INTERSCIENCE TRACTS
IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS
Editors: L. Bers · R. Courant · J. J. Stoker
NUMBER 2

PLANE WAVES AND SPHERICAL MEANS

APPLIED TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

FRITZ JOHN
Institute of Mathematical Sciences
New York University, New York

1955

INTERSCIENCE PUBLISHERS, INC., NEW YORK
Interscience Publishers Ltd., London

Ф. ЙОН

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ

В ПРИМЕНЕНИИ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

●

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Н. Д. ВВЕДЕНСКОЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
С. Г. МИХЛИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1958

АННОТАЦИЯ

В небольшой монографии Ф. Йона с достаточной полнотой обрисованы некоторые новые возможности классического метода плоских волн и сферических средних применительно к дифференциальным уравнениям с частными производными. Можно считать, что в этом направлении книга является дополнением и развитием соответствующих разделов широко известного труда Д. Гильберта и Р. Куранта „Методы математической физики". В числе наиболее важных вопросов, рассмотренных в книге Ф. Йона, можно назвать: решение задачи Коши для однородного гиперболического уравнения, построение фундаментальных решений и изучение дифференциальных свойств решений эллиптических уравнений и систем, оценки производных решений эллиптических уравнений и др.

Изложение четкое и доступное. Книга будет весьма полезной для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников физико-математических специальностей.

Редакция литературы
по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В работах последних лет, трактующих методы решения уравнений математической физики и свойства самих решений, обычно исследуются уравнения какого-либо одного из основных типов. Так, имеется обширная литература как по гиперболическим, так и по эллиптическим уравнениям, много работ посвящено уравнениям параболического типа. Методы, развиваемые в книге Ф. Йона, оказываются полезными как для гиперболических, так и для эллиптических уравнений. Основной прием, который широко используется на протяжении всей книги, заключается в представлении функций того или иного класса в виде значений некоторого линейного оператора, действующего на функции достаточно простого вида — чаще всего на функции типа плоских волн. Таким путем автор получает представление функций весьма общего вида в виде интеграла по плоскости или по сфере («сферические средние»). Это представление позволяет заменять входящие в условия задачи данные функции более простыми, для которых задача решается элементарно; решение в более общем случае теперь легко получается суперпозицией, если данная задача линейная. Указанным способом решается задача Коши для линейного гиперболического уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами; фундаментальное решение эллиптического уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами также строится суперпозицией решений некоторых простейших задач Коши для данного уравнения. Весьма интересны приводимые в гл. VII теоремы о дифференциальных свойствах решений линейных и особенно нелинейных эллиптических систем; для доказательства этих теорем автор использует своеобразное преобразование данной системы в некоторую переопределенную систему.

Книга Ф. Йона примечательна элементарностью и, если можно так выразиться, „классичностью" ее построений. Автор довольно убедительно показывает, что элементарные методы математической физики еще далеко себя не исчерпали и могут привести к глубоким результатам. Вместе с тем необходимо заметить, что „классические" методы Ф. Йона очень близки к современным методам, связанным с применением обобщенных функций. В этом плане поучительно сравнить книгу Ф. Йона со статьей И. М. Гельфанда и З. Я. Шапиро „Однородные функции и их приложения" [Успехи мат. наук, т. X, вып. 3 (65), 1955, стр. 3—70][1], в которой, между прочим, дано разложение δ-функции (а тем самым и любой непрерывной функции) на плоские волны; это разложение затем применяется к решению задачи Коши для гиперболических уравнений и к построению фундаментальных решений эллиптических уравнений.

Интересная по своеобразию метода и по глубине результатов книга Ф. Йона несомненно привлечет внимание лиц, интересующихся математической физикой, и будет для них полезна.

С. Михлин.

8 октября 1957 г.

[1] См также книгу И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова „Обобщенные функции и действия над ними", Физматгиз, М., 1958.

ОТ АВТОРА

Автор хотел бы выразить здесь свою признательность всем его коллегам и друзьям из Математического института Нью-йоркского университета за их поддержку и критику, которые оказали свое влияние при написании этой монографии. Автор желает также поблагодарить Атем С. Ховард за разрешение включить результаты ее неопубликованной диссертации, Ларкина Джойнера за изготовление чертежей, издательство Interscience Publishers за его содействие и поддержку и в особенности Липмана Берса, который предложил опубликовать эту работу в ее настоящей форме.

Фриц Йон.

Нью-Рошель,
сентябрь 1955 г.

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге собраны довольно разнородные результаты, относящиеся к дифференциальным уравнениям с частными производными. Объединяющим элементом является использование некоторых элементарных тождеств для плоских и сферических интегралов от произвольной функции. Цель автора — показать, как из этих тождеств вытекает большое число различных результатов для довольно общих дифференциальных уравнений.

Применение обычных евклидовых плоскостей и сфер при исследовании дифференциальных уравнений общего вида представляет собой отход от мысли, согласно которой лучше всего работать с такими геометрическими образами, как характеристические коноиды, инвариантным образом связанными с дифференциальным уравнением. По-видимому, верно, что тонкая структура решений выявляется лишь при инвариантном подходе, приспособленном к индивидуальному уравнению. С другой стороны, опыт показывает, что многие результаты легче получаются при помощи более грубого неспецифического аппарата, такого, например, как степенные ряды, интегралы Фурье, конечно-разностные аппроксимации или нормы в L^2. Характеристические свойства индивидуального уравнения проявляются тогда не через равенства, а лишь через *неравенства*. При этом обходятся существенные трудности, неизбежно возникающие при применении сингулярных интегралов, взятых по характеристическим коноидам. Мы увидим, что интегралы по обычным сферам и плоскостям могут также успешно применяться даже для уравнений, не связанных с обычной евклидовой метрикой. В подобных случаях использование таких евклидовых образов вводит некоторые элементы искусственности (неинвариантности). Эта искусственность компенсируется, однако, тем, что обычные плоскости и сферы являются объектами более простыми и симметричными, чем соответствующие образы в других геометриях (если эти образы существуют), *естественно* связанных с дифференциальным уравнением.

Большинство приведенных здесь результатов встречается в литературе, хотя, возможно, и в иной степени общности. Отдавая должное другим авторам, мы снабдили нашу работу ссылками на соответствующий материал. Не делалось, однако, никаких попыток дать исторический обзор и решить более запутанные вопросы приоритета. В области дифференциальных уравнений с частными производными это было бы труднопреодолимой задачей, так как здесь фактические результаты различных работ часто отличаются друг от друга не так сильно (и, возможно, не так интересны), как их влияние на развитие какой-либо специфической объединяющей точки зрения. Результаты, которые здесь приводятся, подобраны так, чтобы как можно лучше показать пользу от применения плоских волн и сферических средних. Насколько возможно, изложение сделано элементарным и независимым от других работ. Ясно, что это стремление наложило жесткие ограничения на выбор тем и препятствовало исчерпывающему изложению каждого отдельного вопроса.

Основные тождества, которые применяются в монографии, содержатся в гл. I и IV. В главе I рассматривается *разложение произвольных функций по функциям типа плоских волн*, т. е. по функциям, у которых поверхности уровня являются параллельными плоскостями. Метод Фурье дает одно из таких разложений, а именно *разложение по плоским волнам экспоненциального типа*. Для многих приложений, однако, экспоненциальный характер разложения несуществен и можно использовать более элементарные методы разложения функций по плоским волнам. Здесь мы приводим один из таких методов разложения, принадлежащий И. Радону [1][1]. Он заключается в том, что функция выражается через сферические средние интегралов от нее самой, взятых по гиперплоскостям. Окончательные формулы тесно связаны с формулами, которые дают решение задачи Коши для волнового уравнения[2]. Герглотц ([3], стр. 18) указал на их связь с более общими гиперболическими уравнениями с постоянными коэффициентами. В отличие от *преобразования Фурье* этот вид разложения функции по плоским волнам можно назвать *преобразованием Радона*.

В качестве первого применения преобразования Радона в гл. II дается решение *задачи Коши для однородных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами* („однородность" означает здесь предположение, что все производные, входящие в уравнение, имеют один и тот же порядок)[3]. Формулы, к которым мы приходим, восходят еще к Герглотцу[4] (хотя и с некоторыми ограничениями общности). Они были обобщены Бюро, Гордингом, Лерэ и Петровским. В принципе эти формулы можно

---

[1] Числа в квадратных скобках относятся к списку литературы, приведенному в конце книги.

[2] См. Мадер [1].

[3] Подробное рассмотрение вопроса (включающее неоднородные уравнения) при помощи символического исчисления читатель найдет у Лерэ [1,2].

[4] См. Герглотц [1,2]. Изложение этого вопроса Герглотц дал также в своем курсе „Mechanik der Kontinua", Göttingen, 1931 (см. [3]).

получить из решения Коши[1] при помощи интегралов Фурье и „оценки" ядра, которое возникает при перемене порядка интегрирования. Такой их вывод неизбежно приводит, однако, к трудностям, связанным с вопросами сходимости, особенно в случае, когда порядок уравнения меньше числа измерений пространства. В этом последнем случае как раз не существует „интегрального представления" решения через начальные данные в обычном смысле, так как само решение не зависит *непрерывно* от начальных данных, если рассматривается норма в C. Можно лишь ожидать, что решение задачи Коши для гиперболического уравнения непрерывно зависит от начальных данных *и* от конечного числа их производных[2]. Если используется интегральное представление, то интеграл надо понимать в некотором обобщенном смысле, скажем в смысле „конечной" или „логарифмической" части несобственного интеграла, как это делается в теории уравнений второго порядка Адамара и в работах Бюро[3], или, следуя М. Риссу [1], как аналитическое продолжение собственного интеграла, или же как обобщенную функцию в смысле Л. Шварца [2]. Все эти обобщенные интегральные представления можно сделать „конкретными" в форме производных от обычных интегралов, хотя для такого перехода могут потребоваться довольно громоздкие выкладки с сингулярными интегралами. В противоположность этому метод, применяемый здесь (для однородных уравнений), обходит все трудности, связанные с вопросами сходимости, так как вместо интегралов Фурье используется более простое разложение Радона по плоским волнам. Решение затем получается непосредственно в следующем виде: на начальные данные действует совершенно регулярный интегральный оператор, а к полученной функции применяется итерированный лапласиан. При этом классические трудности вновь возникают только тогда, когда пытаются упростить это выражение, производя некоторые дифференцирования в явном виде[4].

В главе III строится *фундаментальное решение* для линейного эллиптического уравнения и, в более общем случае, для линейной эллиптической системы с аналитическими коэффициентами. Задача эквивалентна отысканию решения операторного уравнения

$$L[u] = \delta,$$

где δ — функция Дирака. Метод решения, который приводится здесь, состоит в разложении функции Дирака по плоским волнам и, следовательно, в сведении задачи к задаче о нахождении решения

---

[1] См. Коши [1], Курант — Гильберт [1], т. II, гл. III, Бюро [9].

[2] См. Адамар [1], Гординг [1].

[3] См. Бюро [3, 4, 9].

[4] Аналогичный метод для общих гиперболических систем с постоянными коэффициентами см. Курант — Лакс [1].

уравнения $L[u] = f$, где f — произвольная функция типа плоской волны. Последнюю задачу в свою очередь можно решить на основании теоремы Коши—Ковалевской. Таким образом, фундаментальное решение в малом получается в виде, позволяющем легко исследовать характер особенности любого порядка[1]. Для уравнений с постоянными коэффициентами находятся явные выражения фундаментального решения, в которые входят только квадратуры. Этот специальный случай имеет большое значение, потому что здесь получаются *решения-параметриксы*, которые могут применяться в случае линейных эллиптических уравнений с неаналитическими коэффициентами[2].

В главе IV получаются *представления произвольной функции f через сферические интегралы от f*. Для приложений существенно то, что радиусы сфер, входящих в эти выражения, ограничены снизу положительной постоянной. Эти формулы являются основным рабочим аппаратом, который используется в последующих главах. Их можно рассматривать как обобщение формул гл. I, в которых f выражается через интегралы от нее самой, взятые по плоскостям. Окончательные формулы, представляющие f через ее сферические средние, не очень изящны. К счастью, в дальнейших приложениях имеет значение только общий вид этого выражения. Тождества гл. IV тесно связаны с принципом Гюйгенса для волнового уравнения и с некоторыми тождествами для функций Бесселя. Их можно рассматривать также как аналитический аналог того геометрического факта, что сферические кольца можно „вымести" двумя различными способами посредством сфер (см. рис. 8), точно так же, как тождества гл. I связаны с тем, что внутренность шара можно вымести плоскостями[3].

В главе V приводится *тождество Асгейрссона* и несколько более общее *тождество, принадлежащее А. Ховард*. Последнее тождество поясняет смысл теоремы Асгейрссона, устанавливая ее связь с геометрией линейных семейств поверхностей второго порядка, заданных в тангенциальных координатах. Теорема м-с Ховард выходит за рамки, устанавливаемые названием этой монографии, поскольку она касается *эллипсоидальных*, а не *сферических* средних. Интересно применение этой теоремы, позволяющее преобразовать однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $2m$-го порядка в аналогичное уравнение m-го порядка от большего числа независимых переменных.

---

[1] В случае уравнений второго порядка фундаментальное решение было построено Адамаром [1] (кн. II, гл. III). См. также Томас—Титт [1], Бюро [2], Миранда [1].

[2] См. Леви [1], Йон [7], стр. 155—162.

[3] Аналогичным образом теорема Асгейрссона в случае $2+2$ измерений соответствует тому геометрическому факту, что однополостный гиперболоид двумя различными способами покрывается прямыми. См. Йон [6].

Глава VI касается главным образом определения функции по ее интегралам, взятым по сферам радиуса 1. Эту задачу можно решить, основываясь на тождествах гл. IV. Для „периодических в среднем" функций указаны решения более общих задач при помощи разложения по плоским волнам.

Основное применение тождествам со сферическими средними, выведенным в гл. IV, дается в гл. VII. В ней приведены доказательства дифференцируемости решений линейных или нелинейных эллиптических уравнений или систем уравнений в случае, когда коэффициенты достаточно регулярны. В этой главе содержится также доказательство аналитичности решений линейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. (Другое доказательство неявно дано в гл. III при построении аналитических фундаментальных решений таких уравнений.)

Глава VIII содержит обобщение результатов гл. VII на линейные *неэллиптические* уравнения. Здесь устанавливается регулярность не самих *решений*, а некоторых *интегралов от этих решений*. Точнее, показывается, что интегралы от решений, взятые по семейству *времяобразных* кривых с общими концами, настолько регулярно зависят от параметра, определяющего элементы этого семейства, насколько это допускают коэффициенты дифференциальных уравнений и предположения, сделанные относительно регулярности кривых семейства.

Глава I

РАЗЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ПЛОСКИМ ВОЛНАМ

Обозначения. В дальнейшем буквы x, y, z, X, Y, Z, ξ, η, ζ всегда обозначают *векторы* $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, \ldots, y_n), \ldots, (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в n-мерном пространстве, где $n \geqslant 2$. Все остальные буквы обозначают *скалярные* переменные. *Скалярное произведение* $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ векторов x и y обозначается через $x \cdot y$, длина $(x \cdot x)^{1/2}$ вектора x — через $|x|$. Элемент объема $dx_1 \ldots dx_n$ сокращенно записывается как dx, а через dS_x обозначается элемент гиперповерхности n-мерного пространства. Сферическая поверхность единичного радиуса в x-пространстве, описанная вокруг начала координат, обозначается через Ω_x, элемент ее поверхности — через $d\omega_x$, площадь всей ее поверхности — через ω_n. Объем единичного шара в n-мерном пространстве при этом равен $(1/n)\,\omega_n$. В тех случаях, когда пределы интегрирования не указаны, интегрирование производится по всей области изменения переменных.

Сферическое среднее функции одной переменной. Пусть $g(s)$ — непрерывная функция скалярной переменной s. Обозначим через y фиксированный вектор; тогда $g(y \cdot x)$ будет функцией от $x = (x_1, \ldots, x_n)$, постоянной на гиперплоскостях, перпендикулярных направлению y (такая функция будет называться функцией типа „плоской волны"). Образуем интеграл от $g(y \cdot x)$ по внутренности шара радиуса r, описанного вокруг начала координат. Для этого рассмотрим „плоские" сечения шара, перпендикулярные направлению y. На плоскости $y \cdot x = |y|\,p$, которая находится на расстоянии $|p|$ от начала координат, функция $g(x \cdot y)$ принимает значение $g(|y|\,p)$. Объем $(n-1)$-мерного пересечения этой плоскости с шаром равен (рис. 1)

$$\frac{\omega_{n-1}}{n-1}(r^2 - p^2)^{(n-1)/2}.$$

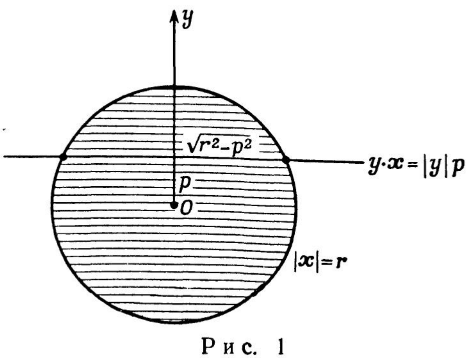

Рис. 1

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{|x|<r} g(y \cdot x)\,dx = \frac{\omega_{n-1}}{n-1}\int\limits_{-r}^{+r} (r^2 - p^2)^{(n-1)/2}\, g(|y|\,p)\,dp. \qquad (1.1)$$

Дифференцируя (1.1) по r и подставляя значение $r = 1$, получим основное тождество, справедливое при $n \geqslant 2$ для интеграла, взятого по единичной сфере, от функции типа плоской волны:

$$\int\limits_{\Omega_x} g(y \cdot x)\,d\omega_x = \omega_{n-1}\int\limits_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2}\, g(|y|\,p)\,dp = \omega_n h(|y|). \qquad (1.2)$$

[Здесь h определяется тождеством (1.2).]

Если $g(s) = \text{const} = 1$, то $h = 1$ и (1.2) дает рекуррентную формулу

$$\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} = \int\limits_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2}\,dp = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (1.3)$$

Из этой формулы выводится хорошо известное значение для площади поверхности единичной сферы в n-мерном пространстве [1]:

$$\omega_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \qquad (1.4)$$

При $g(s) = e^{is}$ находим

$$h(s) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\int\limits_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2}\, e^{isp}\,dp = \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu}}\, J_{\nu}(s), \qquad (1.5)$$

где J_ν — функция Бесселя индекса $\nu = (n-2)/2$ [2].

Положив в (1.2) $g(s) = |s|^k$ или $g(s) = |s|^k \ln |s|$, мы получим соответственно тождества

$$\int\limits_{\Omega_x} |y \cdot x|^k\,d\omega_x = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}\,|y|^k, \qquad (1.6)$$

$$\int\limits_{\Omega_x} |y \cdot x|^k \ln |y \cdot x|\,d\omega_x = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}\,|y|^k(\ln|y| + c_{nk}), \qquad (1.7)$$

---

[1] См. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 209.

[2] Это является, по существу, пуассоновским представлением функций Бесселя. См. Магнус—Оберхеттингер [1], § 5, стр. 26. (См. также Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. II, гл. V, § 113. — *Прим. ред.*)

где c_{nk} — некоторая постоянная. Формулы (1.6), (1.7) были выведены в предположении, что функция $g(s)$ непрерывна и, следовательно, что $k>0$; очевидно, что они справедливы также и при $k=0$. На основании этих формул производится разложение произвольной функции по плоским волнам, рассматриваемое в следующем параграфе.

Представление функции через ее плоские интегралы. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ класса C_1, которая обращается в нуль вне ограниченного множества[1]. Тогда

$$u(z)=\int f(y)\frac{|y-z|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\,dy \tag{1.8}$$

будет функцией z класса C_2, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению Пуассона

$$\Delta_z u(z)=f(z), \tag{1.9}$$

где через Δ_z обозначен лапласиан по переменным $z_1,\ldots,z_n$. (При $n=2$ ядро нужно заменить на $(1/2\pi)\ln|y-z|$). Чтобы доказать[2] соотношение (1.9), заметим, что

$$\begin{aligned}
\Delta_z u &= \frac{-1}{\omega_n}\sum_i\frac{\partial}{\partial z_i}\int f(y)\,(y_i-z_i)\,|y-z|^{-n}\,dy=\\
&=\frac{-1}{\omega_n}\sum_i\frac{\partial}{\partial z_i}\int f(y+z)\,y_i\,|y|^{-n}\,dy=\\
&=-\frac{1}{\omega_n}\sum_i\int f_{y_i}(y+z)\,y_i\,|y|^{-n}\,dy=\\
&=-\frac{1}{\omega_n}\lim_{r\to0}\sum_i\int\limits_{|y|>r} f_{y_i}(y+z)\,y_i\,|y|^{-n}\,dy=\\
&=-\frac{1}{\omega_n}\lim_{r\to0}\sum_i\Bigg[\int\limits_{|y|=r}\frac{-y_i^2}{r}|y|^{-n}f(y+z)\,dS_y-\\
&\quad-\int\limits_{|y|>r} f(y+z)\,\frac{\partial}{\partial y_i}\left(y_i|y|^{-n}\right)dy\Bigg]=\\
&=\frac{1}{\omega_n}\lim_{r\to0}r^{1-n}\int\limits_{|y|=r} f(y+z)\,dS_y=f(z).
\end{aligned}$$

Здесь было дано детальное доказательство справедливости уравнения Пуассона ввиду чрезвычайной важности этого доказательства

---

[1] $f(x)$ принадлежит классу C_m, если сама функция f и все ее производные порядков $\leqslant m$ непрерывны.

[2] См. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 213.

для дальнейшего, так как в большинстве случаев дифференцирование сингулярных интегралов, которое нам нужно будет производить, сводится к такой выкладке. Следует упомянуть, что это уравнение будет справедливо и при менее ограничительном предположении, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера[1)].

Возьмем теперь в случае четных n тождество (1.7), а в случае нечетных n тождество (1.6), заменим в нем y на $y-z$, умножим его на $f(y)$ и проинтегрируем по всем y. (Мы по-прежнему предполагаем, что f принадлежит классу C_1 и равна нулю вне ограниченного множества.) Выберем в качестве k такое целое неотрицательное число, чтобы $n+k$ было числом четным, и к полученному уравнению $(n+k)/2$ раз применим оператор Δ_z. Заметив, что

$$\Delta_z |y-z|^k = k(k+n-2)\,|y-z|^{k-2},$$

мы найдем соответственно для нечетных и четных $n>2$:

$$(\Delta_z)^{(n+k-2)/2}|y-z|^k = \\ = \frac{2^{n+k-1}\,\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(2-n)\,\pi}(-1)^{(n-1)/2}|y-z|^{2-n}, \tag{1.9a}$$

$$(\Delta_z)^{(n+k-2)/2}|y-z|^k \ln|y-z| = \\ = \frac{2^{n+k-2}\,\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(2-n)}(-1)^{(n-2)/2}|y-z|^{2-n}. \tag{1.9b}$$

Следовательно, в силу (1.6), (1.7), (1.9) для нечетных n и $k=1,3,5,\ldots$

$$(\Delta_z)^{(n+k)/2}\int\Big(\int\limits_{\Omega_x} f(y)\,|(y-z)\cdot x|^k\,d\omega_x\Big)\,dy = 4\,(2\pi i)^{n-1}\,k!\,f(z), \tag{1.10}$$

а для четных n и $k=0,2,4\ldots$ (в том числе для $n=2$)

$$(\Delta_z)^{(n+k)/2}\int\Big(\int\limits_{\Omega_x} f(y)\,|(y-z)\cdot x|^k \ln|(y-z)\cdot x|\,d\omega_x\Big)\,dy = \\ = -(2\pi i)^n\,k!\,f(z). \tag{1.11}$$

Эти формулы для четных и нечетных n формально можно объединить:

$$f(z) = (\Delta_z)^{(n+k)/2}\,\mathrm{Re}\Big[-\frac{1}{k!\,(2\pi i)^n}\int\Big(\int\limits_{\Omega_x} f(y)\,\big[(y-z)\cdot x\big]^k \times \\ \times \ln\Big[\frac{1}{i}(y-z)\cdot x\Big]\,d\omega_x\Big)\,dy\Big], \tag{1.11a}$$

---

1) См. Келлог [1], стр. 156.

где $\ln s$ означает главную ветвь функции, которая определена на комплексной s-плоскости, разрезанной вдоль отрицательной действительной полуоси.

Формулы (1.10) и (1.11) решают задачу о представлении функции $f(z)$ в виде линейной комбинации функций от z типа плоских волн. Здесь эти плоские волны имеют вид либо $|(y-z)\cdot x|^k$, либо $|(y-z)\cdot x|^k \ln|(y-z)\cdot x|$. Другое решение той же задачи дается, разумеется, при помощи представления функции ее интегралом Фурье:

$$f(z) = \int g(y) e^{iz\cdot y}\, dy,$$

в котором $f(z)$ разлагается по функциям $e^{iz\cdot y}$ типа плоских волн. Преимуществом формул (1.10), (1.11) является то, что в них в интегралы входит сама функция f, а не ее преобразование Фурье.

Можно также интерпретировать (1.10), (1.11) как формулы, выражающие $f(z)$ через интегралы от самой функции f, взятые по гиперплоскостям. При $|x| = 1$ выражение

$$J(x, p) = \int\limits_{y\cdot x = p} f(y)\, dS_y \tag{1.12}$$

представляет собой интеграл от f по гиперплоскости, которая имеет единичную нормаль x и проходит на расстоянии p от начала координат (расстояние берется со знаком). В силу определения (1.12) справедливо равенство $J(x, p) = J(-x, -p)$. Взяв для нечетного n формулу (1.10), мы получим при $k = 1$

$$\int\int\limits_{\Omega_x} f(y)\,|(y-z)\cdot x|\, d\omega_x\, dy = \int\limits_{\Omega_x} d\omega_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |p|\, dp \int\limits_{(y-z)\cdot x = p} f(y)\, dS_y =$$

$$= \int\limits_{\Omega_x} d\omega_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |p|\, J(x, p + z\cdot x) dp. \tag{1.13}$$

Учитывая, что при $|x| = 1$

$$\Delta_z \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |p|\, J(x, p + z\cdot x)\, dp =$$

$$= \Delta_z \Big[\int\limits_{z\cdot x}^{\infty} (p - z\cdot x)\, J(x, p)\, dp - \int\limits_{-\infty}^{z\cdot x} (p - z\cdot x)\, J(x, p)\, dp \Big] = 2J(x, z\cdot x),$$

мы найдем из (1.10), что для нечетных n

$$2(2\pi i)^{n-1} f(z) = (\Delta_z)^{(n-1)/2} \int\limits_{\Omega_x} J(x, x\cdot z)\, d\omega_x. \tag{1.14}$$

Интеграл здесь равен (с точностью до постоянного множителя ω_n) среднему значению плоских интегралов от функции f, взятых по плоскостям, проходящим через точку z. Для четных n аналогичную формулу можно вывести из (1.11), когда $k=0$. Заметим, что в этом случае при $|x|=1$

$$\Delta_z \int_{-\infty}^{+\infty} \ln|p|\, J(x, p+z\cdot x)\, dp = \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|p|)\, J_{pp}(x, p+z\cdot x)\, dp =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\ln|p-z\cdot x|)\, J_{pp}(x, p)\, dp = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p-z\cdot x} J_p(x, p)\, dp =$$

$$= \int_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{dJ(x, p)}{p-x\cdot z},$$

где в двух последних интегралах берутся главные значения в смысле Коши. Из формулы (1.11) для четных n тогда получается, что

$$(2\pi i)^n f(z) = (\Delta_z)^{(n-2)/2} \int_{\Omega_x} d\omega_x \int_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{dJ(x, p)}{p-z\cdot x}. \tag{1.15}$$

Эквивалентные (1.14) и (1.15) выражения для функции $f(z)$, в которые входят плоские интегралы J, впервые были даны Радоном[1]. Выражения другого вида, связанные с решением волнового уравнения, были даны Мадер[2].

---

[1] См. Радон [1], Бюро [9], гл. IX.
[2] См. Мадер [1].

Глава II

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Гиперболические уравнения. Дифференциальные уравнения, которые мы рассмотрим в этой главе, имеют вид

$$L[u] = Q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0, \tag{2.1}$$

где $Q(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda)$ является относительно своих аргументов формой степени m с постоянными действительными коэффициентами. *Задача Коши,* которую здесь требуется решить, состоит в отыскании решения u уравнения (2.1), удовлетворяющего при $t = 0$ начальным условиям:

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \ldots, m-2, \\ f(x_1, \ldots, x_n) & \text{при } k = m-1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Если эта задача будет решена для произвольной функции $f(x)$, то легко получить решение более общей задачи Коши[1)], в которой ищется решение дифференциального уравнения

$$L[u] = w(x, t)$$

с начальными значениями

$$\left(\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right)_{t=0} = f_k(x) \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Действительно, положим $u = u' + u''$, где

$$u' = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} f_k(x) t^k;$$

тогда функция u'' должна быть решением уравнения

$$L[u''] = w - L[u'] = w'(x, t)$$

с нулевыми начальными данными. В силу *принципа Дюамеля*

$$u''(x, t) = \int_0^t W(x, t-\tau, \tau)\, d\tau,$$

---

1) См. Курант—Гильберт [2].

где функция $W(x, t, \tau)$ при каждом τ является решением уравнения $L[W] = 0$, удовлетворяющим начальным условиям

$$Q(0,1)\left(\frac{\partial^k W(x, t, \tau)}{\partial t^k}\right)_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \ldots, m-2, \\ w'(x, \tau) & \text{при } k = m-1. \end{cases}$$

Мы предполагаем, что функция $f(x)$ равна нулю вне ограниченного множества и принадлежит классу C_s, где s достаточно велико (например, $s \geqslant 2 + m + n$). Можно показать, что решение u задачи (2.1), (2.2), вообще говоря (даже для функций класса C_∞), существует лишь в случае, когда оператор L является *гиперболическим* относительно плоскости $t = 0$. Для уравнений рассматриваемого здесь вида эта гиперболичность эквивалентна условию, что при любом действительном η уравнение $Q(\eta, \lambda) = 0$ имеет только действительные корни λ и что коэффициент $Q(0,1)$ при высшей производной по t отличен от нуля[1]. Не ограничивая общности, мы будем предполагать, что $Q(0,1) = 1$.

Уравнение (2.1) называется *строго гиперболическим*, если для любого действительного вектора $\eta \neq 0$ все корни λ уравнения

$$Q(\eta, \lambda) = 0 \tag{2.3}$$

действительны *и различны*.

Геометрия нормальной поверхности для строго гиперболического уравнения[2]. В случае строго гиперболического уравнения *характеристическое уравнение* (2.3) при действительном $\eta \neq 0$ имеет ровно m действительных и различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Мы всегда будем нумеровать их так, чтобы

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m. \tag{2.4}$$

Пусть η принадлежит единичной сфере Ω_η. Тогда λ_k равномерно ограничены, так как коэффициент при λ^m в (2.3) равен 1, а остальные коэффициенты ограничены. Множество корней непрерывным образом зависит от коэффициентов, неравенства же (2.4) справедливы для всех η из Ω_η, а поэтому $\lambda_k = \lambda_k(\eta)$ являются непрерывными функциями от η на единичной сфере.

Из уравнения $Q(\eta, \lambda) = 0$ вытекает, что $Q(-\eta, -\lambda) = 0$. Следовательно, $Q(-\eta, -\lambda_k(\eta)) = 0$. Поэтому величины $-\lambda_k(\eta)$ будут корнями, соответствующими вектору $-\eta$. Так как

$$-\lambda_1(\eta) < -\lambda_2(\eta) < \ldots < -\lambda_m(\eta),$$

---

[1] Это определение было бы недостаточным, если бы Q не было однородным. Определение гиперболичности для общих линейных уравнений с постоянными коэффициентами см. у Гординга [1]. (Общее определение гиперболической системы было дано И. Г. Петровским [5]. — *Прим. ред.*)

[2] См. Бюро [1], стр. 165—166, Брусотти [1].

то должно быть

$$-\lambda_k(\eta) = \lambda_{m-k+1}(-\eta) \text{ при } k = 1, \ldots, m. \tag{2.5}$$

В существенном для нас частном случае, когда

$$Q(\eta, 0) \neq 0 \text{ при всех } \eta \text{ из } \Omega_\eta, \tag{2.6}$$

ни один из корней λ_k не может стать равным нулю. Из непрерывности $\lambda_k(\eta)$ следует, что число положительных корней λ_k одно и то же для всех η. В силу условий (2.5) число положительных корней $\lambda_k(\eta)$ равно числу отрицательных корней $\lambda_k(-\eta)$. Поэтому в предположении (2.6) для всех η число положительных корней λ_k равно числу отрицательных. Условие (2.6) может выполняться лишь для *четных* порядков m.

Мы можем интерпретировать числа $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \lambda$ как однородные координаты точки в n-мерном проективном пространстве π_n, а числа $\eta_1/\lambda, \ldots, \eta_n/\lambda$ — как неоднородные координаты в евклидовом пространстве, полученном из π_n исключением *бесконечно удаленной плоскости* $\lambda = 0$. Началу координат соответствует $\eta = 0$. Точки пространства π_n, однородные координаты которых удовлетворяют характеристическому уравнению (2.3), образуют *нормальную поверхность* Σ. Поскольку $Q(0,1) = 1$, начало координат не является точкой поверхности Σ. Фиксируя η ($|\eta| = 1$) и изменяя λ, мы получим прямую, проходящую через начало координат. Замена η на $-\eta$ дает ту же прямую. Строгая гиперболичность дифференциального уравнения (относительно $t = 0$) означает, что каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает поверхность Σ в m действительных различных точках. Точки с однородными координатами $\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda_k(\eta)$ образуют в пространстве π_n связный лист Σ_k поверхности Σ. В силу условий (2.5) листы Σ_k и Σ_{m-k+1} совпадают. Таким образом, при четном m нормальная поверхность состоит из $m/2$ отдельных листов, каждый из которых пересекается прямой, проходящей через начало координат, в двух различных точках. При нечетном m имеется $(m+1)/2$ отдельных листов. Из них $(m-1)/2$ листов пересекаются с прямыми, проходящими через начало координат, в двух точках каждый. Оставшийся лист $\Sigma_{(m+1)/2}$ лишь в одной точке пересекается с прямой, проходящей через начало координат, и, следовательно, не разделяет пространство π_n на две части.

С листом Σ_k, для которого $k \neq (m+1)/2$, мы можем связать два точечных множества R_k и $\overline{R}_k$. Всякую точку P из пространства π_n возможно записать в виде $(\eta_1, \ldots, \eta_n, \lambda) = (\eta, \lambda)$, где $|\eta| = 1$. Началу координат соответствует значение $\lambda = \infty$. При $P \neq 0$ существует ровно два таких представления: (η, λ) и $(-\eta, -\lambda)$. Пусть множество R_k состоит из точек, для которых

$$0 < \frac{\lambda - \lambda_k(\eta)}{\lambda - \lambda_{m-k+1}(\eta)} < \infty,$$

а для точек из множества $\bar{R}_k$ пусть

$$-\infty < \frac{\lambda - \lambda_k(\eta)}{\lambda - \lambda_{m-k+1}(\eta)} < 0.$$

Благодаря условию (2.5) определение множеств R_k и $\bar{R}_k$ не зависит от того, которое из двух представлений точки P выбрано. Множества Σ_k, R_k и $\bar{R}_k$ заполняют все пространство π_n. Лист Σ_k является границей как R_k, так и $\bar{R}_k$ и разделяет π_n на эти два множества. Каждое из множеств R_k содержит начало координат O. Каждую точку из множества R_k можно соединить с O „отрезком" проективной прямой, лежащим в R_k („отрезок" — подмножество проективной прямой, ограниченное двумя точками). Отсюда следует, что множество R_k гомеоморфно внутренности шара. В силу неравенств (2.4) каждое множество R_k при $k < (m+1)/2$ содержит все множества с меньшим индексом.

Если $k < (m+1)/2$, то всякая прямая, проходящая через точку P из множества R_k, пересекает лист Σ_k по крайней мере в двух различных действительных точках. В самом деле, пусть P — точка из R_k, а l — прямая, проходящая через P, которая пересекает лист Σ_k в одной точке или вообще его не пересекает. Пусть π_2 — двумерная проективная плоскость, проходящая через O и l. Тогда π_2 пересекает лист Σ_k по кривой σ_k. Прямая l имеет с кривой σ_k не более одной общей точки, тогда как каждая прямая из плоскости π_2, которая проходит через точку O, имеет с кривой σ_k две различные общие точки. Можно считать, что l является бесконечно удаленной прямой в π_2. Один из двух лучей, идущих из O в P, заключен во множестве R_k и поэтому не содержит точек кривой σ_k. Будем поворачивать этот луч вокруг точки O в обоих направлениях. Вращая наш луч как в одном, так и в другом направлении, мы дойдем до первого луча, который уже будет содержать точку кривой σ_k (может быть, на бесконечности), так как каждая прямая, выходящая из O, содержит точки σ_k. Эти первые лучи, содержащие точки σ_k, не могут иметь их на конечном расстоянии, потому что тогда они должны были бы иметь кратное пересечение с σ_k, что исключается. Следовательно, они пересекают кривую σ_k на бесконечности. Так как, по предположению, бесконечно удаленная прямая содержит только одну точку σ_k, два первых луча, выходящих из O и содержащих точки σ_k, должны быть диаметрально противоположны друг другу. Тогда прямая, образованная этими двумя лучами, которая тоже проходит через O, имела бы только одну точку пересечения с кривой σ_k, что приводит к противоречию.

Прямая, проходящая через точку множества R_1, пересекает лист Σ_k, где $k < (m+1)/2$, ровно в двух точках, а лист $\Sigma_{(m+1)/2}$ — в одной точке, потому что возможно только m пересечений, а мнимые пересечения встречаются парами. Пусть P_1 и P_2 — точки множества R_1. Тогда прямая, соединяющая P_1 и P_2, пересекает лист Σ_1 ровно в двух точках, которые не могут разделять P_1 и P_2, так как Σ_1 делит пространство на две части. Следовательно, множество R_1 выпукло в том смысле, что вместе с любыми двумя точками к R_1 принадлежит и один из „отрезков" проективной прямой, соединяющих эти точки.

Структура нормальной поверхности, рассматриваемой как поверхность в *евклидовом* пространстве, может быть более сложной. Если исключить бесконечно удаленную плоскость, то каждая из связных компонент листа Σ_k нормальной поверхности может распадаться на несколько листов. Лишь в случае, когда n четно и выполнено условие (2.6), нормальная поверхность в евклидовом пространстве будет ограниченной поверхностью, состоящей из $m/2$ вложенных друг в друга овалов, причем самый внутренний овал будет *выпуклым* в обычном смысле.

Решение задачи Коши для строго гиперболического уравнения. Уравнение вида (2.1), в котором все члены имеют одинаковый порядок, допускает решения типа плоских волн произвольной „формы". Пусть $g(s)$ — произвольная функция класса C_m. Тогда выражение

$$u = g\left((x-y)\cdot\eta + t\lambda\right) \tag{2.7}$$

будет решением уравнения (2.1) класса C_m, если постоянные η и λ удовлетворяют характеристическому уравнению (2.3). Мы решим сначала задачу Коши (2.1),(2.2) для случая, когда функция $f(x)$ имеет вид $|(y-x)\cdot\eta|^k$ или $[(y-x)\cdot\eta]^k \ln|(y-x)\cdot\eta|$. В этом случае решение u будет простой комбинацией решений типа плоских волн, имеющих вид (2.7). В силу формул (1.10) и (1.11) решение для произвольной функции f получается затем при помощи суперпозиции.

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(\eta)$ — корни уравнения (2.3) при $|\eta| = 1$. Мы часто будем использовать тот факт, что для полинома $Q(\lambda)$ степени m с простыми корнями λ_k и старшим коэффициентом 1 выполняется тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{\lambda^q}{Q(\lambda)}\,d\lambda = \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k^q}{Q_\lambda(\lambda_k)} = \begin{cases} 0 \text{ при } q = 0, 1, \ldots, m-2, \\ 1 \text{ при } q = m-1, \end{cases} \tag{2.8}$$

где C — кривая на комплексной λ-плоскости, содержащая внутри себя все λ_k. Из равенства (2.8) следует, что для функции $g(s)$ класса C_m выражение

$$u = \sum_{k=1}^{m}\frac{g\left((x-y)\cdot\eta + \lambda_k t\right)}{Q_\lambda(\eta, \lambda_k)} \tag{2.9}$$

является решением уравнения (2.1) со следующими начальными значениями при $t = 0$:

$$\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = \begin{cases} 0 & \text{при } r = 0, 1, \ldots, m-2, \\ g^{(m-1)}((x-y)\cdot\eta) & \text{при } r = m-1. \end{cases} \tag{2.10}$$

Здесь мы использовали предположение, что корни λ_k действительны и различны. Поскольку на единичной сфере $\lambda_k(\eta)$ являются непрерывными функциями, то

$$Z(x-y,\ t) = \int\limits_{\Omega_\eta} \sum_{k=1}^{m} \frac{g((x-y)\cdot\eta + t\lambda_k(\eta))}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\, d\omega_\eta \tag{2.11}$$

представляет собой решение уравнения (2.1), для которого

$$\left(\frac{\partial^r Z}{\partial t^r}\right)_{t=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } r=0,1,\ \ldots,\ m-2, \\ \int\limits_{\Omega_\eta} g^{(m-1)}((x-y)\cdot\eta)\, d\omega_\eta & \text{при } r=m-1. \end{cases} \tag{2.12}$$

Если $f(y)$ — произвольная непрерывная функция, равная нулю вне ограниченного множества, то

$$v(x,\ t) = \int f(y) Z(x-y,\ t)\, dy \tag{2.13}$$

снова будет решением уравнения $L[v] = 0$, принадлежащим классу C_m. При $t = 0$ само решение v и его производные порядков $\leqslant m-2$ обращаются в нуль, а

$$\frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}} = \int \int\limits_{\Omega_\eta} g^{(m-1)}((x-y)\cdot\eta)\, f(y)\, dy d\omega_\eta. \tag{2.14}$$

Возьмем теперь в качестве $g(s)$ функцию

$$g(s) = \frac{s^{m-1+q}\ \mathrm{sign}\ s}{4(m-1+q)!\,(2\pi i)^{n-1}} \quad \text{при нечетном } n \tag{2.15a}$$

и

$$g(s) = \frac{s^{m-1+q}\ \ln|s|}{-(m-1+q)!\,(2\pi i)^n} \quad \text{при четном } n. \tag{2.15b}$$

Здесь q — целое число $\geqslant 2$, для которого $q + n$ четно. Тогда

$$g^{(m-1)}(s) = \begin{cases} \dfrac{|s|^q}{4q!\,(2\pi i)^{n-1}} & \text{для нечетных } n, \\ \dfrac{-s^q(\ln|s| + c)}{q!\,(2\pi i)^n} & \text{для четных } n, \end{cases} \tag{2.15c}$$

где c — некоторая постоянная. Из формул (1.10), (1.11) следует, что для функции f класса C_1

$$(\Delta_x)^{(n+q)/2}\left[\frac{\partial^{m-1} v(x,\ t)}{\partial t^{m-1}}\right]_{t=0} = f(x). \tag{2.16}$$

(Постоянная c изменяет правую часть формулы (2.14) только на многочлен от $\mathbf{x}$ степени q, который аннулируется операторами Δ.)

Предположим теперь, что на самом деле функция $f(x)$ принадлежит классу C_{n+q}. Функцию v мы можем записать в виде

$$v(x, t) = \int f(y + x) Z(-y, t)\, dy$$

и образовать выражение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\Delta_x)^{(n+q)/2} v(x, t) = \\ &= \int [(\Delta_y)^{(n+q)/2} f(y)]\, Z(x-y, t)\, dy. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Поскольку функция $(\Delta_y)^{(n+q)/2} f(y)$ непрерывна, то u представляет собой решение уравнения (2.1), принадлежащее классу C_m. Кроме того, u и его производные порядков $\leqslant m-2$ обращаются в нуль при $t=0$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} &= \int [(\Delta_y)^{(n+q)/2} f(x+y)] \frac{\partial^{m-1} Z(-y, t)}{\partial t^{m-1}}\, dy = \\ &= (\Delta_x)^{(n+q)/2} \int f(x+y) \frac{\partial^{m-1} Z(-y, t)}{\partial t^{m-1}}\, dy = \\ &= (\Delta_x)^{(n+q)/2} \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} v(x, t). \end{aligned}$$

Из равенства (2.16) тогда вытекает, что при $t=0$

$$\frac{\partial^{m-1} u}{\partial t^{m-1}} = f(x).$$

Следовательно, функция $u(x, t)$ является решением задачи Коши (2.1), (2.2). За q можно выбрать число 3, если n нечетно, и число 2, если n четно. Таким образом, достаточно предположить, что функция f принадлежит классу C_{n+3} при нечетных n и классу C_{n+2} при четных n.

В случае, когда $n < m-1$, в выражении для u дифференцирование можно произвести под знаком интеграла. Из формул (2.15a, b) получаем

$$g^{(q+n)}(s) = \begin{cases} \dfrac{s^{m-1-n} \operatorname{sign} s}{4(m-n-1)!\,(2\pi i)^{n-1}} & \text{для нечетных } n, \\[2ex] \dfrac{s^{m-n-1}(\ln|s| + c)}{-(m-n-1)!\,(2\pi i)^{n}} & \text{для четных } n, \end{cases}$$

где c — некоторая постоянная. Положив

$$K(x-y, t) = (\Delta_x)^{(n+q)/2} Z(x-y, t), \tag{2.18}$$

$$F_k = (x-y)\cdot \eta + t\lambda_k(\eta) \text{ при } k = 1, \ldots, m, \tag{2.19}$$

мы получим из равенства (2.11)

$$(2\pi i)^n (m-n-1)!\, K(x-y,\ t) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi i}{2} \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\eta} \dfrac{F_k^{m-n-1} \operatorname{sign} F_k}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\, d\omega_\eta, \\ -\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\Omega_\eta} \dfrac{F_k^{m-n-1} \ln |F_k|}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\, d\omega_\eta \end{cases} \qquad (2.20)$$

для нечетных и четных n соответственно. (Постоянная c не изменяет (2.8), так как функция F_k^{m-n-1} является относительно λ_k полиномом степени $< m-1$.) Далее, из формул (2.17) и (2.13) вытекает, что

$$u(x,\ t) = \int f(y)\, K(x-y,\ t)\, dy. \qquad (2.21)$$

Это выражение для решения u можно, вообще говоря, использовать и в случае, когда $n = m-1$, но последнее требует еще некоторого обоснования, так как в этом случае интегралы в формуле (2.20) будут сингулярными (см. ниже, стр. 32).

Представление ядра через интеграл по нормальной поверхности. Выражение (2.20) можно преобразовать, выразив ядро K через интеграл по нормальной поверхности. Для этого предположим дополнительно, что $\partial/\partial t$ не входит сомножителем в выражение для L. Это равносильно утверждению, что ни одна из функций $\lambda_k(\eta)$ не равна тождественно нулю или что бесконечно удаленная плоскость не является одним из листов нормальной поверхности. В таком случае совокупность точек на единичной сфере Ω_η, для которых $Q(\eta, 0) = 0$, образует множество меньшей размерности, и поэтому при построении интегралов (2.20) для ядра K можно пренебречь влиянием точек η, в которых $\lambda_k(\eta) = 0$.

Когда точка η изменяется, оставаясь на множестве точек Ω_η, в которых $\lambda_k(\eta) \neq 0$, точка

$$\xi = \eta / \lambda_k(\eta)$$

изменяется на ограниченной части листа Σ_k нормальной поверхности $Q(\xi, 1) = 0$, отнесенной к неоднородным координатам. Телесный угол $d\omega_\eta$ связан с соответствующим элементом dS поверхности

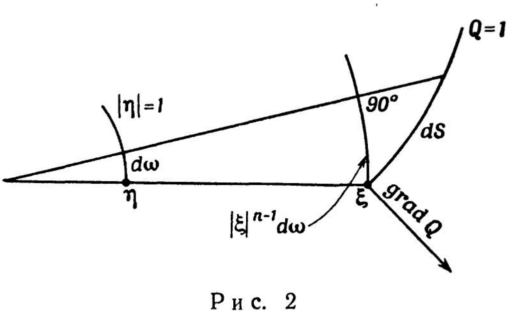

Рис. 2

Σ_k уравнением (рис. 2)

$$dS = \frac{|\xi|^n \,|\operatorname{grad} Q(\xi, 1)|}{|\sum_i Q_{\xi_i}(\xi, 1)\,\xi_i|}\, d\omega_\eta, \tag{2.21a}$$

где $|\operatorname{grad}\ Q(\xi, 1)| = \sqrt{\sum_i Q^2_{\xi_i}(\xi, 1)}$. Здесь $|\xi| = 1/|\lambda_k(\eta)|$ и

$$|\sum_i Q_{\xi_i}(\xi, 1)\xi_i| = |-Q_\lambda(\xi, 1)| = |\xi|^{m-1}\,|Q_\lambda(\eta, \lambda_k(\eta))|.$$

Положим

$$E = F_k/\lambda_k(\eta) = (x-y)\cdot\xi + t.$$

Тогда формула (2.20) для нечетных n дает

$$4(2\pi i)^{n-1}(m-n-1)!\,K(x-y, t) =$$
$$= \sum_k \int_{\Sigma_k} \frac{E^{m-n-1}(\operatorname{sign}\lambda_k)^{m-1}\operatorname{sign} E}{|\operatorname{grad} Q(\xi, 1)|\operatorname{sign} Q_\lambda(\eta, \lambda_k)}\, dS.$$

Поскольку $Q(0,1) = 1$, функция $Q(\eta, \lambda)$ положительна при больших положительных значениях λ. Из неравенств (2.4) следует, что

$$\operatorname{sign} Q_\lambda(\eta, \lambda_k) = (-1)^{k+1}.$$

Каждая точка ξ поверхности $Q(\xi, 1) = 0$ дважды встречается в выражении для ядра K, потому что ξ должно представляться при некотором k в виде

$$\xi = \eta/\lambda_k(\eta) = -\eta/\lambda_{m+1-k}(\eta).$$

Здесь корни $\lambda_k(\eta)$ и $\lambda_{n+1-k}(-\eta)$ имеют противоположные знаки. Следовательно,

$$(-1)^k(\operatorname{sign}\lambda_k(\eta))^{m-1} = (-1)^{m-k+1}(\operatorname{sign}\lambda_{m+1-k}(-\eta))^{m-1}.$$

Отсюда вытекает, что оба представления точки ξ играют одинаковую роль. Поэтому достаточно дважды учесть точки, отвечающие представлению с положительными корнями λ_k. Для положительных λ_k число $k-1$ равно числу положительных корней уравнения $Q(\eta, \lambda) = 0$, превосходящих корень λ_k, и равно числу точек нормальной поверхности, которые лежат на одном с λ_k луче, выходящем из начала координат, но расположены ближе к началу координат. Следовательно, для нечетных $n < m-1$

$$2(2\pi i)^{n-1}(m-n-1)!\,K(x-y, t) =$$
$$= \int_{Q(\xi, 1)=0} \frac{(-1)^N E^{m-n-1}\operatorname{sign} E}{|\operatorname{grad} Q(\xi, 1)|}\, dS, \tag{2.22}$$

где $N = N(\xi)$ — число точек нормальной поверхности, лежащих на том же луче, что и точка ξ, но ближе к началу координат. Ясно, что число $(-1)^N$ постоянно на каждой связной компоненте нормальной поверхности в евклидовом пространстве, но может быть различным для различных компонент, которые в проективном пространстве составляют один лист Σ_k нормальной поверхности.

Аналогичную формулу можно вывести из выражения (2.20) и для четных n. В этом случае в (2.20) член $\ln|F_k|$ удобно заменить на $\ln|F_k/F_0|$, где $F_0 = (x-y)\cdot\eta$. Член $\ln|F_0|$ не зависит от k и поэтому, в силу тождеств (2.8), не влияет на сумму по k. Положив

$$E_0 = (x-y)\cdot\xi,$$

мы получим для четных $n < m-1$

$$(2\pi i)^n(m-n-1)!\,K(x-y,\ t) = \\ = -2\int\limits_{Q(\xi,\ 1)=0} \frac{(-1)^N E^{m-n-1}\ln|E/E_0|}{|\operatorname{grad} Q(\xi,\ 1)|}\,dS. \qquad (2.23)$$

Формулы (2.22), (2.23) для $n \leqslant m-1$ были даны Герглотцем [1] в предположении, что нормальная поверхность ограничена (и, следовательно, m четно). Если за переменные интегрирования взять $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, то

$$\frac{dS}{|\operatorname{grad} Q(\xi,\ 1)|} = \pm\frac{d\xi_1\ldots d\xi_{n-1}}{Q_{\xi_n}(\xi,\ 1)}.$$

Разбив область интегрирования на части, в которых $E > 0$ и $E < 0$, и придавая переменным интегрирования комплексные значения, мы можем получить выражения того типа, который был дан Бюро[2]. Точное вычисление кратных интегралов для ядра K и даже сведение их к однократным интегралам в общем случае, конечно, невозможно. В специальных случаях и, в частности, в случае, когда форму Q можно разложить на квадратичные сомножители, эти интегралы был вычислены и исследованы Бюро[3].

Обратимся теперь к случаю, когда $n \geqslant m-1$. В этом случае только некоторые из лапласианов, стоящих в выражении (2.17), можно внести под знак интеграла и применить к функции Z. Удобно заменить здесь операторы Δ производными по t. С этой целью, однако, нам придется теперь ограничиться случаем, в котором $Q(\eta, 0) \neq 0$ на сфере Ω_η и, следовательно, m четно. В этом предположении нормальная поверхность ограничена и $\lambda_k(\eta) \neq 0$ для всех η из Ω_η.

---

[1] См. Герглотц [2], стр. 294. Решение для нечетных m дано Петровским [1].
[2] См. Бюро [2, 3, 4].
[3] См. Бюро [5, 6, 7].

Предполагая, что функции f и g принадлежат классу C_2, воспользуемся тождеством

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int f(y)\Big(\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{g(F_k)\,\lambda_k^{-\alpha}}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta\Big)\,dy =$$

$$=\int f(y)\Big(\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{g''(F_k)\,\lambda_k^{2-\alpha}}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta\Big)\,dy =$$

$$=\int f(y)\,\Delta_y\Big(\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{g(F_k)\,\lambda_k^{2-\alpha}}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta\Big)\,dy =$$

$$=\int(\Delta_y f(y))\Big(\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{g(F_k)\,\lambda_k^{2-\alpha}}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta\Big)\,dy.$$

Повторно применяя это тождество к выражению (2.17), в предположении, что функция f принадлежит классу C_{n+q} и обращается в нуль вне ограниченного множества, преобразуем выражение для решения u к виду

$$u(x,\ t)=\frac{\partial^{n+q}}{\partial t^{n+q}}\int f(y)\,Z'(x-y,\ t)\,dy,$$

где

$$Z'(x-y,\ t)=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{g(F_k)\,\lambda_k^{-n-q}}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta.$$

(Здесь мы использовали то, что $\lambda_k\neq 0$.) Далее, функция

$$F_k=(x-y)\cdot\eta+t\lambda_k(\eta)$$

не может тождественно обращаться в нуль при всех η, так как в этом случае форма $Q(\eta,\ \lambda)$ должна была бы иметь в качестве множителя линейную функцию $(x-y)\cdot\eta+t\,\lambda$, нормальная поверхность содержала бы плоскость и, следовательно, вопреки предположению простиралась бы до бесконечности. Поэтому совокупность точек поверхности Ω_η, в которых $F_k=0$, образует точечное множество низшей размерности. Отсюда вытекает, что выражение $Z'(x-y,\ t)$, для которого функция g задается при помощи формул (2.15a, b), имеет непрерывные производные по t порядков $\leqslant m-1+q$. Тогда

$$u(x,\ t)=\frac{\partial^{n-m+1}}{\partial t^{n-m+1}}\int f(y)\,K'(x-y,\ t)\,dy, \qquad (2.24)$$

где

$$K'(x-y,\ t)=\frac{\partial^{m-1+q}}{\partial t^{m-1+q}}Z'(x-y,\ t)=$$

$$=\sum_k\int\limits_{\Omega}\frac{\lambda_k^{m-1-n}\,g^{(m-1+q)}(F_k)}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta.$$

Здесь

$$g^{(m-1+q)}(s)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sign} s}{4(2\pi i)^{n-1}} & \text{при нечетных } n,\\ \dfrac{\ln|s|+c}{-(2\pi i)^{n}} & \text{для четных } n,\end{cases}$$

где c — некоторая постоянная. Постоянная c изменяет значение ядра K' только на постоянную, которая аннулируется производными по t, появляющимися в выражении для u. (При четных n и m значение $n-m+1$ не меньше 1.) По той же причине $\ln|F_k|$ можно заменить на $\ln|F_k/F_0|$, так как от этого результат изменится на величину, не зависящую от t. Таким образом, мы приходим к следующим выражениям:

$$K'(x-y,\ t)=\frac{1}{4(2\pi i)^{n-1}}\sum_k\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{\lambda_k{}^{m-1-n}\operatorname{sign} F_k}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta$$

при нечетных n,

$$K'(x-y,\ t)=\frac{-1}{(2\pi i)^{n}}\sum_k\int\limits_{\Omega_\eta}\frac{\lambda_k{}^{m-1-n}\ln|F_k/F_0|}{Q_\lambda(\eta,\ \lambda_k(\eta))}\,d\omega_\eta$$

при четных n. Произведя такое же, как раньше, преобразование нормальной поверхности, мы получим окончательно:

$$K'(x-y,\ t)=\frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}}\int\limits_{Q(\xi,\,1)=0}\frac{(-1)^N\operatorname{sign} E}{|\operatorname{grad} Q(\xi,\ 1)|}\,dS \tag{2.25}$$

при нечетных n,

$$K'(x-y,\ t)=\frac{-2}{(2\pi i)^{n}}\int\limits_{Q(\xi,\,1)=0}\frac{(-1)^N\ln|E/E_0|}{|\operatorname{grad} Q(\xi,\ 1)|}\,dS \tag{2.26}$$

при четных n. Когда $n=m-1$ и нормальная поверхность ограничена, эти формулы совпадают с выражениями, которые можно получить из формул (2.22) и (2.23).

Область зависимости. Пусть x, y и t таковы, что плоскость $E=(x-y)\cdot\xi+t$ не пересекает нормальной поверхности. Тогда функция E сохраняет знак на этой поверхности и, следовательно, в силу (2.25) K' равна постоянной при нечетном n. Из (2.24) получаем, что для нечетных $n>m-1$ решение не зависит от начальных значений $f(y)$, если точка $-(x-y)/t$ принадлежит области, в которую переходит выпуклая оболочка листа $\Sigma_{m/2}$ нормальной поверхности при инверсии относительно сферы $|\xi|^2-1=0$ радиуса 1. Поэтому заданная точка y не входит в область зависимости решения $u(x,\ t)$ при заданной точке x, если t достаточно велико. Таким образом, мы имеем „лакуну" в области зависимости[1)] и, значит, принцип Гюйгенса в сильном виде обобщается в некотором смысле на однородные уравнения высших порядков в нечетномерном пространстве. При $n \leqslant m-1$ из (2.20) можно лишь заключить, что в соответствующей области K является формой степени $\leqslant m-n-1$.

В случае нечетных $n \leqslant m-1$, следуя Герглотцу[2)], можно доказать *ограниченность области зависимости функции и от начальных значений.* Заметим для этого, что в силу формул (2.20), (2.8)

$$K(x-y,\ 0)=0,$$

так как при $t=0$ выражение F_k не зависит от k. Из (2.22) вытекает следующее: если Σ — такая алгебраическая поверхность $Q(\xi)=0$ степени m, что каждая прямая, проходящая через начало координат, пересекает Σ в m различных действительных точках проективного пространства, а бесконечно удаленная плоскость не является листом Σ, то

$$\int\limits_{\Sigma} \frac{(-1)^N\,[(x-y)\cdot\xi]^{m-n-1}\operatorname{sign}[(x-y)\cdot\xi]}{|\operatorname{grad} Q(\xi)|}\,dS=0. \tag{2.27}$$

Когда t не равно нулю, правую часть (2.22) можно привести к виду (2.27) подстановкой

$$\xi=\xi_0+\xi',$$

где ξ_0 выбирается так, что

$$(x-y)\cdot\xi_0+t=0.$$

Положим $Q(\xi_0+\xi',\ 1)=Q'(\xi')$. Тогда правая часть выражения (2.22) принимает вид

$$\int\limits_{\Sigma'} \frac{(-1)^N\,[(x-y)\cdot\xi']^{m-n-1}\operatorname{sign}[(x-y)\cdot\xi']}{|\operatorname{grad} Q'(\xi')|}\,dS, \tag{2.28}$$

где Σ' — поверхность $Q'(\xi')=0$ степени m. Если ξ_0 является здесь точкой проективно-выпуклого множества R_1, ограниченного поверхностью Σ_1, то, как было показано на стр. 23, каждая прямая, проходящая через точку $\xi'=0$, пересекает поверхность Σ' в m различных действительных точках. Остается показать,

---

[1)] См. Петровский [1], Гординг [1], стр. 60. Лакуна будет такой же и в случае, когда начальные условия специального вида (2.2) заменяются более общими условиями.

[2)] См. Герглотц [1], ч. II, стр. 295, Гординг [1], где дано доказательство и для четных n. Тот же результат в гораздо более общем случае линейных уравнений с аналитическими коэффициентами можно доказать методом Хольмгрена. См. Йон [3], Мышкис [1], Курант—Гильберт [2].

что значения множителя $(-1)^N$, вычисленные для точек $\xi = 0$ и $\xi' = 0$, либо совпадают, либо противоположны. Пусть ξ — точка листа Σ_k при $1 \leqslant k \leqslant (m+1)/2$ (рис. 3). Один из проективных

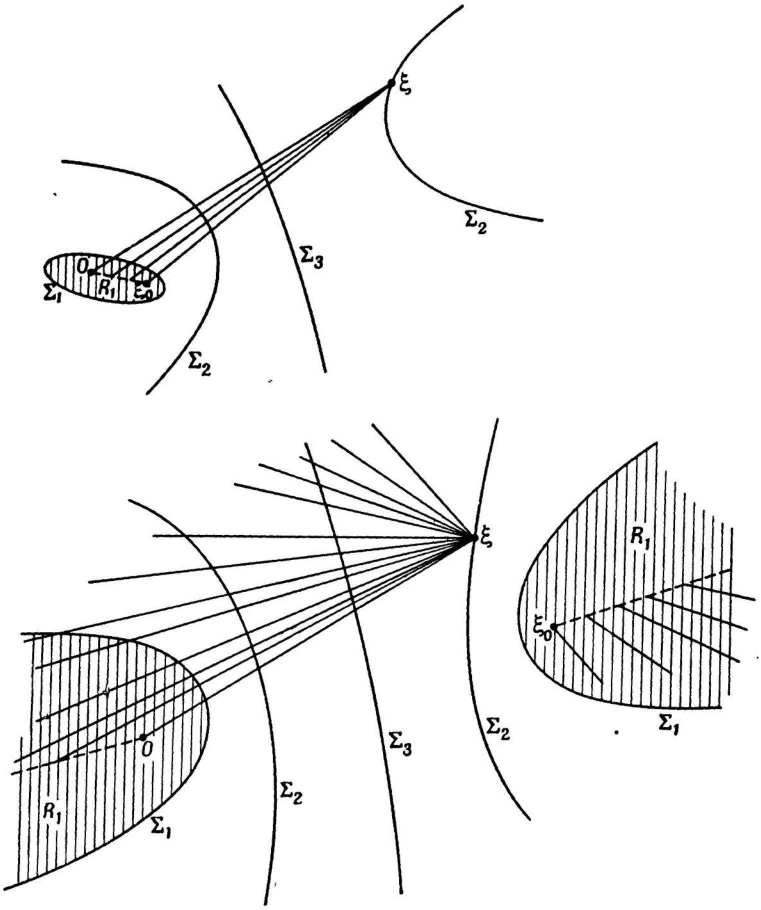

Рис. 3

отрезков, соединяющих O и ξ_0, заключен в множестве R_1 и, следовательно, не содержит точек поверхности Σ. Пусть ζ — переменная точка этого отрезка. Если этот отрезок *ограничен*, то число пересечений ограниченного открытого отрезка $\zeta\xi$ с поверхностью Σ не меняется, когда ζ перемещается от O до ξ_0, так как у отрезка $\xi\zeta$ нет кратных пересечений с Σ и ни одно пересечение не лежит на отрезке $O\xi_0$. Следовательно, в этом случае открытые ограниченные отрезки $O\xi$ и $\xi_0\xi$ пересекают Σ в одном и том же числе точек. Если не содержит точек поверхности Σ *бесконечный* отрезок прямой $O\xi_0$, то мы будем перемещать ζ от O до ξ_0 вдоль этого отрезка. Отрезок $\xi\zeta$ при этом будет непрерывно изменяться в проективном пространстве, начиная от ограниченного отрезка ξO и кончая неограниченным отрезком $\xi\xi_0$. Число точек поверхности Σ на отрезке $\xi\zeta$ остается постоянным. Отсюда следует, что в этом случае независимо от выбора точки ξ на поверхности Σ число точек Σ на открытых отрезках $O\xi$ и $\xi_0\xi$ в сумме равно $m-1$. Таким образом, мы видим, что вдоль поверхности значения множителя $(-1)^N$, вычисленные для точек O и ξ_0, либо совпадают, либо противоположны. Следовательно, интеграл (2.28) обращается в нуль и $K(x-y, t)=0$, если только существует такая точка ξ_0, принадлежащая R_1, что $(x-y)\cdot\xi_0+t=0$, т. е. если плоскость $(x-y)\cdot\xi+t=0$ пересекает множество R_1. При достаточно больших $|x-y|$ это всегда имеет место, потому что расстояние такой плоскости до лежащего внутри R_1 нуля равно $t/|x-y|$. Область, в которую переходит R_1 при инверсии относительно единичной сферы, является ограниченным выпуклым множеством. Решение $u(x, t)$ задачи Коши не зависит от начальных значений $f(y)$ в тех точках y, для которых точки $(y-x)/t$ лежат вне этого выпуклого множества.

Волновое уравнение. Для уравнения второго порядка

$$\Delta_x u = u_{tt} \tag{2.29}$$

нормальная поверхность совпадает с единичной сферой Ω_ξ:

$$Q(\xi, 1) = 1 - |\xi|^2 = 0.$$

На единственном листе этой поверхности $N=0$ и $|\operatorname{grad} Q(\xi, 1)| = 2$. Из формул (2.25) и (1.2) для нечетных n вытекает, что

$$K'(x-y, t) = \frac{1}{4(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{\Omega_\xi} \operatorname{sign}[(x-y)\cdot\xi + t]\, d\omega_\xi =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{4(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{-1}^{+1} (1-p^2)^{(n-3)/2} \operatorname{sign}(rp+t)\, dp,$$

где $r=|x-y|$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} K'(x-y, t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^{n-1}}\, r^{2-n}(r^2-t^2)^{(n-3)/2} & \text{при } r>t, \\ 0 & \text{при } r<t. \end{cases}$$

В силу равенства (2.24)

$$u(x, t) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int f(y) \frac{\partial}{\partial t} K'(x-y, t)\, dy =$$

$$= \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \frac{\omega_n\, \omega_{n-1}}{2(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_t^\infty I(x, r)\, r(r^2-t^2)^{(n-3)/2}\, dr,$$

где $I(x, r)$ — сферическое среднее функции f:

$$I(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|x-y|-r} f(y)\, r^{1-n}\, dS_y. \tag{2.30}$$

Здесь

$$\omega_n\, \omega_{n-1} = \frac{2^n\, \pi^{n-1}}{(n-2)!} \tag{2.31}$$

в силу (1.4). Если мы воспользуемся тем фактом, что интеграл

$$\int\limits_0^\infty I(x, r)\, r\,(r^2 - t^2)^{(n-3)/2}\, dr$$

как функция t является полиномом степени $n-3$, у которого $(n-2)$-е производные по t обращаются в нуль, то получим классическую формулу [1)]

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-2)!}\, \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int\limits_0^t I(x, r)\, r\,(t^2 - r^2)^{(n-3)/2}\, dr. \tag{2.32}$$

Труднее получить из (2.26) ту же формулу для четных n. Согласно формулам (2.26) и (1.2),

$$K'(x-y, t) = \frac{-\omega_{n-1}}{(2\pi i)^n} \int\limits_{-1}^{+1} (1-p^2)^{(n-3)/2} \left[\ln\left|p + \frac{t}{r}\right| - \ln|p|\right] dp.$$

Член с $\ln|p|$ можно опустить, так как он не влияет на значение производной $\partial K'/\partial t$. Мы можем записать K' в виде интеграла, взятого по замкнутому контуру C комплексной p-плоскости:

$$K'(x-y, t) = \frac{+\omega_{n-1}}{2(2\pi i)^n} \operatorname{Re} \oint\limits_C (1-p^2)^{(n-3)/2} \ln\left(p + \frac{t}{r}\right) dp. \tag{2.33}$$

Функция $(1-p^2)^{(n-3)/2}$ определяется здесь так, что она однозначна всюду вне разреза, идущего от -1 к $+1$, и принимает действительные положительные значения на верхнем берегу этого разреза. За $\ln s$ берется главная ветвь, определенная на s-плоскости, разрезанной вдоль положительной мнимой полуоси. Положим $p_0 = -t/r$ и возьмем за C замкнутый контур на p-плоскости, проходящий через точку p_0 и не пересекающий ни разреза от -1 до $+1$, ни разреза от p_0 до $p_0 + i\infty$ (рис. 4).

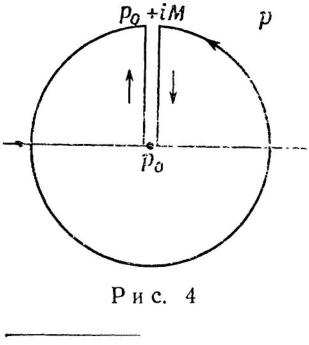

Рис. 4

1) Тедоне [1], Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 372. См. также Бюро [8], М. Рисс [1], Купер [1].

Интеграл в выражении (2.33) имеет вид

$$h(p_0) = \oint_C g(p) \ln(p - p_0)\, dp, \tag{2.34}$$

где функция $g(p)$ регулярна и аналитична всюду, за исключением конечного разреза вдоль действительной оси, и непрерывна с обеих сторон в точках этого разреза. (Нам приходится предположить здесь, что $n \geqslant 4$.) За контур интегрирования можно выбрать окружность радиуса M, описанную вокруг точки p_0, вместе с разрезом от p_0 до $p_0 + iM$. Используя то, что при переходе через мнимую ось $\ln p$ изменяется на $2\pi i$, мы придем к выражению

$$h(p_0) = \int\limits_{|p|=M} g(p + p_0) \ln p\, dp - 2\pi i \int\limits_{p_0}^{p_0+iM} g(p)\, dp.$$

Тогда

$$h'(p_0) = \int\limits_{|p|=M} g'(p + p_0) \ln p\, dp - 2\pi i\,(g(p_0 + iM) - g(p_0)).$$

Производя в этом интеграле интегрирование по частям и принимая во внимание многозначность $\ln p$ на окружности, получим формулу

$$h'(p_0) = -\oint\limits_{|p|=M} g(p + p_0) \frac{dp}{p} + 2\pi i\, g(p_0) \tag{2.35}$$

(значение $g(p_0)$, появившееся в выражении (2.35), точнее равно $g(p_0 + i0)$).

В специальном случае, который мы рассматриваем,

$$g(p) = (1 - p^2)^{(n-3)/2},$$

а значит,

$$h'(p_0) = -\int\limits_{|p|=M} (1 - (p + p_0)^2)^{(n-3)/2} \frac{dp}{p} + 2\pi i (1 - p_0^2)^{(n-3)/2}.$$

Интеграл в этой формуле равен вычету функции $(1/p)[1 - (p + p_0)^2]^{(n-3)/2}$ в точке $p = \infty$. Легко видеть, что это будет многочлен $P(p_0)$ степени $\leqslant n - 3$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} K'(x - y,\ t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial K'}{\partial p_0} =$$

$$= \frac{-\omega_{n-1}}{2r(2\pi i)^n} \operatorname{Re}\left[2\pi i \left(1 - \frac{t^2}{r^2}\right)^{(n-3)/2} + P\left(-\frac{t}{r}\right)\right].$$

Многочлен P не влияет на значение решения

$$u(x,\ t) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}} \int f(y) \frac{\partial}{\partial t} K'(x - y, t)\, dy.$$

Остальная часть выражения для $\partial K'(x-y, t)/\partial t$ принимает значение 0 при $r > t$ и значение

$$\frac{\omega_{n-1}}{2(2\pi)^{n-1}} r^{2-n} (t^2 - r^2)^{(n-3)/2}$$

при $r < t$ (заметим, что тогда $p_0 < -1$). Далее, так же как и раньше, для четного $n \geqslant 4$ устанавливается формула (2.32). При помощи аналогичных рассуждений устанавливается справедливость этой формулы и для $n = 2$.

Формула (2.32) была выведена нами в предположении, что функция $f(x)$ обладает производными достаточно высокого порядка. При *нечетных* n мы можем произвести $(n-3)/2$ дифференцирований под знаком интеграла, не изменяя при этом пределов интегрирования. Оставшиеся $(n-1)/2$ дифференцирований дают тогда выражение вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{(n-3)/2} c_k t^{k+1} \frac{\partial^k I(x, t)}{\partial t^k}, \tag{2.36}$$

где c_k — некоторые постоянные. Далее, функция $I(x, t)$ принадлежит по крайней мере тому же классу, что и функция $f(x)$. Следовательно, если $f(x)$ принадлежит классу $C_{(n+1)/2}$, то решение u, выраженное формулой (2.36), принадлежит классу C_2. Поскольку выражение (2.36) представляет собой решение задачи Коши для волнового уравнения при всех достаточно регулярных функциях f, то, пользуясь аппроксимациями, можно заключить, что оно является решением этой задачи при всех функциях f класса $C_{(n+1)/2}$. (Последнее верно в задаче со специальными начальными значениями $u = 0$, $u_t = f$ при $t = 0$. Для более общих начальных значений $u = g$, $u_t = f$ надо предположить, что функция g принадлежит классу $C_{(n+3)/2}$)[1]. В общем случае предположение, что функция f принадлежит классу $C_{(n+1)/2}$, ослабить нельзя, потому что $I(x, t)$ может принадлежать тому же классу, что и $f(x)$. Так будет в случае, когда функция $f(x)$ обладает сферической симметрией, $f(x) = h(|x|)$ и $I(0, t) = h(t)$, и поэтому число производных функции I по t равно порядку класса, которому принадлежит f. При *четных* n в формуле (2.32) под знаком интеграла можно произвести $(n-2)/2$ дифференцирований, откуда вытекает, что функция u представляет собой решение волнового уравнения для функций f класса $C_{(n+2)/2}$.

Задача Коши для гиперболических уравнений, у которых нормальная поверхность имеет кратные точки. До сих пор мы предполагали, что характеристическое уравнение $Q(\eta, \lambda) = 0$ не имеет кратных корней. Откажемся теперь от этого ограничения

[1] См. Диас и Вейнбергер [1], стр. 709, Купер [1].

и изменим выражение для $Z(x-y, t)$, которое применялось ранее, таким образом, чтобы оно имело смысл и в случае кратных корней. Будем действовать так же, как в случае волнового уравнения при четных n. Введем функцию

$$g(s)=\frac{s^{m-1+q}\left(\frac{\pi i}{2}+\ln s\right)}{-(m-1+q)!\,(-2\pi i)^{n}}, \tag{2.37}$$

где $\ln s$ означает главную ветвь логарифма, определенную на плоскости, разрезанной вдоль положительной мнимой полуоси. При этом функция $\operatorname{Re}[g(s)]$ для действительных s совпадает с функциями, обозначенными через g в формулах (2.15a, b). Положим

$$F=(x-y)\cdot\eta+\lambda t,$$

$$F_0=(x-y)\cdot\eta.$$

Выражение (2.9) заменится при этом выражением

$$R=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}\frac{g(F)}{Q(\eta,\lambda)}\,d\lambda\right], \tag{2.38}$$

где контур C охватывает все корни знаменателя, проходит через точку $F=0$ или $\lambda_0=-F_0/t$ и не пересекает луча, параллельного положительной мнимой полуоси и проходящего через эту точку (рис. 5).

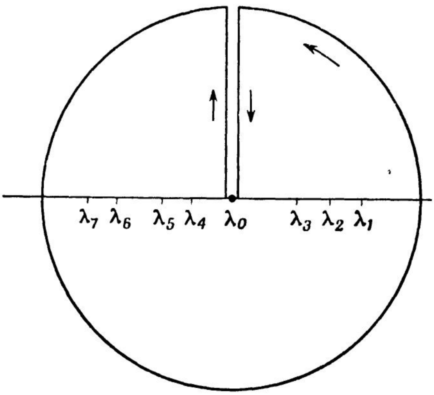

Рис. 5

Поскольку все корни $Q(\eta,\lambda)=0$ действительные, то

$$|Q(\eta,\lambda)|=\prod_{k=1}^{m}|\lambda-\lambda_k(\eta)|\geqslant|\mu^m| \tag{2.39}$$

при $\operatorname{Im}\lambda=\mu$. Точнее, пусть α — наивысшая кратность корня при $|\eta|=1$. Тогда существует такое число δ, что δ-окрестность любой точки λ содержит не более α корней. В этом случае

$$|Q(\eta,\lambda)|\geqslant\delta^{m-\alpha}\mu^{\alpha},$$

$$\left|\frac{Q_\lambda(\eta,\lambda)}{Q(\eta,\lambda)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda-\lambda_k}\right|\leqslant\frac{m}{|\mu|} \tag{2.40}$$

для всех η, принадлежащих Ω_η, и всех λ, для которых $|\operatorname{Im}\lambda|=|\mu|$.

Предположим теперь, что целое число q, входящее в выражение для g, таково, что $q\geqslant\alpha+1$. Это заведомо верно, если $q\geqslant m+1$. Возьмем за контур интегрирования C границу круга радиуса M

с центром в точке $\lambda = \lambda_0 = -F_0/t$, разрезанного вдоль отрезка, проходящего через эту точку параллельно положительной мнимой оси. Пусть M так велико, что круг содержит все корни знаменателя, например пусть

$$M = |\lambda_0| + 2 \max_{\substack{|\eta| \quad 1 \\ k=1, \ldots, m}} |\lambda_k(\eta)|.$$

Вдоль разреза

$$F^{m-1+q} = t^{m-1+q} (\lambda - \lambda_0)^{m-1+q} = t^{m-1+q} (i\mu)^{m-1+q}.$$

Поскольку $m - 1 + q > \alpha$, из формул (2.40) следует, что выражение

$$\frac{F^{m-1+q}}{Q(\eta, \lambda)}$$

непрерывно вдоль разреза.

Далее поступаем так же, как в случае волнового уравнения. Мы можем записать R в виде

$$R = \operatorname{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_0| = M} \frac{g(F)}{Q(\eta, \lambda)}\, d\lambda - c \int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + iM} \frac{F^{m-1+q}}{Q(\eta, \lambda)}\, d\lambda\Big],$$

где через c обозначена постоянная

$$c = -1/(m - 1 + q)!\,(-2\pi i)^n.$$

Для того чтобы получить производные выражения R, запишем его в виде

$$R = \operatorname{Re}\Big[c t^{m-1+q} \Big(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda| = M} \frac{\lambda^{m-1+q} \left(\frac{\pi i}{2} + \ln(\lambda t)\right)}{Q(\eta, \lambda + \lambda_0)}\, d\lambda - {}$$

$$- \int_0^{iM} \frac{\lambda^{m-1+q}\, d\lambda}{Q(\eta, \lambda + \lambda_0)}\Big)\Big].$$

Частную производную функции R по λ_0 можно вычислить, производя сначала дифференцирование под знаком интеграла, а затем интегрируя по частям. Окончательное выражение не зависит от пределов интегрирования и совпадает с выражением, которое получается непосредственным дифференцированием в формуле (2.38), когда переменность C не учитывается и под знаком интеграла стоит $F = (\lambda - \lambda_0)\, t$.

Следовательно, производные функции R по x и t порядков $\leqslant m$ можно получить непосредственным дифференцированием под знаком интеграла, и окончательные выражения будут непрерывны по x, y, t, η. Надо заметить, что при $t \to +0$ контур C с центром в точке $\lambda_0 = -F_0/t$ может стать неограниченным. Однако при больших λ_0 всегда можно деформировать контур в окружность ограниченного радиуса, содержащую внутри себя корни знаменателя и не проходящую через λ_0.

Таким образом мы найдем, что

$$L(R) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint_C g^{(m)}(F)\, d\lambda = 0,$$

так как $g^{(m)}(F)$ не имеет внутри C особенностей. Аналогично найдем, что

$$\frac{\partial^{m-1} R}{\partial t^{m-1}} = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\lambda^{m-1}\, g^{(m-1)}(F)}{Q(\eta, \lambda)}\, d\lambda.$$

Поскольку контур интегрирования всегда можно считать находящимся в ограниченной части λ-плоскости, а при ограниченных λ равномерно $\lim\limits_{t\to 0} F = F_0$, мы получим для четных $n+q$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^{m-1} R}{\partial t^{m-1}}\right)_{t=0} &= \operatorname{Re} \frac{g^{(m-1)}(F_0)}{2\pi i} \oint \frac{\lambda^{m-1}\, d\lambda}{Q(\eta, \lambda)} = \\
&= \operatorname{Re} g^{(m-1)}((x-y)\cdot\eta) = \\
&= \begin{cases} \dfrac{|(x-y)\cdot\eta|^q}{4q!\,(2\pi i)^{n-1}} & \text{для нечетных } n, \\[2ex] \dfrac{-[(x-y)\cdot\eta]^q\,(\ln|(x-y)\cdot\eta| + c')}{q!\,(2\pi i)^n} & \text{для четных } n, \end{cases}
\end{aligned}$$

где c' — некоторая постоянная [см. формулу (2.15c)].

Аналогично показывается, что первые $m-2$ производные функции R по t обращаются в нуль при $t=0$.

Начиная с этого места решение задачи Коши (2.1), (2.2) дальше строится в точности так же, как в строго гиперболическом случае. Определим функцию

$$\begin{aligned}
Z(x-y, t) &= \int_{\Omega_\eta} R\, d\omega_\eta = \\
&= \operatorname{Re} \int_{\Omega_\eta} d\omega_\eta \frac{c}{2\pi i} \oint_C \frac{F^{m-1+q}\left(\frac{\pi i}{2} + \ln F\right)}{Q(\eta, \lambda)}\, d\lambda, \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

где число q превосходит наивысшую кратность α корня характеристического уравнения, а $q+n$ четно. Если теперь f принадлежит классу C_{n+q}, то выражение

$$u(x, t) = (\Delta_x)^{(n+q)/2} \int f(y)\, Z(x-y, t)\, dy \qquad (2.42)$$

будет решением задачи Коши, принадлежащим классу C_m.

При $m - n > \alpha$ все дифференцирования в выражении для u можно произвести под знаком интеграла, и таким образом мы приходим к формуле (2.21), в которой

$$(m-n-1)!\,K(x-y,\ t) = \\ = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{(-2\pi i)^{n+1}} \int\limits_{\Omega_\eta} d\omega_\eta \oint\limits_C \frac{F^{m-n-1} \ln F}{Q(\eta,\ \lambda)}\, d\lambda\right]. \qquad (2.43)$$

Контур C, по которому производится интегрирование, состоит здесь из окружности радиуса M с центром в точке $\lambda_0 = -F_0/t$ и двух берегов разреза от λ_0 до $\lambda_0 + iM$. При больших M влиянием окружности можно пренебречь, и тогда контурный интеграл заменится на интеграл

$$-2\pi i \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda_0+i\infty} \frac{F^{m-n-1}\, d\lambda}{Q(\eta,\ \lambda)}.$$

Положив $\lambda = \lambda_0 + i\mu/t$, мы можем записать это выражение в виде

$$-2\pi i^{m-n+1}\, t^{m-1} \int\limits_0^\infty \frac{\mu^{m-n-1}\, d\mu}{Q(t\eta,\ i\mu - F_0)}.$$

Таким образом,

$$(m-n-1)!\,K(x-y,\ t) = \\ = \operatorname{Re} \frac{i^{m-n}\, t^{m-1}}{(-2\pi i)^n} \int\limits_{\Omega_\eta} d\omega_\eta \int\limits_0^\infty \frac{\mu^{m-n-1}\, d\mu}{Q(t\eta,\ i\mu - (x-y)\cdot\eta)}. \qquad (2.44)$$

Аналогичную редукцию можно провести для m и n в более общем случае при условии, что $m \geqslant 2+\alpha$ при нечетных n и $m \geqslant 3+\alpha$ при четных n. При этом в формуле (2.42) под знаком интеграла можно ввести такое число операторов Δ, чтобы показатель степени у F в контурном интеграле сделался меньше $m-1$. Тогда контурный интеграл опять можно заменить на интеграл, взятый вдоль бесконечного разреза, в котором логарифм уже не входит в подинтегральное выражение[1].

[1] Формулы для элементарного решения, в которые логарифм не входит даже в случае четного числа измерений, были даны Петровским [1]. См. Лерэ [1], стр. 83 и далее.

Глава III

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1)]

Определение фундаментального решения. Обозначим через $L[u]$ дифференциальный оператор вида

$$L[u]=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1,\ldots,n} A_{i_1\ldots i_k}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}. \qquad (3.1)$$

Функция $K=K(x,y)=K(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)$ называется *фундаментальным решением* оператора L, если для любой достаточно регулярной функции $f(x)$, которая обращается в нуль вне ограниченного множества,

$$L\left[\int K(x,y)f(y)\,dy\right]=f(x). \qquad (3.2)$$

В операторной записи это выражается так: $K(x,y)$ является решением неоднородного дифференциального уравнения

$$L[K(x,y)]=\delta(x-y), \qquad (3.3)$$

где δ обозначает так называемую *функцию Дирака*[2)].

Для оператора Лапласа $L=\Delta_x$ из уравнения Пуассона (1.8), (1.9) получается, что фундаментальное решение задается формулами

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n} & \text{при } n>2,\\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y| & \text{при } n=2.\end{cases} \qquad (3.4)$$

В более общем случае, когда оператором является итерированный лапласиан $(\Delta_x)^r$, фундаментальное решение для всех четных n и для нечетных $n>2r$ задается выражением

$$K(x,y)=\frac{(-1)^r\,\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{2^{2r}\,\pi^{n/2}\,\Gamma(r)}|x-y|^{2r-n}, \qquad (3.5)$$

[1)] Эта глава основана на работах Йона [5], [7]. Относительно общих эллиптических уравнений см. Миранда [1].

[2)] См. Шварц [1], т. II, стр. 66 и далее.

а для четных $n \leqslant 2r$ — выражением

$$K(x, y) = \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2^{2r-1}\,\pi^{n/2}\,(r-1)!\left(r-\frac{n}{2}\right)!}\,|x-y|^{2r-n}\ln|x-y| \qquad (3.6)$$

[см. формулы (1.9a, b)]. При $L = \Delta + \lambda^2$, где λ — постоянная, фундаментальное решение выражается формулой

$$K = \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi|x-y|}\right)^{(n-2)/2} N_{(n-2)/2}(\lambda|x-y|)$$

(N_ν — „функция Неймана" или „функция Бесселя второго рода").

Мы ограничимся случаем, когда L — *эллиптический* оператор[1]. Это значит, что *характеристическая форма* L дефинитна, т. е.

$$Q(x, \xi) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1, \ldots, n} A_{i_1, \ldots, i_m}(x)\,\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_m} \neq 0 \qquad (3.7)$$

при действительных $\xi \neq 0$ и при всех x. Эллиптический оператор L всегда имеет четный порядок m. Мы предположим, кроме того, что коэффициенты $A_{i_1, \ldots, i_k}(x)$ являются *аналитическими функциями* в окрестности N некоторой точки. Без ограничения общности можно считать эту точку началом координат.

Задача об отыскании фундаментального решения оператора L по существу эквивалентна задаче об отыскании решения неоднородного уравнения $L[u] = f$ при произвольной функции f. Поскольку всякую функцию f можно построить из функций типа плоских волн, решение достаточно получить для функции вида $f = g(x \cdot \eta)$. Согласно принципу Дюамеля, фактически достаточно получить решение u для случая, когда $g = 1$, а u имеет на гиперплоскости нулевые данные Коши. Таким образом, построение фундаментального решения сводится к решению задачи Коши для эллиптического уравнения $L[u] = 1$. Существование решения этой задачи Коши существенно зависит от предположения об аналитичности коэффициентов оператора L.

Задача Коши. Обозначим через $v(x, \xi, p)$ решение уравнения

$$L[v] = 1, \qquad (3.8)$$

---

[1] Фундаментальные решения в том смысле, как они определены здесь, на самом деле могут существовать и для неэллиптических уравнений. Так, для строго гиперболических уравнений порядка $m \geqslant n + 1$ фундаментальное решение задается выражением

$$K(x, t, y, \tau) = \begin{cases} K(x-y, t-\tau) & \text{при } t > \tau, \\ 0 & \text{при } t < \tau, \end{cases}$$

где $K(x-y, t)$ — функция, заданная формулами (2.22), (2.23). О фундаментальных решениях более общих уравнений, имеющих вид обобщенных функций, см. Эренпрейс [1], Мальгранж [1].

у которого само v и все его производные порядков $\leqslant m-1$ обращаются в нуль на гиперплоскости $x \cdot \xi = p$. Из теоремы Коши—Ковалевской[1] известно, что в окрестности любой точки x^0 из N, лежащей на гиперплоскости, существует функция, удовлетворяющая этим условиям. (Чтобы применить теорему, мы воспользовались здесь *эллиптическим* характером уравнения, благодаря которому каждая действительная гиперплоскость не является характеристикой, а также *аналитичностью* коэффициентов.) Кроме того, v определяется единственным образом. Поскольку решение v зависит только от оператора L и от плоскости, оно должно быть однородной функцией нулевого порядка относительно ξ и p.

Для наших целей важно исследовать зависимость v от ξ и p. Для удобства преобразуем при помощи ортогонального преобразования нашу плоскость в фиксированную плоскость. Преобразование можно выбрать так, чтобы в *малом* оно непрерывно зависело от ξ и p. Пусть η — единичный вектор, $|\eta| = 1$. Непосредственно проверяется, что если направления ξ и $-\eta$ не совпадают, то плоскость $x \cdot \xi = p$ можно преобразовать в плоскость $x' \cdot \eta = 0$ ортогональным преобразованием

$$x' = x + \frac{2x \cdot \xi}{|\xi|}\eta - \frac{x \cdot (\xi + |\xi|\eta)}{|\xi|(|\xi| + \xi \cdot \eta)}(\xi + |\xi|\eta) - \frac{p}{|\xi|}\eta. \tag{3.9}$$

(Это преобразование является просто поворотом в двумерной плоскости, перпендикулярной ξ и η.) Обратное преобразование задается формулой

$$x = x' + \frac{2x' \cdot \eta}{|\xi|}\xi - \frac{x' \cdot (\xi + |\xi|\eta)}{|\xi|(|\xi| + \xi \cdot \eta)}(\xi + |\xi|\eta) + \frac{p}{|\xi|^2}\xi. \tag{3.10}$$

Пусть теперь окрестность N начала координат x-пространства, в которой коэффициенты оператора L аналитичны, является шаром радиуса δ с центром в начале координат (рис. 6). Ограничимся, кроме того, векторами ξ, для которых $|\xi - \eta| < 1/2$, и числами p, для которых $|p| < \delta/4$. Тогда

$$|\xi| > 1/2, \qquad \left|\frac{-p}{|\xi|}\eta\right| < \delta/2.$$

Образом N при преобразовании (3.9) будет шар N' радиуса δ с центром в точке $x' = -p\eta/|\xi|$. Этот последний шар содержит в себе, конечно, шар радиуса $\delta/2$ с центром в начале координат x'-пространства.

При подстановке (3.10) коэффициенты $A(x)$ оператора L переходят в функции $A'(x', \xi, p)$ (при фиксированном η). При

$$|x'| < \delta/2, \qquad |\xi - \eta| < 1/2, \qquad |p| < \delta/4 \tag{3.11}$$

[1] См. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 45 и далее.

A' являются аналитическими функциями переменных x', ξ, p. Оператор L переходит в оператор L', действующий на функции от x', коэффициенты которого в области (3.11) аналитически зависят от x' и от параметров ξ, p. При достаточно малых $|x'|$, $|\xi - \eta|$,

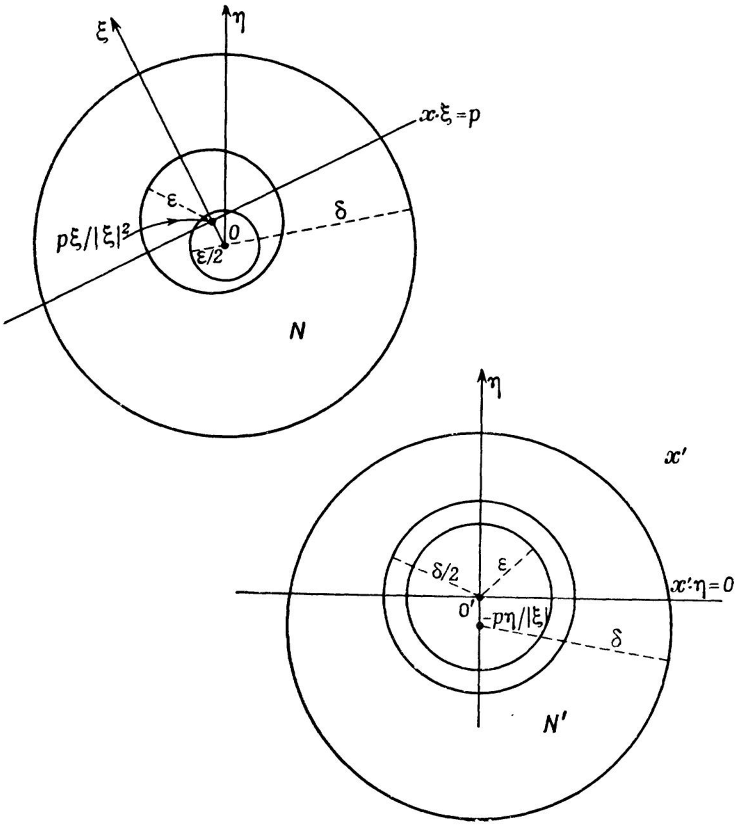

Рис. 6

$|p|$ эти коэффициенты можно разложить по переменным x_i, $\xi_i - \eta_i$, p в сходящиеся ряды. Задача Коши для функции v переходит в задачу об отыскании решения v' уравнения $L'[v'] = 1$, обращающегося в нуль вместе со всеми своими производными порядков $\leqslant m - 1$ на фиксированной плоскости $x' \cdot \eta = 0$. По теореме Коши—Ковалевской существуют число $\varepsilon = \varepsilon(\eta) < \delta/4$ и решение $v' = v'(x', \xi, p)$ задачи Коши, которое при

$$|x'| < \varepsilon, \quad |\xi - \eta| < \varepsilon, \quad |p| < \varepsilon \tag{3.12}$$

выражается сходящимся степенным рядом по переменным x_i', $\xi_i - \eta_i$, p и которое, следовательно, аналитично по x', ξ, p в области (3.12).

Проделав обратное преобразование, мы увидим, что существует решение $v = v(x, \xi, p)$, которое аналитично по всем своим аргументам при

$$\left| x - \frac{p}{|\xi|^2}\,\xi \right| < \varepsilon, \quad |\xi - \eta| < \varepsilon, \quad |p| < \varepsilon,$$

а значит, и при

$$|x| < \varepsilon/2, \quad |p| < \varepsilon/4, \quad |\xi - \eta| < \varepsilon. \tag{3.13}$$

Далее, η было произвольной точкой сферы Ω_η. Вокруг каждой из таких точек η имеется шар $|\xi - \eta| < \varepsilon(\eta)$. Конечное число таких шаров, скажем шары с центрами $\eta^1, \ldots, \eta^s$, целиком заполняет некоторую ε'-окрестность Ω_η. Пусть $\varepsilon'' = \min\limits_{i=1,\ldots,s} \varepsilon(\eta^i)$. Тогда решение $v(x, \xi, p)$ определено и аналитично по своим аргументам при

$$|x| < \varepsilon''/2, \quad |p| < \varepsilon''/4, \quad 1 - \varepsilon' < |\xi| < 1 + \varepsilon'.$$

Здесь предполагается, что $\varepsilon' < 1$. Значит, $v(x, \xi, p)$ аналитично при

$$|x| < \varepsilon''/8, \quad |p/|\xi|| < \varepsilon''/8, \quad 1 - \varepsilon' < |\xi| < 1 + \varepsilon'.$$

Последнее ограничение можно опустить, так как v является однородной функцией нулевой степени по ξ и p. Заменив теперь $\varepsilon''/8$ на ε, мы найдем, что решение задачи Коши определено и аналитично при

$$|x| < \varepsilon, \quad |p/|\xi|| < \varepsilon, \tag{3.14}$$

т. е. что для любой плоскости, пересекающей шар радиуса ε с центром в начале координат, во всех точках этого шара определена функция $v(x, \xi, p)$, которая является там решением задачи Коши и которая аналитична по x, ξ, p.

Так как решение $v'(x', \xi, p)$ и все его производные по x' порядков $\leqslant m - 1$ обращаются в нуль при $x' \cdot \eta = 0$, то v' можно представить в виде

$$v' = (x' \cdot \eta)^m\, w'(x', \xi, p),$$

где функция w' аналитична по своим аргументам. (Это очевидно, когда η является одним из координатных векторов, а значит, это справедливо и для произвольного η.) Следовательно, v можно представить в виде

$$v(x, \xi, p) = (x \cdot \xi - p)^m\, w(x, \xi, p), \tag{3.15}$$

где функция w аналитична по x, ξ, p в области (3.14). Подставив это выражение для v в дифференциальное уравнение $L[v] = 1$, мы найдем, что на гиперплоскости $x \cdot \xi = p$

$$m!\, Q(x, \xi)\, w(x, \xi, x \cdot \xi) = 1. \tag{3.16}$$

[Можно еще отметить[1], что в специальном случае, когда коэффициенты при старших членах в операторе L постоянны, а все остальные коэффициенты являются целыми функциями (т. е. представляются степенными рядами, которые сходятся всюду), решение $v(x, \xi, p)$ тоже будет целой функцией x.]

Решение неоднородного уравнения с функцией типа плоской волны в правой части. Пусть $g(s)$ — непрерывная функция аргумента s. Введем выражение

$$V(x, \xi, p) = -\int_0^{x \cdot \xi - p} v_p(x, \xi, t + p)\, g(t)\, dt, \tag{3.17}$$

определенное для x, ξ, p, удовлетворяющих неравенствам (3.14). Здесь $v_p(x, \xi, p)$ — решение уравнения $L[v_p] = 0$, которое при $t = 0$ обращается в нуль вместе со своими производными по t порядков $\leqslant m - 2$, такое, что в силу (3.15), (3.16)

$$v_{px_{i_1} \ldots x_{i_{m-1}}}(x, \xi, x \cdot \xi) = -m!\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{m-1}} w(x, \xi, x \cdot \xi) = \\ = -\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_{m-1}} / Q(x, \xi).$$

Из формулы (3.17) вытекает, что производные V по x порядков $\leqslant m$ существуют, непрерывны по x, ξ, p и что при $k \leqslant m - 1$

$$V_{x_{i_1} \ldots, x_{i_k}}(x, \xi, p) = -\int_0^{x \cdot \xi - p} v_{px_{i_1} \ldots x_{i_k}}(x, \xi, t + p)\, g(t)\, dt,$$

а

$$V_{x_{i_1} \ldots x_{i_m}}(x, \xi, p) = \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m} g(x \cdot \xi - p) / Q(x, \xi) - \\ - \int_0^{x \cdot \xi - p} v_{px_{i_1} \ldots x_{i_m}}(x, \xi, t + p)\, g(t)\, dt.$$

Таким образом, $V(x, \xi, p)$ является решением уравнения

$$L[V] = g(x \cdot \xi - p) \tag{3.18}$$

(принцип Дюамеля).

[1] См. Йон [5], стр. 281—283.

Фундаментальное решение. Выберем за $g(s)$ [так же, как в формуле (2.15)] функцию

$$g(s) = \mathrm{Re}\left[\frac{-s^k \ln(-is)}{k!\,(2\pi i)^n}\right] = \begin{cases} \dfrac{|s|^k}{4k!\,(2\pi i)^{n-1}} & \text{при нечетном } n, \\ -\dfrac{|s|^k \ln|s|}{k!\,(2\pi i)^n} & \text{при четном } n, \end{cases} \tag{3.19}$$

где k — положительное целое число и $k+n$ четно. При n нечетном можно взять $k=1$, при n четном $k=2$.

По этой функции g и по соответствующей функции V, заданной при помощи формулы (3.17), построим функцию

$$W(x, y) = \int\limits_{\Omega_\xi} V(x, \xi, y\cdot\xi)\, d\omega_\xi = -\int\limits_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int\limits_0^{(x-y)\cdot\xi} v_p(x, \xi, t + y\cdot\xi)\, g(t)\, dt. \tag{3.20}$$

Функция $W(x, y)$ определена для x и y, лежащих в ε-окрестности начала координат, принадлежит по x классу C_m и удовлетворяет уравнению

$$L[W] = \int\limits_{\Omega_\xi} g((x-y)\cdot\xi)\, d\omega_\xi. \tag{3.21}$$

Докажем, что функция $W(x, y)$ аналитична по x и y, когда

$$|x| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}, \quad |y| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}, \quad x \neq y. \tag{3.22}$$

Пусть $x - y = r\zeta$, где $|\zeta| = 1$, $r \geqslant 0$. Произведя во внутреннем интеграле (3.10) интегрирование по частям, введя новую переменную интегрирования s соотношением $t = rs$ и применив соотношение (3.15), мы получим, что

$$W(x, y) = \int\limits_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int\limits_0^{r\zeta\cdot\xi} v(x, \xi, t + y\cdot\xi)\, g'(t)\, dt = r^{m+1} \int\limits_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int\limits_0^{\zeta\cdot\xi} (\zeta\cdot\xi - s)^m\, w(x, \xi, rs + y\cdot\xi)\, g'(rs)\, ds.$$

При помощи подходящего ортогонального преобразования пределы интегрирования в малом можно сделать независящими от x и y. Пусть η — единичный вектор, и пусть вектор ζ заключен в полупространстве $\zeta\cdot\eta > 0$. По аналогии с преобразованием (3.10) введем вместо ξ новую переменную интегрирования ξ' по формуле

$$\xi = \xi' + \frac{2\xi'\cdot\eta}{|\zeta|}\zeta - \frac{\xi'\cdot(\zeta + |\zeta|\eta)}{|\zeta|(|\zeta| + \zeta\cdot\eta)}(\zeta + |\zeta|\eta) = T(\xi', \zeta). \tag{3.23}$$

При любом ζ это преобразование будет ортогональным: $|T(\xi', \zeta)| = |\xi'|$. Кроме того, $\zeta \cdot \xi = |\zeta| \xi' \cdot \eta$. При $|\zeta| = 1$ выражение для W принимает вид

$$W(x, y) = r^{m+1} \times$$

$$\times \int_{\Omega_{\xi'}} d\omega_{\xi'} \int_0^{\xi' \cdot \eta} (\xi'\eta - s)^m w(x, T(\xi', \zeta), rs + y \cdot T(\xi', \zeta)) g'(rs) ds, \quad (3.24)$$

где пределы интегрирования не зависят от x и y по крайней мере в том случае, когда вектор $x - y$ заключен в полупространстве $(x - y) \cdot \eta > 0$. Как было показано, $w(x, \xi, p)$ является аналитической функцией своих аргументов, когда эти аргументы действительны и удовлетворяют неравенствам $|x| < \varepsilon$, $|p| / |\xi| < \varepsilon$. В силу (3.23) функция $T(\xi', \zeta)$ аналитична по ζ, если $\zeta \cdot \eta > 0$, а ζ действительно и удовлетворяет условию $|T| = 1$, когда ξ' принадлежит $\Omega_{\xi'}$. Кроме того, если s принадлежит интервалу интегрирования, то

$$|rs + y \cdot T(\xi', \zeta)| \leqslant |r\xi' \cdot \eta| + |y \cdot T(\xi', \zeta)| \leqslant$$
$$\leqslant r + |y| \leqslant \varepsilon,$$

когда $|r| < \varepsilon/2$, $|y| < \varepsilon/2$. Следовательно,

$$w(x, T(\xi', \zeta), rs + y \cdot T(\xi', \zeta)) \quad (3.25)$$

является регулярной аналитической функцией[1)] по x, y, r, ζ, s, ξ', когда значения этих переменных действительны и принадлежат множеству

$$|x| \leqslant \varepsilon/3, \quad |y| \leqslant \varepsilon/3, \quad |r| \leqslant \varepsilon/3,$$
$$|\zeta| = 1, \quad |s| \leqslant 1, \quad |\xi'| = 1, \quad \zeta \cdot \eta \geqslant 1/2. \quad (3.26)$$

Замкнутое множество (3.26) можно целиком покрыть конечным числом окрестностей точек этого множества, в каждой из которых функция w представляется сходящимся степенным рядом. Поэтому

[1)] Под аналитичностью функции $F(y_1, \ldots, y_k)$ в действительной точке $(y_1^0, \ldots, y_k^0) = P^0$ здесь всегда подразумевается то, что функция представляется абсолютно сходящимся степенным рядом по $y_i - y_i^0$ в действительной ε'-окрестности точки P^0, т. е. при

$$|y_i - y_i^0| \leqslant \varepsilon', \quad i = 1, \ldots, k.$$

(Это значит, что функцию можно определить как аналитическую функцию и в *комплексной* окрестности P^0, хотя здесь этот факт использован не будет.) Радиус ε', вообще говоря, зависит от P^0. Однако если точка P^1 принадлежит ε'-окрестности P^0, то степенные ряды для F, построенные относительно точки P^1, будут сходиться в наибольшей из окрестностей с центром в P^1, содержащейся в ε'-окрестности P^0.

можно выбрать такое *общее для всех точек* ε'', что в каждой точке x^0, y^0, r^0, ζ^0, s^0, ξ'^0 множества (3.26) функция w представляется рядом по $x_i^0 - x_i$, $y_i^0 - y_i$, $\zeta_i^0 - \zeta_i$, $\xi_i'^0 - \xi_i'$, $r^0 - r$, $s^0 - s$, который абсолютно сходится, если

$$|x - x^0| \leqslant \varepsilon'', \qquad |y - y^0| \leqslant \varepsilon'', \qquad |r - r^0| \leqslant \varepsilon'',$$
$$|s - s^0| \leqslant \varepsilon'', \qquad |\zeta - \zeta^0| \leqslant \varepsilon'', \qquad |\xi' - \xi'^0| \leqslant \varepsilon''.$$

Этот ряд можно записать как ряд только по $x_i - x_i^0$, $y_i - y_i^0$, $r - r^0$, $\zeta_i - \zeta_i^0$ с коэффициентами, зависящими от ξ' и s. Коэффициенты задаются тогда степенными рядами по $\xi_i' - \xi_i'^0$, $s - s^0$ и, значит, будут аналитическими функциями ξ' и s; при $|s - s^0| \leqslant \varepsilon''$, $|\xi' - \xi'^0| \leqslant \varepsilon''$ они, в частности, будут непрерывны. Поскольку ξ'^0 и s^0 — произвольные точки множества $|\xi'| = 1$, $|s| \leqslant 1$, мы видим, что существует такое ε'', что в произвольной точке x^0, y^0, r^0, ζ^0 множества

$$|x| \leqslant \varepsilon/3, \quad |y| \leqslant \varepsilon/3, \quad |r| \leqslant \varepsilon/3, \quad |\zeta| = 1, \quad \zeta \cdot \eta \geqslant 1/2 \tag{3.27}$$

функция w представляется абсолютно сходящимся степенным рядом по $x_i - x_i^0$, $y_i - y_i^0$, $r - r^0$, $\zeta_i - \zeta_i^0$, если

$$|x - x^0| \leqslant \varepsilon'', \ |y - y^0| \leqslant \varepsilon'', \ |r - r^0| \leqslant \varepsilon'', \ |\zeta - \zeta^0| \leqslant \varepsilon''. \tag{3.28}$$

Коэффициенты этого ряда при $|\xi'| = 1$, $|s| \leqslant 1$ являются непрерывными функциями s и ξ'.

Функция $g'(rs)$ при положительном r имеет вид

$$g'(rs) = \begin{cases} \dfrac{r^{k-1} s^{k-1} \operatorname{sign} s}{4(k-1)!\,(2\pi i)^{n-1}}, & \text{если } n \text{ нечетно},\\[2ex] \dfrac{-r^{k-1} s^{k-1}}{(k-1)!\,(2\pi i)^n}\left(\ln r + \ln|s| + \dfrac{1}{k}\right), & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Подставим в интеграл (3.24) вместо g' это выражение, а вместо w степенной ряд. Интегрируя почленно, при положительных r мы получим для W выражение вида

$$W(x, y) = r^{m+k}\,(A(x, y, r, \zeta) + B(x, y, r, \zeta)\ln r), \tag{3.30}$$

где $B = 0$ при нечетном n. На множестве (3.28) функции A и B задаются абсолютно сходящимися рядами. Следовательно, они аналитичны в произвольной точке x^0, y^0, r^0, ζ^0 множества (3.27). Поэтому $W(x, y)$ при $r > 0$ является аналитической функцией x, y, r, ζ на множестве (3.27). Положив $r = |x - y|$, $\zeta = (x - y)/r$, мы увидим, что функция $W(x, y)$ аналитична по x и y при

$$|x| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}, \quad |y| \leqslant \frac{\varepsilon}{6}, \quad x \neq y, \quad \frac{(x-y)\cdot\eta}{|x-y|} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.31}$$

Так как η — произвольный единичный вектор, то $W(x, y)$ аналитична по x и y на множестве (3.22).

Если в (3.30) вместо r, ζ подставить их значения $r = |x - y|$, $\zeta = (x - y)/|x - y|$ и результат продифференцировать по x_i, то для W_{x_i} получится выражение того же типа:

$$W_{x_i} = r^{m+k-1}\,(A'(x, y, r, \zeta) + B'(x, y, r, \zeta)\ln r),$$

где

$$A'(x, y, r, \zeta) = (m + k)\,A\zeta_i + rA_{x_i} + B\zeta_i + {} + A_{\zeta_i} - \sum_k A_{\zeta_k}\,\zeta_i\,\zeta_k + rA_r\,\zeta_i,$$

$$B'(x, y, r, \zeta) = (m + k)\,B\zeta_i + rB_{x_i} + B_{\zeta_i} - {} - \sum_k B_{\zeta_k}\,\zeta_i\,\zeta_k + r\,B_r\,\zeta_i;$$

A' и B' обладают той же степенью регулярности, что A и B. Аналогичное выражение можно дать и для W_{y_i}.

Обозначим через W' некоторую производную функцию W по x_i и y_i порядка ν. Ее можно представить в виде (3. 30), где k заменится на $k - \nu$. Поэтому функция W' будет аналитической на множестве (3.22), а функции

$$|W'|\,r^{-m-k+\nu} \qquad \text{(при нечетных } n\text{)},$$

$$|W'|\,r^{-m-k+\nu}/\ln r \qquad \text{(при четных } n\text{)}$$

остаются ограниченными вблизи точки $x = y$.

Образуем, в частности, выражение

$$K(x, y) = (\Delta_y)^{(n+k)/2}\,W(x,y), \tag{3.32}$$

которое, как потом будет показано, является искомым фундаментальным решением оператора L. На множестве (3.22) функция K аналитична по x и y. Особенность функции K при $x = y$ такова, что выражение $r^{n-m}\,K$ при нечетном n остается ограниченным, а при четном n имеет не более чем логарифмический рост. Вообще, для любой производной K' от K порядка ν выражение $r^{n-m+\nu}\,K'$ соответственно либо ограничено, либо имеет логарифмический рост.

Согласно формулам (3.19), (3.21), (1.6), (1.7), функция $L[W]$ имеет вид

$$r^k(c_1 + c_2\ln r),$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные, $c_2 = 0$ при нечетном n. Отсюда следует, что на множестве (3.22)

$$L[K] = (\Delta_y)^{(n+k)/2}\,L[W] = 0. \tag{3.33}$$

Чтобы проверить для K свойство (3.2), возьмем в качестве $f(x)$ функцию класса C_1, которая обращается в нуль вне $(\varepsilon/6)$-окрестности начала координат. Пусть

$$u(x) = \int K(x, y)\,f(y)\,dy = \int f(y)\,(\Delta_y)^{(n+k)/2}\,W(x, y)\,dy.$$

Тогда u можно записать в виде

$$u(x) = -\sum_i \int f_{y_i}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} (\Delta_y)^{(n+k-2)/2} W(x, y)\, dy.$$

Поскольку производные от $W(x, y)$ по x и y порядков $\leq m + k + n - 1$ все еще абсолютно интегрируемы, мы получим, что

$$L[u] = -\sum_i \int f_{y_i}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} (\Delta_y)^{(n+k-2)/2} L[W(x, y)]\, dy.$$

Из того факта, что функция $L[W(x, y)]$, согласно (3.21), зависит только от разности $x - y$, следует, что

$$\begin{aligned} L[u] &= -\sum_i \int f_{y_i}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} (\Delta_x)^{(n+k-2)/2} L[W(x, y)]\, dy = \\ &= -(\Delta_x)^{(n+k-2)/2} \sum_i \int f_{y_i}(y) \frac{\partial}{\partial y_i} L[W(x, y)]\, dy = \\ &= (\Delta_x)^{(n+k-2)/2} \int f(y)\, \Delta_y\, L[W(x, y)]\, dy = \\ &= (\Delta_x)^{(n+k)/2} \int f(y)\, L[W(x, y)]\, dy = \\ &= (\Delta_x)^{(n+k)/2} \int f(y) \Big(\int_{\Omega_\xi} g((x-y) \cdot \xi)\, d\omega_\xi \Big)' dy. \end{aligned}$$

Теперь из соотношений (1.10), (1.11) получаем

$$L[u] = f(x). \tag{3.34}$$

Таким образом, построенная нами функция $K(x, y)$ есть фундаментальное решение.

Формулу (3.34) легко обобщить на случай, когда f не обязана обращаться в нуль вне ограниченного множества. Пусть D — область, заключенная в $(\varepsilon/6)$-окрестности начала координат, в которой определена функция K. Пусть функция $f(y)$ принадлежит классу C_1 в D и непрерывна в замыкании D. Тогда для функции

$$u = \int_D f(y)\, K(x, y)\, dy \tag{3.35}$$

равенство (3.34) удовлетворяется в каждой точке x из D.

Для доказательства возьмем точку x из открытого множества D. Функцию $f(y)$ можно разложить в сумму $f_1(y) + f_2(y)$, где $f_1(y)$ непрерывна в замыкании D и обращается в нуль в окрестности точки x, а $f_2(y)$ принадлежит классу C_1 при всех y и обращается в нуль вне D. Если через $u_1(x)$ и $u_2(x)$ мы обозначим интегралы, соответствующие f_1 и f_2, то

$$L[u_2(x)] = f(x)$$

по доказанному, а

$$L[u_1(x)] = 0$$

вследствие (3.33).

Функция $K(x, y)$ обладает еще одним свойством, которое тоже можно рассматривать как интерпретацию символического уравнения (3.3). Пусть R — область, граница B которой настолько регулярна, чтобы можно было применять теорему о расходимости[1]. Если для произвольных функций u и v класса C_n взять выражение

$$\int_R u(x)\, L[v(x)]\, dx$$

и проинтегрировать его m раз по частям, чтобы под знаком интеграла не осталось производных v, то в результате получится тождество вида

$$\int_R (u(x)\, L[v(x)] - v(x)\, \bar{L}[u(x)])\, dx = \\ = \int_B M[u, v]\, dS_x. \qquad (3.36)$$

Здесь $\bar{L}$ — так называемый „сопряженный" к L дифференциальный оператор, который можно представить в виде

$$\bar{L}[u] = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} [A_{i_1 \ldots i_k} u]. \qquad (3.37)$$

Выражение $M[u, v]$ является билинейным дифференциальным оператором. Оно линейно относительно функции u и ее производных порядков $\leqslant m-1$, относительно функции v и ее производных порядков $\leqslant m-1$, а также относительно направляющих косинусов нормали к B. Суммарный порядок производных от u и v, встречающихся в каждом члене $M[u, v]$, не превосходит $m-1$. Формула (3.36) известна под названием *формулы Грина* для оператора L.

Применим формулу Грина к функции u класса C_m и к функции $v(x) = W(x, y)$, которая тоже принадлежит классу C_m, по крайней мере если k достаточно велико. Тогда

$$\int_R (u(x)\, L[W(x, y)] - W(x, y)\, \bar{L}[u(x)])\, dx = \\ = \int_B M[u(x), W(x, y)]\, dS_x.$$

Здесь предполагается, что R заключено в $(\varepsilon/6)$-окрестности начала координат и что y является внутренней точкой R. Применим к обеим частям этого уравнения оператор $(\Delta_y)^{(n+k)/2}$. Помня, что в силу формул (3.21), (1.10), (1.11)[2]

$$(\Delta_y)^{(n+k)/2} \int_R u(x)\, L[W(x, y)]\, dx = u(y)$$

---

[1] Теоремой о расходимости автор называет известную формулу Остроградского. — *Прим. ред.*

[2] В формулах (1.10), (1.11) интегралы берутся по всему пространству, а не по множеству R. Однако, если y лежит внутри R, то этот результат можно распространить на интегралы, взятые по R, так же как было сделано при доказательстве соотношений (3.34), (3.35).

и что $W(x, y)$ является регулярной функцией, когда x лежит на B, а y внутри R, мы получим нужное нам тождество

$$u(y) = \int_R K(x, y)\,\bar{L}[u(x)]\,dx + \int_B M[u(x), K(x, y)]\,dS_x. \quad (3.38)$$

Пусть, в частности, $u(x)$ — решение эллиптического уравнения $\bar{L}[u] = 0$. Тогда объемный интеграл в формуле (3.38) исчезает. Если y лежит внутри R, то интеграл по B является аналитической функцией по y, так как функция $K(x, y)$ аналитична по x и y, когда $x \neq y$. Следовательно, решение $u(y)$ аналитично в окрестности начала координат. Поскольку $\bar{L}$ является произвольным эллиптическим оператором с аналитическими в окрестности начала координат коэффициентами, мы получаем следующий результат: *всякое решение u линейного эллиптического уравнения m-го порядка, принадлежащее классу C_m, аналитично во всякой точке области своего существования, в которой коэффициенты аналитичны.*

Зависимость характера фундаментального решения[1] от порядка его роста.

Теорема. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения $L[u] = 0$ в некоторой окрестности точки z. Предположим, что для всякой производной $u^{(m-1)}(x)$ функции u порядка $m - 1$*

$$\lim_{x \to z} |x - z|^n\, u^{(m-1)}(x) = 0. \quad (3.39)$$

Тогда

$$u(x) = cK(x, z) + w(x), \quad (3.40)$$

где $K(x, z)$ — построенное ранее фундаментальное решение, c — постоянная, а $w(x)$ — регулярно аналитическое в точке $x = z$ решение уравнения $L[w] = 0$.

Доказательство. Покажем сначала, что соотношение (3.39) означает, что для каждой производной $u^{(k)}$ функции u порядка $k < m - 1$

$$\lim_{x \to z} |x - z|^{n-1}\, u^{(k)}(x) = 0. \quad (3.41)$$

Достаточно это показать для $k = m - 2$, так как условие (3.41) означает, что тогда и подавно

$$\lim_{x \to z} |x - z|^n\, u^{(k)}(x) = 0,$$

[1] Для случая $m=2$ см. Миранда [1], стр. 52—53, для уравнений высших порядков см. Берс [1].

а дальше можно повторить это же доказательство. Итак, по предположению, существует такая δ-окрестность точки z, в которой

$$|u^{(m-1)}(x)| \leqslant \varepsilon\, |x-z|^{-n}/\sqrt{n}.$$

Пусть x — точка этой окрестности, и пусть y — такая точка на том же луче, выходящем из z, что $|y-z| = \delta$. Тогда

$$|u^{(m-2)}(y) - u^{(m-2)}(x)| \leqslant \varepsilon \int\limits_{|x-z|}^{|y-z|} s^{-n}\, ds = \\ = \varepsilon \frac{|x-z|^{1-n} - \delta^{1-n}}{n-1}.$$

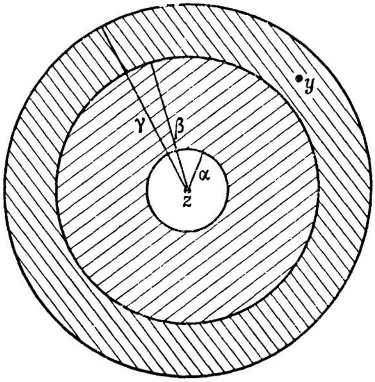

Рис. 7

Далее, производная $u^{(m-2)}(y)$ ограничена на сфере радиуса δ, описанной вокруг z. Умножая последнее соотношение на $|x-z|^{n-1}$ и устремляя x к z, получим

$$\limsup_{x \to z} |x-z|^{n-1}\, |u^{(m-2)}(x)| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon/(n-1).$$

Так как ε произвольно, то отсюда следует соотношение (3.41) для $k = m-2$.

Пусть теперь $u(x)$ — решение уравнения $\bar{L}[u] = 0$ в некоторой кольцевой окрестности точки z (чтобы обозначения были проще, мы поменяли здесь L и $\bar{L}$ ролями). Формула Грина (3.36), примененная к кольцу с радиусами α и β, описанному вокруг z, дает для любой функции $v(x)$ класса C_m (рис. 7)

$$\int\limits_{\alpha<|x-z|<\beta} u(x)\, L[v(x)]\, dx = \int\limits_{|x-z|=\beta} M[u, v]\, dS_x - \int\limits_{|x-z|=\alpha} M[u, v]\, dS_x.$$

На сфере $|x-z| = \alpha$

$$\begin{aligned} v(x) - v(z) &= O(\alpha), \\ u^{(m-1)}(x) &= o(\alpha^{-n}), \\ u^{(k)}(x) &= o(\alpha^{1-n}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant m-2. \end{aligned}$$

Следовательно, на этой сфере

$$M[u(x), v(x)] = M[u(x), v(z)] + M[u(x), v(x)-v(z)] = \\ = v(z)\, M[u(x), 1] + o(\alpha^{1-n}).$$

При $\alpha \to +0$ получаем

$$\int\limits_{|x-z|<\beta} u(x)\, L[v(x)]\, dx = \int\limits_{|x-z|=\beta} M[u, v]\, dS_x - cv(z), \qquad (3.42)$$

где

$$c = \lim_{\alpha \to +0} \int_{|x-z| = \alpha} M[u(x), 1]\, dS_x =$$

$$= \int_{|x-z| = \beta} M[u(x), 1]\, dS_x - \int_{|x-z| < \beta} u(x)\, L[1]\, dx.$$

Выберем теперь за $v(x)$ фундаментальное решение $K(x, y)$, где точка y лежит вне сферы радиуса β, описанной вокруг z. Тогда равенство (3.42) дает

$$cK(z, y) = \int_{|x-z| = \beta} M[u(x), K(x, y)]\, dS_x.$$

С другой стороны, тождество (3.38), примененное для кольца, ограниченного сферами $|x-z| = \beta$ и $|x-z| = \gamma$, $\gamma > |y-z|$, дает

$$u(y) = \int_{|x-z| = \gamma} M[u(x), K(x, y)]\, dS_x - \int_{|x-z| = \beta} M[u(x), K(x, y)]\, dS_x.$$

Поэтому

$$u(y) = \int_{|x-z| = \gamma} M[u(x), K(x, y)]\, dS_x - cK(z, y) =$$

$$= w(y) - cK(z, y),$$

где функция $w(y)$ аналитична в точке z, так как функция $K(x, y)$ аналитична по y при $x \neq y$. (Мы предполагаем, что все рассматриваемые сферы настолько малы, что $K(x, y)$ на них определена.)

За $u(x)$ можно, в частности, взять функцию $u_0(x) = \bar{K}(x, z)$, где $\bar{K}$ — фундаментальное решение, построенное для оператора $\bar{L}$. Тогда получается, что

$$u_0(y) = w_0(y) - c_0 K(z, y).$$

Постоянная c_0 здесь не может быть нулем, так как иначе $\bar{K}(x, z)$, как функция x, была бы регулярно аналитической при $x = z$. Это, однако, невозможно, так как, согласно (3.38), при произвольной функции $v(x)$

$$v(z) = \int_R \bar{K}(x, z)\, L[v(x)]\, dx + \int_B \bar{M}[v(x), \bar{K}(x, z)]\, dS_x,$$

и если бы $\bar{K}(x, z)$ была регулярна при $x = z$, мы получили бы из (3.36) то же тождество, в котором, однако, левая часть заменилась бы нулем. Следовательно,

$$u(y) = \frac{c}{c_0} \bar{K}(y, z) + w(y) - \frac{c}{c_0} w_0(y),$$

где функции w и w_0 регулярны в точке z. Это завершает доказательство теоремы [1)].

По существу, в доказанной теореме утверждается, что фундаментальное решение $K(x, z)$ имеет при $x = z$ изолированную особенность наименьшего возможного порядка [2)].

Структура фундаментального решения. В предыдущем параграфе было построено фундаментальное решение $K(x, y)$ линейного эллиптического оператора L для точек x и y, заключенных в окрестности точки, в которой коэффициенты L аналитичны [3)]. Было установлено, что для x, y, заключенных в окрестности начала координат или, общее, в окрестности точки z, в которой коэффициенты L аналитичны, K представимо в виде

$$K(x, y) = r^{m-n}\,(A'(x, y, r, \zeta) + B'(x, y, r, \zeta)\ln r), \qquad (3.43)$$

где $r = |x - y|$, $\zeta = (x - y)/r$. Это представление не единственно. Функции A' и B' все еще зависят от единичного вектора η как от параметра, а ζ ограничено условием $\zeta \cdot \eta \geqslant 1/2$. Функции A' и B' аналитичны при действительных значениях аргументов x, y, r, ζ, если $|x - z|$, $|y - z|$, $|r|$ достаточно малы, а $|\zeta| = 1$, $\zeta \cdot \eta \geqslant 1/2$. Мы имеем также представление

$$\begin{aligned} K(x, y) &= (\Delta_y)^{(n+k)/2}\, W(x, y) = \\ &= -(\Delta_y)^{(n+k)/2} \int\limits_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int\limits_0^{(x-y)\cdot\xi} v_p(x, \xi, t + y\cdot\xi)\, g(t)\, dt, \end{aligned}$$

где $g(s)$ задается формулой (3.19).

При *нечетном* n можно положить $k = 1$. Заметив, что

$$\begin{aligned} \Delta_y \int\limits_0^{(x-y)\cdot\xi} & v_p(x, \xi, t + y\cdot\xi)\,|t|\,dt = \\ &= \Delta_y \left(\operatorname{sign}[(x - y)\cdot\xi] \int\limits_{y\cdot\xi}^{x\cdot\xi} v_p(x, \xi, t)\,(t - y\cdot\xi)\,dt = \right.\\ &= v_p(x, \xi, y\cdot\xi)\operatorname{sign}[(x - y)\cdot\xi], \end{aligned}$$

---

1) Без ущерба для результата (3.40) условие (3.39) можно заменить более слабым. Можно показать (см. стр. 138), что условие (3.39) является для решения u уравнения $L[u] = 0$ следствием более простого соотношения

$$\lim_{x\to z} |x - z|^{n-m+1}\, u(x) = 0.$$

2) Об изолированных особенностях более высокого порядка см. Йон [5], стр. 293—298.

3) Используя замечание (см. стр. 48) о том, что задача Коши для оператора L решается в большом, если старшие коэффициенты постоянны, а младшие являются целыми функциями, можно установить, что для таких L построенное нами решение $K(x, y)$ существует и является аналитическим для всех действительных x и y, если $x \neq y$. По вопросу о существовании в большом фундаментального решения более общих операторов L см. Йон [7], Браудер [2], стр. 745, Э. Э. Леви [1].

мы найдем

$$K(x, y) = \frac{-(\Delta_y)^{(n-1)/2}}{4(2\pi i)^{n-1}} \int_{\Omega_\xi} v_p(x, \xi, y \cdot \xi) \operatorname{sign} [(x-y) \cdot \xi] \, d\omega_\xi. \quad (3.44)$$

Функция

$$A'(y + r\zeta, y, r, \zeta) = r^{-m+n} K(y + r\zeta, y) \quad (3.45)$$

аналитична по y, r, ζ, если $|y - z|$, $|r|$ достаточно малы и $|\zeta| = 1$, $\zeta \cdot \eta \geqslant 1/2$. Поэтому ее можно разложить в ряд по степеням r

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha(y, \zeta) r^\alpha,$$

где коэффициенты аналитичны по y, ζ. Поскольку коэффициенты c_α можно также получить, дифференцируя по r правую часть тождества (3.45), не зависящую от η, то $c_\alpha(y, \zeta)$ не зависят от η и аналитичны по y, ζ при достаточно малых $|y - z|$ и всех ζ, для которых $|\zeta| = 1$. Итак, при нечетных n для K имеем разложение вида

$$K(x, y) = r^{m-n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha(y, \zeta) r^\alpha. \quad (3.46)$$

Нетрудно дать явное выражение для коэффициента c_0 при члене с низшей степенью r. В силу формулы (3.15)

$$v_p(x, \xi, y \cdot \xi) \operatorname{sign} [(x-y) \cdot \xi] =$$
$$= -|(x-y) \cdot \xi|^{m-1} (mw(x, \xi, y \cdot \xi) - (x-y) \cdot \xi w_p(x, \xi, y \cdot \xi)).$$

Ясно, что мы получим член порядка r^{m-n}, отбросив член с w_p и положив $x = y$ в $w(x, \xi, y \cdot \xi)$. Воспользовавшись соотношением (3.15), найдем, что член низшего порядка разложения для K определяется формулой

$$r^{m-n} c_0(y, \zeta) = (\Delta_y)^{(n-1)/2} \int_{\Omega_\xi} \frac{|(x-y) \cdot \xi|^{m-1}}{4(2\pi i)^{n-1} (m-1)! \, Q(y, \xi)} d\omega_\xi. \quad (3.47)$$

(Это — единственный член разложения для K в том случае, когда L содержит только производные m-го порядка и имеет постоянные коэффициенты. См. ниже, стр. 62.)

Обратимся теперь к случаю *четного* числа измерений n. Из (3.32), (3.20), (3.19) при $k = 2$ получается

$$K(x, y) = (\Delta_y)^{(n+2)/2} \int_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int_0^{(x-y)\cdot\xi} \frac{v_p(x, \xi, t + y \cdot \xi) \, t^2 \ln |t|}{2(2\pi i)^n} dt =$$
$$= (\Delta_y)^{n/2} \int_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int_0^{(x-y)\cdot\xi} \frac{v_p(x, \xi, t + y \cdot \xi) \left(\frac{3}{2} + \ln |t|\right)}{(2\pi i)^n} dt.$$

Легко проверить, что член с 3/2 влияет только на регулярное решение дифференциального уравнения $L[u]=0$ и потому может быть опущен. Интегрируя оставшийся член по частям по t, найдем, что

$$K(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y),$$

где

$$(2\pi i)^n K_1(x, y) = -(\Delta_y)^{n/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \nu(x, \xi, y \cdot \xi) \ln|(x-y)\cdot\xi| d\omega_\xi, \tag{3.47a}$$

$$(2\pi i)^n K_2(x, y) =$$

$$= -(\Delta_y)^{n/2} \int\limits_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int\limits_0^{(x-y)\cdot\xi} \frac{\nu(x, \xi, t+y\cdot\xi) - \nu(x, \xi, y\cdot\xi)}{t} dt. \tag{3.47b}$$

Здесь функция $K_2(x, y)$ регулярно аналитична по x и y даже при $x=y$, и поэтому сингулярная часть K содержится в K_1. (Функция K_2 не обязательно является решением дифференциального уравнения $L[u]=0$.) Положив $x-y=r\zeta$, мы видим, что коэффициент при $\ln r$ в выражении для K_1 задается формулой

$$w(x, y) = -(2\pi i)^{-n} (\Delta_y)^{n/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \nu(x, \xi, y\cdot\xi)\, d\omega_\xi =$$

$$= -(2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Omega_\xi} \nu^{(n)}(x, \xi, y\cdot\xi)\, d\omega_\xi, \tag{3.48}$$

где через $\nu^{(n)}(x, \xi, p)$ обозначена производная $\partial^n \nu(x, \xi, p)/\partial p^n$. Из этого представления ясно, что $w(x, y)$ является регулярным решением уравнения $L[w]=0$, так как подинтегральная функция регулярно аналитична и удовлетворяет этому дифференциальному уравнению при всех ξ, p. Оставшуюся часть функции K_1, а также и функцию K_2 можно разложить в степенные ряды по r, коэффициенты которых будут регулярно аналитичны по ζ и y, как и в случае нечетных n. Таким образом, мы находим, что при четных n функция $K(x, y)$ имеет вид

$$K(x, y) = r^{m-n} \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha(y, \zeta) r^\alpha + w(x, y) \ln r, \tag{3.49}$$

где $w(x, y)$ — регулярно аналитическое решение уравнения $L[w]=0$.

Пример уравнения потенциала в пространстве более чем двух измерений показывает, что даже в случае четного числа измерений логарифмическая часть w может отсутствовать в выражении для K. Нетривиальные примеры дифференциальных уравнений второго порядка, у которых фундаментальное решение не содержит логарифмической части, были даны Штельмахером [1] в связи с задачей об отыскании гиперболических уравнений, для которых справедлив принцип Гюйгенса. Пусть n — целое число > 4. Тогда

$$L[u] = \Delta_x u - \frac{2}{(x_n + B)^2} u = 0$$

(B — произвольная постоянная) представляет собой пример уравнения такого рода; фундаментальное решение здесь имеет вид

$$K(x, y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left[|x-y|^{2-n} - \frac{|x-y|^{4-n}}{(n-4)(y_n+B)(x_n+B)} \right].$$

Мы покажем, однако, что функция w *может тождественно обращаться в нуль лишь в том случае, когда порядок m оператора L меньше чем число измерений пространства n (при четных n).* Очевидно, что из представления (3.15) при $n \leq m$ получается

$$\begin{aligned} v^{(n)}(x, \xi, y \cdot \xi) &= \\ &= \frac{m!}{(m-n)!} r^{m-n} (\zeta \cdot \xi)^{m-n} w(x, \xi, y \cdot \xi) + O(r^{m-n+1}) = \\ &= \frac{m!}{(m-n)!} r^{m-n} (\zeta \cdot \xi)^{m-n} w(y, \xi, y \cdot \xi) + O(r^{m-n+1}), \end{aligned}$$

и что поэтому, согласно формулам (3.16), (3.48),

$$-(2\pi i)^n w(x, y) = \frac{r^{m-n}}{(m-n)!} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{(\zeta \cdot \xi)^{m-n}}{Q(y, \xi)} d\omega_\xi + O(r^{m-n+1}). \quad (3.50)$$

Поскольку $m-n$ — четное число, интеграл не может обратиться в нуль и, значит,

$$\lim_{x \to y} r^{n-m} w(x, y) \neq 0.$$

Формулы (3.5), (3.6) для фундаментального решения итерированного лапласиана иллюстрируют различие между случаями $m \geq n$ и $m < n$. Формула (3.49) показывает, что если при $m < n$ и имеется логарифмический член, то его превосходят другие члены, потому что функция $w(x, y)$ ограничена.

Фундаментальное решение эллиптических операторов с постоянными коэффициентами. Пусть коэффициенты оператора L постоянны. Можно записать L в виде

$$L = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad (3.51)$$

где P — полином m-й степени с постоянными коэффициентами. В этом случае решение $v(x, \xi, p)$ уравнения $L[v] = 1$ с нулевыми данными Коши на плоскости $x \cdot \xi = p$ дается формулой

$$v(x, \xi, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{e^{(x \cdot \xi - p)\lambda}}{\lambda P(\lambda \xi)} d\lambda, \quad (3.52)$$

где C — контур на комплексной λ-плоскости, который охватывает все корни знаменателя. Так как у полинома $\lambda P(\lambda\xi)$ коэффициент при λ^{m+1} равен характеристической форме $Q(\xi)$, которая не обращается на Ω_ξ в нуль, то корни знаменателя равномерно по ξ ограничены при $|\xi| = 1$. Поэтому за C можно выбрать окружность $|\lambda| = M$, где M не зависит от ξ.

Займемся сначала случаем нечетного n. Здесь формула (3.44) дает

$$K(x, y) =$$
$$= \frac{1}{4(2\pi i)^n} (\Delta_y)^{(n-1)/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \operatorname{sign}[(x-y)\cdot\xi]\, d\omega_\xi \oint\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}}{P(\lambda\xi)}\, d\lambda. \quad (3.53)$$

В частном случае, когда P является однородным полиномом степени m и, следовательно, $P = Q$, контурный интеграл можно вычислить и мы получаем

$$K(x, y) = \frac{1}{4(2\pi i)^{n-1}(m-1)!} (\Delta_y)^{(n-1)/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{|(x-y)\cdot\xi|^{m-1}}{Q(\xi)}\, d\omega_\xi, \quad (3.54)$$

что совпадает с (3.47). При $n \leqslant m$ выражение (3.54) сводится к выражению

$$K(x, y) =$$
$$= \frac{1}{4(m-n)!\,(2\pi i)^{n-1}} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{[(x-y)\cdot\xi]^{m-n} \operatorname{sign}(x-y)\cdot\xi}{Q(\xi)}\, d\omega_\xi. \quad (3.54a)$$

Контурный интеграл в формуле (3.53) имеет при $(x-y)\cdot\xi = 0$ нуль $(m-1)$-го порядка. Следовательно, при $n < m$ дифференцирование можно производить под знаком интеграла, несмотря на разрывность функции $\operatorname{sign}(x-y)\cdot\xi$. Поэтому при нечетных $n < m$

$$K(x, y) = \frac{1}{4(2\pi i)^n} \int\limits_{\Omega_\xi} \operatorname{sign}[(x-y)\cdot\xi]\, d\omega_\xi \oint\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}}{P(\lambda\xi)} \lambda^{n-1}\, d\lambda.$$

Интеграл не изменит своего вида, если ξ и λ заменить на $-\xi$ и $-\lambda$. Отсюда следует, что интегралы по полушариям $(x-y)\cdot\xi > 0$ и $(x-y)\cdot\xi < 0$ равны. Поэтому

$$K(x, y) = \frac{1}{2(2\pi i)^n} \int\limits_{\substack{\Omega_\xi \\ (x-y)\cdot\xi>0}} d\omega_\xi \oint\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}}{P(\lambda\xi)} \lambda^{n-1}\, d\lambda.$$

Это выражение можно представить в форме, инвариантной относительно аффинных преобразований. При $n < m$

$$\oint\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}}{P(\lambda\xi)} \lambda^{n-1}\, d\lambda = \int\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}-1}{P(\lambda\xi)} \lambda^{n-1}\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty} r^{-2}\, dr \oint\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda/r}}{P(\lambda\xi)} \lambda^{n}\, d\lambda. = \int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty} r^{n-1}\, dr \oint\limits_{|\lambda|=M/r} \frac{e^{\lambda}}{P(\lambda r\xi)} \lambda^{n} d\lambda. \quad (3.54b)$$

Поскольку здесь $1/r < |(x-y)\cdot\xi| \leqslant |x-y|$, контурный интеграл можно взять по окружности радиуса $M\,|x-y|$. Положим $z = r\xi$. Тогда $dz = r^{n-1}\, dr\, d\omega_\xi$. Таким образом, мы получаем представление

$$K(x, y) = \frac{1}{2(2\pi i)^n} \int\limits_{(x-y)\cdot z>1} dz \oint\limits_{|\lambda|=M|x-y|} \frac{e^{\lambda}}{P(\lambda z)} \lambda^{n}\, d\lambda, \quad (3.55)$$

в котором вместо интеграла по полушарию стоит интеграл по полупространству.

Для однородного полинома $P = Q$ эта формула становится особенно простой. Вычислив контурный интеграл, мы находим

$$K(x, y) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}(m-n-1)!} \int\limits_{(x-y)\cdot z>1} \frac{dz}{Q(z)}. \quad (3.56)$$

При $x - y = r\zeta$ отсюда получаем

$$K(x, y) = \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}(m-n-1)!} \int\limits_{z\cdot\zeta>1/r} \frac{dz}{Q(z)}.$$

Продифференцируем по r обе части этого тождества. Так как K пропорционально r^{m-n}, то $dK/dr = (m-n)\, K/r$. Следовательно,

$$2(2\pi i)^{n-1}(m-n)!\, K(x, y) = \frac{1}{r} \int\limits_{(x-y)\cdot z=1} \frac{dS_z}{Q(z)}. \quad (3.57)$$

Итак, на самом деле функция K является плоским интегралом от функции $1/Q$. Его можно преобразовать в интеграл по поверхности $Q(\eta) = 1$. Положим для этого $z = t\eta$, где $Q(\eta) = 1$, $t > 0$. Тогда

$$1 = (x-y)\cdot z = t(x-y)\cdot\eta, \qquad 1 = Q(\eta) = t^{-m} Q(z).$$

Если dS_z и dS_η — элементы поверхности, соответствующие одному и тому же телесному углу $d\omega$ с вершиной в начале координат, то в силу формулы (2.21a)

$$dS_z = |x-y|\, |z|^n\, d\omega, \qquad dS_\eta = \frac{1}{m}\left|\operatorname{grad} Q(\eta)\right| |\eta|^n\, d\omega.$$

Поэтому

$$\frac{dS_z}{|x-y|Q(z)} = \frac{mt^{n-m}}{|\operatorname{grad} Q(\eta)|} dS_\eta = \frac{m[(x-y)\cdot\eta]^{m-n}}{|\operatorname{grad} Q(\eta)|} dS_\eta.$$

Так как $m-n$ — число нечетное, то из равенства (3.57) получаем

$$K(x, y) = \frac{m}{2(2\pi i)^{n-1}(m-n)!} \int\limits_{\substack{Q(\eta)=1\\(x-y)\cdot\eta>0}} \frac{[(x-y)\cdot\eta]^{m-n}}{|\operatorname{grad} Q(\eta)|} dS_\eta =$$

$$= \frac{m}{4(2\pi i)^{n-1}(m-n)!} \int\limits_{Q(\eta)=1} \frac{|(x-y)\cdot\eta|^{m-n}}{|\operatorname{grad} Q(\eta)|} dS_\eta. \qquad (3.58)$$

Пользуясь тем фактом, что $K(x, y)$ — фундаментальное решение оператора L, мы получим из (3.2), что для произвольной функции $f(y)$ класса C_1, которая обращается в нуль вне ограниченного множества,

$$L\left(\int f(y)\left[\int\limits_{Q(\eta)=1} \frac{|(x-y)\cdot\eta|^{m-n}}{|\operatorname{grad} Q(\eta)|} dS_\eta\right] dy\right) =$$

$$= \frac{4}{m}(2\pi i)^{n-1}(m-n)!\, f(x). \qquad (3.59)$$

Полученное ранее тождество (1.10) можно рассматривать как частный случай равенства (3.59), соответствующий случаю $L = \Delta^{(n+k)/2}$. Кроме того, используя однородность подинтегральной функции в формуле (3.58), можно преобразовать это выражение для K в объемный интеграл по объему, ограниченному сферой $Q(\eta) = 1$. Тогда получаем

$$K(x, y) = \frac{m}{4(2\pi i)^{n-1}(m-n)!} \int\limits_{Q(\eta)\leqslant 1} |(x-y)\cdot\eta|^{m-n}\, d\eta. \qquad (3.60)$$

Пусть теперь n — число четное. Если P — снова однородный полином, то $P = Q$ и

$$v(x, \xi, p) = \frac{(x\cdot\xi - p)^m}{m!\,Q(\xi)}.$$

Регулярная часть K_2 функции K имеет тогда вид [см. (3.47b)]

$$(2\pi i)^n K_2(x, y) =$$
$$= -(\Delta_y)^{n/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{[(x-y)\cdot\xi]^m}{m!\,Q(\xi)} d\omega_\xi \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^m - 1}{t} dt.$$

Поскольку K_2 — полином степени $< m$, то K_2 является решением уравнения $L[K_2] = 0$ и, следовательно, им можно пренебречь. Это дает, согласно равенству (3.47a),

$$m!\,(2\pi i)^n K(x, y) = -(\Delta_y)^{n/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{[(x-y)\cdot\xi]^m \ln|(x-y)\cdot\xi|}{Q(\xi)} d\omega_\xi. \qquad (3.61)$$

При $m < n$ отсюда получаем (пренебрегая регулярным решением)

$$K(x, y) = -(\Delta_y)^{(n-m)/2} \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{\ln|(x-y)\cdot\xi|}{(2\pi i)^n Q(\xi)}\, d\omega_\xi. \tag{3.62}$$

Если положить $x - y = r\zeta$, то коэффициент при $\ln r$ обратится в нуль. Отсюда видно, что при $m < n$ K есть однородная функция по $x - y$ степени $m - n$. С другой стороны, если $m \geqslant n$, то, отбрасывая регулярное решение, мы получим из (3.61)

$$K(x, y) = -\int\limits_{\Omega_\xi} \frac{[(x-y)\cdot\xi]^{m-n}\ln|(x-y)\cdot\xi|}{(m-n)!\,(2\pi i)^n\, Q(\xi)}\, d\omega_\xi{}^{1)}. \tag{3.63}$$

Это выражение можно записать в виде

$$(m-n)!\,(2\pi i)^n K(x, y) =$$
$$= -r^{m-n}\ln r \int\limits_{\Omega_\xi} \frac{(\zeta\cdot\xi)^{m-n}}{Q(\xi)}\, d\omega_\xi - r^{m-n}\int\limits_{\Omega_\xi} \frac{(\zeta\cdot\xi)^{m-n}\ln|\zeta\cdot\xi|}{Q(\xi)}\, d\omega_\xi. \tag{3.63a}$$

Множитель при $\ln r$ является здесь формой $(m-n)$-й степени по r, и, следовательно, этот член представляет собой регулярное решение дифференциального уравнения, а оставшийся член однороден по $x - y$ со степенью $m - n$.

Пусть теперь имеет место более общий случай, когда n — четное и меньше m, а P — не обязательно однородный полином. Тогда, согласно равенству (3.47a), сингулярная часть K задается выражением

$$K_1(x, y) = \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Omega_\xi} \nu^{(n)}(x, \xi, y\cdot\xi)\ln|(x-y)\cdot\xi|\, d\omega_\xi.$$

(Члены, возникающие от дифференцирования $\ln|(x-y)\cdot\xi|$ по y, регулярны и могут быть включены в K_2.) В силу (3.52) мы получаем тогда

$$(2\pi i)^{n+1} K_1(x, y) =$$
$$= -\int\limits_{\Omega_\xi} \ln|(x-y)\cdot\xi|\, d\omega_\xi \int\limits_{|\lambda|=M} \frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}}{P(\lambda, \xi)}\lambda^{n-1}\, d\lambda. \tag{3.64}$$

Пусть $R(\xi)$ — произвольная четная однородная функция степени -1, положительная при $\xi \neq 0$. Например, пусть $R(\xi) = Q^{-1/m}(\xi)$, где Q — характеристическая форма для оператора L. Заменив

---

1) Формулы (3.63) и (3.54a) были даны Герглотцем [2], стр. 191, и относящиеся сюда формулы приводятся у Бюро [3], стр. 158. Фундаментальные решения уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух измерений были ранее даны Сомильяна [1], а в случае трех измерений — Фредгольмом [1].

в равенстве (3.64) член $\ln|(x-y)\cdot\xi|$ на $\ln|R(\xi)(x-y)\cdot\xi|$, мы изменим решение K_1 только на регулярное решение дифференциального уравнения. Так как интеграл не меняет своего вида, если ξ и λ заменить на $-\xi$ и $-\lambda$, то точки Ω_ξ, для которых $(x-y)\cdot\xi>0$, играют ту же роль, что и точки, для которых $(x-y)\cdot\xi<0$. (Здесь мы пользуемся тем, что $n-1$ — нечетное число!) Поскольку $n-1<m-1$, мы получаем, что

$$(2\pi i)^{n+1}K_1(x,y)=$$
$$=-2\int\limits_{\substack{\Omega_\xi\\(x-y)\cdot\xi>0}}\ln[R(\xi)(x-y)\cdot\xi]\,d\omega_\xi\int\limits_{|\lambda|=M}\frac{e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}-1}{P(\lambda\xi)}\lambda^{n-1}\,d\lambda.$$

Далее, при $(x-y)\cdot\xi>0$

$$\lambda\int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty}e^{\lambda/r}[\ln(R(r\xi))]\,r^{-2}\,dr=$$
$$=\lambda\int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty}r^{-2}e^{\lambda/r}(-\ln r+\ln R(\xi))\,dr=$$
$$=(e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}-1)\ln[R(\xi)(x-y)\cdot\xi]-\int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty}\frac{e^{\lambda/r}-1}{r}\,dr=$$
$$=(e^{\lambda(x-y)\cdot\xi}-1)\ln[R(\xi)(x-y)\cdot\xi]-\int\limits_0^1\frac{e^{\lambda s(x-y)\cdot\xi}-1}{s}\,ds.$$

Таким образом,

$$(2\pi i)^{n+1}K_1(x,y)=$$
$$=-2\int\limits_{\Omega_\xi}d\omega_\xi\int\limits_{1/(x-y)\cdot\xi}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\oint\limits_{|\lambda|=M}\frac{e^{\lambda/r}\ln(R(r\xi))\,\lambda^n}{P(\lambda\xi)}\,d\lambda+$$
$$+2\int\limits_{\Omega_\xi}d\omega_\xi\int\limits_0^1\frac{ds}{s}\oint\limits_{|\lambda|=M}\frac{e^{\lambda s(x-y)\cdot\xi}-1}{P(\lambda\xi)}\lambda^{n-1}\,d\lambda.$$

Здесь второй член есть регулярно аналитическая функция от $x-y$, потому что подинтегральное выражение регулярно аналитично по $x-y$, s, λ, ξ в области интегрирования. Полагая опять $z=r\xi$ и заменяя в контурном интеграле λ на λr, мы найдем, что сингулярная часть K имеет вид

$$K_1(x,y)=\frac{-2}{(2\pi i)^{n+1}}\int\limits_{(x-y)\cdot z>1}\ln R(z)\Big[\oint\limits_{|\lambda|=M|x-y|}\frac{\lambda^n e^\lambda}{P(\lambda z)}\,d\lambda\Big]\,dz.\qquad(3.65)$$

Если P — однородный многочлен, равный Q, то формула (3.65) переходит в формулу

$$K_1(x, y) = \frac{-2}{(m-n-1)!\,(2\pi i)^n} \int\limits_{(x-y)\cdot z>1} \frac{\ln R(z)}{Q(z)}\, dz. \qquad (3.66)$$

В этом случае функция K_1 не только является сингулярной частью фундаментального решения, но и сама будет фундаментальным решением.

Фундаментальное решение линейных эллиптических систем с аналитическими коэффициентами[1] Метод, который был дан для построения фундаментального решения одного линейного эллиптического уравнения, без существенных изменений может быть применен и для систем уравнений. Рассмотрим систему функций $u_t(x)$, где $t = 1, 2, \ldots, N$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Для $i, t = 1, \ldots, N$ задается система линейных дифференциальных операторов L_{it}, коэффициенты которых являются аналитическими функциями x. Система уравнений, которую мы будем рассматривать, имеет вид

$$L_{it}[u_t] = B_i(x) \quad (i,\ t = 1, \ldots, N). \qquad (3.67)$$

Здесь мы пользуемся обычными обозначениями: суммирование производится по повторяющемуся индексу, если под ним нет черточки. Нашей целью является построение системы функций $K_t^a(x, y)$, которые удовлетворяют операторным уравнениям

$$L_{it}[K_t^r(x, y)] = \delta_i^r\, \delta(x - y). \qquad (3.68)$$

Здесь δ_i^r — символы Кронекера, а через $\delta(x - y)$ обозначена функция Дирака.

Пусть наивысший порядок входящих в систему (3.67) производных функций u_t равен m_t. Будем считать, что все операторы L_{it} имеют порядок m_t, но в некоторых L_{it} коэффициенты при членах старшего порядка могут быть нулями. Пусть $Q_{it}(x, \xi)$ — характеристическая форма оператора L_{it}, которая имеет по ξ степень m_t и может тождественно равняться нулю. Условие эллиптичности системы состоит тогда в том, что для всех рассматриваемых x

$$Q(x, \xi) = \det\,(Q_{it}(x, \xi)) \neq 0 \text{ при } \xi \neq 0^{2)}. \qquad (3.69)$$

(Это означает, что $\sum_t m_t$ должно быть четным числом при $n > 1$.)

Если на гиперплоскости $x \cdot \xi = p$ все функции $u_t(x)$ вместе со своими производными порядков $< m_t$ обращаются в нуль,

[1] Построение фундаментального решения неаналитических линейных эллиптических уравнений методом параметрикса см. у Лопатинского [1, 2].

[2] Это определение эллиптичности совпадает с определением Петровского [4], стр. 53—54.

то на этой плоскости уравнения (3.67) сводятся к уравнениям

$$Q_{ij}(x, \xi)\left(\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^{m_j}[u_j(x)] = B_i(x). \tag{3.70}$$

Условие (3.69) позволяет разрешить эти уравнения относительно каждого выражения

$$\left(\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^{m_{\underline{j}}}[u_{\underline{j}}],$$

которое можно назвать *нормальной производной* функции u_j порядка m_j. Если через $Q^{it}(x, \xi)$ обозначить элементы матрицы, обратной матрице Q_{it}, то мы получим при $x \cdot \xi = p$

$$\left(\xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)^{m_{\underline{j}}} u_{\underline{j}}(x) = Q^{ji}(x, \xi)\, B_i(x). \tag{3.71}$$

Здесь можно применить теорему Коши—Ковалевской, из которой вытекает, что при аналитических функциях $B_i(x)$ в окрестности точки x плоскости $x \cdot \xi = p$ можно найти систему решений уравнений (3.67), для которой сами u_j и их произвсдные порядков $< m_j$ обращаются в нуль при $x \cdot \xi = p$.

В частности, можно найти систему функций $v_i^j(x, \xi, p)$, для которых

$$L_{it}[v_t^j(x, \xi, p)] = \delta_i^j, \tag{3.72}$$

а v_j^k и все их производные по x порядков $< m_j$ обращаются в нуль при $x \cdot \xi = p$. Эти функции $v_j^k(x, \xi, p)$ однородны по ξ и p со степенью 1. Если коэффициенты операторов L_{ik} аналитичны в окрестности начала координат, то функции v_j^k аналитичны по x, ξ, p на множестве вида (3.14) с некоторым положительным ε. Кроме того, можно написать, что

$$v_i^j(x, \xi, p) = (x \cdot \xi - p)^{m_{\underline{i}}}\, w_{\underline{i}}^j(x, \xi, p), \tag{3.73}$$

где функции w_i^j аналитичны на множестве (3.14). Уравнение (3.72) показывает, что

$$m_t!\, Q_{it}(x, \xi)\, w_t^j(x, \xi, x \cdot \xi) = \delta_i^j, \tag{3.74}$$

или что

$$w_i^j(x, \xi, x \cdot \xi) = \frac{1}{m_{\underline{i}}!} Q^{\underline{i}j}(x, \xi), \tag{3.75}$$

где черточка под буквой i означает, что по индексу i суммирование не производится.

По аналогии с функцией (3.17) построим систему функций

$$V_j^i(x, \xi, p) = -\int_0^{x\cdot\xi-p} g(t)\frac{\partial}{\partial p} v_j^i(x, \xi, t+p)\, dt, \tag{3.76}$$

где $g(s)$ — функция, определенная равенством (3.19). Тогда

$$L_{it}[V^j_t(x,\ \xi,\ p)] = \delta^j_i g(x \cdot \xi - p). \tag{3.77}$$

Вводя далее функции

$$W^i_j(x,\ y) = \int\limits_{\Omega_\xi} V^i_j(x,\ \xi,\ y \cdot \xi)\, d\omega_\xi, \tag{3.78}$$

мы приходим, наконец, к матрице фундаментального решения

$$K^i_j(x,\ y) = (\Delta_y)^{(n+k)/2}\, W^i_j(x,\ y). \tag{3.79}$$

Как и раньше,

$$W^i_j(x,\ y) = r^{m_j+k}\ (A^i_j(x,\ y,\ r,\ \zeta) + B^i_j(x,\ y,\ r,\ \zeta) \ln r),$$

где $x - y = r\zeta$. Здесь функции A^i_j и B^i_j аналитичны по своим аргументам и $B^i_j = 0$ при нечетном n. Соответственно и K^i_j имеют вид

$$K^i_j(x,\ y) = r^{m_j-n}\,(A'^i_j(x,\ y,\ r \cdot \zeta) + B'^i_j(x,\ y,\ r,\ \zeta)\ \ln r).$$

При $x \neq y$ и достаточно малом $|x - y|$ функции $K^i_j(x, y)$ дают аналитическое решение системы

$$L_{it}[K^j_t(x,\ y)] = 0. \tag{3.80}$$

Точнее, для системы функций $f_j(y)$ класса C_1

$$L_{it}[\int\limits_D f_j(y)\, K^j_t(x,\ y)\ dy] = f_i(x). \tag{3.81}$$

Сопряженная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\bar{L}_{it}[u_i(x)] = 0, \tag{3.82}$$

где $\bar{L}_{it}$ — оператор, сопряженный оператору L_{it} и имеющий, следовательно, порядок m_t. Если не все m_t равны между собой, то здесь возникают некоторые трудности, связанные с нашей концепцией. Действительно, в этом случае система (3.82) не будет больше эллиптической в смысле данного здесь определения[1]. При этом по-прежнему имеет место формула типа формулы Грина, соответствующая (3.36),

$$\int\limits_R (u_i(x)\, L_{it}[v_t(x)] - v_t(x)\, \bar{L}_{it}[u_i(x)])\, dx =$$

$$= \int\limits_B M_{it}[u_i,\ v_t]\, dS_x, \tag{3.83}$$

[1] Эти трудности исчезают при более общем определении эллиптичности, предложенном Ниренбергом. Предполагается, что порядок L_{it} не обязательно зависит только от t, а имеет вид $\mu_i + m_t$. Эллиптичность при этом по-прежнему определяется дефинитностью формы (3.69).

где M_{it} — билинейный дифференциальный оператор от функций u_i и v_t порядка $m_t - 1$. Если за $v_t(x)$ взять функции $K_t^j(x, y)$, то тождество (3.83) сведется к формуле

$$u_j(y) = \int_R K_t^j(x, y)\, \bar{L}_{it}[u_i(x)]\, dx + \int_B M_{it}[u_i(x),\ K_t^j(x, y)]\, dS_y. \quad (3.84)$$

Надо отметить, что, вообще говоря, интеграл по границе содержит производные порядка $\max\limits_t m_t$ от каждой функции u_t. Из этой формулы следует аналитичность решений *сопряженной* системы (3.82). При неравных m_t доказать аналитичность решений u_t исходной системы (3.67) несколько мешают трудности, которые здесь возникают при построении фундаментального решения сопряженной системы. (В главе VII, однако, будет дано доказательство, в котором сопряженность не используется.) Если все m_t равны между собой, то этих трудностей, разумеется, не будет.

Пусть, в частности, оператор L_{it} имеет постоянные коэффициенты. Мы можем написать, что

$$L_{it} = P_{it}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где P_{it} — полином порядка $\leqslant m_t$. Пусть P^{js} — матрица, обратная матрице P_{it}. Тогда

$$v_t^j(x, \xi, p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\lambda(x\cdot\xi - p)}}{\lambda} P^{tj}(\lambda\xi)\, d\lambda,$$

где C — контур на комплексной λ-плоскости, охватывающий все корни уравнения $\det(P_{it}(\lambda\xi)) = 0$.

Если все операторы L_{it} однородны, то

$$P_{it} = Q_{it}$$

и

$$v_t^j(x,\ \xi,\ p) = \frac{1}{m_t!}(x\cdot\xi - p)^{m_t} P^{tj}(\xi). \quad (3.85)$$

При нечетном n, так же как в равенствах (3.44), (3.54), мы находим, что

$$K_t^j(x,\ y) = \frac{1}{4(2\pi i)^{n-1}(m_t - 1)!} \times$$
$$\times (\Delta_y)^{(n-1)/2} \int_{\Omega_\xi} |(x - y)\cdot\xi|^{m_t - 1} \operatorname{sign}[(x - y)\cdot\xi]\, P^{tj}(\xi)\, d\omega_\xi. \quad (3.86)$$

Это выражение однородно по $x - y$ со степенью $m_t - n$.

При четном n, так же как в (3.61), получается, что с точностью до членов, представляющих собой регулярное решение дифференциального уравнения,

$$K_t^j(x, y) = \frac{1}{m_t!\,(2\pi i)^n} \times$$
$$\times (\Delta_y)^{n/2} \int_{\Omega_\xi} P^{tj}(\xi)\,((x-y)\cdot\xi)^{m_t} \ln|(x-y)\cdot\xi|\,d\omega_\xi. \quad (3.87)$$

При $n > m_t$ логарифмическая часть K_t^j, т. е. коэффициент при $\ln r$, обращается в нуль[1].

---

[1] Аналогичные формулы были даны Шапиро [1]. См. также Бюро [9], гл. X, Морри [2, 3], стр. 104.

Глава IV

ТОЖДЕСТВА ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Символическое выражение для сферических средних. Пусть в области D определена непрерывная функция $f(x)$. Положим

$$I(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_\xi} f(x + r\xi)\, d\omega_\xi. \tag{4.1}$$

Тогда интеграл $I(x, r)$ определен для всех x из D, расстояние которых до границы D больше r. Используя $I(x, r)$, мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что x и r удовлетворяют этому ограничению. По определению, $I(x, r)$ является четной функцией r. Она представляет собой среднее значение функции f на сфере радиуса $|r|$, описанной вокруг точки x. Функция I непрерывна по x и r и для нее

$$I(x, 0) = f(x). \tag{4.2}$$

Вообще, если f принадлежит классу C_m, то функция $I(x, r)$ тоже будет принадлежать классу C_m по x и r.

Можно считать, что при фиксированном r формулой (4.1) определено преобразование T_r, которое переводит функцию $f(x)$ в новую функцию от x, зависящую еще от параметра r:

$$I(x, r) = I(x, r; f) = T_r[f(x)]. \tag{4.2a}$$

Если здесь в качестве f взять функцию вида $e^{i\eta\cdot x}$, где η — некоторый постоянный вектор, то из формул (1.2), (1.5) получаем

$$I(x, r) = T_r[e^{i\eta\cdot x}] = P_\nu(r\,|\eta|)e^{i\eta\cdot x}, \tag{4.3}$$

где $\nu = (n-2)/2$, а $P_\nu(s)$ — „нормированная" функция Бесселя:

$$P_\nu(s) = 2^\nu\,\Gamma(\nu+1)\, s^{-\nu} J_\nu(s) =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int\limits_{-1}^{1} (1-p^2)^{\nu-1/2} e^{isp}\, dp^1\,. \tag{4.4}$$

---

[1] См. Курант—Гильберт [1], т. I, стр. 407.

Для рассматриваемых n целое число 2ν неотрицательно, а $P_\nu(s)$ является целой четной функцией s, для которой $P_\nu(0) = 1$. Поскольку для оператора Лапласа Δ_x

$$(ir)^2 \Delta_x[e^{i\eta\cdot x}] = (r\,|\,\eta\,|)^2\, e^{i\eta\cdot x},$$

равенство (4.3) можно записать в виде

$$T_r\,[e^{i\eta\cdot x}] = P_\nu\left(ir\sqrt{\Delta_x}\right) e^{i\eta\cdot x}. \tag{4.5}$$

Здесь в правой части стоит выражение, которое получится, если разложить оператор $P_\nu\left(ir\sqrt{\Delta_x}\right)$ в ряд по степеням Δ_x и каждый член отдельно применить к $e^{i\eta\cdot x}$. Поскольку η — произвольный вектор, формула (4.5) приводит нас к *символическому* равенству

$$T_r = P_{(n-2)/2}\left(ir\sqrt{\Delta}\right). \tag{4.6}$$

Конечно, при произвольной непрерывной функции f было бы незаконно интерпретировать правую часть формулы (4.6) как разложение в степенной ряд.

Основное тождество для итерированных сферических средних. Определим для непрерывной функции $f(x)$ *итерированное сферическое среднее* $M(x, \lambda, \mu)$, положив

$$M(x, \lambda, \mu) = T_\lambda T_\mu [f(x)] = \\ = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\Omega_\zeta} I(x + \lambda\zeta, \mu)\, d\omega_\zeta. \tag{4.7}$$

Если мы заменим интеграл I его выражением (4.1), то найдем, что

$$M(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{(\omega_n)^2}\int\limits_{\Omega_\zeta}\int\limits_{\Omega_\xi} f(x + \lambda\zeta + \mu\xi)\, d\omega_\xi\, d\omega_\zeta. \tag{4.8}$$

Эта формула показывает, что $M(x, \lambda, \mu)$ симметрично относительно λ и μ:

$$M(x, \lambda, \mu) = M(x, \mu, \lambda). \tag{4.9}$$

Кроме того,

$$M(x, \lambda, 0) = M(x, 0, \lambda) = I(x, \lambda),$$
$$M(x, 0, 0) = f(x). \tag{4.9a}$$

Выведем теперь тождество, в котором среднее $M(x, \lambda, \mu)$ выражается через среднее I при помощи одной (одномерной) квадратуры. Это тождество легче всего обосновать при помощи формулы (1.2) [1]. Пусть $g(s)$ — произвольная непрерывная функ-

[1] Прямой вывод дан Йоном [7], стр. 171. Тождество является следствием того, что на плоскости y кольцо $\mu-\lambda<|y-x|<\mu+\lambda$ можно вымести как сферами радиуса r, описанными вокруг x, где $\mu-\lambda<r<\mu+\lambda$, так и сферами радиуса λ с центрами на сфере $|y-x|=\mu$ (рис. 8).

ция, которая обращается в нуль вне конечного интервала. Тогда

$$\omega_n^2 \int_0^\infty g(\lambda)\, \lambda^{n-1} M(x, \lambda, \mu)\, d\lambda =$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{n-1}\, d\lambda \int_{\Omega_\zeta} d\omega_\zeta \int_{\Omega_\xi} f(x + \lambda\zeta + \mu\xi)\, g(\lambda)\, d\omega_\xi. \qquad (4.9b)$$

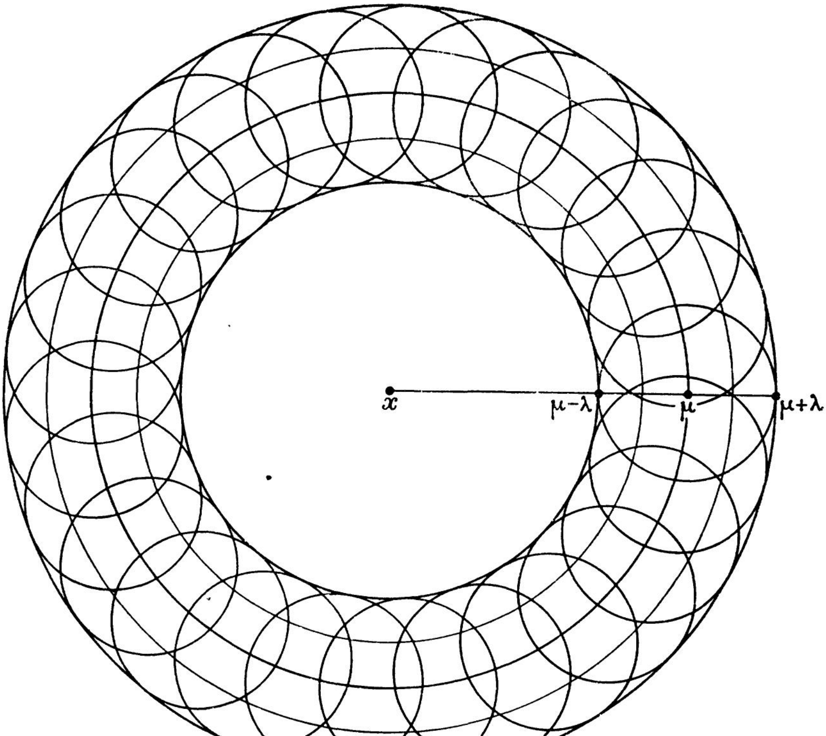

Рис. 8

Положив $\lambda\zeta = z$, найдем, что этот интеграл примет вид

$$\int_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int f(x + z + \mu\xi)\, g(|z|) dz.$$

Вводя вместо z переменную интегрирования $y = z + \mu\xi$, мы получим интеграл

$$\int_{\Omega_\xi} d\omega_\xi \int f(x + y)\, g(|y - \mu\xi|) dy.$$

При $y = r\eta$, $|\eta| = 1$, $r \geqslant 0$ имеем далее в силу (1.2)

$$\int_0^\infty r^{n-1}\,dr \int_{\Omega_\eta} d\omega_\eta \int_{\Omega_\xi} f(x + r\eta)\, g\left(\sqrt{r^2 - 2r\mu\eta\cdot\xi + \mu^2}\right) d\omega_\xi =$$

$$= \omega_{n-1} \times$$

$$\times \int_0^\infty r^{n-1}\,dr \int_{\Omega_\eta} f(x + r\eta)\, d\omega_\eta \int_{-1}^{+1} (1 - p^2)^{(n-3)/2} g\left(\sqrt{r^2 - 2r\mu p + \mu^2}\right) dp =$$

$$= \omega_n \omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1}\, I(x, r)\, dr \int_{-1}^{+1} (1 - p^2)^{(n-3)/2} g\left(\sqrt{r^2 - 2r\mu p + \mu^2}\right) dp.$$

Заменой $r^2 - 2r\mu p + \mu^2 = \lambda^2$ введем вместо p переменную интегрирования λ. Тогда при $\mu > 0$ мы получим

$$2\omega_n \omega_{n-1} \int_0^\infty r^{n-1}\, I(x, r)\, dr \int_{|\mu - r|}^{\mu + r} \frac{[(r + \mu - \lambda)(r + \mu + \lambda)}{(2r\mu)^{n-2}}$$

$$\frac{(\lambda + r - \mu)(\lambda - r + \mu)]^{(n-3)/2}}{(2r\mu)^{n-2}}\, g(\lambda)\, \lambda\, d\lambda =$$

$$= \frac{2\omega_n \omega_{n-1}}{(2\mu)^{n-2}} \int_0^\infty \lambda g(\lambda)\, d\lambda \int_{|\mu - \lambda|}^{\mu + \lambda} [(r + \mu - \lambda)(r + \mu + \lambda)$$

$$(\lambda + r - \mu)(\lambda - r + \mu)]^{(n-3)/2}\, r I(x, r)\, dr.$$

Поскольку подинтегральная функция нечетна по r, предел интегрирования $|\mu - \lambda|$ можно заменить на $\mu - \lambda$. Сравнивая это выражение с первоначальным выражением (4.9b), из которого оно было выведено, и воспользовавшись тем, что $g(\lambda)$ — *произвольная* функция, мы получим для положительных λ и μ нужное тождество[1]

$$M(x, \lambda, \mu) = \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n (2\lambda\mu)^{n-2}} \int_{\mu-\lambda}^{\mu+\lambda} [(r + \mu - \lambda)(r + \mu + \lambda)$$

$$(\lambda + r - \mu)(\lambda - r + \mu)]^{(n-3)/2}\, r I(x, r)\, dr. \quad (4.9c)$$

Если положить $\beta = \mu + \lambda$, $\alpha = \mu - \lambda$, то при $\beta > |\alpha|$ тождество (4.9c) примет вид

$$M\left(x, \frac{\beta - \alpha}{2}, \frac{\beta + \alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} 2^{n-1} (\beta^2 - \alpha^2)^{2-n} \int_\alpha^\beta [(\beta^2 - r^2)(r^2 - \alpha^2)]^{(n-3)/2}\, r I(x, r)\, dr. \quad (4.10)$$

---

[1] Для случая, когда функция $f(x)$ зависит только от $|x|$, это тождество было дано Асгейрссоном [1], стр. 335.

В частном случае, когда $f(x) = e^{i\eta \cdot x}$, а $|\eta| = 1$,

$$I(x, r) = P_\nu(r) f(x), \quad M(x, \lambda, \mu) = P_\nu(\lambda) P_\nu(\mu) f(x)$$

в силу (4.3). При этом тождество (4.10) переходит в тождество

$$P_\nu\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) P_\nu\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^{2\nu+1}\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} (\beta^2-\alpha^2)^{-2\nu} \int_\alpha^\beta [(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)]^{\nu-1/2} r P_\nu(r)\,dr, \qquad (4.11)$$

где предполагается, что 2ν — неотрицательное целое число. Если $n = 3$, то $\nu = 1/2$ и $P(s) = (\sin s)/s$, а тождество (4.11) представляет собой одну из теорем сложения тригонометрии.

Если при помощи формулы (4.4) выразить P_ν через функции Бесселя, то для функций Бесселя получится тождество, эквивалентное по существу тождеству (4.10),

$$J_\nu\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) J_\nu\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{2^{-\nu+1}(\beta^2-\alpha^2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_\alpha^\beta [(\beta^2-r^2)(r^2-\alpha^2)]^{\nu-1/2} r^{1-\nu} J_\nu(r)\,dr. \qquad (4.12)$$

Выражение функции через ее итерированные сферические средние. Для дальнейших приложений нам нужно представить функцию $f(x)$ через ее сферические средние $I(x, r)$ с не равными нулю r. Это выражение мы найдем, представив сначала $I(x, s)$ через итерированные средние $M(x, \lambda, \mu)$, где μ не равно нулю, и положив затем $s = 0$. Выражение нужного типа мы получим, рассматривая формулу (4.10) при фиксированном β и переменном α как интегральное уравнение относительно $I(x, r)$ и в явном виде отыскивая решение этого интегрального уравнения.

При фиксированном β уравнение (4.10) можно свести к интегральному уравнению более простого вида относительно функции g:

$$t^{n-2} h(t) = \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^t (t^2-p^2)^{(n-3)/2} g(p)\,dp. \qquad (4.13)$$

(Это уравнение в случае четной функции $g(s)$ в точности эквивалентно уравнению (1.2). Здесь $h(t)$ можно рассматривать как среднее значение функции типа плоской волны $g(\xi \cdot x)$, $|\xi| = 1$, взятое по сфере радиуса t, описанной вокруг начала координат.)

Уравнение (4.10) переводится в (4.13) подстановкой

$$\beta^2-\alpha^2=t^2,\qquad \beta^2-r^2=p^2,\qquad g(p)=p^{n-2}\,I\left(x,\sqrt{\beta^2-p^2}\right),$$
$$h(t)=2^{2-n}t^{n-2}M\left(x,\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-t^2}}{2},\ \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-t^2}}{2}\right).\quad(4.14)$$

Предположим, что для некоторой непрерывной функции $h(t)$ интегральное уравнение (4.13) имеет в интервале $0\leqslant t\leqslant\beta$ непрерывное решение $g(p)$. Чтобы получить выражение для этого решения, умножим уравнение (4.13) на $2t(s^2-t^2)^{(n-3)/2}$, где s — постоянная, заключенная между 0 и β, и проинтегрируем результат по t от 0 до s. Изменяя в правой части порядок интегрирования и пользуясь тем, что, согласно (1.3),

$$2\int\limits_p^s[(s^2-t^2)(t^2-p^2)]^{(n-3)/2}\,t\,dt=$$
$$=\left(\frac{s^2-p^2}{2}\right)^{n-2}\int\limits_{-1}^{+1}(1-q^2)^{(n-3)/2}dq=\frac{2^{2-n}\omega_n}{\omega_{n-1}}(s^2-p^2)^{n-2},$$

мы получим

$$2^{n-2}\int\limits_0^s t^{n-1}(s^2-t^2)^{(n-3)/2}h(t)\,dt=\int\limits_0^s(s^2-p^2)^{n-2}g(p)\,dp.\quad(4.15)$$

Правую часть заведомо можно $n-1$ раз дифференцировать по s^2, даже если функция $g(p)$ только непрерывна. Таким образом, мы получим выражение

$$g(s)=\frac{2^{n-1}s}{(n-2)!}\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1}\int\limits_0^s t^{n-1}(s^2-t^2)^{(n-3)/2}h(t)\,dt,\quad(4.16)$$

которое справедливо всякий раз, когда существует непрерывное решение $g(s)$. [Здесь d/ds^2 стоит вместо $(1/2s)(d/ds)$ [1].] В частности, g определяется единственным образом.

Если n — *нечетное* число $\geqslant 3$, то все дифференцирования в формуле (4.16) возможно произвести под знаком интеграла и мы получаем

$$g(s)=\frac{2^{n-2}\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!}\,s\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{(n-1)/2}s^{n-2}h(s).\quad(4.17)$$

[1] Такое дифференцирование решения уравнения (4.13) соответствует обычному способу решения интегральных уравнений типа уравнения Абеля или, в более общем случае, способу решения уравнений Вольтерра первого рода. См. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 393, и Вольтерра [1], гл. II.

Это выражение можно представить в виде

$$g(s)=\sum_{k=0}^{(n-1)/2} c_{kn}\, s^k\, \frac{d^k h(s)}{ds^k}, \tag{4.18}$$

где c_{kn} — некоторые постоянные. Например,

$$g(s)=h(s)+sh'(s) \qquad \text{при} \quad n=3, \tag{4.19a}$$

$$g(s)=h(s)+\frac{5}{3}sh'(s)+\frac{1}{3}s^2h''(s) \qquad \text{при} \quad n=5. \tag{4.19b}$$

Если n — *четное* число $\geqslant 2$, то под знаком интеграла в формуле (4.16) можно произвести только $(n-2)/2$ дифференцирований, после чего получаем

$$g(s)=\frac{2s}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n/2}\int_0^s \frac{t^{n-1}}{\sqrt{s^2-t^2}}\,h(t)\,dt=$$

$$=\frac{2s}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n/2} s^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,h(st)\,dt. \tag{4.20}$$

Если в последнем представлении произвести дифференцирования, то появятся производные от h порядков $\leqslant n/2$.

Возвратимся теперь к интегральному уравнению (4.10). При помощи подстановок (4.14) мы из (4.17) найдем, что для *нечетных* $n\geqslant 3$

$$s^{n-2}\,I\left(x,\sqrt{\beta^2-s^2}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!}\,s\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{(n-1)/2} s^{2n-4}\,M\left(x,\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-s^2}}{2},\ \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-s^2}}{2}\right).$$

В частности, при $s=\beta$

$$f(x)=I(x,0)=\frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!}\,\beta^{3-n}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{(n-1)/2} s^{2n-4}\,M\left(x,\ \frac{\beta-\sqrt{\beta^2-s^2}}{2},\ \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-s^2}}{2}\right)\right]_{s=\beta}. \tag{4.21}$$

Производная в правой части здесь заведомо существует, даже если f, а следовательно, и I только непрерывны. Делая замену $\beta^2-s^2=\alpha^2$, мы получаем из выражения (4.21)

$$f(x) = \frac{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{(n-2)!}\beta^{3-n} \times$$
$$\times \left[\left(\frac{-d}{d\alpha^2}\right)^{(n-1)/2} (\beta^2 - \alpha^2)^{n-2} M\left(x, \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha=0}, \tag{4.22}$$

где β — произвольное положительное число[1]. Последнюю формулу можно упростить, если предположить, что $M(x, \lambda, \mu)$ при положительных λ, μ принадлежит по x, λ, μ классу C_{n-1}. Это предположение заведомо справедливо, если $f(x)$ принадлежит классу C_{n-1}. Однако оно остается справедливым и тогда, когда известно только, что $I(x, r)$ принадлежит C_{n-1} при $r > 0$. Если M принадлежит C_{n-1}, то

$$M\left(x, \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\alpha^k \left[\frac{\partial^k}{\partial\alpha^k} M\left(x, \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha=0} + \varrho(\alpha), \tag{4.23}$$

где $\varrho(\alpha)$ — функция, у которой $(n-1)$-я производная по α обращается в нуль при $\alpha = 0$. Так как ввиду симметричности функции $M(x, \lambda, \mu)$ левая часть формулы (4.23) является четной функцией α, то в нее входят только члены с четными k. Можно записать эту формулу в виде

$$M\left(x, \frac{\beta-\alpha}{2}, \frac{\beta+\alpha}{2}\right) =$$
$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ четные}}}^{n-1} \frac{1}{k!\,2^k}\alpha^k \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k M(x, \lambda, \mu)\right]_{\lambda=\mu=\frac{\beta}{2}} + \varrho(\alpha).$$

Подставляя это выражение в формулу (4.22) и вычисляя производные при $\alpha = 0$, мы находим

$$f(x) =$$
$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ четные}}}^{n-1} \frac{(-1)^{k/2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-3}{2}\right)!}{k!\left(\frac{n-3+k}{2}\right)!\left(\frac{n-1-k}{2}\right)!} \lambda^k \left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^k M(x, \lambda, \mu)\right]_{\mu=\lambda}, \tag{4.24}$$

где $\lambda = \beta/2$ — произвольное положительное число. Для положительной пары значений λ, μ мы получаем выражение функции f

[1] Выражение (4.22) для нечетных n получается непосредственно из тождества (4.10) при помощи дифференцирования по α^2. Обходный путь, использующий уравнение (4.15), нужен только для четных n.

через функцию M и ее производные порядков $\leqslant n-1$. В частности, при $n=3$

$$f(x) = M(x,\ \lambda,\ \lambda) - \\ -\frac{\lambda^2}{2}[M_{\lambda\lambda}(x,\ \lambda,\ \lambda) - 2M_{\lambda\mu}(x,\ \lambda,\ \lambda) + M_{\mu\mu}(x,\ \lambda,\ \lambda)]. \quad (4.25)$$

Если $f(x)$ принадлежит классу C_2, то при $n=3$ тождество (4.25) равносильно тождеству

$$f(x) = \frac{1}{16\pi^2}\int\limits_{\Omega_\xi}\int\limits_{\Omega_\eta}\Big[f(x+\lambda\xi+\lambda\eta) - \\ -\frac{\lambda^2}{2}\sum_{i,\,k=1,\,2,\,3} f_{x_i x_k}(x+\lambda\xi+\lambda\eta)\,(\xi_i-\eta_i)\,(\xi_k-\eta_k)\Big]\,d\omega_\xi\,d\omega_\eta.$$

Из формулы (4.7) ясно, что если функция $I(x,\ r)$ при $r>0$ принадлежит по x, r классу C_s, то функция $M(x,\ \lambda,\ \mu)$ при $\mu>0$ принадлежит по x, λ, μ классу C_s. Из тождества (4.24) при нечетном $n \geqslant 3$ вытекает, что если $I(x,\ r)$ при $r>0$ принадлежит классу C_s (где $s \geqslant n-1$), то $f(x)$ принадлежит по крайней мере классу C_{s-n+1}. Аналогичным образом из аналитичности $I(x,\ r)$ при $r>0$ следует аналитичность $f(x)$.

Обратимся теперь к решению уравнения (4.10) в более сложном случае *четного* $n \geqslant 2$. (В приложениях, которые будут рассматриваться дальше, можно обойтись более простыми формулами, выведенными для нечетного n, распространяя результаты на случай четного числа измерений при помощи метода спуска Адамара.) Из формул (4.20), (4.14) имеем

$$s^{n-2}\,I(x,\ \sqrt{\beta^2-s^2}) = \\ = \frac{2^{3-n}\,s}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n/2}\int\limits_0^s \frac{t^{2n-3}}{\sqrt{s^2-t^2}}\,M\left(x,\ \frac{\beta-\sqrt{\beta^2-t^2}}{2},\ \frac{\beta+\sqrt{\beta^2-t^2}}{2}\right)dt.$$

Положив $\beta^2-s^2=\alpha^2$, $\beta^2-t^2=p^2$ и приняв затем, что $\alpha=0$, мы получаем далее

$$f(x) = \\ = \frac{(2\beta)^{3-n}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!}\left[\left(\frac{-d}{d\alpha^2}\right)^{n/2}\int\limits_\alpha^\beta \frac{(\beta^2-p^2)^{n-2}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\,M\left(x,\ \frac{\beta-p}{2},\ \frac{\beta+p}{2}\right)\,p\,dp\right]_{\alpha=0}.$$

Ясно, что функция $f(x)$ уже выражена здесь через $M(x,\ \lambda,\ \mu)$, где $\mu \geqslant \beta/2$, а значит, и через $I(x,\ r)$, где $r \geqslant \beta/2$. Остается упростить это выражение таким образом, чтобы можно было увидеть зависимость производных f от производных M.

Замена

$$p^2 = \alpha^2 + (\beta^2 - \alpha^2)s^2$$

преобразует интеграл в последней формуле в интеграл

$$(\beta^2 - \alpha^2)^{n-3/2} \int\limits_0^1 (1 - s^2)^{n-2}\, M ds.$$

Заметив, что

$$\frac{dM}{d\alpha^2} = (1 - s^2)\frac{dM}{dp^2},$$

мы можем произвести дифференцирование и при $\alpha = 0$. Получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n/2} c_{kn}\, \beta^{2k} \int\limits_0^1 (1 - s^2)^{n+k-2} \left[\left(\frac{d}{dp^2}\right)^k M \right]_{p=\beta s} ds, \qquad (4.26)$$

где численные множители c_{kn} задаются формулами

$$c_{kn} = \frac{n 2^{2-n} (-1)^k\, \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2} - k\right)!\; k!\; \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + k\right)}. \qquad (4.27)$$

Например, при $n = 2$

$$f(x) = \int\limits_0^1 \left(M - \frac{1 - s^2}{s}\frac{dM}{ds}\right) ds, \qquad (4.28)$$

где

$$M = M\left(x, \frac{\beta(1 - s)}{2}, \frac{\beta(1 + s)}{2}\right). \qquad (4.29)$$

Пусть среднее $I(x, r)$ при $r > 0$ принадлежит по x и r классу C_m. Тогда среднее $M(x, \lambda, \mu)$ при $\mu > 0$ принадлежит также классу C_m. Поскольку $M(x, \lambda, \mu)$ симметрично по λ и μ, функция M, заданная в (4.29), четна по s. Ее производные по s^2 порядков $\leqslant n/2$ непрерывно зависят от производных $M(x, \lambda, \mu)$ по λ и μ порядков $\leqslant n$ и поэтому сами принадлежат по x классу C_{m-n}. Следовательно, в случае четных n функция $f(x)$ принадлежит классу C_{m-n}, если среднее $I(x, r)$ при $r > 0$ принадлежит по x, r классу C_m.

Дифференциальное уравнение Дарбу. Из уравнения (4.6) получается символическое равенство

$$I(x, r) = T_r[f(x)] = P_\nu\left(ir\sqrt{\Delta}\right) f(x). \qquad (4.30)$$

Здесь функция

$$P_\nu(s) = 2^\nu\, \Gamma(\nu + 1)\, s^{-\nu} J_\nu(s) \qquad \left(\nu = \frac{n-2}{2}\right) \qquad (4.31)$$

является решением дифференциального уравнения

$$P''_{\nu\nu}(s) + \frac{2\nu+1}{s} P'_{\nu}(s) + P_{\nu}(s) = 0, \tag{4.32}$$

получаемого из дифференциального уравнения Бесселя

$$J''_{\nu\nu}(s) + \frac{1}{s} J'_{\nu}(s) + \left(1 - \frac{\nu^2}{s^2}\right) J_{\nu}(s) = 0. \tag{4.33}$$

Отсюда выводим дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{2\nu+1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \Delta\right] P_{\nu}(ir\sqrt{\Delta}) = 0, \tag{4.34}$$

благодаря чему делается правдоподобным, что само среднее $I(x, r)$ является решением уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу

$$\frac{\partial^2 I(x, r)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial I(x, r)}{\partial r} = \Delta_x I(x, r). \tag{4.35}$$

Непосредственное доказательство справедливости уравнения (4.35) для сферических средних $I(x, r)$ функции $f(x)$ легко дать в предположении, что $f(x)$ принадлежит классу C_2[1]. По определению среднего $I(x, r)$,

$$\omega_n \int_0^r \lambda^{n-1} I(x, \lambda)\, d\lambda = \int_{|y| \le r} f(x+y)\, dy.$$

Применяя к обеим частям равенства оператор Δ, мы получим

$$\omega_n \int_0^r \lambda^{n-1} \Delta_x I(x, \lambda)\, d\lambda = \int_{|y| \le r} \Delta_x f(x+y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{r} \int_{|y|=r} \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x+y) y_i dS = r^{n-1} \int_{\Omega_\eta} \sum_i f_{x_i}(x + r\eta)\, \eta_i d\omega_\eta =$$

$$= r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Omega_\eta} f(x + r\eta)\, d\omega_\eta = \omega_n r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} I(x, r).$$

Дифференцирование по r дает уравнение (4.35).

Из формулы (4.7) вытекает, что для итерированного сферического среднего $M(x, \lambda, \mu)$ функции $f(x)$, принадлежащей классу C_2,

$$\Delta_x M(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} M(x, \lambda, \mu) + \frac{n-1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, \lambda, \mu).$$

Из соотношения симметрии (4.9) для M тогда получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} M(x, \lambda, \mu) + \frac{n-1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial \lambda} M(x, \lambda, \mu) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} M(x, \lambda, \mu) + \frac{n-1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \mu} M(x, \lambda, \mu).$$

---

[1] См. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 391, Асгейрссон [1], стр. 327. Результаты для уравнения (4.35) без ограничения, что n положительное и целое, а также дальнейшие ссылки см. Диас и Вейнбергер [1] и Вейнштейн [1].

Глава V

ТЕОРЕМЫ АСГЕЙРССОНА И ХОВАРД[1)]

Эллипсоидальные средние. Для того чтобы получить теоремы этой главы, удобно ввести интегралы от функции $f(x)$ в n-мерном пространстве, взятые по эллипсоиду общего вида

$$F(x) = \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k = r^2. \tag{5.1}$$

Здесь предполагается, что a_{ik} являются коэффициентами симметричной положительно определенной квадратичной формы. Матрица (a_{ik}) будет обозначаться через a, а ее детерминант — через $|a|$.

Уравнение (5.1) в матричных обозначениях можно записать в виде

$$F(x) = x'ax = r^2, \tag{5.2}$$

где x считается вектором-столбцом, а x' — сопряженным ему вектором.

Существует такая неособенная матрица T с детерминантом $|T| \neq 0$, что

$$T'aT = I, \tag{5.3}$$

где I — единичная матрица. Линейное преобразование

$$x = Ty \tag{5.4}$$

переводит тогда $F(x)$ в $y'Iy = |y|^2$. Если dS_x — обычный элемент поверхности $F(x) = \text{const} = r^2$, то через $d\omega$ мы обозначим телесный угол в y-пространстве с вершиной в начале координат, образованный точками y, которые при преобразовании (5.4) соответствуют точкам x элемента dS. Иными словами,

$$d\omega = r^{1-n}\, dS_y,$$

где dS_y — образ dS_x при преобразовании (5.4). Ясно, что $d\omega$ определяется только по dS_x независимо от выбора матрицы T и инвариантен относительно общего аффинного преобразования, так как всякое линейное преобразование, которое переводит сферы

[1)] См. Асгейрссон [1], Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 397 и далее, Ховард [1].

с центрами в начале координат в такие же сферы, сохраняет в начале координат телесные углы.

Для элемента $d\omega$ можно получить выражение, зависящее от dS_x и от уравнения эллипсоида, в которое T не входит. Для этого рассмотрим объемный интеграл

$$\int f(x)\,dx,$$

взятый по произвольной области x-пространства. Если за координатные поверхности принять поверхности $F(x) = \text{const} = r^2$, то можно свести наш интеграл к простому интегралу от интегралов по этим поверхностям. Для объемного интеграла тогда получается выражение

$$\int_0^\infty 2r\,dr \int\limits_{F(x)=r^2} \frac{f(x)\,dS_x}{|\operatorname{grad} F(x)|}.$$

С другой стороны, линейная замена переменных (5.4) переводит объемный интеграл в интеграл

$$|T| \int f(Ty)\,dy = |T| \int r^{n-1}\,dr \int\limits_{|y|=r} f(Ty)\,d\omega.$$

Сравнивая эти формулы и замечая, что, согласно равенству (5.3),

$$|a|\,|T|^2 = 1,$$

мы находим нужное выражение

$$d\omega = \frac{2r^{2-n}\sqrt{|a|}}{|\operatorname{grad} F(x)|}\,dS_x. \tag{5.5}$$

Этот вывод показывает также, что для непрерывных функций $f(x)$

$$\int\limits_{F(x)<R^2} f(x)\,dx = |a|^{-1/2} \int_0^R r^{n-1}\,dr \int\limits_{F(x)=r^2} f(x)\,d\omega. \tag{5.6}$$

Теорема Асгейрссона о среднем значении. Рассмотрим n-мерное пространство, где $n = 2m$ — четное число. Обозначим координаты $x_1, \ldots, x_n$ через $y_1, \ldots, y_m$, а $x_{m+1}, \ldots, x_n$ через $z_1, \ldots, z_n$. Пусть функция $u(x) = u(y, z)$ принадлежит классу C_2. Образуем выражение

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{F(x,\alpha,\beta)=1} u(y, z)\,d\omega, \tag{5.7}$$

где

$$F(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2 = \frac{|y|^2}{\alpha} + \frac{|z|^2}{\beta}, \tag{5.8}$$

а постоянные α и β положительны. Интеграл в (5.7) будет $(n-1)$-мерным, $n-1=2m-1$.

Используя инвариантность элемента $d\omega$ относительно аффинных преобразований, произведем замену

$$y=\sqrt{\alpha}\eta, \qquad z=\sqrt{\beta}\zeta;$$

тогда из интеграла (5.7) получим сферический интеграл

$$I(\alpha, \beta)=\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1} u(\sqrt{\alpha}\eta, \sqrt{\beta}\zeta)\, d\omega. \tag{5.8a}$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I(\alpha, \beta)=\frac{1}{2\omega_n\sqrt{\alpha}}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1}\sum_{i=1}^{m} u_{y_i}(\sqrt{\alpha}\eta, \sqrt{\beta}\zeta)\,\eta_i\, d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\omega_n}\int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2<1}\Delta_y u(\sqrt{\alpha}\eta, \sqrt{\beta}\zeta)\, d\eta\, d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\omega_n}(\alpha\beta)^{-m/2}\int\limits_{F(x,\alpha,\beta)<1}\Delta_y u(y, z)\, dy\, dz.$$

Аналогичную формулу можно вывести для производной $\partial I/\partial\beta$. Комбинируя полученные выражения, мы найдем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} I(\alpha, \beta)-\frac{\partial}{\partial\beta} I(\alpha, \beta)=$$

$$=\frac{1}{2\omega_n}(\alpha\beta)^{-m/2}\int\limits_{F(x,\alpha,\beta)\leq 1}(\Delta_y-\Delta_z)\, u(y, z)\, dy\, dz.$$

В частности, если $u(y, z)$ совпадает с решением дифференциального уравнения

$$(\Delta_y-\Delta_z)u=\sum_{i=1}^{m} u_{y_i y_i}-\sum_{i=1}^{m} u_{z_i z_i}=0, \tag{5.9}$$

то для $I(\alpha, \beta)$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right) I(\alpha, \beta)=0,$$

из которого следует, что $I(\alpha, \beta)$ является функцией только от $\alpha+\beta$, т. е. что

$$I(\alpha+\lambda, \beta-\lambda)=I(\alpha, \beta) \quad \text{при} \quad 0<\lambda<\beta. \tag{5.10}$$

Если $\alpha<\beta$ и $\lambda=\beta-\alpha$, то

$$I(\alpha, \beta)=I(\beta, \alpha) \quad \text{при} \quad \alpha,\beta>0, \tag{5.11}$$

Далее, в силу равенства (5.8а)

$$\lim_{\beta\to+0} \omega_n I(\alpha, \beta) = \int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2=1} u(\sqrt{\alpha}\eta, 0)\, d\omega =$$

$$= \left[\frac{d}{dr} \int\limits_{|\eta|^2+|\zeta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta, 0)\, d\eta d\zeta\right]_{r=1} =$$

$$= \left[\frac{d}{dr} \int\limits_{|\eta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta, 0)\, d\eta \int\limits_{|\zeta|^2\le r^2-|\eta|^2} d\zeta\right]_{r=1} =$$

$$= \left[\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\omega_m \int\limits_{|\eta|^2\le r^2} u(\sqrt{\alpha}\eta, 0)\,(r^2-|\eta|^2)^{m/2}\, d\eta\right]_{r=1} =$$

$$= \omega_m \int\limits_{|\eta|^2<1} u(\sqrt{\alpha}\eta, 0)\,(1-|\eta|^2)^{(m-2)/2}\, d\eta =$$

$$= \omega_m\, \alpha^{1-m} \int\limits_{|y|^2<\alpha} u(y, 0)\,(\alpha-|y|^2)^{(m-2)/2}\, dy.$$

Аналогичная формула показывает, что существует $\lim\limits_{\alpha\to+0} I(\alpha, \beta) = I(0, \beta)$. Из условия симметрии (5.11) при $\beta\to+0$ вытекает, что

$$I(\alpha, 0) = I(0, \alpha). \tag{5.12}$$

Если ввести средние значения по сферам в m-мерном пространстве

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\omega_m}\lambda^{1-m} \int\limits_{|y|=\lambda} u(y, 0)\, dS_y,$$

$$I_2(\lambda) = \frac{1}{\omega_m}\lambda^{1-m} \int\limits_{|z|=\lambda} u(0, z)\, dS_z,$$

то тождество (5.12) при $\alpha = \lambda^2$ перейдет в тождество

$$\int\limits_0^\lambda (\lambda^2-p^2)^{(m-2)/2}\, p^{m-1}(I_1(p)-I_2(p))\, dp = 0.$$

Для функции $g(p) = p^{m-1}(I_1(p) - I_2(p))$ здесь получено интегральное уравнение типа (4.13), в котором $h = 0$. Так как ранее было показано, что функция g единственным образом определяется по h, то отсюда следует, что

$$I_1(\lambda) = I_2(\lambda).$$

Это и есть теорема Асгейрссона:

Если $u(y, z)$ — решение дифференциального уравнения (5.9), *принадлежащее классу C_2, то среднее значение функции $u(y, z_0)$, вычисленное по сфере в y-пространстве с радиусом λ и центром y_0, равно среднему значению функции $u(y_0, z)$, вычисленному по сфере в z-пространстве с радиусом λ и центром z_0.*

(Мы доказали здесь эту теорему только для $y_0 = z_0 = 0$. Так как, однако, она инварианта, очевидно, относительно переносов, то она справедлива и при любых y_0, z_0.)

Приложения к уравнению Дарбу и к волновому уравнению. Итерированное сферическое среднее $M(x, \lambda, \mu)$ функции $f(x)$, принадлежащей классу C_2, удовлетворяет уравнению (4.36), которое можно рассматривать как частный случай уравнения (5.9), записанного в биполярных координатах. Рассмотрим более общий случай *любой* функции $M(\lambda, \mu)$, принадлежащей при $\lambda, \mu \geqslant 0$ классу C_2 и удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$M_{\lambda\lambda} + \frac{n-1}{\lambda} M_\lambda = M_{\mu\mu} + \frac{n-1}{\mu} M_\mu \quad (n \geqslant 2). \tag{5.13}$$

Из этого уравнения вытекает, что $M_\lambda(0, \mu) = M_\mu(\lambda, 0) = 0$ и что, следовательно, $M(\lambda, \mu)$ можно продолжить на всю плоскость как четную функцию λ и μ. Пусть y и z обозначают векторы в n-мерном пространстве. Тогда $u(y, z) = M(|y|, |z|)$ будет функцией класса C_2 по y и z, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta_y u = \Delta_z u.$$

К ней можно применить теорему Асгейрссона. Возьмем в yz-пространстве точку (y^0, z^0), где $|y^0| = \alpha$, $|z^0| = \beta$, и сферы радиуса r. Тогда в силу теоремы Асгейрссона

$$\int_{\Omega_\eta} M(|y^0 + r\eta|, \beta)\, d\omega_\eta = \int_{\Omega_\zeta} M(\alpha, |z^0 + r\zeta|)\, d\omega_\zeta. \tag{5.14}$$

В частном случае, когда $y^0 = z^0 = 0$, отсюда получаем

$$M(r, 0) = M(0, r). \tag{5.15}$$

Для произвольных y^0, z^0

$$|y^0 + r\eta| = \sqrt{\alpha^2 + 2ry^0 \cdot \eta + r^2},$$

и, следовательно, $M(|y^0 + r\eta|, \beta)$ является функцией от η типа плоской волны. Применяя тождество (1.2), мы приведем формулу (5.14) к виду

$$\int_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2} M\left(\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha rp + r^2}, \beta\right) dp =$$
$$= \int_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2} M\left(\alpha, \sqrt{\beta^2 + 2r\beta p + r^2}\right) dp. \tag{5.16}$$

При $\alpha = 0$ формула (5.16) принимает вид

$$M(r, \beta) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^{1} (1 - p^2)^{(n-3)/2} M\left(0, \sqrt{\beta^2 + 2r\beta p + r^2}\right) dp. \tag{5.17}$$

[В случае, когда M является итерированным сферическим средним, формула (5.17) эквивалентна формуле (4.9с).] Аналогичное выражение для $M(\alpha, r)$ получается из (5.16) при $\beta = 0$. Используя тождество (5.15), находим[1], что для любого решения $M(\lambda, \mu)$ уравнения (5.13), принадлежащего при $\lambda, \mu \geqslant 0$ классу C_2,

$$M(\lambda, \mu) = M(\mu, \lambda). \tag{5.18}$$

Из тождества (5.15) можно получить теорему единственности решения задачи Коши для уравнения Дарбу (4.35)[2]. Пусть $I(x, r)$ — решение уравнения (4.35), принадлежащее по x и r классу C_2 при $r \geqslant 0$, и пусть $I(x, 0) = f(x)$. Введем сферические средние от $I(x, r)$:

$$M(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega_\zeta} I(x + \lambda\zeta, \mu)\, d\omega_\zeta.$$

Тогда M удовлетворяет уравнению для сферических средних

$$M_{\lambda\lambda} + \frac{n-1}{\lambda} M_\lambda = \Delta_x M.$$

Оно удовлетворяет также уравнению

$$M_{\mu\mu} + \frac{n-1}{\mu} M_\mu = \Delta_x M,$$

так как I есть решение уравнения (4.35). Поэтому $M(x, \lambda, \mu)$ является решением (5.13), принадлежащим классу C_2 при $\lambda, \mu \geqslant 0$. Уравнение (5.15) дает тогда

$$M(x, r, 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\Omega_\zeta} f(x + \lambda\zeta)\, d\omega_\zeta = M(x, 0, r) = I(x, r).$$

Таким образом, $I(x, r)$ определяется единственным образом как сферическое среднее от своего начального значения $f(x)$.

Следуя Асгейрссону, можно применить эту теорему для того, чтобы получить решение задачи Коши для волнового уравнения

$$u_{tt}(y, t) = \Delta_y u(y, t). \tag{5.19}$$

Это уравнение можно вывести из уравнения (5.9), заменяя в нем m на n и рассматривая только те решения $u(y, z)$, которые за-

[1] Асгейрссон [1], стр. 334.

[2] Прямые доказательства см. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 362, Асгейрссон [1], стр. 330.

висят от $y_1, \ldots, y_n$, $z_1 = t$ и не зависят от $z_2, \ldots, z_n$. Пусть $u(y, t)$ имеет начальные значения

$$u(y, 0) = f(y), \quad u_t(y, 0) = 0, \tag{5.20}$$

так что $u(y, t)$ можно определить и при отрицательных t как четную функцию t. Применим теорему Асгейрссона к случаю, когда $z^0 = 0$. Тогда

$$\frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_\eta} u(y^0 + r\eta, 0)\, d\omega_\eta = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_\zeta} u(y^0, r\zeta_1)\, d\omega_\zeta.$$

Левая часть этого уравнения равна сферическому среднему функции $f(y)$, обозначенному нами через $I(y^0, r)$. Правая часть равна сферическому интегралу от функции типа плоской волны, который можно упростить при помощи тождества (1.2). Пользуясь тем, что функция $u(y, t)$ четна по t, получаем

$$I(y^0, r) = \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int\limits_0^1 (1-p^2)^{(n-3)/2}\, u(y^0, rp)\, dp =$$

$$= \frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} r^{2-n} \int\limits_0^r (r^2 - p^2)^{(n-3)/2}\, u(y^0, p)\, dp.$$

Это — интегральное уравнение относительно $u(y^0, t)$ вида (4.13), в котором $g(p) = u(y^0, p)$, $h(t) = I(y^0, t)$. Его решение единственно (для непрерывных u) и задается при помощи формулы (4.16). Следовательно,

$$u(y^0, t) = \frac{2^{n-1} t}{(n-2)!} \left(\frac{d}{dt^2}\right)^{n-1} \int\limits_0^t r^{n-1} (t^2 - r^2)^{(n-3)/2}\, I(y^0, r)\, dr. \tag{5.21}$$

Символическое решение задачи Коши (5.19), (5.20) дается формулой

$$u(y, t) = \cos\left(it \sqrt{\Delta_y}\right) f(y), \tag{5.21a}$$

потому что

$$I(y, r) = P_\nu\left(ir \sqrt{\Delta_y}\right) f(y)$$

в силу (4.6). Итак, равенство (5.21) соответствует тождеству

$$\cos s = \frac{2^{n-1} s}{(n-2)!} \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{n-1} \int\limits_0^s r^{n-1} (s^2 - r^2)^{(n-3)/2}\, P_\nu(r)\, dr =$$

$$= \frac{2^{3\nu+1}\, \Gamma(\nu+1)\, s}{(2\nu)!} \left(\frac{d}{ds^2}\right)^{2\nu+1} \int\limits_0^s r^{\nu+1} (s^2 - r^2)^{\nu-1/2}\, J_\nu(r)\, dr, \tag{5.22}$$

где 2ν — неотрицательное целое число.

Решение волнового уравнения, заданное в виде (5.21), можно сравнить с формулой (2.32). У решения, представленного в виде (2.32), производные по t имеют начальные значения (5.20). Следовательно, (5.21) можно заменить выражением

$$u(y^0,\ t) = \frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-1} \int_0^t r(t^2 - r^2)^{(n-3)/2}\, I(y^0,\ r)\, dr. \quad (5.23)$$

Очевидно, что выражения, стоящие в правых частях (5.21) и (5.23), должны быть равны друг другу для всех функций I. Поэтому в дополнение к формуле (5.22) имеем еще формулу

$$\cos s = \frac{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}{(2\nu)!}\left(\frac{d}{ds}\right)^{2\nu+1} \int_0^s r^{1-\nu}(s^2 - r^2)^{\nu-1/2} J_{\nu}(r)\, dr. \quad (5.24)$$

Формула (5.21) дает решение задачи Коши (5.19), (5.20) при условии, что эта задача обладает решением класса C_2. Выражение для u после соответствующих упрощений содержит производные от начальной функции $f(x)$ порядков $\leqslant n/2$ при четных n и порядков $\leqslant (n-1)/2$ при нечетных n. Для того чтобы существовало решение u класса C_2, достаточно, чтобы функция f принадлежала классу $C_{(n+4)/2}$ при четных n и классу $C_{(n+3)/2}$ при нечетных n[1]. В некоторых случаях решение может существовать и при более слабых предположениях относительно f, как, например, в случае, когда $f(x)$ зависит менее чем от n аргументов.

Теорема сложения для косинуса дает *формальное* тождество

$$2\cos(\lambda i \sqrt{\Delta})\cos(\mu i \sqrt{\Delta}) = \cos[(\lambda+\mu)\, i \sqrt{\Delta}] + \cos[(\lambda-\mu)\, i\sqrt{\Delta}]\,^{2)}.$$

Таким образом, при $\mu = \lambda$ мы формально получаем тождество

$$f(x) = 2\cos^2(\lambda i \sqrt{\Delta})\, f - \cos(2\lambda i \sqrt{\Delta}) f. \quad (5.25)$$

Если n нечетно, то (5.25) можно также интерпретировать как тождество, в котором функция $f(x)$ выражается через простые и итерированные средние функции f и ее производных порядков $\leqslant n-1$. Действительно, при нечетном n выражение $\cos(\lambda i \sqrt{\Delta}) f$ является, согласно (5.21), комбинацией сферических средних функции f по сферам радиуса λ и производных этих средних порядков $\leqslant (n-1)/2$. Двукратное применение оператора дает нам выражение для f через сферические средние по сферам радиусов

[1] См. Диас и Вейнбергер [1], стр. 709.

[2] В этом тождестве предполагается, что класс непрерывных функций $f(x)$, к которым применим оператор $\cos(it\sqrt{\Delta})$, определенный равенством (5.21), и которые переводятся этим оператором в непрерывные функции от x и t, замкнут относительно этой операции.

λ и 2λ и через производные порядков $\leqslant n-1$. Нечетность n требуется для того, чтобы радиусы названных сфер не обращались в нуль. (Это равносильно применению к волновому уравнению принципа Гюйгенса в сильном смысле.) Мы не будем пользоваться тождеством (5.25), так как для функций f, которые только непрерывны, но имеют средние $I(x, r)$, принадлежащие при $r > 0$ классу C_{n-1}, доказательство этого тождества вызывает трудности.

Тождество Атем С. Ховард. При помощи соображений, которые мы использовали здесь при выводе теоремы Асгейрссона, можно получить и более общее тождество. Пусть $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ — функция класса C_2. Пусть для положительных значений α_i

$$\omega_n\, I(\alpha_1,, \ldots, \alpha_n) = \int\limits_{\substack{\Sigma x_i^2/\alpha_i = 1 \\ i}} u(x)\, d\omega, \tag{5.26}$$

где $d\omega$, как и раньше, — аффинно-инвариантный элемент поверхности эллипсоида. Аналогично предыдущему при $x_i = \sqrt{\alpha_i}\,\xi_i$ мы получим

$$\omega_n\, I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \int\limits_{|\xi|=1} u\left(\sqrt{\alpha_1}\xi_1, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\xi_n\right) d\omega_\xi,$$

$$\omega_n\, I_{\alpha_k} = \frac{1}{2}\alpha_k^{-1/2} \int\limits_{|\xi|=1} \xi_k\, u_{x_k}\left(\sqrt{\alpha_1}\,\xi_1, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\,\xi_n\right) d\omega_\xi =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{|\xi|<1} u_{x_k\,x_k}\left(\sqrt{\alpha_1}\xi_1, \ldots, \sqrt{\alpha_n}\xi_n\right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{-1/2} \int\limits_{\Sigma x_i^2/\alpha_i<1} u_{x_k\,x_k}(x)\, dx. \tag{5.27}$$

Пусть теперь имеет место более общий случай, когда a и b — две симметричные матрицы, и матрица a соответствует положительно определенной форме. Тогда существует такая неособенная матрица T, что

$$TaT' = I, \qquad TbT' = \beta,$$

где I — единичная матрица, а β — диагональная матрица:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$T(a + \lambda b)\, T' = I + \lambda\beta.$$

Предположим, что λ принимает значения, для которых

$$\alpha_k = 1 + \lambda\beta_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n,$$

так что $a + \lambda b$ — положительно определенная матрица. Рассмотрим теперь эллипсоидальное среднее произвольной непрерывной функции $f(y)$:

$$J(\lambda) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{y'(a+\lambda b)^{-1} y = 1} f(y)\, d\omega.$$

Произведем замену переменных $y = T^{-1}x$. При этом $f(y)$ перейдет в функцию $g(x) = f(T^{-1}x)$, а

$$J(\lambda) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{x'(I+\lambda\beta)^{-1} x = 1} g(x)\, d\omega = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\sum\limits_i x_i^2/\alpha_i = 1} g(x)\, d\omega = I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Тогда в силу (5.27)

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda} = \sum_k \beta_k\, I_{\alpha_k}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2\omega_n}(\alpha_1 \ldots \alpha_n)^{-1/2} \int\limits_{\sum x_i^2/\alpha_i < 1} \sum_k \beta_k\, g_{x_k x_k}(x)\, dx.$$

Далее,

$$(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = |I + \lambda\beta| = |T|^2\, |a + \lambda b|,$$
$$dx = |T|\, dy,$$
$$\sum_k \beta_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' \beta \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' T^{-1}\beta T'^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' b \left(\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Следовательно,

$$\frac{dJ(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{2\omega_n} |a + \lambda b|^{-1/2} \int\limits_{y'(a+\lambda b)^{-1} y < 1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' b \left(\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y)\, dy. \quad (5.28)$$

Введем теперь эллипсоидальное среднее общего вида функции $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n)$. Эллипсоид будет задаваться своим центром x, матрицей c и масштабным множителем μ. Его уравнение в текущих координатах $z = x + y$ имеет вид

$$y' \left(\frac{c + c'}{2}\right)^{-1} y = \mu^2.$$

(В *тангенциальных* координатах его уравнение имеет тогда вид

$$u'\, c\, u = \mu^{-2},$$

где u состоит из коэффициентов уравнения $u \cdot y = 1$ касательной плоскости эллипсоида.) Если $c + c'$ — положительно определенная матрица, а $\mu \neq 0$, то мы положим

$$I(x, c, \mu) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y = \mu^2} f(x+y)\, d\omega, \tag{5.29}$$

где $d\omega$ — аффино-инвариантный элемент поверхности эллипсоида в y-пространстве. Если c — единичная матрица, то I сводится к сферическому среднему $I(x, \mu)$ функции f. Если c — диагональная матрица с элементами α_i по диагонали, то I представляется выражением (5.26), составленным для $f(x+y)$ как функции y. Очевидно, что функция I зависит только от симметричной части c и однородна по c и μ^{-2} со степенью нуль. Далее ясно, что

$$I(x, c, \mu) = I\left(x, \frac{1}{2}\mu^2(c+c'), 1\right). \tag{5.30}$$

Нам нужно найти выражение для производных $I(x, c, \mu)$ по элементам c_{ik} матрицы c. Из формулы (5.30) имеем

$$\frac{\partial I(x, c, \mu)}{\partial c_{ik}} = \left(\frac{dI(x, a+\lambda b, 1)}{d\lambda}\right)_{\lambda=0},$$

где a — положительно определенная симметричная матрица $\frac{1}{2}\mu^2(c+c')$, а b — симметричная матрица с элементами b_{rs}, которые записываются при помощи символов Кронекера в виде

$$b_{rs} = \frac{1}{2}\mu^2(\delta_i^r \delta_k^s + \delta_i^s \delta_k^r).$$

Производную по λ можно вычислить по формуле (5.28). В нашем случае

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)' b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial y_i\, \partial y_k},$$

$$|a+\lambda b|_{\lambda=0} = \left|\frac{1}{2}\mu^2(c+c')\right| = \mu^{2n}\left|\frac{c+c'}{2}\right|.$$

Далее мы находим

$$\frac{\partial I(x, c, \mu)}{\partial c_{ik}} = \frac{\mu^{2-n}}{2\omega_n}\left|\frac{c+c'}{2}\right|^{-1/2} \int\limits_{y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y < \mu^2} f_{x_i x_k}(x+y)\, dy.$$

Появившийся в этой формуле объемный интеграл можно разложить на эллипсоидальные поверхностные интегралы при помощи формулы (5.6):

$$\int\limits_{y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y<\mu^2} f_{x_i x_k}(x+y)\,dy =$$

$$= \left|\frac{c+c'}{2}\right|^{1/2} \int\limits_0^\mu r^{n-1}\,dr \int\limits_{y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y=r^2} f_{x_i x_k}(x+y)\,d\omega =$$

$$= \omega_n \left|\frac{c+c'}{2}\right|^{1/2} \int\limits_0^\mu r^{n-1} I_{x_i x_k}(x,\ c,\ r)\,dr.$$

Таким образом, мы получаем *тождество, данное А. Ховард:*

$$I_{c_{ik}}(x,\ c,\ \mu) = \frac{\mu^{2-n}}{2} \int\limits_0^\mu r^{n-1} I_{x_i x_k}(x,\ c,\ r)\,dr. \tag{5.31}$$

При помощи преобразования Фурье тождество (5.31) не трудно проверить непосредственно. Пусть $f(x)$ — функция вида

$$f(x) = e^{i\xi\cdot x} = e^{i\xi'\cdot x},$$

где ξ' — вектор-строка, сопряженный вектору-столбцу ξ. Для того чтобы вычислить среднее

$$I(x,\ c,\ \mu) = \frac{1}{\omega_n} e^{i\xi\cdot x} \int\limits_{y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y=\mu^2} e^{i\xi'\cdot y}\,d\omega,$$

преобразуем матрицу $(c+c')/2$ при помощи неособенного преобразования T так, чтобы матрица

$$T\frac{c+c'}{2}T'$$

была единичной. Тогда для $z = Ty$

$$y'\left(\frac{c+c'}{2}\right)^{-1} y = |z|^2.$$

Из (4.3) вытекает, что

$$I(x,\ c,\ \mu) = \frac{1}{\omega_n} e^{i\xi\cdot x} \int\limits_{|z|=\mu} e^{i\xi'\cdot T^{-1}z}\,d\omega =$$

$$= e^{i\xi\cdot x} P_\nu(\mu|\xi' T^{-1}|) = e^{i\xi\cdot x} P_\nu\left(\mu\sqrt{\xi' c\xi}\right).$$

Для нашей функции f уравнение (5.31) сводится к тождеству

$$P_\nu'(\lambda) = -\lambda^{1-n} \int\limits_0^\lambda s^{n-1} P_\nu(s)\,ds,$$

где $\lambda = \mu \sqrt{\xi' c \xi}$. Это, однако, является иной формой записи дифференциального уравнения (4.32), которому удовлетворяет P_ν. Таким образом, мы показали, что уравнение (5.31) справедливо для всех экспоненциальных функции f, а поэтому оно выполняется вообще для всех функций $f(x)$ класса C_2.

Применения тождества Ховард. Так как $I(x, c, \mu)$ зависит от c и μ только через комбинацию $\mu^2 c$, то

$$I_\mu(x, c, \mu) = \frac{2}{\mu} \sum_{ik} c_{ik} I_{c_{ik}}(x, c, \mu) =$$

$$= \mu^{1-n} \int_0^\mu r^{n-1} \sum_{i, k} c_{ik} I_{x_i x_k}(x, c, r)\, dr. \tag{5.32}$$

Если c — единичная матрица, то отсюда получаем

$$I_\mu(x, c, \mu) = \mu^{1-n} \int_0^\mu r^{n-1} \Delta_x I(x, c, r)\, dr, \tag{5.33}$$

что эквивалентно уравнению Дарбу (4.35).

Пусть теперь $f(x)$ — решение однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} f_{x_i x_k}(x) = 0, \tag{5.34}$$

где постоянные a_{ik} составляют матрицу a. Тогда, разумеется, также и

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} I_{x_i x_k}(x, c, \mu) = 0 \tag{5.35}$$

для всех рассматриваемых μ и c. Из тождества (5.31) следует, что $I(x, c, \mu)$ как функция c удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} I_{c_{ik}}(x, c, \mu) = 0, \tag{5.36}$$

которое означает, что функция

$$I(x, c + \lambda a, \mu)$$

не зависит от λ. Когда a — единичная матрица, уравнение (5.34) становится уравнением Лапласа, а если матрица c симметрична, то при изменении λ эллипсоиды

$$y'(c + \lambda a)^{-1} y = \mu^2$$

будут *конфокальны.* Мы получаем, таким образом, теорему о том, что *эллипсоидальное среднее потенциальной функции постоянно на семействе конфокальных эллипсоидов*[1].

Для более общих матриц a наш результат можно сформулировать аналогичным образом: эллипсоидальные средние решения уравнения (5.34) постоянны на семействе эллипсоидов, „конфокальных" в метрике, в которой „абсолют" имеет тангенциальное уравнение вида $\sum a_{ik} u_i u_k = 0$. Если семейство эллипсоидов, зависящих от параметра λ, содержит вырожденные элементы, то эллипсоидальное среднее сводится к интегралу по квадратичному многообразию меньшего числа измерений. Этот случай как раз имеет место для рассмотренного Асгейрссоном уравнения (5.9), по отношению к которому „конфокальны" эллипсоиды

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{y_i^2}{a-\lambda} + \sum_{i=1}^{m} \frac{z_i^2}{\lambda} = 1.$$

Эллипсоидальные средние решения u имеют одно и то же значение при всех λ. Однако это семейство содержит два соответствующих значениям $\lambda = 0, a$ вырожденных элемента, которые сводятся к сферам в m-мерных пространствах (точнее говоря, они задаются вырожденными квадратными уравнениями в *тангенциальных координатах).* Согласно теореме Асгейрссона, средние, соответствующие двум вырожденным элементам, равны друг другу. Для уравнения потенциала одно семейство конфокальных поверхностей представляет собой семейство концентрических сфер, содержащее в качестве вырожденного элемента центр сфер. Из теоремы Асгейрссона здесь получается закон Гаусса об арифметическом среднем.

С более общей точки зрения тождество (5.31) можно рассматривать как формулу, которая преобразует вторые производные по x в первые производные по c и которая дает возможность связать однородное дифференциальное уравнение по x с постоянными коэффициентами с другим уравнением по c, порядок которого в два раза ниже. Например, применяя тождество (5.31) дважды, мы получим

$$I_{c_{ik}c_{rm}}(x, c, \mu) = \frac{1}{2}\mu^{2-n}\int_0^{\mu} r^{n-1} I_{x_i x_k c_{rm}}(x, c, r)\,dr =$$
$$= \frac{1}{4}\mu^{2-n}\int_0^{\mu} r\,dr \int_0^{r} s^{n-1} I_{x_i x_k x_r x_m}(x, c, s)\,ds. \qquad (5.37)$$

[1] Эта теорема была доказана Асгейрссоном [1], стр. 341, в качестве применения его тождества. Аналогичная теорема для волнового уравнения дана Серрином [1].

Эта формула показывает, что значение второй производной

$$I_{c_{ik}c_{rm}}(x,\ c,\ \mu) \tag{5.38}$$

инвариантно относительно перестановок индексов i, k, r, m. Если, кроме того, $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами, имеющему вид

$$\sum_{i,\,k,\,r,\,m} a_{ikrm}\, f_{x_i x_k x_r x_m}(x) = 0, \tag{5.39}$$

то функция I удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\sum_{i,\,k,\,r,\,m} a_{ikrm}\, I_{c_{ik}c_{rm}}(x,\ c,\ \mu) = 0. \tag{5.40}$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\, f_{x_i x_i x_k x_k}(x) = 0, \tag{5.41}$$

которое содержит только производные четных порядков по каждой переменной. Рассмотрим значение $I(x, c, \mu)$, когда $x = 0$, $\mu = 1$, а c — диагональная матрица с диагональными элементами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Тогда I сводится к функции $I(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\, I_{\gamma_i \gamma_k}(\gamma) = 0. \tag{5.42}$$

Теоремы о среднем значении, справедливые для последнего уравнения второго порядка, дадут теперь тождества, в которые входят итерированные эллипсоидальные средние от решения f уравнения (5.41). Следует заметить, однако, что здесь матрица c должна быть такой, чтобы матрица $c + c'$ была положительно определенной, а, значит, $\gamma_i > 0$. Можно, например, рассмотреть случай таких коэффициентов a_{ik}, для которых характеристический конус уравнения (5.42), выходящий из начала координат, заключен в первом „октанте". Тогда в начале координат функция $I(\gamma)$ может быть выражена через значения $I(\gamma)$ и ее первых производных на $(n-1)$-мерном многообразии, лежащем в первом октанте. Поскольку $I(0) = f(0)$, это приводит к тому, что в начале координат значение решения f уравнения (5.41) выражается через эллипсоидальные интегралы от f, причем эллипсоиды располагаются на конечном расстоянии от начала координат.

Аналогичные рассмотрения можно провести и для уравнений высших порядков.

Глава VI

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЕЕ ИНТЕГРАЛАМИ ПО СФЕРАМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Функции, периодические в среднем. Задача, которая будет обсуждаться в этой главе, состоит в решении специального уравнения вида

$$Tf = g, \tag{6.1}$$

где T — линейный оператор, переводящий функцию $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ в функцию $g(x)$, причем T *инвариантен относительно переносов*. Эта инвариантность T означает, что если T ставит в соответствие функции $f(x)$ функцию $g(x)$, то при любом z он переводит $f(x+z)$ в $g(x+z)$.

Примеры этого типа даются уравнениями[1])

$$g(x) = Tf = \int_R f(x+y)\, K(y)\, dy, \tag{6.2}$$

где R — фиксированная ограниченная область y-пространства, а ядро $K(y)$ непрерывно в R. Другие примеры дают операторы T, ставящие в соответствие начальным значениям решение гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами при фиксированном t, или операторы, ставящие в соответствие функции f ее сферическое среднее по сфере радиуса r с центром в точке x при фиксированном r[2]). Простейшим примером является уравнение

$$g(s) = \int_{-a}^{+a} f(s+t)\, dt \tag{6.3}$$

для функции f одной скалярной переменной s. Решение f уравнения (6.3) не единственно. Действительно, уравнению (6.3) при $g(s) \equiv 0$ удовлетворяет любая непрерывная функция $f(s)$ периода $2a$, для которой

$$\int_{-a}^{a} f(s)\, ds = 0. \tag{6.4}$$

Для произвольного решения уравнения (6.2) при $g \equiv 0$ Дельсарт ввел термин „*периодическое в среднем*" (moyenne-périodique). Из последнего примера ясно происхождение этого термина.

---

[1]) См. Шварц [2], т. II, стр. 64.

[2]) Уравнения вида (6.2) изучались Йоном [1] и Дельсартом [1]; более общие уравнения вида (6.1) рассматривались Шварцом [1].

При помощи разложения по плоским волнам мы можем *формально* свести уравнение (6.1) к одномерному уравнению того же типа. В самом деле, пусть $\Phi(s)$ — произвольная функция скаляра s. Для произвольного вектора ξ мы можем построить функцию типа плоской волны $f(x) = \Phi(\xi \cdot x)$. Тогда $f(x)$ обладает тем свойством, что $f(x+z) = f(x)$ при $z \cdot \xi = 0$. В силу инвариантности T относительно переносов образ $g(x) = Tf$[1] обладает тем же свойством: $g(x+z) = g(x)$ при $z \cdot \xi = 0$. Следовательно, $g(x)$ тоже является функцией типа плоской волны и зависит только от $\xi \cdot x$ и, конечно, от ξ: $g(x) = \gamma(x \cdot \xi, \xi)$. Таким образом,

$$T\Phi(\xi \cdot x) = \gamma(x \cdot \xi, \xi).$$

При фиксированном ξ выражение $T\Phi(\xi \cdot x) = T_\xi \Phi(s)$ определяет линейный оператор, действующий на функции скаляра s и зависящий от единичного вектора ξ как от параметра. Мы имеем

$$T_\xi \Phi(s) = \gamma(s, \xi). \tag{6.5}$$

При фиксированном ξ оператор T_ξ также инвариантен относительно переносов

$$T_\xi \Phi(s+t) = T\Phi(\xi \cdot x + t) = T\Phi(\xi \cdot (x + t\xi)) = \gamma((x+t\xi) \cdot \xi, \xi) =$$
$$= \gamma(x \cdot \xi + t, \xi) = \gamma(s+t, \xi).$$

Чтобы решить уравнение (6.1) в случае, когда $g(x)$ является функцией типа плоской волны вида $g(x) = \gamma(x \cdot \xi)$, достаточно найти решение $\Phi(s)$ одномерного уравнения

$$T_\xi \Phi = \gamma. \tag{6.6}$$

Тогда $f(x) = \Phi(x \cdot \xi)$ будет решением уравнения (6.1). Поскольку всякая достаточно регулярная функция $g(x)$ может быть разложена по плоским волнам по формулам гл. I, можно ожидать, что мы найдем решение (6.1), решая одномерные уравнения (6.6), зависящие от параметра ξ. Однако, даже если удастся осуществить и обосновать эту схему решения уравнения (6.1), нет никакой гарантии того, что таким способом будут построены *все* решения (6.1).

В случае, когда уравнение (6.1) имеет специальный вид (6.2), имеем

$$T_\xi \Phi = \int_R \Phi((x+y) \cdot \xi)\, K(y)\, dy =$$
$$= \int \Phi(x \cdot \xi + p) \int_{\substack{y \in R \\ y \cdot \xi = p}} K(y)\, dS_y\, dp.$$

Таким образом, уравнение (6.6) принимает вид

$$\gamma(s) = T_\xi \Phi = \int \Phi(s+p)\, k(p, \xi)\, dp, \tag{6.7}$$

[1] Мы предполагаем, что к функции f можно применить оператор T.

где функция $k(p, \xi)$ определена для всех p и всех единичных векторов ξ соотношением

$$\bullet\, k(p, \xi) = \int\limits_{\substack{y \in R \\ y \cdot \xi = p}} K(y)\, dS_y. \tag{6,8}$$

Пусть здесь R — выпуклое тело в y-пространстве, для которого начало координат является внутренней точкой. Пусть

$$\max_{y \in R} y \cdot \xi = b(\xi), \qquad \min_{y \in R} y \cdot \xi = -a(\xi)^{1)}.$$

Тогда $k(p, \xi) = 0$ для всех p, для которых не выполняются неравенства $-a(\xi) \leqslant p \leqslant b(\xi)$. Поэтому уравнение (6.7) можно записать в виде

$$\gamma(s) = \int\limits_{-a(\xi)}^{b(\xi)} \Phi(s + p)\, k(p, \xi)\, dp. \tag{6.9}$$

Пусть функция $\Phi(s)$ задана на интервале $(-a(\xi), b(\xi))$:

$$\Phi(s) = \psi(s) \text{ при } -a(\xi) < s < b(\xi). \tag{6.10}$$

Тогда уравнение (6.9) при $0 < s < a(\xi) + b(\xi)$ можно записать в виде

$$\gamma(s) = \int\limits_{0}^{s} \Phi(q + b(\xi))\, k(q + b(\xi) - s, \xi)\, dq + \\ + \int\limits_{s-a(\xi)}^{b(\xi)} \psi(q)\, k(q - s, \xi)\, dq. \tag{6.11}$$

На интервале

$$b(\xi) < t < a(\xi) + 2b(\xi) \tag{6.12}$$

(6.11) является интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно функции $\Phi(t)$. Если это уравнение можно решить относительно $\Phi(t)$ на интервале (6.12), то аналогичное интегральное уравнение для $\Phi(t)$ получим и на следующем интервале длины $a + b$:

$$a(\xi) + 2b(\xi) < t < 2a(\xi) + 3b(\xi).$$

Продолжая таким же образом дальше этот процесс и применяя аналогичный процесс для отрицательных t, мы получим последовательность интегральных уравнений, подобных уравнению (6.11), которые определяют $\Phi(t)$ при всех t. Разрешимость уравнения Вольтерра первого рода существенно зависит от поведения ядра

[1] В других обозначениях $b(\xi) = H(\xi)$, $-a(\xi) = -b(-\xi) = -H(-\xi)$, где $H(\xi)$ — опорная функция для тела R. См. Bonnesen und Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934, S. 23, 24.

вблизи верхнего предела, т. е. от поведения $k(p, \xi)$ при p, близких к $b(\xi)$. Можно показать, что для области R с достаточно регулярной границей функция $k(t,\xi)$ ведет себя вблизи $t = b(\xi)$ как

$$\frac{\omega_{n-1}}{n^2-1} 2^{(n+1)/2} (b(\xi) - p)^{(n+1)/2} \frac{K(y^0)}{\sqrt{\varrho(y^0)}},$$

где y^0 — точка соприкосновения плоскости $y \cdot \xi = b(\xi)$ с границей области R, а $\varrho(y^0)$ — произведение главных кривизн граничной поверхности в y^0. Это выражение показывает, что если $K(y) \neq 0$ на границе R, то интегральное уравнение (6.11) можно свести частным дифференцированием по s подходящего порядка к уравнению Вольтерра второго рода, которое в свою очередь можно решить итерациями.

Это дает возможность решить уравнения (6.6) относительно Φ, когда, кроме того, значения Φ заданы на интервале (6.10). В частности, при $\gamma = 0$ должно существовать решение типа плоской волны с заданными в (6.10) значениями. Эти решения можно рассматривать как функции, периодические в среднем.

Можно ожидать, что при $g \equiv 0$ решение $f(x)$ уравнения (6.2) существует и в более общем случае, когда $f(x)$ совпадает с заданной функцией $h(x)$ для x, принадлежащих R. Если функция f должна быть регулярной, то $h(x)$ должна удовлетворять некоторым условиям на границе R. Так, если $f(x)$ должна быть непрерывной, то необходимым условием будет

$$\int_R h(y) K(y)\, dy = 0.$$

Если f должна обладать непрерывными первыми производными, то должны выполняться также условия

$$\int_R h_{y_i}(y) K(y)\, dy = 0 \text{ при } i = 1, \ldots, n.$$

При нечетном числе измерений функцию $h(x)$ можно в силу (1.14) записать как комбинацию плоских волн:

$$h(x) = \int_{\Omega_\xi} \psi(x \cdot \xi, \xi)\, d\omega_\xi,$$

если только $h(x)$ достаточно регулярна и обращается в нуль вне некоторого ограниченного множества. Здесь

$$\psi(p, \xi) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}} \frac{1}{2(2\pi i)^{n-1}} \int_{y \cdot \xi = p} h(y)\, dS_y.$$

Предположим, что можно найти решение уравнения

$$T_\xi \Phi(s, \xi) = 0,$$

которое непрерывно по ξ и p и для которого

$$\Phi(s,\xi) = \psi(s,\xi) \text{ при } -a(\xi) < s < b(\xi).$$

Тогда мы получим, что

$$f(x) = \int\limits_{\Omega_\xi} \Phi(x \cdot \xi,\ \xi)\, d\omega_\xi$$

является периодической в среднем функцией, совпадающей с $h(x)$ при x, принадлежащем R. Действительно, $Tf = 0$, так как $T\Phi(x \cdot \xi, \xi) = T_\xi \Phi(s, \xi) = 0$ для каждого ξ. Кроме того, для x из R в выражение $\Phi(x \cdot \xi, \xi)$ входят только те значения $\Phi(p, \xi)$, для которых $-a(\xi) < p < b(\xi)$ и, следовательно, для которых Φ можно заменить на ψ, так что f сводится к h.

Функции, определенные при помощи их интегралов по сферам радиуса 1. Ограничимся теперь такими операторами T, для которых уравнение (6.1) принимает вид

$$g(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\Omega_y} f(x+y)\, d\omega_y, \tag{6.13}$$

а число измерений n пусть равно 3. Для этого случая докажем строго некоторые из результатов, полученных выше эвристически. Если ввести сферическое среднее общего вида $I(x, r)$ и итерированное сферическое среднее $M(x, \lambda, \mu)$ функции f так же, как оно было определено в равенствах (4.1), (4.7), то уравнение (6.13) можно записать в виде

$$I(x,\ 1) = g(x). \tag{6.14}$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$I(x,\ 1) = 0, \tag{6.15}$$

предполагая при этом, что функция f непрерывна при всех x. Следствием уравнения (6.15) является то, что для всех λ

$$M(x,\ \lambda,\ 1) = 0. \tag{6.16}$$

Из тождества (4.9с) при $n = 3$, $\mu = 1$ следует, что

$$\int\limits_{\lambda-1}^{\lambda+1} rI(x,\ r)\, dr = 0.$$

Дифференцируя по λ, найдем, что функция $rI(x, r)$ имеет период 2. Из (6.15), в частности, имеем, что

$$I(x,\ 2n+1) = 0 \text{ для всех целых } n.$$

Отсюда мы непосредственно получаем теорему единственности: *Если $f(x)$ — непрерывное решение уравнения* (6.15) *и если*

$$\lim_{x\to\infty} |x|\, f(x) = 0, \tag{6.17}$$

то $f(x) \equiv 0$.

Действительно, из условия (6.17) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} rI(x, r) = 0$$

и, следовательно, в силу периодичности $rI(x, r)$, что $rI(x, r) \equiv 0$. Значит, $I(x, r) \equiv 0$ и, в частности, $f(x) = I(x, 0) = 0$.

Вместо того чтобы задавать для решения $f(x)$ уравнения (6.15) условия на бесконечности, можно попытаться определить f единственным образом, задавая его значения в шаре с центром в начале координат. Здесь справедлива следующая теорема:

Пусть $f(x)$ — непрерывное решение уравнения (6.14) *и ε — произвольное положительное число. Тогда $f(x)$ единственным образом определяется своими значениями в шаре $|x| < 1 + \varepsilon$. С другой стороны, $f(x)$ не определяется своими значениями в шаре $|x| \leqslant 1$, даже если ограничиться функциями $f(x)$ из любого класса C_m. (Функция f определяется в этом случае, если предположить, что она принадлежит классу C_∞.)*

Для доказательства первой части теоремы предположим, что $f(x)$ — непрерывное решение уравнения (6.15) и что $f(x) = 0$ при $|x| < 1 + \varepsilon$. Тогда, очевидно,

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon, \ |r| \leqslant 1.$$

Так как $rI(x, r)$ как функция r имеет период 2, то отсюда следует, что

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon \quad \text{и всех} \quad r.$$

Это позволяет заключить, что $f(x)$ обращается в нуль при всех x[1]. Действительно, имеет место тождество

$$\int_{\Omega_\xi} f(x + R\xi)(x_i + R\xi_i)\, d\omega_\xi = x_i \int_{\Omega_\xi} f(x + R\xi)\, d\omega_\xi + \\ + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^R r^2\, dr \int_{\Omega_\xi} f(x + r\xi)\, d\omega_\xi, \tag{6.18}$$

которое проверяется непосредственно, если записать последний интеграл как объемный и произвести дифференцирование. Далее, из (6.18) вытекает следующий результат: если $f(x)$ — непрерывная функция, обладающая тем свойством, что интегралы от f по любой сфере с центром в ε-окрестности начала координат обращаются в нуль, то этим же свойством обладают функции $x_i f(x)$. Применяя это рассуждение несколько раз, мы найдем, что для любого полинома $P(x)$ функция $P(x)f(x)$ обладает тем свойством, что обращаются в нуль интегралы от нее по сферам, центры которых лежат в ε-окрестности начала координат. Поскольку полиномы образуют полное множество функций на любой сфере,

---

[1] Об этом рассуждении см. Курант—Гильберт [1], т. II, стр. 238.

отсюда следует, что функция $f(x)$ обращается в нуль на любой сфере с центром в начале координат. Поэтому $f(x) \equiv 0$.

Тот же результат получается, если предположить, что f является решением уравнения (6.15) класса C_∞, обращающимся в нуль при $|x| \leqslant 1$. В этом случае из периодичности функции $rI(x, r)$ мы получаем, что существуют все производные функции $I(x, r)$ и что при $x = 0$ и всех r они обращаются в нуль вместе с $I(x, r)$. Из уравнения (6.16) вытекает, что сферические средние функций $x_i f(x)$ обладают тем же свойством. Тогда интеграл от $P(x)f(x)$ по любой сфере с центром в начале координат обращается в нуль и, значит, функция f равна нулю.

С другой стороны, для любого конечного m можно построить нетривиальное решение $f(x)$ уравнения (6.15) класса C_m, которое обращается в нуль при $|x| \leqslant 1$[1].

Пусть $\Phi(s)$ — непрерывная функция периода 2, для которой

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(s)\, ds = 0. \tag{6.19}$$

Тогда $\Phi(x \cdot \xi)$ является решением уравнения (6.15) при любом ξ, $|\xi| = 1$. Можно определить функцию $\Phi(s)$ так, чтобы она при всех s принадлежала классу C_m, удовлетворяла условию (6.19) и при $|s| \leqslant 1$ сводилась бы к полиному по s. Такая функция получится, например, если положить

$$\Phi(s) = s(1 - s^2)^{m+1} \quad \text{при} \quad |s| \leqslant 1, \tag{6.20}$$

а для $|s| > 1$ продолжить $\Phi(s)$ периодически. Определим теперь функцию $f(x)$ равенством

$$f(x) = \int_{\Omega_\xi} \Phi(x \cdot \xi)\, Q(\xi) d\omega_\xi, \tag{6.21}$$

где $Q(\xi)$ — подходящим образом подобранная непрерывная функция. Ясно, что так определенная f есть решение уравнения (6.15) класса C_m. Пусть μ равно степени полинома, к которому при $|s| \leqslant 1$ сводится $\Phi(s)$. [Если взята функция (6.20), то $\mu = 2m + 3$.] Возьмем за $Q(\xi)$ функцию, которая на сфере $|\xi| = 1$ ортогональна всем полиномам $P(\xi)$ степени $\leqslant \mu$, но не ортогональна на этой сфере функции $\Phi(2\xi_1)$. Это возможно, так как полиномы $P(\xi)$ степени $\leqslant \mu$ образуют *конечномерное* пространство, а функция $\Phi(2\xi_1)$ заведомо не является на этой сфере полиномом. (Всегда существует некоторый полином, который можно взять за Q.) Тогда $f(x) = 0$ при $(x) \leqslant 1$, так как $|x \cdot \xi| \leqslant 1$, и, следовательно, $\Phi(x \cdot \xi)$ сводится на Ω_ξ к полиному по ξ степени μ. Кроме того, построенная нами

[1] Аналогичное, но более сложное построение в случае двух переменных см. у Йона [2], стр. 555 и далее.

функция f не обращается в нуль тождественно, потому что при $x = (2, 0, 0)$

$$f(x) = \int_{\Omega_\xi} \Phi(2\xi_1)\, Q(\xi)\, d\omega_\xi \neq 0. \tag{6.21a}$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Функция $f(x)$, заданная равенством (6.21), не может быть тождественным нулем ни в каком шаре радиуса > 1 с центром в начале координат, так как иначе она обращалась бы в нуль всюду в силу теоремы единственности. Кроме того, для этой функции f

$$I(x, r) \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \ |r - 1| \leqslant \varepsilon, \tag{6.22}$$

где ε — любое положительное число. В самом деле, из равенства

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \ |r - 1| \leqslant \varepsilon$$

в соединении с тем фактом, что

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \ |r| \leqslant 1 - \varepsilon$$

[следующим из того, что $f(x) = 0$ при $|x| \leqslant 1$], вытекало бы

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon, \ -1 + \varepsilon \leqslant r \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Поскольку функция $rI(x, r)$ имеет по r период 2, отсюда следовало бы, что

$$I(x, r) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \varepsilon \quad \text{и всех} \quad r.$$

Но это означает, что f должна быть непрерывной функцией, у которой обращаются в нуль интегралы по всем сферам с центрами в ε-окрестности начала координат. Как было показано ранее, отсюда следует, что $f(x) = 0$ при всех x, а это противоречит условию (6.21a).

Для дальнейшего изучения уравнения (6.14) и построения его решений мы ограничимся функциями $f(x)$ класса C_2. Тогда $I(x, r)$ тоже принадлежит C_2, а

$$u(x, t) = tI(x, t) \tag{6.23}$$

является в силу (2.32) решением волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} \tag{6.24}$$

с начальными значениями

$$u = 0, \qquad u_t = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{6.25}$$

Решение уравнения (6.14) сводится тогда к отысканию решения уравнения (6.24) с заданными на гиперплоскостях $t = 1$ и $t = 0$ значениями, причем $u(x, t)$ должно принадлежать при $0 \leqslant t \leqslant 1$ классу C_2.

Нашу теорему единственности можно переформулировать для решения u. Прежде всего, $u(x, t)$ единственным образом определяется своими значениями при $t=1$ и $t=0$, если потребовать, чтобы

$$\lim_{x \to \infty} |x|\, u_t(x, 0) = 0.$$

Далее, $u(x, t)$ единственным образом определяется значениями $u(x, 1)$ и $u(x, 0)$, заданными при всех x, если, кроме того, производная $u_t(x, 0)$ при $|x| < 1 + \varepsilon$ задана. Решение u уравнения (6.24) *не определяется* значениями $u(x, 1)$ и $u(x, 0)$ при всех x и значениями $u_t(x, 0)$ при $|x| \leqslant 1$, если не предполагают, что u принадлежит классу C_∞.

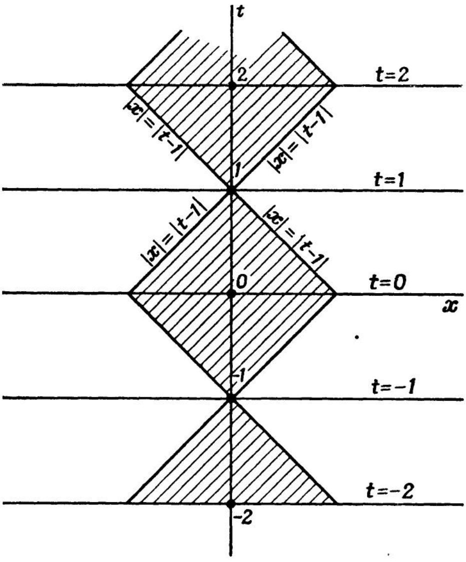

Рис. 9

Обычно решение u волнового уравнения определяется по заданным значениям $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$. Представляет интерес заменить эти данные теми, которые получаются, если рассматривать значения самого решения $u(x, t)$ (вместо его производной по t) при двух различных t, скажем при $t=0$ и $t=1$. Как мы здесь видели, u не определяется такими данными, если, кроме того, не налагаются условия на бесконечности. Однако $u(x, t)$ единственным образом определяется для всех *целых* t по $u(x, 0)$ и $u(x, 1)$ (потому что $u(x, t)$ имеет по t период 2, если $u(x, 0) = u(x, 1) = 0$). Чтобы определить u при нецелых значениях t, нужны дополнительные данные, например значения $u_t(x, 0)$ при $|x| < 1 + \varepsilon$.

Пусть $f(x)$ — функция, заданная в (6.21), а $u(x, t) = tI(x, t)$ — соответствующее решение задачи (6.24), (6.25). Тогда [см. рис. 9 и неравенство (6.22)]:

$$\begin{aligned}
&u(x, t) = -u(x, -t) = u(x, 2+t) = -u(x, 2-t) && \text{для всех } x, t,\\
&u(x, n) = 0 && \text{для всех целых } n\\
&u(x, t) = 0 && \text{для } |x| + |t| \leqslant 1,\\
&u(x, t) \not\equiv 0 && \text{для } (x, t) \text{ в окрестности } x=0,\ t=1.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$u(x, t) = 0 \text{ для } |x| = |t-1|,\ 0 < t < 2.$$

Как следствие мы получаем теорему о том, что значений решения $u(x, t)$ уравнения (6.24), заданных на *конечной* части двойного характеристического конуса $|x| = |1 - t|$, недостаточно для определения значений u во всей окрестности вершины конуса. (Здесь это доказано только для части двойного конуса, заключенной в полосе $0 < t < 2$; для любой ограниченной части конуса доказательство нашего утверждения можно получить, пользуясь преобразованием подобия по x и t, не меняющим уравнения (6.24).) Следовательно, решение такой „внешней" характеристической краевой задачи не имеет конечной области зависимости.

Обратимся теперь к решению однородного уравнения

$$I(x,\ 1) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_\xi} f(x + \xi)\, d\omega_\xi = 0, \tag{6.26}$$

для которого зададим

$$f(x) = h(x) \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 1. \tag{6.27}$$

Для простоты будем предполагать, что заданная функция $h(x)$ при всех x принадлежит классу C_2 и обращается в нуль при $|x| > 1$.

Построим решение $\bar{u}(x, t)$ волнового уравнения с начальными данными

$$\bar{u}(x,\ 0) = 0, \qquad \bar{u}_t(x,\ 0) = h(x). \tag{6.28}$$

Мы знаем, что это решение задается выражением

$$\bar{u}(x,\ t) = t\bar{I}(x,\ t) = \frac{t}{4\pi} \int\limits_{\Omega_\xi} h(x + t\xi)\, d\omega_\xi. \tag{6.29}$$

Так как функция $h(x)$ равна нулю при $|x| \geqslant 1$, то $\bar{u}(x,\ t) = 0$, если не выполняются неравенства

$$|x| - 1 < |t| < |x| + 1. \tag{6.30}$$

Образуем теперь выражение

$$u(x,\ t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{u}(x,\ t + 2n). \tag{6.31}$$

Здесь сумма в правой части содержит только конечное число неравных нулю членов, так как в силу (6.30) только те значения n играют роль, для которых

$$|x| - 1 < |t + 2n| < |x| + 1. \tag{6.32}$$

Поскольку $\bar{u}(x, t)$ есть решение волнового уравнения класса C_2, то таким же будет $u(x, t)$. Кроме того, в силу определения (6.30) функция $u(x, t)$ имеет по t период 2. Так как $\bar{u}(x, t)$ — нечетная функция t, функция $u(x, t)$ тоже нечетна по t. Функция $u(x, t)$, как нечетная функция периода 2, обращается в нуль при всех целых t. Положим

$$f(x) = u_t(x, 0), \qquad I(x, t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega_\xi} f(x + t\xi)\, d\omega_\xi.$$

Так как $u(x, 0) = 0$, то мы получаем из равенства (6.23), что $u(x, t) = tI(x, t)$. Поскольку и $u(x, 1) = 0$, мы видим, что $f(x)$ является

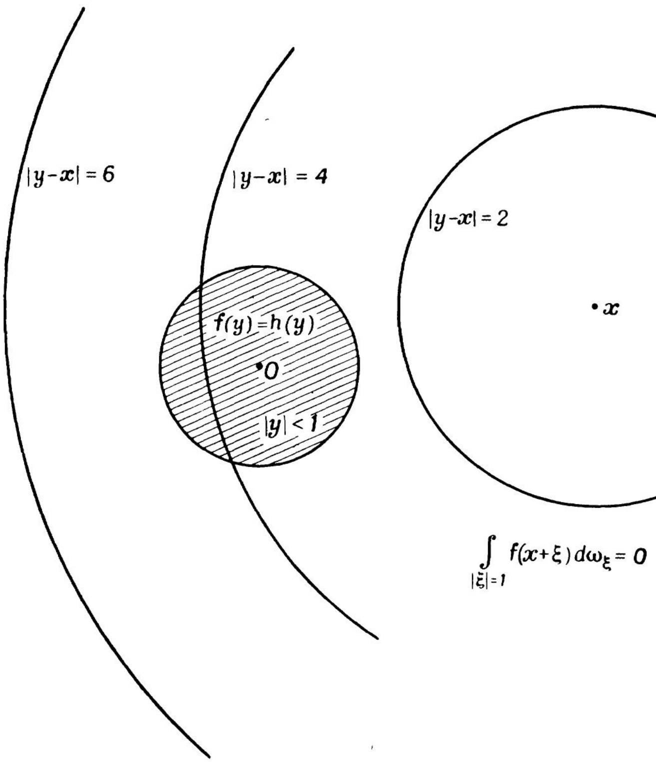

Рис. 10

решением уравнения (6.26) класса C_1. Из формул (6.31), (6.30) мы находим теперь, что для $|x| < 1$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{u}_t(x, 2n) = \bar{u}_t(x, 0) = h(x).$$

Таким образом, построенная нами функция $f(x)$ удовлетворяет как условию (6.26), так и условию (6.27).

При $|x| > 1$ можно объединить члены с n и $-n$, которые будут в этом случае равны. Тогда получается (рис. 10), что

$$f(x) = 2\bar{u}_t(x,\ 2n) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{t}{2\pi}\int\limits_{\Omega_\xi} h(x + t\xi)\,d\omega_\xi\right]_{t=2n}, \tag{6.33}$$

где n — целое положительное число, для которого

$$|x| - 1 < 2n \leqslant |x| + 1. \tag{6.34}$$

Аналогичным образом можно построить частное решение *неоднородного* уравнения (6.13). Здесь мы предположим, что функция $g(x)$ принадлежит классу C_3 и что $g(x)$ и ее производные порядков $\leqslant 3$ стремятся при $x \to \infty$ к нулю не медленнее, чем $|x|^{-3}$. Построим решение $\bar{u}(x, t)$ волнового уравнения с начальными данными

$$\bar{u}(x,\ 0) = 0, \qquad \bar{u}_t(x,\ 0) = g(x).$$

Тогда

$$\bar{u}(x,\ t) = t\bar{I}(x,\ t),$$

где $\bar{I}(x, t)$ — сферическое среднее функции g. Образуем выражение

$$u(x,\ t) = -\sum_{n=0}^{\infty}[\bar{u}_t(x,\ 2n + 1 + t) - \bar{u}_t(x,\ 2n + 1 - t)].$$

В предположениях, сделанных относительно функции $g(x)$, это выражение снова является решением волнового уравнения. Очевидно, что $u(x,\ 0) = 0$. Положим

$$f(x) = u_t(x,\ 0).$$

Тогда среднее значение функции $f(x)$ по сфере радиуса 1 с центром x имеет вид

$$u(x,\ 1) = -\sum_{n=0}^{\infty}[\bar{u}_t(x, 2n + 2) - \bar{u}_t(x, 2n)] = \bar{u}_t(x,\ 0) = g(x).$$

Таким образом, $f(x)$ представляет собой решение уравнения (6.13) класса C_1. Здесь $f(x)$ можно записать так:

$$f(x) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\bar{u}_{tt}(x, 2n + 1) = -\Delta_x\sum_{n=0}^{\infty}2\bar{u}(x,\ 2n + 1) =$$

$$= -2\Delta_x\sum_{n=0}^{\infty}(2n + 1)\,\bar{I}(x,\ 2n + 1) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2\pi(2n + 1)}\int\limits_{|y| = 2n+1}\Delta_x\,g(x + y)dS_y. \tag{6.35}$$

Определение поля сил по его действию на подвижную сферу. В качестве физического приложения рассмотрим задачу об определении поля сил по измерениям его действия на „однородную" сферу, движущуюся в этом поле. Предположим, что сфера не действует на поле, что силы приложены только к поверхности сферы и что в каждом положении сферы мы можем измерить результирующую силу и результирующий момент. Пусть сфера имеет радиус 1, а поле имеет всюду определенные компоненты $F_i(x)$, где $i = 1, 2, 3$. (Мы рассматриваем пример гравитационного поля, действующего на „тонкую" сферическую оболочку радиуса 1.) Спрашивается, в какой мере поле может быть таким образом определено. Если поле не действует на тело, то для всех x и $i, k = 1, 2, 3$ справедливы уравнения

$$\int_{\Omega_\xi} F_i(x+\xi)\, d\omega_\xi = 0,$$

$$\int_{\Omega_\xi} [F_i(x+\xi)\,\xi_k - F_k(x+\xi)\,\xi_i]\, d\omega_\xi = 0. \tag{6.36}$$

Обозначим через $I_i(x, r)$ сферическое среднее функции $F_i(x)$ по сфере радиуса r с центром в точке x, а через $I_{ik}(x, r)$ — сферическое среднее функции $F_i(x)x_k - F_k(x)x_i$. Тогда, согласно уравнениям (6.36), $I_i(x, r)$ и $I_{ik}(x, r)$ обращаются в нуль при $r = 1$. Отсюда, так же как раньше, получается, что $rI_i(x, r)$ и $rI_{ik}(x, r)$ являются периодическими по r функциями периода 2. Воспользуемся тождеством

$$\int_0^r \left[\frac{\partial I_i(x, \lambda)}{\partial x_k} - \frac{\partial I_k(x, \lambda)}{\partial x_i}\right]\lambda^2\, d\lambda =$$

$$= r\left[I_{ik}(x, r) + x_i I_k(x, r) - x_k I_i(x, r)\right], \tag{6.37}$$

которое легко проверить, записав правую часть как объемный интеграл. Выражение в правой части тождества (6.37) имеет по r период 2. Значит, то же самое имеет место для выражения в левой части, а также для его производных по r. Поэтому выражение

$$r^2\left(\frac{\partial I_i(x, r)}{\partial x_k} - \frac{\partial I_k(x, r)}{\partial x_i}\right)$$

имеет период 2. Так как и выражение

$$r\left(\frac{\partial I_i(x, r)}{\partial x_k} - \frac{\partial I_k(x, r)}{\partial x_i}\right)$$

имеет период 2, то отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial I_i(x, r)}{\partial x_k} - \frac{\partial I_k(x, r)}{\partial x_i} \equiv 0.$$

В частности, при $r = 0$

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_i} \equiv 0.$$

Следовательно, существует функция $f(x)$, для которой

$$F_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}.$$

Из уравнений (6.36) мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{\Omega_\xi} f(x+\xi)\, d\omega_\xi = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, сферическое среднее функции $f(x)$ по сферам радиуса 1 не зависит от положения центра сферы. Прибавив к f подходящую постоянную, мы можем добиться того, чтобы

$$\int\limits_{\Omega_\xi} f(x+\xi)\, d\omega_\xi = 0. \tag{6.38}$$

Итак, поле сил наиболее общего вида, которое не будет оказывать никакого действия на сферу радиуса 1, должно иметь периодический в среднем „потенциал" $f(x)$, т. е. потенциал, удовлетворяющий условию (6.38). Точнее, если при $|x| < R+1$ справедливы уравнения (6.36), то при $|x| < R$ существует такой потенциал сил $f(x)$. Неконсервативное поле сил оказывает действие на сферу при некоторых положениях ее центра.

Глава VII

СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канонические системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим множество функций $u_1, \ldots, u_N$ независимых переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Для простоты обозначим через $u_{i,\alpha}$ частную производную u_i по x_α. Вообще индексами, стоящими после запятой, будем обозначать дифференцирование по соответствующей переменной x. Кроме того, для суммирования мы опять будем применять сокращенную запись.

Элемент x-пространства состоит из точки и плоскости, проходящей через эту точку. Его можно задать координатами x этой точки и направляющими числами ξ нормали к плоскости и записать как (x, ξ). Таким образом, при $\xi \neq 0$ символ (x, ξ) обозначает комбинацию точки x и плоскости $(y - x) \cdot \xi = 0$, где y — текущие координаты.

Мы скажем, что u_i удовлетворяют *канонической системе дифференциальных уравнений*, если для каждого x из некоторой области D существуют рациональные функции $T_{m\alpha}$, $S_{mr\alpha\beta}$, однородные по ξ с нулевой степенью, которые удовлетворяют тождеству

$$S_{mr\alpha\beta}\, \xi_\beta = 0 \tag{7.1}$$

и для которых

$$u_{m,\alpha} = T_{m\alpha} + S_{mr\alpha\beta}\, u_{r,\beta}, \tag{7.2}$$

когда x принадлежит D, а ξ не равно нулю и не является полюсом какой-либо из функций $T_{m\alpha}$ или $S_{mr\alpha\beta}$.

Если рассматривать (7.2) как систему дифференциальных уравнений, то она весьма *переопределена*, потому что мы имеем уравнения не только для каждой точки x, но и для каждого элемента, проходящего через эту точку. Мы увидим, однако, что хорошо определенные системы дифференциальных уравнений допускают канонические системы. Система (7.2), (7.1) выражает любую первую производную функции u_m через первые производные всех функций u_k, взятые в направлении, касательном к элементу (x, ξ). Если ξ отлично от нуля и таково, что одна из рациональных функций $T_{m\alpha}$ или $S_{mr\alpha\beta}$ становится при этом значении ξ бесконечной (т. е. ξ является ее полюсом), то мы называем элемент (x, ξ) *характеристическим* для системы (7.2). Нехарактеристический элемент (x, ξ) называется *свободным*. Если все элементы (x, ξ) свободные, т. е. если рациональные функции T_{ma} и $S_{mr\alpha\beta}$ не имеют действительных полюсов $\xi \neq 0$, то мы называем систему канонических уравнений *эллиптической*. Если T_{ma}, $S_{mr\alpha\beta}$ являются заданными функциями x, ξ и u_i, то мы называем систему (7.2) *квазилинейной*. (Тогда T и S для каждой системы решений $u_i(x)$ будут функциями только от x и ξ.) Здесь предполагается, что для допустимых функций $u_i(x)$ при фиксированном x, а следовательно, и при фиксированных значениях $u_i(x)$, функции T_{ma} и $S_{mr\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (7.1) и являются при всех ξ однородными функциями ξ нулевой степени. Если функции $S_{mr\alpha\beta}$ не зависят от u_i, а функции T_{mr} линейны по u_i, то каноническая система называется *линейной*.

Приведение определенных систем дифференциальных уравнений к каноническому виду. Начнем с разложения произвольной первой производной $u_{,\alpha}$ функции $u(x)$ на „нормальную" и „касательную" производные относительно элемента (x, ξ). Обозначим через ϱ^2 выражение $\xi^2 = \xi \cdot \xi$, которое представляет собой квадратичную форму по ξ. Тогда тождественно по x и ξ

$$u_{,\alpha}(x) = \varrho^{-2}\xi_\alpha \xi_\beta u_{,\beta} + (\delta_\alpha^\beta - \varrho^{-2}\xi_\alpha \xi_\beta)\, u_{,\beta}. \tag{7.3}$$

Второй член в правой части является касательной производной, потому что

$$(\delta_\alpha^\beta - \varrho^{-2}\xi_\alpha \xi_\beta)\, \xi_\beta \equiv 0. \tag{7.4}$$

Если вместо $\partial/\partial x_\alpha$ ввести символ D_α, то тождество (7.3) можно записать в виде

$$D_\alpha = L'_\alpha + L''_\alpha, \tag{7.5}$$

где

$$L'_\alpha = \varrho^{-2}\xi_\alpha \xi_\beta D_\beta, \qquad L''_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - \varrho^{-2}\xi_\alpha \xi_\beta)\, D_\beta. \tag{7.6}$$

Выражения L'_α и L''_α при фиксированном ξ являются здесь линейными однородными операторами первого порядка с постоянными коэффициентами. Кроме того, L''_α имеет вид $c_\beta D_\beta$, где $c_\beta \xi_\beta = 0$. Вообще любой однородный дифференциальный оператор L некоторого порядка m с постоянными коэффициентами мы назовем *касательным* к элементу (x, ξ), если L можно записать в виде

$$L = c_{i\beta} D_\beta L_i, \tag{7.7}$$

где L_i — однородные дифференциальные операторы порядка $m - 1$ с постоянными коэффициентами, а $c_{i\beta}$ — постоянные, удовлетворяющие уравнению

$$c_{i\beta}\, \xi_\beta = 0. \tag{7.8}$$

Здесь $\beta = 1, \ldots, n$, а i пробегает любое конечное множество положительных целых чисел. Ясно, что если L и M — любые однородные операторы с *постоянными* коэффициентами и если L касателен к (x, ξ), то LM и ML тоже касательны к нему (в самом деле, $LM = ML = c_{i\beta} D_\beta L_i M$). Кроме того, если L и M одного порядка и оба касательны к элементу (x, ξ), то и $L + M$ касателен к тому же элементу.

При фиксированном ξ оператор L''_α касателен к (x, ξ) в определенном здесь смысле. Следовательно,

$$\begin{aligned} D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \ldots D_{\alpha_m} &= (L'_{\alpha_1} + L''_{\alpha_1})(L'_{\alpha_2} + L''_{\alpha_2}) \ldots (L'_{\alpha_m} + L''_{\alpha_m}) = \\ &= L'_{\alpha_1} L'_{\alpha_2} \ldots L'_{\alpha_m} + M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \alpha_m} = \\ &= \varrho^{-2m} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_m} (\xi_\beta D_\beta)^m + M_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

где $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ — касательный оператор. Поскольку равенство (7.9) на самом деле удовлетворяется тождественно при всех ξ, то мы получаем, что в области D оператор $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ представляет собой однородный дифференциальный оператор порядка m, коэффициенты которого являются рациональными однородными функциями степени 0 по ξ. Точнее, каждый коэффициент, умноженный на ϱ^{2m}, представляет собой форму степени $2m$ по ξ. Поскольку $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ — касательный оператор, он может быть представлен в виде

$$M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = c_{i\beta} D_\beta P_i, \tag{7.10}$$

где P_i — дифференциальные операторы порядка $m - 1$ и постоянные $c_{i\beta}$ удовлетворяют уравнению (7.8). Из равенства (7.9) очевидно, что каждый входящий в $M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ член, который равен произведению операторов, содержит по крайней мере один сомножитель L''_α с некоторым α. Следовательно, фактически имеет место представление вида

$$M_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (\delta^\beta_\alpha - \varrho^{-2} \xi_\alpha \xi_\beta) D_\beta P_{\alpha \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}, \tag{7.11}$$

где $P_{\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_m}$ — однородный дифференциальный оператор порядка $m - 1$ с рациональными по ξ коэффициентами, знаменатель которого равен $\varrho^{2(m-1)}$, а числитель является формой степени $2(m - 1)$. Например, при $m = 2$

$$\begin{aligned} D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} &= \varrho^{-4} \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} (\xi_\beta D_\beta)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\delta^\alpha_\beta - \varrho^{-2} \xi_\alpha \xi_\beta) D_\beta [\delta^\alpha_{\alpha_1} (\delta^\gamma_{\alpha_2} + \varrho^{-2} \xi_{\alpha_2} \xi_\gamma) + \\ &+ \delta^\alpha_{\alpha_2} (\delta^\gamma_{\alpha_1} + \varrho^{-2} \xi_{\alpha_1} \xi_\gamma)] D_\gamma. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Пусть теперь L — линейный дифференциальный оператор порядка m с переменными коэффициентами. Можно записать L в виде

$$L = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \ldots D_{\alpha_m} + L', \tag{7.13}$$

где L' — оператор не более чем $(m-1)$-го порядка. *Характеристическая* форма оператора L определяется равенством

$$Q = A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \xi_{\alpha_1} \ldots \xi_{\alpha_m} = Q(A, \xi). \tag{7.14}$$

Тогда по формулам (7.9), (7.11)

$$L = \varrho^{-2m} Q(A, \xi)(\xi_\beta D_\beta)^m + L' + \\ + A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}(\delta_\alpha^\beta - \varrho^{-2} \xi_\alpha \xi_\beta) D_\beta P_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_m}. \tag{7.15}$$

Здесь через A обозначено множество коэффициентов $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$.

Рассмотрим теперь квазилинейную систему уравнений

$$L_{ik}[\nu^k(x)] = B_i \quad (i, k = 1, \ldots, N) \tag{7.16}$$

относительно зависимых переменных $\nu^1(x), \ldots, \nu^N(x)$. Здесь L_{ik} — линейный однородный оператор порядка m_k с характеристической формой Q_{ik} и коэффициентами $A^{ik}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}$. Каждый оператор L_{ik} можно представить в виде (7.15). Обозначим через $u_1(x), \ldots, u_{N'}(x)$ множество, образованное из функций $\nu^k(x)$ и из их производных порядков $\leqslant m_k - 1$, взятых в некотором порядке. Тогда A^{ik} и B_i являются известными функциями от x_l и u_k. Уравнения (7.16) принимают вид

$$\varrho^{-2m_k} Q_{\underline{i}k}(A^{\underline{ik}}, \xi)(\xi_\beta D_\beta)^{m_k}[\nu^k(x)] = B_i + c_{ir\beta}(A, \xi) D_\beta[u_r]. \tag{7.17}$$

Через A здесь обозначено множество всех коэффициентов $A^{ik}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m_k}}$, входящих во все операторы L_{ik}, а через A^{ik} обозначено множество коэффициентов, входящих в определенный оператор L_{ik}. Коэффициенты $c_{ir\beta}(A, \xi)$ линейны по A и рациональны по ξ. Точнее, они являются полиномами четной степени от ξ_α/ϱ. Кроме того, коэффициенты $c_{ir\beta}(A, \xi)$ тождественно по A и ξ удовлетворяют соотношениям

$$c_{ir\beta}(A, \xi)\, \xi_\beta = 0. \tag{7.18}$$

Характеристическая форма системы (7.16) имеет вид

$$Q(\mathrm{A}, \xi) = \det Q_{\underline{ik}}(A^{\underline{ik}}, \xi). \tag{7.19}$$

Она однородна по A со степенью N и однородна по ξ со степенью $\sum_{k=1}^{N} m_k$. Для тех значений A и ξ, для которых $Q(A, \xi) \neq 0$, можно построить матрицу $Q^{ik}(A, \xi)$, обратную матрице $Q_{\underline{ik}}(A^{\underline{ik}}, \xi)$. Каждый элемент $Q^{ik}(A, \xi)$ является дробью со знаменателем $Q(A, \xi)$ и числителем, который однороден по A со степенью $N-1$, а по ξ со степенью $\sum_{s=1}^{N} m_s - m_i$. Из уравнений (7.17) теперь вытекает, что

$$\varrho^{-2m_s}(\xi_\beta D_\beta)^{m_s}[\nu^s(x)] = Q^{si}(A,\ \xi)(B_i + c_{ir\beta}(A,\ \xi) D_\beta[u_r]). \quad (7.20)$$

Каждая первая производная любой из функций u_i равна либо другой функции u_k, либо производной порядка m_s некоторой функции ν^s. В последнем случае мы имеем, например,

$$\begin{aligned} u_{i,\beta} &= D_{\alpha_1}\dots D_{\alpha_{m_s}}\nu^s = \\ &= \varrho^{-2m_s}\xi_{\alpha_1}\dots\xi_{\alpha_{m_s}}(\xi_\beta D_\beta)^{m_s}[\nu^s] + M_{\alpha_1\dots\alpha_{m_s}}[\nu^s] = \\ &= \xi_{\alpha_1}\dots\xi_{\alpha_{m_s}} Q^{si}(A,\ \xi)(B_i + c_{ir\beta}(A,\ \xi) D_\beta[u_r]) + \\ &+ (\delta^\beta_\alpha - \varrho^{-2}\xi_\alpha\xi_\beta) D_\beta P_{\alpha\alpha_1\dots\alpha_{m_s}}[\nu^s] = \\ &= S_{ir\beta\alpha}u_{r,\alpha} + T_{i\beta}. \end{aligned}$$

Здесь выражение $T_{i\beta} = T_{i\beta}(A, B, \xi)$ рационально по своим аргументам. В действительности по B оно даже линейно, причем коэффициенты, умноженные на $Q(A, \xi)$, являются полиномами по A и ξ. Выражения $S_{ir\alpha\beta} = S_{ir\alpha\beta}(A, \xi)$ тоже рациональны по своим аргументам. Если умножить $S_{ir\alpha\beta}$ на $Q(A, \xi)$, то они сведутся к полиномам по A, ξ, $\xi_\alpha\xi_\beta/\varrho^2$. Кроме того, $S_{ir\alpha\beta}$ и $T_{i\beta}$ однородны по ξ со степенью 0 и тождественно по ξ и A удовлетворяют соотношениям

$$S_{ir\beta\alpha}\xi_\alpha = 0.$$

В случае, когда производная $u_{i,\beta}$ равна другой функции u_k, для $u_{i,\beta}$ тривиальным образом получается выражение

$$S_{ir\beta\alpha}u_{r,\alpha} + T_{i\beta}, \quad \text{где } S_{ir\beta\alpha} = 0, \text{ а } T_{i\beta} = u_k.$$

Таким образом, для любой системы решений ν^k уравнений (7.16) производные функции u_i удовлетворяют системе уравнений первого порядка, которая имеет канонический вид. Коэффициенты $T_{i\beta}$ и $S_{ir\alpha\beta}$ являются *универсальными функциями* первоначальных коэффициентов $A^{ik}_{\alpha_1\dots\alpha_{m_s}}$, B_i, а также u_r и ξ и, кроме этого, зависят только от целых чисел m_k, N, n. Если система (7.16) была квазилинейной, т. е. если A^{ik} и B_i были известными функциями x, ν^k и их производных порядков $\leqslant m_k - 1$, то $T_{i\beta}$ и $S_{ir\alpha\beta}$ являются известными функциями x, u, ξ. Если первоначальная система (7.16) была линейной, то $S_{ir\alpha\beta}$ будут известными функциями x и ξ, а $T_{i\beta}$ будут линейными по u_k функциями, коэффициенты которых — известные функции x и ξ.

Система (7.16) эллиптична, если $Q(A, \xi) \neq 0$ для всех действительных $\xi \neq 0$ и для всех рассматриваемых A [1]. (В квазилинейном

[1] Это определение эллиптической системы принадлежит И. Г. Петровскому. — *Прим. ред.*

случае эллиптический характер может зависеть от частного решения v^k, которое мы рассматриваем.) В случае эллиптической системы (7.16) коэффициенты соответствующей канонической системы для функции u_i не имеют действительных полюсов при $\xi \neq 0$.

Для доказательства *существования* решения с данными граничными значениями сведение *определенной* системы дифференциальных уравнений (7.16) к *переопределенной* системе (7.2) не слишком целесообразно, потому что для переопределенной системы на эти значения должны накладываться, разумеется, гораздо более ограничительные условия. Мы, однако, будем использовать такое сведение только для выяснения *свойств регулярности* решений v^k системы (7.16), когда существование самих решений предполагается заранее.

Свести эллиптическую систему уравнений высшего порядка к *определенной эллиптической* системе первого порядка было бы значительно труднее, чем провести приведенное здесь сведение к эллиптической канонической системе.

Такое сведение к канонической форме можно осуществить не только для квазилинейных систем уравнений, но также и для общих нелинейных систем. Здесь мы рассмотрим случай общего уравнения m-го порядка для одной неизвестной функции $u = u(x)$. Обозначим через $p_{i_1 \ldots i_k}$ производную $D_{i_1} \ldots D_{i_k} u$ функции u. Пусть через p обозначено множество функций, состоящее из функции u и всех ее производных порядков $\leqslant m$. Тогда дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F(x,\ p) = 0. \tag{7.21}$$

Дифференцируя по x_i, мы получим соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= F_{x_i} + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, n} F_{p_{i_1 \ldots i_k}} p_{i_1 \ldots i_k i} + \\ &+ \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1, \ldots, n} F_{p_{i_1 \ldots i_m}} p_{i_1 \ldots i_m i} = \\ &= F'_i(x,\ p) + \sum_{i_1, \ldots, i_m} F_{p_{i_1 \ldots i_m}} D_{i_1} \ldots D_{i_m} D_i u. \end{aligned}$$

Умножим эти уравнения на ξ_i, просуммируем по i и произведем замену

$$\begin{aligned} D_{i_1} \ldots D_{i_m} u = \varrho^{-2m} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m} (\xi_\beta D_\beta)^m [u] + \\ + M_{i_1 \ldots i_m}[u]. \end{aligned}$$

Положив

$$Q(x, p, \xi) = \sum_{i_1, \ldots, i_m} F_{p_{i_1 \ldots i_m}}(x,\ p)\, \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_m},$$

мы получаем тождество вида

$$0 = \varrho^{-2m} Q(x, p, \xi)\,(\xi_\beta D_\beta)^{m+1}[u] + \xi_i F_i'(x, p) + \\ + F_{p_{i_1}\dots i_m}(x, p)\,(\delta_\alpha^\beta - \varrho^{-2}\xi_\alpha\xi_\beta)\,D_\beta(\xi_\gamma D_\gamma)\,P_{\alpha i_1\dots i_m}[u] = \\ = \varrho^{-2m} Q(x, p, \xi)\,(\xi_\beta D_\beta)^{m+1}[u] + \xi_i F_i'(x, p) + \\ + R_{i\beta}(x, p, \xi)\,D_\beta p^i, \tag{7.22}$$

где через $p^1, \dots, p^N$ обозначены функции из множества p, взятые в некотором порядке, а $(1/\varrho)R(x, p, \xi)$ — полином нечетной степени по ξ_α/ϱ, для которого $R_{i\beta}\,\xi_\beta \equiv 0$.

Если $Q(x, p, \xi) \neq 0$, то тождество (7.22) можно разрешить относительно $(\xi_\beta D_\beta)^{m+1}[u]$. Далее, первая производная любой из функций p^i равна либо p^k, либо производной функции u порядка $m+1$. В последнем случае ее можно выразить в силу (7.9) через $(\xi_\beta D_\beta)^{m+1}u$ и через касательные производные функций u порядка $m+1$. Выражая нормальные производные $(\xi_\beta D_\beta)^{m+1}[u]$ при помощи тождества (7.22), мы опять получим для p^i каноническую систему дифференциальных уравнений. Если первоначальное уравнение было эллиптическим, т. е. если $Q(x, p, \xi) \neq 0$ для всех рассматриваемых x и p при всех действительных $\xi \neq 0$, то и полученная каноническая система будет эллиптической.

В качестве конкретного примера рассмотрим общее дифференциальное уравнение второго порядка от двух независимых переменных

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{7.23}$$

где $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$. Обозначим ξ_1, ξ_2 через ξ, η, а $\xi^2 + \eta^2$ — через ϱ^2. Характеристическая форма имеет вид

$$Q = F_r\,\xi^2 + F_s\,\xi\eta + F_t\,\eta^2. \tag{7.24}$$

Для того чтобы представить окончательную каноническую систему для u, p, q, r, s, t в удобном виде, введем ряд сокращенных обозначений. Для касательных составляющих операторов D_x и D_y воспользуемся обозначениями $\bar{D}_x$, $\bar{D}_y$:

$$\bar{D}_x = D_x - \varrho^{-2}\xi(\xi D_x + \eta D_y),\quad \bar{D}_y = D_y - \varrho^{-2}\eta(\xi D_x + \eta D_y).$$

Кроме того, положим

$$F' = \xi(F_x + pF_u + rF_p + sF_q) + \eta(F_y + qF_u + sF_p + tF_q),$$

$$A = \xi(1 + \varrho^{-2}\xi^2)\,r + \eta(1 + 2\varrho^{-2}\xi^2)\,s + \varrho^{-2}\xi\eta^2 t = \\ = (D_x(\xi D_x + \eta D_y) + \varrho^{-2}\xi(\xi D_x + \eta D_y)^2)\,[u],$$

$$B = \varrho^{-2}\xi^2\eta r + \xi(1 + 2\varrho^{-2}\eta^2)\,s + \eta(1 + \varrho^{-2}\eta^2)\,t = \\ = (D_y(\xi D_x + \eta D_y) + \varrho^{-2}\eta(\xi D_x + \eta D_y)^2)\,[u].$$

Каноническая система уравнений записывается так:

$$u_x = p, \quad u_y = q, \quad p_x = r, \quad p_y = q_x = s, \quad q_y = t, \tag{7.25}$$

$$r_x = \bar{D}_x r - \frac{F'}{Q} \varrho^{-2} \xi^3 -$$

$$- \frac{\varrho^{-2} \xi^3}{Q} \left\{ (F_r - \xi^{-2} Q) \bar{D}_x A + \frac{1}{2} F_s (\bar{D}_x B + \bar{D}_y A) + F_t \bar{D}_y B \right\},$$

$$r_y = s_x = \bar{D}_x s - \frac{F'}{Q} \varrho^{-2} \xi^2 \eta -$$

$$- \frac{\varrho^{-2} \xi^2 \eta}{Q} \left\{ F_r \bar{D}_x A + \frac{1}{2} (F_s - \xi^{-1} \eta^{-1} Q) (\bar{D}_x B + \bar{D}_y A) + F_t \bar{D}_y B \right\},$$

и, кроме того, имеют место еще два дополнительных уравнения для $s_y = t_x$ и t_y, которые получаются из двух последних уравнений при помощи перестановки.

Формула интегрирования по частям на сфере. Пусть $u(x)$ и $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, — функции класса C_1 в шаре $|x - z| \leqslant r$. Тогда

$$\int\limits_{|x-z|<r} a_i(x)\, u_{,i}(x)\, dx = - \int\limits_{|x-z|<r} a_{i,i}(x)\, u(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{r} \int\limits_{|x-z|=r} a_i(x)\, (x_i - z_i)\, u(x)\, dS_x.$$

Дифференцирование по r дает

$$\int\limits_{|x-z|=r} a_i(x)\, u_{,i}(x)\, dS_x = - \int\limits_{|x-z|=r} a_{i,i}(x)\, u(x)\, dS_x +$$

$$+ \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \int\limits_{|x-z|=r} a_i(x)\, (x_i - z_i)\, u(x)\, dS_x. \tag{7.26}$$

Поскольку в формулу (7.26) входят только значения функций a_i и u и их первых производных на сфере $|x - z| = r$, то она остается справедливой, если a_i и u определены и принадлежат классу C_1 только в окрестности поверхности $|x - z| = r$. Тогда эти функции всегда можно продолжить на весь шар как функции класса C_1. В частности, для a_i и u, принадлежащих классу C_1 в окрестности сферы $|x - z| = r$, мы получаем соотношение

$$\int\limits_{|x-z|=r} a_i(x)\, u_{,i}(x)\, dS_x = - \int\limits_{|x-z|=r} a_{i,i}(x)\, u(x)\, dS_x, \tag{7.27}$$

справедливое всякий раз, когда в этой окрестности функции $a_i(x)$ удовлетворяют равенству

$$a_i(x)\, (x_i - z_i) = 0. \tag{7.28}$$

Условие (7.28) означает, что выражение $a_i u_{,i}$ будет касательной производной функции u на сфере, описанной вокруг z.

Сферические интегралы от решений канонической системы. Пусть $u_i(x)$ — принадлежащие классу C_1 решения *линейной* эллиптической канонической системы (7.2). Пусть $b(x, \xi)$ и $a_i(x, \xi)$ при $\xi \neq 0$ являются функциями класса C_1 по x и ξ. Построим выражение

$$J(z, r) = \int\limits_{|x-z|=r} [a_i(x, x-z)\, u_i(x) + b(x, x-z)]\, dS_x. \quad (7.29)$$

Покажем, что первые производные интеграла J являются выражениями того же вида.

Мы можем записать J в виде

$$J(z, r) = r^{n-1} \int\limits_{\Omega_\eta} [a_m(z + r\eta, r\eta)\, u_m(z + r\eta) + \\ + b(z + r\eta, r\eta)]\, d\omega_\eta, \quad (7.30)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial J(z, r)}{\partial z_\alpha} = \\ = \int\limits_{|x-z|=r} [a_{m,\alpha}(x, x-z)\, u_m(z) + a_m(x, x-z)\, u_{m,\alpha}(x) + \\ + b_{,\alpha}(x, x-z)]\, dS_x,$$

$$\frac{\partial J(z, r)}{\partial r} = \frac{n-1}{r} J(z, r) + \\ + \frac{1}{r} \int\limits_{|x-z|=r} (a_{m,\alpha} u_m + a_{m;\alpha} u_m + a_m u_{m,\alpha} + b_{,\alpha} + b_{;\alpha})(x_\alpha - z_\alpha)\, dS_x.$$

Здесь через $a_{m,\alpha}$ и $a_{m;\alpha}$ обозначены соответственно производные от $a_m(x, \xi)$ по x_α и ξ_α, где $\xi = x - z$. Мы предположили, что каноническая система *линейна*. Значит, ее коэффициенты имеют вид

$$S_{mi\,\alpha\beta} = S_{mi\,\alpha\beta}(x, \xi), \; T_{m\alpha} = T'_{mk\alpha}(x, \xi)\, u_k(x) + T''_{m\alpha}(x, \xi). \quad (7.30a)$$

Тогда при $\xi = x - z$ канонические уравнения дают

$$u_{m,\alpha}(x) = S_{ms\,\alpha\beta}(x, x-z)\, u_{s,\beta}(x) + \\ + T'_{mi\alpha}(x, x-z)\, u_i(x) + T''_{m\alpha}(x, x-z),$$

где

$$S_{ms\,\alpha\beta}(x, x-z)(x_\beta - z_\beta) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq z.$$

Подставляя это выражение для $u_{m,\alpha}(x)$ и применяя затем при интегрировании по частям формулу (7.27) для первых производных интеграла J, получаем выражения вида

$$\frac{\partial J(z, r)}{\partial z_\alpha} = \int\limits_{|x-z|=r} [a'_i(x, x-z)\, u_i(x) + b'(x, x-z)]\, dS_x, \quad (7.31a)$$

$$\frac{\partial J(z, r)}{\partial r} = \int\limits_{|x-z|=r} [a''_i(x, x-z)\, u_i(x) + b''(x, x-z)]\, dS_x, \quad (7.31b)$$

где

$$a_i'(x, \xi) = a_{i,\alpha}(x, \xi) - a_m(x, \xi)\, S_{mi\alpha\beta,\beta}(x, \xi) - \tag{7.32a}$$
$$- a_m(x, \xi)\, S_{mi\alpha\beta;\beta}(x, \xi) - a_{m,\alpha}(x, \xi)\, S_{mi\alpha\beta}(x, \xi) -$$
$$- a_{m;\alpha}(x, \xi)\, S_{mi\alpha\beta}(x, \xi) + a_m(x, \xi)\, T'_{mi\alpha}(x, \xi),$$

$$b'(x, \xi) = a_m(x, \xi)\, T''_{m\alpha}(x, \xi) + b_{,\alpha}(x, \xi), \tag{7.32b}$$

$$a_i''(x, \xi) = \frac{1}{|\xi|}\left[a_{i,\alpha}\, \xi_\alpha + a_{i;\alpha}\, \xi_\alpha + (n-1)\, a_i - \right.$$
$$- a_{m,\beta} S_{mi\alpha\beta}\, \xi_\alpha - a_{m;\beta} S_{mi\alpha\beta}\, \xi_\alpha - a_m S_{mi\alpha\beta,\beta}\, \xi_\alpha -$$
$$\left. - a_m S_{mi\alpha\beta;\beta}\, \xi_\alpha - a_m S_{mi\alpha\alpha} + a_m T'_{mi\alpha}\, \xi_\alpha\right], \tag{7.32c}$$

$$b''(x, \xi) = \frac{1}{|\xi|}\left[b_{,\alpha}\, \xi_\alpha + b_{;\alpha}\, \xi_\alpha + (n-1)\, b + a_m T''_{m\alpha}\, \xi_\alpha\right]. \tag{7.32d}$$

Дифференцируемость решений линейных эллиптических систем. Для первых производных интеграла J, имеющего вид (7.29), формулы (7.31a, b) дают выражения того же вида. Здесь предполагается, что функции u_i являются решениями канонической системы (7.2), которая должна быть эллиптической, так как в противном случае функции $T_{m\alpha}$ и $S_{mr\alpha\beta}$ не были бы определены для всех направлений ξ нормали к сфере. Формулы (7.31a, b) были выведены в предположении, что функции u_i принадлежат классу C_1. Кроме того, предполагалось, что функции a_i, b, $S_{mi\alpha\beta}$ принадлежат классу C_1 и что функции $T''_{m\alpha}$ и $T'_{mi\alpha}$ непрерывны.

Повторяя эти выкладки, мы получим выражения для высших производных интеграла $J(z, r)$ по z_i и r, которые будут иметь тот же вид, что и сам J, но в них войдут высшие производные от a_i, b, $S_{mi\alpha\beta}$, $T'_{mi\alpha}$, $T''_{m\alpha}$. Если функции $a_i(x, \xi)$, $b(x, \xi)$, $S_{mi\alpha\beta}(x, \xi)$ при $\xi \neq 0$ принадлежат по x и ξ классу C_t, а $T''_{m\alpha}(x, \xi)$, $T'_{mi\alpha}(x, \xi)$ принадлежат классу C_{t-1}, то $J(z, r)$ принадлежит при $r > 0$ классу C_t по z и r. В частности, за J можно взять сферическое среднее $I_i(z, r)$ функции $u_i(x)$, которое соответствует функциям

$$a_k(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} |\xi|^{1-n}\, \delta_i^k, \quad b(x, \xi) = 0. \tag{7.33}$$

Так как функции a_k и b аналитичны при $\xi \neq 0$, то имеет место следующая теорема. Сферические средние принадлежащего классу C_1 решения u_i линейной эллиптической канонической системы

$$u_{m,\alpha}(x) = S_{mi\alpha\beta}(x, \xi)\, u_{i,\beta}(x) + T'_{mi\alpha}(x, \xi)\, u_i(x) + T''_{m\alpha}(x, \xi) \tag{7.34}$$
$$(S_{mi\alpha\beta}(x, \xi)\, \xi_\beta = 0)$$

принадлежат при $r > 0$ классу C_t, если коэффициенты $S_{mi\alpha\beta}(x, \xi)$ принадлежат по x классу C_t и коэффициенты $T'_{mi\alpha}(x, \xi)$, $T''_{m\alpha}(x, \xi)$ принадлежат по x классу C_{t-1}. (Всегда предполагается, что коэффициенты рациональны и однородны по ξ с нулевой степенью.)

Воспользуемся теперь следующей теоремой, доказанной в гл. IV на страницах 78—81; если сферические средние $I(z, r)$ непрерывной функции $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат при $r > 0$ классу C_t, то функция $u(x)$ принадлежит классу $C_{t-2[n/2]}$. (Здесь $[\alpha]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее α.) Итак, мы имеем следующую теорему:

Если функции $u_i(x)$ образуют принадлежащее классу C_1 решение линейной эллиптической канонической системы (7.34), *коэффициенты $S_{mi\alpha\beta}(x, \xi)$ которой принадлежат по x классу C_t, а коэффициенты $T'_{mi\alpha}(x, \xi)$, $T''_{m\alpha}(x, \xi)$ принадлежат по x классу C_{t-1}, то $u_i(x)$ принадлежат классу $C_{t-2[n/2]}$.*

Мы видели, что линейную эллиптическую систему дифференциальных уравнений (7.16) для функций $v^1(x), \ldots, v^N(x)$ можно свести к линейной эллиптической системе канонических уравнений для производных функций $v^i(x)$ порядков $\leqslant m_i - 1$. Коэффициенты канонической системы рациональны по ξ, по коэффициентам операторов L_{ik} и по функциям B_i. Таким образом, мы имеем такое следствие последней теоремы:

Пусть

$$L_{ik}[v^k(x)] = B_i(x) \tag{7.35}$$

— линейная эллиптическая система N уравнений для N функций $v^k(x)$. Пусть порядок оператора L_{ik} равен m_k. Пусть функции B_i и коэффициенты всех операторов L_{ik} принадлежат по x классу C_t. Пусть, наконец, каждая из функций $v^k(x)$ принадлежит классу C_{m_k}. Тогда функции v^k принадлежат также классам C_{μ_k}, где

$$\mu_k = m_k - 1 + t - 2[n/2]^{1)}. \tag{7.36}$$

Дифференцируемость решений нелинейных эллиптических систем. Рассмотрим общую квазилинейную каноническую систему (7.2) для функций $u_i(x)$. Коэффициенты $T_{m\alpha}$ и $S_{mr\alpha\beta}$ являются тогда заданными функциями u_k, а также x и ξ. Они рациональны по ξ и удовлетворяют соотношениям (7.1) при всех значениях x и u_i из некоторой области xu-пространства и при всех $\xi \neq 0$. Для рассматриваемого решения u_i эта система должна быть эллиптической, т. е. $T_{m\alpha}$ и $S_{mr\alpha\beta}$ как функции ξ не должны иметь действительных полюсов $\xi \neq 0$, когда в них вместо u_i подставлены значения $u_i(x)$, соответствующие рассматриваемому решению.

Если функции u_i, $T_{m\alpha}$, $S_{mr\alpha\beta}$ дифференцируемы достаточно большое число раз, то, дифференцируя уравнения (7.2), можно получить каноническую систему для высших производных функций

---

[1] Более точные теоремы для случая систем уравнений второго порядка см. Морри [3].

u_i. Предположим, что $T_{m\alpha}$, $S_{mr\alpha\beta}$ принадлежат классу C_p по аргументам x, u_i и что u_i принадлежат классу C_{p+1}. Продифференцировав (7.2) p раз по x_i, мы получим уравнение вида

$$u_{m,\alpha_1\ldots\alpha_p\alpha} = \overline{T}_{m\alpha_1\ldots\alpha_p\alpha} + S_{mr\alpha\beta}\, u_{r,\alpha_1\ldots\alpha_p\beta}, \tag{7.37}$$

где член $\overline{T}_{m\alpha_1\ldots\alpha_p\alpha}$ состоит из производных функций $T_{m\alpha}(x, u(x), \xi)$ и $S_{mr\alpha\beta}(x, u(x), \xi)$ по x. Выражение $\overline{T}_{m\alpha_1\ldots\alpha_p\alpha}$ представляет собой полином по производным функций u_i порядков $\leqslant p$, коэффициенты которого являются известными функциями от x, u_k и рациональными однородными функциями нулевой степени по ξ. Точнее, выражение $\overline{T}_{m\alpha_1\ldots\alpha_p\alpha}$ линейно по производным функций u_k порядков $> (p+1)/2$ с коэффициентами, в которые входят только производные функций u_k порядков $\leqslant (p+1)/2$. Введем в качестве новых зависимых переменных v^k все производные функций u_i по x порядков q, где $(p+1)/2 < q \leqslant p$. Тогда (7.37) будет *линейной* канонической системой относительно v^k (если к ней еще добавить тривиальные уравнения, в которых производные функций u_i порядков $< p$ выражаются через производные функций u_k порядков $\leqslant p$). Коэффициенты этой линейной канонической системы для переменных v^k представляют собой полиномы по производным функций u_i порядков $\leqslant (p+1)/2$ с коэффициентами, зависящими от x, u_k, ξ. Предположим, что $T_{m\alpha}$ и $S_{mr\alpha\beta}$ принадлежат по x и u_i классу C_σ, где

$$\sigma \geqslant \left[\frac{3p+2}{2}\right].$$

Тогда в линейной канонической системе (7.37) коэффициенты при v^k принадлежат классу $C_{[(p+2)/2]}$, а коэффициенты $S_{mr\alpha\beta}$ при первых производных функций v^k принадлежат классу C_{p+1}, так как сами функции u_i принадлежат классу C_{p+1}. Если $p \geqslant 2$, то из теоремы для линейных канонических систем (стр. 122) при $t = [(p+4)/2]$ следует, что решения v^k принадлежат классу $C_{[(p+4)/2]-2[n/2]}$. Поскольку множество функций v_k включает производные решения u_i порядка p, отсюда следует, что принадлежащие классу C_{p+1} решения u_i системы (7.2) принадлежат классу C_μ, где

$$\mu = \left[\frac{3p+4}{2}\right] - 2\left[\frac{n}{2}\right], \tag{7.38}$$

если только p — такое целое число, что

$$p \geqslant 2, \qquad \left[\frac{3p+2}{2}\right] \leqslant \sigma. \tag{7.39}$$

Из равенства (7.38) получается, что $\mu \geqslant p+2$, если

$$p \geqslant 4\left[\frac{n}{2}\right]. \tag{7.40}$$

Следовательно, в условиях (7.39), (7.40) решение системы u_i класса C_{p+1} принадлежит также и классу C_{p+2}. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Пусть (7.2) — *квазилинейная каноническая система дифференциальных уравнений с коэффициентами* $T_{m\alpha}$, $S_{mr\alpha\beta}$, *принадлежащими классу* C_σ *по аргументам* x, u_i. *Пусть функции* $u_i(x)$ *образуют систему решений* (7.2) *класса* $C_{4[n/2]+1}$, *для которой канонические уравнения эллиптичны относительно* u_i. *Тогда функции* u_i *принадлежат классу* C_μ *при всяком* μ, *для которого*

$$\mu < \frac{2}{3}\sigma + 2. \tag{7.41}$$

Квазилинейную систему уравнений вида (7.16) можно опять свести к квазилинейной канонической системе для производных функций v^k порядков $\leqslant m_k - 1$. Коэффициенты канонической системы являются рациональными функциями первоначальных коэффициентов и ξ. Таким образом, мы получаем теорему:

Пусть

$$L_{ik}[v^k(x)] = B_i \tag{7.42}$$

— *квазилинейная система* N *уравнений для* N *функций* $v^k(x)$. *Пусть оператор* L_{ik} *линеен по производным порядков* m_k. *Коэффициенты всех операторов* L_{ik} *и функции* B_i *зависят от* x *и от производных каждой из функций* v^k *порядков* $\leqslant m_k - 1$. *Пусть коэффициенты операторов* L_{ik} *и функции* B_i *принадлежат по всем своим аргументам классу* C_σ. *Пусть, наконец, функции* $v^k(x)$ *образуют решение системы* (7.42), *для которого эта система эллиптична, и каждая функция* $v^k(x)$ *принадлежит классу* $C_{m_k+4[n/2]}$. *Тогда функция* v^k *принадлежит классу* $C_{m_k-1+\mu}$, *где* μ — *любое число, удовлетворяющее неравенству* (7.41).

Мы видели, что одно общее нелинейное эллиптическое уравнение m-го порядка для функции $u(x)$ можно свести к квазилинейной канонической системе для производных функции u порядков $\leqslant m$. Эта система получается дифференцированием первоначальных уравнений. Таким образом, мы приходим к следующему результату[1].

Пусть дано общее нелинейное дифференциальное уравнение

$$F(x, p) = 0, \tag{7.43}$$

где p *означает множество функций, состоящее из функции* $u(x)$ *и ее производных по* x *порядков* $\leqslant m$. *Пусть* F — *функция класса* C_σ *по аргументам* x, p. *Пусть* $u(x)$ — *принадлежащее классу* $C_{m+4[n/2]+1}$ *решение уравнения* (7.43), *для которого* (7.43) *является эллиптическим уравнением. Тогда* $u(x)$ *принадлежит также*

[1] Более сильные теоремы для случая $m = 2$ см. у Хопфа [1], Морри [1], Ниренберга [1, 2].

классу $C_{m+\mu}$ *при всяком* μ, *удовлетворяющем неравенству*

$$\mu < \frac{2}{3}(\sigma + 4). \tag{7.44}$$

Аналитичность решений линейных эллиптических систем с аналитическими коэффициентами. Пусть функции $u_i(x)$ составляют решение линейной эллиптической канонической системы

$$u_{m,\alpha}(x) = S_{ms\alpha\beta}(x, \xi)\, u_{s,\beta}(x) + T'_{mi\alpha}(x, \xi)\, u_i(x) + T''_{m\alpha}(x, \xi) \tag{7.45}$$

$$(i, m, s = 1, \ldots, N;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Мы уже знаем, что если коэффициенты $S_{ms\alpha\beta}$, $T'_{mi\alpha}$, $T''_{m\alpha}$ принадлежат классу C_∞, то всякое решение u_i системы (7.45) класса C_1 принадлежит также и классу C_∞. Докажем, что если коэффициенты аналитичны по x, то таким же будет и решение.

Рассмотрим для этого интеграл $J(z, r)$ вида (7.29), построенный по решению u_i при помощи функций $a_i(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$. В силу формулы (7.31a) производная $\partial J/\partial z_\alpha$ является выражением того же вида, построенным при помощи коэффициентов $a'_i(x, \xi)$ и $b'(x, \xi)$. В силу формул (7.32a, b) a'_i и b' получаются здесь из функций a_i и b, к которым применяются некоторые линейные дифференциальные операторы первого порядка, причем коэффициенты этих операторов представляют собой комбинации коэффициентов $S_{mi\alpha\beta}$, $T'_{mi\alpha}$, $T''_{m\alpha}$ и их первых производных. Положим $b(x, \xi) = a_{N+1}(x, \xi)$. Тогда формулы, связывающие a'_i, b' с a_i, b примут вид

$$a'_i(x, \xi) = L_{ik\alpha}[a_k(x, \xi)] \tag{7.46}$$

$$(i, k = 1, \ldots, N+1;\ \alpha = 1, \ldots, n).$$

Здесь $L_{ik\alpha}$ — дифференциальные операторы первого порядка, содержащие дифференцирования по переменным x и ξ, с коэффициентами, аналитическими по x и ξ, когда x заключено в области D и $\xi \neq 0$. [Индекс α относится к производной по z_α в левой части формулы (7.31a).]

Для того чтобы нам получить оценки для производных функции J, сравним рекуррентную формулу (7.46) и систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial A_i(x, \xi, \eta, t)}{\partial t} = \eta_\alpha L_{ik\alpha}[A_k(x, \xi, \eta, t)] \tag{7.47}$$

с начальными условиями

$$A_i = \frac{1}{\omega_n} |\xi|^{1-n} \delta^i_s \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{7.48}$$

где s фиксировано и равно одному из чисел $1, \ldots, N$. Коэффициенты дифференциальных уравнений (7.47) для функций A_i

и начальные данные (7.48) являются аналитическими функциями при любых действительных x, ξ, η, t, когда x принадлежит области D и $\xi \neq 0$. Пусть D' — любое компактное подмножество области D. Тогда существует другое компактное подмножество D'' области D, такое, что D' лежит внутри D''. Пусть r — такое положительное число, что r-окрестность любой точки D' принадлежит D''. По теореме Коши—Ковалевской можно найти систему решений $A_i(x, \xi, \eta, t)$ задачи (7.47), (7.48), регулярно аналитическую по x, ξ, η, t в действительной ε-окрестности принадлежащего $x\xi\eta t$-пространству множества

$$|x| \subset D'', \qquad |\xi| = r, \qquad |\eta| = 1, \qquad t = 0.$$

Пусть функции $u_i(x)$ составляют рассматриваемое решение канонической системы (7.45). Эти $u_i(x)$ принадлежат в D классу C_1. Образуем выражение

$$J(z, \eta, t) =$$
$$= \int\limits_{|x-z|=r} \left[\sum_{i=1}^{N} A_i(x, x-z, \eta, t)\, u_i(x) + A_{N+1}(x, x-z, \eta, t)\right] dS_x,$$

определенное для z из D', $|\eta| = 1$, $|t| < \varepsilon$ и аналитическое по η и t. В силу формул (7.31a), (7.46), (7.47)

$$\frac{\partial J(z, \eta, t)}{\partial t} = \eta_\alpha \frac{\partial J(z, \eta, t)}{\partial z_\alpha},$$

$$J(z, \eta, 0) = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \int\limits_{|x-z|=r} u_s(x)\, dS_x = I_s(z, r).$$

Следовательно,

$$J(z, \eta, t) = J(z + t\eta, \eta, 0) = I_s(z + t\eta, r). \tag{7.49}$$

Поскольку функция $J(z, \eta, t)$ аналитична по η и t при $|\eta| = 1$, $|t| < \varepsilon$, из равенств (7.49) вытекает, что функция $I_s(z, r)$ аналитична по z для z из D'. Таким образом, мы видим, что сферическое среднее $I_s(z, r)$ функции $u_s(x)$ является аналитической функцией z для любой сферы с центром z и радиусом r, заключенной в области D. Аналогично получается, что первые n производных по r среднего $I_s(z, r)$ равномерно по r являются аналитическими функциями z, если только r достаточно мало и не меньше некоторого положительного числа. Из формул (4.24), (4.26) тогда вытекает, что и сама функция $u_s(x)$ является аналитической функцией x в области D.

Следовательно, решение $u_i(x)$ линейной эллиптической канонической системы с аналитическими коэффициентами представляет собой систему аналитических функций. Пользуясь тем, что линейная эллиптическая система вида (7.35) сводится к канонической системе, мы получаем теорему:

Пусть (7.35) — *линейная эллиптическая система N уравнений для N неизвестных функций $v^k(x)$. Пусть функции $B_i(x)$ и коэффициенты операторов L_{ik} — аналитические функции в области D. Обозначим порядок оператора L_{ik} через m_k. Тогда всякая система решений $v^k(x)$, в которой каждая из функций $v^k(x)$ принадлежит классу C_{m_k}, состоит из аналитических в D функций.*

В предыдущем параграфе было установлено, что все решения класса $C_{4[n/2]+1}$ квазилинейной эллиптической системы, коэффициенты которой принадлежат по всем аргументам классу C_∞, сами принадлежат классу C_∞. В случае аналитических коэффициентов было бы заманчиво доказать аналитичность решения, получив достаточно точные оценки для производных, существование которых уже доказано. Представляется, однако, сомнительным, что в нелинейном случае можно получить *достаточно хорошие* оценки (если применять методы, которыми мы пользуемся здесь, для линейных систем). Одно из соображений состоит в том, что для того, чтобы выразить производные от u_i сколь угодно высокого порядка через фиксированное число производных, в нелинейном случае придется неограниченное число раз, а не один раз, как в линейном случае, использовать выражения (4.24) или (4.26), в которых u_i представляются через итерированные сферические средние[1].

Дифференцируемость непрерывных слабых решений линейного эллиптического уравнения[2]. Пусть L — линейный эллиптический дифференциальный оператор порядка m. Тогда L можно записать в виде (3.1) с коэффициентами $A_{i_1 \dots i_k}(x)$. Характеристическая форма $Q(x,\xi)$ оператора L удовлетворяет условию (3.7). Предположим, что существует такое неотрицательное целое число s, что коэффициенты $A_{i_1 \dots i_k}(x)$ при производных k-го порядка принадлежат в области D классу C_{s+k}. Сопряженный дифференциальный оператор $\bar{L}$ определяется формулой (3.37). Так как порядок m эллиптического оператора L необходимо является числом четным, то мы получаем из (3.37), что L и $\bar{L}$ имеют одну и ту же характеристическую форму $Q(x,\xi)$. Из формулы (3.37) очевидно также, что коэффициенты при k-х производных в $\bar{L}$ тоже принадлежат классу C_{s+k}.

---

[1] В общем случае доказательство аналитичности решений нелинейных аналитических уравнений см. у Петровского [2, 3].

[2] См. Фридрихс [2], Вейль [1], стр. 415, Вишик [1], Гординг [2], Шварц [2], т. I, Браудер [4], Браудер [3], стр. 232 (по-видимому первое полное доказательство „леммы Вейля" для общих эллиптических уравнений), Фридрихс [1], Йон [9]. Теоремы, данные Браудером, Фридрихсом и Йоном, имеют, грубо говоря, одинаковую степень общности, однако они настолько различны по характеру предполагаемой в них регулярности, что точное сравнение их провести трудно. Недавно они были обобщены Лаксом [1].

Пусть $u(x)$ — решение класса C_m уравнения

$$L[u(x)] = f(x). \tag{7.50}$$

Пусть R — замкнутая область, лежащая в области D вместе со своей границей S. Из (3.36) мы имеем, что

$$\int\limits_R (u(x)\,\bar{L}[v(x)] - f(x)\,v(x))\,dx = 0 \tag{7.51}$$

для всякой функции $v(x)$ класса C_m, которая обращается в нуль на S вместе со своими производными порядков $\leqslant m-1$. Обратно, если u принадлежит классу C_m и если соотношение (7.51) справедливо для всех областей R из D и для всех функций v класса C_m, которые имеют на границе R нуль m-го порядка, то u будет решением уравнения (7.50) в области D. Достаточно даже ограничиться сферами R, лежащими в D, и брать функции v класса C_∞, которые обращаются в нуль вне концентрических сфер малого радиуса.

Таким образом, мы приходим к определению „слабого" решения u уравнения (7.50)[1].

Определение. Функция $u(x)$ называется непрерывным *слабым* решением дифференциального уравнения (7.50) (в котором функция $f(x)$ предполагается непрерывной), если $u(x)$ непрерывна в области D и если для каждого шара $|x-z| \leqslant r$, лежащего в D,

$$\int\limits_{|x-z|\leq r} (u(x)\,\bar{L}[v(x)] - f(x)\,v(x))\,dx = 0 \tag{7.52}$$

для всех функций $v(x)$ класса C_∞, которые обращаются в нуль вне какой-либо сферы радиуса $< r$ с центром в z.

Принадлежащее классу C_m решение u уравнения (7.50), которое удовлетворяет уравнению в обычном смысле, называется *сильным* решением. Непрерывное слабое решение класса C_m необходимо является сильным решением. Нас интересует здесь обратная задача. Когда слабые решения являются сильными решениями или, общее, когда они имеют производные? Для выяснения существования высших производных решения u мы пользовались в предыдущих параграфах сведением к канонической системе. Здесь, однако, такой подход к решению задачи уже не годится, потому что нам пришлось бы за новые зависимые переменные взять производные решения u порядков $\leqslant m-1$. Нам же как раз нужно доказать существование этих производных. Однако результаты желаемого типа можно получить некоторой модификацией примененного выше метода. Для этого требуется только аккуратнее произвести дифференцирование сферических инте-

[1] Данное в тексте понятие слабого решения, если отказаться от требования его непрерывности, совпадает с понятием обобщенного решения, введенным С. Л. Соболевым. — *Прим. ред.*

гралов, чтобы существование нужных производных стало очевидным.

Предположим, что $u(x)$ есть непрерывное слабое решение уравнения (7.50) в области D. Пусть $v(x)$ — функция класса C_∞, которая равна нулю вне сферы радиуса R, описанной вокруг точки z. Тогда соотношение (7.52) справедливо для всех $r > R$, а следовательно, и для $r = R$. Далее, пусть $w(x)$ — некоторая функция класса C_∞ в D. Обозначим через $\theta(s)$ некоторую фиксированную функцию от s, принадлежащую при всех s классу C_∞ и удовлетворяющую условиям

$$\theta(s) = 1 \quad \text{при} \quad s < 0, \qquad \theta(s) = 0 \quad \text{при} \quad s > 1. \tag{7.52a}$$

Тогда при любом ε, $0 < \varepsilon < 1$, функция

$$v_\varepsilon(x) = (r^2 - |x - z|^2)^m \, \theta(1 - \varepsilon^{-1} + r^{-2}\varepsilon^{-1} |x - z|^2) \, w(x)$$

принадлежит классу C_∞, причем

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x) &= (r^2 - |x - z|^2)^m \, w(x) \quad &&\text{при} \quad |x - z| < r\sqrt{1 - \varepsilon}, \\ v_\varepsilon(x) &= 0 &&\text{при} \quad |x - z| > r. \end{aligned}$$

При $v = v_\varepsilon(x)$ равенство (7.52) выполняется. Поскольку функция $v_\varepsilon(x)$ и ее производные порядков $\leqslant m$ равномерно по ε ограничены в шаре $|x - z| \leqslant r$ и при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходятся в каждом меньшем шаре, то

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x-z|<r} u(x) \, \bar{L}[(r^2 - |x - z|^2)^m \, w(x)] \, dx = \\ = \int\limits_{|x-z|<r} (r^2 - |x - z|^2)^m \, w(x) \, f(x) \, dx \end{aligned} \tag{7.53}$$

для любой функции $w(x)$ класса C_∞. Это справедливо тогда и для любой функции $w(x)$ класса C_m, поскольку такую функцию w вместе с ее первыми m производными можно равномерно аппроксимировать функциями класса C_∞.

Пусть z — фиксированная точка области D. Обозначим через ϱ расстояние $|x - z|$. Пусть $v(x)$ — функция класса C_{m+j}, где j — некоторое неотрицательное число, и пусть v равна нулю в окрестности точки z, например

$$v(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x - z| < \varepsilon. \tag{7.54}$$

Тогда для любого целого $\alpha \geqslant m$

$$(r - \varrho)^\alpha \, v(x) = (r^2 - \varrho^2)^m \, w(x),$$

где функция

$$w(x) = (r - \varrho)^{\alpha - m} (r + \varrho)^{-m} \, v(x)$$

принадлежит классу C_{m+j} при всех x, в том числе при $x = z$.

Значит, в силу (7.53)

$$\int\limits_{\varrho<r} u(x)\,\bar{L}[(r-\varrho)^{\alpha}\,v(x)]\,dx = \int\limits_{\varrho<r} (r-\varrho)^{\alpha}\,v(x)\,f(x)\,dx. \qquad (7.55)$$

Если дан линейный дифференциальный оператор $\bar{L}$ порядка m, действующий на функции $v(x)$, то мы можем определить последовательность *производных операторов* $\bar{L}^k$ (относительно фиксированной функции $\varrho(x)$)[1]. Первый производный оператор $\bar{L}'$ определим как коммутатор по формуле

$$\bar{L}'[v(x)] = \varrho\,\bar{L}[v] - \bar{L}[\varrho v],$$

далее операторы $\bar{L}^{(k)}$ определим формулами

$$\bar{L}^{(0)} = \bar{L}, \qquad \bar{L}^{(k+1)} = \varrho\,\bar{L}^{(k)} - \bar{L}^{(k)}\,\varrho = (\bar{L}^{(k)})'. \qquad (7.55\text{a})$$

Поскольку у операторов $\varrho\bar{L}$ и $\bar{L}\varrho$ совпадают коэффициенты при старших членах, порядок оператора $\bar{L}'$ не превосходит $m-1$. Порядок оператора $\bar{L}^{(k)}$ соответственно не превосходит $m-k$, и при $k>m$ оператор $L^{(k)}$ обращается в нуль. Коэффициенты при производных порядков $<k$ в выражении для $\bar{L}$ не влияют на $\bar{L}^{(k)}$. Согласно формуле (3.37), коэффициенты оператора $\bar{L}^{(k)}$ являются линейными комбинациями коэффициентов $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$, для которых $\beta \geqslant k$, и их производных порядков $\leqslant \beta - k$. Из предположения, что $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ принадлежат классу $C_{s+\beta}$ и $\varrho(x)$ принадлежит при $\varrho \neq 0$ классу C_∞, вытекает, что коэффициенты оператора $\bar{L}^{(k)}$ принадлежат при $\varrho\neq 0$ классу C_{s+k}.

По определению оператора $\bar{L}'$ для постоянного r

$$\bar{L}[(r-\varrho)\,v] = (r-\varrho)\,\bar{L}[v] + \bar{L}'[v].$$

Отсюда для неотрицательных целых α по индукции следует более общее тождество

$$\bar{L}[(r-\varrho)^{\alpha}\,v] = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k}\,(r-\varrho)^{\alpha-k}\,\bar{L}^{(k)}[v]. \qquad (7.56)$$

Если за v здесь взять функцию $v=1$, положить α равным m и получившееся таким образом из формулы (7.56) выражение вычислить на поверхности $\varrho=r$, то мы найдем

$$\begin{aligned}\bar{L}^{(m)}[1] &= (\bar{L}[(r-\varrho)^m])_{\varrho=r} = \\ &= m!\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m} A_{i_1\ldots i_m}(x)\,\frac{\partial\varrho}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial\varrho}{\partial x_{i_m}}\right)_{\varrho=r} = \\ &= m!\,Q(x,\,x-z)\,\varrho^{-m},\end{aligned}$$

где $Q(x,\,\xi)$ — характеристическая форма оператора L. Поскольку $\bar{L}^{(m)}$ — оператор нулевого порядка, мы получаем более общее

[1] См. Йон [3], стр. 99.

выражение

$$\bar{L}^{(m)}[\nu] = \nu \bar{L}^{(m)}[1] = m!\, Q(x, x-z)\, \varrho^{-m} \nu. \tag{7.57}$$

Подставим в формулу (7.55) вместо выражения $\bar{L}[(r-\varrho)^{\alpha}\nu]$ разложение (7.56). Заметив, что $\bar{L}^{(k)}[\nu] = 0$ при $k > m$ и пользуясь для $\bar{L}^{(m)}[\nu]$ выражением (7.57), мы получим при $\alpha \geqslant m$, что

$$\int\limits_{\varrho<r} \tbinom{\alpha}{m} (r-\varrho)^{\alpha-m} \bar{L}^{(m)}[1]\, \nu(x)\, u(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{\varrho<r} -\tbinom{\alpha}{k} (r-\varrho)^{\alpha-k} \bar{L}^{(k)}[\nu]\, u(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\varrho<r} (r-\varrho)^{\alpha}\, \nu(x)\, f(x)\, dx. \tag{7.58}$$

Пусть $w(x)$ — произвольная функция класса C_m, которая обращается в нуль при $\varrho < \varepsilon$. *Поскольку оператор* L *эллиптичен,*

$$\nu(x) = \frac{1}{\bar{L}^{(m)}[1]}\, w(x) = \frac{\varrho^{(m)} w(x)}{m!\, Q(x, x-z)}$$

тоже будет функцией класса C_m, которая обращается в нуль при $\varrho < \varepsilon$. Возьмем в формуле (7.58) за ν эту функцию. Заменяя α на $m+\alpha$ и k на $m-k$, мы получим тождество

$$\int\limits_{\varrho<r} u \frac{(r-\varrho)^{\alpha}}{\alpha!} w dx = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\varrho<r} u \frac{(r-\varrho)^{\alpha+k}}{(\alpha+k)!} \bar{L}_k[w]\, dx +$$

$$+ \int\limits_{\varrho<r} f \frac{m!\,(r-\varrho)^{m+\alpha} w}{(\alpha+m\;!\; \bar{L}^{(m)}[1]} dx. \tag{7.59}$$

Оператор L_k определяется здесь равенством

$$\bar{L}_k[w] = -\frac{m!}{(m-k)!} \bar{L}^{(m-k)} \left[\frac{w}{\bar{L}^{(m)}[1]}\right]; \quad k = 1, \ldots, m. \tag{7.60}$$

Порядок оператора $\bar{L}_k$ равен k. Коэффициенты оператора $\bar{L}_k$ принадлежат при $x \neq z$ классу C_{s+m-k} и рациональным образом составлены из коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$, где $\beta \geqslant m-k$, и их производных порядков $\leqslant \beta - m + k$.

В формуле (7.59) шаровой интеграл от u, который имеет на границе нуль порядка α, выражается через шаровые интегралы от u с ядрами, имеющими на границе нули более высоких порядков. Формулу (7.59) можно итерировать. Введем для этой цели операторы $\bar{L}_k^j$ $(j = 1, 2, \ldots, s+1;\ k = j, j+1, \ldots, m+j-1)$, которые определяются формулами[1])

$$\bar{L}_k^1 = \bar{L}_k \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m, \tag{7.61a}$$

[1]) Заметим, что здесь не производится суммирования по повторяющимся индексам.

$$\bar{L}_k^{j+1} = \bar{L}_k^j + \bar{L}_{k-j}\bar{L}_j^j \quad \text{при} \quad k = j+1, \ldots, m+j-1, \tag{7.61b}$$

$$\bar{L}_{m+j}^{j+1} = \bar{L}_m \bar{L}_j^j. \tag{7.61c}$$

Индукцией по j доказывается, что $\bar{L}_k^j$ является оператором порядка k, коэффициенты которого принадлежат при $x \neq z$ классу C_{s+n-k} и образованы из коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}$, где $\beta > m-k$, и их производных порядков $\leqslant \beta - m + k$.

Для простоты обозначим сокращенно

$$\bar{L}_0^0 = 1. \tag{7.61 d}$$

Пусть j — одно из чисел $0, \ldots, s$. Пусть $w(x)$ — функция класса C_{m+j}, которая обращается в нуль в окрестности точки $x = z$. Тогда тождество

$$\int\limits_{\varrho \leq r} uw\,dx = \sum_{k=j+1}^{m+j} \int\limits_{\varrho \leq r} u \frac{(r-\varrho)^k}{k!} \bar{L}_k^{j+1}[w]\,dx +$$

$$+ m! \int\limits_{\varrho < r} \frac{f}{\bar{L}^{(m)}[1]} \sum_{k=0}^{j} \frac{(r-\varrho)^{m+k}}{(m+k)!} \bar{L}_k^k[w]\,dx \tag{7.62}$$

выражает интеграл от слабого решения u, взятого с некоторым весом, через интегралы, тоже взятые с весом, которые имеют на границе $\varrho = r$ нули $(j+1)$-го порядка. Это тождество доказывается индукцией по j. При $j = 0$ оно совпадает с формулой (7.59), в которой $\alpha = 0$. Кроме того, пользуясь рекуррентными формулами (7.61b, c) и формулой (7.59), где α и w заменены соответственно на j и $\bar{L}_j^j[w]$, можно свести (7.62) к формуле такого же вида, в которой j заменится на $j-1$.

Возьмем за $w(x)$ функцию, определенную равенством

$$w(x) = 1 - \theta\left(\frac{1}{\varepsilon}\varrho - 1\right) = 1 - \theta\left(\frac{1}{\varepsilon}|x-z| - 1\right), \tag{7.62a}$$

где $\theta(s)$ — опять функция класса C_∞ со свойствами (7.52a). Тогда

$$w(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x-z| < \varepsilon; \; w(x) = 1 \quad \text{при} \quad |x-z| > 2\varepsilon.$$

Дифференцирование тождества (7.62) по r дает при $r > 2\varepsilon$

$$\omega_n I(z, r) r^{n-1} = \sum_{k=j+1}^{m+j} \int\limits_{\varrho < r} u(x) \frac{(r-\varrho)^{k-1}}{(k-1)!} \bar{L}_k^{j+1}[w]\,dx +$$

$$+ m! \int\limits_{\varrho < r} \frac{f(x)}{\bar{L}^{(m)}[1]} \sum_{k=0}^{j} \frac{(r-\varrho)^{m+k-1}}{(m+k-1)!} \bar{L}_k^k[w]\,dx, \tag{7.63}$$

где $I(z, r)$ — сферическое среднее функции $u(x)$ по сфере радиуса r с центром z. Правая часть равенства (7.63) зависит от z и r как через область интегрирования $|x - z| < r$, так и через подинтегральное выражение. В подинтегральном выражении r и z входят в члены со степенями функции $r - \varrho = r - |x - z|$ и в функцию w, которая зависит от $\varrho = |x - z|$. Кроме того, в силу формул (7.55а) z входит в выражение для оператора $\bar{L}^{(k)}$ и, следовательно, в силу формул (7.60), (7.61a, b, c) входит и в коэффициенты всех операторов $\bar{L}_k^j$. Таким образом, подинтегральное выражение является фактически функцией z и r класса C_∞. Рассмотрев один из членов

$$\int\limits_{\varrho<r} u(x) \frac{(r-\varrho)^{k-1}}{(k-1)!} \bar{L}_k^{j+1}[w]\, dx, \tag{7.64}$$

мы видим, что его можно $k - 1$ раз дифференцировать по r или по z, производя дифференцирования под знаком интеграла и не учитывая при этом интегралов по границе. Если функция $u(x)$ непрерывна, то возможно еще одно дополнительное дифференцирование, в результате которого, из-за переменности границы, появится интеграл по поверхности. При помощи подстановки $x = z + r\xi$ этот интеграл по поверхности сводится к интегралу по фиксированной сфере Ω_ξ. После этого интеграл по поверхности можно дифференцировать по r и z столько раз, сколько производных по x имеет подинтегральное выражение. Таким образом, мы находим, что поскольку оператор $\bar{L}_k^{j+1}[w]$ принадлежит по x, z, r классу C_{s+m-k}, то интеграл (7.64) принадлежит классу C_k, если функция u непрерывна, и классу C_t, где $t > k$, если u принадлежит классу C_{t-k}, $s + m \geq t$. Следовательно, первая сумма в правой части формулы (7.63) принадлежит классу C_t, если u принадлежит классу C_{t-j-1} и $s + m \geq t$, $0 \leq j \leq s$. Положив $j = s$, мы найдем, что первая сумма принадлежит классу C_t, если u принадлежит классу C_{t-s-1}. Аналогично получается, что вторая сумма в правой части формулы (7.63) принадлежит классу C_t, когда функция f принадлежит классу C_{t-m} и $t \leq 2m + s$.

Следовательно, сферические средние $I(z, r)$ непрерывного слабого решения u уравнения (7.50) принадлежат по z и r классу C_t (при $r > 2\varepsilon$), если $u(x)$ принадлежит классу C_{t-s-1}, функция f принадлежит классу C_{t-m} и $s + m \geq t$[1].

Воспользуемся теперь теоремой о том, что непрерывная функция $u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $C_{t-2[n/2]}$, если ее сферические средние $I(z, r)$ при $r > 0$ принадлежат по z и r классу C_t. Заменяя t на $t + 2[n/2]$, мы получим, что если u принадлежит классу $C_{t+2[n/2]-s-1}$, f принадлежит классу $C_{t+2[n/2]-m}$ и $t \leq s + m - 2[n/2]$, то u принадлежит и классу C_t.

[1] Мы считаем, как обычно, что класс C_i при $i \leq 0$ состоит из всех непрерывных функций.

Если $s = 2[n/2]$ и f принадлежит классу $C_{2[n/2]}$, то из того, что u принадлежит классу C_{t-1} $(t = 1, \ldots, m)$, вытекает, что u принадлежит C_t. В этом случае из непрерывности решения u следует его принадлежность классу C_m. Итак, мы получаем следующую теорему:

Всякое непрерывное в области D слабое решение $u(x)$ линейного эллиптического уравнения m-го порядка

$$L[u(x)] = f(x) \tag{7.65}$$

является сильным решением класса C_m, если функция f принадлежит классу $C_{2[n/2]}$ и коэффициенты оператора L, стоящие при производных порядка β, принадлежат классам $C_{\beta+2[n/2]}$, $\beta = 0, \ldots, m$.

В более общем случае при $s \geqslant 2[n/2]$ имеем:

Непрерывное слабое решение линейного эллиптического уравнения m-го порядка вида (7.65) *есть сильное решение класса $C_{m+s-2[n/2]}$, если функция f принадлежит классу C_s, а коэффициенты оператора L, стоящие при производных порядка β, принадлежат классам $C_{\beta+s}$.*

При $s = m - 1$, $t = m - 2[n/2]$ получаем:

Непрерывное слабое решение линейного эллиптического уравнения (7.65) *принадлежит классу $C_{m-2[n/2]}$, если функция $f(x)$ непрерывна, а коэффициенты оператора L принадлежат классу C_∞.*

В качестве иллюстрации последней теоремы мы можем привести следующее утверждение. Если к непрерывной функции u можно в слабом смысле применить итерированный лапласиан Δ^k и в результате этого получается непрерывная функция (т. е. если u есть слабое решение уравнения вида $\Delta^k u = f(x)$, где f — непрерывная функция), то $u(x)$ является функцией класса $C_{2k-2[n/2]}$.

Явные выражения и оценки для производных решения линейного эллиптического уравнения. Рассмотрим линейное эллиптическое дифференциальное уравнение m-го порядка

$$L[u] = 0. \tag{7.66}$$

Пусть коэффициенты $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$ при производных порядка β принадлежат в области D классу $C_{s+\beta}$, где s — некоторое целое число. Пусть $u(x)$ — решение (сильное) уравнения (7.66) класса C_m в D. Для сферического среднего решения $u(x)$ справедливо тождество (7.63), которое для $0 \leqslant j \leqslant s$ здесь принимает вид

$$I(z, r) = \frac{1}{\omega_n} r^{1-n} \sum_{k=j+1}^{m+j} \int_{\varrho<r} u(x) \frac{(r-\varrho)^{k-1}}{(k-1)!} \bar{L}_k^{j+1}[w]\, dx. \tag{7.67}$$

Это тождество выполняется, если r-окрестность точки z лежит в D. Функция $w(x)$ определяется формулой (7.62а) при некотором

$\varepsilon < r/2$. Выражение $\bar{L}_k^{j+1}[w]$ строится как рациональная функция из коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$ при $\beta \geqslant m - k$ и из их производных порядков $\leqslant \beta - m + k$, из величин $x_i - z_i$, $|x - z|$ и из функции w и ее производных. Дифференцируя выражение (7.67), мы получим выражения для производных среднего $I(z, r)$ по z и r порядков $\leqslant j + 1$. Эти выражения состоят из интегралов от u, взятых с некоторыми весами по сфере $|x - z| = r$ и по шару, ограниченному этой сферой. Веса зависят от тех же коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$ и от тех же их производных по x, которые входят в выражение для самого сферического среднего I.

Согласно формулам (4.24), (4.26), решение $u(x)$ можно выразить через итерированное сферическое среднее $M(x, \lambda, \mu)$, где $\mu > 0$, и через его производные порядков $\leqslant 2[n/2]$[1]. Любая производная решения $u(x)$ некоторого порядка t может быть тогда выражена через производные среднего M порядков $\leqslant t + 2[n/2]$. Производные сферического среднего $M(x, \lambda, \mu)$ можно заменить их выражениями через сферические средние производных $I(z, r)$, которые в свою очередь можно заменить их выражениями через интегралы от u, взятые с весом. Итак, при $t \leqslant j + 1 - 2[n/2]$ в каждой точке области D частные производные решения u порядка t выражаются через повторные сферические интегралы от u, которые берутся с некоторым весом в окрестности этой точки. Весовые функции, стоящие в интегралах, зависят от коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$ и от их производных порядков $\leqslant \beta + j$. Таким образом, если функция u удовлетворяет некоторому эллиптическому дифференциальному уравнению, то при $j = t - 1 + 2[n/2]$ мы получаем *универсальное* выражение, в котором любая производная функции u порядка t представляется через интегралы от u. Подинтегральные функции в этом выражении выписываются в явном виде, они рационально зависят от коэффициентов $A_{i_1 \ldots i_\beta}(x)$ оператора L и от производных порядков $\leqslant \beta + t - 1 + 2[n/2]$. (Знаменатели этих рациональных функций являются степенями характеристической формы $Q(x, \xi)$ оператора L.) Кроме того, в это выражение входят параметры ε и λ или β [они появляются из формул (4.24), (4.26)], которые надо выбирать в зависимости от расстояния точки x до границы области D.

Из существования выражения такого типа вытекают априорные оценки производных решения u в точке $x = z$ через максимум

[1] Для теперешних наших целей полезно рассмотреть как раз случай нечетного n, когда, согласно (4.24), выражение для u является линейной комбинацией производных среднего M порядков $\leqslant n-1$. Результаты, которые будут получены для производных решения u при нечетных n, могут быть затем обобщены на случай четных n при помощи метода спуска Адамара: решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (7.66) при четном n является также решением эллиптического уравнения $L[u] + \partial^m u/\partial x_{n+1}^m = 0$, если при этом характеристическая форма оператора L положительно определенная. Последнее уравнение имеет нечетное число независимых переменных.

абсолютной величины u в окрестности z. Предположим сначала, что для рассматриваемой точки z существует единичная сфера с центром в z, целиком содержащаяся в области D. Тогда имеет место следующий результат:

Если функция $u(x)$ является решением линейного эллиптического дифференциального уравнения $L[u]=0$ в единичной сфере с центром z, то всякая производная функции u порядка t не превосходит в точке z значения

$$M(n,\ m,\ t,\ N)\ (\max_{|x-z|\leq 1}|u(x)|). \tag{7.68}$$

Здесь $M(n, m, t, N)$ — универсальная функция своих аргументов. Порядок уравнения равен m, число независимых переменных равно n. Число N равно наибольшей из следующих величин:

а) $\max\limits_{\substack{|x-z|\leq 1,\\ |\xi|=1}} |1/Q(x,\ \xi)|$, где $Q(x,\ \xi)$ — характеристическая форма оператора L;

б) максимум по шару $|x-z|\leq 1$ абсолютных величин производных порядков $\leq \beta+t-1+2[n/2]$ коэффициентов $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ дифференциального оператора L, стоящих при членах порядка β.

Аналогичный результат можно получить и для точек, которые лежат на меньшем расстоянии от границы. Пусть $u(x)$ — решение линейного эллиптического уравнения $L[u]=0$ внутри сферы радиуса d, описанной вокруг точки z. Пусть m, n и $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ определяются так же, как и раньше. Произведем преобразование $x=z+d(x'-z)$. Тогда в единичном шаре, описанном вокруг точки z в x-пространстве, выражение $u'(x')=u(z+d(x'-z))$ является решением линейного эллиптического уравнения $L'[u'(x')]=d^mL[u]=0$. В операторе L' коэффициенты при членах порядка β имеют вид

$$A'_{i_1\ldots i_\beta}(x')=d^{m-\beta}A_{i_1\ldots i_\beta}(z+d(x'-z))$$
$$(\beta=0,\ 1,\ \ldots,\ m).$$

При $d\leq 1$ значения производных коэффициентов $A'_{i_1\ldots i_\beta}(x')$ в шаре $|x'-z|\leq 1$ не превосходят значений соответствующих производных коэффициентов $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ в шаре $|x-z|\leq d$. Характеристические формы операторов L и L' в соответствующих точках совпадают. Производная функции $u'(x')$ порядка t отличается от производной функции $u(x)$ в соответствующей точке множителем d^t. Отсюда получаем:

Если в шаре радиуса $d\leq 1$, описанном вокруг точки z, функция $u(x)$ является решением линейного эллиптического уравнения $L[u]=0$, то любая производная функции u порядка t не превосходит в точке z величины

$$d^{-t}M(n,\ m,\ t,\ N)\max_{|x-z|\leq d}|u(x)|. \tag{7.69}$$

Здесь $M(n, m, t, N)$ — та же самая универсальная функция, что и раньше. За N берется верхняя грань величин:

$$\text{а)}\ \max_{\substack{|x-z|\leq d\\ |\xi|=1}}|1/Q(x,\ \xi)|;$$

б) максимум по шару $|x - z| \leqslant d$ абсолютных величин производных коэффициентов $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ порядков $\leqslant \beta + t - 1 + 2[n/2]$.

Пусть L — линейный эллиптический оператор, коэффициенты $A_{i_1\ldots i_\beta}(x)$ которого принадлежат в области D классу $C_{s+\beta}$. Пусть в D имеется некоторое семейство решений и уравнения $L[u] = 0$, в котором все u ограничены в D одной и той же величиной. Тогда в любом компактном подмножестве области D существует верхняя грань значений всех производных решений и порядка t при $t \leqslant s + 1 - 2[n/2]$.

Пусть L — линейный эллиптический оператор с аналитическими в области D коэффициентами. Пусть $u(x)$ — решение уравнения $L[u] = 0$, которое имеет в точке y области D изолированную особенность. Мы видели, что $u(x)$ аналитично при $x \neq y$. Кроме того, в гл. III (стр. 55) мы доказали, что если производные решения $u(x)$ порядка $m - 1$, умноженные на $|x - y|^n$, стремятся к нулю при $x \to y$, то $u(x)$ имеет вид $u(x) = cK(x, y) + w(x)$, где c — постоянная, $K(x, y)$ — фундаментальное решение с полюсом y, а $w(x)$ — регулярно аналитическое при $x = y$ решение. Мы можем теперь ослабить сделанные раньше предположения. В самом деле, из оценки (7.69) вытекает, что производные решения u порядка t, умноженные на $|x - y|^t$, ограничены вблизи $x = y$, если само решение u ограничено вблизи $x = y$. При $t = m - 1$ и $m < n + 1$ мы получаем следующий результат:

Если $u(x)$ — решение уравнения $L[u] = 0$, имеющее при $x = y$ изолированную особенность и ограниченное вблизи $x = y$, то u имеет при $m < n + 1$ вид

$$u(x) = cK(x,\ y) + w(x), \tag{7.70}$$

где c — постоянная, K — фундаментальное решение, а решение w регулярно при $x = y$.

В гл. III (стр. 58) мы установили, что фундаментальное решение $K(x, y)$ имеет вид (3.43). Как показано на стр. 61, при $m = n$ в выражении (3.43) обязательно присутствует логарифмический член и, следовательно, $K(x, y)$ заведомо не ограничено при x, близких к y. При $m < n$ фундаментальное решение тоже не ограничено при x, близких к y, так как в противном случае m-е производные фундаментального решения $K(x, y)$ были бы интегрируемы по объему, что противоречит основным свойствам фундаментального решения. Таким образом, мы получаем более точный результат:

Для линейного эллиптического дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами, порядок которого не превосходит числа измерений пространства, ограниченность его решения в окрестности изолированной особенности влечет за собой регулярность решения[1].

Для линейного эллиптического уравнения с аналитическими коэффициентами порядка $m \geqslant n+1$ тем же путем доказывается, что если $\lim\limits_{x \to y} |x-y|^{n-m+1} u(x) = 0$, то решение u имеет вид (7.70).

---

[1] Соответствующие результаты для $m=2$ см. Миранда [1], стр. 68, 104.

Глава VIII

СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ, ВЗЯТЫХ ПО ВРЕМЯОБРАЗНЫМ ЛИНИЯМ

Методы, которыми мы пользовались в гл. VII, для того чтобы установить дифференциальные свойства решений эллиптических уравнений, отчасти применимы также и к неэллиптическим уравнениям. Результаты, которые при этом получаются, касаются дифференциальных свойств не самих решений, а некоторых интегралов от них[1].

Определение „времяобразности". Рассмотрим линейный дифференциальный оператор L порядка m от $n+1$ независимых переменных $x_1, \ldots, x_n, t$. Пусть $Q = Q(x, t, \xi, \tau)$ — характеристическая форма оператора L, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Многообразие M в $(n+1)$-мерном xt-пространстве называется *свободным* в некоторой своей точке P, если $Q \neq 0$ в P для направляющих чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \tau)$ каждой нормали к M в точке P; n-мерная гиперповерхность свободна тогда и только тогда, когда она не является характеристикой. С другой стороны, мы можем рассмотреть одномерные кривые M. Свободная кривая называется *времяобразной*. В этой главе мы будем предполагать оператор L таким, что все прямые, параллельные оси t, времяобразны. Это равносильно предположению, что

$$Q(x, t, \xi, 0) \neq 0 \tag{8.1}$$

при всех $\xi \neq 0$ и всех рассматриваемых x, t. Условие (8.1) означает в терминологии гл. II, что нормальная поверхность оператора L ограничена.

Соответствующая каноническая система. Как было показано в гл. VII (стр. 116), уравнение

$$L[u] = 0 \tag{8.2}$$

можно свести к линейной канонической системе уравнений для зависимых переменных $u_1(x, t), \ldots, u_N(x, t)$, совпадающих с решением $u(x, t)$ и всеми его частными производными порядков $\leqslant m-1$. Эти канонические уравнения линейно выражают каждую первую

---

[1] См. Йон [10].

производную функции $u_i(x, t)$ через функции u_k и первые производные функций u_k, взятые в перпендикулярном к элементу (ξ, τ) направлении. Коэффициенты канонических уравнений являются рациональными функциями коэффициентов оператора L и величин ξ, τ. В их знаменатели могут входить только характеристическая форма $Q(x, t, \xi, \tau)$ и выражение $|\xi|^2 + \tau^2$. Из условия (8.1) вытекает, что при $\tau = 0$ и $\xi \neq 0$ коэффициенты канонической системы являются регулярными функциями от x, t, ξ, которые имеют столько непрерывных производных, сколько их имеют коэффициенты оператора L.

При $\tau = 0$ каноническая система состоит из уравнений вида

$$u_{k,\alpha}(x, t) = S_{ks\alpha\beta}(x, t, \xi)\, u_{s,\beta}(x, t) + \\ + R_{ks\alpha}(x, t, \xi)\, u_{s,t}(x, t) + T_{ki\alpha}(x, t, \xi)\, u_i(x, t) \\ (k, s = 1, \ldots, N;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n). \qquad (8.3)$$

Здесь употребляется тензорная запись суммирования. Кроме того, через $u_{s,\beta}(x, t)$ обозначена частная производная функции $u_s(x, t)$ по x_β, а через $u_{s,t}(x, t)$ — ее частная производная по t. Функции $S_{ms\alpha\beta}$, $R_{ms\alpha}$, $T_{mi\alpha}$ рациональны по ξ с коэффициентами, которые принадлежат по x и t классу C_s, если этому же классу принадлежат коэффициенты оператора L. Действительный полюс имеется только при $\xi = 0$. Функции $S_{ms\alpha\beta}(x, t, \xi)$ удовлетворяют тождеству

$$S_{ms\alpha\beta}(x, t, \xi)\, \xi_\beta = 0. \qquad (8.4)$$

Производные цилиндрических интегралов от решений. Пусть функции $a_i(x, t, \xi)$ принадлежат при $\xi \neq 0$ классу C_1 по всем своим аргументам, $i = 1, \ldots, N$. Построим выражение

$$J(z, r, T) = \int_{-T}^{+T} \Big(\int_{|x-z|=r} a_i(x, t, x - z)\, u_i(x, t)\, dS_x \Big)\, dt. \qquad (8.5)$$

Для производных интеграла J по z_α и можно получить такие же формулы, как формулы (7.31a, b); единственная разница состоит в том, что каноническая система (8.3) дает нам здесь интегралы по цилиндру в xt-пространстве, в которые входят также производные функций u_i по t. От последних можно избавиться при помощи интегрирования по частям по t. Таким путем получаем формулы

$$\frac{\partial J(z, r, T)}{\partial z_\alpha} = \int_{-T}^{+T} \Big(\int_{|x-z|=r} a'_i(x, t, x - z)\, u_i(x, t)\, dS_x \Big)\, dt, \qquad (8.6a)$$

$$\frac{\partial J(z, r, T)}{\partial r} = \int_{-T}^{+T} \Big(\int_{|x-z|=r} a''_i(x, t, x - z)\, u_i(x, t)\, dS_x \Big)\, dt, \qquad (8.6b)$$

которые справедливы, если

$$a_i(x, t, \xi) = 0 \quad \text{при } t = \pm T \quad \text{и всех} \quad i, x, \xi. \tag{8.7}$$

Функции $a_i'(x, t, \xi)$ и $a_i''(x, t, \xi)$ задаются здесь при помощи формул [см. (7.32a, c)]

$$a_i'(x, t, \xi) = a_{i,\alpha} - a_k S_{ki\alpha\beta,\beta} - a_k S_{ki\alpha\beta;\beta} - a_{k,\alpha} S_{ki\alpha\beta} - \\ - a_{k;\alpha} S_{ki\alpha\beta} - a_{k,t} R_{ki\alpha} - a_k R_{ki\alpha,t} + a_k T_{ki\alpha},$$

$$|\xi| a_i''(x, t, \xi) = a_{i,\alpha}\xi_\alpha + a_{i;\alpha}\xi_\alpha + (n-1)a_i - a_{k,\beta} S_{ki\alpha\beta}\xi_\alpha - \tag{8.8}$$

$$- a_{k;\beta} S_{ki\alpha\beta}\xi_\alpha - a_k S_{ki\alpha\beta,\beta}\xi_\alpha - a_k S_{ki\alpha\beta;\beta}\xi_\alpha - \\ - a_k S_{ki\alpha\alpha} + a_k T_{ki\alpha}\xi_\alpha - a_{k,t} R_{ki\alpha}\xi_\alpha - a_k R_{ki\alpha,t}\xi_\alpha. \tag{8.8a}$$

(Частная производная функции $a_i(x, t, \xi)$ по ξ_α снова обозначается через $a_{i;\alpha}$.)

Если при $t = \pm T$ в нуль обращаются не только функции a_i, но и производные $a_{i,t}$, то эти выкладки можно повторить и выразить вторые производные интеграла J через интегралы от u_i по цилиндру $|x - z| = r$, $|t| < T$ в xt-пространстве.

Дифференцируемость интегралов от решений, взятых по времяобразным кривым. Пусть функции $a_i(x, t, \xi)$ имеют при $t = \pm T$ нули k-го порядка. Если все коэффициенты оператора L принадлежат классу C_k, то можно k раз итерировать формулы (8.6a, b). Мы найдем таким образом, что если решение $u(x, t)$ уравнения (8.2) принадлежит классу C_m, то цилиндрические интегралы $J(z, r, T)$ при $r > 0$ принадлежат по z и r классу C_k. Возьмем, в частности, за a_i функции

$$a_i(x, t, \xi) = \frac{1}{\omega_n} |\xi|^{1-n} (T^2 - t^2)^k \delta_i^j w(x, t), \tag{8.9}$$

где w — некоторая функция класса C_∞. Мы получим, что выражение

$$J(z, r, T) = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \int\limits_{|x-z|=r} \left(\int\limits_{-T}^{+T} w(x, t)(T^2 - t^2)^k u_j(x, t)\, dt \right) dS_x \tag{8.10}$$

при $r > 0$ принадлежит по z и r классу C_k. Выражение $J(z, r, T)$ равно среднему значению функции

$$v_j(x, T) = \int\limits_{-T}^{+T} w(x, t)(T^2 - t^2)^k u_j(x, t)\, dt, \tag{8.11}$$

вычисленному по сфере радиуса r с центром в точке z, когда v_j рассматривается как функция x. Из теорем гл. IV следует, что $v_j(x, T)$ в свою очередь является функцией от x класса $C_{k-2[n/2]}$.

Все производные решения $u(x, t)$ уравнения (8.2) порядков $\leqslant m-1$ встречаются среди функций $u_j(x, t)$. Пусть

$$v(x, T) = \int_{-T}^{+T} (T^2 - t^2)^k w(x, t) u(x, t)\, dt. \tag{8.12}$$

Производные по x функции $v(x, T)$ порядков $\leqslant m-1$ являются тогда линейными комбинациями функций $v_j(x, T)$ (образованными при помощи различных весовых функций w). Поэтому функция $v(x, T)$ принадлежит по x классу $C_{k+m-1-2[n/2]}$. Поскольку дифференцирование функции $v(x, T)$ по T дает выражение такого же типа, в котором только k заменено на $k-1$, и поскольку u принадлежит классу C_m, мы находим, что функция $v(x, T)$ принадлежит классу $C_{k+m-1-2[n/2]}$ по x *и по* T. Следовательно, имеет место теорема:

Пусть $u(x, t)$ — принадлежащее классу C_m решение линейного дифференциального уравнения m-го порядка $L[u]=0$. Пусть коэффициенты оператора L принадлежат классу C_k, и пусть параллели к оси t времяобразны относительно оператора L. Тогда при любом целом положительном k и при любой функции $w(x, t)$ класса C_∞ выражение (8.12) *принадлежит по x и T классу $C_{k+m-1-2[n/2]}$.*

Эту теорему можно переформулировать следующим образом: Если коэффициенты оператора L дифференцируемы достаточно большое число раз, то некоторую последовательность дифференцирований и интегрирований можно бесконечное число раз применять к решению $u(x,t)$. Введем интегральный оператор σ, который переводит функции $\Phi(t)$ в функции $\sigma[\Phi(t)]$ и определяется формулой

$$2t \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau = \sigma[\Phi]. \tag{8.13}$$

В символической форме можно записать, что

$$\sigma = 2t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1}. \tag{8.14}$$

Тогда

$$\sigma^k [u(x, t) + u(x, -t)] = \frac{2t}{(k-1)!} \int_{-t}^{+t} (t^2 - \tau^2)^{k-1} u(x, \tau)\, d\tau. \tag{8.15}$$

Наша теорема утверждает, что эта функция принадлежит классу $C_{k+m-2-2[n/2]}$. Если число $m-2-2[n/2]$ неотрицательно, то мы имеем просто, что выражение $\sigma^k[u(x, t) + u(x, -t)]$ принадлежит классу C_k. Если же число $m-2-2[n/2]$ отрицательно, то мы замечаем, что u является также решением уравнения

$$L'[u] = (\Delta_x)^{1+[(n-m)/2]} L[u] = 0,$$

порядок которого равен

$$m' = 2 + 2[n/2]$$

(m заведомо нечетно). Параллели к оси t времяобразны и для оператора L'. Поскольку $m' - 2 - 2[n/2] = 0$, выражение $\sigma^k[u(x, t) + u(x, -t)]$ принадлежит классу C_k, если коэффициенты оператора L дифференцируемы достаточно большое число раз, а решение u принадлежит классу $C_{m'}$. Операторы σ и $\partial/\partial x_\alpha$ коммутируют на функциях класса C_1. Соединив воедино все эти замечания, мы получим теорему:

Пусть $u(x, t)$ — решение уравнения m-го порядка $L[u] = 0$ класса C_ν, где

$$\nu = \max(m,\ 2 + 2[n/2]). \tag{8.15a}$$

Пусть коэффициенты оператора L принадлежат классу C_∞, и пусть параллели к оси t времяобразны относительно оператора L. Тогда к функции $u(x, t) + u(x, -t)$ неограниченное число раз можно применять оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sigma = 2t\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{-1} \quad (\alpha = 1, \ldots, n).$$

Для решений волнового уравнения

$$L[u] = \frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \Delta_x u = 0 \tag{8.16}$$

эту теорему легко проверить непосредственно. Действительно, если функция $u(x, t)$ — решение уравнения (8.16) с начальными значениями

$$u = F(x), \quad u_t = G(x) \quad \text{при} \quad t = 0,$$

то функция

$$v = \left(2x_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\sigma\right)[u(x,\ t) + u(x,\ -t)] =$$

$$= 2x_\alpha(u(x,\ t) + u(x, -t)) + 2t\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{-t}^{+t} u(x,\ \tau)\,d\tau \tag{8.17}$$

является решением волнового уравнения с начальными значениями

$$v = 4x_\alpha F(x), \quad v_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Так как для начальных значений, принадлежащих классу $C_{[(n+4)/2]}$, существует решение волнового уравнения класса C_2, то ясно, что операторы $(2x_\alpha + (\partial/\partial x_\alpha)\,\sigma)$ можно неограниченное число раз применять к решению волнового уравнения с начальными значениями $u = F(x)$, $u_t = 0$, где функция F принадлежит классу $C_{[(n+4)/2]}$. То же самое утверждение справедливо для одного оператора $(\partial/\partial x^\alpha)\,\sigma$.

Интегралы от решений, взятые по времяобразным кривым с общими концами. Вместо того чтобы рассматривать интегралы от решения u, взятые вдоль *параллельных* отрезков прямых с весами, имеющими на концах этих отрезков нули некоторого порядка, мы можем рассмотреть интегралы по семейству времяобразных линий *с общими концами*.

Пусть $\Phi(t)$ — функция класса C_∞, для которой

$$\Phi(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \pm T. \tag{8.18}$$

Рассмотрим выражение

$$w(x, \xi) = \int_{-T}^{+T} u(x + \xi\Phi(t), t)\, dt. \tag{8.19}$$

При любых x и ξ оно равно интегралу от функции u вдоль кривой $C_{x,\xi}$ с концами $(x, \pm T)$, которые от ξ не зависят. При $\xi = 0$ эти кривые сводятся к параллелям к оси t и потому времяобразны. Очевидно, что кривые $C_{x,\xi}$ также времяобразны при всех достаточно малых ξ. Мы имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{-T}^{+T} u(x + \xi\Phi(t), t)\,\Phi(t)\, dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{-T}^{+T} u'(x, t)\,\Phi(t)\, dt. \tag{8.20}$$

Здесь функция $u'(x, t)$ при фиксированном ξ равна $u(x + \xi\Phi(t), t)$. Аналогичным образом любую производную интеграла w по ξ порядка k можно представить в виде производной k-го порядка по x от выражения

$$\int_{-T}^{+T} u'(x, t)\,\Phi^k(t)\, dt. \tag{8.21}$$

Далее, функция $u'(x, t)$ является решением линейного уравнения $L'[u'] = 0$, где оператор L' зависит еще от параметра ξ и при малых ξ близок к оператору L. Кроме того, в интеграле (8.21) вес $\Phi^k(t)$ имеет при $t = \pm T$ нуль k-го порядка. Отсюда следует, что если коэффициенты оператора L принадлежат классу C_∞, а решение u принадлежит классу C_ν (где ν определяется условием (8.15a)), то выражение (8.21) принадлежит по x классу C_k. Это означает, что у функции $w(x, \xi)$ существуют все производные по ξ порядка k, так как их можно формально представить в виде выражений, которые заведомо существуют. Пользуясь индукцией по числу дифференцирований, легко превратить эти соображения в строгое доказательство. Надо только помнить, что производные

k-го порядка функции (8.21) по x действительно можно явно выразить через интегралы от функции u и от ее производных порядков $\leqslant \nu - 1$, взятые с некоторыми весами. Кроме того, если u принадлежит классу C_ν, то всегда можно произвести еще одно интегрирование по ξ под знаком интеграла. Таким образом, полагая $x = 0$, мы приходим к следующему утверждению.

Пусть даны оператор L с коэффициентами класса C_∞, семейство кривых класса C_∞, зависящих от параметра ξ так, что

$$x = \xi\Phi(t) \quad \text{при} \quad |t| \leqslant T, \tag{8.22}$$

и имеющих при $t = \pm T$ общие концы, и дано принадлежащее классу C_ν решение $u(x, t)$ уравнения $L[u] = 0$. Тогда интеграл по t от решения u, взятый вдоль этих кривых, является по ξ функцией класса C_∞.

Естественно ожидать, что и в случае, когда $\Phi(t)$ и коэффициенты оператора L представляют собой аналитические функции, интегралы от u вдоль кривых (8.22) тоже будут аналитическими функциями ξ. По-видимому, это можно доказать[1]) аналогично тому, как на стр. 125 и следующих была доказана аналитичность решений линейных аналитических эллиптических систем, т. е. оценивая должным образом производные функции $w(x, \xi)$ по ξ, существование которых уже было установлено.

[1]) Совсем другое доказательство этого факта, использующее решения специальных задач Коши для сопряженного уравнения, дано Йоном [4], стр. 248.

ЛИТЕРАТУРА

Адамар Ж. (Hadamard J.)

[1] Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations, New York, 1952.

Асгейрссон Л. (Asgeirsson L.)

[1] Über eine Mittelwertseigenschaft von Lösungen homogener linearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, *Math. Ann.*, *113* (1937), 321—346.

Берс Л. (Bers L.)

[1] Local behavior of solutions of general linear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, *8* (1955), № 4.

Браудер Ф. (Browder F. E.)

[1] Assumption of boundary values and the Green's function in the Dirichlet problem for the general linear elliptic equation, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, *39* (1953), 179—184.

[2] The Dirichlet and vibration problems for linear elliptic differential equations of arbitrary order, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, *38* (1952), 741—747.

[3] The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, *38* (1952), 230—235.

[4] Strongly elliptic systems of differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Studies, 33, 1954, pp. 15—51.

Брусотти Л. (Brusotti L.)

[1] Sopra alcune questioni di geometria suggerite dalla teoria delle equazioni a derivate parziali totalmente iperboliche, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (*5*), *39* (1953), 381—404.

Бюро Ф. (Bureau F.)

[1] Quelques questions de Géométrie suggérées par la théorie des équations aus dérivées partielles totalement hyperboliques, Colloque de Géométrie Algébrique, Liège, 1948.

[2] Essai sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, Mém. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., 2e sér., v. 15, 1936.

[3] Sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (*5*), *22* (1936), 156—174.
[4] Les solutions élementaires des équations linéaires aux dérivées partielles, Bruxelles, 1936.
[5] Le problème de Cauchy pour une équation linéaire aux dérivées partielles, totalement hyperbolique, d'ordre quatre et à quatre variables indépendantes, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (*5*), *33* (1947), 379—402.
[6] Sur la solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles d'ordres quatre et à trois variables indépendantes, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (*5*), *33* (1947), 473—484.
[7] La solution élémentaire d'une équation linéaire aux dérivées partielles, décomposable et totalement hyperbolique, d'ordre quatre et à quatre variables indépendantes, *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (*5*), *34* (1938), 566—592.
[8] Intégrales de Fourier et problème de Cauchy, *Annali di Matematica pura ed applicata, ser. 4*, *32* (1951), 205—233.
[9] Divergent integrals and partial differential equations, Univ. of Chicago, 1954 (Contract Nu. DA 11-022-ORD-1318).

Вейль Г. (Weyl H.)
[1] The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, *7* (1940), 411—444.

Вейнштейн А. (Weinstein A.)
[1] The Cauchy problem for the wave equation and the equation of Euler — Poisson — Darboux, Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, Technical Note BN-22, 1954.

Вишик М. И.
[1] Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, *25 (67)* (1949), № 2, 189—234.

Вольтерра В. (Volterra V.)
[1] Leçons sur les équations intégrales, Paris, 1913.

Герглотц Г. (Herglotz G.)
[1] Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Ber. Math. Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss.*, Leipzig. Part I (Anwendung Abelscher Integrale), *78* (1926), 41—74; Part II (Anwendung Fourierscher Integrale), *78* (1926), 287—318; Part III (Anwendung), *80* (1928), 69—114.
[2] Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, *Abh. Math. Sem. Hamburg* (1928), 189—197.
[3] Mechanik der Kontinua, Göttingen, 1931 (записи лекций).

Гординг Л. (Gårding L.)
[1] Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients, *Acta Math.*, *85* (1950), 1—62.

[2] On a lemma by H. Weyl, *Kungl. Fysiografiska Sällakapets i Lund Förhandlingar*, *20* (1950), No. 23, 1—4.

Дельсарт Ж. (Delsarte J.)

[1] Les fonctions „moyenne-periodiques", *J. Math. Pures Appl., sér. 14*, *9* (1935), 409—453.

Диас X. и Вейнбергер Г. (Diaz J. B. and Weinberger H. F.)

[1] A solution of the singular initial value problem for the Euler — Poisson — Darboux equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *4* (1953), 703—715.

Йон Ф. (John F.)

[1] Bestimmung einer Funktion aus ihren Integralen über gewisse Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, *109* (1934), 488—520.

[2] Abhängigkeiten zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion, *Math. Ann.*, *111* (1935), 541—559.

[3] Linear partial differential equations with analytic coefficients, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, *29* (1943), 98—104.

[4] On linear partial differential equations with analytic coefficients (Unique continuation of data), *Comm. Pure Appl. Math.*, *3* (1949), 209—253.

[5] The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients, *Comm. Pure Appl. Math.*, *3* (1950), 273—304.

[6] The ultrahyperbolic differential equation with 4 independent variables, *Duke Math. J.*, *4* (1938), 300—322.

[7] General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Stillwater, Oklahoma, 1951, pp. 113—175.

[8] Special topics in Partial Differential Equations, Lectures given in the spring of 1952 at New York Univ., Inst. for Math. and Mech. (записи лекций).

[9] Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, *6* (1953), 327—335.

[10] On behavior of solutions of partial differential equations, Univ. of Maryland, Inst. for Fluid Dynamics, Lecture Series No. 25 (1953).

Келлог О. (Kellog O. D.)

[1] Foundations of potential theory, Berlin, 1929.

Коши О. (Cauchy A.)

[1] Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux differentielles partielles et à coefficients constants, Oeuvres Completes, 2e série. v. I, pp. 275—357.

Купер Дж. (Cooper J. L. B.)

The application of multiple Fourier transforms to the solution of partial differential equations, *Quart. J. Math. Oxford, Ser. (2)*, *1* (1950), 122—135.

Курант Р. и. Гильберт Д. (Courant R. und Hilbert D.)

[1] Методы математической физики, т. 1, 2, изд. 2, Гостехиздат М.—Л., 1951.

[2] Methods of mathematical physics, v. 2, New York (в печати).

Курант Р. и Лакс А. (Courant R. and Lax A.)
[1] Remarks on Cauchy's problem for hyperbolic partial differential equations with constant coefficients in several independent variables, *Comm. Pure Appl. Math.*, *8* (1955), No. 4.

Лакс П. (Lax P. D.)
[1] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, *8* (1955), No. 4. (Русский перевод в сборнике „Математика", 1:1, 1957, стр. 43—59.)

Леви Э. (Levi E. E.)
[1] Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, *24* (1907), 275—317. (Русский перевод в *УМН*, *вып. 8* (1941), 249—292.)

Лерэ Ж. (Leray J.)
[1] Symbolic calculus with several variables, projections and boundary value problems for differential equations, Princeton Univ., 1951 (записи лекций).
[2] On linear hyperbolic equations with variable coefficients in a vector space, Ann. Math. Studies, 33, 1954, pp. 201—210.

Лопатинский Я. Б.
[1] Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, *ДАН СССР*, *71* (1950), № 3, 433—436.
[2] Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, *ДАН СССР*, *78* (1951), № 5, 865—867.

Магнус В. и Оберхеттингер Ф. (Magnus W. and Oberhettinger F.)
[1] Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, Chelsea Publ. Co., 1949.

Мадер Ф. (Mader Ph.)
[1] Über die Darstellung von Punktfunktionen in *n*-dimensionalen euklidischen Raum durch Ebenenintegrale, *Math. Z.*, *26* (1927), 646—652.

Мальгранж Б. (Malgrange B.)
[1] Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. 1. Solutions élémentaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, *237* (1953), 1620—1622; 2. Equations avec second membre, *238* (1954), 196—198.

Миранда К. (Miranda C.)
[1] Уравнения с частными производными эллиптического типа, Изд. иностр. лит., М., 1957.

Морри К. (Morrey C. B.)
[1] On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *43* (1938), 126—166.

[2] Second order elliptic systems of differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, *39* (1953), 201—206.
[3] Second order elliptic system of differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Studies, 33, 1954, pp. 101—159.

Мышкис А. Д.
[1] Единственность решения задачи Коши, *УМН*, *3* (1948), № 2 (24), 3—46.

Ниренберг Л. (Nirenberg L.)
[1] On non-linear elliptic partial differential equations and Hölder continuity, *Comm. Pure Appl. Math.*, *6* (1953), 103—155.
[2] On a generalization of quasi-conformal mappings and its application to elliptic partial differential equations, Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. Math. Studies, 33, 1954, pp. 95—100.

Петровский И. Г.
[1] О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений, *Матем. сб.*, *17 (59)* (1945), № 1—3, 368—370.
[2] О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны, *ДАН СССР*, *17* (1937), № 7, 343—346.
[3] Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными, *Матем, сб.*, *5 (47)* (1939), № 1, 3—70.
[4] О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, *УМН*, *1* (1946), № 3—4, 44—70.
[5] Über das Cauchysche Problem für System von partiellen Differentialgleichungen, *Матем. сб.*, *2 (44)* (1937), № 3, 815—870.

Радон И. (Radon J.)
[1] Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad.*, *69* (1917), 262—277.

Рисс М. (Riesz M.)
[1] L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Math.*, *81* (1949), 1—223.

Серрин Дж. (Serrin J. B.)
A note on the wave equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, *5* (1954), 307—308.

Сомильяна К. (Somigliana C.)
[1] Sui sistemi simmetrici di equazioni a derivati parziali, *Annali di Mat. pura ed appl., ser. 2*, *22* (1894), 143—156.

Тедоне О. (Tedone O.)
[1] Sull'integrazionne dell'equazione $\partial^2\Phi/\partial t^2 - \sum_1^m \partial^2\Phi/\partial x_i^2 = 0$, *Annali di Mat. pura ed appl., ser. 3*, *1* (1898), 1—24.

Томас Т. и Титт Э. (Thomas T. Y. and Titt E. W.)

[1] On the elementary solution of the general linear differential equation of the second order with analytic coefficients, *J. de Math.*, *18* (1939), 217—248.

Фридрихс К. (Friedrichs K. O.)

[1] On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, *6* (1953), 299—326.

[2] On differential operators in Hilbert spaces, *Amer. J. Math.*, *61* (1939), 523—544.

Фредгольм И. (Fredholm J.)

[1] Sur l'intégrale fondamentale d'une équation differentielle elliptique à coefficients constants, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, *25* (1908), 346—351.

Ховард А. (Howard A. S.)

[1] Linear second order partial differential equations with constant coefficients, Dissertation Graduate School, Univ. of Kentucky, 1942.

Хопф Э. (Hopf E.)

[1] Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Z.*, *34* (1931), 191—233.

Шапиро З. Я.

[1] Об эллиптических системах уравнений с частными производными, *ДАН СССР*, *46* (1945), № 4, 146—149.

Шварц Л. (Schwartz L.)

[1] Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques, *Ann. Math.*, *48* (1947), 857—929.

[2] Théorie des distributions, Paris, 1950.

Штельмахер К. (Stellmacher K. L.)

[1] Ein Beispiel einer Huggensschen Differentialgleichung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, *10* (1953), 133—138.

Эренпрейс Л. (Ehrenpreis L.)

[1] Solution of some problems of division, *Amer. J. Math.*, *76* (1954), 883—903.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава IV

Тождества для сферических средних

Глава V

Теоремы Асгейрссона и Ховард

Глава VI

Определение функции ее интегралами по сферам фиксированного радиуса

Глава VII

Свойства дифференцируемости решений эллиптических систем

Глава VIII

Свойства регулярности интегралов от решений, взятых по времяобразным линиям

Книга американских математиков Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона представляет собой современное и весьма оригинальное изложение ряда разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Особенно много внимания уделено рассмотрению краевых задач.

Книга будет весьма полезна математикам, физикам и инженерам-теоретикам, занимающимся теорией обыкновенных дифференциальных уравнений или ее приложениями.

Бурбаки Н., **Топологические векторные пространства.** Париж, 1953, 1955, перевод с французского, 15 л.

Выпуски XV, XVIII и XIX известной монографии Н. Бурбаки „Основы математики", составляющие единственное в мировой литературе руководство по общей теории топологических векторных пространств.

Рассчитана на математиков, работающих в различных областях математики, в первую очередь на специалистов по функциональному анализу и топологии.

Сборник **„Современная математика для инженеров"**, под ред. Э. Бекенбаха. Нью-Йорк, 1956, перевод с английского, 30 л.

Сборник статей, написанных рядом крупнейших математиков. В сборнике излагаются различные вопросы современной математики, находящие применение во многих разделах техники. Статьи относятся преимущественно к теории вероятностей и статистике, к теории дифференциальных уравнений и к вычислительной математике.

Книга рассчитана на инженеров, но будет полезна и научным работникам — механикам, а также математикам, работающим в различных областях техники или ведущим преподавание в высших технических учебных заведениях.

Ф. ЙОН
ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ
И СФЕРИЧЕСКИЕ СРЕДНИЕ
В ПРИМЕНЕНИИ
К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ
УРАВНЕНИЯМ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Редактор *Е. Д. Соломенцев*
Художник *Б. И. Фомин*
Художественный редактор *Е. И. Подмарьков*
Технический редактор *М. П. Грибова*
Сдано в производство 23/I 1958 г.
Подписано к печати 1/X 1958 г.
Бумага $60 \times 92^1/_{16}$ = 5,0 бум. л.
10,0 печ. л. Уч.-изд. л. 9,1.
Изд. № 1/3567 Цена 7 р. 85 к.
Зак. 338

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

16750. Типография Франклин, Будапешт.