LECTURES IN APPLIED MATHEMATICS
Proceedings of the Summer Seminar, Boulder, Colorad(

MARC KAC, EDITOR

Volume IV

THE GENERAL THEORY OF QUANTIZED FIELDS

by
RES JOST
EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE
ZÜRICH, SWITZERLAND

1965
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
PROVIDENCE, RHODE ISLAND

Р. Йост

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

При участии
КЛАУСА ХЕППА

Перевод с английского
О. И. ЗАВЬЯЛОВА и Б. В. МЕДВЕДЕВА

Под редакцией
В. С. ВЛАДИМИРОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва 1967

УДК 530. 145 + 517

Книга написана известным швейцарским физиком-теоретиком и математиком Р. Йостом. В ней содержится ясное и математически строгое изложеиие аксиоматической квантовой теории поля, причем значительиая часть результатов принадлежит автору и его ученикам.

Математический аппарат книги включает в себя представления групп, обобщенные функции, методы теории функций многих комплексных переменных, операторы в гильбертовом пространстве и т. д., что делает ее привлекательной и с математической точки зрения.

Книга несомненно заинтересует широкий круг математиков, интересующихся физикой, и физиков-теоретиков, работающих в области квантовой теории поля.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-3-2 + 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Монография «Общая теория квантованных полей», русский перевод которой предлагается вниманию читателя, написана известным швейцарским физиком-теоретиком и математиком проф. Р. Йостом на основе лекций, прочитанных им в 1960 г. на Летнем семинаре по прикладной математике (Колорадский университет, США). При подготовке книги автором были учтены результаты, полученные в этой области вплоть до конца 1962 г. Для русского издания книги ученик Р. Йоста д-р Клаус Хепп написал новый текст гл. VII «Новые достижения» (ранее называвшейся «Что не рассмотрено»), в которой в обзорном плане отражены последние достижения в аксиоматической (вайтмановой) теории квантованных полей. Перевод глав I, II и III выполнен Б. В. Медведевым, а гл. IV, V, VI и VII — О. И. Завьяловым. При переводе были исправлены мелкие неточности и опечатки.

Книга содержит насыщенное и тщательно продуманное изложение большого числа фактов и математических результатов в теории квантованных полей, строго доказанных в рамках аксиоматики Вайтмана. Она представляет интерес для широкого круга научных работников, аспирантов и студентов — физиков и математиков.

В. С. Владимиров

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Выход в свет русского перевода моей книги «Общая теория квантованных полей» пробуждает во мне чувство гордости, смешанное с некоторым чувством стыда. Дело в том, что своими скромными знаниями я настолько обязан переводам выдающихся русских научных книг, что мой ответный вклад весит чересчур мало.

Мне хотелось бы выразить мою благодарность и сочувствие редактору В. С. Владимирову и переводчикам Б. В. Медведеву и О. И. Завьялову, которые при переводе должны были прорываться через недосказанности, ошибки и опечатки оригинала. Я убежден, что некоторые высказывания, которые первоначально, строго говоря, были неверными, в переводе сформулированы ими верно.

Наконец мой коллега Клаус Хепп, несмотря на перегруженность другими делами, еще раз нашел в себе готовность содействовать завершению этого труда и полностью переработал последнюю главу. Мне, как всегда, приятно выразить ему дружескую признательность.

Цюрих, январь 1967 Проф. *Р. Йост*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени моих лекций в Боулдер, Колорадо, в 1960 г. у меня возникла необходимость написать эту книгу. В последующие годы я пытался, несмотря на многочисленные иные обязанности, в меру моих сил выполнить эту задачу. В результате настоящая книга создавалась в относительно короткие отрезки времени, разделенные большими промежутками. Даже поверхностному читателю бросятся в глаза вызванные этим шероховатости, которые проявляются в отсутствии единства обозначений и в повторениях. Я прошу читателей о снисхождении к этому и другим недостаткам.

Рукопись была в основном завершена к концу 1962 г., и более поздние результаты уже не учитывались. Популярный обзор новейших тенденций в исследованиях читатель сможет найти в реферате автора об аксиоматической теории поля, опубликованном в Rendiconti della Conferenza internationale di Siena sulle particelle elementari, Società Italiana di Fisica, Bologna 1964, Vol II, p. 140—144. Особенно стоит обратить внимание на недавно вышедшую книгу Стритера и Вайтмана: R. F. Streater and A. S. Wightman «*PCT, Spin & Statistics and all that*», W. A. Benjaman, New York, 1964 *), сравнением с которой читатель установит, как следовало бы излагать предмет настоящей книги.

В заключение мне остается выполнить приятный долг и поблагодарить участников семинара по теоретической физике

---

*) Русский перевод «*PCT, спин и статистика и все такое*» вышел в 1966 г. в Главной редакции физико-математической литературы изд-ва «Наука».— *Прим. перев.*

ЕТН в Цюрихе за многообразную помощь при составлении настоящего доклада. Особо признателен автор д-ру Отмару Штайнману и д-ру Давиду Рюэлю и, наконец, своему ассистенту д-ру Клаусу Хеппу, без самоотверженного сотрудничества которого эта книга никогда не возникла бы. Чувства автора лучше всего выражаются цитатой «Все хорошее в этой книге восходит к его младшим друзьям, а плохое он внес в нее сам»[1]).

Сентябрь 1964 Проф. *Р. Йост*

---

[1]) Приписка матери в письме № 2 Якоба Буркхарта, Jacob Burkhardt, Briefe, Bd. I, Benno Schwabe, Basel 1949.

ВВЕДЕНИЕ

1. В последние годы был развит новый подход [1]) к старым проблемам квантовой теории поля. Эта новая теория исследует понятия, лежащие в основе всех частных моделей, которые были исследованы до сих пор. Целью этой теории является построение базиса для конкретных теорий существующих частиц и соответствующих им полей. Поэтому, хотя мы будем называть ее общей теорией квантованных полей, более справедливым было бы название аксиоматическая теория поля.

2. Эта новая теория весьма абстрактна и к тому же так математична, что возникает вопрос, не существует ли она лишь потому, что некоторые физики захотели попрактиковать свое ограниченное математическое искусство.

Мы не думаем, что это в самом деле так, во всяком случае причины существования теории глубже.

3. Для этого нужно знать кое-что о классической теории квантованных полей, об ее истории, об ее взлетах и падениях. Поскольку классическая теория не связана с содержанием основной части книги, мы дадим в этом введении краткий очерк исторического развития наиболее важной частной модели — квантовой электродинамики.

4. Исторические корни теории квантованных полей лежат в начале самой квантовой теории. Закон черного излучения, поиски которого привели Планка [Pl 1] к введению универсального кванта действия, относится прежде всего к теории электромагнитного поля. Правда, сам Планк наложил свой революционизирующий постулат на материальные осцилляторы, взаимодействующие с электромагнитным полем, но уже через несколько лет Эренфест и Дебай применили квантовый постулат непосредственно к осцилляторам поля,

---

[1]) См., например, Wightman A. S., Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs [Wi 2].

т. е. к Фурье-компонентам поперечного электромагнитного поля [1]).

5. Как только нерелятивистская квантовая механика приняла свой окончательный вид, Гейзенберг, Борн и Иордан [Bn1] указали, что реинтерпретацию физических наблюдаемых нельзя остановить на чисто механических величинах, таких, как положение и импульс точечного электрона, но необходимо распространить и на электромагнитное поле тоже. Как надо было это сделать для операторов поля, было ясно из (восходящей исторически к Джинсу) аналогии Эренфеста — Дебая между осцилляторами поля и вещества.

6. Заслуга первого описания взаимодействия квантованного электромагнитного поля с материальными системами, описания, предложенного в памятном 1927 г., принадлежит Дираку [Di 1]. За этим последовали блестящий успех и крупная неудача. Успех состоял в том, что Дирак сумел вывести и, следовательно, разумно объяснить уже известные правила, описывающие испускание и поглощение света. Неудача в том, что Эренфест [Pa1] немедленно указал, что теория должна приводить к бесконечностям, поскольку она содержит в качестве существенной величины значение вектор-потенциала в месте расположения точечного электрона.

7. Метод Дирака рассмотрения взаимодействия электромагнитного поля с атомом состоял в применении теории возмущений, т. е. в разложении соответствующих величин в степенные ряды по заряду электрона (или, что то же самое, по постоянной тонкой структуры 1/137). Первый необращающийся в нуль член такого разложения приводит, как мы теперь знаем, к превосходному согласию с опытом [He 2*]. В старших порядках, однако, предсказание Эренфеста оказалось справедливым. Все они бесконечны [2]) или по крайней мере, как теперь благозвучно выражаются, неопределенны. Казалось, что теория, вообще, не имела никакого содержания за пределами «первого порядка теории возмущений» и что эта теория возмущений была единственным средством, позволяющим извлечь из теории какие-нибудь осмысленные результаты. Последнее по существу все еще справедливо и сегодня.

---

[1]) [Db1]. Относительно нерасположения Дебая к интерпретации световых квантов, как свойства эфира, см. [Db 1, стр. 1434].

[2]) См., например, для собственной энергии электрона [Pa 1*].

8. Но теорию одолевали и другие трудности. Часть из них была связана с дираковой теорией электрона, в которой было свое туманное место — состояния с отрицательной энергией. Сколь серьезным представлялось это затруднение, лучше всего охарактеризовать соответствующим замечанием Паули в его воистину изумительной статье в *Handbuch der Physik*, том 24.1: «Попытка спасти теорию в ее настоящей форме кажется в свете этих следствий» (переходов в состояния с отрицательной энергией) «уже заранее безнадежной»; [1]) тем не менее теория была блестяще спасена Дираком его теорией дырок и предсказанием и открытием позитрона [Di 2].

9. Другая трудность возникла из наблюдений над проникающей компонентой космического излучения. Она воспринималась как указание на то, что первое приближение теории возмущений терпит крах при энергиях, превышающих в лабораторной системе примерно в 137 раз массу электрона, пока не было открыто, что эта проникающая компонента состоит из мезонов, а не из электронов.

10. Ясно, что поскольку положение было столь туманным, квантовая электродинамика оказалась подходящей ареной для развития общих идей любого рода и временами для измышления очень впечатляющих и нетривиальных математических методов, призванных спасти ситуацию. Многие из таких предложений более общего и даже философского характера дожили до наших дней и до сих пор превозносятся как лекарства от всех болезней. Тем временем сама теория взаимодействия электронов с максвелловым полем развивалась очень медленно вплоть до конца второй мировой войны.

11. В послевоенные годы стала энергично разрабатываться идея о перенормировках, корни которой лежат в работах Гейзенберга [Hei 4], Дирака и Вайскопфа [Wei 1] середины тридцатых годов. Была показана ее эффективность в приведении раздражающего скопления бесконечностей в строгий порядок. Именно оказалось, что их можно

---

[1]) [Pa 1*, стр. 245 (стр. 286 русского издания)]. Относительно общего положения в квантовой электродинамике см. стр. 325 и следующую.

полностью собрать в три перенормировочные постоянные [Kä 1*], одну из которых можно фиксировать по соглашению, а две другие определяются после подстановки известной величины массы электрона и экспериментального значения безразмерной постоянной тонкой структуры. Этот очень существенный прогресс привел к новым, перенормированным рядам теории возмущений, каждый отдельный член которых уже хорошо определен, однако свойства сходимости которых по-прежнему остались неизвестными[1]). Однако уже несколько первых членов этих (формальных) рядов по степеням постоянной тонкой структуры согласуются с опытом во всех проверявшихся случаях с изумительной, до сих пор не встречавшейся точностью. По своим успехам перенормированная квантовая электродинамика намного превосходит любую физическую теорию, которой мы сейчас обладаем [Pe1].

12. Это очень впечатляющее обстоятельство не делает, однако, положение вещей в целом менее странным. Мы исходим из уравнений, которые не имеют смысла. Мы применяем к их решениям некоторые определенные предписания и приходим, наконец, к степенному ряду, про который мы не знаем, имеет ли он смысл. Несколько первых членов этого ряда приводят, однако, к наилучшим известным предсказаниям. Положение вещей не становится более понятным в свете того факта, что успех квантовой электродинамики совершенно единствен. Математически возможно выписать и другие перенормируемые теории, но если в природе и использованы некоторые из них, то выбраны столь большие постоянные связи, что перенормированный ряд теории возмущений по необходимости бесполезен. С другой стороны, в природе существуют и очень слабые взаимодействия, однако они, по-видимому, соответствуют неперенормируемым теориям.

13. Наибольшее впечатление в истории развития квантовой электродинамики производит удивительная живучесть теории. От чего в точности это происходит — неизвестно. Анализ других моделей вряд ли сможет пролить свет на этот круг вопросов. Тем не менее исследование общих представлений, лежащих в основе всех релятивистских квантовых

---

[1]) См., например, [Kä 1*].

теорий поля, кажется неотложной задачей. Общая теория квантованных полей ставит (но не решает) эту задачу.

14. Основная задача, а именно вопрос о том, не будут ли основные постулаты совместными друг с другом только для тривиальной S-матрицы (именно, для $S = I$) и поэтому физически неприемлемыми, кажется столь трудной, что большинство работающих в этой области считает ее безнадежной. Однако до сих пор удавалось обходить этот вопрос за счет того, что рассматривались многие нетривиальные, но поддающиеся решению проблемы.

15. Теория строится аксиоматическим образом; она основывается на группе основных постулатов, часть которых выглядит в высшей степени технически и абстрактно. Это обстоятельство, так же как и то, что интуиция вряд ли поможет здесь, заставляет нас использовать уровень строгости, на который обычно в теоретической физике смотрят без всякого восторга.

16. Мы должны, однако, отметить, что аксиомы в их современной формулировке будут приведены в этой книге в применении к специальному случаю, исключающему квантовую электродинамику из-за непрерывности отвечающего ей спектра энергии-импульса [1]). Считают, что несмотря на это, они будут определять интересные вещи. Однако упомянутый выше особый характер квантовой электродинамики, строго говоря, не обнадёживает.

17. Мы не будем ничего говорить о возможных успехах этого нового подхода, поскольку у читателя после изучения тех аспектов теории, которые представлены в этой книге, появится свое собственное мнение.

18. В заключение было бы, пожалуй, уместным сравнить аксиоматический подход в общей теории квантованных полей с другими аксиоматическими теориями.

А. Совершенно ясно, что эта попытка имеет мало общего с обычной аксиоматизацией классической математики и математической физики. Поэтому она не имеет никакого отношения ни к шестой проблеме Гильберта [Hi 1*, стр. 306], ни к „Основаниям геометрии" того же автора. Во всех этих случаях аксиоматизация завершала уже вполне выстроенное здание, здесь же мы имеем дело с несуществующим

[1]) См., однако, [Wi 3].

фундаментом здания, которое, может быть, никогда не будет построено.

B. Обсуждаемую аксиоматизацию можно было бы назвать „аксиоматизацией, как последним прибежищем". Ее можно было бы, если нужна какая-то аналогия, в крайнем случае сравнить с аксиоматизацией теории множеств. Это также попытка отделить смысл от бессмыслицы. Мы чувствуем, однако, что и это сравнение еще далеко не точно; нам представляется, что соотношение смысла к бессмыслице более благоприятно в наивной теории множеств.

19. Эта книга основана на серии лекций, которые автор прочел на Летнем семинаре Американского математического общества в 1960 г. Хотя ее содержание и не тождественно содержанию этих лекций, оно тем не менее сохранило характер лекций в том смысле, что

a) излагаемый материал не претендует на полноту;

b) мы были не очень тщательны в цитировании литературы и не хотели щеголять ученостью при выполнении этой работы;

c) стиль определяется нашим умением или, скорее, неумением излагать свои мысли по-английски. Наш язык — это смесь ломаного английского и научного жаргона, принятого на семинарах. Возможно, он будет раздражать читателя (как это было с автором), но мы надеемся, что его можно будет понять.

Глава I

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА; ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ, СПИНОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Математические средства, необходимые для понимания *общей теории квантованных полей*, заметно отличаются от стандартного набора средств классической математической физики. Они более абстрактны, более современны и более просты. Мы сочли целесообразным посвятить раздел краткому обзору основных идей. Доказательства не будут приведены, но ссылки на литературу будут частыми и подробными.

Остальная часть этой вводной главы посвящена структуре пространства-времени и возникающим при этом проблемам.

1. Математические средства

А. Функциональные пространства [Kö 1*, Sw 2*]. Почти все математические средства, нужные для понимания книги, связаны с линейными топологическими пространствами. Многие такие пространства являются функциональными пространствами. Мы опишем ниже наиболее важные из этих пространств.

Пространства функций рассматриваются только над вещественным конечномерным линейным пространством R^N (вещественным аффинным пространством). Вспомним основные свойства R^N, поскольку бесконечномерные пространства — это обобщения пространств R^N. Элементами R^N являются совокупности N вещественных чисел, $x=(x^1, x^2, \ldots, x^N)$. Сложение и умножение на скаляр определяются как обычно. Пространство R^N инвариантно относительно неособенных линейных неоднородных преобразований ($x'=Mx+a$, матрица M — невырожденная), которые образуют автоморфизмы пространства R^N; R^N становится топологическим пространством, если мы введем *базу окрестностей* каждой его точки

[Kö 1*, стр. 3]. Достаточно даже ввести такую базу для *одного* вектора, например для $x=0$, и определить окрестности в любой другой точке трансляцией ($x'=x+a$ есть трансляция).

Введем базу окрестностей вектора 0 с помощью *нормы* [Kö 1*, стр. 127]

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{N}(x^k)^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Тогда шары $\{x \mid \|x\|<\rho\}$ положительного радиуса ρ образуют базу окрестностей. Ясно, что норма (1) неинвариантна относительно *однородных* неособенных линейных преобразований ($x'=Mx$), в то время как введенная таким образом топология инвариантна относительно всех автоморфизмов R^N [Kö 1*, стр. 129].

Множество $S\subset R^N$ называется *ограниченным*, если точная верхняя грань норм $\|x\|$ для $x\in S$ конечна:

$$\sup_{x\in S}\|x\|<\infty. \tag{2}$$

Ограниченное множество всегда содержится в достаточно большой сфере: пусть ρ больше точной верхней грани (2), тогда $S\subset\{x \mid \|x\|<\rho\}$. Предполагается, что читатель знаком с понятиями *открытого* и *замкнутого* множества. *Ограниченное* и *замкнутое* множество $S\subset R^N$ *компактно.*

Перейдем к комплекснозначным функциям φ над R^N. Функция φ отображает R^N в множество комплексных чисел **C**, где **C** — комплексное одномерное линейное топологическое пространство, топология в котором задается модулем комплексного числа. Функция φ *ограничена*, если образ $\varphi(R^N)$ ограничен, т. е. если

$$\sup|\varphi(x)|<\infty. \tag{3}$$

Носителем φ называется наименьшее замкнутое множество в R^N, вне которого φ равно нулю. Оно обозначается как $\operatorname{supp}\varphi$. Можно задать $\operatorname{supp}\varphi$ выражением

$$\operatorname{supp}\varphi=\overline{R^N-\varphi^{-1}\{0\}}, \tag{4}$$

где черта сверху означает замыкание в R^N. Если $\operatorname{supp}\varphi$ компактен, то φ равно нулю вне соответствующей сферы и обратно.

Мы не будем определять непрерывность и дифференцируемость функции. Напомним некоторые простые понятия, которые потребуются нам далее. Пусть $m=(m_1, m_2, \ldots, m_N)$ — набор из N натуральных чисел. Определим

$$D^m = \frac{\partial^{|m|}}{(\partial x^1)^{m_1} (\partial x^2)^{m_2} \ldots (\partial x^N)^{m_N}}, \tag{5}$$

где $|m| = \sum_{k=1}^{N} m_k$ — порядок дифференциального монома D^m. Определим также

$$x^m = (x^1)^{m_1} (x^2)^{m_2} \ldots (x^N)^{m_N}, \tag{6}$$

тогда $|m|$ — степень монома x^m.

Функция φ принадлежит классу C_α, если все ее производные $D^m\varphi$ для $|m| \leqslant \alpha$ существуют и непрерывны. C_0 состоит из всех непрерывных функций. Иногда мы будем писать C вместо C_0. Если $D^m\varphi$ существуют и непрерывны для всех m, то φ принадлежит классу C_∞.

Теперь мы можем ввести простое топологическое линейное функциональное пространство. Пусть B содержит все ограниченные функции класса C. Введем в B норму с помощью равенства

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi|. \tag{7}$$

Далее рассуждения такие же, как и для R^N. База окрестностей нуля будет задаваться шарами $\{\varphi \,|\, \|\varphi\| < \rho\}$, а база окрестностей точки ψ получается трансляцией $\{\varphi \,|\, \|\varphi - \psi\| < \rho\}$. Сходимость в этой топологии означает равномерную сходимость в R^N. Пространство B полно: каждая последовательность Коши сходится к элементу из B. Поэтому B есть *полное линейное нормированное* пространство. Такое пространство называется *банаховым* пространством (**B**-пространством) [Kö 1*, гл. 3].

Множество $S \subset B$ называется *ограниченным*, если

$$\sup_{\varphi \in S} \|\varphi\| < \infty. \tag{8}$$

Это соответствует определению (2). Определение замкнутого множества также очевидно. Однако в отличие от R^N замкнутое ограниченное множество *не обязательно компактно*. Такое множество может содержать бесконечный набор замкнутых подмножеств $\{A_\alpha\}$, таких, что любой конечный поднабор $\{A_{\alpha_k}\}$, $k=1, 2, \ldots, s$ содержит общие точки [Kö 1*, § 3.1, (2)]: $\bigcap A_{\alpha_k} \neq \varnothing$, но пересечение $\bigcap A_\alpha$ пусто. Для примера возьмем замкнутую единичную сферу $\{\varphi \mid \|\varphi\|=1\}$ и выберем в качестве A_α ($\alpha=1, 2, 3, \ldots$) множества

$$A_\alpha=\{\varphi \mid \|\varphi\|=1,\ \operatorname{supp}\varphi \subset \{x \mid \|x\| \geqslant \alpha\}\}. \tag{9}$$

Далее будет использовано *замкнутое* (линейное) *подпространство* B_0 пространства B, определяемое условием

$$B_0=\{\varphi \mid \varphi \in B;\ \lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x)=0\}. \tag{10}$$

Пространство B_0 также является **В**-пространством с нормой, задаваемой (7).

Понятие **В**-пространства очень широко, и потому полезно. Например, примером **В**-пространства будет множество всех функций класса C_l, для которых

$$\|\varphi\|=\max_{|m| \leqslant l} \sup (1+\|x\|^2)^{k/2}\ |D^m\varphi| < \infty. \tag{11}$$

Это пространство обозначается $B^{k,l}$.

Нам встретятся и другие топологические линейные пространства, из которых наиболее важным будет пересечение $\mathscr{S}$ [Sw 2*, стр. 91] всех пространств $B^{k,l}$. Это пространство содержит все функции класса C_∞, для которых все выражения

$$p_\varkappa(\varphi)=\max_{k+|m| \leqslant \varkappa} \sup |(1+\|x\|^2)^{k/2} D^m\varphi|,\ \varkappa=0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

конечны. Выражения $p_\varkappa(\varphi)$ являются нормами и потому полунормами [Kö 1*, § 14.1]. Геометрию в $\mathscr{S}$ можно описать только бесконечной последовательностью полунорм (12). Пытаться заменить эти полунормы одной единой нормой, например, $\sup_\varkappa p_\varkappa(\varphi)$, неразумно, поскольку условие $\sup_\varkappa p_\varkappa(\varphi) < \infty$ влечет за собой $\varphi=0$. Поэтому мы должны приспособиться к новой ситуации. Но это совсем просто. Определим базу окрестностей $N(\varkappa, \varepsilon)$ для $\varphi=0$ условием

$$N(\varkappa, \varepsilon)=\{\varphi \mid p_\varkappa(\varphi) < \varepsilon\}. \tag{13}$$

Легко проверить, что эти окрестности (и окрестности, получающиеся из них трансляцией) определяют топологию в $\mathcal{S}$ и что $\mathcal{S}$ полно в этой топологии. Из того, что $p_\varkappa$ — норма, следует, что окрестности $N(\varkappa, \varepsilon)$ абсолютно выпуклы [Kö 1*, стр. 164]. Поэтому $\mathcal{S}$ — локально выпуклое полное топологическое линейное пространство со счетной базой окрестностей нуля. Такое пространство называется пространством Фреше (F-пространством), поскольку оно метризуемо [Kö 1*, § 18.2].

В то время как в **B**-пространстве мы могли выбрать базу из *ограниченных* окрестностей нуля, в $\mathcal{S}$ это уже невозможно. Полезно ввести следующее определение *ограниченного* множества $S \subset \mathcal{S}$: множество S ограничено, если *для всех* $\varkappa$

$$\sup_{\varphi \in S} p_\varkappa(\varphi) < \infty. \tag{14}$$

Отметим простое, но примечательное обстоятельство, что *замкнутые ограниченные* множества в $\mathcal{S}$ *компактны* [Sw 2*, стр. 91]. В этом смысле $\mathcal{S}$ ведет себя скорее как конечномерное векторное пространство R_n, чем как **B**-пространство. Пространства, в которых замкнутые ограниченные множества компактны, называются пространствами *Монтеля* (М-пространствами). Поэтому $\mathcal{S}$ есть FM-пространство [Kö 1*, § 27.2].

Каждая сходящаяся последовательность $\{\varphi_k \mid k=1, 2, 3, \ldots\}$ ограничена, поскольку из $\varphi_k \to \varphi$ следует, что $p_\varkappa(\varphi - \varphi_k) \to 0$ для всех $\varkappa$, и поэтому $p_\varkappa(\varphi_k) \leqslant p_\varkappa(\varphi - \varphi_k) + p_\varkappa(\varphi)$ остаются ограниченными.

Таким образом, нам известны следующие сведения о $\mathcal{S}$: множество $\mathcal{S}$ содержит все функции класса C_∞, которые вместе с их производными *быстро убывают* (именно быстрее, чем $(1+\|x\|^2)^{-k/2}$ для любого k). Последовательность элементов $\varphi_k \in \mathcal{S}$ сходится в $\mathcal{S}$ к φ, если для любых m и k $(1+\|x\|^2)^{k/2} D^m(\varphi_k - \varphi) \to 0$ равномерно в R^N.

Более сложные топологические линейные пространства, чем $\mathcal{S}$, играют меньшую роль. Отметим два из них: $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$. Пространство $\mathcal{D}$ есть подпространство $\mathcal{S}$ и содержит все функции из $\mathcal{S}$ с *компактным носителем* [Sw 1*]. Последовательность φ_k сходится в $\mathcal{D}$, если $\operatorname{supp}\varphi_k$ содержится для всех k в компактном множестве, не зависящем от k, и если $D^m\varphi_k$ сходится равномерно в R^N для любого m. Топологию в $\mathcal{D}$ легко описать *несчетным* множеством полунорм; $\mathscr{D}$ не является F-пространством, но по-прежнему есть M-пространство [Sw 1*, гл. III].

Пространство $\mathscr{E}$ содержит $\mathscr{S}$. Элементами $\mathscr{E}$ являются все функции класса C_∞. Последовательность $\varphi_k \to \varphi$ в $\mathscr{E}$, если для любого m $D^m\varphi_k \to D^m\varphi$ равномерно на каждом компактном множестве. Последовательность полунорм задается выражением

$$p_{\varkappa, K}(\varphi) = \max_{|m| \leqslant \varkappa} \sup_{\|x\| \leqslant K} |D^m\varphi| \tag{15}$$

для натуральных $\varkappa$ и K. Пространство $\mathscr{E}$ также является FM-пространством [Sw 1*, стр. 88].

Пространство $\mathscr{D}$—наименьшее из трех пространств, однако оно плотно и в $\mathscr{S}$ и в $\mathscr{E}$ (в соответствующих топологиях); $\mathscr{D}$ плотно также и в пространстве B_0, введенном выше.

Все эти пространства *сепарабельны*; они содержат счетные плотные подмножества. Для пространств $\mathscr{S}$, $\mathscr{E}$ и B_0 плотное множество образуют линейные комбинации функций

$$x^m e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \tag{16}$$

с рациональными коэффициентами.

Обсудим вкратце *тензорное произведение* функциональных пространств. *Тензорное произведение* является чисто алгебраической конструкцией и не имеет никакого или почти никакого отношения к топологии входящих в него пространств [Sw 1*, гл. IV].

Пусть R^{N_1} и R^{N_2} — два аффинных пространства с элементами x и y соответственно. Элементами их прямой суммы $R^{N_1+N_2}$ являются упорядоченные пары (x, y), для которых очевидным образом определены сложение и умножение на скаляр. Пусть $\mathscr{S}_x$, $\mathscr{S}_y$ и $\mathscr{S}_{xy}$ — функциональные пространства над R^{N_1}, R^{N_2} и $R^{N_1+N_2}$. Пары функций $\varphi_x \in \mathscr{S}_x$, $\varphi_y \in \mathscr{S}_y$ отображаются тогда в $\mathscr{S}_{xy}$ по правилу

$$(\varphi_x \otimes \varphi_y)(x, y) = \varphi_x(x) \cdot \varphi_y(y). \tag{17}$$

Отображение $\varphi_x \otimes \varphi_y$ непрерывно по обоим множителям. Конечные линейные комбинации функций вида (17) образуют в $\mathscr{S}_{xy}$ линейное множество, обозначаемое через $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$. Множество $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ *плотно* в $\mathscr{S}_{xy}$, что следует из плотности множества, описываемого формулой (16). Аналогично $\mathscr{D}_x \otimes \mathscr{D}_y$ плотно в $\mathscr{D}_{xy}$, $\mathscr{S}_{xy}$, $\mathscr{E}_{xy}$ и B_{0xy}.

Понятие *прямой суммы* конечного числа топологических линейных пространств совершенно очевидно. Для дальнейшего нам надо обсудить некоторые бесконечные прямые суммы. Пусть $\{R^{4n}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ — последовательность вещественных аффинных пространств, в которой R^0 означает 0-мерное пространство, содержащее единственный вектор 0. Пусть $\mathscr{S}_n$ суть $\mathscr{S}$-пространства, соответствующие R^{4n}, $\mathscr{S}_0 = \mathbf{C}$. И, наконец, $\underline{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ — последовательность элементов $\varphi_n \in \mathscr{S}_n$, такая, что *только конечное число компонент* φ_k не равно нулю. Эти „конечные" последовательности образуют при естественном определении линейных операций линейное пространство

$$\underline{\mathscr{S}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{S}_n. \tag{18}$$

Введем следующее понятие сходимости в $\underline{\mathscr{S}}$. Последовательность $\{\underline{\varphi}^l\}$, $l = 1, 2, 3, \ldots$, сходится в $\underline{\mathscr{S}}$, если (a) существует такое целое K, что $\varphi_k^l = 0$ для всех $k > K$, и если (b) каждая компонента φ_k^l сходится к φ_k при $l \to \infty$ в топологии $\mathscr{S}_k$.

Нетрудно охарактеризовать топологию в $\underline{\mathscr{S}}$ несчетным числом полунорм. Тогда $\underline{\mathscr{S}}$ становится локально выпуклым топологическим линейным пространством. Из приведенного определения сходимости уже видно, что пространство $\underline{\mathscr{S}}$ сепарабельно [Kö 1*, § 18.5].

Интересно, хотя и почти тривиально, что $\underline{\mathscr{S}}$ — это не только векторное пространство, но и *топологическая алгебра*. Умножение определяется равенством

$$(\underline{\varphi} \otimes \underline{\psi})_n = \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n-k} \otimes \psi_k; \tag{19}$$

оно непрерывно по обоим множителям. Эта алгебра еще встретится ниже.

В. Сопряженные пространства. Непрерывное линейное отображение комплексного (вещественного) топологического линейного пространства в $\mathbf{C}(R)$ называется *функционалом*. Функционалы образуют линейное пространство (если определить их сложение и умножение на скаляр обычным образом). Это линейное пространство называется *сопряженным пространством* к исходному пространству.

Пространство, сопряженное к R^N (с элементами x), состоит из линейных функций $(p, x) = \sum_{k=1}^{N} p_k x^k$, а его элементы однозначно характеризуются наборами N вещественных чисел $p = (p_1, \ldots, p_N)$, т. е. пространство $(R^N)'$, сопряженное к R^N, оказывается (вещественным) N-мерным векторным пространством.

Опишем пространство, сопряженное к B_0. Функционал μ будет непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен на единичной сфере $\|\varphi\| = 1$ [Kö 1*, § 14.6]. Определим

$$\sup_{\|\varphi\|=1} |\mu(\varphi)| = \|\mu\|. \tag{20}$$

Величина $\|\mu\|$ обладает всеми свойствами нормы в сопряженном пространстве B_0', и B_0' полно относительно этой нормы. Таким образом, B_0' — это **B**-пространство. Пространство B_0' содержит элементы, отличные от нуля. В самом деле, для любого фиксированного $a \in R^N$

$$\mu_a(\varphi) = \varphi(a) \tag{21}$$

будет функционалом. Из (21) следует, что функционалы *отделяют* B_0: если $\varphi \neq \psi$, то тогда существует такая точка a, что $\varphi(a) \neq \psi(a)$, и функционал μ, определенный формулой (21), такой, что

$$\mu_a(\varphi) \neq \mu_a(\psi). \tag{22}$$

Все функционалы μ_a удовлетворяют соотношению $\|\mu_a\| = 1$ и для $a \neq b$ соотношению $\|\mu_a - \mu_b\| = 2$. Следовательно, B_0' не сепарабельно, поскольку R^N не счетно.

Можно показать, что любой функционал из B_0' однозначно представим интегралом Стилтьеса

$$\mu(\varphi) = \int \varphi(x)\, d\mu(x), \tag{23}$$

где $\mu(x)$ — ограниченная комплекснозначная мера.

Пространство B_0'', сопряженное к B_0', *не совпадает* с B_0, т. е. B_0 не *рефлексивное пространство*.

Перейдем теперь к более важному случаю пространства $\mathscr{S}'$, сопряженного к $\mathscr{S}$ [Sw 2*, VII, § 4] *). Элементами $\mathscr{S}'$ являются обобщенные функции *медленного роста* T. Ясно, что $\mathscr{S}'$ содержит нетривиальные элементы, например

$$T(\varphi) = (D^m\varphi)(a) \tag{24}$$

для фиксированных m и a. Элементы $\mathscr{S}'$ отделяют элементы пространства $\mathscr{S}$ в том же смысле, что и выше. Обобщенная функция $T(\varphi)$ непрерывна по φ. Из этого следует, что $|T(\varphi)| < 1$ для подходящей окрестности $N(\varkappa, \varepsilon)$, определенной формулой (13). Значит, существует $\varkappa_0$, такое, что

$$|T(\varphi)| < 1, \quad \text{если} \quad \left|p_{\varkappa_0}(\varphi)\right| < K. \tag{25}$$

Значение $\varkappa_0$ зависит, конечно, от T. Это означает по существу, что каждая обобщенная функция медленного роста принадлежит пространству, сопряженному одному из $\mathbf{B}$-пространств, характеризуемых нормами $p_\varkappa(\varphi)$. Наименьшее значение $\varkappa_0$ можно назвать *порядком обобщенной функции* T. Из приведенных рассуждений следует, что каждая обобщенная функция ограничена на ограниченных множествах $S \subset \mathscr{S}$ (см. (14)). Обратно, каждое линейное отображение пространства $\mathscr{S}$ в $\mathbf{C}$, ограниченное на ограниченных множествах, есть обобщенная функция медленного роста. Это обстоятельство побуждает нас ввести в $\mathscr{S}'$ топологию, определяемую несчетным набором полунорм

$$p'_S(T) = \sup_{\varphi \in S} T(\varphi), \; S \text{ ограничены в } \mathscr{S}. \tag{26}$$

В такой топологии $\mathscr{S}'$ полно. Поскольку топология в $\mathscr{S}'$ определена набором полунорм, $\mathscr{S}'$ опять будет локально выпуклым топологическим линейным пространством. Сопряженным к нему будет $\mathscr{S}$, так что пространство $\mathscr{S}$ рефлексивно. Множество $S' \subset \mathscr{S}'$ ограничено, если для всех ограниченных множеств S

$$\sup_{T \in S'} p'_S(T) < \infty. \tag{27}$$

---

*) Обобщенные функции были введены в математику С. Л. Соболевым [6]. Первое применение обобщенных функций в квантовой теории поля было сделано Н. Н. Боголюбовым [4]. — *Прим. ред.*

Ограниченные множества в $\mathscr{S}'$ относительно компактны, поэтому $\mathscr{S}'$ является M-пространством. Множество S' ограничено тогда и только тогда, когда порядки обобщенных функций из S' ограничены числом $\varkappa_0$ и когда, кроме того,

$$\sup_{p_{\varkappa_0}(\varphi)\leqslant 1,\ T\in S'} |T(\varphi)| < \infty. \tag{28}$$

Поэтому множество $S' \in \mathscr{S}'$ ограничено, если все его элементы лежат в пространстве, сопряженном к одному из **B**-пространств, характеризуемых нормами $p_\varkappa(\varphi)$, и если они, кроме того, образуют в этом сопряженном пространстве ограниченное множество. Кроме *сильной топологии*, мы можем ввести в $\mathscr{S}'$ также и *слабую топологию*, определяемую полунормами

$$p''_\varphi(T) = |T(\varphi)|. \tag{29}$$

Соответственно слабо ограниченные множества S' определяются условием

$$\sup_{T\in S'} p''_\varphi(T) < \infty \quad \text{для всех} \quad \varphi. \tag{30}$$

Примечательным и весьма общим фактом является то, что в S' *слабо ограниченные* и *сильно ограниченные* множества совпадают (теорема Макки, [Kö 1*, § 20, 11 (7)]).

Следующая теорема показывает, почему в применениях обобщенных функций сравнительно меньшую роль играет сильная топология.

Теорема [Sw 1*, стр. 74, теорема XIII]. *Пусть* $\{T_k\}$, $k = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ *последовательность обобщенных функций медленного роста, и предположим, что для каждой* φ *предел*

$$\lim_{k\to 0} T_k(\varphi) = T(\varphi) \tag{31}$$

существует. Тогда $T(\varphi)$ *тоже будет обобщенной функцией медленного роста и* $T_k \to T$ *в сильной топологии. То же будет справедливо в случае, когда индекс* k *изменяется в конечномерном линейном пространстве.*

Таким образом, в $\mathscr{S}'$ слабая и сильная сходимости совпадают для последовательностей и для таких обобщенных функций, которые зависят еще и от конечного числа непрерывных параметров.

Непрерывные функции f, которые ограничены полиномами являются элементами $\mathcal{S}'$ в смысле

$$T_f(\varphi) = \int f(\underline{x})\,\varphi(\underline{x})\,d\underline{x}. \tag{32}$$

Каждая обобщенная функция вида T_f называется непрерывной функцией. Поэтому $\mathcal{S}$ оказывается подмножеством $\mathcal{S}'$, так же как и B_0, и $\mathcal{D}$. Полезно знать, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}'$ (в топологии $\mathcal{S}'$). Поскольку топология, индуцированная в $\mathcal{D}$ топологией $\mathcal{S}'$, слабее, чем топология $\mathcal{D}$, и поскольку $\mathcal{D}$ сепарабельно, то и $\mathcal{S}'$ *сепарабельно.*

С точки зрения (32) мы можем интерпретировать обобщенные функции как обобщение обычных функций и писать формально

$$T(\varphi) = \int T(\underline{x})\,\varphi(\underline{x})\,d\underline{x}. \tag{33}$$

В другой часто употребляемой системе обозначений используется символ скалярного произведения

$$\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi). \tag{34}$$

В таких обозначениях сопряженность $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ выражена в явном виде.

Прежде чем закончить этот раздел, мы хотим еще ввести понятие *носителя обобщенной функции* $T \in \mathcal{S}'$. Мы будем говорить, что T обращается в нуль в открытом подмножестве $\mathfrak{B}$ пространства R^N, если $T(\varphi) = 0$ всякий раз, когда $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathfrak{B}$. Носитель T определяется как наименьшее множество, вне которого T равно нулю; это множество обозначается $\operatorname{supp} T$.

Напомним вкратце о пространствах, сопряженных к $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}$. Ясно, что $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$; $\mathcal{E}'$ содержит все обобщенные функции с *компактным носителем.* Связь обобщенных функций из $\mathcal{D}'$ с обобщенными функциями медленного роста несколько сложнее. Мы видели (см. (32)), что все непрерывные функции, ограниченные величиной $\text{const.}\,(1 + \|x\|^2)^{k/2}$ с некоторым значением k, являются элементами из $\mathcal{S}'$. Из определения $\mathcal{D}$ следует, что *все непрерывные функции* независимо от их роста при $\|x\| \to \infty$ будут элементами из $\mathcal{D}'$. Эта ситуация типична. Обобщенные функции медленного роста будут теми элементами из $\mathscr{D}'$, которые медленно растут на бесконечности [Sw 1*, 2*].

Последнее замечание. Обобщенная функция T называется *положительной*, если $T(\varphi) \geqslant 0$ для *основных функций* φ, удовлетворяющих условию $\varphi(x) \geqslant 0$. Положительные обобщенные функции являются *положительными мерами*, зависящими, конечно, от выбора подходящего пространства основных функций. Если они являются элементами из $\mathscr{E}'$, то их носитель компактен; если они лежат в $\mathscr{S}'$, то $\mu/(1+\|x\|^2)^{k/2}$ ограничено для некоторого значения k. Меры из $\mathscr{D}'$ ничем не ограничены [Sw 1*, стр. 29].

С. Операции над обобщенными функциями. Линейные операции над обобщенными функциями связаны с линейными отображениями *пространства основных функций* $\mathscr{S}$. Поэтому мы начнем с обсуждения этих отображений. Пусть $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ будут двумя пространствами основных функций (над двумя аффинными пространствами R^{N_1} и R^{N_2}), и пусть A будет линейным непрерывным отображением $\mathscr{S}_2$ в $\mathscr{S}_1$. Как легко убедиться, такое отображение преобразует ограниченные множества в $\mathscr{S}_2$ в ограниченные множества в $\mathscr{S}_1$. С другой стороны, линейное преобразование, преобразующее ограниченные множества в ограниченные, непрерывно. Мы уже сталкивались с частным случаем такого отображения в самом определении обобщенных функций, когда R^{N_1} было нульмерно ($N_1 = 0$) и $\mathscr{S}_1 = C$.

Отображение A позволяет нам определить *сопряженное* отображение пространства $\mathscr{S}_1'$ в $\mathscr{S}_2'$ формулой

$$\langle A'T_1, \varphi_2\rangle = \langle T_1, A\varphi_2\rangle, \tag{35}$$

где $T_1 \in \mathscr{S}_1'$ и $\varphi_2 \in \mathscr{S}_2$. Легко проверить, что:

(a) левая часть (35) определяет обобщенную функцию в $\mathscr{S}_2'$, или, иными словами, что $A'T_1 \in \mathscr{S}_2'$;

(b) линейное отображение $\mathscr{S}_1' \xrightarrow{A'} \mathscr{S}_2'$ непрерывно;

(c) отображение A' отображает ограниченные множества в $\mathscr{S}_1'$ в ограниченные множества в $\mathscr{S}_2'$.

Линейные непрерывные отображения из $\mathscr{S}_2$ в $\mathscr{S}_1$ (и из $\mathscr{S}_1'$ в $\mathscr{S}_2'$) опять образуют линейное пространство. В этом линейном пространстве опять можно ввести (каноническим способом) локально выпуклую топологию. Мы не будем этого делать, а заменим в случае необходимости топологическое рассмотрение следующей теоремой Банаха — Штейнхауза.

Теорема [Kö 1*, § 15, 13 (3)]. *Пусть* $\{A_n \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ *будет последовательностью линейных непрерывных отображений из* $\mathcal{S}_2$ *в* $\mathcal{S}_1$. *Если для всех* $\varphi_2 \in \mathcal{S}_2$ *последовательность* $A_n\varphi_2$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n\varphi_2 = A\varphi_2$ *опять определяет линейное непрерывное отображение* $\mathcal{S}_2$ *в* $\mathcal{S}_1$.

Замечания. 1. При условиях теоремы из (35) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n' T_1 = A' T_1.$$

2. С необходимыми изменениями теорема остается справедливой и для отображений, зависящих от конечного числа непрерывных параметров.

3. Специальный ($\mathcal{S}_1 = \mathbf{C}$) случай теоремы Банаха — Штейнхауза уже встречался нам в разд. **B**.

Примеры

1. *Перемножение обобщенных функций* [Sw 2*, стр. 99]. Пусть $\mathfrak{G}_M$ будет пространством функций класса C_∞, которые вместе со всеми своими производными ограничены полиномами. Пусть $\alpha \in \mathfrak{G}_M$ и

$$(\alpha\varphi)(x) = \alpha(x)\varphi(x). \tag{36}$$

Отображение $\varphi \to \alpha\varphi$ есть линейное и непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Соответственно формула

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle \tag{37}$$

определяет линейное непрерывное отображение из $\mathcal{S}'$ в $\mathcal{S}'$. Формально мы запишем $(\alpha T)(x) = \alpha(x) T(x)$.

2. *Дифференцирование обобщенных функций* [Sw 1*, стр. 80]. Ясно, что линейное отображение

$$\varphi \to (-1)^{|m|} D^m \varphi \tag{38}$$

есть непрерывное отображение из $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$. Сопряженное отображение

$$\langle D^m T, \varphi \rangle = \langle T, (-1)^{|m|} D^m \varphi \rangle \tag{39}$$

определяет дифференцирование обобщенных функций. Из непрерывности $D^m T$ следует, что сходящийся ряд обобщенных функций $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ можно дифференцировать почленно.

Как уже говорилось, ограниченные полиномами непрерывные функции образуют подмножество в $\mathcal{S}'$. Теперь мы видим, что и все их производные входят в $\mathcal{S}'$. Следующая теорема утверждает, что на этом пути получаются все элементы $\mathcal{S}'$.

Теорема [Sw 2*, стр. 95, теорема VI]. *Для каждой обобщенной функции $T \in \mathcal{S}'$ существует число m и непрерывная полиномиально ограниченная функция f, такие, что*

$$T = D^m f.$$

3. *Автоморфизмы пространства R^N.* Пусть $x' = Mx + a$ будет неособенным отображением R^N в R^N. Это отображение определяет непрерывное отображение $\mathcal{S}$ в себя с помощью равенства

$$\varphi_{(a,\, M)}(x) = \varphi\left(M^{-1}(x - a)\right). \tag{40}$$

Сопряженное отображение

$$\langle T_{(a,\, M)},\ \varphi\rangle = \langle T,\ \varphi_{(a,\, M)}\rangle \tag{41}$$

определяет линейное непрерывное отображение пространства $\mathcal{S}'$ в себя. Все эти отображения будут гомеоморфизмами. Вместо (41) мы будем также писать $T_{(a,\, M)}(x) = T(Mx + a)$.

Пусть $(a(\tau),\ M(\tau))$ — аналитическая однопараметрическая подгруппа; определим $\varphi_\tau = \varphi_{(a(\tau),\, M(\tau))}$. Тогда

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}(\varphi_\tau - \varphi_0) = \frac{d}{d\tau}\varphi_\tau\Big|_{\tau=0} \tag{42}$$

сходится в топологии $\mathcal{S}$ для любой φ и определяет тем самым непрерывное отображение $\mathcal{S}$ в себя. Поэтому

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1}(T_\tau - T_0) = \frac{d}{d\tau} T_\tau\Big|_{\tau=0} \tag{43}$$

тоже будет существовать. Если однопараметрическая группа является группой трансляций, то (43) определит дифференцирование первого порядка в $\mathcal{S}'$.

4. *Преобразование Фурье* [Sw 2*, гл. VII]: Разложение Фурье

$$\varphi(x^1, \ldots, x^N) = (2\pi)^{-N} \int e^{-i\Sigma p_k x^k} \tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_N)\, d\underline{p} \quad (44)$$

преобразует пространство $\tilde{\mathcal{S}}$ быстро убывающих функций класса C_∞ над пространством $(R^N)'$, сопряженным к R^N, линейно и непрерывно на $\mathcal{S}$. Запишем (44) в виде

$$\varphi = \mathcal{F}\tilde{\varphi} \quad (45)$$

и определим Фурье-образ обобщенной функции условием

$$\langle \tilde{T}, \tilde{\varphi} \rangle = \langle \mathcal{F}'T, \tilde{\varphi} \rangle = \langle T, \mathcal{F}\tilde{\varphi} \rangle = \langle T, \varphi \rangle. \quad (46)$$

Формально мы найдем, что

$$\tilde{T}(p) = (2\pi)^{-N} \int e^{-i(p,\,x)} T(x)\, d\underline{x} \quad (47)$$

и

$$T(x) = \int e^{i(p,\,x)} \tilde{T}(p)\, d\underline{p}, \quad (48)$$

поскольку для преобразования Фурье всегда существует обратное.

В примере 1 мы занимались мультипликаторами функций в $\mathcal{S}$ и выяснили, что они лежат в пространстве $\mathcal{O}_M$. Аналогично в $\mathcal{O}_M$ лежат и мультипликаторы элементов пространства $\tilde{\mathcal{S}}$. Непрерывному отображению $\tilde{\varphi} \to \alpha\tilde{\varphi}$ с $\alpha \in \mathcal{O}_M$ будет после выполнения преобразования Фурье соответствовать в $\mathcal{S}$ отображение, записываемое как $\varphi \to S * \varphi$. Легко видеть, что это отображение будет иметь вид

$$(S * \varphi)(x) = \int S(y - x)\, \varphi(y)\, d\underline{y}, \quad (49)$$

где

$$S(x) = (2\pi)^{-N} \int e^{i(p,\,x)} \cdot \alpha(p)\, d\underline{p}, \quad \alpha \in \mathcal{O}_M, \quad (50)$$

— *специальная* обобщенная функция. Исследуем эти соотношения несколько подробнее. Соотношение (49) имеет смысл для *произвольной* обобщенной функции $S \in \mathcal{S}'$ и приводит, очевидно, к обобщенной функции из класса C_∞, которая вместе со всеми своими производными будет полиномиально ограничена [Sw 2*, стр. 95, теорема VI]. Поэтому в общем случае $(S*\varphi)\in\mathscr{O}_M$. Однако для специальной обобщенной функции (50) (когда $\alpha\in\mathscr{O}_M$) $S*\varphi$ будет непрерывным отображением $\mathscr{S}$ в себя. Поэтому ясно, что $S*\varphi\in\mathscr{S}$. С другой стороны, можно показать, что обобщенная функция, обладающая тем свойством, что для любой $\varphi\in\mathscr{S}$, $S*\varphi\in\mathscr{S}$ определяет непрерывное отображение $\mathscr{S}$ в себя, будет иметь вид (50) [Sw 2*, стр. 100, стр. 124, теоремы IX, XV]. Специальные обобщенные функции вида (50) образуют линейное пространство $\mathscr{O}'_C$, пространство *быстро убывающих обобщенных функций*. Отображение, сопряженное к $\varphi\to S*\varphi$, задается условием

$$\langle S*T,\ \varphi\rangle=\langle T,\ S*\varphi\rangle \tag{51}$$

и может быть формально записано как

$$(S*T)(x)=\int S(x-y)\,T(y)\,d\underline{y},\quad S\in\mathscr{O}'_C. \tag{52}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема о представлении.

Теорема [Sw 2*, стр. 100, теорема IX]. *Для того чтобы $T\in\mathscr{O}'_C$ необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального числа k T было конечной суммой производных непрерывных функций, каждая из которых остается ограниченной после умножения на* $(1+\|x\|^2)^{k/2}$.

Произведение $S*T$, определяемое (49)—(52), есть *свертка*. Свертка тесно связана с *регуляризацией* обобщенной функции. Ясно, что все непрерывные быстро убывающие при $\|x\|\to\infty$ функции принадлежат $\mathscr{O}'_C$ (однако $e^{i\|x\|^2}$ тоже лежит в $\mathscr{O}'_C$). Поэтому $\mathscr{S}$ и $\mathscr{D}$ содержатся в $\mathscr{O}'_C$. Выберем $\alpha\in\mathscr{D}$. Тогда

$$(\alpha*T)(x)=\int\alpha(x-y)\,T(y)\,d\underline{y} \tag{53}$$

будет функцией класса C_∞. Согласно сделанным выше замечаниям, $(\alpha*T)\in\mathscr{O}_M$. Говорят, что $(\alpha*T)$ есть *регуляризация* T с помощью α. Носитель свертки $\alpha*T$ лежит в некоторой окрестности $\operatorname{supp}T$, которая зависит от $\operatorname{supp}\alpha$. Если мы выберем теперь последовательность $\alpha_k\in\mathscr{D}$ таких, что в топологии $\mathscr{S}'$ $\alpha_k(x)\to\delta(x)$, т. е. δ-функции Дирака, то $\alpha_k*\varphi\to\varphi$ для всех $\varphi\in\mathscr{S}$, и поэтому $\alpha_k*T\to T$ для всех

$T \in \mathscr{S}'$. С помощью такого приема каждая обобщенная функция из $\mathscr{S}'$ явным образом представляется пределом функций из $\mathscr{O}_M$. Значит, $\mathscr{O}_M$ плотно в $\mathscr{S}'$ [Sw 2*, стр. 21 и далее].

D. Тензорное произведение обобщенных функций и связанные проблемы. „Теорема о ядре“. В разд. А мы ввели тензорное произведение $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ двух пространств основных функций. Мы отметили также, что тензорное произведение $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ плотно в $\mathscr{S}_{xy}$ — пространстве основных функций над $R_x \otimes R_y$. Теперь мы хотим ввести тензорное произведение $\mathscr{S}'_x \otimes \mathscr{S}'_y$. Пусть $T_x \in \mathscr{S}'_x$ и $S_y \in \mathscr{S}'_y$. Мы определим $T_x \otimes S_y$ сначала только на $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ линейным расширением равенства

$$(T_x \otimes S_y)(\varphi_x \otimes \psi_y) = T_x(\varphi_x)\, S_y(\psi_y). \tag{54}$$

Но ясно, что обобщенная функция $Q \in \mathscr{S}'_{xy}$, совпадающая на $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ с $T_x \otimes S_y$, определена однозначно, поскольку $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ плотно в $\mathscr{S}_{xy}$. Поэтому мы будем писать $T_x \otimes S_y = Q$.

Нетрудно видеть, что такое расширение всегда существует. Пусть $\chi \in \mathscr{S}_{xy}$. Тогда

$$\langle T_x, \chi \rangle (y) = \int T(x)\, \chi(x, y)\, d\underline{x} \in \mathscr{S}_y.$$

Поэтому функционал $\langle S_y, \langle T_x, \chi \rangle \rangle$ существует и, как можно показать, непрерывен. Так определенная обобщенная функция совпадает на $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ со значениями, получаемыми из (54). Таким образом, мы находим, что

$$\langle S_y, \langle T_x, \chi \rangle \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \chi \rangle \rangle = (T_x \otimes S_y)(\chi). \tag{55}$$

Далее, мы определим $\mathscr{S}'_x \otimes \mathscr{S}'_y$ как конечную линейную комбинацию обобщенных функций вида $T_x \otimes S_y$. То, что $\mathscr{S}'_x \otimes \mathscr{S}'_y$ плотно в $\mathscr{S}'_{xy}$, — тривиально. Равным образом $\mathscr{S}_x \otimes \mathscr{S}_y$ плотно в $\mathscr{S}'_{xy}$ [Sw 1*, гл. IV].

Гораздо более глубокие проблемы встают в связи с *полилинейными* формами. Пусть $R^N = \bigoplus_{k=1}^{r} R^{N_k}$, r конечно. Пусть еще $\varphi_k \in \mathscr{S}_k$, где $\mathscr{S}_k$ — пространство основных функций над R^{N_k}. Наконец, пусть $L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$ будет линейной и непрерывной формой по каждому аргументу φ_k в отдельности. Тогда ясно, что в силу линейности $L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)$

можно расширить на $\mathscr{S}_1 \otimes \mathscr{S}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{S}_r$. Тут опять возникает вопрос, существует ли в $\mathscr{S}'_{x_1, \ldots, x_r}$ обобщенная функция T, удовлетворяющая условию

$$T(\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_r) = L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r). \tag{56}$$

„Теорема о ядре" Шварца [Sw 1; Gå 3] гарантирует нам, что такая обобщенная функция T существует. Ее единственность тривиальна.

Обсудим, наконец, пространство, сопряженное введенному формулой (18) пространству $\underline{\mathscr{S}}$; $\underline{\mathscr{S}'}$ содержит *все* последовательности $\underline{T} = (T_0, T_1, T_2, \ldots)$, $T_k \in \mathscr{S}'_k$. Скалярное произведение определено равенством

$$\langle \underline{T}, \underline{\varphi} \rangle = \sum_k \langle T_k, \varphi_k \rangle. \tag{57}$$

Ясно, что $\langle \underline{T}, \underline{\varphi} \rangle \to 0$ при $\underline{\varphi} \to 0$ в смысле введенного выше понятия сходимости. Пространство $\underline{\mathscr{S}'}$ также образует алгебру, если определить умножение равенством

$$(\underline{S} \otimes \underline{T})_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n-k} \otimes T_k. \tag{58}$$

Однако в дальнейшем эта алгебра не будет играть для нас никакой роли.

Е. Гильбертово пространство [Ac 1*; Ri 1*]. Единственным абстрактным пространством, с которым нам придется столкнуться, будет бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$.

Элементарная теория пространства $\mathfrak{H}$ хорошо известна, и мы не будем вдаваться здесь в ее детали, но ограничимся тем, что напомним читателю некоторые факты относительно *неограниченных операторов* и спектральных представлений *непрерывных абелевых групп унитарных операторов.*

Элементы пространства $\mathfrak{H}$ будут обозначаться через Φ, Ψ, ..., а положительное симметричное скалярное произведение (линейное по *второму* множителю) через (Φ, Ψ). Наконец, $\|\Phi\| = (\Phi, \Phi)^{1/2}$ есть норма в пространстве $\mathfrak{H}$.

Функционалы (непрерывные линейные формы) в $\mathfrak{H}$ суть в точности скалярные произведения $l(\Phi) = (\Psi, \Phi)$. Поэтому $\mathfrak{H}$ совпадает со своим сопряженным пространством $\mathfrak{H}'$.

В пространстве $\mathfrak{H}$ мы можем ввести *слабую топологию* с помощью полунорм $p_\Psi(\Phi) = |(\Psi, \Phi)|$. Множество S будет *слабо ограниченным*, если $\sup\limits_{\Phi \in S} |(\Psi, \Phi)| < \infty$ для всех Ψ; оно будет *сильно ограниченным*, если $\sup\limits_{\Phi \in S} \|\Phi\| < \infty$. Здесь также *слабо ограниченные и сильно ограниченные множества совпадают*. Для каждого *непрерывного оператора* A (непрерывного линейного отображения $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$) однозначно определяется *сопряженный оператор* A^* условием

$$(\Phi, A\Psi) = (A^*\Phi, \Psi). \tag{59}$$

Оператор A называется *самосопряженным*, если $A^* = A$. Оператор U называется *унитарным*, если $U^{-1} = U^*$.

Оператор A называется ограниченным, если $\sup\limits_{\|\Phi\|=1} \|A(\Phi)\| = \|A\| < \infty$. Ограниченные операторы и непрерывные операторы совпадают. Последовательность A_k операторов сильно сходится к оператору A, если $A_k\Phi \to A\Phi$ в сильной топологии пространства $\mathfrak{H}$ для всех $\Phi \in \mathfrak{H}$. Множество ограниченных операторов замкнуто по отношению к сильной сходимости.

Следующая теорема излагает „основное условие существования" *неограниченных* не непрерывных операторов.

Теорема (Хеллингер — Теплиц) [Ас 1*, стр. 51]. *Если два оператора A и B, определенные для каждого вектора в $\mathfrak{H}$, удовлетворяют соотношению*

$$(\Phi, A\Psi) = (B\Phi, \Psi) \tag{60}$$

для всех $\Phi, \Psi \in \mathfrak{H}$, то A и B ограничены и $B = A^*$.

Доказательство. Покажем, что образ единичной сферы $\|\Phi\| = 1$ сильно ограничен. Действительно,

$$|(\Psi, A\Phi)| = p_\Psi(A\Phi) = |(B\Psi, \Phi)| \leqslant \|B\Psi\| \, \|\Phi\| = \|B\Psi\|.$$

Поэтому $\{A\Phi \mid \|\Phi\| = 1\}$ слабо ограничено. Но каждое слабо ограниченное множество ограничено и в сильном смысле. Следовательно,

$$\sup_{\|\Phi\|=1} \|A\Phi\| = \|A\| \tag{61}$$

существует и A ограничен. Ясно, что тогда $B = A^*$.

В теореме Хеллингера — Теплица содержится то утверждение, что *неограниченный самосопряженный* оператор вообще не может быть определен на всем $\mathfrak{H}$. Поэтому приходится связывать с каждым неограниченным оператором A его *область определения* D_A и его *область значений* $AD_A = \Delta_A$. Мы всегда можем считать, что D_A линейно замкнута; кроме того, разумно ограничиться плотными областями D_A.

Если D_A плотна, то для A однозначно определяется сопряженный оператор равенством

$$(\Phi, A\Psi) = (A^*\Phi, \Psi). \tag{62}$$

Область определения D_{A^*} оператора A^* содержит в точности те векторы Φ, для которых $(\Phi, A\Psi)$ *ограничено* по Ψ, и, таким образом, однозначно определяет непрерывную линейную форму на $\mathfrak{H}$. Область D_{A^*} может состоять только из одного нулевого вектора. Если, однако, D_{A^*} опять плотно в $\mathfrak{H}$, то можно определить A^{**}. Оператор A^{**} есть *расширение* A: $D_{A^{**}} \supset D_A$ и на D_A оба оператора совпадают. Оператор A^{**} обладает тем важным свойством, что он *замкнут*. Это означает, что соотношения $\Phi_k \to \Phi$ и $A^{**}\Phi_k \to \Psi$ для $\Phi_k \in D_{A^{**}}$ влекут за собой $\Phi \in D_{A^{**}}$ и $A^{**}\Phi = \Psi$. Оператор A^{**} является наименьшим замкнутым расширением A. Наконец, $A^{***} = A^*$, так что оператор A^* тоже замкнут.

Мы будем иметь дело только с такими операторами A, для которых D_{A^*} плотна. Поэтому все наши операторы будут допускать замкнутые расширения. Кроме того, операторы, с которыми мы только и будем работать, будут обладать еще и тем дополнительным свойством, что $D_A \cap D_{A^*}$ будет плотным в $\mathfrak{H}$.

Оператор A называется *симметричным*, если для всех Φ, $\Psi \in D_A$

$$(\Phi, A\Psi) = (A\Phi, \Psi). \tag{63}$$

Для симметричного оператора A оператор A^* оказывается расширением A, и поэтому A^{**} существует; при этом $A \subset A^{**} \subset A^*$. Если $A = A^*$, то A называется *самосопряженным*. Если $A^* = A^{**}$, то A называется *существенно самосопряженным*; в этом случае оператор A будет обладать единственным самосопряженным расширением. Не каждый симметричный оператор допускает самосопряженное расширение. Необходимым и достаточным условием того, чтобы оператор A обладал самосопряженным расширением, является равенство

$$m_+ = \dim [(A + iI)] D_A]^{\perp} = \dim [(A - iI) D_A]^{\perp} = m_-. \tag{64}$$

Если A существенно самосопряжен, то $m_+ = m_- = 0$ и обратно. Числа m_+ и m_- называются *индексами дефекта* оператора A.

Самосопряженный оператор обладает единственным спектральным представлением

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda), \tag{65}$$

где $E(\lambda)$ — *спектральная мера**) на вещественной прямой R. Справедливо и обратное — каждый оператор вида (65), где $E(\lambda)$ спектральная мера на вещественной прямой, есть самосопряженный оператор, область определения D_A которого равна

$$D_A = \left\{ \Phi \middle| \int \lambda^2 d(\Phi, E(\lambda)\Phi) < \infty \right\}. \tag{66}$$

Унитарный оператор U обладает единственным спектральным представлением

$$U = \int_{-0}^{2\pi} e^{i\varphi} \, dE(\varphi),$$

где $E(\varphi)$ — *спектральная мера* „на единичной окружности".

Слабо непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов $U(\tau)$ определяется условиями

$$\begin{gathered} U(\tau_1 + \tau_2) = U(\tau_1) U(\tau_2), \quad -\infty < \tau_1, \tau_2 < +\infty, \\ U^{-1}(\tau) = U^*(\tau), \\ (\Phi, U(\tau)\Psi) \text{ непрерывно в } \tau \text{ для всех } \Phi, \Psi \in \mathfrak{H}. \end{gathered} \tag{67}$$

Такая группа обладает единственным спектральным представлением вида

$$U(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \, dE(\lambda), \tag{68}$$

*) $E(\lambda)$ называется также разложением единицы, соответствующим оператору A. — *Прим. ред.*

где $E(\lambda)$ — опять спектральная мера на R. Обратно, операторы вида (68) образуют сильно непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов. Самосопряженный оператор

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \frac{1}{i} \lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} [U(\tau) - U(0)] \tag{69}$$

будет *инфинитезимальным* оператором — *генератором* преобразований $U(\tau)$; он обладает тем свойством, что

$$U(\tau) = e^{i\tau A}. \tag{70}$$

Эти утверждения образуют содержание теоремы Стоуна. Нам потребуется и почти непосредственное обобщение этой теоремы.

Теорема [Ri 1*, стр. 387, стр. 421 русского издания, где изложена значительно более общая теорема]. *Пусть $U(x)$, $x \in R^N$, будет слабо непрерывным унитарным представлением группы векторов в R^N по сложению*

$$\begin{aligned} U(x_1 + x_2) &= U(x_1)\, U(x_2), \\ U^{-1}(x) &= U^*(x), \end{aligned} \tag{71}$$

$(\Phi, U(x)\Psi)$ *непрерывно по x для всех Φ и Ψ из $\mathfrak{H}$.*

Тогда $U(x)$ однозначно определяет проекторнозначную меру $E(p)$ в сопряженном пространстве $(R^N)'$, такую, что

$$\int_{(R^N)'} dE(p) = I$$

и

$$U(x) = \int e^{i(p,x)} dE(p). \tag{72}$$

Обратно, каждая проекторнозначная мера $E(p)$, для которой $\int_{(R^N)'} dE(p) = I$, определяет с помощью (72) сильно непрерывное представление $U(x)$ группы векторов в R^N по сложению. Самосопряженный „векторный оператор“

$$P = \int p \cdot dE(p) \tag{73}$$

будет инфинитезимальным оператором для $U(x)$, и можно будет написать

$$U(x) = e^{i(P, x)}. \tag{74}$$

Заметим в заключение, что часто встречается следующее обобщение понятия обобщенной функции. Пусть $\mathcal{S}$ будет пространством основных функций, а Φ — непрерывным линейным отображением $\mathcal{S}$ в $\mathfrak{H}$. Тогда мы назовем Φ векторнозначной обобщенной функцией. Слабо непрерывное отображение A пространства $\mathcal{S}$ в пространство операторов над $\mathfrak{H}$ будет называться операторнозначной обобщенной функцией. Мы еще вернемся ниже в подходящем месте к обсуждению последнего понятия.

2. Структура пространства-времени

Пространство-время, в котором строится обобщенная теория квантованных полей, это плоское пространство Минковского. Мы будем последовательно пренебрегать гравитационными эффектами, которые могли бы проявиться в кривизне пространства-времени.

Свойства пространства-времени для нас настолько важны, что им посвящается отдельный параграф, несмотря на то, что мы не сможем сказать ничего нового или необычного. Чтобы скомпенсировать это последнее обстоятельство, мы выберем несколько необычный способ изложения, который подчеркнет различие между пространством-временем и обычным евклидовым пространством.

Число измерений N пространства-времени не имеет значения для дальнейших рассуждений, лишь бы $N \geqslant 3$. Случай $N = 2$ потребует только небольших изменений, но, конечно, только случай $N = 4$ имеет действительное физическое значение.

Плоское пространство-время — это вещественное аффинное пространство R^N размерности N ($N \geqslant 3$), снабженное метрической структурой с помощью неособенного симметричного билинейного скалярного произведения $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1)$, где $\xi_k = x_k - x_0$, $k = 1, 2$, — векторы разностей между x_1, x_2 и произвольной фиксированной точкой x_0. Векторы разностей $\xi = x - x_0$ образуют векторное пространство $\mathfrak{V}$, строение которого не зависит от x_0.

Если $(y-x, y-x)=0$, то x и y могут быть соединены световым сигналом.

Линейное подпространство пространства R^N (или $\mathfrak{B}$) *изотропно* [At 1*], если каждая пара его точек может быть соединена световым сигналом, или, выражаясь математически, если его метрическая структура полностью вырождена — скалярное произведение на этом подпространстве обращается в нуль тождественно. Основное свойство R^N выражается следующим постулатом.

Постулат. *Одномерные изотропные подпространства существуют. Не существует изотропных подпространств размерности большей единицы. Изотропные подпространства пространства R^N называются световыми лучами.*

С помощью этого постулата мы следующим образом нормализуем метрику в $\mathfrak{B}$. Выберем $\alpha \neq 0$ из изотропного подпространства. Тогда пространство, ортогональное к α, $\mathfrak{A}_\alpha = \{\xi \mid (\alpha, \xi)=0\}$, будет содержать $\langle\alpha\rangle$, подпространство, натянутое на α, но в нем не будет других изотропных пространств. Поэтому метрика в $\mathfrak{A}_\alpha$ будет полуопределенной, причем знак метрики не будет зависеть от частного выбора α, поскольку пересечение $\mathfrak{A}_\alpha \cap \mathfrak{A}_{\alpha'}$ по меньшей мере $(N-2)$-мерно. *Выберем* теперь знак этой метрики в пространстве $\mathfrak{A}_\alpha$ *отрицательным*. Каждый вектор ξ с отрицательным квадратом $(\xi, \xi) < 0$ будет принадлежать некоторому $\mathfrak{A}_\alpha$, так как иначе ортогональное дополнение $\xi^\perp$ не содержало бы ни одного нулевого вектора, метрика в $\mathfrak{B}$ была бы отрицательно-определенной и пространство $\mathfrak{B}$ было бы евклидовым.

Определение:

$$\begin{matrix}\text{Вектор}\\ \xi \neq 0\\ \text{называется}\end{matrix}\left\{\begin{matrix}\text{пространственно-}\\ \text{свето-}\\ \text{времени-}\end{matrix}\right\}\text{ подобным }\left\{\begin{matrix}\text{тогда и только}\\ \text{тогда, когда}\\ (\xi, \xi) \gtreqless 0.\end{matrix}\right.$$

Все пространственно-подобные векторы образуют связный конус, *боковой конус. Световой конус* N содержит все свето-подобные векторы (нуль-векторы). Он распадается на два несвязанных конуса. Выберем $\alpha \in N$ и обозначим через N_α все нуль-векторы β, для которых $(\alpha, \beta) > 0$ и нуль-векторы полупрямой $\{\lambda\alpha\}$, $\lambda > 0$. Тогда будет $N_\alpha \cap N_{-\alpha} = \varnothing$. Выбором направления времени мы будем различать эти два конуса как верхний световой конус N_+ и нижний световой конус N_-.

Выпуклый конус $\overline{V}_+$, порождаемый векторами из N_+, будет замкнутым верхним конусом. Аналогично $\overline{V}_-$, выпуклая оболочка конуса N_-, будет замкнутым нижним конусом. Открытые верхний V_+ и нижний V_- конусы определяются условием

$$V_\pm \equiv \{\xi \mid \xi \in \overline{V}_\pm, \quad (\xi, \xi) > 0\}. \tag{1}$$

Объединение $V_+ \cup V_-$ содержит все времени-подобные векторы, а $V_+ \cap V_- = \varnothing$. Пространство $\mathfrak{B}$ — это объединение V_+, V_-, N_+, N_-, бокового конуса и точки $\{\xi = 0\}$. Конусы V_+ или V_- выпуклы и потому связны. Легко проверить, что из ξ, $\eta \in V_+$ следует $(\xi, \eta)^2 \geqslant (\xi, \xi)(\eta, \eta)$.

Отметим, наконец, что в подходящим образом выбранной ортонормированной системе координат

$$(\xi, \xi) = \xi^0\xi^0 - \sum_{k=1}^{N-1} \xi^k\xi^k = \xi^T G\xi \tag{2}$$

и

$$V_\pm = \{\xi \mid (\xi, \xi) > 0, \ \xi^0 \gtrless 0\}. \tag{3}$$

Пространство, сопряженное к R^N, — это импульсное пространство $(R^N)'$. Все элементы $(R^N)'$ имеют вид

$$(p, x) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k x^k = p^0 x^0 - \sum_{k=1}^{N-1} p^k x^k.$$

Слабая топология в R^N, топология в которой $x_k \to x$, если для любого p, $(p, x_n) \to (p, x)$, эквивалентна евклидовой топологии, определяемой расстоянием

$$\|x - y\| = \left(\sum_{k=0}^{N-1} (x^k - y^k)^2 \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Само по себе это расстояние не имеет, конечно, инвариантного смысла, но такой смысл будет у соответствующей топологии, как уже указывалось в 1А.

3. Неоднородная группа Лоренца

Симметрии пространства-времени состоят [1]) из вещественных неособенных неоднородных линейных преобразований $\tilde{x} = \Lambda x + a$, для которых $(\Lambda\xi, \Lambda\eta) = (\xi, \eta)$ *). Мы будем обозначать такие преобразования через (a, Λ) и отметим следующий закон умножения $(a_1, \Lambda_1)(a_2, \Lambda_2) = (a_1 + \Lambda_1 a_2, \Lambda_1\Lambda_2)$ и выражение для обратного преобразования $(a, \Lambda)^{-1} = (-\Lambda^{-1}a, \Lambda^{-1})$. Если выразить эти линейные преобразования в ортонормированной координатной системе, то Λ станет матрицей, для которой $\Lambda^{-1} = G\Lambda^T G$, откуда следует, что $(\operatorname{Det}\Lambda)^2 = 1$, причем действительно появляются оба знака детерминанта. Отметим следующие гомоморфизмы неоднородной группы Лоренца:

(I) $(a, \Lambda) \to \Lambda$.

Соответствующим нормальным делителем (ядром) будет $\{(a, I)\}$, группа трансляций. Соответствующую факторгруппу мы обозначим через $L = \{\Lambda\}$, это однородная группа Лоренца.

(II) $\Lambda \to \operatorname{Det}\Lambda$.

Соответствующим нормальным делителем будет группа $L_+ = \{\Lambda \mid \operatorname{Det}\Lambda = +1\}$, собственная группа Лоренца.

(III) $\Lambda \in L_+$ либо оставляет V_+ инвариантным, либо переставляет V_+ и V_-. Преобразования, совершающие перестановки, на самом деле встречаются среди L_+. Поэтому L_+ гомоморфна группе перестановок $\{V_+, V_-\}$. Соответствующий нормальный делитель — это $L_+^\uparrow$, собственная *ортохронная группа Лоренца.*

Для четного числа измерений можно записать разложение L по отношению к $L_+^\uparrow$ как

$$L = \underbrace{L_+^\uparrow + PTL_+^\uparrow}_{L_+} + \underbrace{PL_+^\uparrow + TL_+^\uparrow}_{TL_+},$$

где

$$PT\xi = -\xi, \quad P\xi^0 = \xi^0, \quad T\xi^0 = -\xi^0,$$
$$P\xi^k = -\xi^k, \quad T\xi^k = \xi^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, N-1.$$

В дополнении I мы покажем, что группа $L_+^\uparrow$ связна и проста и обладает поэтому лишь тривиальными гомоморфизмами.

---

[1]) См., например, [Jo 5; Wi 5].

*) Это неоднородная группа Лоренца; она называется также группой Пуанкаре. — *Прим. ред.*

4. Спинорное исчисление в физическом случае $N=4$

Пусть матрицы

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

суть спиновые матрицы Паули, дополненные единичной матрицей. Тогда

$$\{\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\} \leftrightarrow X=\sum_{k=0}^{3} \xi^k \sigma_k \tag{1}$$

дает взаимно однозначное соответствие между векторами из $\mathfrak{V}$ и эрмитовыми матрицами второго порядка [Wae 1*]. Кроме того,

$$\operatorname{Det} X=\xi^0\xi^0-\sum_{k=1}^{3} \xi^k\xi^k=(\xi, \xi). \tag{2}$$

Линейное преобразование матриц X:

$$\tilde{X}=AXA^* \quad \text{с} \quad \operatorname{Det} A=1 \tag{3}$$

соответствует вещественному лоренцову преобразованию $\tilde{\xi}=\Lambda(A)\xi$. Поскольку $\Lambda(A_1)\Lambda(A_2)=\Lambda(A_1A_2)$, то группа преобразований Лоренца появляется теперь как представление группы $SL_2(C)$ — группы унимодулярных комплексных матриц второго порядка A. Это представление не является точным, так как $\Lambda(-A)=\Lambda(A)$. Как легко видеть, это единственное вырождение: из $\Lambda(A)=\Lambda(B)$ следует $B=\pm A$. Поэтому ядром представления является $\{E, -E\}$. Все преобразования $\Lambda(A)$ ортохронны, т. е. не переставляют V_+ и V_-. Чтобы убедиться в этом, заметим, что вообще $2\xi^0=\operatorname{Spur} X$, и поэтому $2\tilde{\xi}^0=\operatorname{Spur} AXA^*$. Выбирая теперь в частности, $X=I$, чему отвечает $\xi=(1, 0, 0, 0)$, получим, что тогда $2\tilde{\xi}^0=\operatorname{Spur} AA^*>0$ и, следовательно, $\tilde{\xi}\in V_+$. Наконец, $\Lambda(A)$ никогда не оказывается отражением, поскольку $\sigma_0=A\sigma_0A^*$, $-\sigma_k=A\sigma_kA^*$, $k=1, 2, 3$, повлекло бы за собой

$A^* = A^{-1}$ и поэтому $-\sigma_k = A\sigma_k A^{-1}$. Но последнего не может быть, поскольку $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$. Итак, мы показали, что $\Lambda(A) \in L_+^\uparrow$; легко показать и то, что каждая матрица $\Lambda \in L_+^\uparrow$ получается таким образом. Поэтому группа

$$\mathrm{SL}_2(C)/(E, -E) \text{ изоморфна } L_+^\uparrow.$$

Поскольку $\mathrm{SL}_2(C)$ односвязна, то она является универсальной накрывающей группой группы $L_+^\uparrow$. Группа $\mathrm{SL}_2(C)$ действует, конечно, на двумерное комплексное векторное пространство V с элементами $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; $u' = Au$. Кроме пространства V, нам придется ввести в рассмотрение и второе векторное пространство $\dot{V}$ с элементами $\dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{u}_{\dot{1}} \\ \cdot \\ \dot{u}_{\dot{2}} \end{pmatrix}$, на которое A действует по правилу $\dot{u}' = \bar{A}\dot{u}$, где $\bar{A} = A^{*T}$ — матрица, комплексно сопряженная к A.

Тот факт, что все элементы $\mathrm{SL}_2(C)$ обладают детерминантом, равным 1, отражается в симплициальной структуре V и $\dot{V}$: образования $(u, v) = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \varepsilon^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta$ и $(\dot{u}, \dot{v}) = \dot{u}_{\dot{1}} \dot{v}_{\dot{2}} - \dot{u}_{\dot{2}} \dot{v}_{\dot{1}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \dot{u}_{\dot{\alpha}} \dot{u}_{\dot{\beta}}$ будут инвариантными антисимметричными скалярными произведениями. Их существование позволяет нам определить контравариантные компоненты вектора u равенством $u^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} u_\beta$ и соответственно для $\dot{u}$.

Общий спинор ранга (k, l) будет одновременно тензором k-го ранга над V и тензором l-го ранга над $\dot{V}$ с компонентами $u_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \dot{\beta}_1 \ldots \dot{\beta}_l}$.

Спинор ранга (k, l), симметричный в непунктирных и в пунктирных индексах по отдельности, неприводим. Пространство таких спиноров $((k+1)(l+1))$-мерно и несет неприводимое представление группы $\mathrm{SL}_2(C)$. Все неприводимые конечномерные представления получаются таким образом [Wae 1*]. Несимметричный спинор можно разложить на симметричные спиноры свертками с универсальными спинорами ε и $\dot{\varepsilon}$ с последующей симметризацией по остающимся пунктирным и непунктирным индексам по отдельности. Аналогично каждое конечномерное непрерывное представление группы $L_+^\uparrow$ полностью разлагается на неприводимые представления.

Представление ранга (k, l) группы $\mathrm{SL}_2(C)$ будет (однозначным) представлением группы $L_+^\uparrow$ тогда и только тогда, когда $-E \in SL_2(C)$ представляется единицей. Так случится, когда $k+l$ четно. Все остальные представления являются двузначными над $L_+^\uparrow$ (представлениями на лучах). Представление $(1,1)$ было нашим исходным пунктом и эквивалентно первоначальному представлению $L_+^\uparrow$ в $\mathfrak{V}_4$. Между спинорами ранга $(1,1)$ и обычными векторами существует взаимно однозначное соответствие, которое задается формулой $u_{\alpha\dot\beta} = \sum_k \xi^k \sigma_{k,\alpha\dot\beta}$, совпадающей с (3). Совершенно так же, если $k+l$ четно, то спинор однозначно соответствует некоторому тензору над $\mathfrak{V}_4$.

Дальнейшая вслед за четностью $k+l$ классификация спиноров (представлений) дается парой знаков $((-1)^k, (-1)^l) = (\rho_1, \rho_2)$ [Pa 4] (характерами Паули):

(ρ_1, ρ_2)	Соответствие	Представление группы $L_+^\uparrow$
$(1,1)$	Тензор четного ранга	Однозначно
$(-1, -1)$	Тензор нечетного ранга	Однозначно
$(+1, -1)$	Ундоры	Двузначно
$(-1, +1)$	Ундоры	Двузначно

Прозведению двух спиноров (кронекерову произведению представлений), имеющих знаковые пары (ρ_1, ρ_2) и (ρ_1', ρ_2'), соответствует пара $(\rho_1\rho_1', \rho_2\rho_2')$. Отметим, наконец, еще некоторые тождества, связанные с $u_{\alpha\dot\beta} = \sum_k \xi^k \sigma_{k,\alpha\dot\beta}$ и $w_{\alpha\dot\beta} = \sum_k \eta^k \sigma_{k,\alpha\dot\beta}$:

$$\begin{Vmatrix} u_{1\dot1} & u_{1\dot2} \\ u_{2\dot1} & u_{2\dot2} \end{Vmatrix} = \xi^0\sigma_0 + \sum_{r=1}^{3} \xi^r \sigma_r = \xi_0\sigma_0 - \sum_{r=1}^{3} \xi_r \sigma_r, \tag{4}$$

$$\begin{Vmatrix} w^{1\dot1} & w^{2\dot1} \\ w^{1\dot2} & w^{2\dot2} \end{Vmatrix} = \eta^0\sigma_0 - \sum_{r=1}^{3} \eta^r \sigma_r = \eta_0\sigma_0 + \sum_{r=1}^{3} \eta_r \sigma_r, \tag{5}$$

откуда мы получаем, например, что

$$u_{\alpha\dot{\beta}} u^{\gamma\dot{\beta}} = \delta_\alpha^\gamma (\xi, \xi).$$

Неприводимые представления и спиноры

k	l	Размерность $(k+1)(l+1)$	Название	Значность
0	0	1	Скаляр	1
1 0	0 1	2 2	Спинор	2
1	1	4	Вектор	1
0	2	3	Антисимметричный самодуальный тензор 2-го ранга	1
2	0	3	Антисимметричный антисамодуальный тензор 2-го ранга	1
2 1	1 2	6 6	«Ундор»	2
2	2	9	Симметричный тензор 2-го ранга со следом 0	1

5. Простейшие линейные ковариантные дифференциальные уравнения[1])

В этом параграфе мы впервые столкнемся с понятием поля и начнем с простейшего случая — *скалярного поля.*

Комплексное (вещественное) скалярное поле — это комплексно (вещественно) значная функция $\psi(x)$ в пространстве-времени, которая преобразуется при преобразованиях координат $\tilde{x} = \Lambda x + a$ по закону $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(x)$. Простейшее нетривиальное линейное дифференциальное уравнение, которому мы могли бы подчинить такое поле, это, конечно, $\Box\psi + m^2\psi = 0$ с $\Box = g^{kl}\partial_k\partial_l$, где $\partial_k = \partial/\partial x^k$, а m — постоянная размерности обратной длины. Более подробное обсуждение этого уравнения и его квантования мы еще проведем ниже, пока же мы хотели бы использовать его в качестве модели для обобщений. Прежде чем перейти к следующему по простоте случаю

[1]) В этом параграфе мы используем соглашение о суммировании.

спинорного поля, введем спинорное представление оператора дифференцирования ∂_k:

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}} = g^{kl}\partial_k \sigma_{l,\ \alpha\dot{\beta}}, \tag{1}$$

и отметим, что

$$\begin{Vmatrix} \partial_{1\dot{1}} & \partial_{1\dot{2}} \\ \partial_{2\dot{1}} & \partial_{2\dot{2}} \end{Vmatrix} = \sigma_0\partial_0 - \sum_{r=1}^{3} \sigma_r \partial_r \tag{2}$$

и

$$\begin{Vmatrix} \partial^{1\dot{1}} & \partial^{2\dot{1}} \\ \partial^{1\dot{2}} & \partial^{2\dot{2}} \end{Vmatrix} = \sigma_0\partial_0 + \sum_{r=1}^{3} \sigma_r \partial_r. \tag{3}$$

Спинорное поле с компонентами $\psi_\alpha(x)$ преобразуется при преобразовании координат $\tilde{x} = \Lambda x + a$, где $\Lambda = \Lambda(A)$, по правилу $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = A\psi(x)$.

Простейшим ковариантным уравнением для него будет, очевидно,

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\psi_\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \left(\sigma_0\partial_0 + \sum_{r=1}^{3}\sigma_r\partial_r\right)\psi = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\partial_{\gamma\dot{\beta}}\partial^{\alpha\dot{\beta}} = \delta^\alpha_\gamma \Box$, то следствием (4) будет $\Box\psi_\alpha = 0$, т. е. ψ удовлетворяет волновому уравнению и распространяется со скоростью света. После квантования поле ψ будет описывать частицы спина $^1/_2$, также распространяющиеся со скоростью света и, следовательно, имеющие нулевую массу. Уравнение (4) используется для описания нейтрино. Оно было впервые предложено Вейлем [Ра 1*, стр. 149].

Если мы хотим, чтобы ψ удовлетворяло бы не волновому уравнению, а уравнению Клейна — Гордона, нам надо будет вспомнить, что $\bar{\psi}$ преобразуется как $\tilde{\bar{\psi}}(\tilde{x}) = \bar{A}\bar{\psi}(x)$ и, следовательно, представляет спинор $\chi_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}_\alpha$. Это замечание позволяет нам обобщить уравнение (4), написав

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\psi_\alpha = m\chi^{\dot{\beta}} \tag{5}$$

и

$$\partial^{\alpha\dot{\beta}}\chi_{\dot{\beta}} = m\psi^\alpha \tag{5'}$$

или, что то же самое,

$$\partial_{\alpha\dot{\beta}}\chi^{\dot{\beta}} = -m\psi_\alpha. \tag{5''}$$

откуда следует, что

$$\Box\psi_\alpha = -m^2\psi_\alpha, \quad \Box\chi_{\dot\alpha} = -m^2\chi_{\dot\alpha}. \tag{6}$$

Только что полученные новые уравнения — это уравнения Дирака, дополненные условием вещественности Майорана [Maj 1] $\chi_{\dot\alpha} = \overline{\psi}_\alpha$. Если забыть это последнее условие и сделать $\chi_{\dot\alpha}$ независимым полем, мы получим обыкновенное уравнение Дирака. Поэтому дираково поле (ψ, χ) отвечает сумме двух неприводимых представлений (1, 0) и (0, 1).

Нам осталось еще преобразовать уравнения поля к более привычной форме. В то же время мы хотим сохранить форму условия Майорана столь простой, сколь это возможно. Чтобы сделать это, перепишем (5) и (5′) в матричной форме

$$\left(\sigma_0\partial_0 + \sum_r \sigma_r\partial_r\right)\psi = m\varepsilon\chi \tag{7}$$

и

$$\left(\sigma_0\partial_0 + \sum_r \sigma_r^T\partial_r\right)\chi = m\varepsilon\psi \tag{8}$$

с условием вещественности $\chi = \overline{\psi}$. Заметим также, что $\sigma_r^T = \overline{\sigma}_r$. Введем теперь векторы $\psi_1 = (\psi + \chi)/2$ и $\psi_2 = (\psi - \chi)/2i$ в качестве новых переменных поля и образуем четырехкомпонентный спинор $\varphi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2\end{pmatrix}$.

Мы придем тогда к уравнению

$$(\gamma^k\partial_k + m)\varphi = 0, \tag{9}$$

где матрицы

$$\gamma^0 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \gamma^1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\gamma^2 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right], \quad \gamma^3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{10}$$

удовлетворяют известным соотношениям

$$\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = -2g^{kl}. \tag{11}$$

В этом специальном представлениии условие Майорана выражает собой просто вещественность φ. Если мы примем φ комплексным, то получим обычное уравнение Дирака. Отметим еще особые свойства матрицы $C = i\gamma^0 = C^* = C^{-1} = -C^T$:

$$C^{-1}\gamma^k C = -\gamma^{kT}. \tag{12}$$

В то время как существование такой матрицы C следует из аргументов общего характера [Ра 1,2], к которым мы еще вернемся, то обстоятельство, что $C = i\gamma^0$, зависит от нашего частного представления γ-матриц.

Дальнейшее обсуждение уравнения Дирака мы отложим до следующей главы. Что же касается уравнений для более сложных полей, то мы не будем затрагивать этого предмета и отсылаем интересующегося читателя к литературе [Fi 1; Um 1*].

Глава II

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ. КВАНТОВАНИЕ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

1. Вступительные замечания

Глава начинается с *лагранжевой теории классических полей* [We 1*]. Эта теория и ее дальнейшее развитие в теорию Гамильтона играет существенную роль в обычной процедуре квантования [We 1*; Hei 1,2]. Значения этой процедуры при установлении частных моделей или теорий, как, например, квантовой электродинамики дираковских электронов, мы не касаемся, сколь бы велико оно ни было. Наша цель состоит в том, чтобы, во-первых, приготовить основу для рассмотрения свободных полей и, во-вторых, проиллюстрировать фундаментальную связь между свойствами симметрии и законами сохранения, связь, которая сохраняется и в квантованных теориях.

Рассмотрим простейшие свободные поля, классические и квантованные: свободное вещественное (и комплексное классическое) скалярное поле и дираково поле. Первое из них послужит нам моделью, из которой мы в дальнейшем извлечем, абстрагируясь, аксиомы для общего вещественного скалярного поля.

Уже до квантования в свойствах этих двух полей — скалярного и диракова — можно увидеть весьма существенные различия:

a) В случае комплексного (или вещественного) скалярного поля плотность энергии, а потому и *полная энергия*, *положительно определены* (исключая тривиальный случай обращения поля в нуль). Напротив, „плотность заряда" s_0, входящая в (3.9), равно как и ее пространственный интеграл, „полный заряд" (3.11), *индефинитны*. Такое поведение типично для свободных полей, относящихся к однозначным представлениям группы Лоренца (тензорных полей) [Fi 1; Pa 6].

b) Для неквантованного поля Дирака плотность заряда, а потому и *полный заряд положительно определены*. Поэтому плотность заряда была сперва ошибочно интерпретирована как плотность вероятности. Плотность же энергии и *полная энергия индефинитны*. Такое поведение типично для свободных полей, относящихся к двузначным представлениям группы Лоренца (спинорных полей) [Fi 1; Pa 6].

Эти факты тесно связаны с возможными способами квантования. Свободное скаляроe поле можно квантовать так, что соответствующие полевые кванты (частицы) будут подчиняться статистике Бозе — Эйнштейна, а со свободным дираковым полем этого сделать нельзя — его полевые кванты (частицы) обязательно подчиняются статистике Ферми — Дирака. Важная связь между геометрическим характером поля и возможным способом его квантования будет изучена далее систематически в рамках общей теории квантованных полей.

Наконец, для того чтобы перейти к гораздо более математически сложной основной части книги, приведем достаточно подробное описание обобщенных скалярных полей.

2. Вариационный принцип и законы сохранения

Пусть $\psi_\sigma(x)$ — поле, фигурирующее в наших уравнениях поля. Индекс σ выделяет различные компоненты одного поля и в то же время различные поля. Будем считать, что каждое отдельное поле преобразуется под действием неоднородных собственных ортохронных преобразований Лоренца (a, Λ) по конечномерному неприводимому представлению $L_+^\uparrow$ (или накрывающей группы $SL_2(C)$). Все эти представления нам уже известны из § 3 гл. I. Поэтому полное поле $\psi_\sigma(x)$ будет при преобразовании координат $\tilde{x} = \Lambda x + a$ преобразовываться по закону[1])

$$\tilde{\psi}_\sigma(\tilde{x}) = S_\sigma^{\sigma'}(\Lambda)\,\psi_{\sigma'}(x), \tag{1}$$

где $S(\Lambda)$ — конечномерное, возможно, двузначное представление группы $L_+^\uparrow$. Запишем (1) в краткой форме

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) = S(\Lambda)\,\psi(x). \tag{2}$$

Если Λ бесконечно мало отличается от единицы,

$$\Lambda = I + r, \quad \delta\xi = \tilde{\xi} - \xi = r\xi, \tag{3}$$

[1]) С суммированием по повторяющимся индексам.

то $S(\Lambda)$ будет тоже бесконечно мало отличаться от единицы и его отклонение от единицы будет линейным по r.

$$S = I + r \cdot \tau \quad \text{и} \quad \delta\psi = \tilde{\psi}(\tilde{x}) - \psi(x) = r \cdot \tau\psi. \tag{4}$$

Дифференцируя $\tilde{\psi}(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x} - r\tilde{x}) + r \cdot \tau\psi(\tilde{x})$ по $\tilde{x}^k$, найдем *)

$$\delta\psi_{,k} = \tilde{\psi}_{,\tilde{x}^k}(\tilde{x}) - \psi_{,x^k}(x) = r\tau\psi_{,k} - \psi_{,x}(rx)_{,x^k}. \tag{5}$$

После этих предварительных замечаний можно перейти к уравнениям поля. Поскольку мы хотим следовать возможно ближе к каноническому формализму классической механики [1]), то начнем с того, что во всех существенных случаях классические уравнения движения эквивалентны уравнениям Лагранжа — Эйлера, следующим из вариационного принципа, принципа Гамильтона:

$$\delta \int_{P_0}^{P_1} L(q_1, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_f)\, dt = 0, \tag{6}$$

при том условии, что $\delta q_k = 0$ на концах P_0 и P_1. Тогда уравнением движения будет уравнение

$$L_{,q_k} = \partial_t L_{,\dot{q}_k}, \tag{7}$$

где L — лагранжиан механической системы.

В полной аналогии с этим мы потребуем (и это также охватывает все интересные случаи), чтобы уравнения поля можно было вывести из вариационного принципа

$$\delta \int_{C_4} L(\psi, \psi_{,k})\, d^4x = 0 \tag{8}$$

при условии $\delta\psi = 0$ на ∂C_4, границе области C_4. Величина $L(\psi, \psi_{,k})$ будет называться лагранжианом (плотностью функции Лагранжа) рассматриваемой теории поля. Уравнениями

---

*) Формула (5) полнее запнсывается в виде

$$\delta\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial\tilde{\psi}(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}^k} - \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^k} = r\tau\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^k} - \frac{\partial\psi(x)}{\partial x^l}(r)^l_k. —$$

Прим. перев.

[1]) См., например, [La 1*].

поля будут

$$L_{,\psi_\sigma} = \partial_k L_{,\psi_{\sigma,k}}, \tag{9}$$

и вариационный принцип имеет смысл только в той степени, в какой он эквивалентен этим дифференциальным уравнениям.

Основное ограничение, налагаемое на уравнения поля, — это требование их ковариантности. Оно будет обеспечено, коль скоро лагранжиан $L(\psi(x), \psi_{,k}(x))$ будет преобразовываться при преобразовании координат (a, Λ), как скалярное поле

$$L(\tilde{\psi}(\tilde{x}), \tilde{\psi}_{,k}(\tilde{x})) = L(\psi(x), \psi_{,k}(x)). \tag{10}$$

Хорошо известная связь между свойствами симметрии и законами сохранения [Noe 1] справедлива в этом случае так же, как и в классической механике. Группа трансляций $\{(a, 1)\}$ ведет к сохранению энергии и импульса; ее наличие эквивалентно тому, что L зависит от x не явно только через поля. Поэтому можно написать

$$L_{,\psi} \cdot \psi_{,k} + L_{,\psi_{,l}} \cdot \psi_{,lk} - \partial_k L = 0. \tag{11}$$

Равенство (11) при предположении, что ψ заменяется решением уравнений поля, приводит нас к условию

$$\partial_l L_{,\psi_{,l}} \cdot \psi_{,k} - \partial_k L = 0, \tag{12}$$

или

$$T^l_{k,l} = 0, \tag{13}$$

где

$$T^l_k = L_{,\psi_{,l}} \cdot \psi_{,k} - \delta^l_k L. \tag{14}$$

Простые рассуждения показывают, что при достаточно быстром убывании T^l_k на бесконечности величины

$$P_k = \int_{x^0=t} T^0_k d^3x \tag{15}$$

будут компонентами не зависящего от времени четырехмерного вектора. Исходя из связи с группой трансляций, этот закон сохранения следует интерпретировать как закон сохранения энергии и импульса. Тензор T^l_k является тогда каноническим тензором энергии-импульса.

Аналогичным образом однородная группа Лоренца связана с сохранением момента: L не должен меняться, если мы подвергнем поля вариациям (4) и (5). Мы получаем поэтому

$$L_{,\psi} r\tau\psi + L_{,\psi_{,k}} r\tau\psi_{,k} - L_{,\psi_{,k}} \cdot \psi_{,x} (rx)_{,x^k} = 0, \qquad (16)$$

что после использования уравнений поля (и соответствующего предположения, что именно их решения подставляются в (16)) ведет к

$$\partial_k \left(L_{,\psi_{,k}} r\tau\psi \right) - \partial_k \left(L_{,\psi_{,k}} \psi_{,x} rx \right) + L_{,\psi} \psi_{,x} rx + \\ + L_{,\psi_{,k}} \psi_{,k,x} (rx) = 0 \qquad (17)$$

и, наконец, к

$$\partial_k \left(L_{,\psi_{,k}} r\tau\psi - L_{,\psi_{,k}} \cdot \psi_{,x} rx + L (rx)^k \right) = 0, \qquad (18)$$

где $(rx)^k$ есть k-я компонента произведения $r \cdot x$. Запомним, что $(rx)^k_{,k} = 0$. Обозначая $(rx)^k = r^{kl} x_l$, где $r^{kl} + r^{lk} = 0$ и $r\tau = r^{kl} \tau_{kl}$, а τ_{kl} — по-прежнему линейная операция над полями, получаем

$$r^{lm} \partial_k \left\{ 2L_{,\psi_{,k}} \tau_{lm} \psi - L_{,\psi_{,k}} \psi_{,l} x_m + L_{,\psi_{,k}} \psi_{,m} x_l + \\ + L \left(\delta^k_l x_m - \delta^k_m x_l \right) \right\} = 0, \qquad (19)$$

что из-за произвольности r^{lm} ведет к законам сохранения

$$M^k_{lm,\,k} = 0, \qquad (20)$$

где

$$M^k_{lm} = T^k_l x_m - T^k_m x_l - 2L_{,\psi_{,k}} \tau_{lm} \psi. \qquad (21)$$

Полезно выписать последний член более подробно:

$$-2L_{,\psi_{\sigma,k}} \tau^{\eta}_{lm;\,\sigma} \psi_{\eta} \qquad (22)$$

и подчеркнуть, что в силу допущения $\tau_{lm} + \tau_{ml} = 0$.

При соответствующих условиях относительно асимптотического поведения M^k_{lm} из (20) следует, что

$$P_{lm} = \int\limits_{x^0 = t} M^0_{lm} d^3x \qquad (23)$$

являются шестью компонентами антисимметричного тензора, не зависящего от времени, который, судя по методу его вывода, имеет смысл тензора момента.

Получим теперь из закона сохранения момента одно дополнительное следствие. Заметим прежде всего, что, вообще говоря, канонический тензор энергии-импульса T_{kl} несимметричен. Это вызывает эстетическую неудовлетворенность и было бы помехой при использовании этого тензора в качестве источника симметричного тензорного поля второго ранга или включения его в теорию тяготения. Отрадно поэтому [Pa 5], что сохранение P_{lm} позволяет нам построить симметричный тензор энергии-импульса θ_{kl}, не изменяя при этом канонического вектора энергии-импульса P_k.

Разобьем M^k_{lm} на две части

$$M^k_{lm} = {}^0M^k_{lm} + {}^1M^k_{lm}, \tag{24}$$

где

$${}^0M^k_{lm} = T^k_l x_m - T^k_m x_l. \tag{25}$$

Очевидно, что

$${}^1M^k_{lm} + {}^1M^k_{ml} = 0 \tag{26}$$

и

$${}^1M^k_{lm,\,k} = T_{lm} - T_{ml}. \tag{27}$$

Введем величину

$$f_{klm} = \frac{1}{2}\left({}^1M_{klm} - {}^1M_{lmk} + {}^1M_{mlk}\right), \tag{28}$$

удовлетворяющую условию

$$f_{klm} + f_{kml} = 0, \tag{29}$$

и определим

$$\theta_{kl} = T_{kl} - f^m_{lk,\,m}. \tag{30}$$

Этот тензор симметричен, поскольку

$$\theta_{kl} - \theta_{lk} = T_{kl} - T_{lk} - f^m_{lk,\,m} + f^m_{kl,\,m}, \tag{31}$$

а $f^m_{lk} - f^m_{kl} = -{}^1M^m_{lk}$, и в силу (27) правая часть обращается в нуль. Антисимметрия f^{km}_l в двух последних индексах гарантирует, что

$$\theta^k_{l,\,k} = T^k_{l,\,k} = 0. \tag{32}$$

Наконец,

$$\int \theta^0_k\, d^3x = P_k - \int \left(\sum_{r=1}^{3} f^{0r}_{k,\,r}\right) d^3x = P_k \tag{33}$$

при обычном условии достаточно быстрого убывания на бесконечности.

Эти подробные выводы должны показать, что классическая теория поля представляет собой прямое обобщение классической механики. То же справедливо и для используемых методов. В частности, мы нашли в теории поля ту же тесную связь между свойствами симметрии теории и законами сохранения, которая хорошо известна в классической механике.

Параллель между теорией поля и классической механикой можно продолжить, если ввести канонические импульсы $L_{,\psi_{,0}} = \pi$ и канонические уравнения движения, получаемые из гамильтониана. Наконец, к такой гамильтоновой формулировке теории поля можно применить хорошо известные правила квантования [Hei 1,2; We 1*]. Правда, эта процедура наталкивается на некоторые ограничения (она всегда ведет к статистике Бозе — Эйнштейна). Имеются и более серьезные формальные неудобства; именно то, что релятивистская инвариантность вовсе не очевидна и должна быть доказана с помощью длинного рассуждения [Hei 1,2].

В случае свободных полей, которыми мы сейчас займемся, квантование вводится другим, ковариантным способом.

3. Классическое свободное скалярное поле

Проиллюстрируем часть формальных выкладок предыдущего параграфа на простом, по существу на самом простом, примере — случае свободного комплексного скалярного поля $\psi(x)$. В качестве лагранжиана выберем [Pa 7; We 1*]:

$$L = g^{kl}\bar{\psi}_{,k}\psi_{,l} - m^2\bar{\psi}\psi, \tag{1}$$

где ψ и $\bar{\psi}$ изменяются независимо. Соответствующие уравнения движения знакомы из § 4 гл. I:

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \quad \text{и} \quad (\Box + m^2)\bar{\psi} = 0. \tag{2}$$

Тензор энергии-импульса симметричен и задается выражением

$$T_{kl} = \bar{\psi}_{,k}\psi_{,l} + \bar{\psi}_{,l}\psi_{,k} - g_{kl}L, \tag{3}$$

и тензор плотности момента

$$M^k_{lm} = T^k_l x_m - T^k_m x_l. \tag{4}$$

Мы специально подчеркнем то обстоятельство, что плотность энергии

$$T_{00} = |\psi_{,0}|^2 + \sum_{r=1}^{3} |\psi_{,r}|^2 + m^2 |\psi|^2 \geqslant 0 \tag{5}$$

неотрицательна и обращается в нуль лишь для тривиального поля $\psi = 0$. Это приводит к важному следствию для вектора энергии-импульса

$$P_k = \int\limits_{x^0=t} T_{0k} d^3x = \int\limits_{x^0=t} T^0_k d^3x, \tag{6}$$

который должен или обращаться в нуль или, если $\psi \neq 0$, обладать положительной нулевой составляющей $P_0 > 0$. Поскольку ясно, что все возможные векторы P образуют инвариантный конус, то таковым может быть только верхний конус, дополненный вектором $P = 0$. Простое рассуждение показывает, что

$$\{P\} = V_+ \cup \{0\} \equiv \underset{\circ}{V}, \tag{7}$$

и поэтому все возможные векторы P лежат в V_+, за исключением вектора $P = 0$, относящегося к $\psi = 0$. Состояние $\psi = 0$ разумно называть состоянием вакуума.

Наш лагранжиан допускает дополнительное преобразование симметрии — „калибровочную группу“

$$\psi \to e^{i\alpha}\psi, \qquad \overline{\psi} \to e^{-i\alpha}\overline{\psi}. \tag{8}$$

Соответствующий закон сохранения — это $s^k{}_{,k} = 0$, где

$$s_k = -i(\overline{\psi}_{,k}\psi - \overline{\psi}\psi_{,k}) \equiv i\overline{\psi}\overleftrightarrow{\partial_k}\psi. \tag{9}$$

Оператор $\overleftrightarrow{\partial}$ определяется здесь как

$$f\overleftrightarrow{\partial_k}g = fg_{,k} - f_{,k}g. \tag{10}$$

Таким образом, величина

$$\int\limits_{x^0=t} s^0\, d^3x = \int\limits_{x^0=t} s_0\, d^3x = i \int\limits_{x^0=t} \overline{\psi}\overleftrightarrow{\partial_0}\psi\, d^3x \equiv (\psi, \psi) \tag{11}$$

не зависит, если она существует, от времени t. Обычные рассуждения показывают, что то же верно и для

$$(\psi, \varphi) = i \int\limits_{x^0=t} \overline{\psi} \overleftrightarrow{\partial_0} \varphi \, d^3x. \tag{12}$$

„Скалярное произведение" (ψ, φ) обладает всеми свойствами симметричного скалярного произведения, за исключением положительности. В самом деле, если $(\psi, \psi) > 0$, то $(\varphi, \varphi) < 0$ для $\varphi(x) = \overline{\psi}(x)$ и $(\psi, \psi) = 0$ для вещественного ψ.

Введем преобразование Фурье решения $\psi(x)$: $\tilde{\psi}(p) = (2\pi)^{-4} \int e^{i(p,x)} \psi(x) \, d^4x$, чтобы отойти от этих чисто формальных рассуждений. Из дифференциального уравнения очевидно, что носитель $\tilde{\psi}(p)$ лежит на $\{(p, p) = m^2\}$. Этот гиперболоид распадается в зависимости от знака p_0 на две поверхности. Во всех дальнейших рассуждениях эти две поверхности будут иметь существенно разный смысл; поэтому мы напишем

$$\tilde{\psi}(p) = (2\pi)^{-3/2} \delta(p^2 - m^2) [\theta(p) a(p) + \theta(-p) \overline{b}(-p)], \tag{13}$$

полагая

$$\begin{aligned}\psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i(p,x)} \delta(p^2 - m^2) \theta(p) a(p) \, d^4p + \\ + (2\pi)^{-3/2} \int e^{i(p,x)} \delta(p^2 - m^2) \theta(p) \overline{b}(p) \, d^4p \equiv \\ \equiv \psi_+(x) + \psi_-(x).\end{aligned} \tag{14}$$

Такое разбиение ψ на „положительно частотную часть" ψ_+ и „отрицательно частотную часть" ψ_- (странные и общепринятые названия) инвариантно относительно $L^{\uparrow}$. Скалярное произведение (ψ, ψ) равняется

$$(\psi, \psi) = \|\psi_+\|^2 - \|\psi_-\|^2, \tag{15}$$

где

$$\|\psi_+\|^2 = \int d^4p \theta(p) \delta(p^2 - m^2) |a(p)|^2 \tag{16}$$

и

$$\|\psi_-\|^2 = \int d^4p \theta(p) \delta(p^2 - m^2) |b(p)|^2. \tag{17}$$

Эти скалярные произведения определяют два гильбертовых пространства (пространства L_2 по отношению к мере $\theta(p)\delta(p^2-m^2)$), и нам придется брать пары элементов ψ_+, ψ_- в этих пространствах в качестве подходящего определения решений уравнений (2).

Для вектора энергии-импульса найдем теперь

$$P_k=\int d^4p\delta(p^2-m^2)\theta(p)(|a(p)|^2+|b(p)|^2)p_k. \tag{18}$$

Отметим, наконец, что скалярное произведение (ψ, ψ) появилось как интеграл от локальной плотности в x-пространстве, чего нельзя сказать ни о $\|\psi_+\|^2$, ни о $\|\psi_-\|^2$. Решения ψ_+ и ψ_- образуют неприводимое представление неоднородной группы Лоренца. Напомним [Wig 1*], что такое представление однозначно характеризуется своей массой, в нашем случае равной m, и если масса m вещественна и отлична от нуля, своим спином, который в данном случае равен нулю.

Введем ортонормированный базис $\{f_\alpha\}$ в пространстве положительно частотных решений. Тогда $\{\bar{f}_\alpha\}$ образует такой базис в пространстве отрицательно частотных решений. Соотношения ортонормальности имеют вид

$$(f_\alpha, f_\beta)=-(\bar{f}_\alpha, \bar{f}_\beta)=\delta_{\alpha\beta}, \tag{19}$$

а соотношение полноты

$$\sum_\alpha f_\alpha(x)\bar{f}_\alpha(x')=i\Delta_+(x-x'), \tag{20}$$

где $\Delta_+(\xi)$ — обобщенная функция

$$\Delta_+(\xi)=-i(2\pi)^{-3}\int d^4p\delta(p^2-m^2)\theta(p)e^{-i(p,\xi)}. \tag{21}$$

Функция $\Delta_+(\xi)$ удовлетворяет уравнению $(\square+m^2)\Delta_+(\xi)=0$, обладает только положительными частотами и инвариантна относительно $L_+^\uparrow$. Эти условия характеризуют $\Delta_+(\xi)$ с точностью до постоянного множителя.

Произвольное решение можно разложить по этим базисам

$$\psi=\sum_\alpha(f_\alpha, \psi)f_\alpha-\sum_\alpha(\bar{f}_\alpha, \psi)\bar{f}_\alpha, \tag{22}$$

причем первый член здесь будет соответствовать ψ_+, а второй ψ_-. Легко найти явное выражение для этих „полуполей“:

$$\psi_+ = -\int\limits_{x_0'=t} \Delta_+ (x - x') \overleftrightarrow{\partial_{0'}} \psi(x')\, d^3x', \tag{23}$$

$$\psi_- = -\int\limits_{x_0'=t} \psi(x') \overleftrightarrow{\partial_{0'}} \Delta_+ (x' - x)\, d^3x', \tag{24}$$

и решение задачи Коши для нашего уравнения

$$\psi(x) = -\int\limits_{x_0'=t} \Delta(x - x') \overleftrightarrow{\partial_{0'}} \psi(x')\, d^3x', \tag{25}$$

где

$$\Delta(\xi) = \Delta_+(\xi) - \Delta_+(-\xi) = 2\,\mathrm{Re}\,\Delta_+(\xi) \tag{26}$$

(явное выражение см., например, в [Bog 1*]).

Из двух последних уравнений непосредственно следуют следующие свойства функции $\Delta(\xi)$:

$$(\Box + m^2)\,\Delta(\xi) = 0, \tag{27a}$$

$$\Delta(\Lambda\xi) = \Delta(\xi), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, \tag{27b}$$

$$\Delta(-\xi) = -\Delta(\xi), \tag{27c}$$

$$\Delta(0, \vec{\xi}) = 0, \tag{27d}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi^0}\Delta\right)(0, \vec{\xi}) = -\delta(\vec{\xi}).$$

Из свойств (b) и (c) мы получаем важное следствие, что $\Delta(\xi) = 0$ для $(\xi, \xi) < 0$, поскольку любые два вектора ξ и η, для которых $(\xi, \xi) = (\eta, \eta) < 0$, эквивалентны относительно $L_+^\uparrow$.

4. Квантование свободного вещественного скалярного поля

Ограничимся в дальнейшем случаем *вещественного* скалярного поля $A(x)$. Соответствующим лагранжианом [We 1*] будет

$$L = 1/2\,[g^{kl} A_{,k} A_{,l} - m^2 A^2], \tag{1}$$

где $A(x)$, конечно, вещественнозначно. В этом случае также

$$(\square + m^2)\, A(x) = 0 \tag{2}$$

и, кроме того,

$$T_{ik} = A_{,i} A_{,k} - g_{ik} L, \tag{3}$$

$$T_{00} = 1/2 \left[(A_{,0})^2 + \sum_{r=1}^{3} (A_{,r})^2 + m^2 A^2 \right] \geqslant 0 \tag{4}$$

и

$$M_{lm}^{k} = T_{l}^{k} x_m - T_{m}^{k} x_l. \tag{5}$$

Из этих уравнений следует, что $P \in V_+$, кроме случая $A = 0$; здесь P — вектор $(P_0, P_1, P_2, P_3): P_k = \int T_k^0 \, d^3 x$. Разложение Фурье для $A(x)$ задается формулой

$$A(x) = A_+(x) + A_-(x) =$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \int d^4 p \delta (p^2 - m^2) [\theta (p) a (p) e^{-i(p,x)} +$$

$$+ \theta (-p) a^* (-p) e^{-i(p,x)}]. \tag{6}$$ [1]

Как и ранее, ограничимся гильбертовым пространством, характеризуемым требованием

$$\| A_+ \|^2 = \int | a(p) |^2 \theta (p) \delta (p^2 - m^2) \, d^4 p < \infty. \tag{7}$$

Наконец, отметим, что

$$P_k = \int d^4 p \delta (p^2 - m^2) \theta (p) \, p_k a^* (p) a(p). \tag{8}$$

В нашем базисе $\{f_\alpha\}$, $A(x)$ обладает разложением

$$A = \sum_{\alpha} (A_\alpha f_\alpha + A_\alpha^* \bar{f}_\alpha), \tag{9}$$

где

$$A_\alpha = (f_\alpha, A), \quad A_\alpha^* = -(\bar{f}_\alpha, A) = (A, f_\alpha). \tag{10}$$

Квантование преобразует A_α и A_α^* в операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, при этом A_α^* будет оператором, сопряженным к A_α.

[1] Для удобства квантования мы используем здесь временно обозначение a^* для величины, комплексно сопряженной a. В дальнейшем звездочка будет означать сопряжение.

Мы постулируем соотношения коммутации

$$A_\alpha A^*_\beta - A^*_\beta A_\alpha \equiv [A_\alpha, A^*_\beta] = \delta_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

$$[A_\alpha, A_\beta] = [A^*_\alpha, A^*_\beta] = 0. \tag{12}$$

Эти соотношения коммутации не зависят от выбора ортонормального базиса $\{f_\alpha\}$, т. е. инвариантны относительно унитарных преобразований. Неоднородное собственное ортохронное преобразование Лоренца индуцирует такое унитарное преобразование над базисом $\{f_\alpha\}$, что наши соотношения, коммутации релятивистски инвариантны. Это можно проверить и явным образом, вычислив коммутатор поля A с самим собой:

$$[A(x), A(y)] = i\Delta(x-y). \tag{13}$$

Для Фурье-компонент $a(p)$ получим соотношения коммутации

$$[a(p), a^*(p')] = 2\omega(p)\delta(\vec{p}-\vec{p}'), \ (\omega(p) = +\sqrt{\vec{p}^2+m^2}) \tag{14}$$

и

$$[a(p), a(p')] = [a^*(p), a^*(p')] = 0. \tag{15}$$

Соотношения

$$i[P_k, A] = A_{,k} \tag{16}$$

являются следствиями соотношений коммутации. Они так же важны, как релятивистская инвариантность, и тесно с ней связаны. Из этих соотношений следует, что вектор энергии-импульса оказывается оператором бесконечно малых трансляций.

Аналогично

$$i[P_{lm}, A] = A_{,l}x_m - A_{,m}x_l, \tag{17}$$

где

$$P_{lm} = \int M^0_{lm}\, d^3x, \tag{18}$$

т. е. компоненты момента оказываются инфинитезимальными операторами однородных преобразований Лоренца. Из только что установленных формул следует, что соотношения коммутирования между P_k и P_{lm} будут обычными перестановочными соотношениями между инфинитезимальными операторами неоднородной группы Лоренца.

Таким образом, с помощью процедуры квантования мы получили по крайней мере формально представление неоднородной группы Лоренца, которое, как вскоре выяснится, весьма сильно приводимо [Wi 5]. Однако нужно еще подвести более солидный фундамент под наши, пока чисто формальные рассуждения, и для этого мы уточним представление соотношений коммутации (11), (12). Эти соотношения коммутации обладают многими неэквивалентными представлениями [Fr 1*; Gå 2], одно из которых будет особенно интересно. Чтобы построить это представление, постулируем существование состояния $\Omega \in \mathfrak{H}$, которое будет в дальнейшем отождествлено с состоянием вакуума, обладающего тем свойством, что $A_\alpha \Omega = 0$ для всех α и $(\Omega, \Omega) = 1$. Если теперь нам задана неотрицательная функция с целочисленными значениями $n(\alpha)$, такая, что $\sum\limits_\alpha n(\alpha) < \infty$, то, как легко видеть, из соотношений коммутации следует, что

$$\Phi^{(n)} = \prod_\alpha \frac{1}{\sqrt{(n(\alpha)!)}} A_\alpha^{*\,n(\alpha)} \Omega \tag{19}$$

нормировано. Если идентифицировать $\Phi^{(0)}$ и Ω, то

$$\left(\Phi^{(n)}, \Phi^{(m)}\right) = \delta(n, m) \equiv \prod_\alpha \delta_{n(\alpha),\, m(\alpha)}. \tag{20}$$

Мы выберем базис $\left\{\Phi^{(n)}\right\}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Векторы этого базиса являются собственными векторами операторов $N_\alpha = A_\alpha^* A_\alpha$,

$$N_\alpha \Phi^{(n)} = n(\alpha)\, \Phi^{(n)}, \tag{21}$$

и оператора $N = \sum\limits_\alpha N_\alpha$:

$$N\Phi^{(n)} = \sum_\alpha n(\alpha)\, \Phi^{(n)}. \tag{22}$$

Матричные элементы операторов A_β и A_β^* равны

$$\begin{aligned} A_\beta \Phi^{(n)} &= \sqrt{n(\alpha)}\, \Phi^{(n - e_\beta)}, \\ A_\beta^* \Phi^{(n)} &= \sqrt{n(\alpha) + 1}\, \Phi^{(n + e_\beta)}, \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$e_\beta(\alpha) = \delta_\alpha.$$

Здесь N_α — „число частиц“ в состоянии α, а N — „полное число частиц“. Эти „частицы“, очевидно, удовлетворяют статистике Бозе: состояние однозначно характеризуется числом частиц в каждом состоянии, а это число может быть произвольным целым. Состояния с заданным числом частиц $n = \sum_\alpha n(\alpha)$ образуют подпространство $\mathfrak{H}_n$ пространства $\mathfrak{H}$. Особенно важны тривиальное пространство $\mathfrak{H}_0 = \langle \Omega \rangle$ и пространство $\mathfrak{H}_1$, допускающее естественное отображение на пространство положительно частотных решений уравнения $(\Box + m^2)\psi = 0$:

$$\Phi^{(e_\beta)} \to f_\beta.$$

Это пространство не зависит от специального выбора базиса $\{f_\alpha\}$ и так же, как и $\mathfrak{H}_0$, релятивистски инвариантно. Само пространство $\mathfrak{H}$ — пространство Фока [Fo 1; Co 1; Ka 1, 2; Wi 3], построенное над $\mathfrak{H}_1$:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus (\mathfrak{H}_1 ⓢ \mathfrak{H}_1) \oplus (\mathfrak{H}_1 ⓢ \mathfrak{H}_1 ⓢ \mathfrak{H}_1) \oplus \ldots, \tag{24}$$

где $\mathfrak{H}_1 ⓢ \ldots ⓢ \mathfrak{H}_1$ — симметричное тензорное произведение n множителей $\mathfrak{H}_1$. Операторы N_α и N первоначально были определены только на базисе (19), однако линейное расширение и замыкание превращает их в самосопряженные операторы ([Co 1] и § 6).

Оператор поля $A(x)$, как следует из (13), становится операторнозначной обобщенной функцией. Каждой вещественной основной функции φ из пространства $\mathscr{S}$ [Sw 2*] основных функций соответствует оператор

$$A(\varphi) = \int A(x)\, \varphi(x)\, d^4x, \tag{25}$$

определенный на многообразии D состояний, обладающих лишь конечным числом не равных нулю компонент в разложении $\mathfrak{H}$ в прямую сумму (24). В § 6 мы увидим, что этот оператор существенно самосопряжен на D [Wi 3].

Пространство $\mathfrak{H}_0$ релятивистски инвариантно и несет тривиальное представление неоднородной группы Лоренца. Пространство $\mathfrak{H}_1$ несет неприводимое унитарное непрерывное представление этой группы. Это представление индуцирует (приводимые) представления в каждом из пространств $\mathfrak{H}^{ⓢ n}$. Поэтому и все полное пространство $\mathfrak{H}$ тоже несет унитарное непрерывное представление $U(a, \Lambda)$, которое в силу (9), (19) и (23) удовлетворяет соотношению

$$U(a, \Lambda) A(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\Lambda x + a). \tag{26}$$

Инфинитезимальными операторами преобразований $U(a, \Lambda)$ являются самосопряженные операторы P_k и P_{lm}, удовлетворяющие (16), (17). Наконец, спектр P, исключая одно изолированное собственное значение $\{p=0\}$, отвечающее $\Omega=\Phi^{(0)}$, лежит в верхнем конусе V_+.

5. Свободное поле Дирака

Мы уже встречались с уравнением Дирака

$$(\gamma^k \partial_k + m)\psi = 0, \tag{1}$$

где γ^k — матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие условию $\gamma^k\gamma^l + \gamma^l\gamma^k = -2g^{kl}$, и знаем, что оно релятивистски инвариантно. Матрицу γ^0 можно выбрать антиэрмитовой, а матрицы γ^r $(r = 1, 2, 3)$ — эрмитовыми, и придерживаться этого выбора. Нетрудно видеть, что алгебра γ-матриц допускает точно одно неприводимое представление [Ра 1*, стр. 220]. Если определить ψ^+ как $\psi^+ = i\psi^*\gamma^0$, то следствием (1) будет

$$\partial_k \psi^+ \gamma^k - m\psi^+ = 0. \tag{2}$$

Уравнением, транспонированным к предыдущему, будет уравнение

$$-\gamma^{kT}\partial_k \psi^{+T} + m\psi^{+T} = 0; \tag{3}$$

матрицы $-\gamma^{kT}$ удовлетворяют тем же алгебраическим соотношениям, что и γ^k, и поэтому должна существовать матрица $C = (C^*)^{-1}$, такая, что $C^{-1}\gamma^k C = -\gamma^{kT}$. Тогда поле

$$\psi^c = C\psi^{+T} \tag{4}$$

удовлетворяет уравнению

$$(\gamma^k \partial_k + m)\psi^c = 0. \tag{5}$$

В частном представлении § 5 гл. I ψ^c было равно $\overline{\psi}$, и матрица C равнялась $C = -i\gamma^0 = C^*$, $C^T = -C$. Антисимметрия C не зависит от представления, и (выбором эрмитова представления для γ^r $(1 \leqslant r \leqslant 4)$ всегда можно достичь того, что $C^* = C$ [Pa 3, 4]. Особенно важен закон сохранения, связанный с градиентной инвариантностью уравнения Дирака; из (1) и (2) легко вывести, что $s^k{}_{,k} = 0$, где

$$s^k = i\psi^+\gamma^k\psi. \tag{6}$$

Это позволяет определить инвариантное, не зависящее от времени скалярное произведение двух решений ψ и χ уравнения Дирака

$$(\psi, \chi) = i \int\limits_{x^0 = t} \psi^+\gamma^0\chi d^3x, \tag{7}$$

которое после подстановки значения ψ^+ принимает простой вид

$$(\psi, \chi) = \int\limits_{x^0 = t} \psi^*\chi d^3x. \tag{8}$$

Скалярное произведение для диракова поля положительно определено, что сильно отличает его от комплексного скалярного поля. Этот важный факт воспринимался первоначально как указание на то, что s^0 следует интерпретировать как плотность вероятности [Pa 1*]. Однако такая интерпретация может быть сохранена лишь совершенно неприемлемой ценой — отсутствием нижней границы для энергии и потому нестабильностью и стремительным распадом всей материи. ***Неквантованное дираково поле не имеет, следовательно, полезной физической интерпретации.***

Заметим, что

$$(\psi^c, \chi^c) = (\psi, \chi)^* = (\chi, \psi). \tag{9}$$

Мы хотим теперь выразить скалярное произведение через Фурье-образы полей ψ и ψ^c. Для этого заметим прежде всего, что ψ удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона $(\Box + m^2)\psi = 0$. Поэтому носителем Фурье-образа будет также гиперболоид, одна пола которого будет соответствовать „положительным", а другая — „отрицательным" частотам. Если ψ относится к положительным частотам, то ψ^c будет относиться к отрицательным. Поэтому достаточно обсудить решение, имеющее вид плоской волны с положительными частотами

$$\psi = u(p)e^{-i(p,x)}, \quad p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = \omega(p). \tag{10}$$

Уравнение Дирака требует, чтобы $(-i\gamma^k p_k + m)\,u(p) = 0$ или, после умножения на $i\gamma^0$: $\left(-p_0 + \sum\limits_r \alpha^r p_r + m\beta\right) u(p) = 0$, где $\alpha^r = \gamma^0\gamma^r$ и $\beta = i\gamma^0$. Матрицы α^r и β эрмитовы и удовлетворяют соотношениям

$$\alpha^r\alpha^s + \alpha^s\alpha^r = 2\delta_{rs}, \quad \alpha^r\beta + \beta\alpha^r = 0, \quad \beta\beta = 1. \tag{11}$$

Поэтому для $u(p)$ получается эрмитова задача на собственные значения, и мы уже знаем интересующее нас собственное значение $p_0 = \omega(p)$. Пусть решения u_1 и u_2 образуют ортонормированный базис

$$u_\sigma^*(p)\,u_{\sigma'}(p) = 2\omega(p)\,\delta_{\sigma\sigma'}. \tag{12}$$

Наконец, для решения, C-сопряженного к $\psi = u_\sigma(p)\,e^{-i(p,\,x)}$, напишем

$$\psi^c = iC\gamma^{0T}\psi^{*T} = v_\sigma(+p)\,e^{i(p,\,x)}. \tag{13}$$

Теперь можно выписать разложения Фурье для ψ:

$$\begin{aligned}\psi = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p) \sum_{\sigma=1}^{2} [e^{-i(p,\,x)}a^\sigma(p)\,u_\sigma(p) +{}& \\ + e^{i(p,\,x)}b^{\sigma*}(p)\,v_\sigma(p)], &\\ \psi^c = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p) \sum_{\sigma=1}^{2} \left[e^{-i(p,\,x)}b^\sigma(p)\,u_\sigma(p) +\right.{}& \\ \left. + e^{i(p,\,x)}a^{\sigma*}(p)\,v_\sigma(p)\right].&\end{aligned} \tag{14}$$

Для скалярного произведения получим

$$\begin{aligned}(\psi, \psi) = \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p) \sum_{\sigma=1}^{2} \left[a^{\sigma*}(p)\,a^\sigma(p) +\right.{}& \\ \left. + b^\sigma(p)\,b^{\sigma*}(p)\right].&\end{aligned} \tag{15}$$

Условие вещественности Майорана равносильно теперь отождествлению $a^\sigma(p)$ с $b^\sigma(p)$.

Мы снова отождествляем решения уравнения Дирака с элементами двух гильбертовых пространств $b^\sigma = 0$ и $a^\sigma = 0$, определяемых соответствующим скалярным произведением (15). Каждое из этих гильбертовых пространств инвариантно относительно неоднородных собственных ортохронных преобразований Лоренца и, следовательно, дает нам унитарное представление этой группы. Эти представления соответствуют массе m и спину $^1/_2$, что видно из преобразований, индуцируемых пространственными вращениями на компонентах $a^1(m, 0, 0, 0)$ и $a^2(m, 0, 0, 0)$. Эти преобразования описываются группой SU_2.

Прежде чем перейти к квантованию поля Дирака, наметим кратко, как теория такого свободного поля вписывается в общую схему классической теории. В качестве лагранжиана можно выбрать, например,

$$L = -\psi^+ (\gamma^k \partial_k + m) \psi, \tag{16}$$

где ψ^+ и ψ должны варьироваться независимо (возможен и другой, более элегантный, выбор [Kä 1]).

Этот лагранжиан приводит к несимметричному каноническому тензору энергии-импульса

$$T_l^k = -\psi^+ \gamma^k \psi_{,\, l} - \delta_l^k L, \tag{17}$$

где член $\delta_l^k L$ можно опустить, если ψ является решением уравнения Дирака. В этом случае вектор энергии-импульса имеет вид

$$P_k = i \int\limits_{x^0 = t} \psi^* \psi_{,\, k} d^3x \tag{18}$$

или с помощью преобразования Фурье

$$P_k = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p) p_k \sum_{\sigma=1}^{2} [a^{\sigma*}(p) a^{\sigma}(p) - \\ - b^{\sigma}(p) b^{\sigma*}(p)]. \tag{19}$$

Поэтому энергия

$$P_0 = \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p) \omega(p) \sum_{\sigma=1}^{2} [a^{\sigma*}(p) a^{\sigma}(p) - \\ - b^{\sigma}(p) b^{\sigma*}(p)] \tag{20}$$

неопределенна, обстоятельство, о котором мы уже предупреждали и которое сильно отличает этот случай от случая скалярного поля.

Единственный путь спасения катастрофического положения с индефинитностью энергии состоит в квантовании по статистике Ферми — Дирака. Правила коммутирования имеют тогда вид

$$[a^{\sigma*}(p),\ a^{\sigma'}(p')]_+ \equiv a^{\sigma*}(p)\, a^{\sigma'}(p') + a^{\sigma'}(p')\, a^{\sigma*}(p) = \\ = 2\omega(p)\,\delta(\vec{p} - \vec{p}')\,\delta_{\sigma\sigma'}, \qquad (21)$$

$$\left[b^{\sigma*}(p),\ b^{\sigma'}(p')\right]_+ = 2\omega(p)\,\delta\left(\vec{p} - \vec{p}'\right)\delta_{\sigma\sigma'}, \qquad (22)$$

все остальные антикоммутаторы со скобками $[\ ]_+$ обращаются в нуль.

Тогда P_k переписывается в новой форме

$$P_k = \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p)\, p_k \sum_{\sigma=1}^{2} [a^{\sigma*}(p)\, a^{\sigma}(p) + \\ + b^{\sigma*}(p)\, b^{\sigma}(p)] + P_k^0, \qquad (23)$$

где P_k^0 неопределенная и, возможно, бесконечная константа, которая кажется сравнительно меньшей помехой, может быть исключена и не будет приниматься во внимание в дальнейших рассуждениях. После этого исправления неприятного положения, в которое мы попали, энергия уже положительно определена

$$P_0 = \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p)\,\omega(p) \sum_{\sigma=1}^{2} [a^{\sigma*}(p)\, a^{\sigma}(p) + \\ + b^{\sigma*}(p)\, b^{\sigma}(p)], \qquad (24)$$

но первоначальное скалярное произведение

$$(\psi,\ \psi) = \int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p) \sum_{\sigma=1}^{2} \left[a^{\sigma*}(p)\, a^{\sigma}(p) - \\ - b^{\sigma*}(p)\, b^{\sigma}(p)\right] + 2\int d^4p\,\delta(p^2 - m^2)\,\theta(p) \qquad (25)$$

становится индефинитным, после тех же действий с игнорированием последнего члена (которых частично можно избежать). В действительности это скалярное произведение оказывается после умножения на элементарный электрический заряд оператором заряда, а соответствующая плотность

$\varepsilon(\psi^*\psi - \psi^{c*}\psi^c)/2$ является источником для электростатического поля. Полный вектор

$$s^k = \frac{i\varepsilon}{2}[\psi^+\gamma^k\psi - \psi^{c+}\gamma^k\psi^c] \tag{26}$$

есть источник электромагнитного поля (в той мере, в которой это поле вызывается спинорным полем ψ). Приведенная выше „зарядово-симметричная" форма тока s^k получилась в результате указанного выше вычитания и может служить моделью того, как можно выполнить это вычитание естественным и элегантным способом в более общих случаях (например, в тензоре T_l^k или в лагранжиане). Подчеркнем, однако, что это возможно только после квантования; ибо если бы мы подставили в приведенное выше выражение c-числовое поле, то получили бы вместо тока s^k тождественный нуль.

Для перестановочных соотношений поля ψ с самим собой и с ψ^+ после некоторых выкладок получается

$$\begin{aligned}\left[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y)\right]_+ &= \left[\psi_\alpha^+(x),\ \psi_\beta^+(y)\right]_+ = \\ &= \left[\psi_\alpha^c(x),\ \psi_\beta^c(y)\right]_+ = \left[\psi_\alpha^{c+}(x),\ \psi_\beta^{c+}(y)\right]_+ = 0\end{aligned} \tag{27}$$

и

$$\left[\psi_\alpha(x),\ \psi_\beta^+(y)\right]_+ = -iS_{\alpha\beta}(x-y) = \left[\psi_\alpha^c(x),\ \psi_\beta^{c+}(y)\right]_+, \tag{28}$$

где

$$S(\xi) = (\gamma^k\partial_k - m)\,\Delta(\xi). \tag{29}$$

Важными тождествами, использованными для вывода этих равенств, являются тождества

$$\sum_{\sigma=1}^{2} u_{\sigma,\,\alpha}(p)\,u_{\sigma,\,\beta}^+(p) = -\left[-i\gamma^k p_k - m\right]_{\alpha\beta} \tag{30}$$

и

$$\sum_{\sigma=1}^{2} v_{\sigma,\,\alpha}(p)\,v_{\sigma,\,\beta}^+(p) = +\left[i\gamma^k p_k - m\right]_{\alpha\beta}. \tag{31}$$

Прежде чем перейти к связи между статистикой и „квантованием с антикоммутаторами", хочется отметить два важных факта:

1. Простая выкладка показывает, что

$$i\,[P_k, \psi] = \psi_{,k}, \quad i\left[P_k, \psi^+\right] = \psi^+_{,k}, \tag{32}$$

поэтому P_k становится оператором бесконечно малых трансляций. То же справедливо и для оператора момента P_{kl}, который можно получить с помощью общих выкладок, хотя здесь это и не сделано. Таким образом P_k и P_{kl} вместе образуют (в сильной степени приводимое) представление бесконечно малых преобразований Лоренца.

2. Поле $\psi(x)$ антикоммутирует с $\psi^+(y)$ на пространственно подобных расстояниях. Это ведет к тому важному следствию, что *локальные билинейные* в ψ и ψ^+ выражения на пространственно-подобных интервалах коммутируют. Это верно, например, для плотности тока

$$s^k(x) = \frac{i\varepsilon}{2}\left[\psi^+(x)\gamma^k\psi(x) - \psi^{c+}(x)\gamma^k\psi^c(x)\right], \tag{33}$$

для которой находим, что

$$[s^k(x),\ s^l(y)] = 0, \tag{34}$$

для $(x-y)^2 < 0$. Это обстоятельство, очевидно, очень важно, если мы действительно объединяем электромагнитное поле F_{kl} с s^k уравнением типа

$$F_{l,\,k}^{k} = s_l. \tag{35}$$

Поле $F_{kl}(x)$ коммутирует с полем $F_{mn}(y)$ на пространственно-подобных интервалах. Это результат обычного канонического квантования, которое ведет к статистике Бозе — Эйнштейна для фотонов (и к правильной формуле для излучения черного тела). Но эта коммутативность в сильной степени подсказывается также локальной (физической) измеримостью, не самого электромагнитного поля, но его средних значений $F(\varphi) = \int F_{kl}\varphi^{kl}\,d^4x$ по основным функциям φ^{kl} с произвольно малым носителем[1]). Два таких измерения полей $F(\varphi_1)$ и $F(\varphi_2)$ возмущают друг друга, если операторы $F(\varphi_1)$ и $F(\varphi_2)$ не коммутируют. Но в случае когда каждая точка носителя φ_1 отделена от каждой точки носителя φ_2 пространственно-подобным интервалом, у нас нет никаких оснований ожидать такого возмущения; в этом случае никакое действие, имеющее место в носителе φ_1, не может распространиться на точки носителя φ_2, и наоборот.

[1]) См., например, [BR 1, 2; Cor 1; Hei 3].

Этот принцип локальности требует, чтобы коммутатор $[s^k(x), s^l(y)]$ обращался в нуль при $(x-y)^2 < 0$, и это требование удовлетворяется для наших соотношений коммутации.

Дираково поле $\psi(x)$ не измеримо, даже если мы, как в случае поля Майорана, не налагаем на него никакой калибровочной группы (утверждающей, что лишь величины, инвариантные относительно $\psi \to e^{i\alpha}\psi$, измеримы), так как $\psi(x)$ принадлежит к двузначному представлению $L_+^\uparrow$ и меняет знак при вращении на 360°. Поэтому мы не можем требовать коммутативности $\psi(x)$ и $\psi^+(y)$ для пространственно-подобных интервалов.

Перейдем к представлениям соотношений коммутации (21), (22). Введем для этого ортонормированный базис *положительно-частотных* решений

$$(\gamma^k \partial_k + m) u_\alpha = 0, \qquad (u_\alpha, u_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{36}$$

и соответствующих зарядово-сопряженных решений $v_\alpha = u_\alpha^c = = iC\gamma_0^T u_\alpha^{*T}$. Тогда для поля ψ имеет место разложение

$$\psi = \sum_\alpha (A_\alpha u_\alpha + B_\alpha^* v_\alpha), \tag{37}$$

где

$$A_\alpha = (u_\alpha, \psi), \quad B_\alpha^* = (v_\alpha, \psi). \tag{38}$$

Зарядово-сопряженное поле дается разложением

$$\psi^c = \sum_\alpha (A_\alpha^* v_\alpha + B_\alpha u_\alpha). \tag{39}$$

Соотношения коммутации (21), (22) эквивалентны соотношениям

$$[A_\alpha, A_\beta^*]_+ = [B_\alpha, B_\beta^*]_+ = \delta_{\alpha\beta}, \tag{40}$$

$$[A_\alpha, A_\beta]_+ = [A_\alpha, B_\beta^*]_+ = 0. \tag{41}$$

Как и в соответствующем случае коммутаторов, у этих антикоммутаторов тоже много унитарно-неэквивалентных представлений (см., например, [Gå 2]).

Среди них есть одно, принципиально важное для нас, которое, как и раньше, выделяется существованием „состояния вакуума“ Ω со свойством $A_\alpha\Omega = B_\alpha\Omega = 0$. Чтобы построить базис гильбертова пространства, выберем две функции $n^+(\alpha)$ и $n^-(\alpha)$, принимающие значения 0 или 1 и удовлетворяющие неравенствам $\sum_\alpha n^+(\alpha) < \infty$ и $\sum_\alpha n^-(\alpha) < \infty$. Снова легко проверяется, что векторы

$$\Phi^{(n^+,\, n^-)} = \prod_\alpha (A_\alpha^*)^{n^+(\alpha)} \prod_\alpha (B_\alpha^*)^{n^-(\alpha)} \Omega \tag{42}$$

(имеется в виду фиксированный, хотя и произвольный, порядок множителей в формально бесконечных произведениях) будут в силу соотношений антикоммутации удовлетворять

$$\left(\Phi^{(n^+,\, n^-)},\ \Phi^{(m^+,\, m^-)}\right) = \delta(n^+, m^+)\,\delta(n^-, m^-). \tag{43}$$

Ясно, что (43) остается справедливым и после определения

$$\Phi^{(0,\,0)} \equiv \Omega. \tag{44}$$

На все эти векторы натянуто гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, причем на векторы $\Phi^{(n^+,\, n^-)}$, относящиеся к фиксированной сумме $\sum_\alpha (n^+(\alpha) + n^-(\alpha)) = n$, натянуто подпространство $\mathfrak{H}_n$. Пространство $\mathfrak{H}_0$ одномерно и инвариантно относительно преобразований Лоренца. Пространство $\mathfrak{H}_1$ естественным образом отображается на гильбертово пространство положительно-частотных решений уравнения Дирака. Под действием неоднородной группы Лоренца оно распадается на два неприводимые пространства, несущие одно и то же представление массы m и спина $^1/_2$. Наконец, пространство $\mathfrak{H}_n$ — это антисимметричное прямое произведение n множителей $\mathfrak{H}_1$

$$\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}_1 \circledcirc \ldots \circledcirc \mathfrak{H}_1; \tag{45}$$

оно несет однозначно определенное унитарное непрерывное представление универсальной накрывающей группы неоднородной группы Лоренца. То же самое справедливо и для всего гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, задаваемого равенством

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n. \tag{46}$$

Этот способ построения гильбертова пространства был впервые предложен Фоком [Fo 1; Ka 1, 2; Co 1].

Операторы $N_\alpha^+ = \overset{*}{A}_\alpha A_\alpha$ и $N_\alpha^- = \overset{*}{B}_\alpha B_\alpha$ определяются уравнениями

$$N_\alpha^\pm \Phi^{(n^+,\, n^-)} = n^\pm(\alpha)\, \Phi^{(n^+,\, n^-)}. \tag{47}$$

Они ограничены и самосопряжены. Операторы $N^\pm = \sum_\alpha N_\alpha^\pm$, определенные только на плотном множестве конечных линейных комбинаций базисных векторов (42), допускают единственное самосопряженное расширение.

Операторы $N_\alpha^\pm$ — это операторы числа частиц в состояниях u_α и v_α соответственно, а $N^\pm$ — это операторы полного числа частиц во всех состояниях $\{u_\alpha\}$ или $\{v_\alpha\}$. Ясно, что мы имеем дело со статистикой Ферми — Дирака, поскольку числа заполнения $n^\pm(\alpha)$ ограничены собственными значениями 0 и 1.

Как и в § 4, поля $\psi(x)$ и $\psi^+(x)$ приобретают смысл лишь после усреднения с подходящими основными функциями

$$\psi(\varphi) = \int \psi(x)\, \varphi(x)\, d^4x. \tag{48}$$

Под действием унитарного представления $U(a, \Lambda')$ универсальной накрывающей группы $\{(a, \Lambda')\}$ неоднородной группы Лоренца поля преобразуются ковариантно:

$$U(a, \Lambda')\, \psi(x)\, U^{-1}(a, \Lambda') = S\left(\Lambda'^{-1}\right) \psi(\Lambda x + a), \tag{49}$$

где $\Lambda(\Lambda')$ — соответствующее Λ' преобразование Лоренца, а $S(\Lambda')$ — представление группы $SL_2(C)$, к которой принадлежит дираков спинор ψ, согласно §§ 4, 5 гл. I.

6. Обобщенные свободные вещественные скалярные поля

Свободные поля служат нам моделями, исходя из котoтых мы установим абстрактные аксиомы Вайтмана. По этой причине обсудим сейчас математически более удовлетворительный подход к свободному вещественному скалярному полю. Со всеми остальными свободными полями можно поступить аналогичным образом. На самом деле наша модель оказывается несколько более общей, и *обобщенные свободные поля*, которыми мы займемся, имеют значение для последних исследований аксиом Вайтмана.

Все основные идеи нашего построения принадлежат по существу В. А. Фоку [Fo 1].

Построение будет происходить следующим образом. Сначала построим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, затем последуют „размазанные" в импульсном пространстве операторы поля $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$, и наконец после нескольких математических шагов появятся операторы поля $A(x)$ в x-пространстве. Унитарное непрерывное представление неоднородной группы Лоренца появится в процессе построения гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

А. Гильбертово пространство. Начнем с положительной, инвариантной относительно $L_+^\uparrow$, меры $d\rho$ из $\tilde{\mathscr{S}}'$ пространства обобщенных функций медленного роста над импульсным пространством. Мера $d\rho$ принадлежит $\tilde{\mathscr{S}}'$, если для некоторого $k>0$ $d\rho/(1+\|p\|^2)^{k/2}$ ограничена. Мы требуем еще, чтобы $\operatorname{supp} d\rho \subset V_+$.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ будет гильбертовым пространством измеримых по мере $d\rho$ квадратично интегрируемых функций ψ_1

$$\|\psi_1\|^2 = \int |\psi_1(p)|^2 d\rho(p) < \infty. \tag{1}$$

Как и обычно, функции ψ_1, отличающиеся только на множестве меры нуль по мере $d\rho$, считаются равными. Поэтому две функции, различающиеся лишь вне V_+, будут равными, как элементы $\mathfrak{H}_1$.

Мы хотим построить *фоково пространство* над $\mathfrak{H}_1$. Для этого введем $\mathfrak{H}_n$ — симметричные тензорные произведения n пространств $\mathfrak{H}_1$. Пространство $\mathfrak{H}_n$ содержит все квадратично интегрируемые по мере $(d\rho)^{\times n}$ функции $\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, симметричные по n векторным переменным $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$\|\psi_n\|^2 = \int |\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n)|^2 d\rho(p_1)\, d\rho(p_2) \ldots d\rho(p_n). \tag{2}$$

Наконец введем $\mathfrak{H}_0$, *вакуумное пространство*, как одномерное гильбертово пространство. Порождающее $\mathfrak{H}_0$ состояние мы обозначаем буквой Ω.

Фоково пространство $\mathfrak{H}$ определяется как прямая сумма

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n. \tag{3}$$

Его элементами будут поэтому последовательности $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots)$, $\psi_n \in \mathfrak{H}_n$, а норма определяется как

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|^2. \tag{4}$$

Ясно, что пространство $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Оно несет унитарное непрерывное представление неоднородной группы Лоренца, задаваемое формулой

$$(U(a, \Lambda)\Psi)_n(p_1, \ldots, p_n) = e^{i(a, \Sigma p_k)}\psi_n(\Lambda^{-1}p_1, \ldots, \Lambda^{-1}p_n). \tag{5}$$

Инвариантность меры $d\rho$ относительно $L_+^\uparrow$ гарантирует, что

$$\|U(a, \Lambda)\Psi\|^2 = \|\Psi\|^2. \tag{6}$$

Оператор трансляции $T(a) = U(a, I)$ обладает спектральным разложением

$$T(a) = \int e^{i(p, a)}\,dE(p), \tag{7}$$

где $dE(p)$ определяется формулой

$$\left(\int f(p)\,dE(p)\,\Psi\right)_n (p_1 \ldots p_n) = \\ = f(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\,\psi_n(p_1, p_2, \ldots, p_n), \tag{8}$$

справедливой для любой ограниченной измеримой функции f.

Спектром инфинитезимальных операторов

$$P = \int p\,dE(p) \tag{9}$$

трансляций $T(a)$ (которым надо будет приписать смысл составляющих вектора энергии-импульса) будет носитель $dE(p)$, задаваемый выражением

$$\operatorname{supp} dE(p) = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{supp} d\rho, \tag{10}$$

где $n \cdot \operatorname{supp} d\rho = \{p \mid p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n;\ p_k \in \operatorname{supp} d\rho\}$. Он содержит дискретное собственное значение $p = 0$, соответствующее вакууму $\mathfrak{H}_0$, а в остальном содержится в V_+.

В. Оператор поля в импульсном пространстве. Введем теперь „размазанный“ оператор поля в импульсном пространстве $\int \tilde{A}(p)\tilde{\varphi}(p)\,d^4p$. В качестве первого шага уточним пространство „размазывающих функций" $\tilde{\varphi}$. Самым широким допустимым пространством будет опять пространство L_2, а именно пространство $L_2(\rho_1)$, мера $d\rho_1$ в котором определяется равенством

$$d\rho_1(p) = d\rho(p) + d\rho(-p). \tag{11}$$

Норма в $L_2(\rho_1)$ задается обычным выражением

$$\|\tilde{\varphi}\|^2 = \int |\tilde{\varphi}(p)|^2\, d\rho_1(p) = \int [|\tilde{\varphi}(p)|^2 + |\tilde{\varphi}(-p)|^2]\, d\rho(p). \tag{12}$$

Теперь мы можем определить оператор $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ равенством

$$(\tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi)_n(p_1 \ldots p_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\tilde{\varphi}(p_k)\psi_{n-1}(p_1 \ldots \check{p}_k \ldots p_n) +$$
$$+ \sqrt{n+1}\int \tilde{\varphi}(-p)\,\psi_{n+1}(p, p_1 \ldots p_n)\, d\rho(p), \tag{13}$$

где галочка над p_k означает, что переменная p_k отсутствует.

Поскольку $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ оказывается во всех интересных случаях неограниченным оператором, мы должны установить его область определения. Выражение (13) определяет вектор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, только если конечное число компонент Ψ не равно нулю. Эта область, которую назовем D_2, общая для всех $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$. Если обозначить P_N проектор, который обращает в ноль все компоненты вектора с номером большим N, то D_2 можно записать как

$$D_2 = \bigcup_{N=0}^{\infty} P_N\mathfrak{H}. \tag{14}$$

Обозначим сужение оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ на область D_2 через $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$.

Для матричных элементов оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ чисто формально мы получим

$$(X,\ \tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\sqrt{n}\int\bar{\chi}_n(p_1\ldots p_n)\tilde{\varphi}(p_1)\psi_{n-1}(p_2\ldots p_n)\,d\rho^{\times n}+$$
$$+\sqrt{n+1}\int\bar{\chi}_n(p_1\ldots p_n)\tilde{\varphi}(-p)\times$$
$$\times\psi_{n+1}(p,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)\,d\rho^{\times(n+1)}\Big\}. \qquad (15)$$

Если $\Psi\in D_2$, то формально бесконечная сумма в (15) на самом деле конечна и мы вправе изменить в ней порядок членов. В результате получим

$$(X,\ \tilde{A}_2(\tilde{\varphi})\Psi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\sqrt{n+1}\int\tilde{\varphi}(p)\bar{\chi}_{n+1}(p,\ p_1,\ldots,p_n)\psi_n(p_1\ldots p_n)\,d\rho^{\times(n+1)}+$$
$$+\sqrt{n}\int\tilde{\varphi}(-p_1)\bar{\chi}_{n-1}(p_2,\ \ldots,\ p_n)\psi_n(p_1\ldots p_n)\,d\rho^{\times n}\Big\}, \qquad (16)$$

откуда

$$(X,\ \tilde{A}_2(\tilde{\varphi})\Psi)=(\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)X,\ \Psi), \qquad (17)$$

где

$$\tilde{\varphi}^*(p)=\overline{\tilde{\varphi}(-p)}, \qquad (18)$$

если только $\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)X$ *существует*, т. е. если выражения, построенные согласно (13) с $\tilde{\varphi}$, замененной на $\tilde{\varphi}^*$, действительно являются компонентами вектора из $\mathfrak{H}$ или, что то же самое, приводят к конечной норме (4). Обозначим совокупность векторов, для которых это справедливо, $D_{\tilde{\varphi}^*}$; $D_{\tilde{\varphi}^*}$ — это область определения оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)$ и $D_{\tilde{\varphi}}$ — область определения оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$. Соотношение (17) означает, что

$$\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)=[\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})]^*. \qquad (19)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на следующей лемме.

Лемма. *Пусть* $X \in D_{\tilde{\varphi}^*}$, $\Psi \in D_{\tilde{\varphi}}$,

$$R_N = (P_N X,\ \tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi) - (\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)X,\ P_N\Psi). \tag{20}$$

Тогда $\lim R_N = 0$ *при* $N \to \infty$.

Доказательство. Последовательность R_N имеет предел при $N \to \infty$, поскольку

$$\lim_{N\to\infty} R_N = (X,\ \tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi) - (\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)X,\ \Psi). \tag{21}$$

Определение (13) приводит для R_N к выражению

$$\begin{aligned}(N+1)^{-1/2} R_N = \\ = \int \bar{\chi}_N(p_1 \ldots p_N)\tilde{\varphi}(-p)\psi_{N+1}(p,\ p_1 \ldots p_N)\,d\rho^{\times(N+1)} - \\ - \int \bar{\chi}_{N+1}(p,\ p_1 \ldots p_N)\tilde{\varphi}(p)\psi_N(p_1 \ldots p_N)\,d\rho^{\times(N+1)},\end{aligned} \tag{22}$$

правую часть которого можно мажорировать с помощью неравенства Шварца, используя определение (12) нормы $\|\tilde{\varphi}\|$, выражением

$$\begin{aligned}(N+1)^{-1/2}|R_N| \leqslant \|\chi_N\|\|\tilde{\varphi}\|\|\psi_{N+1}\| + \|\chi_{N+1}\|\|\tilde{\varphi}\|\|\psi_N\| = \\ = \|\tilde{\varphi}\|\,[\|\chi_N\|\|\psi_{N+1}\| + \|\chi_{N+1}\|\|\psi_N\|],\end{aligned} \tag{23}$$

так что, применяя неравенство Шварца еще раз, получим

$$\sum_{N=0}^{\infty}(N+1)^{-1/2}|R_N| \leqslant 2\|\tilde{\varphi}\|\cdot\|X\|\cdot\|\Psi\|. \tag{24}$$

Из (21) и (24), очевидно, следует, что $R_N \to 0$ при $N \to \infty$ Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема.

$$\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*) = [\tilde{A}(\tilde{\varphi})]^*. \tag{25}$$

Доказательство. В лемме установлено (см. (21)), что

$$(X,\ \tilde{A}(\tilde{\varphi})\Psi) = (\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*)X,\ \Psi) \tag{26}$$

для $\Psi \in D_{\tilde{\varphi}}$ и $X \in D_{\tilde{\varphi}^*}$. Отсюда следует, что $\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*) \subseteq [\tilde{A}(\tilde{\varphi})]^*$. Поскольку $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ является расширением $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$, мы получаем в силу (19), что и $\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*) \supseteq [\tilde{A}(\tilde{\varphi})]^*$ и потому должно выполниться (25).

Следующее утверждение является частным случаем (25).

Следствие. *Если $\tilde{\varphi}^* = \tilde{\varphi}$, то оператор $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ самосопряжен.*

С. Сужения областей. Оператор поля в x-пространстве. Определение. Область $D \subset D_2$ *существенна*, если сужение оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ на область D, называемое $A_0(\tilde{\varphi})$, обладает свойством

$$[\tilde{A}_0(\tilde{\varphi})]^* = \tilde{A}(\tilde{\varphi}^*). \tag{27}$$

Поэтому если $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ сужен на существенную область определения, то его всегда можно полностью восстановить, переходя к сопряженному оператору. В частности, если $\tilde{\varphi}^* = \tilde{\varphi}$, то $\tilde{A}_0(\tilde{\varphi})$ существенно самосопряжен.

Теорема. *Следующие области определения существенны.*

Область D, содержащая все векторы из D_2, для которых компоненты являются быстро убывающими основными функциями Шварца. В обозначениях (18) *из разд.* 1А, *гл.* I,

$$D = D_2 \cap \underline{\tilde{\mathscr{S}}}. \tag{28}$$

Область D_1, содержащая все векторы из D_2, для которых n-я компонента лежит в $\tilde{\mathscr{S}}^{\otimes n}$ для всех n.

Сужение оператора $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ на область определения D обозначается $\tilde{A}_0(\tilde{\varphi})$, а на область определения D_1 — $\tilde{A}_1(\tilde{\varphi})$.

Проверка выполнения (27) и соответствующего равенства для $\tilde{A}_1$ выполняется так же, как и вывод (17).

Рассмотрим теперь зависимость $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$ от $\tilde{\varphi}$. Согласно определению (13), $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$ непрерывна по $\tilde{\varphi}$ (на D_2) в топологии, задаваемой (12). Поэтому мы можем ограничить $\tilde{\varphi}$ плотным подмножеством в $L_2(\rho_1)$, в качестве которого выбирается множество $\tilde{\mathscr{S}}$ — пространство основных функций над импульсным пространством $\tilde{R}^4$. Поскольку топология в $\tilde{\mathscr{S}}$ сильнее топологии индуцированной $L_2(\rho_1)$, оператор $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$ становится *операторнозначной обобщенной функцией медленного роста.* То же справедливо и для $\tilde{A}_1(\tilde{\varphi})$ и $\tilde{A}_0(\tilde{\varphi})$.

С этим ограничением области D, D_1 и D_2 инвариантны относительно $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$, так что, например,

$$\tilde{A}(\tilde{\varphi})D\subset D \tag{29}$$

и то же самое для D_1 и D_2.

Но это означает, что мы можем свободно перемножать $\tilde{A}_k(\tilde{\varphi})$, $k=0, 1, 2, \ldots$, поэтому мы можем рассматривать алгебру $\mathfrak{A}$, порождаемую операторами поля. Если применить $\mathfrak{A}$ к Ω (состояние вакуума), то мы придем к D_1:

$$D_1=\mathfrak{A}\Omega. \tag{30}$$

Поэтому Ω является *циклическим вектором* алгебры $\mathfrak{A}$.

Операторы в x-представлении получаются по обычным правилам преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста (разд. 1С, гл. I):

$$A_0(\varphi)=\int A_0(x)\varphi(x)\,d^4x=\tilde{A}_0(\tilde{\varphi}) \tag{31}$$

и аналогично для A_1 и A_2.

Условие $\tilde{\varphi}^*=\tilde{\varphi}$ означает, что φ вещественна. Поэтому для вещественных φ операторы $A_k(\varphi)$ *существенно самосопряженны*. Для произвольной φ мы получаем (аналогично (27))

$$\overset{*}{A_0}(\varphi)=A^{**}(\overline{\varphi})\equiv A(\overline{\varphi}). \tag{32}$$

Простая выкладка приводит к соотношениям коммутации

$$[A_0(x),\ A_0(y)]=\int \varepsilon(p)\,e^{-i(p,\ x-y)}\,d\rho_1. \tag{33}$$

Этот коммутатор обращается в нуль для пространственно-подробной разности $x-y$. Поэтому теория *локальна*.

Наконец, определенный формулой (5) оператор $U(a, \Lambda)$, действуя на $A_0(x)$, дает

$$U(a,\ \Lambda)A_0(x)U^{-1}(a,\ \Lambda)=A_0(\Lambda x+a). \tag{34}$$

Обычное скалярное поле получается отсюда с точностью до нормировки, если носителем меры $d\rho(p)$ является только положительная пола гиперболоида $p^2=m^2$.

Глава III

АКСИОМЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА

1. Вступительные замечания

В этой главе мы переходим к предмету настоящей книги, к «общей теории квантованных полей». Существует несколько попыток аксиоматического подхода к теории квантованных полей [Wi 1,2,3; LSZ 1; GLZ 1; Sm 1]. Их объединяет одна цель — желание уяснить связи между основными допущениями, лежащими в основе всех частных моделей квантованных полей. Кроме того, все они избегают тех специфических особенностей классической лагранжевой теории, которые, по-видимому, ведут к математической неопределенности.

Среди различных подходов следует упомянуть чрезвычайно плодотворные идеи Хаага [Ha 1, 2, 3], к которым мы еще вернемся в последних главах, и теорию Лемана, Зиманцика и Циммермана (ЛЗЦ-теорию) [LSZ 1, 2; GLZ 1]. Последняя, хотя и менее последовательная математически, чем теория Вайтмана, привела к нескольким экспериментально проверяемым и оправдавшимся предсказаниям (дисперсионные соотношения): [Bog 1*; Sy 1; Le 1, 2] *), относительно эксперимента см. [No 1]. В § 2 этой главы описываются аксиомы для нейтрального скалярного поля. В § 3 вводится последовательность обобщенных функций (обобщенных функций Вайтмана), которые полностью характеризуют теорию (§ 4). В § 5 сделано несколько дополнительных замечаний и вве-

---

) Первый математический строгий вывод дисперсионных соотношений был дан Н. Н. Боголюбовым (Bog 1 [1], [2], [4]) на основе развитой им аксиоматики, которая существенно отличается от аксиоматик Вайтмана и ЛЗЦ. Аксиоматика Н. Н. Боголюбова имеет дело в большей степени с матрицей рассеяния, чем с гайзенберговыми полями. В последующие годы эта аксиоматика получила дальнейшее развитие в работах советских ученых. — *Прим. ред.*

дены хааговы усеченные вакуумные средние значения. Наконец, в § 6 обсуждаются свойства оператора трансляций и его матричных элементов.

2. Аксиомы Вайтмана для нейтрального скалярного поля

Рассмотрим в качестве модели теорию свободного скалярного поля и попытаемся выделить общие свойства, сформулированные в виде аксиом, остающихся верными и в более общих ситуациях, которые могут реально встретиться при описании явлений природы.

Ограничение (в процессе вывода и формулировки аксиом) нейтральным скалярным полем несущественно в том смысле, что обобщение на (конечное или счетное) число полей с другими трансформационными свойствами (произвольных спинорных полей) потребовало бы менее существенных и очевидных модификаций. В дальнейшем в применениях нам потребуются эти более широкие рамки, тогда мы и сделаем несколько замечаний.

А. Гильбертово пространство. Наше скалярное поле в некотором нуждающемся в уточнении смысле есть оператор, действующий в линейном векторном пространстве, в *пространстве состояний.* Нулевая аксиома постулирует, что это пространство будет гильбертовым пространством[1]).

Нулевая аксиома. *Пространство состояний является гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$ над комплексными числами* **C**. *Обозначим элементы $\mathfrak{H}$ буквами* Φ, Ψ, ..., *а положительное эрмитово скалярное произведение* (Φ, Ψ). *Оно антилинейно по Φ и линейно по Ψ.*

В. Скалярное поле. Введем теперь нашу основную величину — оператор скалярного поля. Из обсуждения свободного скалярного поля $A_0(x)$ мы знаем, что только средние значения

---

[1]) В действительности не существует взаимно однозначного соответствия между физическими состояниями и элементами гильбертова пространства, а существует лишь взаимно однозначное соответствие между физическими состояниями и определенными „лучами" в пространстве Гильберта [Wey 1*]. Лучом называется множество $\{\psi = e^{i\alpha}\psi_0, \alpha \text{ — вещественно}\}$. Несмотря на это, мы будем называть гильбертово пространство пространством состояний.

по основным функциям $A_0(\varphi)=\int A_0(x)\varphi(x)\,d^4x$ являются приемлемыми (хотя и неограниченными) операторами.

В этом случае допускалось довольно широкое разнообразие основных функций $\varphi(x)$ (§ 6 гл. II). В общем случае, однако, мы будем более строги и ограничим наши основные функции пространством $\mathscr{S}$ быстро убывающих функций класса C_∞ в пространстве-времени (Л. Шварц) [Sw 2*, стр. 89]. Напомним читателю, что в пространстве $\mathscr{S}$ существует естественное определение сходимости и что линейные непрерывные функционалы над $\mathscr{S}$ являются обобщенными функциями медленного роста (§ 1 гл. I).

Первая аксиома. *Пространство $\mathscr{S}$ отображается в пространстве линейных операторов $\{A(\varphi)\}$ над $\mathfrak{H}$; $A(\varphi)$ определен на плотном множестве $D\subset\mathfrak{H}$, не зависящем от φ. Для Φ, $\Psi\in D$ скалярное произведение $(\Phi,\ A(\varphi)\Psi)$ есть обобщенная функция и*

$$(\Phi,\ A(\varphi)\Psi)=(A(\overline{\varphi})\Phi,\ \Psi). \tag{1}$$

Наконец, мы потребуем, чтобы

$$A(\varphi)D\subset D. \tag{2}$$

Замечания. 1. Первую аксиому можно постулировать в более слабой форме, если заменить пространство $\mathscr{S}$ на $\mathscr{D}$ (пространство функций класса C_∞ с компактным носителем в пространстве-времени). Мы не обсуждаем вопрос о том, будет ли такая более слабая форма первой аксиомы вместе с остальными аксиомами иметь следствием приведенную выше более сильную форму.

2. Если $\varphi=\overline{\varphi}$, то $A(\varphi)$ — симметричный оператор в D. Вопрос о том, обладает ли $A(\varphi)$ самосопряженным расширением, здесь не обсуждается.

3. Иногда мы будем формально записывать

$$A(\varphi)=\int A(x)\varphi(x)\,d^4x \tag{3}$$

или

$$(\Phi,\ A(\varphi)\Psi)=\int\varphi(x)(\Phi,\ A(x)\Psi)\,d^4x,$$

т. е. расширим определение интеграла на обобщенные функции.

4. Постулат $A(\varphi)D \subset D$ разрешает свободное перемножение операторов $A(\varphi)$, $A(\psi)$ и т. д.

С. Релятивистская инвариантность. Пока мы ввели только однокомпонентный оператор $A(\varphi)$ с еще не уточненным поведением при неоднородных преобразованиях Лоренца. Мы знаем, однако, как выражаются трансформационные свойства *свободного* скалярного поля через существование унитарного представления неоднородной группы Лоренца. Чтобы сформулировать соответствующий постулат в общем случае, введем обозначение $\varphi_{(a,\Lambda)}(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x-a))$. Замена $\varphi \to \varphi_{(a,\Lambda)}$ определяет отображение $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}$ с хорошими свойствами.

Вторая аксиома. *Унитарное (непрерывное) представление $U(a, \Lambda)$ неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца существует и удовлетворяет равенству*

$$U(a, \Lambda) A(\varphi) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\varphi_{(a,\Lambda)}). \tag{4}$$

Область определения D релятивистски инвариантна

$$U(a, \Lambda) D = D. \tag{5}$$

Замечания 1. Согласно замечанию в сноске на стр. 81, собственная ортохронная группа Лоренца индуцирует представление на лучах в $\mathfrak{H}$. Подробности относительно сведения таких представлений к обычным см. в [Ba 1, 2; Wi 4; Wig 1, 1*].

2. Представление группы трансляций $\{(a, I)\}$ коротко обозначается $T(a)$; $T(a)$ — представление (локально компактной) абелевой группы, и потому оно допускает спектральное представление.

$$T(a) = \int e^{i(p,a)}\, dE(p), \tag{6}$$

где E — спектральная мера с релятивистски инвариантным носителем [*RN* 1*] (§ 1Е, гл. I).

3. В случае спинорного поля мы имеем, конечно, представление U накрывающей группы неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца.

D. Стабильность вакуума. Перейдем к одному из самых характерных постулатов вайтмановой теории поля, в котором идет речь о спектре вектора энергии-импульса P, определяемого равенством $P_\mu = \int p_\mu dE(p)$, и который одновременно является носителем спектральной меры E.

Третья аксиома. (a) *Точка* $\{p=0\}$ *есть изолированное собственное значение* P. *Соответствующее собственное подпространство одномерно и соответствует вакууму* Ω, $\Omega \in D$.

(b) *Остальная часть спектра* P *лежит в* V_+.

Замечания. 1. Собственное подпространство, относящееся к $\{p=0\}$, инвариантно относительно $L_+^\uparrow$. Поскольку группа $L_+^\uparrow$ обладает лишь тривиальным одномерным представлением, Ω удовлетворяет $U(0, \Lambda)\Omega = \Omega$, и поэтому $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$.

2. Поскольку спектр оператора P замкнут и релятивистски инвариантен, то должно существовать $\mu_0 > 0$, такое что на самом деле спектр содержится в объединении $\{p=0\} \cup \overline{V}_+^{\mu_0}$, где $\overline{V}_+^{\mu_0} = \{p \in V_+;\ (p, p) \geqslant \mu_0^2\}$. Это частично является следствием того постулата, что $\{p=0\}$ должно быть изолированным собственным значением.

3. В природе встречаются важные поля, именно электромагнитное поле и поле нейтрино, для которых третья аксиома не удовлетворяется в приведенной выше строгой форме. В этих случаях световой конус N_+ тоже принадлежит спектру, поскольку соответствующие частицы — световые кванты или нейтрино — обладают массой нуль. Мы не будем касаться этих случаев. Попытки изучить эти поля „в лоб“ могут привести к значительным трудностям. Есть, однако, более или менее оправданная надежда, что такие поля можно было бы рассматривать как предельные случаи фиктивной теории, в которой фотон или нейтрино обладают положительной массой, и далее, выполняя предельный переход, при котором масса устремляется к нулю.

4. Если принять третью аксиому в приведенной выше форме, тогда любое состояние Φ, ортогональное к Ω, обладает средним значением энергии $(\Phi, P_0\Phi)/(\Phi, \Phi) \geqslant \mu_0$, а вакуум *определяется* условием $(\Omega, P_0\Omega) = 0$.

5. Для отдельных конкретных задач могут быть весьма существенными более конкретные сведения относительно спектра P. Например, если нужно описать один сорт ней-

тральных частиц спина 0, которые не образуют связанных состояний, то спектр P (включая и кратности собственных значений) будет совпадать с соответствующим спектром *свободного* скалярного поля. Такая дополнительная информация становится существенной, например, при определении асимптотических состояний или при выводе дисперсионных соотношений.

Е. Локальность. Определение. *Два множества $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ пространственно-подобны друг другу, если для любой пары точек (x_1, x_2), $x_1 \in \mathfrak{S}_1$, $x_2 \in \mathfrak{S}_2$ справедливо неравенство $(x_1 - x_2)^2 < 0$.*

Четвертая аксиома. *Если* $\operatorname{supp} \varphi_1$ *и* $\operatorname{supp} \varphi_2$ *компактны и пространственно-подобны друг другу, то*

$$[A(\varphi_1) A(\varphi_2) - A(\varphi_2) A(\varphi_1)] \Phi \equiv [A(\varphi_1), A(\varphi_2)] \Phi = 0 \quad (7)$$

для всех $\Phi \in D$.

Замечания. 1. Из § 3В следует, что (7) выполняется и для основных функций без предположения о компактности носителей.

2. Иногда мы будем писать просто

$$[A(x_1), A(x_2)] = 0 \quad \text{для} \quad (x_1 - x_2)^2 < 0 \quad (8)$$

вместо приведенной выше более аккуратной формулировки. В то время как смысл формулы (7) с точки зрения теории обобщенных функций совершенно ясен, значение ее для теории операторов проясняется только тогда, когда мы сузим операторы $A(\varphi)$ на область определения D.

3. Эвристически под равенством (7) подразумевается то требование, что для измеримых полей $A(x)$ измерения в областях, разделенных пространственно-подобными интервалами, не возмущают друг друга, поскольку никакое действие не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Ясно, что это рассуждение влечет за собой локальность, однако остается непонятным, эквивалентна ли локальность этому рассуждению.

4. Положение становится более сложным, если в нашей теории есть много полей и если $A(x)$ — это, скажем, вещественная часть комплексного поля $\psi(x)$, допускающего калибровочную группу. Тогда придется вспомнить доводы, которые

мы приводили в связи со свободным дираковым полем. Наблюдаемые локальные поля (т. е. билинейные по ψ^* и ψ) по-прежнему будут коммутировать на пространственно-подобных расстояниях, если в приведенной выше аксиоме мы выберем антикоммутативность вместо коммутативности. Однако такой выбор все-таки приводит к противоречию с остальными аксиомами — как именно, мы покажем ниже.

5. Ниже мы обсудим также и притом во всех подробностях положение, которое возникает в теории нескольких различных полей с произвольными трансформационными свойствами; тогда и будет приведено необходимое обобщение четвертой аксиомы.

F. Полнота. Пятая аксиома выражает то требование, что в нашей теории не должно быть иных полей, кроме $A(x)$.

Пятая аксиома. *Пусть $\mathfrak{P}(A)$ будет кольцом полиномов (над* **C**) *от операторов $A(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда $\mathfrak{P}(A)\Omega$ должно быть плотно в $\mathfrak{H}$. Иными словами, Ω должно быть циклическим по отношению к операторам $\mathfrak{P}(A)$.*

Общее замечание к аксиомам. Понятие частицы в аксиомы нигде не входит. Оно появится лишь в гл. VI вместе с дополнительным постулатом, обеспечивающим полную корпускулярную интерпретацию нашей теории поля.

3. Обобщенные функции Вайтмана

Одним из основных средств в нашей дальнейшей работе будет определенная последовательность обобщенных функций — так называемых обобщенных функций Вайтмана [Wi 1]. Как мы увидим в этом и следующем параграфах, содержание аксиом можно будет легко и полностью перевести на язык свойств этих обобщенных функций, и поэтому анализ аксиом можно будет заменить изучением обобщенных функций Вайтмана, что во многих отношениях лучше.

А. Определение вайтмановых обобщенных функций. Существование вакуумного состояния Ω, $\Omega \in D$ и тот постулат, что $A(\varphi) D \subset D$, позволяет нам ввести для любых $\varphi_k \in \mathcal{S}(R^4)$ величины

$$(\Omega, A(\varphi_1) A(\varphi_2) \ldots A(\varphi_n) \Omega) \equiv \mathfrak{W}_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n). \quad (1)$$

Функционал $\mathfrak{W}_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ является обобщенной функцией медленного роста по каждой переменной φ_k в отдельности. Теорема Шварца о ядре [Sw 1; Gå 3] ведет к тому, что $\mathfrak{W}_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ однозначно определяет обобщенную функцию медленного роста $\mathfrak{W}_n(\varphi)$ для основных функций $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ над R^{4n} таким образом, что для специального выбора

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n) = \\ = (\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$\mathfrak{W}_n(\varphi)$ сводится к $\mathfrak{W}_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.

Свойство симметрии $(\Phi, A(\varphi)\Psi) = (A(\bar{\varphi})\Phi, \Psi)$ ведет к симметрии функции $\mathfrak{W}_n(\varphi)$, выражаемой равенством

$$\mathfrak{W}_n(\varphi) = \overline{\mathfrak{W}}_n(\varphi^*), \tag{2}$$

где

$$\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{\varphi}(x_n, \ldots, x_2, x_1). \tag{3}$$

B. Одно применение. Определим для $\chi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)$ векторнозначный функционал

$$\Phi_n(\chi) = A(\varphi_1) A(\varphi_2) \ldots A(\varphi_n)\Omega \tag{4}$$

и расширим это определение по линейности

$$\begin{gathered} \Phi_n(\chi_1 + \chi_2) = \Phi_n(\chi_1) + \Phi_n(\chi_2), \\ \Phi_n(c\chi) = c\Phi_n(\chi). \end{gathered} \tag{5}$$

Таким образом, мы получаем отображение пространства $\mathscr{S}^{\otimes n}(R^4)$ в пространство $\mathfrak{H}$. Мы хотим расширить это отображение до отображения $\mathscr{S}(R^{4n})$ в $\mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{H}^{\otimes n}(R^4)$ плотно в $\mathscr{S}(R^{4n})$ [Sw 1*]. Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(R^{4n})$ — произвольная функция, а $\chi_k \in \mathscr{S}^{\otimes n}(R^4)$ таковы, что $\chi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$. Тогда $\Phi_n(\chi_k - \chi_l) = \Phi_n(\chi_k) - \Phi_n(\chi_l)$ удовлетворяет условию

$$\|\Phi_n(\chi_k - \chi_l)\|^2 = \mathfrak{W}_{2n}((\chi_k - \chi_l)^* \otimes (\chi_k - \chi_l)) \tag{6}$$

и стремится к нулю для $k \to \infty$, $l \to \infty$. Следовательно, $\Phi_n(\chi_n)$ сходятся и, поскольку $\mathfrak{H}$ полно, сходятся к вектору $\Phi_n(\varphi) \in \mathfrak{H}$. Формально мы запишем

$$\Phi_n(\varphi) = \int A(x_1) \ldots A(x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, d^4x_1 \ldots d^4x_n\Omega, \tag{7}$$

причем $\Phi_n(\varphi)$ будет обобщенной функцией медленного роста со значениями из $\mathfrak{H}$.

Для оператора

$$\int A(x_1)\ldots A(x_n)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\,d^4x_1\ldots d^4x_n$$

мы будем иногда писать $\langle A^n, \varphi\rangle$. Ясно, что он определен на D. Наконец, у нас есть соотношения

$$(\Phi_n(\varphi), \Phi_m(\psi)) = \mathfrak{W}_{n+m}(\varphi^*\otimes\psi) \tag{8}$$

и

$$(\Omega, \Phi_m(\psi)) = \mathfrak{W}_m(\psi), \tag{9}$$

последнее из которых подсказывает обозначение $\Phi_0(\varphi)=\varphi\Omega$, где φ — постоянная величина, не зависящая ни от каких аргументов. Аналогично положим

$$\mathfrak{W}_0(\varphi) = \varphi.$$

С. Нулевая аксиома. Из аксиомы следует, что

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}\Phi_n(\varphi_n)\right\|^2 \geqslant 0 \tag{10}$$

или в терминах вейтмановых обобщенных функций

$$\sum_{n,\ m=0}^{N}\mathfrak{W}_{n+m}(\varphi_n^*\otimes\varphi_m) \geqslant 0. \tag{11}$$

D. Вторая аксиома. Если определить

$$\varphi_{(a,\ \Lambda)}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi\left(\Lambda^{-1}(x_1-a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_n-a)\right), \tag{12}$$

то из аксиомы следует, что

$$\mathfrak{W}_n(\varphi_{(a,\ \Lambda)}) = \mathfrak{W}_n(\varphi). \tag{13}$$

Доказательство.

$$(\Omega, A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)\Omega) =$$
$$= (U^*(a, \Lambda)\Omega, A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)U^{-1}(a, \Lambda)\Omega) =$$
$$= (\Omega, A(\varphi_{1(a,\ \Lambda)})\ldots A(\varphi_{n(a,\ \Lambda)})\Omega),$$

или в терминах обобщенных функций Вайтмана

$$\mathfrak{W}_n(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \mathfrak{W}_n((\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n)_{(a,\,\Lambda)}),$$

что в силу теоремы о ядре ведет к равенству (13).

В качестве частного случая мы получаем из второй аксиомы трансляционную инвариантность $\mathfrak{W}_n(\varphi)$ и отсюда как следствие, что $\mathfrak{W}_{m+1}(\varphi)$ может быть выражена в виде обобщенной функции только m векторных переменных [Sw 1*]. Формально такая замена переменных указывается записью

$$\mathfrak{W}_{m+1}(x_0, x_1, \ldots, x_m) = W_m(x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_m - x_{m-1}). \tag{14}$$

Функция $W_m(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ по-прежнему инвариантна относительно $L_+^\uparrow$

$$W_m(\Lambda\xi_1, \ldots, \Lambda\xi_m) = W_m(\xi_1, \ldots, \xi_m), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow. \tag{15}$$

Е. Третья аксиома, первая часть. Перейдем к ограничениям, налагаемым на обобщенные функции Вайтмана третьей аксиомой. Их лучше всего выразить в терминах Фурье-образов, поэтому здесь уместно сказать несколько слов относительно преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста [Sw 2*] (см. также § 1С гл. I). То, что разложение Фурье,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int e^{-i[(p_1, x_1) + \ldots + (p_n, x_n)]} \tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n)\, d^{4n}p, \tag{16}$$

возможно, для функций из $\mathcal{S}(R^{4n})$ тривиально.

Фурье-образ $\tilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n)$ будет также быстро убывающей функцией класса C_∞, т. е. функцией, принадлежащей $\mathcal{S}(\tilde{R}^{4n})$, где $\tilde{R}^4$ обозначает векторное пространство „векторов импульса" (или пространство, сопряженное к R^4). Это отображение является (топологическим) изоморфизмом $\mathcal{S}(\tilde{R}^{4n})$ на $\mathcal{S}(R^{4n})$ [Sw 2*]. Если S — обобщенная функция медленного роста, то линейный функционал на $\mathcal{S}(\tilde{R})$, определяемый равенством

$$\tilde{S}(\tilde{\varphi}) \equiv S(\varphi), \tag{17}$$

будет также обобщенной функцией медленного роста, которая называется Фурье-образом от S. Таким способом мы определим $\tilde{\mathfrak{W}}_n(\tilde{\varphi})$, $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$, $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ и $\langle \tilde{A}^n, \tilde{\varphi} \rangle$.

Действие $T(a)$ на $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ легко сосчитать:

$$T(a)\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}) = T(a)\Phi_n(\varphi_n) =$$
$$= \Phi_n(\varphi_{(a,1)}) = \tilde{\Phi}_n\left(\tilde{\varphi}e^{i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} p_k,\, a\right)}\right). \quad (18)$$

Поэтому для достаточно регулярных функций $\chi(p)$, используя спектральное разложение для $T(a)$, получаем

$$\int \chi(p)\,dE(p)\,\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}) = \tilde{\Phi}_n(\chi(p_1 + \ldots + p_n)\,\tilde{\varphi}). \quad (19)$$

Но левая часть (19) обращается в нуль, если $\operatorname{supp}\chi(p) \cap \cap \operatorname{supp} dE = \varnothing$. Поэтому наш первый вывод следующий: носитель $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ по векторной переменной $p_1 + p_2 + \ldots \ldots + p_n$ содержится в спектре P (т. е. в носителе dE).

Однако мы можем немедленно получить и дальнейшие следствия, поскольку

$$(\tilde{A}^m, \tilde{\psi})\,\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}) = \tilde{\Phi}_{m+n}(\tilde{\psi} \otimes \tilde{\varphi}), \quad (20)$$

и поэтому

$$\langle \tilde{A}^m, \tilde{\psi}\rangle \int \chi(p)\,dE(p)\,\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}) = \tilde{\Phi}_{n+m}(\tilde{\psi} \otimes \chi(p_1 + \ldots + p_n)\,\tilde{\varphi}). \quad (21)$$

Последнее выражение также обращается в нуль при сформулированном выше условии на $\chi(p)$. Но из равенства (21) следует, что носитель $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ содержится в $p_k + p_{k+1} + \ldots \ldots + p_n \in \operatorname{supp}(dE)$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Этот результат подсказывает преобразование переменных

$$q_k \equiv p_k + p_{k+1} + \ldots + p_n, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \quad (22)$$

В новых переменных справедлива следующая

Теорема. *Пусть* $\tilde{\varphi}_q = \tilde{\varphi}(q_1, \ldots, q_n) \in \mathscr{S}(\tilde{R}^{4n})$. *Тогда носитель* $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_q)$ *содержится в* $[\operatorname{supp} dE]^{\times n}$.

Теорема приводит к соответствующему утверждению о носителе обобщенной функции

$$\tilde{\mathfrak{W}}_n(\tilde{\varphi}_q) = (\Omega,\ \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_q)) = (\Omega,\ \langle A^n, \varphi\rangle\,\Omega). \quad (23)$$

Однако данная величина еще и трансляционно инвариантна

$$(\Omega,\ T(a)\,\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_q)) = (\Omega,\ \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_q)) \tag{24}$$

или

$$\tilde{\mathfrak{W}}_n(\tilde{\varphi}_q e^{i(q_1,\ a)}) = \tilde{\mathfrak{W}}_n(\tilde{\varphi}_q), \tag{25}$$

откуда следует формальное соотношение

$$\tilde{\mathfrak{W}}_n(q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n) = (2\pi)^4\,\delta(q_1)\,\tilde{\mathfrak{W}}_{n-1}(q_2,\ \ldots,\ q_n). \tag{26}$$

Легко проверить, что в формальной записи

$$\mathfrak{W}_m(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_m) = \int e^{i[(q_1,\ \xi_1)+\ldots+(q_m,\ \xi_m)]}\,\tilde{\mathfrak{W}}_m(q_1\ldots q_m)\,d^{4m}q. \tag{27}$$

Таким образом, получена

Теорема

$$\operatorname{supp}\tilde{\mathfrak{W}}_m(q_1\ldots q_m) \subset (\operatorname{supp} dE)^{\times m}. \tag{28}$$

E. Третья аксиома, вторая часть. Третья аксиома не исчерпывается теоремой (28), соотношение (28) было бы справедливо и в случае вырождения вакуума. Условие [Hep 1], исключающее последнюю возможность, легко вывести из (19). Если $\operatorname{supp}\chi(p)\cap\operatorname{supp} dE = \{p\,|\,p=0\}$, то, значит, вектор $\Phi_n(\chi(p_1+\ldots+p_n)\tilde{\varphi})$ должен быть кратным Ω. Иными словами, если носитель $\tilde{\varphi}(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ по переменной $p_1+\ldots+p_n$ имеет единственную точку $p_1+p_2+\ldots+p_n=0$, общую со спектром P (оператора энергии-импульса), то $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ есть вектор, кратный Ω, т. е.

$$\|\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})\|^2 = (\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}),\ \Omega)(\Omega,\ \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})). \tag{29}$$

Последнее условие действительно налагает ограничения на вайтмановы обобщенные функции.

Теорема. *Если носитель функции $\tilde{\varphi}(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ по переменной $p_1+\ldots+p_n$ пересекает спектр оператора P самое большее в одной точке $p_1+\ldots+p_n=0$, то*

$$\mathfrak{W}_{2n}(\varphi^*\otimes\varphi) = |\,\mathfrak{W}_n(\varphi)\,|^2. \tag{30}$$

G. Четвертая аксиома. Эта аксиома может быть сразу же записана в терминах вайтмановых обобщенных функций.

Обозначим

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_k)\varphi_{k+1}(x_{k+1}) \ldots \varphi_n(x_n) \quad (31)$$

и

$$\varphi_{\mathrm{tr}}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_k(x_{k+1})\varphi_{k+1}(x_k) \ldots \varphi_n(x_n) \quad (32)$$

и допустим, что $\operatorname{supp}\varphi_k(x)$ и $\operatorname{supp}\varphi_{k+1}(x)$ компактны и пространственно-подобны друг другу. Тогда

$$\mathfrak{W}_n(\varphi) = \mathfrak{W}_n(\varphi_{\mathrm{tr}}). \quad (33)$$

Н. Резюме. Ограничения, налагаемые на обобщенные функции Вайтмана, можно естественным образом разбить на линейные и нелинейные.

а. *Линейные ограничения.*

а1. $\mathfrak{W}_n$ есть обобщенная функция медленного роста в $\mathscr{S}'(R^{4n})$, причем $\overline{\mathfrak{W}}_n(\varphi^*) = \mathfrak{W}_n(\varphi)$, где $\varphi^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{\varphi}(x_n, \ldots, x_1)$.

а2. $\mathfrak{W}_n$ инвариантна относительно неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца

$$\mathfrak{W}_n(\varphi_{(a, \Lambda)}) = \mathfrak{W}_n(\varphi).$$

Определение.

$$W_m(\xi_1, \ldots, \xi_m) \equiv \mathfrak{W}_{m+1}(x_0, x_1, \ldots, x_m),$$

где $\xi_k \equiv x_k - x_{k-1}$.

а3. Носитель $\widetilde{W}_m(q_1 \ldots q_m)$ содержится в $\{q_k \in \mathfrak{z}_0, \mathfrak{z}_0 \subset \overset{\circ}{V}\}$.

а4. Если $\operatorname{supp}\varphi_k$ и $\operatorname{supp}\varphi_{k+1}$ компактны и пространственно-подобны, то

$$\mathfrak{W}_n(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k \otimes \varphi_{k+1} \otimes \ldots \otimes \varphi_n) = \\ = \mathfrak{W}_n(\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{k+1} \otimes \varphi_k \otimes \ldots \otimes \varphi_n).$$

b. *Нелинейные ограничения.*

b1. Для любой $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{S}(R^{4n})$, $n = 0, 1, \ldots, N$, N — произвольно,

$$\sum_{m, n=0}^{N} \mathfrak{W}_{n+m}(\varphi_n^* \otimes \varphi_m) \geqslant 0.$$

b2. Если носитель функции $\widetilde{\varphi}(p_1, \ldots, p_n)$ по переменной $p_1 + \ldots + p_n$ пересекает спектр оператора P самое большее в точке $p_1 + \ldots + p_n = 0$, то

$$\mathfrak{W}_{2n}(\varphi^* \otimes \varphi) = |\mathfrak{W}_n(\varphi)|^2.$$

В следующем параграфе мы покажем, что свойство (a) и (b) полностью характеризуют обобщенные функции Вайтмана.

4. Основная теорема

Теорема [Wi 1]. *Каждой заданной последовательности обобщенных функций $\mathfrak{W}_n$, удовлетворяющих условиям* (a), (b) *предыдущего параграфа, однозначно соответствует нейтральное скалярное поле $A(x)$, удовлетворяющее всем аксиомам и имеющее обобщенные функции $\mathfrak{W}_n$ своими вайтмановыми обобщенными функциями.*

Доказательство. (a) Пусть $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(R^{4n})$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, и пусть $\mathcal{S}_0 = \mathbf{C}$ — полю комплексных чисел. В этом параграфе элемент пространства $\mathcal{S}_n$ обозначается через φ_n.

(b) *Построение гильбертова пространства* $\mathfrak{H}$. Каждой функции φ_n соответствует вектор $\Phi_n(\varphi_n)$ линейного пространства таким образом, что $\Phi_n(\varphi_n + \psi_n) = \Phi_n(\varphi_n) + \Phi_n(\psi_n)$ и $\Phi_n(c\varphi_n) = c\Phi_n(\varphi_n)$ для $c \in \mathbf{C}$. Скалярное произведение вводится равенством

$$(\Phi_n(\varphi_n), \Phi_m(\varphi_m)) \equiv \mathfrak{W}_{n+m}(\varphi_n^* \otimes \varphi_m), \tag{1}$$

линейным расширением по второму и антилинейным расширением по первому аргументам. Это скалярное произведение симметрично и положительно полуопределено из условия b1. Если Φ и Ψ — конечные линейные комбинации векторов $\Phi_n(\varphi_n)$, то (Φ, Ψ) определено и удовлетворяет неравенству Шварца

$$|(\Phi, \Psi)|^2 \leqslant (\Phi, \Phi)(\Psi, \Psi). \tag{2}$$

Это векторное пространство обладает радикалом, который в силу (2) соответствует векторам с квадратами, обращающимися в нуль.

Факторпространство по отношению к этому радикалу будет после пополнения нашим гильбертовым пространством $\mathfrak{H}$.

Замечание. Упомянутое выше построение $\mathfrak{H}$ можно в более современной терминологии описать следующим образом: [Bo 3] (см. также § 1A гл. I). Пусть пространство

$$\underline{\mathscr{S}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{S}_n \tag{3}$$

с элементами $\underline{\varphi}$, $\underline{\psi}$, ... снабжено локально выпуклой топологией прямой суммы [Kö 1*, стр. 217], индуцированной топологиями в $\mathscr{S}_n$. Пространство $\underline{\mathscr{S}}$ — модуль; далее в нем допустимо умножение $\otimes$, где n-я компонента произведения $\underline{\varphi} \otimes \underline{\psi}$ определяется равенством

$$(\underline{\varphi} \otimes \underline{\psi})_n \equiv \sum_{k=0}^{n} \varphi_{n-k} \otimes \psi_k \tag{4}$$

и обладает антилинейной инволюцией, определяемой формулой

$$(\underline{\varphi}^*)_n \equiv \varphi_n^*. \tag{5}$$

Поэтому $\underline{\mathscr{S}}$ — топологическая $*$-алгебра.

Далее вводится скалярное произведение

$$(\underline{\varphi}, \underline{\psi}) = \sum_{n, m} \mathfrak{W}_{n+m} (\varphi_n^* \otimes \psi_m) \tag{6}$$

и соответствующая метрика $\|\underline{\varphi}\| = \sqrt{(\underline{\varphi}, \underline{\varphi})}$. Из условий a1 и b1 следует, что эта метрика снабжает $\underline{\mathscr{S}}$ новой, более слабой топологией.

Пусть $\underline{\mathscr{S}}_0 = \{\underline{\varphi} | (\underline{\varphi}, \underline{\varphi}) = 0\}$; тогда пополнение факторпространства $\underline{\mathscr{S}}/\underline{\mathscr{S}}_0$ совпадает с пространством $\mathfrak{H}$ [Ne 1*, гл. IV].

(c) *Плотная область определения D и оператор поля A.* Область определения D состоит из всех конечных линейных комбинаций векторов $\Phi_n(\varphi_n)$. Оператор $A(\varphi)$ определяется линейным расширением по формуле

$$A(\varphi) \Phi_n(\varphi_n) = \Phi_{n+1}(\varphi \otimes \varphi_n). \tag{7}$$

Матричные элементы оператора $A(\varphi)$ задаются выражениями

$$(\Phi_m(\psi_m), A(\varphi) \Phi_n(\varphi_n)) = \mathfrak{W}_{m+n+1}(\psi_m^* \otimes \varphi \otimes \varphi_n) \tag{8}$$

и

$$(A(\bar{\varphi}) \Phi_m(\psi_m), \Phi_n(\varphi_n)) = \mathfrak{W}_{m+n+1}(\psi_m^* \otimes \varphi \otimes \varphi_n), \tag{9}$$

так что для $\Phi, \Psi \in D$

$$(\Psi, A(\varphi) \Phi) = (A(\bar{\varphi}) \Psi, \Phi). \tag{10}$$

Последнее равенство показывает, что радикал первоначального векторного пространства отображается в себя операцией $A(\varphi)$. Наконец, ясно, что $A(\varphi)D\subset D$ и в силу a1 $A(\varphi)\Phi$ сильно стремится к нулю при $\varphi\to 0$.

Поэтому здесь верна даже самая сильная форма первой аксиомы.

Замечания. 1. В остальной части этой книги мы будем придерживаться приведенного выше определения D.

2. $$\langle A^m,\ \psi_m\rangle\Phi_n(\varphi_n)=\Phi_{m+n}(\psi_m\otimes\varphi_n). \tag{11}$$

3. $\Phi_n(\varphi_n)\to 0$ в сильном смысле, если $\varphi_n\to 0$. (12)

Вектор Φ_n — векторнозначная обобщенная функция медленного роста, и поэтому она обладает Фурье-образом $\tilde{\Phi}_n$. Свойство носителя a3 ведет к тому, что $(\Psi,\ \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n))=0$ для $\Psi\in D$, если точки с $p_1+p_2+\ldots+p_n\in\mathfrak{F}_0$ не содержатся в $\operatorname{supp}\tilde{\varphi}_n$. Поэтому $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n)=0$ в этом случае.

(d) *Представление* $U(a,\ \Lambda)$. Линейное расширение соотношений

$$U(a,\ \Lambda)\Phi_n(\varphi_n)=\Phi_n(\varphi_{n\,(a,\ \Lambda)}) \tag{13}$$

ведет в силу a2 к унитарному преобразованию в $\mathfrak{H}$ и к представлению неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца. Простая выкладка показывает, что

$$U(a,\ \Lambda)\langle A^n,\ \varphi\rangle U^{-1}(a,\ \Lambda)=\langle A^n,\ \varphi_{(a,\ \Lambda)}\rangle. \tag{14}$$

Наконец, получаем

$$U(a,\ \Lambda)D=D. \tag{15}$$

Тем самым вторая аксиома удовлетворена.

(e) *Спектр оператора* P. Положим снова

$$T(a)=U(a,\ I)=e^{i(P,\ a)}=\int e^{i(p,\ a)}\,dE(p). \tag{16}$$

Тогда

$$T(a)\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n)=\tilde{\Phi}_n\left(\tilde{\varphi}_n e^{i((p_1+\ldots+p_n),\ a)}\right) \tag{17}$$

и для достаточно гладких $\chi(q)$

$$\int\chi(q)\,dE(q)\,\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})=\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n\cdot\chi(p_1+\ldots+p_n)). \tag{18}$$

Правая часть здесь исчезает, если $\operatorname{supp}\chi(q)\cap\mathfrak{S}_0=\varnothing$.

Отсюда следует, что спектр P полностью содержится в $\mathfrak{S}_0$. Тем самым выполнение одной части третьей аксиомы проверено.

(f) *Единственность вакуума.* Пусть $\chi(q)\in\mathscr{S}(\tilde{R}^4)$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{supp}\chi\cap\mathfrak{S}_0=\{q\,|\,q=0\}\tag{19}$$

и

$$\chi(0)=1.\tag{20}$$

Тогда проектор

$$E_0=\int\chi(q)\,dE(q)\tag{21}$$

проектирует $\mathfrak{H}$ на трансляционно-инвариантные состояния; $\Phi_0(\varphi_0)=\varphi_0\Omega$ дает нам один набор таких состояний, и нам надо показать, что других наборов не будет.

Согласно (14) — (17),

$$E_0D\subset D,\tag{22}$$

и поэтому

$$E_0\mathfrak{H}=\overline{E_0D\cap D},\tag{23}$$

где черта сверху означает замыкание. Поэтому нам достаточно посмотреть, нет ли трансляционно-инвариантных состояний в D. Такие состояния обязательно будут конечными комбинациями трансляционно-инвариантных состояний вида $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n)$, а эти последние — это состояния вида $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}_n\chi(p_1+\ldots+p_n))$. Но согласно (15), (16) и b2, для этих состояний

$$\|\tilde{\Phi}_n\|^2=|(\tilde{\Phi}_n,\ \Omega)|^2,\tag{24}$$

и потому они будут кратными вакууму Ω.

(g) *Локальность* тривиально выполняется согласно a4.

(h) *Полнота.* Эта аксиома утверждает, что линейное многообразие, натянутое на векторы $\Phi_n(\varphi_n)$ с $\varphi_n\in\mathscr{S}^{\otimes n}(R^4)$, плотно в $\mathfrak{H}$. Но $\mathscr{S}^{\otimes n}(R^4)$ плотно в $\mathscr{S}(R^{4n})$, а $\Phi_n(\varphi_n)$ непрерывно по φ_n. Тем самым рассматриваемое линейное многообразие плотно в D и последняя аксиома проверена.

Этим доказательство завершено.

5. Дополнительные замечания

Продолжим эту главу четырьмя дополнительными замечаниями.

А. Сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$.

Теорема [Ru 4; Bo 3]. *Пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно.*

Доказательство. Область D плотна в $\mathfrak{H}$ и порождается векторами $\Phi_n(\varphi_n)$, $\varphi_n \in \mathscr{S}_n = \mathscr{S}(R^{4n})$. Векторы $\Phi_n(\varphi_n)$ непрерывно зависят от φ_n. Каждое пространство $\mathscr{S}_n$ сепарабельно [CH 1*; Sw 1*, стр. 108]. Пусть φ_n^k, $k=1, 2, 3, \ldots$, будет плотной последовательностью в $\mathscr{S}_n$. Вектор $\Phi_n(\varphi_n)$ для произвольной $\varphi_n \in \mathscr{S}_n$ является пределом подпоследовательности $\Phi_n\left(\varphi_n^{k_s}\right)$. Поэтому $\mathfrak{H}$ — замкнутое линейное пространство, порождаемое счетной последовательностью $\Phi_n\left(\varphi_n^k\right)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, $k=1, 2, 3, \ldots$, и потому сепарабельно.

В. Полнота [Ru 4]. Мы определили полноту тем, что Ω цикличен относительно кольца полиномов от $A(\varphi)$, $\varphi \in \mathscr{S}_1$. Другим понятием, которым можно было бы охарактеризовать полноту теории, могла бы быть неприводимость в том смысле, „что каждый ограниченный оператор C, коммутирующий с $A(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}_1$, кратен единичному". В такой форме слова, стоящие в кавычках, не имеют точного смысла. Соответствующее осмысленное утверждение дается следующей теоремой.

Теорема (Рюэль). *Если ограниченный оператор C удовлетворяет для всех Ψ, $\Phi \in D$ и всех $\varphi \in \mathscr{S}_1$ соотношению*

$$(\Psi, CA(\varphi)\Phi) = (A(\bar{\varphi})\Psi, C\Phi), \tag{1}$$

то

$$C = c \cdot I. \tag{2}$$

Доказательство. (α) Ясно, что

$$c = (\Omega, C\Omega). \tag{3}$$

(β) Повторное применение (1) приводит к равенству

$$(\Psi, C\langle A^n, \varphi\rangle\Phi) = (\langle A^n, \varphi^*\rangle\Psi, C\Phi) \tag{4}$$

для $\varphi \in \mathscr{S}_1^{\otimes n}$, а в силу непрерывности обеих сторон (4) и тому факту, что $\mathscr{S}_1^{\otimes n}$ плотно в $\mathscr{S}_n$ и для $\varphi \in \mathscr{S}_n$.

(γ) Из (4) мы выводим

$$(\Omega, CT(a)\langle A^n, \varphi\rangle T(-a)\,\Omega) = (T(a)\langle A^n, \varphi^*\rangle T(-a)\,\Omega, C\Omega) \quad (5)$$

или

$$(\Omega, CT(a)\langle A^n, \varphi\rangle\,\Omega) = (\langle A^n, \varphi^*\rangle\,\Omega, T(-a)\,C\Omega). \quad (6)$$

Пусть Δ — борелевское множество в $\tilde{R}^4$ и

$$E(\Delta) = \int_\Delta dE(p);$$

тогда (6) дает

$$(\Omega, CE(\Delta)\langle A^n, \varphi\rangle\,\Omega) = (\langle A^n, \varphi^*\rangle\,\Omega, E(-\Delta)\,C\Omega). \quad (7)$$

Если выбрать в качестве Δ замкнутый верхний конус $\bar{V}_+$, то $E(\Delta) = I$ и $E(-\Delta) = E_0$ — проекция на вакуум Ω. Поэтому с учетом (3)

$$(\Omega, C\langle A^n, \varphi\rangle\,\Omega) = c\,(\Omega, \langle A^n, \varphi\rangle\,\Omega) \quad (8)$$

и согласно определению D

$$(\Omega, C\Phi) = c\,(\Omega, \Phi) \quad (9)$$

для любого $\Phi \in D$.

(δ) Наконец,

$$(\langle A^m, \psi\rangle\,\Omega, C\Phi) = (C^*\Omega, \langle A^m, \psi^*\rangle\,\Phi) = c\,(\langle A^m, \psi\rangle\,\Omega, \Phi) \quad (10)$$

и опять по определению D для любых $\Phi, \Psi \in D$

$$(\Psi, C\Phi) = c\,(\Psi, \Phi). \quad (11)$$

В силу плотности D отсюда следует (2).

C. Усеченные вакуумные средние*) (TVEV). Во многих отношениях желательно исключить симметричным образом вклад вакуумного состояния в вайтмановы обобщенные функции. Согласно Хаагу [Ha 3], этого можно достигнуть введе-

---

*) В оригинале: The truncated vacuum expectation values.— *Прим. перев.*

нием усеченных вакуумных средних. Они определяются рекуррентным образом соотношениями

$$\mathfrak{W}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\text{разб.}} \mathfrak{W}^T_{r_1}\left(x_{l_{1,1}}, \ldots, x_{l_{1,r_1}}\right) \times$$

$$\times \mathfrak{W}^T_{r_2}\left(x_{l_{2,1}}, \ldots, x_{l_{2,r_2}}\right) \ldots \mathfrak{W}^T_{r_s}\left(x_{l_{s,1}}, \ldots, x_{l_{s,r_s}}\right), \qquad (12)$$

где сумма в правой части распространяется на все разбиения индексов $1, \ldots, n$, а в каждой группе $l_{k,1}, \ldots, l_{k,r_k}$ индексы берутся в их естественном порядке. Для $n=1$ и для $n=2$ уравнения (12) гласят

$$\mathfrak{W}_1(x_1) = \mathfrak{W}^T_1(x_1) \qquad (13)$$

и

$$\mathfrak{W}_2(x_1, x_2) = \mathfrak{W}^T_1(x_1)\,\mathfrak{W}^T_1(x_2) + \mathfrak{W}^T_2(x_1, x_2). \qquad (14)$$

Ясно, что усеченные вакуумные средние удовлетворяют всем линейным ограничениям (a1-4). Согласно a2, они трансляционно инвариантны и позволяют определить

$$W^T_m(\xi_1, \ldots, \xi_m) \equiv \mathfrak{W}^T_{m+1}(x_0, \ldots, x_m), \quad \xi_k = x_k - x_{k-1}. \qquad (15)$$

При этом $W_0 = W^T_0 = \mathfrak{W}_1(x_0) = \mathfrak{W}^T_1(x_0)$ будет константой (равной во всех разумных случаях нулю).

Мы хотим рассмотреть носитель функций $\widetilde{W}^T_m(q_1, \ldots, q_m)$. Для этого докажем следующую теорему.

Теорема. *Носитель функций* $\widetilde{W}^T_m(q_1, \ldots, q_m)$ *содержится в* $q_k \in V_+$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Если $\mathfrak{S}_0 \subset \{q \mid q = 0\} \cup \overline{V}^{\mu_0}_+$, *то* $\operatorname{supp} \widetilde{W}^T_m(q_1, \ldots, q_m)$ *содержится в* $\left\{q_k \in \overline{V}^{\mu_0}_+,\ k = 1, 2, \ldots, m\right\}$.

Доказательство. (α) Как можно заранее предвидеть и как подтверждается индукцией по m из (12), носитель $\widetilde{W}^T_m(q_1, \ldots, q_m)$ содержится в $\mathfrak{S}_0^{\times m}$.

(β) Если функция $\chi(\xi)$ удовлетворяет условию $\operatorname{supp}\tilde{\chi} \cap \mathcal{S}_0 = \{q \mid q = 0\}$, то

$$\int \chi(a) \mathfrak{W}_{m+1}(x_0, \ldots, x_{l-1}, x_l + a, x_{l+1} + a, \ldots, x_m + a)\, d^4a =$$
$$= \int \chi(a) \mathfrak{W}_m(\xi_1, \ldots, \xi_l + a, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_m)\, d^4a =$$
$$= (\Omega, A(x_0) \ldots A(x_{l-1}) \int T(a) \chi(a)\, d^4a A(x_l) \ldots A(x_m)\Omega) =$$
$$= \tilde{\chi}(0)(\Omega, A(x_0) \ldots A(x_{l-1})\Omega)(\Omega, A(x_l) \ldots A(x_m)\Omega) =$$
$$= \tilde{\chi}(0) \mathfrak{W}_l(x_0, \ldots, x_{l-1}) \mathfrak{W}_{m+1-l}(x_l, \ldots, x_m). \quad (16)$$

Сделаем теперь индуктивное предположение, что для $l < m+1$

$$\int \chi(a) \mathfrak{W}_l^T(x_0, \ldots, x_k + a, \ldots, x_{l-1} + a)\, da = 0.$$

С помощью (14) это предположение легко проверить для $l = 2$. Затем подставим для $\mathfrak{W}_{m+1}$ в первом члене (16) усеченные вакуумные средние. Если не говорить о члене

$$\int \chi(a) \mathfrak{W}_{m+1}^T(x_0, \ldots, x_l + a, \ldots, x_m + a)\, d^4a, \quad (17)$$

то единственными членами из правой части (12), которые дадут при этом ненулевой вклад, будут члены вида

$$\tilde{\chi}(0) \sum_{(\text{разб})'} \mathfrak{W}_{r_1}^T(\ldots) \mathfrak{W}_{r_2}^T(\ldots) \ldots \mathfrak{W}_{r_s}^T(\ldots), \quad (18)$$

где (разб)$'$ означает суммирование по всем подразбиениям разбиения

$$(0, 1, \ldots, l-1)(l, l+1, \ldots, m).$$

Но такая сумма — это как раз

$$\tilde{\chi}(0) \mathfrak{W}_l(x_0, \ldots, x_{l-1}) \mathfrak{W}_{m+1-l}(x_l, \ldots, x_m), \quad (19)$$

так что из (16) (принимая, что $\tilde{\chi}(0) \neq 0$) получается

$$\int \chi(a) \mathfrak{W}_{m+1}^T(x_0, \ldots, x_l + a, \ldots, x_m + a)\, d^4a =$$
$$= \int \chi(a) W_m^T(\xi_1, \ldots, \xi_l + a, \ldots, \xi_m)\, d^4a = 0. \quad (20)$$

По индукции (20) выполняется для всех m, что вместе с предположениями относительно $\chi(\xi)$ доказывает теорему.

Тем самым получено следующее утверждение.

Следствие. *Если последовательность обобщенных функций* $\mathfrak{W}_n^T(x_1, \ldots, x_n)$ *удовлетворяет условиям* a1, 2, 4 *и, кроме того, функции*

$$W_m^T(\xi_1, \ldots, \xi_m) \equiv \mathfrak{W}_{m+1}^T(x_0, \ldots, x_m), \quad \xi_k = x_k - x_{k-1},$$

удовлетворяют условию

$$\operatorname{supp} \widetilde{W}_m^T(q_1, \ldots, q_m) \subset V_+^{\times\mu},$$

то обобщенные функции $\mathfrak{W}_n$, *определяемые* (12), *удовлетворяют* a1—4 *и* b2. *Если* $\mathfrak{W}_n$ *удовлетворяют* b1, *то они определяют теорию Вайтмана.*

Доказательство. Обобщенные функции (12) удовлетворяют (16) (равенству первого и последнего членов). Поэтому a3 выполнено.

Как легко заметить, из (16) вытекает также и b2. Мы видим, что введение усеченных вакуумных средних в определенном смысле линеаризует нелинейное условие b2. Однако условие b1, выраженное через усеченные вакуумные средние, выглядит непривычно и вызывает чувство неудовлетворенности.

D. Инфинитезимальные преобразования Лоренца и область *D*. Как мы видели в § 1C, гл. I, инфинитезимальные преобразования Лоренца действуют на основные функции следующим образом:

(α) *Инфинитезимальные сдвиги*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to -\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s^k}.$$

(β) *Инфинитезимальные однородные преобразования Лоренца*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \to -\sum_{s=1}^{n} \left(x_{sk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s^l} - x_{sl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_s^k} \right).$$

В любом случае φ отображается непрерывно [Sw 1*] в $\mathcal{S}_n$. Поскольку векторы $\Phi_n(\varphi)$, порождающие D, сильно непрерывны по φ, представления бесконечно малых преобразований определены на D и отображают D в себя. Поэтому их произведение можно свободно применять к любому вектору из $\mathring{D}$ [Gå 1].

6. Матричные элементы оператора трансляции [De 1; Ar 2; Jo 7]

Спектральное разложение

$$T(a) = \int e^{i(p,\, a)}\, dE(p) = e^{i(P,\, a)} \tag{1}$$

определяет спектральную меру E. Пусть B — банахово пространство непрерывных функций векторного переменного p с нормой $\sup|\chi(p)|$. Как мера E определяет непрерывный операторнозначный линейный функционал на B, который в свою очередь однозначно определяет меру E [RN 1*]. Мы используем для этого функционала одно из обозначений

$$\int \chi(p)\, dE(p) = \langle E,\, \chi\rangle = \chi(P). \tag{2}$$

Второе обозначение заимствовано из теории обобщенных функций, а последнее соответствует определению функции от оператора энергии-импульса. Непрерывность $\langle E,\, \chi\rangle$ следует из неравенства

$$\|\langle E,\, \chi\rangle\| = \|\chi(P)\| \leqslant \sup|\chi(p)|. \tag{3}$$

Для каждой пары состояний Φ, Ψ определяется ограниченная комплекснозначная мера

$$\langle m,\, \chi\rangle = (\Phi,\, \langle E,\, \chi\rangle\, \Psi), \tag{4}$$

удовлетворяющая условию

$$|\langle m,\, \chi\rangle| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|\Psi\| \sup|\chi(p)|. \tag{5}$$

Мы интересуемся этой мерой для состояний Φ и Ψ из D. Соберем свойства меры $\langle m,\, \chi\rangle$.

Первое свойство: $\langle m,\, \chi\rangle$ сильно ограничена.

Доказательство. Пусть $n = (n_0,\, n_1,\, n_2,\, n_3)$ — набор четырех натуральных чисел, а P^n — соответствующая степень оператора энергии-импульса. Оператор $\chi(P)P^n$, вообще говоря, будет неограничен, однако на D он определен, поскольку P отображает D в себя. Поэтому

$$|(\Phi, \chi(P) P^n \Psi)| = |\langle m \cdot p^n, \chi\rangle| \leqslant \|\Phi\| \cdot \|P^n \Psi\| \sup |\chi(p)|. \quad (6)$$

Значит, и мера, получающаяся из m умножением на p^n, остается ограниченной. Это доказывает первое свойство.

Второе свойство вытекает из того обстоятельства, что бесконечно малые однородные преобразования Лоренца P_{ik} отображают D в себя. Если мы будем писать $U(\Lambda) = U(0, \Lambda)$, то

$$U^{-1}(\Lambda) \chi(P) U(\Lambda) = \chi(\Lambda^{-1} P). \quad (7)$$

Поэтому

$$(U(\Lambda)\Phi, \langle E, \chi\rangle U(\Lambda)\Psi) = \langle m_\Lambda, \chi\rangle, \quad (8)$$

где

$$m_\Lambda(p) = m(\Lambda p). \quad (9)$$

Но левая часть (8) бесконечно дифференцируема на собственной ортохронной группе Лоренца. Отсюда мы получаем, что, например,

$$|\langle \partial_{kl} m, \chi\rangle| \leqslant \{\|P_{kl}\Psi\| \cdot \|\Phi\| + \|\Psi\| \cdot \|P_{kl}\Phi\|\} \sup |\chi(p)|, \quad (10)$$

где $\partial_{kl} = p_k(\partial/\partial p_l) - p_l(\partial/\partial p_k)$, а P_{kl} — соответствующее представление. Мы получаем, таким образом,

Второе свойство: применение произвольного полинома по ∂_{kl} к мере m опять приводит к ограниченной мере.

Теперь мы расщепим меру m на тривиальную часть с носителем в $\{p \mid p = 0\}$ и остаток m_1 с носителем в $\overline{V}_+^{\mu_0}$

$$(\Phi, \langle E, \chi\rangle \Psi) = (\Phi, \Omega)(\Omega, \Psi)\chi(0) + \langle m_1, \chi\rangle. \quad (11)$$

Для m_1 остаются справедливыми оба сформулированных свойства. Но для m_1 мы можем ввести теперь новые (регулярные на $\overline{V}_+^{\mu_0}$) координаты

$$(p_0, \vec{p}) = \left(\sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}\right). \quad (12)$$

Отметим это преобразование координат в наших обозначениях тем, что будем писать $\langle \tilde{m}_1, \tilde{\chi}\rangle$. Оператор ∂_{0k} имеет теперь вид

$$\partial_{0k} = -\omega D^k, \quad D^k = \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad \omega = p_0 = \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}. \quad (13)$$

Наконец, отметим еще, что ω^{-1} ограничена на $\operatorname{supp} \tilde{m}$. Все это приводит нас к следующей теореме.

Теорема [Jo7]. *Пусть* $\mathfrak{p}_1(\omega, \vec{p})$ *и* $\mathfrak{p}_2(\vec{D})$ — *произвольные полиномы от указанных переменных и пусть* n — *произвольное натуральное число, тогда*

$$\omega^{-n}\mathfrak{p}_1(\omega, \vec{p})\,\mathfrak{p}_2(\vec{D})\,\tilde{m}_1 \tag{14}$$

будет ограниченной мерой.

Следствие. Функция

$$t_1(\vec{a}) = (\Phi,\ T(\vec{a})\Psi) - (\Phi,\ \Omega)(\Omega,\ \Psi) \tag{15}$$

для $\Phi, \Psi \in D$ *и* $a \equiv (0, \vec{a})$ *сильно убывает при* $\vec{a} \to \infty$ *и принадлежит классу* C_∞. *Поэтому* $t_1 \in \mathcal{S}(R^3)$.

Доказательство следствия. Если обозначить $e_{\vec{a}}(\vec{p}) = e^{-i(\vec{p},\ \vec{a})}$, то функция (15) имеет вид

$$t_1(\vec{a}) = \langle \tilde{m},\ e_{\vec{a}} \rangle. \tag{16}$$

Из того, что $\tilde{m}$ сильно убывает, следует, что $t_1(\vec{a})$ относится к классу C_∞; из того, что $\vec{p}(D)\tilde{m}$ опять образует ограниченную меру, следует сильное убывание $t_1(\vec{a})$.

Это следствие приводит нас к тому, что вайтмановы обобщенные функции обладают свойством асимптотической факторизации *).

Свойство асимптотической факторизации.

$$\int\int \mathfrak{W}_{n+m}(x_1, \ldots, x_n,\ y_1 + \vec{a}, \ldots, y_m + \vec{a})\,\varphi(x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times \psi(y_1, \ldots, y_m)\,d\underline{x}\,d\underline{y} - \mathfrak{W}_n(\varphi)\,\mathfrak{W}_m(\psi) \to 0 \tag{17}$$

при $\vec{a} \to 0$ быстрее, чем любая степень $[\vec{a} \cdot \vec{a}]^{-1/2}$.

Замечания. 1. Нигде в этом параграфе мы не использовали локальности. Следующую теорему также можно доказать, не прибегая к локальности.

*) Английский термин звучит как «cluster property». Использованный ранее русский перевод: «свойство распадения на пучки» — представляется нам исключительно неудачным. — *Прим. перев.*

Теорема [Jo7]. *В смысле сходимости обобщенных функций для любого натурального N равенство*

$$\lim_{-(a,\,a)\to\infty} |(a,\ a)|^{N/2}[\mathfrak{W}_{n+m}(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1+a,\ \ldots,\ y_n+a) - \\ - \mathfrak{W}_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)\,\mathfrak{W}_m(y_1,\ \ldots,\ y_m)] = 0 \qquad (18)$$

выполняется равномерно в $(a,\ a) < 0$.

2. Для специально выбранных точек, а именно для вещественных точек голоморфности, тривиально получается и более сильный результат [Ar 2].

3. Интересные свойства асимптотической факторизации были выведены из локальности Рюэлем ([Ru 4], см. также гл. VI) и Араки, Хеппом и Рюэлем [Ar 8].

Глава IV

ФУНКЦИИ ВАЙТМАНА

1. Вступительные замечания

Оказывается, что обобщенные функции Вайтмана представляют собой граничные значения аналитических функций, так называемых функций Вайтмана. Последние служат чрезвычайно удобным инструментом для изучения теории. Почти все важные приложения общей теории к физике в той или иной степени используют фундаментальное свойство этих функций — их инвариантность по отношению к компоненте связности с единицей комплексной неоднородной группы Лоренца[1]). Этот факт составляет содержание глубокой теоремы Баргмана, Холла и Вайтмана (БХВ-теоремы) (§ 4, [Hal 1]). Доказательство БХВ-теоремы, которое мы приводим ниже, в своих основных чертах повторяет первоначальное доказательство авторов, однако оно заметно проще. Этот простой вариант дан Рюэлем и публикуется впервые.

БХВ-теоремой можно воспользоваться для разрешения проблем, связанных с четвертой аксиомой (аксиомой локальности, § 5), но тотчас же возникают новые проблемы, пока еще не решенные (§ 6). Мы заключим главу двумя интересными теоремами: первая принадлежит Глазеру и Стритеру [Str 1] и проливает новый свет на область регулярности вайтмановых функций, другая простая, но замечательная теорема дана Рее и Шлидером.

2. Аналитическое продолжение обобщенных функций $\Phi_n(x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathfrak{W}_n(x_1 \ldots x_n)$; функции Вайтмана

Мы переходим сейчас к наиболее характерным следствиям предположения о спектре (третья аксиома и свойство а3).

---

[1]) Это утверждение уже не вполне точно. Вещественный анализ, например, изложенные в гл. VI методы Д. Рюэля, оказался столь же плодотворным, как и комплексный анализ. См. также гл. III, примечание I.

Как мы уже знаем из гл. III, § 3, из этой аксиомы следует, что носитель векторнозначной обобщенной функции

$$\tilde{A}(p_1)\tilde{A}(p_2)\ldots\tilde{A}(p_n)\Omega=\tilde{\Phi}_n(p_1, p_2, \ldots, p_n) \qquad (1)$$

содержится в

$$q_k=p_k+p_{k+1}+\ldots+p_n\in\operatorname{supp} dE=\mathfrak{F}_0, \quad k=1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Из этого свойства носителя следует, что $\tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi})$ существует для гораздо более широкого класса основных функций $\tilde{\varphi}$, чем предполагалось первоначально. Самые важные основные функции такого рода — это экспоненты

$$\exp i[q_1z_1+q_2(z_2-z_1)+q_3(z_3-z_2)+\ldots+q_n(z_n-z_{n-1})]=$$
$$=\exp i\sum p_k\cdot z_k, \qquad (3)$$

где

$$\operatorname{Im} z_1\in V_+, \quad \operatorname{Im}(z_k-z_{k-1})\in V_+, \qquad k=2, 3, \ldots, n. \qquad (4)$$

Ясно, что эти экспоненты и их производные быстро убывают на носителе $\tilde{\Phi}_n$. Таким образом, функция

$$\Phi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\int\exp\left[i\sum p_k\cdot z_k\right]\tilde{\Phi}(p_1, \ldots, p_n)\,d\underline{p} \qquad (5)$$

существует и, более того, является голоморфной (векторнозначной) функцией переменных $(z_1, \ldots, z_n)$ [Die 1*].

Чтобы проанализировать связь между $\Phi_n(\underline{z})$ и $\Phi_n(\underline{x})$, запишем $z_k=x_k+iy_k$, $\eta_1=y_1$, $\eta_k=y_k-y_{k-1}$, $k=2, 3, \ldots, n$ и

$$\Phi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)=\Phi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n; \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n). \qquad (6)$$

Правая часть (6) понимается как обобщенная функция переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящая от параметров $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Все эти параметры находятся в V_+. Наконец, введем еще функцию

$$e_{\underline{\eta}}(p_1, \ldots, p_n)=\exp\left[-\sum_k\eta_k(p_k+p_{k+1}+\ldots+p_n)\right]. \qquad (7)$$

Теперь соотношение между $\Phi_n(\varphi)$ и $\Phi_n(\varphi; \underline{\eta})$ будет иметь вид

$$\Phi_n(\varphi, \underline{\eta}) = \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi} \cdot e_{\underline{\eta}}). \tag{8}$$

В силу свойств носителя (2) $\tilde{\varphi} \cdot e_{\underline{\eta}}$ является допустимой основной функцией и стремится к основной функции $\tilde{\varphi}$ при $\eta_k \to 0$ внутри V_+. Таким образом,

$$\lim_{\substack{\underline{\eta} \to 0 \\ \eta_k \in V_+}} \Phi_n(\varphi, \underline{\eta}) = \tilde{\Phi}_n(\tilde{\varphi}) = \Phi_n(\varphi). \tag{9}$$

В этом смысле

$$\lim_{\substack{\underline{\eta} \to 0 \\ \eta_k \in V_+}} \Phi_n(\underline{x}, \underline{\eta}) = \Phi_n(\underline{x}). \tag{10}$$

Итак, нами доказана

Теорема. *Обобщенная функция $\Phi_n(\underline{x})$ является граничным значением аналитической функции $\Phi_n(\underline{z})$, голоморфной в области*

$$\operatorname{Im} z_1 \in V_+, \quad \operatorname{Im}(z_k - z_{k-1}) \in V_+, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{11}$$

Следствие. *Для любого $\Psi \in \mathfrak{H}$ функция*

$$(\Psi, \Phi_n(\underline{z})) = F_n(\Psi)(\underline{z}) \tag{12}$$

голоморфна в области (11). *Последовательность аналитических функций $F_n(\Psi)$ определяет Ψ однозначно.*

Если в качестве Ψ выбрать состояние вакуума Ω, то получается следующая

Теорема. *Обобщенные функции Вайтмана $\mathfrak{W}_n(x_1, \ldots, x_n)$ являются граничными значениями аналитических функций $\mathfrak{W}_n(z_1, \ldots, z_n)$, голоморфных в области*

$$\mathfrak{S}_n = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid \operatorname{Im}(z_k - z_{k-1}) \in V_+\}. \tag{13}$$

Функции Вайтмана инвариантны относительно преобразований собственной ортохронной неоднородной группы Лоренца.

Тот факт, что условия (13) никак не ограничивают z_1, следует из трансляционной инвариантности $\mathfrak{W}_n(z_1, \ldots, z_n)$.

Следствие. *Обобщенная функция Вайтмана*

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \mathfrak{W}_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n), \quad \xi_k = x_k - x_{k-1},$$

является граничным значением аналитической функции $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, *голоморфной в* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T} = \{\zeta \mid \operatorname{Im} \zeta \in V_+\}$. $\mathfrak{T}$ *называется трубой будущего* *).

Скалярное произведение $(\Phi_n(\underline{z}), \Phi_m(\underline{w}))$ можно без труда выразить в терминах функций Вайтмана

$$(\Phi_n(\underline{z}), \Phi_m(\underline{w})) = \mathfrak{W}_{n+m}(\overleftarrow{\underline{z}}, \underline{w}), \tag{14}$$

где $\overleftarrow{\underline{z}}$ обозначает n-строку $(\bar{z}_n, \bar{z}_{n-1}, \ldots, \bar{z}_1)$.

Из (14) получается следующее свойство симметрии

$$\mathfrak{W}_n(\overleftarrow{\underline{z}}) = \overline{\mathfrak{W}_n(\underline{z})}, \tag{15}$$

которое вытекает также из равенства $\mathfrak{W}_n(\varphi^*) = \overline{\mathfrak{W}_n(\varphi)}$. Наконец, и для оператора трансляции $T(a)$ существует возможность аналитического продолжения, обсуждаемого в этом параграфе. Ясно, что $T(a)$ является граничным значением аналитической операторнозначной функции

$$T(\alpha) = \int e^{i(p,\,\alpha)}\, dE(p), \tag{16}$$

которая голоморфна при $\operatorname{Im} \alpha \in V_+$, т. е. $\alpha \in \mathfrak{T}$ [Uh 1]. Для $\lambda > 0$, как можно легко проверить,

$$\lim_{\lambda \to \infty} T(\lambda\alpha) = E_0, \tag{17}$$

E_0 есть проектор на $\langle\Omega\rangle$.

3. Комплексные преобразования Лоренца

Введенные в предыдущем параграфе аналитические функции $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ будут привлекать наше внимание на протяжении большей части последующего. Эти функции являются основным средством анализа линейных ограничений a1-a4 гл. III, § 3. Мы назвали их функциями Вайтмана. Их аргументы представляют собой упорядоченные наборы комплексных векторов ζ_k. Поэтому вполне уместно (а для дальнейшей

*) В оригинале forward tube.— *Прим. ред.*

нашей работы и просто необходимо) поговорить о комплексном лоренцевом пространстве R_c и соответствующем векторном пространстве $\mathfrak{B}_c$. Очевидно, в качестве элементов $R_c(\mathfrak{B}_c)$ выступают пары точек (векторов) $z = x + iy$ $(\zeta = \xi + i\eta)$ пространства $R^N(\mathfrak{B})$. Метрика порождается скалярным произведением

$$(\zeta_1, \zeta_2) \equiv (\xi_1, \xi_2) - (\eta_1, \eta_2) + i[(\xi_1, \eta_2) + (\eta_1, \xi_2)].$$

Это скалярное произведение симметрично, билинейно относительно умножения на комплексные числа, несингулярно и аналитично по обоим сомножителям.

Изометрические по отношению к скалярному произведению (ζ_1, ζ_2) преобразования $\mathfrak{B}$ образуют комплексную группу Лоренца $L(C)$. Элементы $L(C)$ мы будем обозначать через A, B. Разумеется, комплексная группа Лоренца по своей структуре ничем не отличается от комплексной ортогональной группы. Однако мы все же сохраним для нее название $L(C)$, чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем ее как комплексное расширение вещественной группы Лоренца.

Это по существу снова связано с тем фактом, что действительные точки (векторы) пространства $R_c(\mathfrak{B}_c)$ представляют собой величины, имеющие непосредственный физический смысл. Поэтому преобразования координат должны быть все время вещественными, а элементы $L(C)$ нужно рассматривать как отображения.

В ортонормальной системе координат A будет представлено комплексной матрицей. В зависимости от обстоятельств символом A мы будем обозначать иногда преобразование из $L(C)$, а иногда его матричное представление. Если G — метрический тензор, то A удовлетворяет равенству $A^T G A = G$, и обратно, выполнение этого равенства свидетельствует о том, что A — матрица комплексного преобразования Лоренца. Снова $\det A = \pm 1$ и снова имеется гомоморфизм $A \to \det A$, ядро которого мы обозначим $L_+(C)$. Но в отличие от вещественной группы Лоренца $L_+(C)$ уже связна. Поэтому она содержит в качестве вещественных преобразований и $L_+^\uparrow$, и $L_+^\downarrow$. Тот факт, что $L_+^\uparrow$ и $L_+^\downarrow$ могут быть связаны (непрерывной) кривой в $L_+(C)$, имеет, как мы увидим, физические следствия.

Разложение $L(C)$ по отношению к $L_+(C)$ можно изобразить следующим равенством:

$$L(C)=L_+(C)+TL_+(C), \tag{1}$$

где T — отражение времени.

Для доказательства фундаментальной теоремы, которой мы будем заниматься в следующем параграфе, нам понадобится аналитическая параметризация окрестности единицы в $L_+(C)$ и в $L_+^\uparrow$. Выберем параметризацию, предложенную Кэли [Wey 2*] и характеризуемую следующей теоремой.

Теорема. (a) *Пусть $R=-R^T$ — вещественная (комплексная) кососимметрическая матрица. Тогда $A=(I-GR)(I+GR)^{-1}$ (если она существует) есть матрица вещественного (комплексного) преобразования Лоренца.*

(b) *Пусть A — матрица комплексного (вещественного) преобразования Лоренца. Тогда $R=G(I-A)(I+A)^{-1}$ (если она существует) есть комплексная (вещественная) кососимметрическая матрица, $R^T=-R$.*

Доказательство. 1. Свойства вещественности матриц и преобразований тривиальны.

2. Чтобы доказать, что $A=(I-GR)(I+GR)^{-1}$ есть преобразование Лоренца, проделаем следующие вычисления:

$$A^TGA=(I-RG)^{-1}(I+RG)\,G\,(I-GR)(I+GR)^{-1}. \tag{2}$$

Поскольку $G^2=1$, это равно

$$(I-RG)^{-1}(I-RG)\,G\,(I+GR)(I+GR)^{-1}=G. \tag{3}$$

3. Для доказательства того, что $R=G(I-A)(I+A)^{-1}$ кососимметрична, запишем

$$R^T=(I+A^T)^{-1}(I-A^T)G=G(I+A^{-1})^{-1}GG(I-A^{-1})GG=$$
$$=G(A-I)(A+I)^{-1}=-R. \tag{4}$$

Замечания. (a) Если R достаточно мала (т. е. малы абсолютные значения ее матричных элементов), то $(I-GR)\times\times(I+GR)^{-1}$ существует.

(b) Если A достаточно близка к единице I, то $G(I-A)\times\times(I+A)^{-1}$ существует.

Поэтому матричные элементы R задают регулярную и аналитическую параметризацию группового ядра соответственно $L_+(C)$ и $L_+^\uparrow$. При этом вещественным значениям параметров отвечают вещественные преобразования Лоренца.

Наконец, нам понадобится еще понятие эквивалентности двух комплексных преобразований Лоренца по отношению к $L_+^\uparrow$ и характеристика соответствующих классов эквивалентности.

Определение. Комплексные преобразования Лоренца A и B называются эквивалентными по отношению к $L_+^\uparrow$, если существуют такие Λ_1, $\Lambda_2\in L_+^\uparrow$, что $A=\Lambda_1 B\Lambda_2$.

Теорема [Jo 6]. *Любое $A\in L_+(C)$ эквивалентно одной из следующих нормальных форм:*

1. *Для четной размерности*

(a) *Нормальный случай*

$$N=\begin{pmatrix} L(i\varphi) & & & & 0 \\ & K(i\chi_1) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & K(i\chi_k) \end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}|\varphi|\leqslant\pi;\ \varphi,\ \chi_1,\ \ldots,\ \chi_k\\ \textit{вещественны};\end{array}\tag{5}$$

(b) *Исключительный случай*

$$N=\sigma\begin{pmatrix} M(i\tau) & & & & & 0 \\ & K(i\chi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & K(i\chi_{k-1}) & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}\qquad \begin{array}{l}\tau\neq 0,\ \tau,\ \chi_1,\ \ldots,\ \chi_{k-1}\\ \textit{вещественны},\\ \sigma=\pm 1.\end{array}\tag{6}$$

2. *Для нечетной размерности*

(a) *Нормальный случай*

$$\text{(a1)}\quad N=\begin{pmatrix} L(i\varphi) & & & & 0\\ & K(i\chi_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & K(i\chi_k) & \\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\text{(a2}\alpha)\quad N=\begin{pmatrix} 1 & & & 0\\ & K(i\chi_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K(i\chi_k)\end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$\text{(a2}\beta)\quad N=\begin{pmatrix} 1 & & & 0\\ & K(i\chi_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K(i\chi_k)\end{pmatrix} R; \tag{9}$$

(b) *Исключительный случай*

$$\text{(b1)}\quad N=\begin{pmatrix} M(i\tau) & & & 0\\ & K(i\chi_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K(i\chi_{k-1})\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\text{(b2)}\quad N=\begin{pmatrix} M(i\tau) & & & 0\\ & K(i\chi_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & K(i\chi_{k-1})\end{pmatrix} R. \tag{11}$$

Доказательство теоремы и определения $M(i\tau)$, $L(i\varphi)$ и $K(i\chi)$ даны в приложении I. R есть диагональная матрица с диагональными элементами -1, -1, 1, ..., 1.

4. Теорема Баргмана, Холла и Вайтмана

В этом параграфе мы будем заниматься доказательством следующей фундаментальной теоремы.

БХВ-теорема [На 1]. *Если $L_+^\uparrow$-инвариантная функция $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ голоморфна в $\mathfrak{T}^n$, то она допускает однозначное, $L_+(C)$-инвариантное аналитическое продолжение в область*

$$\mathfrak{T}_n' = \bigcup_{A \in L_+(C)} A\mathfrak{T}^n.$$

Замечание. Мы будем называть $\mathfrak{T}_n'$ расширенной трубой *). Однако $\mathfrak{T}_n'$ не является трубой по переменным $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Доказательство. 1. Для краткости на протяжении этого доказательства мы будем обозначать $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ через ζ, $\mathfrak{T}^n$ через $\mathfrak{T}$ и W_n через W.

2. Функция $W_A(\zeta) \equiv W(A^{-1}\zeta)$ определена в $A\mathfrak{T}$, $W_A(\zeta)$ и $W(\zeta)$ определены одновременно в $\mathfrak{T} \cap A\mathfrak{T}$. Предположим, что $\mathfrak{T} \cap A\mathfrak{T} \neq \varnothing$. Если нам удастся доказать, что эти две функции совпадают в этой области, то тем самым мы покажем, во-первых, что $W_A(\zeta)$ является аналитическим продолжением $W(\zeta)$, и, во-вторых, что это продолжение не приводит к многозначностям внутри $\mathfrak{T}$.

3. Однако последний факт уже гарантирует однозначность продолжения посредством $W_A(\zeta)$ на всю область $\mathfrak{T}'$. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $W_{A_1}(\zeta) \neq W_{A_2}(\zeta)$ для какой-то $\zeta \in A_1\mathfrak{T} \cap A_2\mathfrak{T}$. Пусть $\zeta_1 = A_1^{-1}\zeta \in \mathfrak{T}$ и $\zeta_2 = A_2^{-1}\zeta \in \mathfrak{T}$. Тогда $W(\zeta_1) \neq W(\zeta_2)$, но $\zeta_2 = A_2^{-1}A_1\zeta_1$. Таким образом, $W_{A_1^{-1}A_2}(\zeta_1) \neq W(\zeta_1)$ и $\zeta_1 \in \mathfrak{T} \cap A_1^{-1}A_2\mathfrak{T}$, что противоречит утверждению пункта 2.

4. Далее область $\mathfrak{T} \cap A\mathfrak{T}$, являясь пересечением двух выпуклых областей, также выпукла, а следовательно, связна. Поэтому осталось доказать, что $W(\zeta)$ и $W_A(\zeta)$ совпадают в окрестности одной точки. Сверх того если $W(\zeta)$ и $W_A(\zeta)$ совпадают для некоторого лоренцева преобразования A_0, то они совпадают также, когда A пробегает некоторую окрестность A_0. В этом можно убедиться следующим образом.

*) В оригинале extended tube. — *Прим. ред.*

5. Фиксируем ζ в $\mathfrak{T} \cap A_0\mathfrak{T}$ и рассмотрим $W_A(\zeta)$ как функцию A. Введем локальные координаты соотношением $A = A_0 B$, где B выражена через параметры Кэли. Если B будет меняться в достаточно малой (связной) окрестности единицы, мы по-прежнему будем иметь $\zeta \in \mathfrak{T} \cap A\mathfrak{T}$. Можно выбрать настолько малую окрестность, что это будет справедливо не только для точки ζ, но и для всех точек некоторой ее окрестности. Из $L_+^\uparrow$-инвариантности следует, что $W_A(\zeta) = W_{A_0}(\zeta)$ для $B \in L_+^\uparrow$; $W_A(\zeta)$ представляет собой аналитическую функцию описывающих B параметров Кэли. При действительных значениях параметров эта функция постоянна (что соответствует $B \in L_+^\uparrow$). Поэтому [BM 1*] она постоянна и при комплексных значениях параметров. Таким образом, $W_A(\zeta) = W_{A_0}(\zeta)$ в некоторой окрестности ζ для всех элементов B из упомянутой окрестности единицы. Отсюда следует, что $W_A(\zeta) = W(\zeta)$ в $\mathfrak{T} \cap A\mathfrak{T}$.

6. Если в качестве A_0 выбрать единичный элемент, то получится, что $W_B(\zeta) = W(\zeta)$ для $B \in L_+(C)$ достаточно близких к единице.

7. В оставшейся части доказательства используется лемма. *Множество* $\mathfrak{B} = \{A \in L_+(C) \mid A\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T} \neq \varnothing\}$ *является связным.*

Чтобы не прерывать рассуждение, отложим доказательство леммы. Произвольную точку $A \in \mathfrak{B}$ можно соединить с единицей цепочкой пересекающихся окрестностей типа, описанных в пункте 5. Применение утверждения пункта 4 завершает доказательство теоремы.

Наконец можно перейти к

Доказательству леммы. (α) Из определения $\mathfrak{B}$ вытекает, что для любых $\Lambda_{1,2} \in L_+^\uparrow$ справедливо равенство $\Lambda_1 \mathfrak{B} \Lambda_2 = \mathfrak{B}$. Таким образом, $\mathfrak{B}$ представляет собой некоторый набор классов эквивалентности $L_+(C)$ по отношению к $L_+^\uparrow$. Поэтому нам нужно только определить, какие нормальные формы входят в $\mathfrak{B}$.

(β) Для этой цели обратимся к классификации § 3. $\mathfrak{B}$ содержит лишь следующие нормальные формы.

1. *Четная размерность*

(a) Нормальный случай: $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, остальные параметры произвольны;

(b) Исключительный случай: $\sigma = +1$, остальные параметры произвольны.

2. *Нечетная размерность*

(а) Нормальный случай: (a1) $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, остальные параметры произвольны;

(a2α): все возможности;

(b) Исключительный случай (b1): все возможности.

(γ) Для того чтобы проверить это утверждение, нужно только применить преобразования, отвечающие нормальным формам (в исключительных случаях для достаточно малых τ), к точкам специального вида

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_n = (i, 0 \ldots 0).$$

Результат преобразования $N\zeta$ лежит в $\mathfrak{T}$. Никакие другие варианты невозможны, поскольку все остальные нормальные формы приводят к появлению отрицательной нулевой компоненты у мнимой части $N\zeta_k$ (в исключительных случаях τ снова нужно выбрать достаточно малым).

(δ) Все нормальные формы в $\mathfrak{B}$ можно непрерывно соединить с I, устремив абсолютные значения параметров к нулю. Поэтому $\mathfrak{B}$ связно.

Итак, лемма, а стало быть, и теорема полностью доказаны.

По-видимому, полезно проиллюстрировать описанную в теореме ситуацию на двумерном случае. При этом для простоты мы будем пользоваться терминологией преобразования координат. В качестве координат вектора введем вместо (ζ^0, ζ^1) переменные $u = \zeta^0 + \zeta^1$ и $v = -(\zeta^0 - \zeta^1)^{-1}$. Тогда в $\mathfrak{T}$ попадут все точки с $\operatorname{Im} u > 0$, $\operatorname{Im} v > 0$. В комплексной плоскости вектор в $\mathfrak{T}$ изобразится парой точек в верхней полуплоскости. Нормальная форма комплексного преобразования Лоренца сведется теперь к одновременному умножению u и v на одно и то же число с единичным модулем: $\tilde{u} = e^{i\varphi} u$, $\tilde{v} = e^{i\varphi} v$. В комплексной плоскости это отвечает повороту u и v на угол φ.

Точка в $\mathfrak{T}^n$ изображается набором $2n$ точек в верхней полуплоскости (рис. 1); точка в $\mathfrak{T}'_n$ — набором $2n$ точек в открытой полуплоскости, граница которой проходит через начало координат (рис. 2).

Заметим, что $\mathfrak{T}'_n$ содержит вещественные точки, удовлетворяющие условиям $\sigma u_l > 0$ и $\sigma v_l > 0$ для всех l и для $\sigma = \pm 1$.

Аналитически точки $\mathfrak{T}'_n$ можно охарактеризовать тем их свойством, что выпуклое множество, порожденное $(u_1, \ldots, v_n)$, не содержит начало координат: если $\lambda_k \geqslant 0$ и $\sum \lambda_k = 1$, то $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{2n} v_n \neq 0$. Точки вне $\mathfrak{T}'_n$ обладают тем свойством, что начало координат содержится в их выпуклой оболочке. Это, очевидно, позволяет построить функцию, голо-

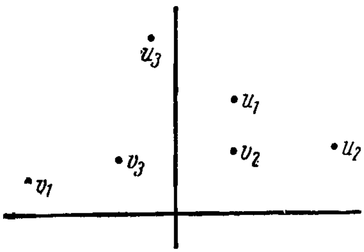

Рис. 1. Точка в $\mathfrak{T}^3$.

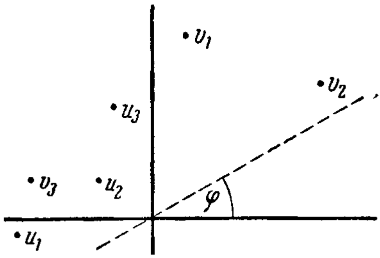

Рис. 2. Точка в $\mathfrak{T}'_3$.

морфную в $\mathfrak{T}'_n$ и сингулярную в произвольно заданной точке вне $\mathfrak{T}'_n$. Поэтому $\mathfrak{T}'_n$ является областью голоморфности [Be 1*].

5. Приложение БХВ-теоремы к локальности

Теорема последнего параграфа допускает немедленное приложение (подготовленное даже обозначениями) к вайтмановым функциям: $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ имеет однозначное аналитическое продолжение в $\mathfrak{T}'_n$ и инвариантна относительно $L_+(C)$. Соответственно

$$\mathfrak{W}_{n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = W_n(z_1 - z_0, \ldots, z_n - z_{n-1}) \quad (1)$$

имеет однозначное аналитическое продолжение в область $\mathfrak{S}'_{n+1}$, определенную условием

$$\mathfrak{S}'_{n+1} \equiv \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \,|\, ((z_1 - z_0), \ldots, (z_n - z_{n-1})) \in \mathfrak{T}'_n\}.$$

В результате продолжения получается функция $\mathfrak{W}_n$, инвариантная относительно компоненты связности с единицей комплексной неоднородной группы Лоренца, образованной комплексными трансляциями и $L_+(C)$.

Любопытно, что в отличие от $\mathfrak{T}_n$ и $\mathfrak{S}_{n+1}$, $\mathfrak{T}'_n$ и $\mathfrak{S}'_{n+1}$ содержат действительные точки, характеризуемые следующей теоремой.

Теорема [Jo 3]. *Вещественные точки* $(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ *) *принадлежат* $\mathfrak{T}'_n$ *тогда и только тогда, когда выпуклый конус* $\mathfrak{k}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$, *порожденный* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, *содержит лишь пространственно-подобные точки.*

Замечание. Выпуклый конус $\mathfrak{k}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ определяется как множество точек $\lambda_1\rho_1 + \lambda_2\rho_2 + \ldots + \lambda_n\rho_n$, где $\lambda_k \geqslant 0$ и $\sum \lambda_k > 0$.

Доказательство. (а) *Необходимость.* Условие $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in \mathfrak{T}'_n$ предполагает, что существует такое $A \in L_+(C)$, что $\rho_k = A\zeta_k$ и $\zeta_k \in \mathfrak{T}$. Если теперь $\lambda_k \geqslant 0$, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\rho_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\rho_k\right) = (\zeta, \zeta), \tag{2}$$

где $\zeta = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\zeta_k \in \mathfrak{T}$, поскольку $\mathfrak{T}$ выпукла. Записав, как обычно $\zeta = \xi + i\eta$, мы заключаем, что $(\zeta, \zeta) = (\xi, \xi) - (\eta, \eta) + 2i(\xi, \eta)$, и требуем, чтобы это число было вещественным. Отсюда вытекает, что $(\xi, \eta) = 0$, а поскольку $\eta \in V_+$, то $(\xi, \xi) < 0$, так что $(\zeta, \zeta) < 0$.

(b) *Достаточность.* Обозначим через $\bar{\mathfrak{k}}$, $\bar{V}_\pm$ замкнутые конусы, отвечающие $\mathfrak{k}$ и $V_\pm$. Так как $\bar{\mathfrak{k}} \cap \bar{V}_+ = \bar{\mathfrak{k}} \cap \bar{V}_- = \{0\}$, то существует касательная к V_+ плоскость $(\alpha, \xi) = 0$, отделяющая V_+ от $\mathfrak{k}$ и V_-. Существует также касательная плоскость $(\beta, \xi) = 0$, отделяющая V_- от $\mathfrak{k}$ и V_+. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$(\alpha, \xi) > 0 \quad \text{для} \quad \xi \in V_+,$$
$$(\alpha, \xi) < 0 \quad \text{для} \quad \xi \in \mathfrak{k} \quad \text{или} \quad \xi \in V_-$$

и

$$(\beta, \xi) > 0 \quad \text{для} \quad \xi \in V_-,$$
$$(\beta, \xi) < 0 \quad \text{для} \quad \xi \in \mathfrak{k} \quad \text{или} \quad \xi \in V_+.$$

Здесь α и β — векторы с нулевым квадратом, $\alpha \in N_+$ и $\beta \in N_-$. Сверх того, они линейно независимы, откуда следует $(\alpha, \beta) \neq 0$, а фактически и $(\alpha, \beta) < 0$. Нормируем α и β так, чтобы $(\alpha, \beta) = -2$. В подходящей системе координат α и β имеют вид

$$\alpha = (1, 1, 0, \ldots, 0), \quad \beta = (-1, 1, 0, \ldots, 0).$$

*) Эти точки называются точками Йоста. — *Прим. ред.*

Условия $(\alpha, \xi) < 0$ и $(\beta, \xi) < 0$, справедливые для $\xi \in \mathfrak{k}$, принимают форму $-\xi^0 - \xi^1 < 0$ и $\xi^0 - \xi^1 < 0$, поэтому $\xi^1 > |\xi^0|$. Комплексное преобразование Лоренца

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & i & & & \\ i & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \in L_+(C) \qquad (3)$$

отображает теперь, как легко проверить, $\xi \in \mathfrak{k}$ в $A\xi = \zeta \in \mathfrak{T}$. Так как $\rho_k \in \mathfrak{k}$, сразу же находим, что $A\rho_k = \zeta_k \in \mathfrak{T}$ или $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in A^{-1}\mathfrak{T}^n$, что и завершает доказательство.

Вещественные точки расширенной трубы $\mathfrak{T}_n'$ мы будем систематически обозначать через $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$. В этих точках функция $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ голоморфна. Аналогично символ $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ будет обозначать вещественные точки в $\mathfrak{S}_{n+1}'$, а следовательно, точки голоморфности $\mathfrak{M}_{n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Они связаны соотношением

$$(r_1 - r_0, r_2 - r_1, \ldots, r_n - r_{n-1}) = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n). \qquad (4)$$

Из только что доказанной теоремы вытекает простое

Следствие. *Точки $r_0, r_1, \ldots, r_n$ вполне пространственно-подобны: $(r_k - r_l)^2 < 0$ для произвольного $k > l$.*

Доказательство. Ясно, что $r_k - r_l = \rho_k + \rho_{k+1} + \ldots$ $\ldots + \rho_{l-1} \in \mathfrak{k}(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ и поэтому $(r_k - r_l)^2 < 0$.

Точки $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ помогают нам глубже понять локальность. Очевидно, точки r образуют открытое вещественное множество, и на этом множестве обобщенные функции Вайтмана являются голоморфными функциями. Но локальность предполагает симметрию функции $\mathfrak{M}_n(x_1, \ldots, x_n)$ относительно перестановок векторных аргументов в вполне пространственно-подобных точках. Но поскольку $\mathfrak{M}_n(r_1, \ldots, r_n)$ является обычной функцией, она останется в силу локальности обычной функцией и во всех точках $(r_{k_1}, \ldots, r_{k_n})$, где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, n$. Однако равенство

$$\mathfrak{M}_n(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \mathfrak{M}_n(r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots, r_{k_n}) \qquad (5)$$

допускает аналитическое продолжение, и мы получаем соотношение между вайтмановыми функциями

$$\mathfrak{W}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mathfrak{W}_n(z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}). \tag{6}$$

Это соотношение справедливо в наименьшей области, содержащей $\mathfrak{S}_n'$ и инвариантной относительно перестановок $(z_1, \ldots, z_n)$. Обозначим эту новую *расширенную область* через $\mathfrak{S}_n^P$. Область $\mathfrak{S}_n^P$ является объединением всех областей, получаемых из $\mathfrak{S}_n'$ всевозможными перестановками переменных $z_1, \ldots, z_n$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Вайтмановские функции $\mathfrak{W}_n(z_1, \ldots, z_n)$ локальной теории поля голоморфны в области $\mathfrak{S}_n^P$ и симметричны по переменным $z_1, \ldots, z_n$.*

Теперь наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Если $\mathfrak{W}_{n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ обладает всеми свойствами функций Вайтмана, кроме свойств, вытекающих из локальности, и если сверх того $\mathfrak{W}_{n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ симметрична по $z_0, z_1, \ldots, z_n$, то она удовлетворяет и требованиям локальности.*

Доказательство. Согласно предположениям,

$$\mathfrak{W}_{n+1}(z_0, z_1, \ldots, z_n) = W_n(z_1 - z_0, \ldots, z_n - z_{n-1}),$$

а $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ голоморфна в $\mathfrak{T}^n$ и $L_+^\uparrow$-инвариантна. Кроме того, $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ стремится к обобщенной функции $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при стремлении мнимых частей $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ к нулю внутри V_+. Тогда БХВ-теорема позволяет аналитически продолжить W_n в $\mathfrak{T}_n'$ и $\mathfrak{W}_{n+1}$ в $\mathfrak{S}_{n+1}'$, а симметричность функции $\mathfrak{W}_{n+1}$ позволяет аналитически продолжить ее в $\mathfrak{S}_{n+1}^P$. Нам нужно теперь показать, что из этих предположений о $\mathfrak{W}_{n+1}(z_0, \ldots, z_n)$ следует, что граничная обобщенная функция

$$\mathfrak{W}_{n+1}(x_0, \ldots, x_n) \equiv W_n(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1})$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{W}_{n+1}(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n) = \\ = \mathfrak{W}_{n+1}(x_0, \ldots, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_n) \quad (7)$$

при условии, что $(x_k - x_{k-1})^2 < 0$.

Доказательство не составляет труда. Транспозиции z_{k-1} и z_k соответствует линейное преобразование

$$\zeta_{k-1} \to \zeta_{k-1} + \zeta_k, \quad \zeta_k \to -\zeta_k, \quad \zeta_{k+1} \to \zeta_{k+1} + \zeta_k,$$

причем все остальные ζ_l не изменяются. Поэтому в области голоморфности, т. е. в $\mathfrak{T}^n$, имеем

$$W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n) = \\ = W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1} + \zeta_k, -\zeta_k, \zeta_k + \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n).$$

Теперь можно утверждать, что это уравнение останется справедливым и в том случае, если выбрать все $\zeta_l \in \mathfrak{T}$ для $l \neq k$, а ζ_k вещественным и пространственно-подобным: $\zeta_k = \xi_k$, $(\xi_k, \xi_k) < 0$. Это верно, если точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \ldots, \zeta_n)$ лежит в $\mathfrak{T}'_n$, потому что тогда она будет точкой голоморфности. Чтобы показать это, нам нужно найти преобразование $A \in L_+(C)$, переводящее упомянутую точку в $\mathfrak{T}^n$. Совсем нетрудно показать, что такое преобразование существует. Не теряя общности, можно считать, что $\xi = (0, \xi', 0, \ldots, 0)$, причем $\xi' > 0$. Если к первым двум компонентам применить преобразование

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & i\sin\varphi \\ i\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где $\sin\varphi > 0$, то в результате получится вектор из $\mathfrak{T}$. Но, с другой стороны, φ можно выбрать настолько малым, что ни один из векторов ξ_l, $l \neq k$ не выйдет из $\mathfrak{T}$. Таким образом, мы установили равенство

$$W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \xi_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n) = \\ = W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1} + \xi_k, -\xi_k, \zeta_{k+1} + \xi_k, \ldots, \zeta_n) \quad (8)$$

для $\zeta_l \in \mathfrak{T}$, $l \neq k$ и $(\xi_k, \xi_k) < 0$. Однако и левая и правая его части стремятся к соответствующим обобщенным функциям Вайтмана при $\operatorname{Im}\zeta_l \to 0$ в $\mathfrak{T}$, и мы получаем

$$W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) = \\ = W_n(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1} + \xi_k, -\xi_k, \xi_{k+1} + \xi_k, \ldots, \xi_n). \quad (9)$$

В терминах же функций $\mathfrak{M}_{n+1}$ это уравнение имеет вид

$$\mathfrak{M}_{n+1}(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n) = \\ = \mathfrak{M}_{n+1}(x_0, \ldots, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_n) \quad (10).$$

и справедливо при единственном ограничении $(x_k - x_{k-1})^2 < 0$. Доказательство завершено.

Замечания. (a) Таким образом, локальность совершенно эквивалентна (если выполняются все другие аксиомы) симметрии функции $\mathfrak{M}_n(z_1, \ldots, z_n)$. Любое условие, обеспечивающее симметрию, обеспечивает тем самым и полную локальность.

(b) Единственное свойство $W_n(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, которое мы использовали в процессе доказательства, помимо голоморфности в $\mathfrak{T}^n$ и $L_+^{\uparrow}$-инвариантности, — это существование граничной обобщенной функции $W_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ при $\zeta_k \to \xi_k$ в $\mathfrak{T}$.

В качестве приложения изложенной теоремы и для иллюстрации силы аксиом Вайтмана обсудим теперь следующую теорему

Теорема. *Пусть скалярное поле $A(x)$ удовлетворяет всем аксиомам Вайтмана, кроме аксиомы локальности. Пусть также*

$$[A(x), A(y)] = 0$$

для x в произвольной окрестности нуля и для y в произвольной окрестности пространственно-подобного вектора a. Тогда оно удовлетворяет полной аксиоме локальности *).

Доказательство. Пусть $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Рассмотрим следующую действительную точку голоморфности $(r_1^l, r_2^l, \ldots, r_n^l)$, $r_k^l = (k-l)a$. Согласно предположению,

$$\mathfrak{M}_n(r_1^l, r_2^l, \ldots, r_l^l, r_{l+1}^l, \ldots, r_n^l) = \\ = \mathfrak{M}_n(r_1^l, r_2^l, \ldots, r_{l+1}^l, r_l^l, \ldots, r_n^l). \quad (11)$$

*) При условии $[A(x), B(y)] = 0$, $(x-y)^2 < -l^2$ эта теорема доказана Д. Я. Петриной [5] и В. С. Владимировым [3] даже без предположения лоренцевой инвариантиости. — *Прим. ред.*

Это же равенство выполняется в некоторой окрестности выбранной точки. Аналитически продолжая это соотношение, получаем

$$\mathfrak{M}_n(z_1, \ldots, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_n) = \mathfrak{M}_n(z_1, \ldots, z_{l+1}, z_l, \ldots, z_n). \tag{12}$$

Поскольку l произвольно, должна иметься полная симметрия $\mathfrak{M}_n$ для каждого n, что и требовалось доказать.

Замечание. Эта теорема отчетливо демонстрирует тесную взаимную связь лоренц-инвариантности, условия положительности энергии и локальности. Она показывает также, что в определенном теоремой смысле у нас есть только две возможности — либо строго локальная, либо везде нелокальная теория.

6. Проблема, связанная с полной симметрией $\mathfrak{M}_n(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Дополнительные замечания о БХВ-теореме

А. Проблема, связанная с полной симметрией $\mathfrak{M}_n$. Как мы уже видели, полная симметрия $\mathfrak{M}_n$ выражает в элегантной и нетривиальной форме локальность соответствующей теории поля. Однако она тотчас же выдвигает новые, труднопреодолимые проблемы. Мы знаем, что из симметрии вытекает голоморфность $\mathfrak{M}_n$ в $\mathfrak{S}_n^P$. В то время как совершенно тривиально, что $\mathfrak{S}_n$ является областью голоморфности, и очень похоже, что это так и для $\mathfrak{S}_n'$ при $n > 2$, для $\mathfrak{S}_n^P$ это уже неверно [1]).

Чтобы пояснить сделанное утверждение, мы должны вспомнить простой, но фундаментальный факт, отличающий теорию функций многих комплексных переменных от теории функций одного комплексного переменного. В последней любая область является областью голоморфности. Это означает, что всегда найдется функция, голоморфная в данной области, но не допускающая голоморфного продолжения за ее пределы. В случае же нескольких комплексных переменных это далеко

[1]) Случай $n = 2$ тривиален. Для $n = 3$ это было впервые показано Челленом и Вайтманом [Kä 2], для $n = 4$ — Челленом и Толлом [Kä 4], для $n = 5$ — Маногараном [Mh 1], Меллером [Mö 1] и Лузатто [Lu 1].

не так. Если, к примеру, $\mathfrak{D}$ — однолистная область в многомерном комплексном числовом пространстве, то может случиться, что любая функция, голоморфная и однозначная в $\mathfrak{D}$, с необходимостью голоморфна и в некоторых точках за пределами $\mathfrak{D}$. Если же этого нет, иначе говоря, если найдутся функции, голоморфные в $\mathfrak{D}$, но сингулярные в произвольно заданной точке вне $\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D}$ называется областью голоморфности [Be 1*, Wi 5]. В противном случае $\mathfrak{D}$ содержится в некоторой наименьшей области голоморфности, называемой оболочкой голоморфности $\mathscr{H}(\mathfrak{D})$. Из трудностей, которые могут возникнуть в процессе аналитического расширения, т. е. в процессе построения по данной $\mathfrak{D}$ ее оболочки голоморфности $\mathscr{H}(\mathfrak{D})$, отметим, что $\mathscr{H}(\mathfrak{D})$ однолистной области может не быть однолистной.

По-видимому, стоит проиллюстрировать эти факты простой, но полезной теоремой об аналитическом расширении. Рассмотрим s-мерное комплексное аффинное пространство координат $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Запишем $z_l = x_l + iy_l$, где x_l и y_l вещественны.

Определение. Пусть $\mathfrak{B}$ — (связная) область в s-мерном вещественном пространстве с координатами $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Область

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{B}) = \{(z_1, \ldots, z_s) \,|\, (y_1, \ldots, y_s) \in \mathfrak{B}\}$$

называется *трубой* с базисом $\mathfrak{B}$.

Пример. Наша область $\mathfrak{T}$ — это труба с базисом V_+. Аналогично $\mathfrak{T}^n$ — труба с базисом $V_+^{\times n}$. Однако $\mathfrak{T}'_n$ уже не труба.

Теорема. *Оболочкой голоморфности трубы $\mathfrak{T}(\mathfrak{B})$ является ее выпуклая оболочка или, что эквивалентно, труба $\mathfrak{T}(\overline{\mathfrak{B}})$, где $\overline{\mathfrak{B}}$ — выпуклая оболочка $\mathfrak{B}$.*

Доказательство см., например, в [Wi 5].

Замечание. В комплексном аффинном пространстве любое выпуклое множество, имеющее внутреннюю точку, есть область голоморфности. Это вытекает из следующих двух фактов:

(1) Выпуклое множество есть пересечение полупространств.

(2) Полупространство есть область голоморфности.

Последнее утверждение нетрудно понять. Аффинным преобразованием (которое, очевидно, переводит область голоморфности в область голоморфности) полупространство может быть приведено к виду $\{y_1 < 0\}$. Но функция $(z_1 - a)^{-1}$, где $\operatorname{Im} a \geqslant 0$, при должном выборе a становится сингулярной в произвольно заданной точке вне нашего (открытого) полупространства.

Чтобы продемонстрировать возможности метода аналитического расширения даже в рамках сравнительно простой теоремы о трубе, докажем теорему, относящуюся к случаю двух измерений.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{T}_+$ — труба будущего в двух измерениях, а $\mathfrak{T}_- = PT\mathfrak{T}_+$ — труба прошлого. Пусть далее $\mathfrak{B}$ — область, содержащая $\mathfrak{T}_+^n \cup \mathfrak{T}_-^n$ и $L_+^\uparrow$-инвариантную окрестность вещественных точек в $\mathfrak{T}_n'$. Тогда оболочкой голоморфности $\mathfrak{B}$ является $\mathfrak{T}_n'$.*

Замечание. Это — простой вариант замечательной теоремы Р. Ф. Стритера, относящейся к случаю четырех измерений (см. следующий параграф).

Доказательство. В переменных § 4, $\mathfrak{T}_+^n$ определяется условиями $\operatorname{Im} u_k > 0$, $\operatorname{Im} v_k > 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$; $\mathfrak{T}_-^n$ — условиями $\operatorname{Im} u_k < 0$, $\operatorname{Im} v_k < 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, а вещественные точки регулярности — условиями $\sigma u_k > 0$, $\sigma v_k > 0$, где $\sigma^2 = 1$. Наконец, $L_+^\uparrow$ содержит преобразования $\tilde{u}_k = \lambda u_k$, $\tilde{v}_k = \lambda v_k$, где $\lambda > 0$. Очевидно, мы столкнулись с ситуацией, где все зависит только от углов. Напрашивается переход к логарифмам

$$\mu_k = \log u_k, \quad \nu_k = \log v_k.$$

В этих новых переменных $\mathfrak{T}_+^n$ и $\mathfrak{T}_-^n$ принимают вид

$C_+^n = \{0 < \operatorname{Im} \mu_k, \operatorname{Im} \nu_k < \pi\}$ и $C_-^n = \{-\pi < \operatorname{Im} \mu_k, \operatorname{Im} \nu_k < 0\}$,

а вещественные точки в $\mathfrak{T}_n'$ описываются условиями $\operatorname{Im} \mu_k = \operatorname{Im} \nu_k = 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$ или $\operatorname{Im} \mu_k = \operatorname{Im} \nu_k = \pi$. Ясно, что мы имеем дело с трубой, базис которой состоит из двух кубов C_+^n и C_-^n, соединенных вещественными точками $\mathfrak{T}_n'$, и их повторением с периодом 2π (см. рис. 3). Оболочка голоморфности представляет собой трубу над выпуклым множеством, порожденным этими кубами, иначе говоря, объединение кубов $\{\varphi < \operatorname{Im} \mu_k, \operatorname{Im} \nu_k < \varphi + \pi\}$ с произвольным φ. Если теперь вернуться к старым переменным, то мы получим расширенную область $\mathfrak{T}'_n$.

Обратимся теперь снова к проблеме, поставленной в заглавии параграфа. Мы уже говорили, что $\mathfrak{S}_n^P$ не является областью голоморфности для $n > 2$. Сразу же возникает задача аналитического расширения. Для $n = 3$ эта задача была решена

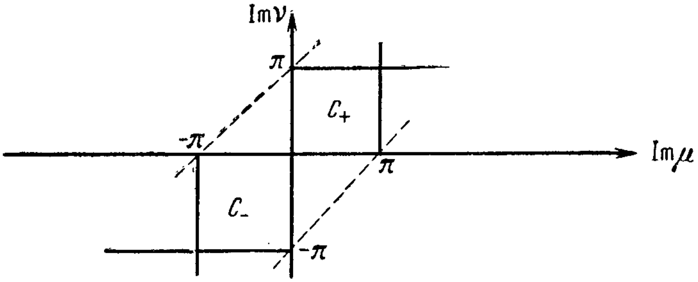

Рис. 3.

Челленом и Вайтманом [Kä 2]. Их результаты можно получить и более простым способом (существенно пользуясь подходящим обобщением теоремы о трубе) [Ru 3]. Для бóльших значений n проблема голоморфного расширения (в более чем двух измерениях) представляется очень трудной.

Это вызывает вопрос, следует ли придавать такое большое значение знанию „истинной“ области голоморфности $\mathfrak{M}_n(z_1, \ldots, z_n)$. Слово „истинный“ поставлено в кавычки по той причине, что мы хотим напомнить читателю и себе, что до сих пор мы имели дело лишь с линейными ограничениями на функции Вайтмана. До тех пор пока нелинейные ограничения игнорируются, можно вообразить себе довольно, впрочем, маловероятную ситуацию, что они расширяют область голоморфности, выводя ее за пределы $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n^P)$. Однако дальнейшие ограничения спектральности на оператор трансляции $T(a)$ не повлияют (в рамках „линейной программы“) на аналитическое поведение $\mathfrak{M}_n(z_1, \ldots, z_n)$.

Первоначальная идея заключалась в том, чтобы рассматривать $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n^P)$ как промежуточный этап для построения подходящего представления, выражающего все линейные ограничения, и в дальнейшем воспользоваться этим общим представлением для обсуждения нелинейных ограничений. Помимо сложностей, связанных с построением $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n^P)$ для $n > 3$ (которые, впрочем, делают проблему еще более привлекательной), довольно трудно надеяться, что для вайтмановых функций в результате получится, скажем, простое интегральное представление, поскольку $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n^P)$ вряд ли окажется аналитическим полиэдром, единственной областью, для которой можно записать интеграл Бергмана — Вейля. Известная оболочка голоморфности в случае $n = 3$, к которой можно применить представление Бергмана — Вейля, пока еще мало что дала нам для понимания ситуации (как нам кажется).

Тем не менее аналитическое расширение в очень близкой форме входит в теорию поля в другом месте — в применении к преобразованиям Фурье полностью запаздывающих функций, т. е. величинам, более тесно связанным с экспериментом. Значительный интерес представляет аналитическое поведение выводимых таким способом матричных элементов оператора рассеяния S. Поэтому развивать подходящие методы построения оболочек голоморфности важно отнюдь не только в связи с проблемой вайтмановых функций (гл. VII, § 3).

Отметим в связи с этим еще небольшую элегантную теорему, доказанную Рюэлем [Ru 1], которая вместе с замечанием Штайнмана показывает, что в случае $n > 3$ и более чем двух измерений $\mathfrak{S}_n^P$ не является областью голоморфности.

Теорема. *Все вполне пространственно-подобные точки содержатся в* $\mathscr{H}(\mathfrak{S}_n^P)$.

Доказательство. Достаточно рассматривать как комплексные переменные лишь временные компоненты, пространственные же компоненты можно считать вещественными. Поступая так, мы, разумеется, выделяем систему координат, обозначим $\operatorname{Im} z^0$ через t. Точка $(z_1, \ldots, z_n)$ попадает в $\mathfrak{S}_n^P$, если $t_k \neq t_l$ для $k \neq l$. Это очевидно, так как расположение точек z в соответствии с возрастающими значениями t приводит к точке в $\mathfrak{T}^{(n-1)}$. Поэтому сингулярности могут возникать лишь при совпадающих значениях двух t. Рассмотрим теперь точку $(z_1, \ldots, z_n)$, вещественная часть которой $(x_1, \ldots, x_n)$ вполне пространственно-подобна: $(x_k - x_l)^2 < 0$ при $k \neq l$. Будем классифицировать опасные точки по числу совпадающих значений t: для m-точки имеется в точности m

(независимых) уравнений $t_k = t_l$. Покажем теперь с помощью индукции, что ни для какого m сингулярности не возникают.

Случай $m = 1$. Снова предположим, что координаты z_l упорядочены по возрастающим значениям t. В таком случае разности координат $\zeta_l = z_l - z_{l-1}$ попадают в $\mathfrak{T}$ за одним только исключением: когда соответствующая разность вещественна и пространственно-подобна. Но как мы видели в предыдущем параграфе, такая точка попадает в $\mathfrak{T}'_{(n-1)}$ и, следовательно, является точкой голоморфности.

Индуктивное предположение. Пусть никаких сингулярностей нет для $m < m_0$, $m_0 > 1$. Пусть $(z_1, \ldots, z_n)$ является m_0-точкой, и пусть z_l опять упорядочены согласно росту значений t. Пусть ζ_k и ζ_l — две вещественные разности координат. Пусть, наконец, $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ и $\tau_l = t_l - t_{l-1}$ — мнимые части временных компонент этих разностей в окрестности нашей m_0-точки. Согласно определению m-точки, существует некоторая окрестность многообразия $\tau_k = \tau_l = 0$ (и, значит, нашей m_0-точки), скажем, $|\tau_k| < \varepsilon$ и $|\tau_l| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, где нет других m_0-точек. В этой окрестности $\tau_k = \tau_l = 0$ является единственной возможной сингулярностью. Однако такая особенность устранима (теорема „о ребре" [Be 1*]).

Нам осталось еще показать, что мы и в самом деле произвели аналитическое расширение. Для этого мы построим вполне пространственно-подобную точку, не содержащуюся в $\mathfrak{S}_n^P$. Рассмотрим в трехмерном случае точки с координатами $(1-\varepsilon, 1, 1)$, $(1-\varepsilon, -1, -1)$, $(\varepsilon-1, 1, -1)$, $(\varepsilon-1, -1, 1)$, где $\varepsilon > 0$ и мало́. Эти точки вполне пространственно-подобны и никакой перестановкой не приводятся к r-точке.

В. Дополнительные замечания о БХВ-теореме. БХВ-теорема § 4 является результатом только первой половины примерно дюжины лемм, доказанных в очень важной работе Холла и Вайтмана [Hal 1]. В дальнейшем нам понадобится лишь эта теорема. Однако для других исследований чрезвычайно важны и все остальные результаты работы. По этой причине весьма желательно по крайней мере описать общие идеи, изложенные Холлом и Вайтманом, что мы и собираемся сделать в этой части параграфа. При этом мы в какой-то степени будем следовать двум недавним статьям К. Хеппа [Hep 2, 3].

Последующее обсуждение ограничим случаем четырех измерений. Это ограничение несущественно и сделано исключительно из соображений удобства.

Функция Вайтмана W_n есть $L_+(C)$-инвариантная функция, голоморфная в $\mathfrak{T}'_n$. Вполне естественно желание записать ее в декларативно инвариантном виде, именно, как функцию простых инвариантов, подобных скалярным произведениям $z_{ik}=(\zeta_i, \zeta_k)$. Такое представление, однако, нетривиально.

Чтобы составить себе некоторое представление о проблеме, вспомним сначала аналогичную, но более простую ситуацию в классической теории инвариантов. Здесь приходится иметь дело с $L_+(C)$-инвариантными полиномами n векторных переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Первая главная теорема теории инвариантов утверждает, что каждый такой полином является полиномом по следующим инвариантам:

$$z_{ik}=z_{ki}=(\zeta_i, \zeta_k), \qquad i \leqslant k,$$
$$\Delta_{iklm}=\det\|\zeta_i, \zeta_k, \zeta_l, \zeta_m\|, \qquad i<k<l<m.$$

Детерминанты появляются, естественно, лишь, когда $n \geqslant 4$. Полное число инвариантов равно

$$r=\binom{n+1}{2}+\binom{n}{4}.$$

Обозначим инварианты через $(I_1, \ldots, I_r)\equiv I$. Они принимают значения в $\mathbf{C}^r$. Снова вместо $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ будем писать ζ, а вместо $\mathfrak{T}'_n$ просто $\mathfrak{T}'$. Чрезвычайно важно для нас отображение $\pi: \zeta \to I$. В этих обозначениях содержание первой главной теоремы можно сформулировать так: каждому $L_+(C)$-инвариантному полиному $\mathfrak{p}$ переменных ζ соответствует такой полином $\hat{\mathfrak{p}}$ переменных I, что

$$\mathfrak{p}(\zeta)=(\hat{\mathfrak{p}}\circ\pi)(\zeta). \tag{1}$$

Однако полином $\hat{\mathfrak{p}}$ определяется однозначно лишь в простейших случаях, именно, если $n<4$. Во всех других случаях инварианты $I_1(\zeta), \ldots, I_r(\zeta)$ не независимы, а удовлетворяют определенным полиномиального вида тождествам. Эти тождества нетрудно найти. Во-первых, ранг матрицы $\|z_{ik}\|$ не превосходит четырех, т. е. все $l \times l$ миноры, где $l > 4$, равны нулю [1]). Во-вторых,

$$\Delta_{l_1 l_2 l_3 l_4} \Delta_{k_1 k_2 k_3 k_4} + \det \| z_{ik} \| = 0.\ ^{1})$$

Таким образом, $\hat{\mathfrak{p}}$ определены только по модулю идеала J, порожденного конечным числом полиномов, выражающих зависимость инвариантов I.

Можно описать ситуацию другим способом: значения $I(\zeta)$ пробегают не все C^r, они лежат в алгебраическом многообразии, определенном равенством $J = 0$. Два полинома $\hat{\mathfrak{p}}_1$ и $\hat{\mathfrak{p}}_2$ отвечают одному и тому же полиному $\mathfrak{p}$, заданному формулой (1), если их разность исчезает на $\{J = 0\}$. Но каждый конкретный полином, удовлетворяющий (1), допускает продолжение вне $\{J = 0\}$, во все пространство C^r.

Теперь наша цель состоит в том, чтобы доказать существование представления вида (1) для функций Вайтмана. Это оказывается возможным, но возникающие при этом трудности весьма значительны.

Первый шаг в такой программе относится к отображению π. Первый результат прост: отображение $\pi : \zeta \to I$ есть отображение *на* $\{J = 0\}$. Каждой точке I^0 на $\{J = 0\}$ соответствует такой вектор ζ^0, что $I^0 = \pi(\zeta^0)$.

Второй результат значительно глубже. Начнем с тривиального замечания, что топология на $\{J = 0\}$ индуцируется окрестностями в C^r. Второй результат утверждает, что для каждой $I^0 \in \{J = 0\}$ найдется точка $\zeta^0 \in \pi^{-1}(I^0)$, такая, что каждая окрестность ζ^0 отображается на некоторую окрестность I^0 (лемма 3 в [Hal 1]). Однако, вообще говоря, не каждая точка в $\pi^{-1}(I^0)$ обладает этим свойством.

Следующий шаг связан с важным свойством $\mathfrak{T}'$: $\mathfrak{T}'$ насыщено по отношению к π

$$\mathfrak{T}' = \pi^{-1} \circ \pi(\mathfrak{T}'). \tag{2}$$

Простым следствием уже перечисленных результатов является тот факт, что существует функция $\hat{W}$, непрерывная на $\pi(\mathfrak{T}')$ и удовлетворяющая равенству

$$W(\zeta) = (\hat{W} \circ \pi)(\zeta) \tag{3}$$

[1]) Мы не утверждаем, что эти тождества независимы так же, как и следующее за ними соотношение.

Функция $\widehat{W}$ голоморфна в любой регулярной точке $\{J=0\}$, т. е. в любой точке $\{J=0\}$, в которой алгебраическое многообразие $\{J=0\}$ локально представляет собой алгебраическую поверхность.

Представление (3) и упомянутые свойства $\widehat{W}$ составляют главный результат статьи [Hal 1]. Он, однако, заметно слабее, чем соответствующий результат для инвариантных полиномов. Как мы видели, полиномы допускают продолжение за пределы $\{J=0\}$. Согласно Хеппу, похожий результат можно получить и для $\widehat{W}$ по крайней мере локально [Hep 2,3]. Для каждой точки $I^\circ \in \pi(\mathfrak{T}')$ можно найти такую окрестность $N \in \mathbf{C}^r$ и такую функцию $\check{W}'$, голоморфную в N, что в $N \cap \pi(\mathfrak{T}')$ функция $\widehat{W}$ является следом $\check{W}'$. Другими словами, $\widehat{W}$ сильно голоморфна в $\pi(\mathfrak{T}')$.

Вышеприведенный результат следует из несколько более общей теоремы.

Теорема (БХВ, Хепп). *Пусть D есть π-насыщенная область изменения переменных ζ. Тогда любая $L_+(C)$-инвариантная и голоморфная в D функция F векторов ζ допускает представление*

$$F(\zeta) = (\widehat{F} \circ \pi)(\zeta), \tag{4}$$

где $\widehat{F}$ сильно голоморфна на $\pi(D)$.

Представляет интерес и следующая теорема.

Теорема (Хепп). *Пусть D π-насыщена и $\pi(D) = G \cap \{J=0\}$, где G в $\mathbf{C}^r$ голоморфно выпукла. Тогда любая функция F, голоморфная в D, допускает представление* (4), *причем функция $\widehat{F}$ является следом голоморфной в G функции F'.*

Замечания. 1. Разумеется, вообще говоря, функция F' не определяется однозначно, поскольку две разные функции могут совпадать на $\pi(D)$.

2. Если в предыдущей теореме заменить $L_+(C)$ на $L(C)$, то она останется верной при условии, что число инвариантов ограничено числом C_n^2 скалярных произведений $z_{ik} = (\zeta_i, \zeta_k)$.

3. В инвариантных относительно отражения теориях вайтмановские функции $L(C)$-инвариантны. При этих условиях предыдущая теорема открывает возможность рассматривать

вайтмановские функции, зависящие от n четырехмерных векторов, как голоморфные $L^n(C)$-инвариантные функции n-векторов в n-мерном пространстве Минковского ($L^n(C)$ — это n-мерная группа Лоренца). Однако такая возможность существует лишь в том случае, если расширенная труба n-векторов в n-мерном пространстве Минковского голоморфно выпукла. Это справедливо для $n \leqslant 4$ и неизвестно для $n > 4$.

Заключим этот параграф несколькими комментариями.

(a) Вычисление оболочки голоморфности W_2, проведенное Челленом и Вайтманом [Kä 2] и Рюэлем [Ru 3], использует результаты Холла и Вайтмана.

(b) Анализ границы $\mathfrak{T}'_n$ содержится в [Kä 2, 5, 6; Jo 4; Wi 6; Mh 1].

(c) Геометрия комплексного n-мерного пространства Минковского проанализирована в [Lo 1].

(d) Мы абсолютно ничего не сказали здесь о распространении изложенной теории на ковариантные тензорные поля. В этой области важные результаты были получены Араки и Хеппом [Hep 2, 3].

7. Теорема Глазера и Стритера

Как уже упоминалось, В. Глазер и Р. Ф. Стритер [Str 1] открыли следующую теорему, проливающую новый свет на расширенную область $\mathfrak{T}'_n$ Баргмана, Холла и Вайтмана.

Теорема (Глазер и Стритер). *Пусть $\mathfrak{B}$ есть L_+-инвариантная область, содержащая $\mathfrak{T}^n$ и вещественные точки J в $\mathfrak{T}'_n$. Тогда оболочка голоморфности $\mathscr{H}(\mathfrak{B}) \supset \mathfrak{T}'_n$.*

Доказательство[1]. Снова опустим индекс n и будем писать ζ вместо $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Пусть $f(\zeta)$ — функция, голоморфная в $\mathfrak{B}$. Нам нужно показать, что она допускает однозначное аналитическое продолжение в $\mathfrak{T}'$. Ограничимся случаем четырех измерений.

1. Помимо $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{B}$ содержится также $\mathfrak{T}_- = \{\zeta \mid -\zeta \in \mathfrak{T}\}$, так как $\mathfrak{T}_- = R\mathfrak{T}$, где R — отражение в L_+, например, представленное диагональной матрицей с диагональными элементами

[1] Автор признателен д-ру Эпштейну, который указал, что первоначальное доказательство, предложенное автором, было ошибочным.

$(-1, -1, +1, +1)$. Поэтому $f(\zeta)$ голоморфна и в $\mathfrak{T}$, и в $\mathfrak{T}_-$. Поговорим сначала о функции $F(\chi;\ \zeta) = f(L(\chi)\zeta)$, где $\zeta \in \mathfrak{B}$, а $L(\chi)$ — произвольное (комплексное) лоренцево вращение в $(0,\ 1)$-плоскости

$$L(\chi) \equiv \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi & & 0 \\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта функция $F(\chi;\ \zeta)$ при фиксированной ζ определена и голоморфна в „трубах“ вокруг $\operatorname{Im}\chi = m\pi$, $m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$. Конкретнее, ее область определения дается соотношением $L(\chi)\zeta \in \mathfrak{T}$, а в силу L_+-инвариантности $\mathfrak{B}$, это накладывает ограничения лишь на мнимую часть χ.

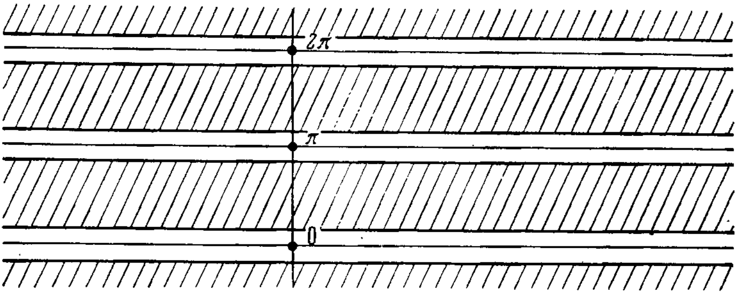

Рис. 4. Область определения $F(\chi;\ \zeta)$. В заштрихованных областях функция не определена.

2. Существуют даже такие точки $\zeta_0 \in \mathfrak{B}$, а стало быть, и их окрестности, в которых $F(\chi;\ \zeta_0)$ голоморфна при всех значениях χ. Таковы, например, точки в J, у которых первая компонента больше абсолютной величины нулевой компоненты $(\rho^0,\ \rho^1,\ \rho^2,\ \rho^3)$, где $\rho^1 > |\rho^0|$. Действительно, эти точки переводятся преобразованием $L(i\varphi)$ либо в точки $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_-$, либо при $\varphi = \pi$ в J (заметим, что J инвариантно относительно L_+). Обозначим такие точки через ρ_0. То же самое верно для преобразования $L(\chi)$ при произвольном χ. Поскольку кривая $L(\varphi)\rho_0$ компактна, можно найти также такую окрестность ρ_0, что при действии преобразования $L(i\varphi)$ она остается в $\mathfrak{B}$.

То же самое справедливо при применении $L(\chi)$ с произвольным χ.

3. Таким образом, возникает следующая типичная ситуация: при определенных значениях ζ функция $F(\chi, \zeta)$ голоморфна для всех χ, например, в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$, но при изменении ζ появляется некоторое множество точек, в которых $F(\chi, \zeta)$ уже не определена. Если бы это множество (в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$) содержалось в некотором компактном множестве (для подходящих значений ζ), то мы легко смогли бы доопределить $F(\chi; \zeta)$ для всех χ (при заданных подходящих значениях ζ). Однако, поскольку это не так, нам приходится искать обходный путь.

4. Для этой цели обсудим функцию f в точках

$$L(\chi)\,[\alpha(\chi)\,\zeta + (1 - \alpha(\chi))\,\rho_0],$$

где на χ, начиная с этого момента и далее, наложено ограничение $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$, а ζ находится в $\mathfrak{T}$. Получившуюся функцию переменных χ и ζ назовем $F_1(\chi; \zeta)$. Иначе говоря,

$$F_1(\chi;\ \zeta) = f\,(L(\chi)\,[\alpha(\chi)\,\zeta + (1 - \alpha(\chi))\,\rho_0]\,).$$

Функцию $\alpha(\chi)$ нужно выбрать таким образом, чтобы она отображала $\chi = \infty$ в точку $\alpha = 0$, $\chi = 0$ — в точку $\alpha = 1$, а полосу $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$ — в подходящую окрестность сегмента $[0, 1]$. Простым примером такой функции является, скажем, $\alpha(\chi) = A\,[A + \chi^2]^{-1}$, причем $A > 0$ превосходит $(2\pi)^2$ и достаточно велико.

Нижняя граница для A определяется с помощью следующих соображений. Так как $\mathfrak{T}$ выпукла и имеет ρ_0 в качестве граничной точки, то $\alpha\zeta + (1 - \alpha)\,\rho_0 \in \mathfrak{T}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$. Поскольку $\rho_0 \in \mathfrak{B}$, $\alpha\zeta + (1 - \alpha)\,\rho_0 \in \mathfrak{B}$, если α изменяется в достаточно малой окрестности $[0, 1]$, то функцию $\alpha(\chi)$ следует выбирать так, чтобы полоса $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$ отображалась как раз в эту окрестность. В нашем конкретном примере нижняя граница A_0 значений A находится именно таким способом.

5. Очевидно, что функция $F_1(\chi, \zeta)$ определена и голоморфна в окрестности $\operatorname{Im}\chi = 0$, π или 2π. Однако для достаточно больших $|\operatorname{Re}\chi|$ точка $\alpha(\chi)\,\zeta + (1 - \alpha(\chi))\,\rho_0$ близка к ρ_0, и $F_1(\chi; \zeta)$ будет голоморфной для $0 \leqslant \operatorname{Im}\chi \leqslant 2\pi$. Следовательно, область определения $F_1(\chi, \zeta)$ обладает изобра-

женной на рис. 5 структурой. Таким образом, мы достигли своей цели: точки, где $F_1(\chi, \zeta)$ остается неопределенной, оказались внутри компактного множества.

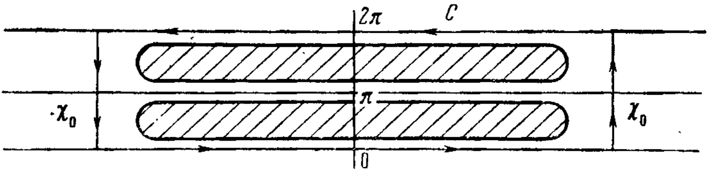

Рис. 5. Область определения $F_1(\chi, \zeta)$.

Все, что было сказано об одной точке ζ, тотчас обобщается на множество значений ζ при условии, что это множество содержится в компакте $\mathfrak{C}_0 \subset \mathfrak{T}$. Можно даже добавить к $\mathfrak{C}_0$ замкнутую окрестность ρ_0 и предположить, что такое объединение $\mathfrak{C}$ связно.

6. Теперь уже мы можем доопределить $F_1(\chi, \zeta)$ при $0 \leqslant \operatorname{Im} \chi \leqslant 2\pi$ и произвольных $\zeta \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{T}$. Фактически, если $A > A_0$, функция $F_1(\chi, \zeta)$ будет всегда голоморфной вдоль границ прямоугольника, образованного линиями $\operatorname{Re} \chi = \pm \chi_0$ и $\operatorname{Im} \chi = 0,\ 2\pi$. Поэтому интеграл Коши

$$\tilde{F}_1(\chi, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{F_1(\chi', \zeta)}{\chi' - \chi}\, d\chi' \tag{1}$$

определяет аналитическую функцию переменных χ и ζ, совпадающую с нашей старой функцией, если ζ достаточно близки к ρ_0. Итак, $\tilde{F}_1(\chi, \zeta)$ голоморфна во всем прямоугольнике и при аналитическом продолжении равна $F_1(\chi, \zeta)$ во всех точках области определения.

7. При формальном переходе к пределу $A \to \infty$ не происходит ничего особенно поучительного. Поэтому опустим детали и сразу же перейдем к заключению, что функция $F(\chi, \zeta) = \underline{f}(L(\chi)\zeta)$ допускает аналитическое продолжение во все точки $\operatorname{Im} \chi = 0,\ 2\pi$; $\zeta \in \mathfrak{T}$ и что это продолжение однозначно.

8. Все сказанное выше можно тотчас же обобщить на функцию

$$F(\Lambda L(\chi);\ \zeta) = f(\Lambda L(\chi)\zeta), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow,$$

определенную в $L_+(C)\times\mathfrak{T}$. При фиксированных Λ и ζ эта функция также допускает единственное аналитическое продолжение для произвольных точек χ. Особенно важен случай $\chi = i\varphi$, где φ вещественно.

Фактически, функция $F(\Lambda L(i\varphi);\ \zeta)$ однозначна в $L_+(C)\times\mathfrak{T}$ (где бы она ни была определена). Это так, поскольку из

$$\Lambda' L(i\varphi') = \Lambda L(i\varphi)$$

вытекает, что $\Lambda' = \Lambda$ и $L(i\varphi') = L(i\varphi)$.

9. Теперь нам нужно несколько изменить обозначения. Впредь пусть $L_1(\chi) \equiv L(\chi)$, и пусть $L_k(\chi)$ — соответствующее Лоренцево вращение в $(0, k)$ 2-плоскости. Пусть далее $K_{lm}(\varphi)$, $0 < l < m$, — однопараметрическая подгруппа $L_+(C)$, отвечающая вращениям лишь в (l, m) 2-плоскости. Отметим формулу

$$K_{lm}(i\chi) = L_m(i\pi/2)\, L_l(\chi)\, L_m(-i\pi/2).$$

10. Обсудим теперь функцию

$$F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(\chi);\ \zeta) \equiv F(\Lambda L_1(i\varphi);\ L_3(\chi)\zeta).$$

С помощью небольшого и вполне очевидного изменения, описанного в пунктах 1—7 метода (необходим другой выбор точки ρ_0), эта функция продолжается к произвольным значениям χ, и в результате мы получаем частный случай функции

$$F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2);\ \zeta),$$

которая снова однозначна в $L_+(C)\times\mathfrak{T}$.

Последующее продолжение тривиально (χ вещественно)

$$F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2) L_2(\chi);\ \zeta) \equiv F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2);\ L_2(\chi)\zeta).$$

Несколько менее тривиален тот факт, что такое продолжение однозначно в $L_+(C)\times\mathfrak{T}$. Пусть

$$\Lambda' L_1(i\varphi') L_3(i\pi/2) L_2(\chi') = \Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2) L_2(\chi).$$

Тогда

$$\Lambda^{-1}\Lambda' = L_1(i\varphi) K_{23}(i(\chi - \chi')) L_1(-i\varphi') =$$
$$= L_1(i(\varphi - \varphi')) K_{23}(i(\chi - \chi')),$$

а это возможно (для $\Lambda,\ \Lambda' \in L_+^\uparrow$) только, если $\chi' = \chi$ и $L(i\varphi') = L(i\varphi)$.

11. Далее

$$F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2) L_2(\chi) L_3(\chi');\ \zeta) \equiv$$
$$\equiv F(\Lambda L_1(i\varphi) L_3(i\pi/2) L_2(\chi);\ L_3(\chi')\zeta)$$

продолжается на $\chi' = -i\pi/2$, и мы получаем, что функция $F(\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi);\ \zeta)$ однозначна в $L_+(C) \times \mathfrak{T}$.

Последнее тривиальное продолжение приводит к $(\Lambda_1 \in L_+^\uparrow)$

$$F(\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi) \Lambda_1;\ \zeta) \equiv F(\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi);\ \Lambda_1\zeta).$$

Такое продолжение снова однозначно, если мы ограничимся *неотрицательными* значениями χ, поскольку из равенства

$$\Lambda' L_1(i\varphi') K_{23}(i\chi') \Lambda_1' = \Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi) \Lambda_1$$

следует, что $L(i\varphi') = L(i\varphi)$ и $\chi = \chi'$ (единственность нормальной формы, приложение I, § 3). Нетрудно установить, что

$$\Lambda^{-1}\Lambda' L_2(2i\varphi) K_{23}(2i\chi) = L_2(2i\varphi) K_{23}(2i\chi) \Lambda^{-1}\Lambda'.$$

Отсюда следует $[\Lambda^{-1}\Lambda',\ L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi)] = 0$ и, наконец, $\Lambda\Lambda_1 = \Lambda'\Lambda_1'$. Поэтому можно записать

$$F(\Lambda' L_1(i\varphi') K_{23}(i\chi');\ \Lambda_1'\zeta) = F(\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi) \Lambda^{-1}\Lambda';\ \Lambda_1'\zeta) =$$
$$= F(\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi);\ \Lambda_1\zeta).$$

Однако даже для $\chi \geqslant 0$ $\{\Lambda L_1(i\varphi) K_{23}(i\chi) \Lambda_1\}$ пробегает всю $L_+(C)$, кроме точек множества низшей размерности. Поэтому посредством продолжения по непрерывности в эти исключительные точки мы получаем единственную аналитическую функцию $F(A;\ \zeta)$, определенную на $A \in L_+(C)$, $\zeta \in \mathfrak{T}$. Эта функция является расширением $f(A\zeta)$.

12. Из последнего утверждения следует, что функция

$$\Phi(B) \equiv F(AB^{-1};\ B\zeta)$$

локально постоянна на $L_+(C)$. Область ее определения представляет собой $\{B \mid B\zeta \in \mathfrak{T},\ \zeta \in \mathfrak{T}\}$. Так как эта область связна [Hal 1; Jo 3], $\Phi(B)$ глобально постоянна и допускает однозначное аналитическое продолжение в $L_+(C)$. Таким образом, мы вправе записать

$$F(A;\ \zeta) = f_1(A\zeta),$$

расширив $f(\zeta)$ на $\mathfrak{T}'$.

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Интересное обобщение состоит в том, что можно отказаться от требования L_+-инвариантности, если $\mathfrak{B}$ содержит $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_-$ и J.

Теорема (Глазер и Стритер). *Если $\mathfrak{B}$ — область, содержащая $\mathfrak{T}^n$, $\mathfrak{T}^n_-$ и J, то ее оболочка голоморфности содержит $\mathfrak{T}'_n$.*

Доказательство этой более сильной модификации теоремы Стритера основано на теореме „острие клина“ *) [Bm 1; Dy 1; Ta 1; Ep 1], из применения которой к возникшей ситуации следует, что оболочка голоморфности области $\mathfrak{B}$ содержит вместе с каждой точкой $\rho \in J$ некоторую ее комплексную окрестность, причем размеры этой окрестности универсальны и не зависят от $\mathfrak{B}$ (от $\mathfrak{B}$ требуется лишь, чтобы $\mathfrak{T}^n$, $\mathfrak{T}^n_-$ и J содержались в $\mathfrak{B}$). Это приводит нас к рассмотрению множества всех функций, голоморфных в $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_-$ и J. Все такие функции будут (согласно вышесказанному) голоморфными в некоторой универсальной окрестности J. Однако, поскольку множества $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_-$ и J (мы снова опустили индекс n) L_+-инвариантны, множество функций, голоморфных в объединении $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_-$ и J, также L_+-инвариантно. То же самое относится к пересечению областей голоморфности этих функций. Но пересечение областей голоморфности содержит упомянутую окрестность J, а поэтому и L_+-инвариантную область $\mathfrak{B}_0$, удовлетворяющую требованиям более слабой модификации теоремы Стритера.

В сочетании с теоремой „острие клина“ сильная модификация теоремы Стритера приводит к следующей форме.

Теорема. *Пусть $f_+(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ голоморфна в $\mathfrak{T}^n$, а $f_-(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ — в $\mathfrak{T}^n_-$. Пусть $f_+(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ и $f_-(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ таковы, что граничные значения $f_+(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ и $f_-(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $P \in J$, существуют как обобщенные функции.*

Если, кроме того, $f_+(\rho_1, \ldots, \rho_n) = f_-(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ в области J в смысле равенства между обобщенными функциями, то f_+ и f_- допускают (однозначное) аналитическое продолжение $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в $\mathfrak{T}'_n$.

---

*) В оригинале „Edge-of-the-Wedge“. Эта теорема при дополнительных предположениях впервые была установлена Н. Н. Боголюбовым [1, дополнение А, теорема 1]. — *Прим. ред.*

8. Теорема Рее и Шлидера и ее приложения [Re 1]

В главах I, § 1C и III, § 4 мы ввели линейное топологическое пространство

$$\underline{\mathscr{S}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{S}_n, \tag{1}$$

элементами которого служат последовательности основных функций $\underline{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ с конечным числом отличных от нуля членов. Равенство

$$\underline{A}(\underline{\varphi}) = \sum_n \langle A^n, \varphi_n \rangle \tag{2}$$

отображает это пространство $\underline{\mathscr{S}}$ в пространство операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а равенство

$$\underline{\Phi}(\underline{\varphi}) = \underline{A}(\underline{\varphi})\,\Omega \tag{3}$$

— на плотное множество D. $\underline{\mathscr{S}}$ является $*$-алгеброй и отображается посредством (2) в алгебру $\mathfrak{A} = \{\underline{A}(\underline{\varphi})\}$ операторов, определенных на D. Если сузить $[\underline{A}(\underline{\varphi})]^*$ на D, то будет выполняться соотношение

$$[\underline{A}(\underline{\varphi})]^* = \underline{A}(\underline{\varphi}^*). \tag{4}$$

Поставим теперь вопрос о подалгебрах $\underline{\mathscr{S}}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — открытое множество в R^4. Наложим на φ_n условие $\operatorname{supp}\varphi_n \subset \mathfrak{B}^{\times n}$ и определим

$$\mathscr{S}_n(\mathfrak{B}) = \left\{\varphi_n \mid \varphi_n \in \mathscr{S}_n,\ \operatorname{supp}\varphi_n \subset \mathfrak{B}^{\times n}\right\}. \tag{5}$$

Окончательно,

$$\underline{\mathscr{S}}(\mathfrak{B}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathscr{S}_n(\mathfrak{B}) \tag{6}$$

представляет собой замкнутую $*$-подалгебру $\underline{\mathscr{S}}$. Оператор $\underline{A}$ есть отображение $\underline{\mathscr{S}}(\mathfrak{B})$ в подалгебру $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ алгебры, $\mathfrak{A}$, а $\underline{\Phi}$ — отображение в подмножество $D(\mathfrak{B})$ множества D.

Справедлива следующая замечательная теорема.

Т е о р е м а [Re 1]. *Подмножество $D(\mathfrak{B})$ плотно в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Нужно показать, что $D(\mathfrak{B})^{\perp} = 0$. Вектор $\Psi \in D(\mathfrak{B})^{\perp}$ удовлетворяет равенству

$$(\Psi, \langle A^n, \varphi_n\rangle \Omega) = (\Psi, \Phi_n(\varphi_n)) = 0 \tag{7}$$

при всех $\varphi_n \in \mathscr{S}_n(\mathfrak{B})$. Таким образом, обобщенные функции

$$(\Psi, \Phi_n(x_1, \ldots, x_n)) = F_n(\Psi)(x_1, \ldots, x_n) \tag{8}$$

обращаются в нуль в $\mathfrak{B}^{\times n}$. Однако, согласно § 1, эти обобщенные функции допускают аналитическое продолжение $F_n(\Psi)(z_1, \ldots, z_n)$ в $\operatorname{Im} z_1 \in V_+$, $\operatorname{Im}(z_k - z_{k-1}) \in V_+$. Теорема „острие клина“ позволяет аналитически продолжить $F_n(\Psi)$ через $\mathfrak{B}^{\times n}$ в $\operatorname{Im} z_1 \in V_-$, $\operatorname{Im}(z_k - z_{k-1}) \in V_{-1}$. Но такое продолжение дает нуль. Поэтому $F_n(\Psi) = 0$ и $\Psi \in D^{\perp} = \{0\}$, что и требовалось доказать.

Отметим, что в процессе доказательства локальность никак не использовалась.

Теорема Ре и Шлидера дает возможность значительно обобщить доказанную в гл. III, § 5В теорему Рюэля.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{B}$ — область, инвариантная относительно однопараметрической группы времени-подобных или лежащих на световом конусе трансляций*

$$x \in \mathfrak{B} \to x + \lambda a \in \mathfrak{B}, \quad a \neq 0, \quad a \in \bar{V}_+, \ -\infty < \lambda < +\infty. \tag{9}$$

Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$—соответствующее кольцо операторов. Ограниченный оператор C, удовлетворяющий равенству

$$(\Phi, C\underline{A}\Psi) = (\underline{A}^*\Phi, C\Psi) \tag{10}$$

при всех $\underline{A} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ и всех Φ, $\Psi \in D(\mathfrak{B})$, кратен I.

Доказательство. Пусть $T_\lambda = T(\lambda a) = \int e^{i\lambda a}\, dE_a(\lambda)$, и пусть $\int_\Delta dE_a(\lambda) = E_a(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ. Тогда $E_a([0, \infty)) = I$ и $E_a((-\infty, 0]) = E_0$, где E_0 — проектор на $\langle\Omega\rangle$. В полной аналогии с доказательством гл. III, § 5, получаем из (10)

$$(\Omega, CE_1(\Delta)\underline{A}\Omega) = (\underline{A}^*\Omega, E_1(-\Delta)C\Omega),$$

где $-\Delta = \{\lambda \mid -\lambda \in \Delta\}$. Выбрав $\Delta = [0, \infty)$, получаем далее

$$(\Omega, C\underline{A}\Omega) = (\Omega, C\Omega)(\Omega, \underline{A}\Omega) \tag{11}$$

при всех $\underline{A} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, а поэтому и при всех $\Phi \in D(\mathfrak{B})$

$$(\Omega, C\Phi) = (\Omega, C\Omega)(\Omega, \Phi). \tag{12}$$

Наконец, снова пользуясь (10), приходим к соотношению

$$(\Psi, C\Phi) = (\Omega, C\Omega)(\Psi, \Phi) \tag{13}$$

для всех $\Phi, \Psi \in D(\mathfrak{B})$, а с помощью равенства $\overline{D(\mathfrak{B})} = \mathfrak{H}$ — к результату $C = (\Omega, C\Omega) \cdot I$, что и нужно было доказать.

Только что доказанная теорема является частным случаем теоремы, полученной Борхерсом [Bo 2] и Араки [Ar 9].

Если скомбинировать теорему Ре и Шлидера с локальностью, можно вывести следующий полезный критерий.

Теорема. *Пусть $\underline{A} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ и пусть $\mathfrak{B}$ ограничено. Тогда из*

$$\underline{A}\Omega = 0 \tag{14}$$

вытекает, что

$$\underline{A}\Phi = 0 \quad \text{для} \quad \Phi \in D. \tag{15}$$

Доказательство. Если $\mathfrak{B}$ ограничено, то множество $\mathfrak{B}'$ пространственно-подобных по отношению к $\overline{\mathfrak{B}}$ точек

$$\mathfrak{B}' = \{x \mid (x - x_1)^2 < 0 \quad \forall x_1 \in \overline{\mathfrak{B}}\} \tag{16}$$

не пусто. Каждый оператор $\underline{A}_1 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B}')$ перестановочен с $\underline{A}$. Таким образом, из (14) следует

$$\underline{A}\,\underline{A}_1\Omega = \underline{A}_1\underline{A}\Omega = 0, \tag{17}$$

и поэтому

$$\underline{A}\Phi' = 0 \quad \text{для всех} \quad \Phi' \in D(\mathfrak{B}'). \tag{18}$$

Итак, поскольку $\overline{D(\mathfrak{B}')} = \mathfrak{H}$, то $A^* = 0$ и, наконец, $\underline{A}$ (представляющий собой сужение $\underline{A}^{**}$ на D) удовлетворяет (15). Теорема доказана.

Глава V

TCP-ТЕОРЕМА. СПИН И СТАТИСТИКА

1. Вступительные замечания

В этой главе мы будем заниматься двумя важными приложениями развитой до сих пор теории. Оба приложения относятся к проблемам, которые широко обсуждались и продолжают обсуждаться в лагранжевой теории поля. По этой причине результаты настоящей главы никоим образом не претендуют на новизну. Однако нам кажется, что развиваемая здесь теория дает гораздо более глубокое представление о природе этих проблем.

В TCP-теореме утверждается, что любая локальная теория поля обладает дополнительной дискретной антилинейной симметрией θ. В теориях, инвариантных относительно инверсии времени T, пространственного отражения P и сопряжения частица—античастица C, такая инволюция представлена произведением TCP. Мы докажем эту теорему лишь в случае вещественного скалярного поля, т. е. лишь для теории, определенной в гл. III.

Приведенное в этой главе рассмотрение связи между спином и статистикой не является полным. Важное дополнение будет дано в гл. VI. Здесь же мы рассмотрим только возможные коммутационные соотношения между одинаковыми или различными полями.

Соответствующий результат в сочетании с предложенной Хаагом и Рюэлем теорией асимптотических полей и частиц (гл. VI) приводит к утверждению, что частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна (разумеется, если они описываются удовлетворяющей перечисленным аксиомам теорией), в то время как частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми — Дирака.

Для рассмотрения спина и статистики нам придется распространить наши аксиомы на случай нескольких полей с произвольными трансформационными свойствами по отношению к группе Лоренца.

2. TCP-теорема для одного скалярного поля.

Как уже упоминалось, в TCP-теореме [1]) утверждается, что любая теория поля, удовлетворяющая всем аксиомам, инвариантна относительно антиунитарной инволюции θ. В теориях специального вида, именно симметричных по отношению к операциям T (инверсия времени), C (сопряжение частица—античастица) и P (пространственное отражение), это преобразование θ появляется как произведение TCP.

TCP-теорема замечательна тем, что она показывает, что дискретная симметрия возникает и в тех теориях, которые первоначально содержат инвариантность только относительно связных непрерывных групп. Как мы увидим, это чрезвычайно тесно связано с тем фактом, что $L_+(C)$ содержит в качестве вещественных подгрупп обе компоненты L_+, а поэтому и отражение PT.

Наш анализ TCP-теоремы не ограничится лишь ее выводом. Мы вдобавок точно покажем, что́ именно из аксиомы локальности требуется для существования инволюции θ. Чтобы подготовить почву, вспомним, что любое коммутационное соотношение вида

$$(\Omega,\ A(r_0)\,A(r_1)\ \ldots\ A(r_n)\,\Omega)=\left(\Omega,\ A\left(r_{k_0}\right)\ \ldots\ A\left(r_{k_n}\right)\Omega\right)$$

позволяет продолжить функцию Вайтмана из первоначальной области $\mathfrak{S}'_n$ в $P\mathfrak{S}'_n$, где P — перестановка $(z_0,\ \ldots,\ z_n)\to\to\left(z_{k_0},\ \ldots,\ z_{k_n}\right)$. Вообще говоря, это фактическое продолжение. Действительно, только для двух перестановок имеет место $\mathfrak{S}'_n=P\mathfrak{S}'_n$. Это единичная перестановка и полная инверсия

$$(z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n)\to(z_n,\ z_{n-1},\ \ldots,\ z_0).$$

Последнее можно увидеть следующим образом. Если $(\zeta_1,\ \ldots,\zeta_n)\in\mathfrak{T}'_n$, то $(-\zeta_1,\ \ldots,\ -\zeta_n)\in\mathfrak{T}'_n$, так как PT-инвариантна $\mathfrak{T}'_n$. Но сверх того, $(-\zeta_n,\ -\zeta_{n-1},\ \ldots,\ -\zeta_1)\in\mathfrak{T}'_n$, так как определение $\mathfrak{T}'_n$ симметрично по разностям переменных. Но $(-\zeta_n,\ -\zeta_{n-1},\ \ldots,\ -\zeta_1)$ соответствует точке $(z_n,\ z_{n-1},\ \ldots,\ z_0)$. Это приводит к следующему естественному определению.

---

[1]) См. [Lü 1, 2; Pa 9; Sch 1; Jo 3; Gra 1].

Определение. (Дайсон [Dy 1].) Теория поля (в случае нейтрального скалярного поля) называется слабо локальной, если для всех n и всех $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ выполняется

$$(\Omega, A(r_0) A(r_1) \ldots A(r_n)\Omega) = (\Omega, A(r_n) A(r_{n-1}) \ldots A(r_0)\Omega) \tag{1}$$

и если удовлетворяются все аксиомы, кроме четвертой.

Замечание. Раньше было показано, что слабая локальность следует из локальности.

Сформулируем теперь теорему.

Теорема. *Слабая локальность (если выполнены все аксиомы, кроме аксиомы локальности) эквивалентна уравнениям*

$$(\Omega, A(x_0) A(x_1) \ldots A(x_n)\Omega) = (\Omega, A(-x_n) A(-x_{n-1}) \ldots$$
$$\ldots A(-x_0)\Omega) = \overline{(\Omega, A(-x_0) A(-x_1) \ldots A(-x_n)\Omega)}. \tag{2}$$

Доказательство. *Из* (1) *следует* (2). Соотношение (1) в терминах W-функций гласит

$$W(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) = W(-\rho_n, -\rho_{n-1}, \ldots, -\rho_1),$$

и ввиду $L_+(C)$-инвариантности W и того факта, что $PT \in L_+(C)$ может быть переписано так

$$W(\rho_1, \ldots, \rho_n) = W(\rho_n, \ldots, \rho_1).$$

Аналитическое продолжение дает

$$W(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = W(\zeta_n, \ldots, \zeta_1).$$

Выберем $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathfrak{T}^n$, тогда и $(\zeta_n, \ldots, \zeta_1) \in \mathfrak{T}^n$.

Пусть теперь ζ_k стремятся к вещественным значениям. Тогда для вайтмановских обобщенных функций мы получаем

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_n) = W(\xi_n, \ldots, \xi_1),$$

что дает для средних значений

$$(\Omega, A(x_0) \ldots A(x_n)\Omega) = (\Omega, A(-x_n) \ldots A(-x_0)\Omega).$$

Из (2) *следует* (1). Как мы только что видели, (2) можно переписать в виде

$$W(\xi_1, \ldots, \xi_n) = W(\xi_n, \ldots, \xi_1).$$

Для регулярных точек это уравнение гласит

$$W(\rho_1, \ldots, \rho_n) = W(\rho_n, \ldots, \rho_1).$$

Используя PT-инвариантность W-функций, находим

$$W(\rho_1, \ldots, \rho_n) = W(-\rho_n, \ldots, -\rho_1),$$

что на языке вакуумных средних дает как раз (1).

TCP-теорема. *Слабо локальная теория симметрична относительно антиунитарной операции θ, являющейся антиунитарным расширением преобразования*

$$\theta\Omega = \Omega, \quad \theta\Phi_n(\varphi) = \Phi_n(\varphi^-),$$

где

$$\varphi^-(x_0, \ldots, x_n) = \bar{\varphi}(-x_0, \ldots, -x_n).$$

Обратно, если теория инвариантна относительно упомянутой антиунитарной инволюции, то она слабо локальна.

Доказательство. Согласно пятой аксиоме, θ полностью определяется перечисленными условиями.

Тогда мы получаем для скалярного произведения

$$(\theta\Phi_n(\varphi), \theta\Phi_m(\psi)) = (\Phi_n(\varphi^-), \Phi_m(\psi^-)) = \mathfrak{W}((\varphi^-)^* \otimes \psi^-) =$$
$$= \int \mathfrak{W}(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m)\, \varphi(-x_n, \ldots, -x_0) \times$$
$$\times \bar{\psi}(-y_0, \ldots, -y_m)\, d(\underline{x})\, d(\underline{y})$$

и для

$$\overline{(\Phi_n(\varphi), \Phi_m(\psi))} = (\Phi_m(\psi), \Phi_n(\varphi) =$$
$$= \int \mathfrak{W}(y_m, \ldots, y_0, x_n, \ldots, x_0)\bar{\psi}(y_0, \ldots, y_m) \times$$
$$\times \varphi(x_n, \ldots, x_0)\, d(\underline{x})\, d(\underline{y}).$$

Эти величины совпадают тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{W}(x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m) =$$
$$= \mathfrak{W}(-y_m, \ldots, -y_0, -x_n, \ldots, -x_0),$$

а это и есть уравнение (2). Аналогичное рассмотрение скалярных произведений $(\theta\Phi(\varphi), \Omega)$ приводит к утверждению, что уравнение (2) эквивалентно существованию θ. А тогда первая теорема завершает доказательство.

Замечания о *TCP*-теореме. 1. Еще раз подчеркнем, что слабая локальность следует из локальности, поэтому в локальной теории θ существует.

2. Следующий пример показывает, что слабая локальность и в самом деле значительно слабее локальности (хотя это довольно ясно и так).

Пример. Пусть $A(x)$ — поле, удовлетворяющее уравнению $(\Box + m^2) A(x) = 0$, и потому допускающее разложение

$$A(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p\delta(p^2 - m^2)[\theta(p) a(p) e^{-i(p, x)} + \\ + \theta(-p) a^*(-p) e^{i(p, x)}],$$

введенное в гл. II, § 4, (6). Но теперь вместо перестановочных соотношений (14) и (15) мы постулируем антикоммутационные соотношения

$$a(p) a^*(p') + a^*(p') a(p) = 2\omega(p) \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

и

$$a(p) a(p') + a(p') a(p) = a^*(p) a^*(p') + a^*(p') a^*(p) = 0.$$

Такая процедура квантования вместе с предположением о существовании вакуума Ω, характеризуемого соотношением $a(p)\Omega = 0$, приводит к фермионам с нулевым спином. Теория нелокальна — коммутатор $A(x)$ и $A(y)$ не равен нулю в пространственно-подобных точках, не равен нулю также и соответствующий антикоммутатор. Действительно,

$$A(x) A(y) + A(y) A(x) = \Delta_1(x - y).$$

Однако в теории имеется антиунитарная инволюция $\theta\Omega = \Omega$, $\theta A(x)\theta = A(-x)$, оставляющая уравнение $(\Box + m^2) A(x) = 0$ и перестановочные соотношения инвариантными. В терминах операторов $a(p)$ инволюция θ принимает особенно простую форму

$$\theta a(p)\theta = a(p), \quad \theta a^*(p)\theta = a^*(p).$$

Фактически она сводится к автоморфизму комплексных чисел $z \to \bar{z}^*$.

Теперь наше следствие утверждает, что $A(x)$ удовлетворяет *нормальным* слабым коммутационным соотношениям

$$(\Omega,\ A(r_0)\ \ldots\ A(r_n)\,\Omega)=(\Omega,\ A(r_n)\ \ldots\ A(r_0)\,\Omega).$$

Это очень просто проверить для двухточечной обобщенной функции

$$(\Omega,\ [A(x)\,A(y)-A(y)\,A(x)]\,\Omega)=i\Delta(x-y),$$

которая исчезает при $(x-y)^2<0$, поскольку она нечетна и $L_+^\uparrow$-инвариантна.

3. Пока наше обсуждение *TCP*-теоремы никак не показывает роль преобразования C. Это связано с тем фактом, что мы проиллюстрировали теорему только для случая *вещественных скалярных полей*. Вполне очевидно, как нужно изменить аксиомы, чтобы включить в рассмотрение и *комплексное скалярное поле B*. Разумеется, количество функций Вайтмана при этом будет увеличиваться, поскольку теперь не только $B(x)$, но и $B^*(x)$ может фигурировать в качестве сомножителя в произведении операторов. Для вещественных основных функций φ и для $\Phi,\ \Psi\in D$ мы будем иметь соотношение

$$\overline{(\Phi,\ B(\varphi)\,\Psi)}=(\Psi,\ B^*(\varphi)\,\Phi),$$

устанавливающее связь между B и B^*. Мы могли бы, конечно, разбить комплексное поле B на два вещественных поля A_1 и A_2: $B=A_1+iA_2$. Но такое разбиение во всех случаях, когда комплексное поле появляется естественным образом, лишено какого-либо физического смысла. Здесь проявляет себя дополнительное требование, чтобы по крайней мере в простейших случаях теория была симметричной относительно „калибровочных преобразований“ $e^{i\tau}B=B_1$. Иначе говоря, должна существовать группа таких унитарных преобразований $V(\tau)$, что наблюдаемые величины инвариантны относительно них и $V^{-1}(\tau)\,B(x)\,V(\tau)=e^{i\tau}B(x)$, $V(\tau)\,\Omega=\Omega$. Ясно, что гильбертово пространство состояний разбивается при этом на подпространства неприводимых представлений группы $V(\tau)$ и что никакой процесс никогда не переводит вектор из одного подпространства в другое. Однако в дальнейшем мы не будем больше обсуждать это правило суперотбора [Wk 1].

В теории свободного дираковского поля и в классической общей теории поля мы встречались с калибровочной группой в связи с сохранением заряда. Это односторонняя связь: сохранение заряда всегда определяется калибровочной группой, но существуют калибровочные преобразования, не зависящие от сохранения заряда. (В этом смысле и операцию C в TCP следует трактовать более широко—как сопряжение частица—античастица.)

Слабое коммутационное соотношение для вещественного скалярного поля B имеет вид

$$\left(\Omega,\ B^{(\sigma_0)}(r_0)\,B^{(\sigma_1)}(r_1)\,\ldots\,B^{(\sigma_n)}(r_n)\,\Omega\right)=$$
$$=\left(\Omega,\ B^{(\sigma_n)}(r_n)\,\ldots\,B^{(\sigma_1)}(r_1)\,B^{(\sigma_0)}(r_0)\,\Omega\right),$$

где (σ_k) обозначает либо сопряжение, либо его отсутствие.

В этом случае в первой теореме утверждается, что уравнения

$$\left(\Omega,\ B^{(\sigma_0)}(x_0)\,B^{(\sigma_1)}(x_1)\,\ldots\,B^{(\sigma_n)}(x_n)\,\Omega\right)=$$
$$=\left(\Omega,\ B^{(\sigma_n)}(-x_n)\,\ldots\,B^{(\sigma_1)}(-x_1)\,B^{(\sigma_0)}(-x_0)\,\Omega\right)=$$
$$=\overline{\left(\Omega,\ B^{(\sigma_0)*}(-x_0)\,B^{(\sigma_1)*}(-x_1)\,\ldots\,B^{(\sigma_n)*}(-x_n)\Omega\right)}$$

эквивалентны слабым коммутационным соотношениям.

Инволюция θ второй теоремы обладает свойством

$$\theta B(x)\,\theta=B^*(-x),\quad \theta B^*(x)\,\theta=B(-x)$$

и переводит состояние Φ, преобразующееся при $V(\tau)$, согласно $e^{in\tau}$, в состояние, преобразующееся согласно $e^{-in\tau}$. Если $n\neq 0$, эти состояния различны. Так, если Φ описывает положительный электрический заряд, то $\theta\Phi$ будет описывать отрицательный заряд.

Поэтому существование операции θ гарантирует, что каждому состоянию с заданным зарядом всегда соответствует состояние с противоположным зарядом.

4. Мы уже несколько раз упоминали, что фундаментальная проблема общей теории поля состоит в том, можно ли, вообще, нетривиальным образом удовлетворять всем аксиомам. Любопытно отметить, что замена четвертой аксиомы требованием слабой локальности сильно раздвигает рамки теории, хотя это расширение теории и тривиально [Jo 8].

5. Некоторые поразительные приложения TCP-теоремы были даны Борхерсом. Однако здесь мы воздержимся от их обсуждения (см. гл. VII, § 1).

6. Обобщение нашей теоремы на случай конечного числа различных полей не составляет труда и не дает ничего существенно нового.

3. Спин и статистика

В этом параграфе мы обратимся к теории произвольного, но конечного числа различных полей. По причинам, которые будут объяснены в связи с новой формулировкой четвертой аксиомы (аксиомы локальности), мы потребуем, чтобы эти поля преобразовывались по неприводимым конечномерным *вещественным* представлениям накрывающей группы $L_{+}^{\uparrow}$. Над полем комплексных чисел такие неприводимые вещественные представления, вообще говоря, приводимы. В терминах (абсолютно) неприводимых представлений (k, l), введенных в гл. I, § 4, это фактически представления (k, k) для $k=l$ и $(k, l)\oplus(l, k)$ для $k \neq l$. Лишь представления первого вида являются неприводимыми над $\mathbf{C}$. В пространстве представления мы выберем вещественный базис. Матрицы представления поэтому также будут вещественными. Однако мы не требуем вещественности самих полей.

Нашей первой задачей является формулировка аксиом в этом, более общем случае. Особое внимание следует уделить четвертой аксиоме (локальности). Существует несколько вариантов формулировки этой аксиомы, и мы выберем один из них. Он оставляет некоторую свободу для перестановочных соотношений, свободу, которая частично ограничивается другими аксиомами. Эти ограничения полностью описаны в двух теоремах (Бергойн, Людерс, Цумино, Дель-Антонио) [Bu 1; Lü 3; De 2] и относятся к перестановочным соотношениям между полем и сопряженным к нему полем и к перестановочным соотношениям поля с самим собой. На любые другие перестановочные соотношения ограничения не налагаются. Однако, вообще говоря, они испытывают влияние определенных дополнительных дискретных симметрий теории (Араки) [Ar 5].

Такие симметрии не возникают только в одном случае, в случае *нормальных перестановочных соотношений*.

Нормальные перестановочные соотношения определяются следующим образом: тензорные поля (принадлежащие однозначному представлению $L_+^\uparrow$) коммутируют на пространственно-подобных расстояниях сами с собой и со спинорными (принадлежащими двузначному представлению $L_+^\uparrow$) полями; спинорные поля антикоммутируют на пространственно-подобных расстояниях.

Замечательно, что во всех аномальных случаях можно ввести с помощью необходимо возникающих дополнительных симметрий новые поля, удовлетворяющие уже нормальным перестановочным соотношениям (Клейн, Людерс, Араки) [Kl 1; Lü 4; Ar 5].

Если забежать вперед и воспользоваться результатами гл. VI, где в теорию Вайтмана вводятся частицы, то из описанных выше результатов будет вытекать закон связи между спином и статистикой: частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна, частицы же с полуцелым спином — статистике Ферми — Дирака.

Материал этого параграфа отличается сложностью. Поэтому мы будем выделять разделы и более мелкие части.

А. Аксиомы Вайтмана и обобщенные функции Вайтмана.

А1. *Аксиомы* [Wi 2]. Рассмотрим конечное число полей $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_\Xi(x)$, каждое из которых преобразуется по конечномерному вещественному неприводимому представлению группы $L_+^\uparrow$. Компоненты поля $\psi_k(x)$ обозначим через $\psi_{k,\alpha}(x)$. Каждому полю приписывается число $f(\psi_k) \equiv f_k$, принимающее значение $+1$, если ψ_k принадлежит двузначному представлению группы $L_+^\uparrow$, и 0 — в противном случае. Двузначное представление $L_+^\uparrow$ является истинным представлением группы $SL_2(C)$ — накрывающей группы $L_+^\uparrow$. Элементы накрывающей группы мы будем обозначать через Λ', элементы же $L_+^\uparrow$ —, как правило, через Λ [1]).

От полей ψ_k *не требуется*, чтобы они были симметричными на плотном множестве D. Однако ψ_k^*, сопряженное к ψ_k, (может быть, суженное на D) также должно быть полем и принадлежать тому же представлению, что и ψ_k.

---

[1]) Здесь мы отступили от обозначений гл. I, § 4.

Просмотрим теперь аксиомы и сделаем необходимые изменения.

Нулевая аксиома остается неизменной.

Первая аксиома принимает новую форму: для каждой функции $\varphi \in \mathscr{S}$ вектор $\psi_{k,\alpha}(\varphi)$ есть линейный оператор, определенный на плотном множестве D. Для $\Phi \in D$ вектор $\psi_{k,\alpha}(\varphi)\,\Phi$ линеен и непрерывен по φ; $\psi_{k,\alpha}(\varphi)\,D \subset D$. Для Φ, $\Psi \in D$ имеет место равенство

$$(\Phi,\ \psi_{k,\alpha}(\varphi)\,\Psi) = (\psi^*_{k,\alpha}(\bar{\varphi})\,\Phi,\ \Psi).$$

Вторая аксиома также принимает новую форму: существует унитарное (непрерывное) представление $U(a,\ \Lambda')$ универсальной накрывающей группы неоднородной собственной ортохронной группы Лоренца, удовлетворяющее равенству

$$U(a,\ \Lambda')\,\psi_k(x)\,U^{-1}(a,\ \Lambda') = S_k(\Lambda'^{-1})\,\psi_k(\Lambda x + a), \tag{1}$$

причем $U(a,\ \Lambda')\,D \subset D$.

Здесь $\Lambda = \Lambda(\Lambda')$ есть однородное преобразование Лоренца, отвечающее элементу Λ' универсальной накрывающей группы; S_k — (вещественное) неприводимое представление, по которому преобразуется ψ_k. Матричные элементы $S_k(\Lambda')^{\alpha'}_{\alpha}$ вещественны.

Третья аксиома остается неизменной.

Четвертая аксиома заменяется другой аксиомой, которая даже в применении к случаю единственного вещественного скалярного поля имеет бóльшую общность.

Четвертая аксиома. Если разность $x - y$ пространственно-подобна и если $\psi_{k,\alpha}$ и $\psi_{l,\beta}$ — компоненты одного и того же или разных полей, то

$$\psi_{k,\alpha}(x)\,\psi_{l,\beta}(y) = \sigma_{kl}\psi_{l,\beta}(y)\,\psi_{k,\alpha}(x), \tag{2}$$

где σ_{kl} не зависит от конкретного выбора компонент поля и равна либо $+1$, либо -1. Равенство (2) обязано выполняться только на множестве D.

Пятая аксиома. Состояние Ω циклично по отношению ко всем операторам поля.

A2. *Обсуждение четвертой аксиомы.* Повторим еще раз, что (2) следует понимать как равенство между обобщенными функциями. Сверх того, выполнение (2) требуется лишь на множестве D.

Мы уже сказали, что перестановочные соотношения (2) не зависят от компонент α и β. Можно рассмотреть и более общую ситуацию, когда соотношение (2) заменяется на

$$\psi_{k,\alpha}(x)\psi_{l,\beta}(y) = \sum_{\gamma,\delta} M^{\gamma\delta}_{kl,\alpha\beta}\psi_{l,\delta}(y)\psi_{k,\gamma}(x). \qquad (2')$$

Чтобы удовлетворить второй аксиоме, нужно, чтобы матрица M_{kl} обладала определенными свойствами. Легко проверить, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$S_k(\Lambda')\otimes S_l(\Lambda')M_{kl} = M_{kl}S_k(\Lambda')\otimes S_l(\Lambda'), \qquad (3)$$

где опять S_k и S_l — представления, отвечающие полям ψ_k и ψ_l. Разумеется, не только вторая, ***но и другие*** аксиомы накладывают дальнейшие ограничения на M_{kl}. Равенство (3) выполняется, если M_{kl} пропорциональна единичной матрице. Однако, вообще говоря, возможен и другой выбор. Мы не будем входить в детали этого вопроса, здесь естественно привести лишь теорему Шнайдера [Sn 1].

Теорема 1. *Если в базисе, использованном в* (2′), *матрица M_{kl} диагональна, и ее диагональные элементы равны ± 1, то она пропорциональна единичной матрице.*

Доказательство. Ясно, что $(I_{kl}\pm M_{kl})/2 = P_\pm$ представляют собой два диагональных проектора, коммутирующих с представлением $S_k\otimes S_l$. Если оба представления нетривиальны, то матрицы $(S_k(\Lambda')\otimes S_l(\Lambda'))_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ приводимы. Поэтому если проекторы $P_\pm$ нетривиальны, то существует по крайней мере один матричный элемент $(\alpha_0\beta_0, \gamma_0\delta_0)$, равный нулю тождественно

$$S_k(\Lambda')_{\alpha_0\gamma_0}S_l(\Lambda')_{\beta_0\delta_0} = 0 \qquad (4)$$

для всех элементов $\Lambda'\in SL_2(C)$. Поскольку матричные элементы матриц S_k и S_l являются вещественными аналитическими функциями на группе $SL_2(C)$ и, таким образом, принадлежат кольцу без делителей нуля, то, либо $S_{k,\alpha_0\delta_0}(\Lambda') = 0$, либо $S_{l,\beta_0\delta_0}(\Lambda') = 0$ для всех Λ'. Предположим, что $S_{k,\alpha_0\gamma_0}(\Lambda') = 0$. Если подействовать матрицами $S_k(\Lambda')$ на вектор, у которого только γ_0-компонента отлична от нуля, то результирующий вектор будет пробегать нетривиальное вещественное инвариантное подпространство, а именно подпространство векторов с нулевой α_0-компонентой. Итак, над полем вещественных чисел S_k оказывается приводимым, что противоречит предположению.

Для оправдания введения комплексных (несимметрических) полей необходима специальная аргументация. Безусловно, мы можем разбить любое поле ψ_k на его вещественную часть $(\psi_k + \psi_k^*)/2$ и мнимую часть $(\psi_k - \psi_k^*)/2$. Однако такое разбиение лишено физического смысла во всех случаях, когда есть группа калибровочных преобразований. Когда говорят, что существует калибровочная группа, имеют в виду, что теория инвариантна относительно преобразований (τ вещественно)

$$\psi_{k'} \to e^{i\tau}\psi_{k'}, \quad \psi_{k'}^* \to e^{-i\tau}\psi_{k'}^*, \quad \Omega \to \Omega, \tag{5}$$

где $\{k'\}$ — какое-то подмножество $(1, 2, \ldots, \Xi)$[1]). Разбиение полей $\psi_{k'}$ на вещественную и мнимую части неинвариантно по отношению к группе (5). Поэтому соответствующие перестановочные соотношения вида (2) могут нарушать калибровочную инвариантность. Комплексные поля мы вводим только тогда, когда существует калибровочная группа.

На более поздних ступенях нашего анализа мы будем разбивать поля на вещественную и мнимую части. Это будет делаться лишь после того, как мы удостоверимся, что калибровочная инвариантность при этом не теряется (теорема Дель-Антонио).

Все наше обсуждение вызвано тем обстоятельством, что (2) является нелинейным условием, наложенным на каждое поле. Поэтому оно неинвариантно при линейных преобразованиях полей с одинаковыми трансформационными свойствами. Конкретный выбор неприводимых полей, удовлетворяющих (2), должен определяться динамическими соображениями, т. е. соображениями, лежащими за рамками общих аксиом Вайтмана.

А3. *Обобщенные функции Вайтмана.* Определение обобщенных функций Вайтмана остается неизменным; это по-прежнему вакуумные ожидания произведений операторов поля. Их свойства также остаются неизменными или меняются очевидным образом. Вообще говоря, они уже перестают быть

---

[1]) Мы не утверждаем, что все калибровочные группы имеют такой вид. Однако лишь описанные здесь калибровочные группы имеют отношение к нашей проблеме.

скалярными обобщенными функциями. Их трансформационные свойства определяются трансформационными свойствами фигурирующих в них полей

$$(\Omega, \psi_{k_1}(\Lambda x_1+a) \ldots \psi_{k_n}(\Lambda x_n+a)\Omega) =$$
$$= S_{k_1}(\Lambda') \otimes \ldots \otimes S_{k_n}(\Lambda') \left(\Omega, \psi_{k_1}(x_1) \ldots \psi_{k_n}(x_n)\Omega\right). \qquad (6)$$

Если представление $S_{k_1} \otimes \ldots \otimes S_{k_n}$ является двузначным представлением $L_+^\uparrow$, то из (6) следует, что обобщенная функция Вайтмана равна нулю. Это приводит к лемме.

Лемма 1. *Обобщенные функции Вайтмана, содержащие нечетное число спинорных полей и произвольное число тензорных полей, равны нулю.*

Поэтому все отличные от нуля обобщенные функции Вайтмана преобразуются по отношению к неоднородной группе Лоренца как ковариантные тензорные поля.

Снова из аксиом вытекает, что обобщенные функции Вайтмана представляют собой граничные значения вайтмановых функций, голоморфных в $\mathfrak{S}_n$. Незначительная модификация доказательства БХВ-теоремы приводит к расширению области аналитичности на $\mathfrak{S}_n'$. В $\mathfrak{S}_n'$ функции Вайтмана являются тензорными полями, ковариантными относительно комплексной неоднородной группы Лоренца

$$\mathfrak{W}(Az+\alpha) = S(A)\,\mathfrak{W}(z) \qquad (7)$$

для $A \in L_+(C)$. Расширение представления

$$S(\Lambda) = S_{k_1}(\Lambda') \otimes \ldots \otimes S_{k_n}(\Lambda')$$

из $L_+^\uparrow$ в $L_+(C)$ тривиально, поскольку как тензорное представление $S(\Lambda)$ полиномиально выражается через матричные элементы Λ, если $\mathfrak{W}(z)$ отлична от нуля. Тот факт, что $PT \in L_+(C)$ еще раз оказывается принципиально важным для нас (теорема Бергойна, Людерса и Цумино).

В. Теорема Дель-Антонио и теорема Бергойна, Людерса и Цумино. В этом разделе мы запретим некоторые перестановочные соотношения. Слово „запретим“ нужно понимать в том смысле, что такие перестановочные соотношения совместны с аксиомами лишь тогда, когда по крайней мере одно из входящих в них полей равно нулю.

Для дальнейшего нам нужна следующая простая лемма.

Лемма 2. *Если поле ψ_k, действуя на Ω, дает нуль, то оно само равно нулю.*

Доказательство. Предположение означает, что для любой $\varphi \in \mathscr{S}$ оператор $\psi_k(\varphi)$ удовлетворяет равенству $\psi_k(\varphi)\Omega = 0$. Рассмотрим обобщенную функцию Вайтмана, содержащую поле ψ_k в качестве сомножителя. В вещественных точках голоморфности можно, в худшем случае лишь изменив знак вакуумного ожидания, переставить поле ψ_k на последнее место, где оно будет действовать непосредственно на Ω. Такая вайтманова обобщенная функция равна нулю во всех вещественных точках голоморфности, а следовательно, в силу возможности аналитического продолжения она равна нулю тождественно. Из пятой аксиомы вытекает теперь, что $\psi_k = 0$. Другое доказательство следует из теоремы Рее и Шлидера (гл. IV, § 8).

B1. *Теорема Дель-Антонио* [De 2].

Теорема 2. *Если $\psi_l \neq 0$ и если при $(x - y)^2 < 0$ справедливы перестановочные соотношения*

$$\psi_k(x)\,\psi_l(y) = \sigma\psi_l(y)\,\psi_k(x) \tag{8}$$

и

$$\psi_k^*(x)\,\psi_l(y) = -\sigma\psi_l(y)\,\psi_k^*(x), \tag{9}$$

то $\psi_k = 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую обобщенную функцию Вайтмана

$$\left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(x_1)\,\psi_{l,\alpha}(x_2)\,\psi_{k,\beta}(y_1)\,\psi^*_{k,\beta}(y_2)\,\Omega\right). \tag{10}$$

Согласно (8) и (9), при $(x_r - y_s)^2 < 0$; $r, s = 1, 2$, она равна

$$-\left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(x_1)\,\psi_{k,\beta}(y_1)\,\psi^*_{k,\beta}(y_2)\,\psi_{l,\alpha}(x_2)\,\Omega\right). \tag{10'}$$

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — вещественные основные функции с компактным носителем. Пусть также a пространственно-подобно. Определим $\varphi_{2,\lambda}(x) = \varphi_2(x - \lambda a)$ для $\lambda > 0$, так что

$$\left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,T(\lambda a)\,\psi_{k,\beta}(\varphi_2)\,\psi^*_{k,\beta}(\varphi_2)\,\Omega\right) =$$

$$= \left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\psi_{k,\beta}(\varphi_{2,\lambda})\,\psi^*_{k,\beta}(\varphi_{2,\lambda})\,\Omega\right) \tag{11}$$

Согласно (10) и (10′), при достаточно больших λ это равно

$$-\left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\psi_{k,\beta}(\varphi_{2,\lambda})\,\psi^*_{k,\beta}(\varphi_{2,\lambda})\,\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\Omega\right)= \\ = -\left\|\psi^*_{k,\beta}(\varphi_{2,\lambda})\,\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\Omega\right\|^2. \qquad (11')$$

Но из гл. III, § 6 мы знаем, что при $\lambda \to \infty$ первый член в (11) стремится к

$$\left(\Omega,\ \psi^*_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\Omega\right)\left(\Omega,\ \psi_{k,\beta}(\varphi_2)\,\psi^*_{k,\beta}(\varphi_2)\,\Omega\right)= \\ = \left\|\psi_{l,\alpha}(\varphi_1)\,\Omega\right\|^2\left\|\psi^*_{k,\beta}(\varphi_2)\,\Omega\right\|^2. \qquad (12)$$

Из предположения $\psi_l \neq 0$, из (11′) и из (12) следует, что $\psi^*_k = 0$ и $\psi_k = 0$, что и нужно было доказать.

Как уже отмечалось, теорема 2 позволяет разбивать поля на вещественную и мнимую части, без противоречия с наличием калибровочных групп. Мы будем обозначать полученные таким образом поля теми же буквами ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, \Xi'$. Будем надеяться, что это не приведет ни к каким недоразумениям. Начиная с этого момента, всегда будет предполагаться, что $\psi^*_k(x) = \psi_k(x)$. Перестановочные соотношения сохраняют форму (2). Вещественная и мнимая части первоначального поля обладают теми же перестановочными соотношениями друг с другом, что и сами с собой.

B2. *Теорема Бергойна, Людерса и Цумино* [Bu 1; Lü 3]. Мы переходим к последнему этапу первой части нашей программы, к запрещению некоторых перестановочных соотношений.

Теорема 3. *Перестановочные соотношения*

$$\psi_k(x)\,\psi_k(y) = -(-1)^{f_k^2}\,\psi_k(y)\,\psi_k(x), \qquad (13)$$

где $(x-y)^2 < 0$, *запрещены.*

Замечания. 1. Напомним читателю, что $f_k = 1$ для „двузначных“ (спинорных) полей и $f_k = 0$ для „однозначных“ (тензорных) полей.

2. Этой теоремой константа σ_{kk}, фигурирующая в

$$\psi_k(x)\,\psi_l(y) = \sigma_{kl}\psi_l(y)\,\psi_k(x), \qquad (13')$$

определяется как $\sigma_{kk} = (-1)^{f_k^2}$. То же относится к соответствующей константе в (2) (до разбиения полей на вещественную и мнимую части).

Доказательство. Здесь мы вынуждены разложить вещественное неприводимое представление, которому принадлежит ψ_k, на его абсолютно неприводимые части. Разумеется, для полей, которые с самого начала преобразуются по абсолютно неприводимым представлениям, в этом нет необходимости. Последний случай допускает очень простое рассмотрение; мы обратимся, однако, сразу к более сложному случаю, когда представление S_k разлагается на два комплексных представления (k_k, l_k) и (l_k, k_k). Поле, которое после такого разложения преобразуется по представлению (k_k, l_k), мы обозначим через χ_k. Часть поля, преобразующаяся по (l_k, k_k), будет тогда χ_k^*. Поле χ_k соответствует характеру Паули (σ_1, σ_2), поле χ_k^* — характеру Паули (σ_2, σ_1) (гл. I, § 4). Число $(-1)^{f_k^2}$ равно $\sigma_1\sigma_2$. Из предположения (13) теперь вытекает

$$\chi_{k, \alpha}(x)\,\chi^*_{k, \alpha}(y) = -\sigma_1\sigma_2\chi^*_{k, \alpha}(y)\,\chi_{k, \alpha}(x) \tag{14}$$

при $(x-y)^2 < 0$. Рассмотрим две обобщенные функции Вайтмана

$$\mathfrak{W}_1(x_0, x_1) = \left(\Omega, \chi_{k, \alpha}(x_0)\,\chi^*_{k, \alpha}(x_1)\,\Omega\right) \tag{15}$$

и

$$\mathfrak{W}_2(x_0, x_1) = \left(\Omega, \chi^*_{k, \alpha}(x_0)\,\chi_{k, \alpha}(x_1)\,\Omega\right). \tag{15'}$$

Обе они соответствуют характеру Паули $(\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\sigma_2)$. Согласно (14), в вещественных точках голоморфности они удовлетворяют соотношению

$$\mathfrak{W}_1(r_0, r_1) = -\sigma_1\sigma_2\mathfrak{W}_2(r_1, r_0). \tag{16}$$

Сверх того и $\mathfrak{W}_1(z_0, z_1)$, и $\mathfrak{W}_2(z_0, z_1)$ преобразуются ковариантным образом по отношению к $L_+(C)$, а следовательно, и по отношению к PT. Поэтому находим

$$\mathfrak{W}_2(-r_0, -r_1) = \sigma_1\sigma_2\mathfrak{W}_2(r_0, r_1). \tag{17}$$

Аналитически продолжая (16) и (17), получаем

$$\mathfrak{W}_1(z_0, z_1) = -\mathfrak{W}_2(-z_1, -z_0). \tag{18}$$

Если в обеих частях (17) перейти к физическим граничным значениям в $\mathfrak{S}_2$, то получится

$$\mathfrak{W}_1(x_0, x_1) = -\mathfrak{W}_2(-x_1, -x_0) \tag{19}$$

для всех значений x_0 и x_1. Умножение обеих частей равенства (19) на $\bar{\varphi}(-x_1)\varphi(-x_0)$ и последующее интегрирование приводят вместе с (15) и (15′) к соотношению

$$\|\chi^*_{k,\alpha}(\varphi^-)\Omega\|^2 = -\|\chi_{k,\alpha}(\varphi)\Omega\|^2, \tag{20}$$

где $\varphi^-(x) = \varphi(-x)$. Таким образом, в соответствии с леммой 2 и $\chi_{k,\alpha}$, и $\chi^*_{k,\alpha}$ равны нулю, так как, как при действии на вакуум, они дают нуль.

С. Теорема Араки и преобразования Клейна [Ar 5]. В этом разделе мы проанализируем структуру теории с аномальными перестановочными соотношениями. Такие теории могут существовать, и мы полностью охарактеризуем их в терминах определенных симметрий. Обнаружив эти симметрии, нетрудно уже установить родство между аномальными и нормальными теориями. Объектом нашего рассмотрения снова является множество вещественных полей ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, \Xi'$, удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$\psi_k\psi_l = (-1)^{f_k f_l}(-1)^{\eta_{kl}}\psi_l\psi_k. \tag{21}$$

При этом молчаливо предполагается, что разность аргументов в ψ_k и в ψ_l пространственно-подобна. Числа $\eta_{kl} = \eta_{lk}$ принимают значения 0 и 1. Они удовлетворяют основным соотношениям

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \ldots = \eta_{\Xi'\Xi'} = 0 \tag{22}$$

и, следовательно, образуют симметрическую матрицу η с нулевыми диагональными элементами.

Нормальные перестановочные соотношения отвечают случаю $\eta = 0$. Для тех вещественных полей, которые получаются в результате разбиения первоначальных комплексных полей, имеются некоторые ограничения на матрицу η. Если ψ_{k_0} и ψ_{l_0} — вещественная и мнимая части одного комплексного поля, то

$$\eta_{k_0 l} = \eta_{l_0 l}$$

для всех значений l. В частном случае $\eta_{k_0 l_0} = 0$.

Помимо этих ограничений, матрица η произвольна.

С1. *Мономы и перестановочные соотношения между ними.* Моном — это произведение полей (или компонент поля). Предполагается, что множество аргументов сомножителей вполне пространственно-подобно, т. е. разность любых двух различных аргументов пространственно-подобна. Мы будем обозначать мономы буквой M. Произведение двух мономов M_1 и M_2 снова является мономом $M = M_1 M_2$. Предполагается, что аргументы M_1 и M_2 выбраны так, что аргументы M вполне пространственно-подобны. При этих условиях мономы удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$M_1 M_2 = \sigma(M_1, M_2) M_2 M_1, \tag{23}$$

где $\sigma^2 = 1$; $\sigma(M_1, M_2)$ однозначно определяется соотношением (21). Оно не зависит от порядка сомножителей в M_1 и M_2 и определяется лишь тем, какое число раз поле ψ_k входит в M_1 и M_2, причем имеет значение только класс эквивалентности этих чисел по модулю 2. Это естественным образом приводит к отображению мономов M в Ξ'-мерное векторное пространство $\mathfrak{B}$ над полем, состоящим из двух чисел 0 и 1 (простым полем характеристики 2) и подчиняющимся следующим правилам действий:

$$0+0=0, \quad 0+1=1+0=1, \quad 1+1=0,$$
$$0 \cdot 0=0, \quad 0 \cdot 1=1 \cdot 0=0, \quad 1 \cdot 1=1.$$

Каждый моном M отображается на вектор

$$m = (m^1, \ldots, m^{\Xi'}) \text{ в } \mathfrak{B}.$$

Компонента $m^k = 1$, если поле ψ_k входит в M нечетное число раз, в противном случае $m^k = 0$. Каждому вектору m мы ставим в соответствие линейную форму $F = \sum m^k f_k$. В этих обозначениях перестановочные соотношения (23) приобретают вид

$$M_1 M_2 = (-1)^{F_1 F_2} (-1)^{(m_1, m_2)} M_2 M_1, \tag{24}$$

где, разумеется, $m_i = m(M_i)$ и $F_i = (f, m_i)$, $i = 1, 2$. Соотношение (24) вводит в рассмотрение симметричную функцию (m_1, m_2) двух векторов *). Эта функция билинейна по сомно-

*) Функция (m_1, m_2) прииимает целочисленные значения по mod 2. — *Прим. ред.*

жителям m_1 и m_2. В этом можно убедиться следующим образом:

$$M_1M_2M_3=(-1)^{F_1F_2}(-1)^{(m_1,\, m_2)}M_2M_1M_3=$$
$$=(-1)^{F_1(F_2+F_3)}(-1)^{(m_1,\, m_2)+(m_1,\, m_3)}M_2M_3M_1=$$
$$=(-1)^{F_1(F_2+F_3)}(-1)^{(m_1,\, m_2+m_3)}M_2M_3M_1. \qquad (25)$$

Последнее равенство следует из того, что $m(M_2M_3)=m(M_2)+m(M_3)$. Итак, $(m_1,\, m_2+m_3)=(m_1,\, m_2)+(m_1,\, m_3)$. Линейность по первому сомножителю вытекает из симметрии $(m_1,\, m_2)=(m_2,\, m_1)$. Теперь можно легко найти точное выражение для $(m_1,\, m_2)$ (как и раньше, над простым полем характеристики 2)

$$(m_1,\, m_2)=\sum\eta_{kl}m_1^k m_2^l. \qquad (26)$$

Мы подытожим и сформулируем полученные результаты в следующей лемме.

Лемма 3. *Перестановочные соотношения между мономами имеют вид*

$$M_1M_2=(-1)^{F_1F_2}(-1)^{(m_1,\, m_2)}M_2M_1, \qquad (27)$$

где $F_i=\sum f_k m_i^k$, $i=1,\, 2$ *и* $(m_1,\, m_2)=\sum\eta_{kl}m_1^k m_2^l$. *Скалярное произведение* $(m_1,\, m_2)$ *обладает свойствами*

$$(m_1,\, m_2)+(m_2,\, m_1)=0 \qquad (28)$$

и

$$(m,\, m)=0 \quad \textit{для всех} \quad m\in\mathfrak{B}. \qquad (29)$$

Оно порождает поэтому симплектическую структуру в $\mathfrak{B}$ [At 1*].

Доказательство. Соотношение (28) тривиально, поскольку $(m_1,\, m_2)=(m_2,\, m_1)$ и, таким образом, $(m_1,\, m_2)+(m_2,\, m_1)=(m_1,\, m_2)+(m_1,\, m_2)=0$. Свойство (29) важно; оно является следствием (22), так как

$$(m,\, m)=\sum_{k<l}\eta_{kl}m^k m^l+\sum_{k>l}\eta_{kl}m^k m^l=$$
$$=\sum_{k<l}\eta_{kl}m^k m^l+\sum_{k<l}\eta_{kl}m^k m^l=0. \qquad (30)$$

С2. *Вакуумные ожидания.* Плодотворность введения скалярного произведения (m_1, m_2) основана на следующей лемме.

Лемма 4. *Если* $(m_1, m_2) = 1$, *то*

$$(\Omega, M_1\Omega)(\Omega, M_2\Omega) = 0. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — основные функции, носители которых компактны и содержатся в вещественных областях голоморфности функций $(\Omega, M_1\Omega)$ и $(\Omega, M_2\Omega)$. Пусть a пространственно-подобно, а λ положительно. Если λ достаточно велико, то

$$M_1(\varphi_1)[T(\lambda a) M_2(\varphi_2) T(-\lambda a)] =$$
$$= (-1)^{F_1F_2}(-1)^{(m_1, m_2)}[T(\lambda a) M_2(\varphi_2) T(-\lambda a)] M_1(\varphi_1), \tag{32}$$

и, таким образом,

$$(\Omega, M_1(\varphi_1) T(\lambda a) M_2(\varphi_2)\Omega) =$$
$$= (-1)^{F_1F_2}(-1)^{(m_1, m_2)}(\Omega, M_2(\varphi_2) T(-\lambda a) M_1(\varphi_1)\Omega). \tag{33}$$

Согласно следствию гл. III, § 6, находим при $\lambda \to \infty$

$$(\Omega, M_1(\varphi_1)\Omega)(\Omega, M_2(\varphi_2)\Omega) =$$
$$= (-1)^{F_1F_2}(-1)^{(m_1, m_2)}(\Omega, M_2(\varphi_2)\Omega)(\Omega, M_1(\varphi_1)\Omega). \tag{34}$$

Поскольку $(m_1, m_2) = 1$, имеет место либо $F_1F_2 = 1$, либо

$$(\Omega, M_1(\varphi_1)\Omega)(\Omega, M_2(\varphi_2)\Omega) = 0.$$

Но $F_1F_2 = 1$ только, если $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$. Тогда лемма 1 приводит к соотношениям $(\Omega, M_1(\varphi_1)\Omega) = 0$ и $(\Omega, M_2(\varphi_2)\Omega) = 0$. И в том, и в другом случае аналитическое продолжение дает (31).

С3. *Векторное пространство* $\mathfrak{B}_0$. Все элементарные понятия аффинной и метрической геометрии [At 1*] (другие нам просто не понадобятся) приложимы к нашему векторному пространству $\mathfrak{B}$, несмотря на дискретную природу его основного поля $\{0, 1\}$. Тот факт, что $\mathfrak{B}$ представляет собой симплектическое пространство, может на первый взгляд показаться физику довольно необычным. Однако, как мы сейчас покажем, ситуация не так уж неожиданна и вполне устраивает нас, так как в отличие от ортогональной геометрии на-полем характеристики 2 симплектическая геометрия не имеет слишком много специфических черт. Физику симплектическая геометрия известна из аналитической механики. Линейные формы в фазовом пространстве образуют векторное пространство. Скобки Пуассона [La 1*] порождают в этом векторном пространстве симплектическую структуру. Импульсы $p_1, \ldots, p_f$ и сопряженные координаты $q_1, \ldots, q_f$ задают *канонический базис*. Они удовлетворяют соотношениям $\{p_k, p_l\} = \{q_k, q_l\} = 0$ и $\{p_k, q_l\} = \delta_{kl}$. Аналогичный базис в $\mathfrak{B}$ окажется полезным для нас. Начнем с нескольких определений.

Определения. Два вектора m_1 и m_2 ортогональны, если $(m_1, m_2) = 0$. Вектор m ортогонален линейному подпространству $\mathfrak{B}_1$, если он ортогонален всем векторам $\mathfrak{B}_1$. Все векторы, ортогональные $\mathfrak{B}_1$, образуют подпространство, обозначаемое $\mathfrak{B}_1^{\perp}$. Пересечение $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_1^{\perp}$ называется *радикалом* $\mathfrak{B}_1$. Если $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_1^{\perp} = \mathfrak{B}_1$, то $\mathfrak{B}_1$ изотропно: любые два вектора в $\mathfrak{B}_1$ ортогональны. Радикал самого $\mathfrak{B}$ обозначим через $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^{\perp}.$$

Если моном M_1 отображается в $\mathfrak{R}$, то по определению $\mathfrak{R}$ мы имеем следующие перестановочные соотношения M_1 с любым другим мономом M

$$MM_1 = (-1)^{FF_1} M_1 M. \tag{35}$$

Иначе говоря, мономы, принадлежащие радикалу $\mathfrak{R}$, обладают нормальными перестановочными соотношениями. Поскольку мы интересуемся аномальными перестановочными соотношениями (и хотим преобразовать *их* в нормальные), нас не интересуют такие мономы, и мы исключим их из рассмотрения, перейдя к *факторпространству* $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}/\mathfrak{R}$.

Симплектическая структура в $\mathfrak{B}$ однозначно определяет симплектическую структуру в $\mathfrak{B}_0$; в $\mathfrak{B}_0$ определено скалярное произведение (m_1, m_2) со свойствами (28) и (29). Оно равно одному и тому же значению, которое принимает исходное скалярное произведение любого вектора из смежного класса m_1 и любого вектора из смежного класса m_2. Однако $\mathfrak{B}_0$ обладает только тривиальным радикалом $\{o\}$; оно несингулярно. Начиная с этого момента, будем работать только с $\mathfrak{B}_0$. Мы сконструируем специального вида канонический базис $\mathfrak{B}_0$. Разумеется, этот базис нетрудно дополнить до базиса в $\mathfrak{B}$, прибавив к нему множество линейно независимых векторов из $\mathfrak{R}$.

Нам будет полезна следующая лемма, вытекающая из элементарных теорем о линейных уравнениях.

Лемма 5. *Если $\mathfrak{B}_1$ — подпространство $\mathfrak{B}_0$, то*

$$\dim \mathfrak{B}_1 + \dim \mathfrak{B}_1^{\perp} = \dim \mathfrak{B}_0. \qquad (36)$$

C4. *Построение базиса в $\mathfrak{B}_0$.*

Лемма 6. *Множество векторов $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}_0$, отвечающих мономам с ненулевыми вакуумными ожиданиями, образует изотропное подпространство $\mathfrak{A} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_r \rangle$, $\{a_k\}$ линейно независимы, $(a_k, a_l) = 0$.*

Доказательство. (a) Покажем сначала, что из $m_1 \in \mathfrak{A}$, $m_2 \in \mathfrak{A}$ следует, что $m_1 + m_2 \in \mathfrak{A}$. Пусть $m_k = m(M_k)$ и $(\Omega, M_k\Omega) \neq 0$ для $k = 1, 2$. Тогда при $(a, a) \to -\infty$ имеем

$$(\Omega, M_1 T(a) M_2\Omega) \to (\Omega, M_1\Omega)(\Omega, M_2\Omega)$$

(гл. III, § 6, следствие). Таким образом,

$$(\Omega, M_1 M_2'\Omega) = (\Omega, M_1 T(a) M_2 T(-a)\Omega) \neq 0 \qquad (37)$$

для подходящих значений a. Наконец, $m(M_1 M_2') = m_1 + m_2$.

Так как $m_1 + m_2 = 0$, то $\mathfrak{A}$ содержит нулевой вектор и вместе с любыми двумя векторами также и их сумму. Поэтому оно является подпространством.

(b) Покажем теперь, что $\mathfrak{A}$ изотропно. Выберем m_k и M_k, $k = 1, 2$, такими же, как в (a). Предположим, что $(m_1, m_2) = 1$. Тогда, согласно лемме 4, имеем $(\Omega, M_1\Omega)(\Omega, M_2\Omega) = 0$, что противоречит выбору M_1 и M_2. Тем самым доказательство леммы завершено.

Вообще говоря, $\mathfrak{A}^{\perp}$ содержит $\mathfrak{A}$ в качестве нетривиального подпространства. Если это так, то существует некоторый вектор $a_{r+1} \in \mathfrak{A}^{\perp}$ и $a_{r+1} \bar{\in} \mathfrak{A}$, и им можно воспользоваться для того, чтобы вложить $\mathfrak{A}$ в более широкое изотропное подпространство $\langle a_1, \ldots, a_{r+1} \rangle$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к *максимальному* изотропному подпространству $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \mathfrak{A}_1$, удовлетворяющему условию $\mathfrak{A}_1^{\perp} = \mathfrak{A}_1$. Таким образом, согласно лемме 5, $2 \dim \mathfrak{A}_1 = 2s = \dim \mathfrak{B}_0$.

Множество векторов $\{a_1, \ldots, a_s\}$ можно без труда дополнить до канонического базиса в $\mathfrak{B}_0$, добавляя к нему векторы $\{b_1, \ldots, b_s\}$, которые снова порождают максимальное изотропное подпространство и таковы, что их скалярные произведения равны $(a_k, b_l) = \delta_{kl}$. Итак, справедлива

Лемма 7. *$\mathfrak{B}_0$ обладает каноническим базисом $a_1, \ldots, a_s$, $b_1, \ldots, b_s$, удовлетворяющим условиям*

$$(a_k, a_l) = (b_k, b_l) = 0, \quad (a_k, b_l) = \delta_{kl} \tag{I}$$

для $k, l = 1, \ldots, s$;

$$(\Omega, M_1\Omega) = 0, \tag{II}$$

если $m_1 = m(M_1)$ удовлетворяет, хотя бы для одного значения k, равенству $(a_k, m_1) = 1$.

Доказательство утверждения (2). Если $(a_k, m_1) = 1$, то $m_1 \notin \langle a_1, \ldots, a_s \rangle$ и, таким образом, $m_1 \notin \mathfrak{A}$. Из определения $\mathfrak{A}$ теперь следует, что $(\Omega, M_1\Omega) = 0$.

C5. *Симметрии и преобразования Клейна.* Каждое поле ψ_k само по себе является мономом и поэтому отображается на какой-то вектор в $\mathfrak{B}_0$. Запишем для этого вектора e_k,

$$e_k = m(\psi_k). \tag{38}$$

Теорема 4. *Преобразования θ_k, определенные соотношениями*

$$\theta_k\Omega = \Omega, \tag{39}$$

$$\theta_k\psi_l\theta_k^{-1} = (-1)^{(a_k, e_l)}\psi_l \tag{40}$$

отвечают унитарной симметрии теории. Они удовлетворяют равенству $\theta_k^2 = I$ и поэтому являются инволюциями.

Доказательство. 1. То, что такие преобразования являются инволюциями, очевидно. Мы будем поэтому писать $\theta_k\psi_l\theta_k$ вместо $\theta_k\psi_l\theta_k^{-1}$.

2. Мы должны показать, что (39) и (40) задают унитарное преобразование. В соответствии с основной теоремой гл. III, § 4, достаточно доказать, что поля $\psi_l' = \theta_k\psi_l\theta_k$ по-

рождают те же самые обобщенные функции Вайтмана, что и первоначальные поля. Из (40) следует, что

$$M' = \theta_k M \theta_k = (-1)^{(a_k,\, m)} M. \tag{41}$$

Таким образом, с помощью (39) находим

$$(\Omega,\ \theta_k M \theta_k \Omega) = (-1)^{(a_k,\, m)} (\Omega,\ M\Omega). \tag{42}$$

Чтобы выполнялось равенство

$$(\Omega,\ M'\Omega) = (\Omega,\ M\Omega), \tag{43}$$

необходимо и достаточно, чтобы $(\Omega,\ M\Omega) = 0$ каждый раз, когда $(a_k,\ m) = 1$. Последнее, однако, гарантируется леммой 7.

Теорема 4 дает нам полное представление о структуре теории с аномальными перестановочными соотношениями. Она позволяет доказать завершающую теорему.

Теорема 5 (Араки). *Новые поля, определенные равенством*

$$\psi'_k = \prod_l (i)^{(a_l,\, e_k)(b_l,\, e_k)} \psi_k \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)}, \tag{44}$$

также вещественны и удовлетворяют нормальным перестановочным соотношениям

$$\psi'_k \psi'_l = (-1)^{f_k f_l} \psi'_l \psi'_k. \tag{45}$$

Доказательство. 1. Вещественность ψ'_k:

$$\psi'^*_k = \prod_l (-1)^{(a_l,\, e_k)(b_l,\, e_k)} \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)} \psi_k \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)} \times$$
$$\times \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)} = \prod_l (-i)^{(a_l,\, e_k)(b_l,\, e_k)} (-1)^{(b_l,\, e_k)(a_l,\, e_k)} \psi_k \times$$
$$\times \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)} = \psi'_k. \tag{46}$$

2. Перестановочные соотношения: для проверки соотношения (45) первый множитель в (44), очевидно, несуществен (имеется в виду степень i). Поэтому введем поле

$$\psi''_k = \psi_k \prod_l \theta_l^{(b_l,\, e_k)} \tag{47}$$

и вычислим

$$\psi_k''\psi_l'' = \psi_k\psi_l \prod_t (-1)^{(b_t,\ e_k)\,(a_t,\ e_l)} \prod_t \theta_t^{(b_t,\ e_k+e_l)} \tag{48}$$

и

$$\psi_l''\psi_k'' = \psi_k\psi_l(-1)^{\eta_{kl}}(-1)^{f_k f_l} \prod_t (-1)^{(b_t,\ e_l)\,(a_t,\ e_k)} \times \\ \times \prod_t \theta_t^{(b_t,\ e_k+e_l)}. \tag{49}$$

Таким образом,

$$\psi_k''\psi_l'' = \psi_l''\psi_k''(-1)^{f_k f_l}(-1)^{\eta_{kl}} \times \\ \times \prod_t (-1)^{[(a_t,\ e_l)\,(b_t,\ e_k)+(b_t,\ e_l)\,(a_t,\ e_k)]} = (-1)^{f_k f_l}\psi_l''\psi_k'', \tag{50}$$

поскольку по определению канонического базиса

$$\sum_t [(a_t,\ e_k)(b_t,\ e_l) + (a_t,\ e_l)(b_t,\ e_k)] = (e_k,\ e_l) = \eta_{kl}. \tag{51}$$

Замечания. 1. Преобразования типа (44) впервые были открыты Клейном [Kl 1]. Здесь мы их называем преобразованиями Клейна.

2. Важность векторного пространства $\mathfrak{B}$ была впервые осознана Людерсом [Lü 4]. Людерс решил проблему раздела C в рамках традиционной лагранжевой теории поля.

D. Пример аномальных перестановочных соотношений. Теоремами 4 и 5 можно воспользоваться для построения теорий с аномальными перестановочными соотношениями. Простейший пример дан ниже.

Начнем с нормальной теории двух вещественных скалярных полей A и B. Предположим, что все функции Вайтмана с нечетным числом полей B равны нулю. Теория тогда обладает симметрией θ, удовлетворяющей условиям

$$\theta B\theta = -B \quad \text{и} \quad \theta A\theta = A. \tag{52}$$

Введем теперь новые поля

$$A' = A\theta \quad \text{и} \quad B' = B. \tag{53}$$

Перестановочные соотношения между A' и B' будут при этом аномальными

$$A'B' = A\theta B = -AB\theta = -BA\theta = -B'A'. \tag{54}$$

Глава VI

ТЕОРИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ И ЧАСТИЦ (ХААГ — РЮЭЛЬ)

1. Вступительные замечания

Как мы уже несколько раз подчеркивали, аксиомы Вайтмана не содержат понятие частицы. Идея частицы имеет, однако, решающее значение при установлении связи между теорией и физической реальностью. Принципиальной наблюдаемой величиной физики элементарных частиц является матрица рассеяния (S-матрица) [Hei 5]. Она описывает результаты экспериментов по рассеянию, соотнося состояние частиц до взаимодействия состоянию частиц после взаимодействия. Поскольку в этой книге мы хотим выдвинуть на первый план главным образом формальные и математические аспекты теории, мы не будем здесь подробнее обсуждать S-матрицу и ее связь с экспериментом. За дальнейшим рассмотрением физических оснований теории мы отсылаем читателя к превосходной статье Бренига и Хаага [Br 1]. Для нас же достаточно того, что существование S-матрицы существенно зависит от возможности определить асимптотические ин- и аут-состояния, которые в свою очередь можно описать в терминах свободных частиц и соответствующих свободных полей.

Чрезвычайно приятно, что при естественных ограничениях вайтманова теория поля допускает точное определение таких асимптотических полей. Это было доказано Рюэлем в превосходной работе [Ru 4], на которой и основана настоящая глава. Рюэль доказал, что предположения Хаага [Ha 2, 3, 4], введенные с целью определения асимптотически свободных частиц, на самом деле можно доказать строго.

2. Специфические предположения о теории поля

В своей теории Рюэль [Ru 4] делает некоторые естественные дополнительные предположения, которые выходят за рамки аксиом Вайтмана. Это и неудивительно. Легко понять, что в теории, допускающей полное истолкование в терминах частиц, спектр вектора энергии-импульса должен обладать специфическими свойствами.

В этой главе мы не будем развивать общую теорию. Однако частный случай, которым мы ограничимся, обнаруживает большинство интересных и характерных черт общей теории. Мы постараемся каждый раз отмечать, чем наши предположения отличаются от предположений Рюэля. Наш случай характеризуется набором все более сильных предположений, следующих ниже.

Первое предположение — это наше обычное предположение о том, что мы имеем дело только с одним вещественным скалярным полем $A(x)$. Первое предположение имеет специальный характер. Рюэль рассматривает общий случай по крайней мере счетного числа неприводимых тензорных и спинорных полей.

Наше *второе предположение* относится к спектру оператора энергии-импульса P. *Предполагается, что спектр P совпадает с соответствующим спектром для свободного поля с массой m.* Поэтому спектр имеет следующие компоненты: $\{p \mid p = 0\}$, вакуум; $\{p \mid p_0 > 0, (p, p) = m^2\}$, одночастичный гиперболоид; континуум $\overline{V}_+^{2m}$.

Третье предположение касается гильбертова пространства $\mathfrak{H}_1$, отвечающего одночастичному гиперболоиду. $\mathfrak{H}_1$ лоренц-инвариантно. Сужение на $\mathfrak{H}_1$ представления $U(a, \Lambda)$ неоднородной группы Лоренца — есть представление $U_1(a, \Lambda)$. Предполагается, что это представление неприводимо и отвечает спину 0. Ясно, что оно соответствует массе m.

В общем случае, рассмотренном Рюэлем, предполагается существование дискретных представлений в разложении $\mathfrak{H}$ в прямую интегральную сумму. Разумно предположить также, что во всех случаях, когда нет дополнительных симметрий, приводящих к вырождению, соответствующие представления неоднородной группы Лоренца неприводимы. Однако спины представлений произвольны. Разумеется, в нашем случае спин не может быть полуцелым.

Последнее предположение связано с ограничением на спин в третьем предположении. Требуется, и это существенно, чтобы поле A обладало ненулевыми матричными элементами между Ω и $\mathfrak{H}_1$. Сверх того предполагается определенная нормировка поля A. Пусть P_1 — проектор на $\mathfrak{H}_1$, тогда должно быть

$$(\Omega,\ A(x) P_1 A(y)\Omega) = i\Delta_+(m^2;\ x-y). \tag{1}$$

Для нашей дальнейшей работы удобнее другая формулировка этого предположения. Пусть $h(\lambda)$ — такая основная функция, что $h(\lambda)=1$ в окрестности $\lambda=m^2$, $h(\lambda)=0$ при $|\lambda-m^2|>m^2/2$, $0\leqslant h(\lambda)\leqslant 1$. Поле B, Фурье-образ которого определен равенством

$$\tilde{B}(p)\equiv\tilde{A}(p)\,h((p,\ p)), \tag{2}$$

удовлетворяет всем аксиомам, кроме аксиом локальности и полноты; $B(\varphi)\Omega\in\mathfrak{H}_1$. Соотношение (1) тогда принимает вид

$$(\Omega,\ B(x)B(y)\Omega) = i\Delta_+(m^2;\ x-y). \tag{3}$$

Специальный характер четвертого предположения очевиден. Из полноты следует только существование некоторого полинома от полевого оператора A, обладающего переходами между Ω и $\mathfrak{H}_1$. В общем случае этот полином играет роль поля B. *Если одночастичный гиперболоид погружен в континуум*, то нужно предположить существование такого полинома по полям, что из состояния вакуума Ω для него возможны лишь переходы в одночастичные состояния. Существование такого полинома может обеспечиваться правилами отбора.

3. Результаты

Доказательства изложенных здесь результатов довольно объемисты. Поэтому в настоящем параграфе мы только сформулируем теоремы, а докажем их позднее. Необходимые комментарии частично содержатся в последнем параграфе этой главы.

Введенное формулой (2) § 2 поле $B(x)$ обладает специальным свойством — оно является гладким по переменной $x^0=t$: если φ — основная функция (из $\mathscr{S}$) вектора $\mathfrak{x}=(x^1,\ x^2,\ x^3)$, то

$$B_\varphi(t)=\int B(t,\ \mathfrak{x})\,\varphi(\mathfrak{x})\,d^3\mathfrak{x} \tag{1}$$

есть оператор, определенный на D; $B_\varphi(t)\Phi$, где $\Phi\in D$ принадлежит классу C_∞ по t и непрерывен по φ.

Мы называем решение уравнения Клейна — Гордона

$$(\Box + m^2) f = 0 \tag{2}$$

гладким, если оно представимо в форме

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \delta(p^2 - m^2) [e^{-i(p,x)} \theta(p) g_+(\mathfrak{p}) + \\ + e^{i(p,x)} \theta(p) g_-(\mathfrak{p})] d^4p, \tag{3}$$

и $g_\pm \in \mathscr{D}$ как функции вектора $\mathfrak{p} = (p^1, p^2, p^3)$. Любая производная гладкого решения снова является гладким решением.

Таким образом, величины

$$B_f(t) = i \int\limits_{x^0 = t} \bar{f} \overleftrightarrow{\partial_0} B d^3\mathfrak{x} \tag{4}$$

существуют как операторы на D.

Наша основная цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Состояния*

$$\Phi(t) = B_{f_0}(t) B_{f_1}(t) \ldots B_{f_n}(t) \Omega \tag{5}$$

удовлетворяют требованию $\|\Phi(t_1) - \Phi(t_2)\| \to 0$ *при* $t_1, t_2 \to -\infty$ (*или* $t_1, t_2 \to +\infty$). *Таким образом, они имеют сильный предел при* $t \to -\infty$ (*или* $t \to +\infty$). *Этот предел не зависит* (*в рамках собственной ортохронной группы Лоренца*) *от системы координат, в которой определены* (4).

Определения. Состояние $\lim\limits_{t \to -\infty} \Phi(t)$ называется ин-состоянием Φ^{in}, состояние $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t)$ — аут-состоянием Φ^{out}. $\mathfrak{H}_{\substack{\text{in} \\ \text{out}}}$ — это гильбертовы пространства, натянутые на $\begin{pmatrix}\text{in}\\ \text{out}\end{pmatrix}$-состояния соответственно. Символ „ex“ мы будем ставить либо вместо in, либо вместо out.

Запишем

$$\Phi^{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(\underline{f}) = \Phi^{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \\ = \lim_{t \to \mp\infty} B_{f_0}(t) B_{f_1}(t) \ldots B_{f_n}(t) \Omega. \tag{6}$$

Теорема 2. *Операторы, определенные как линейное расширение операторов*

$$A_f^{\mathrm{ex}}\Phi^{\mathrm{ex}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \Phi^{\mathrm{ex}}(f, f_0, f_1, \ldots, f_n), \tag{7}$$

задают два вещественных скалярных поля $A^{\mathrm{ex}}(x)$, *удовлетворяющих равенствам* (*гл. II, §§ 3, 4*)

$$A_f^{\mathrm{ex}} = i \int\limits_{x^0=t} \overline{f}\overleftrightarrow{\partial_0} A^{\mathrm{ex}} d^3\mathfrak{x}, \tag{8}$$

$$U(a, \Lambda) A^{\mathrm{ex}}(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A^{\mathrm{ex}}(\Lambda x + a) \tag{9}$$

и

$$\theta A^{\mathrm{in}}(x) \theta = A^{\mathrm{out}}(-x), \tag{10}$$

где θ *есть „TCP"-оператор* $\theta A(x)\theta = A(-x)$ (*гл. V, § 2*).

С тем чтобы обеспечить полную интерпретацию теории в терминах частиц, в этом месте следует ввести еще один новый постулат.

Аксиома полноты ин-состояний [Ru 4]. Она требует, чтобы

$$\mathfrak{H}_{\mathrm{in}} = \mathfrak{H}. \tag{11}$$

Из (10) следует, что $\theta\mathfrak{H}_{\mathrm{in}} = \mathfrak{H}_{\mathrm{out}}$. Поскольку $\theta\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, (11) имеет следствием

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathrm{in}} = \mathfrak{H}_{\mathrm{out}}. \tag{12}$$

Теперь $A^{\mathrm{in}}(x)$ и $A^{\mathrm{out}}(x)$ действуют в одном и том же пространстве и унитарно эквивалентны. Таким образом, существует унитарный оператор, однозначно определенный равенствами

$$A^{\mathrm{out}}(x) = S^{-1} A^{\mathrm{in}}(x) S \tag{13}$$

и

$$S\Omega = \Omega. \tag{14}$$

Оператор S представляет собой матрицу рассеяния. Она задает вероятности переходов из ин-состояний в аут-состояния. Соотношения (9), (10), условие неприводимости свободного поля и (14) приводят к равенству

$$U(a, \Lambda) S U^{-1}(a, \Lambda) = S \tag{15}$$

и

$$\theta S \theta = S^*. \tag{16}$$

13*

4. Гладкие решения уравнения Клейна — Гордона

Доказательство теорем 1 и 2 базируется на двух вспомогательных теоремах, из которых одна относится к гладким решениям уравнения Клейна — Гордона, а другая — к определенным свойствам (пространственно-подобной асимптотике) TVEV поля A.

Мы начнем с рассмотрения гладкого положительно-частотного решения

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i(p,\, x)} \theta(p) \delta(p^2 - m^2) g(\mathfrak{p})\, d^4p, \tag{1}$$

где функция g трех переменных $\mathfrak{p} = (p^1, p^2, p^3)$ — основная функция из $\mathscr{D}$ (гл. I, § 1A). Однако все наши результаты остаются справедливыми и для произвольного гладкого решения, т. е. для произвольной суммы гладкого положительно-частотного решения и функции, комплексно сопряженной к любому другому положительно-частотному решению.

Функция $f(x)$ является преобразованием Фурье функции с компактным носителем. Таким образом, это целая функция, и поэтому она принадлежит C_∞. Выделим теперь из x временную часть $x^0 = t$ и пространственную часть $\mathfrak{x}$. Тогда

$$f(t, \mathfrak{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathfrak{p}\, e^{-i\mathfrak{p}\mathfrak{x}} \left[\frac{1}{2\omega(\mathfrak{p})} e^{-i\omega t} g(\mathfrak{p})\right], \tag{2}$$

где $\omega(\mathfrak{p}) = \sqrt{m^2 + \mathfrak{p}^2}$. Функция в квадратных скобках является элементом пространства $\mathscr{D}$. Поэтому $f(t, \mathfrak{x})$ как функция переменных $\mathfrak{x}$ при фиксированном t есть элемент $\mathscr{S}$. Очевидно, это справедливо и для любой производной f по времени. Таким образом, мы имеем

Первое свойство. При фиксированном t, $f(t, \mathfrak{x})$—основная функция из $\mathscr{S}$.

Теперь мы будем интересоваться поведением $f(t, \mathfrak{x})$ как функции t. Лучше всего начать с обсуждения зависимости $f(x)$ от расстояния по лучу, т. е. зависимости $f(\lambda u)$ от λ, где u — фиксированный четырехмерный вектор. Чтобы получить равномерную оценку по всем направлениям, будем считать, что u лежит на евклидовой единичной сфере $\|u\|^2 = (u^0)^2 + (u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 = 1$. Тогда

$$f(\lambda u) = \int e^{-i\lambda s} \varphi_u(s)\, ds, \tag{3}$$

где
$$\varphi_u(s)=(2\pi)^{-3/2}\int\delta(p^2-m^2)\,\theta(p)\,\delta((p,\ u)-s)\,g(\mathfrak{p})\,d^4p. \quad (4)$$

Функция $\varphi_u(s)$ представляет собой интеграл от функции $(2\pi)^{-3/2}\delta(p^2-m^2)\theta(p)g(\mathfrak{p})$ по плоскости $(p,\ u)=s$. Поведение φ_u как функции s существенно зависит от того, является ли одна из плоскостей $(p,\ u)=s$, $-\infty<s<+\infty$ касательной плоскостью к $(p,\ p)=m^2$ в точке носителя $\delta(p^2-m^2)\theta(p)g(\mathfrak{p})$. Ясно, что это может случиться лишь при $(u,\ u)>0$; $(p,\ u)=s$ есть касательная плоскость к $p^2=m^2$, если $s=s_0=m(u,\ u)^{1/2}$, и при этом точка прикосновения есть
$$\hat{p}=m(u,\ u)^{-1/2}u.$$

Пусть $\mathfrak{C}$—(замкнутое) множество $\{u\mid\pm\hat{p}\in\operatorname{supp}\delta(p^2-m^2)\times\times\theta(p)g(\mathfrak{p})\}$ и $\mathfrak{C}_\pm=\mathfrak{C}\cap V_\pm$. Пусть $\mathfrak{C}'$ — дополнение к $\mathfrak{C}$. Определим, наконец, $\mathfrak{D}\subset V_+\cup V_-$ (и $(\mathfrak{D}_\pm=\mathfrak{D}\cap V_\pm)$ как открытое множество на $\|u\|=1$, содержащее $\mathfrak{C}$. Его дополнение $\mathfrak{D}'$ замкнуто. $\overline{\mathfrak{D}}$ — есть замыкание $\mathfrak{D}$. В качестве $\mathfrak{D}$ мы можем выбрать множество $\{u\mid\|\vec{u}\|<\rho\,|u^0|\}$ при каком-то подходящем значении $0<\rho<1$.

Так или иначе, φ_u как функция s имеет компактный носитель. Нетрудно убедиться, что она принадлежит классу C_∞ и потому представляет собой основную функцию из $\mathscr{S}$ до тех пор, пока $u\in\mathfrak{C}'$. Таким образом, $f(\lambda u)$ быстро убывает при $|\lambda|\to\infty$, и мы получаем

Второе свойство. Для любого $u\in\mathfrak{C}'$ и любого целого числа M имеет место
$$|\lambda^M f(\lambda u)|<C_M(u), \quad (5)$$
где $C_M(u)$ равномерно ограничено на любом компактном подмножестве $\mathfrak{C}'$. Поэтому в $\mathfrak{D}'$ мы имеем
$$|\lambda^M f(\lambda u)|<C_M. \quad (6)$$

Ситуация совершенно меняется для $u\in\mathfrak{C}_+$ (или $u\in\mathfrak{C}_-$). В этом случае $\varphi_u(s)$ принимает следующий вид:
$$\varphi_u(s)=\theta(s-s_0)\sqrt{s^2-s_0^2}\,\chi_u\left(\sqrt{s^2-s_0^2}\right) \quad (7)$$
$$\left[\text{или } \varphi_u(s)=\theta(-s_0-s)\sqrt{s^2-s_0^2}\,\chi_u\left(\sqrt{s^2-s_0^2}\right)\right].$$

Функция $\chi_u(\tau)$ имеет компактный носитель и принадлежит классу C_∞ при $0 \leqslant \tau < \infty$. Однако, вообще говоря, она не равна нулю при $\tau = 0$. Вместо (7) мы можем написать также (ограничиваясь случаем $u \in \mathfrak{C}_+$)

$$\varphi_u(s) = \theta(s - s_0) \sqrt{s - s_0}\, \hat{\chi}_u(\sqrt{s - s_0}), \tag{7'}$$

где $\hat{\chi}_u(\tau)$ снова принадлежит классу C_∞ на замкнутой полуоси.

Тогда мы получим

$$f(\lambda u) = \int_0^\infty e^{-i\lambda(v + s_0)} \sqrt{v}\, \hat{\chi}_u(\sqrt{v})\, dv \tag{8}$$

или

$$f(\lambda u) = 2 \int_0^\infty e^{-i\lambda(\tau^2 + s_0)} \hat{\chi}_u(\tau)\, \tau^2\, d\tau. \tag{9}$$

Если произвести разбиение $\hat{\chi}_u(\tau) = \hat{\chi}_u(0)\, e^{-\tau^2} + (\hat{\chi}_u(\tau) - \hat{\chi}_u(0)\, e^{-\tau^2})$, то вклад первого (ведущего) члена можно вычислить точно, а для вклада второго члена можно указать оценку. При этом получается

$$|\lambda|^{3/2} |f(\lambda u)| < C(u), \tag{10}$$

где $C(u)$ равномерно ограничено на $\mathfrak{C}$. Разумеется, в точности тот же метод можно применить и к $\overline{\mathfrak{D}}_+$ или $\overline{\mathfrak{D}}_-$, или даже ко всем векторам u.

Третье свойство. При $u \in \overline{\mathfrak{D}}$ имеет место

$$|\lambda|^{3/2} |f(\lambda u)| < C. \tag{11}$$

Если выбрать подходящую постоянную C, то это утверждение останется справедливым и для всех векторов u.

Теперь мы уже достаточно хорошо подготовлены к теореме.

Первая вспомогательная теорема [Ru 4]. *Гладкое решение $f(t, \mathfrak{x})$ уравнения Клейна — Гордона обладает следующими свойствами.*

При фиксированном t оно является функцией из $\mathcal{S}$ по переменным $\mathfrak{x}$.

Существует такая постоянная Γ, *зависящая только от* f, *что*

$$|t|^{3/2} \max_{|\mathfrak{x}|} |f(t, \mathfrak{x})| < \Gamma; \tag{12}$$

$$\int |f(t, \mathfrak{x})| \, d^3\mathfrak{x} < \Gamma(1 + |t|^{3/2}); \tag{13}$$

$$|t|^{1/2} \max \|\mathfrak{x}\| \, |f(t, \mathfrak{x})| < \Gamma. \tag{14}$$

Доказательство. Неравенства (12) и (14) следуют из (11), так как в (11) утверждается, что

$$\left(\sqrt{t^2 + \mathfrak{x}^2}\right)^{3/2} |f(t, \mathfrak{x})| < C; \tag{15}$$

(13) следует из (6) и (11). Для некоторого $0 < \rho < 1$ и $|\mathfrak{x}| > \rho |t|$ из (6) вытекает, что

$$|f(t, \mathfrak{x})| < \frac{C_4}{\left(\sqrt{t^2 + \|\mathfrak{x}\|^2}\right)^4}. \tag{16}$$

Оценка (16) вместе с (15) приводит к оценке

$$\int |f(t, \mathfrak{x})| \, d^3\mathfrak{x} < 4\pi \left[\int_0^{\rho|t|} \frac{Cr^2}{\left(\sqrt{t^2 + r^2}\right)^{3/2}} \, dr + \int_{r > \rho|t|} \frac{C_4 r^2}{(t^2 + r^2)^2} \, dr \right]. \tag{17}$$

Первый член в квадратных скобках пропорционален $|t|^{3/2}$, второй же пропорционален $|t|^{-1}$. Поскольку левая часть (17) ограничена при любом значении t, существует мажорирование типа (13).

Так как любая производная гладкого решения есть снова гладкое решение, теорема приложима и к произвольной производной функции $f(t, \mathfrak{x})$ по времени, хотя, конечно, значения Γ будут при этом, вообще говоря, другими.

И последнее замечание: первая вспомогательная теорема справедлива также и в том случае, когда функции $g_{\pm}$ в § 3, (3), или функция g в § 4, (1), удовлетворяют лишь одному требованию: они должны быть элементами пространства $\mathcal{S}$. Этот факт нам, однако, не понадобится.

5. Пространственно-подобная асимптотика TVEV

Усеченные вакуумные средние были введены в гл. III, § 5C. Здесь мы будем пользоваться теми же обозначениями

$$\mathfrak{W}^T(x_0, \ldots, x_n) = (\Omega, A(x_0) \ldots A(x_n)\,\Omega)^T. \tag{1}$$

Однако $(n+1)$-строку точек $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ мы будем теперь записывать как $\underline{x}$. В дальнейшем $\mathfrak{a}$ будет обозначать вектор вида $(0, a^1, a^2, a^3)$ и соответствующий вектор (a^1, a^2, a^3). Символ $\underline{\mathfrak{a}}$ следует понимать как $(n+1)$-строку четырех- или трехмерных векторов $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Величина, которую мы будем здесь обсуждать, есть

$$\Phi(\underline{\mathfrak{a}}) = \int \mathfrak{W}^T(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\,\varphi(\underline{x})\,d\underline{x}, \quad \varphi \in \mathscr{S}\left(R^{4(n+1)}\right), \tag{2}$$

где $d\underline{x}$ обозначает $d^{4(n+1)}x$. В силу трансляционной инвариантности $\mathfrak{W}^T(\underline{x})$, $\Phi(\underline{\mathfrak{a}})$ зависит лишь от переменных $\vec{\mathfrak{a}}_k = \mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_0$. Вместо $(\vec{\mathfrak{a}}_1, \ldots, \vec{\mathfrak{a}}_n)$ мы будем писать $\underline{\vec{\mathfrak{a}}}$.

Чрезвычайно прямое и непосредственное применение аксиомы локальности и спектрального условия позволило Рюэлю доказать следующую теорему.

Вторая вспомогательная теорема [Ru 4; Ar 8]. *По переменным* $\underline{\vec{\mathfrak{a}}}$ *функция* Φ, *определенная равенством* (2), *есть основная функция из* $\mathscr{S}$.

Замечания. 1. Очевидно, что Φ принадлежит классу C_∞.

2. Любая производная Φ снова имеет вид (2). Таким образом, нам нужно только показать, что Φ есть быстро убывающая функция переменных $\underline{\vec{\mathfrak{a}}}$.

3. Если D^m — произвольный дифференциальный моном по $\underline{x}$, то

$$\Phi_1(\mathfrak{a}) = \int (D^m \mathfrak{W}^T)(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\,\varphi(\underline{x})\,d\underline{x} =$$
$$= (-1)^{|m|} \int \mathfrak{W}^T(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\,(D^m\varphi)(\underline{x})\,d\underline{x} \tag{3}$$

опять имеет вид (2). Поэтому если мы заменим какое-то фигурирующее в (1) поле $A(x_k)$ на его производную, то утверждение второй вспомогательной теоремы останется верным.

Доказательство второй вспомогательной теоремы длинно и сложно. Попытаемся воспроизвести его, разделив его на небольшие, а иногда и очень маленькие части. Начнем с нескольких элементарных геометрических определений и замечаний.

Определение 1. (Гл. I, § 1А, (1) и гл. I, § 2, (4)). Если $\xi=(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ — четырехмерный вектор, то

$$\|\xi\|^2=(\xi^0)^2+(\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2.$$

Аналогично $\|\underline{x}\|^2=\sum_i \|x_i\|^2$.

Определение 2. Диаметром $d(\underline{\mathfrak{a}})$ называется

$$d(\underline{\mathfrak{a}})=\max_{i,k}\|\mathfrak{a}_i-\mathfrak{a}_k\|. \tag{4}$$

Определение 3. Если X — подмножество $(i_0, \ldots, i_k)$ индексов $(0, 1, \ldots, n)$, и все индексы расположены в натуральном порядке, то $X'=(i'_0, \ldots, i'_{k'})$ дополнение к X, и все индексы снова расположены в порядке возрастания. По определению

$$\delta(X)=\delta(X')=\min_{i\in X,\, i'\in X'}\|\mathfrak{a}_i-\mathfrak{a}_{i'}\|. \tag{5}$$

Лемма 1. *Для каждой конфигурации* $\underline{\mathfrak{a}}$ *найдется такое разбиение* X, X', *что*

$$n\,\delta(X)\geqslant d(\underline{\mathfrak{a}}). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $d(\underline{\mathfrak{a}})=\|\mathfrak{a}_k-\mathfrak{a}_l\|$. Будем считать $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ точками в трехмерном евклидовом пространстве. Плоскости, проходящие через точку $\mathfrak{a}_k$ или точку $\mathfrak{a}_l$ и перпендикулярные вектору $\mathfrak{a}_k-\mathfrak{a}_l$, представляют собой опорные плоскости выпуклого множества, порожденного точками $\{\mathfrak{a}_l\}$. Таким образом, плоскости, перпендикулярные $\mathfrak{a}_k-\mathfrak{a}_l$ и проходящие через точки $\mathfrak{a}_i$, разбивают сегмент $(\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_l)$ самое большее на n интервалов, общая длина которых есть d. Длина по крайней мере одного интервала должна быть не меньше d/n. Тогда соответствующие плоскости, проходящие через крайние точки этого интервала, задают разбиение X, X', удовлетворяющее (6).

Лемма 2. *Пусть X, X' — разбиение, описанное леммой 1.*

Если $\|\underline{x}\| < d/2n$, то $(x_i + \mathfrak{a}_i) - (x_{i'} + \mathfrak{a}_{i'})$ есть пространственно-подобный вектор при любых $i \in X$, $i' \in X'$.

Доказательство. Поскольку $\|\underline{x}\| < d/2n$, наверняка выполняется неравенство

$$\|x_i\|^2 + \|x_{i'}\|^2 < \frac{d^2}{4n^2} \leqslant \frac{1}{4} \min_{k \in X,\, k' \in X'} \|\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_{k'}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4} \|\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i'}\|^2.$$

Но $\|x_i - x_{i'}\|^2 + \|x_i + x_{i'}\|^2 = 2\|x_i\|^2 + 2\|x_{i'}\|^2$. Вместе с приведенным выше неравенством это означает, что

$$\|x_i - x_{i'}\|^2 < {}^1/_2 \|\mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i'}\|^2.$$

Положим $\xi = x_i - x_{i'}$ и $\vec{\alpha} = \mathfrak{a}_i - \mathfrak{a}_{i'}$; тогда в последнем неравенстве утверждается, что

$$(\xi^0)^2 + \|\vec{\xi}\|^2 < {}^1/_2 \|\vec{\alpha}\|^2$$

и, таким образом,

$$2|\xi^0|\,\|\vec{\xi}\| < {}^1/_2 \|\vec{\alpha}\|^2,$$

откуда следует, что $(|\xi^0| + \|\vec{\xi}\|)^2 < \|\vec{\alpha}\|^2$ или

$$|\xi^0| < \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\xi}\|.$$

Но $\|\vec{\alpha} + \vec{\xi}\| \geqslant \|\vec{\alpha}\| - \|\vec{\xi}\|$ и поэтому $|\xi^0| < \|\vec{\alpha} + \vec{\xi}\|$. Окончательно получаем, что $\xi + \vec{\alpha}$ пространственно-подобен. Но

$$\xi + \vec{\alpha} = (x_i + \mathfrak{a}_i) - (x_{i'} + \mathfrak{a}_{i'}).$$

Определение 4. Пусть π — подстановка

$$\pi(0, 1, \ldots, n) = (k_0, \ldots, k_n).$$

Определим тогда

$$\mathfrak{W}^T_\pi(\underline{x}) = \mathfrak{W}^T(x_{k_0}, \ldots, x_{k_n}) \tag{7}$$

и

$$\Phi_\pi(\underline{\mathfrak{a}}) = \int \mathfrak{W}^T_\pi(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\, \varphi(\underline{x})\, d\underline{x}. \tag{8}$$

Это определение, по сути дела, уже является началом аналитической части доказательства второй вспомогательной теоремы. На первом этапе этой части используется локальность.

Лемма 3. *Пусть конфигурация* $\underline{a}$ *изменяется таким образом, что для данного разбиения* X, X' *все время выполняется неравенство* $n\delta(X) \geqslant d(\underline{a})$. *Тогда для любого натурального числа* M

$$d^M(\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_\pi) \to 0 \tag{9}$$

равномерно по $\underline{a}$ *при* $d \to \infty$. *Здесь* $\pi(0, 1, \ldots, n) = (i_0, \ldots, i_k, i'_0, \ldots, i'_{k'})$.

Доказательство.

$$\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_\pi = \int [\mathfrak{W}^T(\underline{x} + \underline{a}) - \mathfrak{W}^T_\pi(\underline{x} + \underline{a})]\varphi(\underline{x})\,d\underline{x}. \tag{10}$$

Поскольку $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}_\pi$ трансляционно инвариантны, можно, не теряя общности, выбрать $a_0 = 0$. Тогда

$$\|\underline{a}\| \leqslant d\sqrt{n}. \tag{11}$$

Из локальности следует, что точки в $\underline{x}$-пространстве, для которых $(x_i + a_i) - (x_{i'} + a_{i'})$ пространственно-подобны при любых $i \in X$, $i' \in X'$, не дают вклада в интеграл (10). Согласно лемме 2, как раз такая ситуация возникает, если $\|\underline{x}\| < d/2n$.

Далее, $\mathfrak{W}^T - \mathfrak{W}^T_\pi$ представляет собой обобщенную функцию медленного роста и, как таковая, является производной непрерывной функции, растущей не быстрее полинома [Sw 2*] (гл. I, § 1C, пример 2):

$$\mathfrak{W}^T - \mathfrak{W}^T_\pi = D^m\mathfrak{B}, \tag{12}$$

причем

$$|\mathfrak{B}(\underline{x})| < C(1 + \|\underline{x}\|^2)^{\alpha/2}, \tag{13}$$

где C — некоторая постоянная, а α — некоторое натуральное число. Подставив (13) в (10), мы получим

$$\mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}_\pi = (-1)^{|m|} \int\limits_{\|\underline{x}\| \geqslant d/2n} \mathfrak{B}(\underline{x} + \underline{a})\,D^m\varphi(\underline{x})\,d\underline{x} \tag{14}$$

или, положив $(-1)^{|m|}D^m\varphi=\varphi_1$,

$$\Phi-\Phi_\pi=\int\limits_{\|\underline{x}\|>d/2n}\mathfrak{B}(\underline{x}+\underline{a})\,\varphi_1(\underline{x})\,d\underline{x}. \tag{15}$$

Тем самым доказательство почти закончено, так как $\varphi_1(\underline{x})$ убывает быстрее любой степени полинома. Все, что нам нужно — это несколько оценок. Во-первых,

$$|\mathfrak{B}(\underline{x}+\underline{a})|<C(1+\|x+\underline{a}\|^2)^{\alpha/2}<$$
$$<C(1+2\|\underline{x}\|^2)^{\alpha/2}(1+2\|\underline{a}\|^2)^{\alpha/2}. \tag{16}$$

Во-вторых, для любого целого числа M найдется такая постоянная C_1, что

$$|\varphi_1(\underline{x})|<C_1\|\underline{x}\|^{-(M+\alpha+4n+5)}(1+2\|\underline{x}\|^2)^{-\alpha/2}. \tag{17}$$

В силу этих оценок, из (15) и (11) вытекает, что

$$|\Phi-\Phi_\pi|<S_n\cdot C\cdot C_1(1+2nd^2)^{\alpha/2}\int\limits_{d/2n}^{\infty}\|\underline{x}\|^{-M-\alpha-2}\,d\|\underline{x}\|, \tag{18}$$

где S_n — площадь поверхности $4(n+1)$-мерной единичной сферы. Теперь (9) следует из (18).

Замечание к лемме 3. Пусть π' — подстановка

$$\pi'(0,1,\ldots,n)=(i_0',\ldots,i_{k'}',i_0,\ldots,i_k).$$

Ясно, что при выполнении условий леммы 3

$$\lim_{d\to\infty}d^M(\Phi_\pi-\Phi_{\pi'})=0. \tag{19}$$

Используем теперь спектральное условие. Вспомним (гл. III, § 5, теорема), что в силу усечения точки носителя $\widetilde{\mathfrak{W}}^T$ удовлетворяют условиям $\sum\limits_{l=s}^{n}p_l\in\overline{V}_+^\mu$ при $1\leqslant s\leqslant n$ и $p_0+p_1+\ldots+p_n=0$. Последнее равенство есть, разумеется, просто условие трансляционной инвариантности.

Соответственно все точки носителя $\widetilde{\mathfrak{W}}_\pi^T$ удовлетворяют условию

$$P'=\sum_{i'\in X'}p_{i'}\in\overline{V}_+^\mu$$

и поэтому $P = \sum_{i \in X} p_i = -P' \in \overline{V}^{\mu}_{-}$. Однако точки носителя $\tilde{\mathfrak{W}}^{T}_{\pi'}$ обладают свойством $P' \in \overline{V}^{\mu}_{-}$ и $P \in \overline{V}^{\mu}_{+}$. Это приводит нас к очередной лемме.

Лемма 4. *Существует такая функция* $h_1 \in \mathscr{O}_M$ [Sw 2*] *(гл. I, § 1 C, пример 1), что*

$$h_1 \tilde{\mathfrak{W}}^{T}_{\pi} = \tilde{\mathfrak{W}}^{T}_{\pi} \quad и \quad h_1 \tilde{\mathfrak{W}}^{T}_{\pi'} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть функцию h_1, зависящую только от P_0. Пусть $h_1(P_0) = 1$ при $P_0 < -\mu/2$, $h_1(P_0) = 0$ при $P_0 > 0$ и $h_1 \in \mathscr{O}_M$, тогда соотношения (20) выполняются.

Лемма 5. *Если выполняются условия леммы* 3, *то для любого целого числа* M

$$\lim_{d \to \infty} d^M \Phi = 0 \tag{21}$$

равномерно по $\underline{\mathfrak{a}}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\psi} = h_1 \tilde{\varphi}$ и

$$\begin{aligned} \Psi_{\pi}(\underline{\mathfrak{a}}) &= \int \mathfrak{W}^{T}_{\pi}(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\, \psi(\underline{x})\, d\underline{x}, \\ \Psi_{\pi'}(\underline{\mathfrak{a}}) &= \int \mathfrak{W}^{T}_{\pi'}(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\, \psi(\underline{x})\, d\underline{x}. \end{aligned} \tag{22}$$

Из (20) следует, что $\Phi_{\pi} = \Psi_{\pi}$ и $\Psi_{\pi'} = 0$. Соотношение (19) остается справедливым, если вместо $\Phi_{\pi, \pi'}$ в него подставить $\Psi_{\pi, \pi'}$. Таким образом, $d^M \Psi_{\pi} = d^M \Phi_{\pi} \to 0$ при $d \to \infty$ и, согласно лемме 3, $d^M \Phi \to 0$. Говоря немного иначе, из оценок типа (18) мы получили следующий

Результат. Для любого целого числа M и любой конфигурации $\underline{\mathfrak{a}}$ выполняется неравенство

$$d^M(\underline{\mathfrak{a}})\, |\Phi(\underline{\mathfrak{a}})| < C_M(X), \tag{23}$$

где (X, X') — разбиение из леммы 1. Поскольку, однако, число различных разбиений (X, X') конечно, существует такое $C_M = \max_X C_M(X)$, что

$$d^M(\underline{\mathfrak{a}})\, |\Phi(\underline{\mathfrak{a}})| < C_M. \tag{24}$$

Соотношение (24) и второе замечание к вспомогательной теореме завершают доказательство этой теоремы.

Комментарии ко второй вспомогательной теореме. Доказывая вторую вспомогательную теорему, мы использовали локальность (в доказательстве леммы 3). Однако похоже на то, что лемма 3, а поэтому и вторая вспомогательная теорема справедливы и при более общих предположениях. Нужно лишь, чтобы коммутатор двух полей достаточно быстро убывал в пространственно-подобном направлении. Поэтому теория Хаага — Рюэля, по-видимому, приложима и к некоторым нелокальным теориям.

6. Доказательство теорем 1 и 2

Содержание § 4 настоящей главы совершенно не связано с какой-либо теорией поля. В § 5 использовано лишь, то, что TVEV являются обобщенными функциями медленного роста, а также трансляционная инвариантность TVEV, свойства носителей их Фурье-образов и локальность. Специальные предположения § 2 нигде не использовались. В этом параграфе мы, наконец, используем и эти ограничивающие предположения.

Начнем со свойства $B(t, \mathfrak{x})$, которое понадобилось нам в § 3.

Лемма 6. *При $\varphi \in \mathcal{S}$ оператор*

$$\int B(t, \mathfrak{x})\, \varphi(\mathfrak{x})\, d^3\mathfrak{x} = B_\varphi(t) \tag{1}$$

определен на D, принадлежит классу C_∞ по t и непрерывен по φ.

Доказательство.

$$B_\varphi(t) = \int \tilde{A}(p)\, h((p, p))\, \tilde{\varphi}(\mathfrak{p})\, e^{ip_0t} d^4p. \tag{2}$$

Функция $h((p, p))\,\tilde{\varphi}(\mathfrak{p})\, e^{ip_0t}$, как и все ее производные по времени, является основной функцией из $\mathcal{S}(R^4)$. При $\tilde{\varphi} \to 0$ она стремится к нулю.

Лемма 6 позволяет определить одновременные VEV и одновременные TVEV произведений B-полей и их производных по времени

$$\mathfrak{F}(\underline{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = F(\underline{\vec{\xi}}) = F(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n) \equiv$$
$$\equiv (\Omega, B(t, \mathfrak{x}_0)\, B(t, \mathfrak{x}_1) \ldots B(t, \mathfrak{x}_n)\, \Omega), \tag{3}$$

где $\vec{\xi}_k = \mathfrak{x}_k - \mathfrak{x}_0$; $\mathfrak{F}^T$ и F^T определяются с помощью обычной процедуры усечения. Аналогичные выражения возникают и в том случае, если на месте каких-то полей $B(t, \mathfrak{x}_i)$ стоят их производные по времени. Поскольку трансформационные свойства таких TVEV не имеют для нас значения, мы по-прежнему будем обозначать такие выражения через $\mathfrak{F}^T$ и F^T соответственно. Доказательство последующих лемм будет дано только для выражения (3). Доказательство соответствующих утверждений в общем случае совершенно аналогично.

Лемма 7. *При любой* $\varphi \in \mathscr{S}$ *функция*

$$\Phi(\underline{\vec{\mathfrak{a}}}) = \int \mathfrak{F}^T(\underline{\mathfrak{x}} + \underline{\mathfrak{a}})\, \varphi(\underline{\mathfrak{x}})\, d\underline{\mathfrak{x}}, \quad \vec{\mathfrak{a}}_k = \mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_0, \tag{4}$$

является элементом $\mathscr{S}$.

Доказательство. Из определения B и $\mathfrak{F}^T$ следует, что

$$\Phi(\underline{\vec{\mathfrak{a}}}) = \int \mathfrak{W}^T(\underline{x} + \underline{\mathfrak{a}})\, \psi(\underline{x})\, d\underline{x}, \tag{5}$$

где

$$\tilde{\psi}(p_0, \ldots, p_n) = \prod_{k=0}^{n} h((p_k, p_k))\, \tilde{\varphi}(\mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n). \tag{6}$$

Очевидно, $\tilde{\psi}(\underline{p}) \in \mathscr{S}$ и, таким образом, $\varphi(\underline{x}) \in \mathscr{S}$.

Вторая вспомогательная теорема приводит теперь к сформулированному утверждению.

Другой удобный способ доказательства леммы 7 состоит в применении теоремы Л. Шварца [Sw 2*, стр 100, теорема IX] (гл. I, § 1 C, пример 4, теорема).

Лемма 8. $\mathfrak{F}^T(0, \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n) = F^T(\underline{\vec{\xi}})$ *является конечной суммой производных от непрерывных функций, ограниченных по модулю выражениями вида* $C \prod_{k=1}^{n} (1 + \|\vec{\xi}_k\|^2)^{-2}$.

Выражаясь технически, $F^T(\underline{\vec{\xi}}) \in \mathscr{O}'_C$ [Sw 2*] (гл. I, § 1 C пример 4).

Лемма 9. *Пусть* $\{f_k \mid k=0, 1, \ldots, n\}$ — *произвольное множество гладких решений уравнения Клейна — Гордона, и пусть*

$$B_{f_k}(t) = i \int\limits_{x^0=t} \overline{f}_k \overleftrightarrow{\partial_0} B \, d^3x. \tag{7}$$

Тогда при $n \geqslant 1$

$$\left|\left(\Omega, B_{f_0}(t) B_{f_1}(t) \ldots B_{f_n}(t)\Omega\right)^T\right| |t|^{3(n-1)/2} \tag{8}$$

ограничено по t. *Это справедливо и в том случае, когда в* (8) *вместо некоторых операторов* $B_{f_k}(t)$ *стоят их производные любого порядка по времени.*

Доказательство. Доказательство базируется на лемме 8 и на первой вспомогательной теореме. Выражение (8) можно записать в виде

$$\left|\Sigma \int \mathfrak{F}^T(0, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) f_0'(t, \mathfrak{x}_0) f_1'(t, \mathfrak{x}_1) \prod_{k=2}^{n} t^{3/2} f_k'(t, \mathfrak{x}_k) \, d\underline{\mathfrak{x}}\right|, \tag{9}$$

где Σ обозначает конечную сумму, а штрих у $f_l(t, \mathfrak{x}_l)$ — возможную производную по времени. Воспользовавшись разложением из леммы 8, мы видим, что выражение (9) мажорируется конечной суммой членов вида

$$C\left(1+|t|^{3/2}\right)^{-1} \int \left(1+|t|^{3/2}\right) |f_0''(t, \mathfrak{x}_0| \, d^3\mathfrak{x} \times$$

$$\times \max_{\mathfrak{x}_1} |f_1''(t, \mathfrak{x}_1)| \prod_{k=2}^{n} |t|^{3/2} \max_{\mathfrak{x}_k} |f_k''(t, \mathfrak{x}_k)| \left[\int \frac{d^3\mathfrak{x}}{(1+\|\mathfrak{x}\|^2)^2}\right]^n, \tag{10}$$

где два штриха обозначают теперь возможные пространственно-временные производные. Согласно первой вспомогательной теореме, все члены вида (10) ограничены.

Следующая лемма является тривиальным следствием определения $B(t, \mathfrak{x})$ и предположений § 2.

Лемма 10. *Пусть $f(t, \mathfrak{x})$ — гладкое решение уравнения Клейна — Гордона, а $B_f(t)$ определен равенством*

$$B_f(t) = i \int\limits_{x^0 = t} \overline{f} \overleftrightarrow{\partial_0} B \, d^3\mathfrak{x}. \tag{11}$$

Тогда вектор $B_f(t)\Omega$ не зависит от времени.

Доказательство (гл. II, § 3, (11)). Вектор $B(x)\Omega$ удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. Это следует из того, что $B(\varphi)\Omega \in \mathfrak{H}_1$, и из свойств $\mathfrak{H}_1$.

Лемма 11 (*теорема I, первая часть*) [Ha 3; Ru 4]. *Пусть $B_{f_k}(t)$ снова определен равенством* (7). *Вектор*

$$\Phi(t) = B_{f_0}(t) B_{f_1}(t) \ldots B_{f_n}(t)\Omega \tag{12}$$

имеет сильный предел при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$.

Доказательство (Хааг). Разложим $\| d\Phi(t)/dt \|^2$ на произведения TVEV вида $\left(\Omega, B'_{f_{k_0}}(t) \ldots B'_{f_{k_r}}(t)\Omega\right)^T$, где штрих обозначает возможную производную по времени. При этом в разложении окажутся члены, которые содержат только TVEV, квадратичные по полям B_{f_k}. Два сомножителя в таких членах будут содержать производные по времени и будут иметь вид

$$\left(\Omega, B_f \frac{d}{dt} B_{f'}\Omega\right), \quad \text{или} \quad \left(\frac{d}{dt} B_f^* \Omega, B_{f'}\Omega\right).$$

Согласно лемме 11, они равны нулю. Оставшиеся члены содержат либо два кубичных сомножителя TVEV, либо один сомножитель более высокой степени, тем третья. Из леммы 9 мы знаем, что такие члены ограничены выражением $C_i |t|^{-3}$. Таким образом,

$$\left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\| < \frac{1}{2} C |t|^{-3/2}, \tag{13}$$

и при $t_2 < t_1 < 0$ мы получаем

$$\|\Phi(t_2) - \Phi(t_1)\| \leqslant \int\limits_{t_2}^{t_1} \left\| \frac{d\Phi(t)}{dt} \right\| dt < C \left\{ |t_2|^{-1/2} - |t_1|^{-1/2} \right\}, \tag{14}$$

и поэтому $\Phi(t)$ имеет предел при $t \to -\infty$.

Аналогичное доказательство справедливо для $t \to +\infty$.

Лемма 12 (*теорема 1, вторая часть*). *Предел вектора* (12) *при* $t \to -\infty$ ($t \to +\infty$) *не зависит от выбора системы отсчета в рамках собственной ортохронной группы Лоренца.*

Доказательство. Пусть $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Введем функции $f_{k,\Lambda}(x) = f_k(\Lambda^{-1}x)$, оператор $B_\Lambda(x) = B(\Lambda^{-1}x)$,

$$B_{f_k}^\Lambda(t) = i \int\limits_{x^0=t} \bar{f}_{k,\Lambda} \overleftrightarrow{\partial_0} B_\Lambda d^3x \tag{15}$$

и, наконец,

$$\Phi_\Lambda(t) = B_{f_0}^\Lambda(t) \ldots B_{f_n}^\Lambda(t)\,\Omega. \tag{16}$$

Теперь нужно показать, что

$$\|\Phi_\Lambda(t) - \Phi(t)\| \to 0 \tag{17}$$

при $t \to \mp\infty$. (Трансляционная инвариантность проверяется тривиально.)

Поскольку все введенные величины являются гладкими, мы можем спокойно применять инфинитезимальные преобразования Лоренца. Так как инвариантность относительно трехмерных вращений также тривиальна, можно ограничиться рассмотрением лишь инфинитезимальных преобразований $x^s\partial_0 - x^0\partial_s$, $1 \leqslant s \leqslant 3$. Вариация $B_f(t)$ при таких преобразованиях имеет вид

$$dB_f(t) = i \int\limits_{x^0=t} x^s \bar{f}(\Box + m^2)\, B d^3x. \tag{18}$$

Из (18) мы заключаем, что

$$dB_f(t)\,\Omega = 0, \tag{19}$$

так как $B(x)\,\Omega$ является решением уравнения Клейна — Гордона. Разложим затем $\|d\Phi(t)\|^2$ на TVEV. В силу (19) произведение квадратичных TVEV снова не дает вклада. Все остальные члены ведут себя при $|t| \to \infty$ по крайней мере как $|t|^{-1/2}$. Таким образом, $\|d\Phi(t)\| \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Читатель, надо полагать, помнит определения $\mathfrak{H}_{\text{in}}$, $\mathfrak{H}_{\text{out}}$ и $\mathfrak{H}_{\text{ex}}$, а также обозначение

$$\Phi^{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f) = \Phi^{\substack{\text{in}\\ \text{out}}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \lim_{t \to \mp\infty} B_{f_0}(t) \ldots B_{f_n}(t)\,\Omega, \tag{20}$$

данные в § 3.

Лемма 13 (*теорема* 2) [Ru 4]. *Скалярные произведения* $(\Phi^{ex}(\underline{f}), \Phi^{ex}(\underline{g}))$ *совпадают с соответствующими скалярными произведениями в случае свободного вещественного скалярного поля. Равенства*

$$A_f^{ex}\Phi^{ex}(f_0, \ldots, f_n) = \Phi^{ex}(f, f_0, \ldots, f_n) \tag{21}$$

определяют (с помощью линейного расширения) два вещественных скалярных поля $A^{in}(x)$ *и* $A^{out}(x)$. *Эти поля удовлетворяют условиям*

$$U(a, \Lambda) A^{ex}(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A^{ex}(\Lambda x + a) \tag{22}$$

и

$$\theta A^{in}(x)\theta = A^{out}(-x). \tag{23}$$

Доказательство. (a) Скалярные произведения векторов

$$B_{f_0}(t) \ldots B_{f_n}(t)\Omega \quad \text{и} \quad B_{g_0}(t) \ldots B_{g_m}(t)\Omega$$

разлагаются на TVEV. Из уже известных оценок следует, что все члены, кроме содержащих только квадратичные TVEV, исчезают в пределе при $t \to -\infty$ $(t \to +\infty)$. Согласно предположению (3), § 2, сумма остающихся в пределе членов в точности совпадает с соответствующим скалярным произведением в теории свободного скалярного нейтрального поля.

(b) Из (a) следует, что A_f^{ex}, определенный равенством (21), допускает представление

$$A_f^{ex} = i \int\limits_{x^0=t} \bar{f} \overleftrightarrow{\partial_0} A^{ex} d^3x,$$

где $A^{ex}(x)$ — свободное скалярное нейтральное поле.

(c) Соотношение (22) для $A^{ex}(x)$ следует из леммы 12.

(d) Трансформационные свойства $A^{in}(x)$ при TCP-преобразовании вытекают из соотношения $\theta A(x)\theta = A(-x)$.

7. Обсуждение результатов, заключительные замечания

Мы детально описали теорию Хаага — Рюэля, касающуюся асимптотических состояний и частиц, в применении к частному случаю. Ситуацию в общем случае, возможно не вполне ясную читателю, можно тем не менее представить себе с отчетливостью, достаточной для нижеследующего общего обсуждения.

Мы выяснили, что при естественных ограничениях на спектр P и на определенные полиномы операторов поля можно определить асимптотические свободные поля. Эти свободные поля обязательно обладают нормальными перестановочными соотношениями, если ими обладают исходные поля. Таким образом, соответствующие частицы имеют правильную связь между спином и статистикой, что вместе с результатами гл. V, § 2, является существенным достижением в понимании этого фундаментального закона природы.

Не существует никаких указаний на тесную связь между фигурирующими в теории полями и соответствующими асимптотическими частицами, если не считать тривиального ограничения, что асимптотические частицы с полуцелым спином могут появляться лишь в теории, содержащей по крайней мере одно спинорное поле.

Не исключено, что возможна теория с небольшим числом полей и большим числом стабильных частиц. Но мы не должны забывать, что проблема совместности аксиом с нетривиальной матрицей рассеяния $S \neq I$ совершенно не решена.

Ничего не известно и об обратной проблеме — можно ли каждой вводимой в теорию стабильной частице ставить в соответствие новое вайтманово поле, так чтобы оно обладало ненулевыми матричными элементами между Ω и одночастичными состояниями. В рамках аксиом ЛЗЦ эта задача успешно изучалась Циммерманом [Zi 1].

Введенный в § 3 дополнительный постулат полноты ин-состояний представляется нам очень важным. При обсуждении этого постулата мы ограничимся частным случаем, определенным предположениями § 2. Из постулата $\mathfrak{H}_{\mathrm{in}} = \mathfrak{H}$ вытекает нулевая аксиома, становящаяся по этой причине излишней. Этот постулат включает и даже уточняет также и третью аксиому, если не говорить о требовании $\Omega \in D$.

Более того, представление $U(a, \Lambda)$ из второй аксиомы однозначно определяется полем $A^{\text{in}}(x)$. В этой аксиоме остаются теперь лишь условия $U(a, \Lambda) A(x) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\Lambda x + a)$ и $U(a, \Lambda) D \subset D$. Теперь первая и четвертая аксиомы не испытывают никакого влияния дополнительного постулата. Пятая аксиома следует из равенства $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\text{in}}$ и нашего четвертого предположения.

Таким образом, мы видим, что постулат $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\text{in}}$ в значительной мере разрушает, казалось бы, так хорошо организованную структуру аксиом Вайтмана. Кроме того, он ставит под сомнение полезность и основного математического аппарата теории — обобщенных функций Вайтмана. Во всяком случае, не видно, каким образом, не сделав никаких новых ограничительных предположений (от возможности которых не следует отмахиваться, поскольку отнюдь не установлено, что аксиомы описывают только тривиальные модели), можно выразить постулат полноты на языке свойств вайтмановых функций.

В этой связи нужно упомянуть теорию S-матрицы в смысле ЛЗЦ. В такой теории (в простейшем случае ограниченной случаем нейтральных бесспиновых частиц) исходными величинами являются поля $A^{\text{in}}(x)$, $A^{\text{out}}(x)$ и унитарное преобразование S, удовлетворяющее условию $S^{-1} A^{\text{in}}(x) S = A^{\text{out}}(x)$. Что касается поля $A(x)$, то оно входит в теорию как интерполирующее поле, связывающее $A^{\text{in}}(x)$ и $A^{\text{out}}(x)$. Наиболее деликатный пункт теории состоит в точном определении смысла, в каком поле $A(x)$ имеет предел $A^{\text{in; out}}(x)$ при $t \to \mp \infty$. Эти пределы не определяют поле $A(x)$ однозначно. Однако предположение, что существует по крайней мере одно локальное интерполирующее поле, является самым существенным и интересным ограничением на S-матрицу. Так называемые асимптотические условия ЛЗЦ позволяют использовать аксиому полноты.

Мы совершенно не собираемся здесь обсуждать недавние и энергично разрекламированные „чисто S-матричные теории" в смысле Чу, которые упраздняют само понятие поля. Они также представляют собой еще лишь подлежащую заполнению оболочку, но совершенно в другом смысле, чем теория Вайтмана — структура этих теорий математически не определена. Они могут поглотить практически любую кажущуюся полезной идею. Разумеется, всегда можно выразить надежду, что эта идея могла бы быть следствием каких-то „фундаментальных предположений". Их лучше всего охарактеризовать по-немецки — „als ein Medium des freien Werdens" *).

*) По-русски это звучит примерно так: „Стихия свободных домыслов". — *Прим. ред.*

Глава VII

НОВЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ

1. Приложения *TCP*-теоремы

Интересное приложение *TCP*-инвариантности получено Борхерсом [Bo 1]. Пусть A — вещественное скалярное поле Вайтмана, введенное в гл. III, § 2, причем D — соответствующая инвариантная область определения, а $U(a, \Lambda)$ — соответствующее представление группы $P_+^\uparrow$ *). Пусть также $\{B_k\}$ — семейство операторнозначных обобщенных функций, определенных на D, причем $B_k(\varphi) D = B_k(\overline{\varphi})^* D \subset D$ и $U(a, \Lambda) B_k(x) U^{-1}(a, \Lambda) = B_k(\Lambda x + a)$. Тогда можно ввести следующие понятия.

Определение. Оператор B_k называется *локальным по отношению к* A, если

$$[A(x), B_k(y)]\Phi = 0 \tag{1}$$

при $(x-y)^2 < 0$ и любых $\Phi \in D$; B_k называется *слабо локальным по отношению к* A, если

$$\begin{aligned}(\Omega,\ A(r_0) \ldots A(r_{s-1}) B_k(r_s) A(r_{s+1}) \ldots A(r_n)\Omega) =\\ = (\Omega,\ A(r_n) \ldots A(r_{s+1}) B_k(r_s) A(r_{s-1}) \ldots A(r_0)\Omega)\end{aligned} \tag{2}$$

во всех вещественных точках голоморфности при всех $0 \leqslant s \leqslant n$ и всех n.

Теперь мы можем сформулировать две теоремы Борхерса.

Теорема. *Если все поля семейства* $\{B_k\}$ *локальны (слабо локальны) по отношению к* A, *то они локальны (слабо локальны) по отношению друг к другу.*

Теорема. *Пусть поле* A *удовлетворяет требованиям гл.* VI, *включая аксиому полноты. Пусть* B — *ве-*

---

*) Группа Пуанкаре $P_+^\uparrow$ состоит из элементов (a, Λ), где $a \in R^4$, $\Lambda \in L_+^\uparrow$. — *Прим. ред.*

щественное скалярное поле, определенное на D и обладающее асимптотическим полем B^{in}, причем

$$A^{\text{in}}(x) = B^{\text{in}}(x). \tag{3}$$

Если A и B слабо локальны по отношению друг к другу, то они отвечают одной и той же S-матрице, и обратно.

Замечание. Обе теоремы допускают почти автоматическое обобщение на более сложные случаи, например случай нескольких ин-полей или случай спинорных полей.

Определение. Класс вещественных скалярных полей B_k, определенных на D и локальных по отношению к A, называется *классом Борхерса поля A*.

Эпштейн [Ep 2] и Шроер и Лангерхолк [Sr 1] полностью охарактеризовали класс Борхерса свободного поля $A_0(x)$. В четырехмерном случае это — полиномы Вика поля $A_0(x)$: пусть $\{P_m(\lambda)\}$ — конечное множество вещественных полиномов по переменной λ, тогда поля

$$A(x) = \sum_m P_m(\square) : A_0^m : (x) \tag{4}$$

(строгое их определение дано в [Ep 2], [Wi 3]) исчерпывают (скалярный по отношению к преобразованиям Лоренца) класс Борхерса поля $A_0(x)$ в четырехмерном пространстве-времени. В двумерном случае в класс Борхерса входят также некоторые целые функции $A_0(x)$ [Ja 1]. Это обстоятельство имеет важные приложения в исследованиях двумерных моделей [Wi 9]. Описание локальных колец, порожденных полями (4), можно найти в [Sr 1]. Состояния рассеяния для полей из одного класса Борхерса тесно связаны друг с другом [Ar 7], [Do 1]. Пусть B_1 и B_2 — два полинома от сглаженных полей из одного и того же класса Борхерса (на самом деле для теории Хаага — Рюэля достаточно даже, чтобы B_1 и B_2 были почти локальны*) и взаимно почти локальны). Допустим далее, что каждое из B_1 и B_2 порождает одно одночастичное состояние в пространстве одного и того же дискретного неприводимого представления $[m, s]$, возникающего при разложении $U(a, \Lambda)$. Тогда все много-

*) Определение почти локальных полей содержится в работах [Ha 3], [Ru 4]. — *Прим. ред.*

частичные состояния рассеяния для частиц этого сорта $\Phi^{ex}(f_1, \ldots, f_n)$, где волновые функции $f_1, \ldots, f_n$ лежат в $\mathscr{D}(R^3)^{\times(2s+1)}$, можно построить, пользуясь либо только полем B_1, либо только полем B_2.

2. Связь между аксиоматикой Вайтмана и аксиоматикой Лемана, Зиманцика и Циммермана

Значение аксиоматики ЛЗЦ [LSZ 1, 2], [GLZ 1] для квантовой теории поля определяется ее естественной связью с наблюдаемыми величинами. Использование в редукционных формулах следствий локальности интерполирующих полей и спектрального условия (содержащегося уже в асимптотической полноте) позволяет выявить аналитические свойства амплитуды рассеяния и провести, следуя Зиманцику, анализ многочастичной структуры функций Грина [Sy 2, 3, 4].

В случае единственной скалярной частицы с массой $m > 0$ аксиоматика ЛЗЦ требует следующих дополнительных по сравнению с теорией Вайтмана предположений [1]):

(1) Асимптотическая полнота

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^{\text{in}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n^{\text{out}}. \tag{5}$$

(2) Асимптотическое условие ЛЗЦ. Существует такое нейтральное скалярное поле $A(x)$, что на плотном множестве состояний Φ, Ψ и при любых $h \in \mathscr{S}(R^1)$ (гл. VI, § 2 (2)) имеет место равенство

$$\lim_{t \to t^{\text{ex}}} (\Phi, B_f(t)\Psi) = (\Phi, A_f^{\text{ex}}\Psi), \tag{6}$$

где либо Φ, либо Ψ — состояние рассеяния при t^{ex}.

---

[1]) Обобщение на случай высших спинов не составляет труда. Однако проблема существования локального интерполирующего поля, отвечающего хааг-рюэлевому связанному состоянию (т. е. одночастичному состоянию, порожденному полиномом от локальных полей), еще далека от разрешения [Zi 1].

(3) **Существование обобщенных запаздывающих функций.** Пусть Σ — пространство всех $(s) = (s_0, \ldots, s_n) \in R^{n+1}$, где $\sum_{i=0}^{n} s_i = 0$. Плоскости

$$\left\{ s_X \equiv \sum_{i \in X} s_i = 0 \right\}, \qquad \varnothing \neq X \subsetneqq \{0, \ldots, n\} \tag{7}$$

разделяют Σ на некоторое множество замкнутых выпуклых конусов Σ_α. Для всех α и $\varnothing \neq X \subsetneqq \{0, \ldots, n\}$ существует такой согласованный выбор знаков $\sigma(\alpha, X) = \pm 1$, что при любом $(s) \in \Sigma_k$ $\sigma(\alpha, X) s_X \geqslant 0$. Отвечающий Σ_α открытый выпуклый конус $\tilde{C}_\alpha$ в пространстве всех $(q) = (q_0, \ldots, q_n)$ из $R^{4(n+1)}$, где $\sum_{i=0}^{n} q_i = 0$, определен соотношением

$$\tilde{C}_\alpha = \left\{ (q) : \sum_{i \in X} q_i \in V_{\sigma(\alpha, X)} \ \forall\, \varnothing \neq X \subsetneqq \{0, \ldots, n\} \right\}, \tag{8}$$

где $V_{\sigma(\alpha, X)} = V_\pm$, если $\sigma(\alpha, X) = \pm 1$. Сопряженный к $\tilde{C}_\alpha$ конус мы обозначим через C_α:

$$C_\alpha = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in R^{4(n+1)} : \sum_{i=0}^{n} (x_i, q_i) \geqslant 0 \ \forall (q) \in \tilde{C}_\alpha \right\}. \tag{9}$$

Постулируется, что для любого конуса Σ_α существует обобщенная функция медленного роста $r_\alpha(x_0, \ldots, x_n)$, обладающая формальными свойствами выражения

$$\sum_{\pi} \sigma(\alpha, \pi) \prod_{i=0}^{n-1} \Theta_i(\alpha, \pi) \langle A(x_{\pi 0}) \ldots A(x_{\pi n}) \rangle_0 {}^{*}). \tag{10}$$

Здесь суммирование $\sum_{\pi}$ распространяется на все перестановки π чисел $(0, \ldots, n)$, а

$$\sigma(\alpha, \pi) = \prod_{i=0}^{n-1} \sigma(\alpha, \{\pi 0, \ldots, \pi i\}),$$

$$\Theta_i(\alpha, \pi) = \Theta\left(\sigma(\alpha, \{\pi 0, \ldots, \pi i\}) \left(x^0_{\pi i} - x^0_{\pi(i+1)}\right)\right). \tag{11}$$

*) Здесь используется другое обозначение для вакуумных средних: $\langle \ \rangle_0 = (\Omega, \ldots \Omega)$. — *Прим. ред.*

Нетрудно проверить, что это определение согласуется с определением обычных запаздывающих обобщенных функций [GLZ 1] в терминах многократного коммутатора

$$r_i(x_0, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{\pi}{}' \prod_{i=0}^{n-1} \Theta\left(x^0_{\pi i} - x^0_{\pi(i+1)}\right) \left\langle \left[\ldots \left[A(x_{\pi 0}), A(x_{\pi 1}) \right] \ldots A(x_{\pi n}) \right] \right\rangle_0, \tag{12}$$

где $\sum_{\pi}{}'$ распространяется на все перестановки π, для которых $\pi 0 = i$. В этом случае соответствующие конусы Σ_i характеризуются неравенством $s_j \leqslant 0$ для всех $j \neq i$.

Нам понадобятся следующие свойства $r_\alpha(x_0, \ldots, x_n)$ (см. [Ste 1, 2], [Ru 1, 2], [Ar 3, 4], [Bro 2]):

(a) Совпадение запаздывающих функций с соответствующими VEV типа (12) вне поверхностей разрыва ступенчатых функций.

(b) Лоренц-инвариантность: при всех $(a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$

$$r_\alpha(x_0, \ldots, x_n) = r_\alpha(\Lambda x_0 + a, \ldots, \Lambda x_n + a). \tag{13}$$

(c) Свойства носителя в x-пространстве

$$\operatorname{supp} r_\alpha \subset C_\alpha. \tag{14}$$

(d) Спектральное условие: если конусы Σ_α и Σ_β разделены только гранью $\{s_X = 0\}$ (т. е. $\dim \Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta \cap \{s_X = 0\} = n - 1$), то

$$\tilde{r}_\alpha(p_0, \ldots, p_n) = \tilde{r}_\beta(p_0, \ldots, p_n) \; \forall p_X^2 = \Big(\sum_{i \in X} p_i\Big)^2 < 4m^2, \tag{15}$$

кроме точки $p_X^2 = m^2$.

(e) Соотношения Штайнмана; при $n \geqslant 3$ пересечение двух $(n-1)$-плоскостей $\{s_X = 0\}$ и $\{s_Y = 0\}$, $X \neq Y$, является $(n-2)$-плоскостью, не содержащейся ни в какой другой $(n-1)$-плоскости $\{s_Z = 0\}$, $Z \neq X, Y$ в том и только в том случае, если X, CX, Y и CY *) имеют попарно непустые пересечения. Тогда эта $(n-2)$-плоскость разделяется всеми

*) Здесь и в дальнейшем C означает операцию дополнения множества. — *Прим. ред.*

$\{s_Z = 0\}$, $Z \neq X$, Y, на выпуклые конусы. Для каждого из этих конусов найдутся в точности четыре конуса Σ_{++}, Σ_{+-}, Σ_{-+}, Σ_{--}, содержащие исходный конус в качестве $(n-2)$-мерной грани, причем (рис. 6)

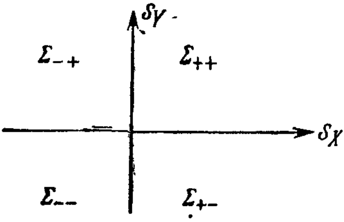

Рис. 6.

$$s_X \gtreqless 0, \quad s_Y \gtreqless 0 \quad \text{при} \quad (s) \in \Sigma_{\pm\pm}. \tag{16}$$

Для этих конусов справедливо соотношение Штайнмана

$$r_{++} + r_{--} = r_{+-} + r_{-+}. \tag{17}$$

Если VEV $\langle A(x_{\pi 0}) \ldots A(x_{\pi n})\rangle_0$ достаточно регулярны и допускают умножение на произведения Θ-функций, то свойства (a) — (e) можно проверить непосредственно [Bro 2]. Кроме предположений (1) — (3), в теории ЛЗЦ часто используется изменение порядка перехода к пределу и сужение обобщенных функций на массовую поверхность.

Возникает вопрос, в какой степени результаты подхода ЛЗЦ могут быть осознаны в рамках асимптотически полной вайтмановой квантовой теории поля. Что касается асимптотического условия, то здесь ситуация вполне удовлетворительная. Техника Хаага — Рюэля сильной сходимости дает полное описание времениподобной асимптотики сглаженных локальных полей, заданных на плотном множестве состояний рассеяния.

Определение. Множество волновых функций $\{f_i\} \subset \mathcal{S}(R^3)$ называется *неперекрывающимся*, если носители f_i попарно разделены в пространстве скоростей

$$\vec{p}_i\left(m_i^2 + \vec{p}_i^{\,2}\right)^{-1/2} \neq \vec{p}_j\left(m_j^2 + \vec{p}_j^{\,2}\right)^{-1/2} \tag{18}$$

при всех $i \neq j$ и $\vec{p}_k \in \operatorname{supp} f_k$, $k = i, j$. Оценки, подобные оценкам гл. VI, приводят к следующей теореме [Hep 5, 6].

Теорема. *Для неперекрывающихся функций*

$$\{f_i\} \subset \mathcal{S}(R^3)$$

и подходящих $h_i((p, p))$

$$\left\| \frac{d}{dt} \prod_{i=1}^{n} B_{f_i}^{(*)}(t)\,\Omega \right\|^2 \in \mathscr{S}(R^1). \tag{19}$$

Для любого полинома Q *по сглаженным вайтмановым полям состояние* $\Phi^{\text{ex}}(f_1, \ldots, f_n)$ *принадлежит области определения оператора* Q^{**} *и*

$$\lim_{t \to t^{\text{ex}}} \prod_{i=1}^{n} B_{f_i}(t)^{*(*)}\,\Phi^{\text{ex}}(f_1, \ldots, f_n) = \prod_{i=1}^{n} A_{f_i}^{\text{ex}\,*(*)}\Phi^{\text{ex}}(f_1, \ldots, f_n), \tag{20}$$

где предел понимается в сильном смысле.

Предположив асимптотическую полноту и записав для $\tilde{g} \in \mathscr{S}(R^4)$ $g(\vec{p}) = \tilde{g}\left((m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}, \vec{p}\right)$
и

$$A(\tilde{g}, t) = (2\pi)^{-1/2} \int d^4p\,\tilde{A}(-p)\,\tilde{g}(p) \exp\left\{i\left(p^0 - (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2}\right)t\right\}, \tag{21}$$

можно доказать справедливость асимптотических условий ЛЗЦ:

$$\lim_{t \to t^{\text{ex}}} A(\tilde{g}, t)^{*(*)}\,\Phi^{\text{ex}}(f_1, \ldots, f_n) = A_g^{\text{ex}*(*)}\Phi^{\text{ex}}(f_1, \ldots, f_n), \tag{22}$$

где предел понимается уже в слабом смысле.

Следующая теорема Араки и Хаага [Ar 11] допускает интерпретацию в терминах счетчиков Гейгера.

Теорема. *Для гладких неперекрывающихся состояний рассеяния* Φ, $\Psi \in \mathfrak{H}^{\text{out}}$ *и* $Q(x) = U(x, 1)\,Q\,U(-x, 1)$ *выполняется равенство*

$$\begin{aligned}(\Phi, Q(x)\Psi) = {} & (\Omega, Q\Omega)(\Phi, \Psi) + \\ & + \sum_i \int d^3\vec{p}\,\Big\{(\vec{p}, i\,|\,Q(x)\,\Omega)\left(\Phi, a_i^{\text{out}}(\vec{p})^*\,\Psi\right) + \\ & + (\Omega, Q(x)\,|\,\vec{p}, i)\left(\Phi, a_i^{\text{out}}(\vec{p})\,\Psi\right)\Big\} + \\ & + \sum_{i, j} \int d^3\vec{p}\,d^3\vec{q}\,(\vec{p}, i\,|\,Q(x)\,|\,\vec{q}, j)\left(\Phi, a_i^{\text{out}}(\vec{p})^*\,a_j^{\text{out}}(\vec{q})\,\Psi\right) + R(x),\end{aligned} \tag{23}$$

где $R(x)$ убывает быстрее любой степени x^0 при $x \to \infty$ внутри конуса $\{x^0 \geqslant a|\vec{x}|,\ a > 1\}$. Суммирования $\sum\limits_i$ и $\sum\limits_{i,j}$ распространяются на все виды частиц; асимптотическая полнота не предполагается.

Для неперекрывающихся скоростей и любого определения хронологических обобщенных функций $\tau(x_0, \ldots, x_n)$, приводящего к совпадению $\tau(\underline{x})$ с $\langle A(x_{\pi 0}) \ldots A(x_{\pi n})\rangle_0$ при $x^0_{\pi 0} \gg \ldots \gg x^0_{\pi n}$, можно доказать редукционные формулы ЛЗЦ в следующей сильной форме [Hep 5, 6].

Теорема.

$$\langle \vec{p}_0, \ldots, \vec{p}_m^{\,\mathrm{out}} | \vec{p}_{m+1}, \ldots, \vec{p}_n^{\,\mathrm{in}}\rangle =$$
$$= \left(-i\sqrt{2\pi}\right)^{n+1} \prod_{i=0}^{n} (p_i^2 - m^2)$$
$$\times \tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_m, -p_{m+1}, \ldots, -p_n)\Big|_{p_i^0 = \left(m^2 + \vec{p}_i^{\,2}\right)^{1/2}}. \qquad (24)$$

Здесь $\tilde{\tau}$ принадлежит классу C^∞ по $p_i^0 - \left(m^2 + \vec{p}_i^{\,2}\right)^{1/2}$ в окрестности энергетической поверхности (предполагается, что $\tilde{\tau}$ сглажена по неперекрывающимся $\vec{p}_0, \ldots, \vec{p}_n$).

В окрестности любой точки $(p) = (p_0, \ldots, p_n)$, где $\sum p_i = 0$, существует по крайней мере одна $\tilde{r}_\alpha(p_0, \ldots, p_n)$, совпадающая с $\tilde{\tau}(p_0, \ldots, p_n)$. На массовой поверхности для процессов перехода двух частиц в $m \geqslant 2$ частиц можно воспользоваться, например, опережающими обобщенными функциями. Поэтому амплитуды рассеяния допускают экстраполяцию за пределы массовой поверхности с помощью обобщенных запаздывающих функций, в терминах которых легко выразить спектральные условия, асимптотическую полноту и локальность интерполирующих полей. Это исходный пункт поисков «максимальной аналитичности» в квантовой теории поля (см. следующий параграф).

Матричные элементы запаздывающих произведений двух операторов поля $R_\pm(x, y) = \pm\theta(\pm(x^0 - y^0))\,[A(x), A(y)]$ вида $\langle\vec{p}\,|R_\pm(x, y)|\,\vec{q}\rangle$ и $\langle R_\pm(x_1, x_2) R_\pm(x_3, x_4)\rangle_0$ можно определить с помощью представления Йоста — Лемана — Дайсона [Jo 1], [Dy 2]. Пользуясь такого рода точными интегральными представлениями и информацией из доказательства асимптотического условия, можно [Hep 4] связать непосредственно с аксиомами Вайтмана классические результаты Н. Н. Боголюбова и других [Bog 1*], [Bm 1], [Sy 1] и Лемана [Le 1, 2], касающиеся дисперсионных соотношений с конечным числом вычитаний и аналитичности по передаче импульса двухчастичной амплитуды рассеяния.

Проблема построения обобщенных запаздывающих функций, удовлетворяющих условиям (a) — (e), непосредственно из вайтмановых обобщенных функций пока еще не решена, если не считать положительного результата Сторы [Sto 1] для трехточечной функции и некоторых частичных результатов Штайнмана [Ste 3].

3. Аналитические свойства четырехточечной функции в p-пространстве

То, что носитель обобщенных запаздывающих функций $r_\alpha(x_0, \ldots, x_n)$ содержится в конусах C_α, приводит к заключению, что их фурье-образы[1]) $\tilde{r}_\alpha(p_0, \ldots, p_n)$ представляют собой граничные значения в $\mathscr{S}'(R^{4n})$ функций $H_\alpha(k_0, \ldots, k_n)$ $\left(\text{где } \sum_{i=0}^{n} k_i = 0,\ k_i = p_i + iq_i\right)$, голоморфных в трубчатых областях

$$\mathfrak{T}_\alpha = \{(k)\colon\ (q) \in \tilde{C}_\alpha\}. \tag{25}$$

Согласно спектральному условию и теореме «острие клина» (ОК), функции H_α имеют общее аналитическое продолжение $H(K_0, \ldots, K_n)$ в образ Δ_n объединения $\bigcup_\alpha \mathfrak{T}_\alpha$ (посредством

[1]) Мы пользуемся следующим определением:
$r_\alpha(x_0, \ldots, x_n) =$

$$= (2\pi)^{-2(n+1)} \int \prod_{i=0}^{n} dp_i \delta\left(\sum_{i=0}^{n} p_i\right) \tilde{r}_\alpha(p_0, \ldots, p_n) \times$$
$$\times \exp\left[-i \sum_{i=0}^{n} (p_i, x_i)\right].$$

отображения $L_+(C)$) с окрестностью ОК-области. При $n > 1$ эта область не является областью голоморфности. Отыскание соответствующей оболочки голоморфности $\mathscr{H}(\Delta_n)$ называется «линейной программой». Сверх того, здесь нужно использовать тот факт, что исходные обобщенные функции с носителем в C_α удовлетворяют спектральному условию и соотношениям Штайнмана. Исследования часто носят геометрический характер и обычно без изменений могут быть перенесены на случай «гладких» обобщенных запаздывающих функций, которые можно определить в теории Вайтмана с помощью регуляризованных ступенчатых функций.

Известно (см. [Bro 2], [Ep 3]), что $\mathscr{H}(\Delta_n)$ однолистна и $L_+(C)$-инвариантна, если все пороговые массы M_X строго положительны. Более того, разрезы

$$\Gamma_X = \{(k)\colon\ k_X^2 \in [M_X^2,\ \infty)\} \tag{26}$$

никогда не пересекают $\mathscr{H}(\Delta_n)$, даже если на них наложены ограничения, вытекающие из соотношений Штайнмана. Такие исследования показывают, как появляется мандельстамовская [Ma 1, 2] область аналитичности четырехточечной функции на массовой поверхности, — простейшая область, совместная с линейными ограничениями.

Брос, Эпштейн и Глазер [Bro 2, 3, 4], [Ep 3] получили несколько новых важных свойств аналитичности четырехточечной функции. Геометрически ситуация характеризуется 32 конусами $\tilde{C}_\alpha$ в p-пространстве, а именно

$$\begin{aligned} V_j^+ &= -V_j^- = \{(q)\colon\ q_k \in V_+,\ q_m \in V_+,\ q_n \in V_+\}, \\ V_{jk}^+ &= -V_{jk}^- = \\ &= \{(q)\colon\ -q_k \in V_+,\ q_k + q_m \in V_+,\ q_k + q_n \in V_+\}, \end{aligned} \tag{27}$$

где $\{j,\ k,\ m,\ n\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Обобщенные функции, являющиеся граничными значениями $H(k) = H(k_0,\ \ldots,\ k_3)$ при стремлении аргумента к вещественным значениям изнутри трубчатых областей $\mathfrak{T}_\alpha = R^{12} + i\tilde{C}_\alpha$, суть

$$\begin{aligned} r_j(p) &= \lim_{V_j^- \ni (q) \to 0} H(k), & a_j(p) &= \lim_{V_j^+ \ni (q) \to 0} H(k), \\ r_{jk}(p) &= \lim_{V_{jk}^- \ni (q) \to 0} H(k), & a_{jk}(p) &= \lim_{V_{jk}^+ \ni (q) \to 0} H(k). \end{aligned} \tag{28}$$

Выполняются следующие равенства (в смысле обобщенных функций):

$$
\left.\begin{array}{l} r_j(p) = r_{jk}(p) \\ a_j(p) = a_{jk}(p) \end{array}\right\} \text{ в } \quad R_k = \{(p)\colon\ p_k^2 < M_k^2\},
$$
$$
r_{jk}(p) = a_{mn}(p) \quad \text{в } R_{jm} = \{(p)\colon\ (p_j + p_m)^2 < M_{jm}^2\}. \tag{29}
$$

Здесь предполагается, что пороговые массы M_k, $M_{jm} = M_{mj} = M_{kn}$ удовлетворяют условиям стабильности

$$
\begin{gathered} 0 < m_k < M_k \leqslant 2m_k, \qquad 0 \leqslant k \leqslant 3, \\ |m_k - m_l| < M_{kl} \leqslant m_k + m_l, \qquad 0 \leqslant k \neq l \leqslant 3. \end{gathered} \tag{30}
$$

Одночастичные сингулярности $H(k)$ при $k_l^2 = m_l^2$ устраняются умножением на

$$
\prod_{i=0}^{3} (k_i^2 - m_i^2).
$$

В пространстве Σ взаимное расположение конусов Σ_α наглядно демонстрируется рис. 7 и 8 (центральная проекция

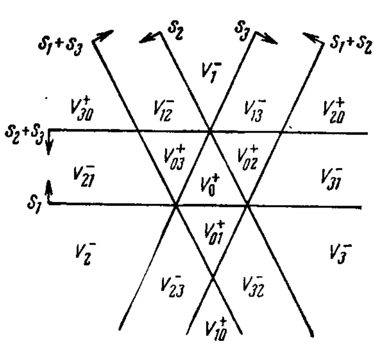

Рис. 7.

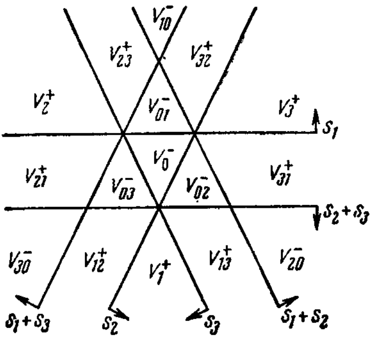

Рис. 8.

на $\{s_1 + s_2 + s_3 = \pm\xi\}$ единичной сферы в $R^3(s_1, s_2, s_3)$ с центром в (0), пересеченной плоскостями $\{s_1 + s_2 + s_3 = 0\}$, $\{s_i + s_j = 0\}$, $\{s_l = 0\}$).

Наконец, введем еще обозначения для разрезов

$$
\begin{aligned} \Gamma_l &= \{(k)\colon\ k_l^2 \geqslant M_l^2\}, && 0 \leqslant l \leqslant 3, \\ \Gamma_{jk} &= \{(k)\colon\ (k_j + k_k)^2 \geqslant M_{jk}^2\}, && 0 \leqslant j \neq k \leqslant 3. \end{aligned} \tag{31}
$$

Используя в качестве аппарата аналитического расширения усовершенствованные варианты ОК-теоремы и теоремы о трубе, Брос, Эпштейн и Глазер получили информацию об $\mathscr{H}(\Delta_n)$, причем эта информация носит частично глобальный, а частично локальный характер. Нижеследующие глобальные теоремы, хотя они и интересны сами по себе, не дают, однако, ничего для аналитичности $H_3(k)$ на массовой поверхности.

Теорема.

$$\mathscr{H}(\mathfrak{T}_j^{\pm} \cup \mathfrak{T}_{jk}^{\pm} \cup N(R_k)) = \Lambda_{jk}^{\pm} \cap C\Gamma_k, \tag{32}$$

где $N(R_k)$ есть ОК-окрестность R_k, а $\Lambda_{jk}^{\pm}$ — выпуклая оболочка $\mathfrak{T}_j^{\pm} \cup \mathfrak{T}_{jk}^{\pm}$.

Следствие. Функция $H_3(k)$ голоморфна в

$$\bigcup_{j,\,k} (\Lambda_{jk}^{\pm} \cap C\Gamma_k). \tag{33}$$

Для смежных трубчатых областей $\mathfrak{T}_{jk}^{\pm}$ и $\mathfrak{T}_{mn}^{\mp}$, $\{j, k, m, n\} = \{0, 1, 2, 3\}$ с ОК-областью R_{jm} можно получить более сильный результат. Основная идея состоит в том, чтобы разложить «квартет Штайнмана», т. е. обобщенные функции a_{01}, a_{10}, r_{23}, r_{32}, носитель которых в x-пространстве описывается соотношениями

$$\begin{gathered}
\operatorname{supp} r_{23} \subset S_1 \cup S_2, \quad \operatorname{supp} r_{32} \subset S_3 \cup S_4, \\
\operatorname{supp} a_{01} \subset S_1 \cup S_4, \quad \operatorname{supp} a_{10} \subset S_2 \cup S_3, \\
S_1 = \{x_0 - x_2 \in \overline{V}_-,\ x_0 - x_3 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_2 \in \overline{V}_-\}, \\
S_2 = \{x_0 - x_2 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_2 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_3 \in \overline{V}_-\}, \\
S_3 = \{x_0 - x_3 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_2 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_3 \in \overline{V}_-\}, \\
S_4 = \{x_0 - x_2 \in \overline{V}_-,\ x_0 - x_3 \in \overline{V}_-,\ x_1 - x_3 \in \overline{V}_-\},
\end{gathered} \tag{34}$$

на обобщенные функции $f_1, \ldots, f_4$ с $\operatorname{supp} f_i \subset S_i$:

$$\begin{gathered}
r_{23} = f_1 + f_2, \quad r_{32} = f_3 + f_4, \\
a_{01} = f_1 + f_4, \quad a_{10} = f_2 + f_3.
\end{gathered} \tag{35}$$

Оказывается, что необходимыми и достаточными условиями непротиворечивости такого разложения служат соотношения Штайнмана

$$r_{23} + r_{32} = a_{01} + a_{10}. \tag{36}$$

Равенства в p-пространстве, например $\tilde{a}_{01}(p)=\tilde{r}_{23}(p)$ при $(p_1+p_3)^2<M_{13}^2$, приводят к

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1(p)&=\tilde{f}_3(p) \quad \text{для} \quad (p_1+p_2)^2<M_{12}^2,\\ \tilde{f}_2(p)&=\tilde{f}_4(p) \quad \text{для} \quad (p_1+p_3)^2<M_{13}^2.\end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_3$ ($\tilde{f}_2$ и $\tilde{f}_4$) голоморфны в трубчатых областях $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_3$ ($\mathfrak{T}_2$ и $\mathfrak{T}_4$) с основаниями $\mathring{\tilde{S}}_1$ и $\mathring{\tilde{S}}_3$ ($\mathring{\tilde{S}}_2$ и $\mathring{\tilde{S}}_4$) и совпадают в R_{12} (R_{13}). Ситуация иллюстрируется рис. 9.

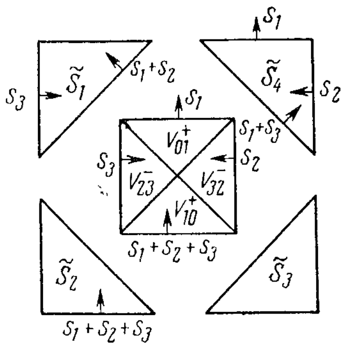

Рис. 9.

Рассуждая так же, как и в предыдущей теореме, мы приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(\mathfrak{T}_1\cup\mathfrak{T}_3\cup N(R_{12}))&=\Xi_{01}\cap C\Gamma_{03},\\ \mathscr{H}(\mathfrak{T}_2\cup\mathfrak{T}_4\cup N(R_{13}))&=\Xi_{01}\cap C\Gamma_{03},\end{aligned} \tag{38}$$

где Ξ_{01} — выпуклая оболочка $\mathfrak{T}_1\cup\mathfrak{T}_3$ или $\mathfrak{T}_2\cup\mathfrak{T}_4$, т. е. фактически $\mathfrak{T}_{01}^+\cup\mathfrak{T}_{10}^+\cup\mathfrak{T}_{23}^-\cup\mathfrak{T}_{32}^-$. Наконец, используя (35), мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Функция $H_3(k)$ голоморфна в области*

$$\Xi_{01}\cap C\Gamma_{02}\cap C\Gamma_{03}. \tag{39}$$

Брос [Bro 2] распространил эту технику на n-точечные функции $H_n(k)$. Функция r_α допускает разложение

$$r_\alpha=\sum_\beta k_{\alpha\beta}f_\beta; \quad k_{\alpha\beta}=1,\ 0,\ -1, \tag{40}$$

где носитель f_β содержится в симплициальных выпуклых конусах в x-пространстве. Из спектральных условий вытекает равенство определенных сумм $\tilde{f}_\beta$ в областях типа R_X. Посредством аналитического расширения можно получить области, пересеченные единственным разрезом Γ_X. Поэтому $H_n(k)$ голоморфна в определенных трубчатых областях, пересеченных несколькими разрезами.

С помощью локального голоморфного расширения Брос, Эпштейн и Глазер получили аналитические свойства $H_3(k)$ (и $H_2(k)$) в окрестности вещественных точек p, где геометрическая ситуация весьма напоминает ОК-случай.

Рассмотрим вещественную физическую точку (p) на массовой поверхности, где, например,

$$\begin{aligned} &p_i^2 = m_i^2 < M_i^2, \quad 0 \leqslant i \leqslant 3, \\ &t = (p_0 + p_1)^2 < M_{01}^2, \quad u = (p_0 + p_2)^2 < M_{02}^2, \\ &s = (p_0 + p_3)^2 \geqslant M_{03}^2. \end{aligned} \tag{41}$$

В окрестности (p) можно воспользоваться информацией, полученной из расширения двух противоположных квартетов Штайнмана $\{a_{01}, a_{10}, r_{23}, r_{32}\}$ и $\{r_{01}, r_{10}, a_{23}, a_{32}\}$. На самом деле, однако, для получения окончательного результата соотношения Штайнмана не нужны. Функция $H_3(k)$ голоморфна в $\Xi_{01} \cap C\Gamma_{02} \cap C\Gamma_{03}$ и в $(-\Xi_{01}) \cap C\Gamma_{02} \cap C\Gamma_{03}$, причем разрез Γ_{02} не проходит в шаровой окрестности $N(p)$ точки (p). Применяя усовершенствованную ОК-теорему к противоположным трубчатым областям Ξ_{01} и $-\Xi_{01}$ за вычетом разреза Γ_{03} и к ОК-области — пересечению $R_0 \cap R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_{01} \cap R_{02}$ с $N(p)$, мы получаем аналитичность $H_3(k)$ в $N(p)$ по обе стороны от Γ_{03} [Bro 3].

Теорема. *При выполнении условий стабильности* (30) *сужение $H_3(k)$ на комплексную массовую поверхность голоморфно в $L(C)$-инвариантном открытом множестве G. Образ G в пространстве инвариантов s, t, u представляет собой комплексную окрестность объединения трех физических областей за вычетом разрезов* Γ_{01}, Γ_{02}, Γ_{03}. *Открытое множество G является связным в бесконечности; например, при любом фиксированном $t \leqslant 0$ имеется аналитичность по s на множестве*

$$\{s\colon |s| > R(t)\} \cap C\Gamma_{02} \cap C\Gamma_{03}, \tag{42}$$

где $R(t) < \infty$. Граничные значения при $\operatorname{Im} s \to 0$, $\operatorname{Im} s > 0$ *совпадают с двухчастичной амплитудой рассеяния $T(s, t)$.*

„Кроссинг"-свойство $\mathrm{T}(s, t)$ было доказано в [Bro 2, 4] с помощью локального расширения „на бесконечности". Вопрос, можно ли доказать аналогичные результаты для $H_n(k)$, остается открытым.

Эти свойства аналитичности $T(s, t)$ по двум переменным дополняют ранее полученные результаты Мандельстама [Ma 3] и Лемана [Le 3].

Значительное расширение области голоморфности $T(s, t)$ было получено Мартеном [Mr 1, 2]. Его основной результат выражается следующей теоремой.

Теорема. *Пусть $T_\alpha(s, t)$ — инвариантные амплитуды рассеяния для процесса $A+B \to A+B$, удовлетворяющие дисперсионным соотношениям при фиксированной передаче импульса $t_0 < t \leqslant 0$, $t_0 < 0$. Пусть частицы A и B бесспиновые или имеют спин соответственно 0 и $^1/_2$. Тогда $T_\alpha(s, t)$ голоморфна в области*

$$\left\{(s, t)\colon |t| < R,\ s \notin [(m_A+m_B)^2, \infty) \cup (-\infty, (m_A-m_B)^2-t]\right\}. \tag{43}$$

Для физически интересных спектров масс, например для реакций $\pi+\pi \to \pi+\pi$, $\pi+K \to \pi+K$, $\pi+N \to \pi+N$, константа $R = 4\mu^2$, где μ — масса пиона [Mr 1; So 1].

Исходным пунктом доказательства этой теоремы служат дисперсионные соотношения при фиксированном t, в частности в бесспиновом случае соотношения

$$T(s, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(m_A+m_B)^2}^{\infty} \frac{ds' A_s(s', t)}{s'-s} + \\ + \frac{1}{\pi} \int\limits_{(m_A+m_B)^2}^{\infty} \frac{du' A_u(u', t)}{u'+s+t-2m_A^2-2m_B^2}. \tag{44}$$

Из общих свойств $H_3(k)$ следует, что $T(s, t)$ голоморфна по t в области $|t| < r(s)$ при $(m_A-m_B)^2 < s < (m_A+m_B)^2$. Основная идея состоит в том, чтобы найти коэффициенты соответствующего тейлоровского разложения по t, дифференцируя под знаком дисперсионного интеграла (44). Необходимые равномерные оценки подинтегральной функции выводятся из следующих свойств $A'_s(s, \cos\theta) \equiv A_s(s, t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^n}{dx^n} A'_s(s, x)\Big|_{x=1} \geqslant 0, \\ &\frac{d^n}{dx^n} A'_s(s, x) \leqslant \frac{d^n}{dx^n} A'_s(s, x)\Big|_{x=1} \end{aligned}\right\} \text{при всех } x \in [-1, 1]. \tag{45}$$

Соотношения (45) получаются из аналитических свойств $T(s, t)$ и $A_s(s, t)$ по t, приводящих к сходящемуся разложению на парциальные волны [Le 1]:

$$A'_s(s, x) = \frac{\sqrt{s}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \operatorname{Im} f_l(s) P_l(x), \tag{46}$$

и из условия положительности

$$\operatorname{Im} f_l(s) \geqslant 0. \tag{47}$$

Этим соотношениям можно придать строгий смысл в духе теории обобщенных функций [Ru 6], используя тот факт, что S-матрица есть ограниченное лоренц-ковариантное отображение $\mathfrak{H}^{\text{out}}$ на $\mathfrak{H}^{\text{in}}$. Для вывода (47) асимптотическая полнота (унитарность) не требуется. Достаточно уже положительности метрики в гильбертовом пространстве. (Между прочим, даже „упругую унитарность“ можно рассматривать как спектральное условие [Str 2], характеризуемое кратностью вырождения спектра оператора энергии-импульса ниже трехчастичного порога.)

Аналитичность $T(s, t)$ в области (43) можно показать, подставив в (44) разложение абсорбтивной части в степенной ряд. При отождествлении возникающего интеграла с $T(s, t)$ используются результаты Броса, Эпштейна и Глазера.

Все эти аналитические свойства тесно связаны с нелинейными ограничениями на VEV или на обобщенные запаздывающие функции. Известен заставляющий задуматься контрпример [Jo 3], давно показавший важность информации, заложенной в нелинейных условиях. Другой результат Гринберга и Лоу [Gr 4] и Мартена [Mr 3] благородно прост: из унитарности следует, что минимальное число вычитаний в дисперсионных соотношениях для инвариантных амплитуд рассеяния частиц: спин 0 — спин 0 или спин 0 — спин $^1/_2$ не превосходит двух. Все это налагает довольно жесткие ограничения на амплитуды рассеяния в локальной квантовой релятивистской теории поля

(1) фруассаровское ограничение [Fr 1] на двухчастичную амплитуду:

$$|T(s, 0)| < Cs(\log s)^2,$$
$$|T(s, \cos\Theta)| < C\,\frac{s^{3/4}(\log s)^{3/2}}{(\sin\Theta)^{1/2}}; \tag{48}$$

(2) ограничения на пороговое поведение (при отсутствии пороговых резонансов) [Ji 1]

$$\delta_l(k) \sim k^{2l+1} \quad \text{при} \quad k \to 0 \tag{49}$$

и на аналитические свойства парциальных амплитуд, которые являются хорошим исходным пунктом для численных расчетов, обычно базирующихся на представлении Мандельстама;

(3) (квази-) дисперсионные соотношения вида [Bro 4] выполняются также и в некоторой области комплексных t;

(4) существует абсолютное численное ограничение на амплитуду рассеяния $\pi^0 - \pi^0$. Если считать, что при всех энергиях можно пользоваться чисто упругим условием унитарности [Zi 2], [Mr 4], то амплитуда рассеяния $\pi - \pi$ и ее абсорбтивная часть допускают продолжение вплоть до границ носителя мандельстамовской двойной спектральной плотности. Это показывает, что ближайшие особенности $T(s, t)$ и в самом деле определяются двухчастичной унитарностью.

4. Локальные квантовые поля

Как доказано Вайтманом [Wi 10], трансляционно инвариантное локальное поле $A(x)$, удовлетворяющее спектральному условию с вакуумом, не может быть корректно определено как обычное поле операторов, зависящих от точки x, в случае если $A(x) \neq a\mathbf{1}$. Поэтому операторнозначные обобщенные функции являются естественным аппаратом квантовой теории поля. В импульсном пространстве удобно формулировать лоренц-ковариантность, спектральное условие и свойства S-матрицы. Однако для доказательства асимптотических условий и аналитических свойств амплитуд рассеяния необходима эффективная формулировка аксиомы локальности в x-пространстве.

Предположение, что вайтмановы обобщенные функции суть обобщенные функции медленного роста, является соблазнительно простым, но может исключить из рассмотрения физически интересные теории „неперенормируемого" характера.

Недавно Яффе [Ja 2] разработал аксиоматическую основу локальных квантовых теорий поля, в которых допускаются гораздо более широкие, чем в обычной вайтмановой схеме, свойства роста VEV в импульсном пространстве.

Пусть $\mathfrak{M}(R^{4n})$ — пространство основных функций по отношению к VEV в импульсном представлении, а $\mathscr{C}(R^{4n})$ — пространство их Фурье-образов. Аксиому локальности можно сформулировать в смысле обобщенных функций, если для любого открытого множества $\mathcal{O} \subset R^{4n}$

$$\mathscr{L}(\mathcal{O}) = \mathscr{C}(R^{4n}) \cap \mathscr{D}(\mathcal{O}) \tag{50}$$

плотно в $\mathscr{D}(\mathcal{O})$. Яффе показал, что существует много приемлемых пространств основных функций, удовлетворяющих (50). Каждое такое пространство характеризуется целой функцией

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n; \quad c_n \geqslant 0, \quad c_0 > 0, \tag{51}$$

которая задает нормы $\|\ldots\|_{m,n}$ соотношением

$$\|\varphi\|_{m,n} = \sup_{p \in R^{4l}} \sum_{|\alpha| \leqslant m} \left| g\left(n \|p\|^2\right)\left(1 + \|p\|^2\right)^n D^\alpha \varphi(p) \right|, \tag{52}$$

где $\|p\|$ — евклидова норма в R^{4l}. Пространство $\mathfrak{M}(R^{4l})$ является ядерным пространством [Ge 1*]:

$$\mathfrak{M}(R^{4l}) = \{\varphi \in \mathscr{S}(R^{4l}) \colon \|\varphi\|_{m,n} < \infty, \ \forall m, n\}. \tag{53}$$

Теорема. *Пространство* $\mathfrak{M}(R^{4l})$ *локально в смысле* (50) *тогда и только тогда, когда*

$$\int_1^\infty \frac{\log g(x^2)\,dx}{x^2} < \infty. \tag{54}$$

Эта теорема разрешает рост

$$g(x^2) = O\left(\exp \frac{ax}{(\log x)^{1+\varepsilon}}\right), \quad x \to +\infty, \tag{55}$$

для любых $\varepsilon > 0$, $a < \infty$.

Предполагается, что VEV произведений n полевых операторов в x- и p-представлениях являются обобщенными функциями из $\mathscr{C}'(R^{4n})$ и $\mathfrak{M}'(R^{4n})$. Лоренц-ковариантность, спектральные условия, а также условие положительной определенности формулируются как обычно. Соотношения же локальности должны выполняться для таких основных функций в $\mathscr{L}(R^{4n})$, носители которых пространственно-подобны друг другу. Весьма полезной оказывается следующая

Структурная теорема. *Обобщенная функция $T\in\mathscr{E}'(R^l)$ тогда и только тогда, когда*

$$T(x)=(1-\Delta)^n g(-n\Delta)\chi(x) \tag{56}$$

при некотором целом $n\geqslant 0$ и некоторой непрерывной функции $\chi(x)$ медленного роста.

Основные черты вайтмановой квантовой теории поля сохраняются, за некоторыми очевидными изменениями, и в новом общем подходе [Ja 2].

Теорема.

(1) *В x-представлении* VEV *являются граничными значениями (в $\mathscr{E}'(R^{4n})$) функций, голоморфных в трубе будущего $\mathfrak{T}_n$.*

(2) *ОК-теорема справедлива в $\mathscr{E}'(R^l)$ и $\mathfrak{M}'(R^l)$.*

(3) *Различные* VEV, *получающиеся перестановкой n полевых операторов, представляют собой граничные значения (из различных труб) единой функции, голоморфной в объединении всех расширенных пермутированных труб* *).

(4) *Выполняется теорема Рее—Шлидера: для любого непустого открытого множества $\mathfrak{G}\subset R^4$ циклическое подпространство $D(\mathfrak{G})$ всех векторов, порожденных полиномами от полевых операторов, сглаженных с помощью функций из $\mathscr{L}(\mathfrak{G})$, совпадает с $\mathfrak{H}$.*

(5) *Поле $A(x)$, сглаженное по времени-подобному направлению с помощью функции из $\mathfrak{M}$, принадлежит классу C^∞ по пространственно-подобному направлению* [Bo 4].

(6) *Сохраняется обычная связь между спином и статистикой, TCP-теорема и борхерсова эквивалентность по отношению к (слабой) локальности.*

(7) *Можно доказать теорему о пространственно-подобной асимптотической факторизации:* TVEV *как обобщенные функции от разностей переменных являются после сглаживания по временным аргументам элементами пространства $\mathscr{S}(R^{3n})$.*

(8) *Выполняется асимптотическое условие Хаага — Рюэля, а также асимптотическое условие ЛЗЦ на*

*) В оригинале extended permuted tubes. — *Прим. ред.*

неперекрывающихся гладких состояниях рассеяния и соответствующие редукционные формулы.

(9) *Причинные коммутаторы допускают представление Йоста — Лемана — Дайсона со спектральной плотностью из* $\mathfrak{M}'$.

(10) *Матричные элементы запаздывающего коммутатора* $R_+(x, y)$ *двух полей можно определить в слабом смысле как*

$$\frac{i}{2\pi}\int ds d^4u \, \frac{g((p-u)^2)}{g(s)} \, \frac{\Phi(s, u)}{[(p-u)^2-s]_{\text{ret}}}. \tag{57}$$

(11) *Методом Боголюбова можно доказать аналитические свойства двухчастичной амплитуды рассеяния* $T(s, t)$ *и рост на бесконечности типа* $g(|s|)$. *Применяя условие унитарности и теорему Фрагмена — Линделёфа, можно получить дисперсионные соотношения с конечным числом вычитаний и аналитичностью в области Мартена* (43).

(12) *Формфактор* $f(t)$, *продолженный за массовую поверхность с помощью соотношения*

$$(\Box_x + m_1^2)(\Box_y + m_2^2)(\Omega, R_+(x, y) \mid \vec{q}), \tag{58}$$

тождественно равен нулю или удовлетворяет неравенству

$$\max_{t' \leqslant t} |f(t')| \geqslant A \exp\left(-B|t|^{1/2}\right) \tag{59}$$

при $t < 0$ *и при некоторых* $A > 0$, $B < \infty$.

Из всех этих результатов следует, что вполне возможна локальная релятивистская квантовая теория поля, довольно сингулярная в x-представлении и соответственно допускающая быстрый рост на бесконечности в p-представлении, причем сохраняются обычные свойства регулярности на массовой поверхности, вытекающие из аксиом Вайтмана (и унитарности).

5. Модели

Один из самых „роковых" вопросов квантовой теории поля — это вопрос о том, существуют ли нетривиальные модели, удовлетворяющие всем аксиомам Вайтмана (или Яффе).

Следует отметить недавние достижения в этой области, которые, по крайней мере, отчетливо демонстрируют неразрешенные трудности.

Отличная от **1** матрица рассеяния несовместна ни с одним из перечисленных ниже упрощающих предположений, на основе которых на первый взгляд можно было бы надеяться построить какую-нибудь нехитрую аппроксимационную схему.

Теорема. *Только обобщенное свободное поле удовлетворяет, помимо аксиом Вайтмана, хотя бы одному из следующих условий:*

(a) *Только конечное число усеченных* VEV *отлично от нуля* [Gr 3; Ro 2].

(b) *Коммутатор* $[A(x), A(y)]$ *является операторнозначной обобщенной функцией* $D(x-y)$ *только от одной переменной* $(x-y)$ [Li 1].

(c) *Выполняется равенство*

$$\int \langle A(x) A(0)\rangle_0 e^{i(p,x)} dx = 0 \qquad (60)$$

при некотором $0 \leqslant M^2 < \infty$ *и всех* $(p, p) \geqslant M^2$, $p^0 > 0$ [Gr 2].

(d) *Выполняется равенство*

$$\tilde{A}(p) = (2\pi)^{-2} \int dx A(x) e^{i(p,x)} = 0 \qquad (61)$$

в окрестности пространственно-подобной p [Ro 1; Gr 2].

Кроме того, работа Акса [Ak 1] (игнорирующая, впрочем, некоторые технические трудности [Mr 4]) показывает, что двухчастичная амплитуда рассеяния тривиальна, если равны нулю все амплитуды перехода из двух частиц в $n > 2$ частиц.

Большие надежды на построение нетривиальной точно решаемой модели всегда возлагались на исследования полей в двумерном пространстве Минковского. К настоящему времени [Wi 9] из таких исследований мы узнали больше об операторной структуре полей и токов, чем о нетривиальных релятивистских S-матрицах.

Взаимодействию между полями можно придать точный математический смысл либо в рамках гильбертова пространства, либо изучая решения бесконечной системы интегродифференциальных уравнений для VEV (упорядоченных во времени) произведений полевых операторов.

Для первого подхода очень характерно рассмотрение Нельсона [Ne 1], относящееся к взаимодействию $\psi^*\psi\varphi$ квантованного релятивистского мезонного поля φ с нерелятивистскими нуклонами ψ. В этой модели число нуклонов сохраняется, и в тензорном произведении $\mathfrak{H}_N$ пространства волновых функций для N нуклонов и фоковского пространства для мезонного поля свободный гамильтониан $H_0 = H_m + H_n$ является хорошо определенным самосопряженным оператором на области Δ. Здесь

$$H_m = \int d\vec{k}\omega(\vec{k})\, a^*(\vec{k})\, a(\vec{k}),$$

$$H_n = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i^{\,2}, \quad M,\ m > 0. \tag{62}$$

Для $0 \leqslant \varkappa \leqslant \infty$ определим

$$\varphi_\varkappa(x) = (16\pi^3)^{-1/2} \int\limits_{|\vec{k}| \leqslant \varkappa} d\vec{k}\omega(\vec{k})^{-1/2} \{a(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^*(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}\} \tag{63}$$

и

$$H_\varkappa = H_0 + H_{I\varkappa}, \quad H_{I\varkappa} = g\sum_{i=1}^{N} \varphi_\varkappa(\vec{x}_i). \tag{64}$$

Теорема. *Оператор $H_\varkappa$, определенный на Δ, является самосопряженным, если g вещественно, а $0 \leqslant \varkappa < \infty$.*

Доказательство следует из критерия Като [Ко 1]: существуют такие постоянные $a < 1$ и $b < \infty$, что для всех $\Psi \in \Delta$ выполняется

$$\|H_{I\varkappa}\Psi\| \leqslant a\|H_0\Psi\| + b\|\Psi\|. \tag{65}$$

Теперь естественно попытаться придать смысл взаимодействию $\psi^*\psi\varphi$ при $\varkappa \to \infty$, когда интеграл

$$E_\varkappa = -\frac{Mg^2}{(2\pi)^3} \int\limits_{|\vec{k}| \leqslant \varkappa} d\vec{k}\,(2M\omega(\vec{k})^2 + \omega(\vec{k})\,\vec{k}^2)^{-1} \tag{66}$$

логарифмически расходится. Главный результат Нельсона выражается следующей теоремой.

Теорема. *Существует такой единственный самосопряженный ограниченный снизу оператор $\hat{H}$ на $\mathfrak{H}_N$, что при всех вещественных t*

$$\lim_{\varkappa\to\infty} e^{it(H_\varkappa - NE_\varkappa)} = e^{it\hat{H}}. \tag{67}$$

Предел понимается в сильном смысле.

Досадно, что, несмотря на простоту модели (отсутствие требований локальности, релятивистской ковариантности и стабильности вакуума), не доказано ни существование гайзенберговых полей как операторнозначных обобщенных функций, заданных на плотной инвариантной области, ни справедливость теории рассеяния (даже при $\varkappa < \infty$).

Для релятивистских моделей предпочтительными с точки зрения теории возмущений оказываются гамильтонианы взаимодействия вида $H_I = \int d\vec{x}\mathcal{H}_I(\vec{x})$, где $\mathcal{H}_I(\vec{x})$ — виковский полином по свободным полям в фоковском пространстве. Чтобы сделать H_I хорошим оператором в гильбертовом пространстве, нужно прежде всего ввести пространственное обрезание V, поскольку в силу трансляционной инвариантности $\| H_I\Omega \|$ равна либо 0, либо бесконечности:

$$\| H_I\Omega \| = \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, (\Omega, \mathcal{H}_I(\vec{0})^* \mathcal{H}_I(\vec{x} - \vec{y})\, \Omega). \tag{68}$$

В четырехмерном случае, однако, гамильтониан $H_{I,V} = \int_V d\vec{x}\mathcal{H}_I(\vec{x})$ с пространственным обрезанием V по-прежнему приводит к ультрафиолетовым расходимостям: из-за возможности рождения большого числа частиц с высокими относительными импульсами нельзя применить $H_{I,V}$ ни к какому вектору с конечным полным числом частиц.

Пользуясь совершенно другой техникой, Яффе [Ja 3], а также Като и Мугибаяси [Kt 1, 2] и Ланфорд [La 1] изучали взаимодействие φ^4 и юкавское взаимодействие. Яффе ввел пространственное обрезание и высокоэнергетическое обрезание $\varkappa$ таким образом, чтобы во взаимодействии осталось лишь конечное число членов. В этом случае формальная положительность взаимодействия φ^4 (при положительных константах связи λ) позволяет применить теорию эллиптических уравнений в частных производных. При этом удается определить $H = H_0 + \lambda H_{I,\varkappa}$ как самосопряженный оператор с невырожденным основным состоянием и доказать существование VEV произведений гайзенберговых операторов поля

$$\varphi_H(\vec{x}, t) = e^{iHt}\varphi(\vec{x}, 0)\, e^{-iHt}. \tag{69}$$

Для юкавской связи с двумя обрезаниями (но все еще с бесконечным числом членов во взаимодействии) Като и Ланфорд использовали в качестве основного инструмента следующую оценку:

$$\|\lambda H_{I\varkappa}\Psi\| \leqslant a\|H_0\Psi\| + b\|\Psi\| \tag{70}$$

для всех $\Psi \in \Delta(H_0)$, причем $a < 1$ и $b < \infty$. Неравенство (70) следует из ограниченности сглаженного свободного ферми-поля.

Ланфорд доказал существование плотного множества D, инвариантного по отношению к e^{iHt}, и гайзенберговых полей $\varphi_H(\vec{x}, t)$, являющихся операторнозначными обобщенными функциями. На D оператор e^{iHt} можно вычислить с помощью сходящегося разложения теории возмущений. При достаточно малых константах связи λ можно построить единственное основное состояние, принадлежащее D, снова с помощью теории возмущений [Ко 2]. Сходящийся ряд теории возмущений для хронологических VEV отождествляется с разложением Гелл-Мана и Лоу [GM 1], которое в этом случае (как ряд обобщенных функций из $\mathscr{D}(R^n \times V^n)$) имеет ненулевой радиус сходимости. Таким образом, в этой модели с обрезанием удается придать строгий смысл формальным манипуляциям, типичным, например, для квантовой электродинамики (с массивным фотоном).

Установив существование VEV в теории с обрезанием, можно надеяться преодолеть трудность, связанную с теоремой Хаага [На 1; Hal 1], доказав сходимость

$$(\Omega_\varkappa, \varphi_\varkappa(x_1) \ldots \varphi_\varkappa(x_n)\, \Omega_\varkappa) \tag{71}$$

в топологии $\mathscr{S}'(R^{4n})$ или $\mathscr{E}'(R^{4n})$ при снятии обрезания $\varkappa$. (В не совсем тривиальном случае перенормировки массы в квантовой теории поля с линейным взаимодействием такая сходимость была доказана Яффе [Ja 3].) Соответствующий предел тоже будет удовлетворять условию положительности и в силу теоремы реконструкции [Wi 1] определит некоторые операторнозначные обобщенные функции, т. е. поля, которые, можно думать, окажутся локальными и лоренц-ковариантными.

Стоит упомянуть еще один результат Нельсона [Ne 2]. В двумерном пространстве-времени оператор

$$H_{IR} = \int_{-R}^{+R} :\varphi^4:(x)\,dx \tag{72}$$

корректно определен при $R < \infty$. Если рассматривается φ^4-теория в пространственном ящике $[-R, +R]$ с периодическими граничными условиями, то можно показать, что при $g \geqslant 0$ оператор $H_R = H_0 + gH_{IR}$ ограничен снизу [Ne 2]. Поэтому H_R допускает естественное расширение по Фридрихсу до самосопряженного оператора. Однако о существовании вакуумных средних от гайзенберговых полей ничего не известно, ибо для этого нужно изучать предел при $R \to \infty$.

Исследование бесконечной системы уравнений для обобщенных функций τ в евклидовой области (т. е. для мнимых значений временны́х компонент) было предпринято Зиманциком [Sy 5] и Тэйлором [Ta 2]. В евклидовой области условно сходящиеся интегралы становятся абсолютно сходящимися, и для

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Box - V\right) \tag{73}$$

можно написать корректное представление с помощью интеграла Винера. Перегруппировав ряд теории возмущений для теории с взаимодействием φ^4, Зиманцик [Sy 5] получил бесконечную систему уравнений типа уравнений Кирквуда—Зальцбурга в квантовой статистической механике, где они привели к доказательству сходимости вириального разложения в термодинамическом пределе [Gi 1]. В модели φ^4 эти уравнения оказываются плохо определенными, если не введено обрезание. Устранив ультрафиолетовые расходимости с помощью метода Нельсона [Ne 3], можно надеяться, что перенормированные уравнения имеют приемлемые решения.

Таким образом, пока не слишком удачные поиски реалистических моделей взаимодействующих релятивистских частиц вознаграждены, по крайней мере, появлением очень интересных математических структур.

ДОПОЛНЕНИЕ I

1. Нормальные формы преобразований Лоренца

Основная цель настоящего приложения состоит в нахождении нормальных форм комплексных преобразований Лоренца. Такие нормальные формы возникают в результате следующего рассуждения. Пусть A — изометрическое отображение одного комплексного лоренцева пространства на другое. Мы хотим упростить матричное представление A, выбирая подходящие *вещественные* системы координат в этих комплексных пространствах. Это приводит к следующему определению.

Определение 1. Два комплексных преобразования Лоренца A и B называются эквивалентными друг другу по отношению к $L_+^\uparrow$, если $A = \Lambda_1 B \Lambda_2$, где Λ_1, $\Lambda_2 \in L_+^\uparrow$. В этом случае мы будем писать $A \sim B$.

Лемма 1. *Если* $A \sim B$, *то* $M = \bar{A}^{-1}A$ *и* $N = \bar{B}^{-1}B$ *связаны преобразованием подобия*

$$M = \Lambda_2^{-1} N \Lambda_2, \qquad \Lambda_2 \in L_+^\uparrow.$$

Кроме того, они удовлетворяют равенству

$$M\bar{M} = N\bar{N} = I.$$

Доказательство тривиально следует из определения.

Определение 2. Комплексное преобразование Лоренца, удовлетворяющее равенству $M\bar{M} = I$, называется чисто мнимым. Значение чисто мнимых преобразований Лоренца может быть по настоящему понято только в рамках псевдоунитарной геометрии, порожденной скалярным произведением $[\zeta, \eta] = \bar{\zeta}^T G \eta$. В этой геометрии матрица, сопряженная к матрице C, определяется как $C^+ = G\bar{C}^T G$. Псевдоунитарное преобразование соответствует матрице, для которой $U^+ = U^{-1}$. Вещественное псевдоунитарное преобразование одновременно является вещественным преобразованием Лоренца: $\Lambda^+ = \Lambda^{-1}$, $\overline{\Lambda} = \Lambda$. Чисто мнимое преобразование Лоренца удовлетворяет соотношениям $M^+ = M$ и $\overline{M} = M^{-1}$. Поэтому M является *самосопряженным*. Связь между вещественными унитарными преобразованиями Λ и самосопряженными преобразованиями M устанавливается в следующей лемме.

Лемма 2 (*Хепп*). *Пусть M самосопряжено, $\overline{M} = M^{-1}$, ε не является собственным значением M и, кроме того, $\varepsilon^2 \neq 1$, $|\varepsilon| = 1$. Тогда*

$$\Lambda = (1 - \varepsilon M)(M - \varepsilon)^{-1} \tag{1.1}$$

есть вещественное унитарное преобразование, причем $\det \Lambda = \det M$.

Если Λ вещественно и унитарно и $\varepsilon^2 \neq 1$, $|\varepsilon| = 1$ таково, что $-\varepsilon$ не является собственным значением Λ, то

$$M = (1 + \varepsilon\Lambda)(\Lambda + \varepsilon)^{-1} \tag{1.2}$$

самосопряжено, $\overline{M} = M^{-1}$ *и* $\det \Lambda = \det M$.

Доказательство. 1.

$$\Lambda^+ = (1 - \varepsilon^{-1} M^+)(M^+ - \varepsilon^{-1})^{-1} = (\varepsilon - M)(\varepsilon M - 1)^{-1} = \Lambda^{-1},$$

поскольку $M^+ = M$.

2.

$$\overline{\Lambda} = (1 - \varepsilon^{-1}\overline{M})(\overline{M} - \varepsilon^{-1})^{-1} = (\varepsilon - M^{-1})(\varepsilon M^{-1} - 1)^{-1} = \\ = (1 - \varepsilon M)(M - \varepsilon)^{-1} = \Lambda,$$

так как $\overline{M} = M^{-1}$.

3.

$$\det \Lambda / \det M = \det(M^{-1} - \varepsilon)/\det(M - \varepsilon) = \\ = \det G(M^T - \varepsilon) G/\det(M - \varepsilon) = 1,$$

поскольку $M^{-1} = GM^TG$ и $G^2 = I$.

4.

$$M^+ = (1 + \varepsilon^{-1}\Lambda^+)(\Lambda^+ + \varepsilon^{-1})^{-1} = (\varepsilon\Lambda + 1)(\varepsilon + \Lambda)^{-1} = M,$$

так как $\Lambda^+ = \Lambda^{-1}$.

5. В силу равенства $\overline{\Lambda} = \Lambda$

$$\overline{M} = (1 + \varepsilon^{-1}\Lambda)(\Lambda + \varepsilon^{-1})^{-1} = (\varepsilon + \Lambda)(1 + \varepsilon\Lambda)^{-1} = M^{-1}.$$

6. Равенство $\det \Lambda = \det M$ получается, как и выше. Лемма доказана.

Таким образом, проблема классификации чисто мнимых преобразований Лоренца (по отношению к $L_+^\uparrow$) сводится к проблеме классификации (по отношению к $L_+^\uparrow$) вещественных преобразований Лоренца.

2. Нормальные формы собственных ортохронных преобразований Лоренца

Пусть $\Lambda \in L_+^\uparrow$ и $\chi(\lambda) = \det(\Lambda - \lambda I)$ — соответствующий характеристический полином.

Лемма 3. *Если* $\chi(\lambda_0)=0$, *то* $\chi(\lambda_0^{-1})=0$. *Если* $\chi(\lambda_0)=0$ *и* $\bar\lambda_0 \neq \lambda_0$, *то* $\lambda_0^{-1} = \bar\lambda_0$.

Доказательство. 1.

$$\chi(\lambda) = \det(\Lambda - \lambda I) = \det G(\Lambda^T - \lambda I) G =$$
$$= \det(\Lambda^{-1} - \lambda I) = (-\lambda)^N \det(\Lambda - \lambda^{-1} I),$$

откуда следует первое утверждение.

2. Пусть теперь $\bar\lambda \neq \lambda$ и $\Lambda\zeta = \lambda\zeta$. Тогда $(\Lambda\zeta, \Lambda\zeta) = \lambda^2(\zeta, \zeta) = (\zeta, \zeta) = 0$, поскольку $\lambda^2 \neq 1$. Более того, $\Lambda\bar\zeta = \bar\lambda\bar\zeta$ и $(\zeta, \bar\zeta) = \lambda\bar\lambda(\zeta\bar\zeta)$. Однако равенство $(\zeta, \bar\zeta) = 0$ невозможно, так как иначе $\mathrm{Re}\,\zeta$ и $\mathrm{Im}\,\zeta$ порождали бы двумерное изотропное подпространство. Поскольку $\lambda \neq \bar\lambda$, то ζ и $\bar\zeta$ линейно независимы. Таким образом, $\lambda\bar\lambda = 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Векторное пространство* $\mathfrak{B}$ *распадается на инвариантные ортогональные подпространства* $\mathfrak{B}_0$ *и* $\mathfrak{B}_0^\perp$, *где* $\mathfrak{B}_0$ *времени-подобно, а сужение* Λ *на* $\mathfrak{B}_0$ *является собственным ортохронным преобразованием Лоренца с вещественными собственными значениями, причем собственные векторы времени-подобны или изотропны и вещественны. Сужение* Λ *на* $\mathfrak{B}_0^\perp$ *является собственным ортогональным преобразованием* Λ_0.

Доказательство. Пусть $\lambda = e^{i\varphi}$ — комплексное собственное значение, а $\zeta = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ — соответствующий собственный вектор. Так как $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = (\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$, пространство $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rangle$ является пространственно-подобным.

Если $(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = (\varepsilon_2, \varepsilon_2) = -1$, то сужение Λ на $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$ имеет канонический вид

$$K(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Пространство $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle^{\perp}$ времени-подобно, и, поскольку $\det K(\varphi) = 1$, сужение Λ на $\langle\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle^{\perp}$ является собственным и ортохронным. В результате итерации мы придем в конце концов к собственному преобразованию Лоренца Λ_1, обладающему только вещественными собственными значениями. *Пространственно-подобные* собственные векторы будут теперь отвечать вещественным собственным значениям с модулем $+1$. Они порождают подпространство $\mathfrak{B}_1$, в котором Λ_1 индуцирует инволюцию. Сужение Λ_1 на $\mathfrak{B}^{\perp}$ представляет собой *ортохронное* преобразование Лоренца с вещественными собственными значениями и времени-подобными или изотропными собственными векторами. Поэтому собственные значения с необходимостью положительны. Таким образом, инволюция в $\mathfrak{B}_1$ обладает детерминантом $+1$ и является поэтому собственным ортогональным преобразованием, что и нужно было доказать.

Обратимся теперь к анализу Λ_0, где будем различать несколько случаев.

Случай (1). Преобразование Λ_0 имеет времени-подобный собственный вектор. Тогда $\mathfrak{B}_0$ одномерно, и Λ_0—единица. Мы получаем следующие нормальные формы для преобразования Лоренца в целом:

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & K(\varphi_1) & & & & \\ & & K(\varphi_2) & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & K(\varphi_r) \end{bmatrix} \quad \text{при нечетной размерности,}$$

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} L(0) & & & & \\ & K(\varphi_1) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & K(\varphi_r) \end{bmatrix} \quad \text{при четной размерности,}$$

где

$$L(\chi)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi\\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi\end{pmatrix}.$$

Случай (2). Преобразование Λ_0 обладает изотропным собственным вектором α, отвечающим собственному значению $\lambda=e^{\chi}$, $\chi\neq 0$. В этом случае у Λ_0 есть и другое собственное значение $e^{-\chi}$, принадлежащее линейно независимому по отношению к α изотропному вектору β. Пространство $\mathfrak{B}_0=$ $=\langle\alpha,\ \beta\rangle$ двумерно, и мы можем написать

$$\alpha=\varepsilon_0+\varepsilon_1 \text{ и } \beta=\varepsilon_0-\varepsilon_1;\ (\varepsilon_0,\ \varepsilon_0)=-(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)=1,\ (\varepsilon_0,\ \varepsilon_1)=0.$$

В этом базисе Λ_0 принимает вид

$$L(\chi)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\chi & \operatorname{sh}\chi\\ \operatorname{sh}\chi & \operatorname{ch}\chi\end{pmatrix}.$$

Каноническая форма для Λ при этом будет

$$\Lambda\approx\begin{bmatrix} L(\chi) & & & & & \\ & K(\varphi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & K(\varphi_r) & \\ & & & & & (1)\end{bmatrix},$$

где (1) появляется только при нечетной размерности.

Случай 3. Λ_0 имеет единственное собственное значение 1 и единственный изотропный собственный вектор α (если найдутся два собственных вектора, то это будет означать, что Λ_0 — тождественное преобразование). Метрика в $\langle\alpha\rangle^{\perp}$ является сингулярной. Пространство $\langle\alpha\rangle^{\perp}$ обладает одномерным радикалом $\langle\alpha\rangle$. Факторпространство $\langle\alpha\rangle^{\perp}/\langle\alpha\rangle$ является евклидовым, и сужение Λ_0 на него есть единичное преобразование. Поэтому если $\xi\in\langle\alpha\rangle^{\perp}$, то $\Lambda\xi=\xi+(l,\ \xi)\,\alpha$, где $l\in\langle\alpha\rangle^{\perp}$ определен по модулю $\langle\alpha\rangle$ и, следовательно, $l\in\langle\alpha\rangle^{\perp}/\langle\alpha\rangle$. Поскольку $l\neq 0$, мы находим, что $\langle\alpha\rangle^{\perp}/\langle\alpha\rangle$ по крайней мере одномерно. С другой стороны, размерность его не может быть больше единицы, так как в этом случае у Λ_0 были бы пространственно-подобные собственные векторы. Таким образом, $\langle\alpha\rangle^{\perp}$ двумерно, а $\mathfrak{B}_0$ трехмерно. Пусть в $\mathfrak{B}_0=$

$=\langle e_0, e_1, e_1\rangle$ выбран такой ортонормальный базис, что

$$\alpha = e_0 + e_1, \quad \langle\alpha\rangle^\perp = \langle\alpha, e_2\rangle, \quad \langle\alpha\rangle^\perp/\langle\alpha\rangle = \langle e_2\rangle.$$

Тогда Λ_0 принимает вид

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 1+\tau^2/2 & -\tau^2/2 & -\tau \\ \tau^2/2 & 1-\tau^2/2 & -\tau \\ -\tau & \tau & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau \neq 0.$$

Нормальная форма для Λ будет выглядеть так:

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} M(\tau) & & & & & \\ & K(\varphi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & K(\varphi_r) & \\ & & & & & [1] \end{bmatrix},$$

где [1] появляется только при четных размерностях.

Итак, мы получили все нормальные формы для $\Lambda \in L_+^\uparrow$. Нормальные формы для $\Lambda \in L_+^\downarrow$ получаются следующим изменением знаков:

Случай $(2^\downarrow)$.

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} -L(\chi) & & & & & \\ & K(\varphi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & K(\varphi_r) & \\ & & & & & (1) \end{bmatrix}.$$

Случай $(3^\downarrow)$.

$$\Lambda \approx \begin{bmatrix} -M(\tau) & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & K(\varphi_1) & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & K(\varphi_r) & \\ & & & & & & (1) \end{bmatrix}.$$

В обоих случаях (1) появляется только при нечетных размерностях.

Замечания. 1. Группы $K(\varphi)$, $L(\chi)$ и $M(\tau)$ представляют собой однопараметрические группы; например, $M(\tau_1+\tau_2)=M(\tau_1)M(\tau_2)$.

2. Эти нормальные формы одновременно описывают классы эквивалентных элементов $L_+^\uparrow$. Нормальные делители $L_+^\uparrow$ поэтому характеризуются содержащимися в них нормальными формами. Пользуясь нормальными формами, нетрудно доказать, что $L_+^\uparrow$ не имеет нетривиальных нормальных делителей. Поэтому $L_+^\uparrow$ является простой группой.

3. Три трехмерные нормальные формы

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & K(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} L(\chi) & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\tau)$$

имеют простой смысл в двумерной неевклидовой геометрии [Kl 1*, стр. 105].

3. Нормальные формы комплексных преобразований Лоренца

Теперь лемма 2 позволяет провести классификацию всех мнимых собственных преобразований Лоренца

$$M=\frac{1+\varepsilon\Lambda}{\Lambda+\varepsilon}, \quad |\varepsilon|=1, \quad \det(\Lambda+\varepsilon)\neq 0. \qquad (3.1)$$

Мы интересуемся только такими преобразованиями, для которых $\det M=+1$. Поскольку преобразование $(1+\varepsilon w)/(w+\varepsilon)$ отображает вещественную ось на единичную окружность, а единичную окружность на вещественную ось, нормальные формы для M можно получить, подставив мнимые значения χ и φ_ν в нормальные формы § 2 случаев (1) и (2). То же самое верно и для параметра τ, который фигурирует в исключительном случае (3) в качестве аргумента $M(\tau)$. Это следует либо непосредственно, либо из того, что $M(\tau)$ является предельным случаем трехмерных преобразований, принадлежащих нормальным формам, упомянутым в замечании 3. Тот факт, что все параметры φ, χ и τ принимают чисто мнимые значения, оправдывает название „чисто мнимые преобразования Лоренца“ для M.

Однако мы интересуемся лишь такими чисто мнимыми преобразованиями Лоренца, для которых, согласно § 1, $M = \bar{A}^{-1}A$. Такие преобразования обладают специальным свойством: эрмитова форма $(\bar{\zeta}, M\zeta)$ обладает той же самой сигнатурой, что и само $(\bar{\zeta}, \zeta)$. Это вытекает из того, что $(\bar{\zeta}, M\zeta) = (\bar{A}\bar{\zeta}, A\zeta)$. Поэтому остаются только следующие нормальные формы.

Случай (1′). Нечетная размерность:

$$M \approx \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & K(i\varphi_1) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & K(i\varphi_r) \end{pmatrix}.$$

Четная размерность:

$$M \approx \begin{pmatrix} L(i\chi) & & & & \\ & K(i\varphi_1) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & K(i\varphi_r) \end{pmatrix}, \quad \text{где } \chi = 0 \text{ или } \chi = \pi.$$

Случай (2′).

$$M \approx \begin{pmatrix} L(i\chi) & & & & & \\ & K(i\varphi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & K(i\varphi_r) & \\ & & & & & & (1) \end{pmatrix}, \quad \text{где } |\chi| \leqslant \pi.$$

Случай (3′).

$$M \approx \begin{pmatrix} M(i\tau) & & & & & \\ & K(i\varphi_1) & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & K(i\varphi_r) & \\ & & & & & & [1] \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{где } \tau \neq 0 \\ \text{и вещественно.} \end{array}$$

Теперь нетрудно решить уже нашу первоначальную проблему. Пусть $A \in L_+(C)$ и $M = \bar{A}^{-1}A$. Пусть также $M_0 = \Lambda^{-1}M\Lambda$, $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$ — соответствующие нормальные формы, т. е. формы, описанные выше. Все входящие в их состав элементы $L(i\chi)$, $M(i\tau)$, $K(i\varphi)$ имеют чисто мнимый квадратный корень: $L(i\chi/2)$, $M(i\tau/2)$ и $K(i\varphi/2)$. Таким образом, $\sqrt{M_0} = N_0$ чисто мнимо и принадлежит $L_+(C)$, так что $A_0 = \Lambda^{-1}A\Lambda$ удовлетворяет равенству $\bar{A}_0^{-1}A_0 = N^2$, где $\bar{N}N = I$. Иначе говоря,

$$A_0\bar{N} = \bar{A}_0 N = \Lambda_1 \in L_+.$$

Если $\Lambda_1 \in L_+^{\uparrow}$, то $A \sim A_0 = N\Lambda_1 \sim N$ и N уже является нормальной формой, которую мы хотели получить. Она имеет вид, аналогичный одному из случаев (1′), (2′), (3′). Если $\Lambda_1 \in L_+^{\downarrow}$, то N нужно умножить справа на такое фиксированное отражение $R \in L_+^{\downarrow}$, что $A_0 = (NR)(R\Lambda)$. Тогда NR будет искомой нормальной формой. Все нормальные формы определяются однозначно с точностью до выбора $\tau \neq 0$ и R.

Эта процедура приводит в точности к утверждениям § 3, гл. IV.

ДОПОЛНЕНИЕ II

ЕДИНСТВЕННОСТЬ $W(\zeta)$ В $\bigcup_\pi \mathfrak{T}'_\pi$

Содержание этого приложения целиком базируется на работе Рюэля (частное сообщение).

Основой доказательства является следующая теорема.

Теорема. *Пусть π—подстановка точек $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$, а также порожденное этой подстановкой линейное преобразование разностей переменных $z_k - z_{k-1} \equiv \zeta_k$. Пусть $W(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ однозначна и аналитична в $\mathfrak{T}'_n$ и $L_+(C)$-инвариантна. Пусть также $W_\pi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ однозначна и аналитична в $\pi\mathfrak{T}'_n$ и $L_+(C)$-инвариантна. Предположим далее, что существуют граничные значения $W_\pi(\rho_1, \ldots, \rho_n)$, задающие обобщенную функцию.*

Если

$$W(\rho_1, \ldots, \rho_n) = W_\pi(\rho_1, \ldots, \rho_n), \tag{1}$$

то W_π есть однозначное аналитическое продолжение функции W в область $\mathfrak{T}'_n \cup \pi\mathfrak{T}'_n$.

Доказательство. 1. Мы будем пользоваться упрощенными обозначениями: $\zeta \equiv (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$,

$$\mathfrak{T}' \equiv \mathfrak{T}'_n, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_n, \quad \mathfrak{T}_\pi = \pi\mathfrak{T}.$$

2. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда π — тождественная подстановка или полная инверсия. При этом ρ — граничная точка $\mathfrak{T}_\pi$.

3. Из уравнения (1) следует, что W_π голоморфна по ρ и во всех точках $A\rho$, $A \in L_+(C)$, где она определена, $W_\pi(A\rho) = W_\pi(\rho)$. Поэтому мы имеем

$$W(A\rho) = W_\pi(B\rho), \quad \text{где} \quad A, B \in L_+(C). \tag{1'}$$

4. Исходя из (1) и (1'), мы должны показать, что

$$W(\zeta) = W_\pi(\zeta) \quad \text{при} \quad \zeta \in \mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{T}' \cap \mathfrak{T}'_\pi.$$

Вследствие того что $\zeta \in \mathfrak{Q}$, существуют два таких преобразования Лоренца A и B, что $\zeta \in A\mathfrak{T} \cap B\mathfrak{T}_\pi$. По соображениям непрерывности мы можем считать, что A и B не принадлежат исключительным классам. Пересечение $\mathfrak{Q}_0 = A\mathfrak{T} \cap B\mathfrak{T}_\pi$ опять оказывается выпуклым и, следовательно, связным. Поэтому достаточно показать совпадение W и W_π в окрестности ***одной*** точки в $\mathfrak{Q}_0$.

5. Рассмотрим сначала ситуацию, когда B представляет собой единицу, а A — нормальную форму N. Интересный случай $N\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}_\pi \neq \varnothing$ возникает только при

$$N = \begin{pmatrix} L(i\varphi) & & & & \\ & K(i\chi_1) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & K(i\chi_r) & \\ & & & & (1) \end{pmatrix},$$

где $\varphi \neq 0$, π. Тогда $\sin\varphi \neq 0$, и N переводит точку

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \ldots = \zeta_n = (i, \ -\operatorname{ctg}\varphi, \ 0 \ldots 0)$$

в $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_n = \left(0, \ -(\sin\varphi)^{-1}, \ 0 \ldots 0\right)$. Поэтому $N\mathfrak{T}$ также содержит вещественные точки $\mathfrak{T}'$. В применении к этим граничным точкам ρ области $\mathfrak{T}_\pi$ уравнение (1) дает следующее: W и W_π голоморфны и совпадают друг с другом в окрестности точки ρ. Следовательно, они совпадают в $N\mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}_\pi$.

6. Мы можем, наконец, свести общий случай $A\mathfrak{T} \cap B\mathfrak{T}_\pi \neq \varnothing$ к предыдущему следующим образом. Поскольку $B^{-1}A = \Lambda_1 N \Lambda_2$, $\Lambda_l \in L_+^\uparrow$ и поскольку $B^{-1}A\mathfrak{T} = \Lambda_1 N\mathfrak{T}$, как и $N\mathfrak{T}$, содержит вещественную точку ρ из области $\mathfrak{T}'$, область $A\mathfrak{T}$ содержит точку $B\rho$, лежащую на границе $B\mathfrak{T}_\pi$. Однако в комплексной окрестности этой точки, согласно (1'), W и W_π совпадают.

П р и л о ж е н и е. Из этой теоремы непосредственно следует, что в локальной теории можно однозначно продолжить функцию $\mathfrak{W}(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ в $\mathfrak{S}_{n+1}^P$, где полная симметрия по аргументам $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ обеспечивается симметрией в вещественных точках голоморфности $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$. Так как при $n \geqslant 2$ область $\mathfrak{S}^P_{n+1}$ не является областью голоморфности, остается, разумеется, еще возможность, что оболочка голоморфности $\mathfrak{S}^P_{n+1}$ уже не однолистна. При $n=2$ это осложнение, однако, не возникает.

Обобщение. До сих пор мы предполагали существование граничных значений функции $W_\pi(\rho)$. Это условие можно ослабить, если размерность больше 2. Достаточно предположить, что W и W_π совпадают на пересечении множеств вещественных точек голоморфности $\mathfrak{T}'$ и $\mathfrak{T}'_\pi$. Тогда уравнение (1) получается в результате аналитического продолжения. Это вытекает из следующих положений, доказательство которых мы оставляем читателю.

(a) Пересечение $\mathfrak{T}' \cap \mathfrak{T}'_\pi$ содержит вещественные точки голоморфности, а поэтому и их вещественную окрестность, если размерность $\mathfrak{B}$ превосходит 2.

(b) Если размерность $\mathfrak{B}$ больше 2, множество вещественных точек $\mathfrak{T}'$ является связным.

ЛИТЕРАТУРА

А. ОРИГИНАЛЬНЫЕ РАБОТЫ

[Ak 1] Aks S., *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 516.

[Ar 1] Araki H., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 492.

[Ar 2] Araki H., *Ann. Phys.*, **11** (1960), 260.

[Ar 3] Araki H., Burgoyne N., *Nuovo Cim.*, **8** (1960), 342.

[Ar 4] Araki H., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 163.

[Ar 5] Araki H., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 267.

[Ar 6] Araki H., *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **18** (1961), 83.

[Ar 7] Araki H., Haag R., Schroer B., *Nuovo Cim.*, **19** (1961), 90.

[Ar 8] Araki H., Hepp K., Ruelle D., *Helv. Phys. Acta.*, **35** (1962), 164.

[Ar 9] Araki H., *Helv. Phys. Acta.*, **36** (1963), 132.

[Ar 10] Araki H., Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie, I, II, Lecture notes, ETH, Zürich, 1961/62.

[Ar 11] Araki H., Haag R., to be published.

[Ba 1] Bargman V., Wigner E. P., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1946), 211.

[Ba 2] Bargmann V., *Ann. of Math.* (2), **59** (1954), 1.

[BR 1] Bohr N., Rosenfeld L., *Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **12** (1933), № 8.

[BR 2] Bohr N., Rosenfeld L., *Phys. Rev.*, **78** (1950), 794.

[Bo 1] Borchers H. J., *Nuovo Cim.*, **15** (1960), 784.

[Bo 2] Borchers H. J., *Nuovo Cim.*, **19** (1960), 787.

[Bo 3] Borchers H. J., *Nuovo Cim.*, **24** (1962), 214.

[Bo 4] Borchers H. J., *Nuovo Cim.*, **33** (1964), 1600.

[Bn 1] Born M., Heisenberg W., Jordan P., *Z. Physik.*, **35** (1926), 557.

[Bm 1] Bremermann H., Oehme R., Taylor J. G., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 2178.

[Br 1] Brenig W., Haag R., *Fortschr. Physik*, **7** (1959), 183.

[Bro 1] Bros J., Messiah A., Stora R., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 693.

[Bro 2] Bros J., in «High Energy Physics and Elementary Particles», Vienna (1965).

[Bro 3] Bros J., Epstein H., Glaser V., *Nuovo Cim.*, **31** (1964), 1265.

[Bro 4] Bros J., Epstein H., Glaser V., *Commun. math. Phys.*, **1** (1965), 240.

[Bu 1] Burgoyne N., *Nuovo Cim.*, **8** (1958), 607.

[Co 1] Cook J. M., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), 222.
[Cor 1] Corinaldesi E., *Nuovo Cim. Suppl.*, **10** (1953), 83.
[Db 1] Debye P., *Ann. Physik* (4), **33** (1910), 1427.
[De 1] Dell'Antonio G. F., Gulmanelli P., *Nuovo Cim.*, **12** (1959), 38.
[De 2] Dell'Antonio G. F., *Ann. Phys.*, **16** (1961), 153.
[De 3] Dell'Antonio G. F., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 759.
[Di 1] Dirac P. A. M., *Proc. Roy. Soc. Ser. A.*, **114** (1927), 243.
[Di 2] Dirac P. A. M., Rapport du 7e Conseil Solvay de Physique (1934), 203.
[Do 1] Doplicher S., *Nuovo Cim.*, **29** (1963), 285.
[Dy 1] Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 579.
[Dy 2] Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1460.
[Ep 1] Epstein H., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 524.
[Ep 2] Epstein H., *Nuovo Cim.*, **27** (1963), 886.
[Ep 3] Epstein H., Brandeis Lectures 1965, New York, 1966.
[Fe 1] Federbush P. G., Jonson K. A., *Phys. Rev.*, **120** (1960), 1926.
[Fi 1] Fierz M., *Helv. Phys. Acta.*, 12 (1939), 3.
[Fo 1] Fock V., *Z. Physik.*, **75** (1932), 622.
[Fr 1] Froissart M., *Phys. Rev.*, **123** (1961), 1053.
[Fu 1] Fukutome H., *Progr. Theoret. Phys.*, 23 (1960), 989.
[Gå 1] Gårding L., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **33** (1947), 331.
[Gå 2] Gårding L., Wightman A. S., *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **40** (1954), 617, 622.
[Gå 3] Gårding L., Lions J. L., *Nuovo Cim. Suppl.*, **14** (1959), 9.
[Gi 1] Ginibre J., *Math. Phys.*, **6** (1965), 238, 252, 1432.
[GLZ 1] Glaser V., Lehmann H., Zimmerman W., *Nuovo Cim.*, **6** (1957), 1122.
[GM 1] Gell-Mann M., Low F., *Phys. Rev.*, **84** (1951), 350.
[Gra 1] Grawert G., Lüders G., Rollnik H., *Fortschr. Physik*, **7** (1959), 291.
[Gr 1] Greenberg O. W., *Ann. Phys.*, **16** (1961), 158.
[Gr 2] Greenberg O. W., *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 859.
[Gr 3] Greenberg O. W., Licht A. L., *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 613.
[Gr 4] Greenberg O. W., Low F., *Phys. Rev.*, **124** (1961), 2047.
[Gu 1] Gunson J., Taylor J. G., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 1121.
[Ha 1] Haag R., *Mat. Phys. Medd. Danske Vid. Selsk*, 29, № 12 (1955).
[Ha 2] Haag R., Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959.
[Ha 3] Haag R., *Phys. Rev.*, **112** (1958), 669.
[Ha 4] Haag R., *Nuovo Cim. Suppl.*, **14** (1959), 131.
[Ha 5] Haag R., Schroer B., *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 248.

[Hal 1] Hall D., Wightman A. S., *Math. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **31** (1957), № 5.

[Hei 1] Heisenberg W., Pauli W., *Z. Physik.*, **56** (1929), 1.

[Hei 2] Heisenberg W., Pauli W., *Z. Physik.*, **59** (1930), 160.

[Hei 3] Heisenberg W., *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Phys.*, Kl., **86** (1934), 317.

[Hei 4] Heisenberg W., *Z. Physik*, **90**, (1934), 209.

[Hei 5] Heisenberg W., *Z. Physik*, **120** (1943), 513, 673.

[Hep 1] Hepp K., Jost R., Ruelle D., Steinmann O., *Helv. Phys. Acta*, **34** (1961), 542.

[Hep 2] Hepp K., *Helv. Phys. Acta.*, **36** (1963), 355.

[Hep 3] Hepp K., *Math. Ann.*, **152** (1963), 149.

[Hep 4] Hepp K., *Helv. Phys. Acta.*, **37** (1964), 639.

[Hep 5] Hepp K., *Commun. math. Phys.*, **1** (1965), 95.

[Hep 6] Hepp K., Brandeis Lectures 1965, New York, 1966.

[Ja 1] Jaffe A. M., *Ann. Phys.*, **32** (1965), 127.

[Ja 2] Jaffe A. M., *Phys. Rev. Lett.*, **17** (1966), 661 and to be published.

[Ja 3] Jaffe A. M., Thesis, Princeton, 1965.

[Ji 1] Jin Y. S., preprint.

[Jo 1] Jost R., Lehmann H., *Nuovo Cim.*, **5** (1957), 1598.

[Jo 2] Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, **30** (1957), 409.

[Jo 3] Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, **31** (1958), 263.

[Jo 4] Jost R., Lectures on field theory and many body problem, E. R. Caianiello, Academic Press, New York, 1961.

[Jo 5] Jost R., Theoretical physics in 20th century; Fierz M., Weiss-kopf V. F., Interscience, New York, 1960.

[Jo 6] Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, **33** (1960), 773.

[Jo 7] Jost R., Hepp K., *Helv. Phys. Acta.*, **35** (1962), 34.

[Jo 8] Jost R., *Helv. Phys. Acta.*, **36** (1963), 77.

[Kä 1] Källén G., *Helv. Phys. Acta.*, **25** (1952), 417.

[Kä 2] Källén G., Wigthman A. S., *Mat.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.*, **1** (1958), № 6.

[Kä 3] Källén G., Wilhelmsson H., *Mat.-Fys. Skr. Danske Vid. Selsk.*, **1** (1959), № 9.

[Kä 4] Källén G., Toll J. C., *Helv. Phys. Acta.*, **33** (1960), 753.

[Kä 5] Källén G., Dispersion relations and elementary particles, C. de Witt and R. Omnès, Hermann, Paris, 1960.

[Kä 6] Källén G., *Nucl. Phys.*, **25** (1961), 568.

[Ka 1] Kastler D., *Ann. Univ. Sarav.*, 4 (1955), 206.

[Ka 2] Kastler D., *Ann. Univ. Sarav*, **5** (1956), 186, 204.

[Kl 1] Klein O., *J. Phys. USSR*, **9** (1938), 1.

[Kle 1] Kleiman D., *Nucl. Phys.*, **11** (1959), 459.

[Ko 1] Kato T., *Trans. Am. Math. Soc.*, 70 (1951), 195.

[Ko 2] Kato T., *Progr. Theoret. Phys.*, **4** (1949), 514.

[Kt 1] Kato Y., *Progr. Theoret. Phys.*, **26** (1961), 99.

[Kt 2] Kato Y., Mugibayashi N., *Progr. Theoret. Phys.*, **30** (1963), 103, 409.

[La 1] Lanford O. E., Thesis, Princeton, 1966.

[LSZ 1] Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., *Nuovo Cim.*, **1** (1955), 205.

[LSZ 2] Lehmann H., Symanzik K., Zimmermann W., *Nuovo Cim.*, **6** (1957), 319.

[Le 1] Lehman H., *Nuovo Cim.*, **10** (1958), 579.

[Le 2] Lehman H., *Nuovo Cim. Suppl.*, **14** (1959), 153.

[Le 3] Lehman H., preprint.

[Lew 1] Lew J., Thesis, Princeton Univ., Princeton, N. J. (1960), unpublished.

[Li 1] Licht A. L., Toll J. C., *Nuovo Cim*, **21** (1961), 346.

[Lo 1] Loeffel J. J., *Helv. Phys. Acta.*, **36** (1963), 216.

[Lü 1] Lüders G., *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk*, 28 (1954), № 5.

[Lü 2] Lüders G., *Ann. Phys.*, 2 (1957), 1.

[Lü 3] Lüders G., Zumino B., *Phys. Rev.*, **110** (1958), 1450.

[Lü 4] Lüders G., *Naturforsch.*, **13a** (1958), 254.

[Lu 1] Luzzatto G., private communication.

[Maj 1] Majorana E., *Nuovo Cim.*, **14** (1937), 171.

[Ma 1] Mandelstam S,. *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1344.

[Ma 2] Mandelstam S., *Phys. Rev.*, **115** (1959), 1741.

[Ma 3] Mandelstam S., *Nuovo Cim.*, **15** (1960), 658.

[Mh 1] Manoharan A. C., *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 853.

[Mö 1] Möller N. H., *Nucl. Phys.*, **35** (1962), 434.

[Mr 1] Martin A., *Nuovo Cim.*, **42A** (1966), 930.

[Mr 2] Martin A., *Nuov. Cim.*, **44A** (1966), 1219.

[Mr 3] Martin A., *Nuovo Cim.*, **42A** (1966), 901.

[Mr 4] Martin A., CERN report TH 727 (1966).

[Ne 1] Nelson E., *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 1190.

[Ne 2] Nelson E., in «Mathematical Theory of Elementary Particles», M. I. T. Press, 1964.

[Ne 3] Nelson E., in «Analysis in Function Space», M. I. T. Press, 1964.

[Noe 1] Noether E., Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. (1918), 235.

[Noy 1] Noyes H. P., Edwards D. N., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 1409.

[Oe 1] Oehme R., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 1840.

[Pa 1] Pauli W., *Naturwissenschaften*, **21** (1933), 841.

[Pa 2] Pauli W., Weisskopf V. F., *Helv. Phys. Acta*, **7** (1934), 709.

[Pa 3] Pauli W., Zeeman Verhandelingen, Haag, Martinus Nijhoff (1935), 31.

[Pa 4] Pauli W., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **6** (1936), 109.

[Pa 5] Pauli W., *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **6** (1936), 137.

[Pa 6] Pauli W., *Phys. Rev.*, 58 (1940), 716.

[Pa 7] Pauli W., *Rev. Mod. Phys.*, **13** (1941), 203.

[Pa 8] Pauli W., *Progr. Theoret. Phys.*, **5** (1950), 526.

[Pa 9] Pauli W., Niels Bohr and the development of physics, W. Pauli, Pergamon, London, 1955.

[Pe 1] Petermann A., *Fortschr. Physik*, **6** (1958), 507.

[Pl 1] Plank M., *Verh. Deutsch. Phys. Ces.*, **2** (1900), 237.

[Re 1] Reeh H., Schlieder S., *Nuovo Cim.*, **22** (1961), 1051.
[Re 2] Reeh H., Schlieder S., *Nuovo Cim.*, **24** (1962), 32.
[Ro 1] Robinson D. W., *Helv. Phys. Acta.*, **35** (1962), 403.
[Ro 2] Robinson D. W., *Commun. math. Phys.*, **1** (1965), 89.
[Ru 1] Ruelle D., *Helv. Phys. Acta*, **32** (1959), 135.
[Ru 2] Ruelle D., *Nuovo Cim.*, **19** (1961), 356.
[Ru 3] Ruelle D., *Helv. Phys. Acta.*, **34** (1961), 587.
[Ru 4] Ruelle D., *Helv. Phys. Acta.*, **35** (1962), 147.
[Ru 5] Ruelle D., Thèse, Université Libre, Bruxelles, 1959 (unpublished).
[Ru 6] Ruelle D., private communication.
[Sm 1] Schmidt W., Baumann K., *Nuovo Cim.*, **4** (1956), 860.
[Sw 1] Schwartz L., Proc. Internat. Congr. Math., 1950.
[Sw 2] Schwartz L., Medd. Lunds Mat. Sem. (Suppl) (1952), 196.
[Sn 1] Schneider W., private communication.
[So 1] Sommer G., to be published.
[Sr 1] Schroer B., Langerholc J., *Commun. math. Phys.*, 1 (1965), 215.
[Sch 1] Schwinger J., *Phys. Rev.*, **82** (1951), 914.
[Se 1] Segal L. E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 12.
[Sta 1] Stapp H. P., *Phys. Rev.*, **125** (1962), 2139.
[Ste 1] Steinmann O., *Helv. Phys. Acta.*, **33** (1960), 257.
[Ste 2] Steinmann O., *Helv. Phys. Acta.*, **33** (1960), 347.
[Ste 3] Steinmann O., *Helv. Phys. Acta.*, **36** (1963), 90.
[Ste 4] Steinmann O., *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 583.
[Sto 1] Stora R., to be published.
[Str 1] Streater R. F., *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 256.
[Str 2] Streater R. F., *Phys. Rev.*, **136B** (1964), 1748.
[Sy 1] Symanzik K., *Phys. Rev.*, **105** (1957), 743.
[Sy 2] Symanzik K., *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 249.
[Sy 3] Symanzik K., Boulder Lectures, Boulder, Colo, 1960.
[Sy 4] Symanzik K., Hercegnori Lectures, 1961.
[Sy 5] Symanzik K., *J. Math. Phys.*, 7 (1966), 510, in «Mathematical Theory of Elementary Particles», M. I. T. Press (1966).
[Ta 1] Taylor J. G., *Ann. Phys.*, **5** (1958), 391.
[Ta 2] Taylor J. G., *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 1720.
[To 1] Toll J. C., *Phys. Rev.*, **104** (1956), 1760.
[Uh 1] Uhlmann A., *Ann. Phys.*, **13** (1961), 453.
[Wei 1] Weisskopf V. F., *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk*, **14** (1936), № 6.
[Wk 1] Wick G. G., Wightman A. S., Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **88** (1952), 101.
[Wig 1] Wigner E. P., *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 149.
[Wi 1] Wightman A. S., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 860.
[Wi 2] Wightman A. S., Les problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1959.

[Wi 3] Wightman A. S., Cours de la Faculté des Sciences de l'Universite de Paris, 1957/58.
[Wi 4] Wightman A. S., *Nuovo Cim. Suppl.,* **14** (1959), 81.
[Wi 5] Wightman A. S., Dispersion relations and elementary particles, C. de Witt and R. Omnès, Hermann, Paris, 1960.
[Wi 6] Wightman A. S., *J. Indian Math. Soc.* 24 (1960), 625.
[Wi 7] Wightman A. S., S. Schweber, *Phys. Rev.,* **98** (1955), 812.
[Wi 8] Wightman A. S., Epstein H., *Ann. Phys.,* **11** (1960), 201.
[Wi 9] Wightman A. S., Cargèse Lectures, 1964.
[Wi 10] Wightman A. S., *Ann. Inst. Henri Poincaré,* Ser. A, **1** (1964), 403.
[Zi 1] Zimmermann W., *Nuovo Cim.,* **10** (1958), 567.
[Zi 2] Zimmermann W., *Nuovo Cim.,* 21 (1961), 249.

В. МОНОГРАФИИ

[Ac 1*] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966.
[At 1*] Artin E., Geometric algebra, Interscience, New York, 1957.
[Be 1*] Behnke H., Thullen P., Ergebnisse der Math. **3**, Nr. 3 (1934), Springer, Berlin, 1934.
[BM 1*] Бохнер С., Мартин У., Функции многих комплексных переменных, ИЛ, М., 1951.
[Bog 1*] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантовых полей, Физматгиз, М., 1957.
[CH 1*] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1, Гостехиздат, М., 1951.
[Die 1*] Дьедонне Ж., Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.
[Dix 1*] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
[Fr 1*] Friedrichs K., Mathematical aspects of quantum theory of fields, Interscience, New York, 1953.
[Ge 1*] Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, Гостехиздат, М., 1958.
[He 1*] Heitler W., Quantum theory of radiation, 1st edition, Oxford Univ. Press. Oxford, 1936.
[He 2*] Гайтлер В., Квантовая теория излучения, перев. третьего издания, М., 1956.
[Hi 1*] Hilbert D., Gesammelte Abhandlungen, Bd. 3, Springer, Berlin, 1935.
[Kä 1*] Källén G., Quantenelektrodynamik, Handbuch der Physik, Bd V, 1, Springer, Berlin, 1958.
[Kl 1*] Klein F., Nicht-euklidesche Geometrie, Springer, Berlin, 1928.
[Kö 1*] Köthe G., Topologische lineare Räume, Springer, Berlin, 1960.

[La 1*] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика, Физматгиз, М., 1958.
[Ne 1*] Наймарк М. А., Нормированные кольца, Гостехиздат, М., 1956.
[Pa 1*] Паули В., Общие принципы волновой механики, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
[RN 1*] Riesz F., Sz.-Nagy B., Vorlesungen über Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956. Имеется русский перевод: Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
[Sw 1*] Schwartz L., Théorie des distributions, Vol. I, Hermann, Paris, 1957.
[Sw 2*] Schwartz, Théorie des distributions, Vol. II, Hermann, Paris, 1959.
[Um 1*] Умэдзава Х., Квантовая теория поля, ИЛ, М., 1958.
[Wae 1*] van der Waerden B. L., Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.
[We 1*] Wentzel G., Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Franz Deuticke, Wien, 1943.
[Wey 1*] Weyl H., Theory of group and quantum mechanics, Dover, New York.
[Wey 2*] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.
[Wig 1*] Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовой механике атомных спектров, ИЛ, М., 1961.

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

1. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, Гостехиздат, М., 1958.
2. Боголюбов Н. Н., Доклад в Сиэттле, 1956.
3. Владимиров В. С., Методы теории функций многих комплексных переменных, «Наука», М., 1964.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *УФН*, **55** (1955), 3, 149.
5. Петрина Д. Я., *УМЖ*, **13**, № 4 (1961), 109—111.
6. Соболев С. Л., *Математ. сб.*, **1** (43) (1936), 39—72.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р. Йост

Общая теория квантованных полей

Редактор *Э. Э. Пейсахович* Художник *В. П. Заикин*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов* Технический редактор *И. К. Дерва*
Корректор *В. И. Киселева*

Сдано в производство 6/V 1967 г. Подписано к печати 27/IX 1967 г. Бумага типографская № 2, формат 84×108$^1/_{32}$ =3,68 бум. л., 12,39 усл. печ. л., 9,77 уч.-изд. л. Изд. № 1/4078. Цена 85 к. Темплан 1967 г. Издательства «Мир», № 10. Зак. № 707.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“ Москва. 1-Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.