\tau$  стремится к прямому углу; положим:

$$-\operatorname{sh} \vartheta = T = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1-\frac{1-t}{2}}{\frac{1}{1-t}-1}, \quad T^2 + \cos^2 \tau = N^2.$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= \frac{\cos \tau}{T} = \frac{\cos \tau}{1-t} \frac{\cos \tau}{2} \frac{1-t}{4} \frac{\cos \tau}{1-\frac{1-t}{2}}, & \operatorname{sh} 2y &= \frac{\sin \tau}{N}, \\ \operatorname{ch} 4y &= \frac{2+T^2-\cos^2 \tau}{N^2}, & y &\approx \frac{1}{4} \ln \frac{4}{N^2} + \frac{T^2-\cos^2 \tau}{8} - \frac{3T^4+3\cos^4 \tau-2T^2\cos^2 \tau}{64}. \end{aligned}$$

## 5. Переход от одной функции к другой

	$\sin z =$	$\cos z =$	$i \operatorname{sh} z =$	$\operatorname{ch} z =$
$= \sin$	$\pi - z$	$\frac{\pi}{2} \pm z$	$\frac{iz}{\pi - iz}$	$\frac{\pi}{2} \pm iz$
$= \cos$	$\pm \left( z - \frac{\pi}{2} \right)$	$-z$	$\pm \left( iz - \frac{\pi}{2} \right)$	$\pm iz$
$= i \operatorname{sh}$	$\frac{-iz}{i(z \pm \pi)}$	$i \left( \pm z - \frac{\pi}{2} \right)$	$i\pi - z$	$\pm z - i \frac{\pi}{2}$
$= \operatorname{ch}$	$\pm i \left( z - \frac{\pi}{2} \right)$	$\pm iz$	$\pm \left( z + i \frac{\pi}{2} \right)$	$-z$

	$\operatorname{tg} z =$	$\operatorname{ctg} z =$	$i \operatorname{th} z =$	$i \operatorname{cth} z =$
$= \operatorname{tg}$	$z$	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	$iz$	$iz \pm \frac{\pi}{2}$
$= \operatorname{ctg}$	$-z \pm \frac{\pi}{2}$	$z$	$-iz \pm \frac{\pi}{2}$	$-iz$
$= i \operatorname{th}$	$-iz$	$i \left( z \pm \frac{\pi}{2} \right)$	$z$	$z \pm i \frac{\pi}{2}$
$= i \operatorname{cth}$	$i \left( -z \pm \frac{\pi}{2} \right)$	$iz$	$z \pm i \frac{\pi}{2}$	$z$

	$\arcsin z =$	$\arccos z =$ $i \operatorname{Arch} z =$	$i \operatorname{Arsh} z =$
$= \arcsin$	$z$	$\sqrt{1 - z^2}$	$iz$
$= \arccos$ $= i \operatorname{Arch}$	$\sqrt{1 - z^2}$	$z$	$\sqrt{1 + z^2}$
$= i \operatorname{Arsh}$	$-iz$	$-\sqrt{z^2 - 1}$	$z$

	$\operatorname{arctg} z =$	$i \operatorname{arctg} z =$	$i \operatorname{Arth} z =$	$i \operatorname{Arcth} z =$
$= \operatorname{arctg}$	$z$	$\frac{1}{z}$	$iz$	$\frac{i}{z}$
$= \operatorname{arctg}$	$\frac{1}{z}$	$z$	$\frac{1}{iz}$	$-iz$
$= i \operatorname{Arth}$	$-iz$	$\frac{1}{iz}$	$z$	$\frac{1}{z}$
$= i \operatorname{Arcth}$	$\frac{i}{z}$	$iz$	$\frac{1}{z}$	$z$

6. Знак действительной и мнимой части функции

Аргумент	sin	th	cth	ctg	tg	sh	ch	cos	Объяснение
$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	Изменение знака у мнимой части
$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	Изменение знака у действительной части
$90^\circ - x$		P	P	P	P				Переход к углу, дополнительному до прямого
$180^\circ - x$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\lrcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	$\llcorner$	Переход к углу, дополнительному до двух прямых

Символ P означает, что модуль функции переходит в обратную величину. Поворот горизонтальной стороны прямого угла  $\lrcorner$  означает перемену знака

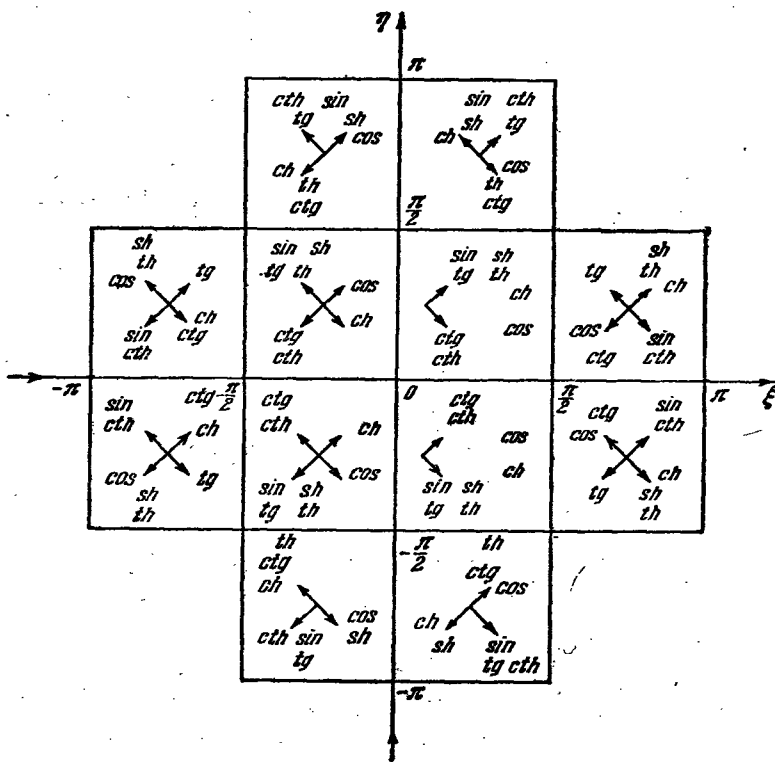


Рис. 15. Знаки действительной и мнимой частей тригонометрических и гиперболических функций от  $\xi + i\eta$ .

у действительной части; поворот вертикальной стороны означает перемену знака мнимой части.

В схеме, изображенной на рис. 15, символ  $\nearrow$  обозначает первую четверть,  $\nwarrow$  — вторую,  $\swarrow$  — третью и  $\searrow$  — четвертую. [Эта схема позволяет сразу определять, в каком квадранте комплексной плоскости значений лежат точки, соответствующие  $\sin \zeta$ ,  $\cos \zeta$  и т. д.,  $\zeta = \xi + i\eta$ , т. е. находить знаки действительной и мнимой частей этих функций.]

Пример. Для аргумента  $\zeta = \xi + i\eta$ , где  $\xi$  заключено между  $0$  и  $\frac{\pi}{2}$ , а  $\eta$  — между  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ , имеем схему в правом верхнем квадрате на рис. 15, из которой следует: значения  $\sin \zeta$ ,  $\operatorname{tg} \zeta$  и  $\operatorname{cth} \zeta$  лежат в первой четверти (т. е. их действительные и мнимые части положительны),  $\operatorname{sh} \zeta$  и  $\operatorname{ch} \zeta$  — во второй (действительные части отрицательны, а мнимые положительны),  $\cos \zeta$ ,  $\operatorname{ctg} \zeta$  и  $\operatorname{th} \zeta$  — в четвертой (действительные части положительны, а мнимые отрицательны).

7. Приведение к положительным острым углам

(Прежде всего надо найти приближенные значения по рис. 10 или 13.)

[Помещенные ниже схемы позволяют решать для функций синус и тангенс следующие основные задачи:

- a) Дан комплексный аргумент; определяется функция.
- b) Дана функция; определяется комплексный аргумент.]

$se^{i\varphi} = \sin$		$sh$	$sh$
$x' + iy$		$y + ix'$	$-y + ix'$
$x'$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$-(180^\circ - x)$	$-(180^\circ - \sigma)$	$-(90^\circ + \sigma)$	$-(90^\circ - \sigma)$
$-x$	$180^\circ - \sigma$	$-(90^\circ - \sigma)$	$-(90^\circ + \sigma)$
$x$	$\sigma$	$90^\circ - \sigma$	$90^\circ + \sigma$
$180^\circ - x$	$-\sigma$	$90^\circ + \sigma$	$90^\circ - \sigma$

$\sin(x + iy) = se^{i\sigma}$ ,

$0 < \frac{x}{\sigma} < 90^\circ$ ,

$\theta < \frac{y}{s} < \infty$ .

$se^{i\varphi} = \sin$		$sh$	$sh$
$x' - iy$		$y - ix'$	$-y - ix'$

(См. таблицу 10)

a)

$se^{i\varphi} = \cos(x' + iy)$	
$= \operatorname{ch}(-y + ix')$	
$x'$	$\varphi$
$-(90^\circ + x)$	$180^\circ - \sigma$
$-(90^\circ - x)$	$\sigma$
$90^\circ - x$	$-\sigma$
$90^\circ + x$	$-(180^\circ - \sigma)$

b)

	$sh$
$se^{i\left(\frac{\pi}{2} - \sigma\right)}$	$y + ix$
	$-y + i(\pi - x)$
$se^{i\left(\frac{\pi}{2} + \sigma\right)}$	$-y + ix$
	$y + i(\pi - x)$

$se^{i\varphi} = \cos(x' - iy)$   
 $= \operatorname{ch}(y + ix')$

b)

	$\sin$	$\cos$	$\operatorname{ch}$
$se^{i\sigma}$	$x + iy$	$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - iy$	$y + i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
	$(\pi - x) - iy$	$-\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + iy$	$-y - i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$se^{i(\pi - \sigma)}$	$-x + iy$	$\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - iy$	$y + i\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
	$-(\pi - x) - iy$	$-\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + iy$	$-y - i\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

a)

$t^{-n}e^{i\varphi} = \text{ctg}$ $x' - iy$			$\text{ct } i$ $y - ix'$	$\text{cth}$ $-y - ix'$
$t^n e^{i\varphi} = \text{tg}$ $x' + iy$			$\text{th}$ $y + ix'$	$\text{th}$ $-y + ix'$
$x'$	$n$	$\varphi$	$\varphi$	$\varphi$
$90^\circ + x$ $-(90^\circ - x)$	$-1$	} $180^\circ - \tau$	$-(90^\circ - \tau)$	$-(90^\circ + \tau)$
$180^\circ - x$ $-x$	$+1$			
$x$ $-(180^\circ - x)$	$+1$	} $\tau$	$90^\circ - \tau$	$90^\circ + \tau$
$90^\circ - x$ $-(90^\circ + x)$	$-1$			
$t^{-n}e^{-i\varphi} = \text{ctg}$ $x' + iy$			$\text{cth}$ $y + ix'$	$\text{cth}$ $-y + ix'$
$t^n e^{-i\varphi} = \text{tg}$ $x' - iy$			$\text{th}$ $y - ix'$	$\text{th}$ $-y - ix'$

$$\begin{aligned} \text{tg}(x+iy) &= te^x, \\ 0 < x < 45^\circ, \\ 0 < y < \infty, \\ 0 < t < 1, \\ 0 < \tau < 90^\circ \end{aligned}$$

(См. таблицу II)

b)

	$\text{tg}$	$\text{ctg}$		$\text{th}$	$\text{cth}$
$te^{i\tau}$	$x+iy$	$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}$	$y+ix$	$y-i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$te^{i(\pi-\tau)}$	$-x+iy$	$-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-iy$	$te^{i\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}$	$-y+ix$	$-i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$
$\frac{1}{t}e^{i\tau}$	$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+iy$	$x-iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)}$	$y+$ $+i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $-y+$	$y-ix$
$\frac{1}{t}e^{i(\pi-\tau)}$	$-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+iy$	$-x+iy$	$\frac{1}{t}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)}$	$+i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$	$-y-ix$

## 8. Поведение функций в комплексной плоскости

[Схемы, приведенные на рис. 16 и 17, описывают поведение тригонометрических функций комплексного аргумента при его постоянной мнимой части и гиперболических функций—при постоянной действительной части аргумента.]

Рис. 16. Поведение тригонометрических функций от  $x - \frac{\pi}{2} + iy$  в четырех квадрантах или октантах при постоянном  $y$ .

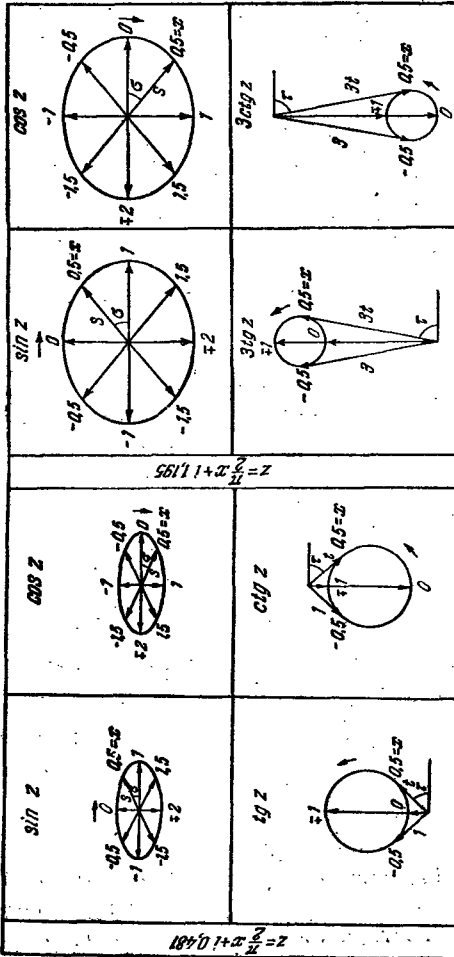
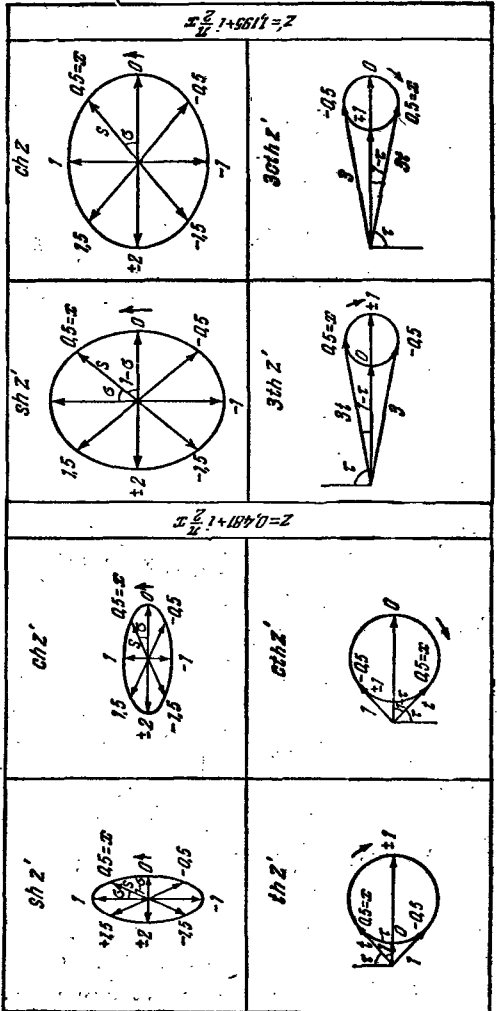


Рис. 17. Поведение гиперболических функций от  $y + ix - \frac{\pi}{2}$  в четырех квадрантах или октантах при постоянном  $y$ .





## V. ГАММА-ФУНКЦИИ

### Определения и обозначения

Гамма-функция  $\Gamma(z)$  определяется как решение функционального уравнения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \text{где } \Gamma(1) = 1.$$

Она является мероморфной функцией от  $z = x + iy$  с простыми полюсами в точках  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Из всех аналитических решений этого уравнения она выделяется тем, что для действительных положительных значений

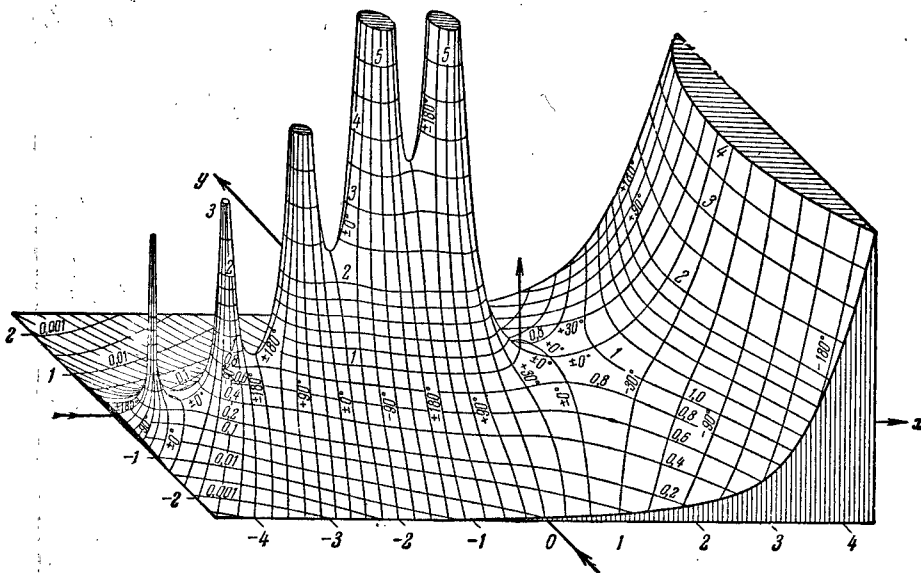


Рис. 18. Рельеф гамма-функции  $\Gamma(z)$ .

аргумента  $z = x$  она положительна, действительна и удовлетворяет неравенству

$$(\Gamma'(x))^2 < \Gamma(x)\Gamma''(x),$$

которое выражает ее логарифмическую выпуклость (рис. 18—22, таблицы 12, 14). Логарифмическая производная от  $\Gamma(z)$  обозначается через

$$\psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Для этих функций употребляют также другие обозначения:

$$\Gamma(z+1) = \Pi(z) = z!, \quad \psi(z+1) = \Psi(z) = \frac{d \ln \Pi(z)}{dz} = \frac{d \ln z!}{dz}.$$

Определение неполных гамма-функций  $\Gamma(\alpha, z)$ ,  $\gamma(\alpha, z)$  дано в С.

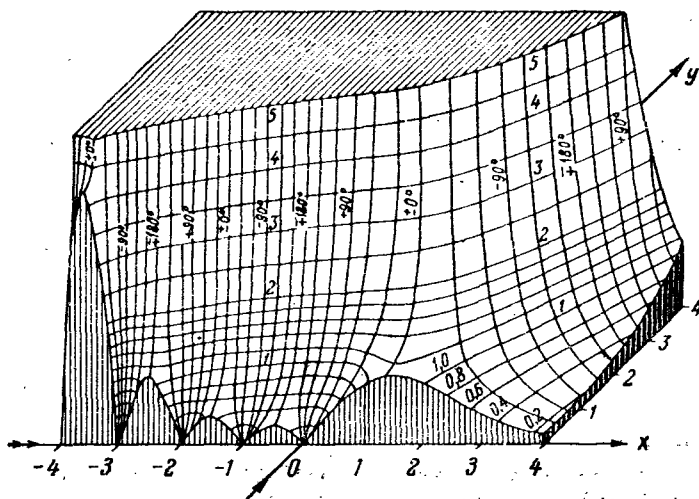


Рис. 19. Рельеф обратных значений гамма-функции  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ .

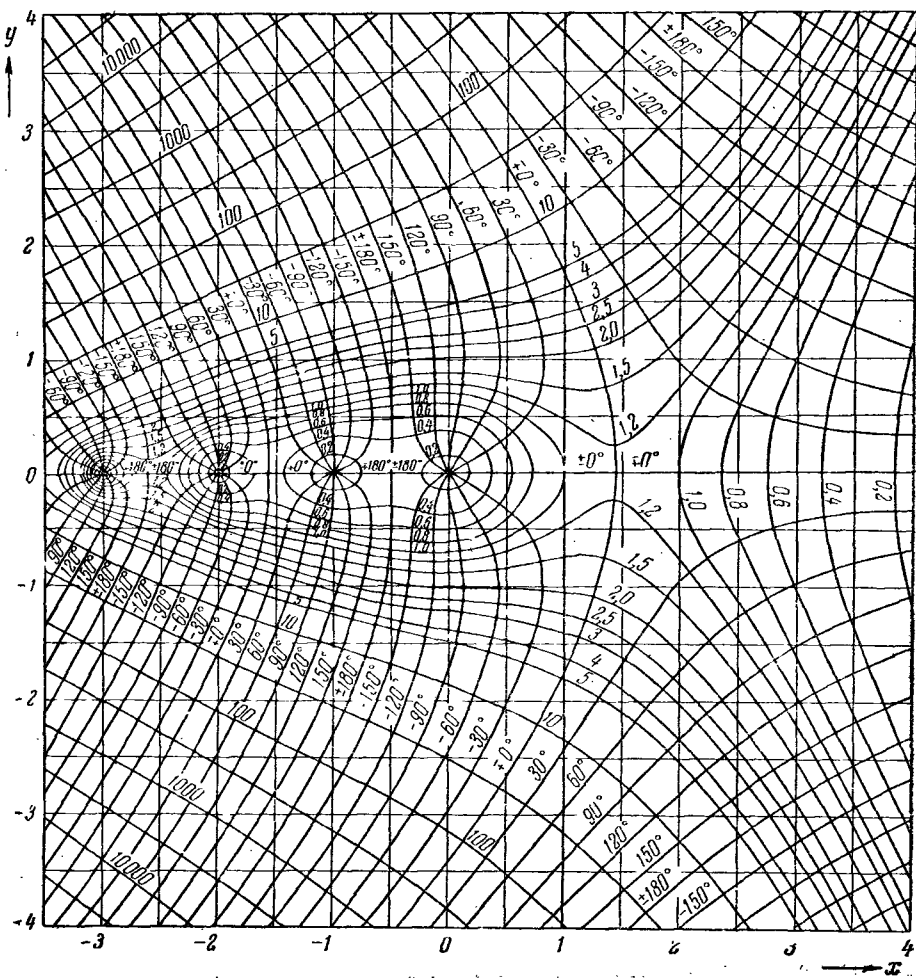


Рис. 20. Карта горизонталей рельефа обратных значений гамма-функции  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ .

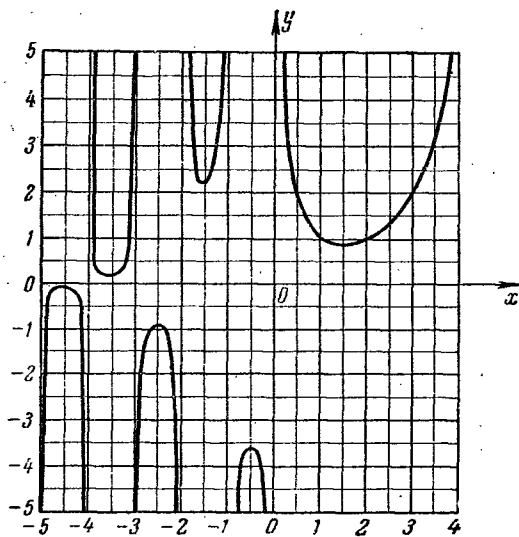


Рис. 21. Гамма-функция  $\Gamma(x)$ .

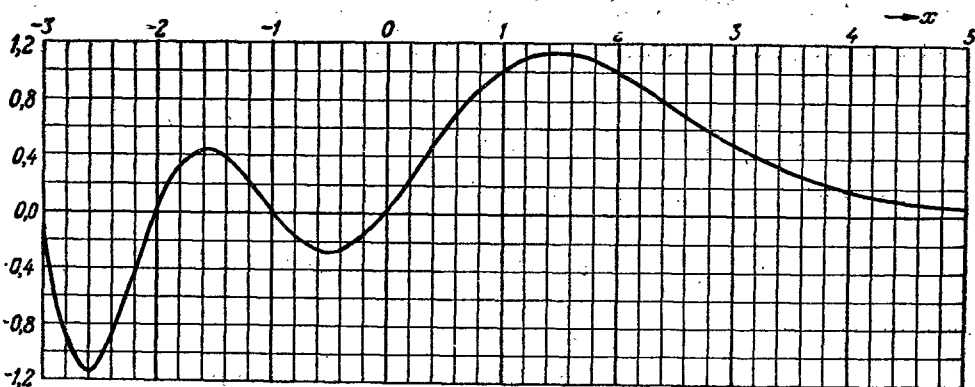


Рис. 22. Обратные значения гамма-функции  $\frac{1}{\Gamma(x)}$ .

А. ГАММА-ФУНКЦИЯ  $\Gamma(z)$ 

## 1. Представления

1.1. Произведения и ряды. Для  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  имеем:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{z} e^{-cz} \prod_{n=1}^{\infty} e^{\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}$$

( $C$  — постоянная Эйлера). Пусть  $z = x + iy$  и

$$1 + \frac{iy}{x+n} = r_n e^{i\varphi_n} \quad (r_n > 0; n = 0, 1, 2, \dots),$$

тогда  $\Gamma(z) = h e^{i\omega}$ , где

$$h = \Gamma(x) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n}, \quad \omega = y\psi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{tg} \varphi_n - \varphi_n).$$

При  $|z| \ll 1$  имеем:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{\frac{\pi z}{\sin \pi z}} \frac{1-z}{1+z} e^{\Lambda}, \quad \text{где } \Lambda = C_1 z - C_2 z^2 - C_3 z^3 - \dots;$$

$$C_1 = 0,422\,784\,335, \quad C_2 = 0,007\,385\,551, \quad C_3 = 0,000\,223\,155, \\ C_4 = 0,067\,352\,301, \quad C_7 = 0,001\,192\,754, \quad C_{11} = 0,000\,044\,926.$$

Если в этом случае положить  $z = x + iy = r e^{i\varphi}$  ( $r \ll 1$ ), то получим:

$$\Gamma(z+1) = h e^{i\omega},$$

где

$$h^2 = \frac{\pi^2 (x^2 + y^2)}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y} \frac{(1-x)^2 + y^2}{(1+x)^2 + y^2} e^{4\Lambda_1},$$

$$2\omega = \varphi - \sigma - \tau - \chi + 2\Lambda_2, \quad \Lambda_1 + i\Lambda_2 = C_1 z - C_2 z^2 - C_3 z^3 - \dots,$$

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{tg} x}, \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{y}{1-x}, \quad \operatorname{tg} \chi = \frac{y}{1+x}.$$

1.2. Интегралы. При  $\operatorname{Re} z > 0$  имеет место представление

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{z-1} dt \quad (\arg t = 0)$$

(интеграл Эйлера 2-го рода); при  $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (0 < \arg t \leq 2\pi),$$

при всех значениях  $z$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^t t^{-z} dt \quad (-\pi \leq \arg t \leq \pi)$$

(контурный интеграл Ганкеля).

1.3. Асимптотика. Если  $|z| \gg 1$  при условии, что  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), то

$$\ln \Gamma(z) \approx \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}}$$

( $B_{2n}$  — числа Бернулли). Для действительного  $z = x > 0$  ошибка, получающаяся при обрывании ряда, меньше первого отброшенного члена и имеет знак этого

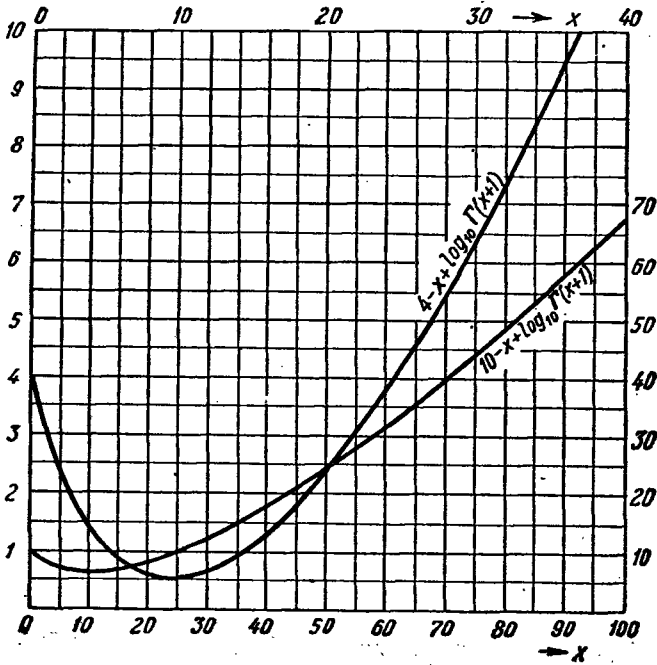


Рис. 23. Функция  $\Gamma(x)$  для больших  $x$ .

члена (рис. 23). Отсюда следует формула Стирлинга:

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{-z} z^z H(z),$$

$$H(z) \approx 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51\,840z^3} + \frac{571}{2\,488\,320z^4} - \dots$$

Имеет место представление

$$\Gamma(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \frac{e^{-z}}{z} [z(z+1)]^{\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\lambda},$$

$$\lambda \approx \frac{1}{180} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(z+1)^2}\right) - \frac{1}{840} \left(\frac{1}{z^4} - \frac{1}{(z+1)^4}\right) + \dots$$

Для чисто мнимого  $z = iy$ ,  $y \gg 1$  имеем  $\Gamma(iy) = he^{i\omega}$ , где

$$h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{y}} e^{-\frac{\pi}{2}y},$$

$$\omega \approx -\frac{\pi}{4} + y(\ln y - 1) - \frac{1}{12y} - \frac{1}{360y^3} - \frac{1}{1260y^5} - \frac{1}{1680y^7} - \frac{1}{11880y^9} - \dots$$

## 2. Частные значения

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \quad (n = 3, 4, \dots).$$

Точка  $-n$  — простой полюс, вычет в этом полюсе равен  $\frac{(-1)^n}{n!}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1,772\,453\,850\dots, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2,678\,938\,535 = 1:0,373\,282\,174,$$

$$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1,354\,117\,939 = 1:0,738\,488\,112,$$

$$\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) = 0,892\,979\,512 = 1:1,119\,846\,522,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 0,902\,745\,293 = 1:1,107\,732\,167,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3,625\,609\,908 = 1:0,275\,815\,663,$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1,225\,416\,702 = 1:0,816\,048\,939,$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = 0,906\,402\,477 = 1:1,103\,262\,651,$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0,919\,062\,527 = 1:1,088\,065\,252.$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n},$$

$$\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\min_{x>0} \Gamma(x) = \Gamma(1,46163\dots) = 0,88\,560\dots$$

## 3. Функциональные уравнения

## 3.1. Рекуррентные формулы:

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)\dots(z+n-1)\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{z-1} \Gamma(z), \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\Gamma(z-n) = \frac{\Gamma(z)}{(z-1)(z-2)\dots(z-n)}.$$

## 3.2. Формулы дополнения:

$$\Gamma(z) \Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z \sin \pi z},$$

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z},$$

$$\Gamma(1+z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi z}{\sin \pi z}.$$

Если положить ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$P_0(z) = 1,$$

$$P_n(z) = -z^2(1-z^2)(4-z^2)\dots[(n-1)^2-z^2],$$

$$Q_0(z) = 1,$$

$$Q_n(z) = \left(\frac{1}{4} - z^2\right) \left(1 \cdot 2 + \frac{1}{4} - z^2\right) \dots \left[(n-1) \cdot n + \frac{1}{4} - z^2\right],$$

то справедливы равенства ( $n=0, 1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \Gamma(n+z)\Gamma(n-z) &= \frac{-\pi P_n(z)}{z \sin \pi z}, \\ \Gamma(-n+z)\Gamma(-n-z) &= \frac{\pi z}{P_{n+1}(z) \sin \pi z}, \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-z\right) &= \frac{\pi Q_n(z)}{\cos \pi z}, \\ \Gamma\left(-n+\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}-z\right) &= \frac{\pi}{Q_n(z) \cos \pi z}. \end{aligned}$$

Для чисто мнимого  $z=iy$  выражения в правых частях этих равенств будут действительными и означают квадрат модуля каждого из двух комплексно-сопряженных множителей, стоящих в левых частях.

**3.3. Формула умножения:**

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{(2\pi)^{n-1}} n \frac{\Gamma(nz)}{n^{nz}}.$$

В частности, при  $n=2$  получаем формулу удвоения:

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

**4. Некоторые интегральные формулы**

При условии  $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Re} w > 0$  имеет место равенство

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (\arg t = 0).$$

Интеграл, стоящий слева (*интеграл Эйлера 1-го рода*) называется *бэ́та-функцией*  $B(z, w)$ ; приведенная формула позволяет находить значения бэ́та-функции через значения гамма-функции.

Далее, справедливы следующие формулы:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{(1+t)^w} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w-z)}{\Gamma(w)} \quad \left( \begin{array}{l} \operatorname{Re} w > \operatorname{Re} z > 0, \\ \arg t = 0 \end{array} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-wt^n} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{z}{n}\right)}{nw^{z/n}} \quad \left( \begin{array}{l} \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Re} z > 0; \\ \arg t = 0, n = 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[n]{1-t^m}} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)} \quad (m=1, 2, \dots, n=2, 3, \dots),$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^m}} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{m}\right)} = \frac{m}{\sqrt{4}} \frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{m}\right)} \quad (m=1, 2, \dots),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)} \quad (\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} \beta > -1).$$

### В. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ $\psi(z)$ ГАММА-ФУНКЦИИ

[Логарифмическая производная от  $\Gamma(z)$  обозначается через  $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  (рис. 24, таблица 13).]

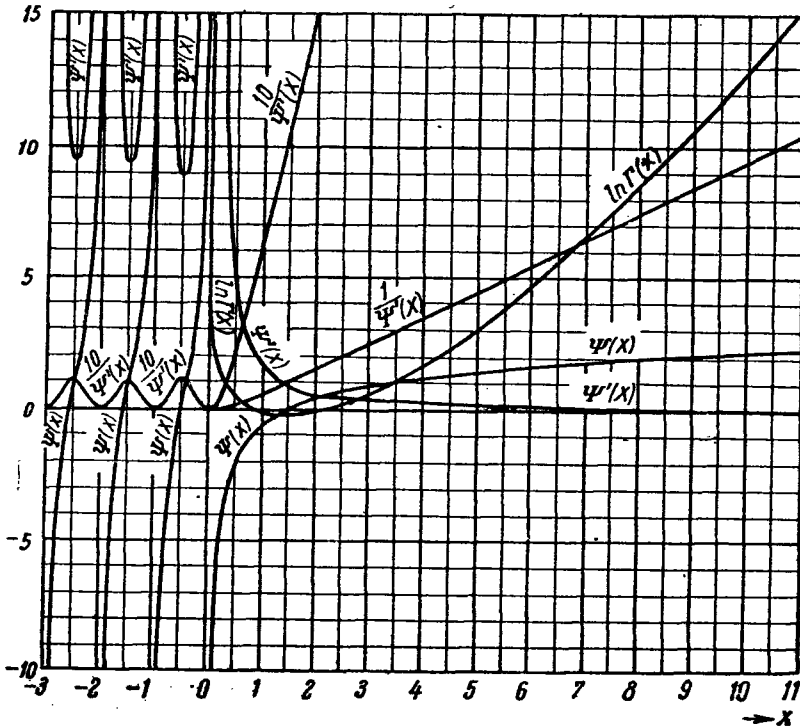


Рис. 24. Логарифм гамма-функции и его производные.

#### 1. Представления

1.1. Ряды. Для  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  имеем:

$$\psi(z) = -C + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{z+k} \right) \quad (C - \text{постоянная Эйлера})$$

и

$$\psi(z) = \ln z - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{z+k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{z+k} \right) \right].$$

1.2. Интегралы. При  $\operatorname{Re} z > 0$

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}} \right] dt = \int_0^1 \left[ \frac{-1}{\ln t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right] dt \quad (\arg t = 0),$$

$$\psi(z) = -C + \int_0^1 \frac{1-t^{z-1}}{1-t} dt \quad (\arg t = 0).$$



1.3. Асимптотика. Если  $|z| \gg 1$  при условии, что  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), то

$$\psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n \cdot z^{2n}} = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^3} + \frac{1}{120z^5} - \dots,$$

$$\psi(z) \approx \frac{1}{2} \ln z(z+1) - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n-1} \left\{ \frac{1}{z^{2n-1}} - \frac{1}{(z+1)^{2n-1}} \right\}.$$

## 2. Частные значения

$$\psi(1) = -C, \quad \psi(n) = -C + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Точка  $-n$  — простой полюс, вычет в этом полюсе равен  $-1$ ;

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -C - 2 \ln 2 = -\ln 4\gamma = -1,9635100260\dots,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} \pm n\right) = -\ln 4\gamma + 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

( $C$  — постоянная Эйлера,  $\gamma = e^C$ ).

## 3. Функциональные уравнения

### 3.1. Рекуррентные формулы:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \quad \psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{1}{z+n-1},$$

$$\psi(z-1) = \psi(z) - \frac{1}{z-1}, \quad \psi(z-n) = \psi(z) - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} - \dots - \frac{1}{z-n}.$$

### 3.2. Формулы дополнения:

$$\psi(z) - \psi(-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z}, \quad \psi(z) - \psi(1-z) = -\pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

$$\psi\left(\frac{1}{2} + z\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - z\right) = \pi \operatorname{tg} \pi z, \quad \psi(1+z) - \psi(1-z) = \frac{1}{z} - \pi \operatorname{ctg} \pi z,$$

$$\psi\left(-n + \frac{3}{4}\right) = \psi\left(n + \frac{1}{4}\right) + \pi, \quad \psi\left(-n + \frac{1}{4}\right) = \psi\left(n + \frac{3}{4}\right) - \pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

### 3.3. Формула умножения:

$$\psi(nz) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi\left(z + \frac{k}{n}\right) + \ln n \quad (n = 2, 3, \dots).$$

## 4. Производная $\psi'(z)$

[В силу отмеченной выше логарифмической выпуклости гамма функции, производная  $\psi'(z)$  всюду неотрицательна (рис. 24, таблица 13).]

4.1. Представление. Для  $z \neq 0, -1, -2, \dots$  имеем:

$$\psi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z+k)^2}.$$

Таблица 12.  
Гамма-функция  $\Gamma(x) = (x-1)!$

Таблица 13.  
Функции  $\psi(x)$  и  $\psi'(x)$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma'(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\psi(x)$	$\psi'(x)$
1,00	1,0000	2,00	+ 1,	3,00	2,000	4,00	6,000	1,00	- 0,	+ 1,
02	0,9888	07	0086	02	2,037	02	6,153	02	5772	6449
04	0,9784	04	0176	04	2,076	04	6,311	04	5133	5981
06	0,9687	06	0269	06	2,115	06	6,473	06	4826	5537
08	0,9597	08	0365	08	2,156	08	6,640	08	4528	5115
1,10	0,9514	2,10	0465	3,10	2,198	4,10	6,813	1,10	4238	4333
12	0,9436	12	0568	12	2,240	12	6,990	12	3955	3970
14	0,9364	14	0675	14	2,284	14	7,173	14	3679	3623
16	0,9298	16	0786	16	2,330	16	7,362	16	3410	3292
18	0,9237	18	0900	18	2,376	18	7,556	18	3147	2976
1,20	0,9182	2,20	1018	3,20	2,424	4,20	7,757	1,20	2890	2674
22	0,9131	22	1140	22	2,473	22	7,963	22	2640	2385
24	0,9085	24	1266	24	2,524	24	8,176	24	2395	2107
26	0,9044	26	1395	26	2,575	26	8,396	26	2155	1842
28	0,9007	28	1529	28	2,629	28	8,622	28	1921	1587
1,30	0,8975	2,30	1667	3,30	2,683	4,30	8,855	1,30	1692	1343
32	0,8946	32	1809	32	2,740	32	9,096	32	1467	1108
34	0,8922	34	1956	34	2,798	34	9,344	34	1248	0882
36	0,8902	36	2107	36	2,857	36	9,600	36	1032	0664
38	0,8885	38	2262	38	2,918	38	9,864	38	0821	0455
1,40	0,8873	2,40	2422	3,40	2,981	4,40	10,136	1,40	0614	0254
42	0,8864	42	2586	42	3,046	42	10,417	42	0411	0059
44	0,8858	44	2756	44	3,112	44	10,707	44	0211	*9872
46	0,8856	46	2930	46	3,181	46	11,005	46	0016	9691
48	0,8857	48	3109	48	3,251	48	11,314	48	*0176	9517
1,50	0,8862	2,50	3293	3,50	3,323	4,50	11,632	1,50	0365	9348
52	0,8870	52	3483	52	3,398	52	11,960	52	0550	9185
54	0,8882	54	3678	54	3,474	54	12,299	54	0732	9027
56	0,8896	56	3878	56	3,553	56	12,648	56	0911	8875
58	0,8914	58	4084	58	3,634	58	13,009	58	1087	8727
1,60	0,8935	2,60	4296	3,60	3,717	4,60	13,381	1,60	1260	8584
62	0,8959	62	4514	62	3,803	62	13,766	62	1431	8446
64	0,8986	64	4738	64	3,891	64	14,162	64	1598	8312
66	0,9017	66	4968	66	3,981	66	14,572	66	1763	8181
68	0,9050	68	5204	68	4,075	68	14,995	68	1926	8055
1,70	0,9086	2,70	5447	3,70	4,171	4,70	15,431	1,70	2085	7932
72	0,9126	72	5696	72	4,269	72	15,882	72	2243	7813
74	0,9168	74	5953	74	4,371	74	16,348	74	2398	7698
76	0,9214	76	6216	76	4,476	76	16,829	76	2551	7585
78	0,9262	78	6487	78	4,583	78	17,325	78	2701	7476
1,80	0,9314	2,80	6765	3,80	4,694	4,80	17,84	1,80	2850	7370
82	0,9368	82	7051	82	4,800	82	18,37	82	2996	7266
84	0,9426	84	7344	84	4,926	84	18,91	84	3141	7166
86	0,9487	86	7646	86	5,047	86	19,48	86	3283	7068
88	0,9551	88	7955	88	5,171	88	20,06	88	3423	6973
1,90	0,9618	2,90	8274	3,90	5,299	4,90	20,67	1,90	3562	6880
92	0,9688	92	8600	92	5,431	92	21,29	92	3699	6789
94	0,9761	94	8936	94	5,567	94	21,94	94	3833	6701
96	0,9837	96	9281	96	5,707	96	22,60	96	3967	6615
98	0,9917	98	9636	98	5,851	98	23,29	98	4098	6531
2,00	1,0000	3,00	*0000	4,00	6,000	5,00	24,00	2,00	4228	6449

Таблица 14. Величины, обратные к гамма-функции:

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)} = \frac{1}{x!} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\Gamma(1-x)} = \frac{1}{(-x)!}$$

x	1/Γ(1+x)	1/Γ(1-x)	x	1/Γ(1+x)	1/Γ(1-x)	x	1/Γ(1+x)	1/Γ(1-x)
0,00	+ 1,	+ 1,	1,00	+ 1,	- 0,	2,00	+ 0,	+ 0,
02	0000	00000	02	00000	00000	02	50000	00000
04	0113	*98819	04	*99145	01976	04	49082	02016
06	0220	97587	06	98273	03903	06	48173	04060
08	0323	96302	08	97383	05778	08	47274	06125
	0420	94965		96478	07597		46384	08205
0,10	0511	93578	1,10	95558	09358	2,10	45504	10294
12	0598	92140	12	94623	11057	12	44634	12384
14	0679	90652	14	93676	12691	14	43774	14468
16	0755	89114	16	92715	14258	16	42924	16540
18	0826	87528	18	91743	15755	18	42084	18591
0,20	0891	85894	1,20	90760	17179	2,20	41255	20614
22	0952	84213	22	89767	18527	22	40436	22603
24	1007	82485	24	88765	19797	24	39627	24548
26	1057	80713	26	87755	20985	26	38830	26442
28	1102	78897	28	86736	22091	28	38042	28277
0,30	1142	77038	1,30	85711	23111	2,30	37266	30045
32	1178	75138	32	84679	24044	32	36500	31738
34	1208	73198	34	83642	24887	34	35745	33349
36	1234	71219	36	82600	25639	36	35000	34869
38	1254	69202	38	81554	26297	38	34266	36290
0,40	1271	67150	1,40	80504	26860	2,40	33543	37604
42	1282	65065	42	79452	27327	42	32831	38895
44	1289	62947	44	78397	27697	44	32130	39883
46	1292	60799	46	77341	27967	46	31439	40832
48	1290	58622	48	76283	28139	48	30759	41645
0,50	1284	56419	1,50	75225	28209	2,50	30090	42314
52	1273	54192	52	74168	28180	52	29432	42833
54	1259	51942	54	73110	28049	54	28784	43195
56	1241	49672	56	72055	27817	56	28146	43394
58	1218	47385	58	71000	27483	58	27520	43424
0,60	1192	45082	1,60	69948	27049	2,60	26903	43279
62	1162	42767	62	68899	26515	62	26297	42955
64	1128	40441	64	67853	25882	64	25702	42447
66	1091	38107	66	66811	25151	66	25117	41750
68	1050	35769	68	65772	24323	68	24542	40862
0,70	1005	33427	1,70	64738	23399	2,70	23977	39778
72	0958	31086	72	63709	22382	72	23422	38497
74	0907	28748	74	62685	21274	74	22878	37016
76	0853	26417	76	61667	20077	76	22343	35335
78	0796	24094	78	60654	18793	78	21818	33452
0,80	0737	21782	1,80	59648	17426	2,80	21303	31367
82	0674	19486	82	58649	15979	82	20798	29081
84	0609	17208	84	57657	14455	84	20302	26597
86	0541	14951	86	56671	12858	86	19815	23915
88	0470	12717	88	55694	11191	88	19338	21040
0,90	0398	10511	1,90	54724	09460	2,90	18870	17974
92	0322	08336	92	53762	07669	92	18412	14724
94	0245	06194	94	52809	05822	94	17962	11295
96	0165	04088	96	51864	03925	96	17521	07692
98	0084	02023	98	50927	01982	98	17090	03925
1,00	0000	00000	2,00	50000	00000	3,00	16667	00000
	+ 1,	+ 0,		+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,

Если  $|z| \gg 1$  при условии, что  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), то

$$\psi'(z) \approx \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \dots$$

#### 4.2. Частные значения

$$\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6} = 1,6449340668 \dots, \quad \psi'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} = 4,9348022005 \dots,$$

Если  $n = 1, 2, 3, \dots$ , то

$$\begin{aligned} \psi'(n) &= \frac{\pi^2}{6} - \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \right), \\ \psi'\left(\frac{1}{2} \pm n\right) &= \frac{\pi^2}{2} \mp 4 \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'\left(n + \frac{1}{2}\right) &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'\left(\frac{1}{2} - n\right) = \pi^2. \end{aligned}$$

#### 4.3. Функциональные уравнения

$$\begin{aligned} \psi'(z+1) &= \psi'(z) - \frac{1}{z^2}, \\ \psi'(z) + \psi'(1-z) &= \left( \frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2, \quad \psi'\left(\frac{1}{2} + z\right) + \psi'\left(\frac{1}{2} - z\right) = \left( \frac{\pi}{\cos \pi z} \right)^2. \end{aligned}$$

### С. НЕПОЛНЫЕ ГАММА-ФУНКЦИИ $\Gamma(a, z)$ , $\gamma(a, z)$

*Неполные гамма-функции* определяются следующими равенствами:

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, \quad \gamma(a, z) = \Gamma(a) - \Gamma(a, z).$$

Путь интегрирования выбирается так, чтобы он не проходил через начало координат и чтобы вдоль него  $\arg t$  изменялся непрерывно от  $\arg t = \arg z$  в начале пути до  $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = \beta$ , где  $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ , в конце. Для  $\operatorname{Re} a > 0$  имеем:

$$\gamma(a, z) = \int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt,$$

где путь интегрирования может быть выбран произвольно (рис. 25).

Эти функции являются функциями двух комплексных переменных  $a, z$ . Если рассматривать их как функции  $z$  при подходящим образом фиксированных значениях  $a$ , то получаются многие специальные функции (интегральная показательная функция, интегральный логарифм, интегральные синус и косинус, интеграл ошибок и интегралы Френеля).

Употребляются и другие обозначения для этих функций. Иногда, например,  $\gamma(a, z)$ ,  $\Gamma(a, z)$  обозначаются соответственно через  $P(a, z)$ ,  $Q(a, z)$ . По аналогии с обозначением  $\Gamma(z) = (z-1)!$  часто пишут  $\gamma(a, z) = (a-1, z)!$  В астрофизике и ядерной физике употребляют обозначение

$$E_n(z) = z^{n-1} \Gamma(1-n, z) = \int_1^{\infty} e^{-zt} t^{-n} dt.$$

При фиксированном  $a$  функции  $\Gamma(a, z)$  и  $\gamma(a, z)$  будут аналитическими функциями переменного  $z$ , причем для  $\gamma(a, z)$  исключаются значения  $a=0, -1, -2, \dots$ . Если  $a$  не является натуральным числом, то они многозначны с единственной конечной точкой ветвления  $z=0$  и не имеют других особенностей в конечных точках.

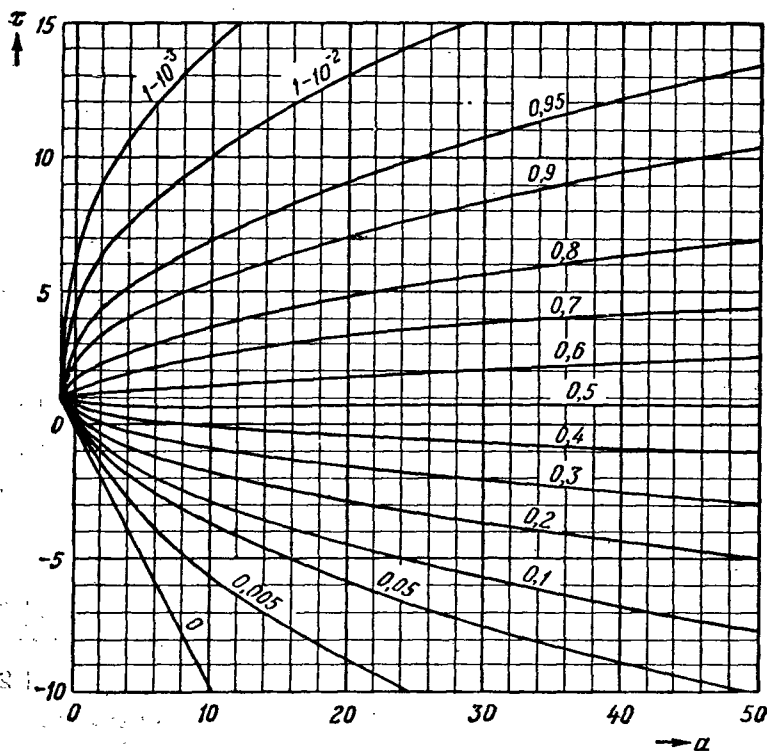


Рис. 25. Кривые  $\frac{\gamma(a+1, a+x)}{\Gamma(a+1)} = \text{const}$  в плоскости  $a, x$ .

При  $a \neq 0, -1, -2, \dots$  имеет место разложение в степенной ряд

$$z^{-a} \gamma(a, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n! (a+n)} = e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a(a+1)\dots(a+n)}$$

В секторе  $-\frac{3\pi}{2} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) существует при  $|z| \gg 1$  асимптотическое представление

$$\gamma(a, z) \approx \Gamma(a) - z^{a-1} e^{-z} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{z^n} \right]$$

По аргументу  $a$  справедливы следующие функциональные уравнения:

$$\gamma(a+1, z) = a\gamma(a, z) - z^a e^{-z}, \quad \Gamma(a+1, z) = a\Gamma(a, z) + z^a e^{-z}$$

## VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

### 1. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм

#### 1.1. Интегральная показательная функция определяется как

$$\text{Ei}(z) = -\Gamma(0, ze^{-\pi i}) = -\int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

где путь интегрирования должен быть взят от  $z$  до  $\infty$  так, чтобы вдоль него  $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = \beta$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{3\pi}{2}$ , и  $\text{Re } t$  оставалась ограниченной справа. Функция

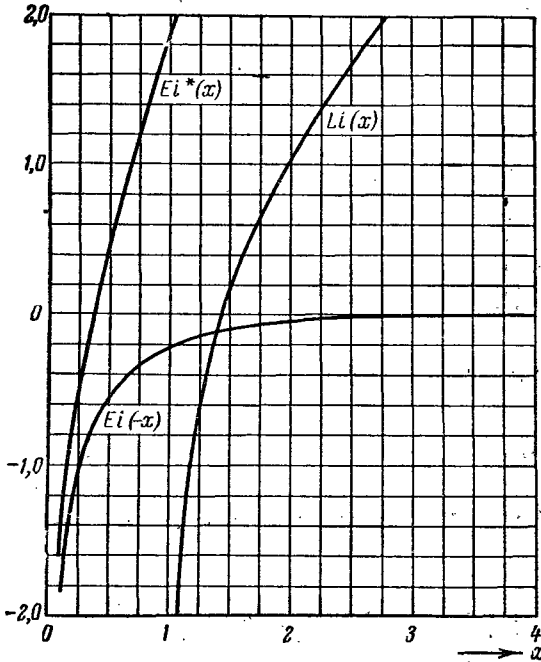


Рис. 26. Интегральная показательная функция и интегральный логарифм.

где  $x$  — действительная положительная величина (рис. 26, 27, таблица 15):

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n \cdot n!}.$$

$\text{Ei}(z)$  является бесконечнозначной функцией  $z$  с единственной конечной точкой ветвления  $z=0$ . Значение этой функции после  $m$  обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$\text{Ei}(ze^{2m\pi i}) = \text{Ei}(z) + 2m\pi i$$

$$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[т. е. циклическая постоянная функции  $\text{Ei}(z)$  равна  $2\pi i$ ]. Выполняющееся при  $z \neq 0$  разложение в ряд

$$\text{Ei}(z) = C - \pi i + \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n \cdot n!}$$

( $C$  — постоянная Эйлера) указывает на логарифмическую особенность в начале координат. [Иногда употребляются обозначения

$$\text{Ei}^+(x) = \text{Ei}(x + i0),$$

$$\text{Ei}^-(x) = \text{Ei}(x - i0).]$$

Действительная ветвь функции  $\text{Ei}(z)$  получается при  $z = -x$ ,

Иногда рассматривается функция  $Ei^*(z) = Ei(z) + \pi i$ , которую обозначают также через  $\bar{Ei}(z)$ . Ее действительная ветвь получается при действительных положительных значениях аргумента  $z = x$  (рис. 26, 27, таблица 15);

$$Ei^*(x) = C + \ln x +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$$

Действительные ветви обеих этих функций допускают интегральные представления:

$$Ei(-x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t} dt,$$

$$Ei^*(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt,$$

где второй интеграл понимается как главное значение в смысле Коши:

$$\int_{-\infty}^x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^x \right].$$

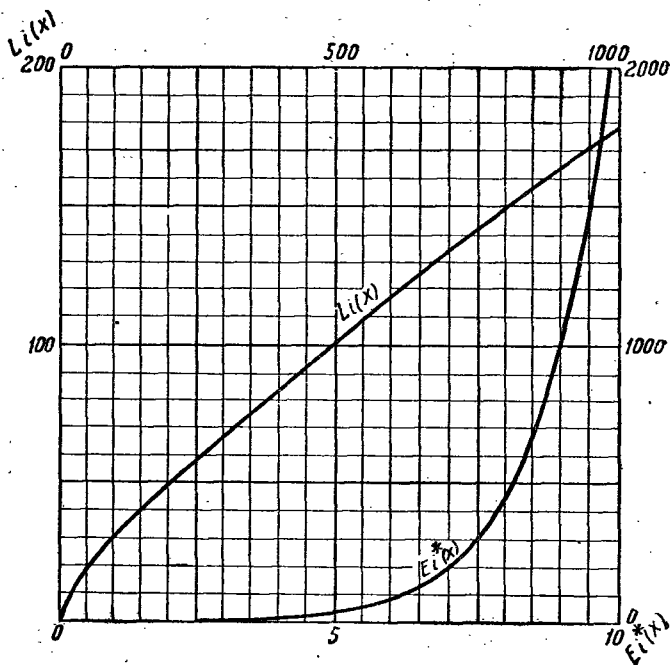


Рис. 27. Функции  $Ei^*(x)$  и  $Li(x)$ .

При  $x \gg 1$  получается следующая асимптотика:

$$Ei(-x) \approx \frac{e^{-x}}{-x} \left( 1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right), \quad Ei^*(x) \approx \frac{e^x}{x} \left( 1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \frac{3!}{x^3} + \dots \right).$$

При  $x > 2$  справедлива приближенная формула:

$$Ei(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} \left\{ 0,9999965 - 0,9989710 \frac{1}{x} + 1,9487646 \frac{1}{x^2} - 4,9482092 \frac{1}{x^3} + \right. \\ \left. + 11,7850792 \frac{1}{x^4} - 20,4523840 \frac{1}{x^5} + 21,1491469 \frac{1}{x^6} - 9,5240410 \frac{1}{x^7} \pm 0,35 \cdot 10^{-5} \right\}.$$

[При малых  $x$ , как видно из разложений,

$$Ei^*(x) \approx Ei(-x) \approx \ln \gamma x$$

( $\gamma$  — постоянная Эйлера).]

1.2. Интегральный логарифм определяется как

$$li(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t}.$$

Он связан с  $Ei(z)$  соотношениями

$$li(z) = Ei(\ln z), \quad Ei(z) = li(e^z).$$

В частности, для действительных положительных значений аргумента  $z = x$  можно определить действительную функцию (рис. 26, 27):

$$Li(x) = \begin{cases} li(x) = Ei(\ln x) & \text{при } 0 < x < 1, \\ li(x) + \pi i = Ei^*(\ln x) & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Таблица 15. Интегральные показательные функции  $Ei^*(x)$  и  $-Ei(-x)$ 

$x$	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$	$x$	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$	$x$	$Ei^*(x)$	$-Ei(-x)$
0,00	$-\infty$	$+\infty$	0,50	4542 + 328	5598 - 120	1,0	+ 1,8951 + 3	21938 + 729
01	4,0179	4,0379	51	4870 325	5478 116	1	2,1674 25	18599 573
02	3,31477	3,3547	52	5195 322	5362 112	2	2,4421 46	15841 457
03	2,8991	2,9591	53	5517 319	5250 110	3	2,7214 65	13545 369
04	2,6013	2,6813	54	5836 317	5140 106	4	3,0072 83	11622 300
0,05	-2,3679 - 387	+ 2,4679 + 387	0,55	6153 + 314	5034 - 104	1,5	+ 3,3013 + 100	10002 + 247
06	2,1753 272	2,2953 272	56	6467 311	4930 100	6	3,6053 116	08631 204
07	2,0108 201	2,1508 201	57	6778 309	4830 98	7	3,9210 133	07465 170
08	1,8669 154	2,0269 154	58	7087 307	4732 96	8	4,2499 149	06471 142
09	1,7387 122	1,9187 122	59	7394 305	4636 92	9	4,5937 167	05620 120
0,10	-1,6228 - 99	+ 1,8229 + 99	0,60	7699 + 303	4544 - 90	2,0	+ 4,9542 + 185	04890 + 101
11	1,5170 82	1,7371 82	61	8002 300	4454 88	1	5,3332 204	04261 86
12	1,4193 69	1,6595 69	62	8302 299	4366 86	2	5,7326 224	03719 73
13	1,3287 58	1,5889 58	63	8601 297	4280 83	3	6,1544 245	03250 62
14	1,2438 50	1,5241 50	64	8898 296	4197 82	4	6,6007 268	02844 53
0,15	-1,1641 - 44	+ 1,4645 + 44	0,65	9194 + 294	4115 - 79	2,5	+ 7,0738 + 292	02491 + 46
16	1,0887 38	1,4092 39	66	9488 292	4036 77	6	7,5761 318	02185 39
17	1,0172 34	1,3578 34	67	9780 291	3959 76	7	8,1103 347	01918 34
18	0,9491 30	1,3098 30	68	10071 290	3883 73	8	8,6793 377	01686 29
19	0,8841 27	1,2649 27	69	0361 288	3810 72	9	9,2860 410	01482 25
0,20	-0,8218 - 24	+ 1,2227 + 25	0,70	0649 + 287	3738 - 70	3,0	+ 9,9338 + 446	013048 + 221
21	0,7619 22	1,1829 22	71	0936 286	3668 69	1	10,6263 485	011494 192
22	0,7042 20	1,1454 20	72	1222 285	3599 67	2	11,3673 527	010133 167
23	0,6485 18	1,1099 18	73	1507 284	3532 65	3	12,1610 572	008939 145
24	0,5947 17	1,0762 17	74	1791 282	3467 64	4	13,0121 622	007891 127
0,25	-0,5425 - 15	+ 1,0443 + 16	0,75	2073 + 282	3403 - 62	3,5	+ 13,9254 + 675	006970 + 111
26	0,4919 + 506	1,0139 290	76	2355 281	3341 61	6	14,9063 734	006160 97
27	0,4427 478	0,9849 276	77	2636 280	3280 59	7	15,9606 797	005448 85
28	0,3949 467	0,9573 264	78	2916 279	3221 58	8	17,0948 866	004820 74
29	0,3482 455	0,9309 252	79	3195 279	3163 57	9	18,3157 941	004267 65
0,30	-0,3027 + 445	+ 0,9057 - 242	0,80	3474 + 278	3106 - 56	4,0	+ 19,6309 + 1023	003779 + 57
31	0,2582 435	0,8815 232	81	3752 277	3050 54	1	21,0485 1112	003349 50
32	0,2147 426	0,8583 222	82	4029 277	2996 53	2	22,5774 1209	002969 46
33	0,1721 417	0,8361 214	83	4306 276	2943 52	3	24,2274 1314	002633 39
34	0,1304 410	0,8147 205	84	4582 275	2891 51	4	26,0090 1429	002336 34
0,35	-0,0894 + 401	+ 0,7942 - 197	0,85	4857 + 275	2840 - 50	4,5	+ 27,9337 + 1555	002073 + 30
36	0,0493 395	0,7745 191	86	5132 275	2790 48	6	30,0141 1691	001841 27
37	-0,0098 388	0,7554 183	87	5407 274	2742 48	7	32,2639 1840	001635 23
38	+ 0,0290 382	0,7371 177	88	5681 274	2694 47	8	34,6979 2003	001453 21
39	0,0672 376	0,7194 170	89	5955 273	2647 45	9	37,3325 2180	001291 18
0,40	+ 0,1048 + 370	+ 0,7024 - 165	0,90	6228 + 273	2602 - 45	5,0	+ 40,1853 + 2373	001148 + 16
41	0,1418 365	0,6859 159	91	6501 273	2557 44	6	85,9898	3601 (-3)
42	0,1783 360	0,6700 154	92	6774 273	2513 43	7	191,505	1155 (-3)
43	0,2143 355	0,6546 149	93	7047 272	2470 41	8	440,380	3767 (-4)
44	0,2498 351	0,6397 144	94	7319 272	2429 42	9	1037,88	1245 (-4)
0,45	+ 0,2849 + 346	+ 0,6253 - 139	0,95	7591 + 273	2387 - 40	10	2492,23	4157 (-5)
46	0,3195 342	0,6114 135	96	7864 272	2347 39	11	+ 6071,41	1400 (-5)
47	0,3537 339	0,5979 131	97	8136 271	2308 39	12	14959,5	4751 (-6)
48	0,3876 335	0,5848 127	98	8407 272	2269 38	13	37197,7	1622 (-6)
49	0,4211 331	0,5721 123	99	8679 272	2231 37	14	93192,5	5566 (-7)
0,50	+ 0,4542	+ 0,5598	1,00	8951	2194	15	234956	1918 (-7)
				+ 1,	+ 0,			+ 0,



## 2. Интегральный синус и интегральный косинус

2.1. Интегральный синус  $si(z)$  и интегральный косинус  $ci(z)$  определяются формулами

$$si(z) = \frac{1}{2i} [Ei(iz) - Ei(-iz)] = \int_{\infty}^z \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$ci(z) = \frac{1}{2} [Ei(iz) + Ei(-iz)] = \int_{\infty}^z \frac{\cos t}{t} dt,$$

причем путь интегрирования должен быть выбран так, чтобы в начале пути  $\lim_{t \rightarrow \infty} \arg t = 0$  и  $\operatorname{Im} t$  оставалась вдоль него ограниченной.

Употребляют также следующие обозначения для этих функций:

$$Si(z) = si(z) + \frac{\pi}{2} = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt, \quad Ci(z) = ci(z).$$

Функция  $si(z)$  является целой функцией  $z$ , а  $ci(z)$  — бесконечнозначной аналитической функцией  $z$  с единственной конечной точкой ветвления  $z=0$ .

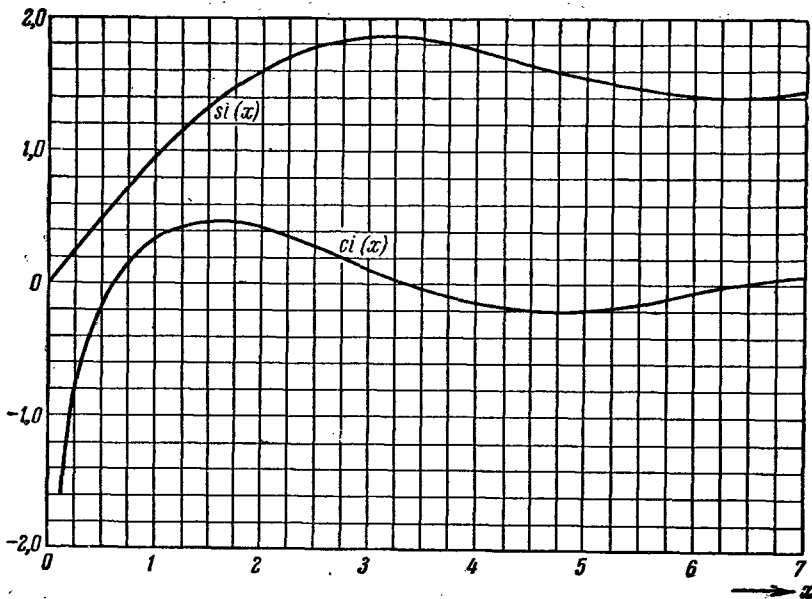


Рис. 28. Интегральный синус и интегральный косинус.

Значение функции  $ci(z)$  после  $m$  обходов вокруг точки ветвления определяется формулой

$$ci(ze^{m\pi i}) = ci(z) + m\pi i \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

[т. е. циклическая постоянная этой функции равна  $\pi i$ ].

Имеют место представления

$$si(z) = -\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad ci(z) = \ln \gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)(2n)!}.$$

Отсюда видно, что

$$\text{ci}(z) - \ln \gamma z = \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

является целой функцией  $z$ .

Функция  $\text{si}(x)$  принимает действительные значения при всех действительных значениях  $x$ , а  $\text{ci}(x)$  — при действительных  $x > 0$  (рис. 28, таблица 16). Эти действительные функции  $\text{si}(x)$  и  $\text{ci}(x)$  получаются, если для соответствующего определяющего интеграла путь интегрирования взят вдоль действительной оси, начиная с  $+\infty$ . Имеем:

$$\text{si}(-x) = -\text{si}(x) - \pi, \quad \text{Si}(-x) = -\text{Si}(x).$$

Асимптотическое поведение при  $x \gg 1$  дается формулами

$$\begin{aligned} \text{si}(x) &\approx -\frac{\cos x}{x} \left( 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\sin x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right), \\ \text{ci}(x) &\approx \frac{\sin x}{x} \left( 1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left( \frac{1!}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \dots \right), \end{aligned}$$

и, следовательно, в качестве первого приближения получим:

$$\text{si}(x) \approx -\frac{\cos x}{x}, \quad \text{ci}(x) \approx \frac{\sin x}{x}.$$

[Обе функции имеют бесчисленное количество экстремумов (таблица 17).]

В прямоугольной системе координат  $(c, s)$  кривая  $c = \text{ci}(x)$ ,  $s = \text{si}(x)$  ( $x$  — действительный положительный параметр) представляет собой так называемую

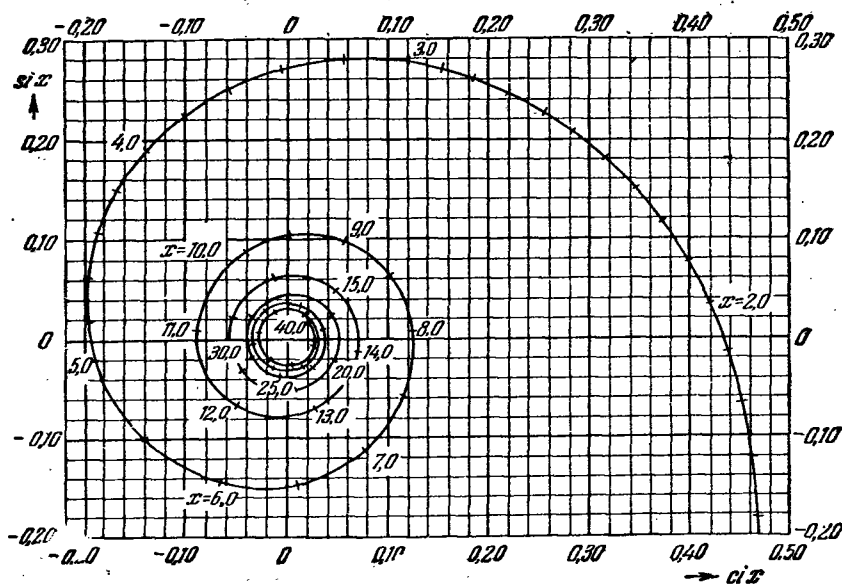


Рис. 29. sici-спираль.

ую sici-спираль (рис. 29). Длина дуги от начальной точки ( $x=0$ ) до точки  $(\text{ci } x, \text{si } x)$  равна  $|\ln x|$ , а кривизна  $\chi$  в этой точке имеет величину  $\chi = x$ . Кривизна, следовательно, возрастает по экспоненциальному закону с возрастанием длины дуги.

2.2. Вводят функции  $\text{shi}(z)$ ,  $\text{chi}(z)$ , называемые интегральными гиперболическими синусом и косинусом:

$$\text{shi}(z) = \int_0^z \frac{\sinh t}{t} dt = -i \text{Si}(iz),$$

$$\text{chi}(z) = C + \ln z + \int_0^z \frac{\cosh t - 1}{t} dt = \text{Ci}(iz) - \frac{i\pi}{2}.$$

При этом  $\text{shi}(z)$  — действительная функция для всех действительных, а  $\text{chi}(z)$  — для действительных положительных значений  $z = x$ . [При  $x > 0$  имеем:

$$\text{shi}(x) = \frac{\text{Ei}^*(x) - \text{Ei}(-x)}{2}, \quad \text{chi}(x) = \frac{\text{Ei}^*(x) + \text{Ei}(-x)}{2}, \quad \text{chi}(x) + \text{shi}(x) = \text{Li } e^x,$$

откуда получаются разложения

$$\text{shi}(x) = x + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \dots, \quad \text{chi}(x) = \ln \gamma x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

Функция  $\text{shi}(x)$  является нечетной:

$$\text{shi}(-x) = -\text{shi}(x).]$$

### 3. Некоторые интегральные формулы

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-mt}}{a+t} dt = -e^{ma} \text{Ei}[-m(a+x)] \quad (m > 0, a > 0, x+a > 0),$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{im(b+t)}}{a+t} dt = -e^{im(b-a)} \text{Ei}[im(a+x)] \quad \left( \begin{array}{l} m > 0, a > 0, x+a > 0, \\ \arg[im(a+x)] = \pi/2 \end{array} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t-ai}{t^2+a^2} e^{imt} dt = -e^{ma} \text{Ei}(-ma) \quad (m > 0, a > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t+ai}{t^2+a^2} e^{imt} dt = -e^{-ma} [\text{Ei}^*(ma) - \pi i],$$

$$\int_0^x \text{Ei}(-mt) dt = x \text{Ei}(-mx) - \frac{1-e^{-mx}}{m} \quad (m > 0, x > 0),$$

$$\int_0^x \text{Ei}(imt) dt = x \text{Ei}(imx) + \frac{1-e^{imx}}{im} \quad \left( \begin{array}{l} m > 0, x > 0, \\ \arg(imt) = \arg(imx) = \pi/2 \end{array} \right),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \text{ci}(qt) dt = -\frac{1}{2p} \ln \left( 1 + \frac{p^2}{q^2} \right) \quad (p > 0, q > 0),$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \text{si}(qt) dt = -\frac{1}{p} \text{arctg} \frac{p}{q},$$

$$\int_0^{+\infty} \cos t \text{ci } t dt = \int_0^{+\infty} \sin t \text{si } t dt = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{+\infty} \text{ci}^2(t) dt = \int_0^{+\infty} \text{si}^2(t) dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \text{ci}(t) \text{si}(t) dt = -\ln 2.$$

Таблица 16. Интегральный синус  $Si(x)$  и интегральный косинус  $Ci(x)$ 

$x$	$Si(x)$	$Ci(x)$	$x$	$Si(x)$	$Ci(x)$	$x$	$Si(x)$	$Ci(x)$
0,00	+ 0,	-∞	0,50	+ 0,	- 0,	1,0	+ 0,	
01	010000	4,0280	51	4931 + 96	1778 + 173	2	9461 - 121	+ 0,3374 - 541
02	020000	3,3349	52	5027 96	1605 169	4	*1080 138	0,4205 406
03	029999	2,9296	53	5123 95	1436 165	6	2562 153	0,4620 314
04	039996	2,6421	54	5218 95	1271 161	8	3892 164	0,4717 244
0,05	04999	- 2,4191 - 388	55	5313 95	1110 157	10	5058 171	0,4568 187
06	05999	2,2371 273	56	5408 + 95	0953 + 153	2,0	6054 - 175	+ 0,4230 - 140
07	06998	1,9501 155	57	5503 95	0800 150	2	6876 174	0,3751 98
08	07997	1,8328 123	58	5598 95	0650 146	4	7525 170	0,3173 61
09	08996	- 1,7279 - 100	59	5693 94	0504 142	6	8004 163	0,2533 - 28
0,10	09994	1,6331 83	60	5787 94	0362 139	8	8321 152	0,1865 + 1
11	10993	1,5466 70	61	5881 + 94	0223 + 136	3,0	8487 - 139	+ 0,1196 + 26
12	11990	1,4672 59	62	5975 94	0087 133	2	8514 123	+ 0,0553 47
13	12988	1,3938 51	63	6069 94	*0046 130	4	8419 105	- 0,0045 64
14	13985	- 1,3255 - 45	64	6163 93	0176 127	6	8219 86	0,0580 77
0,15	14981	1,2618 39	65	6256 93	0303 123	8	7934 66	0,1038 87
16	15977	1,2020 35	66	6349 + 93	0426 + 122	4,0	7582 - 46	- 0,1410 + 92
17	16973	1,1457 31	67	6442 93	0548 118	2	7184 27	0,1690 94
18	17968	1,0925 28	68	6535 93	0666 116	4	6758 - 8	0,1877 93
19	18962	- 1,0422 - 25	69	6628 92	0782 113	6	6325 + 9	0,1970 89
0,20	1996	0,9944 23	70	6720 92	0895 110	8	5900 25	0,1976 82
21	2095	0,9057 19	71	6812 + 92	1005 + 108	5,0	5499 + 38	- 0,19003 + 724
22	2194	0,8643 18	72	6904 92	1113 106	2	5137 49	0,17525 612
23	2293	- 0,8247 - 16	73	6996 91	1219 103	4	4823 58	0,15439 486
24	2392	0,7867 + 380	74	7087 92	1322 101	6	4567 64	0,12867 352
0,25	2491	0,7503 350	75	7179 91	1423 99	8	4374 67	0,09944 215
26	2590	0,7153 337	76	7270 + 90	1522 + 96	6,0	4247 + 67	- 0,06806 + 79
27	2689	0,6816 324	77	7360 91	1618 94	2	4187 65	0,03587 - 51
28	2788	- 0,6492 + 313	78	7451 90	1712 93	4	4192 61	- 0,00418 171
29	2886	0,6179 302	79	7541 90	1805 90	6	4258 55	+ 0,02582 278
0,30	2985	0,5877 292	80	7631 90	1895 88	8	4379 47	0,05308 368
31	3083	0,5585 281	81	7721 + 90	1983 + 86	7,0	4546 + 38	+ 0,07670 - 439
32	3182	0,5304 273	82	7811 89	2069 84	2	4751 28	0,09596 490
33	3280	- 0,5031 + 264	83	7900 89	2153 82	4	4983 17	0,11036 520
34	3378	0,4767 256	84	7989 89	2235 81	6	5233 + 6	0,11960 529
0,35	3476	0,4511 248	85	8078 88	2316 78	8	5489 - 6	0,12359 518
36	3574	0,4263 241	86	8166 + 88	2394 + 77	8,0	5742 - 14	+ 0,12263 - 487
37	3672	0,4022 234	87	8254 88	2471 75	2	5981 22	0,11644 440
38	3770	- 0,3788 + 227	88	8342 88	2546 73	4	6198 30	0,10607 379
39	3867	0,3561 220	89	8430 88	2619 72	6	6386 36	0,09194 306
0,40	3965	0,3341 215	90	8518 87	2691 70	8	6538 40	0,07476 224
41	4062	0,3126 208	91	8605 + 87	2761 + 68	9,0	6650 - 43	+ 0,05535 - 138
42	4159	0,2918 203	92	8692 86	2829 67	2	6720 44	0,03455 - 51
43	4256	- 0,2715 + 198	93	8778 87	2896 65	4	6747 43	+ 0,01325 + 35
44	4353	0,2517 192	94	8865 86	2961 63	6	6732 40	- 0,00771 116
0,45	4450	0,2325 187	95	8951 85	3024 62	8	6676 37	0,02752 189
46	4546	0,2138 182	96	9036 + 86	3086 + 61	10,0	6583 - 32	- 0,04546 + 252
47	4643	0,1956 178	97	9122 85	3147 59		+ 1,	
48	4739	- 0,1778	98	9207 85	3206 57			
49	4835		99	9292 85	3263 56			
0,50	4931		1,00	9377 84	3319 55			
	+ 0,			+ 0,				

Продолжение табл. 16

$x$	$Si(x)$	$ci(x)$	$x$	$Si(x)$	$ci(x)$	$x$	$Si(x)$	$ci(x)$	
10,0	+ 1, 6583	- 200 - 0,04546	+ 1614	25	+ 1, 5315	- 0,00685	75	+ 1, 5586	- 0,00533
10,5	6229	- 94 - 0,07828	+ 2256	26	5449	+ 0,02830	80	5723	- 0,01240
11,0	5783	+ 23 - 0,08956	+ 2323	27	5803	+ 0,03572	85	5824	- 0,001935
11,5	5357	+ 125 - 0,07857	+ 1849	28	6047	+ 0,01087	90	5757	+ 0,009986
12,0	5050	+ 190 - 0,04978	+ 987	29	5973	- 0,02195	95	5630	+ 0,007110
12,5	4923	+ 205 - 0,01141	- 35	30	5668	- 0,03303	100	5622	- 0,005149
13,0	4994	+ 172 + 0,02676	- 970	31	5418	- 0,01395	110	5799	- 0,000320
13,5	5229	+ 101 + 0,05576	- 1609	32	5442	+ 0,01639	120	5640	+ 0,004781
14,0	5562	+ 11 + 0,06940	- 1828	33	5703	+ 0,03026	130	5737	- 0,007132
14,5	5907	- 74 + 0,06554	- 1604	34	5953	+ 0,01626	140	5722	+ 0,007011
15,0	6182	- 137 + 0,04628	- 1019	35	5969	- 0,01148	150	5662	- 0,004800
15,5	6326	- 164 + 0,01719	- 232	36	5751	- 0,02741	160	5769	+ 0,001409
16,0	6313	- 150 - 0,01420	+ 560	37	5506	- 0,01792	170	5653	+ 0,002010
16,5	6156	- 102 - 0,04031	+ 1172	38	5455	+ 0,00713	180	5741	- 0,004432
17,0	5901	- 33 - 0,05524	+ 1472	39	5633	+ 0,02451	190	5704	+ 0,005250
17,5	5615	+ 41 - 0,05610	+ 1407	40	5870	+ 0,01902	200	5684	- 0,004378
18,0	5366	+ 100 - 0,04348	+ 1013	41	5949	- 0,00328	300	5709	- 0,003332
18,5	5213	+ 133 - 0,02111	+ 400	42	5808	- 0,02157	400	5721	- 0,002124
19,0	5186	+ 132 + 0,00515	- 275	43	5583	- 0,01962	500	5726	- 0,0009320
19,5	5286	+ 100 + 0,02883	- 850	44	5481	- 0,00011	600	5725	+ 0,0000764
20,0	5482	+ 46 + 0,04442	- 1195	45	5587	+ 0,01863	700	5720	+ 0,0007788
20,5	5723	- 16 + 0,04859	- 1239	46	5798	+ 0,01979	800	5714	+ 0,001118
21,0	5949	- 72 + 0,04089	- 986	47	5918	+ 0,00307	900	5707	+ 0,001109
21,5	6106	- 108 + 0,02373	- 510	48	5845	- 0,01571	10 <sup>3</sup>	5702	+ 0,000826
22,0	6161	- 116 + 0,00164	+ 65	49	5651	- 0,01957	10 <sup>4</sup>	5709	- 0,0000306
22,5	6104	- 97 - 0,01986	+ 600	50	5516	- 0,00563	10 <sup>5</sup>	5708	+ 0,0000004
23,0	5955	- 55 - 0,03566	+ 968	55	5707	- 0,01817	10 <sup>6</sup>	5708	- 0,0000004
23,5	5752	- 2 - 0,04221	+ 1089	60	5867	- 0,00481	10 <sup>7</sup>	5708	+ 0,0000000
24,0	5547	+ 49 - 0,03833	+ 946	65	5792	+ 0,01285		+ 1,	
24,5	5390	+ 87 - 0,02539	+ 582	70	5616	+ 0,01092	$\infty$	$\pi/2$	0
25,0	5315	+ 102 - 0,00685	+ 93	75	5586	- 0,00533			
	+ 1,				+ 1,				

Таблица 17. Экстремумы функций  $ci(x)$  и  $si(x)$

$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $ci(x)$	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $si(x)$	$\frac{x}{\pi}$	Max. Min. $si(x)$
0,5	+ 0,47200	1	+ 0,28114	16	- 0,019879
1,5	- 0,19841	2	- 0,15264	17	+ 0,018711
2,5	+ 0,12377	3	+ 0,10396	18	- 0,017673
3,5	- 0,089564	4	- 0,078635	19	+ 0,016744
4,5	+ 0,070065	5	+ 0,063168	20	- 0,015907
5,5	- 0,057501	6	- 0,052762	21	+ 0,015151
6,5	+ 0,048742	7	+ 0,045289	22	- 0,014463
7,5	- 0,042292	8	- 0,039665	23	+ 0,013834
8,5	+ 0,037345	9	+ 0,035280	24	- 0,013258
9,5	- 0,033433	10	- 0,031767		
10,5	+ 0,030260	11	+ 0,028889		
11,5	- 0,027637	12	- 0,026489		
12,5	+ 0,025432	13	+ 0,024456		
13,5	- 0,023552	14	- 0,022713		
14,5	+ 0,021931	15	+ 0,021201		
15,5	- 0,020519				

## VII. ИНТЕГРАЛ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

### 1. Интеграл ошибок

1.1. Интеграл ошибок  $\Phi(z)$  определяется равенством

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \int_0^{z^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2i}} \int_0^{z^2} H_{-1/2}^{(2)}(-it) dt$$

(определения функций  $\gamma(a, z)$  и  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  см. соответственно в V, С и XIII, А).

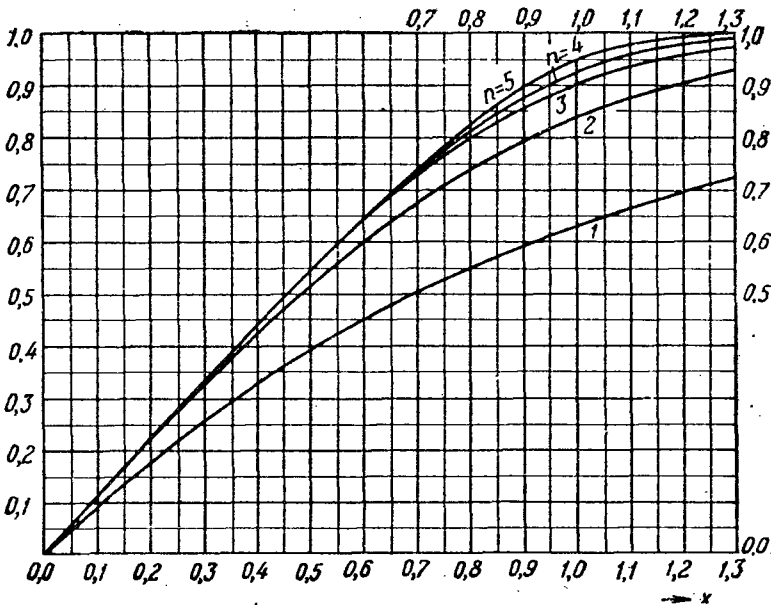


Рис. 30. Функции  $E_n(x)$ ;  $E_2(x) = \Phi(x)$ .

Интеграл ошибок \*) является целой функцией от  $z$ , причем

$$\Phi(-z) = -\Phi(z).$$

Для действительных значений аргумента  $z = x$  интеграл ошибок принимает действительные значения (рис. 30, таблица 18). В частности, имеем:

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

\*) Эту функцию называют часто *интегралом вероятности ошибок* или *интегралом вероятности*. — Прим. ред.

[Часто встречаются также производные интеграла ошибок (рис. 31, таблица 19):

$$\Phi_1(x) = \Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2};$$

$$\Phi_{n+1}(x) = \Phi^{(n+1)}(x) = 2^n \Phi_1(x) \left\{ (-x)^n - n \frac{n-1}{4} (-x)^{n-2} + \right. \\ \left. + n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{32} (-x)^{n-4} - \dots \right\}.$$

Из представлений для  $\gamma(a, z)$  получаем для  $\Phi(z)$  степенные ряды

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n! 2^{n+1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} z^{2n+1},$$

а в секторе  $-\frac{3\pi}{4} + \varepsilon \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) имеет место асимптотическое разложение для  $|z| \gg 1$ :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \{1 - \Phi(z)\} \approx \frac{e^{-z^2}}{2z} \left\{ 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z^2)^3} + \dots \right\}.$$

При этом для положительных действительных значений аргумента  $z = x$  ошибка,

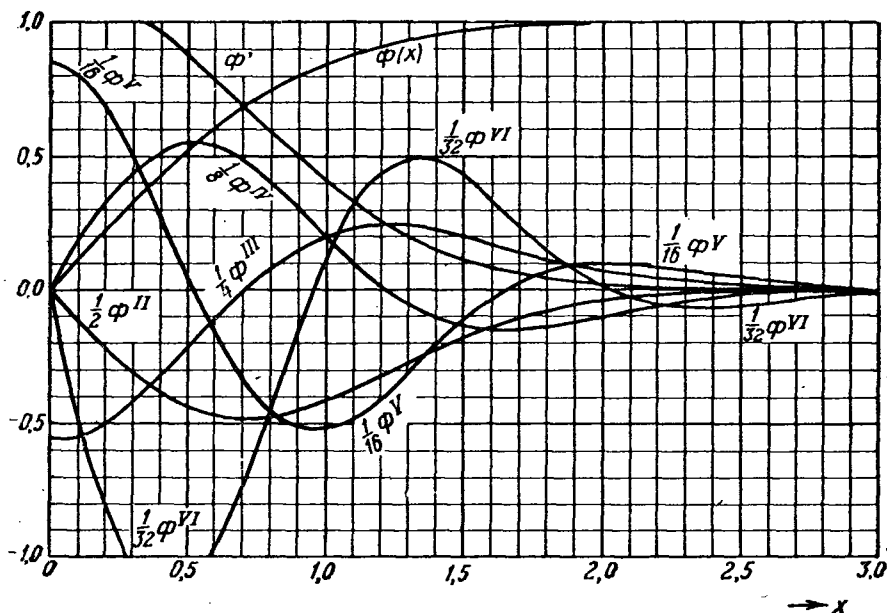


Рис. 31. Производные интеграла ошибок.

получающаяся при обрывании ряда, по абсолютной величине меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак (таблица 20).

Обобщением интеграла ошибок являются функции  $E_n(z)$ , определяемые равенством (рис. 30)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right) E_n(z) = \frac{1}{n} \gamma\left(\frac{1}{n}, z^n\right) = \frac{1}{n} \int_0^{z^n} e^{-t} t^{\frac{1}{n}-1} dt = \int_0^z e^{-t^n} dt.$$

[в частности,

$$E_1(z) = 1 - e^{-z}, \quad E_2(z) = \Phi(z)].$$

Для функций  $E_n(z)$  легко получить степенные ряды и асимптотику из представлений для  $\gamma(a, z)$ . [А именно:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) E_n(z) = z - \frac{z^{n+1}}{1!(n+1)} + \frac{z^{2n+1}}{2!(2n+1)} - \frac{z^{3n+1}}{3!(3n+1)} + \dots,$$

и при действительных положительных  $x \gg 1$

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right) [1 - E_n(x)] \approx \frac{e^{-x^n}}{nx^{n-1}} \left\{ 1 - \frac{n-1}{nx^n} + \frac{(n-1)(2n-1)}{(nx^n)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{(nx^n)^3} + \dots \right\}.$$

1.2. В статистике обычно принимают несколько иную нормировку интеграла ошибок. Именно, полагают (таблица 22)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2} \left[ 1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

В частности имеем:

$$\Phi(0) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

Производная от этой функции равна (таблица 22)

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Кроме этих обозначений, употребляются еще следующие\*):

$$\Theta(x) = H(x) = \Phi(x),$$

$$\text{Erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(x),$$

$$\text{Erfc}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \Phi(x)), \quad \alpha(x) = 2\Phi(x) - 1.$$

\*) Часто рассматривается также функция (таблица 21)

$$y = \int_0^x e^{t^2} dt = -i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(ix),$$

которая обозначается обычно через  $\text{Erfi}(x)$ . — Прим. ред.



Таблица 18. Интеграл ошибок  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,52050	1,00	0,84270	1,50	0,96611	2,00	0,95322	2,50	0,9593
01	01128	51	52924	01	84681	51	6728	01	5525	51	9614
02	02256	52	53790	02	85084	52	6841	02	5719	52	9635
03	03384	53	54646	03	85478	53	6952	03	5906	53	9654
04	04511	54	55494	04	85865	54	7059	04	6086	54	9672
0,05	05637	0,55	56332	1,05	86244	1,55	7162	2,05	6258	2,55	9689
06	06762	56	57162	06	86614	56	7263	06	6423	56	9706
07	07886	57	57982	07	86977	57	7360	07	6582	57	9722
08	09008	58	58792	08	87333	58	7455	08	6734	58	9736
09	10128	59	59594	09	87680	59	7546	09	6880	59	9751
0,10	11246	0,60	60386	1,10	88021	1,60	7635	2,10	7021	2,60	97640
11	12362	61	61168	11	88353	61	7721	11	7155	61	97767
12	13476	62	61941	12	88679	62	7804	12	7284	62	97888
13	14587	63	62705	13	88997	63	7884	13	7407	63	98003
14	15695	64	63459	14	89308	64	7962	14	7525	64	98112
0,15	16800	0,65	64203	1,15	89612	1,65	8038	2,15	7639	2,65	98215
16	17901	66	64938	16	89910	66	8110	16	7747	66	98313
17	18999	67	65663	17	90200	67	8181	17	7851	67	98406
18	20094	68	66378	18	90484	68	8249	18	7951	68	98494
19	21184	69	67084	19	90761	69	8315	19	8046	69	98578
0,20	22270	0,70	67780	1,20	91031	1,70	8379	2,20	8137	2,70	98657
21	23352	71	68467	21	91296	71	8441	21	8224	71	98732
22	24430	72	69143	22	91553	72	8500	22	8308	72	98803
23	25502	73	69810	23	91805	73	8558	23	8388	73	98870
24	26570	74	70468	24	92051	74	8613	24	8464	74	98934
0,25	27633	0,75	71116	1,25	92290	1,75	8667	2,25	8537	2,75	98994
26	28690	76	71754	26	92524	76	8719	26	8607	76	99051
27	29742	77	72382	27	92751	77	8769	27	8674	77	99105
28	30788	78	73001	28	92973	78	8817	28	8738	78	99156
29	31828	79	73610	29	93190	79	8864	29	8799	79	99204
0,30	32863	0,80	74210	1,30	93401	1,80	8909	2,30	8857	2,80	99250
31	33891	81	74800	31	93606	81	8952	31	8912	81	99293
32	34913	82	75381	32	93807	82	8994	32	8966	82	99334
33	35928	83	75952	33	94002	83	9035	33	9016	83	99373
34	36936	84	76514	34	94191	84	9074	34	9065	84	99409
0,35	37938	0,85	77067	1,35	94376	1,85	9111	2,35	9111	2,85	99443
36	38933	86	77610	36	94556	86	9147	36	9155	86	99476
37	39921	87	78144	37	94731	87	9182	37	9197	87	99507
38	40901	88	78669	38	94902	88	9216	38	9237	88	99536
39	41874	89	79184	39	95067	89	9248	39	9275	89	99563
0,40	42839	0,90	79691	1,40	95229	1,90	9279	2,40	9311	2,90	99589
41	43797	91	80188	41	95385	91	9309	41	9346	91	99613
42	44747	92	80677	42	95538	92	9338	42	9379	92	99636
43	45689	93	81156	43	95686	93	9366	43	9411	93	99658
44	46623	94	81627	44	95830	94	9392	44	9441	94	99679
0,45	47548	0,95	82089	1,45	95970	1,95	9418	2,45	9469	2,95	99698
46	48466	96	82542	46	96105	96	9443	46	9497	96	99716
47	49375	97	82987	47	96237	97	9466	47	9523	97	99733
48	50275	98	83423	48	96365	98	9489	48	9547	98	99750
49	51167	99	83851	49	96490	99	9511	49	9571	99	99765
0,50	52050	1,00	84270	1,50	96611	2,00	9532	2,50	9593	3,00	99779
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,9	0,9	0,99	0,99	0,99	0,99

Таблица 19. Производные интеграла ошибок  $\Phi(x)$ 

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
0,00	+1,1284	-0,0000	-0,5642	+0,0000	+0,8463	-0,0000
0,01	+1,1283	-0,0113	-0,5640	+0,0169	+0,8459	-0,0423
0,02	+1,1279	-0,0226	-0,5635	+0,0338	+0,8446	-0,0845
0,03	+1,1274	-0,0338	-0,5627	+0,0507	+0,8425	-0,1267
0,04	+1,1266	-0,0451	-0,5615	+0,0675	+0,8395	-0,1686
0,05	+1,1256	-0,0563	-0,5600	+0,0843	+0,8357	-0,2103
0,06	+1,1243	-0,0675	-0,5581	+0,1009	+0,8311	-0,2518
0,07	+1,1229	-0,0786	-0,5559	+0,1175	+0,8257	-0,2928
0,08	+1,1212	-0,0897	-0,5534	+0,1340	+0,8194	-0,3335
0,09	+1,1193	-0,1007	-0,5506	+0,1503	+0,8123	-0,3737
0,10	+1,1172	-0,1117	-0,5474	+0,1665	+0,8045	-0,4134
0,11	+1,1148	-0,1226	-0,5439	+0,1825	+0,7958	-0,4525
0,12	+1,1122	-0,1335	-0,5401	+0,1983	+0,7864	-0,4909
0,13	+1,1095	-0,1442	-0,5360	+0,2139	+0,7762	-0,5287
0,14	+1,1065	-0,1549	-0,5316	+0,2293	+0,7652	-0,5658
0,15	+1,1033	-0,1655	-0,5268	+0,2445	+0,7535	-0,6021
0,16	+1,0999	-0,1760	-0,5218	+0,2595	+0,7411	-0,6375
0,17	+1,0962	-0,1864	-0,5164	+0,2742	+0,7280	-0,6721
0,18	+1,0924	-0,1966	-0,5108	+0,2886	+0,7143	-0,7057
0,19	+1,0884	-0,2068	-0,5049	+0,3027	+0,6998	-0,7384
0,20	+1,0841	-0,2168	-0,4987	+0,3166	+0,6847	-0,7701
0,21	+1,0797	-0,2267	-0,4922	+0,3301	+0,6690	-0,8007
0,22	+1,0751	-0,2365	-0,4855	+0,3433	+0,6527	-0,8302
0,23	+1,0702	-0,2462	-0,4785	+0,3562	+0,6358	-0,8587
0,24	+1,0652	-0,2557	-0,4713	+0,3688	+0,6184	-0,8859
0,25	+1,0600	-0,2650	-0,4638	+0,3809	+0,6004	-0,9120
0,26	+1,0546	-0,2742	-0,4560	+0,3928	+0,5819	-0,9368
0,27	+1,0490	-0,2832	-0,4480	+0,4042	+0,5629	-0,9604
0,28	+1,0433	-0,2921	-0,4399	+0,4153	+0,5435	-0,9827
0,29	+1,0374	-0,3008	-0,4314	+0,4260	+0,5236	-1,0038
0,30	+1,0313	-0,3094	-0,4228	+0,4362	+0,5034	-1,0235
0,31	+1,0250	-0,3177	-0,4140	+0,4461	+0,4827	-1,0418
0,32	+1,0186	-0,3259	-0,4050	+0,4555	+0,4617	-1,0588
0,33	+1,0120	-0,3339	-0,3958	+0,4646	+0,4404	-1,0744
0,34	+1,0052	-0,3418	-0,3864	+0,4731	+0,4187	-1,0887
0,35	+0,9983	-0,3494	-0,3769	+0,4813	+0,3968	-1,1015
0,36	+0,9912	-0,3568	-0,3671	+0,4890	+0,3747	-1,1129
0,37	+0,9840	-0,3641	-0,3573	+0,4963	+0,3523	-1,1229
0,38	+0,9767	-0,3711	-0,3473	+0,5031	+0,3298	-1,1315
0,39	+0,9692	-0,3780	-0,3372	+0,5095	+0,3071	-1,1387
0,40	+0,9615	-0,3846	-0,3269	+0,5154	+0,2842	-1,1445
0,41	+0,9538	-0,3911	-0,3166	+0,5208	+0,2613	-1,1488
0,42	+0,9459	-0,3973	-0,3061	+0,5258	+0,2383	-1,1518
0,43	+0,9379	-0,4033	-0,2955	+0,5304	+0,2152	-1,1533
0,44	+0,9298	-0,4091	-0,2849	+0,5344	+0,1922	-1,1534
0,45	+0,9215	-0,4147	-0,2742	+0,5381	+0,1691	-1,1522
0,46	+0,9132	-0,4201	-0,2634	+0,5412	+0,1461	-1,1496
0,47	+0,9047	-0,4252	-0,2525	+0,5439	+0,1231	-1,1457
0,48	+0,8962	-0,4302	-0,2416	+0,5461	+0,1003	-1,1404
0,49	+0,8875	-0,4349	-0,2307	+0,5479	+0,0775	-1,1338
0,50	+0,8788	-0,4394	-0,2197	+0,5492	+0,0549	-1,1259

Продолжение табл. 19

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_8(x):16$	$\Phi_{16}(x):32$
0,50	+0,8788	-0,4394	-0,2197	+0,5492	+0,0549	-1,1259
0,51	+0,8700	-0,4437	-0,2087	+0,5501	+0,0325	-1,1168
0,52	+0,8610	-0,4477	-0,1977	+0,5505	+0,0103	-1,1064
0,53	+0,8520	-0,4516	-0,1867	+0,5505	-0,0118	-1,0948
0,54	+0,8430	-0,4552	-0,1757	+0,5501	-0,0335	-1,0820
0,55	+0,8338	-0,4586	-0,1647	+0,5492	-0,0550	-1,0681
0,56	+0,8246	-0,4618	-0,1537	+0,5479	-0,0762	-1,0536
0,57	+0,8154	-0,4648	-0,1428	+0,5461	-0,0971	-1,0369
0,58	+0,8060	-0,4675	-0,1319	+0,5440	-0,1177	-1,0197
0,59	+0,7967	-0,4700	-0,1210	+0,5414	-0,1379	-1,0015
0,60	+0,7872	-0,4723	-0,1102	+0,5385	-0,1578	-0,9823
0,61	+0,7778	-0,4744	-0,0995	+0,5351	-0,1772	-0,9621
0,62	+0,7683	-0,4763	-0,0888	+0,5314	-0,1962	-0,9411
0,63	+0,7587	-0,4780	-0,0782	+0,5273	-0,2148	-0,9192
0,64	+0,7491	-0,4795	-0,0677	+0,5228	-0,2330	-0,8965
0,65	+0,7395	-0,4807	-0,0573	+0,5180	-0,2507	-0,8730
0,66	+0,7299	-0,4817	-0,0470	+0,5128	-0,2679	-0,8487
0,67	+0,7203	-0,4826	-0,0368	+0,5072	-0,2846	-0,8238
0,68	+0,7106	-0,4832	-0,0267	+0,5014	-0,3009	-0,7982
0,69	+0,7010	-0,4837	-0,0168	+0,4952	-0,3166	-0,7720
0,70	+0,6913	-0,4839	-0,0079	+0,4887	-0,3317	-0,7452
0,71	+0,6816	-0,4839	+0,0028	+0,4819	-0,3464	-0,7180
0,72	+0,6719	-0,4833	+0,0124	+0,4749	-0,3605	-0,6902
0,73	+0,6622	-0,4834	+0,0218	+0,4675	-0,3740	-0,6621
0,74	+0,6526	-0,4829	+0,0311	+0,4599	-0,3869	-0,6335
0,75	+0,6429	-0,4822	+0,0402	+0,4521	-0,3993	-0,6046
0,76	+0,6333	-0,4813	+0,0491	+0,4440	-0,4111	-0,5755
0,77	+0,6237	-0,4802	+0,0579	+0,4356	-0,4223	-0,5460
0,78	+0,6141	-0,4790	+0,0676	+0,4271	-0,4330	-0,5164
0,79	+0,6045	-0,4776	+0,0750	+0,4183	-0,4430	-0,4866
0,80	+0,5950	-0,4760	+0,0833	+0,4094	-0,4524	-0,4568
0,81	+0,5855	-0,4742	+0,0914	+0,4002	-0,4613	-0,4268
0,82	+0,5760	-0,4723	+0,0993	+0,3909	-0,4695	-0,3968
0,83	+0,5666	-0,4703	+0,1070	+0,3814	-0,4771	-0,3669
0,84	+0,5572	-0,4681	+0,1146	+0,3718	-0,4842	-0,3369
0,85	+0,5479	-0,4657	+0,1219	+0,3621	-0,4903	-0,3071
0,86	+0,5386	-0,4632	+0,1290	+0,3522	-0,4965	-0,2774
0,87	+0,5293	-0,4605	+0,1360	+0,3422	-0,5017	-0,2479
0,88	+0,5202	-0,4577	+0,1427	+0,3321	-0,5054	-0,2187
0,89	+0,5110	-0,4548	+0,1493	+0,3220	-0,5105	-0,1896
0,90	+0,5020	-0,4518	+0,1556	+0,3117	-0,5140	-0,1609
0,91	+0,4930	-0,4486	+0,1617	+0,3014	-0,5169	-0,1324
0,92	+0,4840	-0,4453	+0,1677	+0,2911	-0,5193	-0,1044
0,93	+0,4752	-0,4419	+0,1734	+0,2803	-0,5211	-0,0767
0,94	+0,4664	-0,4384	+0,1789	+0,2702	-0,5223	-0,0494
0,95	+0,4576	-0,4347	+0,1842	+0,2598	-0,5231	-0,0226
0,96	+0,4490	-0,4310	+0,1893	+0,2493	-0,5232	+0,0037
0,97	+0,4404	-0,4272	+0,1942	+0,2388	-0,5229	+0,0296
0,98	+0,4319	-0,4232	+0,1988	+0,2284	-0,5221	+0,0549
0,99	+0,4235	-0,4192	+0,2033	+0,2180	-0,5207	+0,0796
1,00	+0,4151	-0,4151	+0,2076	+0,2076	-0,5189	+0,1038

Продолжение табл. 19

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,00	+0,4151	-0,4151	+0,2076	+0,2076	-0,5189	+0,1038
1,01	+0,4068	-0,4109	+0,2116	+0,1972	-0,5166	+0,1273
1,02	+0,3987	-0,4066	+0,2154	+0,1869	-0,5138	+0,1503
1,03	+0,3906	-0,4023	+0,2191	+0,1766	-0,5106	+0,1726
1,04	+0,3826	-0,3979	+0,2225	+0,1665	-0,5069	+0,1942
1,05	+0,3747	-0,3934	+0,2257	+0,1564	-0,5028	+0,2152
1,06	+0,3668	-0,3889	+0,2288	+0,1464	-0,4983	+0,2355
1,07	+0,3591	-0,3843	+0,2316	+0,1364	-0,4934	+0,2550
1,08	+0,3515	-0,3796	+0,2342	+0,1266	-0,4881	+0,2739
1,09	+0,3439	-0,3749	+0,2367	+0,1169	-0,4824	+0,2920
1,10	+0,3365	-0,3701	+0,2389	+0,1073	-0,4764	+0,3094
1,11	+0,3291	-0,3653	+0,2410	+0,0979	-0,4701	+0,3260
1,12	+0,3219	-0,3605	+0,2428	+0,0885	-0,4634	+0,3419
1,13	+0,3147	-0,3556	+0,2445	+0,0793	-0,4564	+0,3570
1,14	+0,3076	-0,3507	+0,2460	+0,0703	-0,4491	+0,3714
1,15	+0,3007	-0,3458	+0,2473	+0,0614	-0,4415	+0,3850
1,16	+0,2938	-0,3408	+0,2484	+0,0526	-0,4337	+0,3979
1,17	+0,2870	-0,3358	+0,2494	+0,0440	-0,4256	+0,4099
1,18	+0,2804	-0,3308	+0,2502	+0,0356	-0,4173	+0,4212
1,19	+0,2738	-0,3258	+0,2508	+0,0273	-0,4088	+0,4318
1,20	+0,2673	-0,3208	+0,2513	+0,0192	-0,4001	+0,4416
1,21	+0,2610	-0,3158	+0,2516	+0,0113	-0,3911	+0,4506
1,22	+0,2547	-0,3107	+0,2518	+0,0036	-0,3820	+0,4589
1,23	+0,2485	-0,3057	+0,2518	-0,0039	-0,3728	+0,4664
1,24	+0,2425	-0,3007	+0,2516	-0,0113	-0,3634	+0,4732
1,25	+0,2365	-0,2957	+0,2513	-0,0185	-0,3539	+0,4793
1,26	+0,2307	-0,2906	+0,2509	-0,0255	-0,3442	+0,4846
1,27	+0,2249	-0,2856	+0,2503	-0,0322	-0,3345	+0,4893
1,28	+0,2192	-0,2806	+0,2496	-0,0388	-0,3247	+0,4932
1,29	+0,2137	-0,2756	+0,2487	-0,0452	-0,3148	+0,4965
1,30	+0,2082	-0,2707	+0,2478	-0,0514	-0,3048	+0,4991
1,31	+0,2028	-0,2657	+0,2467	-0,0574	-0,2948	+0,5010
1,32	+0,1976	-0,2608	+0,2455	-0,0632	-0,2848	+0,5023
1,33	+0,1924	-0,2559	+0,2442	-0,0688	-0,2747	+0,5030
1,34	+0,1873	-0,2510	+0,2427	-0,0742	-0,2646	+0,5030
1,35	+0,1824	-0,2462	+0,2412	-0,0794	-0,2546	+0,5025
1,36	+0,1775	-0,2414	+0,2395	-0,0844	-0,2445	+0,5014
1,37	+0,1727	-0,2366	+0,2378	-0,0892	-0,2345	+0,4997
1,38	+0,1680	-0,2319	+0,2360	-0,0938	-0,2246	+0,4974
1,39	+0,1634	-0,2272	+0,2341	-0,0982	-0,2146	+0,4947
1,40	+0,1589	-0,2225	+0,2321	-0,1024	-0,2048	+0,4914
1,41	+0,1545	-0,2179	+0,2300	-0,1064	-0,1950	+0,4876
1,42	+0,1502	-0,2133	+0,2278	-0,1102	-0,1853	+0,4834
1,43	+0,1460	-0,2088	+0,2256	-0,1138	-0,1757	+0,4787
1,44	+0,1419	-0,2043	+0,2233	-0,1172	-0,1661	+0,4736
1,45	+0,1378	-0,1999	+0,2209	-0,1204	-0,1567	+0,4681
1,46	+0,1339	-0,1955	+0,2184	-0,1235	-0,1474	+0,4621
1,47	+0,1300	-0,1911	+0,2159	-0,1263	-0,1382	+0,4558
1,48	+0,1262	-0,1868	+0,2134	-0,1290	-0,1292	+0,4492
1,49	+0,1225	-0,1826	+0,2108	-0,1315	-0,1203	+0,4422
1,50	+0,1189	-0,1784	+0,2081	-0,1338	-0,1115	+0,4348

Продолжение табл. 19

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
1,50	+0,1189	-0,1784	+0,2081	-0,1338	-0,1115	+0,4348
1,51	+0,1154	-0,1743	+0,2054	-0,1359	-0,1029	+0,4272
1,52	+0,1120	-0,1702	+0,2027	-0,1379	-0,0944	+0,4193
1,53	+0,1086	-0,1662	+0,1999	-0,1397	-0,0861	+0,4112
1,54	+0,1053	-0,1622	+0,1971	-0,1414	-0,0780	+0,4028
1,55	+0,1021	-0,1583	+0,1943	-0,1428	-0,0700	+0,3942
1,56	+0,0990	-0,1544	+0,1914	-0,1442	-0,0622	+0,3853
1,57	+0,0959	-0,1506	+0,1885	-0,1453	-0,0546	+0,3763
1,58	+0,0930	-0,1469	+0,1856	-0,1463	-0,0471	+0,3672
1,59	+0,0901	-0,1432	+0,1826	-0,1472	-0,0399	+0,3579
1,60	+0,0872	-0,1396	+0,1797	-0,1479	-0,0328	+0,3484
1,61	+0,0845	-0,1360	+0,1767	-0,1485	-0,0260	+0,3389
1,62	+0,0818	-0,1325	+0,1738	-0,1490	-0,0193	+0,3292
1,63	+0,0792	-0,1291	+0,1708	-0,1493	-0,0128	+0,3195
1,64	+0,0766	-0,1257	+0,1678	-0,1495	-0,0065	+0,3096
1,65	+0,0741	-0,1223	+0,1648	-0,1496	-0,0004	+0,2998
1,66	+0,0717	-0,1191	+0,1618	-0,1495	+0,0055	+0,2899
1,67	+0,0694	-0,1159	+0,1588	-0,1493	+0,0112	+0,2800
1,68	+0,0671	-0,1127	+0,1558	-0,1491	+0,0167	+0,2701
1,69	+0,0649	-0,1096	+0,1528	-0,1487	+0,0220	+0,2602
1,70	+0,0627	-0,1066	+0,1499	-0,1482	+0,0271	+0,2503
1,71	+0,0606	-0,1036	+0,1469	-0,1476	+0,0320	+0,2405
1,72	+0,0586	-0,1007	+0,1440	-0,1469	+0,0367	+0,2307
1,73	+0,0566	-0,0979	+0,1410	-0,1461	+0,0412	+0,2209
1,74	+0,0546	-0,0951	+0,1381	-0,1453	+0,0456	+0,2113
1,75	+0,0528	-0,0924	+0,1352	-0,1443	+0,0497	+0,2017
1,76	+0,0510	-0,0897	+0,1324	-0,1433	+0,0536	+0,1922
1,77	+0,0492	-0,0871	+0,1295	-0,1422	+0,0574	+0,1828
1,78	+0,0475	-0,0845	+0,1267	-0,1410	+0,0609	+0,1735
1,79	+0,0458	-0,0820	+0,1239	-0,1397	+0,0643	+0,1643
1,80	+0,0442	-0,0795	+0,1211	-0,1384	+0,0675	+0,1553
1,81	+0,0426	-0,0772	+0,1183	-0,1370	+0,0705	+0,1464
1,82	+0,0411	-0,0748	+0,1156	-0,1356	+0,0734	+0,1377
1,83	+0,0396	-0,0725	+0,1129	-0,1341	+0,0760	+0,1291
1,84	+0,0382	-0,0703	+0,1102	-0,1325	+0,0785	+0,1206
1,85	+0,0368	-0,0681	+0,1076	-0,1310	+0,0809	+0,1123
1,86	+0,0355	-0,0660	+0,1050	-0,1293	+0,0830	+0,1042
1,87	+0,0342	-0,0639	+0,1024	-0,1276	+0,0850	+0,0963
1,88	+0,0329	-0,0619	+0,0999	-0,1259	+0,0869	+0,0885
1,89	+0,0317	-0,0599	+0,0974	-0,1242	+0,0886	+0,0809
1,90	+0,0305	-0,0580	+0,0949	-0,1224	+0,0901	+0,0735
1,91	+0,0294	-0,0561	+0,0925	-0,1206	+0,0915	+0,0663
1,92	+0,0283	-0,0543	+0,0901	-0,1187	+0,0928	+0,0593
1,93	+0,0272	-0,0525	+0,0878	-0,1168	+0,0939	+0,0525
1,94	+0,0262	-0,0508	+0,0854	-0,1150	+0,0949	+0,0459
1,95	+0,0252	-0,0491	+0,0832	-0,1131	+0,0957	+0,0395
1,96	+0,0242	-0,0475	+0,0809	-0,1111	+0,0964	+0,0332
1,97	+0,0233	-0,0459	+0,0787	-0,1092	+0,0971	+0,0272
1,98	+0,0224	-0,0443	+0,0765	-0,1073	+0,0975	+0,0214
1,99	+0,0215	-0,0428	+0,0744	-0,1053	+0,0979	+0,0158
2,00	+0,0207	-0,0413	+0,0723	-0,1033	+0,0982	+0,0103

Продолжение табл. 19

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,00	+0,0207	-0,0413	+0,0723	-0,1033	+0,0982	+0,0103
2,01	+0,0199	-0,0399	+0,0703	-0,1014	+0,0983	+0,0051
2,02	+0,0191	-0,0385	+0,0683	-0,0994	+0,0984	+0,0001
2,03	+0,0183	-0,0372	+0,0663	-0,0974	+0,0983	-0,0047
2,04	+0,0176	-0,0359	+0,0644	-0,0955	+0,0982	-0,0094
2,05	+0,0169	-0,0346	+0,0625	-0,0935	+0,0980	-0,0138
2,06	+0,0162	-0,0334	+0,0606	-0,0916	+0,0976	-0,0180
2,07	+0,0155	-0,0322	+0,0588	-0,0896	+0,0972	-0,0221
2,08	+0,0149	-0,0310	+0,0571	-0,0877	+0,0968	-0,0259
2,09	+0,0143	-0,0299	+0,0553	-0,0857	+0,0962	-0,0296
2,10	+0,0137	-0,0288	+0,0536	-0,0838	+0,0956	-0,0331
2,11	+0,0132	-0,0277	+0,0520	-0,0819	+0,0949	-0,0364
2,12	+0,0126	-0,0267	+0,0504	-0,0800	+0,0941	-0,0396
2,13	+0,0121	-0,0257	+0,0488	-0,0781	+0,0933	-0,0424
2,14	+0,0116	-0,0248	+0,0472	-0,0763	+0,0924	-0,0452
2,15	+0,0111	-0,0238	+0,0457	-0,0745	+0,0915	-0,0478
2,16	+0,0106	-0,0229	+0,0442	-0,0726	+0,0905	-0,0502
2,17	+0,0102	-0,0221	+0,0428	-0,0708	+0,0895	-0,0525
2,18	+0,0097	-0,0212	+0,0414	-0,0591	+0,0884	-0,0546
2,19	+0,0093	-0,0204	+0,0401	-0,0673	+0,0873	-0,0566
2,20	+0,0089	-0,0196	+0,0387	-0,0656	+0,0861	-0,0584
2,21	+0,0085	-0,0189	+0,0374	-0,0638	+0,0850	-0,0601
2,22	+0,0082	-0,0181	+0,0362	-0,0622	+0,0837	-0,0616
2,23	+0,0078	-0,0174	+0,0349	-0,0605	+0,0825	-0,0630
2,24	+0,0075	-0,0167	+0,0337	-0,0589	+0,0812	-0,0642
2,25	+0,0071	-0,0161	+0,0326	-0,0573	+0,0799	-0,0653
2,26	+0,0068	-0,0154	+0,0315	-0,0557	+0,0786	-0,0663
2,27	+0,0065	-0,0148	+0,0304	-0,0541	+0,0773	-0,0672
2,28	+0,0062	-0,0142	+0,0293	-0,0526	+0,0759	-0,0680
2,29	+0,0060	-0,0136	+0,0283	-0,0511	+0,0746	-0,0686
2,30	+0,0057	-0,0131	+0,0273	-0,0496	+0,0732	-0,0691
2,31	+0,0054	-0,0125	+0,0263	-0,0481	+0,0718	-0,0696
2,32	+0,0052	-0,0120	+0,0253	-0,0467	+0,0704	-0,0699
2,33	+0,0050	-0,0115	+0,0244	-0,0453	+0,0690	-0,0701
2,34	+0,0047	-0,0111	+0,0235	-0,0440	+0,0676	-0,0703
2,35	+0,0045	-0,0106	+0,0226	-0,0426	+0,0662	-0,0703
2,36	+0,0043	-0,0102	+0,0218	-0,0413	+0,0648	-0,0703
2,37	+0,0041	-0,0097	+0,0210	-0,0400	+0,0634	-0,0702
2,38	+0,0039	-0,0093	+0,0202	-0,0388	+0,0620	-0,0700
2,39	+0,0037	-0,0089	+0,0194	-0,0376	+0,0606	-0,0697
2,40	+0,0036	-0,0085	+0,0187	-0,0364	+0,0592	-0,0694
2,41	+0,0034	-0,0082	+0,0180	-0,0352	+0,0578	-0,0690
2,42	+0,0032	-0,0078	+0,0173	-0,0340	+0,0564	-0,0685
2,43	+0,0031	-0,0075	+0,0166	-0,0329	+0,0551	-0,0680
2,44	+0,0029	-0,0071	+0,0160	-0,0318	+0,0537	-0,0674
2,45	+0,0028	-0,0068	+0,0154	-0,0308	+0,0524	-0,0668
2,46	+0,0027	-0,0065	+0,0147	-0,0297	+0,0510	-0,0661
2,47	+0,0025	-0,0062	+0,0142	-0,0287	+0,0497	-0,0654
2,48	+0,0024	-0,0060	+0,0136	-0,0278	+0,0484	-0,0646
2,49	+0,0023	-0,0057	+0,0131	-0,0268	+0,0471	-0,0638
2,50	+0,0022	-0,0054	+0,0125	-0,0259	+0,0459	-0,0630

Продолжение табл. 19

$x$	$\Phi_1(x)$	$\Phi_2(x):2$	$\Phi_3(x):4$	$\Phi_4(x):8$	$\Phi_5(x):16$	$\Phi_6(x):32$
2,50	+0,0022	-0,0054	+0,0125	-0,0259	+0,0459	-0,0630
2,51	+0,0021	-0,0052	+0,0120	-0,0250	+0,0446	-0,0621
2,52	+0,0020	-0,0050	+0,0115	-0,0241	+0,0434	-0,0612
2,53	+0,0019	-0,0047	+0,0111	-0,0232	+0,0422	-0,0603
2,54	+0,0018	-0,0045	+0,0106	-0,0224	+0,0410	-0,0593
2,55	+0,0017	-0,0043	+0,0102	-0,0216	+0,0398	-0,0583
2,56	+0,0016	-0,0041	+0,0097	-0,0208	+0,0387	-0,0573
2,57	+0,0015	-0,0039	+0,0093	-0,0200	+0,0375	-0,0563
2,58	+0,0015	-0,0037	+0,0089	-0,0193	+0,0364	-0,0553
2,59	+0,0014	-0,0036	+0,0086	-0,0186	+0,0353	-0,0543
2,60	+0,0013	-0,0034	+0,0082	-0,0179	+0,0342	-0,0532
2,61	+0,0012	-0,0032	+0,0078	-0,0172	+0,0332	-0,0522
2,62	+0,0012	-0,0031	+0,0075	-0,0166	+0,0321	-0,0511
2,63	+0,0011	-0,0029	+0,0072	-0,0159	+0,0311	-0,0500
2,64	+0,0011	-0,0028	+0,0069	-0,0153	+0,0301	-0,0489
2,65	+0,0010	-0,0027	+0,0065	-0,0147	+0,0292	-0,0479
2,66	+0,0010	-0,0025	+0,0063	-0,0141	+0,0282	-0,0468
2,67	+0,0009	-0,0024	+0,0060	-0,0136	+0,0273	-0,0457
2,68	+0,0009	-0,0023	+0,0057	-0,0131	+0,0264	-0,0446
2,69	+0,0008	-0,0022	+0,0055	-0,0125	+0,0255	-0,0435
2,70	+0,0008	-0,0021	+0,0052	-0,0120	+0,0247	-0,0425
2,71	+0,0007	-0,0020	+0,0050	-0,0116	+0,0238	-0,0414
2,72	+0,0007	-0,0019	+0,0048	-0,0111	+0,0230	-0,0404
2,73	+0,0007	-0,0018	+0,0045	-0,0106	+0,0222	-0,0393
2,74	+0,0006	-0,0017	+0,0043	-0,0102	+0,0214	-0,0383
2,75	+0,0006	-0,0016	+0,0041	-0,0098	+0,0207	-0,0373
2,76	+0,0006	-0,0015	+0,0039	-0,0094	+0,0199	-0,0363
2,77	+0,0005	-0,0015	+0,0038	-0,0090	+0,0192	-0,0353
2,78	+0,0005	-0,0014	+0,0036	-0,0086	+0,0185	-0,0343
2,79	+0,0005	-0,0013	+0,0034	-0,0082	+0,0178	-0,0333
2,80	+0,0004	-0,0012	+0,0033	-0,0079	+0,0172	-0,0324
2,81	+0,0004	-0,0012	+0,0031	-0,0075	+0,0166	-0,0314
2,82	+0,0004	-0,0011	+0,0030	-0,0072	+0,0159	-0,0305
2,83	+0,0004	-0,0011	+0,0028	-0,0069	+0,0153	-0,0296
2,84	+0,0004	-0,0010	+0,0027	-0,0066	+0,0147	-0,0287
2,85	+0,0003	-0,0010	+0,0026	-0,0063	+0,0142	-0,0278
2,86	+0,0003	-0,0009	+0,0024	-0,0060	+0,0136	-0,0269
2,87	+0,0003	-0,0009	+0,0023	-0,0058	+0,0131	-0,0261
2,88	+0,0003	-0,0008	+0,0022	-0,0055	+0,0126	-0,0252
2,89	+0,0003	-0,0008	+0,0021	-0,0053	+0,0121	-0,0244
2,90	+0,0003	-0,0007	+0,0020	-0,0050	+0,0116	-0,0236
2,91	+0,0002	-0,0007	+0,0019	-0,0048	+0,0112	-0,0228
2,92	+0,0002	-0,0007	+0,0018	-0,0046	+0,0107	-0,0221
2,93	+0,0002	-0,0006	+0,0017	-0,0044	+0,0103	-0,0213
2,94	+0,0002	-0,0006	+0,0016	-0,0042	+0,0099	-0,0206
2,95	+0,0002	-0,0006	+0,0015	-0,0040	+0,0094	-0,0199
2,96	+0,0002	-0,0005	+0,0015	-0,0038	+0,0091	-0,0192
2,97	+0,0002	-0,0005	+0,0014	-0,0036	+0,0087	-0,0185
2,98	+0,0002	-0,0005	+0,0013	-0,0035	+0,0083	-0,0179
2,99	+0,0001	-0,0004	+0,0012	-0,0033	+0,0080	-0,0172
3,00	+0,0001	-0,0004	+0,0012	-0,0031	+0,0076	-0,0166

Таблица 20. Функции  $e^{x^2}[1-\Phi(x)]$  и  $e^{-x^2}$ 

x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{x^2}[1-\Phi(x)]$	x	$e^{-x^2}$
3,00	0,1 79001 - 560,5	3,50	0,1 55294 - 411,5	4,00	0,13 6999 - 322	4,50	0,12 2485 - 259	3,0	0 1234 098 (-3)
02	77920 534,5	52	54471 406,5	02	6355 319,5	52	1967 257	1	0670 548 (-3)
04	76851 528	54	53658 403	04	5716 316,5	54	1453 255	2	0357 128 (-3)
06	75795 522	56	52852 399	06	5083 313,5	56	0943 252,5	3	1864 374 (-4)
08	74751 516,5	58	52054 394,5	08	4456 311	58	0438 251	4	0954 016 (-4)
3,10	73718 - 510	3,60	51265 - 390,5	4,10	3834 - 308	4,60	*9936 - 248,5	3,5	0478 512 (-4)
12	72698 504,5	62	50484 387	12	3218 305	62	9439 246,5	6	2352 575 (-5)
14	71689 499	64	49710 383	14	2608 302,5	64	8946 245	7	1133 727 (-5)
16	70691 493,5	66	48944 379	16	2003 300	66	8456 242,5	8	0535 535 (-5)
18	69704 488	68	48186 375,5	18	1403 297,5	68	7971 240,5	9	2479 596 (-6)
3,20	68728 - 482,5	3,70	47435 - 372	4,20	0808 - 294,5	4,70	7490 - 239	4,0	1125 352 (-6)
22	67763 477	72	46691 368	22	0219 292	72	7012 237	1	0500 622 (-6)
24	66809 472	74	45955 364,5	24	*9635 289,5	74	6538 235	2	2182 958 (-7)
26	65865 467	76	45226 361	26	9056 286,5	76	6068 233	3	0933 029 (-7)
28	64931 462	78	44504 357,5	28	8483 284,5	78	5602 231,5	4	0390 894 (-7)
3,30	64007 - 456,5	3,80	43789 - 354	4,30	7914 - 282	4,80	5139 - 229	4,5	1605 228 (-8)
32	63094 452	82	43081 351	32	7350 279,5	82	4681 228,5	6	0646 143 (-8)
34	62190 447,5	84	42379 347,5	34	6791 277,5	84	4224 225,5	7	2549 382 (-9)
36	61295 442	86	41684 344	36	6236 274,5	86	3773 224,5	8	0985 951 (-9)
38	60411 438	88	40996 341	38	5687 272,5	88	3324 222,5	9	0373 757 (-9)
3,40	59535 - 433	3,90	40314 - 337,5	4,40	5142 - 270,5	4,90	2879 - 221	5,0	1388 794 (-10)
42	58669 428,5	92	39639 334,5	42	4601 268	92	2437 219		0
44	57812 424	94	38970 331,5	44	4065 265,5	94	1999 217,5		
46	56964 420	96	38307 328,5	46	3534 263,5	96	1564 215,5		
48	56124 415	98	37650 325,5	48	3007 261	98	1133 214		
3,50	55294 0,1	4,00	36999 0,1	4,50	2485 0,12	5,00	0705 0,11		

Таблица 21. Функция  $y = \int_0^x e^{t^2} dt$ 

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,00	0,000 + 100	0,40	0,4224 + 118,5	0,80	0,0091 + 193	1,20	2,141 + 43,5	1,60	5,17 + 13,5
02	0200 100	42	4461 120	82	0477 199	22	2,228 45	62	5,44 14,5
04	0400 100,5	44	4701 122,5	84	0875 206	24	2,318 48	64	5,73 15
06	0601 100,5	46	4946 125	86	1287 213	26	2,414 50	66	6,03 16,5
08	0802 100,5	48	5196 127	88	1713 221	28	2,514 53	68	6,36 17
0,10	1003 + 101,5	0,50	5450 + 129,5	0,90	215 + 23	1,30	2,620 + 55,5	1,70	6,70 + 19
12	1206 101,5	52	5709 132,5	92	261 + 24	32	2,731 58,5	72	7,08 19,5
14	1409 102,5	54	5974 135,5	94	309 24,5	34	2,848 62	74	7,47 21,5
16	1614 103	56	6245 138,5	96	358 25,5	36	2,972 65,5	76	7,90 23
18	1820 103,5	58	6522 141,5	98	409 27	38	3,103 69	78	8,36 24,5
0,20	2027 + 104,5	0,60	6805 + 146	1,00	463 + 27,5	1,40	3,241 + 73	1,80	8,85 + 26,5
22	2236 105,5	62	7095 149	02	518 29	42	3,387 77,5	82	9,38 28,5
24	2447 106,5	64	7393 152,5	04	576 30	44	3,542 81,5	84	9,95 31
26	2660 107,5	66	7698 156,5	06	636 31,5	46	3,705 87	86	10,57 33
28	2875 108,5	68	8011 161	08	699 33	48	3,879 92	88	11,23 35,5
3,30	3092 + 110,5	0,70	8333 + 165,5	1,10	765 + 34	1,50	4,063 + 98	1,90	11,94 + 38,5
32	3313 111,5	72	8664 170,5	12	833 36	52	4,259 104	92	12,71 41,5
34	3536 113	74	9005 175,5	14	905 37,5	54	4,467 110,5	94	13,54 44,5
36	3762 114,5	76	9356 181	16	980 39,5	56	4,688 117,5	96	14,43 48,5
38	3991 116,5	78	9718 186,5	18	*059 41	58	4,923 125,5	98	15,40 52,5
0,40	4224 0,	0,80	*0091 1,	1,20	141 2,	1,60	5,174	2,00	16,45



Таблица 22. Интеграл ошибок  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  и его производная  $\varphi(x)$ 

x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$	x	$\Phi(x)$	$\varphi(x)$
0,00	0,0000	0,39894	1,00	0,84134	0,24197	2,00	0,97725	0,05399
02	50798	39886	02	84614	234,5	02	7831	53
04	51595	39862	04	85083	230	04	7932	50,5
06	52392	39822	06	85543	225	06	8030	49
08	53188	39767	08	85993	220	08	8124	47
0,10	53983	39695	1,10	86433	215,5	2,10	8214	45
12	54776	39608	12	86864	211	12	8300	43
14	55567	39505	14	87286	206	14	8382	41
16	56356	39387	16	87698	201	16	8461	39,5
18	57142	39253	18	88100	196,5	18	8537	38
0,20	57926	39104	1,20	88493	192	2,20	8610	36,5
22	58706	38940	22	88877	187	22	8679	34,5
24	59483	38762	24	89251	183	24	8745	33
26	60257	38568	26	89617	178	26	8809	32
28	61026	38361	28	89973	173,5	28	8870	30,5
0,30	61791	38139	1,30	90320	169	2,30	8928	29
32	62552	37903	32	90658	165	32	8983	27,5
34	63307	37654	34	90988	160,5	34	9036	26,5
36	64058	37391	36	91309	156	36	9086	25
38	64803	37115	38	91621	151,5	38	9134	24
0,40	65542	36827	1,40	91924	148	2,40	9180	23
42	66276	36526	42	92220	143,5	42	9224	22
44	67003	36213	44	92507	139	44	9266	21
46	67724	35889	46	92785	135,5	46	9305	19,5
48	68439	35553	48	93056	131,5	48	9343	19
0,50	69146	35207	1,50	93319	127,5	2,50	9379	18
52	69847	34849	52	93574	124	52	94132	17,1
54	70540	34482	54	93822	120	54	94457	162,5
56	71226	34105	56	94062	116,5	56	94766	154,5
58	71904	33718	58	94295	112,5	58	95060	147
0,60	72575	33322	1,60	94520	109	2,60	95339	139,5
62	73237	32918	62	94738	106	62	95604	135,5
64	73891	32506	64	94950	102	64	95855	125,5
66	74537	32086	66	95154	99	66	96093	119
68	75175	31659	68	95352	95,5	68	96319	113
0,70	75804	31225	1,70	95543	92,5	2,70	96533	107
72	76424	30785	72	95728	89,5	72	96736	101,5
74	77035	30339	74	95907	86,5	74	96928	96
76	77637	29887	76	96080	83	76	97110	91
78	78230	29431	78	96246	80,5	78	97282	86
0,80	78814	28969	1,80	96407	77,5	2,80	97445	81,5
82	79389	28504	82	96562	75	82	97599	77
84	79955	28034	84	96712	72	84	97744	72,5
86	80511	27562	86	96856	69,5	86	97882	69
88	81057	27086	88	96995	66,5	88	98012	65
0,90	81594	26609	1,90	97128	64,5	2,90	98134	61
92	82121	26129	92	97257	62	92	98250	58
94	82639	25647	94	97381	59,5	94	98359	54,5
96	83147	25164	96	97500	57,5	96	98462	51,5
98	83646	24681	98	97615	55	98	98559	48,5
1,00	84134	24197	2,00	97725	0,5399	3,00	98650	45,5
0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,9	0,0	0,0

## 2. Интегралы Френеля

Под *интегралами Френеля* подразумевают функции

$$C(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \cos t^2 dt,$$

$$S(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{z}} \sin t^2 dt.$$

Они связаны с интегралом ошибок равенствами

$$C(z) + iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \Phi(e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}),$$

$$C(z) - iS(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \Phi(e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{z}).$$

Далее очевидно

$$C\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt, \quad S\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt.$$

(Часто в литературе именно эти последние интегралы называются интегралами Френеля и обозначаются через  $C(z)$ ,  $S(z)$ .)

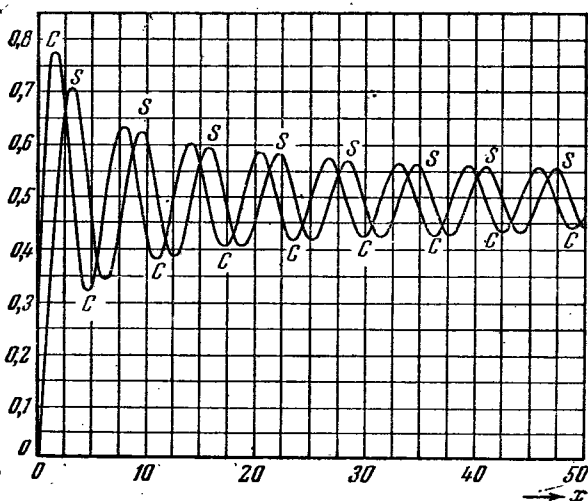


Рис. 32. Интегралы Френеля  $C(x)$  и  $S(x)$ .

Обе функции,  $C(z)$  и  $S(z)$ , — двулистные аналитические функции от  $z$ ; точка  $z=0$  является точкой ветвления. Вдоль действительной оси они принимают действительные значения, причем

$$C(0) = S(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{1}{2}$$

(рис. 32, таблицы 23, 24).

Разложения в степенные ряды вблизи нуля имеют вид

$$C(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(4k+1) \cdot (2k)!}, \quad S(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(4k+3) (2k+1)!}.$$

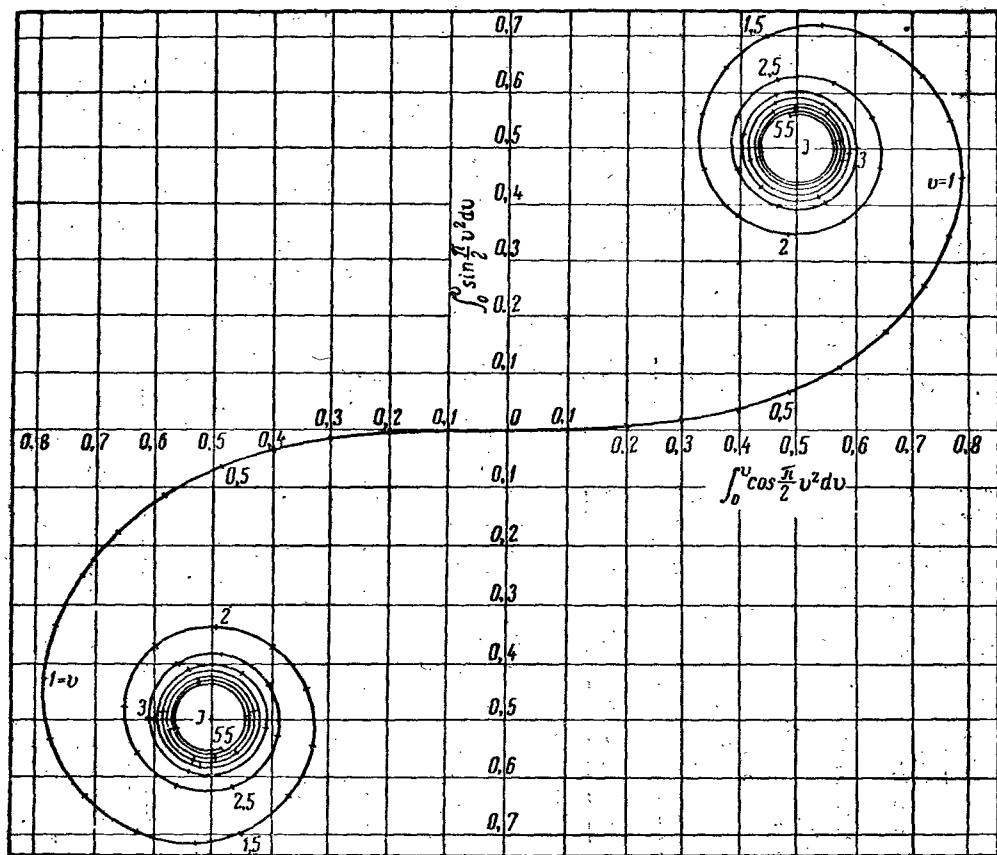


Рис. 33. Спираль Корню (клотоида).

Асимптотическое поведение этих функций для  $|z| \gg 1$  в области  $|\arg z| \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) описывается формулами

$$C(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{1 \cdot 3}{(2z)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2z)^4} - \dots \right) - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} \left( \frac{1}{2z} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^3} + \dots \right),$$

$$S(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{1 \cdot 3}{(2z)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{(2z)^4} - \dots \right) - \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}} \left( \frac{1}{2z} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2z)^3} + \dots \right),$$

и, следовательно, в качестве первого приближения можно брать:

$$C(z) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sin z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad S(z) \approx \frac{1}{2} - \frac{\cos z}{\sqrt{2\pi z}}.$$

В прямоугольной системе координат  $(C, S)$  кривая

$$C = C\left(\frac{\pi}{2} u^2\right), \quad S = S\left(\frac{\pi}{2} u^2\right)$$

( $u$  — действительный параметр) представляет собой так называемую спираль Корню (клотоиду, рис. 33). Длина дуги от точки  $(0, 0)$  до точки, соответствующей

Таблица 23. Интегралы Френеля  $C(x)$  и  $S(x)$ 

$x$	$C(x)$	$S(x)$	$x$	$C(x)$	$S(x)$	$x$	$C(x)$	$S(x)$
0,00	0,0000	0,0000	1,0	7217 -176	2476 +19	10,0	4370 +30	6084 -41
02	1128	0008 + 4	2	7563 157	3153 - 4	2	4174 37	5928 34
04	1596	0021 6,5	4	7751 141	3826 25	4	4015 42	5737 26
06	1954	0039 9	6	7798 125	4475 43	6	3898 46	5521 17
08	2255	0060 10,5	8	7719 108	5081 59	8	3827 48	5288 - 7
0,10	2521 + 119,51	0084 + 13	2,0	7533 - 91	5628 -73	11,0	3804 + 48	5048 + 2
12	2760 1101	0110 14,5	2	7256 73	6103 83	2	3829 46	4810 12
14	2980 101,51	0139 15,5	4	6906 54	6495 91	4	3900 43	4584 21
16	3183 95,5	0170 16,5	6	6503 35	6797 95	6	4013 38	4378 28
18	3374 90	0203 17	8	6064 - 16	7005 96	8	4164 37	4201 35
0,20	3554 + 85	0237 + 18	3,0	5610 + 2	7117 - 94	12,0	4346 + 23	4058 + 40
22	3724 81	0273 19	2	5158 19	7136 89	2	4550 15	3955 44
24	3886 77,5	0311 20	4	4725 35	7067 81	4	4769 + 6	3895 45
26	4041 74	0351 20,5	6	4326 48	6918 70	6	4994 - 3	3880 45
28	4189 71	0392 21	8	3975 59	6698 58	8	5216 12	3910 43
0,30	4331 + 68,5	0434 + 22	4,0	3682 + 67	6421 - 45	13,0	5425 - 20	3983 + 40
32	4468 65,5	0478 22,5	2	3456 73	6099 30	2	5615 27	4095 35
34	4599 63,5	0523 23	4	3302 75	5747 - 15	4	5777 34	4241 28
36	4726 61	0569 24	6	3222 75	5380 0	6	5906 38	4415 21
38	4848 58	0617 24	8	3218 72	5013 + 14	8	5997 41	4610 13
0,40	4966 + 57	0665 + 25	5,0	3285 + 67	4659 + 27	14,0	6047 - 43	4818 + 4
42	5080 55,5	0715 25,5	2	3418 59	4333 39	2	6055 42	5030 - 4
44	5191 53,5	0766 25,5	4	3610 49	4045 49	4	6021 40	5238 12
46	5298 52	0817 26,5	6	3850 38	3805 56	6	5967 37	5433 20
48	5402 50	0870 27	8	4129 26	3621 62	8	5836 32	5609 27
0,50	5502 + 49	0924 + 27	6,0	4433 + 13	3499 + 64	15,0	5693 - 26	5758 - 32
52	5600 47,5	0978 28	2	4750 0	3440 45	2	5525 19	5875 37
54	5695 45,5	1034 28	4	5067 - 12	3445 62	4	5338 11	5956 39
56	5786 44,5	1090 28,5	6	5372 24	3512 58	6	5140 - 3	5998 40
58	5875 43,5	1147 29	8	5654 34	3637 51	8	4939 + 5	5999 40
0,60	5962 + 41,5	1205 + 29	7,0	5901 - 43	3812 + 43	16,0	4743 + 13	5961 - 38
62	6045 41	1263 29,5	2	6106 50	4030 33	2	4560 20	5885 34
64	6127 39	1322 30	4	6261 55	4281 22	4	4396 26	5775 30
66	6205 38,5	1382 30,5	6	6362 57	4553 + 11	6	4258 31	5636 24
68	6282 37	1443 30,5	8	6406 57	4837 - 1	8	4152 25	5473 17
0,70	6356 + 36	1504 + 31	8,0	6393 - 56	5120 - 12	17,0	4080 + 38	5293 - 10
72	6428 34,5	1566 31	2	6325 51	5392 22	2	4046 39	5103 - 2
74	6497 34	1628 31,5	4	6206 46	5641 32	4	4050 38	4912 + 6
76	6565 32,5	1691 31,5	6	6041 38	5859 39	6	4091 36	4726 13
78	6630 31,5	1754 32	8	5839 29	6038 46	8	4169 32	4553 20
0,80	6693 + 30,5	1818 + 32	9,0	5608 - 19	6172 - 50	18,0	4278 + 28	4400 + 24
82	6754 29,5	1882 32,5	2	5358 - 9	6256 52	2	4415 22	4272 31
84	6813 28,5	1947 32,5	4	5099 + 2	6289 52	4	4574 15	4175 34
86	6870 28	2012 32,5	6	4841 12	6270 50	6	4748 8	4112 36
88	6926 26,5	2077 33	8	4595 21	6200 47	8	4930 + 1	4084 39
0,90	6979 + 25,5	2143 + 33	10,0	4370 + 30	6084 - 41	19,0	5113 - 6	4093 + 36
92	7030 25	2209 33		0,	0,	21	5290 13	4139 34
94	7080 23,5	2275 33,5				4	5453 20	4217 31
96	7127 23	2342 33,5				6	5597 25	4327 26
98	7173 22	2409 33,5				8	5715 30	4462 20
1,00	7217 0,	2476 0,				20,0	5804 - 33	4616 + 14

Продолжение табл. 23

x	C(x)	S(x)	x	C(x)	S(x)	x	C(x)	S(x)
20,0	0,	0,	30,0	0,	0,	40,0	0,	0,
20,5	5804	4616	30,5	4279	4900	40,5	5475	5415
21,0	5878	5049	31,0	4420	4570	41,0	5217	5588
21,5	5738	5459	31,5	4700	4350	41,5	4909	5616
22,0	5423	5748	32,0	5048	4291	42,0	4627	5494
22,5	5012	5849	32,5	5379	4406	42,5	4439	5253
23,0	4607	5742	33,0	5613	4663	43,0	4390	4953
23,5	4307	5458	33,5	5694	4999	43,5	4490	4668
24,0	4181	5068	34,0	5605	5329	44,0	4713	4468
24,5	4256	4670	34,5	5370	5575	44,5	5004	4399
25,0	4511	4361	35,0	5049	5677	45,0	5290	4477
25,5	4879	4212	35,5	4720	5613	45,5	5502	4682
26,0	5269	4258	36,0	4464	5401	46,0	5590	4962
26,5	5586	4483	36,5	4342	5094	46,5	5533	5248
27,0	5755	4829	37,0	4382	4769	47,0	5347	5471
27,5	5738	5211	37,5	4571	4504	47,5	5078	5577
28,0	5541	5534	38,0	4863	4363	48,0	4793	5540
28,5	5217	5721	38,5	5184	4380	48,5	4562	5373
29,0	4846	5731	39,0	5456	4547	49,0	4439	5117
29,5	4518	5562	39,5	5613	4822	49,5	4455	4834
30,0	4314	5260	40,0	5620	5137	50,0	4603	4595
	4279	4900		5475	5415		4847	4457
	0,	0,		0,	0,		0,	0,

Таблица 24. Интегралы Френея  $C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$  и  $S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$ 

x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	x	$C\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$	$S\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$
0,00	0,	0,	1,25	0,	0,	2,50	0,	0,
05	0000 + 100	0000 0	30	6801 - 63	6587 - 76	52	4574 + 12	6192 - 29
10	0500 100	0001 + 4	35	6386 48	6863 91	54	4396 17	6101 27
15	1000 100	0005 8	40	5923 30	7050 102	56	4235 21	5983 34
20	1500 99,8	0018 12	45	5431 - 7	7135 110	58	4094 25	5842 31
25	1999 99,8	0042 16	50	4933 + 18	7111 113	60	3978 28	5679 27
0,25	2498 + 99,2	0082 + 20	1,50	4453 + 45	6975 - 110	2,60	3889 + 30	5500 - 12
30	2994 98,6	0141 23	55	4018 72	6731 99	62	3831 32	5309 7
35	3487 97,6	0224 27	60	3655 97	6389 81	64	3805 33	5111 - 2
40	3975 96	0334 30	65	3388 118	5968 55	66	3812 33	4911 + 4
45	4455 93,6	0474 34	70	3238 132	5492 - 23	68	3853 32	4715 10
0,50	4923 - 15	0647 + 36	1,75	3219 + 138	4994 + 13	2,70	3925 + 31	4529 + 15
55	5377 20	0857 38	80	3336 133	4509 52	72	4028 28	4358 20
60	5811 25	1105 40	85	3584 116	4077 90	74	4158 24	4207 25
65	6219 31	1393 40	90	3945 87	3733 123	76	4313 20	4080 29
70	6597 38	1721 40	95	4391 + 48	3511 147	78	4487 15	3982 32
0,75	6935 - 46,	2089 + 38	2,00	4883 0	3434 + 159	2,80	4675 + 9	3915 + 34
80	7228 53	2493 34	05	5374 - 51	3513 155	82	4872 + 3	3883 35
85	7469 61	2932 28	10	5816 100	3743 134	84	5072 - 4	3886 36
90	7648 68	3398 21	15	6159 141	4103 96	86	5268 10	3924 35
95	7760 74	3885 + 12	20	6363 169	4557 + 44	88	5454 16	3996 33
1,00	7799 - 79	4380 0	2,25	6401 - 178	5053 - 17	2,90	5624 - 22	4101 + 29
05	7759 82	4880 - 13	30	6266 164	5532 80	92	5772 27	4235 25
10	7638 82	5365 28	35	5970 128	5931 137	94	5893 31	4394 20
15	7436 79	5821 44	40	5550 - 71	6197 178	96	5983 35	4572 16
20	7154 73	6234 60	45	5061 0	6289 195	98	6038 37	4764 + 7
1,25	6801 - 63	6587 - 76	2,50	4574 + 76	6192 - 184	3,00	6057 - 38	4963 0
	0,	0,		0,	0,		0,	0,



значению  $u$  параметра, равна  $u$ , а кривизна  $\kappa$  в этой точке будет  $\kappa = \pi u$ . Кривизна, следовательно, пропорциональна длине дуги.

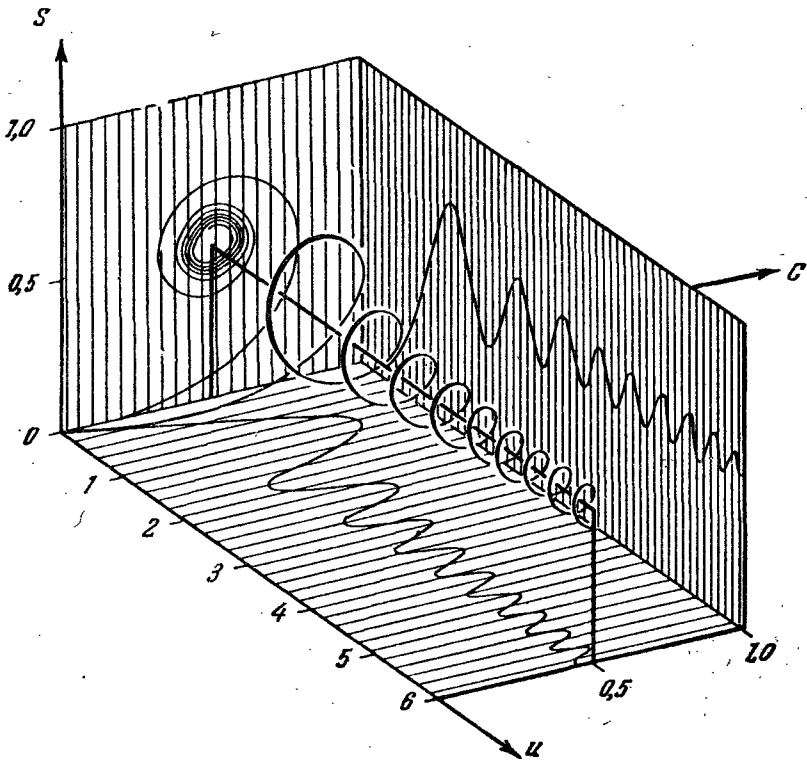


Рис. 34. Интегралы Френеля  $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$  и  $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ .

Если рассматривать  $u$ ,  $C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ ,  $S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$  как координаты в прямоугольной системе  $(u, C, S)$ , то получим пространственную спираль (рис. 34), проекциями которой на три координатные плоскости будут спираль Корню и кривые  $C = C\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ ,  $S = S\left(\frac{\pi}{2}u^2\right)$ .

## VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

### 1. Определение и представления

В этом разделе  $n$  означает целое число,  $p$  — простое число; как всегда,  $z = x + iy$

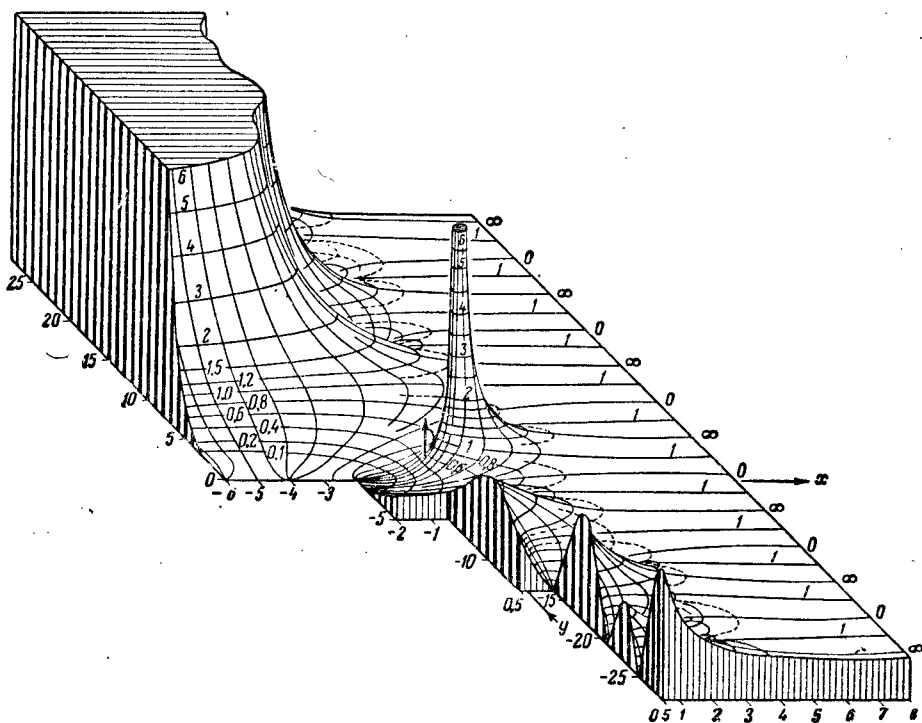


Рис. 35. Рельеф дзета-функции Римана  $\zeta(z)$ . Линии ската, обозначенные справа через 0, идут от нуля; обозначенные через  $\infty$  — идут из бесконечности.

При  $x > 1$  можно определить дзета-функцию Римана  $\zeta(z)$  как

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1},$$

где произведение распространено на все простые числа. Имеем:

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \frac{1}{7^z} + \dots \quad (x > 1),$$



и вообще

$$\zeta(z)(1-2^{-z})(1-3^{-z})\dots(1-p^{-z}) = 1 + \sum'_n \frac{1}{n^z} \quad (x > 1),$$

где произведение в левой части распространено на все простые числа, не превосходящие  $p$ , а  $\sum'$  означает суммирование только по тем значениям  $n > p$ , у которых все простые множители больше  $p$ .

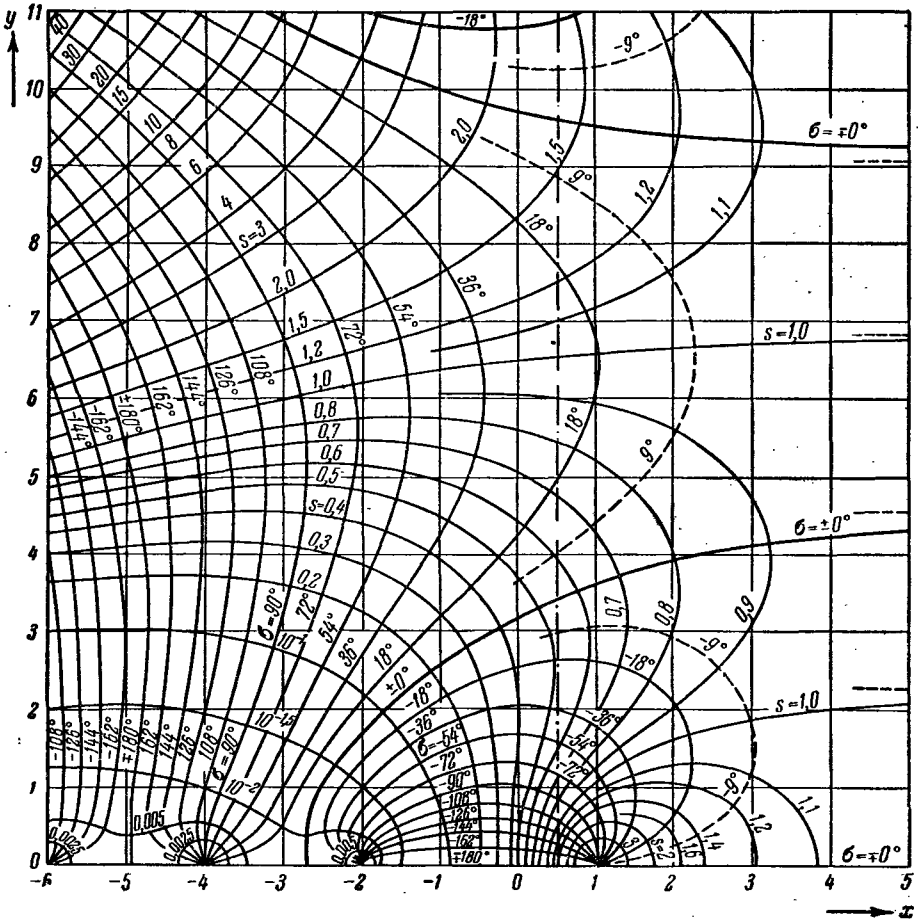


Рис. 36. Карта горизонталей рельефа дзета-функции Римана  $\zeta(z)$ .

[Эта функция аналитически продолжается на всю плоскость комплексного переменного  $z$  (рис. 35—37). Вдоль действительной оси функции  $\zeta(x)$  принимает действительные значения (таблица 26).]

При  $x > 0$  справедливо представление

$$(1-2^{1-z})\zeta(z) = 1 - \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} - \frac{1}{4^z} + \dots = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt.$$

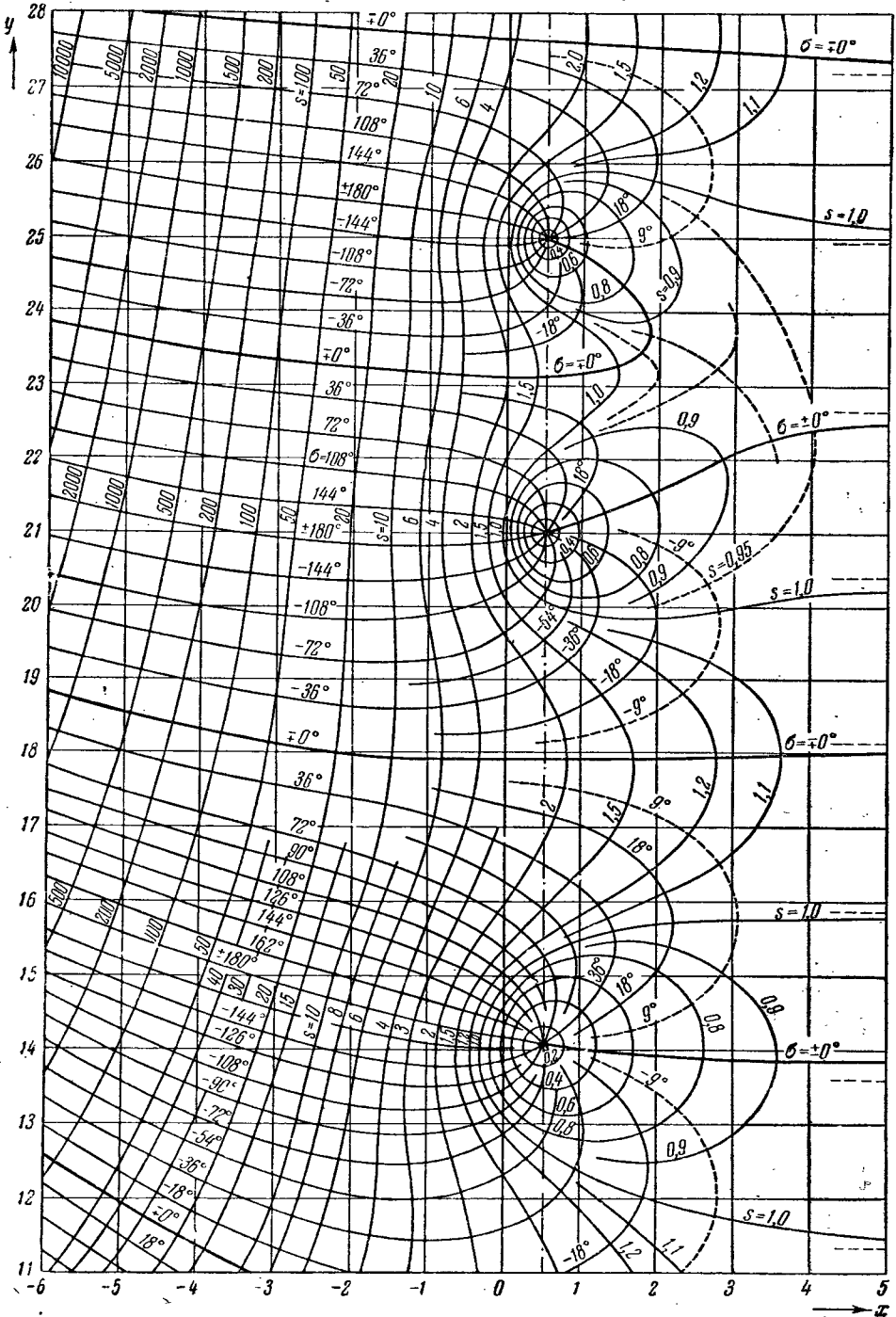


Рис. 37. Продолжение рис. 36 вверх.

При  $|z| \ll 1$  особенно удобен для вычисления следующий ряд:

$$\zeta(z) = \sum_{v=1}^n \frac{1}{v^z} + \frac{1}{z-1} \frac{1}{n^{z-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^z} + \frac{1}{12} \frac{z}{n^{z+1}} - \frac{1}{720} \frac{z(z+1)(z+2)}{n^{z+3}} +$$

$$+ \frac{1}{30\,240} \frac{z(z+1)\dots(z+4)}{n^{z+5}} - \frac{1}{1\,209\,600} \frac{z(z+1)\dots(z+6)}{n^{z+7}} +$$

$$+ \frac{1}{47\,900\,160} \frac{z(z+1)\dots(z+8)}{n^{z+9}} - \dots$$

Если положим для краткости  $z = \frac{1}{2} + it = 2u$ , то функция

$$\Xi(t) = \frac{(2u-1)\Gamma(u+1)}{\pi^u} \zeta(2u) = \Xi(-t)$$

будет четной относительно  $t$  и имеет действительные коэффициенты в разложении по возрастающим степеням  $t^2$ . Нетривиальные нули  $\zeta$ -функции, расположенные на прямой  $x = \frac{1}{2}$ , являются действительными корнями для функции  $\Xi(t)$  (таблица 25).

### 2. Частные значения

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(-2n) = 0,$$

$$\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad \zeta(2n) = (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

[В точке  $z=1$  дзета-функция имеет полюс.]

### 3. Функциональные уравнения

$$\zeta(1+z) = \frac{2}{(2\pi)^z} \cos \frac{\pi z}{2} \Gamma(z) \zeta(z),$$

$$z(z+1) \frac{\zeta(z+2)\zeta(1-z)}{\zeta(z)\zeta(-1-z)} = -4\pi^2.$$

Таблица 25. Нули  $\frac{1}{2} + ia_n$  дзета-функции Римана  $\zeta(x)$

$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_n$
1	14,134725	11	52,970	21	79,337
2	21,022040	12	56,446	22	82,910
3	25,010856	13	59,347	23	84,734
4	30,424878	14	60,833	24	87,426
5	32,935057	15	65,113	25	88,809
6	37,586176	16	67,080	26	92,494
7	40,918720	17	69,546	27	94,651
8	43,327073	18	72,067	28	95,871
9	48,005150	19	75,705	29	98,831
10	49,773832	20	77,143		



Продолжение табл. 26

$x$	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	$x$	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$	$x$	$\zeta(x)$	$\zeta(-x)$
	<b>1,0000</b>			<b>1,00000</b>			<b>1,000000</b>	
15,0	306 — 21	+ 0,4433	18,0	382 — 26	0,000	21,0	477 — 32	— 281,5
1	285 — 19	0,4793	1	356 — 24	+ 1,525	1	445 — 30	314,5
2	266 — 18	0,5057	2	332 — 22	3,359	2	415 — 28	342,7
3	248 — 16	0,5193	3	310 — 21	5,505	3	387 — 26	363,5
4	232 — 16	0,5173	4	289 — 19	7,955	4	361 — 24	373,9
15,5	216 — 14	+ 0,4963	18,5	270 — 18	+ 10,69	21,5	337 — 22	— 370,3
6	202 — 14	0,4531	6	252 — 17	13,66	6	315 — 21	349,0
7	188 — 12	0,3846	7	235 — 16	16,82	7	294 — 20	305,8
8	176 — 12	0,2879	8	219 — 14	20,08	8	274 — 18	236,2
9	164 — 11	+ 0,1604	9	205 — 14	23,34	9	256 — 18	— 135,7
16,0	1528 — 102	0,0000	19,0	1908 — 128	+ 26,46	22,0	2385 — 160	0,0
1	1426 — 96	— 0,1945	1	1780 — 119	29,27	1	2225 — 149	+ 175,2
2	1330 — 89	0,4236	2	1661 — 111	31,59	2	2076 — 139	393,4
3	1241 — 83	0,6865	3	1550 — 104	33,19	3	1937 — 130	657,3
4	1158 — 78	0,9810	4	1446 — 97	33,81	4	1807 — 121	968,3
16,5	1080 — 72	— 1,303	19,5	1349 — 90	+ 33,17	22,5	1686 — 113	+ 1326
6	1008 — 68	1,448	6	1259 — 84	30,96	6	1573 — 105	1728
7	0940 — 63	2,006	7	1175 — 79	26,87	7	1468 — 99	2168
8	0877 — 58	2,369	8	1096 — 74	20,56	8	1369 — 91	2638
9	0819 — 55	2,723	9	1022 — 68	+ 11,71	9	1278 — 86	3123
17,0	0764 — 51	— 3,054	20,0	0954 — 64	0,00	23,0	1192 — 80	+ 3608
1	0713 — 48	3,343	1	0890 — 60	— 14,83	1	1112 — 74	4066
2	0665 — 45	3,569	2	0830 — 55	33,00	2	1038 — 70	4471
3	0620 — 41	3,710	3	0775 — 52	54,63	3	0968 — 65	4784
4	0579 — 39	3,739	4	0723 — 48	79,75	4	0903 — 60	4964
17,5	0540 — 36	— 3,630	20,5	0675 — 46	— 108,2	23,5	0843 — 56	+ 4960
6	0504 — 34	3,353	6	0629 — 42	139,7	6	0787 — 53	4715
7	0470 — 31	2,880	7	0587 — 39	173,7	7	0734 — 49	4167
8	0439 — 30	2,181	8	0548 — 37	209,5	8	0685 — 46	3246
9	0409 — 27	— 1,229	9	0511 — 34	245,9	9	0639 — 43	+ 1882
18,0	0382	0,000	21,0	0477	— 281,5	24,0	0596	0
	<b>1,0000</b>			<b>1,00000</b>			<b>1,000000</b>	

## IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Определения и обозначения

Эллиптическим интегралом называется интеграл вида

$$\int R(z, \varpi) dz,$$

причем  $R$  — рациональная функция двух своих аргументов, а  $\varpi^2 = P(z)$ , где  $P(z)$  — полином 3-й или 4-й степени без кратных нулей.

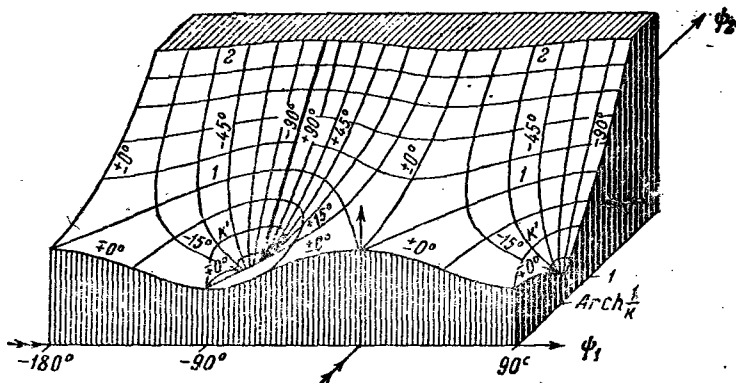


Рис. 38. Рельеф функции  $\Delta(\psi, k)$  при  $k=0,8$ . Точки ветвления

$$\pm \frac{\pi}{2} \pm i \operatorname{Arch} \frac{1}{k}.$$

Следующие интегралы:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

$$\int_0^z \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

или, что то же, в тригонометрической форме ( $z = \sin \varphi$ ,  $t = \sin \psi$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ ,  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ )

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}},$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi,$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

называются *неполными эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го родов*

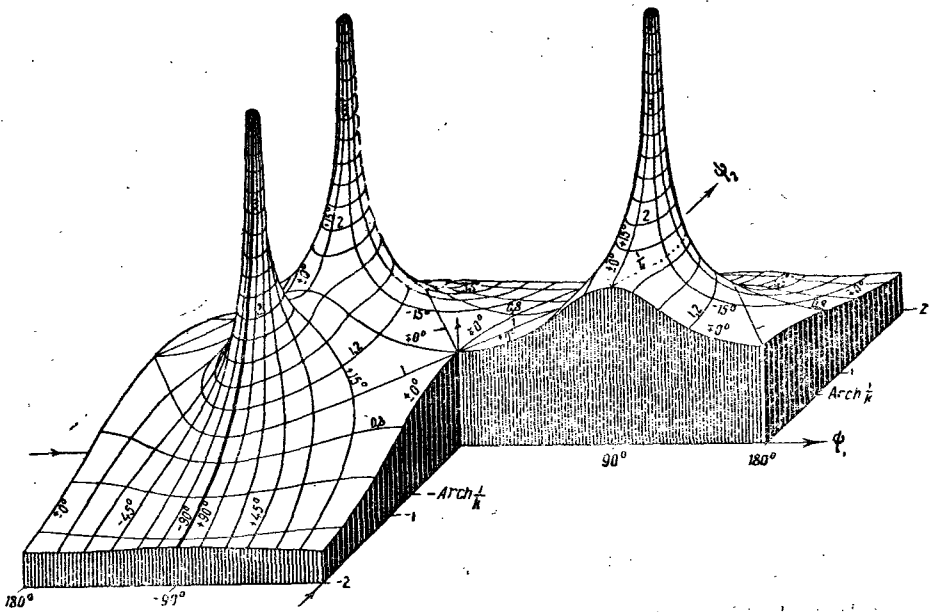


Рис. 39. Рельеф функции  $\frac{1}{\Delta(\psi, k)}$  при  $k=0,8$ . Точки ветвления  $\pm \frac{\pi}{2} \pm i \operatorname{Arch} \frac{1}{k}$ .

в *нормальной форме Лежандра*. Кроме того, еще вводят

$$D(\varphi, k) = \frac{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)}{k^2} = \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Число  $k$  называется *модулем* интегралов, число  $n$  — *параметром* интеграла 3-го рода. Для краткости положим

$$\Delta(\psi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$$

(рис. 38, 39), причем  $\Delta(\psi, k) = 1$  в начале  $\psi = 0$  пути интегрирования, и определим

$$k' = \sqrt{1 - k^2};$$

$k'$  называется *дополнительным модулем*.

Если верхний предел интегрирования  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , то получаем *полные эллиптические интегралы в нормальной форме*. Обозначают:

$$K(k) = F\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)} = \int_0^1 \frac{dt}{V_{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$E(k) = E\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\psi, k) d\psi = \int_0^1 V_{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,$$

$$D(k) = \frac{K-E}{k^2} = D\left[\frac{\pi}{2}, k\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = \int_0^1 \frac{t^2}{V_{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} dt.$$

Нормальная форма полных интегралов, соответствующих дополнительному модулю  $k'$ , обозначается так:

$$K'(k) = K(k'), \quad E'(k) = E(k').$$

## А. ПРИВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ К НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

### 1. Общие замечания

Всякий эллиптический интеграл может быть представлен как линейная комбинация элементарных функций и интегралов 1-го, 2-го и 3-го родов в нормальной форме Лежандра. Для действительных эллиптических интегралов это представление \*) можно произвести так, что модуль  $k$  в нормальных формах интегралов и параметр  $n$  в нормальной форме интегралов 3-го рода будут действительны и  $0 < k < 1$ . Верхний предел интегрирования  $\varphi$  может при этом лежать в промежутке  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

### 2. Приведение к нормальной форме действительных интегралов

#### 2.1. Если преобразовать действительный эллиптический интеграл

$$\int R(x, \sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}) dx$$

подходящим образом выбранной подстановкой

$$x = \frac{p+qt}{1+t} \quad (\text{если } a_0 \neq 0) \quad \text{или} \quad x = t^2 - r \quad (\text{если } a_0 = 0)$$

к виду

$$\int R^*(t, \sqrt{\pm(t^2 - \lambda)(t^2 - \mu)}) dt,$$

то во многих случаях можно привести его к нормальной форме с помощью следующей вспомогательной таблицы. Она содержит в первом и последнем

\*) Формулы, необходимые в различных возможных случаях, можно найти в удобной для вычислений форме, например, в книгах: P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954; F. Tricomi, Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951; J. Houël, Recueil de formules et de tables numériques, Paris, 1901.



столбцах эллиптические интегралы, равные соответственно  $\frac{1}{c} F(\varphi, k)$  или  $mE(\varphi, k)$ , причем модуль  $k = \frac{a}{c}$ , а значения  $\varphi$  и  $m$  находятся из средних столбцов (числа  $a, b, c$  связаны соотношением  $a^2 + b^2 = c^2$ ).

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad k = \frac{a}{c}, \quad k' = \frac{b}{c}$$

$\frac{1}{c} F(\varphi, k)$	$\varphi$	$m$	$mE(\varphi, k)$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$	$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{b}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2+t^2}{(b^2+t^2)^3}} dt$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(b^2+t^2)(c^2+t^2)}}$	$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{b^2+t^2}{(c^2+t^2)^3}} dt$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{\sin \varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{cx}{ab}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)^3}}$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\cos \varphi = \frac{x}{a}$	$c$	$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}} dt$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$	$\cos \varphi = \frac{b}{x}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_b^x \sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}} dt$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\sin \varphi} = \frac{x}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3(t^2-b^2)}}$
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}}$	$\sin \varphi = \frac{x}{a}$	$c$	$\int_0^x \sqrt{\frac{c^2-t^2}{a^2-t^2}} dt$
$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)}}$	$\frac{\cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} = \frac{x}{a}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_x^a \frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(c^2-t^2)^3}}$
$\int_b^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$	$\Delta(\varphi, k) = \frac{b}{x}$	$\frac{1}{b^2c}$	$\int_b^x \frac{dt}{t^2 \sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$
$\int_x^c \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\Delta(\varphi, k) = \frac{x}{c}$	$c$	$\int_x^c \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2-b^2)(c^2-t^2)}}$
$\int_c^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\frac{\Delta(\varphi, k)}{\cos \varphi} = \frac{x}{c}$	$\frac{c}{b^2}$	$\int_c^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{(t^2-a^2)^3(t^2-c^2)}}$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-c^2)}}$	$\sin \varphi = \frac{c}{x}$	$\frac{1}{c}$	$\int_x^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2-a^2}{t^2-c^2}} dt$

2.2. Первый столбец приводимой ниже вспомогательной таблицы дает некоторые эллиптические интегралы, равные  $mF(\varphi, k)$  при соответствующих значениях  $\varphi, k, m$ .

$mF(\varphi, k)$	$\varphi$	$k$	$m$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$	$\cos \varphi = \frac{x-1-\sqrt{3}}{x-1+\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} =$ $= 0,2588190 =$ $= \sin 15^\circ$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0,7598357$
$\int_x^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$	$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} =$ $= 0,9659258 =$ $= \sin 75^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773503$
$\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$	$\cos \varphi = \frac{1-x-\sqrt{3}}{1-x+\sqrt{3}}$		
$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\operatorname{tg} \varphi = (\sqrt{2}+1) \frac{1-x}{1+x}$	$2(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{1}{2}} =$ $= 0,9851714 =$ $= \sin 80^\circ, 12070$	$2-\sqrt{2} = 0,5857864$
$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\cos \varphi = \frac{x^2-1}{x^2+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071068 =$ $= \sin 45^\circ$	$\frac{1}{2}$
$\int_x^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\cos \varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}$		
$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$	$\cos \varphi = \frac{1}{x}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$	$\cos \varphi = x$		

2.3. Следующие интегралы могут быть выражены через  $F, E$  и  $D$  (все от аргументов  $\varphi, k$ ):

$$\int_0^\varphi \frac{\cos^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = F - D, \quad \int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi = \frac{\Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi - E}{k'^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k) \cos^2 \psi} = \frac{\Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi + k^2(D - F)}{k'^2}, \quad \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta^3(\psi, k)} = \frac{E}{k'^2} - \frac{k^2 \sin \varphi \cos \varphi}{k'^2 \Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2 \psi}{\Delta^3(\psi, k)} d\psi = \frac{F - D}{k'^2} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{k'^2 \Delta(\varphi, k)}, \quad \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \psi}{\Delta^3(\psi, k)} d\psi = D + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)},$$

$$\int_0^\varphi \Delta(\psi, k) \operatorname{tg}^2 \psi d\psi = \Delta(\varphi, k) \operatorname{tg} \varphi + F - 2E.$$

В. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Представления

1.1. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода  $F(\varphi, k)$  (рис. 40—44) и неполный эллиптический интеграл 2-го рода  $E(\varphi, k)$  (рис. 45—48) допускают

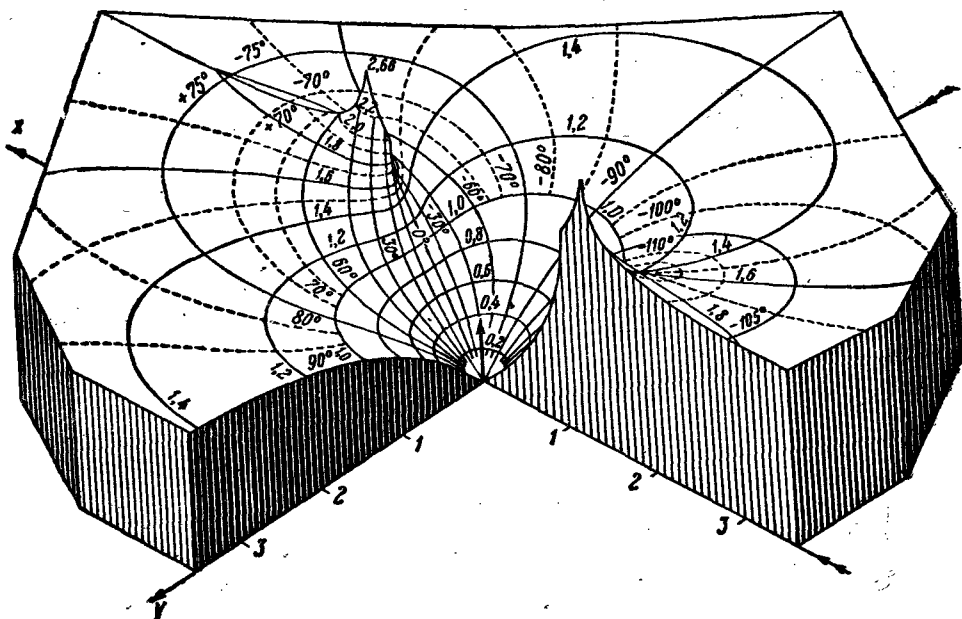


Рис. 40. Рельеф функции  $F(\varphi, k)$  при  $k=0,8$  над плоскостью  $x+iy = \sin \varphi$ .

следующие представления в действительной области:

$$\begin{aligned}
 F(\varphi, k) &= \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_{\cos \varphi}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}} = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\sin^2 \varphi} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{(1-t)(1-k^2t)}} = \int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}^1 \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{k'^2(1+t^2)+2(1+k^2)t}} = \\
 &= \int_0^{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{1+t^2+2(k'^2-k^2)t}} = \int_1^{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)} \frac{dt}{\sqrt{t} \sqrt{k'^2(1+t^2)+2(1+k^2)t}} \\
 E(\varphi, k) &= \int_0^{\sin \varphi} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt = \int_{\cos \varphi}^1 \sqrt{\frac{k'^2+k^2t^2}{1-t^2}} dt = \\
 &= \int_0^{\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} \frac{\sqrt{1+t^2+2(k'^2-k^2)t}}{(1+t)^2 \sqrt{t}} dt = \int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}^1 \sqrt{2(1+k^2)+k'^2\left(t+\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{(1+t)^2} = \\
 &= \int_{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}^1 \sqrt{2(1+k^2)+k'^2\left(t+\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{(1+t)^2}.
 \end{aligned}$$

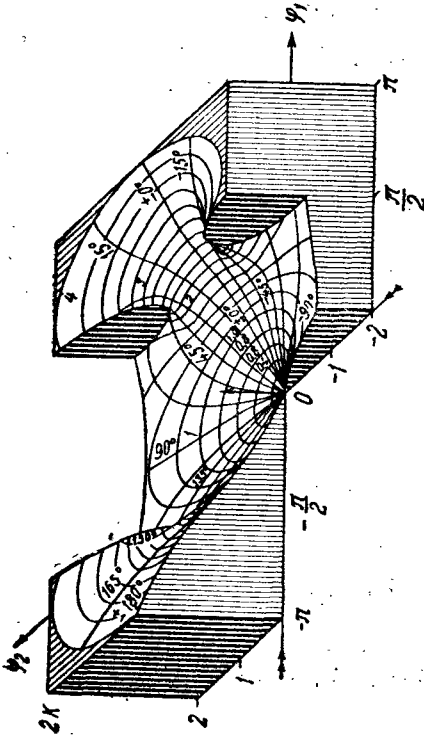


Рис. 41. Рельеф первой ветви функции  $F(\varphi, k)$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , при  $k = 0,8$ .

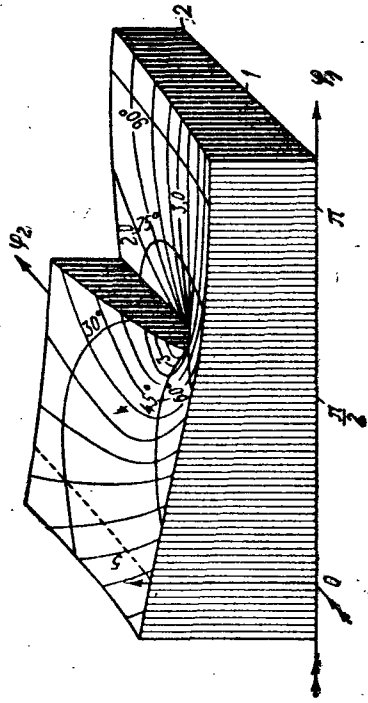


Рис. 42. Рельеф второй ветви функции  $F(\varphi, k)$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , при  $k = 0,8$ .

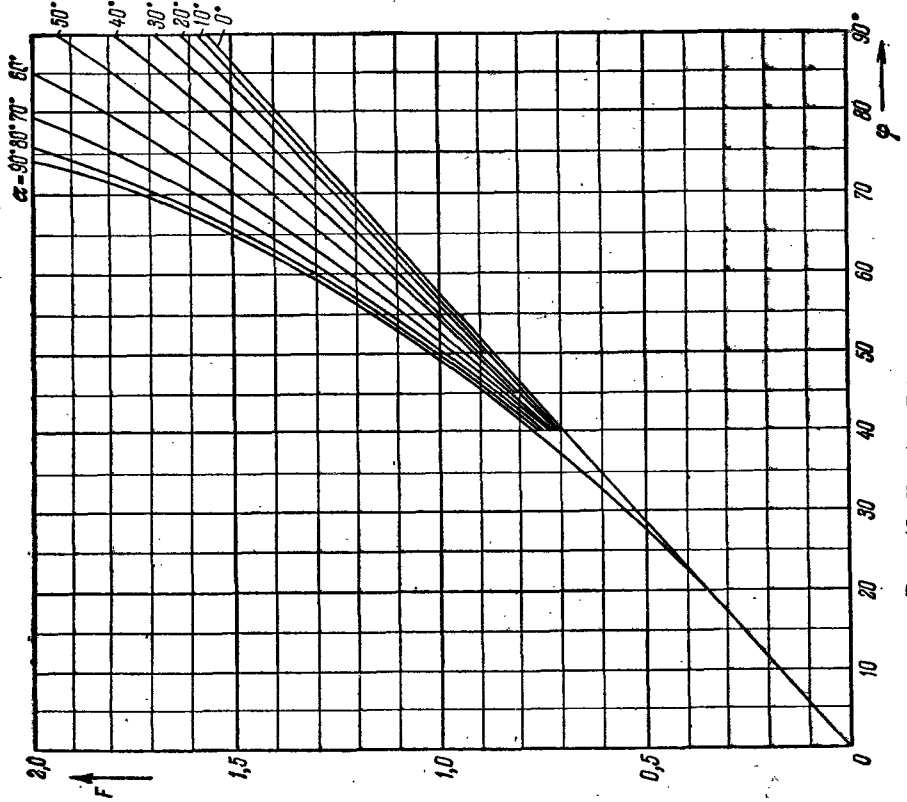


Рис. 43. Кривые  $F(\varphi, \sin \alpha)$ ,  $\alpha = \text{const.}$

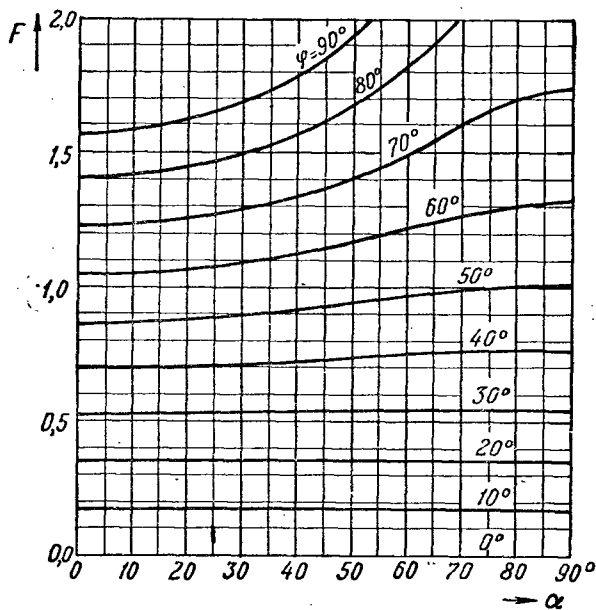


Рис. 44. Кривые  $F(\varphi, \sin \alpha)$ ,  $\varphi = \text{const.}$

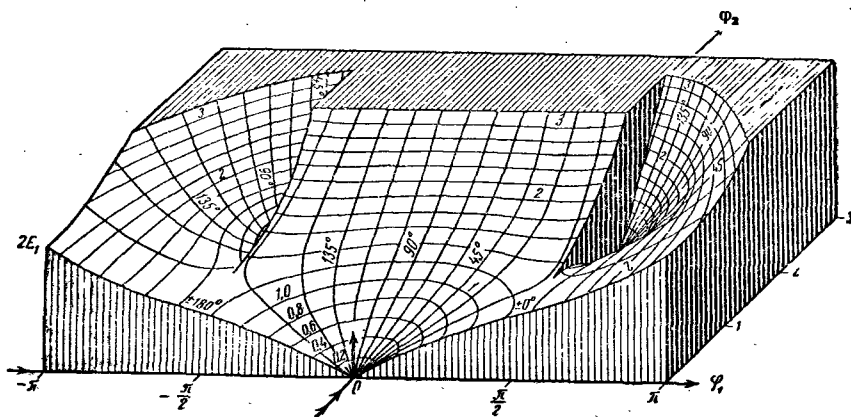


Рис. 45. Рельеф первой ветви функции  $E(\varphi, k)$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , при  $k = 0,8$ .

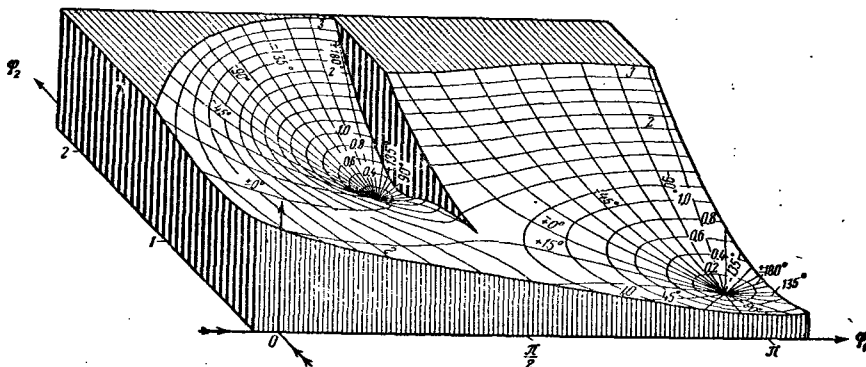


Рис. 46. Рельеф второй ветви функции  $E(\varphi, k)$ ,  $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ , при  $k = 0,8$ .

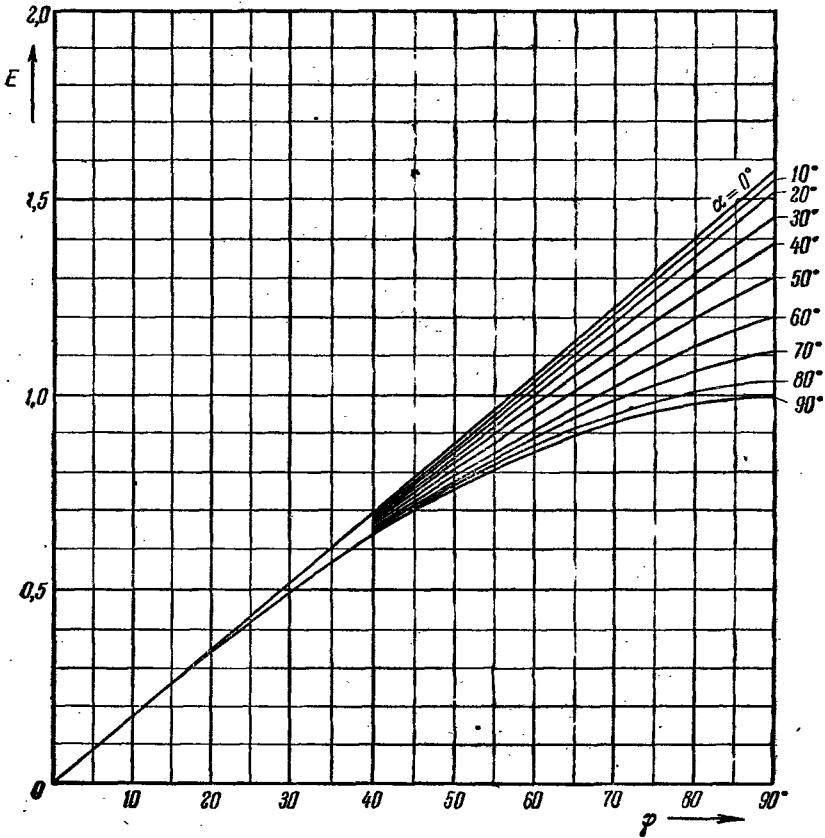
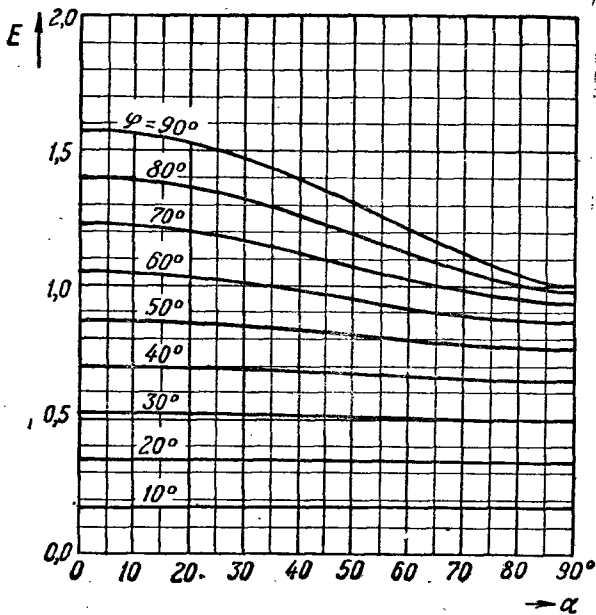
Рис. 47. Кривые  $E(\varphi, \sin \alpha)$ ,  $\alpha = \text{const.}$ Рис. 48. Кривые  $E(\varphi, \sin \alpha)$ ,  $\varphi = \text{const.}$

Таблица 27. Неполный эллиптический интеграл 1-го рода  $F(\varphi, k)$

$\varphi$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
0°	0, 00000	0, 00000	0, 00000	0, 00000	0, 00000	0, 00000	0, 00000
2°	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5
4°	06981 1745,5	06981 1745,5	06981 1746	06982 1745,5	06982 1746	06982 1746,5	06983 1747
6°	10472 1745,5	10472 1745,5	10473 1745,5	10473 1746,5	10474 1747	10475 1748	10477 1748,5
8°	13963 1745	13963 1745,5	13964 1746	13966 1746,5	13968 1748	13971 1749	13974 1750,5
10°	1745 + 174,5	1745 + 175	1746 + 174,5	1746 + 174,5	1746 + 175	1747 + 175	1748 + 175
12°	2094 174,5	2095 174,5	2095 174,5	2095 175	2096 175	2097 175,5	2098 176
14°	2443 175	2444 174,5	2444 175	2445 175	2446 175,5	2448 175,5	2450 176
16°	2793 174,5	2793 174,5	2794 174,5	2795 175	2797 175,5	2799 176	2802 176
18°	3142 174,5	3142 174,5	3143 175	3145 175	3148 175,5	3151 176	3154 177
20°	3491 + 174,5	3491 + 174,5	3493 + 174,5	3495 + 175,5	3499 + 176	3503 + 176,5	3508 + 177,5
22°	3840 174,5	3840 175	3842 175	3846 175,5	3851 176	3856 177	3863 178
24°	4189 174,5	4190 174,5	4192 175	4197 175,5	4203 176,5	4210 177,5	4219 178,5
26°	4538 174,5	4539 174,5	4542 175,5	4548 175,5	4556 176,5	4565 178	4576 179,5
28°	4887 174,5	4888 175	4893 175	4899 176	4909 177	4921 178	4934 180
30°	5236 + 174,5	5238 + 174,5	5243 + 175	5251 + 176	5263 + 177	5277 + 179	5294 + 181
32°	5585 174,5	5587 175	5593 175,5	5603 176,5	5617 178	5635 179,5	5656 181
34°	5934 174,5	5937 174,5	5944 175,5	5956 176,5	5973 178	5994 179,5	6018 182,5
36°	6283 174,5	6286 175	6295 175,5	6309 176,5	6329 178	6353 180,5	6383 183
38°	6632 174,5	6636 174,5	6646 175,5	6662 177	6685 179	6714 181,5	6749 183,5
40°	6981 + 174,5	6985 + 175	6997 + 175,5	7016 + 177	7043 + 179	7076 + 182	7116 + 185
42°	7330 174,5	7335 175	7348 176	7370 177,5	7401 179,5	7440 182	7486 185,5
44°	7679 175	7685 174,5	7700 176	7725 177,5	7760 180	7804 183	7857 186,5
46°	8029 174,5	8034 175	8052 175,5	8080 178	8120 180	8170 183,5	8230 188
48°	8378 174,5	8384 175	8403 176,5	8436 178	8480 181	8537 184	8606 188
50°	8727 + 174,5	8734 + 175	8756 + 176	8792 + 178	8842 + 181	8905 + 185	8982 + 189,5
52°	9076 174,5	9084 175	9108 176	9148 178,5	9204 181,5	9275 185,5	9361 190,5
54°	9425 174,5	9434 175	9460 176,5	9505 178,5	9567 181,5	9646 186	9742 191,5
56°	9774 174,5	9784 175	9813 176,5	9862 178,5	9930 182,5	*0018 186,5	*0125 192
58°	*0123 174,5	*0134 175	*0166 176,5	*0219 179	*0295 182,5	0391 187,5	0509 193,5
60°	0472 + 174,5	0484 + 175	0519 + 176,5	0577 + 179,5	0660 + 183	0766 + 187,5	0896 + 194
62°	0821 174,5	0834 175	0872 176,5	0936 179,5	1026 183	1141 188,5	1284 195
64°	1170 174,5	1184 175	1225 177	1295 179,5	1392 183,5	1518 189	1674 195,5
66°	1519 174,5	1534 175	1579 176,5	1654 179,5	1759 184	1896 189,5	2065 196,5
68°	1868 174,5	1884 175	1932 177	2013 180	2127 184	2275 190	2458 197,5
70°	2217 + 174,5	2234 + 175,5	2286 + 177	2373 + 180	2495 + 184,5	2655 + 190,5	2853 + 198
72°	2566 174,5	2585 175	2640 177	2733 180	2864 185	3036 190,5	3249 199
74°	2915 175	2935 175	2994 177	3093 180,5	3234 184,5	3417 191,5	3647 199
76°	3265 174,5	3285 175,5	3348 177	3454 180	3603 185,5	3800 191,5	4045 200
78°	3614 174,5	3636 175	3702 177	3814 180,5	3974 185	4183 191,5	4445 200,5
80°	3963 + 174,5	3986 + 175	4056 + 177,5	4175 + 180,5	4344 + 185,5	4566 + 192	4846 + 200,5
82°	4312 174,5	4336 175,5	4411 177	4536 180,5	4715 185,5	4950 192,5	5247 201
84°	4661 174,5	4687 175	4765 177,5	4897 181	5086 185,5	5335 192,5	5649 201,5
86°	5010 174,5	5037 175,5	5120 177	5259 180,5	5457 186	5720 192,5	6052 201
88°	5359 174,5	5388 175	5474 177	5620 180,5	5829 185,5	6105 192,5	6454 202
90°	5708 1,	5738 1,	5828 1,	5981 1,	6200 1,	6490 1,	6858 1,

Продолжение табл. 27

$\varphi$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
0°	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,00000	0,00000
2°	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	0,03491 + 1745,5	0,03491 + 1745,5
4°	06983 1746	06984 1746,5	06984 1746,5	06985 1747	0,06985 1747	0,06986 1747,5
6°	10478 1747,5	10480 1748	10482 1749	10483 1749	0,10485 1750	0,10486 1750
8°	13978 1750	13981 1750,5	13985 1751,5	13989 1753	0,13993 1754	0,13997 1755,5
10°	1748 1752	1749 1754,5	1750 1756,5	1751 1758	0,1751 + 177	0,1752 + 177
12°	2099 + 175,5	2101 + 176	2102 + 176	2103 + 176	0,2105 + 177,5	0,2106 + 178
14°	2451 176	2453 176	2456 177	2458 177,5	0,2460 178	0,2462 178,5
16°	2804 176,5	2808 177,5	2811 178	2814 179	0,2817 180	0,2820 180,5
18°	3159 177,5	3163 178,5	3167 179,5	3172 180,5	0,3177 181	0,3181 182
20°	3514 + 178,5	3520 + 179,5	3526 + 180,5	3533 + 181,5	0,3539 + 182,5	0,3545 + 183,5
22°	3871 179	3879 180	3887 181,5	3896 182,5	0,3904 184	0,3912 185,5
24°	4229 179,5	4239 181,5	4250 183	4261 184,5	0,4272 186,5	0,4283 187,5
26°	4588 181	4602 182,5	4616 184,5	4630 186,5	0,4645 188	0,4658 190
28°	4950 181,5	4967 183,5	4985 185,5	5003 188	0,5021 190	0,5038 192
30°	5313 + 183	5334 + 185	5356 + 187,5	5379 + 190	0,5401 + 192,5	0,5422 + 195
32°	5679 183,5	5704 186,5	5731 189	5759 192	0,5786 195	0,5812 198
34°	6046 185	6077 187,5	6109 191	6143 194	0,6176 197,5	0,6208 201
36°	6416 186	6452 189,5	6491 193	6531 197	0,6571 201	0,6610 204,5
38°	6788 187	6831 191	6877 195	6925 199	0,6973 203,5	0,7019 208,5
40°	7162 + 188,5	7213 + 192,5	7267 + 197	7323 + 202	0,7380 + 207	0,7436 + 212
42°	7539 189,5	7598 194	7661 199	7727 204,5	0,7794 210,5	0,7860 216,5
44°	7918 191	7986 196	8059 201,5	8136 208	0,8215 214	0,8293 220,5
46°	8300 192,5	8378 197,5	8462 204	8552 210,5	0,8643 218	0,8734 225,5
48°	8685 193,5	8773 200	8870 206,5	8973 214	0,9079 222	0,9185 231
50°	9072 + 195	9173 + 201	9283 + 209	9401 + 217	0,9523 + 226,5	0,9647 + 235,5
52°	9462 196,5	9575 203,5	9701 211,5	9835 221	0,9976 230,5	1,0118 242
54°	9855 197,5	9982 205,5	*0124 214	*0277 224	1,0437 235,5	1,0602 247,5
56°	*0250 199	*0393 207	0552 216,5	0725 227,5	1,0908 240,5	1,1097 254
58°	0648 200,5	0807 209,5	0985 219,5	1180 231,5	1,1389 245	1,1605 260,5
60°	1049 + 201,5	1226 + 211	1424 + 222	1643 + 235	1,1879 + 250	1,2126 + 267,5
62°	1452 203,5	1648 212,5	1868 225	2113 239	1,2379 255,5	1,2661 274
64°	1859 204	2073 215	2318 227,5	2591 242,5	1,2890 260,5	1,3209 282
66°	2267 205,5	2503 216,5	2773 229,5	3076 246	1,3411 265,5	1,3773 289
68°	2678 207	2936 218	3232 232,5	3568 250	1,3942 271	1,4351 296,5
70°	3092 + 207,5	3372 + 220	3697 + 235	4068 + 253	1,4484 + 276	1,4944 + 304
72°	3507 208,5	3812 221	4167 236,5	4574 256,5	1,5036 280,5	1,5552 311,5
74°	3924 210	4254 223	4640 239	5087 259,5	1,5597 285,5	1,6175 318,5
76°	4344 210,5	4700 223,5	5118 241	5606 262	1,6168 290	1,6812 325
78°	4765 211	5147 225	5600 242,5	6130 265	1,6748 293,5	1,7462 331,5
80°	5187 + 212	5597 + 226	6065 + 243,5	6660 + 266,5	1,7335 + 297	1,8125 + 337
82°	5611 212	6049 226,5	6572 245	7193 269	1,7929 299,5	1,8799 341,5
84°	6035 213	6502 227,5	7062 246	7731 270	1,8528 302	1,9482 345
86°	6461 212,5	6957 227,5	7554 246,5	8271 271	1,9132 303,5	2,0172 347,5
88°	6886 213	7412 228	8047 247	8813 271,5	1,9739 304	2,0867 349
90°	7312 1,	7868 1,	8541 1,	9356 1,	2,0347	2,1565



Продолжение табл. 27

$\varphi$	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 89^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
0°	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2°	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491	0,03491
4°	0,06986	0,06986	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987	0,06987
6°	0,10488	0,10489	0,10490	0,10491	0,10491	0,10491	0,10491
8°	0,14000	0,14003	0,14005	0,14007	0,14008	0,14008	0,14008
10°	0,1753	0,1753	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754	0,1754
12°	0,2107	0,2108	0,2109	0,2109	0,2110	0,2110	0,2110
14°	0,2464	0,2465	0,2466	0,2467	0,2468	0,2468	0,2468
16°	0,2823	0,2825	0,2827	0,2828	0,2829	0,2830	0,2830
18°	0,3185	0,3188	0,3191	0,3193	0,3194	0,3195	0,3195
20°	0,3550	0,3555	0,3559	0,3561	0,3563	0,3564	0,3564
22°	0,3919	0,3926	0,3931	0,3935	0,3937	0,3938	0,3938
24°	0,4292	0,4301	0,4308	0,4313	0,4316	0,4317	0,4317
26°	0,4670	0,4681	0,4690	0,4697	0,4701	0,4702	0,4702
28°	0,5053	0,5067	0,5079	0,5087	0,5092	0,5094	0,5094
30°	0,5442	0,5459	0,5474	0,5484	0,5491	0,5493	0,5493
32°	0,5837	0,5858	0,5876	0,5889	0,5898	0,5900	0,5900
34°	0,6238	0,6265	0,6287	0,6303	0,6313	0,6316	0,6317
36°	0,6647	0,6679	0,6706	0,6726	0,6739	0,6743	0,6743
38°	0,7063	0,7102	0,7135	0,7159	0,7175	0,7180	0,7180
40°	0,7488	0,7535	0,7575	0,7604	0,7623	0,7629	0,7629
42°	0,7922	0,7979	0,8026	0,8062	0,8084	0,8091	0,8092
44°	0,8367	0,8433	0,8490	0,8533	0,8560	0,8569	0,8569
46°	0,8821	0,8900	0,8968	0,9019	0,9052	0,9062	0,9063
48°	0,9287	0,9381	0,9461	0,9523	0,9561	0,9574	0,9575
50°	0,9766	0,9876	0,9971	1,0044	1,0091	1,0106	1,0107
52°	1,0258	1,0387	1,0499	1,0587	1,0642	1,0661	1,0662
54°	1,0764	1,0915	1,1048	1,1152	1,1219	1,1241	1,1242
56°	1,1285	1,1462	1,1619	1,1743	1,1823	1,1849	1,1851
58°	1,1822	1,2030	1,2215	1,2362	1,2458	1,2490	1,2492
60°	1,2376	1,2619	1,2837	1,3014	1,3129	1,3168	1,3170
62°	1,2949	1,3231	1,3490	1,3701	1,3841	1,3888	1,3890
64°	1,3541	1,3870	1,4175	1,4429	1,4599	1,4657	1,4659
66°	1,4153	1,4536	1,4898	1,5203	1,5411	1,5482	1,5485
68°	1,4786	1,5232	1,5661	1,6030	1,6287	1,6376	1,6379
70°	1,5441	1,5959	1,6468	1,6918	1,7237	1,7349	1,7354
72°	1,6118	1,6720	1,7326	1,7876	1,8277	1,8421	1,8427
74°	1,6818	1,7516	1,8237	1,8915	1,9427	1,9614	1,9623
76°	1,7540	1,8347	1,9207	2,0047	2,0711	2,0962	2,0973
78°	1,8284	1,9215	2,0240	2,1288	2,2164	2,2513	2,2528
80°	1,9048	2,0119	2,1339	2,2653	2,3836	2,4340	2,4362
82°	1,9831	2,1057	2,2504	2,4157	2,5795	2,6566	2,6603
84°	2,0630	2,2024	2,3731	2,5811	2,8136	2,9421	2,9487
86°	2,1442	2,3017	2,5013	2,7612	3,0978	3,3396	3,3547
88°	2,2263	2,4026	2,6336	2,9537	3,4412	3,9911	4,0481
90°	2,3088	2,5046	2,7681	3,1534	3,8317	5,4349	∞

Таблица 28. Неполный эллиптический интеграл 2-го рода  $E(\varphi, k)$ 

$\varphi$	$\alpha = 0^\circ$	$\alpha = 5^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 15^\circ$	$\alpha = 20^\circ$	$\alpha = 25^\circ$	$\alpha = 30^\circ$
$0^\circ$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
$2^\circ$	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03491 + 1745,5	03490 + 1745,5
$4^\circ$	06981 1745	06981 1745	06981 1745	06981 1745	06981 1745	06980 1744,5	06980 1743,5
$6^\circ$	10472 1745,5	10472 1745	10471 1745	10471 1744,5	10470 1743,5	10469 1743	10467 1742
$8^\circ$	13963 1745	13962 1745,5	13961 1745	13960 1743,5	13957 1743	13955 1741,5	13951 1740
$10^\circ$	1745 + 174,5	1745 + 174,5	1745 + 174,5	1745 + 174	1744 + 174,5	1744 + 174	1743 + 174
$12^\circ$	2094 174,5	2094 174,5	2094 174,5	2093 174,5	2093 174	2092 173,5	2091 173
$14^\circ$	2443 175	2443 174,5	2443 174	2442 174	2441 173,5	2439 173,5	2437 173,5
$16^\circ$	2793 174,5	2792 174,5	2791 174,5	2790 174	2788 174	2786 173,5	2784 172,5
$18^\circ$	3142 174,5	3141 174,5	3140 174,5	3138 174	3136 173,5	3133 172,5	3129 172
$20^\circ$	3491 + 174,5	3490 + 174,5	3489 + 174	3486 + 174	3483 + 173	3478 + 172,5	3473 + 172
$22^\circ$	3840 174,5	3839 174,5	3837 174	3834 173,5	3829 173	3823 172,5	3817 171
$24^\circ$	4189 174,5	4188 174,5	4185 174	4181 173,5	4175 172,5	4168 171,5	4159 170,5
$26^\circ$	4538 174,5	4537 174,5	4533 174	4528 173	4520 172,5	4511 171,5	4500 170
$28^\circ$	4887 174,5	4886 174	4881 174	4874 173,5	4865 172	4854 170,5	4840 169,5
$30^\circ$	5236 + 174,5	5234 + 174,5	5229 + 174	5221 + 173	5209 + 172	5195 + 170,5	5179 + 168,5
$32^\circ$	5585 174,5	5583 174,5	5577 173,5	5567 172,5	5553 171,5	5536 170	5516 168
$34^\circ$	5934 174,5	5932 174	5924 174	5912 173	5896 171	5876 169	5852 167
$36^\circ$	6283 174,5	6280 174,5	6272 173,5	6258 172	6238 171	6214 169	6186 166,5
$38^\circ$	6632 174,5	6629 174	6619 173,5	6602 172,5	6580 170,5	6552 168	6519 166
$40^\circ$	6981 + 174,5	6977 + 174,5	6966 + 173,5	6947 + 172	6921 + 170	6888 + 168	6851 + 164,5
$42^\circ$	7330 174,5	7326 174	7313 173	7291 171,5	7261 169,5	7224 167	7180 164
$44^\circ$	7679 175	7674 174,5	7659 173,5	7634 171,5	7600 169,5	7558 166,5	7508 163,5
$46^\circ$	8029 174,5	8023 174	8006 173	7977 171,5	7939 169	7891 166	7835 162,5
$48^\circ$	8378 174,5	8371 174	8352 173	8320 171,5	8277 168,5	8223 165,5	8160 161,5
$50^\circ$	8727 + 174,5	8719 + 174,5	8698 + 173	8663 + 170,5	8614 + 168,5	8554 + 165	8483 + 161
$52^\circ$	9076 174,5	9068 174	9044 172,5	9004 171	8951 168	8884 164	8805 160
$54^\circ$	9425 174,5	9416 174	9389 173	9346 170,5	9287 167,5	9212 164	9125 159
$56^\circ$	9774 174,5	9764 174	9735 172,5	9687 170,5	9622 167	9540 163	9443 158,5
$58^\circ$	*0123 174,5	*0112 174	*0080 173	*0028 170	9956 167	9866 162,5	9760 158
$60^\circ$	0472 + 174,5	0460 + 174	0426 + 172,5	0368 + 170	*0290 + 166,5	*0191 + 162,5	*0076 + 156,5
$62^\circ$	0821 174,5	0808 174	0771 172	0708 170	0623 166	0516 161,5	0389 156,5
$64^\circ$	1170 174,5	1156 174	1115 172,5	1048 169,5	0955 166	0839 161,5	0702 155,5
$66^\circ$	1519 174,5	1504 174	1460 172,5	1387 169,5	1287 165,5	1162 160,5	1013 155
$68^\circ$	1868 174,5	1852 174	1805 172	1726 169,5	1618 165,5	1483 160,5	1323 154,5
$70^\circ$	2217 + 174,5	2200 + 174	2149 + 172	2065 + 169	1969 + 165,5	1804 + 160	1632 + 153,5
$72^\circ$	2566 174,5	2548 174	2493 172,5	2403 169,5	2280 164,5	2124 159,5	1939 153,5
$74^\circ$	2915 175	2896 174	2838 172	2742 169	2609 165	2443 159,5	2246 153
$76^\circ$	3265 174,5	3244 174	3182 172	3080 168,5	2939 164,5	2762 159	2552 152
$78^\circ$	3614 174,5	3592 173,5	3526 172	3417 169	3268 164,5	3080 159	2856 152,5
$80^\circ$	3963 + 174,5	3939 + 174	3870 + 172	3755 + 169	3597 + 164	3398 + 158,5	3161 + 151,5
$82^\circ$	4312 174,5	4287 174	4214 172	4093 168,5	3925 164,5	3715 158,5	3464 151,5
$84^\circ$	4661 174,5	4635 174	4558 171,5	4430 168,5	4254 164	4032 158	3767 151,5
$86^\circ$	5010 174,5	4983 173,5	4901 172	4767 168,5	4582 164	4348 158,5	4070 151
$88^\circ$	5359 174,5	5330 174	5245 172	5104 169	4910 164	4665 158	4372 151,5
$90^\circ$	5708 1,	5678 1,	5589 1,	5442 1,	5238 1,	4981 1,	4675 1,

Продолжение табл. 28

$\varphi$	$\alpha = 35^\circ$	$\alpha = 40^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 50^\circ$	$\alpha = 55^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$
$0^\circ$	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745
$2^\circ$	03490 1744,5	03490 1744,5	03490 1744	03490 1744	03490 1744	03490 1743,5
$4^\circ$	06979 1743,5	06979 1742,5	06978 1742	06978 1741,5	06978 1740,5	06977 1740,5
$6^\circ$	10466 1741	10464 1740	10462 1739	10461 1737,5	10459 1736,5	10458 1735,5
$8^\circ$	13948 1738	13944 1736,5	13940 1734,5	13936 1732,5	13932 1731	13929 1729
$10^\circ$	1742 + 173,5	1742 + 173	1741 + 173	1740 + 172,5	1739 + 172,5	1739 + 172
$12^\circ$	2089 173,5	2088 172,5	2087 172	2085 172	2084 171,5	2083 171
$14^\circ$	2436 172,5	2433 172,5	2431 172	2429 171	2427 170,5	2425 170
$16^\circ$	2781 172	2778 171,5	2775 170,5	2771 170,5	2768 169,5	2765 169
$18^\circ$	3125 171,5	3121 170,5	3116 170	3112 169	3107 168,5	3103 167,5
$20^\circ$	3468 + 170,5	3462 + 170	3456 + 168,5	3450 + 167,5	3444 + 166,5	3438 + 166
$22^\circ$	3809 170,5	3802 168,5	3793 168	3785 166,5	3777 165,5	3770 164
$24^\circ$	4150 169	4139 168	4129 166,5	4118 165,5	4108 164	4098 162,5
$26^\circ$	4488 168,5	4475 167	4462 165,5	4449 163,5	4436 162	4423 160,5
$28^\circ$	4825 168	4809 166	4793 163,5	4776 162	4760 160	4744 158,5
$30^\circ$	5161 + 166,5	5141 + 164,5	5120 + 163	5100 + 160,5	5080 + 158	5061 + 156
$32^\circ$	5494 166	5470 163,5	5446 161	5421 158,5	5396 156,5	5373 154
$34^\circ$	5826 164,5	5797 162,5	5768 159,5	5738 156,5	5709 154	5681 151,5
$36^\circ$	6155 164	6122 161	6087 158	6051 155	6017 152	5984 149
$38^\circ$	6483 162,5	6444 159,5	6403 156	6361 153	6321 149,5	6282 146,5
$40^\circ$	6808 + 162	6763 + 158	6715 + 154,5	6667 + 151	6620 + 147	6575 + 143,5
$42^\circ$	7132 160,5	7079 157	7024 153	6969 148,5	6914 145	6862 141
$44^\circ$	7453 159,5	7393 155,5	7330 151,5	7266 147	7204 142	7144 137,5
$46^\circ$	7772 158,5	7704 154	7633 149	7560 144,5	7488 140	7419 135,5
$48^\circ$	8089 157,5	8012 152,5	7931 148	7849 142,5	7768 137	7690 132
$50^\circ$	8404 + 156	8317 + 151,5	8227 + 145,5	8134 + 140	8042 + 134,5	7954 + 129
$52^\circ$	8716 155	8620 149,5	8518 144	8414 138	8311 132	8212 126
$54^\circ$	9026 154,5	8919 148,5	8806 142,5	8690 136	8575 129,5	8464 123
$56^\circ$	9335 153	9216 147	9091 140,5	8962 134	8834 127	8710 120
$58^\circ$	9641 152	9510 145,5	9372 139	9230 131,5	9088 124	8950 117
$60^\circ$	9945 + 150,5	9801 + 144,5	9650 + 137	9493 + 129,5	9336 + 122	9184 + 114
$62^\circ$	*0246 150,5	*0090 143	9924 135,5	9752 127,5	9580 119	9412 111
$64^\circ$	0547 149	0376 142	*0195 134	*0007 125,5	9818 117	9634 108
$66^\circ$	0845 148	0660 140,5	0463 132,5	0258 124	*0052 114,5	9850 105,5
$68^\circ$	1141 147,5	0941 140	0728 131	0506 122	0281 112,5	*0061 102,5
$70^\circ$	1436 + 146,5	1221 + 138,5	0990 + 130	0750 + 120,5	0506 + 110,5	0266 + 100,5
$72^\circ$	1729 146	1498 137,5	1250 128,5	0991 118,5	0727 108,5	0467 97,5
$74^\circ$	2021 145,5	1773 137	1507 127,5	1228 117,5	0944 107	0662 96
$76^\circ$	2312 144,5	2047 136	1762 126,5	1463 116	1158 105	0854 93,5
$78^\circ$	2601 144,5	2319 135,5	2015 125,5	1695 115,5	1368 104	1041 92
$80^\circ$	2890 + 143,5	2590 + 134,5	2266 + 125	1926 + 114	1576 + 102,5	1225 + 90,5
$82^\circ$	3177 143,5	2859 134,5	2516 124,5	2154 113,5	1781 101,5	1406 89
$84^\circ$	3464 143,5	3128 134	2765 123,5	2381 112,5	1984 101	1584 88,5
$86^\circ$	3751 143	3396 134	3012 124	2606 112,5	2186 100	1761 87,5
$88^\circ$	4037 143	3664 133,5	3260 123	2831 112	2386 100,5	1936 87,5
$90^\circ$	4323 1,	3931 1,	3506 1,	3055 1,	2587 1,	2111 1,

Продолжение табл. 28

$\varphi$	$\alpha = 65^\circ$	$\alpha = 70^\circ$	$\alpha = 75^\circ$	$\alpha = 80^\circ$	$\alpha = 85^\circ$	$\alpha = 90^\circ$
	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0°	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745	00000 + 1745
2°	03490 1743,5	03490 1743	03490 1743	03490 1743	03490 1743	03490 1743
4°	06977 1739,5	06976 1739,5	06976 1739	06976 1738,5	06976 1738,5	06976 1738,5
6°	10456 1734,5	10455 1734	10454 1733	*10453 1733	10453 1732,5	10453 1732
8°	13925 1728	13923 1726	13920 1725,5	13919 1724!	13918 1723,5!	13917 1724!
10°	1738	1738	1737	1737	1737	1736
12°	2082 + 172	2081 + 171,5	2080 + 171,5	2080 + 171,5	2079 + 171	2079 + 171,5
14°	2424 171	2422 170,5	2421 170,5	2420 170	2419 170	2419 170
16°	2763 169,5	2761 169,5	2759 169	2757 168,5	2757 169	2756 168,5
18°	3099 168	3096 167,5	3094 167,5	3092 167,5	3091 167	3090 167
	3099 167	3096 166,5	3094 165,5	3092 165	3091 165	3090 165
20°	3433 + 165	3429 + 164	3425 + 163,5	3422 + 163,5	3421 + 163	3420 + 163
22°	3763 162,5	3757 162,5	3752 162	3749 161	3747 160,5	3746 160,5
24°	4090 161	4082 160	4076 159	4071 159	4068 158,5	4067 158,5
26°	4412 159	4402 158	4394 157	4389 156	4385 155,5	4384 155,5
28°	4730 157	4718 155,5	4708 154	4701 153	4696 153	4695 152,5
30°	5044 + 154	5029 + 152,5	5016 + 151,5	5007 + 150,5	5002 + 149,5	5000 + 149,5
32°	5352 152	5334 150	5319 148,5	5308 147,5	5301 147	5299 146,5
34°	5656 149	5634 147	5616 145,5	5603 144	5595 143	5592 143
36°	5954 146,5	5928 144	5907 142	5891 140,5	5881 139,5	5878 139,5
38°	6247 143	6216 140,5	6191 138,5	6172 137	6160 136	6157 135,5
40°	6533 + 140,5	6497 + 137,5	6468 + 135	6446 + 133	6432 + 132,5	6428 + 131,5
42°	6814 137	6772 134	6738 131	6712 129,5	6697 128	6691 128
44°	7088 134	7040 130,5	7000 127,5	6971 125	6953 123,5	6947 123
46°	7356 131	7301 127	7255 123,5	7221 121,5	7200 120	7193 119
48°	7618 127	7555 123	7502 119,5	7464 116,5	7440 115	7431 114,5
50°	7872 + 124	7801 + 119	7741 + 115,5	7697 + 112,5	7670 + 110,5	7660 + 110
52°	8120 120,5	8039 117,5	7972 111	7922 107,5	7891 105,5	7880 105
54°	8361 117	8270 111,5	8194 107	8137 103,5	8102 101	8090 100
56°	8595 113,5	8493 107	8408 102	8344 98	8304 96	8290 95
58°	8822 110	8707 103,5	8612 98	8540 94	8496 90,5	8480 90
60°	9042 + 106	8914 + 99,5	8808 + 93,5	8728 + 88,5	8677 + 86	8660 + 84,5
62°	9254 103	9113 95,5	8995 89	8905 83,5	8849 80	8829 79,5
64°	9460 99,5	9304 91,5	9173 84	9072 79	9009 75	8988 73,5
66°	9659 96,5	9487 87,5	9341 80	9230 73,5	9159 70	9135 68,5
68°	9852 93	9662 84	9501 75,5	9377 68,5	9299 64	9272 62,5
70°	*0038 + 90	9830 + 80	9652 + 71	9514 + 64	9427 + 58,5	9397 + 57
72°	0218 87	9990 76,5	9794 67	9642 58,5	9544 53	9511 51
74°	0392 84,5	*0143 73,5	9928 62,5	9759 54	9650 47,5	9613 45
76°	0561 81,5	0290 70	*0053 59	9867 49	9745 42	9703 39
78°	0724 80	0430 67,5	0171 55,5	9965 44,5	9829 36,5	9781 33,5
80°	0884 + 78	0565 + 65	0282 + 52,5	*0054 + 40,5	9902 + 31,5	9848 + 27,5
82°	1040 76	0695 63	0387 49,5	0135 37	9965 26	9903 21
84°	1192 75	0821 61,5	0486 47,5	0209 34	*0017 21,5	9945 15,5
86°	1342 74,5	0944 60	0581 46	0277 31,5	0060 17,5	9976 9
88°	1491 73,5	1064 60	0673 45,5	0340 30,5	0095 16	9994 3
90°	1638 1,	1184 1,	0764 1,	0401 1,	0127 1,	*0000 1,

В таблицах 27 и 28 для нормальной формы действительных интегралов  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$  аргументами выбраны  $\varphi$  и  $\alpha$ , где  $\alpha$  определяется через модули по формулам:  $k = \sin \alpha$ ,  $k' = \cos \alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$ ).

Если  $\varphi$  и  $\alpha$  оба очень близки к  $90^\circ$ , то при вычислении  $F(\varphi, k)$  целесообразно пользоваться формулой

$$F(\varphi, k) = K(k) - F(\varphi^*, k),$$

где  $\varphi^*$  определяется из условия  $k' \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi^* = 1$ . Значение  $K(k)$  берется из таблицы 30 полных интегралов в нормальной форме.

1.2. Имеют место следующие формулы:

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = K(k) + iF\left(\arcsin \frac{\operatorname{th} \chi}{k'}, k'\right) \quad \left(1 < \operatorname{ch} \chi \leq \frac{1}{k}\right),$$

$$F\left(\frac{\pi}{2} + i\chi, k\right) = F\left(\arcsin \frac{1}{k \operatorname{ch} \chi}, k\right) + iK'(k) \quad \left(\frac{1}{k} \leq \operatorname{ch} \chi < \infty\right),$$

$$F(+i\infty, k) = iK'(k), \quad F\left(\frac{\pi}{2} + i \operatorname{Arch} \frac{1}{k}, k\right) = K(k) + iK'(k).$$

## 2. Функциональные уравнения

$$F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k), \quad F(n\pi \pm \varphi, k) = 2nK(k) \pm F(\varphi, k),$$

$$E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k), \quad E(n\pi \pm \varphi, k) = 2nE(k) \pm E(\varphi, k).$$

Дифференцирование и интегрирование по модулю  $k$  приводят к следующим соотношениям (все функции  $F$ ,  $E$ ,  $D$  от аргументов  $\varphi$ ,  $k$ ):

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{k}{k'^2} \left( F - D - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} \right), \quad \frac{\partial E}{\partial k} = -kD,$$

$$\frac{\partial D}{\partial k} = \frac{1}{kk'^2} \left( F - D - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\Delta(\varphi, k)} \right) - \frac{D}{k},$$

$$\int Fk dk = E - k^2 F - [1 - \Delta(\varphi, k)] \operatorname{ctg} \varphi, \quad \int Dk dk = -E.$$

## С. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ПОЛНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Полные интегралы (рис. 49—56) получаются из неполных при определенном выборе пределов интегрирования.

### 1. Представления

1.1. При  $k^2 \ll 1$  пригодны следующие степенные ряды для  $K$ ,  $E$  и  $D$ :

$$\frac{2}{\pi} K = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k^{2n} = 1 + 2 \frac{k^2}{8} + 9 \left( \frac{k^2}{8} \right)^2 + 50 \left( \frac{k^2}{8} \right)^3 + \frac{1225}{4} \left( \frac{k^2}{8} \right)^4 + \dots,$$

$$\frac{2}{\pi} E = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} = 1 - 2 \frac{k^2}{8} - 3 \left( \frac{k^2}{8} \right)^2 - 10 \left( \frac{k^2}{8} \right)^3 - \frac{175}{4} \left( \frac{k^2}{8} \right)^4 - \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi} D &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{n}{2n-1} k^{2n-2} = \\ &= 1 + 3 \frac{k^2}{8} + 15 \left( \frac{k^2}{8} \right)^2 + \frac{175}{2} \left( \frac{k^2}{8} \right)^3 + \frac{2205}{4} \left( \frac{k^2}{8} \right)^4 + \dots, \end{aligned}$$

где принято обозначение  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)$ .

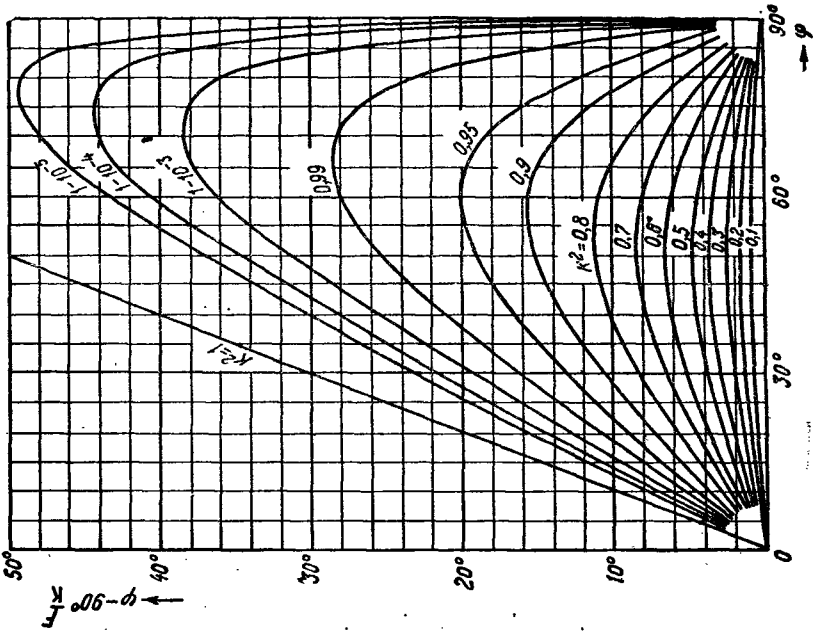


Рис. 49.  $\frac{F}{K} - \Phi$  — периодическая функция.

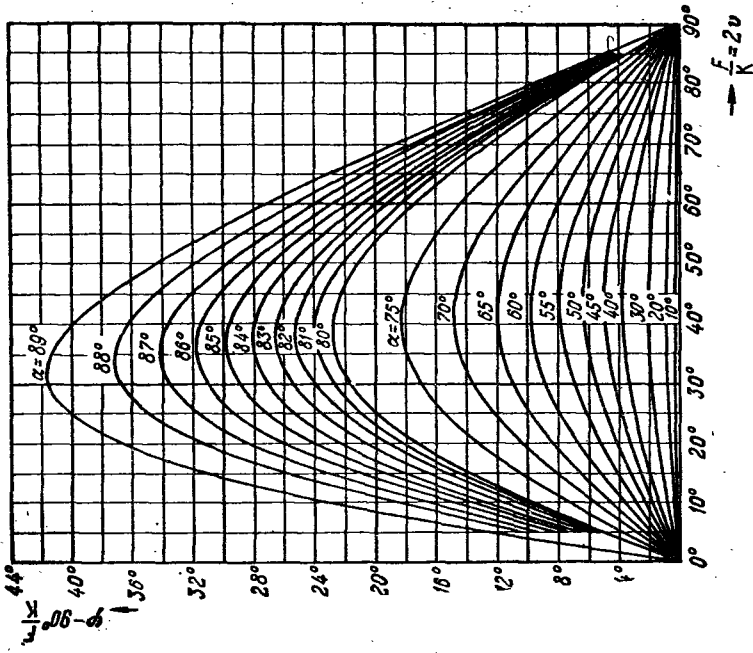


Рис. 50.  $\frac{F}{K} + \Phi$  — периодическая функция.

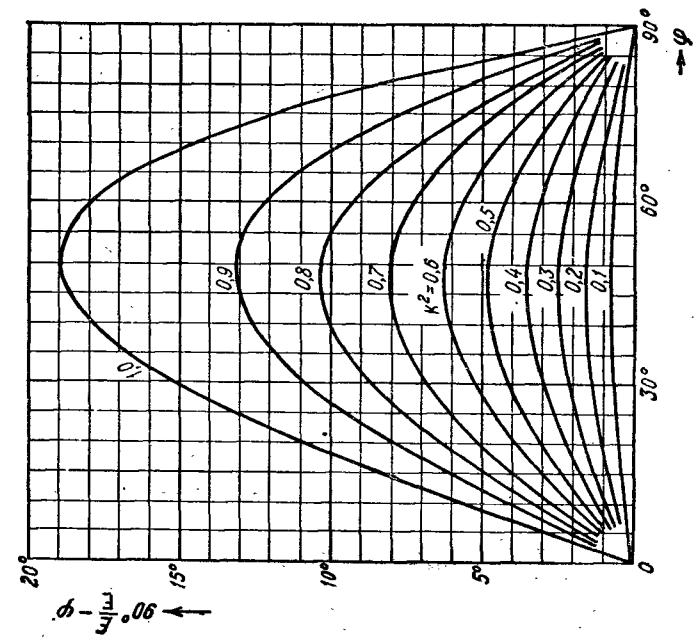


Рис. 52.  $90^\circ \frac{E}{E} = \varphi + \text{периодическая функция}$ .

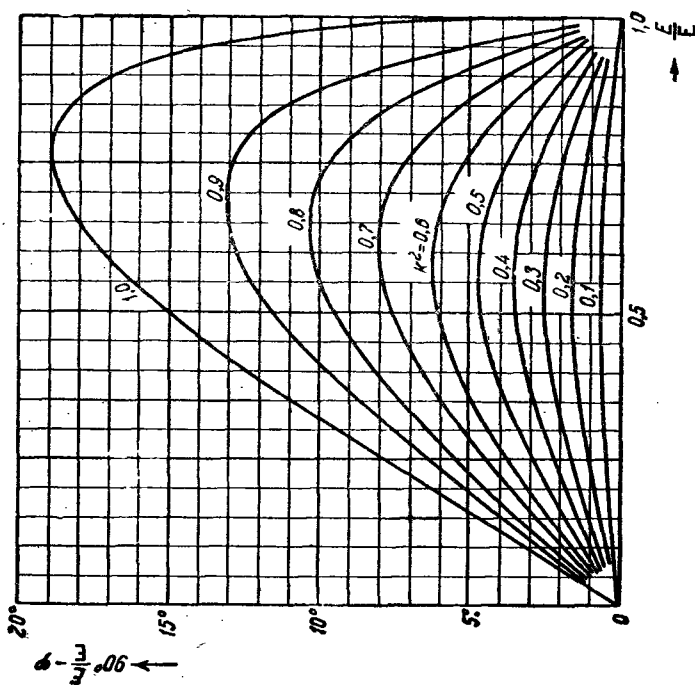


Рис. 51.  $\varphi = 90^\circ \frac{E}{E} - \text{периодическая функция}$ .

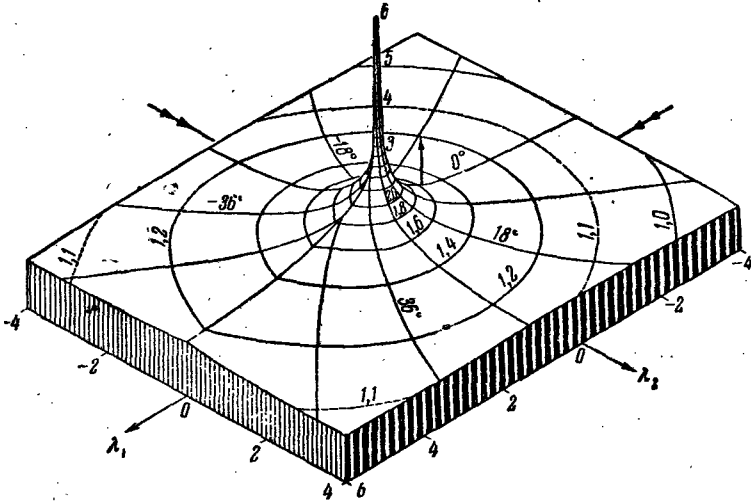


Рис. 53. Рельеф полного эллиптического интеграла  $K$  как функции  $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$ .

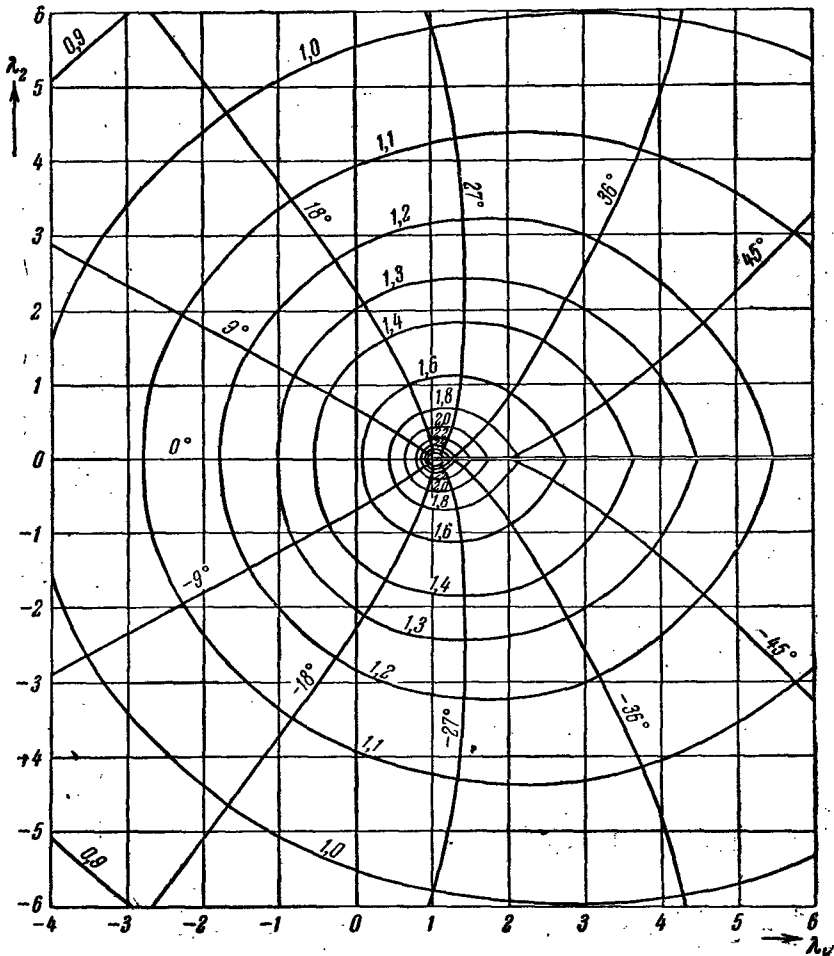


Рис. 54. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла  $K$ .



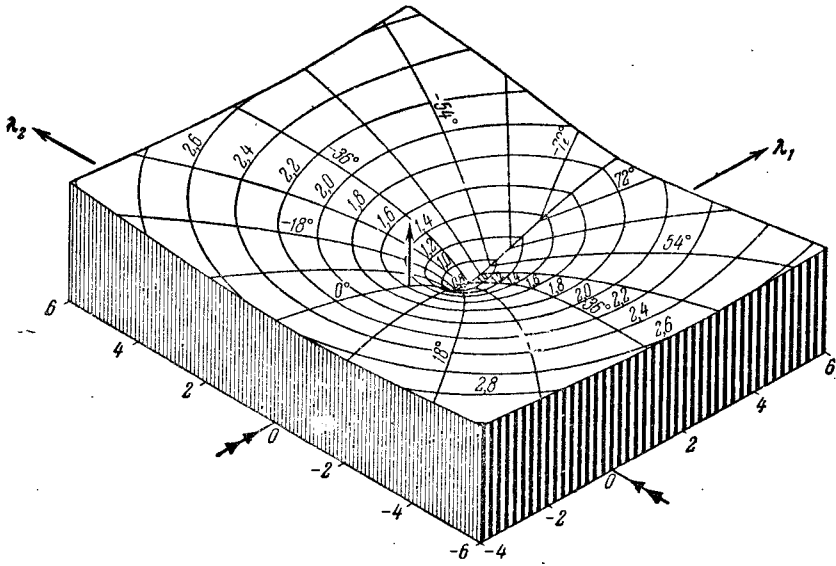


Рис. 55. Рельеф полного эллиптического интеграла  $E$  как функции  $k^2 = \lambda_1 + i\lambda_2$ .

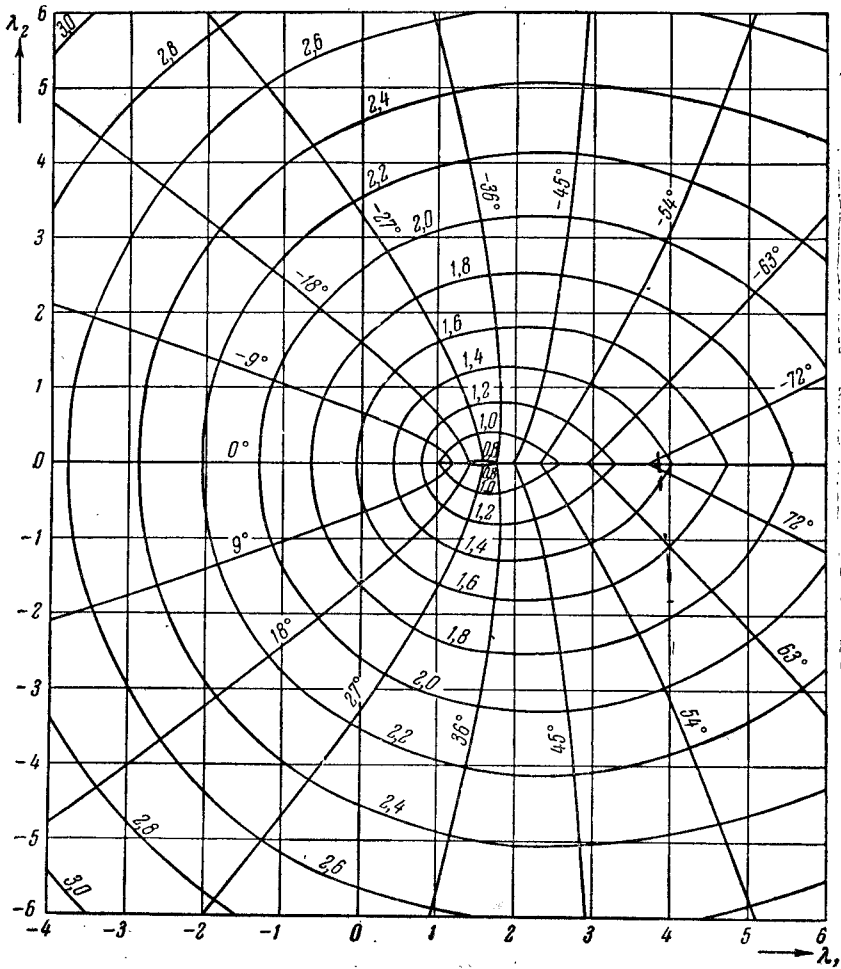


Рис. 56. Карта горизонталей рельефа полного эллиптического интеграла  $E$ .

Если  $k^2 \approx 1$  и, следовательно,  $k'^2 \ll 1$ , пользуются рядами

$$K = \Lambda + \frac{\Lambda - 1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} \left( \Lambda - \frac{7}{6} \right) k'^4 + \frac{25}{256} \left( \Lambda - \frac{37}{30} \right) k'^6 + \dots,$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} \left( \Lambda - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \frac{3}{16} \left( \Lambda - \frac{13}{12} \right) k'^4 + \frac{15}{128} \left( \Lambda - \frac{6}{5} \right) k'^6 + \dots,$$

$$D = \Lambda - 1 + \frac{3}{4} \left( \Lambda - \frac{4}{3} \right) k'^2 + \frac{45}{64} \left( \Lambda - \frac{41}{30} \right) k'^4 + \frac{175}{256} \left( \Lambda - \frac{289}{210} \right) k'^6 + \dots,$$

где  $\Lambda = \ln \frac{4}{k'}$  или, иначе,  $k' = 4e^{-\Lambda}$  (рис. 57).

Некоторые разложения для  $K$  и  $E$  можно получить с помощью тэта-функций (см. X, C).

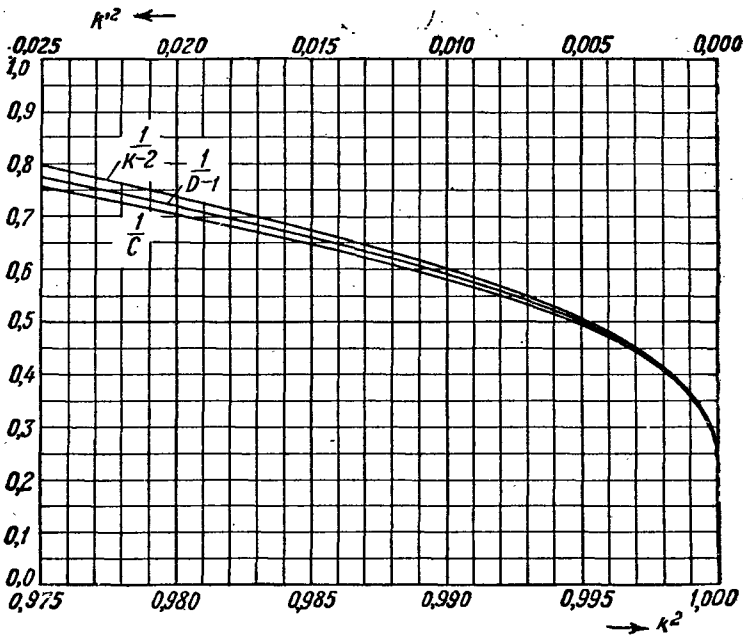


Рис. 57. Поведение эллиптических интегралов  $K$ ,  $D$  и  $C$  при  $k^2 \rightarrow 1$ .

Таблицы нормальных форм полных эллиптических интегралов дают значения  $K$ ,  $E$  в зависимости от аргумента  $\alpha$ , где  $k = \sin \alpha$  (таблица 29), или в зависимости от аргумента  $k^2$  (таблица 30).

При вычислениях иногда бывает выгодно (особенно чтобы избежать неточности, появляющейся для малых разностей) пользоваться, кроме  $K$  и  $E$ , также следующими интегралами \*) (таблица 31, рис. 58):

$$B(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi, \quad C(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi}{[\Delta(\psi, k)]^2} d\psi, \quad D(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\Delta(\psi, k)} d\psi.$$

Между этими интегралами имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} K &= D + B, & 2D &= K + k^2 C, & E &= (1 + k'^2) B + k'^2 k^2 C, \\ K &= 2B + k^2 C, & E &= k'^2 D + B, & (1 + k'^2) K &= 2E + k^4 C, \\ D &= B + k^2 C, & E &= k'^2 K + k^2 B, & (1 + k'^2) D &= E + k^2 C. \end{aligned}$$

\*) Введенными F. E m d e, Arch. fur Elektrotechnik, т. 30 (1936), стр. 243—250.

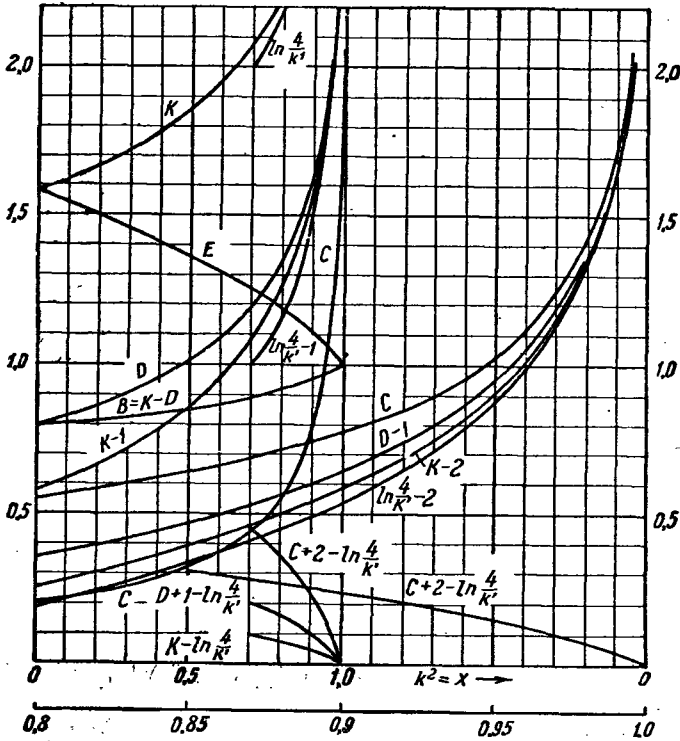


Рис. 58. Полные эллиптические интегралы действительного аргумента  $x = k^2$ .

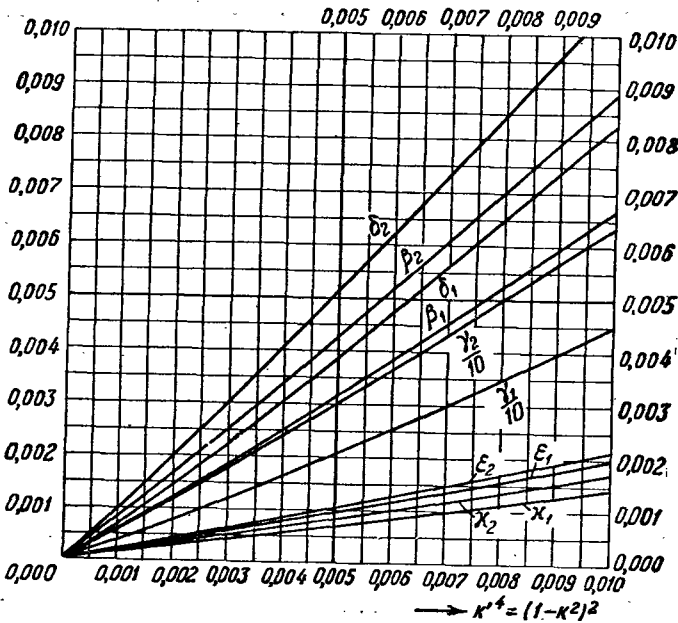


Рис. 59.  $E-1 = (0,5k'^2 + \epsilon_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,25k'^2 + \epsilon_2)$ ,

$$1-B = (0,5k'^2 + \beta_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,75k'^2 + \beta_2), \quad h = (0,25k'^2 + \alpha_1) \ln \frac{4}{k'} - (0,25k'^2 + \alpha_2),$$

$$d = (0,75k'^2 + \delta_1) \ln \frac{4}{k'} - (k'^2 + \delta_2), \quad c = (2,25k'^2 + \gamma_1) \ln \frac{4}{k'} - (3,75k'^2 + \gamma_2).$$

Так как  $K(k) \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 1$ , то значения аргумента в таблице 29 выбираются вблизи  $\alpha = 90^\circ$  через малые интервалы. Таблица 32 для функции (рис. 59)

$$h(k) = K(k) - \ln 4/k'$$

используется для улучшения точности вычислений при значениях модуля  $k$ , близких к единице. Величина  $K(k)$  легко получается, если взять  $\ln(4/k')$  по таблице логарифмов и прибавить значения  $h(k)$ , получаемые по таблице 32.

Таблица 32 для функций (рис. 59)

$$c(k) = C(k) + 2 - \ln 4/k', \quad d(k) = D(k) + 1 - \ln 4/k'$$

позволяет получать значения  $C(k)$  и  $D(k)$  вблизи  $k=1$  аналогичным приемом.

1.2. Для нормальной формы полного интеграла 3-го рода при больших значениях модуля, точнее, когда  $k'/\lambda' \ll 1$ , имеем\*):

$$\left(1 + \frac{k^2}{\lambda^2}\right) \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \lambda^2, k\right) - \frac{k^2}{\lambda^2} K(k) = \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos^2 \psi + k'^2 \sin^2 \psi}}{\cos^2 \psi + \lambda'^2 \sin^2 \psi} d\psi = \sqrt{\lambda'^2 - k'^2} \left( \frac{\arccos \frac{1}{\lambda'}}{\lambda' \sqrt{\lambda'^2 - 1}} + R \right),$$

где

$$R = \frac{k'^2}{2} \left( \Lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{\lambda'^3} + \frac{k'^4}{16} \left[ -1 + \left( \Lambda + \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left( 1 + \frac{6}{\lambda'^2} \right) \right] + \\ + \frac{k'^6}{16} \left[ -\frac{7}{16} - \frac{1}{\lambda'^2} + \left( \Lambda + \frac{1}{6} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{\lambda'^2} + \frac{5}{\lambda'^4} \right) \right] + \\ + \frac{15k'^8}{256} \left[ -\frac{37}{144} - \frac{21}{40\lambda'^2} - \frac{1}{\lambda'^4} + \left( \Lambda + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{\lambda'^3} \left( \frac{5}{24} + \frac{9}{20\lambda'^2} + \frac{1}{\lambda'^4} + \frac{14}{3\lambda'^6} \right) \right] + \dots, \\ \lambda'^2 = 1 + \lambda^2, \quad \Lambda = \ln 4/k', \quad k' = 4e^{-\Lambda}.$$

## 2. Функциональные уравнения

### 2.1. Соотношение Лежандра:

$$E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \pi/2.$$

### 2.2. Формулы перехода к другому модулю:

$$K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1+k'}{2} K(k), \quad K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)K(k), \quad K\left(i\frac{k}{k'}\right) = k'K(k), \\ E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1}{1+k'} [E(k) + k'K(k)], \quad E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} [2E(k) - k'^2K(k)], \\ K'i\left(\frac{k}{k'}\right) = k' [K'(k) - iK(k)], \quad K\left(\frac{1}{k}\right) = kK(k) + iK'(k).$$

### 2.3. Производные и интегралы:

$$\int_0^1 K(k) dk = 2 \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \right) = 2G, \quad G = 0,915965594\dots$$

( $G$  — постоянная Каталана).

\* См. G. Hamel, S-Ber. Berliner Math. Ges., т. 31 (1932), стр. 17—22 и M. Kolscher, Z. Angew. Math. Mech., т. 31 (1951), стр. 114—120.

Таблица 29. Полные эллиптические интегралы  $K(\sin \alpha)$  и  $E(\sin \alpha)$

$\alpha$	K	E	$\alpha$	K	E	$\alpha$	K	E
0°	5708	5708	50°	1,9356	3055	82°0	3,3699	0278
1°	5709	5707	51°	1,9539	2963	82°2	3,3946	0267
2°	5713	5703	52°	1,9729	2870	82°4	3,4199	0256
3°	5719	5697	53°	1,9927	2776	82°6	3,4460	0245
4°	5727	5689	54°	2,0133	2681	82°8	3,4728	0234
5°	5738	5678	55°	2,0347	2587	83°0	3,5004	0223
6°	5751	5665	56°	2,0571	2492	83°2	3,5288	0213
7°	5767	5649	57°	2,0804	2397	83°4	3,5581	0202
8°	5785	5632	58°	2,1047	2301	83°6	3,5884	0192
9°	5805	5611	59°	2,1300	2206	83°8	3,6196	0182
10°	5828	5589	60°	2,1565	2111	84°0	3,6519	0172
11°	5854	5564	61°	2,1842	2015	84°2	3,6852	0163
12°	5882	5537	62°	2,2132	1920	84°4	3,7198	0153
13°	5913	5507	63°	2,2435	1826	84°6	3,7557	0144
14°	5946	5476	64°	2,2754	1732	84°8	3,7930	0135
15°	5981	5442	65°	2,3088	1638	85°0	3,8317	0127
16°	6020	5405	66°	2,3439	1545	85°2	3,8721	0118
17°	6061	5367	67°	2,3809	1453	85°4	3,9142	0110
18°	6105	5326	68°	2,4198	1362	85°6	3,9583	0102
19°	6151	5283	69°	2,4610	1272	85°8	4,0044	0094
20°	6200	5238	70°	2,5046	1184	86°0	4,0528	0086
21°	6252	5191	70°5	2,5273	1140	86°2	4,1037	0079
22°	6307	5141	71°	2,5507	1096	86°4	4,1574	0072
23°	6365	5090	71°5	2,5749	1053	86°6	4,2142	0065
24°	6426	5037	72°	2,5998	1011	86°8	4,2744	0059
25°	6490	4981	72°5	2,6256	0968	87°0	4,3387	0053
26°	6557	4924	73°	2,6521	0927	87°2	4,4073	0047
27°	6627	4864	73°5	2,6796	0885	87°4	4,4811	0041
28°	6701	4803	74°	2,7081	0844	87°6	4,5609	0036
29°	6777	4740	74°5	2,7375	0804	87°8	4,6477	0031
30°	6858	4675	75°	2,7681	0764	88°0	4,7427	0026
31°	6941	4608	75°5	2,7998	0725	88°2	4,8478	0021
32°	7028	4539	76°	2,8327	0686	88°4	4,9654	0017
33°	7119	4469	76°5	2,8669	0648	88°6	5,0988	0014
34°	7214	4397	77°	2,9026	0611	88°8	5,2527	0010
35°	7312	4323	77°5	2,9397	0574	89°0	5,4349	0008
36°	7415	4248	78°	2,9786	0538	89°1	5,5402	0006
37°	7522	4171	78°5	3,0192	0502	89°2	5,6579	0005
38°	7633	4092	79°	3,0617	0468	89°3	5,7914	0004
39°	7748	4013	79°5	3,1064	0434	89°4	5,9455	0003
40°	7868	3931	80°0	3,1534	0401	89°5	6,1278	0002
41°	7992	3849	80°2	3,1729	0388	89°6	6,3509	0001
42°	8122	3765	80°4	3,1928	0375	89°7	6,6385	0001
43°	8256	3680	80°6	3,2132	0363	89°8	7,0440	0000
44°	8396	3594	80°8	3,2340	0350	89°9	7,7371	0000
45°	8541	3506	81°0	3,2553	0338	90°	∞	0000
46°	8691	3418	81°2	3,2771	0326			1.
47°	8848	3329	81°4	3,2995	0314			
48°	9011	3238	81°6	3,3223	0302			
49°	9180	3147	81°8	3,3458	0290			
50°	9356	3055	82°0	3,3699	0278			

Таблица 30 Полные эллиптические интегралы  $K(k)$  и  $E(k)$

$k^2$	$K$	$E$	$k^2$	$K$	$E$
0,00	5708	5708	0,50	1,8541	3506
02	5787	5629	52	1,8714	3405
04	5869	5550	54	1,8895	3302
06	5952	5470	56	1,9085	3198
08	6037	5389	58	1,9285	3092
0,10	6174	5308	0,60	1,9496	2984
12	6214	5226	62	1,9718	2875
14	6306	5143	64	1,9953	2763
16	6400	5059	66	2,0203	2650
18	6497	4975	68	2,0469	2535
0,20	6596	4890	0,70	2,0754	2417
22	6699	4805	72	2,1059	2296
24	6804	4718	74	2,1390	2173
26	6912	4631	76	2,1748	2047
28	7024	4543	78	2,2140	1918
0,30	7139	4454	0,80	2,2572	1785
32	7258	4364	82	2,3052	1648
34	7381	4273	84	2,3593	1507
36	7508	4181	86	2,4209	1360
38	7639	4088	88	2,4926	1207
0,40	7775	3994	0,90	2,5781	1048
42	7917	3899	92	2,6836	8879
44	8063	3803	94	2,8208	0700
46	8216	3705	96	3,0161	0505
48	8375	3606	98	3,3541	0286
0,50	8541	3506	1,00	$\infty$	0000

Таблица 31. Полные эллиптические интегралы  $B(k)$ ,  $C(k)$  и  $D(k)$

$k^2$	$B$	$C$	$D$	$k^2$	$B$	$C$	$D$
0,00	7854	19635	7854	0,50	8472	0,3193	1,0069
02	7874	19934	7913	52	8504	0,3279	1,0210
04	7894	20243	7975	54	8537	0,3370	1,0358
06	7914	20562	8038	56	8571	0,3467	1,0514
08	7935	20892	8102	58	8607	0,3571	1,0678
0,10	7956	21233	8168	0,60	8644	0,3682	1,0852
12	7977	21586	8237	62	8681	0,3801	1,1037
14	7999	21951	8307	64	8719	0,3929	1,1234
16	8021	22330	8379	66	8760	0,4067	1,1443
18	8044	22723	8453	68	8801	0,4217	1,1668
0,20	8067	23131	8529	0,70	8844	0,4380	1,1910
22	8090	23555	8608	72	8888	0,4559	1,2171
24	8114	23995	8690	74	8935	0,4757	1,2455
26	8138	24453	8774	76	8983	0,4975	1,2765
28	8163	24931	8861	78	9034	0,5219	1,3106
0,30	8188	2543	8951	0,80	9088	0,5495	1,3484
32	8214	2595	9044	82	9144	0,5809	1,3908
34	8240	2649	9141	84	9205	0,6171	1,4388
36	8267	2706	9241	86	9268	0,6596	1,4941
38	8294	2765	9345	88	9336	0,7106	1,5590
0,40	8322	2828	9453	0,90	9411	0,7733	1,6370
42	8350	2894	9566	92	9492	0,8535	1,7344
44	8380	2963	9683	94	9583	0,9620	1,8625
46	8410	3035	9806	96	9686	1,1235	2,0475
48	8441	3112	9934	98	9811	1,4203	2,3730
0,50	8472	3193	*0069	1,00	*0000	$\infty$	$\infty$

Таблица 32. Вспомогательные функции  $h(k)$ ,  $c(k)$  и  $d(k)$

$h = K - \ln \frac{4}{k^2}$			$c = C + 2 - \ln \frac{4}{k^2}$			$d = D + 1 - \ln \frac{4}{k^2}$		
$k^2$	$h$	$c$	$d$	$k^2$	$h$	$c$	$d$	
0,70	0,0	0,	0,2	0,85	0,0	0,	0,1	
71	871 -20	4497 -81	027 -41	86	542 -26	3027 -125	306 -59	
72	851 19	4416 85	*986 43	87	516 27	2902 127	247 59	
73	832 20	4331 85	943 43	88	489 27	2775 133	188 62	
74	812 21	4246 87	900 43	89	462 28	2642 139	126 65	
0,75	791 20	4159 90	857 45	90	434 29	2503 146	061 67	
76	771 -21	4069 -93	812 -46	91	405 -30	236 -16	*994 -70	
77	750 22	3976 93	766 46	92	375 31	220 16	924 72	
78	728 21	3883 98	720 48	93	344 33	204 17	852 76	
79	707 23	3785 98	672 48	94	311 33	187 18	776 81	
0,80	684 22	3687 102	624 50	95	278 36	169 20	695 86	
81	662 -23	3585 -106	574 -51	96	242 -38	149 -21	609 -91	
82	639 24	3479 107	523 52	97	204 41	128 23	518 100	
83	615 24	3372 112	471 54	98	163 45	105 27	418 111	
84	591 24	3260 115	417 55	99	118 50	078 32	307 111	
0,85	567 25	3145 118	362 56	1,00	068 000	046 000	178 000	
	542 0,0	3027 0,	306 0,1		0,0	0,	0,0	

Если рассматривать интегралы  $K$ ,  $E$  как функции аргумента  $x = k^2$ , то получим (аргументы опущены):

$$2 \frac{dK}{dx} = \frac{E}{x(1-x)} - \frac{K}{x}, \quad 2 \frac{dE}{dx} = \frac{E-K}{x}, \quad \int K dx = 2 [E - (1-x)K] = 2x(K-D),$$

$$\int E dx = \frac{2}{3} [(1+x)E - (1-x)K], \quad \int D dx = -2E, \quad \int (K+D) dx = -2(1-x)K,$$

$$\int Kx dx = \frac{2}{9} [(4+x)E + (3x^2+x-4)K],$$

$$\int Ex dx = \frac{2}{45} [(9x^2+x+4)E + (3x^2+x-4)K],$$

$$(2n+3)^2 \int Kx^{n+1} dx - 4(n+1)^2 \int Kx^n dx = 2x^{n+1} [E - (2n+3)(1-x)K],$$

$$4(n+1)^2 \int Ex^n dx - (2n-3)(2n+5) \int Ex^{n+1} dx =$$

$$= 2x^{n+1} \{ [(2n+1) - (2n+3)x]E + (1-x)K \} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$\int \frac{K}{x\sqrt{x}} dx = -2 \frac{E}{\sqrt{x}}, \quad \int \frac{D}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}(K-D),$$

$$\int \frac{E}{x\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} [2E + (x-1)K], \quad \int \frac{E}{x^2\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{9x\sqrt{x}} [(4-2x)E + (x-1)K],$$

$$\int \frac{E}{1-x} dx = 2(K-E) = 2xD, \quad \int \frac{E}{(1-x)\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}K.$$

2.4.  $K$ ,  $E$  и  $D$  удовлетворяют гипергеометрическим дифференциальным уравнениям [в которых принято обозначение аргумента  $x = k^2$ ]:

$$\frac{1}{4}K = \frac{d}{dx} \left[ x(1-x) \frac{dK}{dx} \right], \quad x(1-x) \frac{d^2K}{dx^2} + (1-2x) \frac{dK}{dx} - \frac{1}{4}K = 0,$$

$$-\frac{1}{4}E = (1-x) \frac{d}{dx} \left( x \frac{dE}{dx} \right), \quad x(1-x) \frac{d^2E}{dx^2} + (1-x) \frac{dE}{dx} + \frac{1}{4}E = 0,$$

$$-\frac{1}{4}D = \frac{d}{dx} \left[ (1-x) \frac{dD}{dx} \right], \quad x(1-x) \frac{d^2D}{dx^2} + (2-3x) \frac{dD}{dx} - \frac{3}{4}D = 0.$$

## Х. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### Определения и обозначения

*Эллиптическими функциями* называются функции, обратные к эллиптическим интегралам.

Эллиптическая функция является двойкопериодической мероморфной функцией комплексного переменного. Все ее периоды можно представить в виде  $2m\omega_1 + 2n\omega_2$  ( $m, n$  — целые числа), где  $2\omega_1, 2\omega_2$  называются *парой основных периодов*. Отношение основных периодов  $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  является комплексной величиной, и можно считать, что  $\text{Im } \tau > 0$ .

Начиная из произвольной точки  $u_0$ , можно покрыть всю плоскость комплексного аргумента сеткой параллелограммов периодов, вершинами которых будут точки  $u_0 + 2m\omega_1 + 2n\omega_2$  ( $m, n$  — целые числа). В силу своей двойкопериодичности функция принимает одно и то же значение в соответствующих (гомологических) точках всех параллелограммов периодов.

### А. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

#### 1. Амплитуда Якоби $\text{am}(u, k)$

Если

$$u = F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\Delta(\psi, k)}$$

— неполный эллиптический интеграл 1-го рода, то  $\varphi$  называется *амплитудой*  $u$ :

$$\varphi = \text{am}(u, k).$$

Она является бесконечнозначной периодической функцией от  $u = u_1 + iu_2$  (рис. 60, 61) с точками ветвления\*)  $u = 2mK + (2n + 1)K'i$  ( $m, n$  — целые числа) и с периодом  $4K'i$ :

$$\text{am}(u + 4K'i, k) = \text{am}(u, k).$$

Далее, имеют место свойства

$$\begin{aligned} \text{am}(u + 2K, k) &= \pi + \text{am}(u, k), \quad \text{am}(u + 2K'i, k) = \pi - \text{am}(u, k), \\ \text{am}(-u, k) &= -\text{am}(u, k); \end{aligned}$$

при  $u$  близких к нулю верно представление

$$\text{am}(iK' - iu, k) \approx i \ln \frac{2}{ku}.$$

\*) Здесь  $K$  означает полный эллиптический интеграл 1-го рода  $K = K(k)$ ,  $K' = K(k')$ , где  $k' = \sqrt{1 - k^2}$ . — Прим. ред.



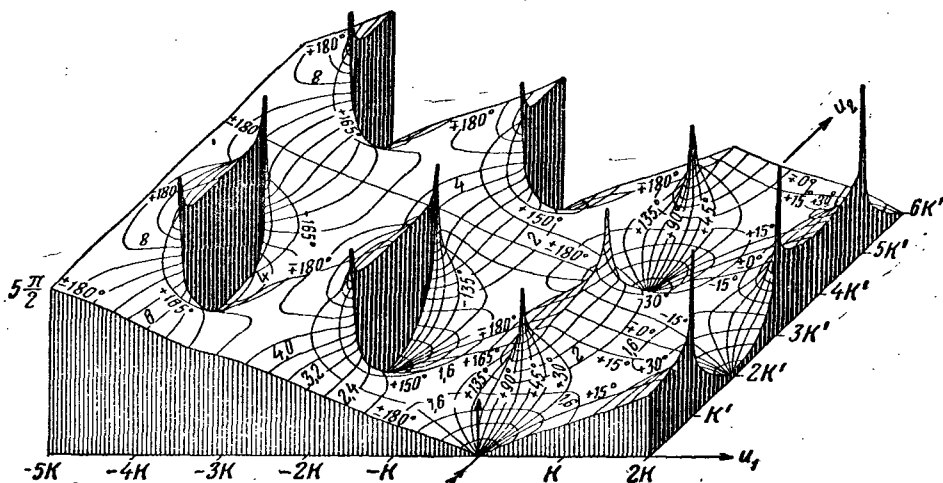


Рис. 60. Рельеф амплитуды Якоби  $am(u, k)$  при  $k=0,8$ . Четыре заштрихованные поверхности слева означают линии ветвления.

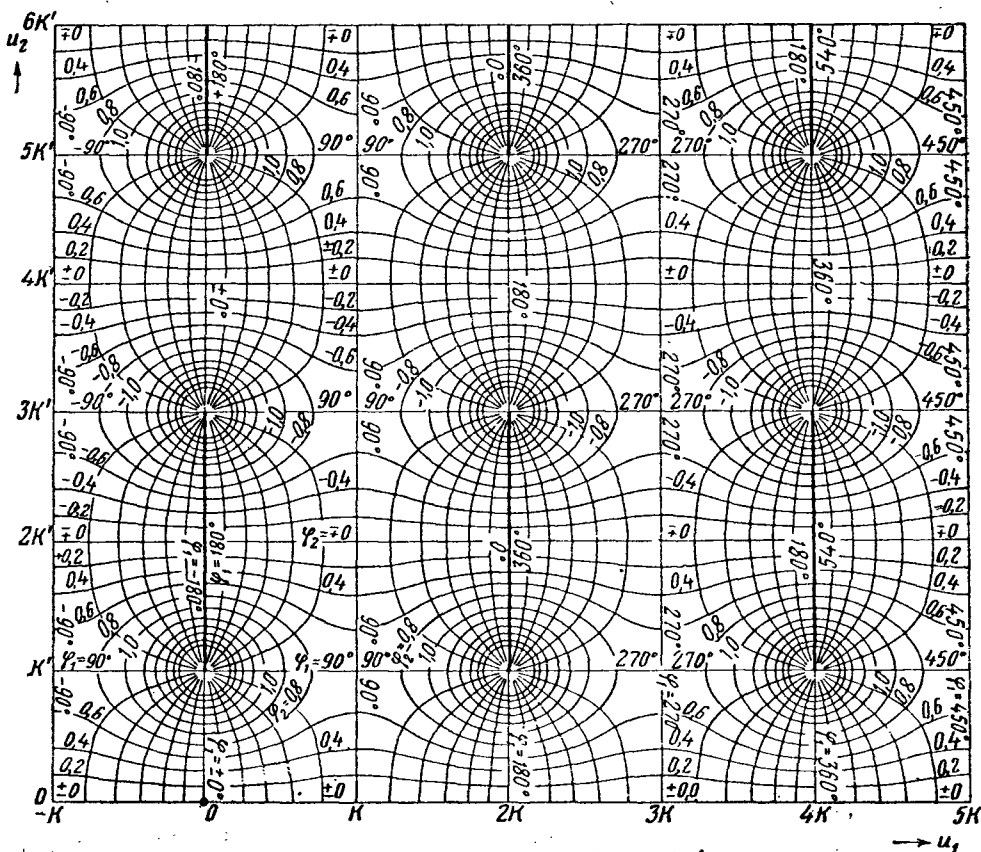


Рис. 61. Карта горизонталей рельефа амплитуды Якоби  $\varphi_1 + i\varphi_2 = am(u, k)$  при  $k=0,8$  ( $K=2,00, K'=1,75$ ). Обратите внимание на линии ветвления!

2. Функции Якоби  $\operatorname{sn} u$ ,  $\operatorname{cn} u$ ,  $\operatorname{dn} u$ 

Двойкопериодические функции Якоби получаются из  $\varphi = \operatorname{am}(u, k)$  посредством формул

$$\begin{aligned}\operatorname{sn}(u, k) &= \sin \varphi = \sin \operatorname{am}(u, k), \\ \operatorname{cn}(u, k) &= \cos \varphi = \cos \operatorname{am}(u, k), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \Delta(\varphi, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(u, k)}.\end{aligned}$$

Парами основных периодов являются соответственно

$$4K, 2K'i; \quad 4K, 2K + 2K'i; \quad 2K, 4K'i.$$

Если эти функции рассматриваются как функции только одного аргумента

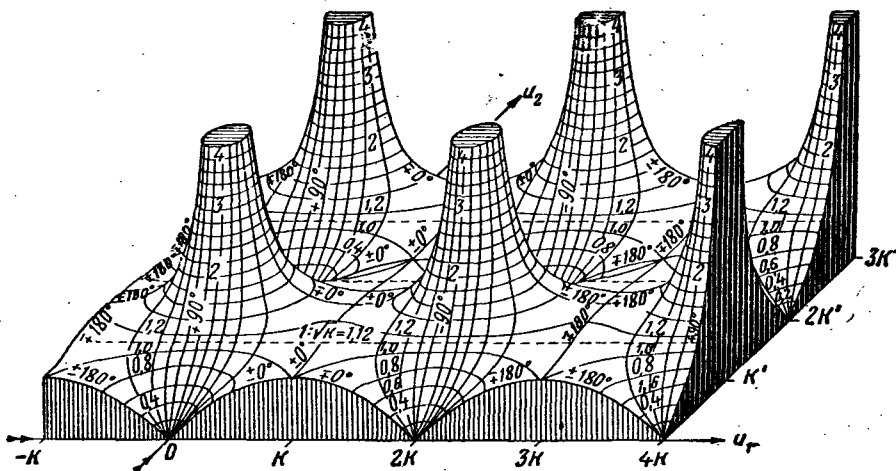


Рис. 62. Рельеф функции Якоби  $\operatorname{sn} u$  при  $k=0,8$ .

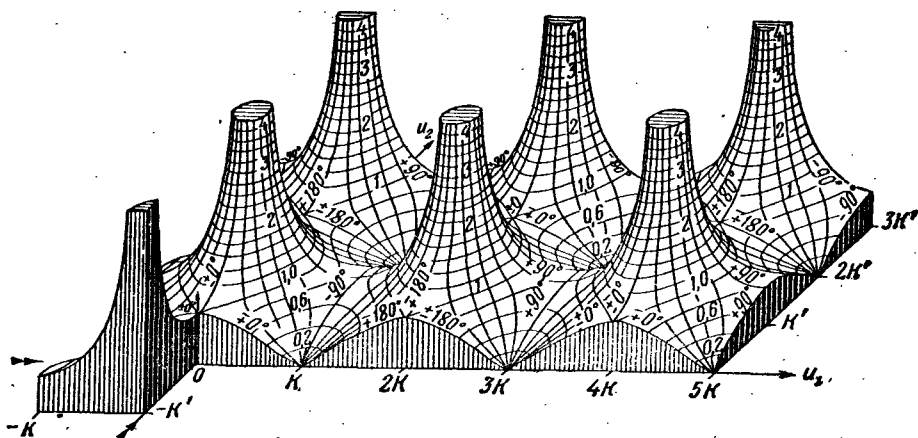


Рис. 63. Рельеф функции Якоби  $\operatorname{cn} u$  при  $k=0,8$ .

$u = u_1 + iu_2$  при постоянном модуле  $k$ , то пишут для краткости  $\operatorname{sn} u$  (рис. 62,65),  $\operatorname{cn} u$  (рис. 63,66)  $\operatorname{dn} u$  (рис. 64,67). Представления этих функций через тэта-функции см. в С, 4.3.

Отметим два исключительных случая:

$$k=0, k'=1: \quad \operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1,$$

$$K = \frac{\pi}{2}, \quad K' = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^2} e^{-\pi K'/K} = \frac{1}{16};$$

$$k=1, k'=0: \quad \varphi = \operatorname{gd} u, \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = \operatorname{dn} u = \frac{1}{\operatorname{ch} u},$$

$$K = \infty, \quad K' = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1}{1-k^2} e^{-\pi K K'} = \frac{1}{16}.$$

### 3. Частные значения

$$\operatorname{sn}(0) = 0, \quad \operatorname{cn}(0) = 1, \quad \operatorname{dn}(0) = 1.$$

	Нули	Полосы	Вычеты
$\operatorname{sn} u$	$2mK + 2nK'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^m 1/k$
$\operatorname{cn} u$	$(2m+1)K + 2nK'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^{m+n-1} i/k$
$\operatorname{dn} u$	$(2m+1)K + (2n+1)K'i$	$2mK + (2n+1)K'i$	$(-1)^{n-1} i$

Если  $u = u_1 + iu_2$  и  $k > 0$ , то

$$\left| \operatorname{sn} \left( \frac{1}{2} K'i + u_1 + 0i \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad \left| \operatorname{dn} \left( \frac{1}{2} K + 0 + u_2 i \right) \right| = \sqrt{k'}.$$

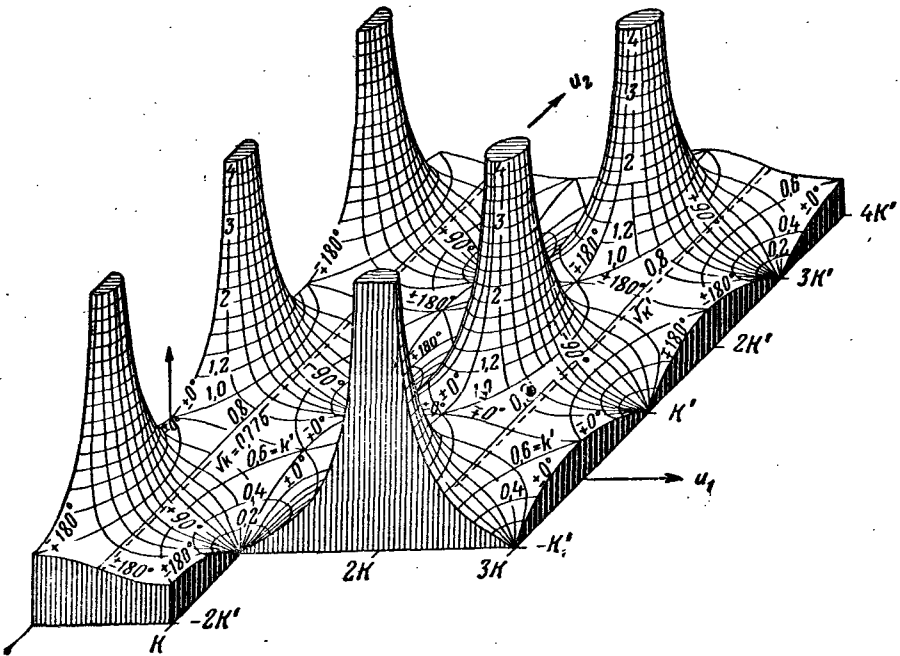
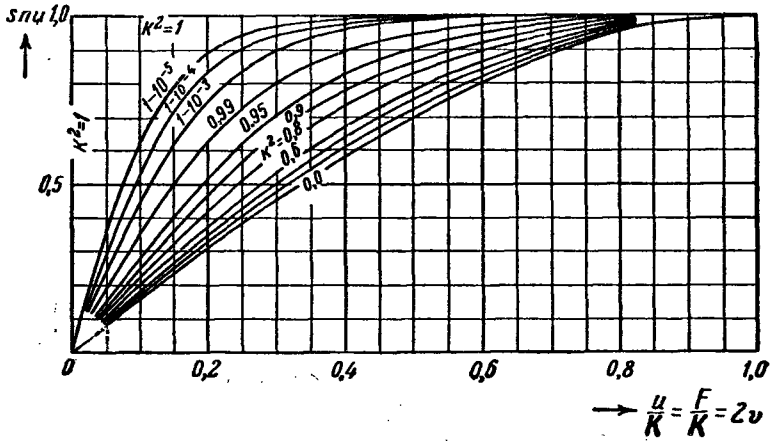
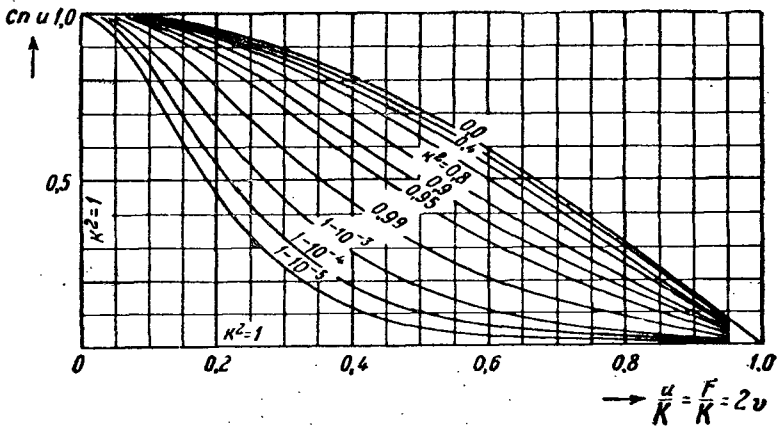
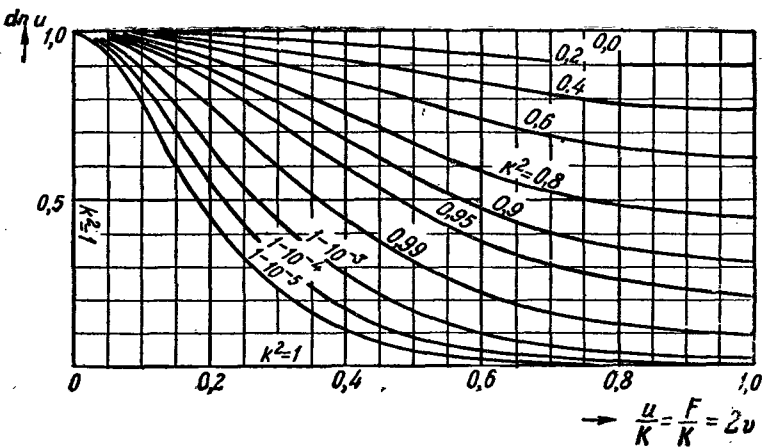


Рис. 64. Рельеф функции Якоби  $\operatorname{dn} u$  при  $k=0,8$ .

Рис. 65.  $\operatorname{sn}(K \cdot 2v)$  как функция  $2v$ .Рис. 66.  $\operatorname{cn}(K \cdot 2v)$  как функция  $2v$ .Рис. 67.  $\operatorname{dn}(K \cdot 2v)$  как функция  $2v$ .

4. Функциональные уравнения

4.1. Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(-u) &= -\operatorname{sn} u, & \operatorname{cn}(-u) &= \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(-u) &= \operatorname{dn} u, & \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u &= 1, \\ \operatorname{dn}^2 u &= 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u = k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u = \operatorname{cn}^2 u + k'^2 \operatorname{sn}^2 u, \\ \operatorname{sn}^2 u &= \frac{1 - \operatorname{cn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u}, & \operatorname{cn}^2 u &= \frac{\operatorname{cn} 2u + \operatorname{dn} 2u}{1 + \operatorname{dn} 2u}, & \operatorname{dn}^2 u &= \frac{\operatorname{dn} 2u + k^2 \operatorname{cn} 2u + k'^2}{1 + \operatorname{dn} 2u}, \\ \operatorname{sn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{sn}(iu, k) &= i \frac{\operatorname{sn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ \operatorname{cn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \mp \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{cn}(iu, k) &= \frac{1}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ \operatorname{dn}(u \pm v) &= \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \mp k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}, & \operatorname{dn}(iu, k) &= \frac{\operatorname{dn}(u, k')}{\operatorname{cn}(u, k')}, \\ (1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v) \times & \begin{cases} \operatorname{sn}(u + v) \operatorname{sn}(u - v) = \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v, \\ \operatorname{cn}(u + v) \operatorname{cn}(u - v) = \operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v \operatorname{dn}^2 u, \\ \operatorname{dn}(u + v) \operatorname{dn}(u - v) = \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn}^2 u. \end{cases} \end{aligned}$$

4.2. Изменение функций при возрастании аргумента  $u$  на четверть- и полу-период берется из следующих таблиц, в которых для краткости написано  $s, c, d$  вместо  $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$ :

$\operatorname{sn}(mK + nK'i + u)$

	-K	0	+K	$\pm 2K$
$\pm iK'$	$-\frac{d}{kc}$	$\frac{1}{ks}$	$\frac{d}{kc}$	$-\frac{1}{ks}$
0	$-\frac{c}{d}$	$s$	$\frac{c}{d}$	$-s$

$\operatorname{dn}(mK + nK'i + u)$

	0	$\pm K$
$\pm 2iK'$	$-d$	$-\frac{k'}{d}$
$+iK$	$\frac{c}{is}$	$ik' \frac{s}{c}$
0	$d$	$\frac{k'}{d}$
$-iK$	$\frac{ic}{s}$	$\frac{k's}{is}$

$\operatorname{cn}(mK + nK'i + u)$

	-K	0	+K	$\pm 2K$
$+iK'$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$
0	$k' \frac{s}{d}$	$c$	$-k' \frac{s}{d}$	$-c$
$-iK'$	$\frac{k'}{ikc}$	$\frac{id}{ks}$	$\frac{ik'}{kc}$	$\frac{d}{iks}$

4.3. Функции  $\operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u$  выражаются через  $\operatorname{sn} u$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}(u, k) &= \operatorname{sn}\left(k'K + k'u, \frac{ik}{k'}\right), \\ \operatorname{dn}(u, k) &= k' \operatorname{sn}(K' - iK + iu, k'). \end{aligned}$$

Для перехода от одного модуля к другому имеем таблицу, где для краткости вместо  $\operatorname{sn}(u, k)$ ,  $\operatorname{cn}(u, k)$ ,  $\operatorname{dn}(u, k)$  пишем соответственно  $s$ ,  $c$ ,  $d$ :

$u_1$	$k_1$	$\operatorname{sn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{cn}(u_1, k_1)$	$\operatorname{dn}(u_1, k_1)$
$ku$	$\frac{1}{k}$	$ks$	$d$	$c$
$iu$	$k'$	$\frac{is}{c}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{d}{c}$
$k'u$	$\frac{ik}{k'}$	$\frac{k's}{d}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{1}{d}$
$iku$	$\frac{ik'}{k}$	$\frac{iks}{d}$	$\frac{1}{d}$	$\frac{c}{d}$
$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$\frac{ik's}{c}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)s}{1+ks^2}$	$\frac{cd}{1+ks^2}$	$\frac{1-ks^2}{1+ks^2}$
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{sc}{d}$	$\frac{1-(1+k')s^2}{d}$	$\frac{1-(1-k')s^2}{d}$
$\frac{(1+\sqrt{k'})^2 u}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{k^2 sc}{\sqrt{k_1}(1+d)(k'+d)}$	$\frac{d-\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}} \sqrt{\frac{2}{1+d} \frac{1+k'}{k'+d}}$	$\frac{\sqrt{1+k_1}(d+\sqrt{k'})}{\sqrt{1+d}\sqrt{k'+d}}$

#### 4.4. Формулы дифференцирования и дифференциальные уравнения:

$$\frac{d \operatorname{am} u}{du} = \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{sn} u}{du} = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad \frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

$$\left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u), \quad \left(\frac{d \operatorname{cn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 u),$$

$$\left(\frac{d \operatorname{dn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{dn}^2 u)(\operatorname{dn}^2 u - k'^2).$$

#### 4.5. Формулы интегрирования:

$$k \int_0^u \operatorname{sn} u \, du = \ln \frac{\operatorname{dn} u - k \operatorname{cn} u}{1-k} = -\ln \frac{\operatorname{dn} u + k \operatorname{cn} u}{1+k} = \operatorname{Arch} \left( \frac{\operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{cn} u}{1-k^2} \right) =$$

$$= \operatorname{Arch} \frac{1}{k'} - \operatorname{Arch} \frac{d}{k'} = \operatorname{Arsh} \left( k \frac{\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u}{1-k^2} \right) = \operatorname{Arsh} \frac{k}{k'} - \operatorname{Arsh} \frac{k \operatorname{cn} u}{k'},$$

$$k \int_0^u \operatorname{cn} u \, du = \arccos(\operatorname{dn} u) = \arcsin(k \operatorname{sn} u), \quad \int_0^u \operatorname{dn} u \, du = \arcsin(\operatorname{sn} u) = \operatorname{am} u,$$

$$\int_n^K \frac{du}{\operatorname{sn} u} = \ln \frac{\operatorname{cn} u + \operatorname{dn} u}{k' \operatorname{sn} u}, \quad k' \int_0^u \frac{du}{\operatorname{cn} u} = \ln \frac{\operatorname{dn} u + k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du = E(\operatorname{am} u, k),$$

$$k' \int_0^u \frac{du}{\operatorname{dn} u} = \arccos \left( \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \right) = \arcsin \left( k' \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \right), \quad k' \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} \, du = \ln \frac{\operatorname{dn} u + k'}{(1+k') \operatorname{cn} u},$$

$$\int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \, du = \ln \frac{1 + \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_0^K \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} - k', \quad k'^2 \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - 1,$$

$$k'^2 \int_0^u \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du = 1 - \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \int_n^K \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \int_0^u \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \int_0^u \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn}^2 u} \, du = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

5. Дзета-функция Якоби  $zn(u, k)$

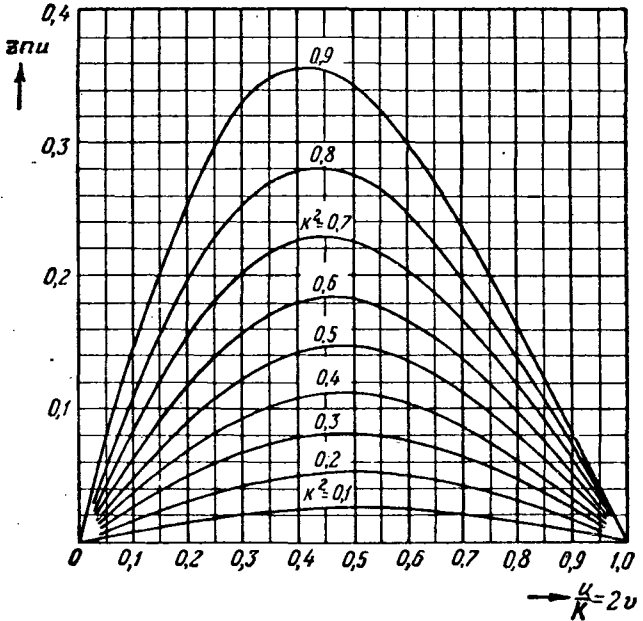
Дзета-функция Якоби (рис. 68) определяется так:

$$zn(u, k) = E(am u, k) - \frac{E}{K} u = \int_0^u dn^2(u, k) du - \frac{E}{K} u.$$

Она является периодической мероморфной функцией от  $u$  (модуль  $k$  считается постоянным), с одним периодом  $2K$ :

$$zn u = -zn(2K - u) = zn(2K + u) = -zn(-u).$$

Нули этой функции лежат в точках  $nK$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ). О ее представлении с помощью тэта-функций см. С. 4.3.



В. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

1. Функции Вейерштрасса  $\wp u, \zeta u, \sigma u$

Нормальной формой Вейерштрасса эллиптического интеграла 1-го рода называется

$$u = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{S}},$$

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3 = 4(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3).$$

Рис. 68.  $zn(K \cdot 2v)$  как функция  $2v$ .

Обратная функция называется эллиптической функцией Вейерштрасса и обозначается через

$$s = \wp u = \wp(u; g_2, g_3).$$

Она является двоякопериодической функцией комплексного аргумента  $u = u_1 + iu_2$  (рис. 69) с основными периодами  $2\omega, 2\omega'$ , которые для действительных  $e_1 > e_2 > e_3$  даются равенствами

$$2\omega = 2 \int_{e_1}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{S}}, \quad 2\omega' = 2i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{ds}{\sqrt{-S}}.$$

Величины  $e_2, g_3$  называются инвариантами функции. Инварианты  $g_2, g_3$ , нули  $e_1, e_2, e_3$  полинома  $S$  и периоды  $\omega, \omega'$  связаны равенствами ( $\sum'$  означает суммирование по всем отличным от нуля периодам  $\omega = 2m\omega + 2n\omega'$ ;  $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ):

$$g_2 = -4(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2) = 60 \sum' \frac{1}{\omega^4}; \quad g_3 = 4e_1 e_2 e_3 = 140 \sum' \frac{1}{\omega^6};$$

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega), \quad e_3 = \wp(\omega'); \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Дзета-функция Вейерштрасса  $\zeta u$  и сигма-функция  $\sigma u$  определяются как

$$\wp u = -\frac{d\zeta u}{du} = -\frac{d^2 \ln \sigma u}{du^2},$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \left( \wp u - \frac{1}{u^2} \right) du, \quad \sigma u = ue^{\int_0^u \left( \zeta u - \frac{1}{u} \right) du}$$

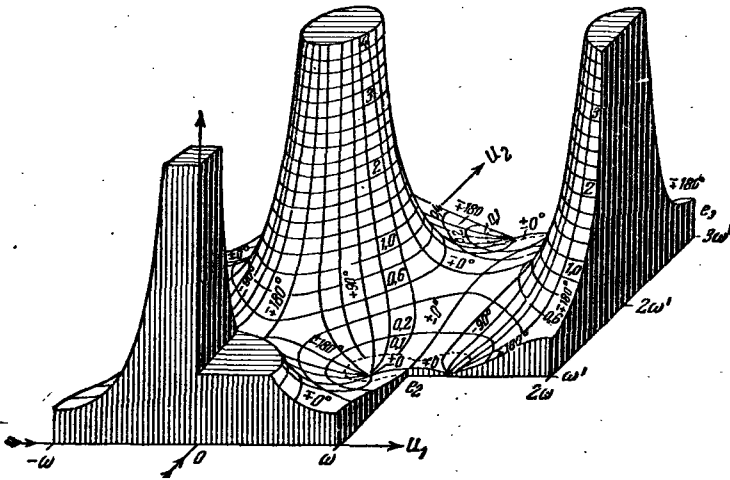


Рис. 69. Рельеф функции Вейерштрасса  $\wp u$  при  $\omega = K = 2,00$ ,  $\omega' = iK' = 1,75i$ ,  $k = 0,8$ ,  $k' = 0,6$ ,  $e_1 = 0,453 = 1 + e_3$ ,  $e_2 = 0,093$ ,  $e_3 = -0,546$ ,  $g_2 = 1,026$ ,  $g_3 = -0,092$ .

Для действительных нулей  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$  полинома  $S$  возможны следующие частные случаи:

$$e_1 = e_2 = -\frac{e_3}{2} \begin{cases} g_2 = 3e_3^2, & \omega = \infty, \\ g_3 = e_3^3, & \omega' = \frac{\pi i}{\sqrt{12e_1}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \wp u = -2e_1 + 3e_1 \operatorname{cth}^2(\sqrt{3e_1}u), \\ \zeta u = -e_1 u + \sqrt{3e_1} \operatorname{cth}(\sqrt{3e_1}u), \\ \sigma u = \frac{1}{\sqrt{3e_1}} e^{-e_1 u^2/2} \operatorname{sh}(\sqrt{3e_1}u). \end{cases}$$

$$e_2 = e_3 = -\frac{e_1}{2} \begin{cases} g_2 = 3e_1^2, & \omega = \frac{\pi}{\sqrt{6e_1}}, \\ g_3 = e_1^3, & \omega' = \infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \wp u = e_1 + \frac{3}{2} e_1 \operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} e_1 u\right), \\ \zeta u = \frac{1}{2} e_1 u + \sqrt{\frac{3}{2}} e_1 \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} e_1 u\right), \\ \sigma u = \frac{1}{\sqrt{3e_1/2}} e^{e_1 u^2/4} \sin\left(\sqrt{\frac{3}{2}} e_1 u\right). \end{cases}$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0: \quad g_2 = g_3 = 0, \quad \omega = \omega' = \infty, \quad \wp u = \frac{1}{u^2}, \quad \zeta u = \frac{1}{u}, \quad \sigma u = u.$$

[При  $g_2 = 0$ ,  $g_3 = 1$  получается так называемый *эквиангармонический* случай эллиптических функций (рис. 70, 71). В этом случае  $e_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{4}}$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0,6300$ ,  $e_3 = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt[3]{4}}$ , где  $1, \varepsilon, \varepsilon^2$  — кубические корни из единицы. Из  $e_2 = \wp \omega_2$  определяется действительный полупериод  $\omega_2 = 1,52995$ .]



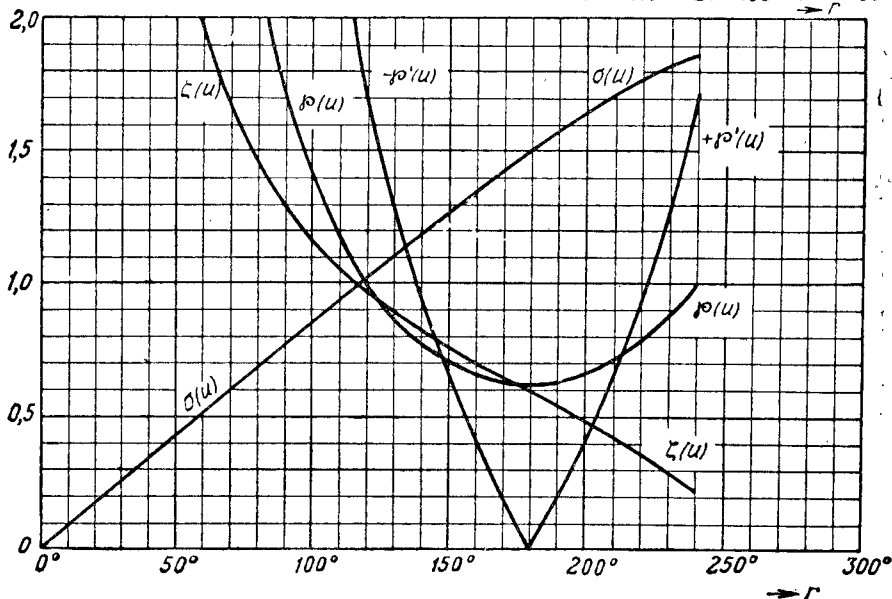
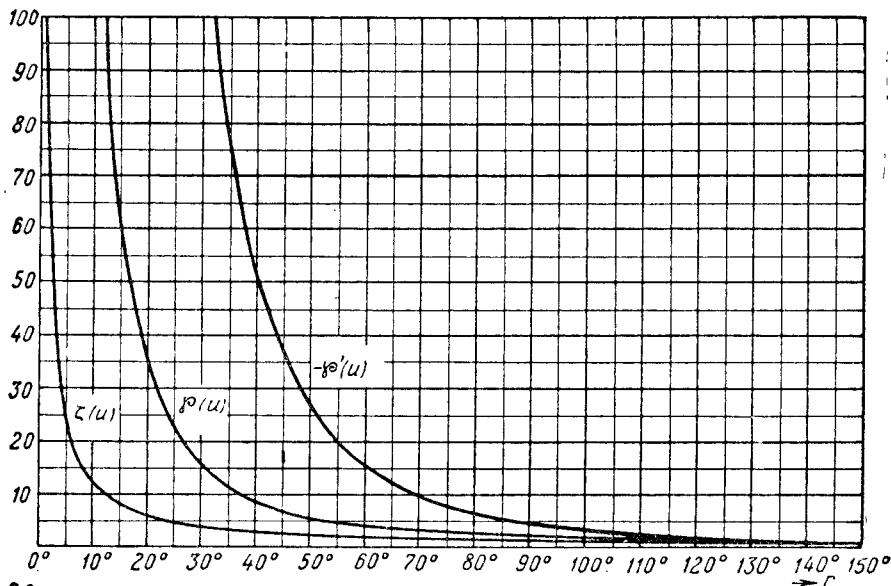


Рис. 70 и 71. Функции Вейерштрасса как функции  $r = 180^\circ \frac{u}{\omega_2}$  при  $g_2 = 0, g_3 = 1$ .

### 2. Представления

В окрестности  $u = 0$  справедливы разложения в степенные ряды

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2 u}{10} + \frac{g_3 u^3}{7} + \frac{g_2^2 u^5}{200} + \frac{3g_2 g_3 u^7}{770} + \dots$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_3 u^4}{28} + \frac{g_2^2 u^6}{1200} + \frac{3g_2 g_3 u^8}{6160} + \dots$$

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_3 u^5}{140} - \frac{g_2^2 u^7}{8400} - \dots, \quad \sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{240} - \frac{g_3 u^7}{840} - \frac{g_2^2 u^9}{161280} - \dots$$

## 3. Функциональные уравнения

## 3.1. Формулы интегрирования:

$$\int \wp u \, du = -\zeta u, \quad \int \wp^2 u \, du = \frac{1}{6} \wp' u + \frac{1}{12} g_2 u,$$

$$\int \wp^3 u \, du = \frac{1}{120} \wp'' u - \frac{3}{20} g_2 \cdot \zeta u + \frac{1}{10} g_2 u,$$

$$\wp' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} = 2u \cdot \zeta v + \ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)},$$

$$\frac{1}{2} [\wp' v]^2 \int \frac{du}{[\wp u - \wp v]^2} + \frac{1}{2} \wp' v \int \frac{du}{\wp u - \wp v} + u \cdot \wp v = -\frac{1}{2} \zeta(u-v) - \frac{1}{2} \zeta(u+v),$$

$$\int \frac{\alpha \wp u + \beta}{\gamma \wp u + \delta} du = \frac{\alpha u}{\gamma} - \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\gamma^2 \wp' v} \left[ \ln \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2u \cdot \zeta v \right] \quad \left( \wp v = -\frac{\delta}{\gamma} \right).$$

## 3.2. Дифференциальные уравнения, приводящие к функциям Вейерштрасса:

$$\left( \frac{dx}{du} \right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = \wp(u; g_2, g_3);$$

$$\left( \frac{dx}{du} \right)^2 = x^2(x-a)^2, \quad x = \frac{a}{2} + \frac{27}{16} \wp' \left( \frac{u}{2}; 0, g_2 \right), \quad g_2 = -\frac{64}{729} a^2;$$

$$\left( \frac{dx}{du} \right)^2 = (x^2 - 3ax^2 + 3x)^2, \quad x = \frac{2}{a - 3\wp'(u; 0, g_2)}, \quad g_2 = \frac{4 - 3a^2}{27};$$

$$\left( \frac{dx}{du} \right)^4 = \frac{128}{3} (x+a^2)(x+b)^2, \quad x = 6\wp^2(u; g_2, 0) - b, \quad g_2 = \frac{2}{3}(a-b).$$

4. Соотношения между функциями Якоби и Вейерштрасса  
Функции Якоби, соответствующие модулю

$$k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} \quad (0 < k^2 < 1 \text{ для действительных } e_1 > e_2 > e_3)$$

могут быть выражены через  $\wp u$

$$\operatorname{sn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp u - e_3}}, \quad \operatorname{cn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_1}}{\sqrt{\wp u - e_3}},$$

$$\operatorname{dn}(u \sqrt{e_1 - e_3}) = \frac{\sqrt{\wp u - e_2}}{\sqrt{\wp u - e_3}}.$$

Наоборот,

$$\wp u = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}.$$

Для периодов имеем соотношения:

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \omega' = \frac{iK'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{iK'}{K}.$$

## C. ТЭТА-ФУНКЦИИ

## 1. Определение и представления

Тэта-функции для комплексного переменного  $v$  и комплексного параметра  $\kappa$  при  $\operatorname{Re} \kappa > 0$  определяются посредством рядов

$$\begin{aligned} \vartheta_1(v, \kappa) &= 2q^{\frac{1}{4}} (\sin \pi v - q^2 \sin 3\pi v + q^4 \sin 5\pi v - \dots) = \\ &= i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\binom{n-1}{2}} e^{(2n-1)\pi v i}, \end{aligned}$$

$$\vartheta_2(v, \kappa) = 2q^{\frac{1}{4}} (\cos \pi v + q^2 \cos 3\pi v + q^6 \cos 5\pi v + \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{2}\right)^2} e^{i\pi(n-\frac{1}{2})v},$$

$$\vartheta_3(v, \kappa) = 1 + 2(q \cos 2\pi v + q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v + \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2\pi i n v},$$

$$\vartheta_4(v, \kappa) = 1 - 2(q \cos 2\pi v - q^4 \cos 4\pi v + q^9 \cos 6\pi v - \dots) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2\pi i n v}.$$

Здесь  $q = e^{-\pi\kappa}$ , а под  $q^{1/4}$  понимают однозначно определенное значение  $e^{-\frac{1}{4}\pi\kappa}$ ; можно также представить  $q = e^{i\pi\tau}$ , где  $\tau = \tau_1 + i\tau_2 = i\kappa$  ( $\tau_2 > 0$ ).

Если параметр  $\kappa$  фиксирован, то вместо  $\vartheta_n(v, \kappa)$  пишут сокращенно  $\vartheta_n(v)$ . Функцию  $\vartheta_4(v)$  обозначают также через  $\vartheta(v)$  или  $\vartheta_0(v)$ . Тэта-функции являются целыми трансцендентными функциями.

Логарифмическими производными по  $v$  будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_3(v)}{dv} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_4(v)}{dv} \end{aligned} \right\} = \mp \frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh} \pi\kappa} + \frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh} 2\pi\kappa} \mp \frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh} 3\pi\kappa} + \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_2}{dv} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \pi v \\ \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln \vartheta_1}{dv} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \pi v \end{aligned} \right\} = \mp \frac{\sin 2\pi v}{\operatorname{sh} \pi\kappa} + q^2 \frac{\sin 4\pi v}{\operatorname{sh} 2\pi\kappa} \mp q^4 \frac{\sin 6\pi v}{\operatorname{sh} 3\pi\kappa} + \dots$$

## 2. Частные значения

### 2.1. Нули тэта-функций даны в таблице ( $m, n$ — целые числа)

$\vartheta_1(v, \kappa)$	$\vartheta_2(v, \kappa)$	$\vartheta_3(v, \kappa)$	$\vartheta_4(v, \kappa)$
$m + n\kappa i$	$m + \frac{1}{2} + n\kappa i$	$m + \frac{1}{2} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \kappa i$	$m + \left(n + \frac{1}{2}\right) \kappa i$

2.2. Значения тэта-функций  $\vartheta_n(v)$  и их производных  $\vartheta'_n(v)$  по  $v$  при  $v=0$  обозначаются без указания аргумента:  $\vartheta_n(0) = \vartheta_n$ ;  $\vartheta'_n(0) = \vartheta'_n$ .

Имеют место формулы:

$$\vartheta'_1 = 2\pi q^{\frac{1}{4}} (1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \dots), \quad \vartheta'_2 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots,$$

$$\vartheta'_3 = 2q^{\frac{1}{4}} (1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \dots), \quad \vartheta'_4 = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots,$$

$$\vartheta''_2 = \vartheta''_4 = \vartheta''_3, \quad \frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1} = \frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta''_4}{\vartheta_4}, \quad \vartheta'_1 = \pi \vartheta_2 \vartheta_3 \vartheta_4.$$

$$-\frac{\vartheta'''_1}{\vartheta'_1} = \pi^2 \frac{1 - 3^3 q^2 + 5^3 q^6 - \dots}{1 - 3q^2 + 5q^6 - \dots}, \quad -\frac{\vartheta''_3}{\vartheta_3} = 8\pi^2 \frac{q + 4q^4 + 9q^9 + \dots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots},$$

$$-\frac{\vartheta''_2}{\vartheta_2} = \pi^2 \frac{1 + 3^3 q^2 + 5^3 q^6 + \dots}{1 + q^2 + q^6 + \dots}, \quad +\frac{\vartheta''_4}{\vartheta_4} = 8\pi^2 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots}.$$

## 3. Функциональные уравнения

3.1. Тэта-функции удовлетворяют соотношениям симметрии

$$\begin{aligned}\vartheta_1(-v) &= -\vartheta_1(v), & (n=2, 3, 4). \\ \vartheta_n(-v) &= \vartheta_n(v)\end{aligned}$$

3.2. Тэта-функции являются периодическими функциями: для  $\vartheta_1(v)$  и  $\vartheta_2(v)$  период равен 2, для  $\vartheta_3(v)$  и  $\vartheta_4(v)$  равен 1. Если обозначить

$$\frac{1}{M} = q^{\frac{1}{4}} e^{\pi v i}, \quad \frac{1}{N} = q e^{2\pi v i},$$

то следующая таблица показывает изменение  $\vartheta$ -функций при сдвигах аргумента  $v$  и их связь между собой:

$v_1$	$\vartheta_3(v_1)$	$\vartheta_4(v_1)$	$\vartheta_2(v_1)$	$\vartheta_1(v_1)$
$-v$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v \pm \frac{1}{2}$	$\vartheta_4(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\mp \vartheta_1(v)$	$\pm \vartheta_2(v)$
$v + \frac{i\kappa}{2}$	$M\vartheta_2(v)$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_3(v)$	$iM\vartheta_4(v)$
$v + \frac{1}{2} + \frac{i\kappa}{2}$	$iM\vartheta_1(v)$	$M\vartheta_2(v)$	$-iM\vartheta_4(v)$	$M\vartheta_3(v)$
$v \pm 1$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$	$-\vartheta_2(v)$	$-\vartheta_1(v)$
$v + i\kappa$	$N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_1(v)$
$v - 1 - i\kappa$	$N\vartheta_3(v)$	$-N\vartheta_4(v)$	$-N\vartheta_2(v)$	$-N\vartheta_1(v)$

3.3. Обозначим для краткости

$$F = \frac{1}{\kappa^2} e^{\frac{\pi v^2}{\kappa}}, \quad G = \frac{1}{\kappa^2} e^{\kappa + i\pi v^2}.$$

Тэта-функции как функции  $v$  и  $\kappa$  следующим образом изменяются при переходе от одних значений аргументов  $v, \kappa$  к другим:

$v_1$	$\kappa$	$\vartheta_3(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_4(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_2(v_1, \kappa_1)$	$\vartheta_1(v_1, \kappa_1)$
$\frac{v}{\kappa i}$	$\frac{1}{\kappa}$	$F\vartheta_3(v, \kappa)$	$F\vartheta_2(v, \kappa)$	$F\vartheta_4(v, \kappa)$	$-iF\vartheta_1(v, \kappa)$
$\frac{v}{1-i\kappa}$	$\frac{\kappa}{1-i\kappa}$	$G\vartheta_2(v, \kappa)$	$\sqrt{i}G\vartheta_4(v, \kappa)$	$G\vartheta_3(v, \kappa)$	$\sqrt{i}G\vartheta_1(v, \kappa)$
$v$	$1+i\kappa$	$\vartheta_4(v, \kappa)$	$\vartheta_3(v, \kappa)$	$\sqrt{i}\vartheta_2(v, \kappa)$	$\sqrt{i}\vartheta_1(v, \kappa)$

3.4. Тэта-функции являются решениями дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \vartheta_n(v, \kappa)}{\partial v^2} = 4\pi \frac{\partial \vartheta_n(v, \kappa)}{\partial \kappa}.$$

#### 4. Связь с эллиптическими функциями и эллиптическими интегралами. Модулярная функция

4.1. Между модулем  $k$  и отношением  $\frac{K'(k)}{K(k)}$  соответствующих нормальных форм полных эллиптических интегралов существует соотношение, которое с помощью значений тэта-функций в нуле записывается в виде

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_4^4}, \quad \text{где } q = e^{-\pi x}, \quad x = \frac{K'}{K}.$$

Функцию  $k^2 = \lambda(\tau)$ , получаемую после подстановки  $\tau = ix = \tau_1 + i\tau_2$  в правую часть, называют *эллиптической модулярной функцией* (рис. 72—74). Для  $|q| \ll 1$  получим:

$$k^2 \approx 16q \frac{1+4q^2}{1+8q+24q^2}.$$

В таблице 33 тэта-функции  $\vartheta_n(2\vartheta)$  и их производные даны прямо как функции  $\alpha$  ( $k = \sin \alpha$ ) (рис. 75—78).

Первые члены рядов, определяющих  $\vartheta$ -функции, дают приближенные значения, которые могут быть вычислены с помощью таблицы 35 и таблицы тригонометрических функций. Соответствующие поправки даны во вспомогательной таблице 34, которая допускает линейную интерполяцию.

Вычисление  $q$  для данного модуля  $k$  (рис. 79, таблица 35) может быть произведено посредством соответствующих нормальных форм интегралов  $K, K'$  (таблицы 29, 30). Соответствующие значения  $q$  получаются и непосредственно из ряда

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^3 + 15\varepsilon^5 + 150\varepsilon^{13} + 1707\varepsilon^{17} + \dots,$$

$$2\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \frac{1 - \sqrt{\cos \alpha}}{1 + \sqrt{\cos \alpha}} \quad (k = \sin \alpha, \quad k' = \cos \alpha).$$

4.2. Нормальные формы полных эллиптических интегралов могут быть представлены через значения тэта-функций в нуле, причем величина  $q$  для данного модуля  $k$  должна быть вычислена согласно 4.1. Для  $k^2 < \frac{1}{2}$  приближенно

$$\frac{2}{\pi} K = \vartheta_2^2 \approx 1 + 4q, \quad \frac{2}{\pi} kK = \vartheta_2^2 \approx 4\sqrt{q}, \quad \frac{2}{\pi} k'K = \vartheta_4^2 \approx 1 - 4q,$$

$$\frac{2}{\pi} E = -\frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \frac{1}{\vartheta_2^2} = \frac{1 + 9q^2 + 25q^4 + \dots}{(1 + q^2 + q^4 + \dots)(1 + 2q + 2q^2 + \dots)^2} \approx 1 - 4q,$$

$$\frac{4}{\pi} D = \frac{2}{\pi^2} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4} = \frac{(1 + 2q + 2q^2 + \dots)^2 (1 - 4q^2 + 9q^4 - \dots)}{(1 + q^2 + q^4 + \dots)^2 (1 - 2q + 2q^2 - \dots)} \approx 1 + 6q.$$

Если  $k^2 > \frac{1}{2}$ , то найдем  $q$  для модуля  $k'$  и положим  $-\ln q = \Lambda$ . Тогда при соответствующих значениях тэта-функций

$$K = \frac{\Lambda}{2} \vartheta_2^2,$$

$$E = \frac{1}{\vartheta_2^2} \left( 1 + \frac{\Lambda}{2} \frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} \right),$$

$$D = \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_4^2} \left[ -1 + \frac{\Lambda}{2} \left( \vartheta_2'' - \frac{1}{\pi^2} \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4} \right) \right].$$

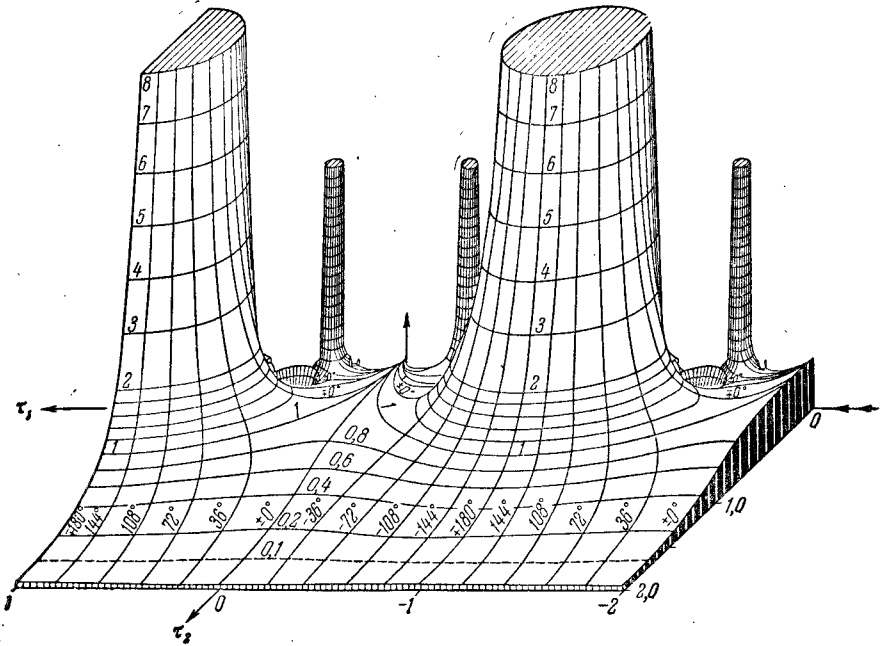
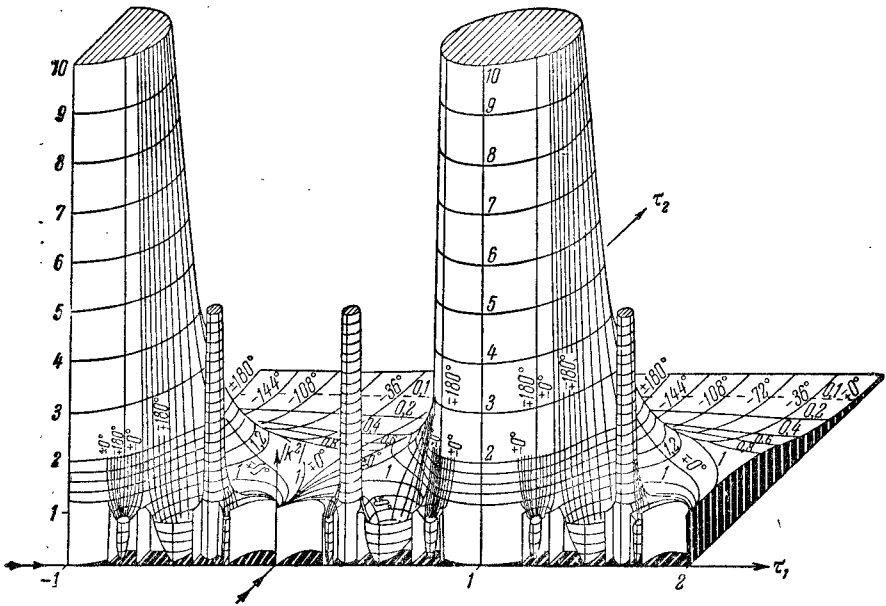


Рис. 72 и 73. Рельеф эллиптической модулярной функции  $k^2 = \lambda(\tau)$ .

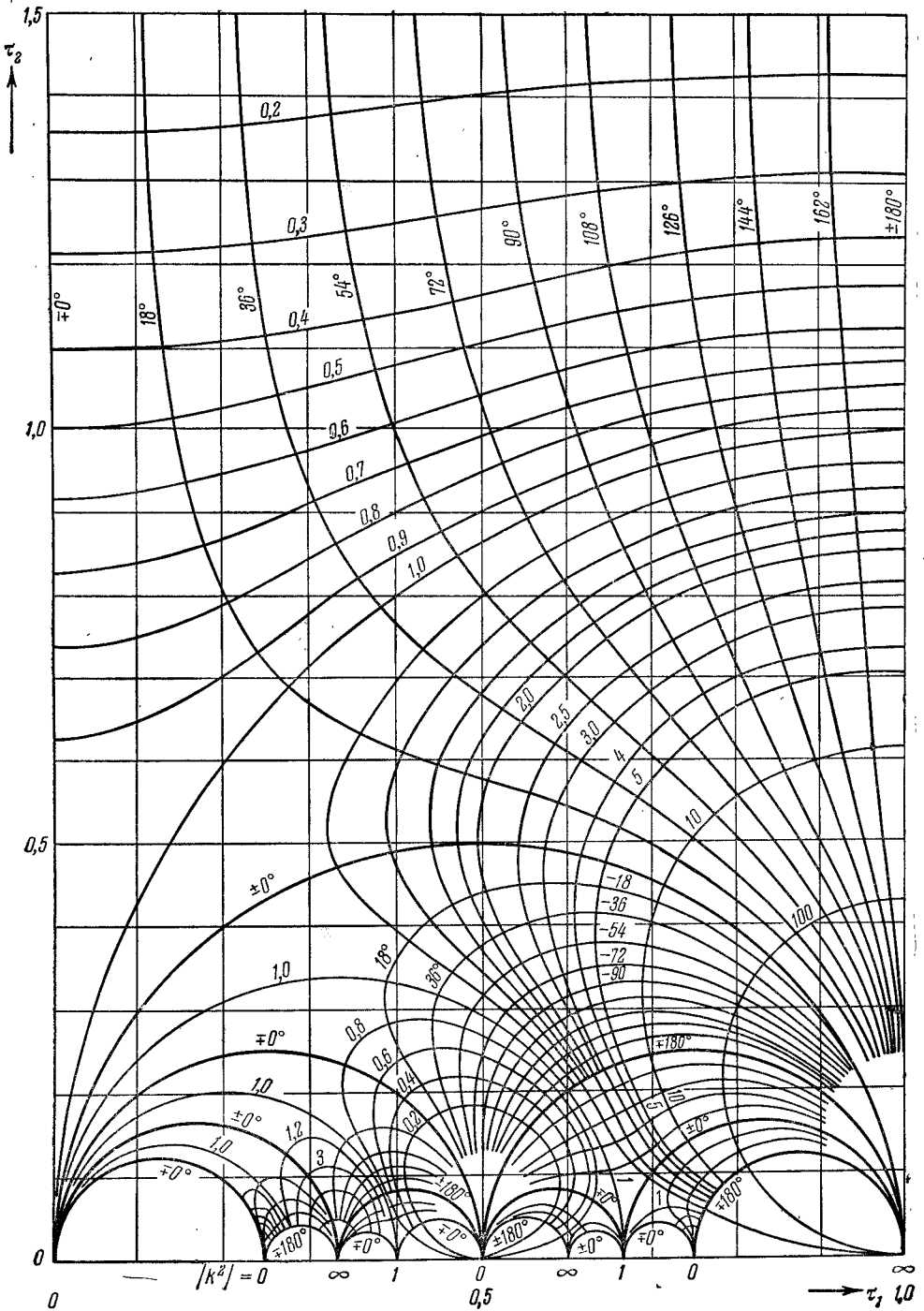


Рис. 74. Карта горизонталей рельефа эллиптической модулярной функции  $k^2 = \lambda(\tau)$ .

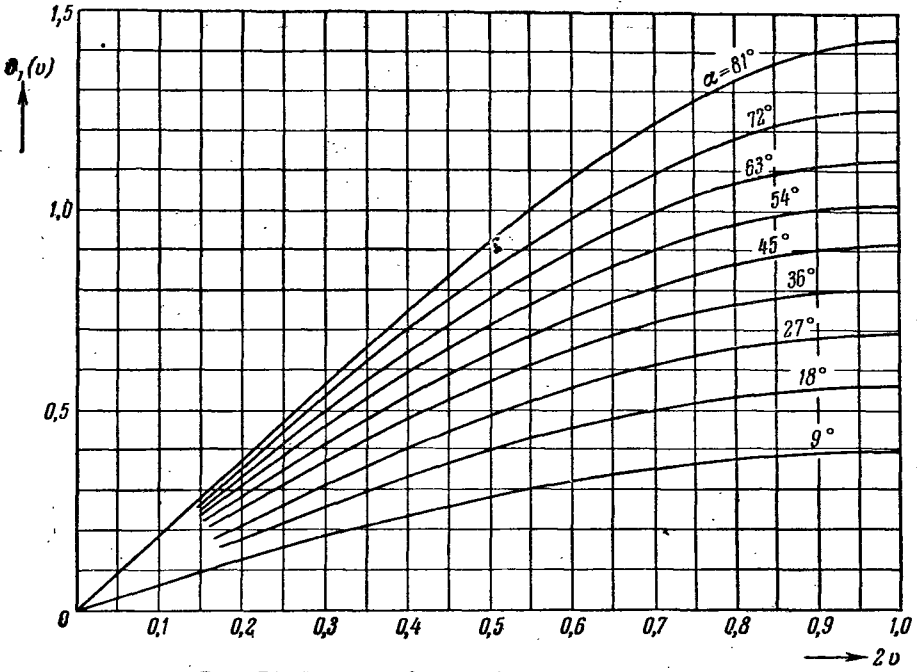


Рис. 75. Функции  $\theta_1(v) = \theta_2(v_1)$ ,  $2v + 2v_1 = 1$ .

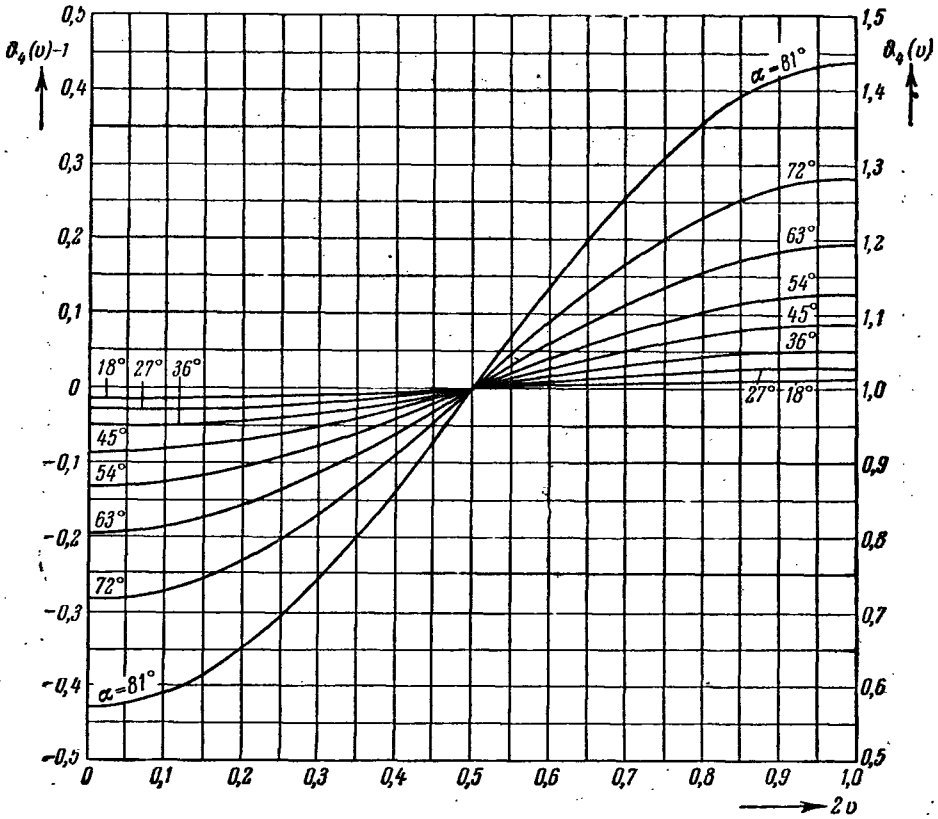


Рис. 76. Функции  $\theta_2(v) = \theta_2(v_1)$ ,  $2v + 2v_1 = 1$ .



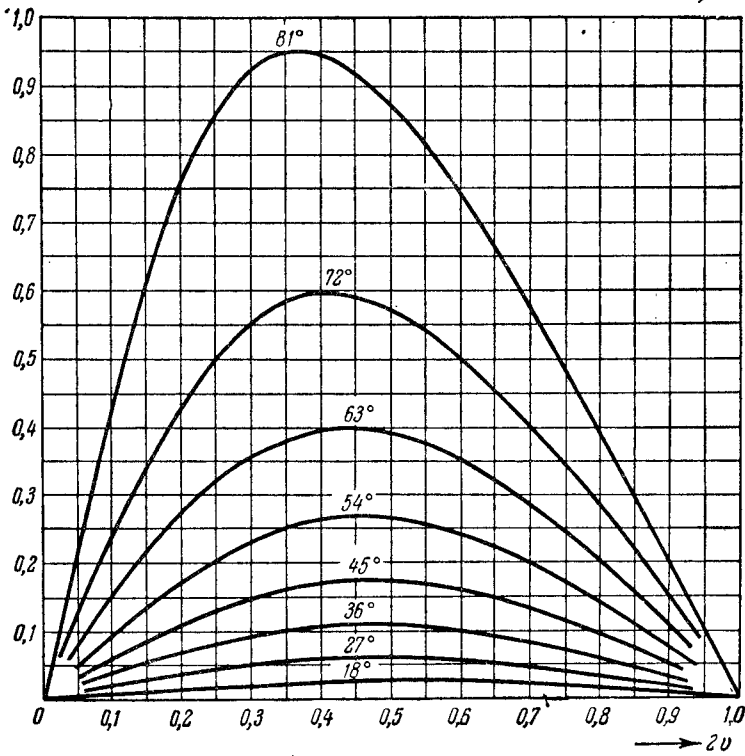


Рис. 77. Функции  $\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_1(v)}{dv} = -\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_2(v)}{dv_1}$ ,  $2v + 2v_1 = 1$ .

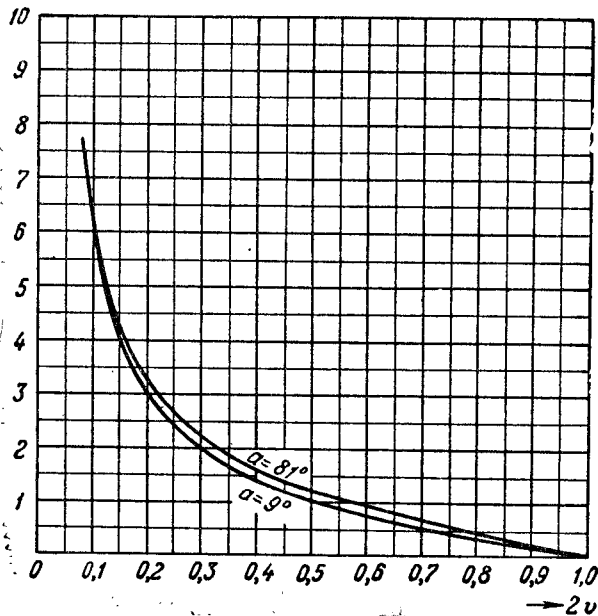


Рис. 78. Функции  $\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_4(v)}{dv} = -\frac{1}{\pi} \frac{d \ln \vartheta_3(v_1)}{dv_1}$ ,  $2v + 2v_1 = 1$ .

Таблица 33. Тета-функции и их производные

$2\nu$	$\alpha = 0^\circ$	$9^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$63^\circ$	$72^\circ$	$81^\circ$	$2\nu_1$	
0,0	1,0000	0,9970	0,9874	0,9712	0,9471	0,9135	0,8680	0,8052	0,7152	0,5694	1,0	$\vartheta_3(\nu) = \vartheta_3(\nu_1)$
1	1,0000	0,9970	0,9881	0,9725	0,9497	0,9178	0,8744	0,8147	0,7290	0,5898	0,9	
2	1,0000	0,9975	0,9899	0,9766	0,9572	0,9300	0,8931	0,8424	0,7691	0,6494	0,8	
3	1,0000	0,9982	0,9927	0,9831	0,9689	0,9493	0,9223	0,8853	0,8318	0,7429	0,7	
4	1,0000	0,9991	0,9961	0,9911	0,9836	0,9732	0,9592	0,9397	0,9110	0,8619	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9956	0,5	$\vartheta_2(\nu) = \vartheta_2(\nu_1)$
6	1,0000	1,001	1,004	1,009	1,016	1,027	1,041	1,060	1,088	1,131	0,4	
7	1,0000	1,002	1,007	1,017	1,031	1,051	1,078	1,115	1,168	1,254	0,3	
8	1,0000	1,003	1,010	1,023	1,043	1,070	1,107	1,158	1,231	1,353	0,2	
9	1,0000	1,003	1,012	1,028	1,050	1,082	1,126	1,186	1,272	1,417	0,1	
1,0	1,0000	1,003	1,013	1,029	1,053	1,086	1,132	1,195	1,286	1,439	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\vartheta_1(\nu) = \vartheta_1(\nu_1)$
1	0,0000	0,06206	0,08804	0,1084	0,1260	0,1419	0,1565	0,1700	0,1810	0,1843	0,9	
2	0,0000	0,1226	0,1739	0,2140	0,2488	0,2804	0,3098	0,3368	0,3597	0,3698	0,8	
3	0,0000	0,1801	0,2555	0,3145	0,3657	0,4123	0,4560	0,4968	0,5335	0,5563	0,7	
4	0,0000	0,2332	0,3308	0,4073	0,4736	0,5343	0,5917	0,6467	0,6989	0,7413	0,6	
0,5	0,0000	0,2805	0,3980	0,4900	0,5700	0,6436	0,7139	0,7827	0,8517	0,9200	0,5	$\frac{d \ln \vartheta_2(\nu)}{\pi d\nu} = \frac{d \ln \vartheta_2(\nu_1)}{\pi d\nu_1}$
6	0,0000	0,3210	0,4553	0,5607	0,6524	0,7372	0,8188	0,9007	0,9870	1,085	0,4	
7	0,0000	0,3535	0,5015	0,6176	0,7188	0,8129	0,9041	0,9972	1,100	1,227	0,3	
8	0,0000	0,3773	0,5353	0,6592	0,7675	0,8682	0,9669	1,069	1,184	1,337	0,2	
9	0,0000	0,3918	0,5559	0,6847	0,7973	0,9022	1,005	1,113	1,237	1,407	0,1	
1,0	0,0000	0,3967	0,5629	0,6933	0,8074	0,9135	1,018	1,128	1,255	1,431	0,0	
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,0	$\frac{d \ln \vartheta_1(\nu)}{\pi d\nu} = \frac{d \ln \vartheta_1(\nu_1)}{\pi d\nu_1}$
1	0,0000	0,001920	0,007845	0,01833	0,03444	0,05806	0,09324	0,1473	0,2401	0,4380	0,9	
2	0,0000	0,003650	0,01490	0,03471	0,06502	0,1092	0,1737	0,2712	0,4333	0,7614	0,8	
3	0,0000	0,005020	0,02045	0,04747	0,08839	0,1473	0,2315	0,3555	0,5527	0,9247	0,7	
4	0,0000	0,005897	0,02396	0,05536	0,1024	0,1689	0,2613	0,3942	0,5947	0,9469	0,6	
0,5	0,0000	0,006194	0,02509	0,05769	0,1059	0,1729	0,2642	0,3899	0,5719	0,8742	0,5	$\frac{d \ln \vartheta_2(\nu)}{\pi d\nu} = \frac{d \ln \vartheta_2(\nu_1)}{\pi d\nu_1}$
6	0,0000	0,005883	0,02377	0,05438	0,09906	0,1601	0,2415	0,3502	0,5011	0,7411	0,4	
7	0,0000	0,005002	0,02015	0,04589	0,08306	0,1331	0,1984	0,2836	0,3980	0,5748	0,3	
8	0,0000	0,003632	0,01460	0,03314	0,05968	0,09500	0,1404	0,1985	0,2748	0,3906	0,2	
9	0,0000	0,001909	0,007661	0,01735	0,03115	0,04945	0,07260	0,1020	0,1400	0,1972	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
0,0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1,0	$\frac{d \ln \vartheta_1(\nu)}{\pi d\nu} = \frac{d \ln \vartheta_1(\nu_1)}{\pi d\nu_1}$
1	6,3138	6,314	6,314	6,314	6,314	6,316	6,320	6,326	6,340	6,384	0,9	
2	3,0777	3,078	3,078	3,078	3,080	3,082	3,088	3,100	3,128	3,218	0,8	
3	1,9626	1,962	1,963	1,963	1,965	1,969	1,977	1,994	2,031	2,132	0,7	
4	1,3764	1,376	1,377	1,377	1,379	1,384	1,393	1,413	1,457	1,570	0,6	
0,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,001	1,003	1,007	1,017	1,038	1,083	1,198	0,5	$\frac{d \ln \vartheta_1(\nu)}{\pi d\nu} = \frac{d \ln \vartheta_1(\nu_1)}{\pi d\nu_1}$
6	0,7265	0,7266	0,7268	0,7273	0,7293	0,7337	0,7432	0,7628	0,8048	0,9099	0,4	
7	0,5095	0,5096	0,5097	0,5102	0,5118	0,5156	0,5236	0,5403	0,5753	0,6619	0,3	
8	0,3249	0,3249	0,3250	0,3254	0,3266	0,3293	0,3351	0,3473	0,3723	0,4336	0,2	
9	0,1584	0,1584	0,1584	0,1586	0,1593	0,1607	0,1638	0,1700	0,1831	0,2148	0,1	
1,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0	
$2\nu$	$\alpha = 0^\circ$	$9^\circ$	$18^\circ$	$27^\circ$	$36^\circ$	$45^\circ$	$54^\circ$	$63^\circ$	$72^\circ$	$81^\circ$	$2\nu_1$	

Таблица 34. Вспомогательная таблица для тэта-функций

$$\vartheta_4^*(v) = \vartheta_3^*(v_1)$$

$2v$	$\alpha=63^\circ$	$72^\circ$	$75^\circ$	$78^\circ$	$81^\circ$	$82^\circ$	$83^\circ$	$84^\circ$	$85^\circ$	$86^\circ$	$87^\circ$	$87,5^\circ$	$88^\circ$	$88,5^\circ$	$89^\circ$	$2v_1$
0,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,8	+11,5	+15,2	+21	+25	+31	+39	+52	1,00
05	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	29	37	50	0,95
10	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	90
15	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	85
20	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+3,5	+4,7	+7	+8	+10	+12	+17	80
0,25	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,75
30	-0,1	-0,3	-0,4	-0,8	-1,4	-1,7	-2,1	-2,7	-3,5	-4,7	-6	-8	-9	-12	-16	70
35	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	8,9	12	15	18	23	31	65
40	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,3	17	20	25	32	42	60
45	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	37	50	55
0,50	-0,2	-0,8	-1,4	-2,5	-4,5	-5,6	-7,0	-8,9	-11,5	-15,2	-21	-25	-31	-39	-52	0,50
55	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	45
60	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	40
65	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,8	9,0	12	15	18	23	32	35
70	-0,1	-0,3	-0,4	-0,8	-1,4	-1,7	-2,2	-2,7	-3,6	-4,7	-7	-8	-10	-12	-17	30
0,75	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0	0	0	0	0,25
80	+0,1	+0,3	+0,4	+0,8	+1,4	+1,7	+2,2	+2,7	+3,5	+4,7	+6	+8	+10	+12	+16	20
85	0,1	0,5	0,8	1,4	2,6	3,3	4,1	5,2	6,7	9,0	12	15	18	23	31	15
90	0,1	0,7	1,1	2,0	3,6	4,5	5,6	7,2	9,3	12,4	17	21	25	32	43	10
95	0,2	0,8	1,3	2,3	4,3	5,3	6,6	8,4	10,9	14,5	20	24	30	38	51	05
1,00	+0,2	+0,8	+1,4	+2,5	+4,5	+5,6	+7,0	+8,9	+11,5	+15,3	+21	+25	+31	+40	+53	0,00

$$\vartheta_1^*(v) = \vartheta_2^*(v_1)$$

$2v$	$\alpha=54^\circ$	$63^\circ$	$72^\circ$	$75^\circ$	$78^\circ$	$81^\circ$	$82^\circ$	$83^\circ$	$83,5^\circ$	$84^\circ$	$84,5^\circ$	$85^\circ$	$85,5^\circ$	$86^\circ$	$86,5^\circ$	$87^\circ$	$2v_1$
0,00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,00
05	-1	-2	-6	-8	-11	-15	-17	-19	-21	-22	-24	-25	-27	-30	-32	-35	0,95
10	2	5	11	15	21	29	33	37	40	43	46	49	53	58	63	69	90
15	3	7	16	22	30	42	47	54	57	61	66	71	76	83	90	99	85
20	4	9	20	27	37	52	59	67	71	76	82	88	95	103	112	123	80
0,25	-4	-10	-23	-31	-43	-60	-67	-76	-81	-87	-94	-101	-109	-118	-129	-141	0,75
30	4	10	25	33	46	64	72	82	87	93	100	108	117	126	138	151	70
35	4	11	25	34	46	64	73	82	88	94	101	109	118	128	140	153	65
40	4	10	24	32	44	61	69	79	84	90	97	104	113	122	134	147	60
45	4	9	21	29	39	55	62	71	76	81	87	94	101	110	120	132	55
0,50	-3	-8	-18	-24	-33	-46	-52	-59	-63	-67	-72	-78	-84	-92	-100	-110	0,50
55	2	6	13	18	24	34	38	44	47	50	54	58	63	68	75	82	45
60	-1	3	8	10	14	20	23	26	28	30	32	35	37	41	45	49	40
65	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-7	-8	-8	-9	-10	-11	-12	-14	35
70	+1	+2	+4	+5	+7	+10	+11	+13	+14	+15	+16	+17	+18	+19	+21	+23	30
0,75	+2	+4	+10	+13	+18	+25	+28	+32	+34	+36	+39	+42	+45	+49	+53	+58	0,25
80	3	6	15	20	27	38	43	49	52	56	60	64	70	76	83	91	20
85	3	8	19	26	35	49	56	63	67	72	78	84	90	98	107	118	15
90	4	9	22	30	41	58	65	74	79	85	91	98	106	115	126	139	10
95	4	10	24	33	45	63	71	81	86	93	99	107	116	126	138	152	05
1,00	+4	+11	+25	+34	+46	+65	+73	+83	+89	+95	+102	+110	+119	+130	+142	+156	0,00

$$\vartheta_1(v) = 2q^{1/4} \sin \pi v + 10^{-3} \vartheta_1^*(v)$$

$$\vartheta_2(v) = 2q^{1/4} \cos \pi v_1 + 10^{-3} \vartheta_2^*(v_1)$$

$$\vartheta_4(v) = 1 - 2q \cos 2\pi v + 10^{-3} \vartheta_4^*(v)$$

$$\vartheta_3(v) = 1 + 2q \cos 2\pi v_1 + 10^{-3} \vartheta_3^*(v_1)$$

Таблица 35. Функция  $\ln q$

$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$
0°0	— ∞	5°0	6781	10°0	2818	15°0	6368	20°0	8907	25°0	0897
1	7,2796	1	6953 + 172	1	2905 + 87	1	6427 + 59	1	8951 + 44	1	0933 + 36
2	7,8817	2	7122 169	2	2991 86	2	6485 58	2	8995 44	2	0969 36
3	8,2339	3	7288 166	3	3077 86	3	6542 57	3	9039 44	3	1004 35
4	8,4838	4	7451 163	4	3161 84	4	6600 58	4	9083 44	4	1040 36
0°5	8,6776 — 337	5°5	7610 + 157	10°5	3245 + 82	15°5	6657 + 56	20°5	9126 + 43	25°5	1075 + 35
6	8,8359 237	6	7767 154	6	3327 82	6	6713 56	6	9169 43	6	1110 35
7	8,9698 175	7	7921 151	7	3409 82	7	6769 56	7	9212 43	7	1145 35
8	9,0858 134	8	8072 149	8	3491 80	8	6825 56	8	9255 43	8	1180 35
9	9,1881 108	9	8221 146	9	3571 80	9	6881 55	9	9298 42	9	1215 35
1°0	9,2797 — 86	6°0	8367 + 144	11°0	3651 + 79	16°0	6936 + 55	21°0	9340 + 42	26°0	1250 + 34
1	9,3624 71	1	8511 142	1	3730 79	1	6991 54	1	9382 42	1	1284 35
2	9,4380 60	2	8653 139	2	3809 77	2	7045 54	2	9424 42	2	1319 34
3	9,5076 51	3	8792 137	3	3886 77	3	7099 54	3	9466 42	3	1353 34
4	9,5719 44	4	8929 135	4	3963 77	4	7153 54	4	9508 41	4	1387 34
1°5	9,6319 — 38	6°5	9064 + 133	11°5	4040 + 75	16°5	7207 + 53	21°5	9549 + 42	26°5	1421 + 34
6	9,6879 34	6	9197 131	6	4115 75	6	7260 53	6	9591 41	6	1455 34
7	9,7406 30	7	9328 129	7	4190 75	7	7313 53	7	9632 41	7	1489 34
8	9,7903 27	8	9457 127	8	4265 74	8	7366 52	8	9673 40	8	1523 34
9	9,8372 24	9	9584 125	9	4339 73	9	7418 52	9	9713 41	9	1557 33
2°0	9,8818 — 22	7°0	9709 + 124	12°0	4412 + 73	17°0	7470 + 52	22°0	9754 + 40	27°0	1590 + 33
1	9,9242 20	1	9833 121	1	4485 72	1	7522 51	1	9794 41	1	1623 34
2	9,9646 18	2	9954 121	2	4557 71	2	7573 51	2	9835 40	2	1657 33
3	9,0032 16	3	*0075 118	3	4628 71	3	7624 51	3	9875 40	3	1690 33
4	9,0402 15	4	0193 117	4	4699 70	4	7675 51	4	9915 39	4	1723 33
2°5	9,0757 — 14	7°5	0310 + 115	12°5	4769 + 70	17°5	7726 + 50	22°5	9954 + 40	27°5	1756 + 33
6	9,1097 + 328	6	0425 114	6	4839 69	6	7776 50	6	9994 39	6	1789 32
7	9,1425 316	7	0539 113	7	4908 69	7	7826 50	7	*0033 40	7	1821 33
8	9,1741 305	8	0652 111	8	4977 68	8	7876 49	8	0073 39	8	1854 33
9	9,2046 295	9	0763 109	9	5045 68	9	7925 49	9	0112 39	9	1887 32
3°0	9,2341 + 285	8°0	0872 + 109	13°0	5113 + 67	18°0	7974 + 49	23°0	0151 + 38	28°0	1919 + 32
1	9,2626 276	1	0981 106	1	5180 67	1	8023 49	1	0189 39	1	1951 33
2	9,2902 267	2	1087 106	2	5247 66	2	8072 48	2	0228 38	2	1984 32
3	9,3169 259	3	1193 105	3	5313 65	3	8120 49	3	0266 39	3	2016 32
4	9,3428 252	4	1298 103	4	5378 66	4	8169 47	4	0305 38	4	2048 31
3°5	9,3680 + 245	8°5	1401 + 102	13°5	5444 + 64	18°5	8216 + 48	23°5	0343 + 38	28°5	2079 + 32
6	9,3925 238	6	1503 100	6	5508 65	6	8264 48	6	0381 38	6	2111 32
7	9,4163 232	7	1603 100	7	5573 63	7	8312 47	7	0419 37	7	2143 32
8	9,4395 226	8	1703 99	8	5636 64	8	8359 47	8	0456 38	8	2175 31
9	9,4621 220	9	1802 97	9	5700 63	9	8406 46	9	0494 37	9	2206 31
4°0	9,4841 + 215	9°0	1899 + 97	14°0	5763 + 62	19°0	8452 + 47	24°0	0531 + 37	29°0	2237 + 32
1	9,5056 209	1	1996 95	1	5825 62	1	8499 46	1	0568 37	1	2269 31
2	9,5265 205	2	2091 94	2	5887 62	2	8545 46	2	0605 37	2	2300 31
3	9,5470 200	3	2185 93	3	5949 61	3	8591 46	3	0642 37	3	2331 31
4	9,5670 195	4	2278 93	4	6010 61	4	8637 45	4	0679 37	4	2362 31
4°5	9,5865 + 191	9°5	2371 + 91	14°5	6071 + 60	19°5	8682 + 46	24°5	0716 + 36	29°5	2393 + 31
6	9,6056 187	6	2462 91	6	6131 60	6	8728 45	6	0752 37	6	2424 30
7	9,6243 183	7	2553 89	7	6191 59	7	8773 45	7	0789 36	7	2454 31
8	9,6426 180	8	2642 89	8	6250 60	8	8818 44	8	0825 36	8	2485 31
9	9,6606 175	9	2731 87	9	6310 58	9	8862 45	9	0861 36	9	2516 30
5°0	9,6781	10°0	2818	15°0	6368	20°0	8907	25°0	0897	30°0	2546
			$\bar{4}$ ,		$\bar{5}$ ,		$\bar{6}$ ,		$\bar{7}$ ,		$\bar{8}$ ,
			$\bar{9}$ ,		$\bar{0}$ ,		$\bar{1}$ ,		$\bar{2}$ ,		$\bar{3}$ ,

В немецком оригинале настоящей книги для натуральных логарифмов употребляется обозначение  $\log q$  вместо принятого у нас  $\ln q$ . — Прим. ред.

Продолжение табл. 35

$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$
30° 0	2, 2546 + 30	35° 0	2, 3965 + 26	40° 0	2, 5220 + 24	45° 0	2, 6356 + 22	50° 0	2, 7405 + 20	55° 0	2, 8391 + 19
1	2576 31	1	3991 27	1	5244 23	1	6378 22	1	7425 21	1	8410 20
2	2607 30	2	4018 26	2	5267 24	2	6400 21	2	7446 20	2	8430 19
3	2637 30	3	4044 26	3	5291 24	3	6421 22	3	7466 20	3	8449 19
4	2667 30	4	4070 27	4	5315 23	4	6443 22	4	7486 20	4	8468 19
30° 5	2697 + 30	35° 5	4097 + 26	40° 5	5338 + 24	45° 5	6465 + 21	50° 5	7506 + 20	55° 5	8487 + 19
6	2727 30	6	4123 26	6	5362 23	6	6486 22	6	7526 21	6	8506 19
7	2757 29	7	4149 26	7	5385 24	7	6508 21	7	7547 20	7	8525 19
8	2786 30	8	4175 26	8	5409 23	8	6529 22	8	7567 20	8	8544 20
9	2816 30	9	4201 26	9	5432 24	9	6551 21	9	7587 20	9	8564 19
31° 0	2846 + 29	36° 0	4227 + 26	41° 0	5456 + 23	46° 0	6572 + 22	51° 0	7607 + 20	56° 0	8583 + 19
1	2875 29	1	4253 26	1	5479 23	1	6594 21	1	7627 20	1	8602 19
2	2904 30	2	4279 26	2	5502 23	2	6615 21	2	7647 20	2	8621 19
3	2934 29	3	4305 25	3	5525 24	3	6636 22	3	7667 20	3	8640 19
4	2963 29	4	4330 26	4	5549 23	4	6658 21	4	7687 20	4	8659 19
31° 5	2992 + 29	36° 5	4356 + 26	41° 5	5572 + 23	46° 5	6679 + 21	51° 5	7707 + 20	56° 5	8678 + 19
6	3021 29	6	4382 25	6	5595 23	6	6700 21	6	7727 19	6	8697 19
7	3050 29	7	4407 26	7	5618 23	7	6721 22	7	7746 20	7	8716 19
8	3079 29	8	4433 25	8	5641 23	8	6743 21	8	7766 20	8	8735 19
9	3108 29	9	4458 25	9	5664 23	9	6764 21	9	7786 20	9	8754 19
32° 0	3137 + 28	37° 0	4483 + 26	42° 0	5687 + 23	47° 0	6785 + 21	52° 0	7806 + 20	57° 0	8773 + 18
1	3165 28	1	4509 25	1	5710 22	1	6806 21	1	7826 20	1	8791 19
2	3194 28	2	4534 25	2	5732 23	2	6827 21	2	7846 19	2	8810 19
3	3222 29	3	4559 25	3	5755 23	3	6848 21	3	7865 20	3	8829 19
4	3251 28	4	4584 26	4	5778 23	4	6869 21	4	7885 20	4	8848 19
32° 5	3279 + 28	37° 5	4610 + 26	42° 5	5801 + 22	47° 5	6890 + 21	52° 5	7905 + 19	57° 5	8867 + 19
6	3308 28	6	4635 25	6	5823 23	6	6911 21	6	7924 20	6	8886 19
7	3336 28	7	4660 24	7	5846 23	7	6932 21	7	7944 20	7	8905 19
8	3364 28	8	4684 25	8	5869 22	8	6953 21	8	7964 19	8	8924 18
9	3392 28	9	4709 25	9	5891 23	9	6974 20	9	7983 20	9	8942 19
33° 0	3420 + 28	38° 0	4734 + 25	43° 0	5914 + 22	48° 0	6994 + 21	53° 0	8003 + 20	58° 0	8961 + 19
1	3448 28	1	4759 25	1	5936 23	1	7015 21	1	8023 19	1	8980 19
2	3476 27	2	4784 24	2	5959 22	2	7036 21	2	8042 19	2	8999 18
3	3503 28	3	4808 25	3	5981 22	3	7057 20	3	8062 19	3	9017 19
4	3531 28	4	4833 25	4	6003 23	4	7077 21	4	8081 20	4	9036 19
33° 5	3559 + 27	38° 5	4858 + 24	43° 5	6026 + 22	48° 5	7098 + 21	53° 5	8101 + 19	58° 5	9055 + 19
6	3586 28	6	4882 24	6	6048 22	6	7119 20	6	8120 20	6	9074 18
7	3614 27	7	4906 25	7	6070 23	7	7139 21	7	8140 19	7	9092 19
8	3641 27	8	4931 24	8	6093 22	8	7160 21	8	8159 20	8	9111 19
9	3668 28	9	4955 25	9	6115 22	9	7181 20	9	8179 19	9	9130 18
34° 0	3696 + 27	39° 0	4980 + 24	44° 0	6137 + 22	49° 0	7201 + 21	54° 0	8198 + 19	59° 0	9148 + 19
1	3723 27	1	5004 24	1	6159 22	1	7222 20	1	8217 20	1	9167 19
2	3750 27	2	5028 24	2	6181 22	2	7242 21	2	8237 19	2	9186 18
3	3777 27	3	5052 24	3	6203 22	3	7263 20	3	8256 19	3	9204 19
4	3804 27	4	5076 24	4	6225 22	4	7283 21	4	8275 20	4	9223 19
34° 5	3831 + 27	39° 5	5100 + 24	44° 5	6247 + 22	49° 5	7304 + 20	54° 5	8295 + 19	59° 5	9242 + 18
6	3858 26	6	5124 24	6	6269 22	6	7324 20	6	8314 19	6	9260 19
7	3885 27	7	5148 24	7	6291 22	7	7344 21	7	8333 20	7	9279 18
8	3911 27	8	5172 24	8	6313 21	8	7365 20	8	8353 19	8	9297 19
9	3938 27	9	5196 24	9	6334 22	9	7385 20	9	8372 19	9	9316 19
35° 0	3965 2, 2,	40° 0	5220 2, 2,	45° 0	6356 2, 2,	50° 0	7405 2, 2,	55° 0	8391 2, 2,	60° 0	9335 2, 2,

Продолжение табл. 35

$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$	$\alpha$	$\log q$
60° 0	2, 9335 + 18	65° 0	1, 0255 + 19	70° 0	1, 1175 + 18	75° 0	1, 2123 + 19	80° 0	1, 3152 + 22	85° 0	1, 4396 + 30
1	9353 19	1	0274 18	1	1193 19	1	2142 20	1	3174 + 22	1	4426 29
2	9372 18	2	0292 18	2	1212 18	2	2162 19	2	3196 22	2	4455 30
3	9390 19	3	0310 19	3	1230 19	3	2181 20	3	3218 22	3	4485 31
4	9409 18	4	0329 18	4	1249 19	4	2201 20	4	3240 22	4	4516 31
60° 5	9427 + 19	65° 5	0347 + 18	70° 5	1268 + 18	75° 5	2221 + 19	80° 5	3262 + 23	85° 5	4547 + 31
6	9446 18	6	0365 19	6	1286 19	6	2240 20	6	3285 22	6	4578 31
7	9464 19	7	0384 18	7	1305 19	7	2260 20	7	3307 23	7	4609 32
8	9483 18	8	0402 18	8	1324 18	8	2280 20	8	3330 23	8	4641 32
9	9501 19	9	0420 18	9	1342 19	9	2300 20	9	3353 23	9	4673 32
61° 0	9520 + 18	66° 0	0438 + 19	71° 0	1361 + 19	76° 0	2320 + 20	81° 0	3376 + 22	86° 0	4705 + 33
1	9538 19	1	0457 18	1	1380 18	1	2340 19	1	3398 23	1	4738 34
2	9557 19	2	0475 18	2	1398 19	2	2359 20	2	3421 24	2	4772 34
3	9575 19	3	0493 19	3	1417 19	3	2379 20	3	3445 23	3	4806 34
4	9594 18	4	0512 18	4	1436 18	4	2399 20	4	3468 23	4	4840 35
61° 5	9612 + 19	66° 5	0530 + 18	71° 5	1454 + 19	76° 5	2419 + 20	81° 5	3491 + 23	86° 5	4875 + 35
6	9631 18	6	0548 19	6	1473 19	6	2439 21	6	3514 24	6	4910 36
7	9649 19	7	0567 18	7	1492 19	7	2460 20	7	3538 24	7	4946 36
8	9668 18	8	0585 18	8	1511 19	8	2480 20	8	3562 23	8	4982 37
9	9686 19	9	0603 19	9	1530 18	9	2500 20	9	3585 24	9	5019 38
62° 0	9705 + 18	67° 0	0622 + 18	72° 0	1548 + 19	77° 0	2520 + 20	82° 0	3609 + 24	87° 0	5057 + 38
1	9723 18	1	0640 19	1	1567 19	1	2540 21	1	3633 24	1	5095 39
2	9741 19	2	0659 18	2	1586 19	2	2561 20	2	3657 24	2	5134 40
3	9760 18	3	0677 18	3	1605 19	3	2581 21	3	3681 25	3	5174 41
4	9778 19	4	0695 19	4	1624 19	4	2602 20	4	3706 24	4	5215 41
62° 5	9797 + 18	67° 5	0714 + 18	72° 5	1643 + 19	77° 5	2622 + 21	82° 5	3730 + 25	87° 5	5256 + 43
6	9815 18	6	0732 18	6	1662 19	6	2643 20	6	3755 24	6	5299 43
7	9833 19	7	0750 19	7	1681 19	7	2663 21	7	3779 25	7	5342 45
8	9852 18	8	0769 18	8	1700 19	8	2684 20	8	3804 25	8	5387 46
9	9870 18	9	0787 18	9	1719 19	9	2704 21	9	3829 26	9	5433 47
63° 0	9888 + 19	68° 0	0805 + 19	73° 0	1738 + 19	78° 0	2725 + 21	83° 0	3855 + 25	88° 0	5480 + 48
1	9907 18	1	0824 18	1	1757 19	1	2746 21	1	3880 25	1	5528 50
2	9925 19	2	0842 19	2	1776 19	2	2767 20	2	3905 26	2	5578 52
3	9944 18	3	0861 18	3	1795 19	3	2787 21	3	3931 26	3	5630 53
4	9962 18	4	0879 19	4	1814 19	4	2808 21	4	3957 26	4	5683 55
63° 5	9980 + 19	68° 5	0898 + 18	73° 5	1833 + 19	78° 5	2829 + 21	83° 5	3983 + 26	88° 5	5738 + 53
6	9999 18	6	0916 18	6	1852 19	6	2850 21	6	4009 26	6	5796 53
7	*0017 18	7	0934 19	7	1871 19	7	2871 22	7	4035 27	7	5856 60
8	0035 19	8	0953 18	8	1890 20	8	2893 21	8	4062 26	8	5919 67
9	0054 18	9	0971 19	9	1910 19	9	2914 21	9	4088 27	9	5986 70
64° 0	0072 + 18	69° 0	0990 + 18	74° 0	1929 + 19	79° 0	2935 + 21	84° 0	4115 + 27	89° 0	6056 + 75
1	0090 19	1	1008 19	1	1948 19	1	2956 22	1	4142 28	1	6131 81
2	0109 18	2	1027 18	2	1967 20	2	2978 21	2	4170 27	2	6212 87
3	0127 18	3	1045 19	3	1987 19	3	2999 22	3	4197 28	3	6299 96
4	0145 19	4	1064 18	4	2006 20	4	3021 21	4	4225 28	4	6395 107
64° 5	0164 + 18	69° 5	1082 + 19	74° 5	2026 + 19	79° 5	3042 + 22	84° 5	4253 + 28	89° 5	6502 + 75
6	0182 18	6	1101 18	6	2045 19	6	3064 22	6	4281 28	6	6625 75
7	0200 19	7	1119 19	7	2064 20	7	3086 22	7	4309 29	7	6772 77
8	0219 18	8	1138 18	8	2084 19	8	3108 22	8	4338 29	8	6957 79
9	0237 18	9	1156 19	9	2103 20	9	3130 22	9	4367 29	9	7230 81
65° 0	0255 1, 1,	70° 0	1175 1, 1,	75° 0	2123 1, 1,	80° 0	3152 1, 1,	85° 0	4396 1, 1,	90° 0	*0000 0, 0,

4.3. Эллиптические функции Якоби могут быть выражены через тэта-функции:

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}$$

$$\left( v = \frac{u}{2K}, \quad q = e^{-\pi x}, \quad x = \frac{K'}{K} \right).$$

Если положить  $u = u_1 + u_2 i$  и для действительных  $K, K'$  в первый раз взять

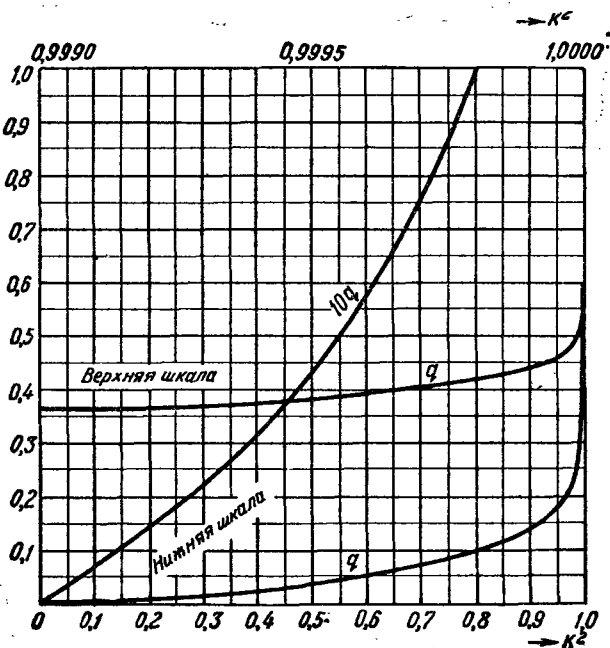


Рис. 79. Величина  $q = e^{-\pi x}$  как функция от  $k^2 = \sin^2 \alpha$ .

$-2K' < u_2 < 2K'$ , а во второй раз  $u_2 = 0$ , то для малых  $q$  получим приближенно

$$\operatorname{sn} u \approx \sin y \frac{1 - 4q^2 \cos^2 y}{1 - 4q(1 - 2q) \cos^2 y} \approx \sin y \cdot (1 + 4q \cos^2 y),$$

$$\operatorname{cn} u \approx \cos y \frac{1 - 4q^2 \sin^2 y}{1 - 4q(1 + 2q) \sin^2 y} \approx \cos y \cdot (1 - 4q \sin^2 y) \quad \left( y = \frac{\pi u}{2K} \right),$$

$$\operatorname{dn} u \approx \frac{1 - 4q(1 - 2q) \sin^2 y}{1 + 4q(1 + 2q) \sin^2 y} \approx 1 - 8q \sin^2 y,$$

$$\operatorname{zn} u \approx \frac{1}{\vartheta_2^2} \frac{d \ln \vartheta_4}{dy} \approx \frac{4q \sin 2y}{1 + 2q(2 - \cos 2y) + 4q^2(1 - 2 \cos 2y)}.$$

## XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

### А. ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

Полиномы Чебышева 1-го рода  $T_n(z)$  и 2-го рода  $U_n(z)$  определяют как\*)

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \frac{1}{2} \left[ (z + i\sqrt{1-z^2})^n + (z - i\sqrt{1-z^2})^n \right],$$

$$U_n(z) = \sin(n \arccos z) = \frac{1}{2i} \left[ (z + i\sqrt{1-z^2})^n - (z - i\sqrt{1-z^2})^n \right].$$

Они являются линейно независимыми решениями дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - z \frac{dw}{dz} + n^2 z = 0.$$

Имеют место представления:

$$T_n(z) = z^n - \binom{n}{2} z^{n-2} (1-z^2) + \binom{n}{4} z^{n-4} (1-z^2)^2 - \dots =$$

$$= (-1)^n \frac{\sqrt{1-z^2}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{d^n}{dz^n} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$U_n(z) = \sqrt{1-z^2} \left[ \binom{n}{1} z^{n-1} - \binom{n}{3} z^{n-3} (1-z^2) + \binom{n}{5} z^{n-5} (1-z^2)^2 - \dots \right] =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (1-z^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Производящие функции:

$$\frac{1-t^2}{1-2tz+t^2} = T_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(z) t^n,$$

$$\frac{1}{1-2tz+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(z) t^n.$$

Рекуррентные формулы:

$$T_{n+1}(z) - 2zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0,$$

$$U_{n+1}(z) - 2zU_n(z) + U_{n-1}(z) = 0.$$

Функция  $U_n(z)$  обращается в нуль при  $z = -1$  и  $z = 1$ . Кроме того,  $T_n(z)$  и  $U_n(z)$  имеют только действительные простые нули, которые все лежат в интервале  $-1 < z < 1$ .

\*) Иногда употребляется и иная нумерация этих полиномов. — Прим. ред.



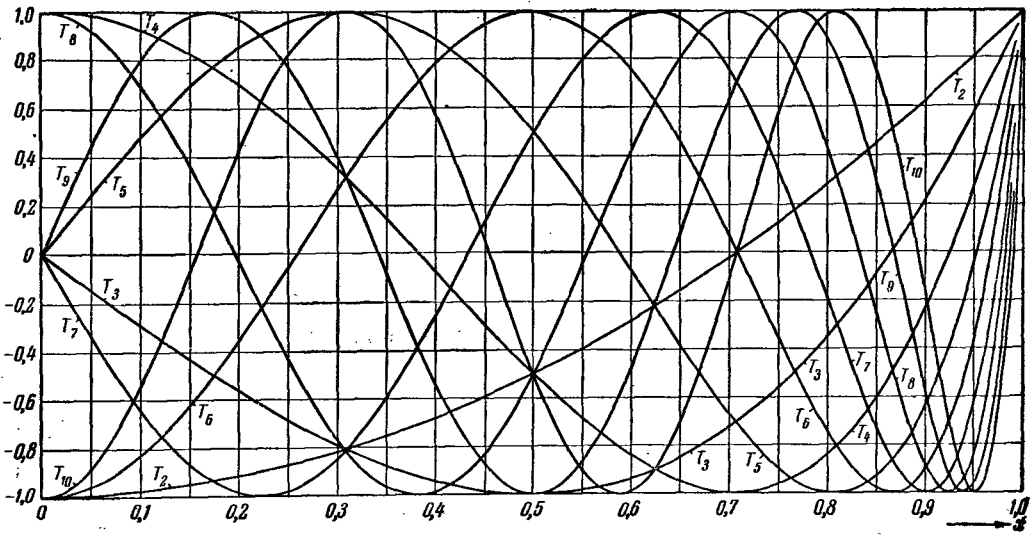


Рис. 80. Полиномы Чебышева  $T_n(x)$ ,  $n=2, 3, \dots, 10$ .

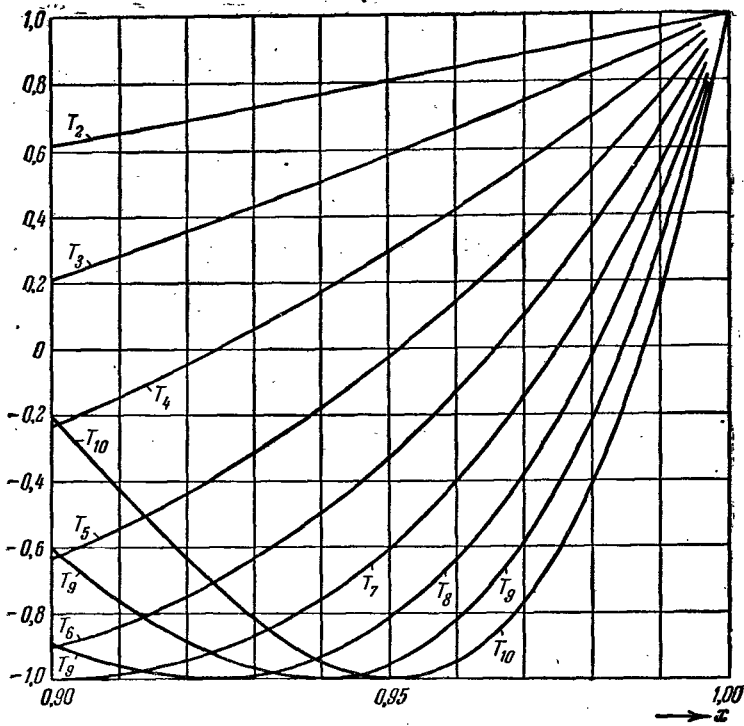


Рис. 81. Полиномы Чебышева  $T_n(x)$ ,  $n=2, 3, \dots, 10$ .

Частные значения:

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0, \\ U_n(1) = 0, \quad U_n(-1) = 0, \quad U_{2n}(0) = 0, \quad U_{2n+1}(0) = (-1)^n.$$

Функции  $T_n(x)$  действительны при всех действительных значениях аргумента  $z = x$  (рис. 80—82), а функции  $U_n(x)$  — при  $-1 \leq x \leq +1$ . На этом отрезке выполняются соотношения ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \\ \frac{\pi}{2}, & \\ \pi, & \end{cases} \quad \int_{-1}^{+1} \frac{U_m(x) U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = n \neq 0, \\ 0, & \text{если } m = n = 0. \end{cases}$$

Справедливо важное равенство, следующее из определения:

$$T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta.$$

Среди всех полиномов  $n$ -й степени с единичным старшим коэффициентом полином  $\frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$  выделяется тем, что он меньше всего уклоняется от нуля на отрезке  $-1 \leq x \leq +1$ .

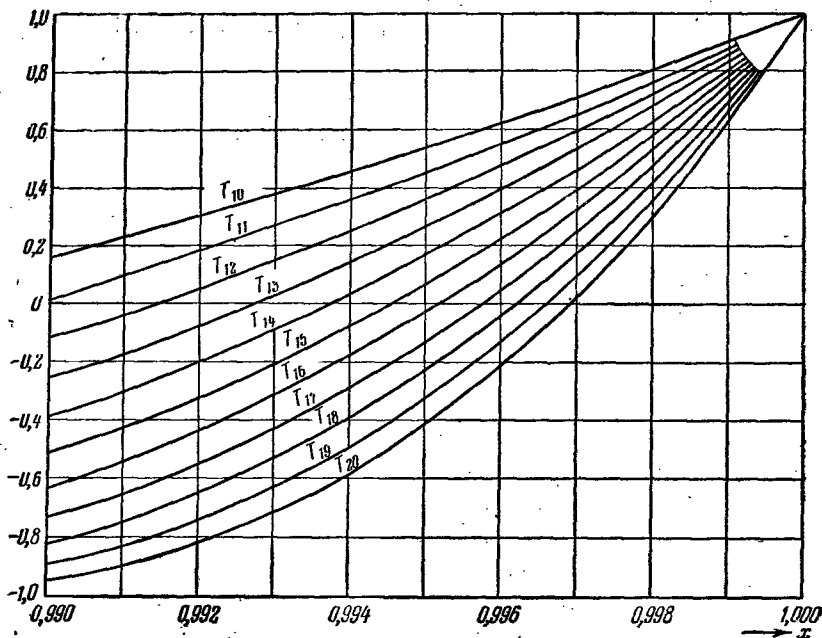


Рис. 82. Полиномы Чебышева  $T_n(x)$ ,  $n = 10, 11, \dots, 20$ .

Полиномы Чебышева низших степеней:

$$\begin{aligned} T_0(z) &= 1, & U_0(z) &= 0, \\ T_1(z) &= z, & U_1(z) &= \sqrt{1-z^2}, \\ T_2(z) &= 2z^2 - 1, & U_2(z) &= \sqrt{1-z^2} 2z, \\ T_3(z) &= 4z^3 - 3z, & U_3(z) &= \sqrt{1-z^2} [4z^2 - 1], \\ T_4(z) &= 8z^4 - 8z^2 + 1, & U_4(z) &= \sqrt{1-z^2} [8z^3 - 4z], \\ T_5(z) &= 16z^5 - 20z^3 + 5z, & U_5(z) &= \sqrt{1-z^2} [16z^4 - 12z^2 + 1]. \end{aligned}$$

В. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Полиномы Лагерра являются решениями дифференциального уравнения

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha + 1 - z) \frac{dw}{dz} + n w = 0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а  $\alpha$  — произвольное комплексное число. Именно \*)

$$L_n^{(\alpha)}(z) = \frac{e^{z^2} z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2} z^{n+\alpha}).$$

В частности,  $L_n(z) = L_n^{(0)}(z) = 1 - \binom{n}{1} \frac{z}{1!} + \binom{n}{2} \frac{z^2}{2!} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \frac{z^n}{n!}.$

Производящие функции:

$$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(z) t^n, \quad e^{-zt} (1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(z) t^n \quad (|t| < 1).$$

Рекуррентные формулы:

$$n L_n^{(\alpha)}(z) = (2n + \alpha - 1 - z) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(z), \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$z \frac{dL_n^{(\alpha)}(z)}{dz} = n L_n^{(\alpha)}(z) - (n + \alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(z) = -z L_{n-1}^{(\alpha+1)}(z).$$

Теоремы сложения:

$$L_n^{(\alpha)}(z_1 + z_2) = e^{z_2^2} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} z_2^k L_n^{(\alpha+k)}(z_1),$$

$$L_n^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m-1})}(z_1 + z_2 + \dots + z_m) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} L_{k_1}^{(\alpha_1)}(z_1) L_{k_2}^{(\alpha_2)}(z_2) \dots L_{k_m}^{(\alpha_m)}(z_m).$$

Если параметр  $\alpha$  действителен и  $> -1$ , то все нули полинома  $L_n^{(\alpha)}(z)$  простые и являются действительными положительными числами.

Если параметр  $\alpha$  действителен, то для действительных положительных значений аргумента  $z = x$  функции  $L_n^{(\alpha)}(x)$  будут действительными. Если, кроме того,  $\alpha > -1$ , то выполняется соотношение ортогональности:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Gamma(1 + \alpha) \binom{n + \alpha}{n} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Для функций  $l_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} L_n(x)$  (рис. 83, 84, табл. 36) получаем, следовательно,

$$\int_0^{+\infty} l_m(x) l_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Полиномы Лагерра низших степеней для  $\alpha = 0$

$$L_0(z) = 1, \quad L_2(z) = 1 - 3z + \frac{3}{2} z^2 - \frac{1}{6} z^3,$$

$$L_1(z) = 1 - z, \quad L_4(z) = 1 - 4z + 3z^2 + \frac{1}{24} z^4,$$

$$L_3(z) = 1 - 2z + \frac{1}{2} z^2, \quad L_5(z) = 1 + 5z^2 + \frac{5}{24} z^4 - \frac{1}{120} z^5.$$

\*) Иногда применяется и иная нормировка этих полиномов. — Прим. ред.

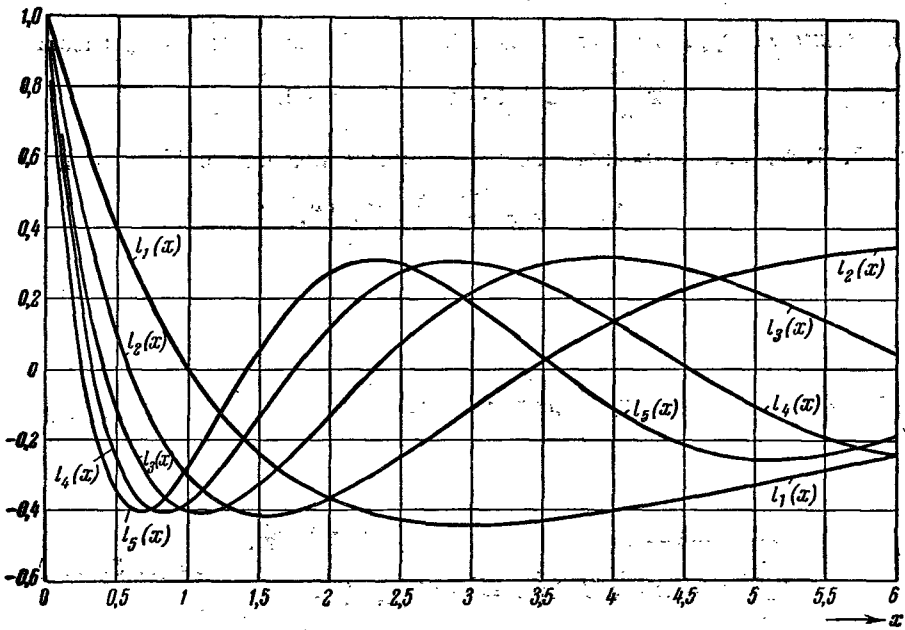
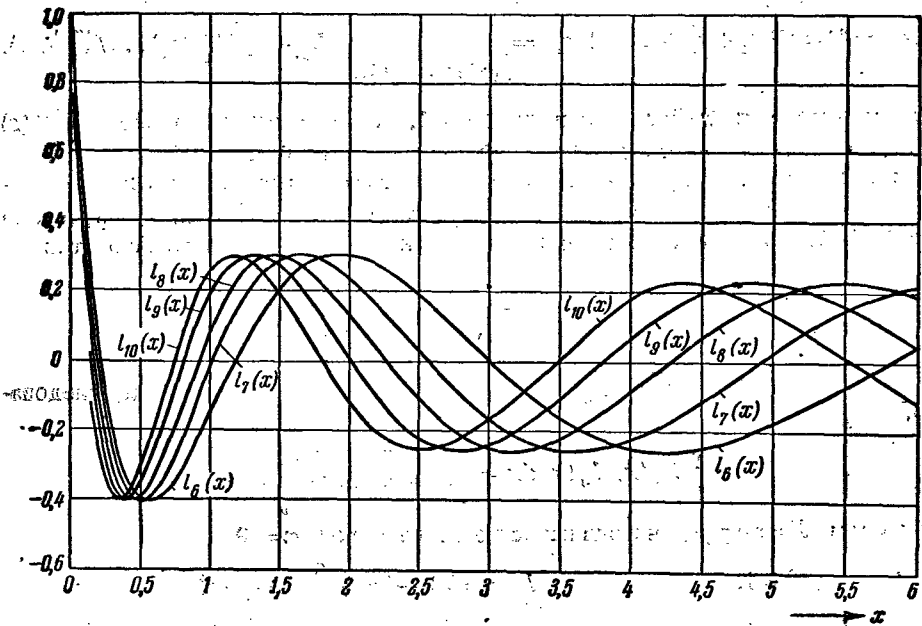
Рис. 83. Функции Лагерра  $l_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots, 5$ .Рис. 84. Функции Лагерра  $l_n(x)$ ,  $n=6, 7, \dots, 10$ .

Таблица 36. Функции Лагерра  $l_n(x)$

$x$	$l_0(x)$	$l_1(x)$	$l_2(x)$	$l_3(x)$	$l_4(x)$	$l_5(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	0,9512	0,8561	0,7657	0,6800	0,5986	0,5216
0,20	0,9048	0,7239	0,5610	0,4150	0,2848	+ 0,1692
0,30	0,8607	0,6025	0,3830	0,1984	+ 0,4505 (-1)	- 0,8033 (-1)
0,40	0,8187	0,4912	0,2292	+ 0,2402 (-1)	- 0,1323	0,2468
0,50	+ 0,7786	+ 0,3894	+ 0,9935 (-1)	- 0,1136	- 0,2576	- 0,3470
0,60	0,7408	0,2963	- 0,1482 (-1)	0,2193	0,3397	0,3953
0,70	0,7047	0,2114	0,1092	0,2975	0,3866	0,4038
0,80	0,6703	0,1341	0,1877	0,3521	0,4051	0,3826
0,90	0,6376	+ 0,6376 (-1)	0,2519	0,3867	0,4009	0,3400
1,00	+ 0,6065	0,0000	- 0,3033	- 0,4044	- 0,3791	- 0,2830
1,25	0,5353	- 0,1338	0,3847	0,3917	0,2745	- 0,1121
1,50	0,4724	0,2362	0,4133	0,3248	0,1365	+ 0,5499 (-1)
1,75	0,4169	0,3126	0,4038	0,2291	- 0,2239 (-2)	0,1865
2,00	+ 0,3679	- 0,3679	- 0,3679	- 0,1226	+ 0,1226	+ 0,2698
2,25	0,3247	0,4058	0,3145	- 0,1775 (-1)	0,2148	0,3042
2,50	0,2865	0,4298	0,2507	+ 0,7760 (-1)	0,2753	0,2958
2,75	0,2528	0,4425	0,1817	0,1587	0,3049	0,2542
3,00	+ 0,2231	- 0,4463	- 0,1116	+ 0,2231	+ 0,3068	+ 0,1897
3,25	0,1969	0,4431	- 0,4307 (-1)	0,2702	0,2857	0,1123
3,50	0,1738	0,4344	+ 0,2172 (-1)	0,3005	0,2466	+ 0,3091 (-1)
3,75	0,1534	0,4217	+ 0,8147 (-1)	0,3151	0,1949	- 0,4742 (-1)
4,00	+ 0,1353	- 0,4060	+ 0,1353	+ 0,3158	+ 0,1353	- 0,1173
4,25	0,1194	0,3882	0,1829	0,3045	0,7218 (-1)	0,1750
4,50	0,1054	0,3689	0,2240	0,2833	+ 0,9058 (-2)	0,2185
4,75	0,9301 (-1)	0,3488	0,2587	0,2541	- 0,5109 (-1)	0,2467
5,00	+ 0,8208 (-1)	- 0,3283	+ 0,2873	+ 0,2189	- 0,1060	- 0,2599
5,25	0,7244 (-1)	0,3079	0,3101	0,1794	0,1541	0,2591
5,50	0,6393 (-1)	0,2877	0,3276	0,1372	0,1943	0,2457
5,75	0,5642 (-1)	0,2680	0,3403	0,9359 (-1)	0,2259	0,2217
6	+ 0,4979 (-1)	- 0,2489	+ 0,3485	+ 0,4979 (-1)	- 0,2489	- 0,1892
7	0,3020 (-1)	0,1812	0,3473	- 0,1107	0,2605	- 0,1560 (-1)
8	0,1832 (-1)	0,1282	0,3114	0,2259	0,1777	+ 0,1453
9	0,1111 (-1)	0,8887 (-1)	0,2611	0,2888	- 0,5138 (-1)	0,2311
10	+ 0,6738 (-2)	- 0,6064 (-1)	+ 0,2089	- 0,3077	+ 0,7412 (-1)	+ 0,2313
11	0,4087 (-2)	0,4087 (-1)	0,1614	0,2956	0,1745	0,1667
12	0,2479 (-2)	0,2727 (-1)	0,1215	0,2652	0,2404	+ 0,6792 (-1)
13	0,1503 (-2)	0,1804 (-1)	0,8945 (-1)	0,2265	0,2727	- 0,3693 (-1)
14	0,9119 (-3)	0,1185 (-1)	0,6474 (-1)	0,1863	0,2775	0,1285
16	+ 0,3355 (-3)	- 0,5032 (-2)	+ 0,3254 (-1)	- 0,1160	+ 0,2365	- 0,2383
18	0,1234 (-3)	0,2098 (-2)	0,1567 (-1)	0,6652 (-1)	0,1712	0,2549
20	0,4540 (-4)	0,8626 (-3)	0,7309 (-2)	0,3597 (-1)	0,1114	0,2164
22	0,1670 (-4)	0,3507 (-3)	0,3324 (-2)	0,1860 (-1)	0,6726 (-1)	0,1600
24	0,6144 (-5)	0,1413 (-3)	0,1481 (-2)	0,9284 (-2)	0,3835 (-1)	0,1076
26	+ 0,2260 (-5)	- 0,5651 (-4)	+ 0,6487 (-3)	- 0,4503 (-2)	+ 0,2090 (-1)	- 0,6747 (-1)
28	0,8315 (-6)	0,2245 (-4)	0,2802 (-3)	0,2133 (-2)	0,1099 (-1)	0,4006 (-1)
30	0,3059 (-6)	0,8871 (-5)	0,1196 (-3)	0,9908 (-3)	0,5607 (-2)	0,2276 (-1)
32	0,1125 (-6)	0,3489 (-5)	0,5053 (-4)	0,4524 (-3)	0,2790 (-2)	0,1267 (-1)
34	0,4140 (-7)	0,1366 (-5)	0,2116 (-4)	0,2036 (-3)	0,1358 (-2)	0,6629 (-2)

Продолжение табл. 36

$x$	$l_6(x)$	$l_7(x)$	$l_8(x)$	$l_9(x)$	$l_{10}(x)$
0,00	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000	+ 1,0000
0,10	+ 0,4487	+ 0,3798	+ 0,3148	+ 0,2535	+ 0,1958
0,20	+ 0,6725 (- 1)	- 0,2207 (- 1)	- 0,9967 (- 1)	- 0,1664	- 0,2232
0,30	- 0,1808	0,2592	0,3180	0,3597	0,3865
0,40	0,3257	0,3748	0,3990	0,4027	0,3900
0,50	- 0,3926	- 0,4037	- 0,3881	- 0,3527	- 0,3032
0,60	0,4021	0,3735	0,3204	0,2519	0,1751
0,70	0,3710	0,3058	0,2220	0,1302	- 0,3851 (- 1)
0,80	0,3128	0,2173	0,1120	- 0,8407 (- 2)	+ 0,8548 (- 1)
0,90	0,2383	0,1205	- 0,3837 (- 2)	+ 0,1002	0,1849
1,00	- 0,1558	- 0,2455 (- 1)	+ 0,9340 (- 1)	+ 0,1879	+ 0,2541
1,25	+ 0,4653 (- 1)	+ 0,1742	0,2587	0,2979	0,2959
1,50	0,2008	0,2828	0,3015	0,2679	0,1975
1,75	0,2856	0,2992	0,2456	0,1503	+ 0,3811 (- 1)
2,00	+ 0,3025	+ 0,2441	+ 0,1320	+ 0,2985 (- 2)	- 0,1137
2,25	0,2846	0,1456	+ 0,5606 (- 3)	- 0,1285	0,2158
2,50	0,1897	+ 0,3093 (- 1)	- 0,1176	0,2170	0,2522
2,75	+ 0,9541 (- 1)	- 0,7816 (- 1)	0,2032	0,2522	0,2270
3,00	- 0,2789 (- 2)	- 0,1666	- 0,2474	- 0,2368	- 0,1562
3,25	0,9298 (- 1)	0,2258	0,2502	0,1816	- 0,6085 (- 1)
3,50	0,1669	0,2530	0,2176	0,1016	+ 0,3842 (- 1)
3,75	0,2197	0,2497	0,1589	- 0,1196 (- 1)	0,1248
4,00	- 0,2496	- 0,2204	- 0,8464 (- 1)	+ 0,7366 (- 1)	+ 0,1867
4,25	0,2571	0,1713	- 0,5254 (- 2)	0,1448	0,2183
4,50	0,2442	0,1093	+ 0,7024 (- 1)	0,1947	0,2199
4,75	0,2144	- 0,4123 (- 1)	0,1343	0,2201	0,1923
5,00	- 0,1716	+ 0,2671 (- 1)	+ 0,1835	+ 0,2210	+ 0,1442
5,25	0,1199	0,8936 (- 1)	0,2138	0,1997	0,8217 (- 1)
5,50	0,6336 (- 1)	0,1427	0,2250	0,1606	+ 0,1429 (- 1)
5,75	- 0,5728 (- 2)	0,1841	0,2179	0,1087	- 0,5207 (- 1)
6	+ 0,4979 (- 1)	+ 0,2120	+ 0,1949	+ 0,4979 (- 1)	- 0,1107
7	0,2066	0,1905	+ 0,9683 (- 2)	- 0,1586	0,1990
8	0,2202	+ 0,3274 (- 1)	- 0,1640	- 0,1931	- 0,6481 (- 1)
9	+ 0,1198	- 0,1296	0,2020	- 0,6441 (- 1)	+ 0,1174
10	- 0,2321 (- 1)	- 0,2082	- 0,1098	+ 0,9967 (- 1)	+ 0,1886
11	0,1454	0,1844	+ 0,3506 (- 1)	0,1873	+ 0,1183
12	0,2117	- 0,8846 (- 1)	0,1521	0,1631	- 0,2268 (- 1)
13	0,2149	+ 0,3166 (- 1)	0,1786	+ 0,5896 (- 1)	0,1410
14	- 0,1670	0,1340	+ 0,1629	- 0,6478 (- 1)	0,1790
16	+ 0,1528 (- 2)	+ 0,2036	- 0,2679 (- 1)	- 0,1840	- 0,3108 (- 1)
18	0,1547	+ 0,1080	0,1759	- 0,7642 (- 1)	+ 0,1506
20	0,2317	- 0,4623 (- 1)	0,1738	+ 0,9904 (- 1)	+ 0,1465
22	0,2373	0,1679	- 0,6068 (- 1)	0,1830	- 0,2839 (- 3)
24	0,2012	0,2239	+ 0,7588 (- 1)	0,1400	0,1383
26	+ 0,1513	- 0,2231	+ 0,1744	+ 0,2391	- 0,1767
28	0,1043	0,1892	0,2162	- 0,9606 (- 1)	- 0,1081
30	0,6740 (- 1)	0,1442	0,2113	0,1771	+ 0,4628 (- 2)
32	0,4132 (- 1)	0,1015	0,1795	0,2089	0,1101
34	0,2428 (- 1)	0,6715 (- 1)	0,1382	0,2014	0,1777

## С. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА (ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

Полиномы Эрмита являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + 2nw = 0,$$

где  $n=0, 1, 2, \dots$ . Именно,

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2}),$$

или

$$H_n(z) = 2^n z^n - 2^{n-1} \binom{n}{2} z^{n-2} + 2^{n-2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \binom{n}{4} z^{n-4} - 2^{n-3} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \binom{n}{6} z^{n-6} + \dots$$

Вместо  $H_n(z)$  часто рассматривают полиномы  $2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$ , называя их также полиномами Эрмита\*).

Полиномы Эрмита связаны с полиномами Лагерра соотношениями

$$\begin{aligned} H_{2m}(z) &= (-1)^m 2^{2m} m! L_m^{(-1/2)}(z^2), \\ H_{2m+1}(z) &= (-1)^m 2^{2m+1} m! z L_m^{(1/2)}(z^2). \end{aligned}$$

Производящая функция:

$$e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z) \frac{t^n}{n!}.$$

Рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} H_{n+1}(z) &= 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z), \\ \frac{dH_n(z)}{dz} &= 2nH_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Теорема сложения:

$$2^{\frac{n}{2}} H_n(z_1 + z_2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H_k(z_1 \sqrt{2}) H_{n-k}(z_2 \sqrt{2}),$$

$$\begin{aligned} \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2)^{\frac{n}{2}}}{n!} H_n\left(\frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2}}\right) &= \\ &= \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n} \frac{a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}}{k_1! k_2! \dots k_m!} H_{k_1}(z_1) \dots H_{k_m}(z_m). \end{aligned}$$

Все нули полиномов Эрмита действительные и простые. Для действительных значений аргумента  $z=x$  полиномы Эрмита действительны и на действительной оси выполняется соотношение ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} \cdot n! & \text{при } m = n. \end{cases}$$

\*) Иногда употребляются и другие нормировки этих полиномов. — Прим. ред.

Отсюда следует, что функции

$$\varphi_n(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{\pi}}}$$

(рис. 85, 86, табл. 37) ортогональны и нормированы на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ 1 & \text{для } m = n. \end{cases}$$

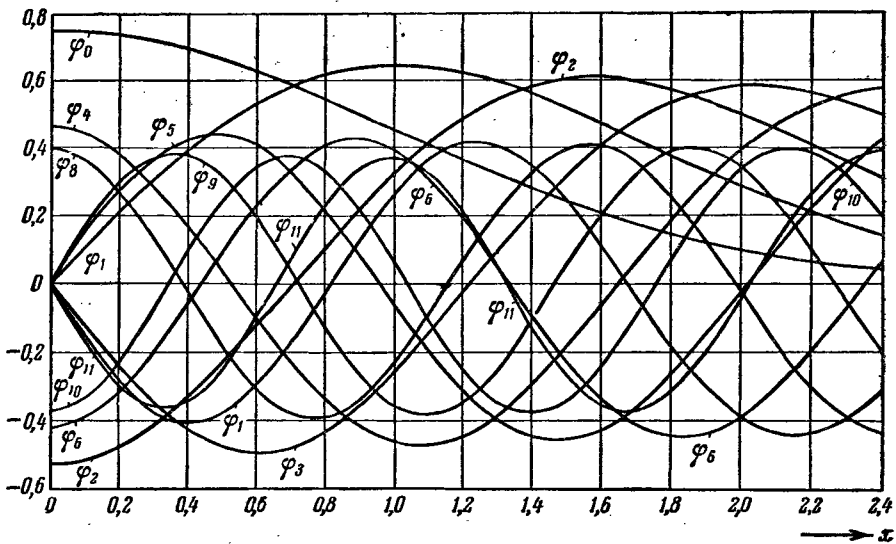


Рис. 85. Функции параболыцического цилиндра  $\varphi_n(x)$ .

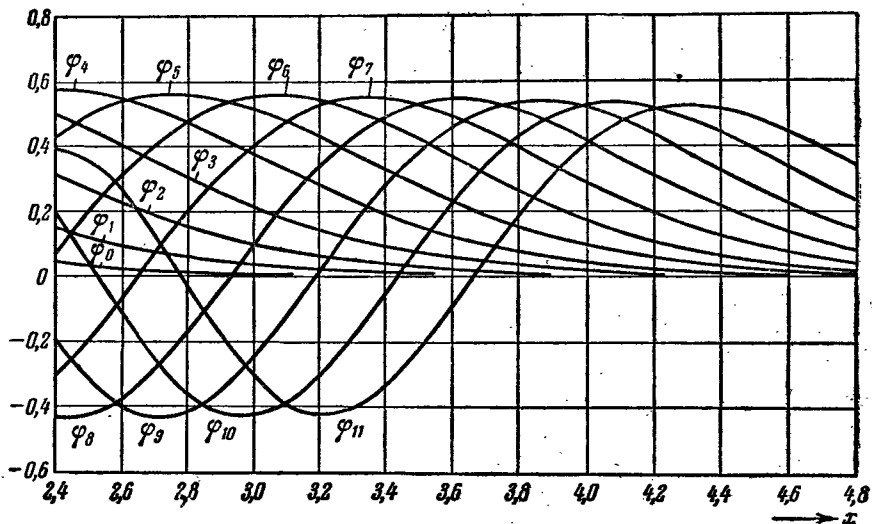


Рис. 86. Функции параболыцического цилиндра  $\varphi_n(x)$ .



Полиномы Эрмита низших степеней:

$$\begin{aligned} H_0(z) &= 1, & H_2(z) &= 8z^2 - 12z, \\ H_1(z) &= 2z, & H_3(z) &= 16z^3 - 48z^2 + 12, \\ H_2(z) &= 4z^2 - 2, & H_4(z) &= 32z^4 - 160z^3 + 120z. \end{aligned}$$

Полиномы Эрмита тесно связаны с функциями параболического цилиндра  $D_\nu(z)$ . Функции  $D_\nu(z)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left( \nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) w = 0,$$

где  $\nu$  — параметр. Для целых значений параметра  $\nu = n = 0, 1, 2, \dots$  имеем:

$$D_n(z) = 2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{n! \sqrt{\pi}} \Phi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

т. е. введенная выше функция

$$\Phi_n(x) = \frac{D_n(x\sqrt{2})}{\sqrt{n! \sqrt{\pi}}}.$$

Если определить

$$D_n(z) = \sqrt{n! \sqrt{2\pi}} \Psi_n(z),$$

$$\Psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{D_n(z)}{\sqrt{n! \sqrt{2\pi}}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{4}} H_n\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{n! 2^n \sqrt{2\pi}}},$$

то функции  $\Psi_n(x)$  (рис. 87) будут ортогональными и нормированными на всей прямой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } m \neq n, \\ 1 & \text{для } m = n. \end{cases}$$

Функции  $D_n(z)$  допускают интегральное представление (которое также имеет место и для произвольного параметра  $\nu \neq -1, -2, \dots$ )

$$D_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4} z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zt - \frac{1}{2} t^2} t^{-n-1} dt.$$

При  $|z| \rightarrow \infty$  получаем в секторе  $-\frac{3\pi}{4} + \delta \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{4} - \delta$  ( $\delta > 0$ ) асимптотическое представление

$$D_n(z) \approx e^{-\frac{1}{4} z^2} z^n \left( 1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2! (2z^2)^2} - \dots \right).$$

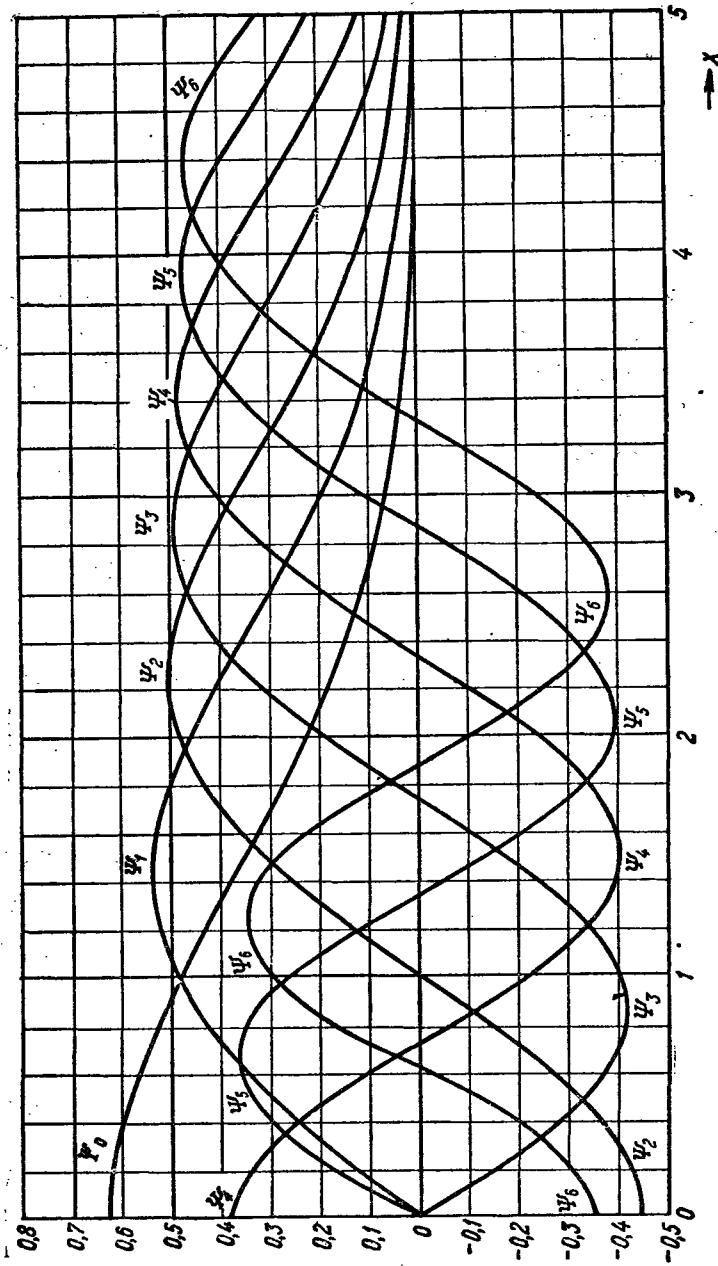
Рис. 87. Функции параболлического цилиндра  $\Psi_n(x)$ .

Таблица 37. Функции параболического цилиндра  $\varphi_n(x)$ 

$x$	$\varphi_0(x)$	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$	$\varphi_5(x)$
0,00	+ 0,	+ 0,	- 0,	- 0,	+ 0,45997	+ 0,00000
04	75113	00000	53113	00000		
08	75052	42456 (-1)	52900	51942 (-1)	0,45667	0,58011 (-1)
12	74873	84709 (-1)	52265	10330	0,44678	0,11500
16	74574	12656	51214	15351	0,43049	0,16998
20	74157	16780	49753	20200	0,40803	0,22198
24	73625	20824	47897	24824	+ 0,37970	+ 0,27007
28	72980	24770	45661	29172	0,34592	0,31343
32	72225	28600	43064	33197	0,30721	0,35132
36	71364	32296	40127	36854	0,26412	0,38308
40	70400	35841	36876	40104	0,21728	0,40817
44	69338	39223	33339	42914	+ 0,16735	+ 0,42617
48	68183	42427	29544	45255	0,11506	0,43680
52	66940	45440	25522	47104	0,61153 (-1)	0,43988
56	65614	48252	21305	48443	+ 0,63840 (-2)	0,43539
60	64212	50853	16927	49261	- 0,48473 (-1)	0,42343
64	62739	53235	12422	49552	- 0,10266	+ 0,40426
68	61202	55394	78245 (-1)	49318	0,15543	0,37821
72	59608	57324	31698 (-1)	48564	0,20606	0,34575
76	57962	59019	*15083 (-1)	47302	0,25388	0,30747
80	56271	60479	61754 (-1)	45550	0,29827	0,26404
84	54543	61706	10799	43330	- 0,33864	+ 0,21622
88	52783	62705	15347	40671	0,37448	0,16482
92	50998	63470	19790	37602	0,40536	0,11071
96	49195	64006	24100	34198	0,43091	+ 0,54782 (-1)
1,00	47379	64325	28251	30378	0,45085	- 0,20325 (-2)
1,04	45558	64431	32215	26303	- 0,46499	- 0,58816 (-1)
1,08	41017	63809	41186	15109	0,47419	0,19476
1,12	36561	62046	48603	30396 (-1)	0,44671	0,31184
1,16	32265	59321	54300	*92024 (-1)	0,38565	0,39939
1,20	28190	55816	58206	20963	0,29656	0,45009
1,24	24385	51730	60352	31678	- 0,18666	- 0,46042
1,28	20884	47255	60840	40899	- 0,64185 (-1)	0,43076
1,32	17708	42572	59850	48316	+ 0,62475 (-1)	0,36498
1,36	14865	37840	57601	53758	0,18541	0,26976
1,40	12355	33196	54337	57189	0,29778	0,15369
1,44	10166	28752	50316	58690	+ 0,39425	- 0,26247 (-1)
1,48	82812 (-1)	24594	45791	58436	0,47115	+ 0,10310
1,52	66792 (-1)	20781	40995	56671	0,52657	0,22579
1,56	53334 (-1)	17348	36130	53683	0,56019	0,33472
1,60	42164 (-1)	14311	31366	49778	0,57313	0,42472
1,64	33002 (-1)	11668	26836	45253	+ 0,56755	+ 0,49263
1,68	25574 (-1)	94036 (-1)	22641	40386	0,54641	0,53728
1,72	19620 (-1)	74921 (-1)	18841	35418	0,51303	0,55927
1,76	14903 (-1)	59013 (-1)	15470	30549	0,47086	0,56060
1,80	11208 (-1)	45964 (-1)	12537	25933	0,42321	0,54426
1,84	83443 (-2)	35402 (-1)	10031	21679	+ 0,37301	+ 0,51384
1,88	61507 (-2)	26965 (-1)	79244 (-1)	17856	0,32278	0,47314
1,92	44887 (-2)	20314 (-1)	61831 (-1)	14496	0,27447	0,42580
1,96	32432 (-2)	15136 (-1)	47655 (-1)	11605	0,22951	0,37522
2,00	23200 (-2)	11155 (-1)	36289 (-1)	91630 (-1)	0,18887	0,32417
2,04	16431 (-2)	81326 (-2)	27303 (-1)	71384 (-1)	+ 0,15302	+ 0,27489
2,08	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,		

Продолжение табл. 37

$x$	$\varphi_6(x)$	$\varphi_7(x)$	$\varphi_8(x)$	$\varphi_9(x)$	$\varphi_{10}(x)$	$\varphi_{11}(x)$
0,00	-0,41989	-0,00000	+0,39277	+0,00000	-0,37262	-0,00000
04	0,41552	0,62592 (-1)	0,38744	0,66320 (-1)	0,36637	0,69480 (-1)
08	0,40254	0,12367	0,37159	0,13063	0,34786	0,13641
12	0,38119	0,18182	0,34566	0,19097	0,31769	0,19834
16	0,35195	0,23563	0,31038	0,24554	0,27689	0,25308
0,20	-0,31542	-0,28378	+0,26666	+0,29268	-0,22681	-0,29839
24	0,27235	0,32513	0,21574	0,33094	0,16916	0,33285
28	0,22365	0,35873	0,15898	0,35920	0,10584	0,35513
32	0,17033	0,38380	0,97924 (-1)	0,37662	-0,39002 (-1)	0,36443
36	0,11351	0,39974	+0,34225 (-1)	0,38268	+0,29143 (-1)	0,36061
0,40	-0,54348 (-1)	-0,40618	-0,30398 (-1)	+0,37722	+0,96317 (-1)	-0,34323
44	+0,59254 (-2)	0,40300	0,94202 (-1)	0,36041	0,16028	0,31356
48	0,66077 (-1)	0,39029	0,15548	0,33279	0,21894	0,27249
52	0,12489	0,36838	0,21260	0,29520	0,27034	0,22152
56	0,18116	0,33780	0,26404	0,24878	0,31279	0,16251
0,60	+0,23375	-0,29930	-0,30844	+0,19494	+0,34493	-0,97624 (-1)
64	0,28163	0,25381	0,34466	0,13531	0,36569	-0,29210 (-1)
68	0,32385	0,20239	0,37175	0,71650 (-1)	0,37445	+0,40260 (-1)
72	0,35959	0,14628	0,38901	+0,58762 (-2)	0,37094	0,10828
76	0,38816	0,86783 (-1)	0,39606	-0,60071 (-1)	0,35530	0,17242
0,80	+0,40901	-0,25288 (-1)	-0,39270	-0,12426	+0,32810	+0,23039
84	0,42179	+0,36788 (-1)	0,37910	0,18480	0,29022	0,28015
88	0,42630	0,98025 (-1)	0,35562	0,23995	0,24295	0,31995
92	0,42248	0,15704	0,32294	0,28813	0,18782	0,34840
96	0,41044	0,21250	0,28193	0,32794	0,12668	0,36453
1,00	+0,39050	+0,26319	-0,23369	-0,35830	+0,61463 (-1)	+0,36784
10	0,30919	0,36211	-0,90060 (-1)	0,38810	-0,10548	0,32056
20	0,19174	0,41169	+0,67662 (-1)	0,34987	0,25195	0,20467
30	+0,52287 (-1)	0,40609	0,21505	0,25108	0,34998	+0,45390 (-1)
40	-0,93080 (-1)	0,34704	0,33000	-0,10941	0,38156	-0,12346
1,50	-0,22833	+0,24319	+0,39598	+0,50714 (-1)	-0,32164	-0,26686
60	0,33933	+0,10860	0,40429	0,20255	0,23862	0,35588
70	0,41527	-0,39433 (-1)	0,35493	0,32161	-0,92202 (-1)	0,37347
80	0,44960	0,18283	0,25602	0,38966	+0,70747 (-1)	0,31726
90	0,44043	0,30501	+0,12222	0,39704	0,22141	0,19930
2,00	-0,39021	-0,39285	-0,27844 (-1)	+0,34413	+0,33421	-0,43146 (-1)
10	0,30509	0,43792	0,17443	0,24020	0,39106	+0,12115
20	0,19390	0,43705	0,29938	+0,10157	0,38395	0,26334
30	-0,66902 (-1)	0,39214	0,38838	-0,51381 (-1)	0,31560	0,35851
40	+0,65318 (-1)	0,30942	0,43240	0,19749	0,19825	0,39118
2,50	+0,19294	-0,19825	-0,42830	-0,31784	+0,50964 (-1)	+0,35738
60	0,30772	-0,69767 (-1)	0,37855	0,39819	-0,10388	0,26450
70	0,40350	+0,64541 (-1)	0,29030	0,43035	0,24423	+0,12916
80	0,47642	0,19403	0,17402	0,41262	0,35159	-0,26351 (-1)
90	0,52493	0,30982	-0,41793 (-1)	0,34923	0,41328	0,17807
3,00	+0,54949	+0,40541	+0,94123 (-1)	-0,24911	-0,42352	-0,30424
10	0,55216	0,47695	0,22277	-0,12416	0,38340	0,38840
20	0,53613	0,52280	0,33497	+0,12502 (-1)	0,29995	0,42121
30	0,50537	0,54403	0,42491	0,14819	0,18447	0,40089
40	0,40393	0,54303	0,48916	0,27206	-0,50381 (-1)	0,33246
3,50	+0,41576	+0,52334	+0,52694	+0,37599	+0,88619 (-1)	-0,22623



## ХИ. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА (СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

### 1. Определения и обозначения

Функциями Лежандра (или сферическими функциями) называют решения дифференциального уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \left[ \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] w = 0.$$

Здесь  $z$  — комплексная переменная, постоянные  $\nu, \mu$ , называемые индексами, также могут быть произвольными комплексными числами. Однако в дальнейшем

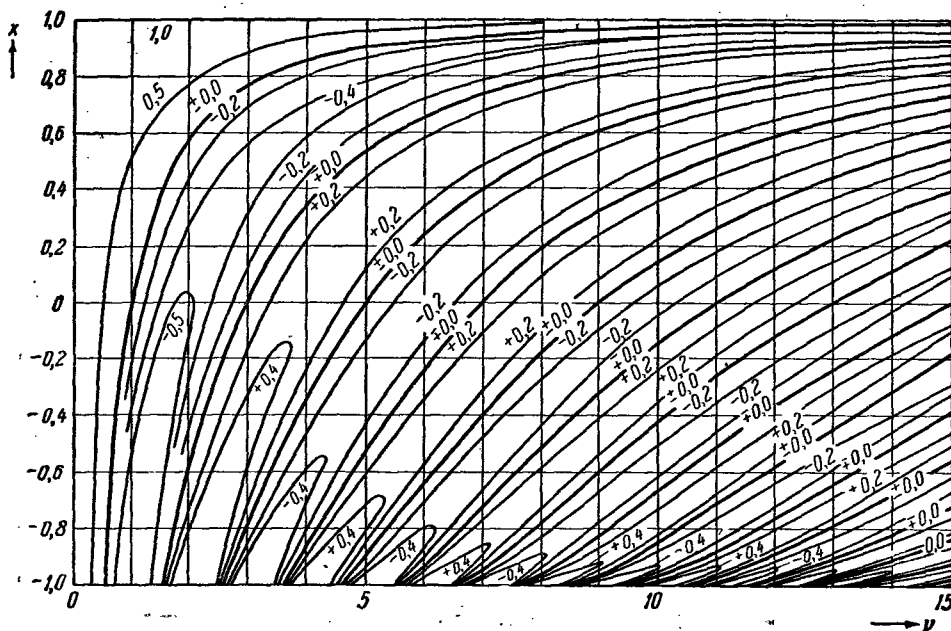


Рис. 88. Кривые  $P_\nu(x) = \text{const}$  в плоскости  $\nu, x$ .

часто будет предполагаться, что индексы являются действительными целыми неотрицательными числами:  $\nu = n, \mu = m$ .

В частном случае  $m = 0$  получается дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-z^2) \frac{d^2 w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + \nu(\nu+1) w = 0.$$

Это уравнение при  $\nu = n \geq 0$  имеет своим решением полином  $P_n(z)$ , который называется полиномом Лежандра первого рода  $n$ -й степени (функцией Лежандра первого рода или зональной гармонической сферической функцией 1-го рода).

Второе решение, линейно независимое от первого, называется *функцией Лежандра 2-го рода* (или *зональной гармонической сферической функцией 2-го рода*). Она является бесконечнозначной аналитической функцией  $z$ , точками ветвления которой будут  $\pm 1$ . На интервале  $-1 < x < 1$  действительной оси эта функция будет действительной однозначной функцией, которую далее будем обозначать через  $Q_n(x)$ . Далее, в комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от  $-1$  до  $+1$ , она определяет однозначную функцию, которая действительна вдоль полупрямой  $x > 1$ ; эта ветвь функции в дальнейшем обозначается через  $\mathfrak{Q}_n(z)$ .

Для произвольного комплексного индекса  $\nu$  дифференциальное уравнение Лежандра имеет два решения  $P_\nu(z)$ ,  $Q_\nu(z)$ , которые являются аналитическими функциями от  $\nu$  и обращаются в  $P_n(z)$ ,  $Q_n(z)$  при  $\nu = n$ . Очевидно,  $P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z)$ . Функции  $P_\nu(z)$ ,  $Q_\nu(z)$  — бесконечнозначные, точками ветвления для  $P_\nu(z)$  будут  $-1$  и  $\infty$ , для  $Q_\nu(z)$  —  $\pm 1$  и  $\infty$ . Рис. 88 показывает  $P_\nu(x)$  для действительных  $\nu$  и  $x$ .

Решение при  $m \neq 0$  может быть выражено через решение при  $m = 0$ . В общем случае  $\nu = n$ ,  $\mu = m \neq 0$  в качестве решений дифференциального уравнения получаем *присоединенные функции Лежандра 1-го рода*  $P_n^m(z)$  и *2-го рода*  $Q_n^m(z)$ . Здесь  $n$  называется *степенью*, а  $m$  — *порядком* функции. На действительной оси между точками  $-1$  и  $1$  обе функции будут действительными и обозначаются через  $P_n^m(x)$  и  $Q_n^m(x)$ . Подобным образом можно определить в разрезанной от  $-1$  до  $+1$  комплексной плоскости однозначные ветви функций, действительные вдоль прямой  $x > 1$  действительной оси; они обозначаются через  $\mathfrak{P}_n^m(z)$  и  $\mathfrak{Q}_n^m(z)$ .

## 2. Функции Лежандра 1-го и 2-го рода

2.1. Полином (функция) Лежандра  $P_n(z)$   $n$ -й степени может быть определен как

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n.$$

С помощью производящей функции  $[1 - 2zr + r^2]^{-1/2}$  можно получить полиномы Лежандра из разложения (выполняющегося для  $|r| < \min |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ )

$$[1 - 2zr + r^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) r^n$$

или из разложения (выполняющегося для  $|r| > \max |z \pm \sqrt{z^2 - 1}|$ )

$$[1 - 2zr + r^2]^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{1}{r^{n+1}}.$$

Разложение  $P_n(z)$  по степеням  $z$  имеет вид

$$P_n(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} \left[ z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} z^{n-4} - \dots \right].$$

Для действительного аргумента  $x = \cos \vartheta$  имеем тригонометрическое представление

$$P_n(\cos \vartheta) = 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \left[ \cos n\vartheta + \frac{1}{1} \cdot \frac{n}{2n-1} \cos(n-2)\vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\vartheta + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \cos(n-6)\vartheta + \dots \right].$$

Если  $n$  — нечетное целое число, то сумма кончается на члене с  $\cos \vartheta$ ; если  $n$  четное — на члене, не зависящем от  $\cos \vartheta$ , причем этот член умножается до-

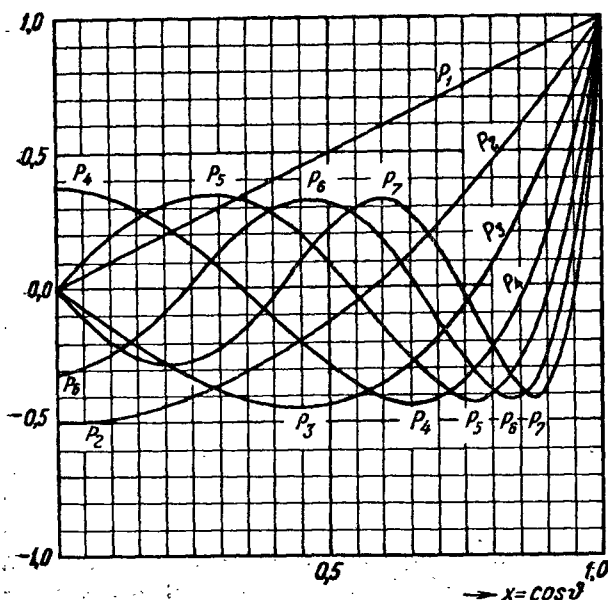


Рис. 89. Функции Лежандра 1-го рода  $P_n(x)$ .

полнительно на  $\frac{1}{2}$ .

Функции Лежандра низших степеней (рис. 89, 90; таблицы 38—40):

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x = \cos \vartheta,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \\ = \frac{1}{4}(3 \cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \\ = \frac{1}{8}(5 \cos 3\vartheta + 3 \cos \vartheta),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \\ = \frac{1}{64}(35 \cos 4\vartheta + 20 \cos 2\vartheta + 9),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15) = \\ = \frac{1}{128}(63 \cos 5\vartheta + 35 \cos 3\vartheta + \\ + 30 \cos \vartheta),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + \\ + 105x^2 - 5) = \\ = \frac{1}{512}(231 \cos 6\vartheta + 126 \cos 4\vartheta + \\ + 105 \cos 2\vartheta + 50).$$

2.2. Функции Лежандра 2-го рода при предположениях, сделанных выше относительно их определения, могут быть при  $-1 < x < 1$  представлены в виде

$$Q_n(x) = \\ = P_n(x) \operatorname{Arth} x - W_{n-1}(x) = \\ = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - W_{n-1}(x),$$

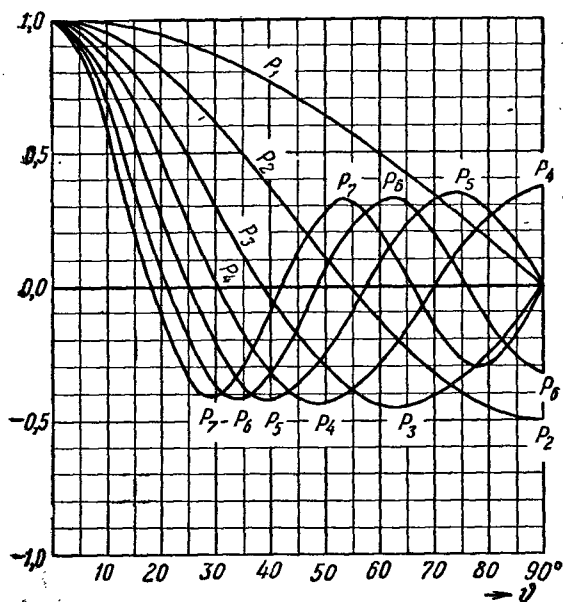


Рис. 90. Функции Лежандра 1-го рода  $P_n(\cos \vartheta)$ .

а для комплексного аргумента  $z$  вне отрезка  $-1 \leq x \leq 1$  действительной оси — в виде

$$\Omega_n(z) = P_n(z) \operatorname{Arctg} z - W_{n-1}(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - W_{n-1}(z),$$



где  $W_{n-1}(z)$  означает полином:

$$W_{n-1}(z) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} P_{m-1}(z) P_{n-m}(z) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left\{ z^{n-1} + z^{n-3} \left( \frac{1}{3} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \right) + \right. \\ \left. + z^{n-5} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} \right) + \dots \right\}.$$

Если  $n$  четное, то  $W_{n-1}(z)$  оканчивается на члене с  $z^1$ , если  $n$  нечетное — на члене с  $z^0$ .

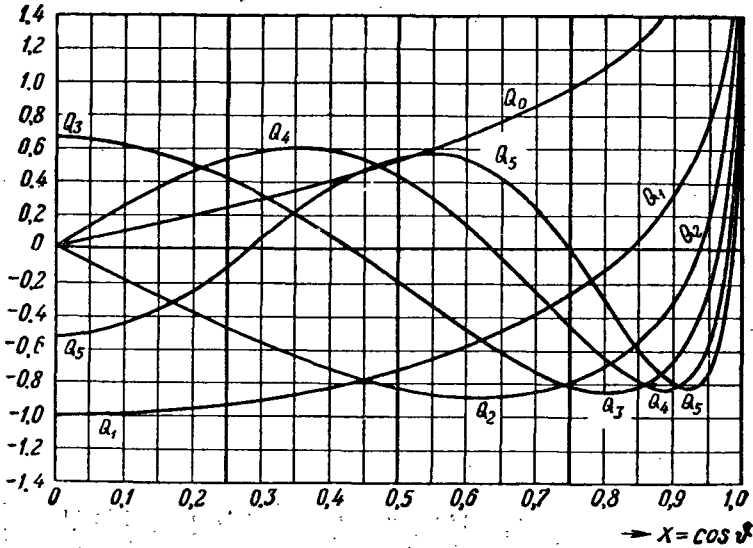


Рис. 91. Функции Лежандра 2-го рода  $Q_n(x)$ .

Если обозначить значения  $\mathfrak{D}_n(z)$  на верхнем и нижнем краях разреза  $-1 < x < 1$  через  $\mathfrak{D}_n(x+0 \cdot i)$  и  $\mathfrak{D}_n(x-0 \cdot i)$ , то

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \{ \mathfrak{D}_n(x+0 \cdot i) + \mathfrak{D}_n(x-0 \cdot i) \}, \\ \mathfrak{D}_n(x \pm 0 \cdot i) = Q_n(x) \mp \frac{1}{2} \pi i P_n(x).$$

Для  $|z| > 1$  справедливо разложение

$$\mathfrak{D}_n(z) = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left\{ \frac{1}{z^{n+1}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2 \cdot (2n+3)} \cdot \frac{1}{z^{n+3}} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{1}{z^{n+5}} + \dots \right\}.$$

Для действительного аргумента  $x = \cos \theta$ ,  $0 < \theta < \pi$ , можно получить тригонометрическое представление

$$Q_n(\cos \theta) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{3 \cdot 5 \dots (2n+1)} \left\{ \cos(n+1)\theta + \frac{1 \cdot (n+1)}{1 \cdot (2n+3)} \cos(n+3)\theta + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot (n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot (2n+3)(2n+5)} \cos(n+5)\theta + \dots \right\}.$$

Функции Лежандра 2-го рода низших индексов (рис. 91, таблица 41):

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \text{Arth } x, & Q_3(x) &= P_3(x) Q_0(x) - \frac{5}{2} x^2 + \frac{2}{3}, \\ Q_1(x) &= x Q_0(x) - 1, & Q_4(x) &= P_4(x) Q_0(x) - \frac{35}{8} x^3 + \frac{55}{24} x, \\ Q_2(x) &= P_2(x) Q_0(x) - \frac{3}{2} x, & Q_5(x) &= P_5(x) Q_0(x) - \frac{63}{8} x^4 + \frac{49}{8} x^2 - \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Соответствующие выражения для  $Q_n(z)$  получаются при замене  $\text{Arth } x$  на  $\text{Arcth } z$ .

### 3. Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода

3.1. Присоединенные функции Лежандра 1-го рода на основании предположений, сделанных выше, определяются при  $-1 < x < 1$  или при  $x = \cos \vartheta$ ,  $0 < \vartheta < \pi$ , как

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n = \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m}.$$

Более подробно

$$P_n^m(x) = \frac{(2n)!}{2^n n! (n-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2 \cdot (2n-1)} x^{n-m-2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-m-4} - \dots \right\}$$

или

$$P_n^m(x) = \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left\{ 1 - \frac{(n-m)(n+m+1)}{1 \cdot (m+1)} \frac{1-x}{2} + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n+m+1)(n+m+2)}{1 \cdot 2 \cdot (m+1)(m+2)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - \dots \right\}.$$

В частности,  $P_n^n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{n}{2}} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) (1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ .

Присоединенные функции Лежандра 1-го рода низших индексов:

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \sin \vartheta, \quad P_2^1(x) = 3(1-x^2)^{\frac{1}{2}} x = \frac{3}{2} \sin 2\vartheta,$$

$$P_2^2(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\vartheta),$$

$$P_3^1(x) = \frac{3}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (5x^2-1) = \frac{3}{8} (\sin \vartheta + 5 \sin 3\vartheta),$$

$$P_3^2(x) = 15(1-x^2)x = \frac{15}{4} (\cos \vartheta - \cos 3\vartheta),$$

$$P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} (3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta),$$

$$P_4^1(x) = \frac{5}{2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (7x^3-3x) = \frac{5}{16} (2 \sin 2\vartheta + 7 \sin 4\vartheta),$$

$$P_4^2(x) = \frac{15}{2} (1-x^2) (7x^2-1) = \frac{15}{16} (3 + 4 \cos 2\vartheta - 7 \cos 4\vartheta),$$

$$P_4^3(x) = 105 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} x = \frac{105}{8} (2 \sin 2\vartheta - \sin 4\vartheta),$$

$$P_4^4(x) = 105 (1-x^2)^2 = \frac{105}{8} (3 - 4 \cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta).$$

В комплексной плоскости, разрезанной между точками  $-1$  и  $+1$ , присоединенные функции Лежандра 1-го рода определяются как

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}.$$

Представления для  $\mathfrak{P}_n^m(z)$ , соответствующие приведенным выше формулам для  $P_n^m(x)$ , получаются, если заменить в этих формулах повсюду  $(1-x^2)^{m/2}$  через  $(z^2-1)^{m/2}$  и  $x$  через  $z$ . Значения  $\mathfrak{P}_n^m(z)$  на верхнем и нижнем краях разреза связаны соотношением:

$$\mathfrak{P}_n^m(x \pm 0 \cdot i) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} m} P_n^m(x).$$

3.2. Присоединенные функции Лежандра 2-го рода определяются при  $-1 < x < 1$  или при  $x = \cos \vartheta$ ,  $0 < \vartheta < \pi$ , как

$$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{dx^m} = \sin^m \vartheta \frac{d^m Q_n(\cos \vartheta)}{(d \cos \vartheta)^m},$$

а в комплексной плоскости, разрезанной между точками  $-1$  и  $+1$ :

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m \mathfrak{Q}_n(z)}{dz^m}.$$

Для  $|z| > 1$  справедливо разложение

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = (-1)^{m/2} \frac{n!(n+m)!}{(2n+1)!} (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \left\{ \frac{1}{z^{n+m+1}} + \frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)} \frac{1}{z^{n+m+3}} + \dots \right\}.$$

Далее, для значений  $\mathfrak{Q}_n^m(z)$  на краях разреза выполнены равенства

$$Q_n^m(x) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i \frac{\pi}{2} m} \mathfrak{Q}_n^m(x+0 \cdot i) + e^{i \frac{\pi}{2} m} \mathfrak{Q}_n^m(x-0 \cdot i) \right\},$$

$$\mathfrak{Q}_n^m(x \pm 0 \cdot i) = e^{\pm i \frac{\pi}{2} m} \left\{ Q_n^m(x) \mp i \frac{\pi}{2} P_n^m(x) \right\}.$$

Часто в литературе функции  $(-1)^m P_n^m(x)$ ,  $(-1)^m Q_n^m(x)$  обозначают через  $P_n^m(x)$ ,  $Q_n^m(x)$  и называют *присоединенными функциями Лежандра*.

#### 4. Интегральные представления

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(z \pm \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z \pm \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi, \quad (\text{Лаплас})$$

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\vartheta \frac{\cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \vartheta}} d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\vartheta^\pi \frac{\sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi}{\sqrt{\cos \vartheta - \cos \varphi}} d\varphi, \quad (0 < \vartheta < \pi),$$

(Мелер)

$$\mathfrak{P}_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{\pi n!} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n \cos m\varphi d\varphi \quad [\arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1],$$

$$\mathfrak{Q}_n^m(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(t)}{z-t} dt, \quad (\text{Нейман})$$

$$\Omega_n(z) = \int_0^{\psi_0} \frac{d\psi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^{n+1}} = \int_0^{\psi_0} (z - \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^n d\psi \quad (\text{Гейне})$$

$$(\psi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \quad \operatorname{cth} \psi_0 = z; \quad \arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1).$$

$$\Omega_n^m(z) = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} \int_0^{\psi_0} \frac{\operatorname{ch} m\psi}{(z + \sqrt{z^2 - 1} \operatorname{ch} \psi)^{n+1}} d\psi \quad [\arg(z^2 - 1) = 0 \text{ для } |z| > 1].$$

## 5. Частные значения. Асимптотика

5.1. Имеют место следующие равенства:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n},$$

$$Q_{2n}(0) = 0, \quad Q_{2n+1}(0) = (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 4 \dots 2n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} |Q_n(x)| = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \pm 1} |\Omega_n(z)| = \infty.$$

5.2. Все нули полинома  $P_n(x)$  действительны, различны и лежат в интервале  $-1 < x < 1$ . Нули полиномов  $P_n(x)$  и  $P_{n+1}(x)$  разделяют друг друга. Присоединенная функция  $P_n^m(z)$  имеет точно  $n-m$  простых действительных нулей в интервале  $-1 < x < 1$ . Функция  $Q_n(x)$  имеет точно  $n+1$  нулей в интервале  $-1 < x < 1$ .

5.3. Для  $|z| \gg 1$  получаем в первом приближении

$$\frac{(n-m)!}{\Gamma(n+1/2)} \mathfrak{P}_n^m(z) \approx \frac{(2z)^n}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\Gamma(n+3/2)}{(n+m)!} \Sigma_n^m(z) \approx (-1)^m \frac{\sqrt{\pi}}{(2z)^{n+1}}.$$

5.4. При  $\varepsilon \leq \vartheta \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) имеем для  $n \gg 1$ ,  $n \gg \frac{1}{\varepsilon}$  асимптотическое представление

$$P_n(\cos \vartheta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \vartheta}} \left[ \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \sin \varphi - \frac{1}{8n} \operatorname{ctg} \vartheta \cos \varphi \right],$$

$$Q_n(\cos \vartheta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin \vartheta}} \left[ \left(1 - \frac{1}{4n}\right) \cos \varphi + \frac{1}{8n} \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \right],$$

где  $\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta + \frac{\pi}{4}$ , и для  $n \gg 1$ ,  $n \gg m$ ,  $n \gg \frac{1}{\varepsilon}$

$$P_n^m(\cos \vartheta) \approx (-n)^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \vartheta}} \sin \left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$Q_n^m(\cos \vartheta) \approx (-n)^m \sqrt{\frac{\pi}{2n \sin \vartheta}} \cos \left(\varphi + \frac{m\pi}{2}\right),$$

где  $\varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \vartheta + \frac{\pi}{4}$ .

## 6. Функциональные уравнения. Нормированные функции Лежандра

6.1. Имеем правила изменения знака аргумента:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad Q_n(-x) = (-1)^{n+1} Q_n(x),$$

$$P_n^m(-x) = (-1)^{n-m} P_n^m(x), \quad Q_n^m(-x) = (-1)^{n+m+1} Q_n^m(x).$$

Эти уравнения остаются верными, если заменить  $P$  через  $\mathfrak{P}$  и  $Q$  через  $\Omega$ .

6.2. Теорема сложения. Пусть  $\alpha$  означает расстояние между двумя точками на единичной сфере с координатами  $(\vartheta, \varphi)$  и  $(\vartheta', \varphi')$ :

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos (\varphi - \varphi');$$

тогда

$$P_n(\cos \alpha) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n-m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta') \cos m(\varphi - \varphi')$$

или

$$\frac{2n+1}{2} P_n(\cos \alpha) = \sum_{m=-n}^{+n} \overline{P_n^m}(\cos \vartheta) \overline{P_n^m}(\cos \vartheta') e^{im(\varphi - \varphi')},$$

где  $\overline{P_n^m}$  — нормированные функции (см. 6.6).

6.3. Соотношения между  $P$  и  $Q$  ( $\mathfrak{P}$  и  $\mathfrak{Q}$ ):

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \frac{1}{n}, \quad P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = \frac{(2n-1)x}{n(n-1)},$$

$$\frac{Q_n}{P_n} = Q_0 - \left\{ \frac{1}{nP_n P_{n-1}} + \frac{1}{(n-1)P_{n-1} P_{n-2}} + \dots + \frac{1}{P_1 P_0} \right\},$$

$$(1-x^2) [P_n Q_n' - Q_n P_n'] = 1,$$

$$P_{n-1}^m Q_n^m - Q_{n-1}^m P_n^m = P_{n-2}^m Q_{n-1}^m - Q_{n-2}^m P_{n-1}^m.$$

Здесь у всех функций аргумент  $x$ .

Все равенства останутся верными, если заменим  $x$  через  $z$  и  $P$  через  $\mathfrak{P}$ ,  $Q$  через  $\mathfrak{Q}$ .

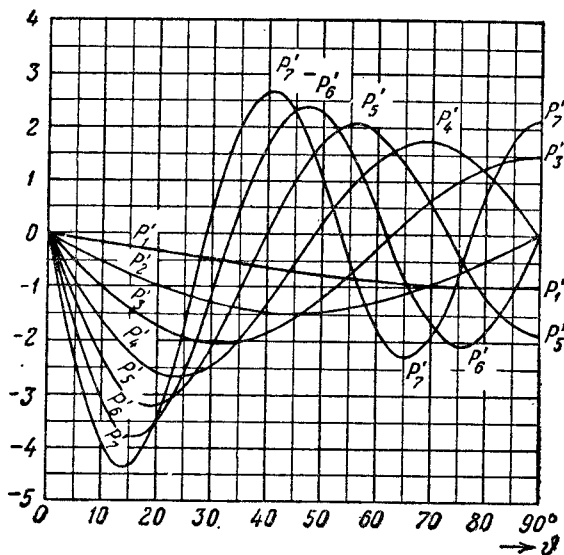


Рис. 92. Производные по  $\vartheta$  от функций Лежандра 1-го рода  $P_n(\cos \vartheta)$ .

6.4. Пусть, далее,  $K$  означает любую функцию Лежандра, а именно,  $K_n(x)$  означает  $P_n(x)$  или  $Q_n(x)$ ,  $K_n(z)$  означает  $\mathfrak{P}_n(z)$  или  $\mathfrak{Q}_n(z)$  и  $K_n^m$  означает  $K_n^m(x)$  или  $K_n^m(z)$ . Аналогичные значения имеют  $K_n^m(x)$ ,  $K_n^m(z)$  и  $K_n^m$ . В следующих формулах вместо  $\xi$  можно положить  $x$  или  $z$ .

Справедливы рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} nK_n + (n-1)K_{n-2} - (2n-1)\xi K_{n-1} &= 0, \\ K_n^{m+2}(z) + 2(m+1)\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}K_n^{m+1}(z) - (n-m)(n+m+1)K_n^m(z) &= 0, \\ K_n^{m+2}(x) - 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}K_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)K_n^m(x) &= 0, \\ (2n+1)\xi K_n^m - (n-m+1)K_{n+1}^m - (n+m)K_{n-1}^m &= 0. \end{aligned}$$

6.5. Дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)K_n' &= n(\xi K_n - K_{n-1}) = -(n+1)(\xi K_n - K_{n+1}), \\ nK_n &= \xi K_n' - K_{n-1}'(n+1)K_n = -\xi K_n' + K_{n+1}', \\ (2n+1)K_n &= K_{n+1}' - K_{n-1}', \\ (\xi^2 - 1)(K_n^m)' &= (n-m+1)K_{n+1}^m + (n+1)\xi K_n^m = 0. \end{aligned}$$

Положив  $x = \cos \vartheta$ , получим производные по  $\vartheta$  от полиномов Лежандра  $P_n(\cos \vartheta)$  (рис. 92, таблица 40):

$$\frac{dP_{n+1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = \frac{dP_{n-1}(\cos \vartheta)}{d\vartheta} - (2n+1)P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta$$

и, в частности, для низших индексов:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= 0, \quad \frac{dP_1(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\sin \vartheta, \quad \frac{dP_2(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -\frac{3}{2}\sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_3(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -6\sin \vartheta + \frac{15}{2}\sin^3 \vartheta, \quad \frac{dP_4(\cos \vartheta)}{d\vartheta} = -5\sin 2\vartheta + \frac{35}{4}\sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_5(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -15\sin \vartheta + \frac{105}{2}\sin^3 \vartheta - \frac{315}{8}\sin^5 \vartheta, \\ \frac{dP_6(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -\frac{21}{2}\sin 2\vartheta + \frac{189}{4}\sin^2 \vartheta \sin 2\vartheta - \frac{693}{16}\sin^4 \vartheta \sin 2\vartheta, \\ \frac{dP_7(\cos \vartheta)}{d\vartheta} &= -28\sin \vartheta + 189\sin^3 \vartheta - \frac{693}{2}\sin^5 \vartheta + \frac{3003}{16}\sin^7 \vartheta. \end{aligned}$$

6.6. Соотношения ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_l(x)dx &= 0, \text{ если } l \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}, \\ \int_{-1}^{+1} P_n^m(x)P_l^m(x)dx &= 0, \text{ если } l \neq n, \quad \int_{-1}^{+1} [P_n^m(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \end{aligned}$$

Отсюда получим нормированные функции Лежандра (рис. 93—96):

$$\bar{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x), \quad \bar{P}_n^m(x) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}} P_n^m(x).$$

Далее,

$$\int_{-1}^{+1} \bar{P}_n^m(x)\bar{P}_n^l(x)\frac{dx}{1-x^2} = 0 \text{ для } l \neq m, \quad \int_{-1}^{+1} [\bar{P}_n^m(x)]^2 dx = n(n+1),$$

$$(2n+1) \int_1^{\infty} [Q_n(z)]^2 dz = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots,$$

$$(2n+1) \int_0^1 [Q_n(x)]^2 dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} - \dots$$

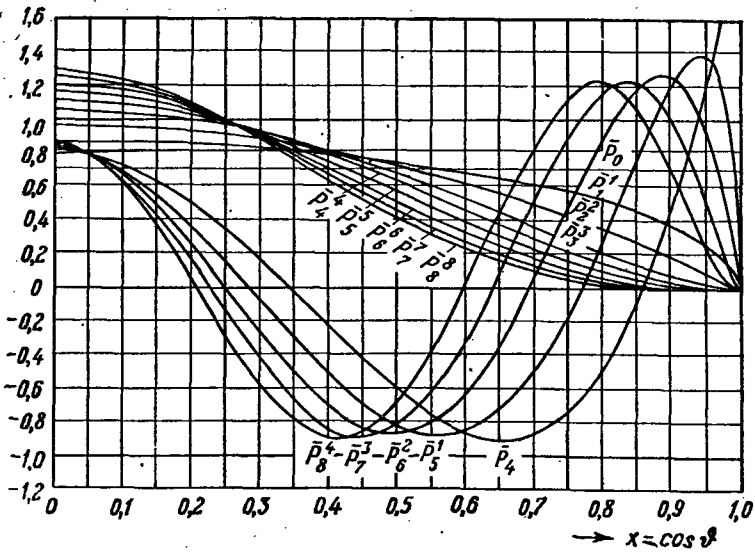


Рис. 93. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$P_n^n(x) \text{ и } P_{n+4}^n(x).$$

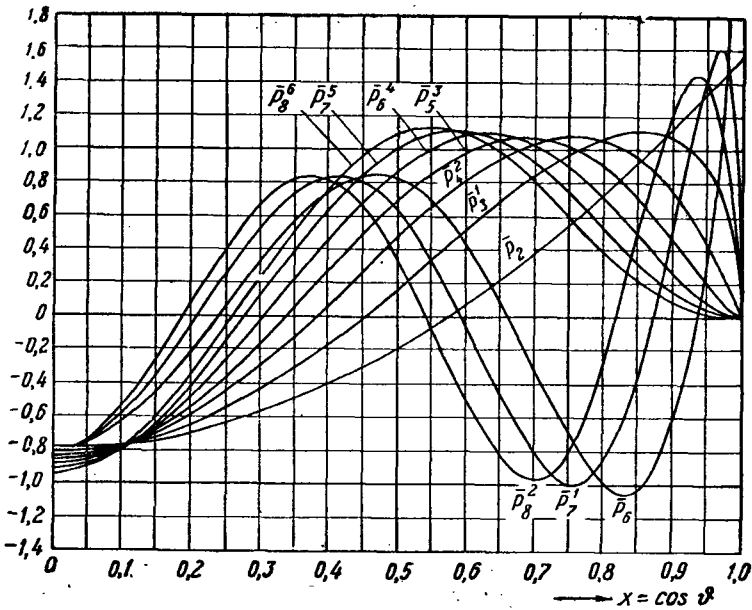


Рис. 94. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$P_{n+2}^n(x) \text{ и } P_{n+6}^n(x).$$

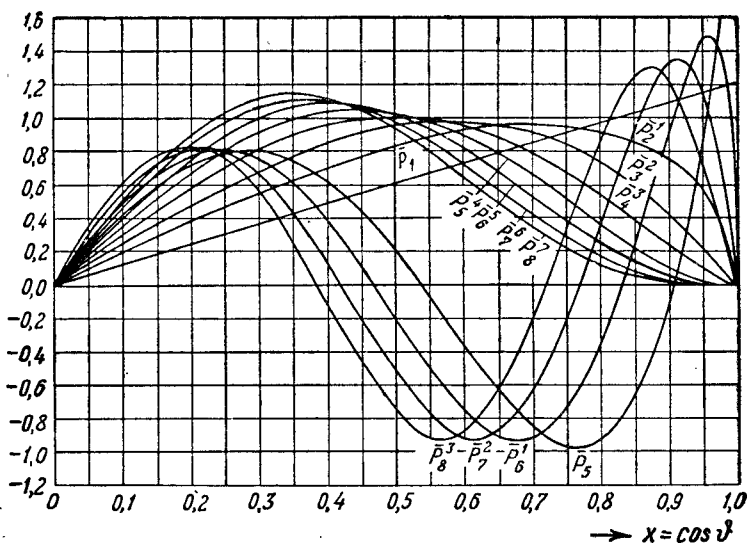


Рис. 95. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$\bar{P}_{n+1}^n(x) \text{ и } \bar{P}_{n+5}^n(x).$$

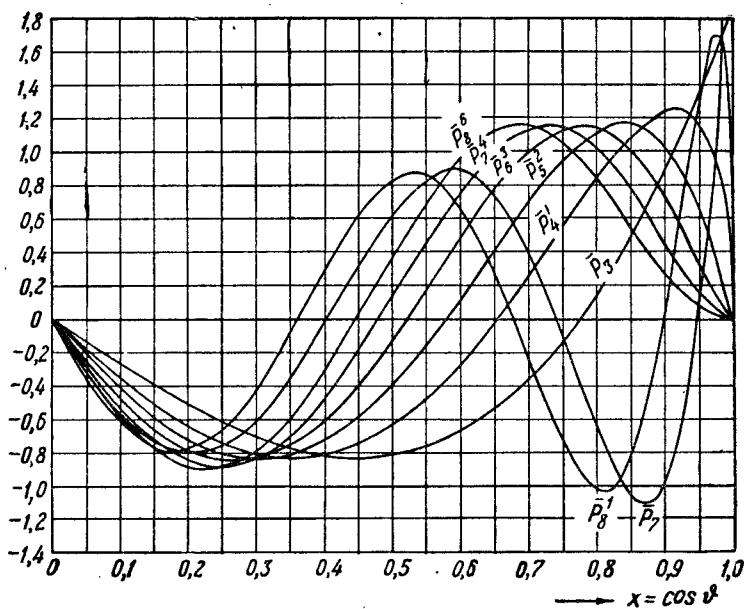


Рис. 96. Нормированные присоединенные функции Лежандра

$$\bar{P}_{n+3}^n(x) \text{ и } \bar{P}_{n+7}^n(x).$$



Таблица 38. Полиномы Лежандра  $P_n(x)$ 

$x = P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$	$P_7(x)$
	- 0,	- 0,	+ 0,	+ 0,	- 0,	- 0,
0,00	5000 + 2	0000 - 150	3750 - 4	0000 + 187	3125 + 7	0000 - 219
01	4998 + 4	0150 150	3746 11	0187 187	3118 19	0219 217
02	4994 + 8	0300 149	3735 19	0374 186	3099 33	0436 215
03	4986 + 10	0449 149	3716 26	0560 184	3066 45	0651 211
04	4976 + 14	0598 149	3690 33	0744 183	3021 59	0862 207
0,05	4962 + 16	0747 - 148	3657 - 41	0927 + 179	2962 + 71	1069 - 201
06	4946 + 20	0895 146	3616 49	1106 177	2891 83	1270 194
07	4926 + 22	1041 146	3567 55	1283 172	2808 95	1464 187
08	4904 + 26	1187 145	3512 63	1455 169	2713 107	1651 177
09	4878 + 28	1332 143	3449 70	1624 164	2606 118	1828 167
0,10	4850 + 32	1475 - 142	3379 - 76	1788 + 159	2488 + 128	1995 - 156
11	4818 + 34	1617 140	3303 84	1947 154	2360 140	2151 144
12	4784 + 38	1757 138	3219 90	2101 147	2220 149	2295 132
13	4746 + 40	1895 136	3129 97	2248 141	2071 158	2427 118
14	4706 + 46	2031 135	3032 104	2389 134	1913 167	2545 104
0,15	4662 + 46	2166 - 132	2928 - 109	2523 + 127	1746 + 174	2649 - 89
16	4616 + 50	2298 129	2819 116	2650 119	1572 183	2738 74
17	4566 + 52	2427 127	2703 122	2769 111	1389 188	2812 58
18	4514 + 56	2554 125	2581 128	2880 102	1201 195	2870 41
19	4458 + 58	2679 121	2453 133	2982 93	1006 200	2911 24
0,20	4400 + 62	2800 - 110	2320 - 139	3075 + 84	0806 + 205	2935 - 8
21	4338 + 64	2918 116	2181 144	3159 75	0601 207	2943 + 10
22	4274 + 68	3034 112	2037 148	3234 65	0394 211	2933 27
23	4206 + 70	3146 108	1889 154	3299 54	0183 212	2906 45
24	4136 + 74	3254 105	1735 158	3353 44	*0029 214	2861 62
0,25	4062 + 76	3359 - 102	1577 - 162	3397 + 34	0243 + 213	2799 + 79
26	3986 + 80	3461 97	1415 166	3431 22	0456 213	2720 95
27	3906 + 82	3558 93	1249 170	3453 + 12	0669 210	2625 113
28	3824 + 86	3651 89	1079 173	3465 0	0879 208	2512 128
29	3738 + 88	3740 85	0906 177	3465 - 11	1087 205	2384 143
0,30	3650 + 92	3825 - 80	0729 - 179	3454 - 23	1292 + 200	2241 + 159
31	3558 + 94	3905 76	0550 181	3431 34	1492 194	2082 172
32	3464 + 98	3981 71	0369 184	3397 46	1686 187	1910 186
33	3366 + 100	4052 65	0185 185	3351 57	1873 180	1724 197
34	3266 + 104	4117 61	*0000 187	3294 69	2053 172	1527 209
0,35	3162 + 106	4178 - 56	0187 - 188	3225 - 81	2225 + 163	1318 + 220
36	3056 + 110	4234 50	0375 189	3144 93	2388 152	1098 228
37	2946 + 112	4284 44	0564 189	3051 103	2540 141	0870 235
38	2834 + 116	4328 39	0753 189	2948 115	2681 129	0635 242
39	2718 + 118	4367 33	0942 188	2833 127	2810 116	0393 247
0,40	2600 + 122	4400 - 27	1130 - 187	2706 - 137	2926 - 14	0146 + 250
41	2478 + 124	4427 21	1317 187	2569 148	3029 14	*0104 252
42	2354 + 128	4448 14	1504 184	2421 158	3118 15	0356 252
43	2226 + 130	4462 8	1688 182	2263 168	3191 16	0608 251
44	2096 + 134	4470 - 2	1870 180	2095 178	3249 16	0859 247
0,45	1962 + 136	4472 + 5	2050 - 176	1917 - 187	3290 - 17	1106 + 242
46	1826 + 140	4467 13	2226 173	1730 196	3314 17	1348 236
47	1686 + 142	4454 19	2399 169	1534 204	3321 18	1584 227
48	1544 + 146	4435 26	2568 164	1330 212	3310 18	1811 216
49	1398 + 148	4409 34	2732 159	1118 220	3280 19	2027 204
0,50	1250 - 0,	4375 - 0,	2891 - 0,	0898 + 0,	3232 - 19	2231 + 0,



Таблица 39. Полиномы Лежандра  $P_n(\cos \vartheta)$

$\vartheta$	$P_1(\cos \vartheta)$	$P_2(\cos \vartheta)$	$P_3(\cos \vartheta)$	$P_4(\cos \vartheta)$	$P_5(\cos \vartheta)$	$P_6(\cos \vartheta)$	$P_7(\cos \vartheta)$
	+ 1,	+ 1,					
0°	0000 — 2	0000 — 5	+ 1,0000 — 9!	+ 1,0000 — 30	+ 1,0000 — 46	+ 1,0000 — 64	+ 1,0000 — 85
1°	*9998 4	*9995 13	0,9991 28!	0,9985 30	0,9977 46	0,9968 64	0,9957 85
2°	9994 8	9982 23	0,9963 45!	0,9939 30	0,9909 45	0,9872 63	0,9830 83
3°	9986 10	9959 32	0,9918 64!	0,9863 30	0,9795 44	0,9714 61	0,9620 81
4°	9976 14	9927 41	0,9854 81!	0,9758 29	0,9638 43	0,9495 59	0,9329 77
5°	9962 — 17	9886 — 50	+ 0,9773 — 99!	+ 0,9623 — 29	+ 0,9437 — 42	+ 0,9216 — 57	+ 0,8962 — 72
6°	9945 20	9836 59	0,9674 117!	0,9459 28	0,9194 40	0,8881 53	0,8522 67
7°	9925 22	9777 68	0,9557 134!	0,9267 27	0,8911 38	0,8492 50	0,8016 60
8°	9903 26	9709 76	0,9423 150!	0,9048 26	0,8589 36	0,8054 46	0,7449 53
9°	9877 29	9633 85	0,9273 167!	0,8803 25	0,8232 34	0,7570 41	0,6830 46
10°	9848 — 32	9548 — 94	+ 0,9106 — 183	+ 0,8532 — 24	+ 0,7840 — 31	+ 0,7045 — 36	+ 0,6164 — 37
11°	9816 35	9454 102	0,8923 199	0,8238 23	0,7417 29	0,6483 31	0,5462 29
12°	9781 37	9352 111	0,8724 213	0,7920 21	0,6966 26	0,5891 26	0,4731 20
13°	9744 41	9241 119	0,8511 228	0,7582 20	0,6489 22	0,5273 20	0,3980 11
14°	9703 44	9122 127	0,8283 241	0,7224 18	0,5990 19	0,4635 14	0,3218 — 1
15°	9659 — 46	8995 — 135	+ 0,8042 — 255	+ 0,6847 — 17	+ 0,5471 — 16	+ 0,3983 — 8	+ 0,2455 + 8
16°	9613 50	8860 142	0,7787 268	0,6454 15	0,4937 12	0,3323 — 2	0,1700 17
17°	9563 52	8718 150	0,7519 279	0,6046 13	0,4391 9	0,2661 + 4	0,0961 23
18°	9511 56	8568 158	0,7240 290	0,5624 11	0,3836 5	0,2002 10	+ 0,0248 35
19°	9455 58	8410 165	0,6950 301	0,5192 9	0,3276 — 1	0,1353 15	— 0,0433 41
20°	9397 — 61	8245 — 171	+ 0,6649 — 311	+ 0,4750 — 8	+ 0,2715 + 2	+ 0,0719 + 21	— 0,1072 + 48
21°	9336 64	8074 179	0,6338 319	0,4300 6	0,2156 6	+ 0,0106 26	0,1664 54
22°	9272 67	7895 185	0,6019 327	0,3845 4	0,1602 9	— 0,0481 31	0,2202 60
23°	9205 70	7710 192	0,5692 335	0,3386 — 2	0,1057 13	0,1038 35	0,2680 64
24°	9135 72	7518 197	0,5357 341	0,2926 0	0,0525 16	0,1558 60	0,3094 68
25°	9063 — 75	7321 — 204	+ 0,5016 — 346	+ 0,2465 + 2	+ 0,0009 + 19	— 0,2040 + 43	— 0,3441 + 70
26°	8988 78	7117 209	0,4670 351	0,2007 4	— 0,0489 22	0,2478 47	0,3717 72
27°	8910 81	6908 214	0,4319 355	0,1553 6	0,0964 25	0,2869 49	0,3922 73
28°	8829 83	6694 220	0,3964 357	0,1105 8	0,1415 27	0,3212 52	0,4053 72
29°	8746 86	6474 224	0,3607 359	0,0665 10	0,1839 30	0,3502 53	0,4113 71
30°	8660 — 88	6250 — 229	+ 0,3248 — 361	+ 0,0234 + 11	— 0,2233 + 32	— 0,3740 + 54	— 0,4102 + 69
31°	8572 92	6021 233	0,2887 360	— 0,0185 13	0,2595 34	0,3924 55	0,4022 65
32°	8480 93	5788 237	0,2527 360	0,0591 15	0,2923 35	0,4053 55	0,3877 61
33°	8387 97	5551 241	0,2167 358	0,0982 16	0,3216 37	0,4127 54	0,3671 56
34°	8290 98	5310 245	0,1809 355	0,1357 18	0,3473 38	0,4147 53	0,3409 51
35°	8192 — 102	5065 — 247	+ 0,1454 — 352	— 0,1714 + 19	— 0,3691 + 39	— 0,4114 + 51	— 0,3096 + 44
36°	8090 104	4818 251	0,1102 347	0,2052 20	0,3871 39	0,4031 49	0,2738 38
37°	7986 106	4567 253	0,0755 342	0,2370 22	0,4011 39	0,3898 46	0,2343 30
38°	7880 109	4314 255	0,0413 336	0,2666 23	0,4112 39	0,3719 43	0,1918 23
39°	7771 111	4059 257	+ 0,0077 329	0,2940 24	0,4174 39	0,3497 40	0,1470 15
40°	7660 — 113	3802 — 258	— 0,0252 — 322	— 0,3190 + 24	— 0,4197 + 38	— 0,3236 + 36	— 0,1006 + 7
41°	7547 116	3544 260	0,0574 313	0,3416 25	0,4181 38	0,2939 31	0,0535 0
42°	7431 117	3284 261	0,0887 304	0,3616 26	0,4128 36	0,2610 27	— 0,0064 — 8
43°	7314 121	3023 261	0,1191 294	0,3791 26	0,4038 35	0,2255 22	+ 0,0398 15
44°	7193 122	2762 262	0,1485 283	0,3940 26	0,3914 33	0,1878 17	0,0846 22
45°	7071 + 0,	2500 + 0,	— 0,1768	— 0,4062 + 27	— 0,3757 + 31	— 0,1484 + 12	+ 0,1271 — 29

Продолжение табл. 39

$\theta$	$P_1(\cos \theta)$	$P_2(\cos \theta)$	$P_3(\cos \theta)$	$P_4(\cos \theta)$	$P_5(\cos \theta)$	$P_6(\cos \theta)$	$P_7(\cos \theta)$
	+ 0,	+ 0,	- 0,	- 0,	- 0,		+ 0,
45°	7071 - 124	2500 - 262	1768 - 272	4062 + 27	3757 + 31	- 0,1484 + 12	1271 - 29
46°	6947 127	2238 261	2040 260	4158 27	3568 29	0,1078 7	1667 35
47°	6820 129	1977 261	2300 267	4227 27	3350 27	0,0665 + 2	2028 40
48°	6691 130	1716 260	2547 234	4270 26	3105 24	- 0,0251 - 3	2350 45
49°	6561 133	1456 258	2781 221	4286 26	2836 22	+ 0,0161 8	2626 49
50°	6428 - 135	1198 - 257	3002 - 207	4275 + 26	2545 + 19	+ 0,0564 - 13	2854 - 52
51°	6293 136	0941 255	3209 192	4239 25	2235 16	0,0954 18	3031 54
52°	6157 139	0686 253	3401 177	4178 24	1910 13	0,1326 22	3154 55
53°	6018 140	0433 251	3578 162	4093 24	1574 10	0,1677 26	3221 56
54°	5878 142	0182 247	3740 146	3984 23	1223 7	0,2002 30	3234 55
55°	5736 - 144	*0065 - 245	3886 - 130!	3852 + 22	0885 + 4	+ 0,2297 - 33	3191 - 54
56°	5592 146	0310 241	4016 115!	3698 21	0509 0	0,2560 36	3095 51
57°	5446 147	0551 237	4131 98!	3524 19	0150 - 3	0,2787 38	2947 48
58°	5299 149	0788 233	4229 81!	3331 18	*0206 6	0,2976 40	2752 45
59°	5150 150	1021 229	4310 65!	3119 17	0557 9	0,3125 41	2512 40
60°	5000 - 152	1250 - 224	4375 - 481	2891 + 15	0898 - 12	+ 0,3232 - 42	2231 - 35
61°	4848 153	1474 220	4423 32!	2647 14	1229 14	0,3298 43	1916 30
62°	4695 155	1694 214	4455 - 16!	2390 12	1545 17	0,3321 43	1572 24
63°	4540 156	1908 209	4471 + 1!	2121 10	1844 19	0,3302 42	1203 17
64°	4384 158	2117 204	4470 18!	1841 9	2123 22	0,3240 41	0818 11
65°	4226 - 159	2321 - 197	4452 + 33	1552 + 7	2381 - 24	+ 0,3138 - 39	0422 - 4
66°	4067 160	2518 192	4419 49	1256 5	2615 26	0,2997 37	0022 + 3
67°	3907 161	2710 185	4370 65	0955 4	2824 27	0,2819 35	*0375 9
68°	3746 162	2895 179	4305 80	0651 + 2	3005 29	0,2606 32	0763 16
69°	3584 164	3074 171	4225 95	0344 0	3158 30	0,2362 29	1135 22
70°	3420 - 164	3245 - 165	4130 + 109	0038 - 2	3281 - 31	+ 0,2089 - 25	1485 + 28
71°	3256 164	3410 158	4021 123	*0267 3	3373 31	0,1791 21	1808 33
72°	3090 166	3568 150	3898 137	0568 5	3434 32	0,1472 17	2099 37
73°	2924 168	3718 142	3761 150	0864 7	3463 32	0,1136 13	2352 41
74°	2756 168	3860 135	3611 162	1153 8	3461 32	0,0788 8	2563 45
75°	2588 - 169	3995 - 127	3449 + 174	1434 - 10	3422 - 31	+ 0,0431 - 4	2730 + 47
76°	2419 169	4122 119	3275 185	1705 12	3362 30	+ 0,0070 + 1	2850 49
77°	2250 171	4241 111	3090 196	1964 13	3267 29	- 0,0290 5	2921 50
78°	2079 171	4352 102	2894 206	2211 14	3143 28	- 0,0644 10	2942 50
79°	1908 172	4454 94	2688 214	2443 16	2990 27	0,0990 14	2913 50
80°	1736 - 172	4548 - 85	2474 + 223	2659 - 17	2810 - 25	- 0,1321 + 18	2835 + 48
81°	1564 172	4633 76	2251 231	2859 18	2606 23	0,1635 22	2708 46
82°	1392 173	4709 68	2020 237	3040 19	2378 21	0,1927 25	2536 43
83°	1219 174	4777 59	1783 244	3203 20	2129 19	0,2193 29	2321 39
84°	1045 173	4836 50	1539 248	3345 21	1861 17	0,2431 32	2067 35
85°	0872 - 174	4886 - 41	1291 + 253	3468 - 21	1577 - 14	- 0,2638 + 34	1778 + 30
86°	0698 175	4927 32	1038 257	3569 22	1278 11	0,2810 36	1460 25
87°	0523 174	4959 23	0781 259	3648 22	0969 9	0,2947 38	1117 19
88°	0349 174	4982 13	0522 260	3704 23	0651 6	0,3045 39	0755 13
89°	0175 175	4995 5	0262 262	3739 23	0327 3	0,3105 40	0381 6
90°	0000 + 0,	5000 - 0,	0000 - 0,	3750 - 23 + 0,	0000 0 + 0,	- 0,3125 + 40	0000 0 - 0,

Таблица 40. Производные полиномов Лежандра  $\frac{d}{d\theta} P_n(\cos \theta)$

$\theta$	$dP_1(\cos \theta)/d\theta$	$dP_2(\cos \theta)/d\theta$	$dP_3(\cos \theta)/d\theta$	$dP_4(\cos \theta)/d\theta$	$dP_5(\cos \theta)/d\theta$	$dP_6(\cos \theta)/d\theta$	$dP_7(\cos \theta)/d\theta$
0°	-0, 0000	-0, 0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1°	0175 -175	0523 -523	-0,1047 + 3	-0,1744 + 8	-0,2615 + 18	-0,3659 + 35	-0,4877 + 62
2°	0349 174	1046 522	0,2091 5	0,3480 15	0,5213 35	0,7284 69	0,9692 123
3°	0523 175	1568 520	0,3129 8	0,5201 23	0,7775 52	1,0841 102	1,4384 182
4°	0698 174	2088 517	0,4160 11	0,6899 30	1,0286 69	1,4295 135	1,8896 238
5°	0872 -173	2605 -514	-0,5180 + 13	-0,8567 + 38	-1,2728 + 85	-1,7614 + 166	-2,3170 + 292
6°	1045 174	3119 510	0,6186 16	1,0197 45	1,5085 101	2,0768 195	2,7152 361
7°	1219 173	3629 506	0,7176 19	1,1782 52	1,7341 116	2,3727 223	3,0795 386
8°	1392 172	4135 500	0,8148 21	1,3315 59	1,9481 130	2,4464 248	3,4053 425
9°	1564 172	4635 495	0,9099 24	1,4789 65	2,1492 143	2,8954 270	3,6887 458
10°	1736 -172	5130 -489	-1,0026 + 26	-1,6199 + 71	-2,3360 + 155	-3,1174 + 290	-3,9263 + 485
11°	1908 171	5619 482	1,0928 28	1,7537 77	2,5074 166	3,3104 307	4,1156 506
12°	2079 171	6101 475	1,1801 30	1,8798 82	2,6621 176	3,4729 320	4,2544 519
13°	2250 169	6576 466	1,2643 33	1,9978 87	2,7993 184	3,6034 331	4,3413 526
14°	2419 169	7042 458	1,3453 35	2,1069 92	2,9181 191	3,7008 338	4,3758 525
15°	2588 -168	7500 -449	-1,4229 + 37	-2,2069 + 96	-3,0178 + 197	-3,7646 + 341	-4,3580 + 517
16°	2756 168	7949 439	1,4968 39	2,2973 100	3,0978 202	3,7943 341	4,2885 502
17°	2924 166	8388 429	1,5668 40	2,3777 103	3,1576 205	3,7899 338	4,1688 481
18°	3090 166	8817 418	1,6328 42	2,4478 106	3,1970 206	3,7518 331	4,0012 453
19°	3256 164	9235 407	1,6946 43	2,5073 108	3,2158 206	3,6806 321	3,7884 419
20°	3420 -164	9642 -395	-1,7521 + 45	-2,5560 + 110	-3,2141 + 204	-3,5774 + 308	-3,5338 + 388
21°	3584 162	10037 383	1,8050 46	2,5937 111	3,1920 201	3,4435 292	3,2413 336
22°	3746 161	0420 370	1,8534 47	2,6203 112	3,1497 197	3,2804 272	2,9153 287
23°	3907 160	0790 357	1,8970 48	2,6358 112	3,0878 191	3,0902 250	2,5607 235
24°	4067 159	1147 344	1,9358 49	2,6400 112	3,0067 184	2,8749 226	2,1827 180
25°	4226 -158	1491 -329	-1,9696 + 50	-2,6330 + 111	-2,9073 + 176	-2,6371 + 200	-1,7866 + 234
26°	4384 156	1820 315	1,9984 51	2,6150 110	2,7903 166	2,3794 171	1,3782 166
27°	4540 155	2135 301	2,0222 51	2,5861 108	2,6568 155	2,1045 142	0,9633 + 7
28°	4695 153	2436 285	2,0408 52	2,5464 105	2,5077 143	1,8156 110	0,5476 - 58
29°	4848 152	2721 269	2,0542 52	2,4961 102	2,3444 130	1,5155 78	-0,1369 107
30°	5000 -150	2990 + 16	-2,0625 + 52	-2,4357 + 99	-2,1680 + 117	-1,2077 + 46	+ 0,2632 - 161
31°	5150 149	3244 16	2,0656 52	2,3654 95	1,9799 102	0,8953 + 13	0,6472 212
32°	5299 147	3482 16	2,0634 52	2,2855 91	1,7817 87	0,5815 - 19	1,0102 260
33°	5446 146	3703 17	2,0562 51	2,1966 86	1,5748 71	-0,2697 52	1,3472 303
34°	5592 144	3908 17	2,0437 51	2,0991 81	1,3608 55	+ 0,0370 83	1,6540 362
35°	5736 -142	4095 + 17	-2,0262 + 50	-1,9934 + 76	-1,1413 + 38	+ 0,3354 - 113	+ 1,9267 - 375
36°	5878 140	4266 17	2,0037 50	1,8802 70	0,9179 22	0,6225 142	2,1620 402
37°	6018 139	4419 18	1,9761 49	1,7600 64	0,6924 + 5	0,8955 169	2,3573 423
38°	6157 136	4554 18	1,9438 48	1,6334 57	0,4664 - 12	1,1516 193	2,5103 438
39°	6293 135	4672 18	1,9066 47	1,5011 51	0,2415 28	1,3885 216	2,6196 446
40°	6428 -133	4772 + 18	-1,8648 + 45	-1,3637 + 44	-0,0194 - 44	+ 1,6038 - 236	+ 2,6845 - 448
41°	6561 130	4854 18	1,8185 44	1,2219 37	+ 0,1983 60	1,7955 253	2,7047 442
42°	6691 129	4918 18	1,7678 42	1,0764 30	0,4100 75	1,9620 268	2,6807 431
43°	6820 127	4963 18	1,7129 41	0,9279 22	0,6142 90	2,1017 279	2,6138 413
44°	6947 124	4991 18	1,6539 39	0,7772 15	0,8094 103	2,2136 287	2,5057 389
45°	7071 -0, -1,	5000 + 18	-1,5910 + 37	-0,6250 + 8	+ 0,9944 - 116	+ 2,2969 - 292	+ 2,3589 - 360

Продолжение табл. 40

$\theta$	$dP_1(\cos\theta)/d\theta$	$dP_2(\cos\theta)/d\theta$	$dP_3(\cos\theta)/d\theta$	$dP_4(\cos\theta)/d\theta$	$dP_5(\cos\theta)/d\theta$	$dP_6(\cos\theta)/d\theta$	$dP_7(\cos\theta)/d\theta$
	- 0,	- 1,					
45°	7071 -122	5000 + 18	- 1,5910 + 37	- 0,6250 + 8	+ 0,9944 - 116	+ 2,2969 - 292	+ 2,3589 - 360
46°	7193 121	4991 18	1,5244 35	0,4720 0	1,1677 128	2,3510 294	2,1761 325
47°	7314 117	4963 18	1,4542 33	0,3190 - 7	1,3282 139	2,3757 292	1,9609 286
48°	7431 116	4918 18	1,3808 31	0,1668 15	1,4749 149	2,3713 288	1,7172 243
49°	7547 113	4854 18	1,3042 29	- 0,0160 22	1,6067 157	2,3382 280	1,4491 197
50°	7660 -111	4772 + 18	- 1,2248 + 27	+ 0,1327 - 29	+ 1,7228 - 164	+ 2,2771 - 269	+ 1,1614 - 149
51°	7771 109	4672 18	1,1427 24	0,2784 36	1,8225 170	2,1892 255	0,8588 99
52°	7880 106	4554 18	1,0581 22	0,4205 43	1,9052 175	2,0759 239	0,5463 - 47
53°	7986 104	4419 18	0,9714 19	0,5584 49	1,9704 178	1,9387 219	+ 0,2291 + 4
54°	8090 102	4286 17	0,8828 17	0,6914 55	2,0178 180	1,7797 198	- 0,0877 55
55°	8192 - 98	4095 + 17	- 0,7925 + 14	+ 0,8188 - 61	+ 2,0473 - 180	+ 1,6008 - 175	- 0,3990 + 104
56°	8290 97	3908 17	0,7007 12	0,9401 67	2,0587 179	1,4046 150	0,7001 151
57°	8387 93	3703 17	0,6078 9	1,0547 72	2,0522 177	1,1934 123	0,9860 196
58°	8480 92	3482 16	0,5140 6	1,1620 77	2,0280 173	0,9699 95	1,2524 237
59°	8572 88	3244 16	0,4196 4	1,2617 82	1,9865 168	0,7369 66	1,4953 273
60°	8660 - 86	2990 + 16	- 0,3248 + 1	+ 1,3532 - 86	+ 1,9283 - 162	+ 0,4973 - 37	- 1,7109 + 306
61°	8746 83	2721 + 269	0,2299 - 2	1,4361 89	1,8538 154	0,2540 - 8	1,8960 333
62°	8829 81	2436 301	0,1351 4	1,5101 93	1,7640 145	+ 0,0098 + 21	2,0480 354
63°	8910 78	2135 315	- 0,0408 7	1,5748 95	1,6596 136	- 0,2321 50	2,1646 370
64°	8988 75	1820 329	+ 0,0528 10	1,6300 97	1,5418 125	0,4691 78	2,2443 380
65°	9063 - 72	1491 + 344	+ 0,1454 - 12	+ 1,6755 - 99	+ 1,4114 - 113	- 0,6983 + 105	- 2,2861 + 386
66°	9135 70	1147 357	0,2368 15	1,7111 100	1,2698 100	0,9170 131	2,2896 382
67°	9205 67	0790 370	0,3268 17	1,7366 101	1,1183 87	1,1226 154	2,2550 373
68°	9272 64	0420 383	0,4149 20	1,7520 101	0,9580 73	1,3129 176	2,1833 359
69°	9336 61	0037 395	0,5011 22	1,7573 101	0,7905 58	1,4855 196	2,0757 339
70°	9397 - 58	*9642 + 407	+ 0,5851 + 25	+ 1,7525 - 100	+ 0,6173 - 43	- 1,6386 + 213	- 1,9344 + 314
71°	9455 56	9235 418	0,6666 27	1,7377 99	0,4397 28	1,7704 228	1,7617 284
72°	9511 52	8817 429	0,7455 29	1,7131 97	0,2593 - 13	1,8794 240	1,5608 249
73°	9563 50	8388 439	0,8214 31	1,6787 95	+ 0,0776 + 3	1,9645 249	1,3350 211
74°	9613 46	7949 449	0,8941 33	1,6349 92	- 0,1037 18	2,0248 255	1,0882 169
75°	9659 - 44	7500 + 458	+ 0,9636 - 35	+ 1,5819 - 89	- 0,2833 + 33	- 2,0596 + 258	- 0,8245 + 125
76°	9703 41	7042 466	1,0295 37	1,5201 85	0,4595 48	2,0687 258	0,5483 80
77°	9744 37	6576 475	1,0918 39	1,4498 81	0,6309 62	2,0520 255	- 0,2641 + 33
78°	9781 35	6101 482	1,1501 40	1,3714 76	0,7961 76	2,0098 249	+ 0,0234 - 15
79°	9816 32	5619 489	1,2044 42	1,2854 71	0,9536 89	1,9428 240	0,3094 62
80°	9848 - 29	5130 + 495	+ 1,2545 - 43	+ 1,1923 - 66	- 1,1023 + 102	- 1,8519 + 228	+ 0,5892 - 107
81°	9877 26	4635 500	1,3003 45	1,0926 60	1,2407 113	1,7382 214	0,8584 151
82°	9903 22	4135 506	1,3415 46	0,9869 54	1,3679 124	1,6031 197	1,1125 193
83°	9925 20	3629 510	1,3783 47	0,8758 48	- 1,4827 133	1,4484 178	1,3473 231
84°	9945 17	3119 514	1,4103 48	0,7598 42	1,5842 142	1,2760 156	1,5592 265
85°	9962 - 14	2605 + 517	+ 1,4375 - 49	+ 0,6396 - 35	- 1,6715 + 149	- 1,0881 + 133	+ 1,7446 - 295
86°	9976 10	2088 520	1,4599 49	0,5160 28	1,7439 155	0,8868 108	1,9006 321
87°	9986 8	1568 522	1,4774 50	0,3895 21	1,8009 160	0,6747 82	2,0246 341
88°	9994 4	1046 523	1,4900 50	0,2608 14	1,8420 163	0,4544 55	2,1146 355
89°	9998 2	0523 523	1,4975 50	0,1308 7	1,8667 165	0,2286 28	2,1692 364
90°	*0000 - 1,	0000 - 0,	+ 1,5000 - 50	0,0000 0	- 1,8750 + 164	0,0000 0	+ 2,1875 - 367

Таблица 41. Функции Лежандра 2-го рода  $Q_n(x)$ 

$x$	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_4(x)$	$Q_5(x)$
0,00	+ 0,	- 1,	- 0,	+ 0,	+ 0,	- 0,
01	00000	00000	00000	66667	00000	53333
02	01000	*99990	02000	66627	02666	53253
03	02000	99960	03999	66507	05327	53014
04	03001	99910	05996	66307	07978	52615
05	04002	99840	07991	66027	10615	52057
0,05	05004	99750	09983	65668	13233	51343
06	06007	99640	11971	65229	15827	50474
07	07011	99509	13954	64711	18393	49452
08	08017	99359	15932	64115	20925	48279
09	09024	99188	17903	63440	23419	46958
0,10	10034	98997	19866	62687	25870	45493
11	11045	98785	21822	61856	28274	43887
12	12058	98553	23769	60948	30626	42144
13	13074	98300	25706	59964	32921	40268
14	14093	98027	27632	58904	35155	38264
0,15	15114	97733	29547	57769	37324	36137
16	16139	97418	31450	56559	39424	33893
17	17167	97082	33339	55275	41449	31537
18	18198	96724	35215	53918	43395	29075
19	19234	96346	37075	52490	45259	26513
0,20	20273	95945	38920	50990	47037	23859
21	21317	95523	40748	49420	48723	21119
22	22366	95080	42559	47781	50315	18300
23	23419	94614	44351	46074	51808	15411
24	24477	94125	46124	44301	53199	12459
0,25	25541	93615	47876	42461	54484	99451
26	26611	93081	49607	40558	55659	06398
27	27686	92525	51316	38591	56721	03306
28	28768	91945	53001	36563	57667	00186
29	29857	91342	54662	34474	58492	*02953
0,30	30952	90714	56297	32328	59195	06103
31	32055	90063	57907	30124	59772	09254
32	33165	89387	59488	27864	60220	12395
33	34283	88687	61041	25552	60537	15518
34	35409	87961	62565	23187	60720	18611
0,35	36544	87209	64057	20773	60766	21664
36	37689	86432	65518	18311	60674	24668
37	38842	85628	66945	15803	60441	27611
38	40006	84798	68338	13251	60065	30484
39	41180	83940	69695	10658	59545	33274
0,40	42365	83054	71015	08026	58879	35972
41	43561	82140	72297	05357	58066	38567
42	44769	81197	73539	02654	57105	41048
43	45990	80224	74740	*00080	55994	43404
44	47223	79222	75898	02844	54734	45624
0,45	48470	78188	77012	05634	53323	47698
46	49731	77124	78081	08446	51761	49615
47	51007	76027	79102	11279	50050	51365
48	52298	74897	80075	14129	48188	52937
49	53606	73733	80997	16992	46177	54322
0,50	54931	72535	81866	19865	44017	55508
	+ 0,	- 0,	- 0,	- 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 41

$x$	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$	$Q_4(x)$	$Q_5(x)$
-0,50	+ 0,54931 + 18	- 0,72535 + 36	- 0,81866 + 54	- 0,19865 - 7	+ 0,44017 - 147	+ 0,55508 - 208
51	0,56273 19	0,71301 37	0,82682 56	0,22745 - 3	0,41711 146	0,56487 217
52	0,57634 20	0,70030 38	0,83441 58	0,25628 + 1	0,39259 144	0,57249 226
53	0,59015 20	0,68722 39	0,84141 60	0,28510 5	0,36663 141	0,57785 235
54	0,60416 22	0,67376 40	0,84782 63	0,31387 9	0,33926 139	0,58086 243
-0,55	+ 0,61838 + 23	- 0,65989 + 41	- 0,85360 + 65	- 0,34254 + 14	+ 0,31051 - 135	+ 0,58143 - 251
56	0,63283 24	0,64561 42	0,85873 67	0,37107 18	0,28040 132	0,57950 259
57	0,64752 25	0,63091 44	0,86319 70	0,39942 23	0,24897 128	0,57498 265
58	0,66246 26	0,61577 45	0,86695 72	0,42754 28	0,21626 124	0,56781 272
59	0,67767 28	0,60018 47	0,86999 75	0,45537 34	0,18232 118	0,55792 277
-0,60	+ 0,69315 + 29	- 0,58411 + 49	- 0,87227 + 78	- 0,48287 + 39	+ 0,14720 - 113	+ 0,54526 - 282
61	0,70892 31	0,56756 51	0,87378 81	0,50997 45	0,11094 107	0,52979 286
62	0,72501 33	0,55050 53	0,87446 85	0,53662 51	0,07362 100	0,51145 289
63	0,74142 35	0,53291 55	0,87431 88	0,56275 58	+ 0,03530 93	0,49023 291
64	0,75817 37	0,51477 57	0,87326 92	0,58830 65	- 0,00395 85	0,46609 292
-0,65	+ 0,77530 + 39	- 0,49606 + 60	- 0,87130 + 96	- 0,61321 + 72	- 0,04405 - 76	+ 0,43903 - 292
66	0,79281 41	0,47674 63	0,86838 100	0,63739 80	0,08490 66	0,40905 291
67	0,81074 44	0,45680 66	0,86446 105	0,66078 88	0,12642 56	0,37616 288
68	0,82911 47	0,43620 69	0,85948 110	0,68328 97	0,16849 45	0,34039 284
69	0,84796 50	0,41491 73	0,85341 115	0,70481 106	0,21101 32	0,30178 278
-0,70	+ 0,86730 + 54	- 0,39289 + 77	- 0,84618 + 121	- 0,72529 + 116	- 0,25384 - 19	+ 0,26039 - 271
71	0,88718 58	0,37010 81	0,83775 127	0,74460 127	0,29686 - 4	0,21630 261
72	0,90764 62	0,34650 86	0,82804 134	0,76265 138	0,33991 + 12	0,16960 249
73	0,92873 67	0,32203 92	0,81699 142	0,77931 150	0,38283 30	0,12041 235
74	0,95048 72	0,29665 98	0,80452 150	0,79447 164	0,42546 49	0,06887 218
-0,75	+ 0,97296 + 78	- 0,27028 + 104	- 0,79055 + 159	- 0,80799 + 174	- 0,46758 + 70	+ 0,01516 - 198
76	0,99622 85	0,24288 112	0,77499 169	0,81973 198	0,50900 93	- 0,04053 175
77	1,02033 93	0,21435 121	0,75774 180	0,82953 211	0,54949 119	0,09797 148
78	1,04537 102	0,18461 130	0,73868 193	0,83721 230	0,58878 147	0,15688 118
79	1,07143 112	0,15357 141	0,71770 207	0,84259 251	0,62660 178	0,21696 82
-0,80	+ 1,09861 + 123	- 0,12111 + 154	- 0,69464 + 223	- 0,84544 + 275	- 0,66264 + 212	- 0,27785 - 41
81	1,12703 137	0,08711 169	0,66935 241	0,84555 301	0,69656 250	0,33914 + 6
82	1,15682 153	0,05141 186	0,64164 262	0,84264 331	0,72795 294	0,40035 60
83	1,18814 171	- 0,01385 206	0,61131 287	0,83641 365	0,75641 342	0,46094 123
84	1,22117 193	+ 0,02579 230	0,57810 316	0,82653 404	0,78142 398	0,52029 195
-0,85	+ 1,25615 + 220	+ 0,06773 + 259	- 0,54172 + 350	- 0,81259 + 449	- 0,80244 + 462	- 0,57766 + 279
86	1,29334 253	0,11228 294	0,50184 391	0,79415 503	0,81882 536	0,63221 378
87	1,33308 293	0,15978 337	0,45803 441	0,77066 567	0,82981 626	0,68295 494
88	1,37577 344	0,21068 391	0,40979 502	0,74148 644	0,83453 728	0,72872 632
89	1,42193 410	0,26551 460	0,35650 580	0,70582 740	0,83194 854	0,76811 799
-0,90	+ 1,47222 + 495	+ 0,32500 + 551	- 0,29736 + 681	- 0,66271 + 862	- 0,82075 + 1011	- 0,79944 + 1006
91	1,52752	0,39005	0,23135	0,61091	0,79936	0,82063
92	1,58903	0,46190	0,15708	0,54880	0,76575	0,82905
93	1,65839	0,54230	- 0,07268	0,47419	0,71724	0,82130
94	1,73805	0,63377	+ 0,02459	0,38399	0,65011	0,79279
-0,95	+ 1,83178	+ 0,74019	+ 0,13888	- 0,27356	- 0,55896	- 0,73697
96	1,94591	0,86807	0,27707	- 0,13540	0,43528	0,64384
97	2,09230	1,02953	0,45181	+ 0,04408	0,26403	0,49627
98	2,29756	1,25161	0,69108	0,29437	- 0,01348	- 0,25926
99	2,64665	1,62019	1,08265	0,70625	+ 0,41159	+ 0,16845
1,00	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞



Продолжение табл. 41

$x$	$Q_6(x)$	$Q_7(x)$	$x$	$Q_6(x)$	$Q_7(x)$
	- 0,	+ 0,			
0,00	00000 0	45714 - 256	0,50	+ 0,14201 - 28	- 0,34392 + 296
01	03198 + 13	45586 255	51	0,18056 50	0,31316 282
02	06383 26	45203 254	52	0,21862 72	0,27958 285
03	09542 38	44567 250	53	0,25595 95	0,24337 245
04	12644 51	43680 246	54	0,29233 119	0,20471 223
0,05	15734 + 63	42548 - 240	0,55	+ 0,32752 - 143	- 0,16383 + 198
06	18742 75	41175 233	56	0,36129 167	0,12097 170
07	21674 87	39570 225	57	0,39338 192	0,07642 140
08	24518 99	37739 216	58	0,42355 217	- 0,03047 107
09	27264 111	35693 206	59	0,45155 242	+ 0,01655 72
0,10	29899 + 122	33441 - 194	0,60	+ 0,47713 - 268	+ 0,06429 + 34
11	32412 132	30996 181	61	0,50003 293	0,11236 - 7
12	34793 143	28369 168	62	0,52000 318	0,16036 49
13	37031 153	25575 153	63	0,53680 342	0,20786 94
14	39117 162	22627 138	64	0,55017 366	0,25441 142
0,15	41041 + 171	19542 - 122	0,65	+ 0,55989 - 390	+ 0,29955 - 191
16	42795 179	16335 105	66	0,56570 412	0,34277 241
17	44370 187	13023 87	67	0,56740 436	0,38358 294
18	45757 194	09625 69	68	0,56476 454	0,42145 367
19	46952 200	06158 50	69	0,55759 472	0,45585 402
0,20	47946 + 206	02642 - 30	0,70	+ 0,54570 - 489	+ 0,48622 - 457
21	48734 211	*00904 - 10	71	0,52893 503	0,51203 511
22	49310 216	04461 + 10	72	0,50713 515	0,53273 566
23	49672 219	08008 30	73	0,48017 524	0,54777 619
24	49814 222	11524 51	74	0,44798 530	0,55662 671
0,25	49735 + 224	14990 + 71	0,75	+ 0,41050 - 532	+ 0,55877 - 720
26	49432 225	18385 92	76	0,36770 530	0,55372 766
27	48904 225	21688 112	77	0,31961 522	0,54101 808
28	48151 225	24879 132	78	0,26631 509	0,52024 844
29	47173 223	27938 152	79	0,20794 489	0,49104 873
0,30	45972 + 221	30845 + 171	0,80	+ 0,14469 - 461	+ 0,45312 - 894
31	44551 218	33580 190	81	0,07684 425	0,40628 905
32	42912 213	36126 208	82	+ 0,00477 378	0,35042 903
33	41059 208	38464 225	83	- 0,07106 319	0,28556 886
34	38999 202	40577 242	84	0,15006 246	0,21187 850
0,35	36737 + 195	42449 + 257	0,85	- 0,23149 - 156	+ 0,12972 - 793
36	34281 187	44063 271	86	0,31444 - 46	+ 0,03969 708
37	31638 177	45407 284	87	0,39780 + 89	- 0,05735 589
38	28818 167	46466 296	88	0,48022 255	0,16020 429
39	25830 156	47229 306	89	0,56002 460	0,26725 - 216
0,40	22687 + 144	47686 + 315	0,90	- 0,63512 + 715	- 0,37633 + 65
41	19399 131	47828 322	91	0,70295	0,48458
42	15981 117	47649 328	92	0,76020	0,58824
43	12445 102	47142 331	93	0,80262	0,68227
44	08808 86	46304 333	94	0,82448	0,75978
0,45	05085 + 69	45133 + 332	0,95	- 0,81776	- 0,81107
46	01292 52	43631 330	96	0,77043	0,82170
47	*02552 33	41800 325	97	0,66250	0,76807
48	06428 + 13	39645 318	98	0,45458	0,60511
49	10318 - 7	37172 308	99	- 0,03725	- 0,21288
0,50	14201 - 28	34392 + 296	1,00	+ ∞	+ ∞
	+ 0,	- 0,			

### ХIII. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ (ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ)

#### А. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ 1-го, 2-го И 3-го РОДА

##### 1. Определения и обозначения

Бесселевыми функциями (цилиндрическими функциями или цилиндрическими гармониками) называют решения  $Z_\nu(z)$  дифференциального уравнения Бесселя \*)

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = 0.$$

Здесь  $z$  — комплексное переменное; число  $\nu$ , которое называется *порядком* (параметром или индексом) может также быть произвольным комплексным; если же оно действительное целое число, то пишут  $\nu = n$ .

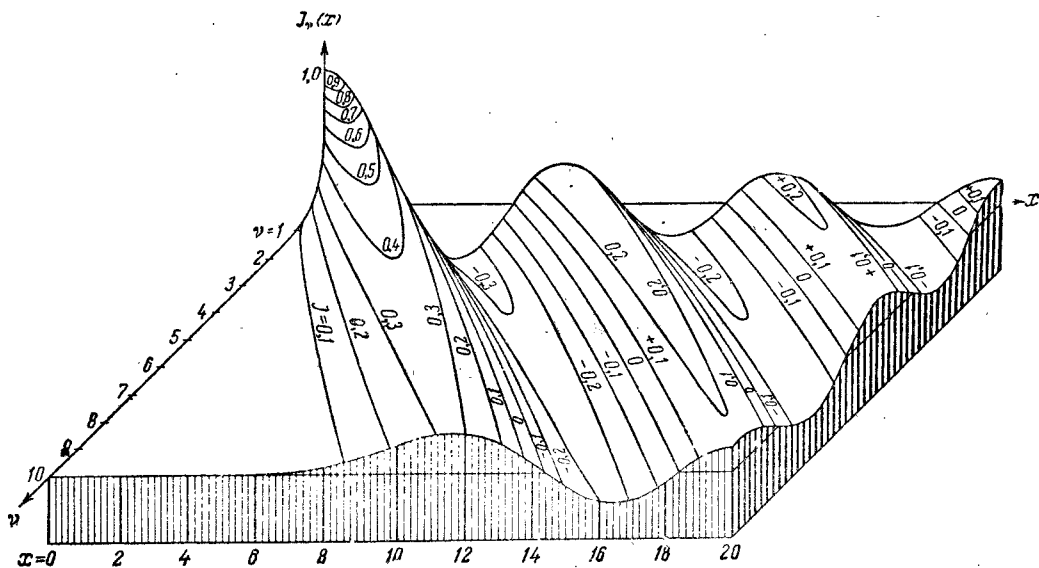


Рис. 97. Поверхность функции Бесселя  $J_\nu(x)$  над плоскостью действительных переменных  $\nu, x$ .

Под бесселевыми функциями понимают следующие (определенные в 2 своих аналитических представлениях) функции: функции Бесселя  $J_\nu(z)$ ; функции Неймана  $N_\nu(z)$  (которые часто называют функциями Вебера и обозначают  $Y_\nu(z)$ ) и функции Ганкеля  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$ . Их называют также бесселевыми функциями соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

\*) Определение цилиндрических функций по Нильсену см. в 6.1.

Для фиксированного порядка  $\nu$  все эти функции являются аналитическими функциями от  $z$ ; за исключением функций  $J_n(z)$  целого порядка, все эти функции многозначны и имеют  $z=0$  точкой ветвления. Если аргумент  $z$  фиксирован, то

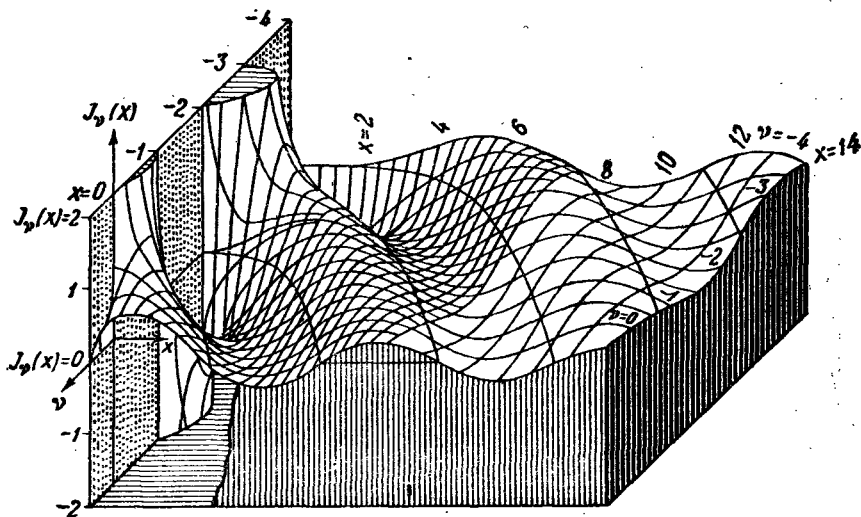
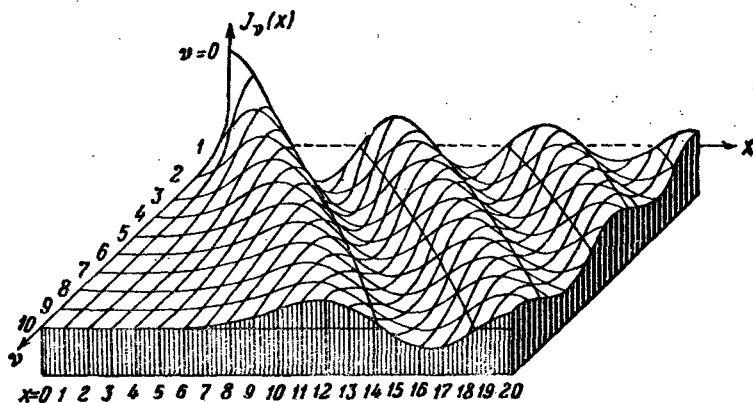


Рис. 98 и 99. Функции Бесселя  $J_\nu(x)$  от двух действительных переменных  $\nu$  и  $x$ ;  $-4 \leq \nu \leq 10$ .

все эти функции, рассматриваемые как функции порядка  $\nu$ , являются однозначными целыми функциями (рис. 97—101).

При произвольном  $\nu$  каждая пара функций

$$J_\nu(z), N_\nu(z) \text{ и } H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z),$$

а также, если  $\nu$  не является целым числом,

$$J_\nu(z), J_{-\nu}(z)$$

представляет собой фундаментальную систему решений дифференциального уравнения Бесселя.

Определение модифицированных функций Бесселя дано в В. 1; определения некоторых функций, связанных с бesselевыми функциями, см. в С. 1 и С. 2.

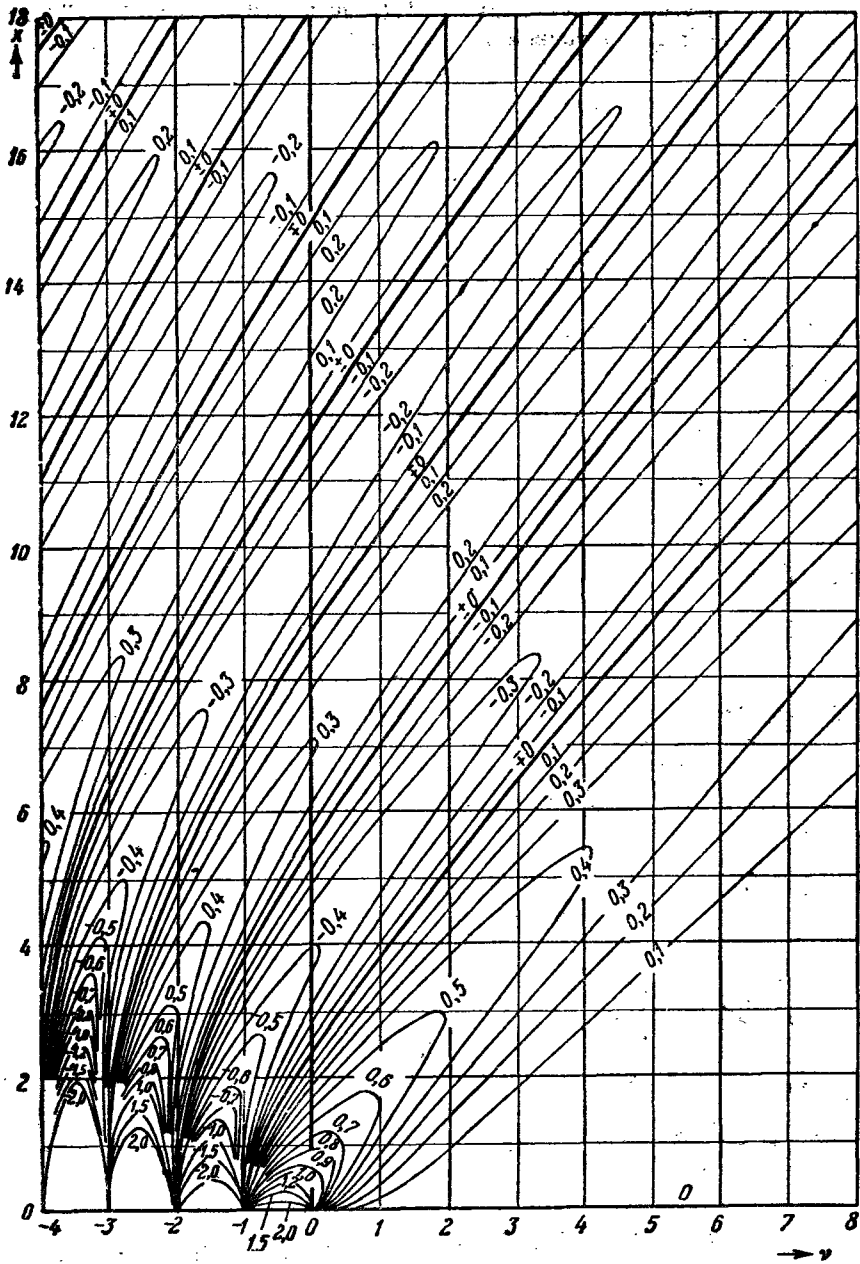


Рис. 100. Кривые  $J_0(x) = \text{const}$  в плоскости действительных переменных  $v, x$ .



порядка  $\nu$  имеем представление

$$J_{\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{0! \Gamma(\nu+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2}}{1! \Gamma(\nu+2)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+4}}{2! \Gamma(\nu+3)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+6}}{3! \Gamma(\nu+4)} + \dots$$

причем  $J_{-\nu}(z) = \overline{J_{\nu}(z)}$ . Можно записать:

$$J_{\nu}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \Lambda_{\nu}(z), \text{ где } \Lambda_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}$$

— целая функция от  $z$  (рис. 102—105, таблица 42).

Функция  $J_{\nu}(z)$  многозначна, если  $\nu$  не есть целое число; после  $m$  обходов вокруг точки ветвления  $z=0$  получим:  $J_{\nu}(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} J_{\nu}(z)$  ( $m$  — целое).

Функции  $J_{\nu}(z)$  любого положительного и целых отрицательных порядков отличаются от всех остальных бesselевых функций тем, что они остаются

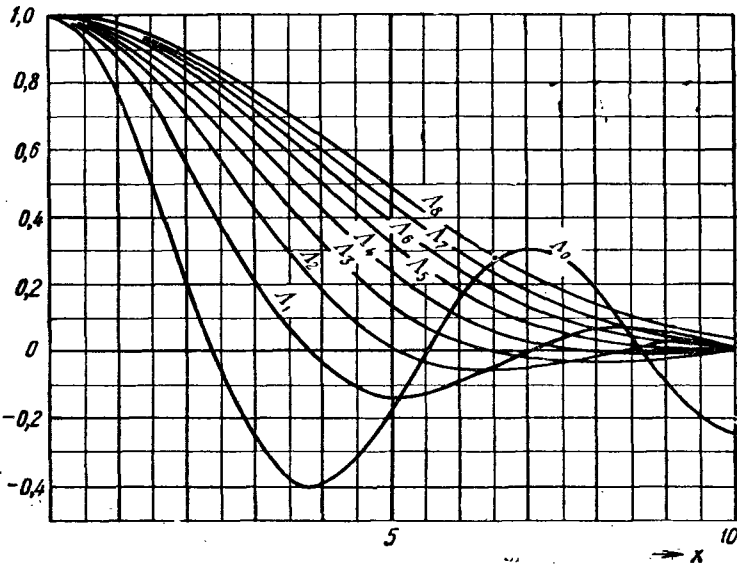


Рис. 102. Функции  $\Lambda_{\nu}(x)$ .

конечными при  $z \rightarrow 0$ . При  $|z| \ll 1$  для фиксированного порядка  $\nu \geq 0$  имеем приближенно:

$$J_{\nu}(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \quad \Lambda_{\nu}(z) \approx 1 - \frac{z^2}{4(\nu+1)}.$$

Если  $\nu = n + \eta$ , где  $n \geq 1$ ,  $0 < \eta < 1$ , то

$$(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{\eta} J_{-\nu}(z) = \frac{2}{z} E_{n-1}(z) \frac{\sin \pi \eta}{\pi} + \left(\frac{z}{2}\right)^n F_n(z),$$

где

$$E_m(z) = \sum_{k=0}^m \frac{\Gamma(m+\eta-k+1)}{\Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{m-2k}, \quad F_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{iz}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k-\eta+1) \Gamma(m+k+1)}.$$

Отсюда получается поведение  $J_{-\nu}(z)$ ,  $\nu = n + \eta > 0$  при  $|z| \ll 1$ :

$$J_{-\nu}(z) \approx (-1)^n \Gamma(\nu) \frac{\sin \pi \eta}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}.$$

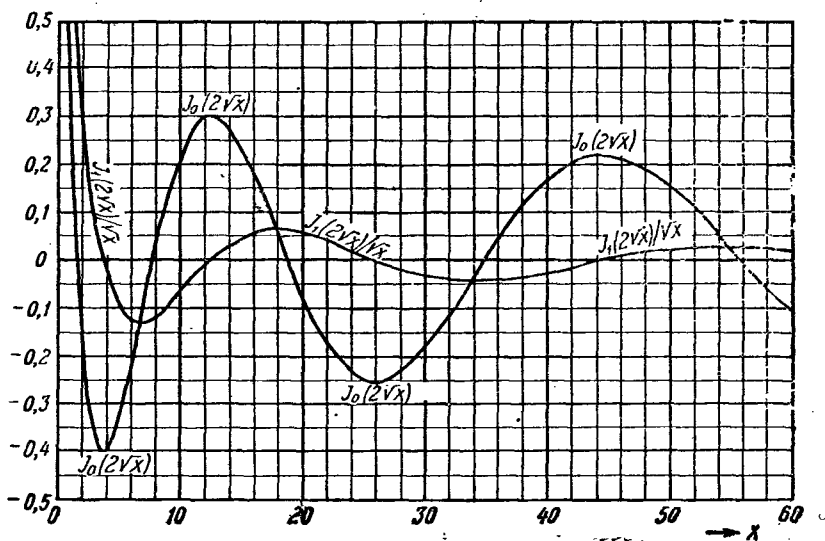


Рис. 103. Величина  $\Delta$ , как функция квадрата половины аргумента.

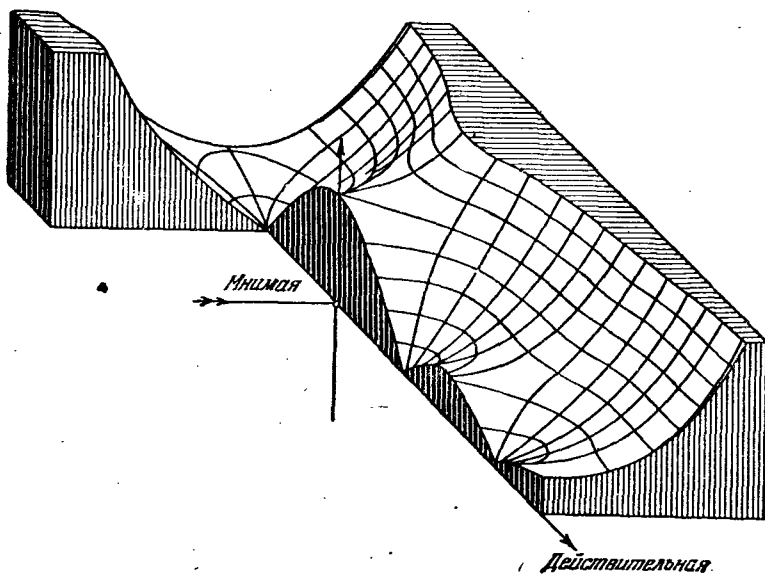


Рис. 104. Рельеф функции Бесселя  $J_0(x+iy)$ .

При  $|z| \ll 1$ ,  $\nu > 0$  справедливы также приближенные формулы:

$$J'_0(z)/J_0(z) \approx -\frac{z}{2}, \quad J'_\nu(z)/J_\nu(z) \approx \frac{\nu}{2} \quad (\nu \neq 0).$$

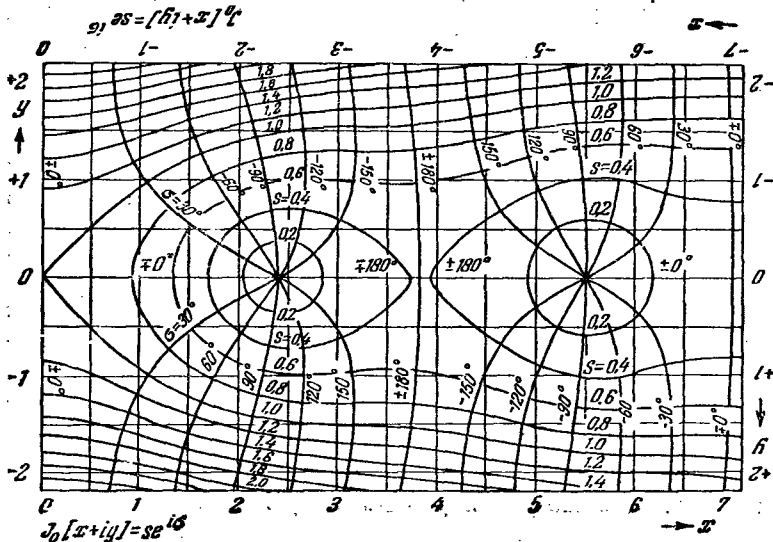


Рис. 105. Карта горизонталей рельефа функции Бесселя  $J_0(x+iy)$ .

Для действительного порядка  $\nu$  функции Бесселя от действительного аргумента  $x > 0$  будут действительными функциями  $J_\nu(x)$ ;  $J_\nu(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  (рис. 106—111, таблицы 43—46).

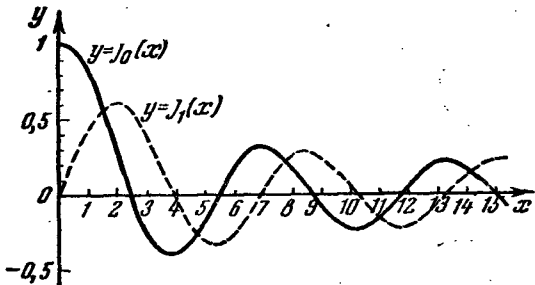


Рис. 106. Функции Бесселя  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ .

2.2. Если порядок  $\nu$  не есть целое число, то функции Неймана  $N_\nu(z)$  (бесселевы функции 2-го рода) определяются как

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi} [J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)],$$

а если порядок есть целое число  $\nu = n$ , то

$$N_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} N_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}$$

(рис. 112). При целом индексе справедливо представление

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{\gamma z}{2} - \frac{1}{\pi} \left( \frac{z}{2} \right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{k+n} \frac{1}{l} \right) - \frac{1}{\pi} \left( \frac{z}{2} \right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left( \frac{z}{2} \right)^{2k} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

( $\gamma$  — константа Эйлера) и  $N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z)$ . Для произвольного  $\nu$  имеем  $N_{-\nu}(z) = N_\nu(z)$ .



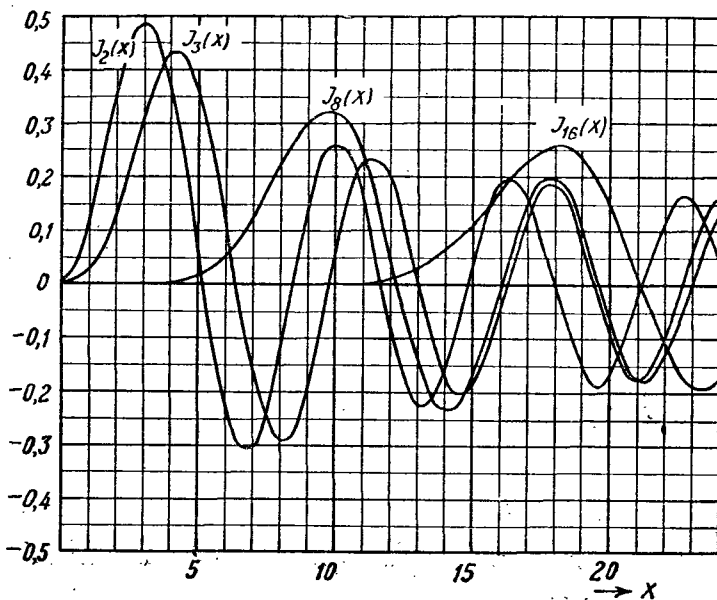


Рис. 107. Функции Бесселя  $J_2(x)$ ,  $J_3(x)$ ,  $J_8(x)$ ,  $J_{16}(x)$ .

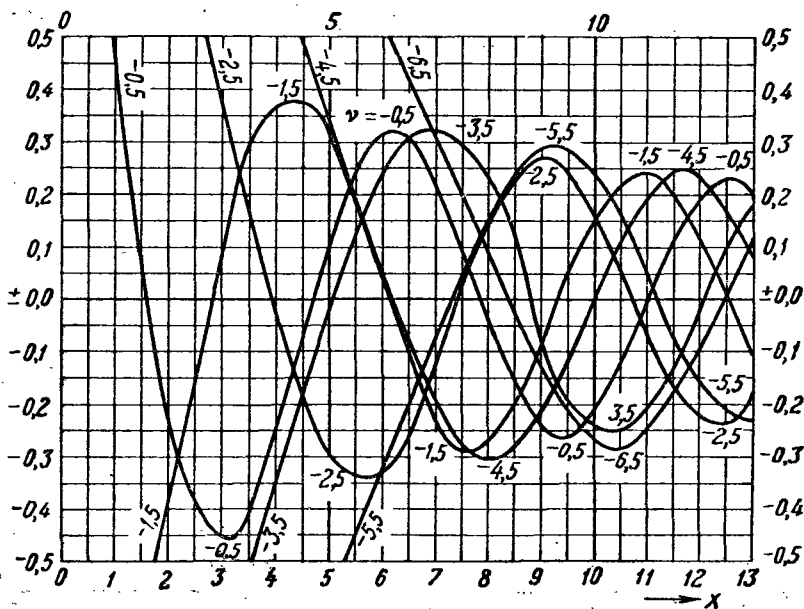


Рис. 108. Функции Бесселя  $J_\nu(x)$  при  $\nu = -n - \frac{1}{2}$ .

Функция  $N_\nu(z)$  многозначна; после  $m$  обходов вокруг точки ветвления  $z=0$  получим:

$$N_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{-m\nu\pi i} N_\nu(z) + 2i \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} \cos \nu\pi J_\nu(z) \quad (m \text{ — целое});$$

в частности, для целого порядка  $\nu = n$

$$N_n(e^{m\pi i} z) = (-1)^{mn} [N_n(z) + 2imJ_n(z)].$$

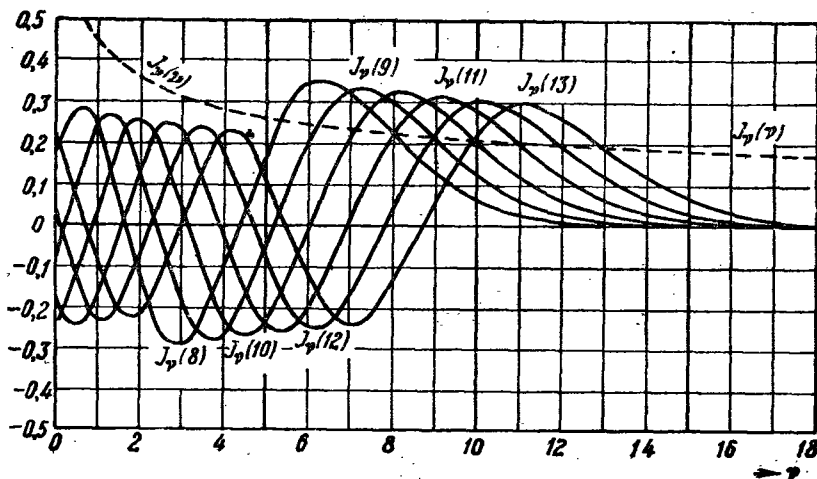
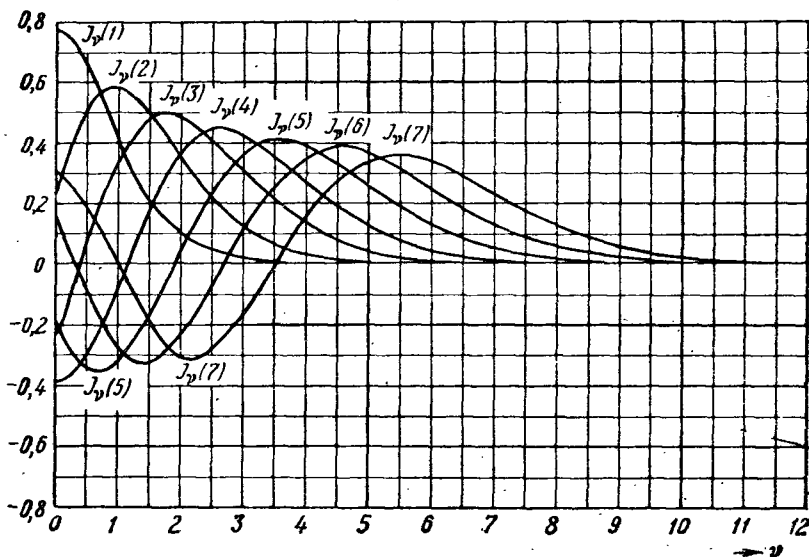


Рис. 109 и 110. Функция Бесселя при постоянном аргументе и переменном порядке.



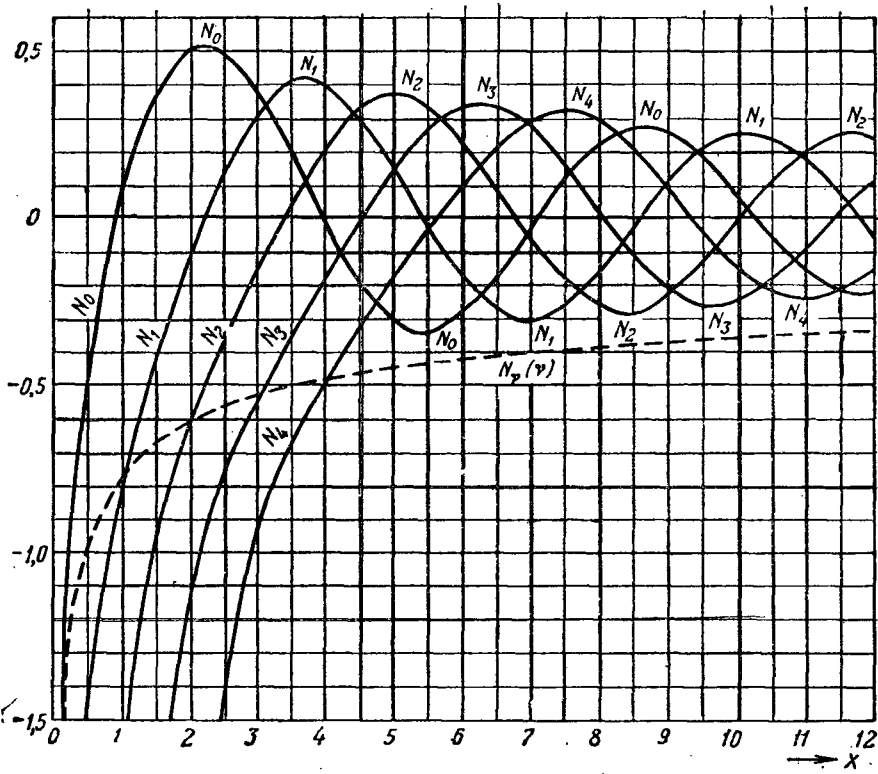


Рис. 113. Функция Неймана  $N_\nu(x)$ ,  $\nu=0, 1, 2, 3, 4$ .

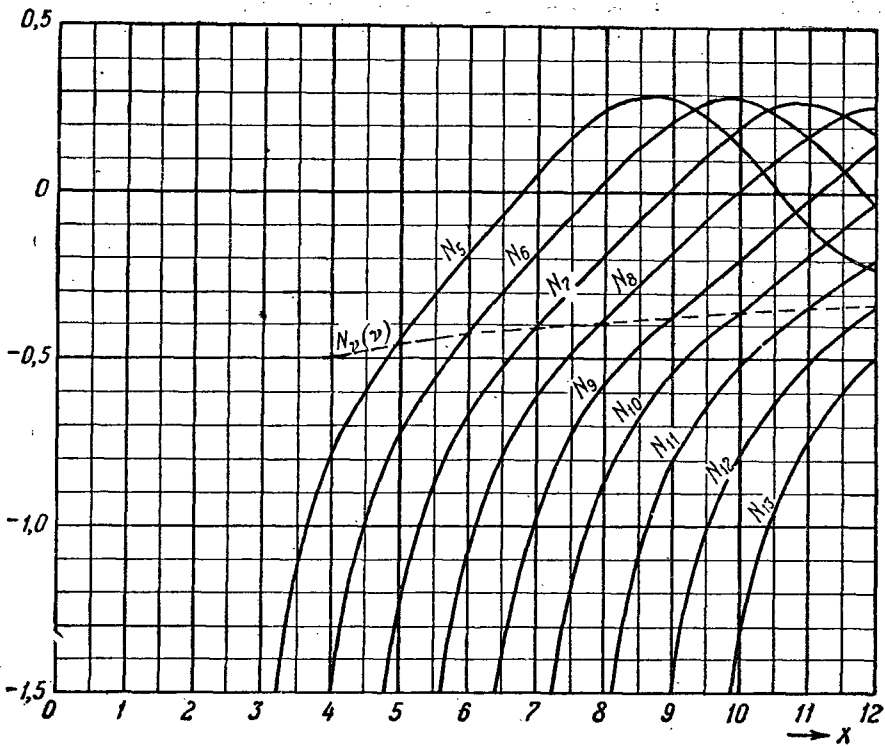


Рис. 114. Функции Неймана  $N_\nu(x)$ ,  $\nu=5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ .

Для действительного  $\nu \geq 0$  поведение  $N_\nu(z)$  при  $|z| \ll 1$  описывается формулами

$$N_\nu(z) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\nu z}, \quad N_\nu(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \quad (\nu > 0).$$

Для действительного порядка  $\nu$  функции Неймана от действительного аргумента  $x > 0$  будут действительными функциями  $N_\nu(x)$ ;  $N_\nu(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  (рис. 113, 114, таблица 47).

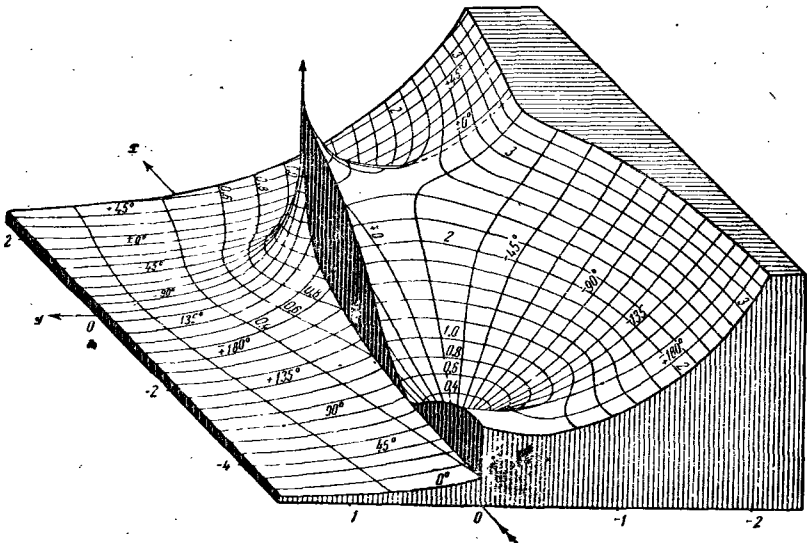
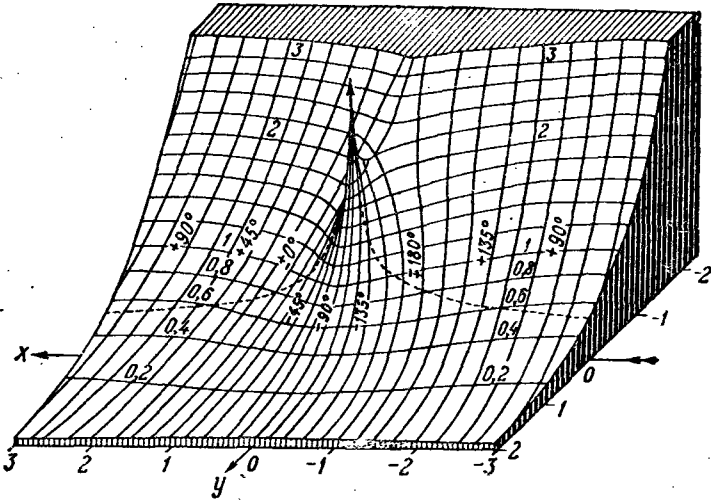


Рис. 115 и 116. Рельеф функции Ганкеля  $H_0^{(1)}(z)$ ;  $z = x + iy = re^{i\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ .  
 Линия ветвления — вдоль отрицательной действительной полуоси.

2.3. Функции Ганкеля  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  (бесселевы функции 3-го рода) определяются как

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z),$$

что для нецелого  $\nu$  эквивалентно

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{1}{\sin \nu \pi} \left[ e^{-\nu \pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right], \quad H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{-i}{\sin \nu \pi} \left[ e^{\nu \pi i} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) \right].$$

Из определений следует, что

$$J_{\nu}(z) = H_{\nu}^{(1)}(z) - iN_{\nu}(z) = H_{\nu}^{(2)}(z) + iN_{\nu}(z) = \frac{1}{2} [H_{\nu}^{(2)}(z) + H_{\nu}^{(1)}(z)],$$

$$N_{\nu}(z) = iJ_{\nu}(z) - iH_{\nu}^{(1)}(z) = iH_{\nu}^{(2)}(z) - iJ_{\nu}(z) = \frac{i}{2} [H_{\nu}^{(2)}(z) - H_{\nu}^{(1)}(z)],$$

$$2J_{-\nu}(z) = e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z) + e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z), \quad H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu \pi i} H_{\nu}^{(1)}(z),$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu \pi i} H_{\nu}^{(2)}(z), \quad H_{\nu}^{(1)}(\bar{z}) = \overline{H_{\nu}^{(2)}(z)}, \quad H_{\nu}^{(2)}(\bar{z}) = \overline{H_{\nu}^{(1)}(z)}.$$

Функции Ганкеля многозначны; после  $m$  обходов вокруг точки ветвления  $z=0$  получим:

$$H_{\nu}^{(1)}(e^{m\pi i} z) = -\frac{\sin(m-1)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(e^{m\pi i} z) = e^{\nu\pi i} \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z) + \frac{\sin(m+1)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z); \quad (m - \text{целое})$$

в частности, для целого  $\nu = n$

$$H_n^{(1)}(e^{m\pi i} z) = (-1)^{mn} [H_n^{(1)}(z) - 2mJ_n(z)],$$

$$H_n^{(2)}(e^{m\pi i} z) = (-1)^{mn} [H_n^{(2)}(z) + 2mJ_n(z)].$$

В отличие от  $J_{\nu}(z)$  и  $N_{\nu}(z)$ , функции Ганкеля действительного порядка  $\nu$  принимают комплексные значения для действительного аргумента  $x > 0$ . Роль функций Ганкеля в приложениях заключается в том, что они — единственные из бесселевых функций которые обращаются в нуль при бесконечных значениях комплексного аргумента (рис. 115—120), а именно:  $H_{\nu}^{(1)}(z)$  — когда мнимая часть аргумента положительна,  $H_{\nu}^{(2)}(z)$  — когда она отрицательна:

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_{\nu}^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} H_{\nu}^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}) = 0 \quad \text{для } 0 < \varphi < \pi.$$

2.4. Бесселевы функции порядка  $\nu = n + \frac{1}{2}$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ) являются элементарными функциями (рис. 108, таблица 44):

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\sin z}{z},$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \frac{\cos z}{z} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1} J_{-n-\frac{1}{2}}(z),$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-\frac{i\pi}{2}(n+1)} e^{iz} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(2iz)^k},$$

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\frac{i\pi}{2}(n+1)} e^{iz} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!} \frac{1}{(2iz)^k}.$$

В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad N_{\frac{1}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z,$$

$$H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{iz}}{i}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \frac{e^{-iz}}{-i}.$$

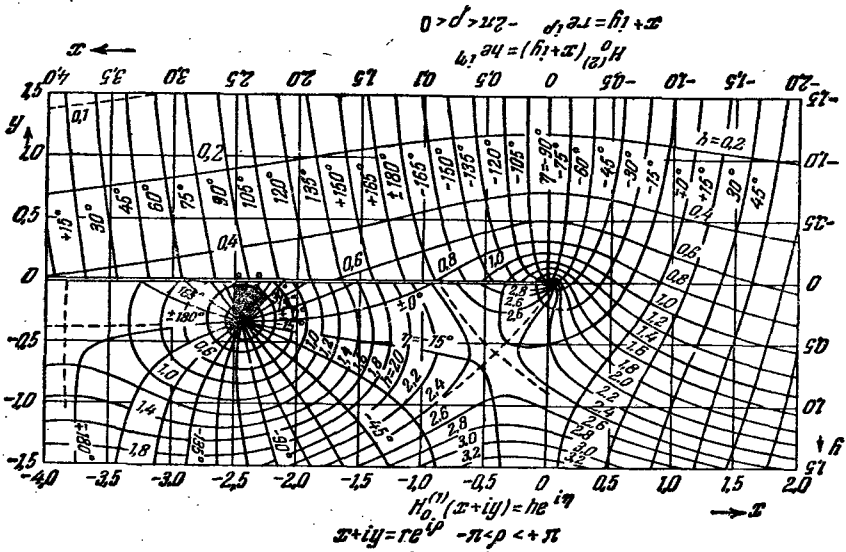


Рис. 117. Карта горизонталей рельефа функций Ганкеля  $H_0^{(1)}(z)$  и  $H_0^{(2)}(z)$ .

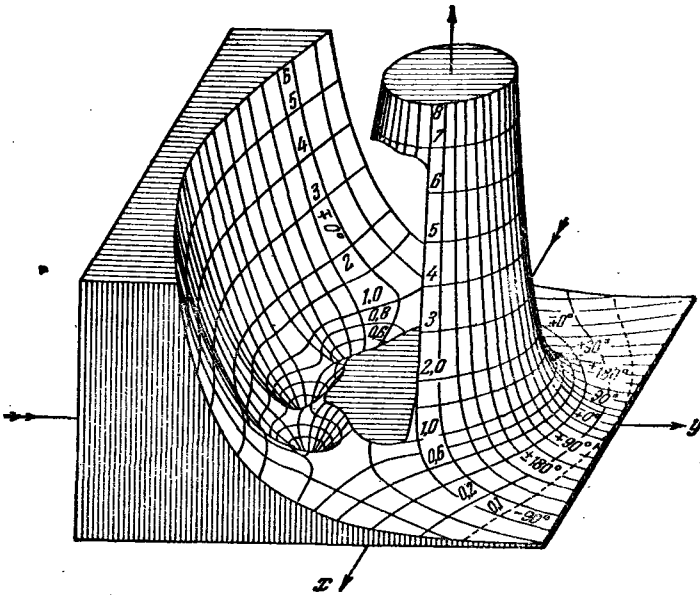


Рис. 118. Рельеф функции Ганкеля  $H_{3,5}^{(1)}(z)$ .

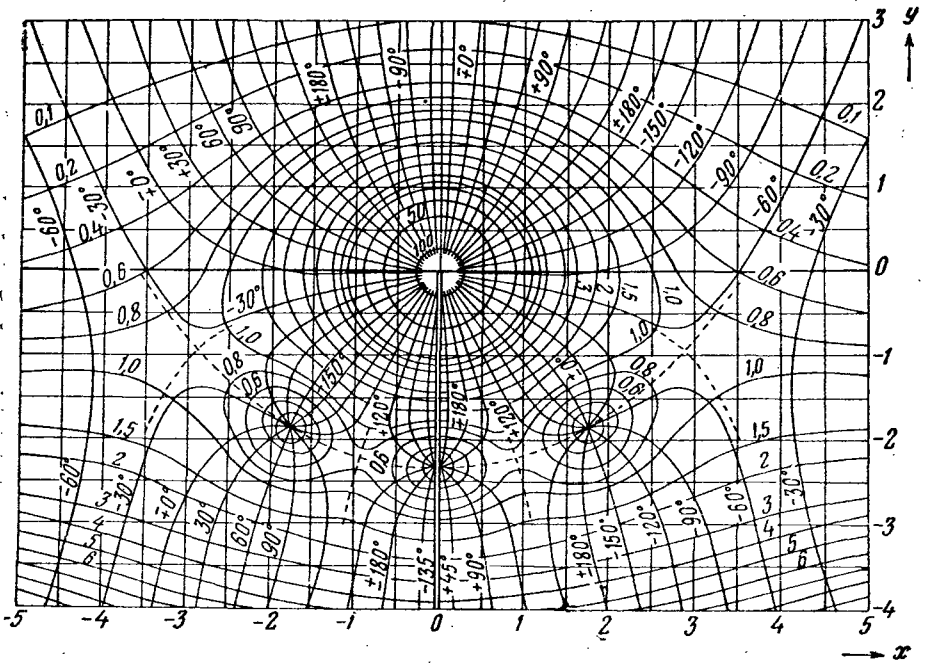


Рис. 119. Карта горизонталей рельефа функции Ганкеля  $H_{3.5}^{(1)}(z)$ .

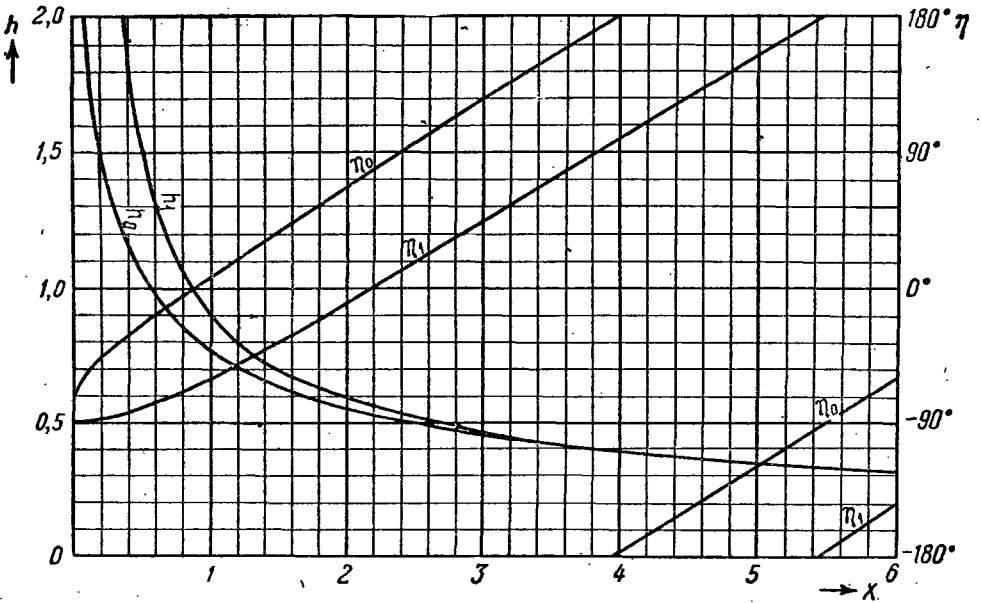


Рис. 120. Функция Ганкеля  $H_{\nu}^{(1)}(x) = h e^{i\eta}$ ,  $\nu = 0, 1$ .





Продолжение табл. 42

x	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
1.00	+ 0, 8801	+ 0, 9192	+ 0, 9390	+ 0, 9510	+ 0, 9591	+ 0, 9648	+ 0, 9692	+ 0, 9726
02	-23, 8755	-15,5, 9161	-12, 9366	-9,5, 9491	-8, 9575	-7, 9634	-6, 9680	-5,5, 9715
04	23,5, 8708	16, 9129	12, 9342	10, 9471	8,5, 9558	7, 9620	6,5, 9667	6, 9704
06	24, 8660	16,5, 9096	12,5, 9317	10, 9451	8,5, 9541	7,5, 9606	6,5, 9654	6,5, 9692
08	24,5, 8611	17, 9063	13, 9292	10,5, 9431	8,5, 9524	7,5, 9591	6,5, 9641	6, 9681
1.10	-25, 8562	-17, 9029	-13, 9266	-10,5, 9410	-9, 9507	-7,5, 9576	-6,5, 9628	-6, 9669
12	25,5, 8512	17,5, 8995	13, 9240	10,5, 9389	9, 9489	8, 9561	7, 9615	6, 9657
14	25,5, 8461	17,5, 8960	13,5, 9214	11, 9368	9, 9471	8, 9545	7, 9601	6,5, 9645
16	26, 8410	18, 8925	13,5, 9187	11, 9346	9,5, 9453	8, 9529	7, 9587	6, 9632
18	26,5, 8358	18, 8889	14, 9160	11,5, 9324	9,5, 9434	8, 9513	7, 9573	6,5, 9620
1.20	-27, 8305	-18,5, 8853	-14, 9132	-11, 9301	-9,5, 9415	-8, 9497	-7,5, 9559	-6,5, 9607
22	27, 8251	18,5, 8816	14,5, 9104	12, 9279	9,5, 9396	8,5, 9481	7, 9544	6,5, 9594
24	27, 8197	19, 8779	14,5, 9075	11,5, 9255	10, 9377	8,5, 9464	7,5, 9530	6,5, 9581
26	28, 8143	19, 8741	14,5, 9046	12, 9232	10, 9357	8,5, 9447	7,5, 9515	7, 9568
28	28, 8087	19,5, 8703	15, 9017	12, 9208	10, 9337	8,5, 9430	7,5, 9500	7, 9554
1.30	-28, 8031	-19,5, 8664	-15, 8987	-12, 9184	-10,5, 9317	-9, 9412	-7,5, 9484	-7, 9540
32	29, 7975	20, 8625	15, 8957	12,5, 9160	10,5, 9296	9, 9394	8, 9469	7, 9526
34	28,5, 7917	20, 8586	15,5, 8927	12,5, 9135	10,5, 9275	9, 9376	8, 9453	7, 9512
36	29,5, 7860	20, 8545	15,5, 8896	12,5, 9110	10,5, 9254	9, 9358	8, 9437	7,5, 9498
38	29,5, 7801	20,5, 8505	16, 8865	13, 9085	11, 9233	9,5, 9340	8, 9420	7, 9483
1.40	-29,5, 7742	-21, 8464	-15,5, 8833	-13, 9059	-10,5, 9211	-9,5, 9321	-8,5, 9404	-7,5, 9469
42	30, 7683	21, 8422	16,5, 8802	13, 9033	11,5, 9190	9,5, 9302	8,5, 9387	7,5, 9454
44	30,5, 7623	21, 8380	16, 8769	13,5, 9007	11,5, 9167	9,5, 9283	8,5, 9370	8, 9439
46	30,5, 7562	21,5, 8338	16,5, 8737	13, 8980	11, 9145	9,5, 9264	8,5, 9353	8,5, 9423
48	31, 7501	21,5, 8295	17, 8704	14, 8954	11,5, 9122	10, 9244	9, 9336	8, 9408
1.50	-31, 7439	-21,5, 8252	-16,5, 8670	-13,5, 8926	-11,5, 9099	-10, 9224	-8,5, 9318	-8, 9392
52	31,5, 7377	22, 8209	17, 8637	14, 8899	11,5, 9076	10, 9204	9, 9301	8, 9376
54	31,5, 7314	22,5, 8165	17, 8603	14, 8871	12, 9053	10,5, 9184	9, 9283	8, 9360
56	31,5, 7251	22,5, 8120	17,5, 8569	14, 8843	12, 9029	10,5, 9163	9,5, 9265	8, 9344
58	32, 7188	22,5, 8075	17,5, 8534	14,5, 8815	12, 9005	10,5, 9142	9, 9246	8,5, 9328
1.60	-32,5, 7124	-22,5, 8030	-17,5, 8499	-14,5, 8786	-12,5, 8981	-10,5, 9121	-9,5, 9228	-8,5, 9311
62	32,5, 7059	23, 7985	18, 8464	14,5, 8757	12, 8956	10,5, 9100	9,5, 9209	8, 9294
64	32,5, 6994	23, 7939	18, 8428	14,5, 8728	12,5, 8932	10,5, 9079	9,5, 9190	9, 9278
66	33, 6929	23,5, 7893	18, 8392	15, 8699	12,5, 8907	11, 9057	9,5, 9171	9,5, 9260
68	33, 6863	23,5, 7846	18,5, 8356	15, 8669	13, 8882	11, 9035	10, 9152	9,5, 9243
1.70	-33, 6797	-23,5, 7799	-18,5, 8319	-15, 8639	-12,5, 8856	-11, 9013	-9,5, 9132	-9, 9226
72	33,5, 6731	24, 7752	18,5, 8282	15,5, 8609	13, 8831	11, 8991	10, 9113	9, 9208
74	33,5, 6664	24, 7704	18,5, 8245	15, 8578	13, 8805	11,5, 8969	10, 9093	9, 9190
76	34, 6597	24, 7656	18,5, 8208	16, 8548	13,5, 8779	11,5, 8946	10,5, 9073	9,5, 9172
78	34, 6529	24,5, 7608	19, 8170	16,5, 8516	13, 8752	11,5, 8923	10, 9052	9, 9154
1.80	-34, 6461	-24,5, 7559	-19, 8132	-15,5, 8485	-13,5, 8726	-12, 8900	-10,5, 9032	-9,5, 9136
82	34, 6393	24,5, 7510	19,5, 8094	16, 8454	13,5, 8699	11,5, 8876	10,5, 9011	9,5, 9117
84	34,5, 6325	25, 7461	19,5, 8055	16, 8422	14, 8672	12, 8853	10,5, 8990	9, 9098
86	34,5, 6256	24,5, 7411	19,5, 8016	16, 8390	13,5, 8644	12, 8829	10,5, 8969	9,5, 9080
88	35, 6187	25,5, 7362	19,5, 7977	16,5, 8358	14, 8617	12, 8805	10,5, 8948	10, 9061
1.90	-34,5, 6117	-25, 7311	-20, 7938	-16,5, 8325	-14, 8589	-12, 8781	-11, 8927	-9,5, 9041
92	35, 6048	25,5, 7261	20, 7898	16,5, 8292	14, 8561	12,5, 8757	10,5, 8905	10, 9022
94	35, 5978	25,5, 7210	20, 7858	16,5, 8259	14, 8533	12, 8732	11, 8884	9,5, 9002
96	35, 5908	25,5, 7159	20,5, 7818	16,5, 8226	14,5, 8505	12,5, 8708	11, 8862	10, 8983
98	35,5, 5838	25,5, 7108	20, 7777	17, 8193	14, 8476	12,5, 8683	11,5, 8840	10, 8963
2.00	+ 0, 5767	+ 0, 7057	+ 0, 7737	+ 0, 8159	+ 0, 8448	+ 0, 8658	+ 0, 8817	+ 0, 8943

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
2.00	5767 — 35	7057 — 26	7737 — 20,5	8159 — 17	8448 — 14,5	8658 — 13	8817 — 11	8943 — 10
02	5697 35,5	7005 26	7696 20,5	8125 17	8419 15	8632 12,5	8795 11,5	8923 10,5
04	5626 35,5	6953 26	7655 21	8091 17	8389 14,5	8607 13	8772 11,5	8902 10
06	5555 35,5	6901 26	7613 20,5	8057 17,5	8360 14,5	8581 13	8749 11,5	8882 10,5
08	5484 36	6849 26,5	7572 21	8022 17,5	8331 15	8555 13	8726 11,5	8861 10,5
2.10	5412 — 35,5	6796 — 26,5	7530 — 21	7987 — 17,5	8301 — 15	8529 — 13	8703 — 11,5	8840 — 10,5
12	5341 36	6743 26,5	7488 21,5	7952 17,5	8271 15	8503 13	8680 11,5	8819 10,5
14	5269 35,5	6690 26,5	7445 21	7917 17,5	8241 15,5	8477 13,5	8657 12	8798 10,5
16	5198 36	6637 26,5	7403 21,5	7882 18	8210 15	8450 13,5	8633 12	8777 10,5
18	5126 36	6584 27	7360 21	7846 17,5	8180 15,5	8423 13	8609 12	8756 11
2.20	5054 — 36	6530 — 27	7318 — 22	7811 — 18	8149 — 15,5	8397 — 14	8585 — 12	8734 — 11
22	4982 36	6476 27	7274 21,5	7775 18,5	8118 15,5	8369 13,5	8561 12	8712 11
24	4910 35,5	6422 27	7231 21,5	7738 18	8087 15,5	8342 13,5	8537 12,5	8690 11
26	4839 36	6368 27	7188 22	7702 18	8056 15,5	8315 14	8512 12	8668 11
28	4767 36	6314 27	7144 22	7666 18,5	8025 16	8287 13,5	8488 12,5	8646 11
2.30	4695 — 36	6260 — 27,5	7100 — 22	7629 — 18,5	7993 — 16	8260 — 14	8463 — 12,5	8624 — 11
32	4623 36	6205 27,5	7056 22	7592 18,5	7961 16	8232 14	8438 12,5	8602 11,5
34	4551 36	6150 27	7012 22	7555 18,5	7929 16	8204 14,5	8413 12,5	8579 11,5
36	4479 36	6096 27,5	6968 22	7518 19	7897 16	8175 14	8388 12,5	8556 11,5
38	4407 36	6041 27,5	6924 22,5	7480 18,5	7865 16	8147 14	8363 13	8533 11,5
2.40	4335 — 36	5986 — 27,5	6879 — 22,5	7443 — 19,5	7833 — 16,5	8119 — 14,5	8337 — 12,5	8510 — 11,5
42	4263 36	5931 27,5	6834 22,5	7404 18,5	7800 16,5	8090 14,5	8312 13	8487 11,5
44	4191 35,5	5876 28	6789 22,5	7367 18,5	7767 16	8061 14,5	8286 13	8464 11,5
46	4120 36	5820 27,5	6744 22,5	7330 19,5	7735 16,5	8032 14,5	8260 13	8441 12
48	4048 35,5	5765 27,5	6699 22,5	7291 19	7702 17	8003 14,5	8234 13	8417 12
2.50	3977 — 36	5710 — 28	6654 — 22,5	7253 — 19	7668 — 16,5	7974 — 15	8208 — 13	8393 — 11,5
52	3905 35,5	5654 27,5	6609 23	7215 19,5	7635 16,5	7944 14,5	8182 13,5	8370 12
54	3834 35,5	5599 28	6563 23	7176 19,5	7602 17	7915 15	8155 13	8346 12
56	3763 35,5	5543 28	6517 22,5	7137 19	7568 17	7885 15	8129 13,5	8322 12,5
58	3692 35	5487 27,5	6472 23	7099 19,5	7534 16,5	7855 15	8102 13,5	8297 12
2.60	3622 — 35,5	5432 — 28	6426 — 23	7060 — 19,5	7501 — 17,5	7825 — 15	8075 — 13,5	8273 — 12
62	3551 35	5376 28	6380 23	7021 20	7466 17	7795 15	8048 13,5	8249 12,5
64	3481 35	5320 27,5	6334 23	6981 19,5	7432 17	7765 15	8021 13,5	8224 12,5
66	3411 35	5265 28	6288 23	6942 19,5	7398 17	7735 15,5	7994 14	8199 12
68	3341 35	5209 28	6242 23,5	6903 20	7364 17,5	7704 15	7966 13,5	8175 12,5
2.70	3271 — 34,5	5153 — 28	6195 — 23	6863 — 19,5	7329 — 17	7674 — 15,5	7939 — 13,5	8150 — 12,5
72	3202 34,5	5097 28	6149 23	6824 20	7295 17,5	7643 15,5	7912 14	8125 12,5
74	3133 34,5	5041 27,5	6103 23,5	6784 20	7260 17,5	7612 15	7884 14	8100 13
76	3064 34,5	4986 28	6056 23,5	6744 20	7225 17,5	7582 16	7856 14	8074 12,5
78	2995 34,5	4930 28	6009 23	6704 20	7190 17,5	7550 15,5	7828 14	8049 12,5
2.80	2926 — 34	4874 — 27,5	5963 — 23,5	6664 — 20	7155 — 17,5	7519 — 15,5	7800 — 14	8024 — 13
82	2858 33,5	4819 28	5916 23,5	6624 20	7120 17,5	7488 15,5	7772 14	7998 13
84	2791 34	4763 27,5	5869 23	6584 20,5	7085 17,5	7457 16	7744 14,5	7972 13
86	2723 33,5	4708 28	5823 23,5	6543 20	7050 18	7425 15,5	7715 14	7946 12,5
88	2656 33,5	4652 27,5	5776 23,5	6503 20	7014 17,5	7394 16	7687 14,5	7921 13
2.90	2589 — 33	4597 — 28	5729 — 23,5	6463 — 20,5	6979 — 18	7362 — 16	7658 — 14	7895 — 13,5
92	2523 33	4541 27,5	5682 23,5	6422 20	6943 18	7330 16	7630 14,5	7868 13
94	2457 33	4486 27,5	5635 23,5	6382 20,5	6907 18	7298 16	7601 14,5	7842 13
96	2391 33	4431 27,5	5588 23,5	6341 20,5	6871 17,5	7266 16	7572 14,5	7816 13,5
98	2325 32,5	4376 27,5	5541 23,5	6300 20,5	6836 18	7234 16	7543 14,5	7789 13
3.00	2260	4321	5494	6259	6800	7202	7514	7763
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
3,00	2260 — 32	4321 — 27,5	5494 — 23	6259 — 20	6800 — 18	7202 — 16	7514 — 14,5	7763 — 13,5
02	2196 32	4266 27,5	5448 24	6219 20,5	6764 18,5	7170 16	7485 14,5	7736 13
04	2132 32	4211 27,5	5400 23	6178 20,5	6727 18	7138 16,5	7456 15	7710 13,5
06	2068 32	4156 27	5354 23,5	6137 20,5	6691 18	7105 16	7426 14,5	7683 13,5
08	2004 31,5	4102 27	5307 23,5	6096 20,5	6655 18	7073 16,5	7397 15	7656 13,5
3,10	1941 — 31	4048 — 27,5	5260 — 23,5	6055 — 20,5	6619 — 18,5	7040 — 16,5	7367 — 14,5	7629 — 13,5
12	1879 31	3993 27	5213 23,5	6014 20,5	6582 18	7007 16	7338 15	7602 13,5
14	1817 31	3939 27	5166 23,5	5973 21	6546 18,5	6975 16,5	7308 15	7575 13,5
16	1755 30,5	3885 27	5119 23,5	5931 20,5	6509 18,5	6942 16,5	7278 15	7548 14
18	1694 30,5	3831 26,5	5072 23,5	5890 20,5	6473 18,5	6909 16,5	7248 15	7520 13,5
3,20	1633 — 30	3778 — 27	5025 — 23	5849 — 20,5	6436 — 18,5	6876 — 16,5	7218 — 15	7493 — 14
22	1573 29,5	3724 26,5	4979 23,5	5808 20,5	6399 18	6843 16,5	7188 15	7465 13,5
24	1514 30	3671 26,5	4932 23,5	5767 20,5	6363 18,5	6810 16,5	7158 15	7438 14
26	1454 29	3618 26,5	4885 23	5726 21	6326 18,5	6777 17	7128 15	7410 14
28	1396 29,5	3565 26,5	4839 23,5	5684 20,5	6289 18,5	6743 16,5	7098 15	7382 13,5
3,30	1337 — 28,5	3512 — 26,5	4792 — 23,5	5643 — 20,5	6252 — 18,5	6710 — 16,5	7068 — 15,5	7355 — 14
32	1280 29	3459 26	4745 23	5602 21	6215 18,5	6677 17	7037 15	7327 14
34	1222 28	3407 26	4699 23	5560 20,5	6178 18,5	6643 16,5	7007 15,5	7299 14
36	1166 28	3355 26	4653 23,5	5519 20,5	6141 18,5	6610 17	6976 15	7271 14
38	1110 28	3303 26	4606 23	5478 20,5	6104 18,5	6576 16,5	6946 15,5	7243 14
3,40	1054 — 27,5	3251 — 26	4560 — 23	5437 — 21	6067 — 18,5	6543 — 17	6915 — 15,5	7215 — 14,5
42	0999 27	3199 25,5	4514 23	5395 20,5	6030 18,5	6509 16,5	6884 15	7186 14
44	0945 27	3148 25,5	4468 23	5354 20,5	5993 18,5	6476 17	6854 15,5	7158 14
46	0891 26,5	3097 25,5	4422 23	5313 20,5	5956 18,5	6442 17	6823 15,5	7130 14,5
48	0838 26,5	3046 25,5	4376 23	5272 20,5	5919 19	6408 17	6792 15,5	7101 14
3,50	0785 — 26	2995 — 25	4330 — 23	5231 — 21	5881 — 18,5	6374 — 16,5	6761 — 15,5	7073 — 14,5
52	0733 26	2945 25	4284 22,5	5189 20,5	5844 18,5	6341 17	6730 15,5	7044 14
54	0681 25,5	2895 25	4239 23	5148 20,5	5807 18,5	6307 17	6699 15,5	7016 13,5
56	0630 25	2845 25	4193 22,5	5107 20,5	5770 18,5	6273 17	6668 15,5	6987 14,5
58	0580 25	2795 24,5	4148 22,5	5066 20,5	5733 19	6239 17	6637 15,5	6958 14
3,60	0530 — 24,5	2746 — 24,5	4103 — 23	5025 — 20,5	5695 — 18,5	6205 — 17	6606 — 15,5	6930 — 14,5
62	0481 24	2697 24,5	4057 22,5	4984 20,5	5658 18,5	6171 17	6575 16	6901 14,5
64	0438 24	2648 24,5	4012 22,5	4943 20,5	5621 18,5	6137 17	6543 15,5	6872 14,5
66	0385 23,5	2599 24	3967 22	4902 20	5584 19	6103 17	6512 15,5	6843 14,5
68	0338 23,5	2551 24	3923 22,5	4862 20,5	5546 18,5	6069 17	6481 16	6814 14,5
3,70	02910 — 230	2503 — 24	3878 — 22,5	4821 — 20,5	5509 — 18,5	6035 — 17	6449 — 15,5	6785 — 14,5
72	02450 226,5	2455 23,5	3833 22	4780 20,5	5472 18,5	6001 17,5	6418 15,5	6756 14,5
74	01997 223,5	2408 23,5	3789 22	4739 20	5435 18,5	5966 17	6387 16	6727 14,5
76	01550 220,5	2361 23,5	3745 22	4699 20,5	5398 19	5932 17	6355 15,5	6698 16,5
78	01109 217	2314 23	3701 22	4658 20	5360 18,5	5898 17	6324 16	6669 15
3,80	00675 — 214	2268 — 23	3657 — 22	4618 — 20,5	5323 — 18,5	5864 — 17	6292 — 16	6639 — 14,5
82	00247 210,5	2222 23	3613 22	4577 20	5286 18,5	5830 17	6260 15,5	6610 14,5
84	*00174 207	2176 23	3569 21,5	4537 20	5249 18,5	5796 17	6229 16	6581 15
86	00588 204	2130 22,5	3526 21,5	4497 20,5	5212 18,5	5762 17,5	6197 15,5	6551 14,5
88	00996 200,5	2085 22,5	3483 22	4456 20	5175 18,5	5727 17	6166 16	6522 14,5
3,90	01397 — 197,5	2040 — 22	3439 — 21,5	4416 — 20	5138 — 18,5	5693 — 17	6134 — 16	6493 — 15
92	01792 193,5	1996 22,5	3396 21	4376 20	5101 18,5	5659 17	6102 15,5	6463 14,5
94	02179 190,5	1951 22	3354 21,5	4336 20	5064 18,5	5625 17	6071 16	6434 15
96	02560 187,5	1907 21,5	3311 21	4296 19,5	5027 18,5	5591 17	6039 16	6404 14,5
98	02935 183,5	1864 21,5	3269 21,5	4257 20	4990 18,5	5557 17,5	6007 15,5	6375 15
4,00	03302 — 0,	1821 + 0,	3226 + 0,	4217 + 0,	4953 + 0,	5522 + 0,	5976 + 0,	6345 + 0,

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	- 0,0	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
4,00	3302 — 180,5	1821 — 21,5	3226 — 21	4217 — 20	4953 — 18	5522 — 17	5976 — 16	6345 — 14,5
02	3663 177	1778 27,5	3184 21	4177 19,5	4917 18,5	5488 17	5944 16	6316 15
04	4017 173,5	1735 21	3142 20,5	4138 19,5	4880 18,5	5454 17	5912 16	6286 15
06	4364 170	1693 21	3101 21	4099 20	4843 18,5	5420 17	5880 16,5	6256 14,5
08	4704 167	1651 20,5	3059 20,5	4059 19,5	4806 18	5386 17	5849 15,5	6227 15
4,10	5038 — 163	1610 — 20,5	3018 — 20,5	4020 — 19,5	4770 — 18,5	5352 — 17	5817 — 16	6197 — 15
12	5364 160	1569 20,5	2977 20,5	3981 19,5	4733 18	5318 17	5785 16	6167 15
14	5684 156,5	1528 20	2936 20,5	3942 19,5	4697 18,5	5284 17	5753 15,5	6137 14,5
16	5997 153	1488 20	2895 20	3903 19	4660 18	5250 17	5722 16	6108 15
18	6303 149,5	1448 20	2855 20,5	3865 19,5	4624 18	5216 17	5690 16	6078 14,5
4,20	6602 — 146,5	1408 — 19,5	2814 — 20	3826 — 19,5	4588 — 18,5	5182 — 17	5658 — 16	6049 — 15
22	6895 142,5	1369 19,5	2774 20	3787 19	4551 18	5148 17	5626 15,5	6019 15
24	7180 139,5	1330 19	2734 19,5	3749 19	4515 18	5114 17	5595 16	5989 15
26	7459 135,5	1292 19	2695 20	3711 19	4479 18	5080 17	5563 16	5959 15
28	7730 132,5	1254 19	2655 19,5	3673 19	4443 18	5046 17	5531 16	5929 14,5
4,30	7995 — 129	1216 — 18,5	2616 — 19,5	3635 — 19	4407 — 18	5012 — 16,5	5499 — 15,5	5900 — 15
32	8253 125,5	1179 18,5	2577 19,5	3597 19	4371 18	4979 17	5468 16	5870 15
34	8504 122,5	1142 18,5	2538 19	3559 18,5	4335 17,5	4945 17	5436 16	5840 15
36	8749 118,5	1105 18	2500 19	3522 19	4300 18	4911 16,5	5404 15,5	5810 14,5
38	8986 115,5	1069 18	2462 19	3484 18,5	4264 17,5	4878 17	5373 16	5781 15
4,40	9217 — 112	1033 — 17,5	2424 — 19	3447 — 18,5	4229 — 18	4844 — 17	5341 — 16	5751 — 15
42	9441 108,5	0998 17,5	2386 19	3410 18,5	4193 17,5	4810 16,5	5309 15,5	5721 15
44	9658 105,5	0963 17	2348 18,5	3373 19,5	4158 18	4777 16,5	5278 16	5691 15
46	9869 101,5	0929 17,5	2311 18,5	3336 18,5	4122 17,5	4744 17	5246 15,5	5661 15
48	*0072 98,5	0894 16,5	2274 18,5	3299 18	4087 17,5	4710 16,5	5215 16	5631 14,5
4,50	0269 — 95,5	0861 — 17	2237 — 18	3263 — 18,5	4052 — 17,5	4677 — 17	5183 — 15,5	5602 — 15
52	0460 91,5	0827 16,5	2201 18,5	3226 18	4017 17,5	4643 16,5	5152 16	5572 15
54	0643 88,5	0794 16	2164 18	3190 18	3982 17,5	4610 16,5	5120 15,5	5542 15
56	0820 85,5	0762 16	2128 18	3154 18	3947 17,5	4577 16,5	5089 16	5512 14,5
58	0991 81,5	0730 16	2092 17,5	3118 18	3912 17	4544 16,5	5057 15,5	5483 15
4,60	1154 — 79	06979 — 156,5	2057 — 18	3082 — 17,5	3878 — 17,5	4511 — 16,5	5026 — 15,5	5453 — 15
62	1312 75	06666 155	2021 17,5	3047 18	3843 17	4478 16,5	4995 16	5423 14,5
64	1462 72,5	06356 152,5	1986 17	3011 17,5	3809 17	4445 16,5	4963 15,5	5394 15
66	1607 68,5	06051 150,5	1952 17,5	2976 17,5	3775 17,5	4412 16,5	4932 15,5	5364 15
68	1744 66	05750 148,5	1917 17	2941 17,5	3740 17	4379 16	4901 15,5	5334 14,5
4,70	1876 — 62,5	05453 — 146,5	1883 — 17	2906 — 17,5	3706 — 17	4347 — 16,5	4870 — 15,5	5305 — 15
72	2001 59	05160 144,5	1849 17	2871 17	3672 17	4314 16,5	4839 16	5275 14,5
74	2119 56,5	04871 142	1815 16,5	2837 17,5	3638 16,5	4281 16	4807 15,5	5246 15
76	2232 53	04587 140,5	1782 17	2802 17	3605 17	4249 16,5	4776 15,5	5216 15
78	2338 49,5	04306 138	1748 16,5	2768 17	3571 17	4216 16	4745 15,5	5186 14,5
4,80	2437 — 47	04030 — 136,5	1715 — 16	2734 — 17	3537 — 16,5	4184 — 16	4714 — 15	5157 — 15
82	2531 44	03757 134	1683 16,5	2700 17	3504 16,5	4152 16	4684 15,5	5127 16,5
84	2619 40,5	03489 132	1650 16	2666 16,5	3471 16,5	4120 16,5	4653 15,5	5098 14,5
86	2700 37,5	03225 130	1618 16	2633 16,5	3438 16,5	4087 16	4622 15,5	5069 15
88	2775 35	02965 128	1586 15,5	2600 16,5	3405 16,5	4055 16	4591 15,5	5039 14,5
4,90	2845 — 31,5	02709 — 126	1555 — 16	2567 — 16,5	3372 — 16,5	4023 — 16	4560 — 15	5010 — 15
92	2908 29	02457 124	1523 15,5	2534 16,5	3339 16,5	3991 15,5	4530 15,5	4980 14,5
94	2966 25,5	02209 122	1492 15	2501 16,5	3306 16	3960 16	4499 15	4951 14,5
96	3017 23	01965 119,5	1462 15,5	2468 16	3274 16,5	3928 16	4469 15,5	4922 14,5
98	3063 20	01726 118	1431 15	2436 16	3241 16	3896 15,5	4438 15	4893 15
5,00	3103 — 0,1	01490 + 0,	1401 + 0,	2404 + 0,	3209 + 0,	3865 + 0,	4408 + 0,	4863 + 0,

Продолжение табл. 42

$x$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$	$J_5(x)$	$J_6(x)$	$J_7(x)$	$J_8(x)$
	-0,1	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,
5.00	3103 — 17,5	1490 — 115,5	4010 — 150	2404 — 16	3209 — 16	3865 — 16	4408 — 15,5	4863 — 14,5
02	3138 14	1259 114	3710 148	2372 16	3177 16	3833 15,5	4377 15	4834 14,5
04	3166 12	1031 111,5	3414 146,5	2340 16	3145 16	3802 15,5	4347 15	4805 14,5
06	3190 8,5	0808 109,5	3121 145,5	2308 15,5	3113 16	3771 15,5	4317 15	4776 14,5
08	3207 6	0589 108	2830 144	2277 15,5	3081 15,5	3740 15,5	4287 15,5	4747 14,5
5.10	3219 — 3,5	0373 — 105,5	2542 — 142	2246 — 15,5	3050 — 16	3709 — 15,5	4256 — 15	4718 — 14,5
12	3226 — 1	0162 103,5	2258 141,5	2215 15,5	3018 15,5	3678 15,5	4226 15	4689 14,5
14	3228 — 2	*0045 101,5	1975 139,5	2184 15,5	2987 15,5	3647 15,5	4196 15	4660 14,5
16	3224 4,5	0248 99,5	1696 138	2153 15	2956 15,5	3616 15,5	4166 14,5	4631 14
18	3215 7	0447 98	1420 137	2123 15	2925 15,5	3585 15	4137 15	4603 14,5
5.20	3201 — 9,5	0643 — 95,5	1146 — 135	2093 — 15	2894 — 15,5	3555 — 15,5	4107 — 15	4574 — 14,5
22	3182 12,5	0834 93,5	0876 134	2063 15	2863 15,5	3524 15	4077 14,5	4545 14,5
24	3157 14,5	1021 91,5	0608 132,5	2033 15	2832 15	3494 15	4048 15	4516 14
26	3128 17	1204 90	0343 131	2003 14,5	2802 15	3464 15	4018 14,5	4488 14,5
28	3094 19,5	1384 87,5	0081 129,5	1974 14,5	2772 15	3434 15	3989 15	4459 14
5.30	3055 — 22	1559 — 86	*9822 — 128	1945 — 14,5	2742 — 15	3404 — 15	3959 — 14,5	4431 — 14,5
32	3011 24	1731 83,5	9566 127	1916 14,5	2712 15	3374 15	3930 14,5	4402 14
34	2963 26,5	1898 82	9312 125	1887 14	2682 15	3344 15	3901 15	4374 14
36	2910 28,5	2062 80	9062 124	1859 14,5	2652 14,5	3314 14,5	3871 14,5	4346 14,5
38	2853 31	2222 78	8814 122	1830 14	2623 15	3285 15	3842 14,5	4317 14
5.40	2791 — 33,5	2378 — 76,5	8570 — 121	1802 — 14	2593 — 14,5	3255 — 14,5	3813 — 14,5	4289 — 14
42	2724 35,5	2531 74	8329 119,5	1774 13,5	2564 14,5	3226 15	3784 14	4261 14
44	2653 37,5	2679 72,5	8089 118	1747 14	2535 14,5	3196 14,5	3756 14,5	4233 14
46	2578 39,5	2824 70,5	7853 117	1719 13,5	2506 14,5	3167 14,5	3727 14,5	4205 14
48	2499 41,5	2965 69	7619 115	1692 13,5	2477 14	3138 14,5	3698 14	4177 14
5.50	2416 — 43,5	3103 — 66,5	7389 — 113,5	16648 — 134	2449 — 14,5	3109 — 14	3670 — 14,5	4149 — 14
52	2329 46	3236 65	7162 112,5	16380 133	2420 14	3081 14,5	3641 14	4121 14
54	2237 47,5	3366 63	6937 111	16114 132	2392 14	3052 14,5	3613 14	4093 13,5
56	2142 49,5	3492 61,5	6715 109,5	15850 131	2364 14	3023 14	3585 14,5	4066 14
58	2043 51,5	3615 59,5	6496 108	15588 130	2336 14	2995 14	3556 14	4038 14
5.60	1940 — 53	3734 — 58	6280 — 106,5	15328 — 128,5	2308 — 13,5	2967 — 14	3528 — 14	4010 — 13,5
62	1834 55	3850 55,5	6067 105	15071 127,5	2281 14	2939 14	3500 14	3983 14
64	1724 56,5	3961 54,5	5857 104	14816 126,5	2253 13,5	2911 14	3472 14	3955 13,5
66	1611 58,5	4070 52,5	5649 102	14563 125,5	2226 13,5	2883 14	3444 13,5	3928 13,5
68	1494 60	4175 50,5	5445 101	14312 124,5	2199 13,5	2855 14	3417 14	3901 14
5.70	1374 — 62	4276 — 49	5243 — 99,5	14063 — 123	2172 — 13,5	2827 — 13,5	3389 — 14	3873 — 13,5
72	1250 63,5	4374 47	5044 98	13817 122,5	2145 13,5	2800 14	3361 13,5	3846 13,5
74	1123 64,5	4468 45,5	4848 97	13572 121	2118 13	2772 13,5	3334 13,5	3819 13,5
76	0994 66,5	4559 44	4654 95	13330 120	2092 13	2745 13,5	3307 14	3792 13,5
78	0861 68	4647 42	4464 94	13090 118,5	2066 13	2718 13,5	3279 13,5	3765 13,5
5.80	0725 + 69,5	4731 — 40,5	4276 — 92,5	12853 — 118	2040 — 13	2691 — 13,5	3252 — 13,5	3738 — 13
82	*9853 70,5	4812 39	4091 91	12617 116,5	2014 13	2664 13,5	3225 13,5	3712 13,5
84	0445 72	4890 37,5	3909 89,5	12384 115,5	1988 13	2637 13	3198 13,5	3685 13,5
86	0301 73,5	4965 35,5	3730 88,5	12153 114,5	1962 12,5	2611 13,5	3171 13	3658 13
88	0154 74,5	5036 34	3553 87	11924 113,5	1937 12,5	2584 13	3145 13,5	3632 13,5
5.90	0005 + 76	5104 — 32,5	3379 — 85,5	11697 — 112	1912 — 12,5	2558 — 13	3118 — 13,5	3605 — 13
92	*9853 77	5169 30,5	3208 84,5	11473 111,5	1887 12,5	2532 13,5	3091 13	3579 13
94	9699 78,5	5230 29,5	3039 82,5	11250 110	1862 12,5	2505 12,5	3065 13	3553 13,5
96	9542 79	5289 28	2874 81,5	11030 109	1837 12	2480 13	3039 13	3526 13
98	9384 80,5	5345 26	2711 80,5	10812 107,5	1813 12,5	2454 13	3013 13,5	3500 13
< 00	9223	5397	2550	10597	1788	2428	2986	3474
	0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,	+ 0,	+ 0,
6.00	9223 + 81,5	5397 - 25	2550 - 78,5	0597 - 107	7881 - 121	2428 - 12,5	2986 - 13	3474 - 13
02	9060 82,5	5447 23	2393 77,5	0383 105,5	7639 120	2403 13	2960 12,5	3448 13
04	8895 83,5	5493 22	2238 76	0172 104,5	7399 119,5	2377 12,5	2935 13	3422 12,5
06	8728 84,5	5537 20	2086 75	*9963 103,5	7160 118	2352 12,5	2909 13	3397 13
08	8559 85	5577 19	1936 73,5	9756 102,5	6924 117,5	2327 12,5	2883 13	3371 13
6.10	8389 + 86	5615 - 17,5	1789 - 72	9551 - 101	6689 - 116,5	2302 - 12,5	2857 - 12,5	3345 - 12,5
12	8217 87	5650 16	1645 71	9349 100	6456 116	2277 12,5	2832 12,5	3320 13
14	8043 87,5	5682 15	1503 69,5	9149 99,5	6224 114,5	2252 12	2807 13	3294 12,5
16	7868 88,5	5712 13	1364 68,5	8950 98	5995 114	2228 12,5	2781 12,5	3269 12,5
18	7691 89	5738 12	1227 67	8754 96,5	5767 113	2203 12	2756 12,5	3244 13
6.20	7513 + 89,5	5762 - 11	1093 - 65,5	8561 - 96	5541 - 112	2179 - 12	2731 - 12,5	3218 - 12,5
22	7334 90	5784 9	0962 64,5	8369 94,5	5317 111,5	2155 12	2706 12	3193 12,5
24	7154 91	5802 8	0833 63	8180 94	5094 110,5	2131 12	2682 12,5	3168 12,5
26	6972 91	5818 7	0707 62	7992 92,5	4873 109,5	2107 12	2657 12	3143 12
28	6790 92	5832 5,5	0583 60,5	7807 91,5	4654 108,5	2083 11,5	2633 12,5	3119 12,5
6.30	6606 + 92,5	5843 - 4	0462 - 59,5	7624 - 90,5	4437 - 107,5	2060 - 11,5	2608 - 12	3094 - 12,5
32	6421 92,5	5851 3	0343 58,5	7443 89	4222 107	2037 12	2584 12	3069 12
34	6236 93	5857 2	0226 57	7265 88,5	4008 104	2013 11,5	2560 12	3045 12,5
36	6050 93,5	5861 - 0,5	0112 55,5	7088 87	3796 105	1990 11,5	2536 12	3020 12
38	5863 93,5	5862 + 0,5	0001 54,5	6914 86,5	3586 104	1967 11,5	2512 12	2996 12
6.40	5676 + 94	5861 + 2	*0108 - 53,5	6741 - 85	3378 - 103,5	1944 - 11	2488 - 12	2972 - 12
42	5488 94	5857 2,5	0215 52	6571 84	3171 102	1922 11,5	2464 12	2948 12,5
44	5300 94	5852 4	0319 51	6403 83	2967 101,5	1899 11	2440 11,5	2923 11,5
46	5112 94,5	5844 5,5	0421 50	6237 82	2764 100,5	1877 11	2417 11,5	2900 12
48	4923 94,5	5833 6	0521 48,5	6073 80,5	2563 100	1855 11,5	2394 12	2876 12
6.50	4734 + 95	5821 + 7	0618 - 47,5	5912 - 80	2363 - 98,5	1832 - 10,5	2370 - 11,5	2852 - 12
52	4544 94,5	5807 8,5	0713 46	5752 79	2166 98	1811 11	2347 11,5	2828 11,5
54	4355 94,5	5790 9	0805 45,5	5594 77,5	1970 97	1789 11	2324 11,5	2805 12
56	4166 95	5772 10,5	0896 44	5439 77	1776 96,5	1767 10,5	2301 11	2781 11,5
58	3976 94,5	5751 11,5	0984 43	5285 75,5	1583 95	1746 11	2279 11,5	2758 11,5
6.60	3787 + 94,5	5728 + 12	1070 - 41,5	5134 - 75	1393 - 94,5	17242 - 104	2256 - 11	2735 - 12
62	3598 94	5704 13	1153 41	4984 73,5	1204 93,5	17030 105	2234 11,5	2711 11,5
64	3410 94,5	5678 14,5	1235 39,5	4837 72,5	1017 92,5	16820 104,5	2211 11	2688 11,5
66	3221 94	5649 15	1314 38,5	4692 71,5	0832 92	16611 104	2189 11	2665 11
68	3033 93,5	5619 16	1391 37,5	4549 71	0648 91	16403 103	2167 11	2643 11,5
6.70	2846 + 93,5	5587 + 16,5	1466 - 36	4407 - 69,5	0466 - 90	16197 - 102	2145 - 11	2620 - 11,5
72	2659 93	5554 17,5	1538 35,5	4268 68,5	0286 89	15993 101,5	2123 11	2597 11
74	2473 93,5	5519 18,5	1609 34,5	4131 67,5	0108 88	15790 101	2101 10,5	2575 11,5
76	2287 92	5482 19,5	1678 33	3996 67	*9932 87,5	15588 100	2080 11	2552 11
78	2102 92	5443 20	1744 32,5	3862 65,5	9757 86,5	15388 99,5	2058 10,5	2530 11
6.80	1918 + 91,5	5403 + 21	1809 - 31	3731 - 64,5	9584 - 85,5	15189 - 98,5	2037 - 11	2508 - 11
82	1735 91	5361 21,5	1871 30	3602 64	9413 85	14992 97,5	2015 10,5	2486 11
84	1553 91	5318 22,5	1931 29,5	3474 62,5	9243 84	14797 97	1994 10,5	2464 11
86	1371 90	5273 23	1990 28	3349 62	9075 83	14603 96,5	1973 10,5	2442 11
88	1191 89,5	5227 24	2046 27,5	3225 60,5	8909 82	14410 95,5	1952 10	2420 11
6.90	1012 + 89	5179 + 24,5	2101 - 26	3104 - 60	8745 - 81,5	14219 - 95	1932 - 10,5	2398 - 10,5
92	0834 88,5	5130 25	2153 25,5	2984 59	8582 80,5	14029 94	1911 10	2377 11
94	0657 88	5080 26	2204 24,5	2866 58	8421 79,5	13841 93,5	1891 10,5	2355 10,5
96	04 87	5028 26,5	2253 23,5	2750 57	8262 79	13654 92,5	1870 10	2334 10,5
98	0307 86,5	4975 27	2300 22,5	2636 56	8104 77,5	13469 92	1850 10	2313 11
7.00	0134 - 0,0	4921 - 0,0	2345 - 0,0	2524 + 0,0	7949 + 0,0	13285 + 0,	1830 + 0,	2291 + 0,

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,
7,00	0134 + 86	4921 + 27,5	2345 - 21,5	2524 - 55,5	7949 - 77,5	3285 - 91	830 - 10	2291 - 10,5
02	*0038 85	4866 + 28,5	2388 21	2413 54	7794 76	3103 90,5	810 10	2270 10,5
04	0208 84	4809 28,5	2430 19,5	2305 53,5	7642 75,5	2922 89,5	790 10	2249 10
06	0376 83,5	4752 29,5	2469 19	2198 52,5	7491 74,5	2743 89	770 9,5	2229 10,5
08	0543 83	4693 30	2507 18	2093 51,5	7342 73,5	2565 88	751 10	2208 10,5
7,10	0709 + 81,5	4633 + 30	2543 - 17,5	1990 - 50,5	7195 - 73	2389 - 87,5	7311 - 96,5	2187 - 10
12	0872 81	4573 31	2578 16,5	1889 50	7049 72	2214 86,5	7118 96	2167 10,5
14	1034 80	4511 31	2611 15,5	1789 48,5	6905 71,5	2041 86	6926 95,5	2146 10
16	1194 79,5	4449 32	2642 14,5	1692 48	6762 70	1869 85,5	6735 95	2126 10
18	1353 78	4385 32	2671 14	1596 47	6622 70	1698 84	6545 94	2106 10
7,20	1509 + 77,5	4321 + 33	2699 - 13	1502 - 46,5	6482 - 68,5	1530 - 84	6357 - 93,5	2086 - 10
22	1664 76	4255 32,5	2725 12,5	1409 45,5	6345 68	1362 83	6170 93	2066 10
24	1816 75,5	4190 33,5	2750 11,5	1318 44,5	6209 67	1196 82,5	5984 92,5	2046 10
26	1967 74,5	4123 34	2773 10,5	1229 43,5	6075 66,5	1031 81,5	5799 91,5	2026 9,5
28	2116 73	4055 34	2794 10,5	1142 43	5942 65,5	0868 80,5	5616 91	2007 10
7,30	2262 + 72,5	3987 + 34,5	2815 - 9	1056 - 42	5811 - 65	0707 - 80,5	5434 - 90,5	1987 - 9,5
32	2407 71	3918 34,5	2833 8,5	0972 41	5681 63,5	0546 79	5253 89,5	1968 9,5
34	2549 70	3849 35	2850 8	0890 40,5	5554 63,5	0388 79	5074 89	1949 10
36	2689 69	3779 35,5	2866 7	0809 39,5	5427 62	0230 78	4896 88,5	1929 9,5
38	2827 68	3708 35,5	2880 6,5	0730 38,5	5303 62	0074 77	4719 88	1910 9,5
7,40	2963 + 66,5	3637 + 35,5	2893 - 5,5	0653 - 38	5179 - 60,5	*9920 - 76,5	4543 - 87	1891 - 9,5
42	3096 65,5	3566 36	2904 5	0577 37	5058 60	9767 76	4369 86,5	1872 9
44	3227 64,5	3494 36,5	2914 4,5	0503 36,5	4938 59,5	9615 75	4196 86	1854 9,5
46	3356 63,5	3421 36,5	2923 3,5	0430 35,5	4819 58,5	9465 74,5	4024 85	1835 9
48	3483 62	3348 36,5	2930 3	0359 35	4702 57,5	9316 73,5	3854 84,5	1817 9,5
7,50	3607 + 60,5	3275 + 37	2936 - 2,5	0289 - 34	4587 - 57	9169 - 73	3685 - 84	17982 - 91,5
52	3728 59,5	3201 36,5	2941 1,5	0221 33	4473 56	9023 72	3517 83,5	17799 91
54	3847 58,5	3128 37,5	2944 1,5	0155 32,5	4361 55,5	8879 72	3350 83	17617 90
56	3964 57	3053 37	2947 - 0,5	0090 32	4250 54,5	8735 70,5	3184 82	17437 90
58	4078 56	2979 37,5	2948 0	0026 31	4141 54	8594 70,5	3020 81,5	17257 89
7,60	4190 + 54,5	2904 + 37	2948 + 0,5	*0036 - 30,5	4033 - 53	8453 - 69	2857 - 80,5	17079 - 88,5
62	4299 53	2830 37,5	2947 1,5	0097 29,5	3927 52,5	8315 69	2696 80,5	16902 88
64	4405 52	2755 37,5	2944 1,5	0156 28,5	3822 52	8177 68	2535 79,5	16726 87,5
66	4509 51	2680 37,5	2941 2,5	0213 28,5	3718 51	8041 67,5	2376 78,5	16551 87
68	4611 49	2605 38	2936 3	0270 27	3616 50	7906 66,5	2219 78,5	16377 86,5
7,70	4709 + 48	2529 + 37,5	2930 + 3,5	0324 - 27	3516 - 49,5	7773 - 66	2062 - 77,5	16204 - 85,5
72	4805 47	2454 37,5	2923 3,5	0378 26	3417 49	7641 65,5	1907 77,5	16033 85,5
74	4899 45,5	2379 37,5	2916 4,5	0430 25,5	3319 48	7510 64,5	1752 76	15862 84,5
76	4990 44	2304 37,5	2907 5	0481 24,5	3223 47,5	7381 64	1600 76	15693 84
78	5078 42,5	2229 37,5	2897 5,5	0530 24	3128 46,5	7253 63,5	1448 75	15525 83,5
7,80	5163 + 41,5	2154 + 37,5	2886 + 6	0578 - 23,5	3035 - 46	7126 - 62	1298 - 74,5	15358 - 83
82	5246 40	2079 37,5	2874 6	0625 22,5	2943 45	7002 62	1149 74	15192 82,5
84	5326 38,5	2004 37,5	2862 7	0670 22	2853 45	6877 61	1001 73,5	15027 82
86	5403 37	1929 37,5	2848 7	0714 21,5	2763 43,5	6755 60,5	0854 72,5	14863 81,5
88	5477 36	1854 37	2834 8	0757 21	2676 43,5	6634 60	0709 72,5	14700 80,5
7,90	5549 + 34,5	1780 + 37	2818 + 8	0799 - 20	2589 - 42,5	6514 - 59,5	0564 - 71,5	14539 - 80,5
92	5618 33	1706 37	2802 8,5	0839 19,5	2504 42	6395 58,5	0421 70,5	14378 79,5
94	5684 31,5	1632 36,5	2785 9	0878 19	2420 41	6278 58	0280 70,5	14219 79
96	5747 30,5	1559 37	2767 9	0916 18	2338 40,5	6162 57,5	0139 69,5	14061 78,5
98	5808 29	1485 36,5	2749 10	0952 18	2257 40	6047 56,5	0000 69	13904 78
8,00	5866 + 0,0	1412 - 0,0	2729 - 0,0	0988 - 0,0	2177 + 0,0	5934 + 0,0	*9862 + 0,0	13748 + 0,



Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,1
8,00	5866 + 27,5	1412 + 36	2729 + 10	0988 - 17	2177 - 39	5934 - 56	9862 - 68,5	3748 - 77,5
02	5921 26	1340 36	2709 10,5	1022 16,5	2099 39	5822 55,5	9725 68	3593 77
04	5973 25	1268 36	2688 10,5	1055 16	2021 37,5	5711 54,5	9589 67	3439 76,5
06	6023 23,5	1196 36	2667 11	1087 15,5	1946 37,5	5602 54,5	9455 66,5	3286 75,5
08	6070 22	1124 35,5	2645 11,5	1118 14,5	1871 36,5	5493 53,5	9322 66	3135 75,5
8,10	6114 + 20,5	1053 + 35	2622 + 12	1147 - 14,5	1798 - 36,5	5386 - 52,5	9190 - 65,5	2984 - 74,5
12	6155 19,5	0983 35	2598 12	1176 14	1725 35	5281 52,5	9059 65	2835 74
14	6194 17,5	0913 35	2574 12,5	1204 13	1655 35	5176 51,5	8929 64	2687 73,5
16	6229 16,5	0843 34,5	2549 12,5	1230 12,5	1585 34	5073 51	8801 64	2540 73,5
18	6262 15,5	0774 34,5	2524 13	1255 12,5	1517 34	4971 50,5	8673 63	2393 72,5
8,20	6293 + 13,5	0705 + 34	2498 + 13,5	1280 - 11,5	1449 - 32,5	4870 - 49,5	8547 - 62,5	2248 - 71,5
22	6320 12,5	0637 33,5	2471 13,5	1303 11	1384 32,5	4771 49	8422 62	2105 71,5
24	6345 11	0570 33,5	2444 13,5	1325 10,5	1319 32	4673 49	8298 61	1962 71
26	6367 10	0503 33	2417 14	1346 10,5	1255 31	4575 47,5	8176 61	1820 70,5
28	6387 8	0437 33	2389 14,5	1367 9,5	1193 30,5	4480 47,5	8054 40	1679 69,5
8,30	6403 + 7	0371 + 32,5	2360 + 14,5	1386 - 9	1132 - 30,5	4385 - 47	7994 - 59,5	1540 - 69,5
32	6417 6	0306 32	2331 14,5	1404 8,5	1071 29	4291 46	7815 59	1401 68,5
34	6429 4,5	0242 32	2302 15	1421 8,5	1013 29	4199 45,5	7697 58,5	1264 68
36	6438 3	0178 31,5	2272 15	1438 7,5	0955 28,5	4108 45	7580 58	1128 68
38	6444 1,5	0115 31	2242 15,5	1453 7,5	0898 28	4018 44,5	7464 57	0992 67
8,40	6447 + 0,5	0053 + 30,5	2211 + 15,5	1468 - 7	0842 - 27	3929 - 43,5	7350 - 57	0858 - 66,5
42	6448 - 0,5	*0008 30,5	2180 15,5	1482 6,5	0788 26,5	3842 43,5	7236 56	0725 66
44	6447 2,5	0069 30	2149 16	1495 5,5	0735 26,5	3755 42,5	7124 55,5	0593 65,5
46	6442 3	0129 30	2117 16	1506 6	0682 25,5	3670 42	7013 55	0462 65
48	6436 5	0189 29	2085 16	1518 5	0631 25	3586 41,5	6903 54,5	0332 64,5
8,50	6426 - 5,5	0247 + 29	2053 + 16,5	1528 - 4,5	0581 - 24,5	3503 - 41	6794 - 54	0203 - 64
52	6415 7,5	0305 28,5	2020 16,5	1537 4,5	0532 24	3421 40,5	6686 53,5	0075 63
54	6400 8	0362 28	1987 16,5	1546 4	0484 23,5	3340 40	6579 53	*9949 63
56	6384 9,5	0418 27,5	1954 16,5	1554 3,5	0437 23	3260 39	6473 52	9823 62,5
58	6365 11	0473 27,5	1921 17	1561 3	0391 22,5	3182 39	6369 52	9698 62
8,60	6343 - 12	0528 + 27	1887 + 17	1567 - 3	0346 - 22	3104 - 38	6265 - 51	9574 - 61
62	6319 13	0582 26	1853 17	1573 2,5	0302 21,5	3028 38	6163 50,5	9452 61
64	6293 14,5	0634 26	1819 17	1578 2	0259 21	2952 37	6062 50,5	9330 60
66	6264 15	0686 25,5	1785 17	1582 1,5	0217 20,5	2878 36,5	5961 49,5	9210 60
68	6234 17	0737 25,5	1751 17,5	1585 1,5	0176 20	2805 36	5862 49	9090 59
8,70	6200 - 17,5	0788 + 24,5	1716 + 17	1588 - 1	0136 - 20	2733 - 36	5764 - 48,5	8972 - 59
72	6165 19	0837 24	1682 17,5	1590 0,5	0096 19	2661 35	5667 48	8854 58
74	6127 19,5	0885 24	1647 17,5	1591 - 0,5	0058 18,5	2591 34,5	5571 47,5	8738 58
76	6088 21	0933 23,5	1612 17,5	1592 0	0021 18	2522 34	5476 47	8622 57
78	6046 22	0980 22,5	1577 17,5	1592 + 0,5	*0015 18	2454 33,5	5382 46,5	8508 57
8,80	6002 - 23	1025 + 22,5	1542 + 17,5	1591 + 0,5	0051 - 17	2387 - 33	5289 - 45,5	8394 - 56
82	5956 24,5	1070 22	1507 17,5	1590 1	0085 17	2321 32,5	5198 45,5	8282 55,5
84	5907 25	1114 21,5	1472 17,5	1588 1	0119 16,5	2256 32	5107 45	8171 55,5
86	5857 26	1157 21	1437 17,5	1586 1,5	0152 16	2192 31,5	5017 44,5	8060 54,5
88	5805 27	1199 20,5	1402 17,5	1583 1,5	0184 15,5	2129 31	4928 43,5	7951 54,5
8,90	5751 - 28,5	1240 + 20	1367 + 17,5	1580 + 2,5	0215 - 15	2067 - 30,6	4841 - 43,5	7842 - 53,5
92	5694 29	1280 19,5	1332 18	1575 2	0245 15	2006 30	4754 43	7735 53
94	5636 29,5	1319 19	1296 17,5	1571 2,5	0275 14	1946 29,5	4668 42,5	7629 53
96	5577 31	1357 18,5	1261 17,5	1566 3	0303 14	1887 29	4583 41,5	7523 52
98	5515 32	1394 18,5	1226 17,5	1560 3	0331 13,5	1829 28,5	4500 41,5	7419 52
9,00	5451 + 0,0	1431 + 0,0	1191 - 0,0	1554 - 0,0	0358 - 0,0	1772 + 0,0	4417 + 0,0	7315 + 0,0

Продолжение табл. 42

$x$	$A_1(x)$	$A_2(x)$	$A_3(x)$	$A_4(x)$	$A_5(x)$	$A_6(x)$	$A_7(x)$	$A_8(x)$
	+ 0,0	+ 0,0	- 0,0	- 0,0	- 0,0	+ 0,0	+ 0,0	+ 0,0
9,00	5451 - 32,5	1431 + 17,5	1191 + 17,5	1554 + 3,5	0358 - 13	1772 - 28,5	4417 - 41	7315 - 51,5
02	5386 33,5	1466 17	1156 17	1547 3,5	0384 12,5	1715 27,5	4335 40,5	7212 50,5
04	5319 34	1500 16,5	1122 17,5	1540 4	0409 12,5	1660 27,5	4254 40	7111 50,5
06	5251 35,5	1533 16,5	1087 17,5	1532 4	0434 12	1605 26,5	4174 39,5	7010 49,5
08	5180 36	1566 15,5	1052 17	1524 4	0458 11,5	1552 26,5	4095 39	6911 49,5
9,10	5108 - 36,5	1597 + 15,5	1018 + 17,5	1516 + 4,5	0481 - 11	1499 - 26	4017 - 38,5	6812 - 49
12	5035 37,5	1628 14,5	0983 17	1507 5	0503 11	1447 25,5	3940 38	6714 48,5
14	4960 38,5	1657 14	0949 17	1497 5	0525 10,5	1396 25	3864 37,5	6617 48
16	4883 38,5	1685 14	0915 17	1487 5	0546 10	1346 24,5	3789 37	6521 47,5
18	4806 40	1713 13	0881 17	1477 5	0566 10	1297 24	3715 36,5	6426 47
9,20	4726 - 40	1739 + 13	0847 + 17	1467 + 5,5	0586 - 9,5	1249 - 23,5	3642 - 36,5	6332 - 46,5
22	4646 41	1765 12	0813 16,5	1456 6	0605 9	1202 23,5	3569 35,5	6239 46
24	4564 42	1789 12	0780 16,5	1444 5,5	0623 8,5	1155 23	3498 35,5	6147 45,5
26	4480 42	1813 11	0747 16,5	1433 6	0640 8,5	1109 22,5	3427 34,5	6056 45,5
28	4396 43	1835 11	0714 16,5	1421 6,5	0657 8	1064 22	3358 34,5	5965 44,5
9,30	4310 - 43,5	1857 + 10,5	0681 + 16,5	1408 + 6	0673 - 8	1020 - 21,5	3289 - 34	5876 - 44,5
32	4223 44	1878 9,5	0648 16	1396 6,5	0689 7	0977 21,5	3221 33,5	5787 43,5
34	4135 44,5	1897 9,5	0616 16	1383 7	0703 7,5	0934 20,5	3154 33	5700 43,5
36	4046 45	1916 9	0584 16	1369 6,5	0718 6,5	0893 20,5	3088 32,5	5613 43
38	3956 45,5	1934 8	0552 16	1356 7	0731 6,5	0852 20	3023 32,5	5527 42,5
9,40	3865 - 46,5	1950 + 8	0520 + 15,5	1342 + 7	0744 - 6,5	0812 - 20	2958 - 31,5	5442 - 42
42	3772 46,5	1966 7,5	0489 16	1328 7,5	0757 5,5	0772 19	2895 31,5	5358 41,5
44	3679 47	1981 7	0457 15	1313 7	0768 6	0734 19	2832 31	5275 41,5
46	3585 47	1995 6,5	0427 15,5	1299 7,5	0780 5	0696 18,5	2770 30,5	5192 40,5
48	3491 48	2008 6	0396 15	1284 7,5	0790 5,5	0659 18	2709 30	5111 40,5
9,50	3395 - 48	2020 + 5,5	0366 + 15	1269 + 7,5	0801 - 4,5	0623 - 18	2649 - 29,5	5030 - 40
52	3299 48,5	2031 5	0336 15	1254 8	0810 4,5	0587 17,5	2590 29,5	4950 39,5
54	3202 49	2041 5	0306 14,5	1238 8	0819 4	0552 17	2531 28,5	4871 39
56	3104 49	2051 4	0277 14,5	1222 8	0827 4,5	0518 16,5	2474 28,5	4793 38,5
58	3006 49,5	2059 3,5	0248 14,5	1206 8	0836 3,5	0485 16,5	2417 28	4716 38
9,60	2907 - 50	2066 + 3,5	0219 + 14,5	1190 + 8	0843 - 3,5	0452 - 16	2361 - 28	4640 - 38
62	2807 50	2073 3	0190 14	1174 8	0850 3,5	0420 16	2305 27	4564 37,5
64	2707 50	2079 2	0162 13,5	1158 8,5	0857 3	0388 15	2251 27	4489 36,5
66	2607 50,5	2083 2	0135 14	1141 8,5	0863 2,5	0358 15	2197 26,5	4416 36,5
68	2506 50,5	2087 1,5	0107 13,5	1124 8,5	0868 2,5	0328 14,5	2144 26	4343 36,5
9,70	2405 - 51	2090 + 1	0080 + 13	1107 + 8,5	0873 - 2,5	0299 - 14,5	2092 - 25,5	4270 - 35,5
72	2303 50,5	2092 + 1	0054 13,5	1090 8,5	0878 2	0270 14	2041 25,5	4199 35,5
74	2202 51,5	2094 0	0027 13	1073 8,5	0882 2	0242 14	1990 25	4128 35
76	2099 51	2094 0	0001 12,5	1056 8,5	0886 1,5	0214 13	1940 24,5	4058 34,5
78	1997 51	2094 - 0,5	*0024 12,5	1039 9	0889 1,5	0188 13	1891 24	3989 34
9,80	1895 - 51,5	2093 - 1	0049 + 12,5	1021 + 8,5	0892 - 1	0162 - 13	1843 - 24	3921 - 33,5
82	1792 51,5	2091 1,5	0074 12,5	1004 9	0894 1	0136 12,5	1795 23,5	3854 33,5
84	1689 51	2088 2	0099 12	0986 9	0896 1	0111 12	1748 23	3787 33
86	1587 51,5	2084 2	0123 11,5	0968 8,5	0898 0,5	0087 12	1702 23	3721 32,5
88	1484 51,5	2080 2,5	0146 12	0951 9	0899 0,5	0063 11,5	1656 22	3656 32,5
9,90	1381 - 51	2075 - 3	0170 + 11,5	0933 + 9	0900 0	0040 - 11	1612 - 22	3591 - 31,5
92	1279 51,5	2069 3,5	0193 11	0915 9	0900 - 0,5	0018 11	1568 22	3528 31,5
94	1176 51	2062 4	0215 11	0897 9	0901 + 0,5	*0004 11	1524 21,5	3465 31
96	1074 51,5	2054 4	0237 11	0879 9	0900 0	0026 10	1481 21	3403 31
98	0971 51	2046 4,5	0259 10,5	0861 9	0900 0,5	0046 10,5	1439 20,5	3341 30
10,00	0869 + 0,0	2037 + 0,0	0280 + 0,0	0843 - 0,0	0899 - 0,0	0067 - 0,0	1398 + 0,0	3281 + 0,0

Т а б л и ц а 43. Функции Бесселя  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$ 

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	+ 0,0000	+ 0,0000	1,00	+ 0,7652	+ 0,4401	2,00	+ 0,2239	+ 0,5767
02	*9999 — 0,5	0100 + 50	02	7563 — 44,5	4465 + 32	02	2124 — 57,5	5754 — 6,5
04	9996 1,5	0200 50	04	7473 45	4465 31,5	04	2009 57,5	5738 8
06	9991 2,5	0300 50	06	7382 45,5	4528 31	06	1894 57,5	5721 8,5
08	9984 3,5	0400 50	08	7290 46	4590 30	08	1780 57	5703 9
	9975 4,5	0400 49,5	08	7290 47	4650 29,5	08	1780 57	5703 10
0,10	9975 — 5,5	0499 + 50	1,10	7196 — 47,5	4709 + 29	2,10	1666 — 56,5	5683 — 11
12	9964 6,5	0599 49,5	12	7101 47,5	4767 28	12	1553 56,5	5661 11,5
14	9951 7,5	0698 49,5	14	7006 48,5	4823 27,5	14	1440 56,5	5638 12
16	9936 8,5	0797 49,5	16	6909 49,5	4878 26,5	16	1327 56	5614 13,5
18	9919 9,5	0896 49,5	18	6810 49,5	4931 26	18	1215 55,5	5587 13,5
0,20	9900 — 10,5	0995 + 49	1,20	6711 — 50	4983 + 25	2,20	1104 — 55,5	5560 — 15
22	9879 11	1093 49	22	6611 50,5	5033 24,5	22	0993 55,5	5530 15
24	9857 12,5	1191 49	24	6510 51	5082 24	24	0882 54,5	5500 16
26	9832 13,5	1289 48,5	26	6408 51,5	5130 23	26	0773 54,5	5468 17
28	9805 14,5	1386 48,5	28	6305 52	5176 22	28	0664 54,5	5434 17,5
0,30	9776 — 15	1483 + 48,5	1,30	6201 — 52,5	5220 + 21,5	2,30	0555 — 53,5	5399 — 18,5
32	9746 16,5	1580 48	32	6096 53	5263 21	32	0448 53,5	5362 19
34	9713 17	1676 47,5	34	5990 53	5305 19,5	34	0341 53	5324 19,5
36	9679 18,5	1771 47,5	36	5884 53,5	5344 19,5	36	0235 52,5	5285 20,5
38	9642 19	1866 47	38	5777 54	5383 18,5	38	0130 52,5	5244 21
0,40	9604 — 20	1960 + 47	1,40	5669 — 54,5	5419 + 18	2,40	0025 — 52	5202 — 22
42	9564 21	2054 46,5	42	5560 55	5455 16,5	42	*0079 51	5158 22,5
44	9522 22	2147 46,5	44	5450 55	5488 16	44	0181 51	5113 23
46	9478 23	2240 46	46	5340 55	5520 15,5	46	0283 50,5	5067 23,5
48	9432 23,5	2332 45,5	48	5230 56	5551 14	48	0384 50	5020 24,5
0,50	9385 — 25	2423 + 45	1,50	5118 — 56	5579 + 14	2,50	0484 — 49,5	4971 — 25
52	9335 25,5	2513 45	52	5006 56	5607 12,5	52	0583 49	4921 25,5
54	9284 26,5	2603 44,5	54	4894 56,5	5632 12	54	0681 48,5	4870 26,5
56	9231 27	2692 44	56	4781 56,5	5656 11	56	0778 47,5	4817 27
58	9177 28,5	2780 43,5	58	4668 57	5678 10,5	58	0873 47,5	4763 27,5
0,60	9120 — 29	2867 + 43	1,60	4554 — 57	5699 + 9,5	2,60	0968 — 47	4708 — 28
62	9062 30	2953 43	62	4440 57,5	5718 8,5	62	1062 46	4652 28,5
64	9002 31	3039 42,5	64	4325 57,5	5735 8	64	1154 45,5	4595 29,5
66	8940 31,5	3124 41,5	66	4210 57,5	5751 7	66	1245 45,5	4536 29,5
68	8877 32,5	3207 41,5	68	4095 57,5	5765 6,5	68	1336 44	4477 30,5
0,70	8812 — 33,5	3290 + 41	1,70	3980 — 58	5778 + 5	2,70	1424 — 44	4416 — 31
72	8745 34	3372 40	72	3864 58	5788 5	72	1512 43,5	4354 31,5
74	8677 35	3452 40	74	3748 58	5798 3,5	74	1599 42,5	4291 31,5
76	8607 35,5	3532 39,5	76	3632 58	5805 3	76	1684 42	4228 32,5
78	8536 36,5	3611 38,5	78	3516 58	5811 2	78	1768 41	4163 33
0,80	8463 — 37,5	3688 + 38,5	1,80	3400 — 58	5815 + 1,5	2,80	1850 — 41	4097 — 33,5
82	8388 38	3765 37,5	82	3284 58,5	5818 + 0,5	82	1932 40	4030 33,5
84	8312 38,5	3840 37,5	84	3167 58,5	5819 — 0,5	84	2012 39	3963 34,5
86	8235 39,5	3915 36,5	86	3051 58,5	5818 1	86	2090 38,5	3894 34,5
88	8156 40,5	3988 35,5	88	2934 58	5816 2	88	2167 38	3825 35,5
0,90	8075 — 41	4059 + 35,5	1,90	2818 — 58	5812 — 3	2,90	2243 — 37	3754 — 35,5
92	7993 41,5	4130 35	92	2702 58	5806 3,5	92	2317 36,5	3683 36
94	7910 42,5	4200 34	94	2586 58	5799 4,5	94	2390 36	3611 36,5
96	7825 43	4268 33,5	96	2470 58	5790 5,5	96	2462 35	3538 36,5
98	7739 43,5	4335 33	98	2354 57,5	5779 6	98	2532 34,5	3465 37
1,00	7652 + 0,	4401 + 0,	2,00	2239 + 0,	5767 + 0,	3,00	2601 — 0,	3391 + 0,

Продолжение табл. 43

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
	- 0,	+ 0,		- 0,	- 0,		- 0,	- 0,
3,00	2601 - 33,5	3391 - 37,5	4,00	3971 + 6,5	0660 - 38	5,00	1776 + 33	3276 - 11
02	2668 32,5	3316 38	02	3958 8	0736 37,5	02	1710 33	3298 10
04	2733 32	3240 38	04	3942 8,5	0811 37,5	04	1644 33	3318 9,5
06	2797 31,5	3164 38,5	06	3925 9	0886 37	06	1578 33,5	3337 9
08	2860 30,5	3087 39	08	3907 10	0960 36,5	08	1511 34	3355 8
3,10	2921 - 29,5	3009 - 39	4,10	3887 + 11	1033 - 36	5,10	1443 + 33,5	3371 - 7,5
12	2980 29	2931 39,5	12	3865 11,5	1105 36	12	1376 34	3386 7
14	3038 28	2852 39,5	14	3842 12	1177 35	14	1308 34	3400 6
16	3094 27,5	2773 39,5	16	3818 12,5	1247 35	16	1240 34,5	3412 5,5
18	3149 26,5	2694 40,5	18	3793 13,5	1317 34,5	18	1171 34	3423 4,5
3,20	3202 - 25,5	2613 - 40	4,20	3766 + 14,5	1386 - 34,5	5,20	1103 + 34,5	3432 - 4
22	3253 25	2533 40,5	22	3737 15	1455 33,5	22	1034 34,5	3440 3,5
24	3303 24	2452 41	24	3707 15,5	1522 33,5	24	0965 34,5	3447 3
26	3351 23,5	2370 40,5	26	3676 16	1589 32,5	26	0896 34,5	3453 2
28	3398 22,5	2289 41	28	3644 17	1654 32,5	28	0827 34,5	3457 1,5
3,30	3443 - 21,5	2207 - 41,5	4,30	3610 + 17,5	1719 - 32	5,30	0758 + 34,5	3460 - 0,5
32	3486 21	2124 41	32	3575 18	1783 31	32	0689 34,5	3461 0
34	3528 20	2042 41,5	34	3539 19	1845 31	34	0620 35	3461 + 0,5
36	3568 19	1959 41,5	36	3501 19	1907 30,5	36	0550 34,5	3460 1,5
38	3606 18,5	1876 42	38	3463 20	1968 30	38	0481 34,5	3457 2
3,40	3643 - 17,5	1792 - 41,5	4,40	3423 + 21	2028 - 29	5,40	0412 + 34,5	3453 + 2,5
42	3678 16,5	1709 42	42	3381 21	2086 29	42	0343 34,5	3448 3
44	3711 16	1625 42	44	3339 21,5	2144 28,5	44	0274 34,5	3442 4
46	3743 15	1541 41,5	46	3296 22,5	2201 27,5	46	0205 34	3434 4,5
48	3773 14	1458 42	48	3251 23	2256 27,5	48	0137 34,5	3425 5,5
3,50	3801 - 13,5	1374 - 42	4,50	3205 + 23	2311 - 26,5	5,50	0068 + 34	3414 + 5,5
52	3828 12,5	1290 42	52	3159 24	2364 26	52	0000 34	3403 6,5
54	3853 11,5	1206 42	54	3111 24,5	2416 25,5	54	*0068 33,5	3390 7
56	3876 11	1122 42	56	3062 25	2467 25	56	0135 34	3376 8
58	3898 10	1038 41,5	58	3012 25,5	2517 24,5	58	0203 33,5	3360 8,5
3,60	3918 - 9	0955 - 42	4,60	2961 + 25,5	2566 - 23,5	5,60	0270 + 33	3343 + 9
62	3936 8,5	0871 41,5	62	2910 26,5	2613 23	62	0336 33,5	3325 9,5
64	3953 7	0788 42	64	2857 27	2659 22,5	64	0403 33	3306 10
66	3967 7	0704 41,5	66	2803 27	2704 22	66	0469 32,5	3286 11
68	3981 5,5	0621 41,5	68	2749 28	2748 21,5	68	0534 32,5	3264 11,5
3,70	3992 - 5	0538 - 41	4,70	2693 + 28	2791 - 20,5	5,70	0599 + 32,5	3241 + 11,5
72	4002 4,5	0456 41,5	72	2637 28,5	2832 20	72	0664 32	3218 13
74	4011 3	0373 41	74	2580 29	2872 19,5	74	0728 31,5	3192 13
76	4017 2,5	0291 40,5	76	2522 29	2911 19	76	0791 32	3166 13,5
78	4022 2	0210 41	78	2464 30	2949 18	78	0855 31	3139 14,5
3,80	4026 - 0,5	0128 - 40,5	4,80	2404 + 30	2985 - 17,5	5,80	0917 + 31	3110 + 14,5
82	4027 0	0047 40	82	2344 30,5	3020 17	82	0979 30,5	3081 15,5
84	4027 + 0,5	*0033 40,5	84	2283 30,5	3054 16	84	1040 30,5	3050 16
86	4026 1,5	0114 39,5	86	2222 31	3086 15,5	86	1101 30	3018 16,5
88	4023 2,5	0193 39,5	88	2160 31,5	3117 15	88	1161 29,5	2985 17
3,90	4018 + 3	0272 - 39,5	4,90	2097 + 31,5	3147 - 14	5,90	1220 + 29,5	2951 + 17
92	4012 4	0351 39	92	2034 32	3175 13,5	92	1279 29	2917 18
94	4004 4,5	0429 39	94	1970 32	3202 13	94	1337 28,5	2881 18,5
96	3995 5,5	0507 38,5	96	1906 32,5	3228 12,5	96	1394 28,5	2844 19
98	3984 6,5	0584 38	98	1841 32,5	3253 11,5	98	1451 27,5	2806 19,5
4,00	3971 - 0,	0660 - 0,	5,00	1776 - 0,	3276 - 0,	1,00	1506 + 0,	2767 - 0,

Продолжение табл. 43

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
	+ 0,	- 0,		+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,
6,00	1506	2767	7,00	3001	0047	8,00	1717	2346
02	1561 + 27,5	2727 + 20	02	3001 0	*0013 + 30	02	1669 - 24	2374 + 14
04	1616 27,5	2686 20,5	04	3000 - 0,5	0073 30	04	1622 23,5	2401 13
06	1669 26,5	2645 20,5	06	2998 1	0133 30	06	1573 24,5	2427 12,5
08	1721 26	2602 21,5	08	2995 1,5	0192 29,5	08	1524 24,5	2452 12
6,10	1773 26	2559 21,5	7,10	2991 2	0252 30	8,10	1475 24,5	2476 12
12	1824 + 25,5	2514 + 22,5	12	2985 - 3	0310 + 29	12	1425 - 25	2499 + 11,5
14	1873 24,5	2469 22,5	14	2978 3,5	0369 29,5	14	1375 25	2521 11
16	1922 24,5	2423 23	16	2970 4	0428 29,5	16	1325 25	2542 10,5
18	1970 24	2377 23	18	2961 4,5	0486 29	18	1274 25,5	2561 9,5
6,20	2017 23,5	2329 24	7,20	2951 5	0543 28,5	8,20	1222 26	2580 9,5
22	2064 + 23,5	2281 + 24	22	2939 - 6	0601 + 29	22	1170 - 26	2598 + 9
24	2109 22,5	2232 24,5	24	2939 6	0658 28,5	24	1118 26	2614 8
26	2153 22	2182 25	26	2927 7	0714 28	26	1066 26	2630 8
28	2196 21,5	2132 25	28	2913 7,5	0770 28	28	1013 26,5	2644 7
6,30	2238 21	2132 25,5	7,30	2898 8	0826 28	8,30	0960 26,5	2657 6,5
32	2279 + 20,5	2081 + 26	32	2882 - 8,5	0881 + 27,5	32	0907 - 26,5	2670 + 6,5
34	2319 20	2029 26	34	2865 9	0935 27	34	0853 27	2681 5,5
36	2358 19,5	1977 26,5	36	2847 9,5	0990 27,5	36	0800 26,5	2691 5
38	2396 19	1924 27	38	2828 10,5	1043 26,5	38	0746 27	2700 4,5
6,40	2433 18,5	1870 27	7,40	2807 10,5	1096 26,5	8,40	0692 - 27,5	2708 + 4
42	2469 + 18	1816 + 27	42	2786 - 11	1149 + 26,5	42	0637 26	2715 3,5
44	2504 17,5	1762 27,5	44	2764 12	1199 26	44	0583 27	2720 2,5
46	2537 16,5	1707 28	46	2740 12,5	1251 25,5	46	0529 27	2725 2
48	2570 16,5	1651 28	48	2715 12,5	1302 25	48	0474 27,5	2729 1
6,50	2570 15,5	1595 28,5	7,50	2690 13,5	1352 25	8,50	0419 27,5	2731 + 1
52	2601 + 15	1538 + 28,5	52	2663 - 13,5	1402 + 25	52	0365 - 27	2733 + 0
54	2631 14,5	1481 28,5	54	2636 14,5	1450 24	54	0310 27,5	2733 - 0,5
56	2660 14	1424 29	56	2607 14,5	1498 24	56	0255 27	2732 1
58	2688 13,5	1366 29	58	2578 15,5	1546 24	58	0201 27,5	2730 1
6,60	2715 12,5	1308 29	7,60	2547 15,5	1592 23	8,60	0146 - 27	2728 - 2
62	2740 + 12,5	1250 + 29,5	62	2516 - 16	1638 + 23	62	0092 - 27,5	2724 2,5
64	2765 11,5	1191 29,5	64	2484 16,5	1683 22,5	64	0037 27	2719 3
66	2788 11	1132 29,5	66	2451 17,5	1727 22	66	*0017 27	2713 4
68	2810 10,5	1073 30	68	2416 17,5	1771 21	68	0071 27	2705 4
6,70	2831 10	1013 30	7,70	2381 17,5	1813 21	8,70	0125 - 27	2697 - 4,5
72	2851 + 9	0953 + 30	72	2346 - 18,5	1855 + 21	72	0179 27	2688 5
74	2869 8,5	0893 30	74	2309 19	1896 20,5	74	0233 26,5	2678 6
76	2886 8	0833 30	76	2271 19	1936 20	76	0286 26,5	2666 6
78	2902 7,5	0773 30	78	2233 19,5	1975 19,5	78	0339 26,5	2654 6,5
6,80	2917 7	0713 30,5	7,80	2194 20	2014 19,5	8,80	0392 - 26,5	2641 - 7,5
82	2931 + 6	0652 + 30	82	2154 - 20,5	2051 + 18,5	82	0445 - 26,5	2626 7,5
84	2943 6	0592 30,5	84	2113 20,5	2098 18,5	84	0497 26	2611 8
86	2955 5	0531 30,5	86	2072 21	2123 17,5	86	0549 26	2595 9
88	2965 4	0470 30	88	2030 21,5	2158 17	88	0601 26	2577 9
6,90	2973 4	0410 30,5	7,90	1987 21,5	2192 16,5	8,90	0653 - 25,5	2559 - 9,5
92	2981 + 3	0349 + 30,5	92	1944 - 22,5	2225 + 16	92	0704 25	2540 10,5
94	2987 3	0288 30	94	1899 22	2257 15	94	0754 25	2519 10,5
96	2993 2	0228 30,5	96	1855 23	2287 15	96	0804 25	2498 11
98	2997 1	0167 30	98	1809 23	2317 14,5	98	0854 24,5	2476 11,5
7,00	3001 + 0,	0047 - 0,	8,00	1763 23	2346 + 0,	9,00	0903 - 0,	2453 + 0,

Продолжение табл. 43

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
	- 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 0,	- 0,
9 00	0903 - 24 5	2453 - 12	10 00	2459 - 4 5	0435 - 25	11 00	1712 + 18	1768 - 15
02	0952 24	2429 12,5	02	2468 3 5	0385 25 5	02	1676 18	1798 15
04	1000 24	2404 13	04	2475 3	0334 25	04	1640 18 5	1828 14 5
06	1048 24	2378 13	06	2481 2 5	0284 25	06	1603 18,5	1857 14 5
08	1096 23	2352 14	08	2486 2	0234 25	08	1566 19	1886 13 5
9 10	1142 - 23 5	2324 - 14	10,10	2490 - 1 5	0184 - 25	11 10	1528 + 19 5	1913 - 13 5
12	1189 22 5	2296 14 5	12	2493 1 5	0134 25	12	1489 19 5	1940 13
14	1234 22 5	2267 15	14	2496 - 0 5	0084 25	14	1450 19 5	1966 12 5
16	1279 22 5	2237 15 5	16	2497 0	0034 25	16	1411 20 5	1991 12
18	1324 21 5	2206 16	18	2497 + 0 5	*0016 25	18	1370 20	2015 12
9 20	1367 - 22	2174 - 16	10 20	2496 + 1	0066 - 25	11,20	1330 + 20 5	2039 - 11
22	1411 21	2142 17	22	2494 1	0116 24 5	22	1289 21	2061 11
24	1453 21	2108 17	24	2492 2	0165 25	24	1247 20 5	2083 10 5
26	1495 20 5	2074 17	26	2488 2 5	0215 24 5	26	1206 21 5	2104 9 5
28	1536 20 5	2040 18	28	2483 3	0264 24 5	28	1163 21	2123 10
9 30	1577 - 19 5	2004 - 18	10 30	2477 + 3 5	0313 - 24 5	11 30	1121 + 21 5	2143 - 9
32	1616 19 5	1968 18 5	32	2470 3 5	0362 24 5	32	1078 22	2161 8 5
34	1655 19 5	1931 19	34	24 3 4 5	0411 24	34	1034 21 5	2178 8
36	1694 18 5	1893 19	36	2454 5	0459 24	36	0991 22 5	2194 8
38	1731 18 5	1855 19 5	38	2444 5	0507 24	38	0946 22	2210 7 5
9 40	1768 - 18	1816 - 19 5	10 40	2434 + 6	0555 - 23 5	11 40	0902 + 22	2225 - 6 5
42	1804 17 5	1777 20	42	2422 6	0602 23 5	42	0858 22 5	2238 6 5
44	1839 17	1737 20 5	44	2410 7	0649 23 5	44	0813 23	2251 6
46	1873 17	1696 20 5	46	2396 7	0696 23 5	46	0767 22 5	2263 5 5
48	1907 16	1655 21	48	2382 8	0742 23 5	48	0722 22 5	2274 5
9 50	1939 - 16	1613 - 21 5	10 50	2366 + 8	0789 - 22 5	11 50	0677 + 23	2284 - 4 5
52	1971 15 5	1570 21 5	52	2350 8 5	0834 22 5	52	0631 23	2293 4
54	2002 15	1527 21 5	54	2333 9	0879 22 5	54	0585 23	2301 3 5
56	2032 14 5	1484 22	56	2315 9 5	0924 22 5	56	0539 23	2308 3 5
58	2061 14 5	1440 22 5	58	2296 10	0968 22	58	0493 23 5	2315 2 5
9 60	2090 - 13 5	1395 - 22 5	10 60	2276 + 10	1012 - 22	11 60	0446 + 23	2320 - 2
62	2117 13 5	1350 22 5	62	2256 11	1056 21 5	62	0400 23 5	2324 2
64	2144 12 5	1305 23	64	2234 11	1099 21	64	0353 23	2328 1 5
66	2169 12 5	1259 23	66	2212 12	1141 21	66	0307 23 5	2331 0 5
68	2194 12	1213 23 5	68	2188 12	1183 20 5	68	0260 23 5	2332 - 0 5
9 70	2218 - 11 5	1166 - 23 5	10 70	2164 + 12	1224 - 20 5	11 70	0213 + 23	2333 0
72	2241 11	1119 23 5	72	2140 13	1265 20	72	0167 23 5	2333 + 0 5
74	2263 10 5	1072 23 5	74	2114 13 5	1305 19 5	74	0120 23 5	2332 1
76	2284 10	1025 24	76	2087 13 5	1344 19 5	76	0073 23	2330 1 5
78	2304 9 5	0977 24 5	78	2060 14	1383 19 5	78	0027 23 5	2327 2
9 80	2323 - 9	0928 - 24	10 80	2032 + 14 5	1422 - 18 5	11 80	*0020 + 23	2323 + 2 5
82	2341 8 5	0880 24 5	82	2003 14 5	1459 18 5	82	0066 23	2318 3
84	2358 8	0831 24 5	84	1974 15 5	1496 18 5	84	0112 23 5	2312 3
86	2374 7 5	0782 24 5	86	1943 15 5	1533 17 5	86	0159 23	2306 4
88	2389 7	0733 24 5	88	1912 15 5	1568 17 5	88	0205 22 5	2298 4
9 90	2403 - 7	0684 - 25	10 90	1881 + 16 5	1603 - 17 5	11 90	0250 + 23	2290 + 4 5
92	2417 6	0634 25	92	1848 16 5	1638 16 5	92	0296 23	2281 5 5
94	2429 5 5	0584 24 5	94	1815 17	1671 16 5	94	0342 22 5	2270 5 5
96	2440 5	0535 25	96	1781 17	1704 16	96	0387 22 5	2259 6
98	2450 4 5	0485 25	98	1747 17 5	1736 16	98	0432 22 5	2247 6 5
10 00	2459 - 0,	0435 + 0,	11,00	1712 - 0,	1768 - 0,	12 00	0477 + 0,	2234 - 0,

Продолжение табл 43

$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$x$	$J_0(x)$	$J_1(x)$
	+ 0,	- 0,		+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,
12,00	0477	2234	13,20	2167	0271	14,40	1065	1850
02	0521 + 22	2221 + 6,5	22	2172 + 2,5	0227 + 22	42	1028 - 18,5	1869 + 9,5
04	0566 22,5	2206 7,5	24	2176 2	0183 22	44	0990 19	1886 8,5
06	0610 21,5	2191 8	26	2179 1,5	0139 21,5	46	0952 19	1903 8
08	0653 22	2175 9	28	2182 0,5	0096 22	48	0914 19,5	1919 7,5
12,10	0697 + 21,5	2157 + 8,5	13,30	2183 + 0,5	0052 + 22	14,50	0875 - 19	1934 + 7,5
12	0740 21	2140 9,5	32	2184 - 0,5	0008 22	52	0837 19,5	1949 6,5
14	0782 21	2121 10	34	2183 0,5	*0036 21,5	54	0798 20	1962 6,5
16	0824 21	2101 10	36	2182 1	0079 22	56	0758 19,5	1975 6
18	0866 21	2081 10,5	38	2180 1,5	0123 21,5	58	0719 20	1987 6
12,20	0908 + 20,5	2060 + 11	13,40	2177 - 2	0166 + 21,5	14,60	0679 - 20	1999 + 5
22	0949 20	2038 11,5	42	2173 2	0209 21,5	62	0639 20,5	2009 5
24	0989 20	2015 11,5	44	2169 3	0252 21,5	64	0598 20	2019 4
26	1029 20	1992 12	46	2163 3	0295 21,5	66	0558 20,5	2027 4
28	1069 19,5	1968 12,5	48	2157 3,5	0338 21	68	0517 20,5	2035 4
12,30	1108 + 19,5	1943 + 13	13,50	2150 - 4	0380 + 21,5	14,70	0476 - 20	2043 + 3
32	1147 19	1917 13	52	2142 4,5	0423 21	72	0436 21	2049 2,5
34	1185 18,5	1891 14	54	2133 5	0465 21	74	0394 20,5	2054 2,5
36	1222 18,5	1863 13,5	56	2123 5	0507 20,5	76	0353 20,5	2059 2
38	1259 18,5	1836 14,5	58	2113 6	0548 21	78	0312 20,5	2063 1,5
12,40	1296 + 17,5	1807 + 14,5	13,60	2101 - 6	0590 + 20,5	14,80	0271 - 21	2066 + 1
42	1331 18	1778 15	62	2089 6,5	0631 20	82	0229 20,5	2068 + 1
44	1367 17	1748 15	64	2076 7	0671 20,5	84	0188 20,5	2070 0
46	1401 17	1718 15,5	66	2062 7	0712 20	86	0147 21	2070 0
48	1435 17	1687 16	68	2048 8	0752 19,5	88	0105 20,5	2070 - 0,5
12,50	1469 + 16,5	1655 + 16	13,70	2032 - 8	0791 + 20	14,90	0064 - 20,5	2069 - 1
52	1502 16	1623 16,5	72	2016 8,5	0831 19,5	92	0023 21	2067 1,5
54	1534 15,5	1590 17	74	1999 9	0870 19	94	*0019 20,5	2064 1,5
56	1565 15,5	1556 17	76	1981 9	0908 19	96	0060 20,5	2061 2,5
58	1596 15	1522 17,5	78	1963 10	0946 19	98	0101 20,5	2056 2,5
12,60	1626 + 14,5	1487 + 17,5	13,80	1943 - 10	0984 + 18,5	15,00	0142 - 20,5	2051 - 3
62	1655 14,5	1452 17,5	82	1923 10	1021 18,5	02	0183 20,5	2045 3,5
64	1684 14	1417 18,5	84	1903 11	1058 18	04	0224 20,5	2038 3,5
66	1712 13,5	1380 18	86	1881 11	1094 18	06	0265 20	2031 4,5
68	1739 13,5	1344 18,5	88	1859 11,5	1130 17,5	08	0305 20,5	2022 4,5
12,70	1766 + 13	1307 + 19	13,90	1836 - 12	1165 + 17,5	15,10	0346 - 20	2013 - 5
72	1792 12,5	1269 19	92	1812 12	1200 17	12	0386 20	2003 5,5
74	1817 12	1231 19,5	94	1788 12,5	1234 17	14	0426 19,5	1992 5,5
76	1841 11,5	1192 19	96	1763 13	1268 16,5	16	0465 20	1981 6
78	1864 11,5	1154 20	98	1737 13	1301 16,5	18	0505 19,5	1969 7
12,80	1887 + 11	1114 + 19,5	14,00	1711 - 13,5	1334 + 16	15,20	0544 - 19,5	1955 - 6,5
82	1909 10,5	1075 20	02	1684 14	1366 15,5	22	0583 19,5	1942 7,5
84	1930 10	1035 20,5	04	1656 14	1397 15,5	24	0622 19	1927 7,5
86	1950 10	0994 20	06	1628 14,5	1428 15	26	0660 19	1912 8
88	1970 9	0954 21	08	1599 14,5	1458 15	28	0698 19	1896 8,5
12,90	1988 + 9	0912 + 20,5	14,10	1570 - 15,5	1488 + 14,5	15,30	0736 - 18,5	1879 - 9
92	2006 8,5	0871 20,5	12	1539 15	1517 14	32	0773 19	1861 9
94	2023 8	0830 21	14	1509 15,5	1545 14	34	0811 18	1843 9,5
96	2039 8	0788 21	16	1478 16	1573 13,5	36	0847 18	1824 10
98	2055 7	0746 21,5	18	1446 16	1600 13	38	0883 18	1804 10
13,00	2069 + 7	0703 + 21	14,20	1414 - 16,5	1626 + 13	15,40	0919 - 18	1784 - 10,5
02	2083 6,5	0661 21,5	22	1381 16,5	1652 12,5	42	0955 17,5	1763 11
04	2096 6	0618 21,5	24	1348 17	1677 12	44	0990 17	1741 11
06	2108 5,5	0575 21,5	26	1314 17	1701 11,5	46	1024 17,5	1719 11,5
08	2119 5	0532 21,5	28	1280 17,5	1724 11,5	48	1059 16,5	1696 12
13,10	2129 + 4,5	0489 + 22	14,30	1245 - 17,5	1747 + 11	15,50	1092	1672
12	2138 4,5	0445 21,5	32	1210 18	1769 11		- 0,	+ 0,
14	2147 3,5	0402 22	34	1174 18	1791 10			
16	2154 3,5	0358 22	36	1138 18	1811 10			
18	2161 3	0314 21,5	38	1102 18,5	1831 9,5			
13,20	2167	0271	14,40	1065	1850			
	+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,			

Т а б л и ц а 44. Функции Бесселя  $J_{n/2}(x)$ 

$x$	$J_{1/2}(x)$	$J_{3/2}(x)$	$J_{5/2}(x)$	$J_{7/2}(x)$	$J_{9/2}(x)$	$J_{11/2}(x)$	$J_{13/2}(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,6714	+ 0,2403	+ 0,4950 (-1)	+ 0,7186 (-2)	+ 0,8067 (-3)	+ 0,7385 (-4)	+ 0,5710 (-5)
2	+ 0,5130	+ 0,4913	+ 0,2239	+ 0,6852 (-1)	+ 0,1589 (-1)	+ 0,2973 (-2)	+ 0,4672 (-3)
3	+ 0,6501 (-1)	+ 0,4777	+ 0,4127	+ 0,2101	+ 0,7760 (-1)	+ 0,2266 (-1)	+ 0,5493 (-2)
4	- 0,3019	+ 0,1853	+ 0,4409	+ 0,3658	+ 0,1993	+ 0,8261 (-1)	+ 0,2787 (-1)
5	- 0,3422	- 0,1697	+ 0,2404	+ 0,4100	+ 0,3337	+ 0,1906	+ 0,8558 (-1)
6	- 0,9102 (-1)	- 0,3279	- 0,7295 (-1)	+ 0,2671	+ 0,3846	+ 0,3098	+ 0,1833
7	+ 0,1981	- 0,1991	- 0,2834	- 0,3403 (-2)	+ 0,2800	+ 0,3634	+ 0,2911
8	+ 0,2791	+ 0,7593 (-1)	- 0,2506	- 0,2326	+ 0,4712 (-1)	+ 0,2856	+ 0,3456
9	+ 0,1096	+ 0,2545	- 0,2477 (-1)	- 0,2683	- 0,1839	+ 0,8439 (-1)	+ 0,2870
10	- 0,1373	+ 0,1980	+ 0,1967	- 0,9965 (-1)	- 0,2664	- 0,1401	+ 0,1123
11	- 0,2406	- 0,2293 (-1)	+ 0,2343	+ 0,1294	- 0,1519	- 0,2538	- 0,1018
12	- 0,1236	- 0,2047	+ 0,7242 (-1)	+ 0,2348	+ 0,6457 (-1)	- 0,1864	- 0,2356
13	+ 0,9298 (-1)	- 0,1937	- 0,1377	+ 0,1407	+ 0,2134	+ 0,7055 (-2)	- 0,2075
14	+ 0,2112	- 0,1407 (-1)	- 0,2143	- 0,6245 (-1)	+ 0,1830	+ 0,1801	- 0,4151 (-1)
15	+ 0,1340	+ 0,1654	- 0,1009	- 0,1991	+ 0,7984 (-2)	+ 0,2039	+ 0,1415
16	- 0,5743 (-1)	+ 0,1874	+ 0,9257 (-1)	- 0,1585	- 0,1619	+ 0,6743 (-1)	+ 0,2083
17	- 0,1860	+ 0,4230 (-1)	+ 0,1935	+ 0,1461 (-1)	- 0,1875	- 0,1139	+ 0,1138
18	- 0,1412	- 0,1320	+ 0,1192	+ 0,1651	- 0,5500 (-1)	- 0,1926	- 0,6273 (-1)
19	+ 0,2743 (-1)	- 0,1795	- 0,5578 (-1)	+ 0,1649	+ 0,1165	- 0,1097	- 0,1800
20	+ 0,1629	- 0,6466 (-1)	- 0,1726	+ 0,2152 (-1)	+ 0,1801	+ 0,5953 (-1)	- 0,1474
21	+ 0,1457	+ 0,1023	- 0,1311	- 0,1335	+ 0,8656 (-1)	+ 0,1706	+ 0,2808 (-2)
22	- 0,1506 (-2)	+ 0,1700	+ 0,2469 (-1)	- 0,1644	- 0,7701 (-1)	+ 0,1329	+ 0,1435
23	- 0,1408	+ 0,8253 (-1)	+ 0,1516	- 0,4958 (-1)	- 0,1666	- 0,1563 (-1)	+ 0,1592
24	- 0,1475	- 0,7523 (-1)	+ 0,1381	+ 0,1040	- 0,1078	- 0,1444	+ 0,6157 (-1)
25	- 0,2112 (-1)	- 0,1590	+ 0,2038 (-2)	+ 0,1594	+ 0,4260 (-1)	- 0,1441	- 0,1060
26	+ 0,1193	- 0,9664 (-1)	- 0,1305	+ 0,7155 (-1)	+ 0,1497	- 0,1972 (-1)	- 0,1581
27	+ 0,1469	+ 0,5030 (-1)	- 0,1413	- 0,7646 (-1)	+ 0,1214	+ 0,1169	- 0,7380 (-1)
28	+ 0,4085 (-1)	+ 0,1466	- 0,2514 (-1)	- 0,1511	- 0,1263 (-1)	+ 0,1470	+ 0,7040 (-1)
29	- 0,9833 (-1)	+ 0,1074	+ 0,1094	- 0,8858 (-1)	- 0,1308	+ 0,4798 (-1)	+ 0,1490
30	- 0,1439	- 0,2727 (-1)	+ 0,1412	+ 0,5080 (-1)	- 0,1293	- 0,8961 (-1)	+ 0,9649 (-1)
31	- 0,5790 (-1)	- 0,1330	+ 0,4503 (-1)	+ 0,1402	- 0,1337 (-1)	- 0,1441	- 0,3776 (-1)
32	+ 0,7778 (-1)	- 0,1152	- 0,8858 (-1)	+ 0,1014	+ 0,1108	- 0,7024 (-1)	- 0,1349
33	+ 0,1389	+ 0,6053 (-2)	- 0,1383	- 0,2701 (-1)	+ 0,1326	+ 0,6318 (-1)	- 0,1115
34	+ 0,7240 (-1)	+ 0,1182	- 0,6196 (-1)	- 0,1274	+ 0,3574 (-1)	+ 0,1368	+ 0,8521 (-2)
35	- 0,5775 (-1)	+ 0,1202	+ 0,6805 (-1)	- 0,1105	- 0,9015 (-1)	+ 0,8732 (-1)	+ 0,1176
36	- 0,1319	+ 0,1335 (-1)	+ 0,1330	+ 0,5119 (-2)	- 0,1320	- 0,3812 (-1)	+ 0,1204
37	- 0,8441 (-1)	- 0,1027	+ 0,7609 (-1)	+ 0,1130	- 0,5472 (-1)	- 0,1263	+ 0,1718 (-1)
38	+ 0,3836 (-1)	- 0,1226	- 0,4804 (-1)	+ 0,1163	+ 0,6946 (-1)	- 0,9984 (-1)	- 0,9836 (-1)
39	+ 0,1231	- 0,3091 (-1)	- 0,1255	+ 0,1482 (-1)	+ 0,1282	+ 0,1476 (-1)	- 0,1240
40	+ 0,9400 (-1)	+ 0,8649 (-1)	- 0,8751 (-1)	- 0,9743 (-1)	+ 0,7046 (-1)	+ 0,1133	- 0,3931 (-1)
41	- 0,1977 (-1)	+ 0,1225	+ 0,2873 (-1)	- 0,1190	- 0,4906 (-1)	+ 0,1083	+ 0,7811 (-1)
42	- 0,1128	+ 0,4656 (-1)	+ 0,1162	- 0,3273 (-1)	- 0,1216	+ 0,6668 (-2)	+ 0,1234
43	- 0,1012	- 0,6990 (-1)	+ 0,9632 (-1)	+ 0,8110 (-1)	- 0,8313 (-1)	- 0,9850 (-1)	+ 0,5793 (-1)
44	+ 0,2129 (-2)	- 0,1202	- 0,1033 (-1)	+ 0,1190	+ 0,2927 (-1)	- 0,1131	- 0,5753 (-1)
45	+ 0,1012	- 0,6023 (-1)	- 0,1052	+ 0,4854 (-1)	+ 0,1128	- 0,2599 (-1)	- 0,1191
46	+ 0,1061	+ 0,5315 (-1)	- 0,1026	- 0,6430 (-1)	+ 0,9284 (-1)	- 0,8247 (-1)	- 0,7312 (-1)
47	+ 0,1438 (-1)	+ 0,1158	- 0,6991 (-2)	- 0,1165	- 0,1037 (-1)	+ 0,1146	+ 0,3718 (-1)
48	- 0,8848 (-1)	+ 0,7188 (-1)	+ 0,9297 (-1)	- 0,6220 (-1)	- 0,1020	+ 0,4306 (-1)	+ 0,1119
49	- 0,1087	- 0,3648 (-1)	+ 0,1065	+ 0,6735 (-1)	- 0,9972 (-1)	- 0,6566 (-1)	+ 0,8497 (-1)
50	- 0,2961 (-1)	- 0,1095	+ 0,2304 (-1)	+ 0,1118	- 0,7388 (-2)	- 0,1131	- 0,1750 (-1)



Продолжение табл. 44

$x$	$J_{-1/2}(x)$	$J_{-3/2}(x)$	$J_{-5/2}(x)$	$J_{-7/2}(x)$	$J_{-9/2}(x)$	$J_{-11/2}(x)$	$J_{-13/2}(x)$
0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	+ 0,4311	- 1,1025	+ 2,8764	- 13,279	+ 90,080	- 797,44	+ 8681,7
2	- 0,2348	+ 0,3956	+ 0,8282	- 1,6749	+ 5,0340	- 20,978	+ 110,35
3	- 0,4560	+ 0,8701 (-1)	+ 0,3690	- 0,7021	+ 9,2691	- 3,1053	+ 10,117
4	- 0,2608	+ 0,3671	- 0,1457 (-1)	- 0,3489	+ 0,6251	- 1,0577	+ 2,2834
5	+ 0,1012	+ 0,3219	- 0,2944	- 0,2755 (-1)	+ 0,3329	- 0,5717	+ 0,9249
6	+ 0,3128	+ 0,3889 (-1)	- 0,3322	+ 0,2379	+ 0,5460 (-1)	- 0,3198	+ 0,5318
7	+ 0,2274	- 0,2306	- 0,1285	+ 0,3224	- 0,1939	- 0,7313 (-1)	+ 0,3088
8	- 0,4104 (-1)	+ 0,2740	+ 0,1438	+ 0,1841	- 0,3049	+ 0,1589	+ 0,8641 (-1)
9	- 0,2423	- 0,8268 (-1)	+ 0,2699	- 0,6725 (-1)	- 0,2176	+ 0,2848	- 0,1306
10	- 0,2117	+ 0,1584	+ 0,1642	- 0,2405	+ 0,4188 (-2)	+ 0,2368	- 0,2646
11	+ 0,1065 (-2)	+ 0,2405	- 0,6665 (-1)	- 0,2102	+ 0,2004	+ 0,4622 (-1)	- 0,2466
12	+ 0,1944	+ 0,1074	- 0,2212	- 0,1522 (-1)	+ 0,2301	- 0,1573	- 0,8586 (-1)
13	+ 0,2008	- 0,1084	- 0,1758	+ 0,1760	+ 0,8100 (-1)	- 0,2321	+ 0,1154
14	+ 0,2916 (-1)	- 0,2133	+ 0,1655 (-1)	+ 0,2074	- 0,1203	- 0,1301	+ 0,2225
15	- 0,1565	- 0,1235	+ 0,1812	+ 0,6313 (-1)	- 0,2107	+ 0,6327 (-1)	+ 0,1643
16	- 0,1910	+ 0,6937 (-1)	+ 0,1780	- 0,1250	- 0,1233	+ 0,1944	- 0,1030 (-1)
17	- 0,5325 (-1)	+ 0,1892	+ 0,1986 (-1)	- 0,1950	+ 0,6044 (-1)	+ 0,1630	- 0,1659
18	+ 0,1242	+ 0,1343	- 0,1466	- 0,9362 (-1)	+ 0,1830	+ 0,2131 (-2)	- 0,1843
19	+ 0,1810	- 0,3696 (-1)	- 0,1751	+ 0,8305 (-1)	+ 0,3445	- 0,1515	- 0,5682 (-1)
20	+ 0,7281 (-1)	- 0,1665	- 0,4783 (-1)	+ 0,1785	- 0,1464 (-1)	- 0,1719	+ 0,1092
21	- 0,9537 (-1)	- 0,1411	+ 0,1155	+ 0,1136	- 0,1534	- 0,4788 (-1)	+ 0,1785
22	- 0,1701	+ 0,9238 (-2)	+ 0,1688	- 0,4761 (-1)	- 0,1537	+ 0,1105	+ 0,9845 (-1)
23	- 0,8865 (-1)	+ 0,1446	+ 0,6978 (-1)	- 0,1598	- 0,2114 (-1)	+ 0,1681	- 0,5924 (-1)
24	+ 0,6908 (-1)	+ 0,1446	- 0,8716 (-1)	- 0,1265	+ 0,1240	+ 0,7994 (-1)	- 0,1607
25	+ 0,1582	+ 0,1479 (-1)	- 0,1599	+ 0,1720 (-1)	+ 0,1551	- 0,7304 (-1)	- 0,1230
26	+ 0,1012	- 0,1232	- 0,8701 (-1)	+ 0,1399	+ 0,4933 (-1)	- 0,1570	+ 0,1710 (-1)
27	- 0,4486 (-1)	- 0,1452	+ 0,6099 (-1)	+ 0,1339	- 0,9571 (-1)	- 0,1020	+ 0,1373
28	- 0,1451	- 0,3566 (-1)	+ 0,1490	+ 0,9064 (-2)	- 0,1512	+ 0,3955 (-1)	+ 0,1357
29	- 0,1108	+ 0,1021	+ 0,1003	- 0,1194	- 0,7144 (-1)	+ 0,1416	+ 0,1773 (-1)
30	+ 0,2247 (-1)	+ 0,1432	- 0,3679 (-1)	- 0,1370	+ 0,6877 (-1)	+ 0,1164	- 0,1115
31	+ 0,1311	+ 0,5367 (-1)	- 0,1363	- 0,3169 (-1)	+ 0,1434	- 0,9951 (-2)	- 0,1399
32	+ 0,1177	- 0,8145 (-1)	- 0,1100	+ 0,9865 (-1)	+ 0,8845 (-1)	- 0,1235	- 0,4599 (-1)
33	- 0,1844 (-2)	- 0,1388	+ 0,1447 (-1)	+ 0,1366	- 0,4345 (-1)	- 0,1248	+ 0,8504 (-1)
34	- 0,1161	- 0,6898 (-1)	+ 0,1222	+ 0,5101 (-1)	- 0,1327	- 0,1588 (-1)	+ 0,1378
35	- 0,1219	+ 0,6123 (-1)	+ 0,1166	- 0,7789 (-1)	- 0,1011	+ 0,1039	+ 0,6841 (-1)
36	- 0,1702 (-1)	+ 0,1324	+ 0,5987 (-2)	- 0,1332	+ 0,1991 (-1)	+ 0,1282	- 0,5909 (-1)
37	+ 0,1004	+ 0,8170 (-1)	- 0,1070	- 0,6724 (-1)	+ 0,1197	+ 0,3811 (-1)	- 0,1311
38	+ 0,1236	- 0,4161 (-1)	- 0,1203	+ 0,5745 (-1)	+ 0,1098	- 0,8344 (-1)	- 0,8560 (-1)
39	+ 0,3407 (-1)	- 0,1240	- 0,2453 (-1)	+ 0,1272	+ 0,1705 (-2)	+ 0,1276	+ 0,3427 (-1)
40	- 0,8414 (-1)	- 0,9190 (-1)	+ 0,9103 (-1)	+ 0,8052 (-1)	- 0,1051	- 0,5687 (-1)	+ 0,1208
41	- 0,1230	+ 0,2277 (-1)	+ 0,1214	- 0,3757 (-1)	- 0,1150	+ 0,6280 (-1)	+ 0,9810 (-1)
42	- 0,4924 (-1)	+ 0,1140	+ 0,4110 (-1)	- 0,1189	- 0,2128 (-1)	+ 0,1204	- 0,1026 (-1)
43	+ 0,6754 (-1)	+ 0,9964 (-1)	- 0,7450 (-1)	- 0,9097 (-1)	+ 0,8931 (-1)	+ 0,7228 (-1)	- 0,1078
44	+ 0,1203	- 0,4863 (-2)	- 0,1200	+ 0,1849 (-1)	+ 0,1170	- 0,4243 (-1)	- 0,1064
45	+ 0,6248 (-1)	- 0,1026	- 0,5564 (-1)	+ 0,1088	+ 0,3874 (-1)	- 0,1165	- 0,1026 (-1)
46	- 0,5084 (-1)	- 0,1050	+ 0,5769 (-1)	+ 0,9971 (-1)	- 0,7271 (-1)	- 0,8449 (-1)	+ 0,9291 (-1)
47	- 0,1155	- 0,1192 (-1)	+ 0,1163	- 0,4427 (-3)	- 0,1162	+ 0,2269 (-1)	+ 0,1109
48	- 0,7372 (-1)	+ 0,9001 (-1)	+ 0,6810 (-1)	- 0,8292 (-1)	- 0,5600 (-1)	+ 0,9342 (-1)	+ 0,3460 (-1)
49	+ 0,3426 (-1)	+ 0,1080	- 0,4088 (-1)	- 0,1038	+ 0,5571 (-1)	+ 0,9361 (-1)	- 0,7673 (-1)
50	+ 0,1089	+ 0,2743 (-1)	- 0,1105	- 0,1638 (-1)	+ 0,1128	- 0,3933 (-2)	- 0,1120

Таблица 45. Функции Бесселя  $J_{n/2}(x)$  и  $J_{-n/2}(x)$ 

$x$	$J_{1/2}(x)$	$J_{-1/2}(x)$	$J_{3/2}(x)$	$J_{-3/2}(x)$	$J_{5/2}(x)$	$J_{-5/2}(x)$	$J_{7/2}(x)$	$J_{-7/2}(x)$
0,0	0,0000	$\infty$	0,0000	$\infty$	0,0000	$\infty$	0,0000	$\infty$
2	+ 0,6155	+ 1,4319	+ 0,1924	+ 1,4892	+ 0,5159	+ 1,5672	+ 0,2372	+ 1,6508
4	0,7144	1,1559	0,3180	0,7770	0,6354	1,1879	0,3698	0,9625
6	0,7589	0,9737	0,4187	0,4442	0,7000	0,9582	0,4701	0,6156
8	0,7690	0,8170	0,4987	0,2193	0,7294	0,7731	0,5453	0,3769
1,0	+ 0,7522	+ 0,6694	+ 0,5587	+ 0,0447	+ 0,7309	+ 0,6069	+ 0,5979	+ 0,1883
2	0,7129	0,5260	0,5989	- 0,0985	0,7085	0,4516	0,6289	+ 0,0307
4	0,6545	0,3862	0,6194	0,2172	0,6654	0,3049	0,6391	- 0,1033
6	0,5804	0,2512	0,6208	0,3143	0,6048	0,1672	0,6296	0,2163
8	0,4937	0,1229	0,6038	0,3906	0,5296	+ 0,0397	0,6016	0,3093
2,0	+ 0,3978	+ 0,0036	+ 0,5698	- 0,4467	+ 0,4429	- 0,0757	+ 0,5570	- 0,3823
2	0,2962	- 0,1045	0,5204	0,4829	0,3482	0,1774	0,4978	0,4355
4	0,1923	0,1992	0,4578	0,4996	0,2488	0,2636	0,4265	0,4689
6	+ 0,0895	0,2788	0,3844	0,4977	0,1479	0,3330	0,3459	0,4831
8	- 0,0092	0,3418	0,3029	0,4784	+ 0,0490	0,3847	0,2589	0,4789
3,0	- 0,1006	- 0,3875	+ 0,2162	- 0,4434	- 0,0450	- 0,4182	+ 0,1684	- 0,4576
2	0,1824	0,4154	0,1273	0,3945	0,1312	0,4336	+ 0,0776	0,4209
4	0,2521	0,4256	+ 0,0391	0,3343	0,2071	0,4314	- 0,0105	0,3708
6	0,3081	0,4188	- 0,0455	0,2651	0,2707	0,4129	0,0932	0,3098
8	0,3493	0,3962	0,1238	0,1899	0,3205	0,3794	0,1680	0,2405
4,0	- 0,3748	- 0,3595	- 0,1935	- 0,1114	- 0,3554	- 0,3331	- 0,2325	- 0,1657
2	0,3845	0,3106	0,2525	- 0,0326	0,3749	0,2761	0,2852	0,0882
4	0,3788	0,2519	0,2992	+ 0,0438	0,3789	0,2111	0,3245	- 0,0110
6	0,3587	0,1861	0,3325	0,1152	0,3681	0,1409	0,3498	+ 0,0631
8	0,3255	0,1158	0,3518	0,1791	0,3434	- 0,0681	0,3606	0,1317
5,0	- 0,2810	- 0,0439	- 0,3569	+ 0,2336	- 0,3064	+ 0,0043	- 0,3571	+ 0,1925
2	0,2272	+ 0,0269	0,3481	0,2770	0,2589	0,0738	0,2434	0,2434
4	0,1666	0,0940	0,3264	0,3082	0,2032	0,1377	0,3106	0,2831
6	0,1017	0,1550	0,2929	0,3264	0,1415	0,1939	0,2703	0,3105
8	- 0,0351	0,2078	0,2493	0,3314	0,0765	0,2406	0,2209	0,3248
6,0	+ 0,0306	+ 0,2506	- 0,1976	+ 0,3234	- 0,0107	+ 0,2763	- 0,1646	+ 0,3262
2	0,0929	0,2823	0,1399	0,3033	+ 0,0534	0,3001	0,1038	0,3148
4	0,1497	0,3019	0,0787	0,2720	0,1133	0,3113	- 0,0409	0,2916
6	0,1988	0,3090	- 0,0163	0,2312	0,1670	0,3100	+ 0,0216	0,2578
8	0,2387	0,3038	+ 0,0449	0,1827	0,2125	0,2966	0,0815	0,2150
7,0	+ 0,2680	+ 0,2869	+ 0,1025	+ 0,1284	+ 0,2484	+ 0,2720	+ 0,1364	+ 0,1650
2	0,2860	0,2591	0,1545	0,0707	0,2735	0,2374	0,1844	0,1101
4	0,2923	0,2220	0,1991	+ 0,0118	0,2872	0,1944	0,2240	+ 0,0523
6	0,2869	0,1771	0,2348	- 0,0459	0,2893	0,1449	0,2538	- 0,0059
8	0,2704	0,1264	0,2604	0,1004	0,2799	0,0911	0,2729	0,0624
8,0	+ 0,2436	+ 0,0720	+ 0,2752	- 0,1496	+ 0,2598	+ 0,0350	+ 0,2808	- 0,1151
2	0,2080	+ 0,0161	0,2788	0,1917	0,2299	- 0,0211	0,2775	0,1619
4	0,1650	- 0,0390	0,2715	0,2253	0,1918	0,0750	0,2635	0,2013
6	0,1165	0,0913	0,2538	0,2493	0,1470	0,2395	0,2395	0,2319
8	0,0646	0,1388	0,2265	0,2631	0,0974	0,1683	0,2067	0,2526
9,0	+ 0,0113	- 0,1798	+ 0,1910	- 0,2662	+ 0,0451	- 0,2043	+ 0,1665	- 0,2630
2	- 0,0413	0,2128	0,1488	0,2588	- 0,0078	0,2315	0,1206	0,2629
4	0,0911	0,2367	0,1017	0,2415	0,0592	0,2490	0,0710	0,2525
6	0,1363	0,2508	0,0515	0,2150	0,1073	0,2563	+ 0,0197	0,2323
8	0,1752	0,2547	+ 0,0004	0,1807	0,1501	0,2533	- 0,0314	0,2035
10,0	- 0,2064	- 0,2484	- 0,0497	- 0,1399	- 0,1861	- 0,2405	- 0,0801	- 0,1672

Т а б л и ц а 46. Функции Бесселя  $J_\nu(\pi)$

$\nu$	$J_\nu(1)$	$J_\nu(2)$	$J_\nu(3)$	$J_\nu(4)$	$J_\nu(5)$	$J_\nu(6)$
0	+ 0,7652	+ 0,2239	- 0,2601	- 0,3971	- 0,1776	+ 0,1506
0,5	+ 0,6714	+ 0,5130	+ 0,6501 (- 1)	- 0,3019	- 0,3422	- 0,9102 (- 1)
1,0	+ 0,4401	+ 0,5767	+ 0,3391	- 0,6604 (- 1)	- 0,3276	- 0,2767
1,5	+ 0,2403	+ 0,4913	+ 0,4777	+ 0,1853	- 0,1697	- 0,3279
2,0	+ 0,1149	+ 0,3528	+ 0,4861	+ 0,3641	+ 0,4657 (- 1)	- 0,2429
2,5	+ 0,4950 (- 1)	+ 0,2239	+ 0,4127	+ 0,4409	+ 0,2404	- 0,7295 (- 1)
3,0	+ 0,1956 (- 1)	+ 0,1289	+ 0,3091	+ 0,4302	+ 0,3648	+ 0,1148
3,5	+ 0,7186 (- 2)	+ 0,6852 (- 1)	+ 0,2101	+ 0,3658	+ 0,4100	+ 0,2671
4,0	+ 0,2477 (- 2)	+ 0,3400 (- 1)	+ 0,1320	+ 0,2811	+ 0,3912	+ 0,3576
4,5	+ 0,8067 (- 3)	+ 0,1589 (- 1)	+ 0,7760 (- 1)	+ 0,1993	+ 0,3337	+ 0,3846
5,0	+ 0,2498 (- 3)	+ 0,7040 (- 2)	+ 0,4303 (- 1)	+ 0,1321	+ 0,2611	+ 0,3621
5,5	+ 0,7385 (- 4)	+ 0,2973 (- 2)	+ 0,2266 (- 1)	+ 0,8261 (- 1)	+ 0,1906	+ 0,3098
6,0	+ 0,2094 (- 4)	+ 0,1202 (- 2)	+ 0,1739 (- 1)	+ 0,4909 (- 1)	+ 0,1310	+ 0,2458
6,5	+ 0,5710 (- 5)	+ 0,4672 (- 3)	+ 0,5493 (- 2)	+ 0,2787 (- 1)	+ 0,8558 (- 1)	+ 0,1833
7,0	+ 0,1502 (- 5)	+ 0,1749 (- 3)	+ 0,2547 (- 2)	+ 0,1518 (- 1)	+ 0,5338 (- 1)	+ 0,1296
8	+ 0,9422 (- 7)	+ 0,2218 (- 4)	+ 0,4934 (- 3)	+ 0,4029 (- 2)	+ 0,1841 (- 1)	+ 0,5653 (- 1)
9	+ 0,5249 (- 8)	+ 0,2492 (- 5)	+ 0,8440 (- 4)	+ 0,9386 (- 3)	+ 0,5520 (- 2)	+ 0,2117 (- 1)
10	+ 0,2631 (- 8)	+ 0,2515 (- 6)	+ 0,1293 (- 4)	+ 0,1950 (- 3)	+ 0,1468 (- 2)	+ 0,6964 (- 2)
11	+ 0,1198 (- 10)	+ 0,2304 (- 7)	+ 0,1794 (- 5)	+ 0,3660 (- 4)	+ 0,3509 (- 3)	+ 0,2048 (- 2)
12	+ 0,5000 (- 12)	+ 0,1933 (- 8)	+ 0,2276 (- 6)	+ 0,6264 (- 5)	+ 0,7628 (- 4)	+ 0,5452 (- 3)
13	+ 0,1926 (- 13)	+ 0,1455 (- 9)	+ 0,2659 (- 7)	+ 0,9859 (- 6)	+ 0,1521 (- 4)	+ 0,1327 (- 3)
14	+ 0,689 (- 15)	+ 0,1023 (- 10)	+ 0,2880 (- 8)	+ 0,1436 (- 6)	+ 0,2801 (- 5)	+ 0,2976 (- 4)
15	+ 0,23 (- 16)	+ 0,7183 (- 12)	+ 0,2908 (- 9)	+ 0,1948 (- 7)	+ 0,4797 (- 6)	+ 0,6192 (- 5)
16	+ 0,1 (- 17)	+ 0,4506 (- 13)	+ 0,2749 (- 10)	+ 0,2472 (- 8)	+ 0,7675 (- 7)	+ 0,1202 (- 5)
17		+ 0,2659 (- 14)	+ 0,2444 (- 11)	+ 0,2947 (- 9)	+ 0,1153 (- 7)	+ 0,2187 (- 6)
18		+ 0,148 (- 15)	+ 0,2050 (- 12)	+ 0,3313 (- 10)	+ 0,1631 (- 8)	+ 0,3746 (- 7)
19		+ 0,8 (- 17)	+ 0,1628 (- 13)	+ 0,3525 (- 11)	+ 0,2183 (- 9)	+ 0,6062 (- 8)
20			+ 0,1228 (- 14)	+ 0,3560 (- 12)	+ 0,2770 (- 10)	+ 0,9296 (- 9)
21			+ 0,88 (- 16)	+ 0,3420 (- 13)	+ 0,3344 (- 11)	+ 0,1355 (- 9)
22			+ 0,6 (- 17)	+ 0,3134 (- 14)	+ 0,3848 (- 12)	+ 0,1882 (- 10)
23				+ 0,275 (- 15)	+ 0,4231 (- 13)	+ 0,2496 (- 11)
24				+ 0,23 (- 16)	+ 0,4454 (- 14)	+ 0,3168 (- 12)
25				+ 0,2 (- 17)	+ 0,450 (- 15)	+ 0,3855 (- 13)
26					+ 0,44 (- 16)	+ 0,4507 (- 14)
27					+ 0,4 (- 17)	+ 0,507 (- 15)
28						+ 0,55 (- 16)
29						+ 0,6 (- 17)
30						+ 0,1 (- 17)

$\nu$	$J_\nu(7)$	$J_\nu(8)$	$J_\nu(9)$	$J_\nu(10)$	$J_\nu(11)$	$J_\nu(12)$
0	+ 0,3001	+ 0,1717	- 0,9033 (- 1)	- 0,2459	- 0,1712	+ 0,4769 (- 1)
0,5	+ 0,1981	+ 0,2791	+ 0,1096	- 0,1373	- 0,2406	- 0,1236
1,0	- 0,4683 (- 2)	+ 0,2346	+ 0,2453	+ 0,4347 (- 1)	- 0,1768	- 0,2234
1,5	- 0,1991	+ 0,7593 (- 1)	+ 0,2545	+ 0,1980	- 0,2293 (- 1)	- 0,2047
2,0	- 0,3014	- 0,1130	+ 0,1448	+ 0,2546	+ 0,1390	- 0,8493 (- 1)

Продолжение табл. 46

$\nu$	$J_\nu(7)$	$J_\nu(8)$	$J_\nu(9)$	$J_\nu(10)$	$J_\nu(11)$	$J_\nu(12)$
2.5	-0,2834	-0,2506	-0,2477 (-1)	+0,1967	+0,2343	+0,2742 (-1)
3,0	-0,1676	-0,2911	-0,1809	+0,5838 (-1)	+0,2273	+0,1951
3.5	-0,3403 (-2)	-0,2326	-0,2683	-0,9965 (-1)	+0,1294	+0,2348
4,0	+0,1578	-0,1054	-0,2655	-0,2196	-0,1504 (-1)	+0,1825
4.5	+0,2800	+0,4712 (-1)	-0,1839	-0,2664	-0,1519	+0,6487 (-1)
5,0	+0,3479	+0,1858	-0,5504 (-1)	-0,2341	-0,2383	-0,7347 (-1)
5.5	+0,3634	+0,2856	+0,8439 (-1)	-0,1401	-0,2538	-0,1864
6,0	+0,3392	+0,3376	+0,2043	-0,1446 (-1)	-0,2016	-0,2437
6.5	+0,2911	+0,3456	+0,2870	+0,1123	-0,1018	-0,2354
7,0	+0,2336	+0,3206	+0,3275	+0,2167	+0,1838 (-1)	-0,1703
7.5	+0,1772	+0,2759	+0,3302	+0,2861	+0,1334	-0,6865 (-1)
8,0	+0,1280	+0,2235	+0,3051	+0,3179	+0,2250	+0,4510 (-1)
8.5	+0,8853 (-1)	+0,1718	+0,2633	+0,3168	+0,2838	+0,1496
9,0	+0,5892 (-1)	+0,1263	+0,2149	+0,2919	+0,3089	+0,2304
9.5	+0,3785 (-1)	+0,892* (-1)	+0,1672	+0,2526	+0,3051	+0,2806
10,0	+0,2354 (-1)	+0,6077 (-1)	+0,1247	+0,2075	+0,2804	+0,3005
10.5	+0,1420 (-1)	+0,4004 (-1)	+0,8959 (-1)	+0,1630	+0,2433	+0,2947
11,0	+0,8335 (-2)	+0,2560 (-1)	+0,6222 (-1)	+0,1231	+0,2010	+0,2704
11.5	+0,4763 (-2)	+0,1590 (-1)	+0,4188 (-1)	+0,8976 (-1)	+0,1593	+0,2351
12,0	+0,2f56 (-2)	+0,9624 (-2)	+0,2739 (-1)	+0,6337 (-1)	+0,1216	+0,1953
12.5	+0,1446 (-2)	+0,5680 (-2)	+0,1744 (-1)	+0,4344 (-1)	+0,8978 (-1)	+0,1559
13,0	+0,7702 (-3)	+0,3275 (-2)	+0,1083 (-1)	+0,2897 (-1)	+0,6429 (-1)	+0,1201
13.5	+0,4016 (-3)	+0,1846 (-2)	+0,6568 (-2)	+0,1884 (-1)	+0,4477 (-1)	+0,8969 (-1)
14,0	+0,2052 (-3)	+0,1019 (-2)	+0,3895 (-2)	+0,1196 (-1)	+0,3037 (-1)	+0,6504 (-1)
15	+0,5059 (-4)	+0,2926 (-3)	+0,1286 (-2)	+0,4508 (-2)	+0,1301 (-1)	+0,3161 (-1)
16	+0,1161 (-4)	+0,7801 (-4)	+0,3933 (-3)	+0,1567 (-2)	+0,5110 (-2)	+0,1399 (-1)
17	+0,2494 (-5)	+0,1942 (-4)	+0,1120 (-3)	+0,5056 (-3)	+0,1856 (-2)	+0,5698 (-2)
18	+0,5037 (-6)	+0,4538 (-5)	+0,2988 (-4)	+0,1524 (-3)	+0,6280 (-3)	+0,2152 (-2)
19	+0,9598 (-7)	+0,9992 (-6)	+0,7497 (-5)	+0,4315 (-4)	+0,1990 (-3)	+0,7590 (-3)
20	+0,1731 (-7)	+0,2081 (-6)	+0,1777 (-5)	+0,1151 (-4)	+0,5931 (-4)	+0,2512 (-3)
21	+0,2966 (-8)	+0,4110 (-7)	+0,3990 (-6)	+0,2907 (-5)	+0,1670 (-4)	+0,7839 (-4)
22	+0,4839 (-9)	+0,7725 (-8)	+0,8515 (-7)	+0,6969 (-6)	+0,4458 (-5)	+0,2315 (-4)
23	+0,7535 (-10)	+0,1385 (-8)	+0,1732 (-7)	+0,1590 (-6)	+0,1132 (-5)	+0,6491 (-5)
24	+0,1122 (-10)	+0,2373 (-9)	+0,3364 (-8)	+0,3463 (-7)	+0,2738 (-6)	+0,1733 (-5)
25	+0,1602 (-11)	+0,3895 (-10)	+0,6257 (-9)	+0,7215 (-8)	+0,6333 (-7)	+0,4418 (-6)
26	+0,2195 (-12)	+0,6135 (-11)	+0,1116 (-9)	+0,1441 (-8)	+0,1403 (-7)	+0,1078 (-6)
27	+0,2893 (-13)	+0,9289 (-12)	+0,1913 (-10)	+0,2762 (-9)	+0,2981 (-8)	+0,2521 (-7)
28	+0,3673 (-14)	+0,1354 (-12)	+0,3154 (-11)	+0,5094 (-10)	+0,6092 (-9)	+0,5665 (-8)
29	+0,450 (-15)	+0,1903 (-13)	+0,5014 (-12)	+0,9050 (-11)	+0,1198 (-9)	+0,1225 (-8)
30	+0,53 (-16)	+0,2583 (-14)	+0,7692 (-13)	+0,1551 (-11)	+0,2274 (-10)	+0,2552 (-9)
31	+0,6 (-17)	+0,339 (-15)	+0,1140 (-13)	+0,2568 (-12)	+0,4165 (-11)	+0,5133 (-10)
32	+0,1 (-17)	+0,43 (-16)	+0,1636 (-14)	+0,4112 (-13)	+0,7375 (-12)	+0,9976 (-11)
33		+0,5 (-17)	+0,227 (-15)	+0,6376 (-14)	+0,1264 (-12)	+0,1876 (-11)
34		+0,1 (-17)	+0,31 (-16)	+0,958 (-15)	+0,2100 (-13)	+0,3417 (-12)
35			+0,4 (-17)	+0,140 (-15)	+0,3383 (-14)	+0,6035 (-13)
36				+0,20 (-16)	+0,529 (-15)	+0,1035 (-13)
37				+0,80 (-16)	+0,1723 (-14)	+0,2799 (-15)
38					+0,12 (-16)	+0,279 (-15)
39					+0,2 (-17)	+0,44 (-16)
40						+0,7 (-17)
41						+0,1 (-17)

Продолжение табл. 46

$\nu$	$J_\nu(13)$	$J_\nu(14)$	$J_\nu(15)$	$J_\nu(16)$	$J_\nu(17)$	$J_\nu(18)$
0	+ 0,2069	+ 0,1711	- 0,1422 (- 1)	- 0,1749	- 0,1699	- 0,1336 (- 1)
0,5	+ 0,9298 (- 1)	+ 0,2112	+ 0,1340	- 0,5743 (- 1)	- 0,1860	- 0,1412
1,0	- 0,7032 (- 1)	+ 0,1334	+ 0,2051	+ 0,9040 (- 1)	- 0,9767 (- 1)	- 0,1170
1,5	- 0,1937	- 0,1407 (- 1)	+ 0,1654	+ 0,1874	+ 0,4230 (- 1)	- 0,1120
2,0	- 0,2177	- 0,1520	+ 0,4157 (- 1)	+ 0,1862	+ 0,1584	- 0,7533 (- 2)
2,5	- 0,1377	- 0,2143	- 0,1009	+ 0,9257 (- 1)	+ 0,1935	+ 0,1192
3,0	+ 0,3320 (- 2)	- 0,1768	- 0,1940	- 0,4385 (- 1)	+ 0,1349	+ 0,1863
3,5	+ 0,1407	- 0,6245 (- 1)	- 0,1991	- 0,1585	+ 0,1461 (- 1)	+ 0,1651
4,0	+ 0,2193	+ 0,7624 (- 1)	- 0,1192	- 0,2026	- 0,1107	- 0,6564 (- 1)
4,5	+ 0,2134	+ 0,1830	+ 0,7984 (- 2)	- 0,1619	- 0,1875	- 0,5500 (- 1)
5,0	+ 0,1316	+ 0,2204	+ 0,1305	- 0,5747 (- 1)	- 0,1870	- 0,1554
5,5	+ 0,7055 (- 2)	+ 0,1801	+ 0,2039	+ 0,6743 (- 1)	- 0,1139	- 0,1926
6,0	- 0,1180	+ 0,8117 (- 1)	+ 0,2061	+ 0,1667	+ 0,7153 (- 3)	- 0,1560
6,5	- 0,2075	- 0,4151 (- 1)	+ 0,1415	+ 0,2083	+ 0,1138	- 0,6273 (- 1)
7,0	- 0,2406	- 0,1508	+ 0,3446 (- 1)	+ 0,1825	+ 0,1875	+ 0,5140 (- 1)
7,5	- 0,2145	- 0,2187	- 0,8121 (- 1)	+ 0,1018	+ 0,2009	+ 0,1473
8,0	- 0,1410	- 0,2320	- 0,1740	- 0,7021 (- 2)	+ 0,1537	+ 0,1959
8,5	- 0,4006 (- 1)	- 0,1928	- 0,2227	- 0,1128	+ 0,6346 (- 1)	+ 0,1855
9,0	+ 0,6698 (- 1)	- 0,1143	- 0,2200	- 0,1895	- 0,4286 (- 1)	+ 0,1228
9,5	+ 0,1621	- 0,1541 (- 1)	- 0,1712	- 0,2217	- 0,1374	+ 0,2786 (- 1)
10,0	+ 0,2338	+ 0,8501 (- 1)	- 0,9007 (- 1)	- 0,2062	- 0,1991	- 0,7317 (- 1)
10,5	+ 0,2770	+ 0,1718	+ 0,5862 (- 2)	- 0,1504	- 0,2171	- 0,1561
11,0	+ 0,2927	+ 0,2357	+ 0,9995 (- 1)	- 0,6822 (- 1)	- 0,1914	- 0,2041
11,5	+ 0,2854	+ 0,2732	+ 0,1794	+ 0,2427 (- 1)	- 0,1307	- 0,2100
12,0	+ 0,2615	+ 0,2855	+ 0,2367	+ 0,1124	- 0,4857 (- 1)	- 0,1762
12,5	+ 0,2279	+ 0,2770	+ 0,2692	+ 0,1853	+ 0,4024 (- 1)	- 0,1122
13,0	+ 0,1901	+ 0,2536	+ 0,2787	+ 0,2368	+ 0,1228	- 0,3092 (- 1)
13,5	+ 0,1528	+ 0,2214	+ 0,2693	+ 0,2653	+ 0,1899	+ 0,5414 (- 1)
14,0	+ 0,1188	+ 0,1855	+ 0,2464	+ 0,2724	+ 0,2364	+ 0,1316
14,5	+ 0,8953 (- 1)	+ 0,1500	+ 0,2155	+ 0,2623	+ 0,2613	+ 0,1934
15,0	+ 0,6564 (- 1)	+ 0,1174	+ 0,1813	+ 0,2399	+ 0,2666	+ 0,2356
15,5	+ 0,4691 (- 1)	+ 0,8931 (- 1)	+ 0,1474	+ 0,2102	+ 0,2559	+ 0,2575
16,0	+ 0,3272 (- 1)	+ 0,6613 (- 1)	+ 0,1162	+ 0,1775	+ 0,2340	+ 0,2611
16,5	+ 0,2232 (- 1)	+ 0,4777 (- 1)	+ 0,8905 (- 1)	+ 0,1450	+ 0,2054	+ 0,2500
17,0	+ 0,1491 (- 1)	+ 0,3372 (- 1)	+ 0,6653 (- 1)	+ 0,1150	+ 0,1739	+ 0,2286
17,5	+ 0,9760 (- 2)	+ 0,2330 (- 1)	+ 0,4853 (- 1)	+ 0,8876 (- 1)	+ 0,1427	+ 0,2009
18,0	+ 0,6269 (- 2)	+ 0,1577 (- 1)	+ 0,3463 (- 1)	+ 0,6685 (- 1)	+ 0,1138	+ 0,1706
18,5	+ 0,3955 (- 2)	+ 0,1047 (- 1)	+ 0,2419 (- 1)	+ 0,4920 (- 1)	+ 0,8844 (- 1)	+ 0,1406
19,0	+ 0,2452 (- 2)	+ 0,6824 (- 2)	+ 0,1657 (- 1)	+ 0,3544 (- 1)	+ 0,6710 (- 1)	+ 0,1127
20	+ 0,8971 (- 3)	+ 0,2753 (- 2)	+ 0,7360 (- 2)	+ 0,1733 (- 1)	+ 0,3619 (- 1)	+ 0,6731 (- 1)
21	+ 0,3087 (- 3)	+ 0,1041 (- 2)	+ 0,3054 (- 2)	+ 0,7879 (- 2)	+ 0,1804 (- 1)	+ 0,3686 (- 1)
22	+ 0,1004 (- 3)	+ 0,3711 (- 3)	+ 0,1190 (- 2)	+ 0,3354 (- 2)	+ 0,8380 (- 2)	+ 0,1871 (- 1)
23	+ 0,3092 (- 4)	+ 0,1251 (- 3)	+ 0,4379 (- 3)	+ 0,1343 (- 2)	+ 0,3651 (- 2)	+ 0,8864 (- 2)
24	+ 0,9060 (- 5)	+ 0,4006 (- 4)	+ 0,1527 (- 3)	+ 0,5087 (- 3)	+ 0,1500 (- 2)	+ 0,3946 (- 2)
25	+ 0,2532 (- 5)	+ 0,1221 (- 4)	+ 0,5060 (- 4)	+ 0,1828 (- 3)	+ 0,5831 (- 3)	+ 0,1658 (- 2)
26	+ 0,6761 (- 6)	+ 0,3555 (- 5)	+ 0,1599 (- 4)	+ 0,6253 (- 4)	+ 0,2154 (- 3)	+ 0,6607 (- 3)
27	+ 0,1730 (- 6)	+ 0,9902 (- 6)	+ 0,4829 (- 5)	+ 0,2042 (- 4)	+ 0,7586 (- 4)	+ 0,2504 (- 3)
28	+ 0,4249 (- 7)	+ 0,2645 (- 6)	+ 0,1398 (- 5)	+ 0,6380 (- 5)	+ 0,2553 (- 4)	+ 0,9057 (- 4)
29	+ 0,1004 (- 7)	+ 0,6790 (- 7)	+ 0,3883 (- 6)	+ 0,1912 (- 5)	+ 0,8228 (- 5)	+ 0,3133 (- 4)
30	+ 0,2283 (- 8)	+ 0,1678 (- 7)	+ 0,1037 (- 6)	+ 0,5505 (- 6)	+ 0,2546 (- 5)	+ 0,1039 (- 4)
31	+ 0,5009 (- 9)	+ 0,3995 (- 8)	+ 0,2670 (- 7)	+ 0,1526 (- 6)	+ 0,7577 (- 6)	+ 0,3313 (- 5)
32	+ 0,1062 (- 9)	+ 0,9187 (- 9)	+ 0,6632 (- 8)	+ 0,4078 (- 7)	+ 0,2172 (- 6)	+ 0,1016 (- 5)
33	+ 0,2176 (- 10)	+ 0,2042 (- 9)	+ 0,1591 (- 8)	+ 0,1052 (- 7)	+ 0,6009 (- 7)	+ 0,3005 (- 6)
34	+ 0,4320 (- 11)	+ 0,4392 (- 10)	+ 0,3693 (- 9)	+ 0,2625 (- 8)	+ 0,1606 (- 7)	+ 0,8583 (- 7)
35	+ 0,8310 (- 12)	+ 0,9155 (- 11)	+ 0,8301 (- 10)	+ 0,6339 (- 9)	+ 0,4153 (- 8)	+ 0,2370 (- 7)
36	+ 0,1551 (- 12)	+ 0,1851 (- 11)	+ 0,1809 (- 10)	+ 0,1484 (- 9)	+ 0,1040 (- 8)	+ 0,6335 (- 8)
37	+ 0,2812 (- 13)	+ 0,3632 (- 12)	+ 0,3827 (- 11)	+ 0,3368 (- 10)	+ 0,2526 (- 9)	+ 0,1641 (- 8)
38	+ 0,4956 (- 14)	+ 0,6928 (- 13)	+ 0,7863 (- 12)	+ 0,7426 (- 11)	+ 0,5956 (- 10)	+ 0,4126 (- 9)
39	+ 0,850 (- 15)	+ 0,1285 (- 13)	+ 0,1571 (- 12)	+ 0,1591 (- 11)	+ 0,1364 (- 10)	+ 0,1007 (- 9)

Продолжение табл. 46

$\nu$	$J_\nu(13)$	$J_\nu(14)$	$J_\nu(15)$	$J_\nu(16)$	$J_\nu(17)$	$J_\nu(18)$
40	+ 0,142 (-15)	+ 0,2320 (-14)	+ 0,3054 (-13)	+ 0,3317 (-12)	+ 0,3039 (-11)	+ 0,2391 (-10)
41	+ 0,23 (-16)	+ 0,408 (-15)	+ 0,5781 (-14)	+ 0,6733 (-13)	+ 0,6590 (-12)	+ 0,5520 (-11)
42	+ 0,4 (-17)	+ 0,70 (-16)	+ 0,1067 (-14)	+ 0,1331 (-13)	+ 0,1392 (-12)	+ 0,1241 (-11)
43	+ 0,1 (-17)	+ 0,12 (-16)	+ 0,192 (-15)	+ 0,2567 (-14)	+ 0,2865 (-13)	+ 0,2719 (-12)
44		+ 0,2 (-17)	+ 0,34 (-16)	+ 0,483 (-15)	+ 0,5752 (-14)	+ 0,5810 (-13)
45			+ 0,6 (-17)	+ 0,89 (-16)	+ 0,1127 (-14)	+ 0,1211 (-13)
46			+ 0,1 (-17)	+ 0,16 (-16)	+ 0,216 (-15)	+ 0,2466 (-14)
47				+ 0,3 (-17)	+ 0,40 (-16)	+ 0,490 (-15)
48					+ 0,7 (-17)	+ 0,95 (-16)
49					+ 0,1 (-17)	+ 0,18 (-16)
50						+ 0,3 (-17)

$\nu$	$J_\nu(19)$	$J_\nu(20)$	$J_\nu(21)$	$J_\nu(22)$	$J_\nu(23)$	$J_\nu(24)$
0	+ 0,1466	+ 0,1670	+ 0,3658 (-1)	- 0,1207	- 0,1624	- 0,5623 (-1)
0,5	+ 0,2743 (-1)	+ 0,1629	+ 0,1457	- 0,1506 (-2)	- 0,1408	- 0,1475
1,0	- 0,1057	+ 0,6683 (-1)	+ 0,1711	+ 0,1172	- 0,3952 (-1)	- 0,1540
1,5	- 0,1795	- 0,6466 (-1)	+ 0,1023	+ 0,1700	+ 0,8253 (-1)	- 0,7523 (-1)
2,0	- 0,1578	- 0,1603	- 0,2028 (-1)	+ 0,1313	+ 0,1590	+ 0,4339 (-1)
2,5	- 0,5578 (-1)	- 0,1726	- 0,1311	+ 0,2469 (-1)	+ 0,1516	+ 0,1381
3,0	+ 0,7249 (-1)	- 0,9890 (-1)	- 0,1750	- 0,9330 (-1)	+ 0,6717 (-1)	+ 0,1613
3,5	+ 0,1649	+ 0,2152 (-1)	- 0,1335	- 0,1644	- 0,4958 (-1)	+ 0,1040
4,0	+ 0,1806	+ 0,1307	- 0,2971 (-1)	- 0,1568	- 0,1415	- 0,3076 (-2)
4,5	+ 0,1165	+ 0,1801	+ 0,8656 (-1)	- 0,7701 (-1)	- 0,1666	- 0,1078
5,0	+ 0,3572 (-2)	+ 0,1512	+ 0,1637	+ 0,3630 (-1)	- 0,1164	- 0,1623
5,5	- 0,1097	+ 0,5953 (-1)	+ 0,1706	+ 0,1329	- 0,1563 (-1)	- 0,1444
6,0	- 0,1788	- 0,5509 (-1)	+ 0,1076	+ 0,1733	+ 0,9086 (-1)	- 0,6455 (-1)
6,5	- 0,1800	- 0,1474	+ 0,2808 (-2)	+ 0,1435	+ 0,1592	+ 0,4157 (-1)
7,0	- 0,1165	- 0,1842	- 0,1022	+ 0,5820 (-1)	+ 0,1638	+ 0,1300
8	+ 0,9294 (-1)	- 0,7387 (-1)	- 0,1757	- 0,1362	+ 0,8829 (-2)	+ 0,1404
9	+ 0,1947	+ 0,1251	- 0,3175 (-1)	- 0,1573	- 0,1576	- 0,3643 (-1)
10	+ 0,9155 (-1)	+ 0,1865	+ 0,1485	+ 0,7547 (-2)	- 0,1322	- 0,1677
11	- 0,9837 (-1)	+ 0,6136 (-1)	+ 0,1732	+ 0,1641	+ 0,4268 (-1)	- 0,1033
12	- 0,2055	- 0,1190	+ 0,3293 (-1)	+ 0,1566	+ 0,1730	+ 0,7299 (-1)
13	- 0,1612	- 0,2041	- 0,1356	+ 0,6688 (-2)	+ 0,1379	+ 0,1763
14	- 0,1507 (-1)	- 0,1464	- 0,2008	- 0,1487	- 0,1718 (-1)	+ 0,1180
15	+ 0,1389	- 0,8121 (-3)	- 0,1321	- 0,1959	- 0,1588	- 0,3863 (-1)
16	+ 0,2345	+ 0,1452	+ 0,1202 (-1)	- 0,1185	- 0,1899	- 0,1663
17	+ 0,2559	+ 0,2331	+ 0,1505	+ 0,2358 (-1)	- 0,1055	- 0,1831
18	+ 0,2235	+ 0,2511	+ 0,2316	+ 0,1549	+ 0,3402 (-1)	- 0,9311 (-1)
19	+ 0,1676	+ 0,2189	+ 0,2465	+ 0,2299	+ 0,1587	+ 0,4345 (-1)
20	+ 0,1116	+ 0,1647	+ 0,2145	+ 0,2422	+ 0,2282	+ 0,1619
21	+ 0,6746 (-1)	+ 0,1106	+ 0,1621	+ 0,2105	+ 0,2381	+ 0,2264
22	+ 0,3748 (-1)	+ 0,6758 (-1)	+ 0,1097	+ 0,1596	+ 0,2067	+ 0,2343
23	+ 0,1934 (-1)	+ 0,3805 (-1)	+ 0,6767 (-1)	+ 0,1087	+ 0,1573	+ 0,2031
24	+ 0,9331 (-2)	+ 0,1993 (-1)	+ 0,3857 (-1)	+ 0,6773 (-1)	+ 0,1078	+ 0,1550
25	+ 0,4237 (-2)	+ 0,9781 (-2)	+ 0,2049 (-1)	+ 0,3905 (-1)	+ 0,6777 (-1)	+ 0,1070
26	+ 0,1819 (-2)	+ 0,4524 (-2)	+ 0,1022 (-1)	+ 0,2102 (-1)	+ 0,3949 (-1)	+ 0,6778 (-1)
27	+ 0,7412 (-3)	+ 0,1981 (-2)	+ 0,4806 (-2)	+ 0,1064 (-1)	+ 0,2152 (-1)	+ 0,3990 (-1)
28	+ 0,2877 (-3)	+ 0,8242 (-3)	+ 0,2143 (-2)	+ 0,5084 (-2)	+ 0,1104 (-1)	+ 0,2200 (-1)
29	+ 0,1066 (-3)	+ 0,3270 (-3)	+ 0,9094 (-3)	+ 0,2307 (-2)	+ 0,5357 (-2)	+ 0,1143 (-1)
30	+ 0,3785 (-4)	+ 0,1240 (-3)	+ 0,3682 (-3)	+ 0,9965 (-3)	+ 0,2470 (-2)	+ 0,5626 (-2)
31	+ 0,1289 (-4)	+ 0,4508 (-4)	+ 0,1427 (-3)	+ 0,4113 (-3)	+ 0,1085 (-2)	+ 0,2633 (-2)
32	+ 0,4223 (-5)	+ 0,1574 (-4)	+ 0,5304 (-4)	+ 0,1626 (-3)	+ 0,4561 (-3)	+ 0,1176 (-2)
33	+ 0,1333 (-5)	+ 0,5289 (-5)	+ 0,1895 (-4)	+ 0,6171 (-4)	+ 0,1837 (-3)	+ 0,5024 (-3)
34	+ 0,4057 (-6)	+ 0,1713 (-5)	+ 0,6521 (-5)	+ 0,2253 (-4)	+ 0,7110 (-4)	+ 0,2060 (-3)
35	+ 0,1193 (-6)	+ 0,5358 (-6)	+ 0,2164 (-5)	+ 0,7927 (-5)	+ 0,2649 (-4)	+ 0,8119 (-4)
36	+ 0,3396 (-7)	+ 0,1620 (-6)	+ 0,6941 (-6)	+ 0,2692 (-5)	+ 0,9516 (-5)	+ 0,3083 (-4)
37	+ 0,9362 (-8)	+ 0,4742 (-7)	+ 0,2153 (-6)	+ 0,8839 (-6)	+ 0,3302 (-5)	+ 0,1130 (-4)
38	+ 0,2503 (-8)	+ 0,1345 (-7)	+ 0,6471 (-7)	+ 0,2809 (-6)	+ 0,1108 (-5)	+ 0,4000 (-5)
39	+ 0,6496 (-9)	+ 0,3704 (-8)	+ 0,1886 (-7)	+ 0,8652 (-7)	+ 0,3603 (-6)	+ 0,1371 (-5)
40	+ 0,1638 (-9)	+ 0,9902 (-9)	+ 0,5336 (-8)	+ 0,2586 (-7)	+ 0,1136 (-6)	+ 0,4553 (-6)
41	+ 0,4018 (-10)	+ 0,2574 (-9)	+ 0,1467 (-8)	+ 0,7506 (-8)	+ 0,3476 (-7)	+ 0,1467 (-6)
42	+ 0,9594 (-11)	+ 0,6510 (-10)	+ 0,3922 (-9)	+ 0,2118 (-8)	+ 0,1034 (-7)	+ 0,4590 (-7)
43	+ 0,2231 (-11)	+ 0,1604 (-10)	+ 0,1021 (-9)	+ 0,5816 (-9)	+ 0,2989 (-8)	+ 0,1396 (-7)
44	+ 0,5059 (-12)	+ 0,3849 (-11)	+ 0,2589 (-10)	+ 0,1555 (-9)	+ 0,8417 (-9)	+ 0,4133 (-8)

## Продолжение табл. 46

$\nu$	$J_\nu(19)$	$J_\nu(20)$	$J_\nu(21)$	$J_\nu(22)$	$J_\nu(23)$	$J_\nu(24)$
45	+ 0,1119 (-12)	+ 0,9011 (-12)	+ 0,6402 (-11)	+ 0,4054 (-10)	+ 0,2309 (-9)	+ 0,1191 (-8)
46	+ 0,2416 (-13)	+ 0,2059 (-12)	+ 0,1544 (-11)	+ 0,1031 (-10)	+ 0,6175 (-10)	+ 0,3347 (-9)
47	+ 0,5096 (-14)	+ 0,4594 (-13)	+ 0,3637 (-12)	+ 0,2557 (-11)	+ 0,1611 (-10)	+ 0,9172 (-10)
48	+ 0,1051 (-14)	+ 0,1002 (-13)	+ 0,8368 (-13)	+ 0,6196 (-12)	+ 0,4105 (-11)	+ 0,2453 (-10)
49	+ 0,212 (-15)	+ 0,2135 (-14)	+ 0,1882 (-13)	+ 0,1467 (-12)	+ 0,1022 (-11)	+ 0,6409 (-11)
50	+ 0,42 (-16)	+ 0,445 (-15)	+ 0,4139 (-14)	+ 0,3397 (-13)	+ 0,2486 (-12)	+ 0,1636 (-11)
51	+ 0,8 (-17)	+ 0,91 (-16)	+ 0,891 (-15)	+ 0,7696 (-14)	+ 0,5917 (-13)	+ 0,4085 (-12)
52	+ 0,2 (-17)	+ 0,18 (-16)	+ 0,188 (-15)	+ 0,1706 (-14)	+ 0,1378 (-13)	+ 0,9976 (-13)
53		+ 0,4 (-17)	+ 0,39 (-16)	+ 0,370 (-15)	+ 0,3142 (-14)	+ 0,2385 (-13)
54		+ 0,1 (-17)	+ 0,8 (-17)	+ 0,79 (-16)	+ 0,702 (-15)	+ 0,5585 (-14)
55			+ 0,2 (-17)	+ 0,16 (-16)	+ 0,154 (-15)	+ 0,1281 (-14)
56				+ 0,3 (-17)	+ 0,34 (-16)	+ 0,288 (-15)
57				+ 0,1 (-17)	+ 0,7 (-17)	+ 0,64 (-16)
58					+ 0,1 (-17)	+ 0,14 (-16)
59						+ 0,3 (-17)
60						+ 0,1 (-17)

$\nu$	$J_\nu(25)$	$J_\nu(26)$	$J_\nu(27)$	$J_\nu(28)$	$J_\nu(29)$
0	+ 0,0962	+ 0 1560	+ 0,0727	- 0,0732	- 0,1478
1	- 0,1254	+ 0,0150	+ 0 1366	+ 0,1306	+ 0,0069
2	- 0,1063	- 0,1548	- 0 0626	+ 0,0825	+ 0,1483
3	+ 0,1083	- 0,0389	- 0,1459	- 0,1188	+ 0,0135
4	+ 0,1323	+ 0,1459	+ 0,0302	- 0,1079	- 0,1455
5	- 0,0660	+ 0,0838	+ 0,1548	+ 0,0879	- 0,0537
6	- 0,1587	- 0,1137	+ 0,0271	+ 0,1393	+ 0,1270
7	- 0,0102	- 0,1362	- 0,1428	- 0,0282	+ 0,1062
8	+ 0,1530	+ 0,0403	- 0,1012	- 0,1534	- 0,0757
9	+ 0,1081	+ 0,1610	+ 0,0828	- 0,0595	- 0,1480
10	- 0,0752	+ 0,0712	+ 0,1564	+ 0,1152	- 0,0161
11	- 0,1682	- 0,1063	+ 0,0330	+ 0,1418	+ 0,1369
12	- 0,0729	- 0,1611	- 0,1295	- 0,0038	+ 0,1200
13	+ 0,0983	- 0,0424	- 0,1481	- 0,1450	- 0,0376
14	+ 0,1751	+ 0,1187	- 0,0131	- 0,1309	- 0,1537
15	+ 0,0978	+ 0,1702	+ 0,1345	+ 0,0142	- 0,1108
16	- 0,0577	+ 0,0777	+ 0,1625	+ 0,1461	+ 0,0391
17	- 0,1717	- 0,0745	+ 0,0582	+ 0,1527	+ 0,1539
18	- 0,1759	- 0,1752	- 0,0893	+ 0,0394	+ 0,1414
19	- 0,0814	- 0,1681	- 0,1772	- 0,1021	+ 0,0216
20	+ 0,0520	- 0,0704	- 0,1601	- 0,1779	- 0,1131
21	+ 0,1644	+ 0,0597	- 0,0600	- 0,1521	- 0,1776
22	+ 0,2246	+ 0,1669	+ 0,0668	- 0,0502	- 0,1441
23	+ 0,2306	+ 0,2227	+ 0,1688	+ 0,0732	- 0,0410
24	+ 0,1998	+ 0,2271	+ 0,2209	+ 0,1704	+ 0,0790
25	+ 0,1529	+ 0,1966	+ 0,2238	+ 0,2190	+ 0,1718
26	+ 0,1061	+ 0,1510	+ 0,1936	+ 0,2207	+ 0,2172
27	+ 0,6778 (-1)	+ 0,1053	+ 0,1491	+ 0,1908	+ 0,2176
28	+ 0,4028 (-1)	+ 0,6776 (-1)	+ 0,1045	+ 0,1473	+ 0,1881
29	+ 0,2245 (-1)	+ 0,4063 (-1)	+ 0,6773 (-1)	+ 0,1038	+ 0,1456
30	+ 0,1181 (-1)	+ 0,2288 (-1)	+ 0,4096 (-1)	+ 0,6769 (-1)	+ 0,1030
31	+ 0,5889 (-2)	+ 0,1217 (-1)	+ 0,2329 (-1)	+ 0,4126 (-1)	+ 0,6763 (-1)
32	+ 0,2795 (-2)	+ 0,6147 (-2)	+ 0,1253 (-1)	+ 0,2368 (-1)	+ 0,4155 (-1)
33	+ 0,1267 (-2)	+ 0,2957 (-2)	+ 0,6400 (-2)	+ 0,1287 (-1)	+ 0,2405 (-1)
34	+ 0,550 (-3)	+ 0,1360 (-2)	+ 0,3118 (-2)	+ 0,6648 (-2)	+ 0,1320 (-1)
35	+ 0,229 (-3)	+ 0,599 (-3)	+ 0,1453 (-2)	+ 0,3278 (-2)	+ 0,6891 (-2)
36	+ 0,92 (-4)	+ 0,254 (-3)	+ 0,650 (-3)	+ 0,1548 (-2)	+ 0,3437 (-2)
37	+ 0,36 (-4)	+ 0,103 (-3)	+ 0,279 (-3)	+ 0,701 (-3)	+ 0,1642 (-2)
38	+ 0,13 (-4)	+ 0,41 (-4)	+ 0,116 (-3)	+ 0,306 (-3)	+ 0,754 (-3)
39	+ 0,5 (-5)	+ 0,15 (-4)	+ 0,46 (-4)	+ 0,128 (-3)	+ 0,333 (-3)
40	+ 0,2 (-5)	+ 0,6 (-5)	+ 0,18 (-4)	+ 0,52 (-4)	+ 0,142 (-3)
41	+ 0,1 (-5)	+ 0,2 (-5)	+ 0,7 (-5)	+ 0,20 (-4)	+ 0,58 (-4)
42		+ 0,1 (-5)	+ 0,2 (-5)	+ 0,8 (-5)	+ 0,23 (-4)
43			+ 0,1 (-5)	+ 0,3 (-5)	+ 0,9 (-5)
44				+ 0,1 (-5)	+ 0,3 (-5)

Т а б л и ц а 47. Функции Неймана  $N_0(x)$  и  $N_1(x)$

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
0,00	$-\infty$	$-\infty$	1,00	+ 0,0883	- 0,7812	2,00	+ 0,5104	- 0,1070
02	2,564	31,860	02	1037 + 77	7640 + 86	02	5124 + 10	0958 + 56
04	2,122	15,964	04	1188 74	7471 84	04	5142 9	0846 56
06	1,863	10,676	06	1336 72	7305 83	06	5158 8	0736 55
08	1,678	8,038	08	1480 71	7142 81	08	5172 7	0626 54
0,10	- 1,534 + 59	- 6,459	1,10	1622 + 69	6981 + 70	2,10	5183 + 4,5	0517 + 54
12	1,416 50	5,409	12	1760 67	6823 78	12	5192 1,5	0409 54
14	1,316 44	4,662	14	1895 65	6667 77	14	5199 2,5	0301 51
16	1,228 38,5	4,103	16	2026 64	6513 76	16	5204 1,5	0195 52
18	1,151 35	3,670	18	2155 63	6361 75	18	5207 + 0,5	0090 52
0,20	- 1,081 + 31,5	- 3,324	1,20	2281 + 61,5	6211 + 74	2,20	5208 - 0,5	*0015 + 51,5
22	1,018 29,5	3,042	22	2404 59	6063 73	22	5207 2	0118 51
24	0,959 27	2,807	24	2523 58	5916 72	24	5203 2,5	0221 51
26	0,905 25	2,609	26	2640 57	5771 71	26	5198 4	0323 50
28	0,855 24	2,440	28	2754 55,5	5628 71	28	5190 4,5	0423 50
0,30	= 0,807 + 22	- 2,293 + 64	1,30	2865 + 54,5	5485 + 70,5	2,30	5181 - 6	0523 + 49
32	0,763 21	2,165 56,5	32	2974 52,5	5344 70	32	5169 6,5	0621 49
34	0,721 20	2,052 50	34	3079 51,5	5204 69	34	5156 7,5	0719 48
36	0,681 19,5	1,952 45	36	3182 50	5066 69	36	5141 9	0815 48
38	0,642 18	1,862 40,5	38	3282 48,5	4928 68,5	38	5123 9,5	0911 47
0,40	- 0,6060 + 174	- 1,781 + 36,5	1,40	3379 + 47	4791 + 67,5	2,40	5104 - 10,5	1005 + 46,5
42	0,5712 167,5	1,708 33,5	42	3473 46	4656 67,5	42	5083 11,5	1098 46
44	0,5377 161	1,641 30,5	44	3565 44,5	4521 66,5	44	5060 12	1190 45,5
46	0,5055 155	1,580 28,5	46	3654 43	4388 66,5	46	5036 13,5	1281 45
48	0,4745 150	1,523 26	48	3741 41,5	4255 66	48	5009 14	1371 44
0,50	- 0,4445 + 144,5	- 1,471 + 24	1,50	3824 + 41	4123 + 65,5	2,50	4981 - 15	1459 + 44
52	0,4156 140	1,423 22,5	52	3906 39	3992 65	52	4951 16	1547 43
54	0,3876 136	1,378 20,5	54	3984 38	3862 65	54	4919 17	1633 42,5
56	0,3604 131,5	1,337 20	56	4060 36,5	3732 64	56	4885 17,5	1718 41,5
58	0,3341 128	1,297 18,5	58	4133 35,5	3604 64	58	4850 18,5	1801 41,5
0,60	- 0,3085 + 124	- 1,260 + 17	1,60	4204 + 34,5	3476 + 63,5	2,60	4813 - 19	1884 + 40,5
62	0,2837 121	1,226 16,5	62	4273 32,5	3349 63,5	62	4775 20	1965 40
64	0,2595 118	1,193 16	64	4338 31,5	3222 63	64	4735 21	2045 39
66	0,2359 114,5	1,161 14,5	66	4401 30,5	3096 62	66	4693 21,5	2123 38,5
68	0,2130 111,5	1,132 14,5	68	4462 29	2972 62,5	68	4650 22,5	2200 38
0,70	- 0,1907 + 109	- 1,1032 + 135,5	1,70	4520 + 28	2847 + 61,5	2,70	4605 - 23	2276 + 37,5
72	0,1689 106,5	1,0761 129,5	72	4576 26,5	2724 61,5	72	4559 24	2351 36,5
74	0,1476 103,5	1,0502 124,5	74	4629 25,5	2601 61	74	4511 24,5	2424 36
76	0,1269 101,5	1,0253 120	76	4680 24	2479 61	76	4462 25,5	2496 35
78	0,1066 99	1,0013 116	78	4728 23	2357 60	78	4411 26	2566 34,5
0,80	- 0,0868 + 96,5	- 0,9781 + 111,5	1,80	4774 + 22	2237 + 60	2,80	4359 - 26,5	2635 + 34
82	0,0675 94,5	0,9558 108	82	4818 20,5	2117 60	82	4306 27,5	2703 33
84	0,0486 92,5	0,9342 105	84	4859 19,5	1997 59	84	4251 28	2769 32,5
86	0,0301 90,5	0,9132 101,5	86	4898 18	1879 59	86	4195 28,5	2834 31,5
88	- 0,0120 88	0,8929 99	88	4934 17	1761 58,5	88	4138 29,5	2897 31
0,90	+ 0,0056 + 86,5	- 0,8731 + 96	1,90	4968 + 16	1644 + 58	2,90	4079 - 30	2959 + 30,5
92	0,0229 84,5	0,8539 94	92	5000 14,5	1528 58	92	4019 30,5	3020 29,5
94	0,0398 82,5	0,8351 92	94	5029 13,5	1412 57,5	94	3958 31	3079 28,5
96	0,0563 81	0,8167 89,5	96	5056 12,5	1297 56,5	96	3896 31,5	3136 28
98	0,0725 79	0,7988 88	98	5081 11,5	1184 57	98	3833 32	3192 27,5
1,00	+ 0,0883	- 0,7812	2,00	5104	1070	3,00	3769	3247
				+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,



Продолжение табл. 47

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
	+ 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,
3,00	3769 - 33	3247 + 26,5	4,00	0169 - 40	3979 - 12	5,00	3085 - 14,5	1479 - 34
02	3703 33	3300 25,5	02	0249 39,5	3955 12,5	02	3114 14	1411 34
04	3637 34	3351 25	04	0328 39	3930 13,5	04	3142 13	1343 34
06	3569 34,5	3401 24	06	0406 39	3903 14	06	3168 12,5	1275 34,5
08	3500 34,5	3449 23,5	08	0484 38,5	3875 14,5	08	3193 12,5	1206 34,5
3,10	3431 - 35	3496 + 23	4,10	0561 - 38,5	3846 - 15,5	5,10	3216 - 11	1137 - 34
12	3361 36	3542 21,5	12	0638 38	3815 16	12	3238 10,5	1069 34,5
14	3289 36	3585 21	14	0714 37,5	3783 16,5	14	3259 9,5	1000 35
16	3217 36,5	3627 20,5	16	0789 37,5	3750 17	16	3278 9	0930 34,5
18	3144 36,5	3668 19,5	18	0864 37	3716 18	18	3296 8,5	0861 34,5
3,20	3071 - 37,5	3707 + 19	4,20	0938 - 36,5	3680 - 18,5	5,20	3313 - 7,5	0792 - 34,5
22	2996 37,5	3745 17,5	22	1011 36	3643 19	22	3328 6,5	0723 35
24	2921 38	3780 17,5	24	1083 36	3605 19,5	24	3341 6,5	0653 34,5
26	2845 38,5	3815 16	26	1155 35,5	3566 20,5	26	3354 5,5	0584 34,5
28	2768 38,5	3847 16	28	1226 35	3525 20,5	28	3365 4,5	0515 35
3,30	2691 - 39	3879 + 14,5	4,30	1296 - 34,5	3484 - 21,5	5,30	3374 - 4,5	0445 - 34,5
32	2613 39	3908 14	32	1365 34,5	3441 22	32	3383 3	0376 34,5
34	2535 39,5	3936 13	34	1434 33,5	3397 22	34	3389 3	0307 34,5
36	2456 40	3962 12,5	36	1501 33,5	3353 23	36	3395 2	0238 34
38	2376 40	3987 11,5	38	1568 32,5	3307 23,5	38	3399 1,5	0170 34,5
3,40	2296 - 40	4010 + 11	4,40	1633 - 32,5	3260 - 24	5,40	3402 - 0,5	0101 - 34,5
42	2216 40,5	4032 10	42	1698 32	3212 24,5	42	3403 0	0033 34
44	2135 40,5	4052 9	44	1762 31,5	3163 25	44	3403 + 0,5	*0035 34,5
46	2054 41	4070 8,5	46	1825 30,5	3113 25,5	46	3402 1,5	0103 33,5
48	1972 41	4087 7,5	48	1886 30,5	3062 26	48	3399 2	0170 34
3,50	1890 - 41	4102 + 6,5	4,50	1947 - 30	3010 - 26,5	5,50	3395 + 3	0238 - 33
52	1808 41	4115 6	52	2007 29	2957 26,5	52	3389 3	0304 33,5
54	1726 41,5	4127 5,5	54	2065 29	2904 27,5	54	3383 4	0371 33
56	1643 41,5	4138 4,5	56	2123 28	2849 27,5	56	3375 5	0437 33
58	1560 41,5	4147 3,5	58	2179 28	2794 28,5	58	3365 5,5	0503 32,5
3,60	1477 - 41,5	4154 + 3	4,60	2235 - 27	2737 - 28,5	5,60	3354 + 6	0568 - 32,5
62	1394 41,5	4160 2	62	2289 26,5	2680 28,5	62	3342 6,5	0633 32
64	1311 42	4164 1	64	2342 26	2623 29,5	64	3329 7	0697 32
66	1227 41,5	4166 + 0,5	66	2394 25	2564 29,5	66	3315 8	0761 31,5
68	1144 41,5	4167 0	68	2444 25	2505 30	68	3299 8,5	0824 31,5
3,70	1061 - 42	4167 - 1	4,70	2494 - 24	2445 - 30,5	5,70	3282 + 9,5	0887 - 31
72	0977 41,5	4165 2	72	2542 23,5	2384 30,5	72	3263 9,5	0949 31
74	0894 41,5	4161 2,5	74	2589 23	2323 31	74	3244 10,5	1011 30,5
76	0811 41,5	4156 3,5	76	2635 22,5	2261 31	76	3223 11	1072 30,5
78	0728 41,5	4149 4	78	2680 21,5	2199 31,5	78	3201 12	1133 29,5
3,80	0645 - 41,5	4141 - 4,5	4,80	2723 - 21	2136 - 32	5,80	3177 + 12	1192 - 29,5
82	0562 41	4132 6	82	2765 20,5	2072 32	82	3153 13	1251 29,5
84	0480 41,5	4120 6	84	2806 19,5	2008 32,5	84	3127 13	1310 29
86	0397 41	4108 7	86	2845 19,5	1943 32,5	86	3101 14	1368 28,5
88	0315 40,5	4094 8	88	2884 18,5	1878 33	88	3073 14,5	1425 28
3,90	0234 - 41	4078 - 8,5	4,90	2921 - 17,5	1812 - 33	5,90	3044 + 15,5	1481 - 27,5
92	0152 40,5	4061 9	92	2956 17	1746 33	92	3013 15,5	1536 27,5
94	0071 40	4043 10	94	2990 16,5	1680 33,5	94	2982 16	1591 27
96	*0009 40,5	4023 10,5	96	3023 16	1613 33,5	96	2950 17	1645 26,5
98	0090 39,5	4002 11,5	98	3055 15	1546 33,5	98	2916 17	1698 26
4,00	0169 - 0,	3979 + 0,	5,00	3085 - 0,	1479 + 0,	6,00	2882 - 0,	1750 - 0,

Продолжение табл. 47

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
6,00	- 0,	- 0,	7,00	- 0,	- 0,	8,00	+ 0,	- 0,
02	2882 + 18	1750 - 25,5	02	0259 + 30	1027 + 2	02	2235 + 15,5	1581 + 24,5
04	2846 18	1801 25,5	04	0199 30	3023 3	04	2266 15	1532 25
06	2810 19	1852 25	06	0139 30,5	3017 3	06	2296 15	1482 25
08	2772 19	1902 24	08	0078 30	3011 4	08	2326 14	1432 25
6,10	2734 20	1950 24	08	0018 30	3003 4	08	2354 13,5	1382 25,5
12	2694 + 20	1998 - 23,5	7,10	*0042 + 30	2995 + 5	8,10	2381 + 13	1331 + 25,5
14	2654 20,5	2045 23	12	0102 29,5	2985 5,5	12	2407 12,5	1280 25,5
16	2613 21,5	2091 22,5	14	0161 30	2974 6	14	2432 12	1229 26
18	2570 21,5	2136 22	16	0221 29,5	2962 6,5	16	2456 11,5	1177 26
6,20	2527 22	2180 21,5	18	0280 29,5	2949 7,5	18	2479 11	1125 26,5
22	2483 + 22,5	2223 - 21	7,20	0339 + 29	2934 + 7,5	8,20	2501 + 10,5	1072 + 26
24	2438 22,5	2265 20,5	22	0397 29	2919 8,5	22	2522 10	1020 26,5
26	2393 23,5	2306 20	24	0455 29	2902 8,5	24	2542 9,5	0967 27
28	2346 23,5	2346 19,5	26	0513 29	2885 9,5	26	2561 8,5	0913 26,5
6,30	2299 24	2385 18,5	28	0571 28,5	2866 10	28	2578 8,5	0860 27
32	2251 + 24,5	2422 - 18,5	7,30	0628 + 28	2846 + 10,5	8,30	2595 + 8	0806 + 27
34	2202 25	2459 18	32	0684 28,5	2825 11	32	2611 7	0752 27
36	2152 25	2495 17,5	34	0741 28	2803 11,5	34	2625 7	0698 27
38	2102 25,5	2530 16,5	36	0797 27,5	2780 12	36	2639 6	0644 27,5
6,40	2051 26	2563 16,5	38	0852 27,5	2756 12,5	38	2651 5,5	0589 27
42	1999 + 26	2596 - 15,5	7,40	0907 + 27	2731 + 13	8,40	2662 + 5	0535 + 27,5
44	1947 26,5	2627 15	42	0961 27	2705 13,5	42	2672 4,5	0480 27
46	1894 26,5	2657 14,5	44	1015 26,5	2678 14	44	2681, 4	0426 27,5
48	1841 27	2686 14	46	1068 26,5	2650 14,5	46	2689 3,5	0371 27,5
6,50	1787 27,5	2714 13,5	48	1121 26	2621 15	48	2696 3	0316 27
52	1732 + 27,5	2741 - 13	7,50	1173 + 26	2591 + 15,5	8,50	2702 + 2,5	0262 + 27,5
54	1677 27,5	2767 12	52	1225 25,5	2560 15,5	52	2707 1,5	0207 27,5
56	1622 28	2791 11,5	54	1276 25	2529 16,5	54	2710 1,5	0152 27
58	1566 28,5	2814 11	56	1326 24,5	2496 17	56	2713 0,5	0098 27,5
6,60	1509 28,5	2836 10,5	58	1375 24,5	2462 17	58	2714 + 0,5	0043 27
62	1452 + 28,5	2857 - 10	7,60	1424 + 24	2428 + 17,5	8,60	2715 - 0,5	*0011 + 27
64	1395 29	2877 9,5	62	1472 24	2393 18	62	2714 1	0065 27
66	1337 29	2896 8,5	64	1520 23,5	2357 18,5	64	2712 1,5	0119 27
68	1279 29	2913 8,5	66	1567 23	2320 19	66	2709 2	0173 27
6,70	1221 29,5	2930 7,5	68	1613 22,5	2282 19,5	68	2705 2,5	0227 26,5
72	1162 + 29,5	2945 - 6,5	7,70	1658 + 22	2243 + 19,5	8,70	2700 - 3	0280 + 26,5
74	1103 29,5	2958 6,5	72	1702 22	2204 20	72	2694 3,5	0333 26,5
76	1044 30	2971 6	74	1746 21,5	2164 20,5	74	2687 4,5	0386 26,5
78	0984 30	2983 5	76	1789 21	2123 21	76	2678 4,5	0439 26
6,80	0924 30	2993 4,5	78	1831 20,5	2081 21	78	2669 5	0491 26,5
82	0864 + 30	3002 - 4	7,80	1872 + 20,5	2039 + 21,5	8,80	2659 - 6	0544 + 25,5
84	0804 30	3010 3	82	1913 19,5	1996 22	82	2647 6	0595 26
86	0744 30	3016 3	84	1952 19,5	1952 22	84	2635 7	0647 25,5
88	0684 30,5	3022 2	86	1991 18,5	1908 22,5	86	2621 7	0698 25,5
6,90	0623 30	3026 1,5	88	2028 18,5	1863 23	88	2607 7,5	0748 25,5
92	0563 + 30,5	3029 - 1	7,90	2065 + 18	1817 + 23	8,90	2592 - 8,5	0799 + 25
94	0502 30,5	3031 - 0,5	92	2101 17,5	1771 23,5	92	2575 8,5	0849 24,5
96	0441 30	3032 + 0,5	94	2136 17	1724 23,5	94	2558 9,5	0898 24,5
98	0381 30,5	3031 0,5	96	2170 16,5	1677 24	96	2539 9,5	0947 24
7,00	0320 30,5	3030 1,5	98	2203 16	1629 24	98	2520 10,5	0995 24
	0259	3027	8,00	2235	1581	9,00	2499	1043
	- 0,	- 0,		+ 0,	- 0,		+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 47

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
	+ 0.	+ 0.		+ 0.	+ 0.		- 0.	+ 0.
9,00	2499 - 10,5	1043 + 24	10,00	0557 - 25	2490 + 3	11,00	1688 - 16,5	1637 - 18,5
02	2478 11	1091 23	02	0507 25	2496 2	02	1721 15,5	1600 19
04	2456 11,5	1137 23,5	04	0457 25	2500 2	04	1752 15,5	1562 19
06	2433 12,5	1184 22,5	06	0407 25	2504 1,5	06	1783 15	1524 19
08	2408 12,5	1229 23	08	0357 25	2507 0,5	08	1813 15	1486 20
9,10	2383 - 13	1275 + 22	10,10	0307 - 25,5	2508 + 0,5	11,10	1843 - 14	1446 - 19,5
12	2357 13	1319 22	12	0256 25	2509 0	12	1871 14	1407 20,5
14	2331 14	1363 21,5	14	0206 25	2509 - 1	14	1899 13,5	1366 20
16	2303 14,5	1406 21,5	16	0156 25	2507 1	16	1926 13	1326 20,5
18	2274 14,5	1449 21	18	0106 25	2505 1,5	18	1952 12,5	1285 21
9,20	2245 - 15	1491 + 20,5	10,20	0056 - 25	2502 - 2	11,20	1977 - 12,5	1243 - 21
22	2215 15,5	1532 20,5	22	0006 25	2498 3	22	2002 11,5	1201 21
24	2184 16	1573 20	24	*0044 25	2492 3	24	2025 11,5	1159 21,5
26	2152 16,5	1613 19,5	26	0094 24,5	2486 3,5	26	2048 11	1116 21,5
28	2119 16,5	1652 19,5	28	0143 25	2479 4	28	2070 10,5	1073 22
9,30	2086 - 17	1691 + 18,5	10,30	0193 - 24,5	2471 - 4,5	11,30	2091 - 10	1029 - 21,5
32	2215 17,5	1728 18,5	32	0242 24,5	2462 5,5	32	2111 9,5	0986 22,5
34	2017 18	1765 18	34	0291 24,5	2451 5,5	34	2130 9,5	0941 22
36	1981 18	1801 18	36	0340 24,5	2440 6	36	2149 8,5	0897 22,5
38	1945 19	1837 17	38	0389 24	2428 6	38	2166 8,5	0852 22,5
9,40	1907 - 18,5	1871 + 17	10,40	0437 - 24,5	2416 - 7	11,40	2183 - 8	0807 - 22,5
42	1870 19,5	1905 16,5	42	0486 24	2402 7,5	42	2199 7	0762 22,5
44	1831 19,5	1938 16	44	0534 23,5	2387 8	44	2213 7	0717 23
46	1792 20	1970 15,5	46	0581 23,5	2371 8	46	2227 6,5	0671 23
48	1752 20	2001 15,5	48	0628 23,5	2355 9	48	2240 6	0625 23
9,50	1712 - 20,5	2032 + 14,5	10,50	0675 - 23,5	2337 - 9	11,50	2252 - 5,5	0579 - 23
52	1671 20,5	2061 14,5	52	0722 23	2319 10	52	2263 5,5	0533 23
54	1630 21	2090 14	54	0768 23	2299 10	54	2274 4,5	0487 23
56	1588 21,5	2118 13,5	56	0814 22,5	2279 10,5	56	2283 4	0441 23,5
58	1545 21,5	2145 13	58	0859 22,5	2258 11	58	2291 4	0394 23
9,60	1502 - 22	2171 + 12,5	10,60	0904 - 22,5	2236 - 11	11,60	2299 - 3	0348 - 23,5
62	1458 22	2196 12	62	0949 22	2214 12	62	2305 3	0301 23,5
64	1414 22,5	2220 11,5	64	0993 21,5	2190 12	64	2311 2	0254 23
66	1369 22,5	2243 11	66	1036 21,5	2166 13	66	2315 2	0208 23,5
68	1324 22,5	2265 11	68	1079 21,5	2140 13	68	2319 1,5	0161 23,5
9,70	1279 - 23	2287 + 10	10,70	1122 - 21	2114 - 13	11,70	2322 - 1	0114 - 23
72	1233 23,5	2307 9,5	72	1164 20,5	2088 14	72	2324 - 0,5	0068 23,5
74	1186 23	2326 9,5	74	1205 20,5	2060 14	74	2325 + 0,5	0021 23
76	1140 23,5	2345 8,5	76	1246 20,5	2032 14,5	76	2324 0	*0025 23,5
78	1093 24	2362 8,5	78	1287 19,5	2003 15	78	2324 1	0072 23
9,80	1045 - 23,5	2379 + 7,5	10,80	1326 - 20	1973 - 15,5	11,80	2322 + 1,5	0118 - 23
82	0998 24,5	2394 7,5	82	1366 19	1942 15,5	82	2319 2	0164 23
84	0949 24	2409 7	84	1404 19	1911 16	84	2315 2,5	0210 23
86	0901 24	2423 6	86	1442 18,5	1879 16,5	86	2310 2,5	0256 23
88	0853 24,5	2435 6	88	1479 18,5	1846 16,5	88	2305 3,5	0302 22,5
9,90	0804 - 24,5	2447 + 5,5	10,90	1516 - 18	1813 - 17	11,90	2298 + 3,5	0347 - 22,5
92	0755 25	2458 4,5	92	1552 17,5	1779 17	92	2291 4	0392 22,5
94	0705 24,5	2467 4,5	94	1587 17,5	1745 18	94	2283 5	0437 22,5
96	0656 25	2476 4	96	1622 16,5	1709 17,5	96	2273 5	0482 22,5
98	0606 24,5	2484 3	98	1655 16,5	1674 18,5	98	2263 5,5	0527 22
10,00	0557 + 0.	2490 + 0.	11,00	1688 - 0.	1637 + 0.	12,00	2252 - 0.	0571 - 0.

Продолжение табл. 47

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
12,00	-0,	-0,	13,00	-0,	-0,	14,00	+0,	-0,
	2252	0571		0782	2101		1272	1666
02	+ 5,5	-22	02	+ 21	- 6	02	+ 16,5	+ 14
	2241	0615		0740	2113		1305	1638
04	6,5	22	04	21	5,5	04	16	1610
	2228	0659		0698	2124		1337	1610
06	7	21,5	06	21,5	5	06	16	1580
	2214	0702		0655	2134		1369	1580
08	7	21,5	08	21,5	5	08	16	1550
	2200	0745		0612	2144		1401	1550
12,10	8	-21,5	13,10	+ 21,5	- 4	14,10	+ 15	+ 15,5
	2184	0787		0569	2152		1431	1520
12	+ 8,5	20,5	12	+ 21,5	3,5	12	+ 15	1489
	2168	0830		0526	2160		1461	1489
14	9	21	14	22	2,5	14	14,5	1457
	2151	0871		0483	2167		1491	1457
16	9	20,5	16	21,5	3	16	14	1425
	2133	0913		0439	2172		1520	1425
18	10	20	18	22	2	18	13,5	1392
	2115	0954		0396	2178		1548	1392
12,20	+ 10	-20	13,20	+ 21,5	- 1,5	14,20	+ 13,5	+ 17
	2095	0994		0352	2182		1575	1359
22	10,5	20	22	22	1	22	13	1325
	2075	1034		0309	2185		1602	1325
24	11	19,5	24	22	1	24	13	1291
	2054	1074		0265	2187		1628	1291
26	11,5	19	26	22	- 0,5	26	12,5	1257
	2032	1113		0221	2189		1654	1257
28	11,5	19	28	21,5	0	28	12	1222
	2009	1151		0177	2190		1679	1222
12,30	+ 12	-19	13,30	+ 22	+ 1	14,30	+ 11,5	+ 18
	1986	1189		0134	2190		1703	1186
32	12,5	18,5	32	22	0,5	32	11,5	1150
	1962	1227		0090	2188		1726	1150
34	13	18	34	22	1,5	34	11	1114
	1937	1264		0046	2187		1749	1114
36	13	18	36	21,5	2	36	10,5	1077
	1911	1300		0002	2184		1771	1077
38	13,5	17,5	38	*0041	2	38	10	1040
	1885	1336		0085	2180		1792	1040
12,40	+ 14	-17,5	13,40	+ 21,5	+ 3	14,40	+ 10	+ 19
	1858	1371		0128	2176		1812	1003
42	14	17	42	22	3	42	9,5	0965
	1830	1406		0128	2170		1832	0965
44	15	17	44	21,5	3,5	44	9	0927
	1802	1440		0172	2164		1851	0927
46	14,5	16	46	21,5	4	46	8,5	0888
	1772	1474		0215	2157		1869	0888
48	15,5	16	48	21,5	4,5	48	8,5	0849
	1743	1506		0258	2149		1886	0849
12,50	+ 15,5	-16	13,50	+ 21	+ 4,5	14,50	+ 8	+ 19,5
	1712	1538		0301	2140		1903	0810
52	16	15,5	52	+ 21,5	5,5	52	7,5	0771
	1681	1570		0343	2131		1919	0771
54	16	15	54	21	5,5	54	7	0732
	1649	1601		0386	2120		1934	0732
56	16,5	14,5	56	21	6	56	7	0692
	1617	1631		0428	2109		1948	0692
58	16,5	14,5	58	21	6,5	58	6	0652
	1584	1660		0470	2097		1962	0652
12,60	+ 17	-14	13,60	+ 21	+ 7	14,60	+ 6	+ 20,5
	1551	1689		0512	2084		1974	0612
62	17,5	13,5	62	20,5	7	62	5,5	0571
	1517	1717		0554	2070		1986	0571
64	17,5	13,5	64	20,5	8	64	5	0531
	1482	1744		0595	2056		1997	0531
66	18	12,5	66	20,5	8	66	5	0490
	1447	1771		0636	2040		2007	0490
68	18	12,5	68	20	8,5	68	4	0449
	1411	1796		0677	2024		2017	0449
12,70	+ 18,5	-12,5	13,70	+ 20	+ 8,5	14,70	+ 4	+ 20,5
	1375	1821		0717	2007		2025	0408
72	18,5	11,5	72	19,5	9,5	72	3,5	0367
	1338	1846		0757	1990		2033	0367
74	18,5	11,5	74	20	9,5	74	3	0326
	1301	1869		0796	1971		2040	0326
76	19	11	76	19,5	10	76	2,5	0284
	1264	1892		0836	1952		2046	0284
78	19,5	10,5	78	19	10	78	2,5	0243
	1226	1914		0875	1932		2051	0243
12,80	+ 19,5	-10	13,80	+ 19	+ 11	14,80	+ 1,5	+ 21
	1187	1935		0913	1912		2056	0202
82	19,5	10	82	19	11	82	1,5	0160
	1148	1955		0951	1890		2059	0160
84	20	9	84	18,5	11,5	84	1	0119
	1109	1975		0989	1868		2062	0119
86	20	9	86	18	11,5	86	+ 0,5	0077
	1069	1993		1026	1845		2064	0077
88	20	8,5	88	18,5	12	88	0	0036
	1029	2011		1062	1822		2065	0036
12,90	+ 20,5	- 8	13,90	+ 17,5	+ 12,5	14,90	0	*0005
	0989	2028		1099	1798		2065	0005
92	20,5	8	92	17,5	13	92	- 0,5	0047
	0948	2044		1134	1773		2065	0047
94	20,5	7	94	17,5	13	94	1,5	0088
	0907	2060		1169	1747		2064	0088
96	21	7	96	17	13,5	96	1,5	0129
	0866	2074		1204	1721		2061	0129
98	21	6,5	98	17	14	98	1,5	0170
	0824	2088		1238	1694		2058	0170
13,00	0782	2101	14,00	1272	1666	15,00	2055	0211
	-0,	-0,		+0,	-0,		+0,	+0,

Продолжение табл. 47

$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	$x$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
15,00	+ 0, 2055	+ 0, 0211	15,40	+ 0, 1813	+ 0, 0979	15,80	+ 0, 1295	+ 0, 1575
02	2050 — 2,5	0251 + 20	42	1793 — 10	1013 + 17	82	1263 — 16	1599 + 12
04	2045 2,5	0292 20,5	44	1772 10 5	1048 17 5	84	1231 16	1599 11
06	2038 3,5	0332 20,5	46	1751 11	1082 16 5	86	1198 16 5	1621 11,5
08	2031 4	0373 20	48	1729 11 5	1115 16 5	88	1165 16 5	1644 10,5
15,10	2023 — 4	0413 + 20	15,50	1706 — 11,5	1148 + 16	15,90	1132 — 17	1686 + 10,5
12	2015 5	0453 19 5	52	1683 12	1180 16	92	1098 17 5	1706 10
14	2005 5	0492 19 5	54	1659 12	1212 16	94	1063 17	1726 9
16	1995 5 5	0531 20	56	1635 12	1244 15	96	1029 17 5	1744 9
18	1984 6	0571 19	58	1610 13	1274 15 5	98	0994 18	1762 9
15 20	1972 — 6	0609 + 19 5	15 60	1584 — 13 5	1305 + 14 5	16,00	0958	1780
22	1960 7	0648 19	62	1557 13 5	1334 14 5		+ 0,	+ 0,
24	1946 7	0686 19	64	1530 13 5	1363 14,5			
26	1932 7 5	0724 18,5	66	1503 14	1392 14			
28	1917 7 5	0761 19	68	1475 14 5	1420 13,5			
15 30	1902 — 8 5	0799 + 18	15 70	1446 — 14 5	1447 + 13,5			
32	1885 8 5	0835 18,5	72	1417 15	1474 13			
34	1868 8 5	0872 18	74	1387 15	1500 13			
36	1851 9 5	0908 17,5	76	1357 15 5	1526 12 5			
38	1832 9 5	0943 18	78	1326 15 5	1551 12			
15,40	1813	0979	15,80	1295	1575			
	+ 0,	+ 0,		+ 0,	+ 0,			

## 3. Интегральные представления

3.1. Для  $n=0, 1, 2, \dots$  имеем:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin t - nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(z \sin t - nt)} dt \quad (\text{Бессель}).$$

3.2. При  $\operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}$  справедливы формулы (Пуассон)

$$J_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt,$$

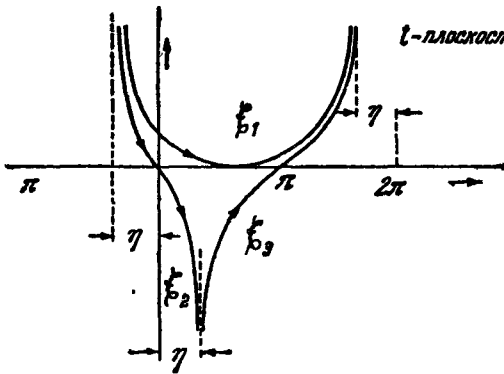
$$N_\nu(z) = \frac{2 \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin t) \cos^{2\nu} t dt - \int_0^{+\infty} e^{-z \operatorname{sh} t} \operatorname{ch}^{2\nu} t dt \right] \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

а при  $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} \nu < \frac{1}{2}$  для положительных значений аргумента

$$J_\nu(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin xt}{(t^2 - 1)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt,$$

$$N_\nu(x) = \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{(t^2 - 1)^{\nu + \frac{1}{2}}} dt. \quad (\text{Мелер, Сонин})$$

3.3. Для произвольного  $\nu$  в правой полуплоскости ( $\operatorname{Re} z > 0$  или  $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$ ) получаем представление через контурный интеграл



$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{z}{t}} \left(t - \frac{1}{t}\right) t^{-\nu-1} dt.$$

(Сониш)

3.4. Для произвольного  $\nu$  имеем (Зоммерфельд):

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_1} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}_2} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{C}_3} e^{iz \cos t} e^{i\nu(t-\pi/2)} dt.$$

Рис. 121. Пути интегрирования в интеграле Зоммерфельда.

При этом пути интегрирования выбираются следующим образом (рис. 121): для любого числа  $\eta$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$ ,  $\mathcal{C}_1$  есть кривая, пробегаемая от  $-\eta + i\infty$  до  $2\pi - \eta + i\infty$ ;  $\mathcal{C}_2$  — от  $-\eta + i\infty$  до  $\eta - i\infty$ ;  $\mathcal{C}_3$  — от  $\eta - i\infty$  до  $2\pi - \eta + i\infty$ . Приведенные интегральные представления Зоммерфельда справедливы в области  $-\eta < \arg z < \pi - \eta$ .

### 4. Асимптотика

4.1. Асимптотические разложения Ганкеля справедливы для больших значений аргумента:  $|z| \gg 1$ ,  $|z| \gg \nu$ . Обозначим

$$(\nu, 0) = 1, (\nu, m) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots (4\nu^2 - (2m-1)^2)}{2^{2m} m!} \quad \text{для } m = 1, 2, 3, \dots,$$

и пусть  $P_\nu(z)$ ,  $Q_\nu(z)$ ,  $S_\nu(z)$  означают следующие, формально построенные ряды\*):

$$P_\nu(z) \equiv 1 - \frac{\nu, 2}{(2z)^2} + \frac{(\nu, 4)}{(2z)^4} - \dots,$$

$$Q_\nu(z) \equiv \frac{(\nu, 1)}{(2z)} - \frac{(\nu, 3)}{(2z)^3} + \dots,$$

$$S_\nu(z) \equiv 1 + \frac{(\nu, 1)}{z} + \frac{(\nu, 2)}{z^2} + \frac{(\nu, 3)}{z^3} + \dots,$$

формально удовлетворяющие соотношению

$$S_\nu(\pm iz) \equiv P_\nu\left(\frac{z}{2}\right) \mp iQ_\nu\left(\frac{z}{2}\right).$$

\*) Для  $\nu=0, 1$  получим:

$$S_0(2z) \equiv 1 - \frac{0,125}{z} + \frac{0,0703125}{z^2} - \frac{0,07324219}{z^3} + \frac{0,1121521}{z^4} - \frac{0,2271080}{z^5} + \dots,$$

$$S_1(2z) \equiv 1 + \frac{0,375}{z} - \frac{0,1171875}{z^2} + \frac{0,10253906}{z^3} - \frac{0,1441956}{z^4} + \frac{0,2775764}{z^5} - \dots$$

Тогда имеем:

$$H_v^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_v(-2iz) \quad (-\pi < \arg z < 2\pi),$$

$$H_v^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} S_v(2iz) \quad (-2\pi < \arg z < \pi),$$

$$J_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) P_v(z) - \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) Q_v(z) \right] \\ (-\pi < \arg z < \pi),$$

$$N_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) P_v(z) + \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) Q_v(z) \right] \\ (-\pi < \arg z < \pi).$$

Эти представления надо понимать в асимптотическом смысле; если оборвать ряды  $S_v$ ,  $P_v$ ,  $Q_v$  после члена с  $z^{-m}$ , то получим ошибку, абсолютная величина которой меньше  $\text{const} \cdot |z|^{-m-1}$  и которая, следовательно, стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что в указанных выше областях справедливо первое приближение

$$J_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \\ N_v(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (|z| \gg 1, |z| \gg v).$$

Если порядок  $v$  и аргумент  $z = x$  действительны и положительны, то ошибка, получаемая при обрывании асимптотических рядов после  $n$ -го члена, по абсолютной величине будет меньше первого отброшенного члена (и имеет для рядов  $P_v$ ,  $Q_v$  знак отброшенного члена), если только  $n$  выбрано таким, чтобы соответственно  $2n > v - \frac{1}{2}$  в  $P_v$ ,  $2n > v - \frac{3}{2}$  в  $Q_v$ , и  $n > v - \frac{1}{2}$  в  $S_v$ . Следовательно, в практических вычислениях имеет смысл продолжать ряды только до тех пор, пока их члены убывают.

Чтобы уменьшить ошибку вычислений, получающуюся при обрывании ряда перед членом с наименьшей абсолютной величиной, можно прибавить этот член, умноженный на  $f = \frac{1}{2} + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  — малая величина). Более точные выражения для множителей  $f$  даны Барнеттом\*):

$$1) \ z = re^{i\varphi}, \ m - 1 < r < m + 1, \ m \text{ — целое, } r = m + v, \ -\frac{\pi}{6} < \varphi + \frac{\pi}{6} :$$

$$f = \frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{2} + \frac{\pm 1 + 4v - i2 \operatorname{tg} \varphi}{8r \cos^2 \varphi} \text{ для } P_v(z), Q_v(z)$$

$$2) \ z = iy, \ m - 1 < 2y < m + 1, \ m \text{ — целое, } 2y = m + t:$$

$$f = \frac{1}{2} + \frac{1 + 2t}{16y} - \frac{v^2 - \frac{3}{8} + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{2}}{(4y)^2} + \dots \text{ для } S_v(2y).$$

\*) D. Burnett, Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 26 (1930), стр. 145—151.

Эти же множители  $f$  в удобной форме найдены Эри\*) ( $x, u$  целые,  $u = \frac{1}{4x}, v = \frac{1}{4y}$ ):

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} + \frac{u}{2} - 2u^2 + \frac{15}{2}u^3 - \frac{103}{4}u^4 \dots && \text{для } P_0(x), \\ f &= \frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{9}{2}u^3 - \frac{159}{4}u^4 \dots && \text{для } Q_0(x), \\ f &= \frac{1}{2} + \frac{u}{2} + \frac{7}{2}u^3 - \frac{151}{4}u^4 \dots && \text{для } P_1(x), \\ f &= \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + 2u^2 - \frac{15}{2}u^3 + \frac{49}{4}u^4 \dots && \text{для } Q_1(x), \\ f &= \frac{1}{2} + \frac{v}{2} - \frac{3}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^3 + \frac{43}{2}v^4 - \frac{81}{2}v^5 \dots && \text{для } S_2(2y), \\ f &= \frac{1}{2} + \frac{v}{2} + \frac{5}{2}v^3 - \frac{7}{2}v^4 - \frac{29}{2}v^5 \dots && \text{для } S_1(2y). \end{aligned}$$

Если  $x, y$  — не целые, то множители  $f$  из этих формул можно получить интерполированием

4.2. Ряды Лебая дают асимптотические представления бесселевых функций для больших значений порядка или аргумента. В следующих выражениях пусть  $v$  везде будет положительной действительной величиной.

Через  $\mathfrak{E}(w)$  обозначим формально построенный ряд

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(w) &= 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{w} - \frac{5v^2}{3w^3} \right) + \frac{1 \cdot 3}{8^2} \left( \frac{3}{2w^2} - \frac{77v^2}{9w^4} + \frac{385v^4}{54w^6} \right) + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8^3} \left( \frac{5}{2w^3} - \frac{1521v^2}{50w^5} + \frac{17017v^4}{270w^7} - \frac{17017v^6}{486w^9} \right) + \dots \end{aligned}$$

Если  $m$ -й член этого ряда записать в форме

$$\frac{1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(8w)^m} \sum_{n=0}^m C_{m,n} \left( \frac{iv}{w} \right)^{2n},$$

то имеется рекуррентная формула

$$C_{0,0} = 1, \quad C_{m,-1} = C_{m,m+1} = 0,$$

$$C_{m+1,n+1} = \frac{2k+1}{(2m+1)(k+1)} [(2k-3)C_{m,n} + (2k+1)C_{m,n+1}], \quad k = m + 2n + 2.$$

В практических вычислениях следующие ряды должны быть оборваны на том месте, начиная с которого их члены перестают убывать.

а) Пусть аргумент  $z = x$  положителен, действителен и меньше, чем порядок  $v$ . Если положить

$$s^2 = v^2 - x^2, \quad u = -\frac{s}{v} + \operatorname{Arth} \frac{s}{v} = \frac{s^3}{3v^3} + \frac{s^5}{5v^5} + \dots,$$

то при  $1 \ll s < v$ ,  $v^2 \ll s^2$  (практически может быть  $s > 6$ ,  $s > 2$ ,  $5v^{2/3}$ )

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2J_v(x) \\ -N_v(x) \end{array} \right\} \approx e^{\mp vu} \mathfrak{E}(\pm s).$$

\*) J. R. Airey, Arch. Math. Phys., т. 20 (1913), стр. 240—244; т. 22 (1914), стр. 213—225.



б) Пусть аргумент  $z = x$  положителен, действителен и больше, чем порядок  $\nu$ . Если положить

$$s^2 = x^2 - \nu^2, \quad \varphi = s - \nu \operatorname{arctg} \frac{s}{\nu} - \frac{\pi}{4}, \quad \mathfrak{C}(is) = \mathfrak{C}_1(s) - i\mathfrak{C}_2(s),$$

то получим для  $1 \ll s, \nu^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot J_\nu(x) \approx \mathfrak{C}_1(s) \cos \varphi + \mathfrak{C}_2(s) \sin \varphi,$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \cdot N_\nu(x) \approx \mathfrak{C}_1(s) \sin \varphi - \mathfrak{C}_2(s) \cos \varphi.$$

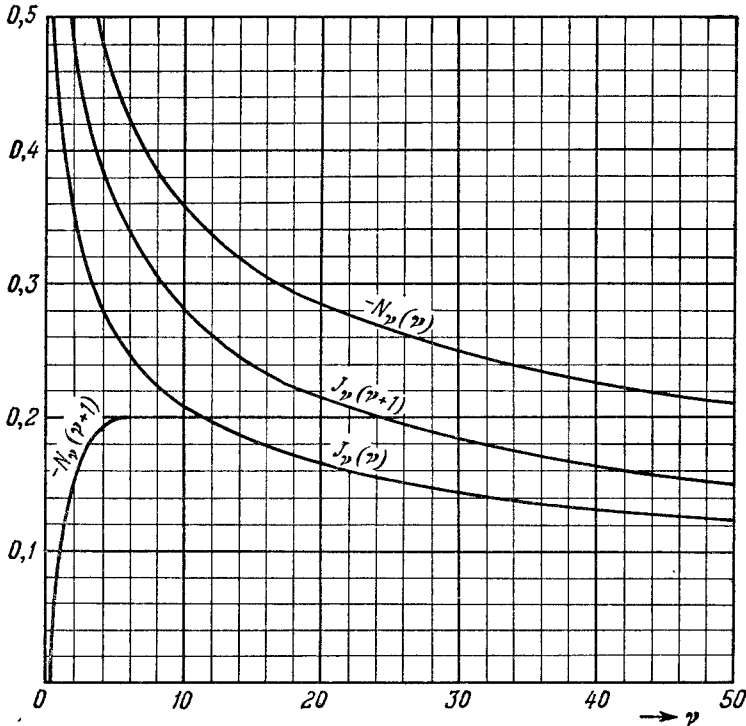


Рис. 122. Функции Бесселя и Неймана при  $x = \nu$  и  $x = \nu + 1$ .

в) Пусть аргумент  $z = iy$  чисто мнимый и  $y > 0$ . Если положить

$$s^2 = \nu^2 + y^2, \quad u = \frac{s}{\nu} - \operatorname{arctg} \frac{\nu}{s},$$

то получим для  $1 \ll s, \nu^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-\frac{\nu\pi}{2}i} 2J_\nu(iy) \approx e^{\nu u} \mathfrak{C}(s), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{\frac{(\nu+1)\pi}{2}i} H_\nu^{(1)}(iy) \approx e^{-\nu u} \mathfrak{C}(-s).$$

д) Пусть аргумент  $z = re^{\frac{\pi}{4}i}$ , где  $r > 0$ . Если положить:

$$s^4 = \nu^4 + r^4, \quad \cos 2\sigma = \nu^2/s^2, \quad \text{откуда } r^2 = \nu^2 \operatorname{tg} 2\sigma = s^2 \sin 2\sigma,$$

$$\cos 2\beta = \operatorname{tg} \sigma = \sqrt{\frac{s^2 - \nu^2}{s^2 + \nu^2}}, \quad \operatorname{gd} 2\alpha = 2\beta, \quad \text{откуда } \frac{1}{\operatorname{ch} 2\alpha} = \cos 2\beta,$$

$$u = \operatorname{ch} 2\alpha - \alpha, \quad \nu = \operatorname{ctg} 2\beta + \beta - \pi/2$$

( $u = 0$  при  $\alpha = 1,0327$  и  $v = 0$  при  $\beta = 0,3415$ ), то получим для  $1 \ll s, v^2 \ll s^2$

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \left\{ Z_\nu \left( r e^{\frac{\pi}{4} i} \right) \right. \\ \left. i H_\nu^{(1)} \left( r e^{\frac{\pi}{4} i} \right) \right\} \approx e^{\pm \nu u + i \left( \frac{\sigma}{2} \mp \nu v \right)} \mathcal{O}(\pm s e^{-i\sigma}).$$

Для  $r < 2\nu$  имеем  $Z_\nu = 2J_\nu$ , для  $r > 2\nu$  имеем  $Z_\nu = H_\nu^{(2)} \approx 2J_\nu$ .

Если аргумент  $z$  мало отличается от порядка  $\nu$ , в частности, если  $z = x$  действительно и  $|x - \nu|$  сравнимо с  $\nu^{1/2}$ , то указанные выше приближения

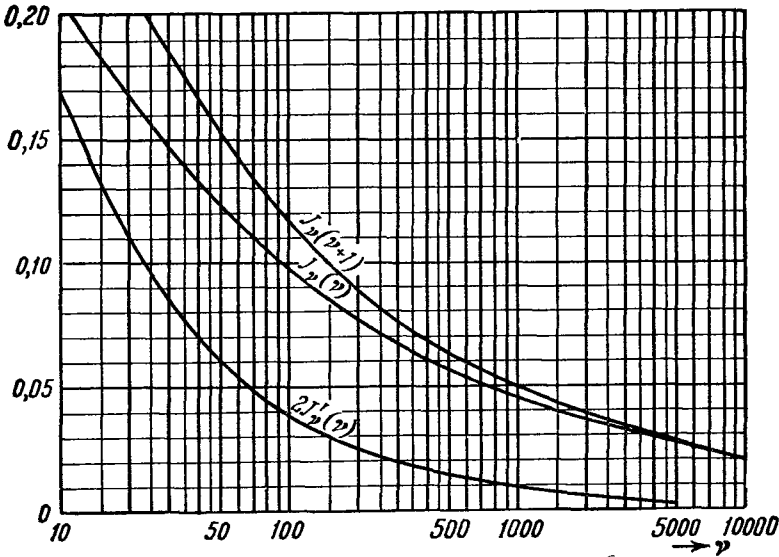


Рис. 123. Функции Бесселя при  $x = \nu$  и  $\lambda = \nu + 1$  для больших значений  $\nu$ .

непригодны. Для случая  $|x - \nu| / \nu^{1/2} \ll 1$  Дебай дал другие представления. При  $x = \nu \gg 1$  имеем (рис. 122, 123):

$$H_\nu^{(1)}(\nu) \approx e^{\mp \frac{\pi}{2} i} \frac{0,8946146368}{\nu^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) + e^{\mp \frac{2\pi}{3} i} \frac{0,0117385770}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right),$$

$$J_\nu(\nu) \approx \frac{0,4473073184}{\nu^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) - \frac{0,0058692885}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right),$$

$$-N_\nu(\nu) \approx \frac{0,7747590021}{\nu^{1/2}} \left( 1 - \frac{1}{225\nu^2} \right) + \frac{0,0101659059}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{1213}{14\,625\nu^2} \right).$$

Так же получаем \*) приближенные выражения для производных по аргументу  $z$ :

$$H_\nu^{(1)'}(\nu) \approx e^{\pm \frac{\pi}{2} i} \frac{0,8217003878}{\nu^{3/2}} \left( 1 + \frac{23}{315\nu^2} \right) + e^{\pm \frac{2\pi}{3} i} \frac{0,1789229274}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right),$$

$$J'_\nu(\nu) \approx \frac{0,4108501939}{\nu^{3/2}} \left( 1 + \frac{23}{315\nu^2} \right) - \frac{0,0894614637}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right),$$

$$N'_\nu(\nu) \approx \frac{0,7116134100}{\nu^{3/2}} \left( 1 + \frac{23}{315\nu^2} \right) + \frac{0,1549518304}{\nu^{5/2}} \left( 1 - \frac{947}{69\,300\nu^2} \right).$$

\*) Более подробно см. F. E m d e, Z. Angew. Math. Mech., т. 17 (1937), стр. 324—340; т. 19 (1939), стр. 101—118; P. В e c k m a n n und W. F r a n z, там же, т. 37 (1957), стр. 17—27.

**4.3. Формулы Никольсона** дают хорошие приближения для целого порядка  $\nu = n \gg 1$  и положительного аргумента  $x$  при условии  $\frac{|x-\nu|}{\sqrt{\nu^2}} \approx 1$ , а также для больших и произвольно малых  $|x-\nu|$ . Если положим (рис. 124, 125)

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) \pm J_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{E}(x) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \mathfrak{D}(x), \end{cases} \quad e^{\frac{2\pi}{3}i} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(ix) = \mathfrak{H}(x)$$

(где  $\mathfrak{H}$  действительно), то получим \*)

$$J_n(x) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon \mathfrak{H}(2(n-x)\varepsilon), \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(n-x)}{x}}, \quad \text{для } n > x,$$

$$J_n(x) \approx \varepsilon \mathfrak{E}(2(x-n)\varepsilon),$$

$$-N_n(x) \approx \varepsilon \mathfrak{D}(2(x-n)\varepsilon), \quad \text{где } \varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2(x-n)}{x}}, \quad \text{для } x > n.$$

**4.4. Формулы Ватсона** дают хорошие приближения для произвольного порядка  $\nu \gg 1$  и положительного аргумента  $x$  в той же области, что и формулы Никольсона, но справедливы без ограничений на величину  $|x-\nu|$ . Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, получим для  $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{w}{2\sqrt{3}} e^{\psi} \mathfrak{H}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right), \quad \text{где } w = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}}, \quad \psi = \nu \left( w + \frac{w^3}{3} - \text{Arth } w \right)$$

с ошибкой, не превосходящей  $\frac{3}{\nu} e^{\nu(w - \text{Arth } w)}$ ; и для  $x > \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{w}{3} \left[ \mathfrak{E}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \cos \varphi + \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \sin \varphi \right],$$

$$N_\nu(x) \approx \frac{w}{3} \left[ \mathfrak{E}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \sin \varphi - \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \cos \varphi \right],$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{w}{3} \left[ \mathfrak{E}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \mp i \mathfrak{D}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right) \right] e^{\pm i\varphi} \approx \frac{w}{\sqrt{3}} e^{\pm \left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(\frac{\nu}{3} w^3\right),$$

где  $w = \sqrt{x^2/\nu^2 - 1}$ ,  $\varphi = \nu (w - w^3/3 - \text{arctg } w)$ , с ошибкой  $\leq 24/\nu$ .

**4.5. Формулы Лангера** дают при произвольном  $\nu \gg 1$  асимптотическое представление, которое выполняется равномерно в интервале  $0 < x < \infty$ .

Употребляя те же обозначения, что и в 4.3, и положив

$$I_{-\frac{1}{3}}(x) \pm I_{\frac{1}{3}}(x) = \begin{cases} \mathfrak{E}^*(x), \\ \frac{1}{2} \sqrt{3} \mathfrak{D}^*(x), \end{cases} \quad \text{где } I_\nu(x) = e^{-\frac{\nu\pi}{2}i} J_\nu\left(e^{\frac{\pi}{2}} x\right),$$

получим для  $x < \nu$

$$J_\nu(x) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \mathfrak{D}^*(\nu w \lambda), \quad -N_\nu(x) \approx \sqrt{\lambda} \mathfrak{E}^*(\nu w \lambda),$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\lambda} e^{-\frac{2\pi}{3}i} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} \nu w \lambda\right),$$

где

$$w = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\nu^2}}, \quad \lambda = \frac{1}{w} \text{Arth } w - 1 = \frac{w^2}{3} + \frac{w^4}{5} + \frac{w^6}{7} + \dots,$$

\*) См. также W. Schöbe, Acta math., т. 92 (1954), стр. 265—307.

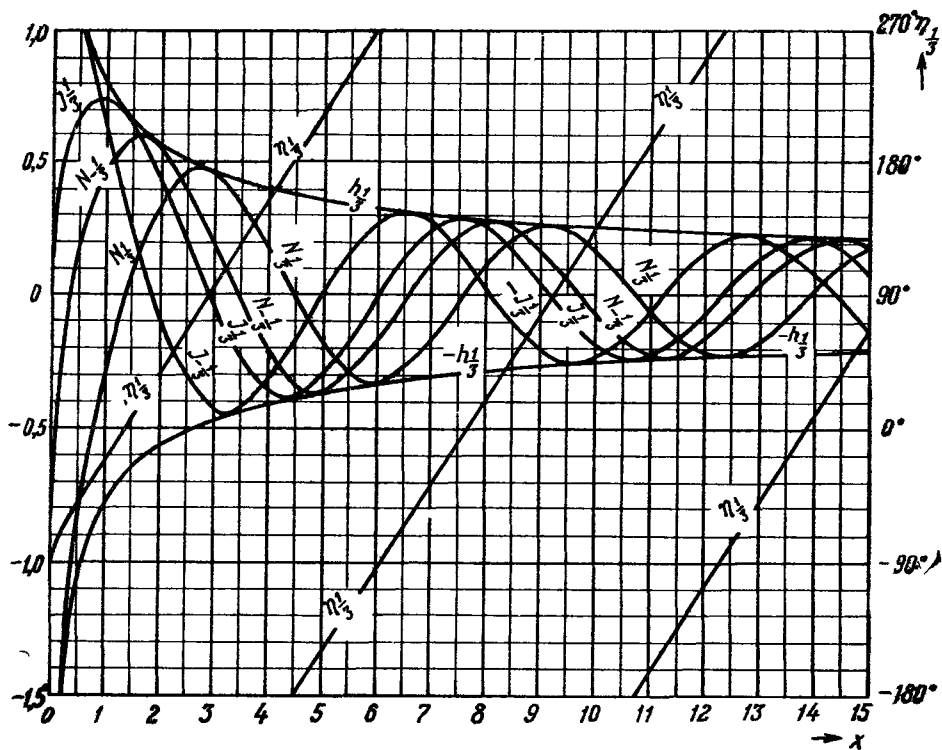


Рис 124. Функции Бесселя  $J_{\pm \frac{1}{3}}(x)$ ,  $N_{\pm \frac{1}{3}}(x)$ ,  $H_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x) = h_{\frac{1}{3}} e^{i\pi\nu}$

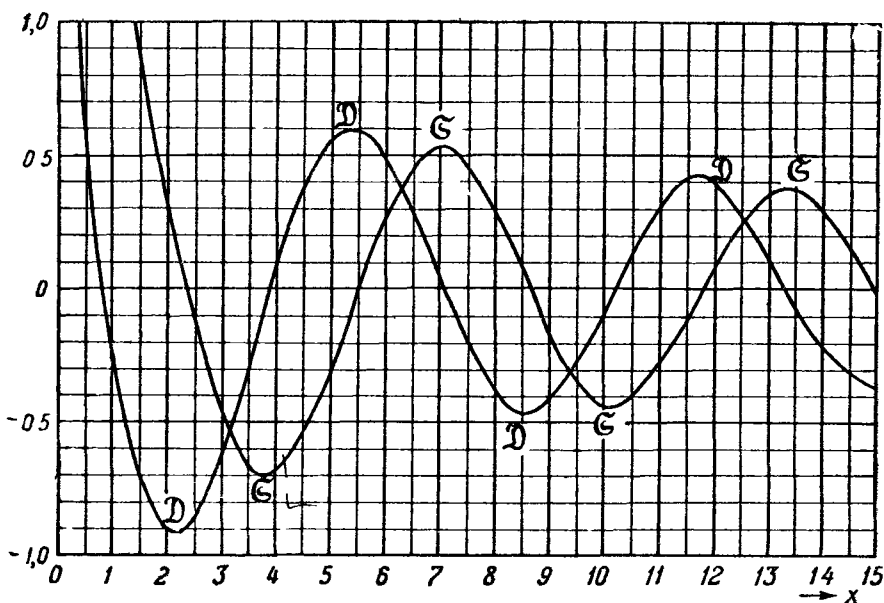


Рис. 125. Функции  $\mathcal{G} = J_{-\frac{1}{3}}(x) + J_{\frac{1}{3}}(x)$  и  $\mathcal{D} = \sqrt{3}(J_{-\frac{1}{3}}(x) - J_{\frac{1}{3}}(x))$ .

и для  $x > \nu$

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}} \mathfrak{S}(\nu w \mu), \quad -N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{\mu}{3}} \mathfrak{D}(\nu w \mu),$$

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\mu} e^{\frac{\pi}{6} i} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\nu w \mu),$$

где

$$w = \sqrt{\frac{x^2}{\nu^2} - 1}, \quad \mu = 1 - \frac{1}{w} \operatorname{arctg} w = \frac{w^2}{3} - \frac{w^4}{5} + \frac{w^6}{7} - \dots$$

Ошибка будет порядка  $\frac{1}{\nu^3 \sqrt{\nu}}$ .

### 5. Нули

5.1. Нули бесселевых функций, за исключением может быть  $z=0$ , все простые.

Функция  $J_\nu(z)$  имеет для произвольного действительного порядка  $\nu$  бесконечно много действительных нулей, которые расположены симметрично

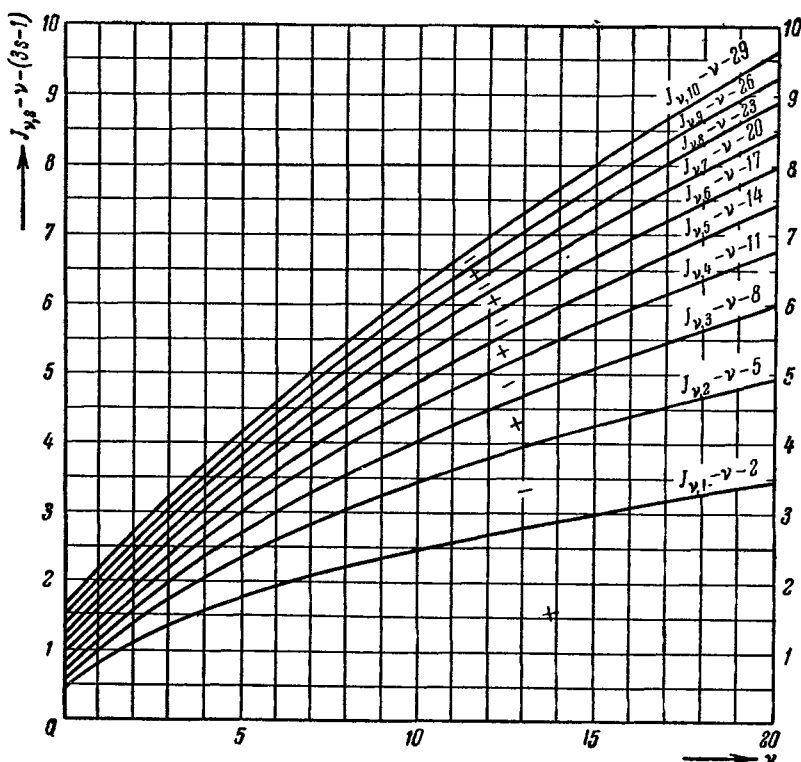


Рис. 126. Нули  $j_{\nu,s}$  функций  $J_\nu(x)$ : величина  $J_{\nu,s} - \nu$  как функция  $\nu$ .

относительно  $z=0$ . Положительные нули, расположенные в порядке возрастания, обозначают через

$$j_{\nu,1}, j_{\nu,2}, \dots, j_{\nu,s}, \dots$$

Для  $\nu > -1$  все нули будут действительны (рис. 126—128, таблицы 48—51).

Бесконечную последовательность положительных нулей функции  $J_\nu(z)$ , расположенных в порядке возрастания, обозначают

$$j'_{\nu,1}, j'_{\nu,2}, \dots, j'_{\nu,s}, \dots$$

Для  $\nu > 0$  имеем  $j_{0,1} > j'_{\nu,1} > \nu$ . Если  $\nu > -1$  и  $a, b, c, d$  — действительные числа, причем  $ad - bc \neq 0$ , то положительные нули функций  $aJ_\nu(z) + bzJ'_\nu(z)$

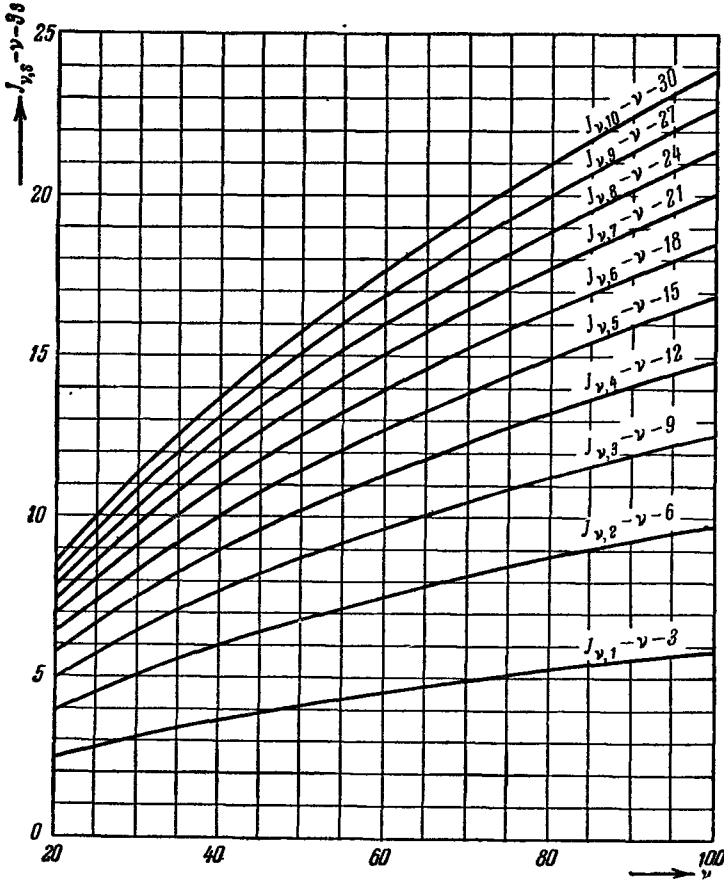


Рис. 127. Нули  $j_{\nu,s}$  функций  $J_\nu(x)$ : величина  $j_{\nu,s} - \nu$  как функция  $\nu$ .

и  $cJ_\nu(z) + dzJ'_\nu(z)$  разделяют друг друга. При  $\nu > -1$  положительные нули функций  $J_\nu(z)$  и  $J_{\nu+1}(z)$  также разделяют друг друга.

Для действительного  $\nu$  действительная функция  $N_\nu(x)$  имеет бесконечно много положительных нулей, которые, будучи расположены в порядке возрастания, обозначаются через

$$y_{\nu,1}, y_{\nu,2}, \dots, y_{\nu,s}, \dots$$

(рис. 129). Положительные нули функций  $N_\nu(x)$  и  $N_{\nu+1}(x)$  разделяют друг друга. Далее имеем  $j_{\nu,1} > j_{\nu+1,1} > j'_{\nu,1}$ . Для действительного  $\nu$  и действительных  $a, b, c, d$  ( $ad - bc \neq 0$ ) положительные нули функций  $aJ_\nu(z) + bN_\nu(z)$  и  $cJ_\nu(z) + dN_\nu(z)$  разделяют друг друга.

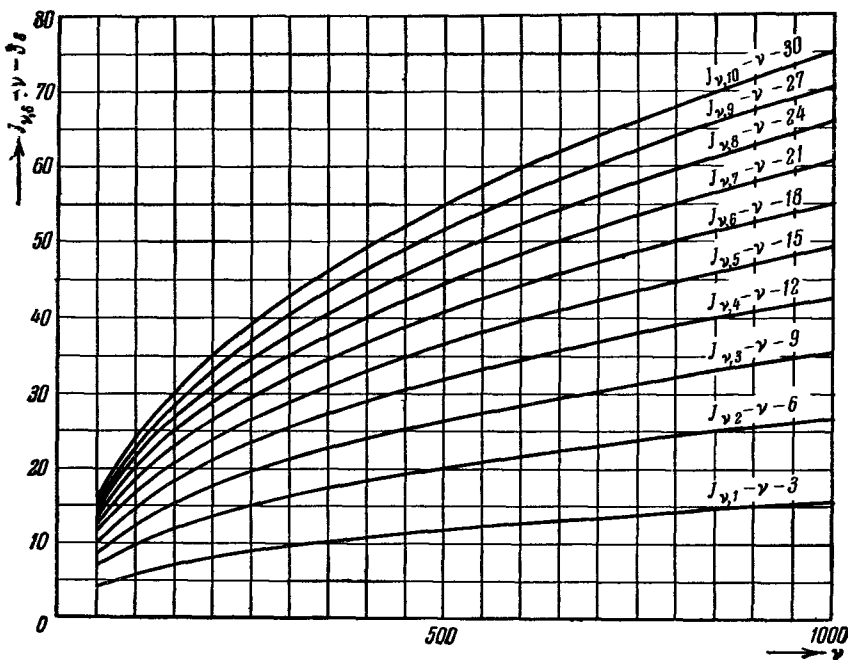


Рис. 128. Нули  $J_{\nu,s}$  функций  $J_\nu(x)$ : величина  $J_{\nu,s} - \nu$  как функция  $\nu$ .

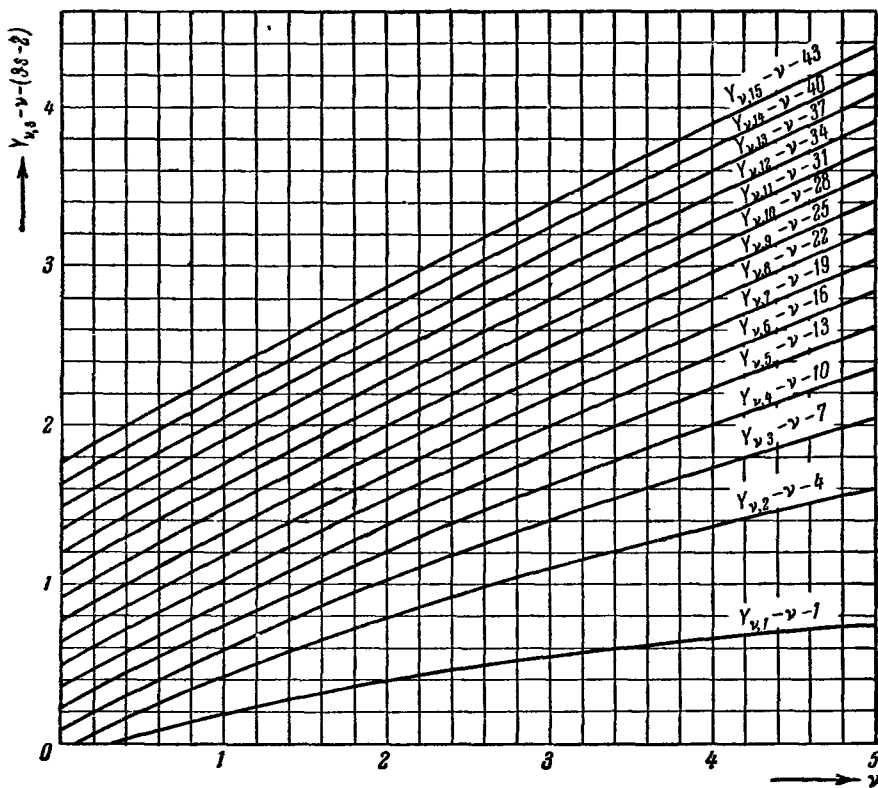


Рис. 129. Нули  $y_{\nu,s}$  функций  $N_\nu(x)$ : величина  $y_{\nu,s} - \nu$  как функция  $\nu$ .

Таблица 48. Нули  $J_{0,s}$  функции  $J_0(x)$  и соответствующие значения функции  $J_1(x)$ 

$s$	$J_{0,s}$	$J_1(0_{0,s})$	$s$	$J_{0,s}$	$J_1(0_{0,s})$	$s$	$J_{0,s}$	$J_1(0_{0,s})$
1	2,4048	+ 0,5191	21	65,1900	+ 0,09882	41	128,0209	+ 0,07052
2	5,5201	- 0,3403	22	68,3315	- 0,09652	42	131,1624	- 0,06967
3	8,6537	+ 0,2715	23	71,4730	+ 0,09438	43	134,3040	+ 0,06885
4	11,7915	- 0,2325	24	74,6145	- 0,09237	44	137,4456	- 0,06806
5	14,9309	+ 0,2065	25	77,7560	+ 0,09049	45	140,5872	+ 0,06729
6	18,0711	- 0,1877	26	80,8976	- 0,08871	46	143,7287	- 0,06655
7	21,2116	+ 0,1733	27	84,0391	+ 0,08704	47	146,8703	+ 0,06584
8	24,3525	- 0,1617	28	87,1806	- 0,08545	48	150,0119	- 0,06514
9	27,4935	+ 0,1522	29	90,3222	+ 0,08395	49	153,1535	+ 0,06447
10	30,6346	- 0,1442	30	93,4637	- 0,08253	50	156,2950	- 0,06382
11	33,7758	+ 0,1373	31	96,6053	+ 0,08118	51	159,4366	+ 0,06319
12	36,9171	- 0,1313	32	99,7468	- 0,07989	52	162,5782	- 0,06258
13	40,0584	+ 0,1261	33	102,8884	+ 0,07866	53	165,7198	+ 0,06198
14	43,1998	- 0,1214	34	106,0299	- 0,07749	54	168,8613	- 0,06140
15	46,3412	+ 0,1172	35	109,1715	+ 0,07636	55	172,0029	+ 0,06084
16	49,4826	- 0,1134	36	112,3131	- 0,07529	56	175,1445	- 0,06029
17	52,6241	+ 0,1100	37	115,4546	+ 0,07426	57	178,2861	+ 0,05976
18	55,7655	- 0,1068	38	118,5962	- 0,07327	58	181,4277	- 0,05924
19	58,9070	+ 0,1040	39	121,7377	+ 0,07232	59	184,5692	+ 0,05873
20	62,0485	- 0,1013	40	124,8793	- 0,07140	60	187,7108	- 0,05824

Таблица 49. Нули  $J_{1,s}$  функции  $J_1(x)$  и экстремумы функции  $J_0(x)$ 

$s$	$J_{1,s}$	$J_0(1_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	$s$	$J_{1,s}$	$J_0(1_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$	$s$	$J_{1,s}$	$J_0(1_{1,s}) = \frac{\min}{\max}$
1	3,8317	- 0,4028	21	66,7532	- 0,09765	41	129,5878	- 0,07009
2	7,0156	+ 0,3001	22	69,8951	+ 0,09543	42	132,7295	+ 0,06926
3	10,1735	- 0,2497	23	73,0369	- 0,09336	43	135,8711	- 0,06845
4	13,3237	+ 0,2184	24	76,1787	+ 0,09141	44	139,0128	+ 0,06767
5	16,4706	- 0,1965	25	79,3205	- 0,08958	45	142,1544	- 0,06692
6	19,6159	+ 0,1801	26	82,4623	+ 0,08786	46	145,2961	+ 0,06619
7	22,7601	- 0,1672	27	85,6040	- 0,08623	47	148,4377	- 0,06549
8	25,9037	+ 0,1567	28	88,7458	+ 0,08469	48	151,5794	+ 0,06481
9	29,0468	- 0,1480	29	91,8875	- 0,08323	49	154,7210	- 0,06414
10	32,1897	+ 0,1406	30	95,0292	+ 0,08185	50	157,8627	+ 0,06350
11	35,3323	- 0,1342	31	98,1710	- 0,08053	51	161,0043	- 0,06288
12	38,4748	+ 0,1286	32	101,3127	+ 0,07927	52	164,1459	+ 0,06228
13	41,6171	- 0,1237	33	104,4544	- 0,07807	53	167,2876	- 0,06169
14	44,7593	+ 0,1192	34	107,5961	+ 0,07692	54	170,4292	+ 0,06112
15	47,9015	- 0,1153	35	110,7378	- 0,07582	55	173,5708	- 0,06056
16	51,0435	+ 0,1117	36	113,8794	+ 0,07477	56	176,7125	+ 0,06002
17	54,1856	- 0,1084	37	117,0211	- 0,07376	57	179,8541	- 0,05949
18	57,3275	+ 0,1054	38	120,1628	+ 0,07279	58	182,9957	+ 0,05898
19	60,4695	- 0,1026	39	123,3045	- 0,07185	59	186,1374	- 0,05848
20	63,6114	+ 0,1000	40	126,4461	+ 0,07095	60	189,2790	+ 0,05799

Таблица 50. Нули  $J_{n,s}$  функций  $J_n(x)$ 

$s$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2,405	3,832	5,136	6,380	7,588	8,771
2	5,520	7,016	8,417	9,761	11,065	12,339
3	8,654	10,173	11,620	13,015	14,373	15,700
4	11,792	13,324	14,796	16,223	17,616	18,980
5	14,931	16,471	17,960	19,409	20,827	22,218
6	18,071	19,616	21,117	22,583	24,019	25,430
7	21,212	22,760	24,270	25,748	27,199	28,627
8	24,352	25,904	27,421	28,908	30,371	31,812
9	27,493	29,047	30,569	32,065	33,537	34,989



Таблица 51. Два первых нуля  $J_{\nu,1}$  и  $J_{\nu,2}$  функций  $J_{\nu}(x)$

$\nu$	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	$\nu$	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	$\nu$	$J_{\nu,1}$	$J_{\nu,2}$	$\nu$	$J_{\nu,1}$
-0,50	1, 5708	4, 7124	0,00	2, 4048	5, 5200	0,50	3, 1416	6, 2832	1,00	3, 8317
49	5892 + 184	7291 + 167	01	4202 + 154	5356 + 157	51	1558 + 142	2981 + 149	01	8452 + 135
48	6076 184	7458 166	02	4356 154	5513 156	52	1699 142	3130 148	02	8587 134
47	6258 181	7624 167	03	4510 153	5669 156	53	1841 141	3278 149	03	8721 135
46	6439 181	7791 167	04	4663 152	5825 156	54	1982 141	3427 149	04	8856 134
-0,45	6620 + 180	7958 + 166	0,05	4815 + 153	5981 + 155	0,55	2123 + 140	3576 + 148	1,05	8990 + 134
44	6800 179	8124 165	06	4968 152	6136 155	56	2263 141	3724 149	06	9124 134
43	6979 178	8289 166	07	5120 152	6291 156	57	2404 140	3873 148	07	9258 134
42	7157 176	8455 165	08	5272 151	6447 155	58	2544 140	4021 149	08	9392 134
41	7333 176	8620 165	09	5423 151	6602 155	59	2684 141	4170 148	09	9526 134
-0,40	7509 + 175	8785 + 164	0,10	5574 + 151	6757 + 154	0,60	2825 + 140	4318 + 148	1,10	9660 + 134
39	7684 175	8949 165	11	5725 151	6911 155	61	2965 140	4466 148	11	9794 133
38	7859 174	9114 164	12	5876 150	7066 154	62	3105 140	4614 148	12	9927 134
37	8033 173	9278 164	13	6026 150	7220 155	63	3245 140	4762 147	13	*0061 133
36	8206 172	9442 164	14	6176 150	7375 154	64	3385 139	4909 148	14	0194 133
-0,35	8378 + 171	9606 + 163	0,15	6326 + 149	7529 + 154	0,65	3524 + 139	5057 + 147	1,15	0327 + 133
34	8549 171	9769 163	16	6475 150	7683 153	66	3663 139	5204 147	16	0460 133
33	8720 170	9932 163	17	6625 148	7836 154	67	3802 139	5351 147	17	0593 133
32	8890 169	*0095 163	18	6773 149	7990 153	68	3941 139	5498 148	18	0726 133
31	9059 169	0258 163	19	6922 148	8143 154	69	4080 139	5646 147	19	0859 133
-0,30	9228 + 168	0421 + 162	0,20	7070 + 148	8297 + 153	0,70	4219 + 139	5793 + 147	1,20	0992 + 133
29	9396 167	0583 163	21	7218 148	8450 153	71	4358 138	5940 147	21	1125 + 132
28	9563 168	0746 161	22	7366 148	8603 152	72	4496 138	6087 146	22	1257 133
27	9731 166	0907 161	23	7514 148	8755 153	73	4634 138	*233 147	23	1390 132
26	9897 166	1068 162	24	7662 147	8908 153	74	4772 138	6380 146	24	1522 133
-0,25	*0063 + 165	1230 + 161	0,25	7809 + 146	9061 + 152	0,75	4910 + 138	6526 + 146	1,25	1655 + 132
24	0228 165	1391 161	26	7955 147	9213 153	76	5048 137	6672 147	26	1787 132
23	0393 164	1552 161	27	8102 146	9366 152	77	5185 138	6819 146	27	1919 132
22	0557 163	1713 161	28	8248 147	9518 152	78	5323 137	6965 146	28	2051 132
21	0720 163	1874 160	29	8395 146	9670 152	79	5460 137	7111 146	29	2183 132
-0,20	0883 + 162	2034 + 160	0,30	8541 + 146	9822 + 152	0,80	5597 + 137	7257 + 146	1,30	2315 + 131
19	1045 162	2194 160	31	8687 145	9974 151	81	5734 137	7403 145	31	2446 132
18	1207 162	2354 160	32	8832 146	*0125 152	82	5871 137	7548 146	32	2578 132
17	1369 161	2514 159	33	8978 144	0277 151	83	6008 137	7694 145	33	2710 131
16	1530 160	2673 160	34	9122 145	0428 151	84	6145 137	7839 146	34	2841 131
-0,15	1690 + 161	2833 + 159	0,35	9267 + 145	0579 + 151	0,85	6282 + 137	7985 + 145	1,35	2972 + 132
14	1851 159	2992 159	36	9412 144	0730 151	86	6419 136	8130 145	36	3104 131
13	2010 159	3151 159	37	9556 144	0881 151	87	6555 136	8275 146	37	3235 131
12	2169 159	3310 159	38	9700 144	1032 151	88	6691 136	8421 145	38	3366 131
11	2328 158	3469 158	39	9844 144	1183 150	89	6827 136	8566 145	39	3497 131
-0,10	2486 + 158	3627 + 158	0,40	9988 + 144	1333 + 150	0,90	6963 + 136	8711 + 145	1,40	3628 + 131
09	2644 157	3785 158	41	*0132 143	1483 151	91	7099 135	8856 145	41	3759 131
08	2801 158	3943 158	42	0275 143	1634 150	92	7234 136	9001 144	42	3890 131
07	2959 156	4101 157	43	0418 143	1784 150	93	7370 135	9145 145	43	4021 131
06	3115 157	4258 158	44	0561 143	1934 150	94	7505 136	9290 145	44	4152 130
-0,05	3272 + 156	4416 + 157	0,45	0704 + 143	2084 + 150	0,95	7641 + 135	9435 + 144	1,45	4282 + 131
04	3428 155	4573 157	46	0847 143	2234 149	96	7776 135	9579 144	46	4413 130
03	3583 156	4730 157	47	0990 142	2383 150	97	7911 136	9723 144	47	4543 130
02	3739 154	4887 157	48	1132 142	2533 149	98	8047 134	9867 144	48	4673 131
01	3893 155	5044 156	49	*274 142	2682 150	99	8181 136	*0011 145	49	4804 130
0,00	4048	5200	0,50	1416	2832	1,00	8317	0156	1,50	4934
	2,	5,		3,	6,		3,	7,		4,

5.2. Для большого  $s$  положительные нули  $x_{\nu, s}$  функции

$$Z_{\nu}(x) = J_{\nu}(x) \cos \alpha - N_{\nu}(x) \sin \alpha$$

допускают асимптотическое представление

$$x_{\nu, s} \approx \beta - \frac{\mu - 1}{8\beta} \left( 1 + \frac{P_1}{3(4\beta)^2} + \frac{2P_2}{15(4\beta)^4} + \frac{P_3}{105(4\beta)^6} + \dots \right),$$

где  $\mu = 4\nu^2$ ,  $\beta = (\nu - 1/2 + 2s)\pi/2 - \alpha$ ,  $P_1 = 7\mu - 31$ ,  $P_2 = 83\mu^2 - 982\mu + 3779$ ,  $P_3 = 6949\mu^3 - 153855\mu^2 + 1585743\mu - 6277237$ . В частности,

$$\frac{1}{\pi} j_{0, s} \approx s - \frac{1}{4} + \frac{0,050661}{4s-1} - \frac{0,053041}{(4s-1)^2} + \frac{0,262051}{(4s-1)^3} - \dots,$$

$$\frac{1}{\pi} j_{1, s} \approx s + \frac{1}{4} - \frac{0,151982}{4s+1} + \frac{0,015399}{(4s+1)^2} - \frac{0,245270}{(4s+1)^3} + \dots$$

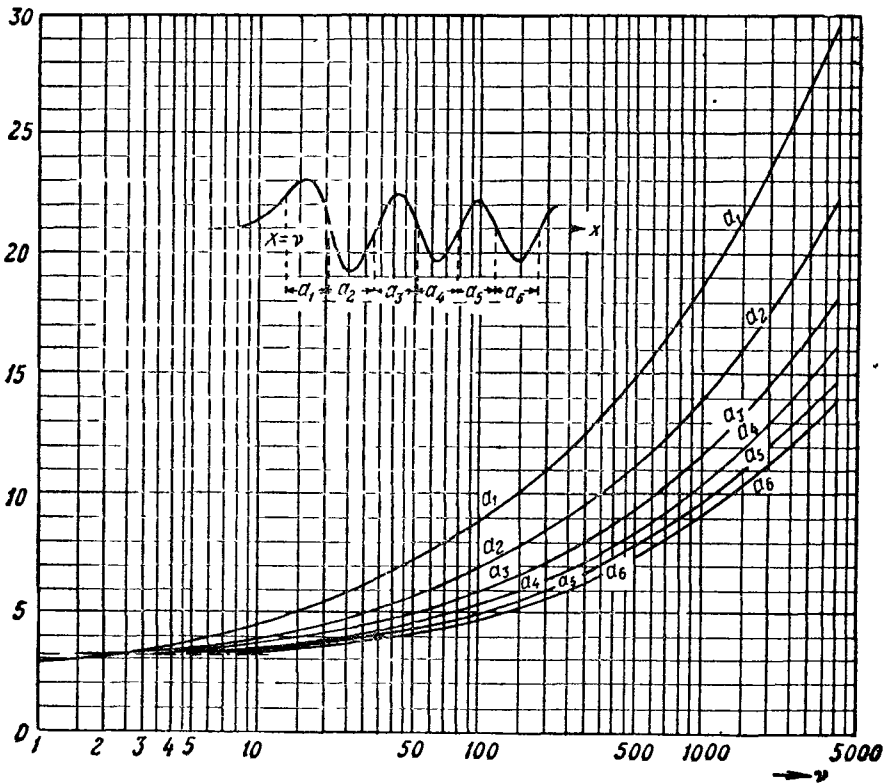


Рис. 130. Нули функций Бесселя  $J_{\nu}(x)$  высокого порядка.

Для положительных нулей  $x'_{\nu, s}$  функции  $Z'_{\nu}(x)$  при больших  $s$  получается представление

$$x'_{\nu, s} \approx \gamma - \frac{\mu + 3}{8\gamma} - \frac{Q_1}{6(4\gamma)^2} - \frac{Q_2}{15(4\gamma)^3} - \dots,$$

где

$$\mu = 4\nu^2, \quad \gamma = \left( \nu + \frac{1}{2} + 2s \right) \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

$$Q_1 = 7\mu^2 + 82\mu - 9, \quad Q_2 = 83\mu^3 + 2075\mu^2 - 3039\mu + 3537.$$

5.3. Для первых положительных нулей функции  $J_\nu(x)$  при большом порядке  $\nu \gg 1$  имеем приближенные выражения (рис. 130—133):

$$j_{\nu,1} \approx \nu + 1,855757\nu^{\frac{1}{2}} + 1,03315\nu^{-\frac{1}{2}} - 0,00403\nu^{-1} - 0,09083\nu^{-\frac{5}{2}} + 0,0448\nu^{-\frac{7}{2}} \dots,$$

$$j_{\nu,2} \approx \nu + 3,2447\nu^{\frac{1}{2}} + 3,1584\nu^{-\frac{1}{2}} \dots, \quad j_{\nu,3} \approx \nu + 4,3817\nu^{\frac{1}{2}} + 5,7598\nu^{-\frac{1}{2}} \dots$$

Так же получаем асимптотические представления для первых положительных нулей  $j_{-\nu,s}$  функций  $J_{-\nu}(x)$ , порядок которых  $\nu = n + \frac{1}{2} \gg 1$ :

$$j_{-\nu,1} \approx \nu + 0,951\nu^{\frac{1}{2}} + 0,271\nu^{-\frac{1}{2}} \dots,$$

$$j_{-\nu,2} \approx \nu + 2,596\nu^{\frac{1}{2}} + 2,022\nu^{-\frac{1}{2}} \dots, \quad j_{-\nu,3} \approx \nu + 3,834\nu^{\frac{1}{2}} + 4,410\nu^{-\frac{1}{2}} \dots$$

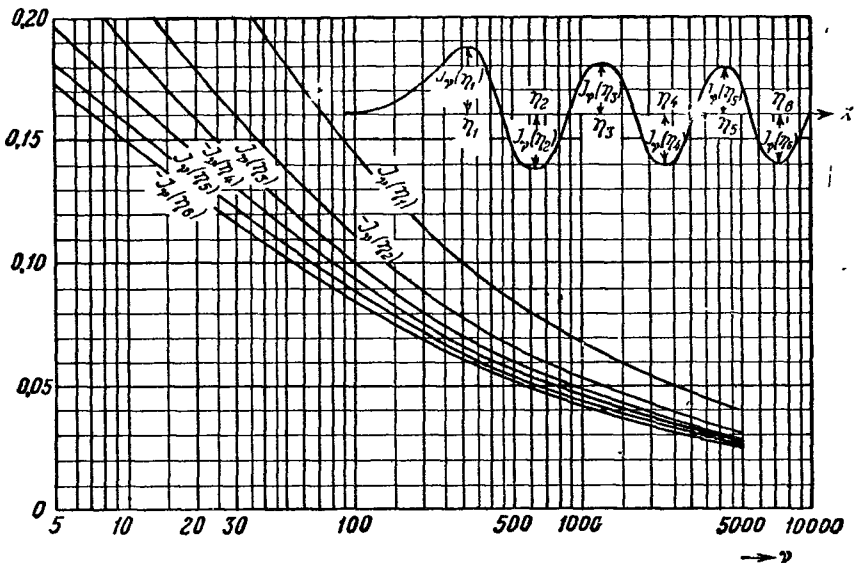


Рис. 131. Экстремальные значения функций Бесселя  $J_\nu(x)$  высокого порядка.

Для наименьшего положительного нуля функции  $J'_\nu(x)$  получим при  $\nu \gg 1$

$$j'_{\nu,1} \approx \nu + 0,808618\nu^{\frac{1}{2}} + \dots$$

В точке  $j'_{\nu,1}$  функция  $J_\nu(x)$  имеет максимум.

Для наименьшего положительного нуля функции  $N_\nu(x)$  получим при  $\nu \gg 1$

$$y_{\nu,1} \approx \nu + 0,931577\nu^{\frac{1}{2}} + 0,26035\nu^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

5.4. Для  $n = 1, 2, \dots$  имеем:

$$J_{-n+\frac{\epsilon_n}{6}}\left(n-\frac{\epsilon_n}{6}\right) = 0,$$

где  $0 < \epsilon_n < 1$ , и для больших  $n$

$$\epsilon_n \approx 1 - 6 \frac{0,03944}{(6n-1)^{4/3}}.$$

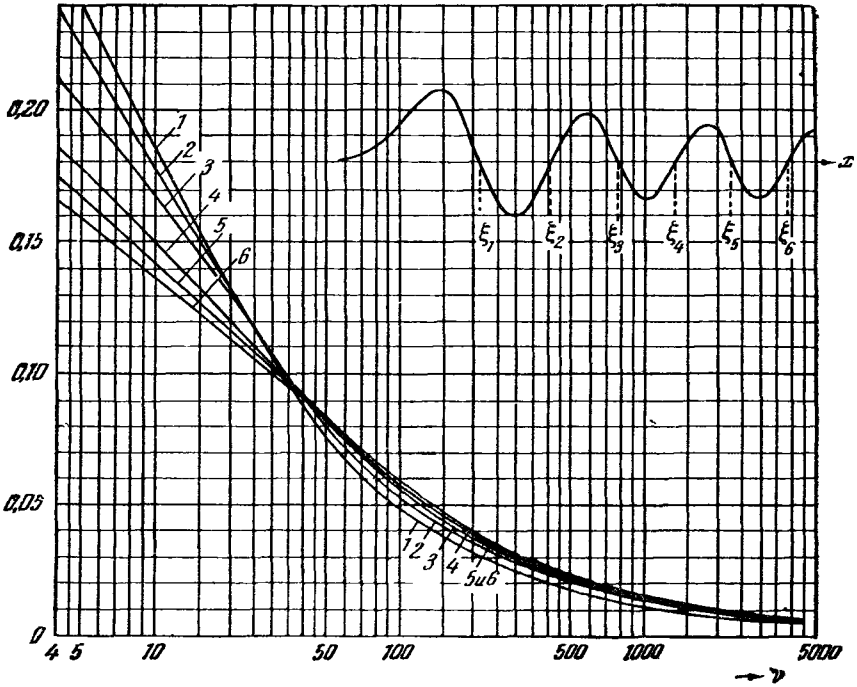


Рис. 132. Модуль производной в нулях функций Бесселя  $J_\nu(x)$  высокого порядка.

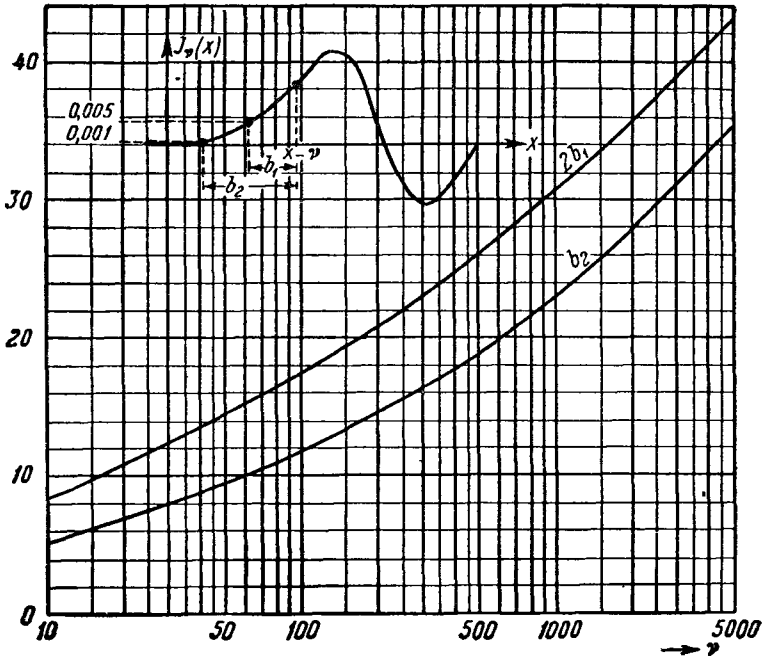


Рис. 133. Первые корни уравнений  $J_\nu(x) = 0,001$  и  $J_\nu(x) = 0,005$  при больших значениях  $\nu$ .

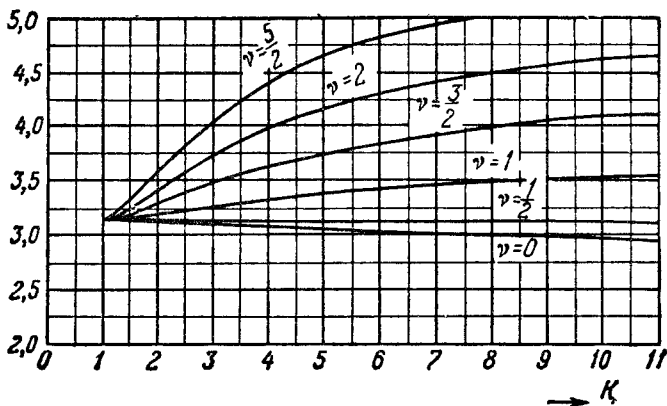


Рис. 134. Первый корень  $x_{v,1}$  уравнения  $\frac{J_v(x)}{N_v(x)} = \frac{J_v(kx)}{N_v(kx)}$ :  
 величина  $(k-1)x_{v,1}$  как функция  $k$ .

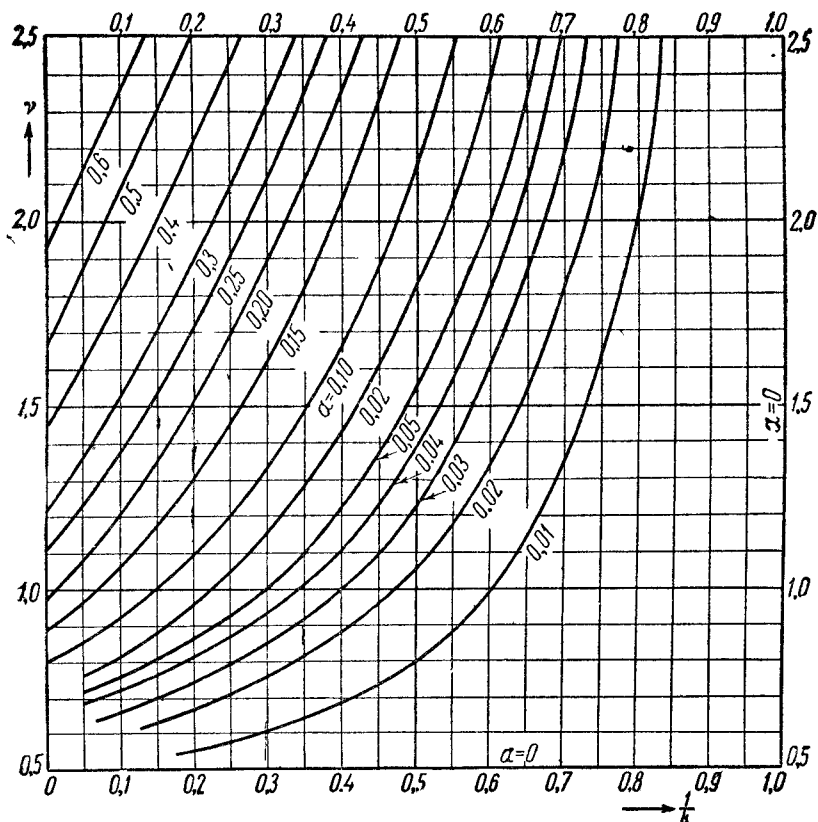


Рис. 135. Первый корень  $x_{v,1} = \frac{\pi}{k-1}(1+\alpha)$  уравнения  $\frac{J_v(x)}{N_v(x)} = \frac{J_v(kx)}{N_v(kx)}$ .

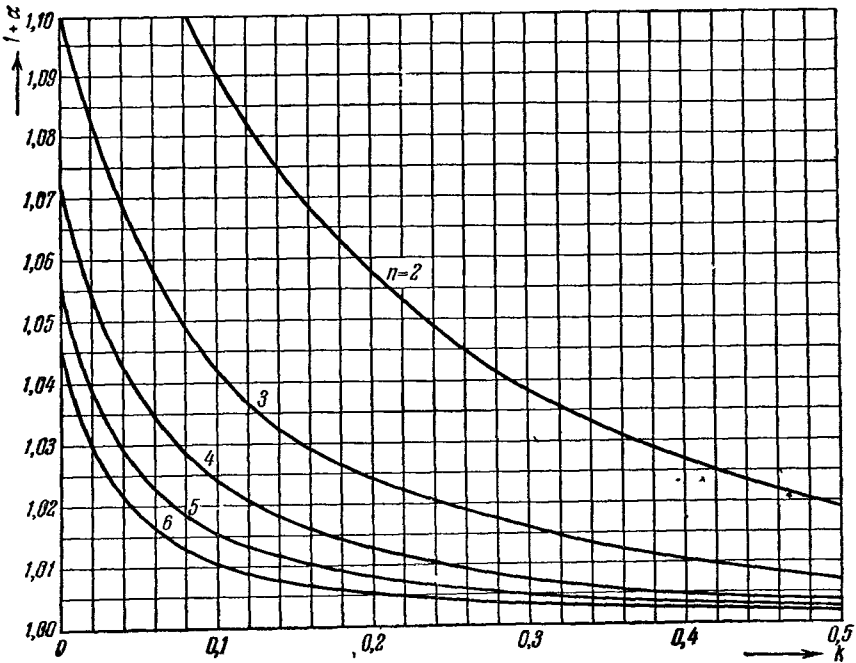
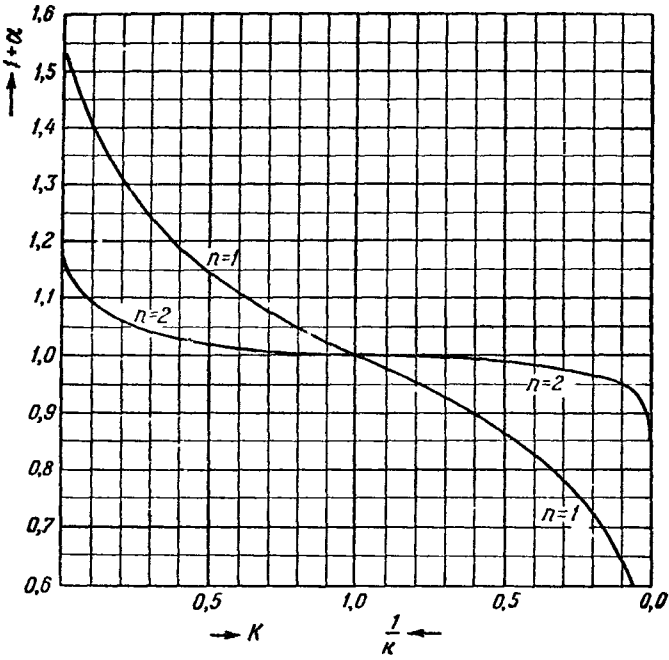


Рис. 136 и 137. Первые шесть корней  $x_n = \pi \frac{n-0,5}{k-1} (1 + \alpha)$

уравнения  $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$ .

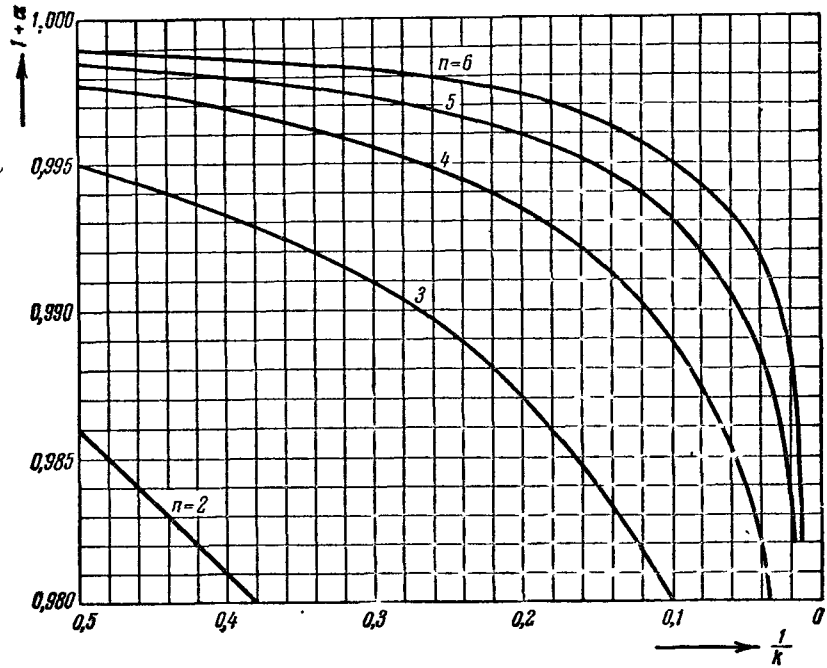
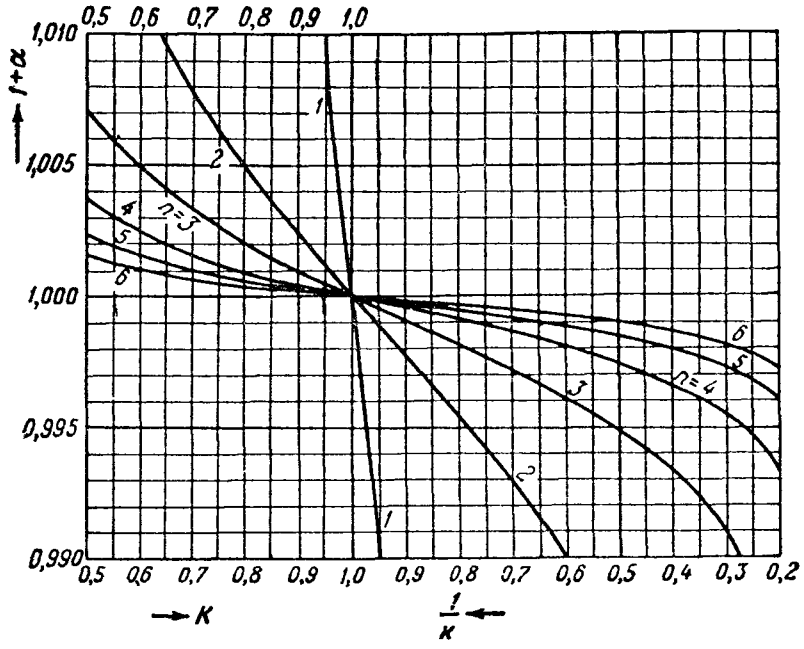


Рис. 138 и 139. Первые шесть корней  $x_n = \pi \frac{n-0,5}{k-1} (1+\alpha)$

уравнения  $\frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$ .

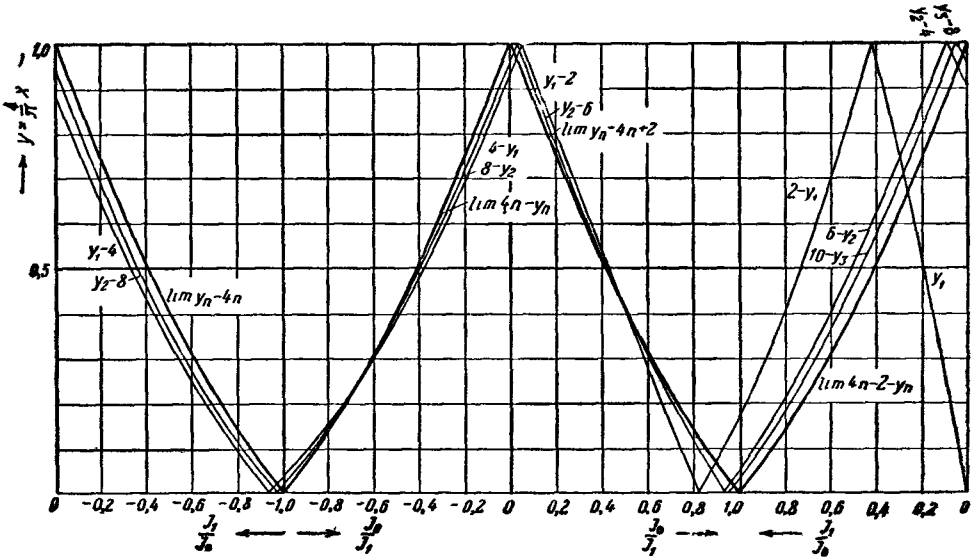


Рис. 140. Функция, обратная к  $\frac{J_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{J_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$ .

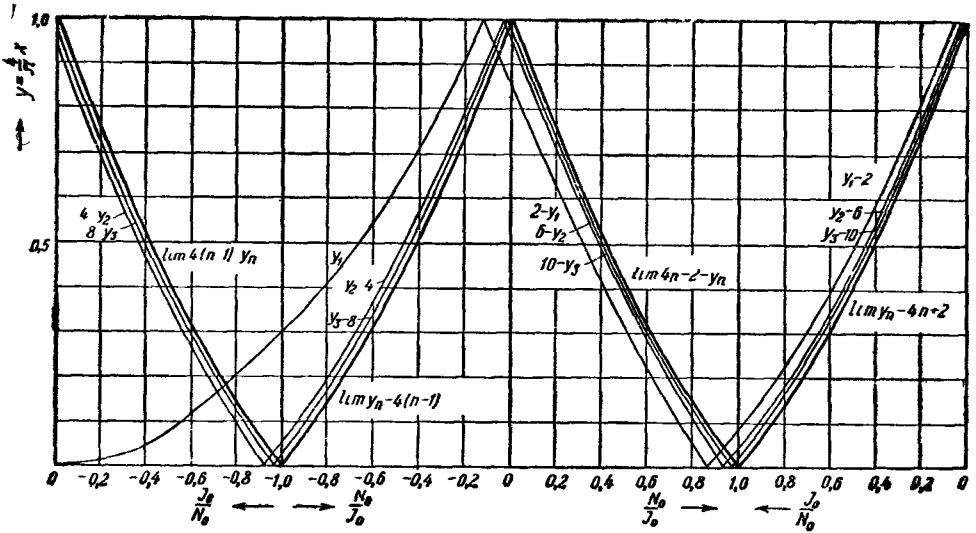


Рис. 141. Функция, обратная к  $\frac{N_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{N_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$ .



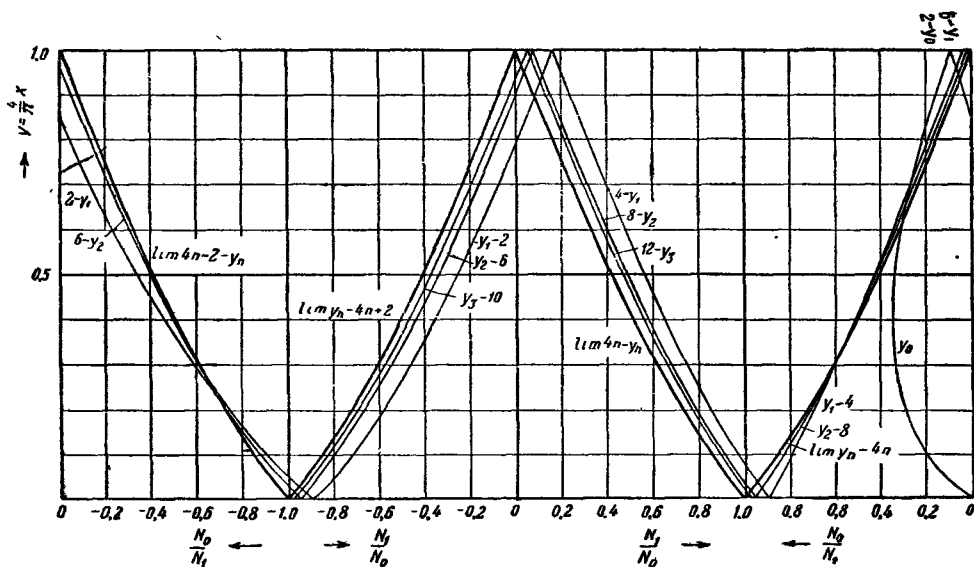


Рис. 142. Функция, обратная к  $\frac{N_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{N_0\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$ .

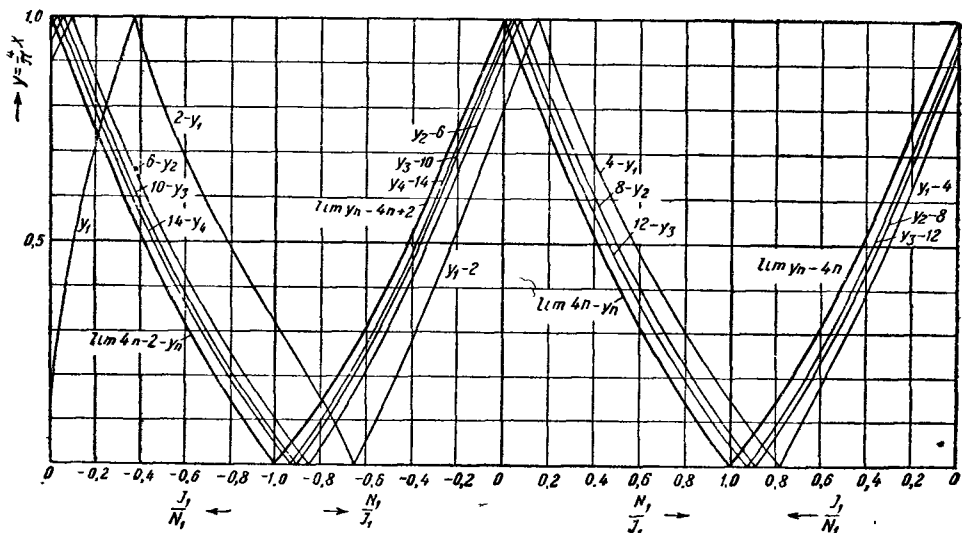


Рис. 143. Функция, обратная к  $\frac{N_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}{J_1\left(\frac{1}{4}\pi y\right)}$ .

5.5. Для корней  $x_{\nu, s}$  уравнений

$$\frac{J_{\nu}(x)}{N_{\nu}(x)} = \frac{J_{\nu}(kx)}{N_{\nu}(kx)} \quad \text{и} \quad \frac{J_0(x)}{N_0(x)} = \frac{J_1(kx)}{N_1(kx)}$$

(рис. 134—143) составлена \*) таблица 52. Величины  $(k-1)x_{\nu, s}$ , содержащиеся в таблице, совпадают с величинами  $(r_2-r_1)\tau_{\nu, s}$ , где  $\tau_{\nu, s}$ —корни уравнения

$$J_{\nu}(r_1\tau)N_{\nu}(r_2\tau) - J_{\nu}(r_2\tau)N_{\nu}(r_1\tau) = 0,$$

причем  $\frac{r_2}{r_1} = k$ .

Таблица 52. Первые шесть корней  $x_{\nu, s}$  уравнения  
 $J(x)N(kx) - J(kx)N(x) = 0$

k	$x_{\nu, 1}$	$x_{\nu, 2}$	$x_{\nu, 3}$	$x_{\nu, 4}$	$x_{\nu, 5}$	$x_{\nu, 6}$	$\nu$
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	} $\nu = 0$
1,5	6,2702	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	} $\nu = 1/2$
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	} $\nu = 1$
1,5	6,3219	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	} $\nu = 3/2$
1,5	6,3858	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	} $\nu = 2$
1,5	6,4742	12,6648	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	} $\nu = 5/2$
1,5	6,5861	12,7235	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288	

k	$(k-1)x_{\nu, 1}$	$(k-1)x_{\nu, 2}$	$(k-1)x_{\nu, 3}$	$(k-1)x_{\nu, 4}$	$(k-1)x_{\nu, 5}$	$(k-1)x_{\nu, 6}$	$\nu$	
1,2	3,1403	6,2826	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	} $\nu = 0$	
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485		
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462		
$\infty$	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	} $\nu = 1/2$	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496		
1,5	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496		
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	} $\nu = 1$	
$\infty$	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496		
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502		} $\nu = 3/2$
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529		
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595		
$\infty$	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	} $\nu = 2$	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513		
1,5	3,1929	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584		
2,0	3,2860	6,3607	9,4772	12,6059	15,7397	18,8760	} $\nu = 5/2$	
$\infty$	4,4934	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208	20,3713		
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5713	15,7119	18,8529		} $\nu = 2$
1,5	3,2371	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661		
2,0	3,4069	6,4278	9,5229	12,6404	15,7673	18,8991		
$\infty$	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	} $\nu = 2$	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549		} $\nu = 5/2$
1,5	3,2931	6,3618	9,4776	12,6060	15,7397	18,8760		
2,0	3,5558	6,5131	9,5813	12,6846	15,8029	18,9288		
$\infty$	5,7635	9,0950	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539		

\*) См., например, A. N. Lowan and A. Hillman, J. Math. Physics, т. 22 (1943), стр. 208—209; S. Chandrasekhar and D. Eibert, Proc. Cambridge Philos. Soc., т. 50 (1954), стр. 266—268.

Продолжение табл. 52

$k$	$(k-1) x_{v,1}$	$(k-1) x_{v,2}$	$(k-1) x_{v,3}$	$(k-1) x_{v,4}$	$\nu$
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	$\nu = 0$
1	3,1412	6,2830	9,4247	12,5663	
2	3,1403	6,2825	9,4243	12,5660	
3	3,1389	6,2818	9,4239	12,5657	
4	3,1371	6,2809	9,4233	12,5652	
1,5	3,1351	6,2799	9,4226	12,5647	
6	3,1329	6,2787	9,4218	12,5641	
7	3,1306	6,2775	9,4210	12,5635	
8	3,1281	6,2762	9,4201	12,5628	
9	3,1256	6,2748	9,4192	12,5621	
2,0	3,1230	6,2734	9,4182	12,5614	
2,5	3,110	6,266	9,413	12,558	
3,0	3,097	6,258	9,408	12,553	
3,5	3,085	6,250	9,402	12,549	
4,0	3,073	6,243	9,397	12,545	
4,5	3,063	6,235	9,391	12,540	
5,0	3,053	6,228	9,386	12,536	
1,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	$\nu = 1$
1	3,1427	6,2837	9,4251	12,5666	
2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	
3	3,1498	6,2873	9,4275	12,5684	
4	3,1550	6,2900	9,4293	12,5698	
1,5	3,1609	6,2931	9,4314	12,5713	
6	3,1675	6,2965	9,4337	12,5731	
7	3,1744	6,3002	9,4362	12,5749	
8	3,1816	6,3041	9,4388	12,5769	
9	3,1890	6,3081	9,4416	12,5790	
2,0	3,1966	6,3123	9,4445	12,5812	
2,5	3,235	6,335	9,460	12,593	
3,0	3,271	6,358	9,476	12,605	

$(k-1) x_{v,1}$

$k$	$\nu = 0$	$\nu = 1/2$	$\nu = 1$	$\nu = 3/2$	$\nu = 2$	$\nu = 5/2$
1	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
1,2	3,1403	3,1416	3,1455	3,1521	3,1613	3,1731
1,5	3,1351	3,1416	3,1609	3,1929	3,2371	3,2931
2	3,1230	3,1416	3,1966	3,2860	3,4069	3,5558
3	3,097	3,1416	3,271	3,474	3,736	4,041
4	3,073	3,1416	3,336	3,629	3,990	4,393
5	3,053	3,1416	3,389	3,749	4,177	4,660
6	3,035	3,1416	3,432	3,844	4,317	4,816
7	3,019	3,1416	3,468	3,918	4,424	4,947
8	3,006	3,1416	3,499	3,979	4,507	5,047
9	2,994	3,1416	3,525	4,029	4,574	5,125
10	2,983	3,1416	3,547	4,070	4,628	5,188
11	2,973	3,1416	3,566	4,105	4,673	5,240
19	2,92	3,1416	3,66	4,26	4,87	5,46
39	2,85	3,1416	3,74	4,38	5,00	5,62
$\infty$	2,4048	3,1416	3,8317	4,4934	5,1356	5,7635

6. Функциональные уравнения

В дальнейшем  $Z_\nu(z)$  и  $\bar{Z}_\nu(z)$  означают любую из функций  $J_\nu(z)$ ,  $N_\nu(z)$ ,  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  или линейную комбинацию этих функций с постоянными (не зависящими от индекса  $\nu$ ) коэффициентами.

6.1. Для  $Z_\nu(z)$  при различных значениях порядка выполняются соотношения

$$zZ_{\nu-1}(z) + zZ_{\nu+1}(z) = 2\nu Z_\nu(z), \quad Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2Z'_\nu(z).$$

Согласно Н. Нильсену, каждое аналитическое по переменным  $z, \nu$  решение этих уравнений называется *цилиндрической функцией*  $\mathfrak{U}_\nu(z)$ ; оно является также и

решением дифференциального уравнения Бесселя. Функции  $J_\nu(z)$ ,  $N_\nu(z)$ ,  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  являются цилиндрическими функциями  $\mathfrak{E}_\nu(z)$  в смысле Нильсена. Однако решение  $J_{-\nu}(z)$  дифференциального уравнения Бесселя, также соответствующее параметру  $\nu$ , должно быть обозначено не через  $\mathfrak{E}_\nu(z)$ , а через  $\mathfrak{E}_{-\nu}(z)$ .

Справедливы следующие формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} Z'_\nu(z) &= -\frac{\nu}{z} Z_\nu(z) + Z_{\nu-1}(z) = \frac{\nu}{z} Z_\nu(z) - Z_{\nu+1}(z), \\ Z'_0(z) &= -Z_1(z), \quad Z'_1(z) = Z_0(z) - \frac{1}{2} Z_1(z), \\ \frac{d}{dz} [z^\nu Z_\nu(az)] &= az^\nu Z_{\nu-1}(az), \quad \frac{d}{dz} [z^{-\nu} Z_\nu(az)] = -az^{-\nu} Z_{\nu+1}(az), \\ \frac{d}{dz} [z^{\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{az})] &= \frac{\sqrt{a}}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} Z_{\nu-1}(\sqrt{az}), \\ \frac{d}{dz} [z^{-\frac{\nu}{2}} Z_\nu(\sqrt{az})] &= -\frac{\sqrt{a}}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} Z_{\nu+1}(\sqrt{az}). \end{aligned}$$

**6.2. Между функциями  $J$ ,  $N$  и  $H$  существуют соотношения**

$$\begin{aligned} J_\nu(z) J_{-\nu+1}(z) + J_{\nu-1}(z) J_{-\nu}(z) &= \frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}, \quad N_{\nu-1}(z) J_\nu(z) - N_\nu(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}, \\ J_{\nu-1}(z) H_\nu^{(1)}(z) - J_\nu(z) H_{\nu-1}^{(1)}(z) &= \frac{2}{\pi iz}, \quad H_{\nu-1}^{(2)}(z) J_\nu(z) - H_\nu^{(2)}(z) J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi iz}. \end{aligned}$$

**6.3. Теорема сложения.** Пусть  $a, b, c$  — стороны и  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы треугольника, так что

$$ce^{i\beta} = a - be^{-i\gamma},$$

или же комплексные величины, в которые эти шесть действительных величин можно непрерывно преобразовать таким образом, чтобы выполнялось указанное выше соотношение. Тогда имеем:

$$Z_\nu(c) e^{i\nu\beta} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu+k}(a) J_k(b) e^{ik\gamma} \quad \text{для} \quad |be^{\pm i\gamma}| < |a|.$$

При  $\beta = 0, \gamma = \pi, |b| < |a|$  имеем:

$$Z_\nu(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Z_{\nu-k}(a) J_k(b),$$

а при

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos \beta} = \frac{b}{\sin \beta}, \quad |b| < |a|$$

справедливы равенства:

$$\begin{aligned} Z_\nu(\sqrt{a^2 + b^2}) \cos \nu\beta &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k}(a) J_{2k}(b), \\ Z_\nu(\sqrt{a^2 + b^2}) \sin \nu\beta &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k Z_{\nu+2k+1}(a) J_{2k+1}(b). \end{aligned}$$

В частности,

$$J_\nu(z+w) = \left(1 + \frac{w}{z}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k w^k}{k!} \left(1 + \frac{w}{2z}\right)^k J_{\nu+k}(z).$$

6.4. Теорема умножения:

$$Z_\nu(\lambda z) = \lambda' \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z_{\nu+k}(z)}{k!} \left( \frac{1-\lambda^2}{2} z \right)^k.$$

В случае, когда  $Z_\nu = J_\nu$ ,  $\lambda$  может быть произвольным; во всех остальных случаях должно быть  $|1-\lambda^2| < 1$ .

6.5. Формулы интегрирования:

$$\int J_\nu(z) dz = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(z),$$

$$\int z^{\nu+1} Z_\nu(z) dz = z^{\nu+1} Z_{\nu+1}(z), \quad \int z^{-\nu+1} Z_\nu(z) dz = -z^{-\nu+1} Z_{\nu-1}(z),$$

$$\int Z_1(z) dz = -Z_0(z), \quad \int z Z_0(z) dz = z Z_1(z),$$

$$\int \left[ (\alpha^2 - \beta^2) z - \frac{\mu^2 - \nu^2}{z} \right] Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z) dz =$$

$$= \beta z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\nu-1}(\beta z) - \alpha z Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z) + (\mu - \nu) Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\beta z),$$

$$\int z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\mu(\beta z) dz = \frac{\beta z Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\mu-1}(\beta z) - \alpha z Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\mu(\beta z)}{\alpha^2 - \beta^2},$$

$$\int z [Z_\mu(\alpha z)]^2 dz = \frac{z^2}{2} \{ [Z_\mu(\alpha z)]^2 - Z_{\mu-1}(\alpha z) Z_{\mu+1}(\alpha z) \},$$

$$\int \frac{1}{z} Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z) dz = \alpha z \frac{Z_{\mu-1}(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z) - Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_{\nu-1}(\alpha z)}{\mu^2 - \nu^2} - \frac{Z_\mu(\alpha z) \bar{Z}_\nu(\alpha z)}{\mu + \nu}.$$

7. Некоторые обыкновенные дифференциальные уравнения, разрешимые в функциях Бесселя\*).

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{z} w' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] w = 0, \quad w = z^2 Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 - \frac{4\nu^2 \gamma^2 - 1}{4z^2} \right] w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left( \beta^2 - \frac{4\nu^2 - 1}{4z^2} \right) w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1-2\alpha}{z} w' + \left( \beta^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = z^\alpha Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left[ (\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 - \left( \frac{\nu\gamma}{z} \right)^2 \right] w = 0, \quad w = Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left( \beta^2 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(\beta z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left( 1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(iz);$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left( i - \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z \sqrt{i});$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left( i + \frac{\nu^2}{z^2} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z \sqrt{-i});$$

\* ) Более подробный список уравнений, разрешимых в бesselевых функциях, можно найти в книге Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1981.— Прим. ред.

$$w'' + \frac{1}{z} w' - \left[ \frac{1}{z} + \left( \frac{\nu}{2z} \right)^2 \right] w = 0, \quad w = Z_\nu(2i\sqrt{z});$$

$$w'' + \frac{1}{z} w' + me^{i\mu} w = 0, \quad w = Z_0(\sqrt{mz} e^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + \left( me^{i\mu} + \frac{1}{4z^2} \right) w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_0(\sqrt{mz} e^{i\frac{\mu}{2}});$$

$$w'' + bz^m w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{m+2}} \left( \frac{2\sqrt{b}}{m+2} z^{\frac{m+2}{2}} \right);$$

$$w'' + bz^m w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{3}} \left( \frac{2\sqrt{b}}{3} \sqrt{z^3} \right); \quad w'' + bz^2 w = 0, \quad w = \sqrt{z} Z_{\frac{1}{4}} \left( \frac{\sqrt{b}}{2} z^2 \right);$$

$$w'' + \left( \frac{1-2\alpha}{z} \mp 2\beta\gamma iz^{\gamma-1} \right) w' + \left[ \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \mp \beta\gamma(\gamma-2\alpha) iz^{\gamma-2} \right] w = 0,$$

$$w = z^\alpha e^{\pm i\beta z^\gamma} Z_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'' + \left( \frac{1}{z} \mp 2i \right) w' - \left( \frac{\nu^2}{z^2} \pm \frac{i}{z} \right) w = 0, \quad w = e^{\pm iz} Z_\nu(z);$$

$$w'' + w' + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2} w = 0, \quad w = \sqrt{z} e^{-\frac{z}{2}} Z_\nu \left( \frac{iz}{2} \right);$$

$$w'' + \left( \frac{2\nu+1}{z} - k \right) w' - \frac{2\nu-1}{2z} kw = 0, \quad w = \frac{e^{\frac{kz}{2}}}{z^\nu} Z_\nu \left( \frac{ikz}{2} \right);$$

$$w'' + \left( \frac{1}{z} - 2 \operatorname{tg} z \right) w' - \left( \frac{\nu^2}{z^2} + \frac{\operatorname{tg} z}{z} \right) w = 0, \quad w = \frac{1}{\cos z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left( \frac{1}{z} + 2 \operatorname{ctg} z \right) w' - \left( \frac{\nu^2}{z^2} - \frac{\operatorname{ctg} z}{z} \right) w = 0, \quad w = \frac{1}{\sin z} Z_\nu(z);$$

$$w'' + \left( \frac{1}{z} - 2u \right) w' + \left( 1 - \frac{\nu^2}{z^2} + u^2 - u' - \frac{u}{z} \right) w = 0, \quad w = e^{\int u dz} Z_\nu(z);$$

$$w'''' + \frac{3}{2} w'' + \left( 4 + \frac{1-4\nu^2}{z^2} \right) w' + \frac{4}{z} w = 0,$$

$$w = A[J_\nu(z)]^2 + B J_\nu(z) N_\nu(z) + C[N_\nu(z)]^2 \equiv Q_\nu(z);$$

$$w'''' + \frac{3(1-\alpha)}{z} w'' + \left( \frac{1-4\nu^2\gamma^2+3\alpha(\alpha-1)}{z^2} + 4\beta^2\gamma^2 z^{2\gamma-2} \right) w' +$$

$$+ \left( \frac{\alpha(4\nu^2\gamma^2-\alpha^2)}{z^3} + 4\beta^2\gamma^2(\gamma-\alpha) z^{2\gamma-3} \right) w = 0, \quad w = z^\alpha Q_\nu(\beta z^\gamma);$$

$$w'''' + z^{2\gamma-2} w' + (\gamma-1) z^{2\gamma-3} w = 0, \quad w = z Q_{\frac{1}{2\gamma}} \left( \frac{z\gamma}{2\gamma} \right);$$

$$w^{IV} + \frac{4-2\nu}{z} w'''' + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{z^2} w'' - \frac{b^4}{16z^2} w = 0, \quad w = z^{\frac{\nu}{2}} [Z_\nu(b\sqrt{z}) + \bar{Z}_\nu(ib\sqrt{z})];$$

$$w^{IV} + \frac{4\nu-2}{\nu z} w'''' + \frac{(\nu-1)(2\nu-1)}{\nu^2 z^2} w'' - \frac{b^4}{16\nu^4} z^{\frac{2}{\nu}-4} w = 0,$$

$$w = \sqrt{z} [Z_\nu(bz^{\frac{1}{2\nu}}) + \bar{Z}_\nu(ibz^{\frac{1}{2\nu}})];$$

$$w^{IV} + \frac{6}{z} w'''' + \left( 4 + \frac{7-2\nu^2-2\mu^2}{z^2} \right) w'' + \left( \frac{16}{z} + \frac{1-2\nu^2-2\mu^2}{z^3} \right) w' +$$

$$+ \left( \frac{8}{z^2} + \frac{(\nu^2-\mu^2)^2}{z^4} \right) w = 0, \quad w = Z_\nu(z) \bar{Z}_\mu(z).$$

**В. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ**

**1. Определения и обозначения**

В приложениях часто играют роль бesselевы функции, рассматриваемые вдоль прямых, проходящих через нулевую точку ( $\arg z = \text{const}$ ). Поэтому выгодно «видоизменить» эти функции поворотом системы координат так, чтобы действительная ось совпала с вышеупомянутой прямой. Два наиболее важных случая соответствуют поворотам на  $90^\circ$  и  $135^\circ$ ; для соответствующих *модифицированных (видоизмененных) функций* употребляются специальные обозначения.

При повороте на  $90^\circ$  получаем бesselевы функции  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$ ; при повороте на  $135^\circ$  получаем функции Кельвина  $ber_\nu(z)$ ,  $bei_\nu(z)$ ,  $ker_\nu(z)$ ,  $kei_\nu(z)$ .

**2. Функции  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$**

**2.1.** Повороту на  $90^\circ$  соответствуют функции Бесселя  $Z_\nu(iz)$ . Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0.$$

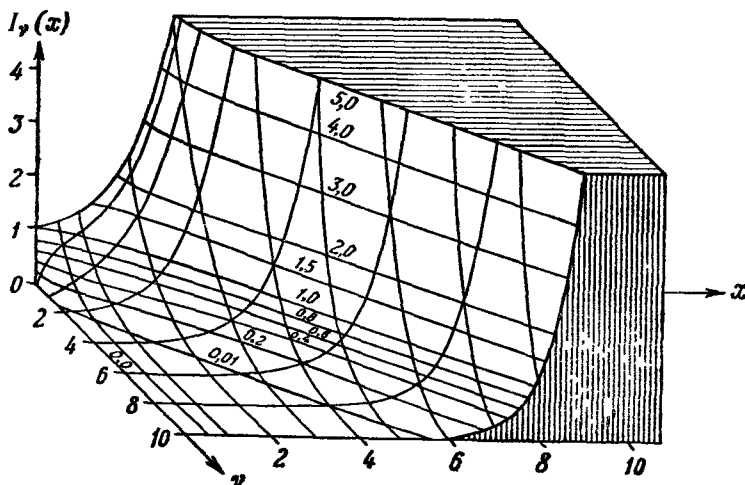


Рис. 144. Поверхность модифицированной функции Бесселя  $I_\nu(x)$  над плоскостью действительных переменных  $\nu, x$ .

Исходя из функций  $J_\nu(z)$  и  $H_\nu^{(1)}(z)$ , определяют модифицированные функции Бесселя \*)

$$I_\nu(z) = e^{-\nu \frac{\pi}{2} i} J_\nu(z e^{\frac{\pi}{2} i}) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\nu \frac{\pi}{2} i} H_\nu^{(1)}(z e^{\frac{\pi}{2} i}) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\nu \frac{\pi}{2} i} H_\nu^{(2)}(z e^{-\frac{\pi}{2} i}).$$

При этом  $I_{-\nu}(z) = I_\nu(z)$ ,  $K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$  и для нецелых  $\nu$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu \pi} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)].$$

\*) Первую из них иногда называют функцией Бесселя мнимого аргумента, а вторую — функцией Макдональда или модифицированной функцией Ганкеля. — Прим. ред.

Разложение в ряды для  $K_\nu(z)$  при нецелочисленном порядке  $\nu$  получается из разложения для  $I_\nu(z)$ . В случае целого  $\nu = n$  имеем:

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right) + \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{n+k} \frac{1}{l} \right) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

( $\gamma$  — константа Эйлера).

Если порядок действителен и аргумент  $z = x > 0$ , то обе функции принимают действительные значения (рис. 144—149, таблицы 53—56). При  $0 < x \ll 1$  их поведение описывается формулами

$$I_\nu(x) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu; \quad K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x}; \quad K_n(x) \approx \frac{1}{2} \Gamma(n) \left(\frac{2}{x}\right)^n, \quad n=1, 2, \dots$$

При  $x \gg 1$  функция  $I_\nu(x)$  возрастает по показательному закону, а  $K_\nu(x)$  убывает по показательному закону.

2.2. Дальнейшие представления и свойства функций  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  получаются из представлений и свойств  $J_\nu(z)$ ,  $H_\nu^{(1)}(z)$  на основании определений.

Обе функции,  $I_\nu(z)$  и  $K_\nu(z)$ , многозначны и после  $m$  обходов вокруг гочки ветвления  $z=0$  получают значения

$$I_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{m\nu\pi i} I_\nu(z), \\ K_\nu(e^{m\pi i} z) = e^{-m\nu\pi i} K_\nu(z) - i\pi \frac{\sin m\nu\pi}{\sin \nu\pi} I_\nu(z) \quad (m \text{ — целое});$$

в частности,  $I_n(-z) = (-1)^n I_n(z)$ .

Справедливы формулы:

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ 2I'_\nu(z) = I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z), \\ -2K'_\nu(z) = K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z), \\ I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z), \\ I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}.$$

О нулях этих функций см. рис. 150—154, таблицу 57.

Корень уравнения  $H_1^{(2)'}(z) = 0$  или  $H_1^{(2)}(z) = zH_0^{(2)}(z)$  равен

$$z = 0,5012 + i0,6435 = re^{i\varphi},$$

где  $r = 0,8156$ ,  $\varphi = 52^\circ,085 = 0,9091$  радиана.



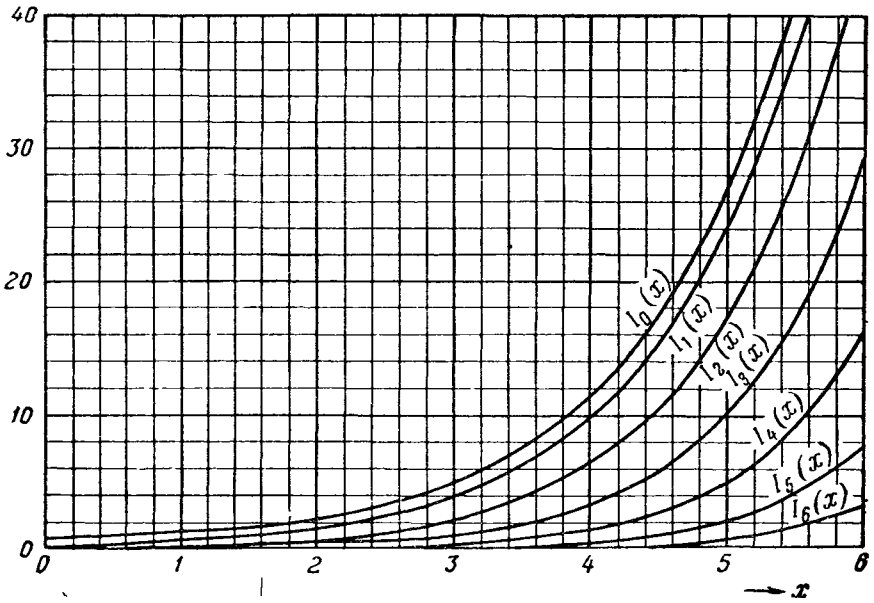
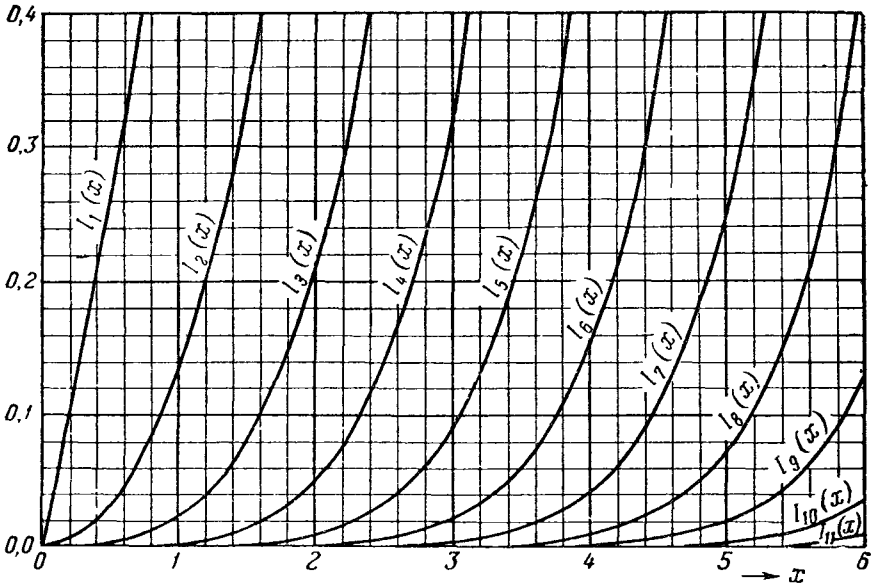


Рис. 145 и 146. Модифицированные функции Бесселя  $I_n(x)$ .

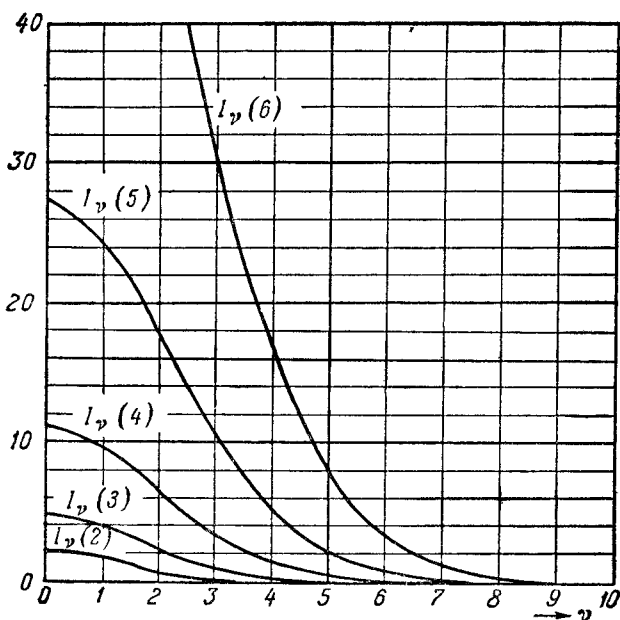
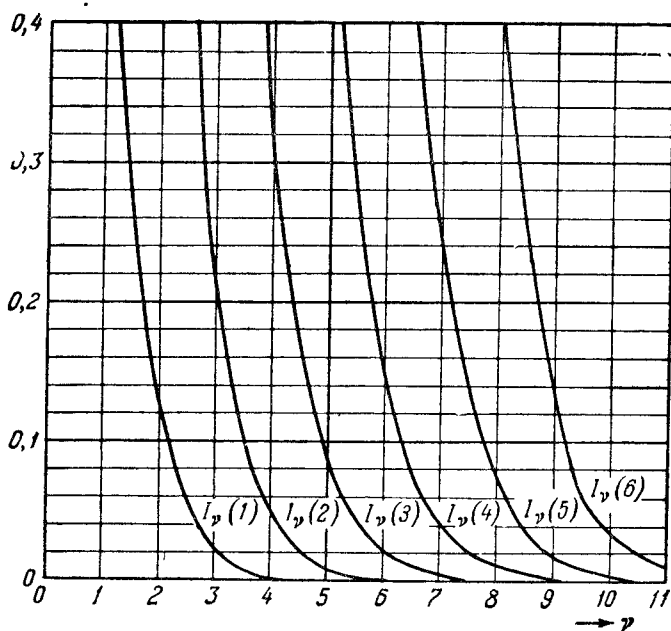


Рис 147 и 148. Модифицированные функции Бесселя  $I_n(p)$  при постоянном аргументе и переменном порядке.

Таблица 53. Модифицированные функции Бесселя  $I_0(x)$  и  $I_1(x)$

$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$
0,00	1, 0000	0, 0000	1,00	1, 2661	0, 5652	2,00	2,280	1,5906
02	0001 + 0,5	0100 + 50	02	2775 + 57	5793 + 70,5	02	2,312 + 16	1,6206 + 150
04	0004 1,5	0200 50	04	2892 58,5	5935 71	04	2,344 16	1,6510 152
06	0009 2,5	0300 50	06	3013 60,5	6080 72,5	06	2,378 17	1,6820 155
08	0016 3,5	0400 50	08	3136 61,5	6227 73,5	08	2,412 17	1,7135 157,5
	0016 4,5	0400 50,5	08	3136 63	6227 74	08	2,412 17	1,7135 160
0,10	0025 + 5,5	0501 + 50	1,10	3262 + 64,5	6375 + 75	2,10	2,446 + 18	1,745 + 16,5
12	0036 6,5	0601 50,5	12	3391 66	6525 76	12	2,482 + 17,5	1,778 16,5
14	0049 7,5	0702 50,5	14	3523 67,5	6677 77,5	14	2,517 18,5	1,811 17
16	0064 8,5	0803 50,5	16	3658 69	6832 78	16	2,554 18,5	1,845 17
18	0081 9,5	0904 50,5	18	3796 70,5	6988 79,5	18	2,591 19	1,879 17,5
0,20	0100 + 10,5	1005 + 51	1,20	3937 + 72,5	7147 + 80,5	2,20	2,629 + 19,5	1,914 + 18
22	0121 12	1107 51	22	4082 74	7308 81	22	2,668 19,5	1,950 18
24	0145 12,5	1209 51	24	4230 75,5	7470 83	24	2,707 20	1,986 18
26	0170 13,5	1311 51,5	26	4381 77	7636 83,5	26	2,747 20,5	2,022 19
28	0197 14,5	1414 51,5	28	4535 79	7803 85	28	2,788 21	2,060 19
0,30	0226 + 16	1517 + 52	1,30	4693 + 80,5	7973 + 86,5	2,30	2,830 + 21	2,098 + 19
32	0258 16,5	1621 52	32	4854 82,5	8146 87,5	32	2,872 21,5	2,136 20
34	0291 18	1725 52	34	5019 84	8321 88,5	34	2,915 22	2,176 20
36	0327 18,5	1829 53	36	5187 86	8498 90	36	2,959 22,5	2,216 20,5
38	0364 20	1935 52,5	38	5359 87,5	8678 91,5	38	3,004 22,5	2,257 20,5
0,40	0404 + 21	2040 + 53,5	1,40	5534 + 89,5	8861 + 92,5	2,40	3,049 + 23,5	2,298 + 21
42	0446 22	2147 53,5	42	5713 91,5	9046 94,5	42	3,096 23,5	2,340 21,5
44	0490 23	2254 53,5	44	5896 93	9235 95,5	44	3,143 24	2,383 22
46	0536 24	2361 54,5	46	6082 95,5	9426 97	46	3,191 24,5	2,427 22
48	0584 25,5	2470 54,5	48	6273 97	9620 98,5	48	3,240 25	2,471 23
0,50	0635 + 26,5	2579 + 55	1,50	6467 + 99,5	9817 + 100	2,50	3,290 + 25,5	2,517 + 23
52	0688 27	2689 55,5	52	6666 101	*0017 101,5	52	3,341 25,5	2,563 23,5
54	0742 29	2800 55,5	54	6868 103	0220 103	54	3,392 26,5	2,610 23,5
56	0800 29,5	2911 56,5	56	7074 105,5	0426 104,5	56	3,445 27	2,657 24,5
58	0859 30,5	3024 56,5	58	7285 107,5	0635 106,5	58	3,499 27	2,706 24,5
0,60	0920 + 32	3137 + 57	1,60	7500 + 109,5	0848 + 108	2,60	3,553 + 28	2,755 + 25,5
62	0984 33,5	3251 58	62	7719 111,5	1064 110	62	3,609 28,5	2,806 25,5
64	1051 34	3367 58	64	7942 114	1284 111,5	64	3,666 28,5	2,857 26
66	1119 35,5	3483 58,5	66	8170 116,5	1507 113	66	3,723 29,5	2,909 26,5
68	1190 36,5	3600 59,5	68	8403 118,5	1733 115	68	3,782 30	2,962 27
0,70	1263 + 38	3719 + 59,5	1,70	864 + 12	1963 + 117	2,70	3,842 + 30,5	3,016 + 27,5
72	1339 39	3838 60,5	72	888 12,5	2197 119	72	3,903 31	3,071 28
74	1417 40	3959 61	74	913 12,5	2435 121	74	3,965 31,5	3,127 28,5
76	1497 41,5	4081 61,5	76	938 12,5	2677 122,5	76	4,028 32	3,184 29
78	1580 42,5	4204 62,5	78	963 13,5	2922 125	78	4,092 32,5	3,242 29,5
0,80	1665 + 44	4329 + 62,5	1,80	990 + 13	-3172 + 126,5	2,80	4,157 + 33,5	3,301 + 30
82	1753 45	4454 63,5	82	*016 13,5	3425 129	82	4,224 34	3,361 30,5
84	1843 46,5	4581 64,5	84	043 14	3683 131	84	4,292 34,5	3,422 31,5
86	1936 48	4710 65	86	071 14	3945 133,5	86	4,361 35	3,485 31,5
88	2032 49	4840 65,5	88	099 14,5	4212 135	88	4,431 36	3,548 32,5
0,90	2130 + 50,5	4971 + 66,5	1,90	128 + 14,5	4482 + 138	2,90	4,503 + 36,5	3,613 + 32,5
92	2231 51,5	5104 67,5	92	157 15	4758 140	92	4,576 37	3,678 33,5
94	2334 53	5239 68	94	187 15	5038 142,5	94	4,650 37,5	3,745 34
96	2440 54,5	5375 68,5	96	217 15,5	5323 144,5	96	4,725 38,5	3,813 35
98	2549 56	5512 70	98	248 16	5612 147	98	4,802 39,5	3,883 35
1,00	2661 1,	5652 0,	2,00	280 2,	5906 1,	3,00	4,881	3,953

Продолжение табл. 53

$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$
3,00	4,881 + 40	3,953 + 36	4,00	11,302 + 98,5	9,759 + 89,5	5,00	27,24 + 24,5	24,34 + 22,5
02	4,961 + 40,5	4,025 + 36,5	02	11,499 + 100	9,938 + 91,5	02	27,73 + 25	24,79 + 23
04	5,042 + 41,5	4,098 + 37,5	04	11,699 + 102,5	10,121 + 92,5	04	28,23 + 25,5	25,25 + 23,5
06	5,125 + 42	4,173 + 38	06	11,906 + 104	10,306 + 94,5	06	28,74 + 26	25,72 + 23,5
08	5,209 + 42,5	4,249 + 38,5	08	12,112 + 106	10,495 + 96,5	08	29,26 + 26,5	26,19 + 24,5
3,10	5,294 + 44	4,326 + 39,5	4,10	12,324 + 107,5	10,688 + 98	5,10	29,79 + 27	26,68 + 25
12	5,382 + 44,5	4,405 + 40	12	12,539 + 110	10,884 + 100	12	30,33 + 27,5	27,18 + 25
14	5,471 + 45	4,485 + 41	14	12,759 + 112	11,084 + 101,5	14	30,88 + 27,5	27,68 + 26
16	5,561 + 46	4,567 + 41,5	16	12,983 + 113,5	11,287 + 103,5	16	31,43 + 28,5	28,20 + 26
18	5,653 + 47	4,650 + 42	18	13,210 + 116	11,494 + 106	18	32,00 + 29	28,72 + 26,5
3,20	5,747 + 48	4,734 + 43	4,20	13,442 + 118,5	11,706 + 107,5	5,20	32,58 + 29,5	29,25 + 27,5
22	5,843 + 48,5	4,820 + 44	22	13,679 + 120	11,921 + 109,5	22	33,17 + 30,5	29,80 + 27,5
24	5,940 + 49,5	4,908 + 44,5	24	13,919 + 122,5	12,140 + 111,5	24	33,78 + 30,5	30,35 + 28,5
26	6,039 + 50,5	4,997 + 45,5	26	14,164 + 125	12,363 + 113,5	26	34,39 + 31	30,92 + 28,5
28	6,140 + 51,5	5,088 + 46,5	28	14,414 + 127	12,590 + 116	28	35,01 + 32	31,49 + 29,5
3,30	6,243 + 52	5,181 + 47	4,30	14,668 + 129,5	12,822 + 118	5,30	35,65 + 32,5	32,08 + 30
32	6,347 + 53,5	5,275 + 48	32	14,927 + 131,5	13,058 + 120	32	36,30 + 33	32,68 + 30,5
34	6,454 + 54	5,371 + 49	34	15,190 + 134,5	13,298 + 122,5	34	36,96 + 33,5	33,29 + 31
36	6,562 + 55	5,469 + 50	36	15,459 + 136,5	13,543 + 124,5	36	37,63 + 34	33,91 + 31,5
38	6,672 + 56,5	5,569 + 50,5	38	15,732 + 139	13,792 + 127	38	38,31 + 35	34,54 + 32
3,40	6,785 + 57	5,670 + 51,5	4,40	16,010 + 142	14,046 + 129,5	5,40	39,01 + 35,5	35,18 + 33
42	6,899 + 58,5	5,773 + 53	42	16,294 + 144,5	14,305 + 132	42	39,72 + 36	35,84 + 33,5
44	7,016 + 59	5,879 + 53,5	44	16,583 + 147	14,569 + 134	44	40,44 + 37	36,51 + 34
46	7,134 + 60,5	5,986 + 54,5	46	16,877 + 149,5	14,837 + 137	46	41,18 + 37,5	37,19 + 34,5
48	7,255 + 61,5	6,095 + 55,5	48	17,176 + 152,5	15,111 + 139	48	41,93 + 38	37,88 + 35,5
3,50	7,378 + 62,5	6,206 + 56,5	4,50	17,48 + 15,5	15,389 + 142	5,50	42,69 + 39	38,59 + 36
52	7,503 + 64	6,319 + 57,5	52	17,79 + 16	15,673 + 144,5	52	43,47 + 40	39,31 + 36,5
54	7,631 + 65	6,434 + 59	54	18,11 + 16	15,962 + 147,5	54	44,27 + 40,5	40,04 + 37,5
56	7,761 + 66	6,552 + 59,5	56	18,43 + 16,5	16,257 + 150	56	45,08 + 41	40,79 + 38
58	7,893 + 67,5	6,671 + 61	58	18,76 + 16,5	16,557 + 153	58	45,90 + 42	41,55 + 39
3,60	8,028 + 68,5	6,793 + 62	4,60	19,09 + 17	16,86 + 15,5	5,60	46,74 + 42,5	42,33 + 39,5
62	8,165 + 69,5	6,917 + 63	62	19,43 + 17,5	17,17 + 16	62	47,59 + 43,5	43,12 + 40,5
64	8,304 + 71,5	7,043 + 64	64	19,78 + 17,5	17,49 + 16	64	48,46 + 44,5	43,93 + 41
66	8,447 + 72	7,171 + 65,5	66	20,13 + 18	17,81 + 16,5	66	49,35 + 45	44,75 + 41,5
68	8,591 + 74	7,302 + 67	68	20,49 + 18,5	18,14 + 17	68	50,25 + 46	45,58 + 43
3,70	8,739 + 75	7,436 + 68	4,70	20,86 + 18,5	18,48 + 17	5,70	51,17 + 47	46,44 + 43
72	8,889 + 76	7,572 + 69	72	21,23 + 19	18,82 + 17,5	72	52,11 + 47,5	47,30 + 44,5
74	9,041 + 78	7,710 + 70,5	74	21,61 + 19,5	19,17 + 17,5	74	53,06 + 49	48,19 + 45
76	9,197 + 79,5	7,851 + 71,5	76	22,00 + 19,5	19,52 + 18	76	54,04 + 49,5	49,09 + 46
78	9,356 + 80,5	7,994 + 73	78	22,39 + 20	19,88 + 18,5	78	55,03 + 50,5	50,01 + 47
3,80	9,517 + 82	8,140 + 74,5	4,80	22,79 + 20,5	20,25 + 19	5,80	56,04 + 51,5	50,95 + 47,5
82	9,681 + 83,5	8,289 + 76	82	23,20 + 21	20,63 + 19	82	57,07 + 52	51,90 + 48,5
84	9,848 + 85,5	8,441 + 77	84	23,62 + 21	21,01 + 19,5	84	58,11 + 53,5	52,87 + 49,5
86	10,019 + 86,5	8,595 + 79	86	24,04 + 21,5	21,40 + 20	86	59,18 + 54,5	53,86 + 50,5
88	10,192 + 88,5	8,753 + 80	88	24,47 + 22	21,80 + 20	88	60,27 + 55,5	54,87 + 51,5
3,90	10,369 + 90	8,913 + 81,5	4,90	24,91 + 22,5	22,20 + 20,5	5,90	61,38 + 56,5	55,90 + 52,5
92	10,549 + 91,5	9,076 + 83	92	25,36 + 23	22,61 + 21	92	62,51 + 57	56,95 + 53,5
94	10,732 + 93,5	9,242 + 84,5	94	25,82 + 23	23,03 + 21,5	94	63,65 + 59	58,02 + 54
96	10,919 + 94,5	9,411 + 86,5	96	26,28 + 24	23,46 + 21,5	96	64,83 + 59,5	59,10 + 55,5
98	11,108 + 97	9,584 + 87,5	98	26,76 + 24	23,89 + 22,5	98	66,02 + 60,5	60,21 + 56,5
4,00	11,302	9,759	5,00	27,24	24,34	6,00	67,23	61,34

Продолжение табл. 53

$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$
6,00	67,23	61,34	7,00	168,6	156,04	8,00	427,6	399,9
02	68,47	62,49	02	171,7	158,99	02	435,6	407,5
04	69,73	63,67	04	175,0	162,00	04	443,9	415,3
06	71,02	64,86	06	178,2	165,07	06	452,2	423,2
08	72,33	66,08	08	181,6	168,20	08	460,8	431,3
6,10	73,66	67,32	7,10	185,0	171,4	8,10	469,5	439,5
12	75,02	68,58	12	188,4	174,6	12	478,4	447,9
14	76,41	69,87	14	191,9	177,9	14	487,4	456,4
16	77,82	71,18	16	195,5	181,3	16	496,6	465,1
18	79,25	72,52	18	199,2	184,7	18	506,0	474,0
6,20	80,72	73,89	7,20	202,9	188,3	8,20	515,6	483,0
22	82,21	75,27	22	206,7	191,8	22	525,3	492,3
24	83,73	76,69	24	210,6	195,5	24	535,3	501,7
26	85,28	78,13	26	214,5	199,2	26	545,4	511,2
28	86,85	79,60	28	218,6	202,9	28	555,7	521,0
6,30	88,46	81,10	7,30	222,7	206,8	8,30	566,3	531,0
32	90,10	82,63	32	226,8	210,7	32	577,0	541,1
34	91,77	84,18	34	231,1	214,7	34	587,9	551,4
36	93,47	85,77	36	235,4	218,8	36	599,0	562,0
38	95,20	87,38	38	239,8	222,9	38	610,4	572,7
6,40	96,96	89,03	7,40	244,3	227,2	8,40	621,9	583,7
42	98,76	90,70	42	248,9	231,5	42	633,7	594,8
44	100,59	92,41	44	253,6	235,9	44	645,7	606,2
46	102,46	94,15	46	258,4	240,4	46	658,0	617,8
48	104,36	95,93	48	263,2	244,9	48	670,5	629,6
6,50	106,29	97,74	7,50	268,2	249,6	8,50	683,2	641,6
52	108,27	99,58	52	273,2	254,3	52	696,1	653,9
54	110,28	101,45	54	278,3	259,2	54	709,3	666,4
56	112,32	103,37	56	283,6	264,1	56	722,8	679,1
58	114,41	105,32	58	288,9	269,1	58	736,5	692,1
6,60	116,54	107,30	7,60	294,3	274,2	8,60	750,5	705,4
62	118,70	109,33	62	299,9	279,4	62	764,7	718,9
64	120,91	111,39	64	305,5	284,8	64	779,2	732,6
66	123,16	113,49	66	311,3	290,2	66	794,0	746,7
68	125,45	115,64	68	317,1	295,7	68	809,1	761,5
6,70	127,79	117,82	7,70	323,1	301,3	8,70	824,4	775,5
72	130,16	120,05	72	329,2	307,0	72	840,1	790,4
74	132,59	122,31	74	335,4	312,9	74	856,1	805,5
76	135,06	124,62	76	341,7	318,8	76	872,3	820,9
78	137,57	126,98	78	348,1	324,9	78	888,9	836,6
6,80	140,14	129,38	7,80	354,7	331,1	8,80	905,8	852,7
82	142,75	131,82	82	361,4	337,4	82	923,0	869,0
84	145,41	134,31	84	368,2	343,8	84	940,6	885,6
86	148,12	136,85	86	375,1	350,4	86	958,4	902,6
88	150,88	139,44	88	382,2	357,1	88	976,7	919,9
6,90	153,70	142,08	7,90	389,4	363,9	8,90	995,2	937,5
92	156,57	144,77	92	396,8	370,8	92	1014,2	955,5
94	159,49	147,51	94	404,2	377,9	94	1033,5	973,8
96	162,47	150,30	96	411,9	385,1	96	1053,1	992,5
98	165,50	153,14	98	419,6	392,4	98	1073,2	1011,5
7,00	168,59	156,04	8,00	427,6	399,9	9,00	1093,6	1030,9

Продолжение табл. 53

$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$
9,00	1093,6	1030,9	9,40	1595	1508	9,80	2329	2207
02	1114,4	1050,7	42	1626	1537	82	2374	2250
04	1135,6	1070,8	44	1657	1566	84	2419	2293
06	1157,2	1091,4	46	1688	1596	86	2466	2337
08	1179,3	1112,3	48	1721	1627	88	2513	2382
9,10	1201,7	1133,6	9,50	1753	1658	9,90	2561	2428
12	1224,6	1155,4	52	1787	1690	92	2610	2475
14	1248,0	1177,6	54	1821	1723	94	2660	2522
16	1271,7	1200,2	56	1856	1756	96	2711	2571
18	1296,0	1223,2	58	1891	1790	98	2763	2621
9,20	1320,7	1246,7	9,60	1927	1824	10,00	2816	2671
22	1345,8	1270,6	62	1964	1859			
24	1371,5	1295,0	64	2002	1895			
26	1397,6	1319,9	66	2040	1931			
28	1424,3	1345,2	68	2079	1969			
9,30	1451,4	1371,0	9,70	2119	2006			
32	1479,1	1397,4	72	2159	2045			
34	1507,3	1424,2	74	2201	2084			
36	1536,1	1451,6	76	2243	2125			
38	1565,4	1479,5	78	2286	2165			
9,40	1595,3	1507,9	9,80	2329	2207			

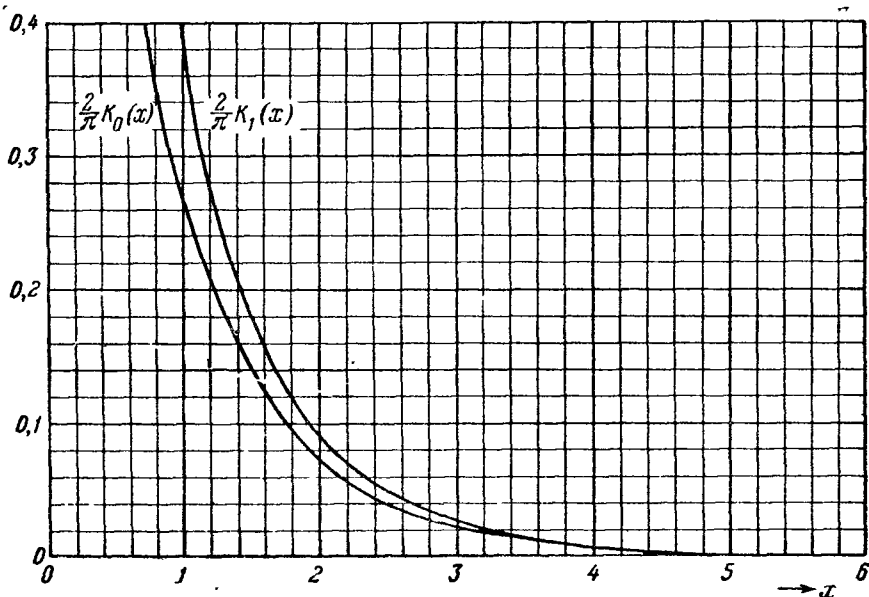
Рис. 149. Модифицированные функции Бесселя  $\frac{2}{\pi} K_0(x)$  и  $\frac{2}{\pi} K_1(x)$ .

Таблица 54. Модифицированные функции Бесселя  $I_n(x)$

$x$	$I_0(x)$	$I_1(x)$	$I_2(x)$	$I_3(x)$	$I_4(x)$	$I_5(x)$
0,0	1,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	1,0100	0,1005	0,5017 (-2)	0,1671 (-3)	0,4175 (-5)	0,8347 (-7)
0,4	1,0404	0,2040	0,2027 (-1)	0,1347 (-2)	0,6720 (-4)	0,2684 (-5)
0,6	1,0920	0,3137	0,4637 (-1)	0,4602 (-2)	0,3436 (-3)	0,2056 (-4)
0,8	1,1665	0,4329	0,8435 (-1)	0,1110 (-1)	0,1101 (-2)	0,8764 (-4)
1,0	1,2661	0,5652	0,1357	0,2217 (-1)	0,2737 (-2)	0,2715 (-3)
1,2	1,3937	0,7147	0,2026	0,3936 (-1)	0,5801 (-2)	0,6879 (-3)
1,4	1,5534	0,8861	0,2875	0,6452 (-1)	0,1103 (-1)	0,1519 (-2)
1,6	1,7500	1,0848	0,3940	0,9989 (-1)	0,1937 (-1)	0,3036 (-2)
1,8	1,9896	1,3172	0,5260	0,1482	0,3208 (-1)	0,5625 (-2)
2,0	2,2796	1,5906	0,6889	0,2127	0,5073 (-1)	0,9826 (-2)
2,2	2,6291	1,9141	0,8891	0,2976	0,7734 (-1)	0,1637 (-1)
2,4	3,0493	2,2981	1,1342	0,4079	0,1145	0,2626 (-1)
2,6	3,5533	2,7554	1,4337	0,5496	0,1654	0,4079 (-1)
2,8	4,1573	3,3011	1,7994	0,7305	0,2341	0,6169 (-1)
3,0	4,8808	3,9534	2,2452	0,9598	0,3257	0,9121 (-1)
3,2	5,7472	4,7343	2,7883	1,2489	0,4466	0,1323
3,4	6,7848	5,6701	3,4495	1,6119	0,6049	0,1886
3,6	8,0277	6,7927	4,2540	2,0661	0,8105	0,2651
3,8	9,5169	8,1404	5,2325	2,6326	1,0758	0,3678
4,0	11,3019	9,7595	6,4222	3,3373	1,4163	0,5047
4,2	13,4425	11,7056	7,8684	4,2120	1,8513	0,6857
4,4	16,0104	14,0462	9,6258	5,2955	2,4046	0,9234
4,6	19,0926	16,8626	11,7611	6,6355	3,1060	1,2338
4,8	22,7937	20,2528	14,3550	8,2903	3,9921	1,6369
5,0	27,2399	24,3356	17,5056	10,3312	5,1082	2,1580
5,2	32,5836	29,2543	21,3319	12,8451	6,5106	2,8288
5,4	39,0088	35,1821	25,9784	15,9388	8,2686	3,6890
5,6	46,7376	42,3283	31,6203	19,7424	10,4678	4,7884
5,8	56,0381	50,9462	38,4704	24,4148	13,2137	6,1890
6,0	67,2344	61,3419	46,7871	30,1505	16,6366	7,9685

$x$	$I_6(x)$	$-I_7(x)$	$I_8(x)$	$I_9(x)$	$I_{10}(x)$	$I_{11}(x)$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,2	0,1391 (-8)	0,1987 (-10)	0,2483 (-12)	0,2758 (-14)	0,2758 (-16)	0,2507 (-18)
0,4	0,8940 (-7)	0,2552 (-8)	0,6377 (-10)	0,1417 (-11)	0,2832 (-13)	0,5148 (-15)
0,6	0,1026 (-5)	0,4388 (-7)	0,1644 (-8)	0,5473 (-10)	0,1641 (-11)	0,4471 (-13)
0,8	0,5820 (-5)	0,3316 (-6)	0,1655 (-7)	0,7340 (-9)	0,2932 (-10)	0,1065 (-11)
1,0	0,2249 (-4)	0,1599 (-5)	0,9961 (-7)	0,5518 (-8)	0,2753 (-9)	0,1249 (-10)
1,2	0,6821 (-4)	0,5809 (-5)	0,4335 (-6)	0,2879 (-7)	0,1722 (-8)	0,9365 (-10)
1,4	0,1752 (-3)	0,1737 (-4)	0,1510 (-5)	0,1168 (-6)	0,8138 (-8)	0,5160 (-9)
1,6	0,3987 (-3)	0,4506 (-4)	0,4467 (-5)	0,3942 (-6)	0,3136 (-7)	0,2270 (-8)
1,8	0,8280 (-3)	0,1050 (-3)	0,1168 (-4)	0,1157 (-5)	0,1034 (-6)	0,8409 (-8)
2,0	0,1600 (-2)	0,2246 (-3)	0,2770 (-4)	0,3044 (-5)	0,3017 (-6)	0,2722 (-7)
2,2	0,2919 (-2)	0,4492 (-3)	0,6076 (-4)	0,7329 (-5)	0,7975 (-6)	0,7903 (-7)
2,4	0,5081 (-2)	0,8497 (-3)	0,1250 (-3)	0,1641 (-4)	0,1944 (-5)	0,2098 (-6)
2,6	0,8505 (-2)	0,1534 (-2)	0,2437 (-3)	0,3456 (-4)	0,4426 (-5)	0,5165 (-6)
2,8	0,1377 (-1)	0,2664 (-2)	0,4540 (-3)	0,6915 (-4)	0,9513 (-5)	0,1193 (-5)
3,0	0,2168 (-1)	0,4472 (-2)	0,8137 (-3)	0,1324 (-3)	0,1946 (-4)	0,2610 (-5)
3,2	0,3332 (-1)	0,7295 (-2)	0,1410 (-2)	0,2439 (-3)	0,3816 (-4)	0,5446 (-5)
3,4	0,5015 (-1)	0,1160 (-1)	0,2373 (-2)	0,4347 (-3)	0,7205 (-4)	0,1090 (-4)
3,6	0,7411 (-1)	0,1806 (-1)	0,3893 (-2)	0,7523 (-3)	0,1316 (-3)	0,2103 (-4)
3,8	0,1078	0,2755 (-1)	0,6243 (-2)	0,1269 (-2)	0,2336 (-3)	0,3929 (-4)
4,0	0,1545	0,4133 (-1)	0,9810 (-2)	0,2090 (-2)	0,4038 (-3)	0,7131 (-4)
4,2	0,2186	0,6105 (-1)	0,1514 (-1)	0,3373 (-2)	0,6819 (-3)	0,1261 (-3)
4,4	0,3060	0,8894 (-1)	0,2299 (-1)	0,5344 (-2)	0,1128 (-2)	0,2178 (-3)
4,6	0,4239	0,1280	0,3440 (-1)	0,8324 (-2)	0,1830 (-2)	0,3683 (-3)
4,8	0,5819	0,1821	0,5080 (-1)	0,1277 (-1)	0,2918 (-2)	0,6109 (-3)
5,0	0,7923	0,2565	0,7412 (-1)	0,1932 (-1)	0,4580 (-2)	0,9955 (-3)
5,2	1,0707	0,3580	0,1070	0,2885 (-1)	0,7086 (-2)	0,1596 (-2)
5,4	1,4371	0,4954	0,1528	0,4260 (-1)	0,1082 (-1)	0,2523 (-2)
5,6	1,9171	0,6803	0,2163	0,6222 (-1)	0,1632 (-1)	0,3932 (-2)
5,8	2,5430	0,9277	0,3037	0,9000 (-1)	0,2435 (-1)	0,6052 (-2)
6,0	3,3558	1,2569	0,4230	0,1290	0,3594 (-1)	0,9207 (-2)

Таблица 55. Модифицированные функции Бесселя  $\frac{2}{\pi} K_0(x)$  и  $\frac{2}{\pi} K_1(x)$

$$\frac{2}{\pi} K_0(x) = {}_1H_0^{(1)}(ix) = -{}_1H_0^{(2)}(-ix), \quad \frac{2}{\pi} K_1(x) = -H_1^{(1)}(ix) = -H_1^{(2)}(-ix)$$

x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	x	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
0,00	$\infty$	$\infty$	1,00	0,	0,	2,00	0,0	0,0
02	+ 2,565	+ 31,802	02	2680 — 37 5	3832 — 64	02	7251 — 88	8904 — 115 5
04	2,124	15,867	04	2605 36 5	3704 61	04	7075 85 5	8673 112
06	1,867	10,545	06	2532 35	3582 58,5	06	6904 83 5	8449 108 5
08	1,685	7,878	08	2462 34,5	3465 56	08	6737 81 5	8232 106
0,10	+ 1,5451 + 249	+ 6,273	08	2393 33	3353 54	08	6574 79	8020 103
12	1,4310 176	5,200	1,10	2327 — 31 5	3245 — 51 5	2,10	6416 — 77	7814 — 100
14	1,3351 130	4,432	12	2264 31	3142 50	12	6262 75 5	7614 97
16	1,2525 100	3,854	14	2202 30	3042 47 5	14	6111 73	7420 94 5
18	1,1801 80	3,403	16	2142 29	2947 46	16	5965 71 5	7231 91,5
0,20	+ 1,1158 + 65	+ 3,0405 + 634	18	2084 28	2855 44	18	5822 69 5	7048 89 5
22	1,0581 54	2,7433 479	1,20	2028 — 27 5	2767 — 42,5	2,20	5683 — 68	6869 — 87
24	1,0057 45	2,4950 370	22	1973 26,5	2682 41	22	5547 66	6695 84 5
26	0,9580 39	2,2842 292	24	1920 25,5	2600 39,5	24	5415 64 5	6526 82
28	0,9142 34	2,1030 235	26	1869 24,5	2521 38	26	5286 62,5	6362 80
0,30	+ 0,8737 + 29	+ 1,9455 + 191	28	1820 24,5	2445 36,5	28	5161 61 5	6202 77,5
32	0,8362 26	1,8074 158	1,30	1771 — 23	2372 — 35,5	2,30	5038 — 59 5	6047 — 75,5
34	0,8013 23	1,6852 132	32	1725 23	2301 34	32	4919 58 5	5896 74
36	0,7687 21	1,5763 112	34	1679 22	2239 33	34	4802 56 5	5748 71 5
38	0,7382 18	1,4786 95	36	1635 21	2167 31,5	36	4689 55 5	5605 69 5
0,40	+ 0,7095 + 17	+ 1,3906 + 82	38	1593 21	2104 30,5	38	4578 54	5466 68
42	0,6825 15	1,3108 71	1,40	15512 — 201,5	2043 — 30	2,40	4470 — 52 5	5330 — 66
44	0,6571 14	1,2381 62	42	15109 195,5	1983 28,5	42	4365 51,5	5198 64
46	0,6330 13	1,1717 54	44	14718 190	1926 27,5	44	4262 50	5070 63
48	0,6101 + 12	1,1107 48	46	14338 184	1871 26,5	46	4162 49	4944 60 5
0,50	+ 0,5885 + 11	+ 1,0545 + 43	48	13970 179,5	1818 26	48	4064 47 5	4823 59,5
52	0,5679 — 103	1,0026 38	1,50	13611 — 174	1766 — 25	2,50	3969 — 46 5	4704 — 57,5
54	0,5484 97 5	0,9545 34	52	13263 169	1716 24	52	3876 45	4589 56,5
56	0,5297 93,5	0,9099 31	54	12925 164,5	1668 23 5	54	3786 44,5	4476 54,5
58	0,5120 88,5	0,8683 28	56	12596 160	1621 22,5	56	3697 43	4367 53,5
0,60	+ 0,4950 85	+ 0,8294 + 25	58	12276 155	1576 22	58	3611 42	4260 52
62	0,4788 — 81	0,7931 23	1,60	11966 — 151 5	15319 — 212	2,60	3527 — 41	4156 — 50,5
64	0,4632 78	0,7590 21	62	11663 146,5	14895 205	62	3445 40	4055 49 5
66	0,4484 74	0,7270 19	64	11370 143	14485 199	64	3365 39,5	3956 48
68	0,4342 71	0,6970 17	66	11084 139	14087 192,5	66	3286 38	3860 46 5
0,70	+ 0,4205 68,5	+ 0,6686 + 16	68	10806 135	13702 187	68	3210 37	3767 45 5
72	0,4074 — 65 5	0,6419 — 133,5	1,70	10536 — 131,5	13328 — 180 5	2,70	3136 — 36,5	3676 — 44 5
74	0,3948 63	0,6166 126,5	72	10273 128	12967 175 5	72	3063 35 5	3587 43 5
76	0,3827 60,5	0,5927 119,5	74	10017 124,5	12616 170	74	2992 34 5	3500 42
78	0,3711 58	0,5701 113	76	9768 121	12276 165	76	2923 33 5	3416 41
0,80	+ 0,3599 56	+ 0,5486 107 5	78	9526 118	11946 160	78	2856 33	3334 40
82	0,3491 — 54	0,5282 — 102	1,80	9290 — 114,5	11626 — 155	2,80	2790 — 32 5	3254 — 39
84	0,3388 51,5	0,5089 96,5	82	9061 111 5	11316 150 5	82	2725 31	3176 38
86	0,3288 50	0,4904 92,5	84	8838 109	11015 146	84	2663 31	3100 37
88	0,3192 48	0,4729 87,5	86	8620 105 5	10723 142	86	2601 29 5	3026 36 5
0,90	+ 0,3099 46 5	+ 0,4562 83,5	88	8409 103	10439 137,5	88	2542 29 5	2953 35
92	0,3009 — 45	0,4402 — 80	1,90	8203 — 100 5	10164 — 133,5	2,90	2483 — 28 5	2883 — 34 5
94	0,2922 43,5	0,4250 76	92	8002 97 5	9987 129 5	92	2426 27 5	2814 33 5
96	0,2839 41 5	0,4104 73	94	7807 95 5	9963 126	94	2371 27 5	2747 32,5
98	0,2758 40 5	0,3965 69 5	96	7616 92 5	9938 122	96	2316 26 5	2682 32
1,00	+ 0,2680 39	+ 0,3832 66,5	98	7431 90	9912 119	98	2263 25 5	2618 31
			2,00	0,	0,	3,00	0,0	0,0



Продолжение табл. 55

$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
	$0,0$	$0,0$		$10^{-2} x 0,$	$10^{-2} x 0,$		$10^{-2} x 0,$	$10^{-2} x 0,$
3,00	2212 — 25,5	2556 — 30	4,00	7104 — 78,5	7947 — 89,5	5,00	2350 — 25,5	2575 — 28,5
02	2161 24,5	2496 29,5	02	6947 76,5	7768 88	02	2299 25	2518 27,5
04	2112 24	2437 29	04	6794 75	7592 85,5	04	2249 24,5	2463 27
06	2064 23,5	2379 28	06	6644 73,5	7421 84	06	2200 23,5	2409 26,5
08	2017 23	2323 27	08	6497 72	7253 81,5	08	2153 23,5	2356 26
3,10	1971 — 22,5	2269 — 27	4,10	6353 — 70	7090 — 80	5,10	2106 — 22,5	2304 — 25,5
12	1926 22	2215 26	12	6213 68,5	6930 78	12	2061 22,5	2253 24,5
14	1882 21,5	2163 25,5	14	6076 67	6774 76,5	14	2016 22	2204 24
16	1839 20,5	2112 24,5	16	5942 65,5	6621 74,5	16	1972 21	2156 24
18	1798 20,5	2063 24,5	18	5811 64	6472 72,5	18	1930 21	2108 23
3,20	17568 — 199,5	2014 — 23,5	4,20	5683 — 62,5	6327 — 71	5,20	1888 — 20,5	2062 — 22,5
22	17169 194	1967 23	22	5558 61	6185 69,5	22	1847 20	2017 22
24	16781 190	1921 22,5	24	5436 60	6046 68	24	1807 19,5	1973 21,5
26	16401 185,5	1876 21,5	26	5316 58	5910 66	26	1768 19	1930 21,5
28	16030 181	1833 21,5	28	5200 57,5	5778 65	28	1730 18,5	1887 20,5
3,30	15668 — 177	17900 — 208,5	4,30	5085 — 55,5	5648 — 63	5,30	16928 — 182,5	1846 — 20
32	15314 173	17483 203	32	4974 55	5522 62	32	16563 178,5	1806 20
34	14968 168,5	17077 198,5	34	4864 53	5398 60,5	34	16206 174,5	1766 19
36	14631 165	16680 193,5	36	4758 52,5	5277 59	36	15857 171	1728 19
38	14301 161	16293 189	38	4653 51	5159 57,5	38	15515 167	1690 18,5
3,40	13979 — 157,5	15915 — 184,5	4,40	4551 — 49,5	5044 — 56,5	5,40	15181 — 163,5	16531 — 180,5
42	13664 153,5	15546 180	42	4452 49	4931 55	42	14854 160	16170 176,5
44	13357 150	15186 175,5	44	4354 47,5	4821 53,5	44	14534 156,5	15817 172,5
46	13057 146,5	14835 171	46	4259 47	4714 52,5	46	14221 153	15472 168,5
48	12764 143,5	14493 167,5	48	4165 45,5	4609 51,5	48	13915 150	15135 165
3,50	12477 — 140	14158 — 163	4,50	4074 — 44,5	4506 — 50	5,50	13615 — 146	14805 — 161
52	12197 136,5	13832 159,5	52	3985 43,5	4406 49	52	13323 143,5	14483 158
54	11924 133,5	13513 155,5	54	3898 42,5	4308 48	54	13036 140	14167 154
56	11657 130,5	13202 152	56	3813 41,5	4212 47	56	12756 137	13859 151
58	11396 127,5	12898 148	58	3730 41	4118 45,5	58	12482 134	13557 147,5
3,60	11141 — 125	12602 — 144,5	4,60	3648 — 40	4027 — 45	5,60	12214 — 131,5	13262 — 144
62	10891 121,5	12313 141,5	62	3568 38,5	3937 43,5	62	11951 128	12974 141
64	10648 119	12030 138	64	3491 38,5	3850 43	64	11695 126	12692 138
66	10410 116	11754 134,5	66	3414 37	3764 41,5	66	11443 122,5	12416 135
68	10178 113,5	11485 131,5	68	3340 36,5	3681 41	68	11198 120	12146 132
3,70	09951 — 111	11222 — 128	4,70	3267 — 35,5	3599 — 39,5	5,70	10958 — 117,5	11882 — 128,5
72	09729 108,5	10966 125,5	72	3196 35	3520 39	72	10723 115	11625 126,5
74	09512 106	10715 122	74	3126 34	3442 38,5	74	10493 112,5	11372 123
76	09300 103,5	10471 119,5	76	3058 33	3365 37	76	10268 110,5	11126 121
78	09093 101	10232 116,5	78	2992 32,5	3291 36,5	78	10047 107,5	10884 118
3,80	08891 — 99	09999 — 114	4,80	2927 — 32	3218 — 35,5	5,80	09832 — 105	10648 — 115,5
82	08693 96,5	09771 111,5	82	2863 31	3147 34,5	82	09622 103,5	10417 112,5
84	08500 94,5	09548 108,5	84	2801 30,5	3078 34	84	09415 100,5	10192 110,5
86	08311 92	09331 106	86	2740 30	3010 33,5	86	09214 98,5	09971 108
88	08127 90,5	09119 103,5	88	2680 29	2943 32,5	88	09017 96,5	09755 105,5
3,90	07946 — 88	08912 — 101	4,90	2622 — 28,5	2878 — 31,5	5,90	08824 — 94,5	09544 — 103,5
92	07770 86	08710 99	92	2565 27,5	2815 31	92	08635 92,5	09337 101
94	07598 84	08512 96	94	2510 27,5	2753 30,5	94	08450 90,5	09135 98,5
96	07430 82,5	08320 94,5	96	2455 26,5	2692 29,5	96	08269 88	08938 96,5
98	07265 80,5	08131 92	98	2402 26	2633 29	98	08093 86,5	08745 94,5
4,00	07104	07947	5,00	2350	2575	6,00	07920	08556
	$0,0$	$0,0$		$10^{-2} x 0,$	$10^{-2} x 0,$		$10^{-2} x 0,$	$10^{-2} x 0,$

Продолжение табл. 55

$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
6,00	$10^{-3} \times 0,$ 7920 — 85	$10^{-3} \times 0,$ 8556 — 92,5	7,00	$10^{-3} \times 0,$ 2704 — 28,5	$10^{-3} \times 0,$ 2891 — 30,5	8,00	$10^{-4} \times 0,$ 9325 — 98	$10^{-4} \times 0,$ 9891 — 104,5
02	7750 — 82,5	8371 — 90,5	02	2647 — 28	2830 — 30,5	02	9129 — 96	9682 — 102
04	7585 — 81	8190 — 88,5	04	2591 — 27,5	2769 — 29,5	04	8937 — 93,5	9478 — 100,5
06	7423 — 79,5	8013 — 86,5	06	2536 — 26,5	2710 — 28,5	06	8750 — 92	9277 — 97,5
08	7264 — 77,5	7840 — 84,5	08	2483 — 26,5	2653 — 28,5	08	8566 — 90	9082 — 96
6,10	7109 — 76	7671 — 83	7,10	2430 — 25,5	2596 — 27,5	8,10	8386 — 87,5	8890 — 94
12	6957 — 74	7505 — 80,5	12	2379 — 25	2541 — 27	12	8211 — 86,5	8702 — 91,5
14	6809 — 73	7344 — 79,5	14	2329 — 25	2487 — 26,5	14	8038 — 84	8519 — 90
16	6663 — 71	7185 — 77,5	16	2279 — 24	2434 — 26	16	7870 — 82,5	8339 — 88
18	6521 — 69,5	7030 — 75,5	18	2231 — 23,5	2382 — 25,5	18	7705 — 81	8163 — 86
6,20	6382 — 68	6879 — 74	7,20	2184 — 23	2331 — 24,5	8,20	7543 — 79	7991 — 84,5
22	6246 — 66,5	6731 — 72,5	22	2138 — 22,5	2282 — 24,5	22	7385 — 77,5	7822 — 82,5
24	6113 — 65	6586 — 71	24	2093 — 22	2233 — 24	24	7230 — 75,5	7657 — 80,5
26	5983 — 64	6444 — 69,5	26	2049 — 22	2185 — 23	26	7079 — 74,5	7496 — 79
28	5855 — 62,5	6305 — 67,5	28	2005 — 21	2139 — 23	28	6930 — 72,5	7338 — 77,5
6,30	5730 — 61	6170 — 66,5	7,30	1963 — 20,5	2093 — 22	8,30	6785 — 71	7183 — 75,5
32	5608 — 59,5	6037 — 65	32	1922 — 20,5	2049 — 22	32	6643 — 69,5	7032 — 74,5
34	5489 — 58,5	5907 — 63,5	34	1881 — 20	2005 — 21	34	6504 — 68	6883 — 72,5
36	5372 — 57	5780 — 62	36	1841 — 19	1963 — 21	36	6368 — 67	6738 — 71
38	5258 — 56	5656 — 61	38	1803 — 19	1921 — 20,5	38	6234 — 65	6596 — 69
6,40	5146 — 55	5534 — 59,5	7,40	17646 — 186	1880 — 20	8,40	6104 — 64	6458 — 68
42	5036 — 53,5	5415 — 58	42	17274 — 182	1840 — 19,5	42	5976 — 62,5	6322 — 67
44	4929 — 52,5	5299 — 57	44	16910 — 178,5	1801 — 19	44	5851 — 61	6188 — 65
46	4824 — 51	5185 — 55,5	46	16553 — 174	1763 — 18,5	46	5729 — 60	6058 — 63,5
48	4722 — 50,5	5074 — 54,5	48	16205 — 171	1726 — 18,5	48	5609 — 59	5931 — 62,5
6,50	4621 — 49	4965 — 53,5	7,50	15863 — 167	16889 — 179	8,50	5491 — 57,5	5806 — 61
52	4523 — 48	4858 — 52	52	15529 — 163,5	16531 — 175,5	52	5376 — 56	5684 — 60
54	4427 — 47	4754 — 51	54	15202 — 160	16180 — 171,5	54	5264 — 55	5564 — 58,5
56	4333 — 46	4652 — 49,5	56	14882 — 157	15837 — 168	56	5154 — 54	5447 — 57,5
58	4241 — 45	4553 — 49	58	14568 — 153	15501 — 166,5	58	5046 — 52,5	5332 — 56
6,60	4151 — 44	4455 — 48	7,60	14262 — 150,5	15172 — 160,5	8,60	4941 — 52	5220 — 55
62	4063 — 43	4359 — 46,5	62	13961 — 146,5	14851 — 157,5	62	4837 — 50,5	5110 — 53,5
64	3977 — 42,5	4266 — 45,5	64	13668 — 144	14536 — 154	64	4736 — 49,5	5003 — 52,5
66	3892 — 41	4175 — 45	66	13380 — 141	14228 — 151	66	4637 — 48,5	4898 — 51,5
68	3810 — 40,5	4085 — 43,5	68	13098 — 137,5	13926 — 147,5	68	4540 — 47,5	4795 — 50,5
6,70	3729 — 39,5	3998 — 43	7,70	12823 — 135	13631 — 144	8,70	4445 — 46,5	4694 — 49
72	3650 — 39	3912 — 41,5	72	12553 — 132	13343 — 141,5	72	4352 — 45,5	4596 — 48,5
74	3572 — 38	3829 — 41	74	12289 — 129	13060 — 138	74	4261 — 44,5	4499 — 47,5
76	3496 — 37	3747 — 40	76	12031 — 126,5	12784 — 135,5	76	4172 — 43,5	4404 — 46
78	3422 — 36	3667 — 39,5	78	11778 — 124	12513 — 132,5	78	4085 — 42,5	4312 — 45,5
6,80	3350 — 35,5	3588 — 38,5	7,80	11530 — 121	12248 — 129,5	8,80	4000 — 42	4221 — 44
82	3279 — 35	3511 — 37,5	82	11288 — 119	11989 — 127	82	3916 — 40,5	4133 — 43,5
84	3209 — 34	3436 — 36,5	84	11050 — 116	11735 — 124	84	3835 — 40	4046 — 42,5
86	3141 — 33	3363 — 36	86	10818 — 113,5	11487 — 121,5	86	3755 — 39,5	3961 — 41,5
88	3075 — 32,5	3291 — 35	88	10591 — 111,5	11244 — 119	88	3676 — 38,5	3878 — 40,5
6,90	3010 — 32	3221 — 34,5	7,90	10368 — 108,5	11006 — 116,5	8,90	3599 — 37,5	3797 — 40
92	2946 — 31	3152 — 33,5	92	10151 — 106,5	10773 — 113,5	92	3524 — 36,5	3717 — 39
94	2884 — 30,5	3085 — 33	94	9938 — 104,5	10546 — 111,5	94	3451 — 36	3639 — 38
96	2823 — 30	3019 — 32,5	96	9729 — 102	10323 — 109	96	3379 — 35,5	3563 — 37,5
98	2763 — 29,5	2954 — 31,5	98	9525 — 100	10105 — 107	98	3308 — 34,5	3488 — 36,5
7,00	2704 — $10^{-3} \times 0,$	2891 — $10^{-3} \times 0,$	8,00	9325 — $10^{-3} \times 0,$	9891 — $10^{-4} \times 0,$	9,00	3239 — $10^{-4} \times 0,$	3415 — $10^{-4} \times 0,$

Продолжение табл. 55

$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
$10^{-4} x 0.$	$10^{-4} x 0.$	$10^{-4} x 0.$	$10^{-4} x 0.$	$10^{-4} x 0.$	$10^{-4} x 0.$	$10^{-5} x 0.$	$10^{-5} x 0.$	$10^{-5} x 0.$
5,00	3239 — 33,5	3415 — 36	10,00	11319 — 117,5	11872 — 123,5	11,00	3974 — 41	4151 — 43
02	3172 33,5	3343 35	02	11084 115	11625 121,5	02	3892 40	4065 42
04	3105 32	3273 34,5	04	10854 112,5	11382 118,5	04	3812 39,5	3981 41,5
06	3041 32	3204 33,5	06	10629 110,5	11145 116	06	3733 38,5	3898 40,5
08	2977 31	3137 33	08	10408 108	10913 114	08	3656 38	3817 39,5
9,10	2915 — 30,5	3071 — 32	10,10	10192 — 105,5	10685 — 111	11,10	3580 — 37	3738 — 38,5
12	2854 29,5	3007 31,5	12	09981 103,5	10463 109	12	3506 36	3661 38
14	2795 29	2944 31	14	09774 101,5	10245 107	14	3434 35,5	3585 37,5
16	2737 28,5	2882 30	16	09571 99,5	10031 104,5	16	3363 35	3510 36
18	2680 28	2822 29,5	18	09372 97	09822 102	18	3293 34	3438 36
9,20	2624 — 27,5	2763 — 29	10,20	09178 — 95	09618 — 100	11,20	3225 — 33	3366 — 34,5
22	2569 26,5	2705 28,5	22	08988 93,5	09418 98,5	22	3159 32,5	3297 34,5
24	2516 26,5	2648 27,5	24	08801 91	09221 96	24	3094 32	3228 33,5
26	2463 25,5	2593 27	26	08619 89,5	09029 93,5	26	3030 31,5	3161 32,5
28	2412 25	2539 27	28	08440 87,5	08842 92,5	28	2967 30,5	3096 32,1
9,30	2362 — 25	2485 — 26	10,30	08265 — 85,5	08657 — 90	11,30	2906 — 30	3032 — 31,5
32	2312 24	2433 25	32	08094 84	08477 88	32	2846 29,5	2969 31
34	2264 23,5	2383 25	34	07926 82	08301 86,5	34	2787 29	2907 30
36	2217 23	2333 24,5	36	07762 80,5	08128 84,5	36	2729 28	2847 29,5
38	2171 22,5	2284 24	38	07601 79	07959 83	38	2673 27,5	2788 29
9,40	2126 — 22,5	2236 — 23,5	10,40	07443 — 77	07793 — 81	11,40	2618 — 27	2730 — 28
42	2081 21,5	2189 22,5	42	07289 75,5	07631 79,5	42	2564 26,5	2674 27,5
44	2038 21	2144 22,5	44	07138 74	07472 77,5	44	2511 26	2619 27,5
46	1996 21	2099 22	46	06990 72,5	07317 76	46	2459 25,5	2564 26,5
48	1954 20	2055 21,5	48	06845 70,5	07165 74,5	48	2408 24,5	2511 26
9,50	1914 — 20	2012 — 21	10,50	06704 — 69,5	07016 — 73	11,50	2359 — 24,5	2459 — 25,5
52	1874 19,5	1970 20,5	52	06565 68	06870 71,5	52	2310 24	2408 25
54	1835 19	1929 20,5	54	06429 66,5	06727 70	54	2262 23	2358 24
56	1797 19	1888 19,5	56	06296 65,5	06587 68,5	56	2216 23	2310 24
58	1759 18	1849 19,5	58	06165 63,5	06450 67	58	2170 22,5	2262 23,5
9,60	17226 — 179	1810 — 19	10,60	06038 — 62,5	06316 — 65,5	11,60	2125 — 22	2215 — 23
62	16868 175,5	1772 18,5	62	05893 61,5	06185 64,5	62	2081 21,5	2169 22,5
64	16517 171,5	1735 18	64	05790 60	06056 62,5	64	2038 21	2124 22
66	16174 168,5	1699 17,5	66	05670 58,5	05931 62	66	1996 20,5	2080 21,5
68	15837 164,5	1664 17,5	68	05553 57,5	05807 60	68	1955 20	2037 21
9,70	15508 — 161	16289 — 170	10,70	05438 — 56,5	05687 — 59	11,70	1915 — 20	1995 — 20,5
72	15186 158	15949 166,5	72	05325 55	05569 58	72	1875 19	1954 20,5
74	14870 154,5	15616 163	74	05215 54	05453 56,5	74	1837 19	1913 19,5
76	14561 151	15290 159,5	76	05107 52,5	05340 55,5	76	1799 18,5	1874 19,5
78	14259 148,5	14971 156,5	78	05002 52	05229 54,5	78	1762 18,5	1835 19
9,80	13962 — 145	14658 — 153	10,80	04898 — 50,5	05120 — 53	11,80	17255 — 178	17971 — 185,5
82	13672 142	14352 149,5	82	04797 49,5	05014 52	82	16899 174,5	17600 182
84	13388 139	14053 146,5	84	04698 49	04910 51	84	16550 170,5	17236 178,5
86	13110 136	13760 144	86	04600 47,5	04808 50	86	16209 167	16879 174,5
88	12838 133,5	13472 140,5	88	04505 46,5	04708 49	88	15875 163,5	16530 170,5
9,90	12571 — 130,5	13191 — 137,5	10,90	04412 — 45,5	04610 — 47,5	11,90	15548 — 160	16189 — 167,5
92	12310 128	12916 134,5	92	04321 44,5	04515 47	92	15228 157	15854 164
94	12054 125	12647 132	94	04232 44	04421 46	94	14914 153,5	15526 160,5
96	11804 122,5	12383 129	96	04144 43	04329 45	96	14607 150,5	15205 157
98	11559 120	12125 126,5	98	04058 42	04239 44	98	14306 147,5	14891 154
10,00	11319	11872	11,00	03974	04151	12,00	14011	14583

Продолжение табл. 55

$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
12 00	$10^5 \times 0,$ 14011 — 144 5	$10^5 \times 0,$ 14583 — 150 5	13 00	$10^5 \times 0$ 4956 — 51	$10^6 \times 0,$ 5143 — 53	14 00	$10^6 \times 0,$ 17579 — 180	$10^6 \times 0,$ 18197 — 181
02	13722 141	14282 147 5	02	4854 50	5037 52	02	17219 176 5	17823 183
04	13440 138 5	13987 144 5	04	4754 48 5	4933 50 5	04	16866 172 5	17457 179
06	13163 135 5	13698 141 5	06	4657 48	4832 50	06	16521 169 5	17099 175 5
08	12892 133	13415 138 5	08	4561 47	4732 48 5	08	16182 165 5	16748 172
12 10	12626 — 130	13138 — 136	13 10	4467 — 45 5	4635 — 48	14 10	15851 — 162 5	16404 — 168 5
12	12366 127 5	12866 132 5	12	4376 45	4539 46 5	12	15526 159	16067 165
14	12111 124 5	12601 130 5	14	4286 44	4446 46	14	15208 155 5	15737 161 5
16	11862 122	12340 127	16	4198 43	4354 44 5	16	14897 152 5	15414 158
18	11618 119 5	12086 125	18	4112 42 5	4265 44	18	14592 149 5	15098 155
12 20	11379 — 117 5	11836 — 122	13 20	4027 — 41 5	4177 — 43	14 20	14293 — 146 5	14788 — 152
22	11144 114 5	11592 120	22	3944 40 5	4091 42	22	14000 143 5	14484 148 5
24	10915 112 5	11352 117	24	3863 39 5	4007 41 5	24	13713 140	14187 145 5
26	10690 110	11118 115	26	3784 38 5	3924 40	26	13433 137 5	13896 142 5
28	10470 107 5	10888 112	28	3707 38 5	3844 39 5	28	13158 135	13611 140
12 30	10255 — 105 5	10664 — 110 5	13 30	3630 — 37	3765 — 39	14 30	12888 — 132	13331 — 136 5
32	10044 103 5	10443 107 5	32	3556 36 5	3687 38	32	12624 129	13058 134
34	09837 101 5	10228 105 5	34	3483 36	3611 37	34	12366 126 5	12790 131 5
36	09634 99	10017 103 5	36	3411 35	3537 36 5	36	12113 124	12527 128 5
38	09436 97	09810 101	38	3341 34	3464 35 5	38	11865 121 5	12270 125 5
12 40	09242 — 95	09608 — 99 5	13 40	3273 — 33 5	3393 — 35	14 40	11622 — 119	12019 — 123 5
42	09052 93	09409 97	42	3206 33	3323 34	42	11384 116 5	11772 120 5
44	08866 91 5	09215 95	44	3140 32	3255 33 5	44	11151 114	11531 118 5
46	08683 89	09025 93	46	3076 32	3188 33	46	10923 112	11294 116
48	08505 87 5	08839 91	48	3012 30 5	3122 32	48	10699 109 5	11062 113
12 50	08330 — 86	08657 — 89 5	13 50	2951 — 30 5	3058 — 31 5	14 50	10480 — 107	10836 — 111 5
52	08158 84	08478 87 5	52	2890 29 5	2995 30 5	52	10266 105 5	10613 108 5
54	07990 82	08303 85 5	54	2831 29	2934 30 5	54	10055 102 5	10396 107
56	07826 80 5	08132 84	56	2773 28 5	2873 29 5	56	09850 101	10182 104
58	07665 79	07964 82	58	2716 28	2814 29	58	09648 98 5	09974 102 5
12 60	07507 — 77	07800 — 80 5	13 60	2660 — 27	2756 — 28	14 60	09451 — 97	09769 — 100
62	07353 75 5	07639 78 5	62	2606 27	2700 28	62	09257 94 5	09569 98
64	07202 74	07482 77 5	64	2552 26	2644 27	64	09068 93	09373 96
66	07054 72 5	07327 75 5	66	2500 25 5	2590 26 5	66	08882 90 5	09181 96 5
68	06909 71	07176 74	68	2449 25 5	2537 26 5	68	08701 89	08992 92
12 70	06767 — 69 5	07028 — 72 5	13 70	2398 — 24 5	2484 — 25 5	14 70	08523 — 87 5	08808 — 90 5
72	06628 68 5	06883 70 5	72	2349 24	2433 25	72	08348 85	08627 88
74	06491 66 5	06742 69 5	74	2301 23 5	2383 24 5	74	08178 84	08451 87
76	06358 65 5	06603 68 5	76	2254 23	2334 24	76	08010 82	08277 84 5
78	06227 64	06466 66 5	78	2208 23	2286 23 5	78	07846 80	08108 83
12 80	06099 — 62 5	06333 — 65	13 80	2162 — 22	2239 — 23	14 80	07686 — 78 5	07942 — 81 5
82	05974 61 5	06203 64	82	2118 21 5	2193 22 5	82	07529 77	07779 80
84	05854 60	06075 62 5	84	2075 21 5	2148 22 5	84	07375 75 5	07619 78
86	05738 59	05950 61 5	86	2032 21	2104 21 5	86	07224 74	07463 76 5
88	05622 57 5	05827 60	88	1990 20	2061 21	88	07076 72	07310 75
12 90	05498 — 56 5	05707 — 59	13 90	1950 — 20	2019 — 21	14 90	06932 — 71	07160 — 73
92	05385 55 5	05589 57 5	92	1910 19 5	1977 20	92	06790 69 5	07014 72
94	05274 54	05474 56	94	1871 19 5	1937 20	94	06651 68	06870 70 5
96	05166 53	05362 55 5	96	1832 18 5	1897 19 5	96	06515 66 5	06729 69
98	05060 52	05251 54	98	1795 18 5	1858 19	98	06382 65 5	06591 67 5
13 00	$10^5 \times 0,$ 04954	$10^5 \times 0,$ 05143	14 00	$10^6 \times 0,$ 1758	$10^6 \times 0,$ 1820	15 00	$10^6 \times 0,$ 06251	$10^6 \times 0,$ 06456

Продолжение табл. 55

$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$	$x$	$\frac{2}{\pi} K_0(x)$	$\frac{2}{\pi} K_1(x)$
15 00	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$	15 40	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$	15 80	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$
02	6251 — 63 5	6456 — 66	42	4136 — 42	4269 — 44	82	2738 — 28	2823 — 28 5
04	6124 63	6324 64 5	44	4052 41 5	4181 42 5	84	2682 27 5	2766 28 5
06	5998 61	6195 63 5	46	3969 40 5	4096 42	86	2627 26 5	2709 27 5
08	5876 60	6068 62 5	48	3888 39 5	4012 41	88	2574 26 5	2654 27 5
10 10	5756 59	5943 60 5	50	3809 39	3930 40 5	90	2521 25 5	2599 26 5
12	5638 — 57 5	5822 — 59 5	52	3731 — 38	3849 — 39	92	2470 — 25 5	2546 — 26
14	5523 56 5	5703 58 5	54	3655 37 5	3771 38 5	94	2419 24 5	2494 25 5
16	5410 55 5	5586 57 5	56	3580 36 5	3694 38	96	2370 24	2443 25
18	5299 54	5471 56	58	3507 36	3618 37	98	2322 24	2393 24 5
20	5191 53	5359 54 5	60	3435 35	3544 36 5	100	2274 23	2344 24
22	5085 — 52	5250 — 54	62	3365 — 34 5	3471 — 35 5	102	2228	2296
24	4981 51	5142 52 5	64	3296 33 5	3400 34 5	104	2184	2254
26	4879 50	5037 51 5	66	3229 33	3331 34	106	2142	2212
28	4779 48 5	4934 50 5	68	3163 32	3263 33 5	108	2102	2170
30	4682 48	4833 49 5	70	3099 32	3196 32 5	110	2064	2128
32	4586 — 47	4734 — 48 5	72	3035 — 31	3131 — 32	112	2028	2086
34	4492 45 5	4637 47 5	74	2973 30	3067 31 5	114	1994	2044
36	4401 45	4542 46 5	76	2913 30	3004 31	116	1962	2002
38	4311 44	4449 45 5	78	2853 29	2942 30	118	1932	1960
40	4223 43 5	4358 44 5	80	2795 28 5	2882 29 5	120	1904	1918
42	4136 — 43	4269 — 44	82	2738 — 28	2823 — 29	122	1878	1876
44	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$	84	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$	124	$10^{-7} x 0$	$10^{-7} x 0$

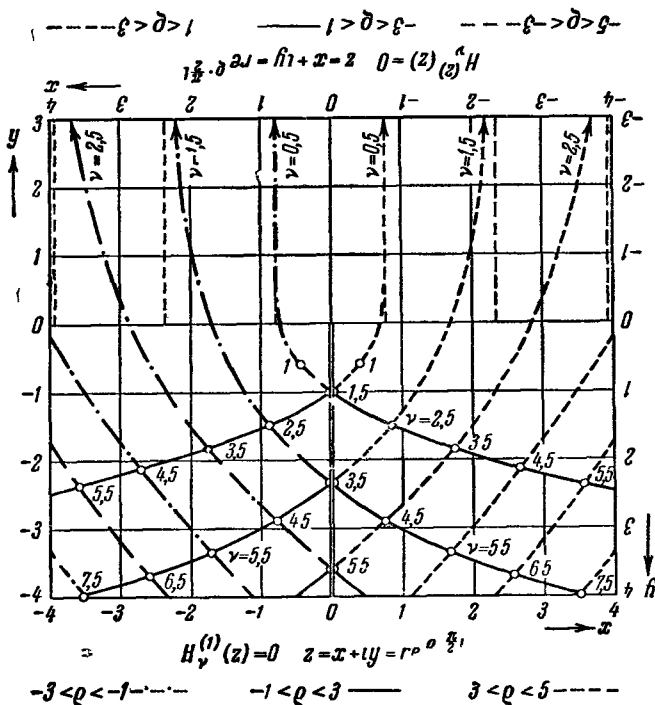


Рис. 150. Нули функций  $H_v^{(1)}(z)$  и  $H_v^{(2)}(z)$

Таблица 56. Модифицированные функции Бесселя  $I_\nu(x)$  и  $\frac{2}{\pi} K_\nu(x)$  для  $\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ 

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi x}{2}} J_\nu(ix), \quad \frac{2}{\pi} K_\nu(x) = e^{(\nu+1)\frac{\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(ix)$$

$x$	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{2/3}(x)$	$x$	$I_{1/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{1/3}(x)$	$I_{2/3}(x)$	$\frac{2}{\pi} K_{2/3}(x)$
0,0	0,0000	$\infty$	0,00000	$\infty$	5,0	26,898	0,00	25,902	0,00
1	0,4133	1,8461	0,15057	3,026	1	29,423	23739	28,359	24471
2	0,5237	1,2601	0,24009	1,7837	2	32,19	21273	31,05	21926
3	0,6051	0,9607	0,3170	1,2716	3	35,23	19067	34,01	19637
4	0,6747	0,7676	0,3880	0,9681	4	38,56	17093	37,25	17594
0,5	0,7390	0,6296	0,4563	0,7678	5,5	42,21	15325	40,81	15767
6	0,8012	0,5253	0,5237	0,6257	6	46,22	13743	44,72	14132
7	0,8636	0,4434	0,5915	0,5187	7	50,62	12326	49,00	12669
8	0,9276	0,3776	0,6609	0,4354	8	55,45	11057	53,71	11360
9	0,9943	0,3238	0,7326	0,3688	9	60,74	09920	58,87	10187
1,0	1,0646	0,27911	0,8075	0,3148	6,0	66,55	08901	64,54	09137
1	1,1396	0,24167	0,8864	0,27024	6,5	72,93	07988	70,77	08196
2	1,2199	0,21001	0,9701	0,23312	1	79,93	07169	77,60	07354
3	1,3065	0,18306	1,0593	0,20191	2	87,61	06469	85,10	06599
4	1,4000	0,16000	1,1547	0,17547	3	96,04	05778	93,34	05922
1,5	1,5014	0,14016	1,2573	0,15294	4	105,30	05188	102,39	05315
6	1,6115	0,12302	1,3678	0,13364	6,5	115,47	04658	112,33	04771
7	1,7313	0,10818	1,4872	0,11704	6	126,63	04184	123,25	04283
8	1,8617	0,09527	1,6165	0,10270	7	138,89	03758	135,24	03846
9	2,0038	0,08402	1,7567	0,09027	8	152,36	03375	148,41	03454
2,0	2,1588	0,07419	1,9089	0,07947	9	167,15	03032	162,89	03102
1	2,3279	0,06559	2,0745	0,07007	7,0	183,39	027245	178,79	027860
2	2,5124	0,05805	2,2546	0,06185	1	201,23	024481	196,26	025026
3	2,7139	0,05142	2,4509	0,05466	2	220,83	022000	215,45	022483
4	2,9339	0,04559	2,6648	0,04835	3	242,37	019772	236,55	020200
2,5	3,174	0,04045	2,8981	0,04282	4	262,37	017779	260,66	018151
6	3,437	0,03592	3,153	0,03795	7,5	286,03	015974	289,73	016312
7	3,724	0,03192	3,431	0,03366	6	292,02	014360	285,21	014660
8	4,038	0,028380	3,734	0,029877	7	320,6	012910	313,2	013176
9	4,381	0,025249	4,066	0,026540	8	352,0	011608	344,0	011844
3,0	4,756	0,022476	4,429	0,023591	9	386,5	010438	377,8	010647
1	5,166	0,020018	4,826	0,020982	8,0	424,4	009386	415,0	009572
2	5,615	0,017838	5,259	0,018672	1	466,1	008441	455,9	008607
3	6,106	0,015902	5,734	0,016625	2	511,9	007592	500,9	007739
4	6,642	0,014183	6,253	0,014810	3	562,2	006828	550,3	006959
3,5	7,230	0,012654	6,821	0,013200	4	617,6	006142	604,6	006259
6	7,873	0,011295	7,443	0,011770	8,5	678,4	005525	664,4	005629
7	8,577	0,010085	8,124	0,010499	6	745,3	004971	730,1	005063
8	9,347	0,009008	8,869	0,009369	7	818,9	004472	802,3	004554
9	10,190	0,008049	9,686	0,008362	8	899,7	004024	881,8	004097
4,0	11,114	0,007194	10,580	0,007468	9	988,6	003621	969,1	003686
1	12,125	0,006432	11,560	0,006671	9,0	1086,4	003258	1065,3	003316
2	13,233	0,005752	12,633	0,005961	1	1194,0	0029322	1171,0	0029837
3	14,446	0,005145	13,809	0,005329	2	1312,2	0026389	1287,2	0026847
4	15,775	0,004604	15,098	0,004764	3	1442,3	0023751	1415,1	0024159
4,5	17,231	0,004120	16,511	0,004261	4	1585,3	0021377	1555,8	0021741
6	18,827	0,003688	18,060	0,003812	9,5	1742,6	0019242	1710,6	0019566
7	20,576	0,003303	19,759	0,003411	6	1915,7	0017321	1880,8	0017610
8	22,493	0,0029578	21,621	0,003053	7	2106,1	0015593	2068,1	0015851
9	24,594	0,0026495	23,663	0,0027332	8	2315,5	0014038	2274,2	0014268
5,0	26,898	0,0023739	25,902	0,0024474	9	2545,8	0012639	2500,9	0012843
					10,0	2799,2	0011379	2750,4	0011562
							0,00		0,00

Таблица 57. Первые корни  $x_{n,s}$  уравнения  $I_n(x) J'_n(x) - J_n(x) I'_n(x) = 0$

$s$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
1	3,196	4,611	5,906	7,144
2	6,306	7,799	9,197	10,537
3	9,439	10,958	12,402	13,795
4	12,577	14,109	15,579	17,006
5	15,716	17,256	18,744	
6	18,857			

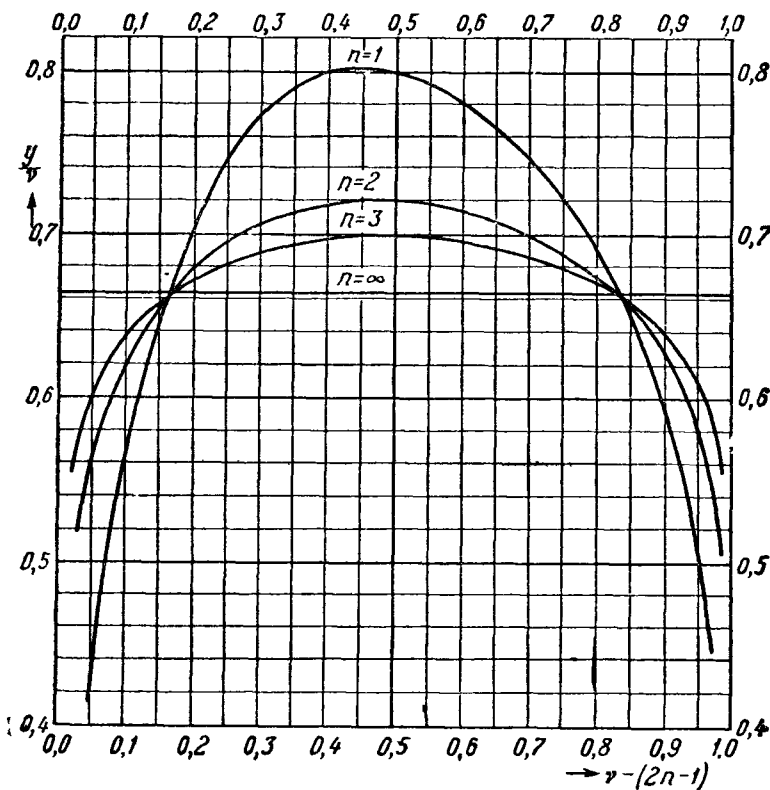
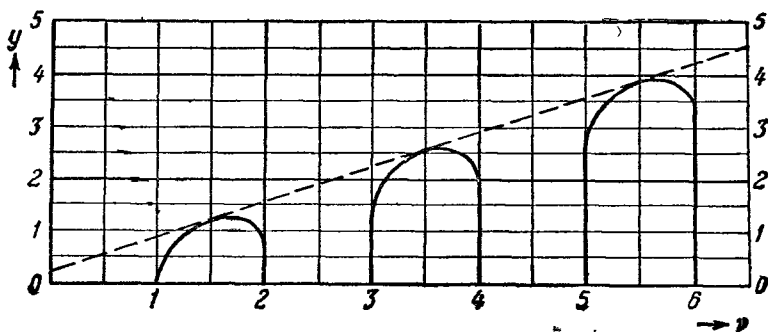


Рис. 151 и 152. Нули  $y_n$  функций  $J_{-\nu}(iy) = e^{-\nu \frac{n}{2}} I_{-\nu}(y)$ .

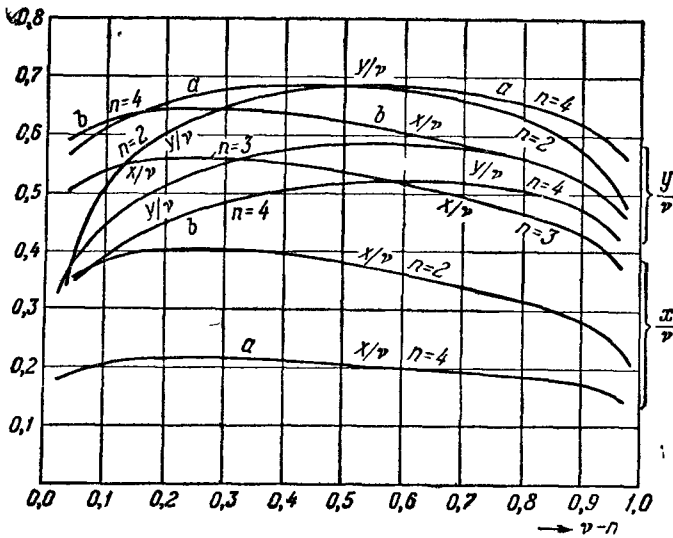
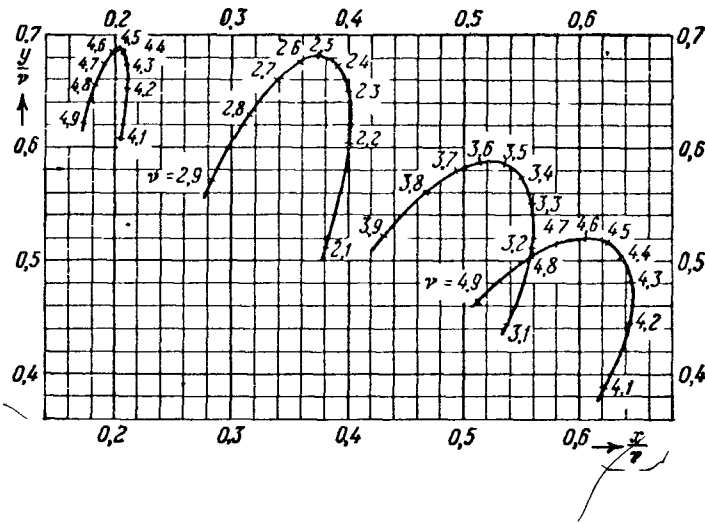


Рис. 153 и 154. Нули  $x_n + iy_n$  функций  $J_{\nu}(x+iy)$ .

### 3. Функции Кельвина

3.1. Повороту на  $135^\circ$  соответствуют функции Бесселя  $Z_{\nu}(e^{\frac{\pi}{4}} z)$ . Они являются решениями дифференциального уравнения

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (iz^2 + \nu^2) w = 0.$$

Исходя из функций  $J_{\nu}(z)$ ,  $H_{\nu}^{(1)}(z)$  и  $H_{\nu}^{(2)}(z)$ , определяют функции Кельвина



СООТНОШЕНИЯМИ

$$\text{ber}_\nu(z) \pm i \text{bei}_\nu(z) = J_\nu(ze^{\pm \frac{3\pi}{4} i}) = e^{\pm \nu \frac{\pi}{2} i} I_\nu(ze^{\pm \frac{\pi}{4} i}),$$

$$\text{her}_\nu(z) + i \text{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4} i}), \quad \text{her}_\nu(z) - i \text{hei}_\nu(z) = H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4} i}),$$

$$\text{ker}_\nu(z) + i \text{kei}_\nu(z) = \frac{\pi i}{2} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{3\pi}{4} i}), \quad \text{ker}_\nu(z) - i \text{kei}_\nu(z) = -\frac{\pi i}{2} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{3\pi}{4} i}),$$

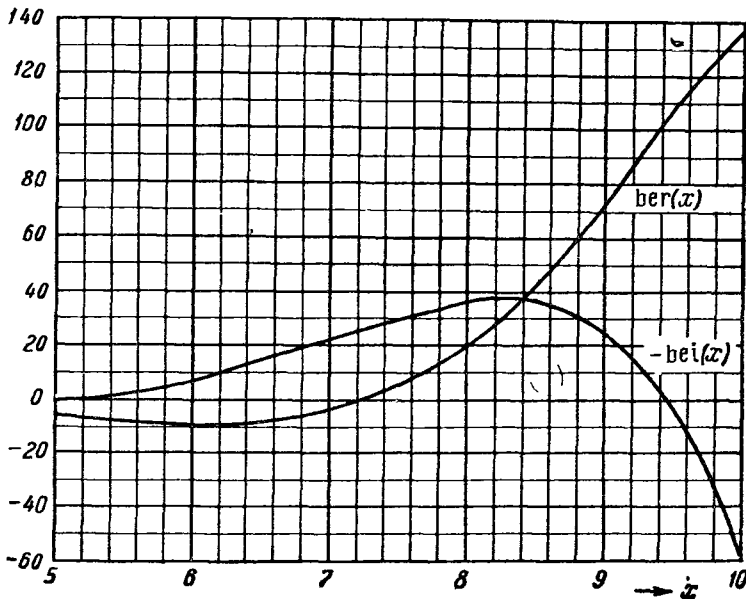
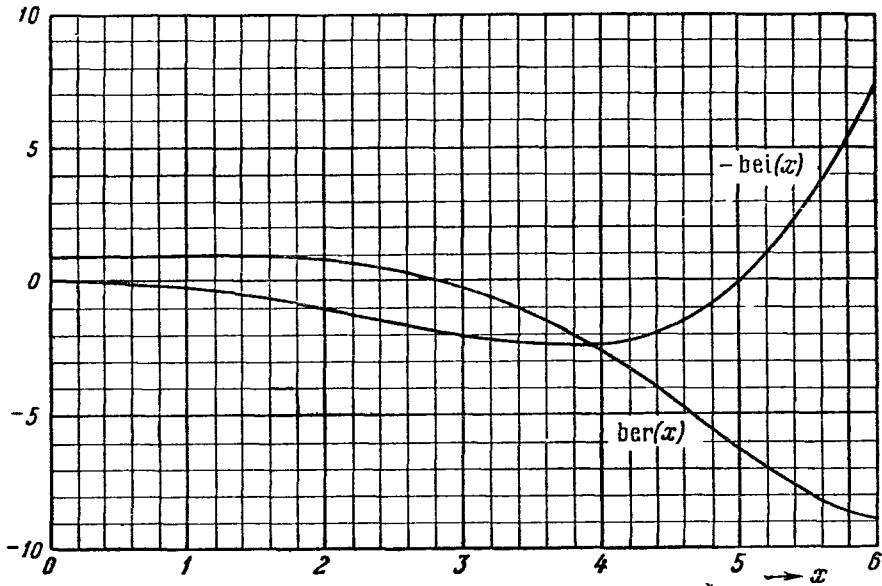


Рис. 155 и 156. Функции Кельвина  $\text{ber}(x)$  и  $\text{bei}(x)$ .

или

$$\ker_\nu(z) \pm i \operatorname{kei}_\nu(z) = e^{\mp \frac{\nu\pi}{2} i} K_\nu(z e^{\pm \frac{\pi}{4} i}),$$

так что

$$\operatorname{ber}_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{kei}_\nu(z), \quad \operatorname{hei}_\nu(z) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{ker}_\nu(z).$$

Для наиболее важного случая  $\nu=0$  индекс у знака функции опускается:  $\operatorname{ber}(z)$ ,  $\operatorname{bei}(z)$ ,  $\operatorname{ker}(z)$ ,  $\operatorname{kei}(z)$ . Разложения  $\operatorname{ber}(z)$ ,  $\operatorname{bei}(z)$  в степенные ряды таковы:

$$\operatorname{ber}(z) = 1 - \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - \dots, \quad \operatorname{bei}(z) = \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Если порядок  $\nu$  действителен и аргумент  $z=x$  принимает действительные положительные значения, то все функции Кельвина действительны

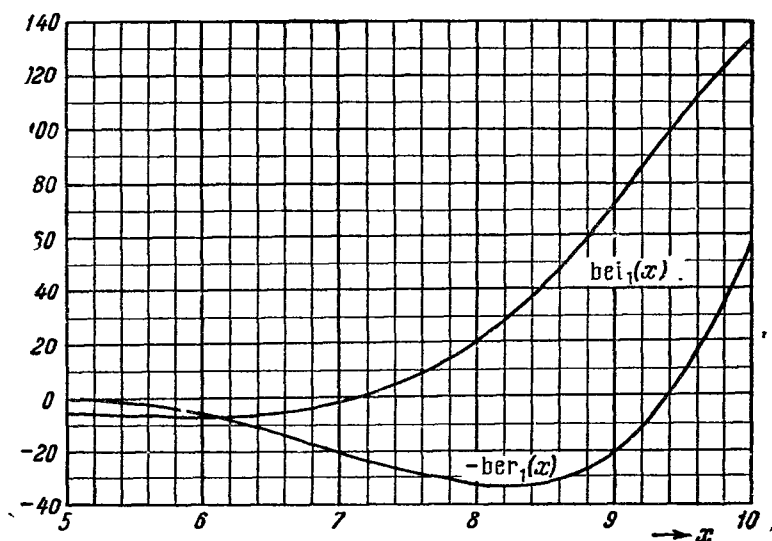
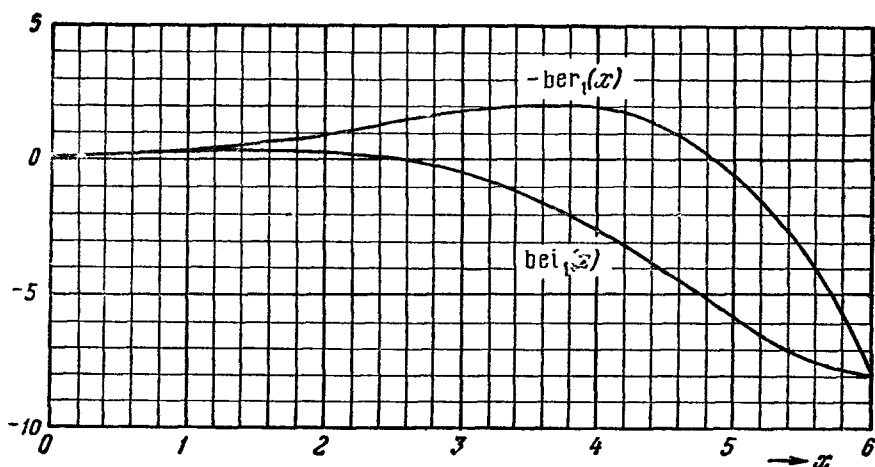


Рис. 157 и 158. Функции Кельвина  $\operatorname{ber}_1(x)$  и  $\operatorname{bei}_1(x)$ .

(рис. 155—162, таблицы 58—62). В окрестности  $x=0$  имеем:

$$\text{ber}(x) \approx 1, \quad \text{bei}(x) \approx \frac{x^2}{4}, \quad \text{ker}(x) \approx -\frac{1}{2}, \quad \text{kei}(x) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{yx}{2},$$

а для  $x \gg 1, x \gg \nu^2$  справедливы представления (выписаны лишь первые приближения):

$$\text{ber}(x) \approx \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{bei}(x) \approx \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right),$$

$$\text{ker}(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{kei}(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right).$$

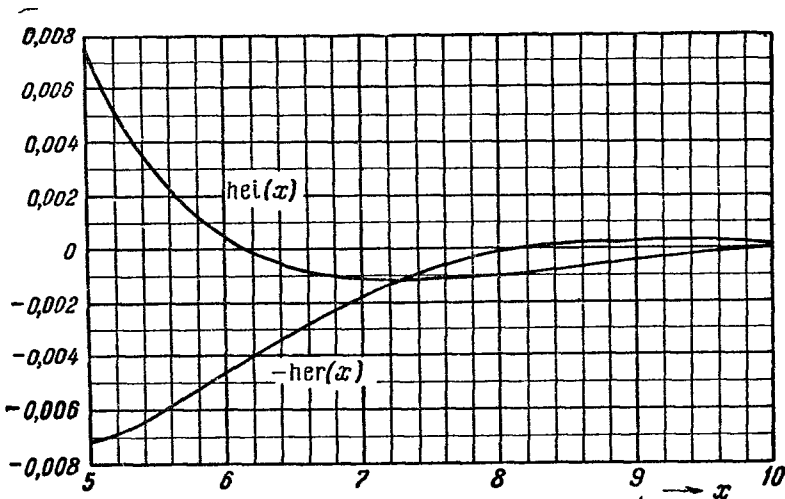
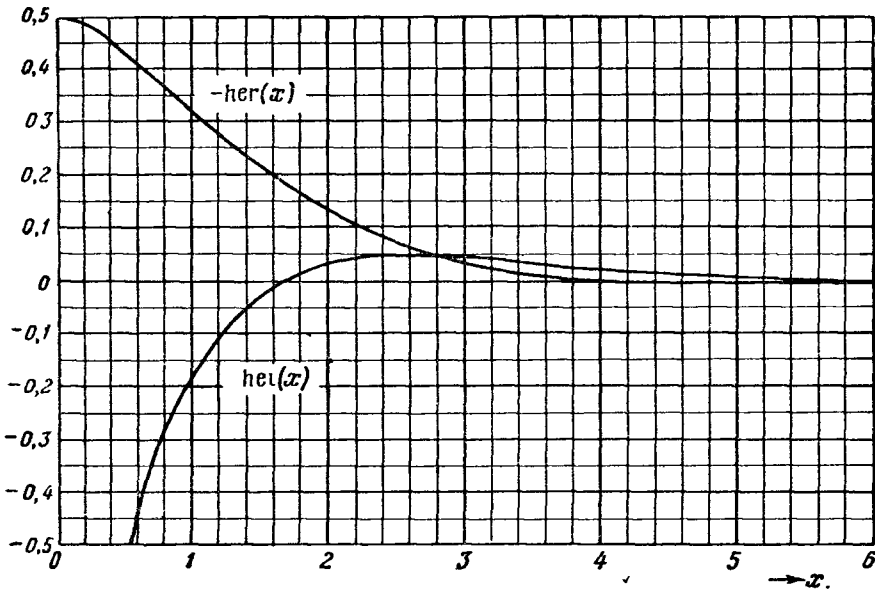
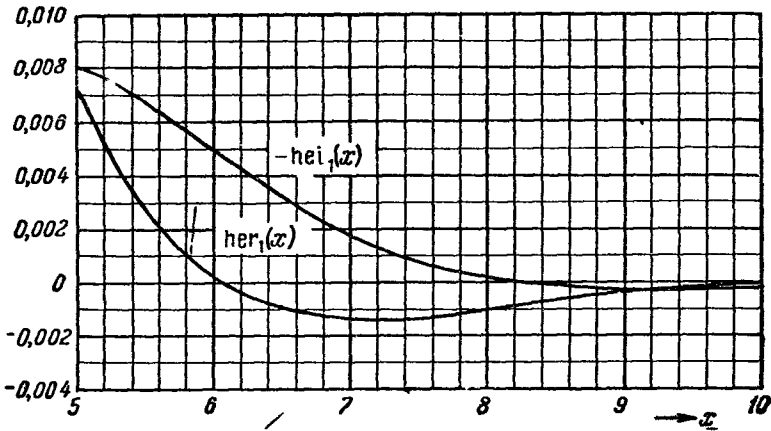
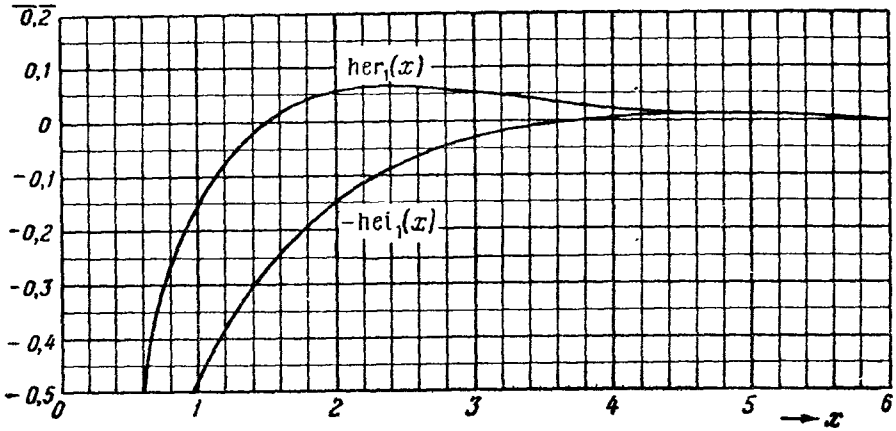


Рис 159 и 160 Функции Кельвина  $\text{ber}(x)$  и  $\text{bei}(x)$ .

Рис. 161 и 162. Функция Кельвина  $\text{ber}_1(x)$  и  $\text{hei}_1(x)$ .

3.2. Дальнейшие представления и свойства функций Кельвина получаются из представлений и свойств функций  $J_\nu(z)$  и  $H_\nu^{(1)}(z)$ .

Правила дифференцирования:

$$\text{ber}'(z) \pm i \text{bei}'(z) = e^{\mp \frac{\pi}{4} i} [\text{ber}_1(z) \pm i \text{bei}_1(z)],$$

$$\text{her}'(z) \pm i \text{hei}'(z) = e^{\mp \frac{\pi}{4} i} [\text{her}_1(z) \pm i \text{hei}_1(z)].$$

Для действительного  $x > 0$  имеем:

$$J_n(x\sqrt{i}) = J_n(xe^{\frac{\pi}{4} i}) = (-1)^n [\text{ber}_n(x) - i \text{bei}_n(x)],$$

$$H_n^{(1)}(x\sqrt{i}) = H_n^{(1)}(xe^{\frac{\pi}{4} i}) = (-1)^{n+1} [\text{her}_n(x) - i \text{hei}_n(x)];$$

в частности,

$$J_0(x\sqrt{i}) = \text{ber}(x) - i \text{bei}(x), \quad H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\text{her}(x) + i \text{hei}(x),$$

$$\frac{d}{dx} [J_0(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i} J_1(x\sqrt{i}) = \text{ber}'(x) - i \text{bei}'(x),$$

$$\frac{d}{dx} [H_0^{(1)}(x\sqrt{i})] = -\sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\text{her}'(x) + i \text{hei}'(x).$$

Часто бывает необходимо знать модуль и аргумент функций Кельвина; тогда пишут:

$$J_\nu(z\sqrt{i}) = b_\nu(z) e^{i\beta_\nu(z)},$$

$$H_\nu^{(1)}(z\sqrt{i}) = h_\nu(z) e^{i\eta_\nu(z)},$$

или

$$\text{ber}_\nu(z) + i \text{bei}_\nu(z) = M_\nu(z) e^{i\theta_\nu(z)},$$

$$\text{ker}_\nu(z) + i \text{kei}_\nu(z) = N_\nu(z) e^{i\phi_\nu(z)}$$

(рис. 163—172, таблицы 63, 64).

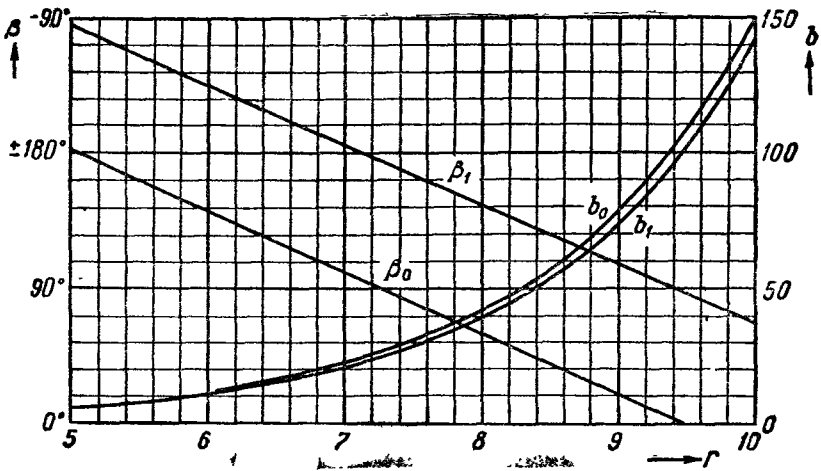
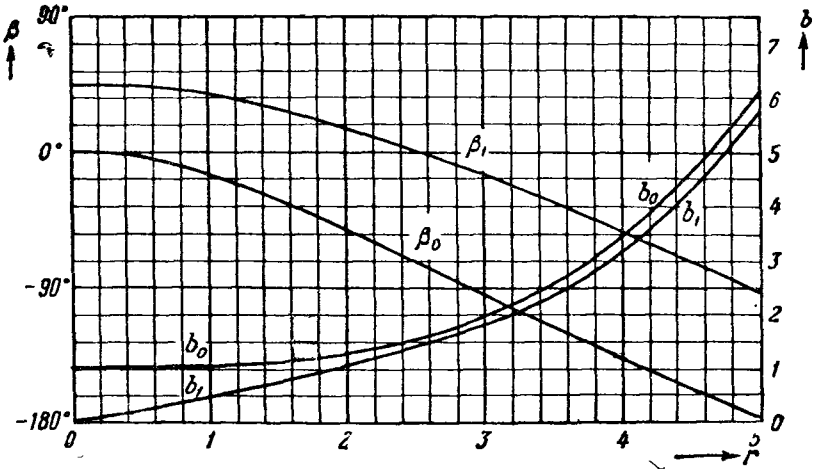


Рис. 163 и 164. Модуль  $b_n$  и аргумент  $\beta_n$  функций  $J_n(r\sqrt{i})$ ,  $n=0, 1$ , как функции  $r$ .

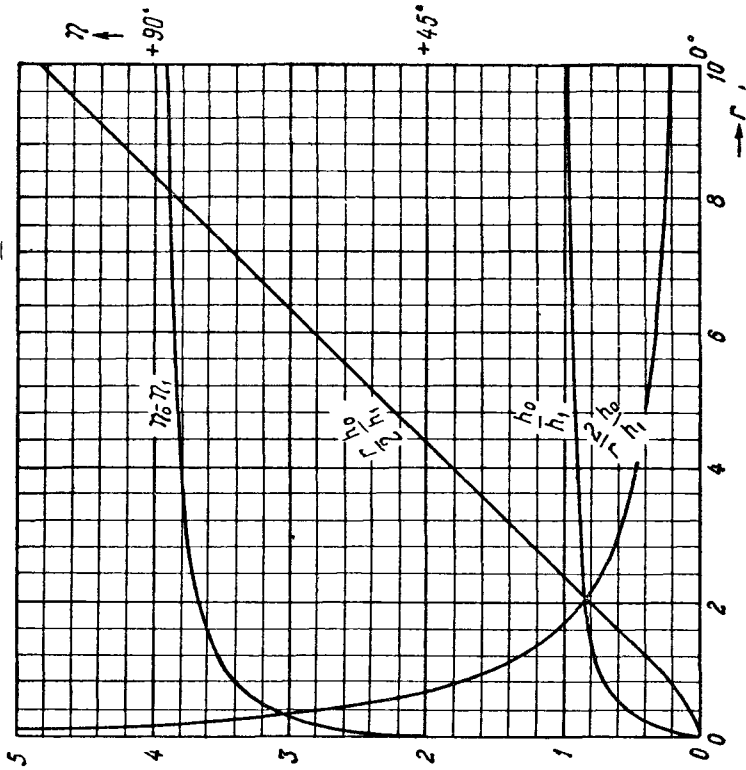


Рис 166. Функция  $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{t})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{t})} = \frac{h_0}{h_1} e^{(\eta_0 - \eta_1)t}$ .

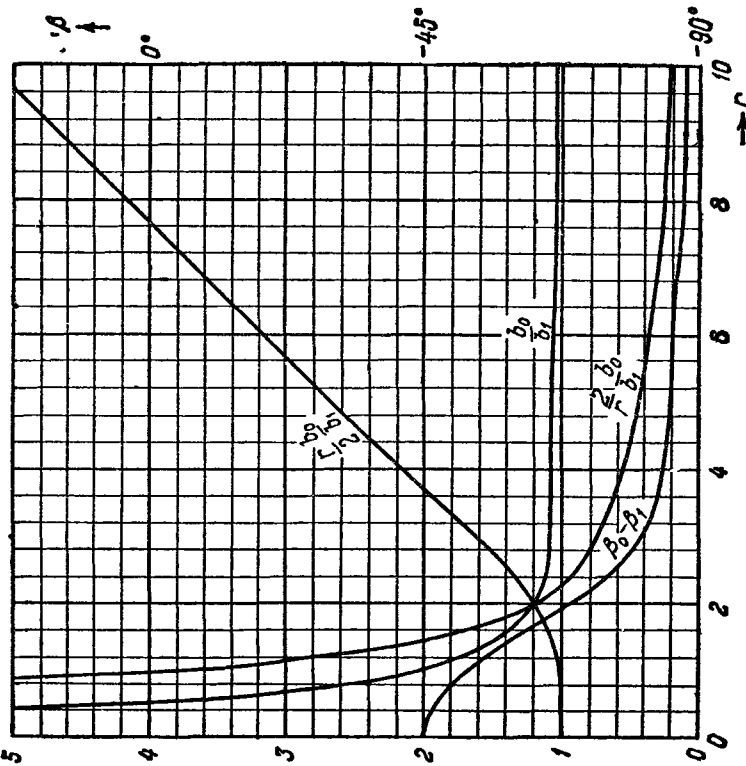


Рис. 165 Функция  $\frac{J_0(r\sqrt{t})}{J_1(r\sqrt{t})} = \frac{b_0}{b_1} e^{(\beta_0 - \beta_1)t}$ .

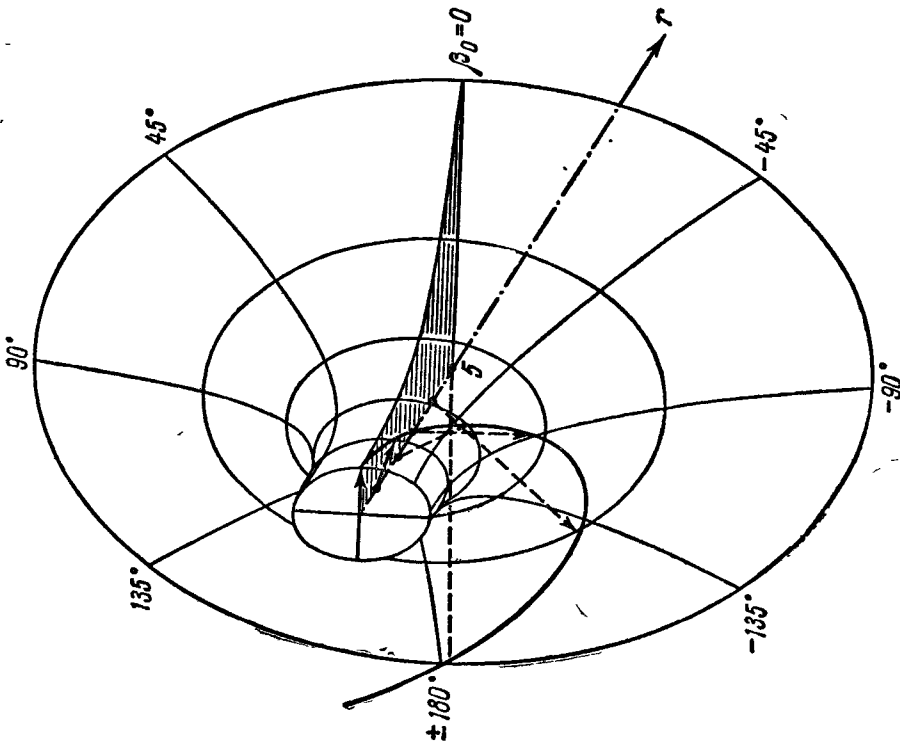


Рис. 167. Векторы  $J_0(\gamma \sqrt{i}) = b_0 e^{\beta_0 i}$  выходят перпендикулярно из оси  $\gamma$ .

Пример: плотность переменного электрического тока в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.

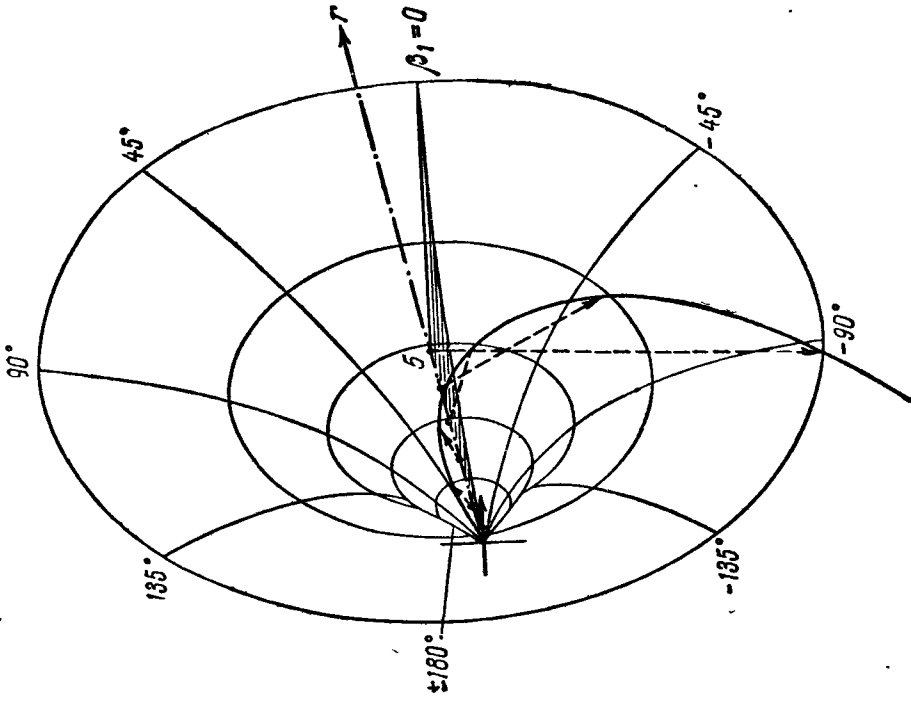


Рис. 168. Векторы  $J_1(\gamma \sqrt{i}) = b_1 e^{\beta_1 i}$  выходят перпендикулярно из оси  $\gamma$ .

Пример: напряжение переменного магнитного поля в круглом проводе на различных расстояниях от оси провода.

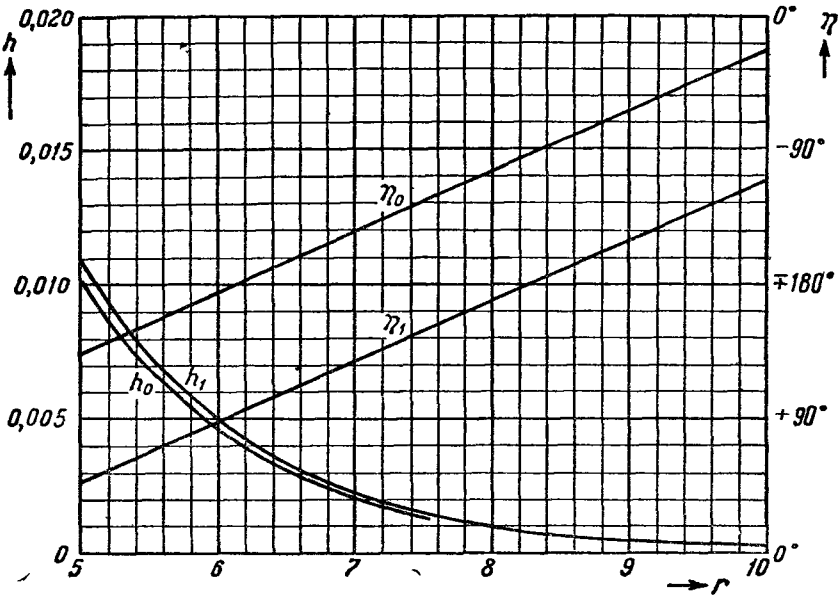
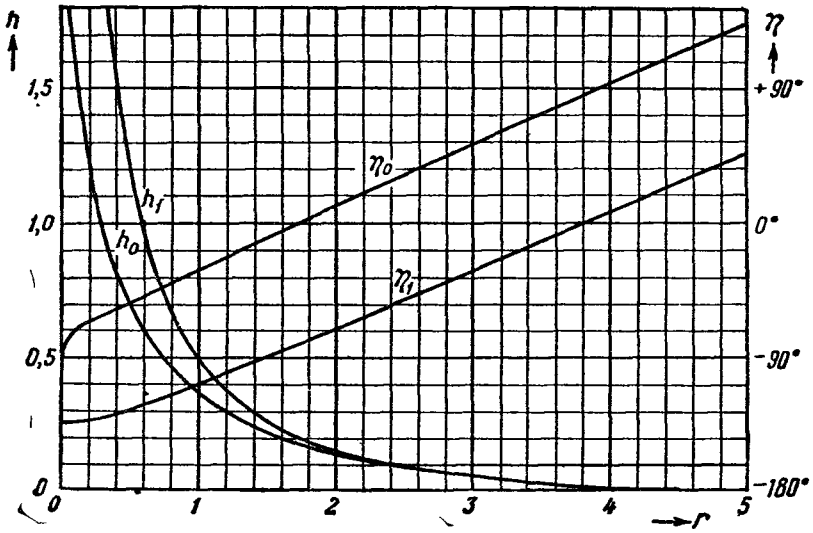


Рис. 169 и 170. Модуль  $h_n$  и аргумент  $\eta_n$  функций  $H_n^{(1)}(r\sqrt{\delta})$ ,  $n=0, 1$ , как функции  $r$ .



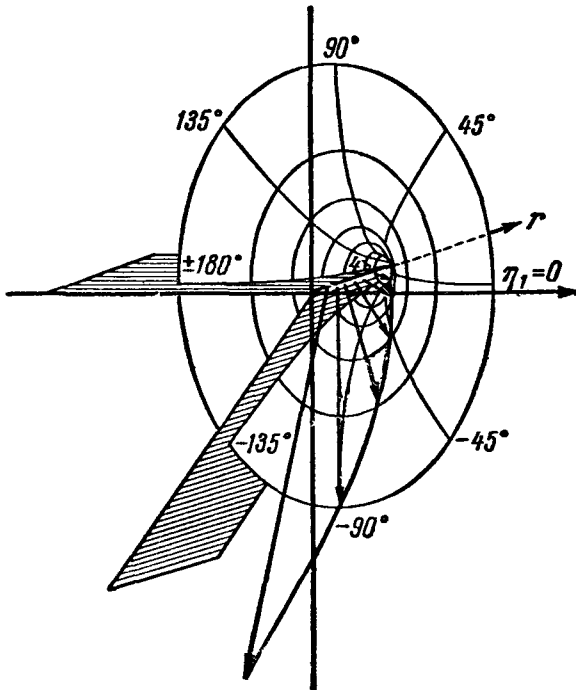
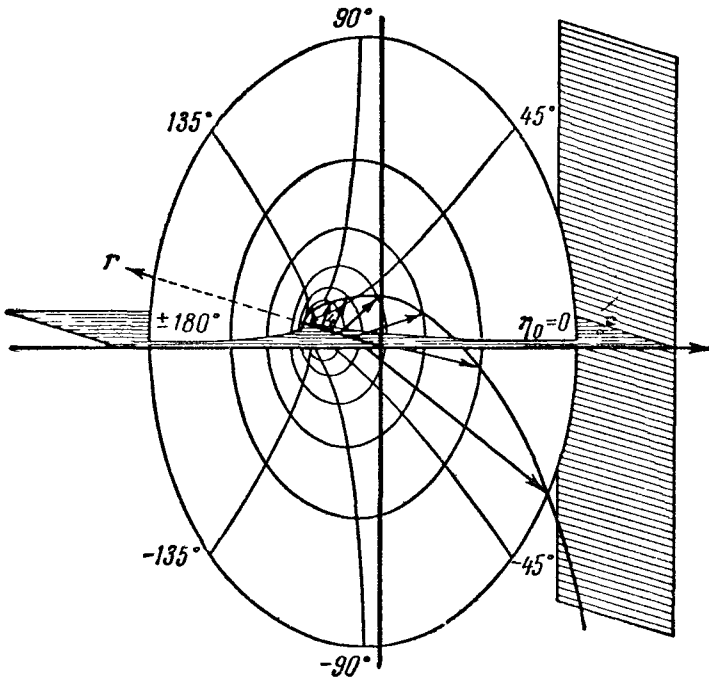


Рис. 171 и 172. Векторы  $H_n^{(1)}(r\sqrt{-i}) = h_n e^{\eta_n t}$ ,  $n=0, 1$ , выходят перпендикулярно из оси  $r$ .

Таблица 58. Функции  $\text{ber}(x)$  и  $\text{bei}(x)$ 

$$\text{ber } x = \text{Re } J_0(x\sqrt{i}), \text{ bei } x = -\text{Im } J_0(x\sqrt{i})$$

$x$	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	$x$	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$	$x$	$\text{ber } x$	$\text{bei } x$
0,00	+ 0.	+ 0.	1,00	+ 0.	+ 0.	2,00	+ 0.	+ 0.
02	0000	00000 + 20	02	9844 - 6,5	2496 + 50	02	7517 - 50	9723 + 92
04	0000	00040 20	04	9831 7	2596 51,5	04	7417 51,5	9907 92,5
06	0000	00090 20	06	9817 7	2699 52	06	7314 53	*0092 91
08	0000	00160 20	08	9803 7,5	2803 53	08	7208 54,5	0278 94
0 10	0000	00250 + 20	10	9788 8,5	2909 54	10	7099 56	0466 94
12	0000	00360 20	12	9771 - 8,5	3017 + 55	12	6987 - 58,5	0654 + 94,5
14	0000	00490 20	14	9754 9	3127 56	14	6871 59	0843 95
16	0000	00640 20	16	9736 9,5	3239 57	16	6753 61	1033 96
18	0000	00810 20	18	9717 10	3353 58	18	6631 62,5	1225 96
0 20	0000	01000 + 20	20	9697 10,5	3469 59	20	6506 66,5	1417 96,5
22	0000	01210 20	22	9676 - 11	3587 + 60	22	6377 - 66	1610 + 96,5
24	*9999	01440 20	24	9654 11,5	3707 60,5	24	6245 68	1803 97,5
26	9999	01690 20	26	9631 12	3828 62	26	6109 69,5	1998 97,5
28	9999	01960 20	28	9607 13	3952 62,5	28	5970 71,5	2193 98
0 30	9999	02250 + 20	30	9581 13,5	4077 63,5	30	5827 73,5	2389 98
32	9998	02560 20	32	9554 - 14	4204 + 66,5	32	5680 - 75	2585 + 98,5
34	9998	02890 20	34	9526 14,5	4333 65,5	34	5530 77	2782 99
36	9997	03240 20	36	9497 15,5	4464 66,5	36	5376 79	2980 99
38	9997	03610 20	38	9466 16	4597 67	38	5218 81	3178 99
0,40	9996	04000 + 20	40	9434 16,5	4731 68	40	5056 83	3376 99,5
42	9995	04410 20	42	9401 - 17,5	4867 + 69	42	4890 - 84,5	3575 + 99,5
44	9994	04840 20	44	9366 18,5	5005 70	44	4721 87	3774 99,5
46	9993	05290 20	46	9329 19	5145 71	46	4547 89	3973 100
48	9992	05759 20	48	9291 19,5	5287 71,5	48	4369 91,5	4173 99,5
0 50	9990 - 0,5	0625 + 24,5	50	9252 20,5	5430 73	50	4186 93	4372 100
52	9989 1	0676 25,5	52	9211 - 21,5	5576 + 73,5	52	4000 - 95,5	4572 + 99,5
54	9987 1	0729 27,5	54	9168 22,5	5723 74	54	3809 97,5	4771 100
56	9985 1,5	0784 28,5	56	9123 23	5871 75,5	56	3614 100	4971 100
58	9982 1	0841 29,5	58	9077 24	6022 76	58	3414 102	5171 99,5
0 60	9980 - 1,5	0900 + 30,5	60	9029 25	6174 76,5	60	3210 104,5	5370 99,5
62	9977 1,5	0961 31,5	62	8979 - 26	6327 + 78	62	3001 - 106,5	5569 + 99
64	9974 2	1024 32,5	64	8927 27	6483 78,5	64	2788 109	5767 99,5
66	9970 1,5	1089 33,5	66	8873 28	6640 79	66	2570 111,5	5966 99
68	9967 2,5	1156 34	68	8817 28,5	6798 80,5	68	2347 114	6164 98,5
0 70	9962 - 2	1224 + 35,5	70	8760 30	6959 80,5	70	2119 116	6361 98
72	9958 2,5	1295 36,5	72	8700 - 31	7120 + 82	72	1887 - 118,5	6557 + 98
74	9953 2,5	1368 37,5	74	8638 32,5	7284 82,5	74	1650 121	6753 98
76	9948 1	1443 38,5	76	8573 33	7449 83	76	1408 123,5	6949 97
78	9942 1	1520 39,5	78	8507 34,5	7615 84	78	1161 126,5	7143 96,5
0 80	9936 - 3,5	1599 + 40,5	80	8438 35,5	7783 85	80	0908 128,5	7336 96,5
82	9929 3,5	1680 41	82	8367 - 36,5	7953 + 85,5	82	0651 - 131	7529 + 95,5
84	9922 3,5	1762 42,5	84	8294 38	8124 86	84	0389 134	7720 95
86	9915 4,5	1847 43,5	86	8218 39	8296 87	86	0121 136,5	7910 94
88	9906 4	1934 44,5	88	8140 40,5	8470 87,5	88	*0152 139	8098 94
0 90	9898 - 5	2023 + 45	90	8059 42	8645 88	90	0430 142	8286 93
92	9888 5	2113 46,5	92	7975 - 43	8821 + 89	92	0714 - 144,5	8472 + 92
94	9878 5,5	2206 47,5	94	7889 44,5	8999 89,5	94	1003 147	8656 91,5
96	9867 5,5	2301 48	96	7800 45,5	9178 90	96	1297 150	8839 90,5
98	9856 6	2397 49,5	98	7709 47	9358 91	98	1597 153	9020 89,5
1,00	9844 + 0.	2496 + 0.	100	7615 49	9540 91,5	100	1903 155,5	9199 88,5
				+ 0.	+ 0.		- 0.	+ 1.

Продолжение табл. 58

x	ber x	ber x	x	ber x	ber x	x	ber x	ber x
3.00	-0,2214	+1, 158,5	4.00	-2,563	+2,2927	5.00	-6,230	+0,116
02	0,2531	161 9551	02	2,626	2,2824	02	6,307	+0,028
04	0,2853	164 9724	04	2,690	2,2711	04	6,383	-0,062
06	0,3181	167 9894	06	2,754	2,2587	06	6,459	0,155
08	0,3515	170 *0063	08	2,819	2,2454	08	6,535	0,250
3.10	-0,3855	-173 0228	4.10	-2,884	+2,2309	5.10	-6,611	-0,347
.12	0,4201	176 0392	12	2,950	2,2154	12	6,686	0,446
14	0,4553	178,5 0552	14	3,017	2,1988	14	6,760	0,547
.16	0,4910	182 0710	16	3,084	2,1811	16	6,834	0,651
18	0,5274	185 0864	18	3,151	2,1622	18	6,908	0,757
3.20	-0,5644	-188 1016	4.20	-3,219	+2,142	5.20	-6,980	-0,866
22	0,6020	190,5 1164	22	3,288	2,121	22	7,053	0,977
24	0,6401	194 1309	24	3,357	2,098	24	7,124	1,090
26	0,6789	197,5 1451	26	3,427	2,075	26	7,195	1,206
28	0,7184	200 1589	28	3,497	2,050	28	7,265	1,324
3.30	-0,7584	-203,5 1723	4.30	-3,568	+2,024	5.30	-7,334	-1,444
32	0,7991	206,5 1854	32	3,639	1,996	32	7,403	1,567
34	0,8404	209,5 1980	34	3,711	1,967	34	7,470	1,693
36	0,8823	212,5 2103	36	3,783	1,937	36	7,537	1,821
38	0,9248	216 2221	38	3,855	1,906	38	7,603	1,951
3.40	-0,968	-218 2334	4.40	-3,928	+1,873	5.40	-7,667	-2,085
42	1,012	22 2444	42	4,002	1,838	42	7,731	2,220
44	1,056	22,5 2548	44	4,075	1,802	44	7,793	2,358
46	1,101	23 2648	46	4,150	1,765	46	7,855	2,499
48	1,147	23,5 2743	48	4,224	1,726	48	7,915	2,643
3.50	-1,194	-23,5 2832	4.50	-4,299	+1,686	5.50	-7,974	-2,789
52	1,241	23,5 2917	52	4,374	1,644	52	8,031	2,938
54	1,288	24,5 2996	54	4,450	1,601	54	8,087	3,089
56	1,337	24,5 3069	56	4,526	1,556	56	8,142	3,243
58	1,386	24,5 3137	58	4,602	1,509	58	8,195	3,400
3.60	-1,435	-25,5 3199	4.60	-4,678	+1,461	5.60	-8,247	-3,560
62	1,486	25,5 3254	62	4,755	1,411	62	8,297	3,722
64	1,537	25,5 3304	64	4,832	1,360	64	8,345	3,887
66	1,588	26 3347	66	4,909	1,306	66	8,392	4,055
68	1,640	26,5 3383	68	4,986	1,251	68	8,436	4,225
3.70	-1,693	-27 3413	4.70	-5,064	+1,195	5.70	-8,479	-4,399
72	1,747	27 3436	72	5,142	1,136	72	8,520	4,575
74	1,801	27,5 3452	74	5,219	1,076	74	8,560	4,753
76	1,856	27,5 3460	76	5,297	1,014	76	8,597	4,935
78	1,911	28 3461	78	5,375	0,950	78	8,632	5,120
3.80	-1,967	-28,5 3454	4.80	-5,453	+0,884	5.80	-8,664	-5,307
82	2,024	29 3440	82	5,531	0,816	82	8,695	5,497
84	2,082	29 3417	84	5,609	0,746	84	8,723	5,690
86	2,140	29 3387	86	5,687	0,674	86	8,749	5,886
88	2,198	30 3348	88	5,765	0,601	88	8,773	6,084
3.90	-2,258	-30 3300	4.90	-5,843	+0,525	5.90	-8,794	-6,285
92	2,318	30 3244	92	5,921	0,447	92	8,812	6,490
94	2,378	30,5 3179	94	5,998	0,368	94	8,828	6,697
96	2,439	31 3104	96	6,076	0,286	96	8,841	6,907
98	2,501	31 3020	98	6,153	0,202	98	8,851	7,119
4.00	-2,563	+2, 2927	5.00	-6,230	+0,116	6.00	-8,858	-7,335

Таблица 59. Функции  $\text{ber}'(x)$  и  $\text{bei}'(x)$ 

$$\text{ber}'x = \frac{d}{dx} \text{Re} J_0(x\sqrt{i}) = -\text{Re} \sqrt{i} J_1(x\sqrt{i}), \quad \text{bei}'x = -\frac{d}{dx} \text{Im} J_0(x\sqrt{i}) = \text{Im} \sqrt{i} J_1(x\sqrt{i})$$

$x$	$\text{ber}'x$	$\text{bei}'x$	$x$	$\text{ber}'x$	$\text{bei}'x$	$x$	$\text{ber}'x$	$\text{bei}'x$
	- 0,0	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,
0,00	0000	0000 + 50	1,00	0624 - 19 5	4974 + 48 5	2,00	4931 - 73	9170 + 29
02	0000	0100 50	02	0663 19 5	5071 48 5	02	5077 74,5	9228 28
04	0000 - 0,5	0200 50	04	0702 21	5168 48,5	04	5226 76	9284 27
06	0001 1	0300 50	06	0744 21	5265 48,5	06	5378 77,5	9338 26,5
08	0003 1,5	0400 50	08	0786 22,5	5362 48	08	5533 79	9391 25,5
0,10	0006 - 2,5	0500 + 50	1,10	0831 - 23	5458 + 48	2,10	5691 - 80	9442 + 24 5
12	0011 3	0600 50	12	0877 24	5554 48	12	5851 81,5	9491 23 5
14	0017 4,5	0700 50	14	0925 24,5	5650 47 5	14	6014 83	9538 22
16	0026 5	0800 50	16	0974 25,5	5745 47 5	16	6180 84	9582 21 5
18	0036 7	0900 50	18	1025 26,5	5840 47,5	18	6348 86	9625 20,5
0,20	0050 - 8 5	1000 + 50	1,20	1078 - 27,5	5935 + 47 5	2,20	6520 - 87	9666 + 19 5
22	0067 9,5	1100 50	22	1133 28	6030 47	22	6694 89	9705 18
24	0086 12	1200 50	24	1189 29,5	6124 46,5	24	6872 90	9741 17
26	0110 13 5	1300 50	26	1248 30	6217 47	26	7052 91	9775 16
28	0137 16	1400 50	28	1308 31	6311 46	28	7234 93	9807 14 5
0,30	0169 - 18	1500 + 50	1,30	1370 - 32	6403 + 46,5	2,30	7420 - 94 5	9836 + 13,5
32	0205 20 5	1600 50	32	1430 33	6496 46	32	7609 95 5	9863 12
34	0246 23	1700 50	34	1500 33,5	6588 45 5	34	7800 97 5	9887 11
36	0292 25 5	1800 50	36	1567 35	6679 45,5	36	7995 98 5	9909 9,5
38	0343 28 5	1900 50	38	1637 36	6770 45	38	8192 100	9928 8
0,40	0400 - 31 5	2000 + 50	1,40	1709 - 37	6860 + 45	2,40	8392 - 101,5	9944 + 7
42	0463 34,5	2100 50	42	1783 38	6950 44 5	42	8595 103	9958 5
44	0532 38	2200 49,5	44	1859 39	7039 44	44	8801 104,5	9968 4
46	0608 41,5	2299 50	46	1937 40,5	7127 44	46	9010 105 5	9976 2 5
48	0691 45	2399 50	48	2018 41	7215 44	48	9221 107 5	9981 + 1
0,50	0781 - 49	2499 + 50	1,50	2100 - 42 5	7303 + 43	2,50	9436 - 108 5	9983 - 1
52	0879 52 5	2599 50	52	2185 43,5	7389 43	52	9653 110	9981 2
54	0984 57	2699 50	54	2272 44,5	7475 42 5	54	9873 112	9977 4
56	1098 60 5	2799 49,5	56	2361 45,5	7560 42	56	*0097 113	9969 6
58	1219 65 5	2898 50	58	2452 46 5	7644 41 5	58	0323 114	9957 7
0,60	1350 - 69 5	2998 + 50	1,60	2545 - 48	7727 + 41,5	2,60	0551 - 116	9943 - 9,5
62	1489 74 5	3098 49,5	62	2641 49,5	7810 41	62	0783 117	9924 10,5
64	1638 79,5	3197 50	64	2740 50	7892 40	64	1017 119	9903 13
66	1797 84	3297 49,5	66	2840 51,5	7972 40	66	1255 120	9877 14,5
68	1965 89	3396 50	68	2943 52,5	8052 39 5	68	1495 121,5	9848 16,5
0,70	2143 - 94,5	3496 + 49 5	1,70	3048 - 54	8131 + 39	2,70	1738 - 122,5	9815 - 18,5
72	2332 100	3595 49 5	72	3156 55	8209 38,5	72	1983 124	9778 20,5
74	2532 105,5	3694 49 5	74	3266 56 5	8286 37 5	74	2231 125,5	9737 22 5
76	2743 111	3793 49,5	76	3379 57 5	8361 37,5	76	2482 127	9692 24,5
78	2965 117	3892 49,5	78	3494 59	8436 36,5	78	2736 128,5	9643 26,5
0,80	3199 - 123	3991 + 49,5	1,80	3612 - 60	8509 + 36	2,80	2993 - 129 5	9590 - 29
82	3445 129	4090 49,5	82	3732 61 5	8581 35,5	82	3252 130 5	9532 31
84	3703 135	4189 49,5	84	3855 62 5	8652 35	84	3513 132,5	9470 33 5
86	3973 142	4288 49	86	3980 64	8722 34	86	3778 133,5	9403 35,5
88	4257 148,5	4386 49,5	88	4108 65	*8790 33 5	88	4045 134,5	9332 37,5
0,90	4554 - 155	4485 + 49	1,90	4238 - 67	8857 + 33	2,90	4314 - 136	9257 - 60,5
92	4864 162	4583 49	92	4372 67 5	8923 32	92	4586 137 5	9176 62,5
94	5188 169	4681 49	94	4507 69,5	8987 31,5	94	4861 138	9091 65 5
96	5526 176	4779 48,5	96	4646 70,5	9050 30,5	96	5137 140	9000 67,5
98	5878 183,5	4876 49	98	4787 72	9111 29,5	98	5417 140,5	8905 68
1,00	6245	4974	2,00	4931	9170	3,00	5698	8805
	- 0,0	+ 0,		- 0,	+ 0,		- 1,	+ 0,

Продолжение табл. 59

$x$	$ber'x$	$bei'x$	$x$	$ber'x$	$bei'x$	$x$	$ber'x$	$bei'x$
		+ 0,		- 3,				
3,00	-1,570 -14	8805 - 53	4,00	135 - 15	-0,491 - 24,5	5,00	-3,845 + 7	-4,354 - 54
02	1,598 14,5	8699 55,5	02	165 14,5	0,540 25,5	02	3,831 7,5	4,462 54,5
04	1,627 14,5	8588 58	04	194 15	0,591 25,5	04	3,816 8,5	4,571 55
06	1,656 14,5	8472 61	06	224 14,5	0,642 26,5	06	3,799 9,5	4,681 55,5
08	1,685 14,5	8350 63,5	08	253 14,5	0,695 26,5	08	3,780 10,5	4,792 56,5
3,10	-1,714 -15	8223 - 66,5	4,10	282 - 14	-0,748 - 27,5	5,10	-3,759 + 11,5	-4,905 - 56,5
12	1,744 14,5	8090 69,5	12	310 14	0,803 27,5	12	3,736 12	5,018 57,5
14	1,773 15	7951 72	14	338 14	0,858 28,5	14	3,712 13	5,133 58
16	1,803 15	7807 75,5	16	366 13,5	0,915 29	16	3,686 14,5	5,249 58,5
18	1,833 15,5	7656 78,5	18	393 13,5	0,973 29,5	18	3,657 15	5,366 59
3,20	-1,864 -15	7499 - 81,5	4,20	420 - 13	-1,032 - 30	5,20	-3,627 + 16	-5,484 - 59,5
22	1,891 15,5	7336 84,5	22	446 13	1,092 30,5	22	3,595 17,5	5,603 60
24	1,925 15,5	7167 87,5	24	472 12,5	1,153 31	24	3,560 18	5,723 60,5
26	1,956 15,5	6992 91	26	497 12,5	1,215 32	26	3,524 19,5	5,844 61
28	1,987 15,5	6810 94,5	28	522 12,5	1,279 32	28	3,485 20	5,966 61,5
3,30	-2,018 -15,5	6621 - 97,5	4,30	547 - 11,5	-1,343 - 33	5,30	-3,445 + 21,5	-6,089 - 62
32	2,049 15,5	6426 101	32	570 11,5	1,409 33,5	32	3,402 23	6,213 63
34	2,080 16	6224 104	34	593 11,5	1,476 34	34	3,356 23,5	6,339 63,5
36	2,112 16	6016 108	36	616 11	1,544 34,5	36	3,309 25	6,465 63,5
38	2,144 15,5	5800 111,5	38	638 10,5	1,613 35	38	3,259 26,5	6,592 64
3,40	-2,175 -16	5577 - 115	4,40	659 - 10	-1,683 - 36	5,40	-3,206 + 27	-6,720 - 66,5
42	2,207 16	5347 118,5	42	679 10	1,755 36	42	3,152 29	6,849 65
44	2,239 16,5	5110 122,5	44	699 9,5	1,827 37	44	3,094 30	6,979 65
46	2,272 16	4865 126	46	718 9	1,901 37,5	46	3,034 31	7,109 66
48	2,304 16	4613 130	48	736 9	1,976 38,5	48	2,972 32,5	7,241 66
3,50	-2,336 -16	4353 - 133,5	4,50	754 - 8	-2,053 - 38,5	5,50	-2,907 + 34	-7,373 - 66,5
52	2,368 16,5	4086 138	52	770 8	2,130 39,5	52	2,839 35	7,506 67
54	2,401 16	3810 141,5	54	786 7,5	2,209 40	54	2,769 36,5	7,640 67
56	2,433 16,5	3527 145,5	56	801 7	2,289 60,5	56	2,696 38	7,774 67,5
58	2,466 16	3236 149,5	58	815 6,5	2,370 41	58	2,620 39,5	7,909 - 68
3,60	-2,498 -16,5	2937 - 154	4,60	828 - 6	-2,452 - 42	5,60	-2,541 + 41	-8,045 - 68,5
62	2,531 16	2629 158	62	840 5,5	2,536 42	62	2,459 42	8,182 68,5
64	2,563 16,5	2313 162	64	851 5	2,620 43	64	2,375 44	8,319 69
66	2,596 16	1989 166,5	66	861 4,5	2,706 43,5	66	2,287 45,5	8,457 69
68	2,628 16,5	1656 170,5	68	870 4	2,793 44,5	68	2,196 47	8,595 69,5
3,70	-2,661 -16	1315 - 175	4,70	878 - 3,5	-2,882 - 44,5	5,70	-2,102 + 48,5	-8,734 - 69,5
72	2,693 16,5	0965 179,5	72	885 3	2,971 45,5	72	2,005 50	8,873 69,5
74	2,726 16	0606 184	74	891 2	3,062 46	74	1,905 51,5	9,012 70
76	2,758 16	0238 188,5	76	895 2	3,154 47	76	1,802 53,5	9,152 70,5
78	2,790 16	*0139 193	78	899 - 1	3,248 47	78	1,695 54,5	9,293 70
3,80	-2,822 -16	0525 - 198	4,80	901 0	-3,342 - 48	5,80	-1,586 + 57	-9,433 - 70,5
82	2,854 16	0921 202	82	901 0	3,438 48,5	82	1,472 58	9,574 70,5
84	2,886 16	1325 207	84	901 + 1	3,535 49	84	1,356 60,5	9,715 71
86	2,918 15,5	1739 212	86	899 1,5	3,633 49,5	86	1,235 61,5	9,857 70,5
88	2,949 16	2163 217	88	896 2,5	3,732 50,5	88	1,112 64	9,998 70,5
3,90	-2,981 -15,5	2597 - 221,5	4,90	891 + 3	-3,833 - 51	5,90	-0,984 + 65	-10,139 - 71
92	3,012 15,5	3040 226,5	92	885 4	3,935 51,5	92	0,854 67,5	10,281 70,5
94	3,043 15,5	3493 231	94	877 4,5	4,038 52	94	0,719 69	10,422 71
96	3,074 15	3955 236,5	96	868 5	4,142 53	96	0,581 71	10,564 70,5
98	3,104 15,5	4428 241,5	98	858 6,5	4,248 53	98	0,439 73	10,705 70,5
4,00	-3,135	4911 - 0,	5,00	845 - 3,	-4,354	6,00	-0,293	-10,846

Таблица 60. Функции  $\text{ker}(x)$  и  $\text{hei}(x)$

$$\text{ker } x = \frac{2}{\pi} \text{ker } x = -\text{Re } H_0^{(1)}(x \sqrt{i}), \quad \text{hei } x = -\frac{2}{\pi} \text{ker } x = \text{Im } H_0^{(1)}(x \sqrt{i})$$

$x$	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$	$x$	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$	$x$	$\text{ker } x$	$\text{hei } x$
0 00	- 0,		1,00	- 0,		2 00	- 0,	+ 0,0
02	5000 + 1 5	- ∞	02	3151 + 22 5	1825 + 43 5	02	1289 + 14	2652 + 66 5
04	4997 4	2,564	04	3106 22	1738 42	04	1261 14	2785 63
06	4989 6	2,123	06	3062 22 5	1654 40 5	06	1233 13 5	2911 60
08	4977 7	1,865	08	3017 22	1573 39	08	1206 13	3031 57
0 10	4963 8,5	1,683	10	2973 22	1495 38	10	1180 13 5	3145 54 5
12	4946 + 10	- 1 541 + 58 1	12	2929 + 21 5	1419 + 37	12	1153 + 13	3254 + 51
14	4926 11	1,425 48,5	14	2886 22	1345 35 5	14	1127 12 5	3356 48 5
16	4904 12	1,328 42	16	2842 21 5	1274 34	16	1102 12 5	3453 46
18	4880 13	1,244 37,5	18	2799 21 5	1206 33	18	1077 12 5	3545 43 5
20	4854 14	1,169 33	20	2756 21 5	1140 32	20	1052 12	3632 40
22	4826 + 14,5	- 1,103 + 29 5	22	2713 + 21	1076 + 31	22	10277 + 120	3714 + 38 5
24	4797 15	1,044 27 5	24	2671 21 5	1014 30	24	10037 118 5	3791 36
26	4767 16	0,989 24,5	26	2628 20 5	0954 29	26	09800 116 5	3863 34
28	4735 17	0,940 23	28	2587 21	0896 28	28	09567 114 5	3931 31 5
30	4701 17	0,894 21 5	30	2545 20 5	0840 27	30	09338 113	3994 29 5
32	4667 + 17 5	- 0,851 + 19 5	32	2504 + 20 5	0786 + 26	32	09112 + 111	4053 + 27 5
34	4632 18 5	0,812 18 5	34	2463 20 5	0734 25 5	34	08890 109	4108 25 5
36	4595 18 5	0,775 17,5	36	2422 20	0683 24	36	08672 108	4159 23 5
38	4558 19	0,740 16,5	38	2382 20	0635 24	38	08456 105 5	4206 22
40	4520 19,5	0,707 15 5	40	2342 20	0587 22 5	40	08245 104	4250 19 5
42	4481 + 20	- 0,6765 + 145 5	42	2302 + 19 5	0542 + 22	42	08037 + 102 5	4289 + 18
44	4441 20,5	0,6474 138,5	44	2263 19 5	0498 21	44	07832 100 5	4325 16 5
46	4400 20,5	0,6197 131	46	2224 19	0456 20 5	46	07631 99	4358 14 5
48	4359 20,5	0,5935 124 5	48	2186 19	0415 20	48	07433 97 5	4387 13
50	4318 21,5	0,5686 118 5	50	2148 19	0375 19	50	07238 95 5	4413 11 5
52	4275 + 21	- 0,5449 + 113	52	2110 + 19	0337 + 18 5	52	07047 + 94	4436 + 10 5
54	4233 21,5	0,5223 108 5	54	2072 18 5	0300 17 5	54	06859 92	4457 8 5
56	4190 22	0,5006 103	56	2035 18 5	0265 17 5	56	06675 91	4474 7
58	4146 22	0,4800 99 5	58	1998 18	0230 16	58	06493 89	4488 6
60	4102 22	0,4602 94,5	60	1962 18	0198 16	60	06315 87 5	4500 4 5
62	4058 + 22	- 0,4413 + 91	62	1926 + 17 5	0166 + 15 5	62	06140 + 86	4509 + 3
64	4014 22,5	0,4231 87	64	1891 18	0135 14 5	64	05968 84 5	4515 2 5
66	3969 22,5	0,4057 84	66	1855 17	0106 14 5	66	05799 83	4520 + 0 5
68	3924 22,5	0,3889 80 5	68	1821 17 5	0077 13 5	68	05633 81	4521 0
70	3879 22,5	0,3728 77	70	1786 17	0050 13 5	70	05471 80	4521 - 1 5
72	3834 + 23	- 0,3574 + 74 5	72	1752 + 16 5	0023 + 12 5	72	05311 + 78 5	4518 - 2
74	3788 22 5	0,3425 71 5	74	1719 17	*0002 12	74	05154 77	4514 1 5
76	3743 23	0,3282 69	76	1685 16 5	0026 12	76	05000 75 5	4507 4 5
78	3697 23	0,3144 66 5	78	1652 16	0050 11	78	04849 74	4498 5
80	3651 22 5	0,3011 64	80	1620 16	0072 11	80	04701 72 5	4488 6 5
82	3606 + 23	- 0,2883 + 61 5	82	1588 + 16	0094 + 10	82	04556 + 71	4475 - 7
84	3560 23	0,2760 59 5	84	1556 15 5	0114 10	84	04414 70	4461 8
86	3514 22,5	0,2641 57 5	86	1525 15 5	0134 9 5	86	04274 68	4445 8 5
88	3469 23	0,2526 55 5	88	1494 15 5	0153 9	88	04138 67	4428 9 5
90	3423 23	0,2415 53 5	90	1463 15	0171 9	90	04004 66	4409 10
92	3377 + 22,5	- 0,2308 + 51 5	92	1433 + 14 5	01888 + 83 5	92	03872 + 64	4389 - 11
94	3332 22,5	0,2205 50	94	1404 15	02055 80	94	03744 63,5	4367 11 5
96	3287 23	0,2105 48 5	96	1374 14 5	02215 76 5	96	03617 61 5	4344 12
98	3241 22,5	0,2008 46 5	98	1345 14	02368 72 5	98	03494 60 5	4320 13
100	3196 22,5	0,1915 45	100	1317 14	02513 69 5	100	03373 59	4294 13 5
	3151	- 0,1825		1289	02652		03255	4267
	- 0,			- 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,0

Продолжение табл. 60

x	her x	hei x	x	her x	hei x	x	her x	hei x
	- 0,0	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,00
3,00	3255 + 58	4267 - 14	4,00	1400 + 149 5	2303 - 20	5,00	7122 - 6	7329 - 108,5
02	3139 57	4239 14,5	02	1699 144	2263 19,5	02	7110 7	7112 107
04	3025 55,5	4210 15	04	1987 139,5	2224 20	04	7096 9	6898 104,5
06	2914 54,5	4180 15,5	06	2266 134	2184 19,5	06	7078 10	6689 103,5
08	2805 53	4149 15,5	08	2534 129	2145 19,5	08	7058 11	6482 101
3,10	2699 + 52	4118 - 16,5	4,10	2792 + 124,5	2106 - 19	5,10	7036 - 12,5	6280 - 99,5
12	2595 51	4085 17	12	3041 119,5	2068 19,5	12	7011 13,5	6081 97,5
14	2493 49,5	4051 17	14	3280 115	2029 18,5	14	6984 15	5886 96
16	2394 48,5	4017 17,5	16	3510 110,5	1992 19	16	6954 15,5	5694 94
18	2297 47,5	3982 18	18	3731 106	1954 18,5	18	6923 17	5506 92
3,20	2202 + 46,5	3946 - 18	4,20	3943 + 101,5	1917 - 18,5	5,20	6889 - 18	5322 - 91
22	2109 45,5	3910 18,5	22	4146 97,5	1880 18,5	22	6853 18,5	5140 88,5
24	2018 44,5	3873 19	24	4341 93,5	1843 18	24	6816 20	4963 87,5
26	1929 43	3835 19	26	4528 89,5	1807 18	26	6776 20,5	4788 85,5
28	1843 42,5	3797 19,5	28	4707 85	1771 17,5	28	6735 21,5	4617 83,5
3 30	1758 + 41	3758 - 19,5	4 30	4877 + 81,5	1736 - 18	5 30	6692 - 22	4450 - 82,5
32	1676 40,5	3719 20	32	5040 78	1700 17	32	6648 23	4285 80,5
34	1595 39	3679 20	34	5196 74	1666 17,5	34	6602 24	4124 79
36	1517 38,5	3639 20	36	5344 70,5	1631 17	36	6554 24,5	3966 77
38	1440 37,5	3599 20 5	38	5485 67	1597 17	38	6505 25	3812 76
3 40	1365 + 36,5	3558 - 20	4 40	5619 + 63,5	1563 - 16,5	5 40	6455 - 26	3660 - 74
42	1292 35 5	3518 21	42	5746 60	1530 16,5	42	6403 26	3512 73
44	1221 34,5	3476 20,5	44	5866 57	1497 16	44	6351 27	3366 71
46	1152 33,5	3435 21	46	5980 53,5	1465 16,5	46	6297 27,5	3224 69,5
48	1085 33	3393 21	48	6087 51	1432 15,5	48	6242 28	3085 68
3 50	1019 + 32	3351 - 21	4 50	6189 + 47,5	1401 - 16	5 50	6186 - 28,5	2949 - 66,5
52	0955 31,5	3309 21	52	6284 44,5	1369 15,5	52	6129 29	2816 65,5
54	0892 30	3267 21,5	54	6373 42	1338 15	54	6071 29,5	2685 63,5
56	0832 30	3224 21	56	6457 39	1308 15,5	56	6012 30	2558 62
58	0772 28,5	3182 21	58	6535 36	1277 15	58	5952 30	2434 61
3 60	0715 + 28	3140 - 21,5	4 60	6607 + 34	1247 - 14,5	5 60	5892 - 30,5	2312 - 59,5
62	0659 27	3097 21,5	62	6675 31	1218 14,5	62	5831 31	2193 58
64	0605 26,5	3054 21	64	6737 28,5	1189 14,5	64	5769 31	2077 57
66	0552 26	3012 21,5	66	6794 26	1160 14	66	5707 31,5	1963 55
68	0500 24,5	2969 21	68	6846 24	1132 14	68	5644 32	1853 54
3 70	0451 + 24,5	2927 - 21,5	4 70	6894 + 21,5	11042 - 137,5	5 70	5580 - 31,5	1745 - 53
72	0402 23,5	2884 21	72	6937 19	10767 135,5	72	5517 32,5	1639 51,5
74	0355 23	2842 21,5	74	6975 17	10496 133,5	74	5452 32,5	1536 50
76	0309 22	2799 21	76	7009 15	10229 131,5	76	5387 32,5	1436 49
78	0265 21,5	2757 21	78	7039 13	09966 129,5	78	5322 32,5	1338 48
3 80	0222 + 21	2715 - 21	4 80	7065 + 11	09707 - 127,5	5 80	5257 - 33	1242 - 46,5
82	0180 20	2673 21	82	7087 9	09452 125,5	82	5191 32,5	1149 45
84	0140 19,5	2631 21	84	7105 7	09201 124	84	5126 33,5	1059 44
86	0101 19	2589 20,5	86	7119 5	08953 121,5	86	5059 33	0971 43
88	0063 18,5	2548 20,5	88	7129 3,5	08710 120	88	4993 33	0885 42
3 90	0026 + 17,5	2507 - 21	4 90	7136 + 2	08470 - 118	5 90	4927 - 33,5	0801 - 40,5
92	*0009 17,5	2465 20	92	7140 0	08234 116	92	4860 33	0720 40
94	0044 16,5	2425 20,5	94	7140 - 1,5	08002 114	94	4794 33,5	0640 38,5
96	0077 16	2384 20,5	96	7137 3	07774 112,5	96	4727 33	0563 37,5
98	0109 15,5	2343 20	98	7131 4,5	07549 110	98	4661 33,5	0488 36
4,00	0140	2303	5,00	7122	07329	6,00	4594	0416
	+ 0,0	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,0		+ 0,00	+ 0,00

Таблица 61. Функции  $her(x)$  и  $hei'(x)$ 

$$her'x = -\frac{d}{dx} \operatorname{Re} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = \operatorname{Re} \sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i}), \quad hei'x = \frac{d}{dx} \operatorname{Im} H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = -\operatorname{Im} \sqrt{i} H_1^{(1)}(x\sqrt{i})$$

$x$	$her'x$	$hei'x$	$x$	$her'x$	$hei'x$	$x$	$her'x$	$hei'x$
0,00	+ 0,	$\infty$	1,00	2243	- 4	2,00	13993	- 96
02	0288	+ 31,8	02	2235	5	02	13801	96
04	0488	15,9	04	2225	5	04	13609	96
06	0655	10,6	06	2215	5	06	13417	95
08	0800	7,94	08	2205	6	08	13227	95
0,10	0929	+ 58,5	1,10	2193	- 5,9	2,10	13037	- 94
12	1046	53	12	2182	6,5	12	12849	94
14	1152	40	14	2169	6,5	14	12661	93,5
16	1248	44,5	16	2156	6,5	16	12474	93
18	1337	41	18	2143	7	18	12288	92,5
0,20	1419	+ 38	1,20	2129	- 7	2,20	12103	- 92
22	1495	35	22	2115	7	22	11919	91
24	1565	32,5	24	2101	7,5	24	11737	91
26	1630	30	26	2086	8	26	11555	90
28	1690	28	28	2070	8	28	11375	89,5
0,30	1746	+ 26	1,30	2054	- 8	2,30	11196	- 89
32	1798	24	32	2038	8	32	11018	88
34	1846	22,5	34	2022	8,5	34	10842	88
36	1891	20,5	36	2005	8,5	36	10666	86,5
38	1932	19	38	1988	8,5	38	10493	86,5
0,40	1970	+ 18	1,40	1971	- 8,5	2,40	10320	- 85,5
42	2006	16	42	1954	9	42	10149	85
44	2038	15	44	1936	9	44	09979	84
46	2068	14	46	1918	9	46	09811	83,5
48	2096	12,5	48	1900	9	48	09644	82,5
0,50	2121	+ 11,5	1,50	1882	- 9,5	2,50	09479	- 82
52	2144	10,5	52	1863	9	52	09315	81
54	2165	9,5	54	1845	9,5	54	09153	80,5
56	2184	8,5	56	1826	9,5	56	08992	79,5
58	2201	7,5	58	1807	9,5	58	08833	79
0,60	2216	+ 7	1,60	1788	- 9,5	2,60	08675	- 78
62	2230	6	62	1769	9,5	62	08519	77,5
64	2242	5	64	1750	9,5	64	08364	76
66	2252	4,5	66	1731	10	66	08212	76
68	2261	3,5	68	1711	9,5	68	08060	75
0,70	2268	+ 3	1,70	1692	- 9,5	2,70	07910	- 74
72	2274	2,5	72	1673	10	72	07762	73
74	2279	1,5	74	1653	10	74	07616	72,5
76	2282	1,5	76	1633	9,5	76	07471	72
78	2285	+ 0,5	78	1614	10	78	07327	70,5
0,80	2286	0	1,80	15943	- 97,5	2,80	07186	- 70
82	2286	- 0,5	82	15748	98	82	07046	69,5
84	2285	1	84	15552	98	84	06907	68
86	2283	1,5	86	15356	98	86	06771	67,5
88	2280	2	88	15160	97,5	88	06636	67
0,90	2276	- 2,5	1,90	14965	- 97,5	2,90	06502	- 66
92	2271	3	92	14770	97,5	92	06370	65
94	2265	3	94	14575	97	94	06240	64
96	2259	4	96	14381	97	96	06112	63,5
98	2251	4	98	14187	97	98	05985	62,5
1,00	2243	+ 0,4422	2,00	13993	0679	3,00	05860	1367
	+ 0,			+ 0,			+ 0,	- 8,8



Продолжение табл. 61

$x$	$her'x$	$hei'x$	$x$	$her'x$	$hei'x$	$x$	$her'x$	$hei'x$
	+ 0,0	- 0,0		+ 0,0	- 0,0		- 0,00	- 0,0
3,00	5860 - 62	1367 - 27,5	4,00	1522 - 26,5	20040 + 65,5	5,00	0522 - 71	10946 + 93
02	5736 61	1422 26	02	1469 26	19909 67,5	02	0664 68,5	10760 92
04	5614 60	1474 25	04	1417 25,5	19774 70	04	0801 66,5	10576 92
06	5494 59,5	1524 23,5	06	1366 25	19634 72	06	0934 63,5	10392 91
08	5375 58,5	1571 22	08	1316 24,5	19490 74	08	1061 62	10210 90
3,10	5258 - 57,5	1615 - 21,5	4,10	1267 - 23,5	19342 + 76	5,10	1185 - 59	10030 + 90
12	5143 57	1658 20	12	1220 23,5	19190 78	12	1303 57,5	09850 89
14	5029 56,5	1698 19	14	1173 23	19034 79,5	14	1418 55	09672 88
16	4916 55	1736 18	16	1127 22,5	18875 81,5	16	1528 53	09496 88
18	4806 54,5	1772 17	18	1082 21,5	18712 83	18	1634 50,5	09320 86,5
3,20	4697 - 54	18055 - 158,5!	4,20	1039 - 21,5	18546 + 84	5,20	1735 - 49	09147 + 86,5
22	4589 53	18372 149!	22	0996 21	18378 86	22	1833 47	08974 85
24	4483 52	18670 139,5!	24	0954 20,5	18206 87	24	1927 45	08804 84,5
26	4379 51,5	18949 130,5!	26	0913 20	18032 88	26	2017 43	08635 84
28	4276 50,5	19210 121!	28	0873 19,5	17856 89,5	28	2103 41,5	08467 83
3,30	4175 - 50	19452 - 112,5!	4,30	0834 - 19	17677 + 90,5	5,30	2186 - 39,5	08301 + 82
32	4075 49	19677 104,5!	32	0796 18,5	17496 91	32	2265 37,5	08137 81,5
34	3977 48,5	19886 95,5!	34	0759 18,5	17314 92,5	34	2340 36	07974 80,5
36	3880 47,5	20077 88	36	0722 17,5	17129 93	36	2412 34,5	07813 79,5
38	3785 46,5	20253 80,5	38	0687 17,5	16943 94	38	2481 32,5	07654 79
3,40	3692 - 46,5	20414 - 73	4,40	06521 - 169	16755 + 94,5	5,40	2546 - 31	07496 + 78
42	3599 45	20560 65,5	42	06183 165	16566 95,5	42	2608 30	07340 77
44	3509 44,5	20691 58,5	44	05853 161	16375 95,5	44	2668 28	07186 76,5
46	3420 44	20808 51,5	46	05531 156,5	16184 96,5	46	2724 26,5	07033 75,5
48	3332 43	20911 45	48	05218 153	15991 97	48	2777 25	06882 74,5
3,50	3246 - 42,5	21001 - 39	4,50	04912 - 149	15797 + 97	5,50	2827 - 23,5	06733 + 73,5
52	3161 42	21079 32,5	52	04614 145,5	15603 97,5	52	2874 22,5	06586 73
54	3077 41	21144 26,5	54	04323 141,5	15408 98	54	2919 20,5	06440 72
56	2995 40	21197 20,5	56	04040 137,5	15212 98	56	2960 20	06296 71
58	2915 40	21238 15,5	58	03765 134,5	15016 98	58	3000 18	06154 70
3,60	2835 - 38,5	21269 - 9,5	4,60	03496 - 130,5	14820 + 98,5	5,60	3036 - 17	06014 + 69
62	2758 38,5	21288 - 4,5	62	03235 127	14623 98,5	62	3070 16	05876 68,5
64	2681 37,5	21297 + 0,5	64	02981 123,5	14426 98,5	64	3102 14,5	05739 67,5
66	2606 37	21296 5,5	66	02734 120	14229 98,5	66	3131 14	05604 66,5
68	2532 36	21285 10	68	02494 117	14032 98	68	3159 12	05471 65,5
3,70	2460 - 36	21265 + 14,5	4,70	02260 - 113,5	13836 + 98,5	5,70	3183 - 11,5	05340 + 64,5
72	2380 34,5	21236 19	72	02033 110,5	13639 98	72	3206 10,5	05211 64
74	2319 34,5	21198 23,5	74	01812 107,5	13443 98	74	3227 9	05083 63
76	2250 33,5	21151 27,5	76	01597 104	13247 98	76	3245 8	04957 62
78	2183 33	21096 31	78	01389 101	13051 97,5	78	3261 7,5	04833 61
3,80	2117 - 32,5	21034 + 35	4,80	01187 - 98	12856 + 97,5	5,80	3276 - 6,5	04711 + 60,5
82	2052 32	20964 38,5	82	00991 95	12661 97	82	3289 5	04590 59
84	1988 31	20887 42,5	84	00801 92,5	12467 96,5	84	3299 4,5	04472 58,5
86	1926 30,5	20802 46,5	86	00616 89	12274 96	86	3308 4	04355 58
88	1865 30	20711 48,5	88	00438 87	12082 96	88	3316 2,5	04239 56,5
3,90	1805 - 29,5	20614 + 51,5	4,90	00264 - 83,5	11890 + 95,5	5,90	3321 - 2	04126 + 56
92	1746 29	20511 55	92	00097 81,5	11699 95	92	3325 - 1,5	04014 54,5
94	1688 28	20401 57,5	94	*00066 78,5	11509 94,5	94	3328 0	03905 54,5
96	1632 28	20286 60	96	00223 76	11320 96	96	3328 0	03796 53
98	1576 27	20166 63	98	00375 73,5	11132 93	98	3328 + 1	03690 52,5
4,00	1522	20040	5,00	00522	10946	6,00	3326	03585
	+ 0,0	- 0,0		- 0,0	- 0,0		- 0,00	- 0,0

Таблица 62. Функции  $ber(x)$ ,  $bei(x)$ ,  $ber'(x)$ ,  $bei'(x)$ ,  $her(x)$ ,  $hei(x)$ ,  $her'(x)$ ,  $hei'(x)$  (продолжение)

$x$	$ber\ x$	$bei\ x$	$ber'\ x$	$bei'\ x$	$her\ x$	$hei\ x$	$her'\ x$	$hei'\ x$
6,0	- 8,858	- 7,335	- 0,293	- 10,846	+ 0, 4594 (-2)	+ 0, 4157 (-3)	- 0, 3326 (-2)	- 0, 3585 (-2)
1	8,849	8,454	+ 0,494	11,547	4263 (-2)	0825 (-3)	3295 (-2)	3087 (-2)
2	8,756	9,644	1,384	12,235	3936 (-2)	*2031 (-3)	3236 (-2)	2631 (-2)
3	8,569	10,901	2,380	12,901	3616 (-2)	4451 (-3)	3152 (-2)	2215 (-2)
4	8,276	12,223	3,490	13,536	3306 (-2)	6473 (-3)	3048 (-2)	1837 (-2)
6,5	- 7,867	- 13,607	+ 4,717	- 14,129	3007 (-2)	8137 (-3)	2928 (-2)	1495 (-2)
6	7,329	15,047	6,067	14,670	2721 (-2)	9476 (-3)	2796 (-2)	1189 (-2)
7	6,649	16,538	7,544	15,146	2448 (-2)	10525 (-2)	2655 (-2)	9145 (-3)
8	5,816	18,074	9,151	15,543	2190 (-2)	11315 (-2)	2508 (-2)	6710 (-3)
9	4,815	19,644	10,891	15,847	19470 (-2)	11876 (-2)	2356 (-2)	4561 (-3)
7,0	- 3,633	- 21,239	+ 12,765	- 16,041	17191 (-2)	12236 (-2)	2202 (-2)	2677 (-3)
1	2,257	22,848	14,774	16,109	15066 (-2)	12420 (-2)	2049 (-2)	1039 (-3)
2	- 0,674	24,456	16,918	16,033	13093 (-2)	12451 (-2)	18968 (-2)	*0372 (-3)
3	+ 1,131	26,049	19,194	15,792	11271 (-2)	12352 (-2)	17475 (-2)	1575 (-3)
4	3,169	27,609	21,600	15,367	9597 (-3)	12143 (-2)	16022 (-2)	2589 (-3)
7,5	+ 5,455	- 29,116	+ 24,130	- 14,736	8065 (-3)	11840 (-2)	14616 (-2)	3430 (-3)
6	7,999	30,55	26,777	13,875	6672 (-3)	11462 (-2)	13266 (-2)	4116 (-3)
7	10,814	31,88	29,532	12,763	5410 (-3)	11022 (-2)	11976 (-2)	4661 (-3)
8	13,909	33,09	32,38	11,373	4274 (-3)	10534 (-2)	10752 (-2)	5081 (-3)
9	17,293	34,15	35,31	9,681	3257 (-3)	10009 (-2)	9595 (-3)	5390 (-3)
8,0	+ 20,974	- 35,02	+ 38,31	- 7,660	2353 (-3)	9459 (-3)	8507 (-3)	5600 (-3)
1	24,957	35,67	41,35	5,285	1554 (-3)	8892 (-3)	7490 (-3)	5725 (-3)
2	29,245	36,06	44,42	- 2,530	8524 (-4)	8317 (-3)	6544 (-3)	5773 (-3)
3	33,840	36,16	47,47	+ 0,634	2425 (-4)	7740 (-3)	5667 (-3)	5758 (-3)
4	38,738	35,92	50,49	4,232	*2832 (-4)	7167 (-3)	4859 (-3)	5686 (-3)
8,5	+ 43,94	- 35,30	+ 53,44	+ 8,290	7315 (-4)	6604 (-3)	4117 (-3)	5568 (-3)
6	49,42	34,25	56,28	12,832	11088 (-3)	6055 (-3)	3440 (-3)	5411 (-3)
7	55,19	32,71	58,97	17,883	14216 (-3)	5523 (-3)	2825 (-3)	5223 (-3)
8	61,21	30,65	61,45	23,465	16759 (-3)	5011 (-3)	2270 (-3)	5009 (-3)
9	67,47	28,00	63,68	29,598	18775 (-3)	4522 (-3)	1771 (-3)	4776 (-3)
9,0	+ 73,94	- 24,71	+ 65,60	+ 36,30	20318 (-3)	4056 (-3)	1325 (-3)	4528 (-3)
1	80,58	20,72	67,14	43,58	21441 (-3)	3616 (-3)	9288 (-4)	4270 (-3)
2	87,35	15,98	68,25	51,46	22191 (-3)	3202 (-3)	5799 (-4)	4006 (-3)
3	94,21	10,41	68,83	59,94	22615 (-3)	2815 (-3)	2747 (-4)	3740 (-3)
4	101,10	- 3,97	68,82	69,01	22754 (-3)	2454 (-3)	0099 (-4)	3475 (-3)
9,5	+ 107,95	+ 3,41	+ 68,13	+ 78,68	22647 (-3)	2120 (-3)	*2175 (-4)	3212 (-3)
6	114,70	11,79	66,67	88,94	22331 (-3)	1812 (-3)	4105 (-4)	2955 (-3)
7	121,26	21,22	64,35	99,76	21837 (-3)	1529 (-3)	5722 (-4)	2704 (-3)
8	127,54	31,76	61,07	111,12	21196 (-3)	1271 (-3)	7054 (-4)	2463 (-3)
9	133,43	43,46	56,72	122,99	20434 (-3)	1036 (-3)	8129 (-4)	2231 (-3)
10,0	+ 138,84	+ 56,37	+ 51,20	+ 135,31	19578 (-3)	0824 (-3)	8971 (-4)	2009 (-3)
					- 0,	- 0,	+ 0,	+ 0,

Таблица 63. Функции  $J_n(r \sqrt{i}) = b_n e^{\beta_n}$  и  $H_n^{(1)}(r \sqrt{i}) = h_n e^{\eta_n}$  ( $n=0, 1$ )

$$\left[ b_n = M_n \cdot \beta_0 = -\theta_0, \beta_1 = 180^\circ - \theta_1; h_n = \frac{2}{\pi} N_n, \eta_0 = -\phi_0 - 90^\circ, \eta_1 = -\phi_1 + 90^\circ \right]$$

r	b <sub>0</sub>	β <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	β <sub>1</sub>	h <sub>0</sub>	η <sub>0</sub>	h <sub>1</sub>	η <sub>1</sub>
0,0	1,0000	0°	0,0000	+ 45°	∞	- 90°	∞	- 135°
1	1,0000	- 0°,14	0,0500	44°,93	1,6184	72°,21	6,342	134°,16
2	1,0000	0°,57	0,1000	44°,71	1,2043	66°,37	3,137	132°,41
3	1,0001	1°,29	0,1500	44°,36	0,9708	61°,27	2,057	130°,13
4	1,0004	2°,29	0,2000	43°,85	0,8114	56°,48	1,510	127°,50
0,5	1,0010	- 3°,58	0,2500	+ 43°,21	0,6926	- 51°,88	1,1778	- 124°,62
6	1,0020	5°,15	0,3001	42°,42	0,5995	47°,40	0,9534	121°,56
7	1,0037	7°,01	0,3502	41°,49	0,5241	42°,99	0,7914	118°,34
8	1,0064	9°,14	0,4004	40°,42	0,4617	38°,65	0,6688	115°,02
9	1,0102	11°,55	0,4508	39°,20	0,4091	34°,35	0,5729	111°,60
1,0	1,0153	- 14°,23	0,5013	+ 37°,84	0,3642	- 30°,08	0,4958	- 108°,10
1	1,0227	17°,16	0,5521	36°,34	0,3255	25°,84	0,4327	104°,54
2	1,0320	20°,34	0,6032	34°,71	0,2918	21°,63	0,3801	100°,93
3	1,0438	23°,75	0,6548	32°,93	0,2624	17°,43	0,3358	97°,28
4	1,0586	27°,37	0,7070	31°,01	0,2365	13°,24	0,2980	93°,59
1,5	1,0767	- 31°,19	0,7598	+ 28°,96	0,2136	- 9°,08	0,2655	- 89°,86
6	1,0984	35°,17	0,8136	26°,77	0,1933	4°,92	0,2373	86°,11
7	1,1242	39°,30	0,8684	24°,45	0,1752	- 0°,77	0,2128	82°,33
8	1,1564	43°,54	0,9244	22°,00	0,1591	+ 3°,37	0,1913	78°,53
9	1,1892	47°,88	0,9819	19°,43	0,1446	7°,51	0,1723	74°,71
2,0	1,2290	- 52°,29	1,0412	+ 16°,73	0,13155	+ 11°,63	0,1555	- 70°,87
1	1,2741	56°,74	1,1024	13°,92	0,11984	15°,75	0,14063	67°,02
2	1,3246	61°,22	1,1659	11°,00	0,10927	19°,87	0,12737	63°,15
3	1,3808	65°,71	1,2321	7°,97	0,09973	23°,98	0,11553	59°,18
4	1,443	70°,19	1,3012	4°,84	0,09110	28°,09	0,10492	55°,39
2,5	1,511	- 74°,65	1,3736	+ 1°,61	0,08327	+ 32°,19	0,09540	- 51°,49
6	1,586	79°,09	1,4498	- 1°,70	0,07618	36°,29	0,08684	47°,58
7	1,666	83°,50	1,530	5°,10	0,06973	40°,39	0,07913	43°,66
8	1,754	87°,87	1,615	8°,57	0,06387	44°,49	0,07216	39°,74
9	1,849	92°,21	1,705	12°,11	0,05853	48°,58	0,06587	35°,80
3,0	1,950	- 96°,52	1,800	- 15°,71	0,05367	+ 52°,67	0,06017	- 31°,87
1	2,059	100°,79	1,901	19°,37	0,04923	56°,76	0,05501	27°,92
2	2,176	105°,03	2,009	23°,08	0,04519	60°,84	0,05032	23°,97
3	2,301	109°,25	2,124	26°,83	0,04149	64°,93	0,04606	20°,02
4	2,434	113°,43	2,246	30°,62	0,03811	69°,01	0,04218	16°,06
3,5	2,576	- 117°,60	2,376	- 34°,44	0,03503	+ 73°,09	0,03866	- 12°,09
6	2,728	121°,73	2,515	38°,30	0,03220	77°,17	0,03544	8°,13
7	2,889	125°,87	2,664	42°,17	0,02961	81°,25	0,03251	4°,16
8	3,061	129°,99	2,823	46°,07	0,02724	85°,33	0,02984	- 0°,18
9	3,244	134°,10	2,992	49°,98	0,02507	89°,40	0,02740	+ 3°,80
4,0	3,439	- 138°,19	3,173	- 53°,90	0,02307	+ 93°,48	0,02517	+ 7°,78
1	3,646	142°,28	3,366	57°,84	0,02125	97°,55	0,02312	11°,76
2	3,867	146°,36	3,572	61°,79	0,01957	101°,62	0,02126	15°,75
3	4,102	150°,44	3,792	65°,74	0,01803	105°,70	0,01955	19°,74
4	4,352	154°,51	4,027	69°,71	0,01661	109°,77	0,01798	23°,73
4,5	4,618	- 158°,59	4,278	- 73°,67	0,01531	+ 113°,84	0,01654	+ 27°,73
6	4,901	162°,66	4,546	77°,64	0,01416	117°,91	0,01523	31°,72
7	5,203	166°,73	4,832	81°,61	0,013017	121°,98	0,01402	35°,72
8	5,524	170°,80	5,137	85°,59	0,012006	126°,05	0,012911	39°,72
9	5,866	174°,86	5,462	89°,57	0,011076	130°,11	0,011893	43°,73
5,0	6,231	- 178°,93	5,809	- 93°,55	0,010219	+ 134°,18	0,010958	+ 47°,73

Продолжение табл. 63

$r$	$b_0$	$\beta_0$	$b_1$	$\beta_1$	$h_0$	$\eta_0$	$h_1$	$\eta_1$
					0,01		0,01	
5,0	6,231	- 178° 93	5,809	- 93° 55	0219	+ 134° 18	0958	+ 47° 73
1	6,620	183° 00	6,179	97° 53	* 9431	138° 25	0099	51° 74
2	7,034	187° 07	6,574	101° 52	8705	142° 31	* 9310	55° 74
3	7,475	191° 14	6,996	105° 50	8036	146° 38	8584	59° 75
4	7,946	195° 21	7,446	109° 49	7420	150° 45	7917	63° 76
5,5	8,447	- 199° 28	7,925	- 113° 48	6853	+ 154° 51	7302	+ 67° 77
6	8,982	203° 35	8,437	117° 47	6329	158° 58	6737	71° 79
7	9,552	207° 42	8,983	121° 46	5847	162° 64	6217	75° 80
8	10,160	211° 49	9,566	125° 46	5402	166° 70	5738	79° 82
9	10,809	215° 56	10,187	129° 45	4991	170° 77	5297	83° 83
6,0	11,501	- 219° 62	10,850	- 133° 45	4613	+ 174° 83	4890	+ 87° 85
1	12,239	223° 69	11,558	137° 45	4264	178° 89	4516	91° 87
2	13,026	227° 76	12,313	141° 45	3941	182° 95	4170	95° 89
3	13,865	231° 83	13,119	145° 45	3644	187° 02	3852	99° 91
4	14,761	235° 90	13,978	149° 46	3369	191° 08	3559	103° 93
6,5	15,72	- 239° 96	14,896	- 153° 46	3116	+ 195° 14	3288	+ 107° 95
6	16,74	244° 03	15,88	157° 47	2881	199° 20	3039	111° 97
7	17,83	248° 10	16,92	161° 48	2665	203° 26	2808	116° 00
8	18,99	252° 16	18,04	165° 49	2465	207° 32	2596	120° 02
9	20,23	256° 23	19,23	169° 50	2281	211° 38	2400	124° 04
7,0	21,55	- 260° 29	20,50	- 173° 51	2110	+ 215° 44	2219	+ 128° 07
1	22,96	264° 36	21,86	177° 52	1952	219° 50	2051	132° 10
2	24,47	268° 42	23,31	181° 54	1807	223° 56	1897	136° 12
3	26,07	272° 49	24,86	185° 55	1672	227° 62	1755	140° 15
4	27,79	276° 55	26,51	189° 57	1548	231° 68	1623	144° 18
7,5	29,62	- 280° 61	28,27	- 193° 59	1433	+ 235° 74	1501	+ 148° 21
6	31,58	284° 67	30,16	197° 61	13262	239° 80	13890	152° 24
7	33,67	288° 74	32,17	201° 63	12278	243° 86	12851	156° 27
8	35,90	292° 80	34,32	205° 65	11368	247° 92	11892	160° 30
9	38,28	296° 86	36,62	209° 67	10526	251° 97	11005	164° 33
8,0	40,82	- 300° 92	39,07	- 213° 69	09747	+ 256° 03	10185	+ 168° 36
1	43,53	304° 98	41,69	217° 72	09207	260° 09	09427	172° 39
2	46,43	309° 04	44,49	221° 74	08360	264° 15	08727	176° 42
3	49,52	313° 10	47,48	225° 77	07743	268° 21	08079	180° 45
4	52,83	317° 16	50,67	229° 79	07173	272° 26	07479	184° 49
8,5	56,36	- 321° 22	54,08	- 233° 82	06644	+ 276° 32	06925	+ 188° 52
6	60,13	325° 28	57,73	237° 84	06155	280° 38	06412	192° 55
7	64,15	329° 34	61,62	241° 87	05703	284° 44	05938	196° 59
8	68,46	333° 40	65,78	245° 90	05284	288° 49	05499	200° 62
9	73,05	337° 46	70,22	249° 93	04896	292° 55	05093	204° 66
9,0	77,96	- 341° 52	74,97	- 253° 96	04537	+ 296° 61	04718	+ 208° 69
1	83,20	345° 58	80,04	257° 99	04204	300° 66	04370	212° 73
2	88,80	349° 64	85,47	262° 02	03896	304° 72	04048	216° 76
3	94,78	353° 69	91,27	266° 05	03611	308° 78	03750	220° 80
4	101,17	357° 75	97,46	270° 08	03347	312° 83	03475	224° 84
9,5	108,00	- 361° 81	104,08	- 274° 11	03102	+ 316° 89	03219	+ 228° 87
6	115,30	365° 87	111,16	278° 14	02876	320° 95	02983	232° 91
7	123,10	369° 93	118,72	282° 18	02666	325° 00	02764	236° 95
8	131,43	373° 98	126,80	286° 21	02471	329° 06	02562	240° 98
9	140,33	378° 04	135,44	290° 24	02291	333° 11	02374	245° 02
10,0	149,85	- 382° 10	144,67	- 294° 28	02124	+ 337° 17	02200	+ 249° 06
					0,00		0,00	

Таблица 64. Функции  $\frac{J_0(r\sqrt{i})}{J_1(r\sqrt{i})}$  и  $\frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i})}{H_1^{(1)}(r\sqrt{i})}$

$$J_0(r\sqrt{i}) : J_1(r\sqrt{i}) = \frac{b_0}{b_1} e^{i(\beta_0 - \beta_1)}, \quad H_0^{(1)}(r\sqrt{i}) : H_1^{(1)}(r\sqrt{i}) = \frac{h_0}{h_1} e^{i(\eta_0 - \eta_1)}$$

$$\left[ \frac{b_0}{b_1} = \frac{M_0}{M_1}, \quad \beta_0 - \beta_1 = -180^\circ + (\Theta_1 - \Theta_0); \quad \frac{h_0}{h_1} = \frac{N_0}{N_1}, \quad \eta_0 - \eta_1 = -180^\circ + (\Phi_1 - \Phi_0) \right]$$

	$\beta_0 - \beta_1^\circ$	$b_0/b_1$	$\frac{r}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r} \frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0 - \eta_1$	$h_0/h_1$	$\frac{r}{2} \frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r} \frac{h_0}{h_1}$
			1,			0,		
0,0	-45°00	∞	0000	∞	+ 45°00	0000	0,0000	∞
1	45°07	20,000	0000	400,00	61°09	2645	0,0132	5,290
2	45°29	10,001	0001	100,01	66°03	3839	0,0384	3,839
3	45°64	6,667	0001	44,45	68°86	4726	0,0709	3,151
4	46°15	5,002	0003	25,01	71°02	5372	0,1074	2,686
0,5	-46°79	4,002	0008	16,01	+ 72°74	5880	0,1470	2,352
6	47°57	3,339	0017	11,13	74°16	6288	0,1886	2,096
7	48°50	2,866	0032	8,188	75°35	6622	0,2318	1,892
8	49°56	2,513	0054	6,284	76°37	6903	0,2761	1,726
9	50°75	2,241	0084	4,980	77°25	7140	0,3213	1,587
1,0	-52°07	2,026	0128	4,051	+ 78°02	7346	0,3673	1,469
1	53°51	1,852	0188	3,368	78°70	7523	0,4138	1,368
2	55°05	1,711	0265	2,854	79°31	7677	0,4606	1,2795
3	56°68	1,594	0361	2,452	79°85	7814	0,5079	1,2022
4	58°38	1,497	0481	2,139	80°34	7936	0,5555	1,1337
1,5	-60°14	1,417	0627	1,889	+ 80°79	8045	0,6034	1,0727
6	61°94	1,350	0800	1,688	81°19	8145	0,6516	1,0181
7	63°75	1,295	1004	1,523	81°56	8234	0,6999	0,9687
8	65°55	1,249	1239	1,387	81°90	8316	0,7484	0,9240
9	67°31	1,211	1506	1,275	82°21	8391	0,7971	0,8833
2,0	-69°02	1,1804	1805	1,1804	+ 82°50	8459	0,8459	0,8459
1	70°67	1,1557	2135	1,1007	82°77	8522	0,8948	0,8116
2	72°22	1,1361	2497	1,0328	83°02	8579	0,9437	0,7799
3	73°68	1,1207	2888	0,9745	83°26	8632	0,9927	0,7506
4	75°03	1,1089	331	0,9241	83°47	8683	1,0419	0,7235
2,5	-76°26	1,1001	375	0,8801	+ 83°68	8728	1,0911	0,6983
6	77°39	1,0936	422	0,8413	83°87	8772	1,1404	0,6748
7	78°40	1,0892	470	0,8068	84°05	8812	1,1896	0,6527
8	79°30	1,0863	521	0,7759	84°22	8851	1,2391	0,6322
9	80°10	1,0844	572	0,7479	84°38	8886	1,2885	0,6128
3,0	-80°80	1,0835	625	0,7223	+ 84°53	8920	1,338	0,5947
1	81°42	1,0832	679	0,6988	84°68	8949	1,387	0,5774
2	81°95	1,0832	733	0,6769	84°81	8980	1,437	0,5612
3	82°41	1,0835	787	0,6567	84°94	9008	1,486	0,5459
4	82°81	1,0839	842	0,6375	85°07	9035	1,536	0,5315
3,5	-83°15	1,0842	897	0,6195	+ 85°19	9061	1,586	0,5178
6	83°45	1,0845	952	0,6026	85°30	9086	1,636	0,5048
7	83°70	1,0846	* 006	0,5862	85°40	9108	1,685	0,4923
8	83°92	1,0846	060	0,5707	85°51	9128	1,734	0,4804
9	84°12	1,0843	114	0,5560	85°60	9147	1,784	0,4691
4,0	-84°29	1,0838	168	0,5419	+ 85°70	9166	1,833	0,4583
1	84°44	1,0832	221	0,5284	85°79	9184	1,883	0,4480
2	84°57	1,0826	273	0,5155	85°87	9204	1,933	0,4383
3	84°69	1,0816	326	0,5031	85°96	9223	1,983	0,4290
4	84°81	1,0805	378	0,4912	86°03	9240	2,033	0,4200
4,5	-84°91	1,0794	429	0,4798	+ 86°11	9256	2,083	0,4114
6	85°02	1,0781	480	0,4688	86°18	9270	2,132	0,4030
7	85°11	1,0768	530	0,4582	86°25	9285	2,182	0,3951
8	85°20	1,0755	581	0,4481	86°32	9300	2,232	0,3875
9	85°29	1,0740	631	0,4384	86°39	9313	2,282	0,3801
5,0	-85°38	1,0723	682	0,4291	+ 86°45	9326	2,332	0,3730
			2,			0,		

Продолжение табл. 64

$r$	$\beta_0 - \beta_1$	$b_0/b_1$	$\frac{r}{2} \frac{b_0}{b_1}$	$\frac{2}{r} \frac{b_0}{b_1}$	$\eta_0 - \eta_1$	$h_0/h_1$	$\frac{r}{2} \frac{h_0}{h_1}$	$\frac{2}{r} \frac{h_0}{h_1}$
		1,0		0,		0,9		0,
5,0	- 85°,38	727	2,682	4291	+ 86°,45	326	2,332	3730
1	85°,47	713	2,732	4201	86°,51	339	2,381	3662
2	85°,55	699	2,782	4115	86°,57	350	2,431	3596
3	85°,64	685	2,832	4032	86°,63	362	2,481	3533
4	85°,72	672	2,881	3952	86°,68	372	2,530	3471
5,5	- 85°,80	659	2,931	3876	+ 86°,74	383	2,580	3412
6	85°,88	646	2,981	3802	86°,79	393	2,630	3355
7	85°,95	633	3,030	3731	86°,84	405	2,680	3300
8	86°,03	621	3,080	3663	86°,89	414	2,730	3246
9	86°,10	611	3,130	3597	86°,93	423	2,780	3194
6,0	- 86°,17	600	3,180	3533	+ 86°,98	433	2,830	3144
1	86°,24	589	3,230	3472	87°,02	443	2,880	3096
2	86°,31	578	3,279	3412	87°,07	451	2,930	3049
3	86°,38	568	3,329	3355	87°,11	460	2,980	3003
4	86°,44	559	3,379	3300	87°,15	466	3,029	2958
6,5	- 86°,50	551	3,429	3246	+ 87°,19	474	3,079	2915
6	86°,56	542	3,479	3194	87°,23	480	3,128	2873
7	86°,62	534	3,529	3144	87°,27	487	3,178	2832
8	86°,68	526	3,579	3096	87°,30	495	3,228	2793
9	86°,73	520	3,629	3050	87°,34	503	3,278	2754
7,0	- 86°,78	513	3,680	3004	+ 87°,37	510	3,328	2717
1	86°,83	505	3,729	2959	87°,41	517	3,379	2681
2	86°,88	497	3,779	2916	87°,44	524	3,429	2646
3	86°,93	490	3,829	2874	87°,47	531	3,479	2611
4	86°,98	483	3,879	2833	87°,50	537	3,529	2578
7,5	- 87°,02	477	3,929	2794	+ 87°,53	542	3,578	2545
6	87°,07	471	3,979	2756	87°,56	548	3,628	2513
7	87°,11	465	4,029	2718	87°,59	553	3,678	2481
8	87°,15	459	4,079	2682	87°,62	559	3,728	2451
9	87°,19	453	4,129	2646	87°,65	565	3,778	2422
8,0	- 87°,23	447	4,179	2612	+ 87°,67	570	3,828	2393
1	87°,26	441	4,229	2578	87°,70	576	3,878	2364
2	87°,30	436	4,279	2545	87°,73	580	3,928	2336
3	87°,34	430	4,329	2513	87°,75	584	3,977	2309
4	87°,37	426	4,379	2482	87°,78	589	4,027	2283
8,5	- 87°,40	421	4,429	2452	+ 87°,80	594	4,077	2257
6	87°,44	416	4,479	2422	87°,82	599	4,128	2232
7	87°,47	411	4,529	2393	87°,85	604	4,178	2208
8	87°,50	407	4,579	2365	87°,87	609	4,228	2184
9	87°,53	403	4,629	2338	87°,89	614	4,278	2160
9,0	- 87°,56	398	4,679	2311	+ 87°,91	617	4,328	2137
1	87°,59	394	4,729	2284	87°,93	620	4,377	2114
2	87°,62	389	4,779	2258	87°,96	624	4,427	2092
3	87°,65	385	4,829	2233	87°,98	629	4,477	2071
4	87°,67	381	4,879	2209	88°,00	632	4,527	2049
9,5	- 87°,70	378	4,930	2185	+ 88°,02	637	4,578	2029
6	87°,72	374	4,980	2161	88°,04	641	4,628	2009
7	87°,75	370	5,029	2138	88°,05	644	4,677	1989
8	87°,77	365	5,079	2115	88°,07	647	4,727	1969
9	87°,80	361	5,129	2093	88°,09	651	4,777	1950
10,0	- 87°,82	358	5,179	2072	+ 88°,11	655	4,827	1931
		1,0		0,		0,9		0,

## С. ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ

## 1. Функции Ангера и Вебера

1.1. Функции Ангера  $J_\nu(z)$  и функции Вебера  $e_\nu(z)$  получаются в связи с интегральным представлением Бесселя для  $J_\nu(z)$ . Именно,

$$J_\nu(z) \pm i E_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm i(\nu t - z \sin t)} dt,$$

т. е.  $J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu t - z \sin t) dt$ ,  $E_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(\nu t - z \sin t) dt$ .

В некоторых случаях  $-E_\nu(z)$  обозначают через  $\Omega_\nu(z)$  и называют функцией Ломмеля—Вебера (рис. 173, таблица 65).

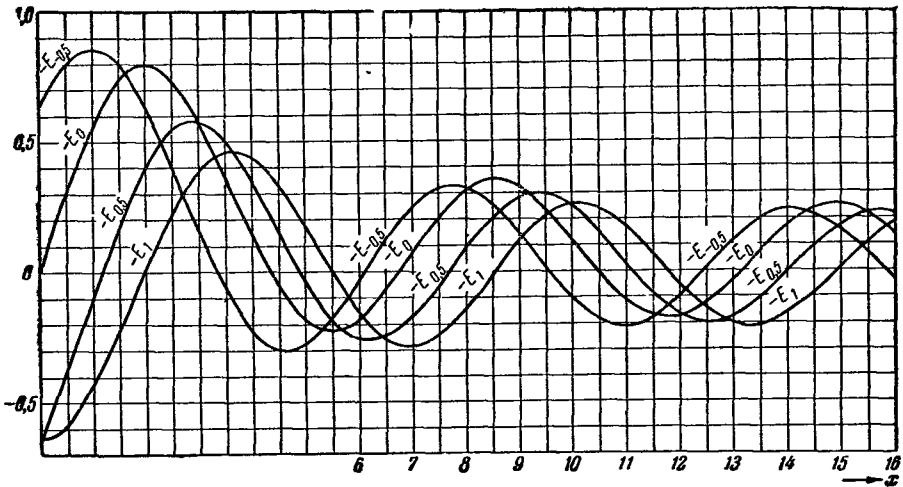


Рис. 173. Функция Вебера  $E_\nu(x)$ .

Эти функции являются решениями следующих неоднородных дифференциальных уравнений Бесселя:

$$J_\nu(z): \quad z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (z - \nu) \sin \nu \pi, \\ -\frac{1}{\pi} [(z + \nu) + (z - \nu) \cos \nu \pi]. \end{cases}$$

$$E_\nu(z):$$

Для целого порядка  $n$  имеем  $J_n(z) = J_n(z)$ . Если  $\nu$  не целое, то функции  $J_\nu(z)$  и  $E_\nu(z)$  связаны соотношениями

$$\sin \nu \pi \cdot J_\nu(z) = \cos \nu \pi \cdot E_\nu(z) - E_{-\nu}(z), \quad \sin \nu \pi \cdot E_\nu(z) = J_{-\nu}(z) - \cos \nu \pi \cdot J_\nu(z).$$

Функция Вебера  $E_\nu(z)$  разлагается в степенной ряд

$$\frac{\pi}{2} E_\nu(z) = \frac{1}{\nu} \sin^2 \frac{\nu \pi}{2} \left[ 1 - \frac{z^2}{2^2 - \nu^2} + \frac{z^4}{(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)} - \dots \right] - \cos^2 \frac{\nu \pi}{2} \left[ \frac{z}{1^2 - \nu^2} - \frac{z^3}{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)} + \dots \right].$$

Ее асимптотика при  $|z| \gg 1$ ,  $|z| \gg |\nu|$  описывается формулой

$$E_\nu(z) + N_\nu(z) \approx -\frac{1 + \cos \nu \pi}{\pi z} \left[ 1 - \frac{1^2 - \nu^2}{z^2} + \frac{(1^2 - \nu^2)(3^2 - \nu^2)}{z^4} - \dots \right] - \frac{1 - \cos \nu \pi}{\pi z} \left[ \frac{\nu}{z} - \frac{\nu(2^2 - \nu^2)}{z^3} + \frac{\nu(2^2 - \nu^2)(4^2 - \nu^2)}{z^5} - \dots \right].$$

1.2. Неполными функциями Ангера и Вебера называются функции

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^z \cos(vt - r \sin t) dt, \quad -v = \frac{1}{\pi} \int_0^z \sin(vt - r \sin t) dt.$$

Если верхний предел  $z = \pi$ , то они превращаются соответственно в функции Ангера и Вебера  $J_\nu(r)$  и  $E_\nu(r)$ . Для  $r = v$  см. таблицы 66 и 67.

## 2. Функция Струве

Функции Струве  $H_\nu(z)$  получаются в связи с интегральным представлением Пуассона для функций Бесселя при  $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ . Именно,

$$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt.$$

Они являются решениями следующего неоднородного дифференциального уравнения Бесселя:

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2) w = \frac{4}{\Gamma(1/2)} \frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1/2)}.$$

Функции Струве целого порядка  $n$  связаны с функциями Вебера; в частности, имеем (рис. 174, таблица 65):  $H_0(z) = -E_0(z)$ ,  $H_1(z) = -E_1(z) + 2/\pi$ .

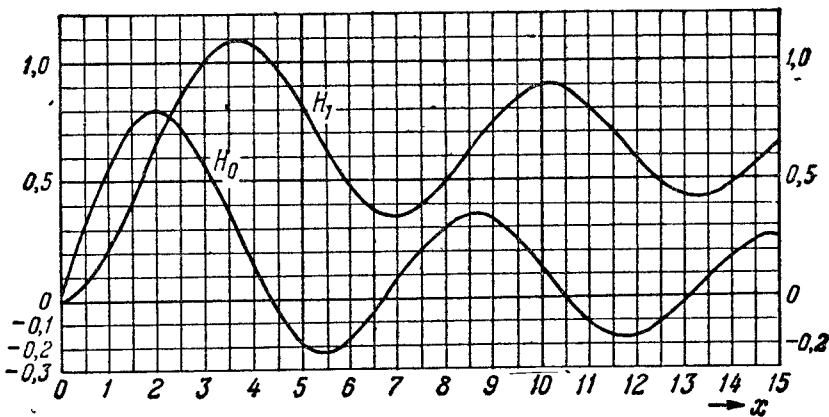


Рис. 174. Функции Струве  $H_\nu(x)$ .

Функции Струве порядка  $n + 1/2$  ( $n$  — целое число) являются элементарными функциями, например

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} H_{1/2}(z) = \frac{1 - \cos z}{\sqrt{z}}.$$

Разложение функции  $H_\nu(z)$  в степенной ряд таково:

$$H_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+3/2)} \left[ 1 - \frac{z^2}{3(2\nu+3)} + \frac{z^4}{3 \cdot 5(2\nu+3)(2\nu+5)} - \dots \right].$$

Ее асимптотика при  $|z| \gg 1$ ,  $|z| \gg |\nu|$  дается формулой

$$H_\nu(z) - N_\nu(z) \approx \frac{(z/2)^{\nu-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1/2)} \left[ 1 + \frac{1 \cdot (2\nu-1)}{z^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (2\nu-1)(2\nu-3)}{z^4} + \dots \right].$$



Таблица 65. Функции Вебера  $E_0(x)$ ,  $E_1(x)$  и функции Струве  $H_0(x)$ ,  $H_1(x)$

$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
0,00	+ 0,	- 0,	+ 0,	1,00	+ 0,	- 0,	+ 0,
02	0127 + 63,5	6366 + 0,5	0000 + 0,5	02	5687 + 43	4382 + 37,5	1985 + 37
04	0255 64	6365 1	0001 - 1	04	5773 43	4307 38	2059 38
06	0382 63,5	6363 2	0003 2,5	06	5859 42	4231 38	2135 38
08	0509 63,5	6359 3	0008 3	08	5943 41	4155 39	2211 39
0,10	0636 + 63,5	6353 4	0014 3,5	06	6025 40,5	4077 39	2289 39,5
12	0763 63	6345 + 4,5	0021 + 5	1,10	6106 + 39,5	3999 + 40	2368 + 39,5
14	0889 63,5	6336 5,5	0031 5,5	12	6185 39	3919 40	2447 40,5
16	1016 63	6325 6,5	0042 6	14	6263 38	3839 41	2528 40,5
18	1142 63	6312 7	0054 7,5	16	6339 37	3757 41	2609 41
0,20	1268 + 62,5	6298 8	0069 8	18	6413 36	3675 41,5	2691 41,5
22	1393 62,5	6282 + 9	0085 + 8,5	1,20	6485 + 36	3592 + 42	2774 + 42
24	1518 62,5	6264 10	0102 10	22	6557 34,5	3508 42,5	2858 42,5
26	1643 62,5	6244 10,5	0122 10,5	24	6626 33,5	3423 42,5	2943 42,5
28	1767 62	6223 11	0143 11,5	26	6693 33	3338 43	3028 43
0,30	1891 + 61,5	6201 12,5	0166 12	28	6759 32,5	3252 43,5	3114 43,5
32	2014 61,5	6176 + 13	0190 + 13	1,30	6824 + 31	3165 + 44	3201 + 44
34	2137 61,5	6150 13,5	0216 13,5	32	6886 30,5	3077 44	3289 44
36	2259 61	6123 14,5	0243 15	34	6947 29	2989 44,5	3377 44,5
38	2381 60	6094 15,5	0273 15	36	7005 29	2900 44,5	3466 44,5
0,40	2501 + 60,5	6063 16,5	0303 16,5	38	7063 27,5	2811 45	3555 45
42	2622 59,5	6030 + 17	0336 + 17	1,40	7118 + 26,5	2721 + 45,5	3645 + 45,5
44	2741 59,5	5996 17,5	0370 18	42	7171 26	2630 45,5	3736 45,5
46	2860 59	5961 19	0406 18,5	44	7223 25	2539 45,5	3827 45,5
48	2978 59	5923 19	0443 19	46	7273 24	2448 46	3918 46
0,50	3096 + 58	5885 20,5	0481 20,5	48	7321 23	2356 46,5	4010 46,5
52	3212 58	5844 + 20,5	0522 + 21	1,50	7367 + 22,5	2263 + 46,5	4103 + 46,5
54	3328 57	5803 22	0564 21,5	52	7412 21	2170 46,5	4196 46,5
56	3442 57	5759 22	0607 22,5	54	7454 20,5	2077 46,5	4289 46,5
58	3556 56,5	5715 23,5	0652 23	56	7495 19	1984 47	4382 47
0,60	3669 + 56	5668 24	0698 24	58	7533 18,5	1890 47	4476 47
62	3781 55,5	5620 + 24,5	0746 + 24,5	1,60	7570 + 17,5	1796 + 47,5	4570 + 47,5
64	3892 55	5571 25,5	0795 25,5	62	7605 16,5	1701 47	4665 47
66	4002 54,5	5520 26	0846 26	64	7638 15,5	1607 47,5	4759 47,5
68	4111 53,5	5468 26,5	0898 26,5	66	7669 15	1512 47,5	4854 47,5
0,70	4218 + 53,5	5415 27,5	0951 27,5	68	7699 13,5	1417 47,5	4949 47,5
72	4325 53	5360 + 28	1006 + 28,5	1,70	7726 + 13	1322 + 47,5	5044 + 48
74	4431 52	5304 29	1063 28,5	72	7752 11,5	1227 48	5140 47,5
76	4535 51,5	5246 29,5	1120 29,5	74	7775 11	1131 47,5	5235 47,5
78	4638 51	5187 30	1179 30,5	76	7797 10	1036 47,5	5330 48
0,80	4740 + 50,5	5127 31	1240 30,5	78	7817 9	0941 48	5426 47,5
82	4841 49,5	5065 + 31,5	1301 + 31,5	1,80	7835 + 7,5	0845 + 47,5	5521 + 47,5
84	4940 49	5002 32	1364 32	82	7850 7,5	0750 47,5	5616 48
86	5038 48,5	4938 33	1428 33	84	7865 6	0655 48	5712 47,5
88	5135 47,5	4872 33	1494 33	86	7877 5	0559 47,5	5807 47,5
0,90	5230 + 47	4806 34	1560 34	88	7887 4	0464 47	5902 47,5
92	5324 46,5	4738 + 34,5	1628 + 34,5	1,90	7895 + 3,5	0370 + 47,5	5997 + 47
94	5417 45,5	4669 35	1697 35	92	7902 2	0275 47,5	6091 47,5
96	5508 45	4599 35,5	1767 36	94	7906 1,5	0180 47	6186 47
98	5598 44,5	4528 36,5	1839 36	96	7909 + 0,5	0086 47	6280 47
1,00	5687 + 0,	4455 36,5	1911 37	98	7910 - 0,5	* 0008 46,5	6374 47
				2,00	7909	0101	6468
					+ 0,	+ 0,	+ 0,

Продолжение табл. 66

x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	x	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
2,00	+ 0,	+ 0,	+ 0,	3,00	+ 0,	+ 0,	+ 1,
02	7909 - 1,5	0101 + 47	6468 + 46,5	02	5743 - 38,5	3835 + 23	0201 + 23
04	7906 2,5	0195 + 46,5	6561 46,5	04	5666 39	3881 22,5	0247 22,5
06	7901 3,5	0288 46	6654 46,5	06	5588 39,5	3926 21,5	0292 21,5
08	7896 4	0380 46	6747 46	08	5509 40	3969 21	0335 21
	7886 5,5	0472 46	6839 45,5		5429 40,5	4011 20,5	0377 20,5
2,10	7875 - 6	0564 + 45,5	6930 + 46	3,10	5348 - 40,5	4052 + 19,5	0418 + 19,5
12	7863 7	0655 45,5	7022 45	12	5267 41	4091 18,5	0457 18,5
14	7849 8	0746 45	7112 45,5	14	5185 41,5	4128 18	0494 18
16	7833 8,5	0836 45	7203 44,5	16	5102 42	4164 17,5	0530 17,5
18	7816 10	0926 44,5	7292 44,5	18	5018 42	4199 16,5	0565 16,5
2,20	7796 - 10,5	1015 + 44,5	7381 + 44,5	3,20	4934 - 42,5	4232 + 16	0598 + 16
22	7775 11,5	1104 44	7470 66	22	4849 43	4264 15	0630 15
24	7752 12,5	1192 43,5	7558 43,5	24	4763 43	4294 14,5	0660 14,5
26	7727 13	1279 43	7645 43,5	26	4677 43	4323 13,5	0689 13,5
28	7701 14	1365 43	7732 42,5	28	4591 44	4350 13	0716 13
2,30	7673 - 15	1451 + 42,5	7817 + 43	3,30	4503 - 44	4376 + 12	0742 + 12
32	7643 16	1536 42,5	7903 42	32	4415 44	4400 11,5	0766 11,5
34	7611 16,5	1621 41,5	7987 42	34	4327 44	4423 10,5	0789 10,5
36	7578 17,5	1704 41,5	8071 41	36	4239 44,5	4444 9,5	0810 10
38	7543 18,5	1787 41	8153 41	38	4150 45	4463 9,5	0830 9
2,40	7506 - 19	1869 + 40,5	8235 + 40,5	3,40	4060 - 45	4482 + 8	0848 + 8
42	7468 20	1950 40	8316 40	42	3970 45	4498 7,5	0864 8
44	7428 20,5	2030 40	8396 60	44	3880 45	4513 7	0880 6,5
46	7387 21,5	2110 39	8476 39	46	3790 45,5	4527 6	0893 6
48	7344 22	2188 38,5	8554 39	48	3699 45,5	4539 5,5	0905 5,5
2,50	7300 - 23	2265 + 38,5	8632 + 38	3,50	3608 - 45,5	4550 + 4,5	0916 + 4,5
52	7254 24	2342 37,5	8708 37,5	52	3517 45,5	4559 3,5	0925 3,5
54	7206 24,5	2417 37,5	8783 37,5	54	3426 46	4566 3	0932 3
56	7157 25,5	2492 36,5	8858 36,5	56	3334 45,5	4572 2,5	0938 2,5
58	7106 26	2565 36	8931 36,5	58	3243 46	4577 1,5	0943 1,5
2,60	7054 - 26,5	2637 + 36	9004 + 35,5	3,60	3151 - 45,5	4580 + 0,5	0946 + 0,5
62	7001 27,5	2709 35	9075 35	62	3060 46	4581 0	0947 0
64	6946 28	2779 34,5	9145 34,5	64	2968 45,5	4581 - 1	0947 - 0,5
66	6890 29	2848 34	9214 34	66	2877 46	4579 1,5	0946 1,5
68	6832 29,5	2916 33,5	9282 33,5	68	2785 45,5	4576 2	0943 2,5
2,70	6773 - 30	2983 + 32,5	9349 + 33	3,70	2694 - 46	4572 - 3	0938 - 3
72	6713 31	3048 32,5	9415 32	72	2602 45,5	4566 4	0932 3,5
74	6651 31,5	3113 31,5	9479 31,5	74	2511 45,5	4558 4,5	0925 4,5
76	6598 32	3176 31	9542 31	76	2420 45,5	4549 5	0916 5,5
78	6529 32,5	3238 30,5	9604 30,5	78	2329 45,5	4539 6	0905 6
2,80	6459 - 33,5	3299 + 29,5	9665 + 30	3,80	2238 - 45	4527 - 6,5	0893 - 6,5
82	6392 34	3359 29,5	9725 29	82	2148 45	4514 7,5	0880 7,5
84	6324 34,5	3417 28,5	9783 28,5	84	2058 45	4499 8	0865 8
86	6255 35	3473 28	9840 27,5	86	1968 45	4483 8,5	0849 8,5
88	6185 35,5	3529 27	9895 27,5	88	1878 44,5	4466 9,5	0832 9,5
2,90	6114 - 36	3583 + 26,5	9950 + 26,5	3,90	1789 - 44	4447 - 10,5	0813 - 10,5
92	6042 36,5	3636 26	* 0003 25,5	92	1701 44,5	4426 11	0792 10,5
94	5969 37	3688 25	0054 25,5	94	1612 44	4404 11,5	0771 11,5
96	5895 38	3738 24,5	0105 24,5	96	1524 43,5	4381 12	0748 12,5
98	5819 38	3787 24	0154 23,5	98	1437 43,5	4357 13	0723 13
3,00	5743	3835	0201	4,00	1350	4331	0697
	+ 0,	+ 0,	+ 1,		+ 0,	+ 0,	+ 1,

Продолжение табл. 65

$x$	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
4,00	+ 0,	+ 0,	+ 1,	5,00	- 0,	+ 0,	+ 0,
02	1350 - 43	4331 - 13,5	0697 - 13,5	5,00	1852 - 17	1712 - 35	8078 - 34,5
04	1264 43	4304 14,5	0670 14	02	1886 16	1642 34,5	8009 35
06	1178 42,5	4275 14,5	0642 15	04	1918 15,5	1573 35	7939 35
08	1093 42,5	4246 15,5	0612 15,5*	06	1949 14,5	1503 35	7869 35
	1008 42	4215 16,5	0581 16,5	08	1978 14	1433 35,5	7799 35,5
4,10	0924 - 41,5	4182 - 16,5	0548 - 16,5	5,10	2006 - 13	1362 - 35	7728 - 35
12	0841 41,5	4149 17,5	0515 17,5	12	2032 13	1292 35,5	7658 35,5
14	0758 41	4114 18	0480 18	14	2058 11,5	1221 35,5	7587 35
16	0676 40,5	4078 19	0444 18,5	16	2081 11,5	1150 35	7517 35,5
18	0595 40	4040 19	0407 19,5	18	2104 10	1080 35,5	7446 35,5
4,20	0515 - 40	4002 - 20	0368 - 19,5	5,20	2124 - 10	1009 - 35,5	7375 - 35,5
22	0435 39,5	3962 20,5	0329 20,5	22	2144 9	0938 35,5	7304 35,5
24	0356 39	3921 20,5	0288 21	24	2162 8,5	0867 35,5	7233 35,5
26	0278 38,5	3880 22	0246 21,5	26	2179 7,5	0796 35,5	7162 35
28	0201 38	3836 22	0203 22,5	28	2194 7	0725 35	7092 35,5
4,30	0125 - 38	3792 - 22,5	0158 - 22,5	5,30	2208 - 6	0655 - 35,5	7021 - 35,5
32	0049 37	3747 23	0113 23	32	2220 5,5	0584 35	6950 35
34	* 0025 37	3701 24	0067 24	34	2231 5	0514 35,5	6880 35
36	0099 36	3653 24	0019 24	36	2241 4	0443 35	6810 35,5
38	0171 36	3605 25	* 9971 25	38	2249 3,5	0373 35	6739 34,5
4,40	0243 - 35	3555 - 25	9921 - 25	5,40	2256 - 2,5	0303 - 34,5	6670 - 35
42	0313 35	3505 26	9871 25,5	42	2261 2	0234 35	6600 35
44	0383 34,5	3453 26	9820 26,5	44	2265 1	0164 34,5	6530 34,5
46	0452 33,5	3401 26,5	9767 26,5	46	2267 - 1	0095 34,5	6461 34,5
48	0519 33	3348 27	9714 27	48	2269 + 0,5	0026 34	6392 34
4,50	0585 - 33	3294 - 28	9660 - 27,5	5,50	2268 + 0,5	* 0042 - 34,5	6324 - 34
52	0651 32	3238 27,5	9605 28	52	2267 1,5	0111 33,5	6256 34
54	0715 31,5	3183 28,5	9549 28,5	54	2264 2	0178 34	6188 34
56	0778 31	3126 29	9492 29	56	2260 3	0246 33,5	6120 33,5
58	0840 30,5	3068 29	9434 29	58	2254 3,5	0313 33	6053 33
4,60	0901 - 29,5	3010 - 29,5	9376 - 29,5	5,60	2247 + 4	0379 - 33	5987 - 33
62	0960 29,5	2951 30	9317 30	62	2239 4,5	0445 33	5921 33
64	1019 28,5	2891 30,5	9257 30,5	64	2230 5	0511 32,5	5855 32,5
66	1076 28	2830 30,5	9196 30,5	66	2219 6,5	0576 32,5	5790 32,5
68	1132 27,5	2769 31	9135 31	68	2206 6,5	0641 32	5725 32
4,70	1187 - 26,5	2707 - 31,5	9073 - 31,5	5,70	2193 + 7,5	0705 - 31,5	5661 - 31,5
72	1240 26	2644 31,5	9010 31,5	72	2178 8	0768 31,5	5598 31,5
74	1292 25,5	2581 32	8947 32	74	2162 8,5	0831 31	5535 31
76	1343 25	2517 32,5	8883 32	76	2145 9	0893 31	5473 31
78	1393 24,5	2452 32,5	8819 32,5	78	2127 10	0955 30,5	5411 30,5
4,80	1442 - 23,5	2387 - 32,5	8754 - 33	5,80	2107 + 10,5	1016 - 30	5350 - 30
82	1489 22,5	2322 33	8688 33	82	2086 11	1076 30	5290 29,5
84	1534 22,5	2256 33,5	8622 33,5	84	2064 11,5	1136 29	5231 29,5
86	1579 21,5	2189 33,5	8555 33,5	86	2041 12,5	1194 29	5172 29
88	1622 21	2122 33,5	8488 33,5	88	2016 13	1252 29	5114 29
4,90	1664 - 20	2055 - 34	8421 - 34	5,90	1990 + 13	1310 - 28	5056 - 28
92	1704 19,5	1987 34	8353 34	92	1964 14	1366 28	5000 28
94	1743 19	1919 34,5	8285 34,5	94	1936 14,5	1422 27,5	4944 27,5
96	1781 18	1850 34,5	8216 34,5	96	1907 15	1477 27	4889 27
98	1817 17,5	1781 34,5	8147 34,5	98	1877 15,5	1531 26,5	4835 26,5
5,00	1852	1712	8078	6,00	1846	1584	4782
	- 0,	+ 0,	+ 0,		- 0,	- 0,	+ 0,

Продолжение табл. 65

$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
6,00	-0,	-0,	+0,	7,00	+0,	-0,	+0,
02	1846 + 16,5	1584 - 26,5	4782 - 26,5	02	0634 + 29	2903 + 1,5	3463 + 1,5
04	1813 16 5	1637 25,5	4729 25,5	04	0692 29	2900 2,5	3466 2,5
06	1780 17	1688 25,5	4678 25 5	06	0750 29	2895 3	3471 3
08	1746 17,5	1739 25	4627 25	08	0808 28,5	2889 3	3477 3,5
6,10	1711 18,5	1789 24,5	4577 24	08	0865 29	2883 4	3484 4
12	1674 + 18,5	1838 - 23,5	4529 - 24	7,10	0923 + 28,5	2875 + 5	3492 + 4,5
14	1637 19	1885 23,5	4481 23,5	12	0980 29	2865 5	3501 5
16	1599 19,5	1932 23	4434 23	14	1038 28,5	2855 5,5	3511 6
18	1560 20	1978 22,5	4388 22,5	16	1095 28	2844 6,5	3523 6
6,20	1520 20,5	2023 22	4343 22	18	1151 28,5	2831 7	3535 7
22	1479 + 21	2067 - 21,5	4299 - 21,5	7,20	1208 + 28	2817 + 7,5	3549 + 7,5
24	1437 21,5	2110 21	4256 21	22	1264 28	2802 8	3564 8
26	1394 21,5	2152 20,5	4214 20,5	24	1320 27,5	2786 8,5	3580 8,5
28	1351 22	2193 20	4173 20	26	1375 28	2769 9	3597 9
6,30	1307 22,5	2233 19	4133 19	28	1431 27	2751 9,5	3615 9,5
32	1262 + 23	2271 - 19	4095 - 19	7,30	1485 + 27,5	2732 + 10	3634 + 10,5
34	1216 23,5	2309 18,5	4057 18,5	32	1540 27	2712 11	3655 10,5
36	1169 23,5	2346 17,5	4020 17,5	34	1594 27	2690 11	3676 11
38	1122 24	2381 17,5	3985 17,5	36	1648 26,5	2668 11,5	3698 12
6,40	1074 24,5	2416 16,5	3950 16,5	38	1701 26	2645 12,5	3722 12
42	1025 + 24,5	2449 - 16	3917 - 16	7,40	1753 + 26	2620 + 12,5	3746 + 13
44	0976 25	2481 15,5	3885 15,5	42	1805 26	2595 13,5	3772 13
46	0926 25	2512 15	3854 15	44	1857 25 5	2568 13,5	3798 13,5
48	0876 25,5	2542 14,5	3824 14,5	46	1908 25,5	2541 14,5	3825 14,5
6,50	0825 26	2571 14	3795 13,5	48	1959 25	2512 14,5	3854 14,5
52	0773 + 26	2599 - 13	3768 - 13,5	7,50	2009 + 24 5	2483 + 15	3883 + 15
54	0721 26,5	2625 12,5	3741 12,5	52	2058 24,5	2453 15,5	3913 16
56	0668 26,5	2650 12,5	3716 12	54	2107 24	2422 16,5	3945 16
58	0615 27	2675 11	3692 11,5	56	2155 23,5	2389 16,5	3977 16,5
6,60	0561 27	2697 11	3669 11	58	2202 23,5	2356 16,5	4010 17
62	0507 + 27,5	2719 - 10,5	3647 - 10,5	7,60	2249 + 23	2323 + 17,5	4044 + 17
64	0452 27,5	2740 9,5	3626 9,5	62	2295 23	2288 18	4078 18
66	0397 27,5	2759 9	3607 9	64	2341 22	2252 18	4114 18,5
68	0342 28	2777 8,5	3589 8,5	66	2385 22	2216 19	4151 18,5
6,70	0286 28	2794 8	3572 8	68	2429 21,5	2178 19	4188 19
72	0230 + 28	2810 - 7,5	3554 - 7,5	7,70	2472 + 21,5	2140 + 19,5	4226 + 19,5
74	0174 28 5	2825 6,5	3541 6 5	72	2515 20,5	2101 19,5	4265 19,5
76	0117 28,5	2838 6 5	3528 6	74	2556 20,5	2062 20,5	4304 20,5
78	0060 28 5	2851 5 5	3516 5 5	76	2597 20	2021 20,5	4345 20,5
6,80	0003 28,5	2862 4,5	3505 5	78	2637 20	1980 20,5	4386 21
82	*0054 + 29	2871 - 4 5	3495 - 4 5	7,80	2677 + 19	1939 + 21,5	4428 + 21
84	0112 29	2880 3,5	3486 3,5	82	2715 18,5	1896 21,5	4470 21,5
86	0170 28 5	2887 3	3479 3	84	2752 18 5	1853 22	4513 22
88	0227 29	2893 2 5	3473 2 5	86	2789 18	1809 22,5	4557 22,5
6,90	0285 29	2898 2	3468 2	88	2825 17,5	1764 22,5	4602 22,5
92	0343 + 29	2902 - 1,5	3464 - 1,5	7,90	2860 + 16,5	1719 + 22,5	4647 + 23
94	0401 29	2905 - 0,5	3461 - 0,5	92	2893 16,5	1674 23,5	4693 23
96	0459 29,5	2906 0	3460 0	94	2926 16,5	1627 23,5	4739 23,5
98	0518 29	2906 + 0,5	3460 + 0,5	96	2959 15 5	1580 23,5	4786 23,5
7,00	0576 29	2905 1	3461 1	98	2990 15	1533 24	4833 24
	+0,	-0,	+0,	8,00	3020	1485	4881
					+0,	-0,	+0,

Продолжение табл. 65

$x$	$-\frac{E_0(x)}{H_0(x)}$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-\frac{E_0(x)}{H_0(x)}$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
8,00	+ 0,	- 0,	+ 0,	9,00	+ 0,	+ 0,	+ 0,
02	3020 + 14,5	1485 + 24	4881 + 24,5	9,00	3199 - 11,5	1119 + 23,5	7485 + 24
04	3049 14	1437 24,5	4930 24,5	02	3176 12	1166 23,5	7533 23
06	3077 14	1388 25	4979 24,5	04	3152 12,5	1213 23	7579 23
08	3105 13	1338 25	5028 25	06	3127 12,5	1259 22,5	7625 22,5
	3131 12,5	1288 25	5078 25	08	3102 13,5	1304 22,5	7670 22,5
8,10	3156 + 12	1238 + 25	5128 + 25,5	9,10	3075 - 13,5	1349 + 22	7715 + 22,5
12	3180 12	1188 26	5179 25,5	12	3048 14,5	1393 22	7760 21,5
14	3204 11	1136 25,5	5230 25,5	14	3019 14,5	1437 21,5	7803 21,5
16	3226 10,5	1085 26	5281 26	16	2990 15	1480 21	7846 21,5
18	3247 10	1033 26	5333 26	18	2960 15,5	1522 21	7889 20,5
8,20	3267 + 9,5	0981 + 26	5385 + 26	9,20	2929 - 15,5	1564 + 20,5	7930 + 20,5
22	3286 9	0929 26,5	5437 26,5	22	2898 16,5	1605 20	7971 20,5
24	3304 8,5	0876 26,5	5490 26,5	24	2865 16,5	1645 20	8012 19,5
26	3321 8	0823 26,5	5543 26,5	26	2832 17	1685 19,5	8051 19,5
28	3337 7,5	0770 26,5	5596 26,5	28	2798 17,5	1724 19	8090 19
8,30	3352 + 7	0717 + 27	5649 + 27	9,30	2763 - 18	1762 + 18,5	8128 + 19
32	3366 6,5	0663 26,5	5703 26,5	32	2727 18	1799 18,5	8166 18
34	3379 5,5	0610 27	5756 27	34	2691 18,5	1836 18	8202 18
36	3390 5,5	0556 27	5810 27	36	2654 19	1872 17,5	8238 17,5
38	3401 4,5	0502 27	5864 27	38	2616 19	1907 17	8273 17
8,40	3410 + 4,5	0448 + 27	5918 + 27	9,40	2578 - 20	1941 + 17	8307 + 17
42	3419 3,5	0394 27	5972 27,5	42	2538 19,5	1975 16	8341 16,5
44	3426 3	0340 27,5	6027 27	44	2499 20,5	2007 16	8374 15,5
46	3432 3	0285 27	6081 27	46	2458 20,5	2039 15,5	8405 15,5
48	3438 2	0231 27	6135 27,5	48	2417 21	2070 15	8436 15
8,50	3442 + 1,5	0177 + 27,5	6190 + 27	9,50	2375 - 21	2100 + 15	8466 + 15
52	3445 + 1	0122 27	6244 27	52	2333 21,5	2130 14	8496 14
54	3447 0	0068 27	6298 27	54	2290 21,5	2158 13,5	8524 14
56	3447 0	0014 27	6352 27	56	2247 22	2185 13,5	8552 13
58	3447 - 0,5	* 0040 27	6406 27	58	2203 22,5	2212 13	8578 13
8,60	3446 - 1,5	0094 + 27	6460 + 27	9,60	2158 - 22,5	2238 + 12	8604 + 12,5
62	3443 1,5	0148 26,5	6514 27	62	2113 22,5	2262 12	8629 12
64	3440 2,5	0201 27	6568 26,5	64	2068 23	2286 11,5	8653 11
66	3435 2,5	0255 26,5	6621 26,5	66	2022 23,5	2309 11	8675 11
68	3430 3,5	0308 26,5	6674 27	68	1975 23	2331 10,5	8697 11
8,70	3423 - 4	0361 + 26,5	6728 + 26	9,70	1929 - 24	2352 + 10	8719 + 10
72	3415 4,5	0414 26,5	6780 26,5	72	1881 23,5	2372 10	8739 9,5
74	3406 4,5	0467 26	6833 26	74	1834 24	2392 9	8758 9
76	3397 5,5	0519 26	6885 26	76	1786 24,5	2410 8,5	8776 8,5
78	3386 6	0571 26	6937 26	78	1737 24	2427 8	8793 8,5
8,80	3374 - 6,5	0623 + 25,5	6989 + 26	9,80	1689 - 24,5	2443 + 8	8810 + 7,5
82	3361 7	0674 26	7041 25,5	82	1640 25	2459 7	8825 7
84	3347 7,5	0726 25	7092 25	84	1590 24,5	2473 6,5	8839 7
86	3332 8	0776 25,5	7142 25,5	86	1541 25	2486 6,5	8853 6
88	3316 8,5	0827 24,5	7193 25	88	1491 25	2499 5,5	8865 5,5
8,90	3299 - 9	0876 + 25	7243 + 24,5	9,90	1441 - 25,5	2510 + 5,5	8876 + 5,5
92	3281 9,5	0926 24,5	7292 24,5	92	1390 25	2521 4,5	8887 4,5
94	3262 10	0975 24,5	7341 24,5	94	1340 25,5	2530 4	8896 4,5
96	3242 10,5	1024 24	7390 24	96	1289 25,5	2538 4	8905 3,5
98	3221 11	1072 23,5	7438 23,5	98	1238 25,5	2546 3	8912 3
9,00	3199 + 0,	1119 + 0,	7485 + 0,	10,00	1187 + 0,	2552 + 0,	8918 + 0,

Продолжение табл. 65

$x$	$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$		$-E_0(x)$ $= H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
	+ 0,	+ 0,	+ 0,		- 0,	+ 0,	+ 0,
10,00	1187 - 25,5	2552 + 3	8918 + 3	11,00	1114 - 17	1688 - 18,5	8055 - 19
02	1136 25,5	2558 2	8924 2	02	1148 16	1651 19	8017 18,5
04	1085 25,5	2562 1,5	8928 2	04	1180 16	1613 19	7980 19,5
06	1034 25,5	2565 1,5	8932 1	06	1212 15,5	1575 19,5	7941 19,5
08	0983 26	2568 0,5	8934 0,5	08	1243 15,5	1536 19,5	7902 19,5
10,10	0931 - 25,5	2569 + 0,5	8935 + 0,5	11,10	1274 - 14,5	1497 - 20	7863 - 20
12	0880 26	2570 - 0,5	8936 - 0,5	12	1303 14,5	1457 20	7823 20
14	0828 25,5	2569 0,5	8935 0,5	14	1332 14	1417 20,5	7783 20,5
16	0777 25,5	2568 1,5	8934 1,5	16	1360 13,5	1376 20,5	7742 20,5
18	0726 26	2565 2	8931 1,5	18	1387 13	1335 21	7701 21
10,20	0674 - 25,5	2561 - 2	8928 - 2,5	11,20	1413 - 13	1293 - 21	7659 - 21
22	0623 25,5	2557 3	8923 2,5	22	1439 12	1251 21,5	7617 21,5
24	0572 25,5	2551 3	8918 3,5	24	1463 12	1208 21,5	7574 21,5
26	0521 25,5	2545 3,5	8911 3,5	26	1487 11,5	1165 21,5	7531 21,5
28	0470 25	2538 4,5	8904 4,5	28	1510 11	1122 22	7488 22
10,30	0420 - 25,5	2529 - 4,5	8895 - 4,5	11,30	1532 - 10,5	1078 - 22	7444 - 22
32	0369 25	2520 5	8886 5	32	1553 10	1034 22	7400 22
34	0319 25	2510 6	8876 6	34	1573 10	0990 22,5	7356 22
36	0269 25	2498 6	8864 6	36	1593 9	0945 22	7312 22,5
38	0219 25	2486 6,5	8852 6,5	38	1611 9	0901 23	7267 22,5
10,40	0169 - 24,5	2473 - 7	8839 - 7	11,40	1629 - 8	0855 - 22,5	7222 - 23
42	0120 24,5	2459 7,5	8825 7,5	42	1645 8	0810 23	7176 22,5
44	0071 24,5	2444 8	8810 8	44	1661 7,5	0764 22,5	7131 23
46	0022 24	2428 8,5	8794 8,5	46	1676 7	0719 23	7085 23
48	* 0026 24	2411 9	8777 8,5	48	1690 6,5	0673 23	7039 23
10,50	0074 - 24	2393 - 9	8760 - 9,5	11,50	1703 - 6	0627 - 23,5	6993 - 23,5
52	0122 23,5	2375 10	8741 10	52	1715 5,5	0580 23	6946 23
54	0169 23,5	2355 10	8721 10	54	1726 5	0534 23,5	6900 23
56	0216 23	2335 10,5	8701 10,5	56	1736 4,5	0487 23,5	6854 23,5
58	0262 23,5	2314 11	8680 11	58	1745 4,5	0441 23,5	6807 23,5
10,60	0309 - 22,5	2292 - 11,5	8658 - 11,5	11,60	1754 - 3,5	0394 - 23,5	6760 - 23,5
62	0354 22,5	2269 12	8635 12	62	1761 3,5	0347 23,5	6713 23
64	0399 22,5	2245 12,5	8611 12	64	1768 2,5	0300 23	6667 23,5
66	0444 22	2220 12,5	8587 13	66	1773 2,5	0254 23,5	6620 23,5
68	0488 22	2195 13	8561 13	68	1778 1,5	0207 23,5	6573 23,5
10,70	0532 - 21,5	2169 - 13,5	8535 - 13,5	11,70	1781 - 1,5	0160 - 23,5	6526 - 23,5
72	0575 21	2142 14	8508 14	72	1784 1	0113 23	6479 23
74	0617 21	2114 14,5	8480 14	74	1786 - 0,5	0067 23,5	6433 23,5
76	0659 21	2085 14,5	8452 15	76	1787 0	0020 23,5	6386 23
78	0701 20,5	2056 15	8422 15	78	1787 + 0,5	* 0027 23	6340 23,5
10,80	0742 - 20	2026 - 15,5	8392 - 15	11,80	1786 + 1	0073 - 23	6293 - 23
82	0782 19,5	1995 15,5	8362 16	82	1784 1,5	0119 23,5	6247 23
84	0821 19,5	1964 16	8330 16	84	1781 2	0166 23	6201 23
86	0860 19,5	1932 16,5	8298 16,5	86	1777 2	0212 22,5	6155 23
88	0899 18,5	1899 16,5	8265 16,5	88	1773 3	0257 23	6109 23
10,90	0936 - 18,5	1866 - 17,5	8232 - 17	11,90	1767 + 3,5	0303 - 22,5	6063 - 22,5
92	0973 18,5	1831 17	8198 17,5	92	1760 3,5	0348 23	6018 22,5
94	1010 17,5	1797 18	8163 18	94	1753 4	0394 22,5	5973 22,5
96	1045 17,5	1761 18	8127 18	96	1745 5	0439 22	5928 22,5
98	1080 17	1725 18,5	8091 18	98	1735 5	0483 22,5	5883 22
11,00	1114	1688	8055	12,00	1725	0528	5839
	- 0,	+ 0,	+ 0,		- 0,	- 0,	+ 0,

Продолжение табл. 65

$x$	$-E_0(x)$ $= H_0^+(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-E_0(x)$ $= H_0^+(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
	- 0,	- 0,	+ 0,		- 0,	- 0,	+ 0,
12,00	1725 + 5,5	0528 - 22	5839 - 22,5	13,00	0295 + 20,5	2064 - 6	4302 - 6
02	1714 6	0572 21,5	5794 21,5	02	0254 21	2076 5,5	4290 5,5
04	1702 6	0615 22	5751 22	04	0212 21	2087 5	4279 5
06	1690 7	0659 21,5	5707 21,5	06	0170 21	2097 5	4269 5
08	1676 7	0702 21,5	5664 21,5	08	0128 21	2107 4,5	4259 4
12,10	1662 + 8	0745 - 21	5621 - 21	13,10	0086 + 21	2116 - 3,5	4251 - 4
12	1646 8	0787 21	5579 21	12	0044 21,5	2123 3,5	4243 3,5
14	1630 8,5	0829 20,5	5537 20,5	14	0001 21,5	2130 3	4236 3
16	1613 9	0870 21	5496 20,5	16	* 0042 21	2136 2,5	4230 2,5
18	1595 9	0912 20	5455 20,5	18	0084 21,5	2141 2,5	4225 2,5
12,20	1577 + 10	0952 - 20	5414 - 20	13,20	0127 + 21,5	2146 - 1,5	4220 - 1,5
22	1557 10	0992 20	5374 20	22	0170 21,5	2149 1,5	4217 1,5
24	1537 10,5	1032 19,5	5334 19,5	24	0213 21,5	2152 0,5	4214 0,5
26	1516 11	1071 19,5	5295 19,5	26	0256 21,5	2153 - 0,5	4213 - 0,5
28	1494 11	1110 19	5256 19	28	0299 21,5	2154 0	4212 0
12,30	1472 + 12	1148 - 19	5218 - 19	13,30	0342 + 22	2154 + 0,5	4212 + 0,5
32	1448 12	1186 18,5	5180 18,5	32	0386 21,5	2153 1	4213 1
34	1424 12,5	1223 18	5143 18	34	0429 21,5	2151 1	4215 1,5
36	1399 12,5	1259 18	5107 18	36	0472 21,5	2149 2	4218 1,5
38	1374 13	1295 18	5071 18	38	0515 21	2145 2	4221 2,5
12,40	1348 + 13,5	1331 - 17,5	5035 - 17	13,40	0557 + 21,5	2141 + 3	4226 + 2,5
42	1321 14	1366 17	5001 17,5	42	0600 21,5	2135 3	4231 3
44	1293 14	1400 16,5	4966 16,5	44	0643 21	2129 3,5	4237 3,5
46	1265 14,5	1433 16,5	4933 16,5	46	0685 21,5	2122 4	4244 4
48	1236 15	1466 16	4900 16	48	0728 21	2114 4	4252 4
12,50	1206 + 15	1498 - 16	4868 - 16	13,50	0770 + 21	2106 + 5	4260 + 5
52	1176 15,5	1530 15,5	4836 15,5	52	0812 21	2096 5	4270 5
54	1145 16	1561 15	4805 15	54	0854 20,5	2086 5,5	4280 5,5
56	1113 16	1591 15	4775 14,5	56	0895 21	2075 6	4291 6
58	1081 16,5	1621 14	4746 14,5	58	0937 20,5	2063 6,5	4303 6,5
12,60	1048 + 16,5	1649 - 14	4717 - 14	13,60	0978 + 20,5	2050 + 7	4316 + 7
62	1015 17	1677 14	4689 14	62	1019 20	2036 7	4330 7
64	0981 17	1705 13	4661 13	64	1059 20,5	2022 7,5	4344 7,5
66	0947 17,5	1731 13	4635 13	66	1100 20	2007 8	4359 8
68	0912 17,5	1757 12,5	4609 12,5	68	1140 19,5	1991 8,5	4375 8,5
12,70	0877 + 18	1782 - 12,5	4584 - 12,5	13,70	1179 + 20	1974 + 9	4392 + 9
72	0841 18,5	1807 11,5	4559 11,5	72	1219 19	1956 9	4410 9
74	0804 18	1830 11,5	4536 11,5	74	1257 19,5	1938 9,5	4428 9,5
76	0768 19	1853 11	4513 11	76	1296 19	1919 10	4447 10
78	0730 18,5	1875 11	4491 10,5	78	1334 19	1899 10	4467 10,5
12,80	0693 + 19,5	1897 - 10	4470 - 10,5	13,80	1372 + 18,5	1879 + 11	4488 + 10,5
82	0654 19	1917 10	4449 9,5	82	1409 18,5	1857 11	4509 11
84	0616 19,5	1937 9	4430 9,5	84	1446 18,5	1835 11	4531 11,5
86	0577 19,5	1955 9	4411 9	86	1483 18	1813 12	4554 11,5
88	0538 20	1973 9	4393 8,5	88	1519 17,5	1789 12	4577 12
12,90	0498 + 20	1991 - 8	4376 - 8,5	13,90	1554 + 17,5	1765 + 12,5	4601 + 12,5
92	0458 20	2007 7,5	4359 7,5	92	1589 17,5	1740 12,5	4626 12,5
94	0418 20,5	2022 7,5	4344 7,5	94	1624 17	1715 13	4651 13,5
96	0377 20,5	2037 7	4329 7	96	1658 16,5	1689 13,5	4678 13
98	0336 20,5	2051 6,5	4315 6,5	98	1691 16,5	1662 14	4704 14
13,00	0295	2064	4302	14,00	1724	1634	4732
	- 0,	- 0,	+ 0,		+ 0,	- 0,	+ 0,

Продолжение табл. 65

$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$	$x$	$-E_0(x)$ $=H_0(x)$	$-E_1(x)$	$H_1(x)$
14,00	+ 0,	- 0,	+ 0,	15,00	+ 0,	+ 0,	+ 0,
02	1724 + 16,5	1634 + 14	4732 + 14	02	2477 - 2,5	0239 + 20	6605 + 20,5
04	1757 16	1606 14	4760 14	04	2472 3	0279 + 20,5	6646 20
06	1789 15,5	1578 15	4788 15	06	2466 3,5	0320 20	6686 20
08	1820 15,5	1548 14,5	4818 15	08	2459 3,5	0360 20	6726 20,5
14,10	1851 15	1519 15,5	4848 15	10	2452 4,5	0400 20	6767 20
12	1881 + 14,5	1488 + 15,5	4878 + 15,5	12	2443 - 4,5	0440 + 20	6807 + 19,5
14	1910 14,5	1457 15,5	4909 15,5	14	2434 5	0480 20	6846 20
16	1939 14	1426 16	4940 16,5	16	2424 5,5	0520 19,5	6886 19,5
18	1967 14	1394 16,5	4973 16	18	2413 5,5	0559 19,5	6925 19,5
14,20	1995 13,5	1361 16,5	5005 16,5	20	2402 6,5	0598 19,5	6964 19,5
22	2022 + 13	1328 + 17	5038 + 17	22	2389 - 6,5	0637 + 19	7003 + 19
24	2048 12,5	1294 17	5072 17	24	2376 7	0675 19	7041 19
26	2073 12,5	1260 17	5106 17	26	2362 7	0713 19	7079 19
28	2098 12	1226 17,5	5140 17,5	28	2348 8	0751 18,5	7117 19
14,30	2122 12	1191 18	5175 18	30	2332 8	0788 18,5	7155 18,5
32	2146 + 11,5	1155 + 17,5	5211 + 18	32	2316 - 8,5	0825 + 18,5	7192 + 18
34	2169 11	1120 18,5	5247 18	34	2299 8,5	0862 18,5	7238 18,5
36	2191 10,5	1083 18	5283 18	36	2282 9,5	0899 17,5	7265 18
38	2212 10,5	1047 18,5	5319 18,5	38	2263 9,5	0934 18	7301 17,5
14,40	2233 9,5	1010 19	5356 19	40	2244 9,5	0970 17,5	7336 17,5
42	2252 + 9,5	0972 + 18,5	5394 + 19	42	2225 - 10,5	1005 + 17,5	7371 + 17,5
44	2271 9,5	0935 19	5432 19	44	2204 10,5	1040 17	7406 17
46	2290 8,5	0897 19,5	5470 19	46	2183 11	1074 17	7440 17
48	2307 8,5	0858 19	5508 19,5	48	2161 11	1108 16,5	7474 16,5
14,50	2324 8	0820 19,5	5547 19,5	50	2139 11,5	1141 16,5	7507 16,5
52	2340 + 7,5	0781 + 20	5586 + 19,5	52	2116 - 12	1174 + 16	7540 + 16,5
54	2355 7,5	0741 19,5	5625 19,5	54	2092 12,5	1206 16	7573 15,5
56	2370 6,5	0702 20	5664 20	56	2067 12,5	1238 15,5	7604 16
58	2383 6,5	0662 20	5704 20	58	2042 13	1269 15,5	7636 15
14,60	2396 6	0622 20	5744 20	60	2016 13	1300 15	7666 15,5
62	2408 + 5,5	0582 + 20	5784 + 20	62	1990 - 13,5	1330 + 15	7697 + 14,5
64	2419 5,5	0542 20,5	5824 20,5	64	1963 13,5	1360 14,5	7726 14,5
66	2430 5	0501 20	5865 20,5	66	1936 14	1389 14,5	7755 14,5
68	2440 4	0461 20,5	5906 20	68	1908 14,5	1418 14	7786 14
14,70	2448 4	0420 20,5	5946 20,5	70	1879 14,5	1446 13,5	7812 13,5
72	2456 + 3,5	0379 + 20,5	5987 + 20,5	72	1850 - 15	1473 + 13,5	7839 + 13,5
74	2463 3,5	0338 20,5	6028 21	74	1820 15	1500 13	7866 13
76	2470 2,5	0297 21	6070 20,5	76	1790 15,5	1526 12,5	7892 12,5
78	2475 2,5	0255 20,5	6111 20,5	78	1759 15,5	1551 12,5	7917 12,5
14,80	2480 2	0214 20,5	6152 20,5	80	1728 16	1576 12	7942 12
82	2484 + 1,5	0173 + 20,5	6193 + 21	82	1696 - 16	1600 + 12	7966 + 12
84	2487 1	0132 21	6235 20,5	84	1664 16,5	1624 11,5	7990 11,5
86	2489 + 1	0090 20,5	6276 20,5	86	1631 16,5	1647 11	8013 11
88	2491 0	0049 20,5	6317 21	88	1598 17	1669 10,5	8035 10,5
14,90	2491 0	0008 21	6359 20,5	90	1564 17	1690 10,5	8056 10,5
92	2491 - 0,5	*0034 + 20,5	6400 + 20,5	92	1530 - 17	1711 + 10	8077 + 10
94	2490 1	0075 20,5	6441 20,5	94	1496 17,5	1731 9,5	8097 10
96	2488 1,5	0116 20,5	6482 20,5	96	1461 17,5	1750 9,5	8117 9
98	2485 1,5	0157 20,5	6523 20,5	98	1426 18	1769 9	8135 9
15,00	2482 2,5	0198 20,5	6564 20,5	100	1390 18	1787 8,5	8158 9
	2477	0239	6605	16,00	1354	1804	8171
	+ 0,	+ 0,	+ 0,		+ 0,	+ 0,	+ 0,



Таблицы 66 и 67. Неполные функции Ангера и Вебера

$$u = \frac{1}{2} \int_0^x \cos \frac{q}{2} \left( \frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right) dt$$

$$-v = \frac{1}{2} \int_0^x \sin \frac{q}{2} \left( \frac{\pi}{2} t - \sin \frac{\pi}{2} t \right) dt$$

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	20000	20000
0,5	25000	25000	25000	25000	24999
6	3000	3000	29999	29998	29998
7	3500	3500	3500	3500	3499
8	4000	4000	3999	3999	3998
9	4500	4499	4499	4498	4496
1,0	5000	4999	4997	4995	4992
1	5499	5498	5495	5491	5486
2	5999	5996	5991	5984	5975
3	6498	6493	6485	6473	6458
4	6997	6989	6976	6957	6933
1,5	7496	7483	7463	7434	7397
6	7994	7975	7945	7902	7848
7	8491	8465	8421	8360	8282
8	8988	8951	8890	8805	8697
9	9483	9433	9350	9235	9090
2,0	9978	9911	9801	9649	9457
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,1	q = 0,2	q = 0,3	q = 0,4	q = 0,5
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	000000	000001	000001	000002	000002
2	000006	000013	000019	000026	000032
3	000032	000065	000097	000130	000162
4	000102	000204	000306	000408	000510
0,5	000247	000494	000742	000989	001236
6	000508	001016	001524	002032	002540
7	000931	001862	002793	003724	004655
8	001569	003138	004706	006275	007842
9	002478	004956	007434	009909	012383
1,0	003719	007437	011153	014865	018572
1	005353	010702	016046	021380	026703
2	007440	014872	022292	029691	03706
3	010040	020066	03006	04002	04992
4	013210	026394	03952	05257	06552
1,5	017001	03395	05081	06752	08404
6	021460	04284	06404	08500	10562
7	026625	05311	07932	10511	13035
8	032528	06483	09669	12790	15823
9	039190	07804	11621	15337	18920
2,0	046624	09274	13785	18147	22313
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	05000	05000	05000	05000	05000
2	10000	10000	10000	10000	10000
3	15000	15000	15000	15000	15000
4	20000	20000	20000	19999	19999
0,5	24999	24999	24998	24998	24997
6	29996	29995	29994	29992	29990
7	3499	3499	3498	3498	3497
8	3998	3997	3996	3994	3993
9	4495	4493	4490	4488	4485
1,0	4989	4985	4980	4975	4969
1	5479	5472	5463	5454	5443
2	5964	5951	5936	5919	5900
3	6439	6418	6393	6365	6333
4	6903	6869	6829	6785	6736
1,5	7352	7300	7240	7173	7098
6	7782	7705	7617	7519	7412
7	8189	8080	7955	7818	7667
8	8568	8417	8248	8060	7855
9	8915	8714	8488	8239	7971
2,0	9228	8965	8672	8352	8011
	0,	0,	0,	0,	0,

x	q = 0,6	q = 0,7	q = 0,8	q = 0,9	q = 1,0
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	000002	000003	000003	000004	000004
2	000039	000045	000052	000058	000064
3	000195	000227	000260	000292	000325
4	000612	000714	000816	000918	001020
0,5	001483	001730	001977	002225	002472
6	003048	003555	004063	004571	005078
7	005585	006515	007445	008375	009304
8	009409	010975	012540	014103	015666
9	014855	017324	019789	022251	024709
1,0	022272	025966	029650	03332	03699
1	03201	03730	04257	04781	05303
2	04440	05170	05896	06616	07330
3	05976	06951	07916	08871	09814
4	07833	09098	10346	11572	12776
1,5	10031	11631	13197	14727	16214
6	12583	14555	16471	18324	20106
7	15491	17868	20152	22333	24401
8	18749	21550	24207	26704	29026
9	22341	25572	28588	3137	3388
2,0	26242	29894	3323	3623	3886
	0,	0,	0,	0,	0,

#### XIV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ (ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА)

##### 1. Определения и обозначения

1.1. *Функциями Матье (функциями эллиптического цилиндра)* в общем случае называются решения дифференциального уравнения Матье

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dz^2} + (\alpha - 4q \cos 2z) w = 0.$$

В узком смысле под (периодическими) функциями Матье  $\varphi_m(z, q)$  понимают периодические решения этого уравнения с периодом  $2\pi$ .

Не для каждой пары значений  $\alpha, q$  уравнение Матье имеет периодическое решение периода  $2\pi$ . Однако для каждого действительного значения параметра  $q$

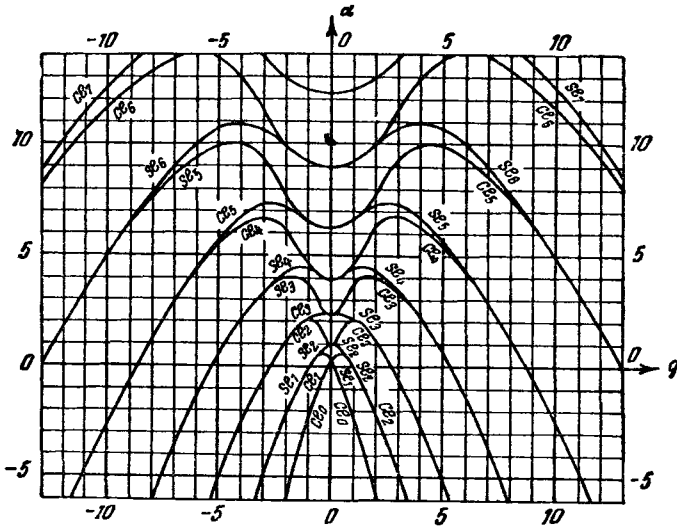


Рис 175 Собственные значения параметра  $\alpha$  как функции  $q$

существует бесконечная последовательность «собственных значений» параметра  $\alpha$  (рис 175), для которых такое решение есть, и оно определяется при  $q \neq 0$  с точностью до постоянного множителя. Эти функции  $\varphi_m(z, q)$  все являются целыми функциями от  $z$  и действительны для действительных значений аргумента  $z = x$ .

1.2. Функции Матье в зависимости от приводимых ниже свойств разделяются на четыре класса, причем для этих функций и соответствующих собственных значений параметра  $\alpha$  обычно употребляют обозначения

$$\begin{array}{cccc} se_{2n}(z, q), & se_{2n+1}(z, q), & se_{2n+1}(z, q), & se_{2n+2}(z, q), & n=0, 1, 2, \dots \\ \alpha_{2n}, & \beta_{2n+1}, & \alpha_{2n+1}, & \beta_{2n+2}, & \end{array}$$

Если эти функции рассматривают как функции только аргумента  $z$  при постоянном значении параметра  $q$ , то пишут короче  $se_{2n}(z), se_{2n+1}(z), \dots$  (рис 176—187).

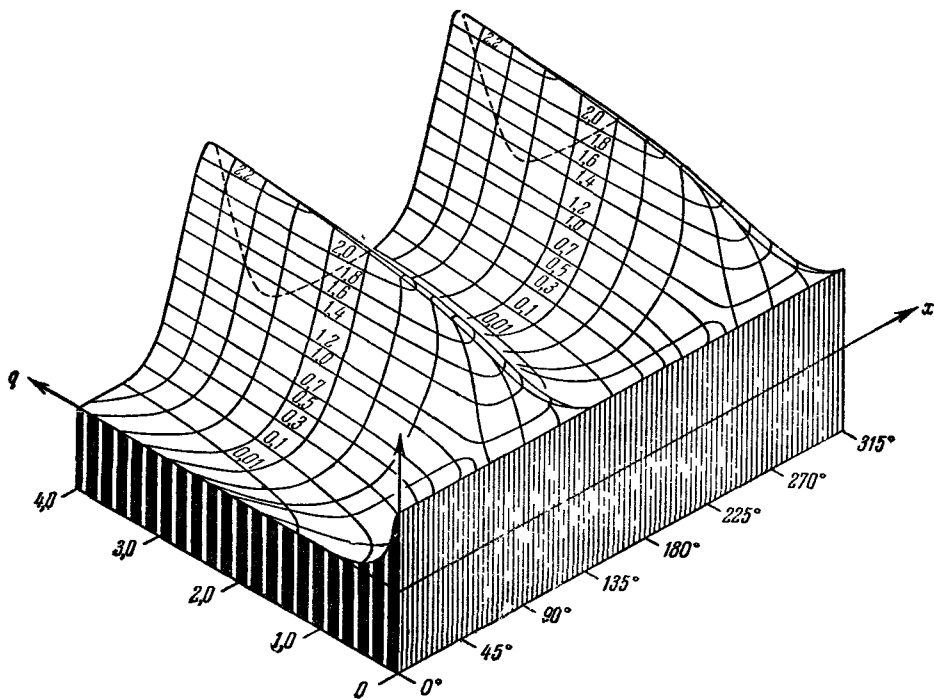


Рис 176. Поверхность функции Матье  $se_0(x, q)$  над плоскостью  $x, q$ .

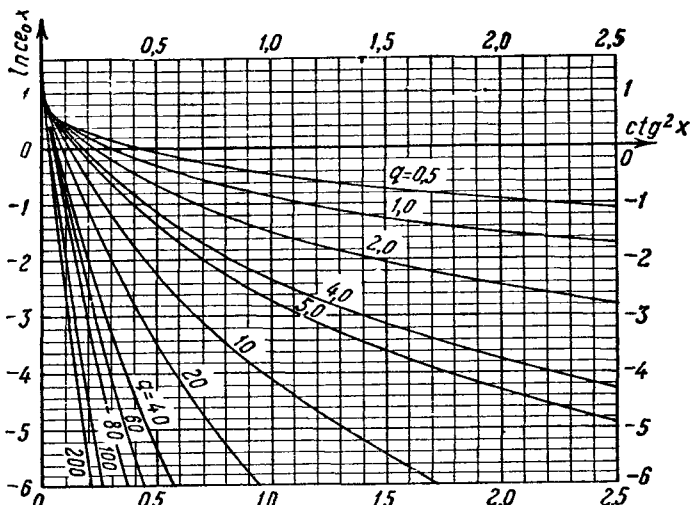


Рис. 177 Функция  $se_0(x, q)$  как функция  $ctg^2 x$  при  $x$ , близких к  $90^\circ$ .

Имеют место следующие соотношения (рис. 188):

$$\begin{aligned}
 se_m(z) &= se_m(-z), & se_m(z) &= -se_m(-z), \\
 se_m(k\pi + z) &= +se_m(k\pi - z), & se_m(k\pi + z) &= -se_m(k\pi - z), \quad k - \text{целое}, \\
 se_m(\pi/2 + z) &= (-1)^m se_m(\pi/2 - z), & se_m(\pi/2 + z) &= (-1)^{m+1} se_m(\pi/2 - z), \\
 \psi_m(z + \pi) &= (-1)^m \psi_m(z).
 \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно определить функции Матье в полосе  $0 \leq \text{Re } z \leq \frac{\pi}{2}$ .

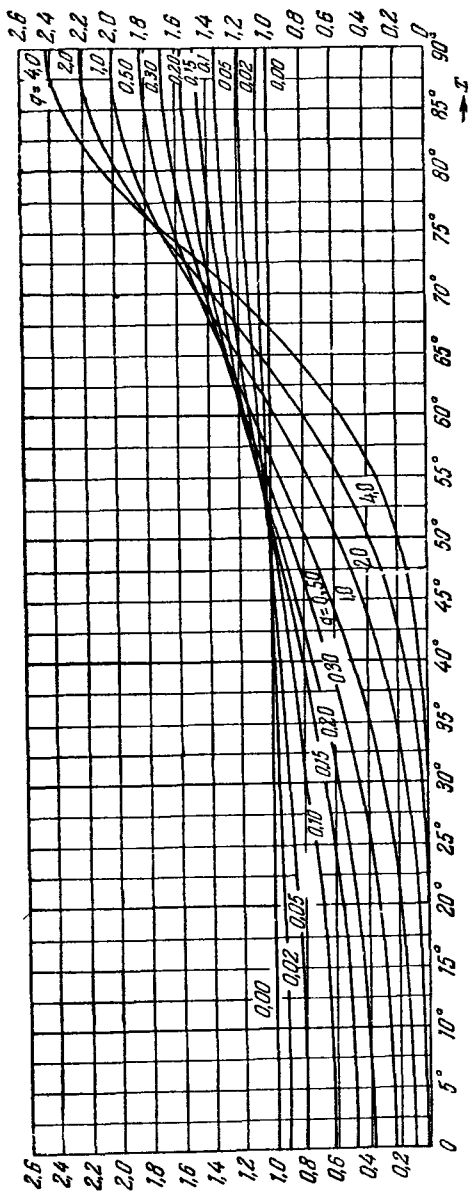


Рис. 178. Функция Маттье  $se_0(x, q)$ .

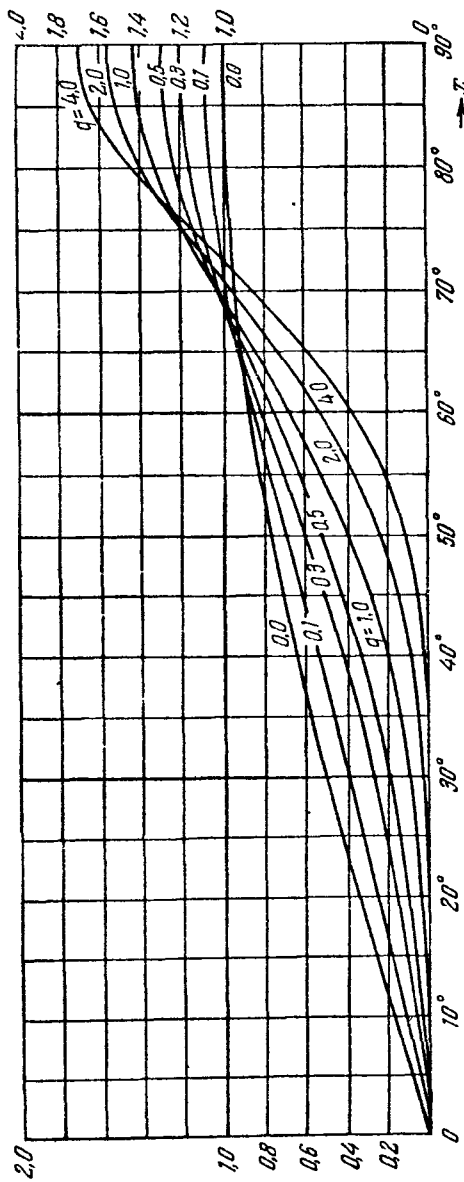
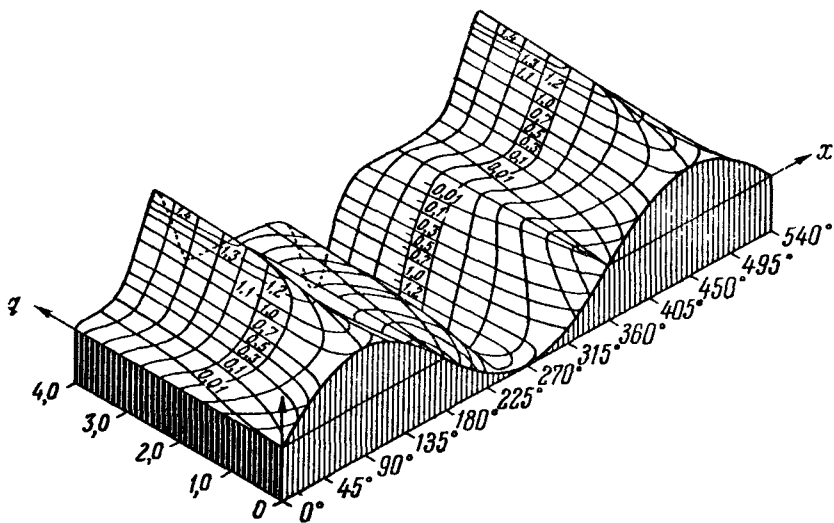
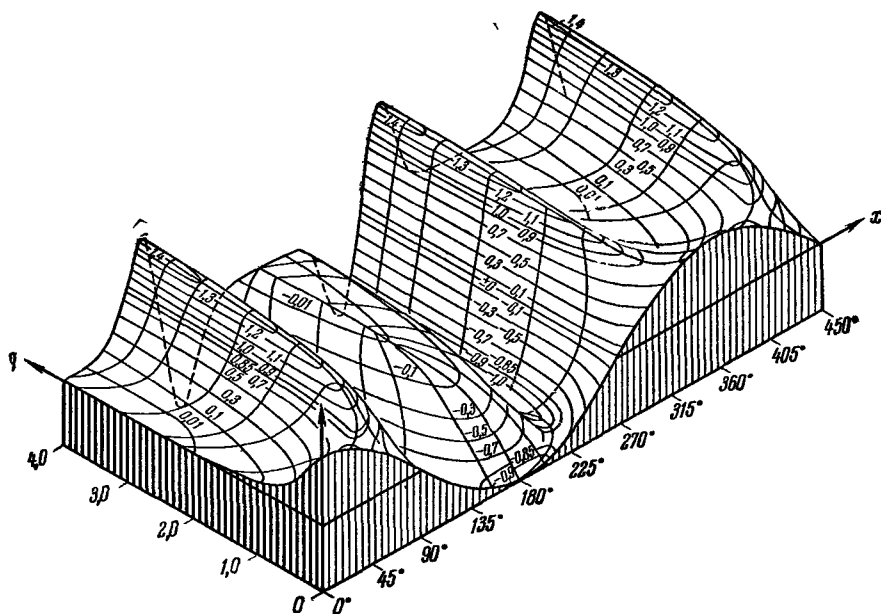


Рис. 179. Функция Маттье  $se_1(x, q)$ .

Рис. 180. Поверхность функции Маттье  $se_1(r, q)$  над плоскостью  $x, q$ .Рис. 181. Поверхность функции Маттье  $se_1(x, q)$  над плоскостью  $x, q$ .

Нормировка функций производится таким образом, чтобы

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_m^2(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } m=0; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } m=1, 2, \dots, \end{cases}$$

чтобы при  $z = \frac{\pi}{2}$  следующие выражения были положительны:

$$(-1)^n ce_{2n}(z), \quad (-1)^n se_{2n+1}(z), \quad (-1)^n \frac{ce_{2n+1}(z)}{\cos z}, \quad (-1)^{n-1} \frac{se_{2n}(z)}{\cos z}.$$

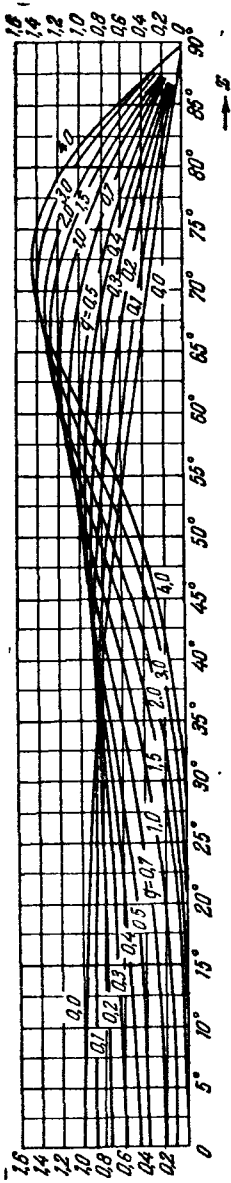


Рис. 182. Функция Маттье  $se_1(x, q)$ .

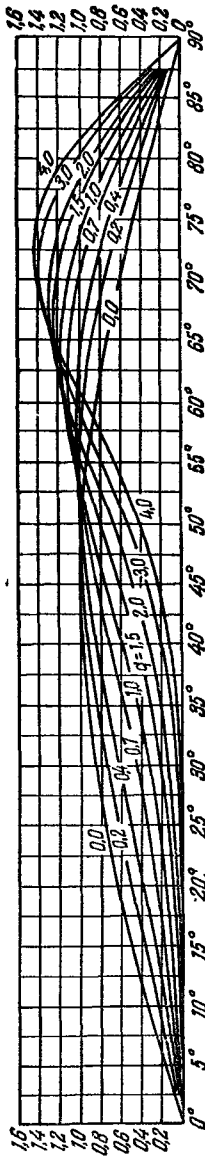


Рис. 183. Функция Маттье  $se_2(x, q)$ .

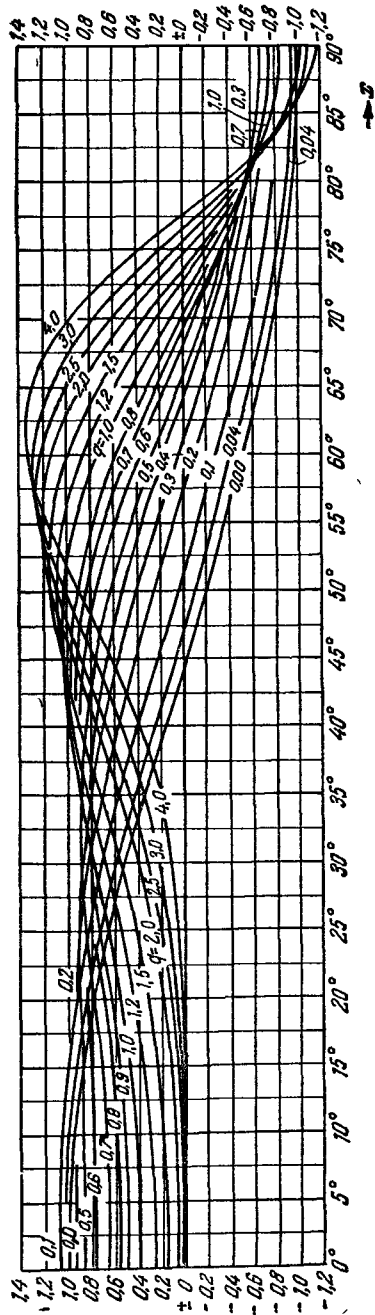
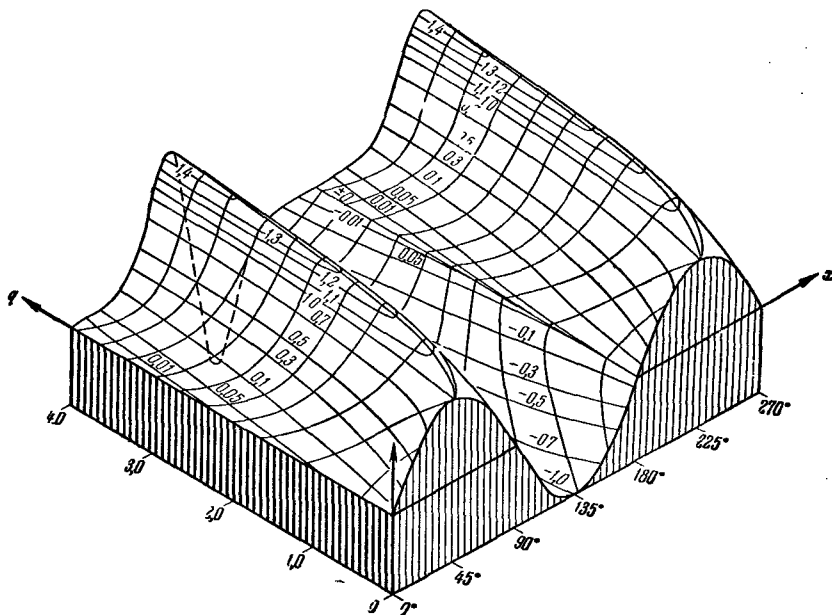
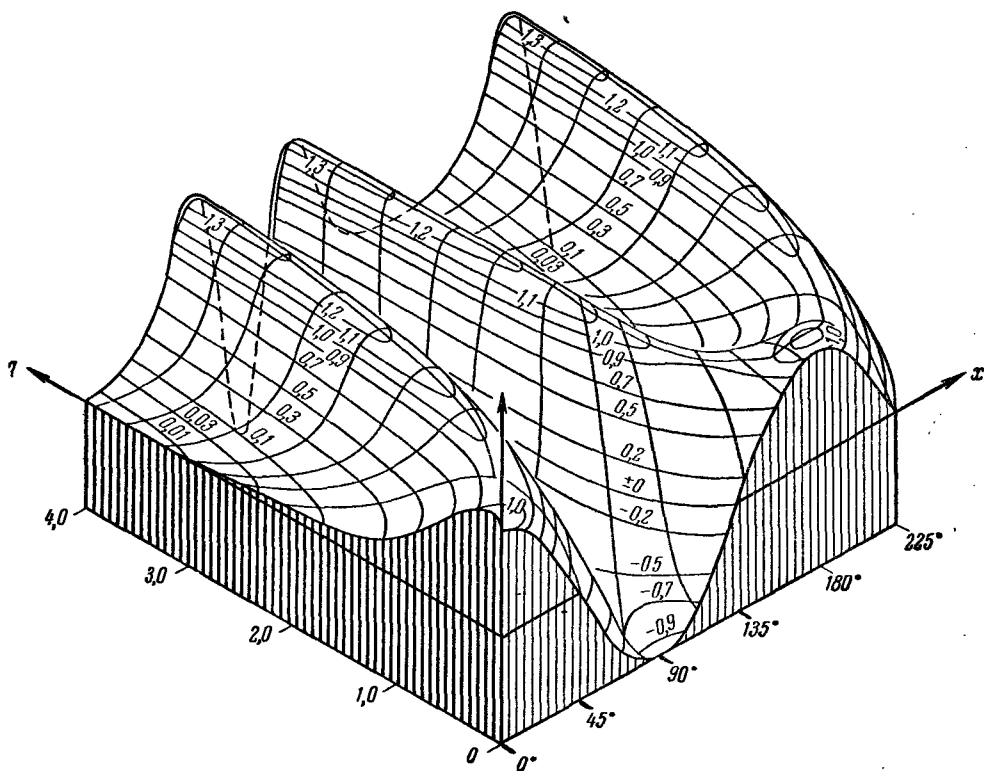


Рис. 184. Функция Маттье  $se_3(x, q)$ .

Рис 185 Поверхность функции Маттье  $se_2(x, q)$  над плоскостью  $x, q$ .Рис. 186. Поверхность функции Маттье  $se_2(x, q)$  над плоскостью  $x, q$ .

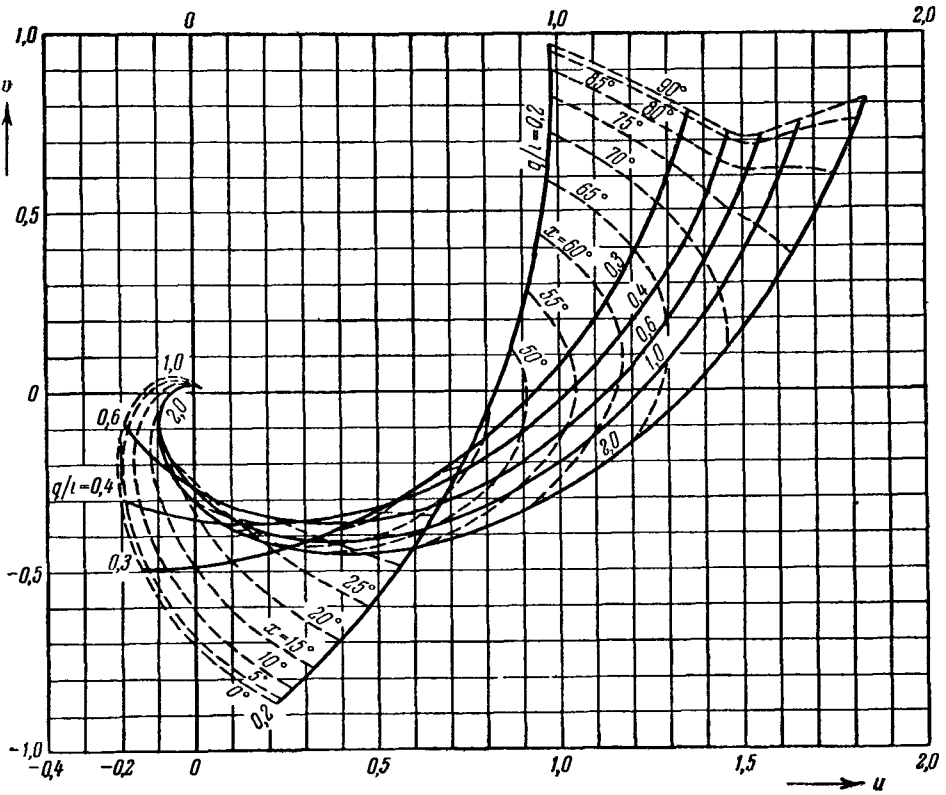


Рис. 187. Функция  $se_0(x, q) = u + iv$  при чисто мнимом  $q$ .

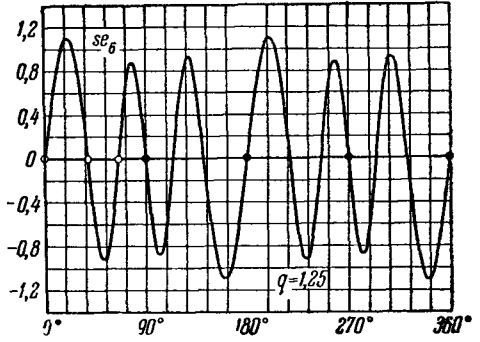
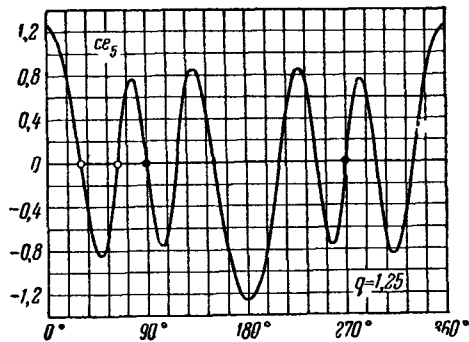
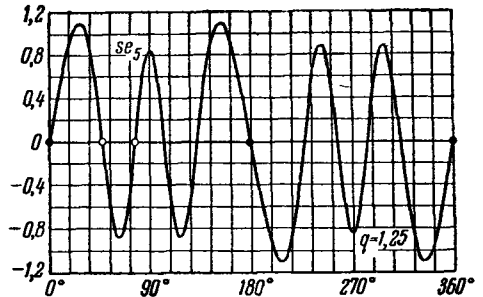
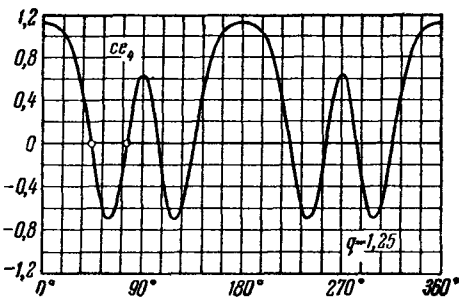


Рис. 188. Симметрия функций Матье.



На каждом действительном интервале длины  $2\pi$  произведение двух различных функций Матье, соответствующих одному и тому же значению параметра  $q$ , имеет среднее значение нуль.

В предположениях, сделанных выше, при  $q \rightarrow 0$  имеем:

$$4\alpha_m \rightarrow m^2, \quad 4\beta_m \rightarrow m^2 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \\ ce_0(z, q) \rightarrow 1, \quad ce_m(z, q) \rightarrow \cos mz, \quad se_m(z, q) \rightarrow \sin mz \quad (m=1, 2, \dots).$$

## 2. Представления для собственных значений

Если заменить  $z$  на  $\pi/2 - z$  и  $q$  на  $-q$ , то дифференциальное уравнение Матье не изменится и для значения параметра  $-q$  получаем решения:

$$ce_{2n}(z, -q) = (-1)^n ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad ce_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n se_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \\ se_{2n}(z, -q) = (-1)^n se_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right), \quad se_{2n+1}(z, -q) = (-1)^n ce_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - z, q\right).$$

Таким образом, достаточно вычислить функции для положительных значений  $q$ .

Представления для первых собственных значений при малых  $q$  таковы:

$$4\alpha_0 = -2^5 q^2 + 2^6 \cdot 7 q^4 - 2^{10} \cdot \frac{29}{9} q^6 + \dots, \quad 4\beta_1 = 1 \mp 8q - 8q^2 \pm 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 \mp \dots, \\ 4\beta_2 = 4 - \frac{16}{3} q^2 + \frac{2^8 \cdot 5}{3^3} q^4 - \dots, \quad 4\alpha_2 = 4 + \frac{80}{3} q^2 - \frac{2^8 \cdot 7}{3^3} \cdot 109 \cdot q^4 + \dots, \\ 4\alpha_3 = 9 + 4q^2 \mp 8q^3 + \frac{13}{5} q^4 + \dots, \\ 4\beta_4 = 16 + \frac{2^8}{15} q^3 + \frac{2^4 \cdot 317}{3^2 \cdot 5^2} q^4 + \dots, \quad 4\alpha_4 = 16 + \frac{2^8}{15} q^3 + \frac{2^4 \cdot 433}{3^2 \cdot 5^2} q^4 - \dots$$

Если число  $n = 2\nu - 1$  нечетно, то приближенные значения для собственных значений  $\alpha_{\nu-1}$  и  $\beta_\nu$  при больших  $q$  (для  $q > n^2/8$ ) получают из выражений

$$\left. \begin{aligned} -\alpha_{\nu-1} \\ -\beta_\nu \end{aligned} \right\} \approx 4q - n\sqrt{2q} + \frac{n^2+1}{2^5} + \frac{n}{2^{10}} \frac{n^2+3}{\sqrt{2q}} + \frac{5n^4+34n^2+9}{2^{17}q} + n \frac{33n^4+410n^2+405}{2^{23}q\sqrt{2q}} + \\ + \frac{63n^8+1260n^6+2943n^2+486}{2^{22}q^2} + n \frac{2108n^8+62468n^4+276004n^2+166428+\dots}{2^{24}q^2\sqrt{2q}}$$

При больших положительных  $q$  четырем функциям

$$ce_{2n-1}(z, q), \quad se_{2n-1}(z, -q), \quad ce_{2n}(z, q), \quad se_{2n}(z, -q)$$

принадлежит почти одно и то же значение  $\alpha$ ; это же утверждение справедливо для четырех функций

$$ce_{2n}(z, q), \quad se_{2n}(z, -q), \quad se_{2n+1}(z, q), \quad ce_{2n+1}(z, -q).$$

Для функций  $ce_n$  и  $se_n$  имеется  $\alpha = 0$  при следующих значениях  $q$ :

$$\begin{array}{cccc} n = 0 & 1 & 2 & n \text{ велико} \\ q \approx 0,11 & 0,94 & 2,66 & 0,109(2n+1)^2 \end{array}$$

## 3. Разложение в ряды Фурье

Справедливы следующие разложения в ряды Фурье:

$$ce_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n, 2r} \cos 2rx, \quad ce_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2n+1, 2r+1} \cos(2r+1)x, \\ se_{2n}(x) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2n, 2r} \sin 2rx, \quad se_{2n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2n+1, 2r+1} \sin(2r+1)x.$$

Ряды сходятся тем слабее, чем больше  $q$ . Для коэффициентов  $A, B$  справедливы следующие рекуррентные формулы:

а) для  $se_{2n}(x)$ :

$$\begin{aligned} -\alpha A_{2n,0} + 2qA_{2n,2} &= 0, \\ 2qA_{2n,2r-2} + (r^2 - \alpha)A_{2n,2r} + 2qA_{2n,2r+2} &= 0 \quad (r > 1); \end{aligned}$$

б) для  $se_{2n}(x)$ :

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)B_{2n,2} + 2qB_{2n,4} &= 0, \\ 2qB_{2n,2r-2} + (r^2 - \alpha)B_{2n,2r} + 2qB_{2n,2r+2} &= 0 \quad (r > 1); \end{aligned}$$

с) для  $se_{2n+1}(x)$ :

$$\begin{aligned} 2qA_{2n+1,1} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right)A_{2n+1,3} &= 0, \\ 2qA_{2n+1,2r-1} + \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right]A_{2n+1,2r+1} + 2qA_{2n+1,2r+3} &= 0 \quad (r > 0); \end{aligned}$$

д) для  $se_{2n+1}(x)$ :

$$\begin{aligned} -2qB_{2n+1,1} + \left(\frac{1}{4} - \alpha\right)B_{2n+1,3} &= 0, \\ 2qB_{2n+1,2r-1} + \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right]B_{2n+1,2r+1} + 2qB_{2n+1,2r+3} &= 0 \quad (r > 0). \end{aligned}$$

Из условия нормировки следует при любом  $q$ , любом номере функции и любом первом индексе:

$$2A_0^2 + A_2^2 + A_4^2 + \dots = B_2^2 + B_4^2 + \dots = A_1^2 + A_3^2 + \dots = B_1^2 + B_3^2 + \dots = 1;$$

для  $se_0(x)$  первая сумма равна 2.

#### 4. Нули

$$se_0(x) > 0; se_{2n}k\frac{\pi}{2} = se_{2n+1}k\pi = se_{2n+1}\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi = 0 \quad (k - \text{целое}).$$

Каждая из четырех функций

$$se_{2n}(x), \quad se_{2n+1}(x), \quad ce_{2n+1}(x), \quad se_{2n+2}(x)$$

имеет  $n$  действительных нулей строго между  $x=0$  и  $x=\frac{\pi}{2}$ ; эти нули приближаются к  $\frac{\pi}{2}$  при возрастании  $q$ .

#### 5. Функциональные уравнения. Присоединенные функции Матье

Функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$\varphi(z) = \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} e^{4\sqrt{2q} \sin z \sin t} \varphi(t) dt.$$

Если в дифференциальном уравнении Матье сделать замену независимой переменной  $t = t(z)$ , то получим:

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2 \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{d^2t}{dz^2} \frac{dw}{dt} + 4(\alpha - 4q \cos 2z)w = 0.$$

В частности,

$$t = \cos 2z: \quad (1-t^2) \frac{d^2 w}{dt^2} - t \frac{dw}{dt} + (\alpha - 4qt) w = 0,$$

$$t = e^{iz}: \quad t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + t \frac{dw}{dt} + \left[ -\alpha + 2q \left( t + \frac{1}{t} \right) \right] w = 0,$$

$$t = \cos^2 z: \quad t(1-t) \frac{d^2 w}{dt^2} + \left( \frac{1}{2} - t \right) \frac{dw}{dt} + (\alpha + 4q - 8qt) w = 0.$$

Если положить  $t = \pm iz$ , то функции

$$w = \varphi_m(\pm it, k)$$

будут решениями дифференциального уравнения

$$\frac{1}{4} \frac{d^2 w}{dt^2} - (\alpha - 4q \operatorname{ch} 2t) w = 0.$$

Полученные таким образом функции

$$Ce_{2n}(z) = ce_{2n}(iz),$$

$$Ce_{2n+1}(z) = ce_{2n+1}(iz),$$

$$Se_{2n+1}(z) = -i se_{2n+1}(iz),$$

$$Se_{2n+2}(z) = -i se_{2n+2}(iz)$$

называются *присоединенными функциями Матье*. Они действительны для действительных значений аргумента  $z = x$ .

О функциях Матье с чисто мнимым  $q$  см. рис. 189—191.

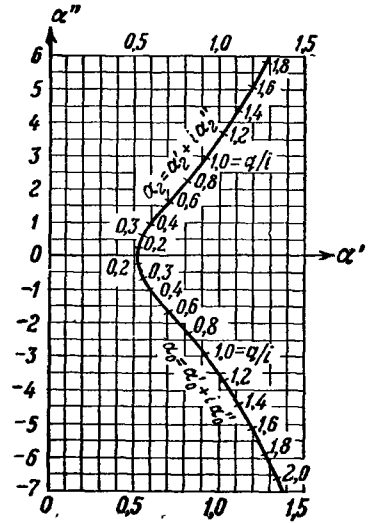


Рис. 189. Параметр  $\alpha_n = \alpha_n' + \alpha_n''i$ ,  $n=0, 2$ , при  $q$  чисто мнимом.

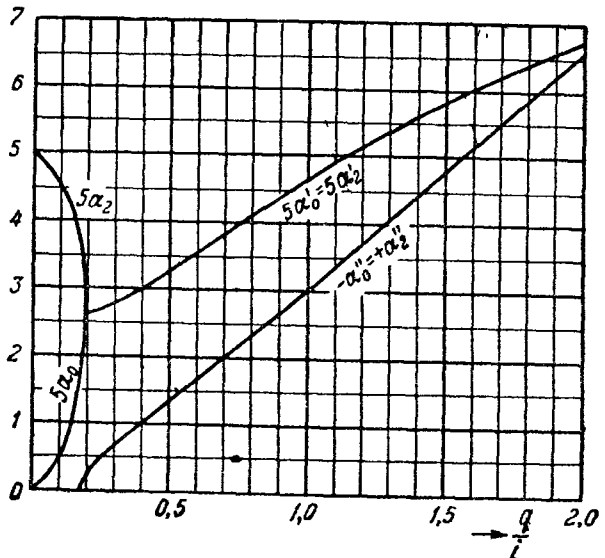
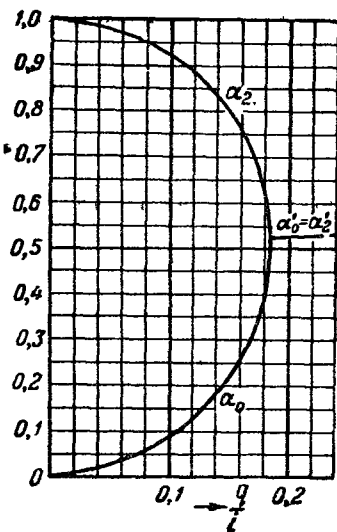


Рис. 190 и 191. Параметр  $\alpha_n = \alpha_n' + \alpha_n''i$ ,  $n=0, 2$ , как функция  $\frac{q}{l}$  при  $q$  чисто мнимом.

## XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 1. Функция $\Phi(a, c; z)$

*Конфлюэнтными гипергеометрическими функциями* называются решения «конфлюэнтного дифференциального уравнения» \*)

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0,$$

где  $a$  и  $c$  — произвольные комплексные постоянные. Если  $c \neq 0, -1, -2, \dots$ , то одним из решений является функция Куммера\*\*)

$$\Phi(a, c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

(Иногда ее обозначают через  $M(a, c; z)$ .) Если  $a, c$  фиксированы, то она является (однозначной) целой функцией  $z$ . Для действительных значений параметров  $a, c$  и для действительных значений аргумента  $z = x$  она действительна (рис. 192—205).

При  $0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c$  функция  $\Phi(a, c; z)$  допускает интегральное представление

$$\Phi(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 e^{zt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt;$$

кроме того, при  $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} c > 0$  справедливо представление через функции Бесселя  $J_\nu(z)$ :

$$\Phi\left(a, c; -\frac{1}{z}\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^a \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{a-\frac{c+1}{2}} J_{c-1}(2\sqrt{t}) dt.$$

Асимптотическое поведение функции Куммера при  $|z| \gg |a|, |z| \gg |c|$  описывается формулой

$\Phi(a, c; z) \approx$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left\{ 1 - \frac{a(a-c+1)}{z} + \frac{a(a+1)(a-c+1)(a-c+2)}{2! z^2} - \dots \right\} + \\ &+ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c} \left\{ 1 + \frac{(1-a)(c-a)}{z} + \frac{(1-a)(2-a)(c-a)(c-a+1)}{2! z^2} + \dots \right\} \\ &(-\pi < \arg z \leq \pi, \quad -\pi < \arg(-z) \leq \pi). \end{aligned}$$

\*) Это уравнение называют иногда также *вырожденным гипергеометрическим уравнением*. — Прим. ред.

\*\*) Иначе: функция Похгаммера или вырожденная гипергеометрическая функция. — Прим. ред.

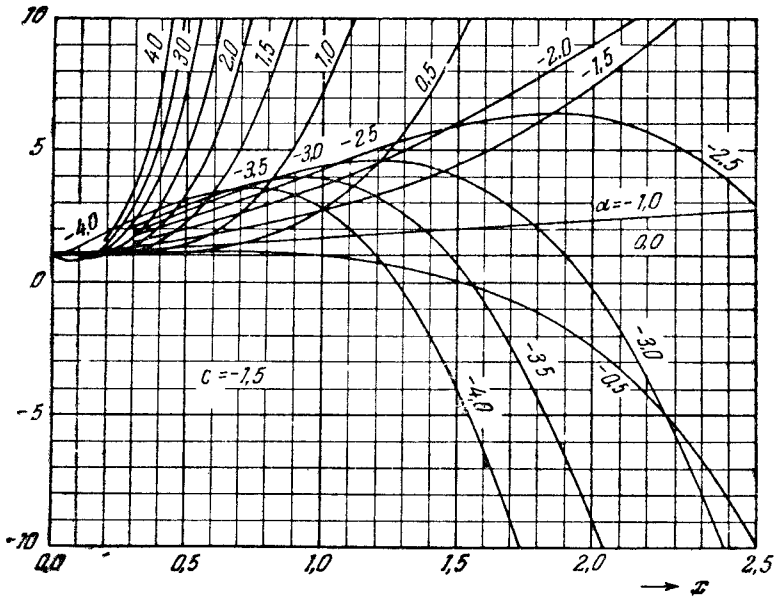


Рис. 192. Функция  $\Phi(\alpha, -1,5; x)$ .

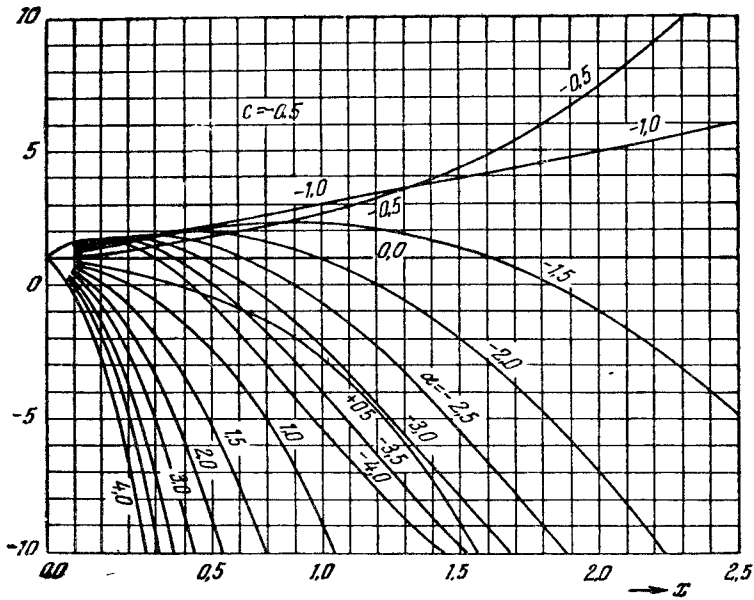
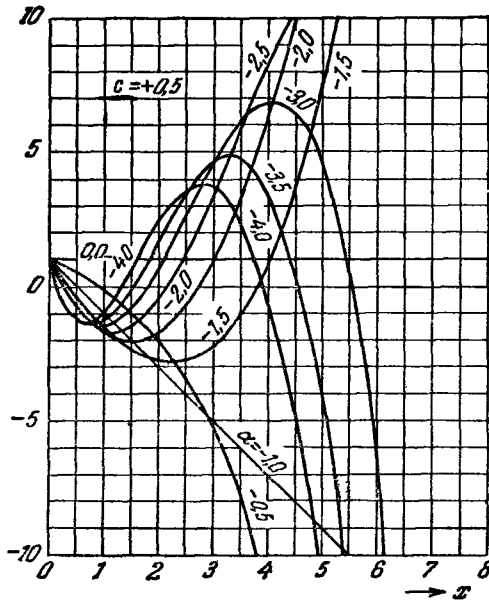
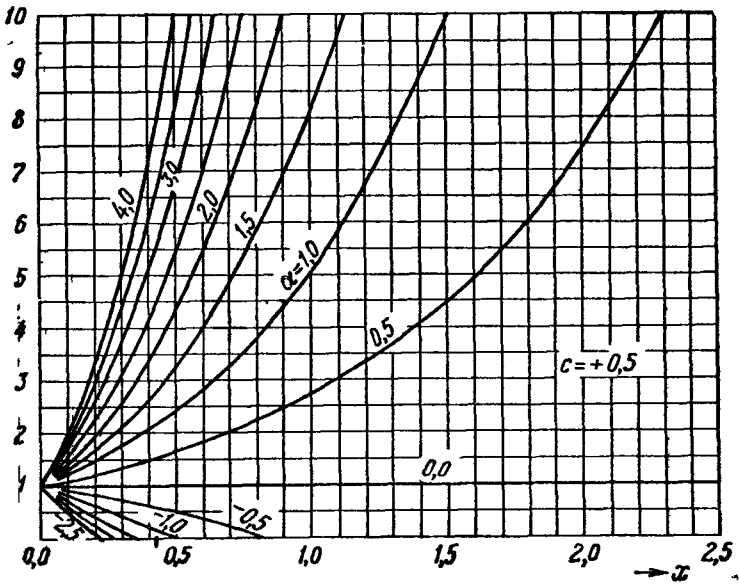


Рис. 193. Функция  $\Phi(\alpha, -0,5; x)$ .

Рис. 194 и 195. Функция  $\Phi(\alpha, +0.5, x)$ .

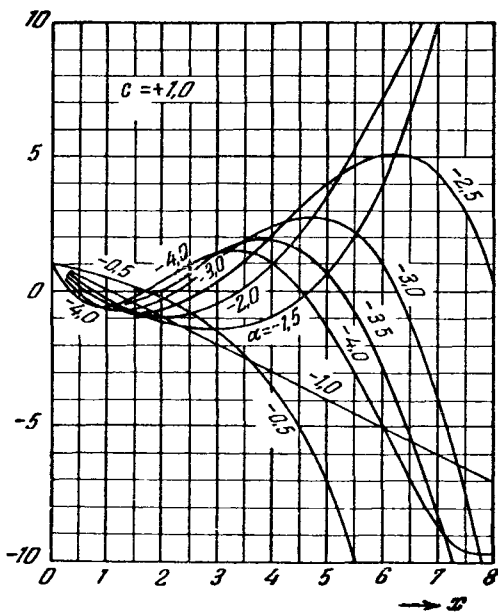
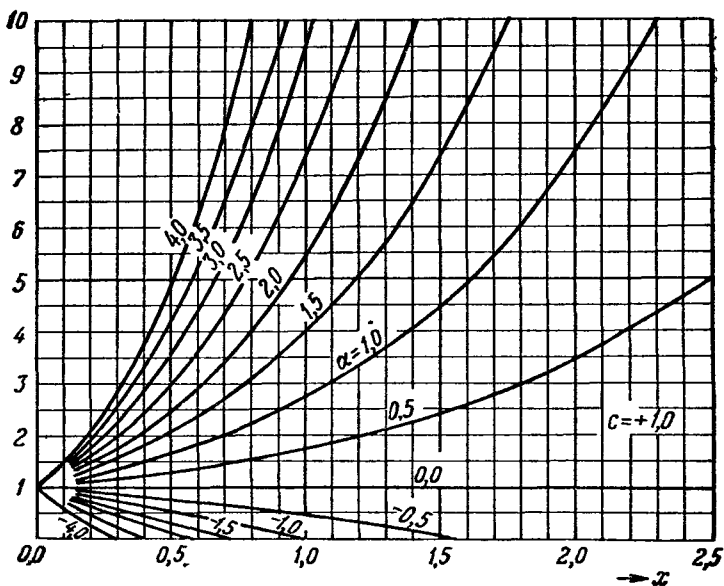
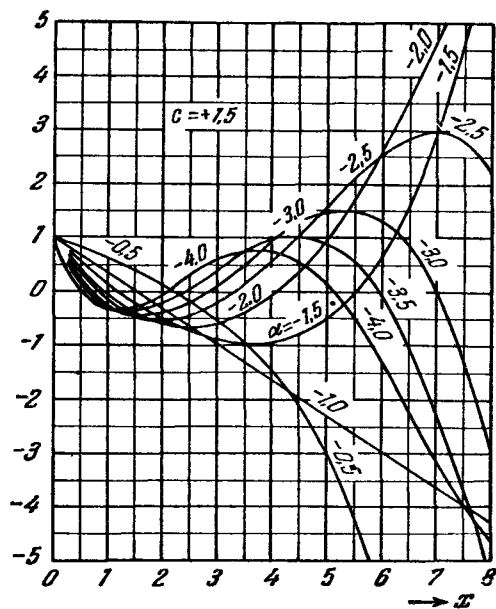
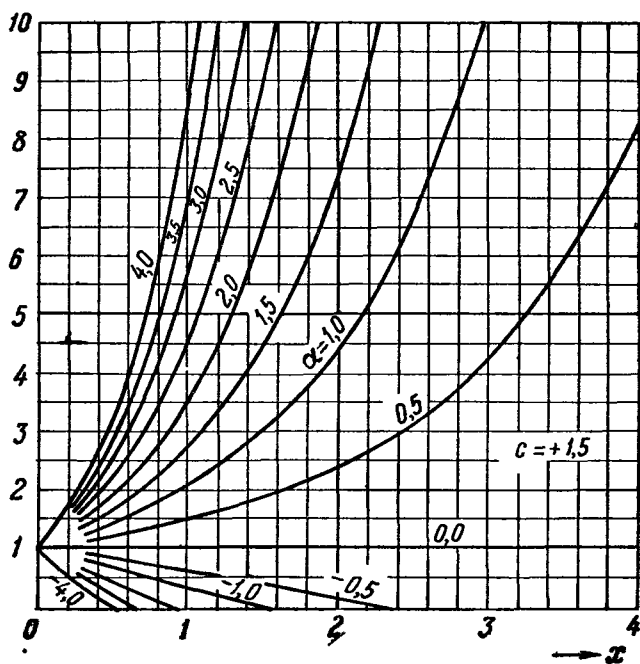


Рис. 196 и 197. Функция  $\Phi(a, +1.0; x)$ .

Рис. 198 и 199. Функция  $\Phi(\alpha, +1.5; x)$ .



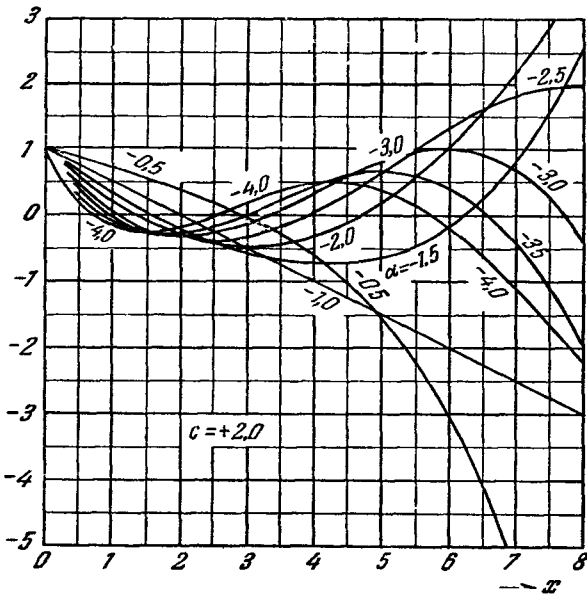
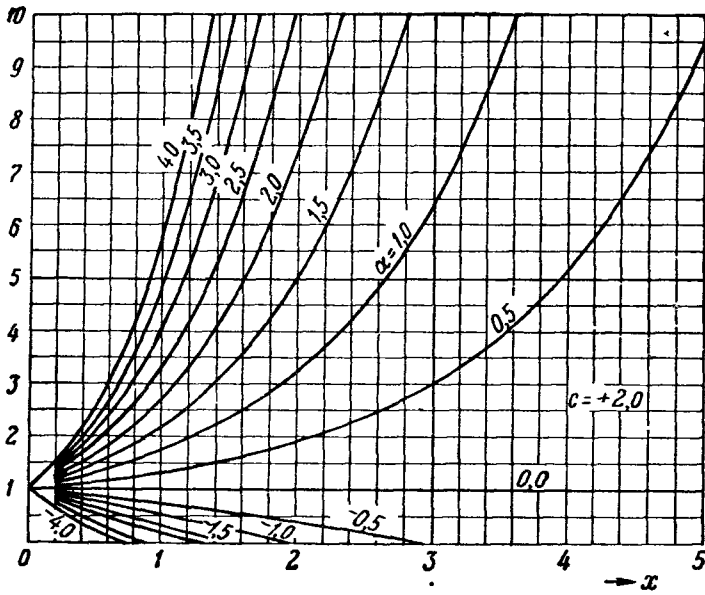
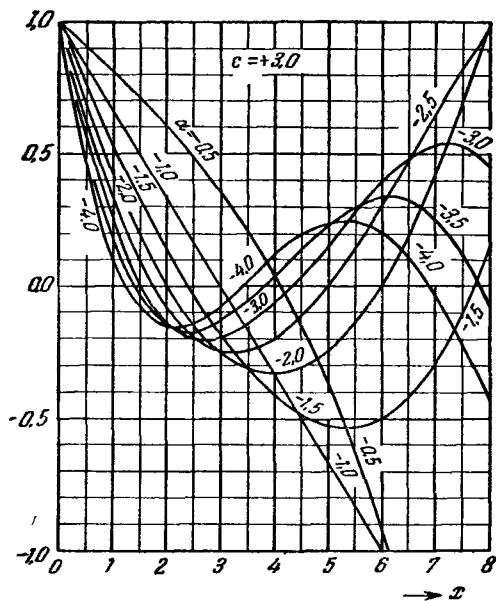
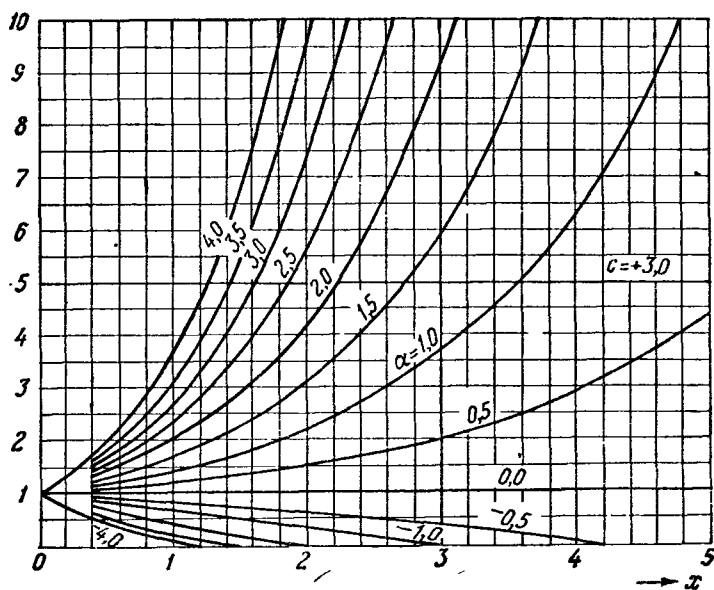


Рис. 200 и 201. Функция  $\Phi(a, +2,0; x)$ .

Рис. 202 и 203. Функция  $\Phi(\alpha, +3, 0; x)$ .

Имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} (c-a)\Phi(a-1, c; z) + (2a-c+z)\Phi(a, c; z) - a\Phi(a+1, c; z) &= 0, \\ c(a+z)\Phi(a, c; z) - (c-a)z\Phi(a, c+1; z) - ac\Phi(a+1, c; z) &= 0, \\ c\Phi(a, c; z) - c\Phi(a-1, c; z) - z\Phi(a, c+1; z) &= 0, \\ (a-1+z)\Phi(a, c; z) + (c-a)\Phi(a-1, c; z) - (c-1)\Phi(a, c-1; z) &= 0, \\ (a-c+1)\Phi(a, c; z) - a\Phi(a+1, c; z) + (c-1)\Phi(a, c-1; z) &= 0, \\ c(c-1)\Phi(a, c-1; z) - c(c-1+z)\Phi(a, c; z) + (c-a)z\Phi(a, c+1; z) &= 0. \end{aligned}$$

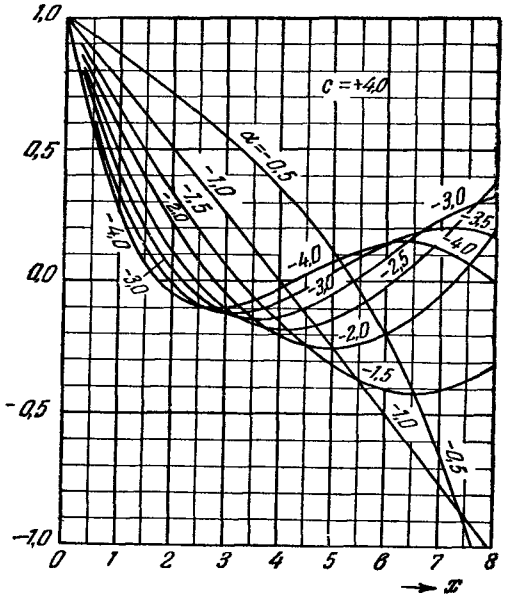
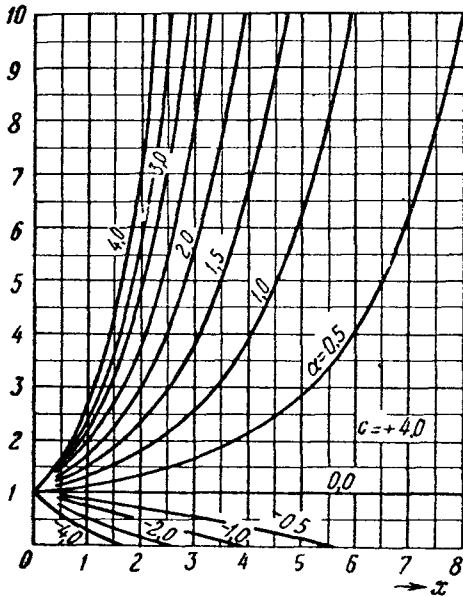


Рис. 204 и 205. Функция  $\Phi(a, +4,0; x)$ .

Правило дифференцирования функции  $\Phi(a, c; z)$ :

$$\frac{d^n \Phi}{dz^n} = \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(a)} \Phi(a+n, c+n; z).$$

Формула Куммера:

$$\Phi(a, c; z) = e^z \Phi(c-a, c; -z).$$

### 2. Функция $\Psi(a, c; z)$

Если  $c$  не есть целое число, то линейно независимым от  $\Phi(a, c; z)$  решением конфлюэнтного дифференциального уравнения является функция

$$z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Вместо нее можно взять функцию

$$\Psi(a, c; z) = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} \Phi(a, c; z) + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z).$$

Эта последняя с помощью предельного перехода  $\Psi(a, n; z) = \lim_{c \rightarrow n} \Psi(a, c; z)$

может быть определена и для всех целых значений параметра  $c$ . Для  $n = 0, 1, 2, \dots$  получим:

$$\Psi(a, n+1; z) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(a-n)n!} \left\{ \Phi(a, n+1; z) \ln z + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} [\psi(a+k) - \psi(1+k) - \psi(1+n+k)] \frac{z^k}{k!} \right\} + \\ + \frac{(n-1)!}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a-n)(a-n+1)\dots(a-n+k-1)}{(1-n)(2-n)\dots(k-n)} \frac{z^{k+n}}{k!}$$

( $\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ ; в случае  $n=0$  последняя сумма должна быть отброшена)

Если  $c$  не есть целое положительное число, то представление для  $\Psi(a, c; z)$  можно получить из следующей формулы, которая справедлива при всех значениях  $c$ :

$$\Psi(a, c; z) = z^{1-c} \Psi(a-c+1, 2-c; z).$$

При  $a$  и  $c$  фиксированных  $\Psi(a, c; z)$  является (в общем случае) бесконечнозначной аналитической функцией от  $z$  с единственной конечной точкой ветвления  $z=0$ . При положительных действительных значениях аргумента  $z=x>0$  эта функция имеет действительную ветвь. При  $\operatorname{Re} a > 0$ ,  $\operatorname{Re} c > 0$  функция  $\Psi(a, c; z)$  допускает интегральное представление

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt.$$

Асимптотическое поведение функции  $\Psi(a, c; z)$  при  $|z| \gg |a|$ ,  $|z| \gg |c|$  в области  $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$  дается формулой

$$\Psi(a, c; z) \approx z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{c-a-1}{n} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{z^n}.$$

Имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \Psi(a-1, c; z) - (2a-c+z)\Psi(a, c; z) + a(a-c+1)\Psi(a+1, c; z) &= 0, \\ (a+z)\Psi(a, c; z) + a(c-a-1)\Psi(a+1, c; z) - z\Psi(a, c+1; z) &= 0, \\ (c-a)\Psi(a, c; z) - z\Psi(a, c+1; z) + \Psi(a-1, c; z) &= 0, \\ (a-1+z)\Psi(a, c; z) - \Psi(a-1, c; z) + (a-c+1)\Psi(a, c-1; z) &= 0, \\ \Psi(a, c; z) - a\Psi(a+1, c; z) - \Psi(a, c-1; z) &= 0, \\ (c-a-1)\Psi(a, c-1; z) - (c-1+z)\Psi(a, c; z) + z\Psi(a, c+1; z) &= 0. \end{aligned}$$

Правило дифференцирования функции  $\Psi(a, c; z)$ :

$$\frac{d^n \Psi}{dz^n} = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \Psi(a+n, c+n; z).$$

### 3. Функции $M_{x, \mu}(z)$ и $W_{x, \mu}(z)$

С помощью функций  $\Phi(a, c; z)$  и  $\Psi(a, c; z)$  можно получить такие интегралы конфлюэнтного дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{\Gamma(c)} \Phi(a, c; z), \quad \frac{1}{\Gamma(2-c)} z^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c; z), \quad \Psi(a, c; z), \\ e^z \Psi(c-a, c; -z)$$

(причем первые два имеют смысл также и при неположительном целом значении параметра  $c$ ). Среди них всегда существуют пары независимых интегралов.

Для фундаментальной системы интегралов употребляют и другое представление, данное Э. Уиттекером и Дж. Ватсоном. После преобразования

$$\omega = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{c}{2}} w, \quad \kappa = \frac{c}{2} - a, \quad \mu = \frac{c-1}{2}$$

конфлюэнтное дифференциальное уравнение принимает вид

$$\frac{d^2 \omega}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{1-4\mu^2}{4z^2} \right) \omega = 0.$$

Решениями этого уравнения являются:

$$M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu + \frac{1}{2}} \Phi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right),$$

$$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^{\mu + \frac{1}{2}} \Psi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right);$$

последняя функция называется *функцией Уиттекера*. Если  $2\mu$  не есть целое число, то обе функции связаны соотношением

$$W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa\right)} M_{\kappa, -\mu}(z).$$

Функции  $M_{\kappa, \mu}(z)$ ,  $W_{\kappa, \mu}(z)$  являются бесконечнозначными аналитическими функциями, которые имеют действительную ветвь при действительных положительных значениях аргумента.

#### 4. Частные случаи

Конфлюэнтные гипергеометрические функции содержат как частные случаи: функции Бесселя при  $c = 2a$ , функции параболического цилиндра при  $c = \frac{1}{2}$ , неполные гамма-функции при  $a = 1$  и полиномы Лагерра при  $a = -n$ .

## XVI. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ФИЗИКИ

### А. ФУНКЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАНКА

Тело, имеющее абсолютную температуру  $T$ , испускает электромагнитные волны со всевозможными длинами  $\lambda$ . Излучаемая при этом энергия распределяется весьма неравномерно по волнам различной длины.

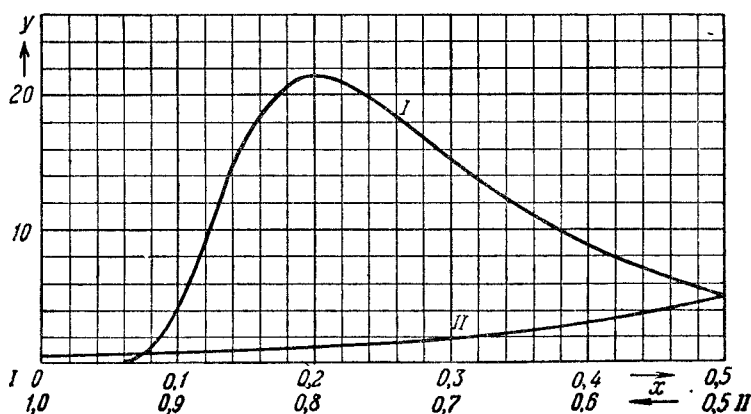


Рис. 206. Функция излучения Планка.

Волнам. длины которых заключены между  $\lambda$  и  $\lambda + d\lambda$ , соответствует плотность излучения  $J d\lambda$ . Тогда, согласно Планку,

$$J = hc^2 \lambda^{-5} (e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1)^{-1}.$$

Здесь  $c$  означает скорость света в пустоте,  $k$  — постоянную Больцмана,  $h$  — постоянную Планка. Если ввести два числа  $x$  и  $y$ , положив

$$\lambda = \frac{hc}{kT} x, \quad J = \frac{k^5 T^5}{h^4 c^3} y,$$

то уравнение Планка принимает вид:

$$(e^x - 1) x^5 y = 1.$$

Зависимость  $y$  от  $x$  называется *функцией излучения Планка* (рис. 206, таблица 68). Эта функция показывает, как при постоянной температуре плотность излучения зависит от длины волны.

Таблица 68. Функция излучения Планка

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0,060	0,07430	0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995
1	0,08990	1	7,259	1	18,589	55	11,279	05	2,922
2	0,10797	2	7,522	2	18,73	60	10,965	10	2,852
3	0,12875	3	7,787	3	18,86	65	10,658	15	2,783
4	0,15249	4	8,053	4	18,99	70	10,360	20	2,717
0,065	0,17946	0,115	8,320	0,165	19,12	0,375	10,069	0,625	2,653
6	0,2099	6	8,588	6	19,24	80	9,787	30	2,590
7	0,2441	7	8,856	7	19,36	85	9,512	35	2,529
8	0,2823	8	9,125	8	19,48	90	9,245	40	2,470
9	0,3248	9	9,393	9	19,59	95	8,985	45	2,412
0,070	0,3718	0,120	9,662	0,170	19,69	0,400	8,733	0,650	2,356
1	0,4235	1	9,931	2	19,89	05	8,488	55	2,302
2	0,4802	2	10,198	4	20,08	10	8,250	60	2,249
3	0,5422	3	10,465	6	20,25	15	8,020	65	2,198
4	0,6095	4	10,731	8	20,40	20	7,796	70	2,148
0,075	0,6825	0,125	10,996			0,425	7,578	0,675	2,099
6	0,7613	6	11,259	0,180	20,54	30	7,368	80	2,052
7	0,8460	7	11,521	5	20,82	35	7,163	85	2,006
8	0,9368	8	11,781	0,190	21,02	40	6,965	90	1,961
9	1,0339	9	12,040	5	21,15	45	6,773	95	1,918
0,080	1,1373	0,130	12,296	0,200	21,20	0,450	6,586	0,700	1,875
1	1,2471	1	12,550	05	21,18	55	6,406	05	1,8341
2	1,3635	2	12,801	10	21,11	60	6,231	10	1,7939
3	1,4864	3	13,050	15	20,99	65	6,061	15	1,7548
4	1,6160	4	13,296	20	20,82	70	5,896	20	1,7168
0,085	1,7521	0,135	13,540	0,225	20,61	0,475	5,736	0,725	1,6797
6	1,8948	6	13,780	30	20,36	80	5,582	30	1,6436
7	2,044	7	14,017	35	20,08	85	5,432	35	1,6085
8	2,200	8	14,251	40	19,78	90	5,286	40	1,5743
9	2,362	9	14,482	45	19,45	95	5,145	45	1,5409
0,090	2,531	0,140	14,710	0,250	19,10	0,500	5,009	0,750	1,5084
1	2,706	1	14,934	55	18,74	05	4,876	55	1,4768
2	2,887	2	15,154	60	18,372	10	4,748	60	1,4459
3	3,074	3	15,371	65	17,989	15	4,623	65	1,4158
4	3,267	4	15,584	70	17,600	20	4,502	70	1,3865
0,095	3,466	0,145	15,793	0,275	17,206	0,525	4,385	0,775	1,3580
6	3,671	6	15,998	80	16,809	30	4,271	80	1,3301
7	3,880	7	16,200	85	16,411	35	4,161	85	1,3029
8	4,095	8	16,397	90	16,013	40	4,054	90	1,2764
9	4,315	9	16,591	95	15,617	45	3,951	95	1,2506
0,100	4,540	0,150	16,780	0,300	15,224	0,550	3,850	0,800	1,2254
1	4,769	1	16,966	05	14,834	55	3,753	05	1,2009
2	5,003	2	17,147	10	14,449	60	3,658	10	1,1769
3	5,241	3	17,324	15	14,070	65	3,566	15	1,1535
4	5,482	4	17,497	20	13,696	70	3,477	20	1,1307
0,105	5,727	0,155	17,666	0,325	13,329	0,575	3,390	0,825	1,1084
6	5,976	6	17,830	30	12,968	80	3,307	30	1,0867
7	6,227	7	17,990	35	12,615	85	3,225	35	1,0655
8	6,481	8	18,146	40	12,270	90	3,146	40	1,0448
9	6,738	9	18,298	45	11,932	95	3,069	45	1,0246
0,110	6,998	0,160	18,446	0,350	11,601	0,600	2,995	0,850	1,0048

Продолжение табл. 68

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
	1,		0,		0,		0,1		0,0
0,850	0048	0,975	6344	1,20	3089	1,45	5711	1,70	8795
55	*9856	80	6235	1	3000	6	5325	1	8607
60	9667	85	6128	2	2914	7	4951	2	8424
65	9484	90	6023	3	2831	8	4588	3	8246
70	9304	95	5920	4	2751	9	4236	4	8073
0,875	9129	1,00	5820	1,25	2674	1,50	3895	1,75	7904
80	8958	1	5625	6	2599	1	3564	6	7740
85	8790	2	5438	7	2527	2	3242	7	7580
90	8627	3	5259	8	2458	3	2930	8	7424
95	8467	4	5087	9	2390	4	2627	9	7272
0,900	8311	1,05	4922	1,30	2326	1,55	2333	1,80	7124
05	8158	6	4764	1	2263	6	2047	1	6979
10	8009	7	4611	2	2202	7	1770	2	6838
15	7863	8	4465	3	2144	8	1500	3	6701
20	7721	9	4325	4	2087	9	1239	4	6567
0,925	7581	1,10	4190	1,35	2032	1,60	0984	1,85	6437
30	7445	1	4060	6	1979	1	0737	6	6309
35	7311	2	3935	7	1928	2	0496	7	6185
40	7181	3	3814	8	1878	3	0262	8	6064
45	7054	4	3699	9	18298	4	0035	9	5946
0,950	6929	1,15	3587	1,40	17831	1,65	*9814	1,90	5830
55	6807	6	3480	1	17380	6	9599	1	5718
60	6687	7	3377	2	16943	7	9389	2	5608
65	6571	8	3277	3	16519	8	9186	3	5501
70	6456	9	3181	4	16109	9	8988	4	5396
0,975	6344	1,20	3089	1,45	15711	1,70	8795	1,95	5294
	0,		0,		0,		0,0		0,0

## В. ФУНКЦИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Рассмотрим систему одинаковых молекулярных магнитных стрелок во внешнем магнитном поле. Если  $\mu$  означает молекулярный магнитный момент,  $\mathfrak{H}$  — напряженность магнитного поля и  $k$  — постоянную Больцмана, то поведение молекулярного магнетика при данной температуре  $T$  определяется средним моментом (формула Ланжевена):

$$\bar{\mu} = \mu \left( \operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \right),$$

где  $x = \frac{\mu \mathfrak{H}}{kT}$ . Входящая сюда функция

$$L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$$

называется *функцией Ланжевена* (таблица 69).

## С. ФУНКЦИИ ПЛАНКА — ЭЙНШТЕЙНА И ДЕБАЯ

## 1. Функции Планка — Эйнштейна

Обозначим через  $\Theta = \frac{h\nu}{k}$  характеристическую температуру для системы частиц, которые совершают свободные гармонические колебания с частотой  $\nu$  ( $h$  — постоянная Планка,  $k$  — постоянная Больцмана). Тогда характеризующие эту систему атомная теплоемкость  $C_v$ , отношение полной энергии  $U - U_0$  к абсолютной температуре  $T$ , отношение свободной энергии  $F - F_0$  к абсолютной температуре  $T$  и энтропия  $S$  могут быть представлены, согласно Планку и



Таблица 69. Функция Ланжевена

x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)	x	L(x)
0,00	0,00000	1,00	0,3130	2,00	0,5373	4,0	0,7507	11,0	0,9091
02	006666	02	3185 27,5	02	5408 17	1	7566 57	5	9130 7,4
04	013332	04	3240 27,5	04	5442 17	2	7623 55	12,0	9167 6,6
06	019995	06	3294 27	06	5476 17	3	7678 52	5	9200 6,2
08	026655	08	3348 26,5	08	5510 16,5	4	7730 50	13,0	9231 5,6
0,10	03331	1,10	3401 26,5	2,10	5543 16,2	5	7780 48	5	9259 5,4
12	03996	12	3454 26,5	15	5624 15,8	6	7828 46	14,0	9286 4,8
14	04661	14	3507 26	20	5703 15,4	7	7874 44	5	9310 4,6
16	05324	16	3559 26	2,25	5780 15,0	8	7918 42	15,0	9333 4,4
18	05987	18	3611 25,5	30	5855 14,6	9	7960 41	5	9355 4,0
0,20	06649	1,20	3662 25,5	35	5928 14,2	5,0	8001 39	16,0	9375 3,8
22	07310	22	3713 25	40	5999 13,8	1	8040 38	5	9394 3,6
24	07969	24	3763 25	45	6068 13,4	2	8078 36	17,0	9412 3,4
26	08628	26	3813 25	2,50	6135 13,2	3	8114 35	5	9429 3,0
28	09285	28	3863 24,5	55	6201 12,8	4	8149 33	18,0	9444 3,0
0,30	09941	1,30	3912 24,5	60	6265 12,4	5	8182 33	19	9474 2,6
32	10595	32	3961 24,5	65	6327 12,0	6	8215 31	20	9500 2,4
34	11247	34	4010 24	70	6387 11,8	7	8246 30	21	9524 2,2
36	11897	36	4058 23,5	2,75	6446 11,4	8	8276 29	22	9546 1,9
38	12546	38	4105 23,5	80	6503 11,0	9	8305 28	23	9565 1,8
0,40	13193	1,40	4152 23,5	85	6558 10,8	6,0	8333 27	24	9583 1,7
42	13838	42	4199 23	90	6612 10,6	2	8387 25,5	25	9600 1,5
44	14481	44	4245 23	95	6665 10,2	4	8438 23,5	26	9615 1,5
46	15121	46	4291 22,5	3,00	6716 10,0	6	8485 22	27	9630 1,3
48	15759	48	4336 22,5	05	6766 9,8	8	8529 21	28	9643 1,2
0,50	16395	1,50	4381 22,5	10	6815 9,4	7,0	8571 20	30	9667 10,5
52	17029	52	4426 22	15	6862 9,2	2	8611 19	32	9688 9
54	17660	54	4470 22	20	6908 9,0	4	8649 17,5	34	9706 8
56	18288	56	4514 21,5	3,25	6953 8,8	6	8684 17	36	9722 7,5
58	18913	58	4557 21,5	30	6997 8,6	8	8718 16	38	9737 6,5
0,60	19536	1,60	4600 21	35	7040 8,2	8,0	8750 15,5	40	9750 6
62	20156	62	4642 21	40	7081 8,2	2	8781 14,5	42	9762 5,5
64	20773	64	4684 21	45	7122 7,8	4	8810 13,5	44	9773 5
66	21387	66	4726 20,5	3,50	7161 7,8	6	8837 13,5	46	9783 4,5
68	21997	68	4767 20,5	55	7200 7,4	8	8864 12,5	48	9792 4
0,70	22605	1,70	4808 20	60	7237 7,2	9,0	8889 12	50	9800 3,8
72	23210	72	4848 20	65	7273 7,2	2	8913 11,5	55	9818 3,0
74	23811	74	4888 20	70	7309 7,0	4	8936 11	60	9833 2,6
76	24409	76	4928 19,5	3,75	7344 6,8	6	8958 11	65	9846 2,2
78	25003	78	4967 19,5	80	7378 6,8	8	(90) 10	70	9857 2,0
0,80	25594	1,80	5006 19,5	85	7412 6,4	10,0	9000 10	75	9867 1,6
82	26182	82	5045 19	90	7444 6,4	2	9020 9,5	80	9875 1,4
84	26766	84	5083 19	95	7476 6,2	4	9039 9	90	9889 1,1
86	27346	86	5121 18,5	4,00	7507 0,	6	9057 8,5	100	9900 0,
88	27923	88	5158 18,5			8	9074 8,5		
0,90	28496	1,90	5195 18			11,0	9091 0,		
92	29065	92	5231 18						
94	29630	94	5267 18						
96	30192	96	5303 17,5						
98	30750	98	5338 17,5						
1,00	31304	2,00	5373 0,						

Таблица 70. Функции Планка — Эйнштейна  $C_v$  и  $\frac{U-U_0}{T}$ 

$\Theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$	$\Theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$	$\Theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$
0,0	987	987	5,0	339	674	10,0	90	0,00
1	985	889	1	319	622	1	83	08
2	980	795	2	300	573	2	77	08
3	972	704	3	281	528	3	71	07
4	961	616	4	264	487	4	65	08
0,5	946	531	5,5	248	448	10,5	60	08
6	928	450	6	232	413	6	56	05
7	908	372	7	217	380	7	51	05
8	884	297	8	204	350	8	47	04
9	858	225	9	191	322	9	44	04
1,0	829	156	6,0	178	296	11,0	40	04
1	798	091	1	167	272	1	37	03
2	765	028	2	156	251	2	34	03
3	729	*968	3	145	230	3	31	03
4	692	911	4	136	212	4	29	03
1,5	653	856	6,5	127	194	11,5	27	02
6	612	804	6	118	179	6	25	02
7	570	755	7	110	164	7	23	02
8	527	708	8	103	151	8	21	02
9	483	664	9	096	138	9	19	02
2,0	439	622	7,0	0889	127	12,0	18	01
1	393	582	1	0828	116	1	16	0,00
2	348	545	2	0770	107	2	15	
3	302	509	3	0716	098	3	14	
4	256	476	4	0666	090	4	13	
2,5	210	444	7,5	0619	082	12,5	12	
6	164	414	6	0575	076	6	11	
7	119	387	7	0534	069	7	10	
8	074	360	8	0496	064	8	09	
9	030	336	9	0460	058	9	08	
3,0	*986	312	8,0	0427	053	13,0	08	
1	943	291	1	0396	049	1	07	
2	901	270	2	0367	045	2	06	
3	860	251	3	0340	041	3	06	
4	820	233	4	0315	038	4	05	
3,5	782	217	8,5	0292	034	13,5	05	
6	744	201	6	0271	031	6	05	
7	707	186	7	0251	029	7	04	
8	672	173	8	0232	026	8	04	
9	637	160	9	0215	024	9	04	
4,0	604	148	9,0	0199	022	14,0	03	
1	572	137	1	0184	020	1	03	
2	542	127	2	0170	018	2	03	
3	512	118	3	0157	017	3	03	
4	484	109	4	0145	015	4	02	
4,5	457	1004	9,5	0134	014	14,5	02	
6	431	0928	6	0124	013	6	02	
7	407	0857	7	0115	012	7	02	
8	383	0791	8	0106	011	8	02	
9	361	0730	9	0098	010	9	01	
5,0	339	0674	10,0	0090	009	15,0	01	
0,	0,	0,	0,	0,	0,0	0,00	0,00	

Эйнштейну, как универсальные функции от  $\Theta/T$ . Для случая колебания частиц с одной степенью свободы эти функции имеют вид

$$C_v = R x^2 e^x (e^x - 1)^{-2},$$

$$\frac{U-U_0}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T C_v dT = R x (e^x - 1)^{-1},$$

$$\frac{F - F_0}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T C_v dT - \int_0^T \frac{C_v}{T} dT = R \ln(1 - e^{-x}),$$

$$S = \int_0^T \frac{C_v}{T} dT = \frac{U - U_0}{T} - \frac{F - F_0}{T},$$

где  $x = \frac{\Theta}{T}$ .

Таблицы 70 и 71 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение  $R = 1,987$  *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Планка — Эйнштейна при  $x \gg 1$  описывается формулами:

$$C_v \approx R x^2 e^{-x}, \quad \frac{U - U_0}{T} \approx R x e^{-x}, \quad -\frac{F - F_0}{T} \approx R e^{-x}, \quad S \approx R(1 + x) e^{-x}.$$

Таблица 71. Функции Планка — Эйнштейна  $-\frac{F - F_0}{T}$  и  $S$

$\Theta/T$	$-\frac{F - F_0}{T}$	$S$	$\Theta/T$	$-\frac{F - F_0}{T}$	$S$	$\Theta/T$	$-\frac{F - F_0}{T}$	$S$
0,0	$\infty$	$\infty$	2,5	0,	0,	5,0	0,0	0,0
1	4,674	6,563	6	170	614	1	13	81
2	3,393	5,188	7	153	568	2	12	74
3	2,683	4,387	8	138	525	3	11	68
4	2,205	3,821	9	125	485	4	10	63
0,5	1,853	3,385	3,0	112	448	5	09	58
6	1,581	3,032	1	101	414	6	08	53
7	1,364	2,736	1	092	382	7	07	49
8	1,185	2,483	2	083	353	8	07	45
9	1,037	2,262	3	075	326	9	06	41
1,0	0,911	2,068	4	067	301	10	05	38
1	0,804	1,895	3,5	061	277	6,0	05	35
2	0,712	1,740	6	055	256	1	04	32
3	0,632	1,600	7	050	236	2	04	29
4	0,563	1,473	8	045	218	3	04	27
1,5	0,502	1,358	9	041	201	4	03	24
6	0,448	1,252	4,0	037	185	6,5	03	22
7	0,401	1,156	1	033	170	6	03	21
8	0,359	1,067	2	029	157	7	02	19
9	0,322	0,986	3	027	145	8	02	17
2,0	0,289	0,911	4	025	133	9	02	16
1	0,260	0,842	4,5	022	123	7,0	02	15
2	0,233	0,778	6	020	113		0,0	0,0
3	0,210	0,719	7	018	104			
4	0,189	0,665	8	016	096			
2,5	0,170	0,614	9	015	088			
			5,0	013	081			
				0,	0,			

## 2. Функции Дебая

Если колеблющиеся частицы взаимодействуют друг с другом (случай твердого тела), то вместо фиксированной частоты  $\nu$  получается спектр частот. В этом случае тоже можно ввести понятие характеристической температуры  $\Theta$  так, чтобы атомная теплоемкость  $C_v$  и другие указанные выше величины являлись универсальными функциями от  $\Theta/T$ . Если определить функцию

$$D(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi,$$

Таблица 72. Функции Дебая  $C_v$  и  $\frac{U-U_0}{T}$ 

$\theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$	$\theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$	$\theta/T$	$C_v$	$\frac{U-U_0}{T}$
0,0	5,961	5,9610	5,0	2,197	0,	10,0	0,	0,1
1	5,958	5,7404	1	2,128	7010	1	4520	150
2	5,949	5,5258	2	2,060	6718	2	4394	117
3	5,934	5,3172	3	1,994	6439	3	4273	085
4	5,914	5,1144	4	1,930	6173	4	4157	055
0,5	5,887	4,9176	5,5	1,867	5919	5,5	4044	025
6	5,855	4,7266	6	1,807	5677	10,5	3935	*9966
7	5,817	4,5414	7	1,748	5447	6	3829	9691
8	5,775	4,3620	8	1,692	5226	7	3727	9426
9	5,726	4,1883	9	1,637	5016	8	3629	9170
1,0	5,673	4,0202	6,0	1,584	4816	9	3533	8924
1	5,615	3,8576	1	1,532	4625	11,0	3441	8685
2	5,553	3,7006	2	1,482	4442	1	3352	8456
3	5,486	3,5489	3	1,433	4268	2	3266	8234
4	5,415	3,4025	4	1,387	4102	3	3183	8019
1,5	5,341	3,2613	6,5	1,342	3943	4	3102	7812
6	5,263	3,1252	6	1,298	3791	11,5	3024	7612
7	5,181	2,9941	7	1,256	3647	6	2948	7419
8	5,097	2,8679	8	1,215	3509	7	2875	7232
9	5,010	2,7464	9	1,176	3377	8	2804	7051
2,0	4,920	2,6296	7,0	1,138	3250	9	2736	6876
1	4,829	2,5173	1	1,101	3130	12,0	2669	6706
2	4,735	2,4094	2	1,066	3015	1	2605	6542
3	4,640	2,3058	3	1,031	2905	2	2543	6384
4	4,544	2,2064	4	0,9985	2799	3	2482	6230
2,5	4,446	2,1110	7,5	0,9667	2699	4	2423	6081
6	4,348	2,0195	6	0,9360	2602	12,5	2367	5937
7	4,249	1,9319	7	0,9064	2510	6	2312	5798
8	4,149	1,8479	8	0,8778	2422	7	2258	5662
9	4,050	1,7674	9	0,8503	2338	8	2206	5531
3,0	3,951	1,6904	8,0	0,8237	2257	9	2156	5404
1	3,852	1,6167	1	0,7981	2179	13,0	2107	5281
2	3,753	1,5462	2	0,7734	2105	1	2060	5161
3	3,655	1,4787	3	0,7496	2034	2	2014	5045
4	3,558	1,4143	4	0,7266	1966	3	1969	4932
3,5	3,462	1,3526	8,5	0,7044	1901	4	1926	4823
6	3,366	1,2937	6	0,6830	1838	13,5	1883	4717
7	3,272	1,2374	7	0,6624	1778	6	1843	4614
8	3,180	1,1837	8	0,6425	1721	7	1803	4514
9	3,088	1,1323	9	0,6234	1666	8	1764	4417
4,0	2,999	1,0833	9,0	0,6048	1613	9	1727	4322
1	2,911	1,0365	1	0,5870	1562	14,0	1690	4230
2	2,824	0,9919	2	0,5698	1513	1	1655	4141
3	2,739	0,9493	3	0,5532	1466	2	1620	4054
4	2,656	0,9086	4	0,5371	1421	3	1586	3970
4,5	2,575	0,8698	9,5	0,5216	1378	4	1554	3888
6	2,496	0,8328	6	0,5067	1336	14,5	1522	3808
7	2,420	0,7978	7	0,4923	1296	6	1491	3731
8	2,343	0,7638	8	0,4784	1257	7	1461	3655
9	2,269	0,7316	9	0,4649	1220	8	1432	3581
5,0	2,197	0,7010	10,0	0,4520	1185	9	1403	3510
					1150	15,0	1375	3440
					0,		0,	0,0

Таблица 73. Функции Дебая —  $\frac{F-F_0}{T}$  и  $S$

$\Theta/T$	$\frac{F-F_0}{T}$	$S$	$\Theta/T$	$\frac{F-F_0}{T}$	$S$	$\Theta/T$	$\frac{F-F_0}{T}$	$S$
0,0	$\infty$	$\infty$	5,0	0,	0,	10,0	0,0	0,1
1	15,935	21,675	1	2740	9750	1	386	536
2	12,022	17,548	2	2604	9321	2	375	492
3	9,821	15,138	3	2476	8915	3	364	449
4	8,319	13,434	4	2356	8529	4	354	408
0,5	7,199	12,117	5,5	2243	8162	5,5	343	369
6	6,320	11,046	6	2137	7814	6	334	330
7	5,605	10,147	7	2036	7483	7	325	294
8	5,010	9,372	8	1942	7168	8	316	258
9	4,507	8,695	9	1853	6869	9	307	224
1,0	4,074	8,094	6,0	1769	6585	6,0	299	191
1	3,699	7,556	1	1689	6314	11,0	291	159
2	3,370	7,070	2	1615	6057	1	283	128
3	3,080	6,629	3	1544	5812	2	275	099
4	2,822	6,225	4	1477	5578	3	268	070
1,5	2,592	5,853	4	1413	5356	4	261	042
6	2,386	5,511	6,5	1354	5145	11,5	254	016
7	2,201	5,195	6	1297	4943	6	248	* 990
8	2,033	4,901	7	1243	4751	7	242	965
9	1,881	4,628	8	1192	4568	8	235	941
2,0	1,7433	4,373	9	1144	4394	9	230	917
1	1,6178	4,135	7,0	1098	4228	12,0	224	895
2	1,5032	3,913	1	1054	4069	1	218	873
3	1,3984	3,704	2	1013	3917	2	213	851
4	1,3024	3,509	3	0973	3773	3	208	831
2,5	1,2142	3,325	4	0936	3635	4	203	811
6	1,1332	3,153	7,5	0900	3503	12,5	198	792
7	1,0587	2,991	6	0867	3377	6	193	773
8	0,9899	2,838	7	0834	3256	7	189	755
9	0,9265	2,694	8	0804	3141	8	185	738
3,0	0,8679	2,558	9	0774	3031	9	180	721
1	0,8137	2,430	8,0	0746	2926	13,0	176	704
2	0,7635	2,310	1	0720	2825	1	172	688
3	0,7169	2,196	2	0694	2729	2	168	673
4	0,6738	2,088	3	0670	2636	3	165	658
3,5	0,6337	1,986	4	0647	2548	4	161	643
6	0,5964	1,890	8,5	0625	2463	13,5	157	629
7	0,5617	1,799	6	0604	2382	6	154	615
8	0,5294	1,713	7	0584	2304	7	151	602
9	0,4993	1,632	8	0564	2230	8	147	589
4,0	0,4713	1,5546	9	0546	2158	9	144	576
1	0,4451	1,4817	9,0	0528	2090	14,0	141	564
2	0,4207	1,4126	1	0511	2024	1	138	552
3	0,3979	1,3471	2	0495	1961	2	135	541
4	0,3765	1,2851	3	0479	1900	3	132	529
4,5	0,3565	1,2263	4	0464	1842	4	130	518
6	0,3378	1,1706	9,5	0450	1786	14,5	127	508
7	0,3204	1,1183	6	0436	1732	6	124	497
8	0,3039	1,0676	7	0423	1680	7	122	487
9	0,2884	1,0201	8	0410	1630	8	119	478
5,0	0,2740	0,9750	9	0398	1582	9	117	468
			10,0	0386	1536	15,0	115	459
				0,	0,		0,0	0,0

то, согласно Дебаю, для случая колебаний частиц с тремя степенями свободы имеем:

$$C_p = 3R [4D(x) - 3x(e^x - 1)^{-1}], \quad \text{где} \quad x = \frac{\theta}{T}.$$

Далее, так же как и выше, можно получить выражения для  $\frac{U - U_0}{T}$ ,  $\frac{F - F_0}{T}$  и  $S$ ; в частности:

$$\frac{U - U_0}{T} = 3RD(x).$$

Таблицы 72 и 73 дают значения этих функций в *кал/град·мол*; для газовой постоянной взято значение  $R = 1,987$  *кал/град·мол*.

Асимптотическое поведение функций Дебая при  $x \gg 1$  описывается формулами:

$$C_p \approx \frac{12 \pi^4}{5} R x^3, \quad \frac{U - U_0}{T} \approx \frac{3 \pi^4}{5} R x^3, \quad -\frac{F - F_0}{T} \approx \frac{\pi^4}{5} R x^3, \quad S \approx \frac{4 \pi^4}{5} R x^3.$$

**D. ФУНКЦИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ОТ ИСТОЧНИКОВ**

Пусть в бесконечном однородном не движущемся теле помещен в начальный момент источник тепла в виде точки ( $n = 3$ ), бесконечной прямой ( $n = 2$ , или плоскости ( $n = 1$ ). Никаких других источников тепла в этот и в последующие моменты времени нет. Пусть соответствующий интервал от температуры

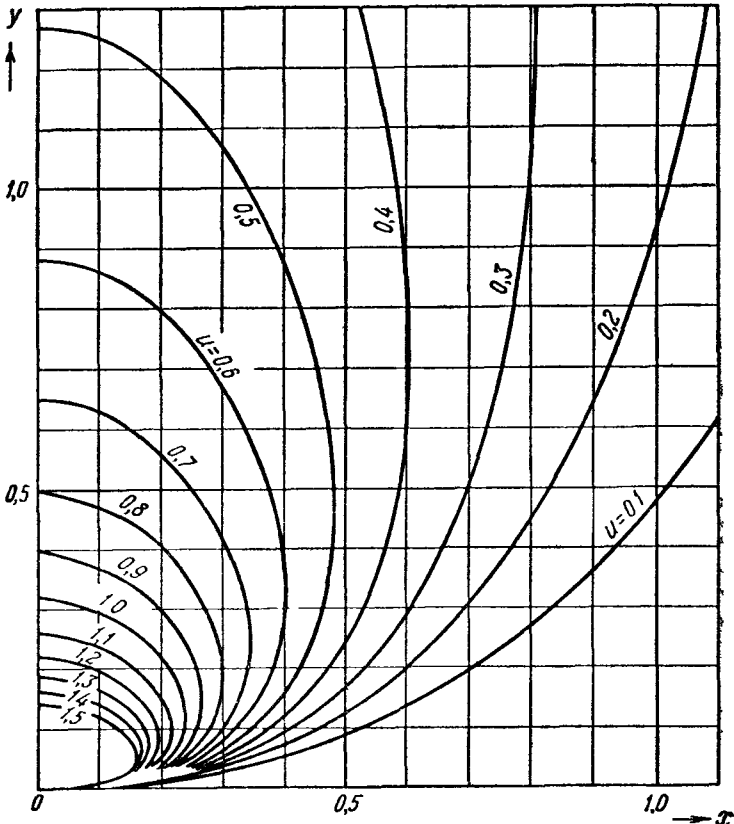


Рис. 207. Функция распространения тепла от нагретой плоскости.

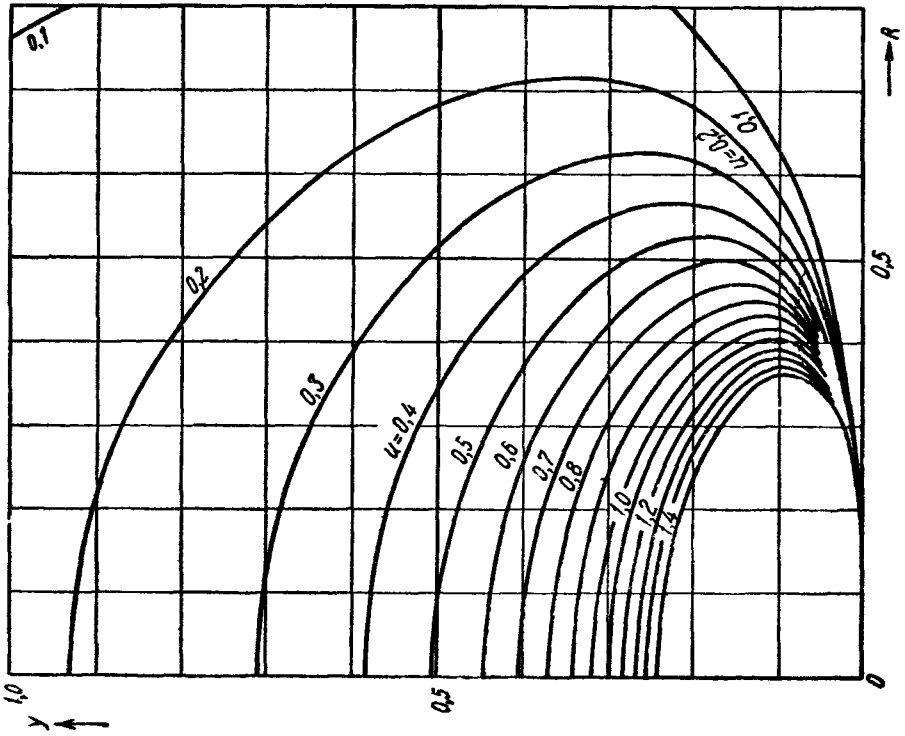


Рис. 209. Функция распространения тепла от нагретой точки

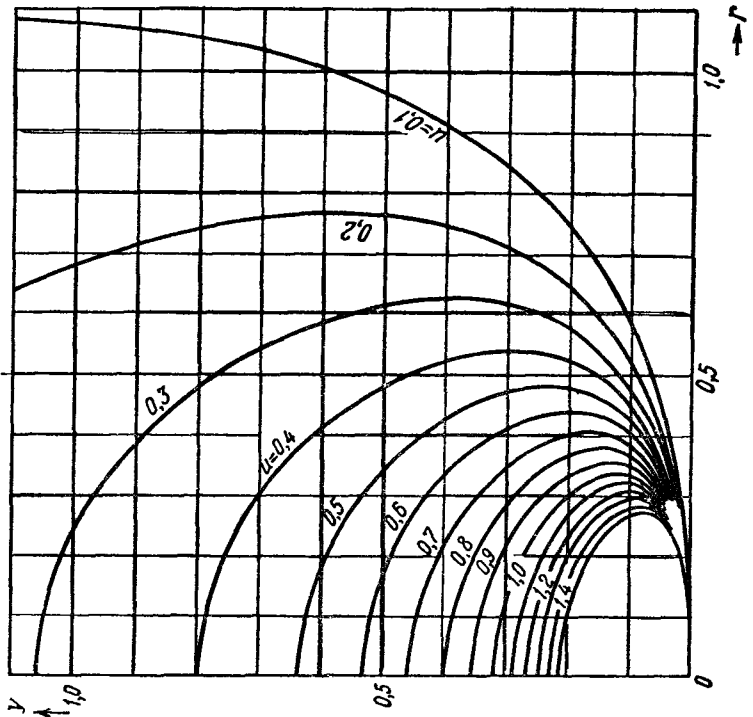


Рис. 208. Функция распространения тепла от нагретой прямой.

распространенный на все пространство, который пропорционален этому количеству тепла и, следовательно, не зависит от времени, равен единице. Тогда в момент времени  $t = \frac{y}{4a^2}$  ( $a^2$  — коэффициент теплопроводности тела) температура  $u$  на расстоянии  $x$  от начала координат будет:

$$u = \frac{e^{-\frac{x^2}{y}}}{\sqrt{(\pi y)^2}}.$$

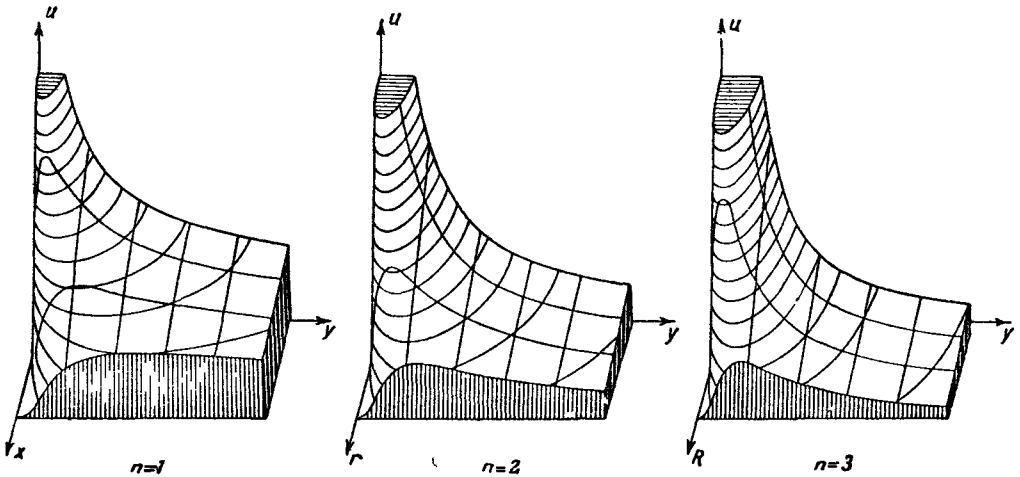


Рис 210. Функции распространения тепла от источников.

Рис. 207—210 представляют эти функции для случаев  $n=1$  (нагретая плоскость, изотермы — плоскости),  $n=2$  (нагретая прямая изотермы — круговые цилиндры  $x=r$ ),  $n=3$  (нагретая точка, изотермы — сферические поверхности  $x=R$ ).



## БИБЛИОГРАФИЯ

Сокращения:  $D$ —десятичные знаки,  $S$ —значащие цифры. [Запись « $\lg \Gamma(x)$  для  $x = 1(.001)^2, 12D$ » после названия таблицы (см. V, [12]) означает, что в этой таблице приведены значения функции  $\lg \Gamma(x)$  для  $x$  от 1 до 2 через каждые 0,001 с двенадцатью десятичными знаками.]

Среди перечисленных ниже работ, выбранных из обширной литературы по специальным функциям, прежде всего указаны общие руководства. Затем для каждого раздела настоящей книги приведен список работ, специально посвященных тем функциям, о которых идет речь в этом разделе.

### Руководства

Смирнов В. И., Курс высшей математики, Физматгиз, т. I, 1962; т. III, ч. II, 1958.

Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, Физматгиз, т. I, 1962; т. II, 1963.

Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.

Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.

Маделунг Э., Математический аппарат физики, Физматгиз, 1961.

Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. I, 1958, т. 2, 1960.

Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G., Higher transcendental functions, т. I—III, New York—Toronto—London, 1953—1955.

### Сборники формул

Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

Диткин В. А. и Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление (серия «Справочная математическая библиотека»), Физматгиз, 1961.

Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Физматгиз, 1961.

Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963.

Magnus W. und Oberhettinger F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1948.

### Таблицы

В следующих книгах содержатся перечни математических таблиц, вышедших в различных странах в разные годы.

Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд-во АН СССР, 1956.

Бурунова Н. М., Справочник по математическим таблицам (Дополнение I), Изд-во АН СССР, 1959.

Fletcher A., Miller C. P., Rosenhead L. and Comrie L. J., An index of mathematical tables, I, II, Oxford, 1962.

Текущие сообщения о всех новых работах в области математических таблиц даются журналом: Mathematical tables and other aids to computation, a Quarterly Journal published by the National Research Council, Washington.

## [I] — [IV] ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

### Руководства

[1] Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Ямпольский А. Р., Математический анализ (вычисление элементарных функций), Физматгиз, 1963.

[2] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I, Физматгиз, 1962.

[3] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. I, Физматгиз, 1962.

- [4] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Физматгиз, 1957.  
 [5] Янпольский А. Р., Гиперболические функции, Физматгиз, 1960.

## Сборники формул

- [6] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике, Физматгиз, 1962.

## Таблицы

- [7] Ангелов С. А., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1957.  
 [8] Андреев П. П., Математические таблицы, Госстатиздат, 1958.  
 [9] Барлоу Питер, Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин всех целых чисел от 1 до 15 000, ИЛ, 1964.  
 [10] Библиотека математических таблиц, вып. 9, Многозначные таблицы элементарных функции ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $e^{-x}$ ), ВЦ АН СССР, 1960.  
 [11] Библиотека математических таблиц, вып. 10, Таблицы  $\arcsin x$  и  $\operatorname{arctg} x$ , ВЦ АН СССР, 1960.  
 [12] Библиотека математических таблиц, вып. 11, Таблицы обратных гиперболических функций, ВЦ АН СССР, 1960.  
 [13] Библиотека математических таблиц, вып. 7 и 8, Таблицы натуральных логарифмов, ВЦ АН СССР, тт. 1, II, 1960.  
 [14] Библиотека математических таблиц, вып. 1, Таблицы круговых и гиперболических синусов и косинусов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1958.  
 [15] Библиотека математических таблиц, вып. 6, Таблицы круговых и гиперболических тангенсов и котангенсов в радианной мере угла, ВЦ АН СССР, 1959.  
 [16] Библиотека математических таблиц, вып. 15 и 16, Томсон А., Таблицы двадцатизначных десятичных логарифмов чисел, ВЦ АН СССР, тт. 1, 2, 1961.  
 [17] Брадис В. М., Четырехзначные математические таблицы, Учпедгиз, 1963.  
 [18] Бремикер К., Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками, Физматгиз, 1962.  
 [19] Вега Г., Таблицы семизначных логарифмов, Геодезиздат, 1962.  
 [20] Восьмизначные таблицы тригонометрических функций, Геодезиздат, 1959.  
 [21] Милн-Томсон Л. М. и Комри Л. Дж., Четырехзначные математические таблицы, Физматгиз, 1961.  
 [22] Пятизначные таблицы натуральных значений тригонометрических величин, их логарифмов и логарифмов чисел, Геодезиздат, 1962.  
 [23] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962.  
 [24] Субботин М. Ф., Многозначные таблицы логарифмов, Изд-во АН СССР, 1940.  
 [25] Таблицы  $e^x$  и  $e^{-x}$ , под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1955.  
 [26] Хренов Л. С., Пятизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1962.  
 [27] Хренов Л. С., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, Физматгиз, 1960.  
 [28] Хренов Л. С., Семизначные таблицы тригонометрических функций, Гостехиздат, 1956.  
 [29] Cohen L., Formulae and tables for the calculation of alternating current problems, New York, 1913. Содержит в конце таблицы  $\operatorname{sh}$  и  $\operatorname{ch}$  от  $z=0$  до  $0,98 + i \cdot 1,00$  с интервалами в  $0,02$  и  $i \cdot 0,02$ .  
 [30] Hawelka R., Vierstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im komplexen in Schritten von  $\frac{\pi}{2}$   $0,02$  und  $i \cdot 0,02$ , Berlin, 1931.  
 [31] Kennelly A. E., Tables of complex hyperbolic and circular functions, Cambridge, 1914. Содержит много таблиц, например  $\operatorname{sh}$  и  $\operatorname{ch}$  от  $z=0$  до  $3,95 + i \frac{\pi}{2} \cdot 2,00$  с интервалами в  $0,05$  и  $i \frac{\pi}{2} \cdot 0,05$ .

## V. ГАММА-ФУНКЦИИ

## Руководства

- [1] Артии Е., Введение в теорию гамма-функции, ГТТИ, 1934.  
 [2] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].  
 [3] Кратцер А. и Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.  
 [4] Кузнецов Д. С., Специальные функции, Высшая школа, 1962.  
 [5] Кузьмин Р. О., Бесселевы функции, ОНТИ, 1935.

- [6] Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения, Физматгиз, 1963.  
 [7] Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Физматгиз, 1958.  
 [8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].  
 [9] Böhmer P. E., Differenzgleichungen und bestimmte Integrale, Leipzig, 1939.  
 [10] Lössch F. und Schoblik F., Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen, Leipzig, 1951.  
 [11] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.

Таблицы

- [12] Абрамов А. А. Таблицы  $\ln \Gamma(z)$  в комплексной области, Изд-во АН СССР, 1953.  $\ln \Gamma(x+iy)$  для  $x=1(.01)2$ ,  $y=0(.01)4$ ; 6D.  
 [13] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, Физматгиз, 1962  $\Gamma(x)$  для  $x=1(.001)2$ ; 5D;  $\Gamma(n+1)$  для  $n=1(1)50$ ; 6S.  
 [14] Таблицы специальных функций, под ред. Я. Н. Шпильрейна, ГТТИ 1934.  $\Gamma(x)$  для  $x=1(.002,2)5D$ .  
 [15] Legendre A. M., Tables of the logarithms of the complete  $\Gamma$ -function to twelve figures. Tracts for computers Nr. IV, London, 1921.  $\lg \Gamma(x)$  для  $x=1(.001)2$ , 12D.  
 [16] Hayashi K., Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen und deren Produkte sowie der Gammafunktion, Berlin, 1926.  $\lg \Gamma(x)$  для  $x=$   
 $=0(.01)1(.00001)1.001(.0001)1.1(.001)2(.01)3, 8-13D$ ;  $\Gamma(x)$  для  $x=$   
 $=-5(.01)1(.001)2(.01)5,7-8D$ .  
 [17] Davis H. T., Tables of the higher mathematical functions I, II, Bloomington, 1933—1935. I:  $\lg \Gamma(x)$  для  $x=-10(.01)1(.001)2(.01)11(.1)101, 12-15D$ ;  $1(.0001)1.1, 10D$ ;  $1(.01)2, 20D$ .  $\Gamma(x)$  для  $x=-10(.01)1, 10S$ ;  $1(.001)2, 10D$ ;  $1(.0001)1.1, 10D$ .  $\psi(x)$  для  $x=-10(.01)1(.001)2(.02)20, 10-15D$ ;  $0.5(.5)100, 16D$ ;  $100(.1)450, 10D$ ;  $1(.0001)1.1, 10D$ ;  $1(.01)2, 18D$ .  $\lg \psi(x)$  для  $x=-10(.01)1(.001)2, 10D$ ;  $1(.0001)1.1, 10D$ .  $1/\Gamma(r e^{i\theta})=P(r, \theta)+Q(r, \theta)$  для  $r=-1(.1)1, \theta=0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 12D$ . II:  $\psi^{(n)}(x), n=1, 2, 3, 4$  для  $x=-10(.1)0(.01)4(.02)20(.1)100, 10-19D$ .  $\ln \psi^{(n)}(x), n=1, 2, 3, 4$  для  $x=-10(.1)0(.01)1, 10D$ .  
 [18] British Association Mathematical Tables I: Circular and hyperbolic functions, exponential, sine and cosine integrals, factorial function and allied functions, Hermitian probability functions, 3rd ed., Cambridge, 1951.  $\Gamma(x)$  для  $x=1(.01)2, 12D$ .  $\psi^{(n)}(x), n=0, 1, 2, 3$  для  $x=1(.01)2, 11(.1)61, 10-12D$ .  $\int_0^x \lg \Gamma(1+t) dt$  для  $x=0(.01)1, 10D$ .  
 [19] Ghizzetti A., Tavola della funzione euleriana  $\Gamma(z)$  per valori complessi dell' argomento, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. VIII, Ser. 3 (1947), 254—257.  $\Gamma(x+iy)$  для  $x=4(.1)5, y=0(.1)1, 5S$ .  
 [20] Stanley J. P. and Wilkes M. V., Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument, Toronto, 1950.  $1/\Gamma(x+iy)$  для  $x=-0.5(.01)0.5, y=0(.01)1, 6D$ .  
 [21] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 34: Table of the gamma function for complex arguments, Washington, 1954.  $\ln \Gamma(x+iy)$  для  $x=0(.1)10, y=0(.1)10, 12D$ .  
 [22] Pearson K., Tables of the incomplete  $\Gamma$ -function, London, 1922.  

$$I(u, p) = \int_0^x e^{-t} t^p dt / \int_0^\infty e^{-t} t^p dt$$
 с  $u=x/\sqrt{p+1}$  для  $p=-1(.05)0(.1)5(.2)50, u=0(.1)$  до  $I(u, p)=1,7D$ ; затем для  $p=-1(.01)-0.75, u=0(.1)6, 5D, \lg I(u, p)/u^{p+1}$  для  $p=-1(.05)0(.1)10, u=0(.1)1,5, 8D$ .  
 [23] Pearson K., Tables of the incomplete beta-function, London, 1934.  $I_x(p, q) = B_x(p/q)/B(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dx$ , для  $p, q=0.5(.5)11(.1)50, p \geq q, x=0(.01)1$  и соответствующие значения знаменателя  $B(p, q)=B_1(p, q), 7D$ .

VI. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Руководства

- [1] Смирнов В. И., см. V, [7].  
 [2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. I—IV, [3].  
 [3] Böhmer P. E., см. V, [9].  
 [4] Lössch F. und Schoblik F., см. V, [10].  
 [5] Nielsen N., Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transcendenten, Leipzig, 1906.

## Таблицы

- [6] Таблицы интегральной показательной функции, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954.  $Ei(x)$ ,  $-Ei(-x)$  для  $x=0$  (.0001)1, 3(.001)3(.0005)10(.1)15; 7S.
- [7] Таблицы интегрального синуса и косинуса, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1954.  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$  для  $x=0$  (.0001) 2(.001) 10(.005)100; 7D.
- [8] Карпов К. А. и Разумовский С. Н., Таблицы интегрального логарифма, Изд-во АН СССР, 1956.  $li(x)$  для  $x=0$  (.0001) 2,5 (.001) 20 (.01) 200 (.1) 500 (1) 10000; 7S.
- [9] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 5, 6]: Tables of sine, cosine and exponential integrals. I, II. Washington, 1940. I:  $-Ei(-x)$ ,  $Ei^*(x)$ ,  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$  для  $x=0$  (.0001) 2, 9D; 0(.1) 10, 9D.  $-Ei(-x) + \ln x$ ,  $Ei^*(x) - \ln x$ ,  $Ci(x) - \ln x$  для  $x=0$  (.0001) 0.01, 9D. II:  $-Ei(-x)$  для  $x=0$  (.001) 10, 9S; 10(.1) 15, 14D.  $Ei^*(x)$  для  $x=0$  (.001) 10, 10S; 10(.1) 15, 10-11S.  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$ , для  $x=0$  (.001) 10(.1) 20(.2) 40, 10D.
- [10] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 32: Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100, Washington, 1954.  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$  для  $x=10$  (.01) 100, 10D.
- [11] British Association Mathematical Tables I:  $-Ei(-x)$ ,  $Ei^*(x)$  для  $x=5$  (.1) 15, 10-11S.  $Si(x)$ ,  $Ci(x)$  для  $x=5$  (.1) 20(.2) 40, 10D.  $Ei(-x) - \ln x$ ,  $Ei^*(x) - \ln x$ ,  $Si(x)$ ,  $Ci(x) - \ln x$  для  $x=0$  (.1) 5, 11D.
- [12] Herman R. C. and Meyer Ch. F., The thermoluminescence and conductivity of phosphors, J. Appl. Phys. 17 (1946), 748.  $-Ei(-x)$  для  $x=15$  (.1) 20, 6S.
- [13] Акачи́га Т., Sci. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res., p. 181-215, Table 3, Tokyo, 1929.  $-Ei(-x)$  для  $x=20$  (.02) 50, 5-6S.
- [14] Та́ни К., Tables of  $si(x)$  and  $ci(x)$  for the range  $x=0$  to  $x=50$ , Tokyo, 1931.  $Si(x)$  для  $x=0$  (.01) 50, 6D;  $Ci(x)$  для  $x=0$  (.0001) 0.05(.001) 1(.01) 50, 6D.

## VII. ИНТЕГРАЛ ОШИБОК И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

## Руководства

- [1] Ван-дер-Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
- [2] Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
- [3] Зоммерфельд А., Волновая механика, ГТТИ, 1933.
- [4] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., Курс современного анализа, т. II, Физматгиз, 1963.
- [5] Böhmer P. E., см. V, [9].
- [6] Lösch F. und Schoblik F., см. V, [10].
- [7] Nielsen N., см. VI, [5].

## Таблицы

- [8] Башарин Г. П., Таблицы вероятностей и средних квадратических отклонений потерь на полнодоступном пучке линий, Изд-во АН СССР, 1962.
- [9] Берлянд О. С., Гаврилова Р. И. и Прудников А. П., Таблицы интегральных ошибок и полиномов Эрмита, Изд-во АН БССР, 1961.
- [10] Библиотека математических таблиц, вып. 2, 3, Таблицы вероятностных функций, ВЦ АН СССР, тт. I, II, 1958.
- [11] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. II, ИЛ, 1949.  $C(x)$ ,  $S(x)$  для  $x=0$  (.02) 1(.5) 50; 6D.
- [12] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13],  $\Phi(x)$  для  $x=0$  (.001) 2,5(.01) 3; 5-7D.
- [13] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14].  $\Phi(x)$  для  $x=0$  (.001) 1,5(.01) 2,9; 4D.
- [14] Смирнов Н. В. и Большев Л. Н., Таблицы для вычисления функции двумерного нормального распределения, Изд-во АН СССР, 1962.
- [15] Таблицы интегралов Френеля, под ред. В. А. Диткина, Изд-во АН СССР, 1953.  $C\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$  и  $S\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$  для  $x=0$  (.001) 25, 7D. Вспомогательные таблицы для малых  $x$ .
- [16] Таблицы нормального интеграла вероятностей, нормальной плотности и ее нормальных производных, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
- [17] Таблицы функций распределения и плотностей распределения Стьюдента, под ред. Н. В. Смирнова, Изд-во АН СССР, 1960.
- [18] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 41: Tables of the error function and its derivative  $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-a^2} da$  и  $H'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ . Washington,

1954.  $\Phi(x)$ ,  $\Phi'(x)$  для  $x=0$  (.0001) 1 (.001) 5.6—6, 15 D.  $1-\Phi(x)$ ,  $\Phi'(x)$  для  $x=-4$  (.01) 10, 8 S.
- [19] Markoff A. A (Марков А. А.), Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912.  $\Phi(x)$  для  $x=0$  (.001) 2.5 (.01) 3.79, 6 D.
- [20] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 23: Tables of the normal probability functions  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  and  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-a^2/2} da$ , Washington, 1953.  $2\Phi(x)-1$ ,  $\Phi'(x)$  для  $x=0$  (.0001) 1 (.001) 7,8—8.112 и 8.285, 15 D.  $2[1-\Phi(x)]$ ,  $\Phi'(x)$  для  $x=-6$  (.01) 10, 7 S.
- [21] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 23: Tables of the error function and of its first twenty derivatives, Cambridge, 1952.  $\Phi(x)-\frac{1}{2}$ ,  $\Phi^{(n)}(x)$ ,  $n=1$  (1) 11 для  $x=0$  (.004) X, 6 D с  $\Phi(X)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ ,  $\Phi^{(n)}(X)=0$  в 6 D.  $\Phi^{(n)}(x)$ ,  $n=12$  (1) 21 для  $x=0$  (.002) X, 7 S или 6 D, где  $\Phi^{(n)}(X)=0$  в 6 D. Нули всех табулированных функций в 10 D.
- [22] British Association Mathematical Tables VII: The probability integral, Cambridge, 1939.  $F(x)=[1-\Phi(x)]\Phi'(x)$  для  $x=0$  (.1) 10, 24 D; 0 (.01) 10, 12 D.  $L(x)=-\ln[1-\Phi(x)]$  для  $x=0$  (.1) 10, 24 D, 0 (.1) 10, 16 D.  $l(x)=-\lg[1-\Phi(x)]$  для  $x=0$  (.1) 10, 12 D; 0 (.01) 10, 8 D. Дополнительные таблицы для интерполяции посредством формулы Тейлора.
- [23] Pearson K., см. V, [22]. Таблица дает значения  $E_n(x)$  при обозначении  $E_n(x)=I(u, p)$ , где  $u=\sqrt{p}x$ ,  $p=-\frac{n-1}{n}$  или  $x=(u\sqrt{p+1})^{p+1}$ ,  $n=\frac{1}{p+1}$ .
- [24] Schumann W. O., Elektrische Durchbruchfeldstärke von Gasen, Berlin, 1923.  $G(5/4) E_4(x)$  для  $x=0.1$  (.1) 1, 4 D.  $i^{-1} E_2(ix)$  для  $x=0.1$  (.1) 2.6 (2) 7.4, 4—5 S.
- [25] Terrill H. M. and Sweeny L., An extension of Dawson's table of the integral  $e^{x^2}$ , J. Franklin Inst. 237 (1944), 495—497; Table of the integral of  $e^{x^2}$ , J. Franklin Inst. 238 (1944), 220—222.  $\int_0^x e^{x^2} dx$  для  $x=0$  (.01) 2, 6 D; 2 (.01) 4, 7—9 D.
- [26] Lohmander B. and Rittsten S., Table of the function  $y=e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ , Lund, 1958. (From Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. 28 (1958), 45—52.)  $y$  для  $x=0$  (.01) 3 (.02) 5,  $1/x=0$  (.005) 0.2, 10 D;  $x=0.5$  (.5) 10, 20 D.
- [27] British Association Mathematical Tables I, см. V, [18].  $Hh_0(x)=\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$ ,  $Hh_n(x)=\int_x^\infty Hh_{n-1}(t) dt$  для  $n=0$  (1) 11,  $x=-7$  (.1) X;  $n=12$  (1) 17,  $x=-5$  (.1) X;  $n=18$  (1) 21,  $x=-2.5$  (.1) X; 10 D X всюду  $\leq 6.6$
- [28] Pearse T., Table of the Fresnel integral to six decimal places, Cambridge, 1957.  $C(x)$ ,  $S(x)$  для  $x=0$  (.01) 1, 7 D; 1 (01) 50, 6 D.
- [29] Von Wijngaarden A. and Scheen W. L., Table of Fresnel integrals, Amsterdam, 1949.  $C\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$ ,  $S\left(\frac{\pi}{2} x^2\right)$  для  $x=0$  (.01) 20, 5 D.
- [30] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 21: A guide to tables of the normal probability integral, Washington, 1952.

### VIII. ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

#### Руководства

- [1] Титчмарш Е. К., Теория дзета-функции Римана, ИЛ, 1953.
- [2] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [3] Ingham A. E., The distribution of prime numbers, Cambridge, 1932.
- [4] Landau E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, New York, 1953.

## Таблицы

- [5] Gram J. P., Tafeln für die Riemannsche Zetafunktion. Danske Vid. Selsk. Skrifter, Nat. Math. Afd. 10 (1925—26), 311—325.  $\zeta(s)$  для  $s=-24$  (.1)—16.5, 10 S; —16.4 (.1) 24, 10 D.  $(s-1)\zeta(s)$  для  $s=-2$  (.1) 0, 10 D; 0 (.1) 4, 11 D.
- [6] Peters J., Zehnstellige Logarithmentafel I, Berlin, 1922.  $\zeta(n)-1$  для  $n=2$  (1) 100, 32 D.
- [7] Titchmarsh E. C., The zeros of the Riemann zeta-function, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A151 (1935), 234—235 and 157 (1936), 261—263. 1) Сообщение о вычислении: 1) 195 нулей  $\frac{1}{2} + it$ , где  $0 < t < 390$ . 2) 1041 нулей  $\frac{1}{2} + it$ , где  $0 < t < 1468$ .
- 8] Lehmer D. H., Extended computation of the Riemann zeta-function, Mathematika 3 (1956), 102—108. Сообщение о вычислении первых 25 000 нулей  $\frac{1}{2} + it$ . Таблица отклонений от закона Грама.

## IX. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

## Руководства

- [1] Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., см. I—IV, [6].
- [2] Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
- [3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 2, ГТТИ, 1933.
- [4] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958.
- [5] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [6] Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, Физматгиз, 1957.
- [7] Эрмит Ш., Курс анализа, ОНТИ, 1936.
- [8] Byrd P. F. and Friedman M. D., Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.
- [9] Gröbner W. and Hofreiter N., Integraltafel I, II, 2. Aufl., Wien und Innsbruck, 1957—1958.
- [10] Hancock H., Elliptic integrals, New York, 1917.
- [11] Westropp Roberts W. R., Elliptic and Hyperelliptic integrals and allied theory, Cambridge, 1938.

## Таблицы

- [12] Беляков В. М., Кравцова Р. И. и Раппопорт М. Г., Таблицы эллиптических интегралов, Изд-во АН СССР, т. 1, 1962; т. 2, 1963.
- [13] Ветчинкин В. П., Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций с приложением сокращенных семизначных таблиц логарифмов и тригонометрических функций, Изд-во Воен.-возд. акад. РККА, 1935.
- [14] Глазенап С. П., Математические и астрономические таблицы (в двух частях), Изд-во АН СССР, 1932.
- [15] Самойлова-Яхонтова Н. С., Таблицы эллиптических интегралов, ОНТИ, 1935.
- [16] Legendre A. M., Tables of the complete and incomplete elliptic integrals. Reissued by K. Pearson, London, 1934  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$ , ( $k=\sin \alpha$ ), для  $\varphi, \alpha = 0^\circ$  ( $1^\circ$ )  $90^\circ$ , 9—10D  $\operatorname{Ig} K(k)$ ,  $\operatorname{Ig} E(k)$ , ( $k=\sin \alpha$ ), для  $\alpha = 0^\circ$  ( $0^\circ.1$ )  $90^\circ$ , 12—14D.
- [17] Neuman C. A., Tables of complete elliptic integrals, J Math Physics 20 (1941), p. 127—206, 336.  $2K(k)/\pi$ ,  $2E(k)/\pi$ , ( $k=\sin \alpha$ ), для  $\alpha = 0^\circ$  ( $0^\circ.1$ )  $90^\circ$ , 6D.  $2(\pi)[K + \ln(90-\alpha)]$  для  $\alpha = 65^\circ$  ( $0^\circ.1$ )  $90^\circ$ , 6D. Полный интеграл 3-го рода

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}$$

для  $\alpha = 0^\circ$  ( $1^\circ$ )  $90^\circ$ ,  $\beta = 0^\circ$  ( $1^\circ$ )  $90^\circ$  и  $\alpha = 0^\circ$  ( $0^\circ.1$ )  $5^\circ.9$ ,  $\beta = 80^\circ$  ( $1^\circ$ )  $89^\circ$ , 6D.

- [18] Hayashi K., Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderen Funktionen, Berlin, 1930.  $K(k)$ ,  $K'(k)$ ,  $K/\pi$ ,  $K'/\pi$  для  $k^2 = 0$  (.001) 1, 10—12D;  $k^2 = 0$  ( $10^{-7}$ )  $10^{-5}$  ( $10^{-5}$ ) 0.003, 8—10D.
- [19] Hayashi K., Tafeln für die Differenzgleichung sowie für die Hyperbel-, Besselschen, elliptischen und anderen Funktionen, Berlin, 1933.  $E(k)$ ,  $E'(k)$  для  $k^2 = 0$  (.001) 1, 10D.

**Х. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

**Руководства**

- [1] Ахнезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
- [2] Гурвиц А., Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1933.
- [3] Гурса Э., Курс математического анализа, т. 2, ч. 1, ГТТИ, 1933.
- [4] Журавский А. М., Справочник по эллиптическим функциям, Изд-во АН СССР, 1941.
- [5] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
- [6] Сикорский Ю. С., Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике, ОНТИ, 1936.
- [7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [8] Appell P. et Lacour E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, 1922.
- [9] Hurwitz A. und Courant R., Funktionentheorie, Berlin, 1929.
- [10] Neville E. H., Jacobian elliptic functions, Oxford, 1951.
- [11] Oberhettinger F. und Magnus W., Anwendungen der elliptischen Funktionen in Physik und Technik, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1949.
- [12] Thomae J., Sammlung von Formeln und Sätzen aus dem Gebiete der elliptischen Funktionen nebst Anwendungen, Leipzig, 1905.
- [13] Tricomi F., Funzioni Ellittiche, Bologna, 1951.

**Таблицы**

- [14] Библиотека математических таблиц, вып. 13, Таблицы эллиптических функций, ВЦ АН СССР, 1961.
- [15] Милн-Томсон Л., Еліптичні функції Якобі, ДНТВУ, 1933.
- [16] Schuler M. und Gebelein H., Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием аргумента  $z = \cos 2x = \cos(\pi u/K)$  и вспомогательных функций  $G, H, \bar{G}, \bar{H}$ , где  $\vartheta_1(x) = 2q^{1/4} \sin x \bar{G}$ ,  $\vartheta_2(x) = \bar{H}$ ,  $\bar{G} = 1 - q^2 G$ ,  $\bar{H} = 1 + qH$ , даны таблицы:  $G(qz)$  для  $q^4 = 0(.001)0.1$ ,  $z = -1(.05)1$ ,  $9D$ .  $\bar{H}(q^2, z)$  для  $q^2 = 0(.002)0.176$ ,  $z = -1(.05)1$ ,  $9D$ .  $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$ ,  $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$ ,  $\lg \operatorname{dn} u$  для  $q = 0(.01)0.55$ ,  $z = -1(.05)1$ ,  $8D$ .  $\alpha, q$  для  $q^4 = 0(.001)0.1$ ,  $q^2 = 0(.002)0.176$  с  $0'.0001$  соотв.  $7D$ .  $\alpha, -\lg \cos \alpha, K, K/E$  для  $q = 0(.01)0.55$  с  $0'.01$  соотв.  $8D$ .  $1/(1-q), K, K/E$  для  $q = 0(.005)3$  с  $8D$ .
- [17] Schuler M. und Gebelein H., Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955. С использованием обозначений [16] даны таблицы:  $G(q, z)$ ,  $\bar{H}(q, z)$  для  $q = 0(.01)0.5$ ,  $z = -1(.1)1$ ,  $5D$ .  $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$ ,  $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$ ,  $\lg \operatorname{dn} u$  для  $q = 0(.01)0.5$ ,  $z = -1(.1)1$ ,  $5D$ .  $\alpha, -\lg \cos \alpha, K, K/E$  для  $q = 0(.01)0.5$  с  $0'.01$  соотв.  $5D$ .  $\alpha, 1/(1-q), K, K/E$  для  $-\lg k' = -\lg \cos \alpha = 0(.01)2.5$  с  $0'.01$  соотв.  $5D$ .
- [18] Adams E. P. and Hippisley R. L., Smithsonian mathematical formulae and tables of elliptic functions, Smithsonian. Misc. Coll. 74 (1922), 259—309; reprint 1939.  $K, E$  для  $\alpha = 0^\circ(1^\circ)10^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $9-10D$ .  $\operatorname{am} u$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)89^\circ$ ,  $x = \pi u/2K = 0^\circ(1^\circ)90^\circ$  в  $1'$ .  $\operatorname{zn} u$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)89^\circ$ ,  $x = \pi u/2K = 0^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $10D$ .  $\vartheta_2, \vartheta_4$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)89^\circ$ ,  $10-12D$ .  $\vartheta_1(x)/\vartheta_2, \vartheta_2(x)/\vartheta_2, \vartheta_3(x)/\vartheta_4, \vartheta_4(x)/\vartheta_4$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)89^\circ$ ,  $x = \pi v = \pi u/2K = 0^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $10D$ .  $q$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $14-15D$ .  $u = 2Kv = 2Kx/\pi$  для  $\alpha = 0^\circ(5^\circ)80^\circ(1^\circ)89^\circ$ ,  $x = 0^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $10D$ .
- [19] Hayashi K., см. IX, [18].  $\vartheta_1', \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_1''/\vartheta_1', \vartheta_2''/\vartheta_2, \vartheta_3''/\vartheta_3, \vartheta_4''/\vartheta_4, q, q^4, q^{1/4}, q^{9/4}, q^{25/4}$  для  $k^2 = 0(.001)0.5$ ,  $8D$ .  $\lg q, \lg q'$  для  $k^2 = 0(.001)1, 10D$ ;  $k^2 = 0(10^{-7})10^{-5}(10^{-5})0.003$ ,  $8D$ .

**XI. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ**

**Руководства**

- [1] Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ИЛ, 1948.
- [2] Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951.
- [3] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., см. IX, [4].
- [4] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [5] Сега Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
- [6] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [7] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [8] Tricomi F. G., Vorlesungen über Orthogonalreihen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

## Таблицы

- [9] Библиотека математических таблиц, вып. 19, Таблицы полиномов Чебышева, ВЦ АН СССР, 1963.
- [10] Митропольский А. А., Интеграл вероятностей, изд. Лесотехн. акад. им. Кирова, Л., 1948,  $H_n(x)$  для  $x=0$  (.01) 4,  $n=2, 3, 4$ ; 4—8D.
- [11] Таблицы, под ред. Я. Н. Шпильрейна, см. V, [14].  $P_n(x)$  для  $x=0$  (.01) 1 и  $P_n(\cos \theta)$  для  $\theta=0$  (1°) 90°;  $n=1$  (1) 7; 4D.
- [12] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 9: Tables of Chebyshev polynomials  $S_n(x)$  and  $C_n(x)$ , Washington, 1952. При  $(T_n x) = \frac{1}{2} C_n(2x)$ ,  $U_n(x)/\sqrt{1-x^2} = S_{n-1}(2x)$  даны таблицы:  $C_n(x)$ ,  $S_n(x)$  для  $n=2$  (1) 12,  $x=0$  (.001) 2, 12D.  $C_n(x)$ ,  $S_n(x)$ ,  $T_n(x)$ ,  $U_{n+1}(x)/\sqrt{1-x^2}$  явно для  $n=0$  (1) 12,  $T_n^*(x) = \frac{1}{2} C_n(4x-2)$  для  $n=0$  (1) 20.
- [13] Salzer H. E., Tables for facilitating the use of Chebyshev's quadrature formula, J. Math. Physics 26 (1947), 191—194. Нули полиномов  $T_n(x)$  для  $n=3$  (1) 7, 9, 10D. Соответствующие множители для численного интегрирования, 9S.
- [14] Tricomi F. G., Valori numerici di funzioni ortogonali di Laguerre, Atti Accad. Sci. Torino 90 (1956).  $l_n(x)$  для  $n=0$  (1) 10,  $x=0$  (.1) 1 (.25) 6 (1) 14 (2) 34, 6S.
- [15] Slater L. J., A short table of the Laguerre polynomials, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1955.  $L_n(x)$  для  $n=0$  (1) 10,  $x=0$  (.1) 5, 5—6D.
- [16] Head J. W. and Wilson W. P., Laguerre functions: Tables and properties, Inst. Elect. Engineers, Monograph, London, 1956.  $e^{-x}L_n(x)$  для  $n=0$  (1) 20,  $x=0$  (.1) 1 (.2) 3 (.5) 6 (1) 14 (2) 40 (5) 100, 4D или 2S Нули полиномов  $L_n(x)$  для  $n=1$  (1) 20, 6D.
- [17] Salzer H. E. and Zucker R., Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1004—1012. Нули полиномов  $L_n(x)$  для  $n=1$  (1) 15, 12D, соответствующие множители для численного интегрирования, 12S.
- [18] Smith E. R., Zeros of the Hermitian polynomials, Amer. Math. Monthly 43 (1936), p. 354—358. Нули полиномов  $H_n(x/\sqrt{2})$  для  $n=3$  (1) 27, 6D.
- [19] Salzer H. E., Zucker R. and Capuano R., Table of the zeros and weight factors of the first twenty Hermite polynomials, NBS, J. Res. 48 (1952), 111—116. Нули полиномов  $H_n(x)$  для  $n=1$  (1) 20, 15D; соответствующие множители для численного интегрирования, 13 S.

## XII. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

## Руководства

- [1] Вебстер А. и Сеге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1934.
- [2] Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
- [3] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.
- [4] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
- [5] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].
- [6] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [7] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [8] Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
- [9] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [10] Lense J., Kugelfunktionen, Leipzig, 1954.
- [11] MacRobert T. M., Spherical harmonics, London, 1947.
- [12] Robin L., Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, I—III, Paris, 1957—1959.

## Таблицы

- [13] Белоусов С. Л., Таблица нормированных присоединенных полиномов Лежандра, Изд-во АН СССР, 1956.  $P_n^m(\cos \theta)$  для  $\theta=0^\circ$  (2°, 5) 90°,  $m=0$  (1) 36,  $n=m$  (1) 56; 6D.
- [14] Библиотека математических таблиц, вып. 14, Таблицы присоединенных функций Лежандра, ВЦ АН СССР, 1962.
- [15] Журина М. И. и Кармазина Л. М., Таблицы функций Лежандра  $P_{-1/2+i\tau}(x)$ , Изд-во АН СССР, т. 1, 1960; т. 2, 1962; т. 3, 1963. Даны таблицы для  $x=-1$  (1) 1,  $\tau=0$  (.01) 50; 7S и т. д.
- [16] Журина М. И. и Кармазия Л. М., Таблицы и формулы для сферических функций  $P_{-1/2+i\tau}^m(z)$ , Изд-во АН СССР, 1962.



- [17] Hayashi K., см. IX, [18].  $P_n(x)$  для  $n=2(1)8$ ,  $x=0(.01)1$ , точно.  $P_n(\cos \theta)$  для  $n=1(1)8$ ,  $\theta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$ . 10D.
- [18] British Association Mathematical Tables, Part-Volume A: Legendre polynomials, Cambridge, 1946.  $P_n(x)$  для  $n=2(1)12$ ,  $x=0(.01)1$ , 7D;  $n=2(1)12$ ,  $x=1(.01)6$ , 6—8S;  $n=2(1)6$ ,  $x=6(.1)11$ , 7—8S.
- [19] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen  $P_n(x)$ , Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 2, № 4 (1937)  $P_n(x)$  для  $n=1(1)16$ ,  $x=0(.001)1$ , 6D.
- [20] Tallqvist Hj., Sechsstellige Tafeln der 32 ersten Kugelfunktionen  $P_n(\cos \theta)$ , Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A 2, № 11 (1938).  $P_n(\cos \theta)$  для  $n=1(1)32$ ,  $\theta=0^\circ(10')90^\circ$ , 6D.
- [21] Clark G. C. and Churchill St. W., Tables of Legendre polynomials  $P_n(\cos \theta)$  for  $n=0(1)80$  and  $\theta=0^\circ(1^\circ)180^\circ$ , Ann Arbor, 1957.  $P_n(\cos \theta)$  для  $n=1(1)80$ ,  $\theta=1^\circ(1^\circ)180^\circ$ , 6D.
- [22] Mursi Z., Tables of Legendre associated functions, Fouad I University, Faculty of Science, № 4, Cairo, 1941.  $P_n^m(x)$  для  $n=1(1)10$ ,  $m=1(1)n$ ,  $x=0(.001)1$ , 8—13S.
- [23] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 18]: Tables of associated Legendre functions, Washington, 1945.  $P_n^m(\cos \theta)$ ,  $dP_n^m(\cos \theta)/d\theta$  для  $n=0(1)10$ ,  $m=0(1)4$ ,  $m \leq n$ ,  $\theta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$ , 6S.  $\mathfrak{P}_n^m(x)$ ,  $(-1)^m \mathfrak{S}_n^m(x)$ ,  $d\mathfrak{P}_n^m(x)/dx$ ,  $(-1)^{m+1} d\mathfrak{S}_n^m(x)/dx$  для  $n=0(1)10$ ,  $m=0(1)4$ ,  $m \leq n$ ,  $x=1(.1)10$ , 6S.  $i^{-n} \mathfrak{P}_n^m(ix)$ ,  $i^{n+2m+1} \mathfrak{S}_n^m(ix)$ ,  $i^{-n} d\mathfrak{P}_n^m(ix)/dx$ ,  $i^{n+2m-1} d\mathfrak{S}_n^m(ix)/dx$  для  $n=0(1)10$ ,  $m=0(1)4$ ,  $m \leq n$ ,  $x=0(.1)10$ , 6S.  $\mathfrak{P}_{n+1/2}^m(x)$ ,  $(-1)^m \mathfrak{S}_{n+1/2}^m(x)$ ,  $d\mathfrak{P}_{n+1/2}^m(x)/dx$ ,  $(-1)^{m+1} d\mathfrak{S}_{n+1/2}^m(x)/dx$  для  $n=-1(1)4$ ,  $m=0(1)4$ ,  $x=1(.1)10$ , 4—6S.
- [24] Prévost G., Tables des fonctions sphériques et de leurs intégrales, Paris, 1933.  $P_n^m(x)$  для  $n=1(1)8$ ,  $m=0(1)n$  и  $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$ ,  $x=0(.01)1$ , 5—6S.  $\int_0^x P_n^m(x) dx$  для  $n=0(1)8$ ,  $m=0(1)n$  и  $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$ ,  $x=0(.01)1$ , 5—7S. Нули функций  $P_n^m(x)$  для  $n=2(1)8$ ,  $m=0(1)n$  и  $(n, m)=(9, 0), (9, 1), (10, 0)$ , 4D. Нули функций  $P_n^m(\cos \theta)$  для  $n=2(1)10$ ,  $m=0$  и  $n=2(1)8$ ,  $m=1(1)n$ , 1'.
- [25] Schmidt A., Tafeln der normierten Kugelfunktionen, Gotha, 1935.  $P_n(x)$ ,  $\log P_n(x)$  для  $n=1(1)7$ ,  $x=0(.1)1$ , 5—6D.  $P_n(\cos \theta)$ ,  $\log P_n(\cos \theta)$  для  $n=1(1)7$ ,  $\theta=0^\circ(5^\circ)90^\circ$ , 5—6D.  $\frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(x)$ ,  $\log \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(x)$  для  $n=1(1)6$ ,  $m=1(1)n$ ,  $x=0(.1)1$ , 5—6D.  $\frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(\cos \theta)$ ,  $\log \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \overline{P}_n^m(\cos \theta)$  для  $n=1(1)6$ ,  $m=1(1)n$ ,  $\theta=0^\circ(5^\circ)90^\circ$ , 5—6D. Нули полиномов  $P_n(x)$ ,  $P_n(\cos \theta)$  для  $n=2(1)6$ , 7D соотв. 1". Нули полиномов  $P_n^m(x)$ ,  $P_n^m(\cos \theta)$  и первых производных для  $n=2(1)6$ ,  $m=1(1)n$ , 7D соотв. 1".
- [26] Lowan A. N., Davids N. and Levenson A., Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 739—743. Нули полиномов  $P_n(x)$  для  $n=2(1)16$ , 15D; соответствующие множители для численного интегрирования, 15D.
- [27] Smith E. R. and Higdon A., Zeros of the Legendre polynomials, Iowa State College, J. Sci. 12 (1938), 263—274. Нули полиномов  $P_n(x)$  для  $n=2(1)40$ , 6D.
- [28] Gray M. C., Legendre functions of fractional order, Quart. Appl. Math. 11 (1953), 311—318.  $P_\nu(\cos \theta)$  для  $\nu=0.1(.1)2$ ,  $\theta=10^\circ(10^\circ)170^\circ, 175^\circ, 6D$ .
- [29] Le Centre National d'Études des Télécommunications: Tables des fonctions de Legendre associées, Paris, 1952.  $(-1)^m P_\nu^m(\cos \theta) = (-\sin \theta)^m d^m P_\nu(\cos \theta)/(d \cos \theta)^m$  для  $m=0(1)5$ ,  $\nu=-0.5(.1)10$ ,  $\theta=0^\circ(1^\circ)90^\circ$ , точность различная.

### III. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

#### Руководства

- [1] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, т. 1, ИЛ, 1949.
- [2] Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
- [3] Карман Т. и Био И. М., Математические методы в инженерном деле, Гостехиздат, 1948.
- [4] Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М., см. XII, [3].

- [5] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].  
 [6] Кузнецов Д. С., см. V, [4].  
 [7] Кузьмин Р. О., см. V, [5].  
 [8] Курант Р. и Гильберт Д., см. XI, [2].  
 [9] Лебедев Н. Н., см. V, [6].  
 [10] Смирнов В. И., см. V, [7].  
 [11] Соболев С. Л., см. XII, [8].  
 [12] Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.  
 [13] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].  
 [14] McLachlan N. W., Bessel functions for engineers, Oxford, 1955.  
 [15] Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig, 1904.  
 [16] Petiau G., La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique, Paris, 1955.  
 [17] Weyrich R., Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Leipzig und Berlin, 1937.

## Таблицы

- [18] Ватсон Г. Н., см. VII, [11].  
 [19] Библиотека математических таблиц, вып. 12, Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса, ВЦ АН СССР, 1960.  
 [20] Библиотека математических таблиц, вып. 4 и 5, Таблицы функций Бесселя дробного индекса, ВЦ АН СССР, тт. 1—2, 1959.  
 [21] Библиотека математических таблиц, вып. 20 и 21, Таблицы сферических функций Бесселя, тт. 1, 2, ВЦ АН СССР, 1963.  
 [22] Динник А. Н., Таблицы бесселевых функций дробного порядка, Київ, Зак. прир. техн. відділу АН УРСР, 29 (1933).  
 [23] Люстерник Л. А., Акушский И. Я. и Диткии В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949.  $J_0(x)$  и  $J_1(x)$  для  $x=0(.001)16(.01)25; 7D$ . Корни уравнений  $J_0(x)=0$ ,  $J_1(x)=0$ ,  $J_1'(x)=0$  и ряд связанных с ними величин.  
 [24] Фадеева В. Н. и Гавурин М. К., Таблицы функций Бесселя целых номеров от 0 до 120, Гостехиздат, 1950.  $J_n(x)$  для  $x=0(.1)125$ ,  $n=0(1)120; 6D$ .  $J_n(x)$  для  $x=0(.01)15$ ,  $n=0(1)13; 8S$ . Вычислены корни уравнений  $J_n(x)=0$  для  $n=0(1)115$ .  
 [25] Сегал Б. И. и Семендяев К. А., см. V, [13]. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для  $x=0(.01)10; 5D$ , 5—6S.  
 [26] Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958. Даны функции Бесселя индексов 0 и 1 для  $x=0(.001)15(.01)100; 7D$ , 7S.  
 [27] Кармазина Л. Н. и Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, Изд-во АН СССР, 1958.  
 [28] Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента, под ред. И. М. Виноградова и Н. Г. Четаева, Изд-во АН СССР, 1950.  $I_n(x)$  и  $K_n(x)$  для  $n=0, 1$ ,  $x=0(.001)10; 8D$ , 8S.  
 [29] Декапосидзе Е. Н., Таблицы цилиндрических функций от двух переменных, Изд-во АН СССР, 1956.  
 [30] Барк Л. С. и Кузнецов П. И., Таблицы цилиндрических функций от двух мнимых переменных, Изд-во АН СССР, 1962.  
 [31] Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций, Изд-во АН СССР, 1955.  
 [32] Карпов К. А. и Киреева Н. Е., Таблицы функций Вебера, т. 1, Изд-во АН СССР, 1959; т. 2, ВЦ АН СССР, 1963.  
 [33] Носова Л. Н., Таблицы функций Томсона и их первых производных, Изд-во АН СССР, 1960.  
 [34] Носова Л. Н. и Тумаркин С. А., Таблицы обобщенных функций Эйри для асимптотического решения дифференциальных уравнений  $\varepsilon(py)'+(q+\varepsilon r)y=f$ , ВЦ АН СССР, 1961.  
 [35] Фок В. А., Таблицы функций Эйри, 1946.  
 [36] Harvard University, Computation Laboratory, Annals 3—14: Tables of the Bessel functions, Cambridge, 1947, 1951.  $J_n(x)$  для  $n=0(1)3$ ,  $x=0(.001)25(.01)99.99, 18D$ ; для  $n=4(1)15$ ,  $x=0(.001)25(.01)99.99, 10D$ ; для  $n=16(1)111$ ,  $x=0(.01)99.99, 10D$ ; для  $n=112(1)135$ ,  $x=0(.1)99.99, 10D$ . Последний том дает далее  $J_n(100)$  для  $n=0(1)135$  и  $J_n(n)$  для  $n=0(1)100, 10D$ .

- [37] British Association Mathematical Tables VI: Bessel functions, Cambridge, I, 1950, II, 1952. I:  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  для  $x=0(.001)16(.01)25, 10D$ ;  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$  для  $x=0(.01)25, 8D$ ; вспомогательные таблицы для  $x=0(.01)0.5$  и  $25 \leq x \leq 6000$ .  $I_0(x)$ ,  $I_1(x)$  для  $x=0(.001)5, 7-8D$ ;  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  для  $x=0(.01)5, 8-9S$ ; вспомогательные таблицы для  $x=0(.01)0.5$  и  $x=5(.01)10(.1)20$ . Нули  $j_{0,s}$  и значения  $J_1(j_{0,s})$  для  $s=1(1)150, 10D$ ; нули  $i_{1,s}$  и значения  $J_0(i_{1,s})$  для  $s=1(1)150, 10D$ . II:  $J'_n(x)$  для  $n=2(1)12, x=0(.01)10(.1)25$ ;  $n=13(1)20, x=0(.01)5(.1)25, 8D$ .  $N'_n(x)$  для  $n=2(1)11, x=0(.01)10(.1)25$ ;  $n=12(1)20, x=0(.1)25, 8S$ .  $I'_n(x)$ ,  $K'_n(x)$  для  $n=2(1)11, x=0(.01)5(.1)20$ ;  $n=12(1)20, x=0(.1)20, 8S$ . Для осуществления интерполяции  $N, I, K$  частично заменены через  $x^n N_n, x^{-n} I_n, e^{-x} I_n, x^n K_n, e^x K_n$ .  $J'_n(x)$ ,  $N'_n(x)$  для  $n=0(1)20, x=0(.1)25, 10D$  соотв.  $10S$ .  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  для  $n=0(1)20, x=0(.1)20, 10S$ .
- [38] Hayashi K., см. IX, [18].  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  для  $x=0(.001)0.11(.01)25.1, 12-18D$ .  $J'_n(x)$  для  $n$  при  $0 \leq n \leq 135, x=0.01(.01)0.05, 0.1(.1)0.5, 1, 2, 10(10)50, 100, 10-103D$ .  $J_{\pm 1/2}(x)$ ,  $J'_{\pm 1/2}(x)$  для  $x=0(.01)10(.1)20(1)100, 9-12D$ .
- [39] Cambi E., Eleven- and fifteen-place tables of Bessel functions of the first kind, to all significant orders, New York, 1948.  $J'_n(x)$  для  $x=0(.01)10.5, 11D$ ;  $x=0(.001)0.5, 15D$ . Включены все  $J'_n$ , которые  $> 0.5 \cdot 10^{-11}$  соотв.  $> 10^{-15}$ . Коэффициенты разложения в ряд Тейлора  $J'_n(x+h)$  и разложения  $J'_n(x+h)$  по функциям Бесселя  $J'_k(h)$ .
- [40] Goodwin E. T. and Staton J., Table of  $J_0(j_{0,n} r)$ , Quart. J. Mech. Appl. Math. 1 (1948), 220-224.  $J_0(j_{0,s} x)$  для  $s=1(1)10, x=0(.01)1, 5D$ .
- [41] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series I: Tables of the Bessel functions  $Y_0(x)$ ,  $Y_1(x)$ ,  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Washington, 1948. Reissued as NBS, Applied Mathematics Series 25, Washington, 1952.  $N_0(x)$ ,  $N_1(x)$  для  $x=0(.0001)0.05(.001)1, 8D$  или  $8-9S$ ; вспомогательные таблицы для  $x=0(.0001)0.005, 8D$ .  $K_0(x)$ ,  $K_1(x)$  для  $x=0(.0001)0.033(.001)1, 8D$  или  $8-9S$ ; вспомогательные таблицы для  $x=0(.001)0.03, 8D$ .
- [42] National Bureau of Standards, Mathematical Tables Project [MT 14]: Table of the Bessel functions  $J_0(z)$  and  $J_1(z)$  for complex arguments, 2nd ed., New York, 1947. Действительная и мнимая части  $J_0(re^{i\varphi})$ ,  $J_1(re^{i\varphi})$  для  $r=0(.01)10, \varphi=0^\circ(5^\circ)90^\circ, 10D$ .
- [43] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Table of the Bessel functions  $Y_0(z)$  and  $Y_1(z)$  for complex arguments, New York, 1950. Действительная и мнимая части  $N_0(re^{i\varphi})$ ,  $N_1(re^{i\varphi})$  для  $r=0(.01)10, \varphi=0^\circ(5^\circ)90^\circ, 10D$ . Вспомогательные таблицы для  $r=0(.01)0.5, 10D$ . Комплексные нули  $z_{0,s}$  функции  $N_0$ ,  $z'_{1,s}$  функции  $N_1$ ,  $z'_{1,s}$  функции  $Y'_1$  для  $s=1(1)15, 5D$ ;  $z_{0,s}$  со значениями  $N_1$  и  $N'_1$  для  $s=1(1)3, 9D$ ;  $z'_{1,s}$  со значениями  $N_0=N'_1$  для  $s=1(1)3, 9D$ ;  $z'_{1,s}$  со значениями  $N_0$  и  $N_1$  для  $s=1(1)4, 9D$ .
- [44] Tölke F., Besselsche und Hankelsche Zylinderfunktionen, Stuttgart, 1936.  $J_n(r\sqrt{i})$  и  $\frac{i\pi}{2} H_n^{(1)}(r\sqrt{i})$  для  $n=0(1)3, r=0(.01)21, 4S$ .
- [45] British Association Report, 1923.  $M_0(r)$ ,  $M_1(r)$ ,  $\Theta_0(r)$ ,  $\Theta_1(r)$ — $180^\circ$  для  $r=0(.1)10, 6-5D$  соотв.  $0^\circ.00001$ .
- [46] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of Bessel functions order I, II, New York, 1948-1949. I:  $J_\nu(x)$  для  $\nu=-3/4$  и  $-2/3, x=0(.001)0.9(.01)25; \nu=-1/3$  и  $-1/4, x=0(.001)0.8(.01)25; \nu=1/4$  и  $1/3, x=0(.001)0.6(.01)25; \nu=2/3$  и  $3/4, x=0(.001)0.5(.01)25; 10D$ . Вспомогательные функции  $A_\nu(x)$ ,  $B_\nu(x)$  для  $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10000(200)30000, 10D$ . Нули  $j_{\nu,s}$  для  $s=1(1)30, 10D$ . II:  $I_\nu(x)$  для  $\nu=-3/4$  и  $-2/3, x=0(.001)1(.01)13; \nu=-1/3$  и  $-1/4, x=0(.001)0.8(.01)13; \nu=1/4$  и  $1/3, x=0(.001)0.6(.01)25; \nu=2/3$  и  $3/4, x=0(.001)0.5(.01)25; 10D$  или  $10S$ . Вспомогательные функции  $e^{-x} I_\nu(x)$  для  $x=25(.1)50(1)500(10)5000(100)10000(200)30000, 10D$ .
- [47] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 37: Tables of functions and the zeros of functions, Washington, 1954. Нули  $j_{\nu,s}$ , см. [42]. Нули  $j'_{\nu,s}$  для  $\nu=\pm 3/4, \pm 2/3, \pm 1/3, \pm 1/4, s=1(1)8, 7D$ . Комплексные нули функций  $N_0, N_1, N'_1$ , см. [39].
- [48] British Association Report, 1927. Нули  $j_{\nu,1}$  функций  $J_\nu(x)$  для  $\nu=-1(.01)1, 5D$ .
- [49] British Association Report, 1928.  $\partial J_\nu(x)/\partial \nu$  для  $\nu=\pm 1/2, \pm 3/2, x=0(.1)20, 6D$ .

- [50] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables of spherical Bessel functions, I, II, New York, 1946—1947. I:  $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$  для  $\pm \nu = \frac{1}{2} (1) \frac{25}{2}$ ,  $x=0(.01) 10(.1) 25$ ;  $\pm \nu = \frac{27}{2}$ ,  $x=0(.01) 10(.05) 10.5(.1) 25$ ; 8—10S для  $x \leq 10$ , 7S для  $x > 10$ . II:  $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$  для  $\pm \nu = \frac{29}{2} (1) \frac{43}{2}$ ,  $x=0(.01) 10(.1) 25$ ;  $\pm \nu = \frac{45}{2} (1) \frac{61}{2}$ ,  $x=10(.1) 25$ ; 8—10S для  $x \leq 10$ , 7S для  $x > 10$ .  $\Lambda_\nu(x)$  для  $\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right) \frac{41}{2} (1) \frac{61}{2}$ ,  $x=0(.1) 10, 9D$ ;  $\nu = \frac{1}{2} (1) \frac{61}{2}$ ,  $x=10(.1) 25$ , большей частью 7S;  $-\nu = \frac{29}{2} (1) \frac{61}{2}$ ,  $x=0(.1) 25$ , большей частью 7S. Нули  $j_{\nu, s}$ ,  $j'_{\nu, s}$  функций  $J_\nu(x)$ ,  $J'_\nu(x)$  с соответствующими значениями  $J'_\nu$  соотв.  $J_\nu$  для  $\pm \nu = \frac{1}{2} (1) \frac{39}{2}$ ,  $s=1 (1) S$ , где  $1 \leq S \leq 8, 6-10D$ .
- [51] Crowder H. K. and Francis G. C., Tables of spherical Bessel functions and ordinary Bessel functions of order half an odd integer of the first and second kinds, Ballistic Research Laboratories, Mem. Report 1027, Aberdeen Proving Ground, Maryland, 1956.  $\sqrt{\pi/2x} J_\nu(x)$ ,  $\sqrt{\pi/2x} N_\nu(x)$ ,  $J_\nu(x)$ ,  $N_\nu(x)$  для  $x=1 (1) 50$  и  $\nu = n + \frac{1}{2}$ ,  $n=0 (1) m$  [где  $N_\mu(x) < 10^{10} < N_{\mu+1}(x)$  для  $\mu = m + \frac{1}{2}$ ], 9D для  $n < x$ , 7S для  $n \geq x$ .
- [52] Royal Society Mathematical Tables Committee: Short table of Bessel functions  $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ ,  $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ , Cambridge, 1952.  $x^{-\nu} I_\nu(x)$ ,  $(2/\pi)x^\nu K_\nu(x)$  для  $\nu = n + \frac{1}{2}$ ,  $n=0 (1) 10$ ,  $x=0(.1) 5$ ;  $e^{-x} I_\nu(x)$ ,  $(2/\pi)e^x K_\nu(x)$  для  $\nu = n + \frac{1}{2}$ ,  $n=0 (1) 10$ ,  $x=5(.1) 10$ ; большей частью 8S.
- [53] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 28: Tables of Bessel—Clifford functions of orders zero and one, Washington, 1953.  $x^{-n/2} J_n(2\sqrt{x})$ ,  $x^{-n/2} N_n(2\sqrt{x})$  для  $n=0, 1$ ,  $x=0(.02) 1.5(0.5) 3(.1) 13(.2) 45(.5) 115(1) 410, 8-9D$ .  $x^{-n/2} I_n(2\sqrt{x})$ ,  $x^{-n/2} K_n(2\sqrt{x})$  для  $n=0, 1$ ,  $x=0(.02) 1.5(.05) (6.2), 6-9D$ .  $e^{-2\sqrt{x}} x^{-n/2} I_n(2\sqrt{x})$ ,  $e^{2\sqrt{x}} x^{-n/2} K_n(2\sqrt{x})$  с 8—9 десятичными знаками для  $n=0, 1$ ,  $x=6.2(.1) 13(2) 36(.5) 115(1) 160(5) 410$ .
- [54] British Association Report, 1924.  $-E_n(x)$  для  $n=0, 1$ ,  $x=0(.02) 16, 6D$ .

#### ХIV. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

##### Руководства

- [1] Купрадзе В. Д., О функциях Матье—Ханкеля, Изд-во АН СССР, 1933.  
 [2] Мак-Лахлан Н., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.  
 [3] Смирнов В. И., см. V, [7]  
 [4] Стрэтт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков—Киев, 1935.  
 [5] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].  
 [6] Meixner J. und Schäpfke F. W., Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954.

##### Таблицы

- [7] Goldstein S., Mathieu functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. 23 (1927), 303—336. Собственные значения  $\alpha_0, \beta_1, \alpha_1, \beta_2, \alpha_2$  и коэффициенты Фурье  $se_0, se_1, se_1, se_2, se_2$  для  $q=0.1 (1) 1(.2) 4(1) 5(5) 30(10) 40(20) 100(50) 200, 5D$ .  
 Ince E. L., Tables of the elliptic-cylinder functions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52 (1932), 355—423, 424—433. С использованием обозначения  $a=4\alpha, \theta=8q$  таблицы дают: собственные значения  $a_n=4\alpha_n, n=0(1) 5$ ;  $b_n=4\beta_n, n=1(1) 6$  и коэффициенты Фурье для соответствующих функций  $se_n, se_n$  для  $\theta=8q=0(1) 10(2) 20(4) 40, 7D$ .

- $se_n(x, q)$ ,  $n=0(1)5$ ;  $se_n(x, q)$ ,  $n=1(1)6$  для  $\Theta=8q=1(1)10$ ,  $x=0^\circ(1^\circ)90^\circ$ ,  $5D$ . Нули функций  $se_n$ ,  $n=2(1)5$ ,  $se_n$ ,  $n=3(1)6$  и экстремальные значения функций  $se_n$ ,  $n=1(1)5$ ,  $se_n$ ,  $n=2(1)6$  при  $0 < x < \pi/2$  для  $\Theta=8q=0(1)10(2)20(4)40$  в  $0^\circ.0001$ .
- [9] Hidaka K., Tables for computing the Mathieu functions of odd order  $se_1(x, \Theta)$ ,  $se_3(x, \Theta)$ ,  $se_5(x, \Theta)$ ,  $se_7(x, \Theta)$  and their derivatives, Mem. Imp. Marine Obs 6, № 2 (1936), 137—157. Собственные значения  $b_n=4\beta_n$ ,  $a_n=4\alpha_n$ ,  $n=1(2)7$ , и коэффициенты Фурье для соответствующих функций и их производных для  $\Theta=8q=0(.1)2.3, 7D$
- [10] National Bureau of Standards, Computation Laboratory: Tables relating to Mathieu functions, New York, 1951. С использованием обозначения  $s=32q$ ,  $b=4a+\frac{s}{2}$  для коэффициентов дифференциального уравнения Матье,  $be_r-\frac{1}{2}s=4a_r$ ,  $bo_r-\frac{1}{2}s=4\beta_r$  для собственных значений и  $Se_r(s, x)=\frac{1}{A}se_r(x, q)$ ,  $So_r(s, x)=\frac{1}{B}se_r(x, q)$  для нормированных в соответствии с  $Se_r(s, 0)=1$ ,  $[dSo_r(s, x)/dx]_{x=0}=1$  периодических функций Матье таблицы дают.  $be_r(s)$ ,  $r=0(1)15$ ;  $bo_r(s)$ ,  $r=1(1)15$  для области  $0 \leq s \leq 100$  с табличными шагами между 0.2 и 10 в  $8D$ . Коэффициенты Фурье соответствующих функций  $Se_r(s, x)$ ,  $So_r(s, x)$ , которые позволяют составить ряды Фурье в области  $0 \leq s \leq 100$  с точностью 9—10D. Нормирующие множители  $A$ ,  $B$  и соответствующие множители для вычисления видоизмененных функций Матье.
- [11] Blanch G. and Rhodes I., Table of characteristic values of Mathieu's equation for large values of the parameter, J. Washington Acad. Sci. 45 (1955), 166—196. В дополнение к [10] таблица дает  $Be_r(t)=be_r(s)-(2r+1)/t$ ,  $Bo_r(t)=bo_r(s)-(2r-1)/t$  для  $r=0(1)15$  и  $s=1/t^2 > 100$ . Табличный шаг для аргумента  $t$  выбран так, что возможно получать значения с точностью в  $8D$ .

**XV. КОНФЛЮЭНТНЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ**

**Руководства**

- [1] Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петью Г., Фогель Т., Функции математической физики, Физматгиз, 1963
- [2] Кратцер А. и Франц В., см. V, [3].
- [3] Кузнецов Д. С., см. V, [4].
- [4] Лебедев Н. Н., см. V, [6].
- [5] Сансоне Д., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, ИЛ, 1953.
- [6] Смирнов В. И., см. V, [7].
- [7] Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.
- [8] Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н., см. VII, [4].
- [9] Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion mit Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.
- [10] Slater L. J., Confluent hypergeometric functions, Cambridge, 1960.
- [11] Tricomi F., Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, 1960.
- [12] Appell P., Kampé de Fériet J., Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; polynomes d'Hermite, Paris, 1926.

**Таблицы**

- [13] British Association Report, 1926. 1926:  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=\pm 1/2, \pm 3/2$ ,  $\alpha=-4(.5)4$ ,  $x=0(.1)1(.2)3(.5)8, 5D$  или  $6-7S$ . 1927:  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=\pm 1/2, \pm 3/2$ ,  $\alpha=-4(.5)4$ ,  $x=0(.02)0.08, 0.15(.1)0.95, 1.1(.2)1.9, 5D$  или  $6S$ ; и для  $\gamma=1(1)4$ ,  $\alpha=-4(.5)4$ ,  $x=0(.02)0.1(.05)1(.1)2(.2)3(.5)8, 5D$  или  $6-7S$ .
- [14] Conolly B. W., A short table of the confluent hypergeometric function  $M(\alpha, \gamma, x)$ , Quart. J. Mech. Appl. Math. 2 (1950), 236—240.  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=0.2(.2)1$ ,  $\alpha=-1(.2)1$ ,  $x=0.1, 0.2(.2)1, 11D$ .
- [15] Slater L. J., On the evaluation of the confluent hypergeometric function, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953), 612—622.  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=0.1(.1)1$ ,  $\alpha=-1(.1)1$ ,  $x=1(1)10, 8S$ .
- [16] Nath P., Confluent hypergeometric function, Sankhyā 11 (1951), 153—166.  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=3, \sigma=1(1)40$  и  $\gamma=4, \alpha=1(1)50, x=0.02(.02)0.1(.1)1(1)10(10)50, 100, 200, 7S$ .

- [17] Rushton S. and Lang E. D., Tables of the confluent hypergeometric function, Sankhyā 13 (1954), 377—411.  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=0.5$  (.5) 3.5, 4.5,  $\alpha$ —целое и половина целого из  $0 \leq \alpha \leq 25$  до  $0 \leq \alpha \leq 50$  с табличным шагом 0.5 или 1,  $x$  как и в [14].
- [18] Gran Olsson R., Tabellen der konfluenten hypergeometrischen Funktion erster und zweiter Art, Ingenieur-Arch. 8 (1937), 99—103.  $M(\alpha, \gamma, kq^n)$  для  $n=2, 4$ , частные значения  $\alpha$  между  $-0.675$  и  $1.65$ , частные значения  $\gamma$  между  $0.5$  и  $3$ .  $k=-2$  (.5) 2,  $q=0$  (.1) 1, 4D.
- [19] Gran Olsson R., Über einige Lösungen des Problems der rotierenden Scheibe, II, Ingenieur. Arch. 8 (1937), 373—380.  $M(1.3, 3, x)$ ,  $M(0.65, 2, x)$ ,  $M(0.325, 1.5, x)$ ,  $x^{-1/2}M(-0.175, 0.5, x)$  для  $x=0.02$  (.02) 0.1 (.05) 1 (.1) 2.5, 4D.
- [20] Chappel G. E., The properties of a new orthogonal function associated with the confluent hypergeometric function, Proc. Edinburgh Math. Soc. 43 (1925), 117—130.  $M(\alpha, \gamma, x)$  для  $\gamma=1$ ,  $\alpha=1/2-k$ ,  $k=1$  (1) 10,  $kx=0.1$  (.1) 10,  $kx=0.1$  (.1) 1.5, 2 (1) 10, 4D.
- [21] Lowan A. N. and Horenstein W., On the function  $H(m, a, x) = \exp(-ix)F(m+1-ia, 2m+2; 2ix)$ , J. Math. Physics 21 (1942), 264—283. Reprint in NBS, Applied Mathematical Series 37, Washington, 1954.  $H(m, a, x) = e^{-ix}M(m+1-ia, 2m+2, 2ix)$  и  $dH(m, a, x)/dx$  для  $a=0$  (1) 10,  $m=0$  (1) 3,  $x=0$  (1) 10, 7S.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда гиперболическая  $\operatorname{amph} x$  33  
 — Якоби  $\operatorname{am}(u, k)$  120  
 Ангера функции  $J_\nu(z)$  287  
 — — неполные 288
- Бернулли числа  $B_n$  15, 53, 57, 60  
 Бесселя интегральное представление 221, 287  
 Бесселя функции 178, 317  
 — —, асимптотические разложения 222  
 — — второго рода см Неймана функции  
 — — мнимого аргумента  $I_\nu(z)$  247  
 — — модифицированные 247  
 — —, нули 229  
 — — первого рода  $J_\nu(z)$  181  
 — —, порядок (параметр, индекс) 178  
 — —, теоремы сложения и умножения 244, 245  
 — — третьего рода см Ганкеля функции  
 — —, формулы дифференцирования и интегрирования 244, 245  
 Бэта-функция  $B(z, w)$  55
- Ватсона формула 227  
 Вебера функции  $E_\nu(z)$  287  
 — — неполные 288  
 Вейерштрасса эллиптические функции  $\wp u$ ,  $\zeta u$ ,  $\sigma u$  127, 128
- Гамма-функции  $\Gamma(z)$ ,  $\Pi(z)$ ,  $z!$  49, 52  
 — —, логарифмическая выпуклость 49, 57  
 — —, логарифмическая производная  $\Psi(z)$ ,  $\Psi(z)$  49, 56, 316  
 — — неполные  $\Gamma(a, z)$ ,  $\gamma(a, z)$ ,  $P(a, z)$ ,  $Q(a, z)$ ,  $(a-1, z)!$  60, 62, 70, 71, 317  
 — —, формулы дополнения и умножения 54, 55  
 Ганкеля контурный интеграл 52  
 — разложение асимптотическое 222  
 — функции  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  70, 189  
 — — модифицированные  $K_\nu(z)$  247  
 Гармоники сферические 178  
 Гейне интегральное представление 164  
 Гиперболические функции  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$  30  
 — — комплексного аргумента 36  
 — — обратные  $\operatorname{Arsh} x$ ,  $\operatorname{Arch} x$ ,  $\operatorname{Arth} x$  30  
 — —, связь с показательной и логарифмической функциями 32  
 — —, формулы дифференцирования и интегрирования 32  
 — —, формулы сложения 31
- Гипергеометрическая вырожденная функция  $\Phi(a, c, z)$  308  
 Гипергеометрические конфлюэнтные функции  $\Phi(a, c, z)$ ,  $\Psi(a, c, z)$ ,  $M_{\kappa, \mu}(z)$ ,  $W_{\kappa, \mu}(z)$  308  
 Гипергеометрическое уравнение 119  
 — — вырожденное 308  
 Гидерманиян  $gd x$  33
- Дебая ряды 224  
 — функции 326
- Зоммерфельда интегральное представление 222
- Интеграл вероятности см. Интеграл ошибок  
 —, главное значение в смысле Коши 63  
 — ошибок  $\Phi(z)$ ,  $\Phi(v)$ ,  $\operatorname{Erf}(x)$ ,  $\operatorname{Erfc}(v)$ ,  $\operatorname{Erfi}(x)$ ,  $\Theta(x)$ ,  $H(x)$   $\alpha(x)$  60, 70, 72, 82  
 — —, обобщение  $E_n(z)$  71  
 — —, производные  $\Phi_{n+1}(x)$ ,  $\varphi(x)$  71, 72  
 — эллиптический см. Эллиптический интеграл
- Интегральная показательная функция  $E_1(z)$ ,  $E_1(-x)$ ,  $E_1^\pm(x)$ ,  $E_1^*(z)$ ,  $\overline{E_1}(z)$  60, 62, 67  
 Интегральный гиперболический косинус  $\operatorname{ch}_1(z)$  67  
 — — синус  $\operatorname{sh}_1(z)$  67  
 — косинус  $\operatorname{ci}(z)$   $\operatorname{Ci}(z)$  60, 65  
 — логарифм  $\operatorname{li}(z)$ ,  $\operatorname{Li}(x)$  60, 63, 67  
 — синус  $\operatorname{si}(z)$ ,  $\operatorname{Si}(z)$  60, 65  
 Интерполяция квадратичная 13  
 — линейная 13
- Каталана постоянная  $G$  16, 116  
 Кельвина функции  $\operatorname{ber}_\nu(z)$ ,  $\operatorname{bei}_\nu(z)$ ,  $\operatorname{ker}_\nu(z)$ ,  $\operatorname{kei}_\nu(z)$  264  
 Клотонда 83  
 Конфлюэнтное дифференциальное уравнение 308, 315—317  
 Куммера формула 315  
 — функция  $\Phi(a, c, z)$ ,  $M(a, c; z)$  308
- Лагерра полиномы  $L_n^{(\alpha)}(z)$ ,  $l_n(x)$  147, 151, 317  
 Лангера формула 227  
 Ланжевена функция  $L(x)$  320

- Лапласа интегральное представление 163  
 Лежандра соотношение 116  
 — функции второго рода  $Q_n(z)$ ,  $\Omega(z)$  159, 160  
 — —, индексы 158  
 — — нормированные 166  
 — — первого рода  $P_n(z)$ ,  $\mathfrak{P}(z)$  158, 159  
 — —, порядок 159  
 — — присоединенные 1-го и 2-го рода  $P_n^m(z)$ ,  $Q_n^m(z)$ ,  $\mathfrak{P}_n^m(z)$ ,  $\Omega_n^m(z)$  159, 162, 163  
 — —, степень 159  
 — —, теорема сложения 165  
 Ломмеля—Вебера функция  $\Omega_\nu(z)$  287
- Макдональда функция  $K_\nu(z)$  247  
 Матье дифференциальное уравнение 298, 306  
 — функции  $se_n(z, q)$ ,  $se_n(z, q)$  298  
 — — нормированные 301  
 — — присоединенные  $Se_n(z)$ ,  $Se_n(z)$  307  
 Меллера интегральное представление 163, 221
- Неймана интегральное представление 163  
 — функции  $N_\nu(z)$  184  
 Никольсона формулы 227
- Плака уравнение 318  
 — функция излучения 318  
 Планка—Эйнштейна функции 322, 323
- Показательные функции  $e^{\pm x}$ ,  $e^{\pm \frac{\pi}{2}x}$  32, 34
- Постоянная циклическая 62  
 Постоянные  $\pi$ ,  $e$  и т. д. 15  
 Похгаммера функция  $\Phi(a, c; z)$  308  
 Пуассона интегральное представление 221, 288  
 Разности 1-го порядка 13  
 — 2-го порядка  $\delta^2 y_0$  13  
 — — — видоизмененные  $\delta^2 y_0$  14  
 Римана дзета-функция  $\zeta(z)$  88
- Соиниа интегральное представление 221, 222  
 Спираль Корию 83  
 —  $\text{sici}$  66  
 Стирлинга формула 53  
 Струве функция  $H_\nu(z)$  288
- Сферические функции см. Лежандра функции
- Тригонометрические функции 24, 29  
 — — комплексного аргумента  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\text{tg } z$ ,  $\text{arcsin } z$ ,  $\text{arctg } z$  36, 39, 40, 43  
 Тэта-функции  $\vartheta_n(\nu, \kappa)$  130
- Уиттекера функция  $W_{\nu, \mu}(z)$  317  
 Уравнения элементарные трансцендентные 24, 35
- Френеля интегралы  $C(z)$ ,  $S(z)$  60, 82, 87  
 Функции параболического цилиндра  $D_\nu(z)$ ,  $\Psi_n(z)$ ,  $\Phi_n(z)$  153, 317  
 — распространения тепла от источников 326  
 — цилиндрические см. Бесселя функции  
 — эллиптического цилиндра см. Матье функции
- Чебышева ортогональные полиномы 1-го и 2-го рода  $T_n(z)$ ,  $U_n(z)$  144  
 Числа комплексные 16, 18, 20, 21
- Эверетта—Лапласа формула 14  
 Эйлера интегралы 1-го и 2-го рода 52, 55  
 — постоянные  $c$ ,  $\gamma$  15, 52, 57, 63, 184, 249  
 — числа  $E_n$  16  
 Эллиптическая функция 120  
 — — модулярная 133  
 Эллиптический интеграл 94  
 — —, дополнительный модуль 95  
 — —, модуль 95, 133  
 — — неполный 1-го, 2-го или 3-го рода в нормальной форме Лежандра  $D(\varphi, k)$ ,  $F(\varphi, k)$ ,  $E(\varphi, k)$ ,  $\Pi(\varphi, n, k)$  95, 99  
 — —, нормальная форма Вейерштрасса 127  
 — —, параметр 95  
 — — полный в нормальной форме  $K(k)$ ,  $E(k)$ ,  $D(k)$ ,  $B(k)$ ,  $C(k)$  96, 109, 114, 133  
 — —, приведение к нормальной форме 96  
 Эрмита полиномы  $H_n(z)$ ,  $\Phi_n(z)$  151, 153
- Якоби дзета-функция  $\text{zn}(u, k)$  127, 134  
 — эллиптические функции  $\text{sn}(u, k)$ ,  $\text{cn}(u, k)$ ,  $\text{dn}(u, k)$  122, 134