ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ,
ОКОНЧИВШИХ УЧИТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫПУСК I

УЧПЕДГИЗ · 1958

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Московский государственный заочный педагогический институт

СБОРНИК КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ, ОКОНЧИВШИХ УЧИТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЫПУСК 1

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва - 1958

ПРЕДИСЛОВИЕ

В публикуемом сборнике контрольных работ по математическим дисциплинам содержатся все контрольные работы (кроме методики математики), выполняемые студентами-заочниками III—V курсов, окончивших учительские институты (спецгруппы).

Сборник состоит из двух выпусков. В первом выпуске напечатаны контрольные работы, выполняемые студентами на III курсе. Второй выпуск содержит в себе контрольные работы, выполняемые студентами на IV и V курсах.

Каждая контрольная работа состоит из десяти вариантов для решения студентами и варианта О, предпосланного им и снабженного подробными решениями. Его назначение — облегчить студенту самостоятельную работу по соответствующему курсу.

Авторы настоящего сборника полагают, что студент-заочник, не имеющий возможности полностью проработать практическую часть курса на занятиях, должен быть снабжен, помимо стабильных учебников и задачников, материалом, заменяющим ему в некоторой степени практические занятия под руководством преподавателя:

Предлагаемые контрольные работы, как правило, *не затрагивают вопросов последних разделов программы по дисциплинам, подлежащим изучению студентами на соответствующих семестрах.*

Это необходимо для того, чтобы студенты имели возможность своевременно выполнить и прислать в институт контрольную работу еще до окончания их подготовки к соответствующему зачету или экзамену.

Получение контрольных работ в течение межсессионного периода (а не накануне сессии) позволят придать рецензии на нее не только оценочный характер, но и сделать ее орудием помощи студенту в его самостоятельной работе над курсом.

При сдаче зачета или экзамена студент обязан предъявить преподавателю исправленную после рецензирования контрольную работу вместе с рецензией.

При выполнении контрольной работы, так же как и при изучении программного материала, студент может пользоваться письменными консультациями членов кафедры.

Работа должна выполняться аккуратно, четким почерком. Страницы тетради нужно пронумеровать. Чертежи должны быть выполнены тушью или разноцветными чернилами. Допускается выполнение чертежей в карандаше, но четко и аккуратно. На обложке тетради должен быть указан номер варианта, который определяется по последней цифре номера зачетной книжки. Так же надо указать номер зачетной книжки, полностью фамилию, имя, отчество и обратный адрес.

Настоящий сборник контрольных работ составлен (за небольшим исключением) членами кафедры математики МГЗПИ под редакцией проф. доктора физико-математических наук В. И. Левина.

В составлении первого выпуска данного сборника принимали участие: старший преподаватель МОПИ М. И. Каченовский (аналитическая геометрия), доцент Ленинградского педагогического института К. М Бохан (введение в анализ и дифференциальное исчисление), старший преподаватель МГЗПИ К. М. Карпенко (высшая алгебра, часть 1).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1 ПО ВВЕДЕНИЮ В АНАЛИЗ

Вариант № 0

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству

$$|2x-5|<1.$$

Решение. Заменяем данное неравенство ему равносильным двойным неравенством:

$$-1<2x-5<1.$$

Добавляя число 5 к каждой части неравенства, получим:

$$4<2x<6.$$

Откуда $$2<x<3.$$

2. Дана функция $f(x)=x^3+8x-4$. Найти значение

$$f(0), f(1), f(-2) \text{ и } f\left(\frac{a}{2}\right)\cdot$$

Решение. $f(0)=0^3+8\cdot 0-4=-4,$

$$f(1)=1^3+8\cdot 1-4=5,$$

$$f(-2)=(-2)^3+8\cdot(-2)-4=-28,$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}\right)^3+8\cdot\frac{a}{2}-4=\frac{1}{8}(a^3+32a-32).$$

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x)=x^3-4x+3,$ б) $\varphi(x)=\frac{2x}{x^2-5x+6},$

в) $\psi(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{9-x^2}+2^x$.

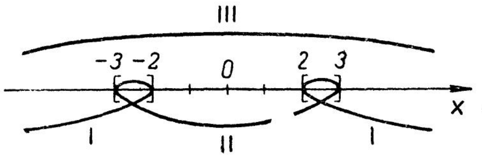
Решение. а) Выражение x^3-4x+3 сохраняет смысл при любых вещественных значениях x. Следовательно, функция $f(x)$ существует в интервале $(-\infty, +\infty)$.

б) Выражение $\frac{2x}{x^2 - 5x + 6}$ теряет смысл только в точках, где знаменатель равен нулю, т. е. при $x = 2$ и $x = 3$. Следовательно, область существования функции $\varphi(x)$ состоит из трех интервалов $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, +\infty)$.

в) I. Выражение $\sqrt{x^2 - 4}$ определено при $x^2 - 4 \geqslant 0$, т. е. при $|x| \geqslant 2$. Область существования состоит из двух интервалов $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$.

II. Выражение $\sqrt{9 - x^2}$ определено при $9 - x^2 \geqslant 0$, т. е. при $x^2 \leqslant 9$ или $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Областью существования является отрезок $[-3, +3]$.

III. Выражение 2^x определено при любых вещественных значениях x, т. е. на интервале $(-\infty, +\infty)$.



Черт. 1

Если теперь выделить общую часть областей существования всех трех слагаемых, то она и будет искомой областью существования функции $\psi(x)$. Как видно из чертежа 1, такой общей частью будет два отрезка: $[-3, -2]$ и $[2, 3]$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-1, +1]$. Каковы области определения функций: $f(2x)$, $f(x-1)$, $f(x+1)$ и $f\left(\frac{x}{2}\right)$?

Решение. По условию для функции $y = f(x)$ аргумент x изменяется в границах от -1 до $+1$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Подставив в последнее неравенство вместо x значения $2x$, $x-1$, $x+1$ и $\frac{x}{2}$, получим области определения соответствующих функций:

$-1 \leqslant 2x \leqslant 1$. Откуда $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$. Область определения будет отрезок $\left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$.

$-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$. Откуда $0 \leqslant x \leqslant 2$. Область определения $[0, 2]$.

$-1 \leqslant x+1 \leqslant 1$. Откуда $-2 \leqslant x \leqslant 0$. Область определения $[-2, 0]$.

$-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$. Откуда $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Область определения $[-2, 2]$.

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство $\lim \frac{2n+3}{4n-1} = \frac{1}{2}$. Начиная с какого n величина $\left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right|$ не превосходит 0,0001?

Р е ш е н и е. Докажем сначала, что число $\frac{1}{2}$ является пределом числовой последовательности $x_n = \frac{2n+3}{4n-1}$. Для этого согласно определению предела достаточно показать, что для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что для всех значений $n > N$ выполняется неравенство:

$$\left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Возьмем любое фиксированное $\varepsilon > 0$. Так как

$$\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2} = \frac{4n+6-4n+1}{2\,(4n-1)} = \frac{7}{2(4n-1)} > 0,$$

то неравенство

$$\left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

равносильно

$$\frac{7}{2\,(4n-1)} < \varepsilon.$$

Откуда $4n - 1 > \frac{7}{2\varepsilon}$ и $n > \frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}$.

За N можно взять целую часть числа $\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}$, т. е. $N = E\left(\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}\right)$. Легко видеть, что $\left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ для всех $n > N$, В частности,

$$\text{если } \varepsilon = 0{,}0001, \text{ то } N = E\left(\frac{7+0{,}0002}{0{,}0008}\right) = 8750.$$

Таким образом, величина $\left|\frac{2n+3}{4n-1} - \frac{1}{2}\right|$ не превосходит числа 0,0001 для всех $n \geqslant 8751$.

6. Найти пределы числовых последовательностей:

а) $x_n = \frac{2n^2+3n+8}{n^2-2n-1}$,

б) $x_n = \frac{\sin n}{n}$.

Решение. а) В первом примере имеем случай неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы эту неопределенность раскрыть, разделим числитель и знаменатель на высшую степень n, т. е. на n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+8}{n^2-2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{8}{n^2}}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}} = 2.$$

б) Выражение $\frac{\sin n}{n}$ есть величина бесконечно малая, так как его можно представить в виде произведения бесконечно малой $\frac{1}{n}$ на ограниченную $\sin n$, $\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sin n$. Следовательно, $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$.

7. а) Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = 2x - 1$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный 3. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-2| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 3| < 0{,}001$? Будет ли функция непрерывна в этой точке?

Решение. Возьмем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что для него найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $[x-2] < \delta$ будет следовать неравенство $|(2x-1) - 3| < \varepsilon$. Упрощая последнее, получим $2|x-2| < \varepsilon$. Откуда $|x-2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если за δ взять число $\frac{\varepsilon}{2}$, то оно, очевидно, и будет искомым, так как при $|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ будет $|f(x)-3|<\varepsilon$. В частности, если $\varepsilon=0{,}001$, то $\delta=\frac{0{,}001}{2}=0{,}0005$. Функция непрерывна в точке $x=2$, так как ее предел и значение в этой точке совпадают $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$.

7. б) Доказать, что функция $f(x)=x^2$ имеет в точке $x=2$ предел, равный 4.

Решение. По произвольному $\varepsilon>0$ нужно найти такое $\delta>0$, чтобы из неравенства $|x-2|<\delta$ следовало неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$, т. е. $|x-2|\cdot|x+2|<\varepsilon$. Предположим, что такое δ уже найдено. Пусть $|x-2|<\delta$. Тогда из тождества $x+2=(x-2)+4$ получаем:

$$|x+2|\leqslant|x-2|+4<\delta+4.$$

Следовательно,

$$|x-2|\cdot|x+2|\leqslant\delta(\delta+4).$$

Искомое δ, очевидно, можно взять таким, чтобы $\delta(\delta+4)=\varepsilon$. Тогда $\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$ и $\delta=-2\pm\sqrt{4+\varepsilon}$. Положительным значением δ будет $\sqrt{4+\varepsilon}-2$. В точке $x=2$ $f(x)$ будет непрерывна. Следовательно $f(2)=4$ и т. д.

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-4}{x^2+x+1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^3-4x^2}{5x^3+8x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$,

г) $\lim\limits_{x\to 4}(4-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{x+1}$,

е) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. а) Имеем случай неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. В выражениях такого вида данная неопределенность раскрывается делением числителя и знаменателя на высшую степень x (см. пример а) из пункта 5).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-4}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$$

Вообще полезно запомнить, что предел отношения двух многочленов при $x\to\infty$ равен отношению коэффициентов, стоящих при высшей степени x.

б) Имеем случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. В выражениях, представляющих собой отношение многочленов, такая неопределенность при $x\to 0$ раскрывается делением числителя и знаменателя на низшую степень:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-4x^2}{5x^3-8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-4}{5x-8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

т. е. предел отношения двух многочленов без свободных членов при $x\to 0$ равен отношению коэффициентов, стоящих при низшей степени x.

в) В данном случае имеем также неопределенность вида $\frac{0}{0}$, но при другом условии, при $x\to 2$. Для вычисления предела следует числитель и знаменатель разделить на $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=-4.$$

г) Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Обозначим $4-x$ через z:

$$\lim_{x\to 4}(4-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8}=\lim_{z\to 0}z\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{8}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\operatorname{tg}\frac{\pi z}{8}}=\frac{8}{\pi}.$$

д) Имеем неопределенность вида 1^∞. При решении воспользуемся известным пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right]^2=e^2.$$

е) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Обозначим $x-e$ через z:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{z\to 0}\frac{\ln(z+e)-\ln e}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\ln\left(\frac{z}{e}+1\right)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\ln\left[\left(\frac{z}{e}+1\right)^{\frac{e}{z}}\right]^{\frac{1}{e}}=\ln e^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}.$$

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

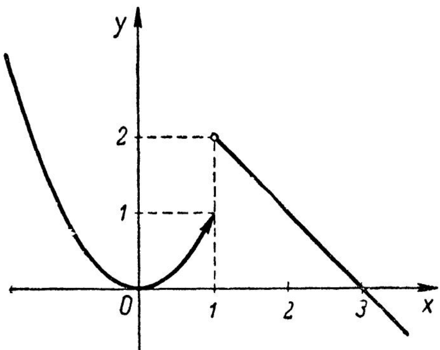
а) $f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ при } x<1,\\ 3-x \text{ при } x\geqslant 1,\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}1-x \text{ при } x<0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ x-1 \text{ при } x>0,\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}x^2+1 \text{ при } x\leqslant 0,\\ \operatorname{tg} x+1 \text{ при } x>0,\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+2} \text{ при } x\leqslant 0,\\ e^x \text{ при } x>0.\end{cases}$

Решение.

а) Так как функции x^2 и $3-x$ непрерывны в указанных областях, то о разрыве функции $f(x)$ может идти речь только в точке стыка областей, т. е. в точке $x=1$.

Вычислим в точке $x=1$ предел функции $f(x)$ слева и справа:



Черт. 2

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(3-x)=2.$$

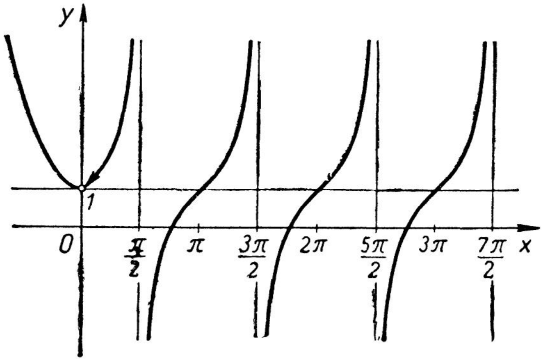
Отсюда заключаем, что в точке $x=1$ функция имеет разрыв первого рода (см. черт. 2).

б) Функция x^2+1 не имеет точек разрыва. Функция $\operatorname{tg} x+1$, как известно, имеет разрывы второго рода в точках $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ $(n = \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$. Остается исследовать точку стыка областей $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (x^2+1) = 1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (\operatorname{tg} x + 1) = 1, f(0) = 1.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ непрерывна (см. черт. 3).

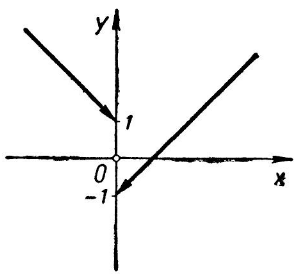


Черт. 3

в) Функции $1 - x$ и $x - 1$ не имеют точек разрыва. Исследуем точку $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} (1-x) = 1; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1) = -1.$$

Следовательно, в точке $x = 0$ имеет место разрыв первого рода (см. черт. 4).



Черт. 4

г) Функция $\frac{1}{x+2}$ непрерывна во всех точках, кроме $x = -2$. Исследуем поведение функции в этой точке.

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{x+2} = -\infty;$$

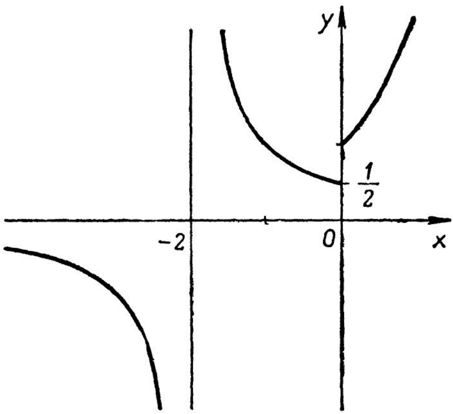
$$\lim_{x\to -2+0} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Значит, в точке $x = -2$ разрыв второго рода. Функция e^x не имеет точек разрыва. Остается исследовать точку стыка областей $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} e^x = 1.$$

Значит, в точке $x = 0$ разрыв первого рода (см. черт. 5).

10. а) Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, будет ли функция $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x + 4$ принимать значение, равное 10, в какой-либо точке отрезка $[0, 2]$.



Черт. 5

Решение. Найдем значения данной функции на концах отрезка $[0, 2]$:

$$f(0) = 4,$$

$$f(2) = 2^4 - 5\cdot 2^2 + 8\cdot 2 + 4 = 16.$$

Так как $f(x)$ непрерывна на $[0, 2]$, то во второй теореме Коши по крайней мере в одной точке отрезка функция принимает значение, равное 10 (между 4 и 16).

б) Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, что уравнение $x^5 - 2x^2 + 3x = 4$ имеет вещественный корень, принадлежащий отрезку $[0, 2]$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5 - 2x^2 + 3x - 4$. Она непрерывна на $[0, 2]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков: $f(0) = -4$, $f(2) = 26$.

По первой теореме Коши в этом случае на отрезке $[0, 2]$ найдется хотя бы одна точка, в которой значение функции равно нулю. Эта точка и будет корнем уравнения $x^5 - 2x^2 + 3x = 4$.

в) Доопределить функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке. Построить графики этих функций.

Решение. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ не определена. Но, как известно, ее предел в этой точке равен 1. Следовательно, если положить $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, то функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

будет непрерывной в точке $x = 0$.

Вариант № 1

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству: $|3x + 4| < 10$.

2. Дана функция:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x \text{ при } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Найти значения:

$$f(0),\ f\left(\frac{1}{2}\right),\ f\left(\frac{3}{2}\right) \text{ и } f\ (2).$$

3. Установить области существования функций:
а) $f(x) = \log_a 3^x + \sin x$,
б) $\varphi(x) = \arccos (2x - 3)$,
в) $\psi(x) = \frac{\log_a x}{x - 3}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $[0, 2]$. Каковы области определения функций: $f(x^2)$, $f(x - 2)$, $f(x + 1)$ и $f\left(\frac{x}{2}\right)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3n - 4}{2n + 3} = \frac{3}{2}.$$

Начиная с какого n величина $\left|\frac{3n-4}{2n+3}-\frac{3}{2}\right|$ не превосходит 0,0001?

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{4n^4 - 3n^3}{2n^4 + n^3 + n^2}.$$

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = 2x + 3$ имеет в точке $x = 4$ предел, равный 11. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $[x - 4] < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 11| < 0{,}01$? Будет ли функция непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+5x+8}{2x^2-9x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+2)} - x\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+5x}{x^2-4x}$, д) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$,

в) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$, е) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\cos\frac{\varphi}{x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 3x+2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ в) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } x > 0, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \neq 0, \\ 2 & \text{при } x = 0, \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ x & \text{при } x > 0, \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, что уравнение $x^8 + 4x^3 - 5x^2 + 6 = 0$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[-1, 4]$.

Вариант № 2

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$|x - 2| \geqslant 4.$$

2. Дана функция $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 8}{x^3 - 3}$. Найти значения: $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$ и $f(a)$.

3. Установить области существования функций:

а) $f(x) = \log_a x^2 + \sqrt{x}$,

б) $\varphi(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$,

в) $\psi(x) = 1 + x + x^2 + \sqrt{5-x}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $(-1, +1)$. Каковы области определения функций:

$$f(3x), f\left(\frac{x}{3}\right), \; f(x-3) \text{ и } f(x+2)?$$

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+4} = 2.$$

Начиная с какого n величина $\left|\frac{2n-3}{n+4} - 2\right|$ не превосходит 0,0001?

6. Найти предел последовательности: $x_n = \frac{n^3+3n^2+8n-4}{2n^3-3n^2}$.

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = 3x - 5$ в точке $x = 4$ имеет предел, равный 7. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-4| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 7| < 0{,}01$? Будет ли $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x}{3x^3-4x^2+8}$,

б) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{x^2-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x^2+4})$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{x+1}$,

д) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{x^2-4}$,

е) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \text{ при } |x| > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{1-x} \text{ при } x > 0, \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } \pi \leqslant x < 0, \\ 2 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, что уравнение $x^7 - 2x^5 + x^3 = 12$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[1, 2]$.

Вариант № 3

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$|x + 3| > 2.$$

2. Дана функция $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Найти значения: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ и $f(-2)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$

б) $\varphi(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$,

в) $\psi(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $(-2{,}0)$. Каковы области определения функций: $f(x+1)$, $f(2x-3)$, $f(4x)$ и $f\left(\frac{x}{4}\right)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - n + 1}{4n^2 + 3n + 2} = \frac{3}{4}.$$

Для каких n величина $\left|\frac{3n^2 - n + 1}{4n^2 + 3n + 2} - \frac{3}{4}\right|$ меньше чем 0,0001?

6. Найти предел последовательности: $x_n = \frac{3^n}{2 + 9^n}$.

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = 3x + 1$ в точке $x = 2$ имеет предел, равный 7. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 7| < \frac{1}{5}$? Будет ли $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - 5x^2}{2x + 8x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$,

г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$,

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x + 4}{x + 3}\right)^{2x}$,

е) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}\right)$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x < 0, \\ 1 \text{ при } x = 0, \\ \dfrac{1}{x-2} \text{ при } x > 0, \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ при } -2 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{1}{x-1} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$

г) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+6}$.

Построить графики этих функций.

10. Доопределить функцию $f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-2}$ в точке $x = 1$ таким образом, чтобы она стала непрерывна в этой точке.

Вариант № 4

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$|5x - 8| \leqslant 12.$$

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ x^2 + 1 \quad \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Найти значения: $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ и $f(3)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = x^2 + x + 1$,

б) $\varphi(x) = \log_a (x^2 - 9)$,

в) $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $(1, 2)$. Каковы области определения функций: $f(x^2)$, $f(2x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$ и $f(x+2)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 3n} = 1.$$

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{\sqrt[3]{n+1} - 1}{\sqrt{n+1} + 1}.$$

7. Пользуясь определением предела функции, доказать что функция $f(x) = x^2 - 5x + 6$ в точке $x = 5$ имеет предел, равный 6. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x - 5| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 6| < 0{,}001$? Будет ли $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^2 + 8x + 3}{3x^3 - 4x^2 + x + 1}$, г) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{e^x - e^3}{x - 3}$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 8x}{x^2 - 4x}$, д) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{a + x} - \sqrt{x - a})$,

в) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 2x - 8}$. е) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x - 3}\right)^{2x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при } -\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ 2 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$ в) $f(x) = E(x)$,

г) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = -\frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0, \\ x^2 + \frac{1}{2} & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Доопределить функцию $f(x)=\frac{2x^2-3x}{2x}$ в точке $x=0$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

Вариант № 5

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству $x^2 \leqslant 9$.

2. Дана функция:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -1 \text{ при } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ при } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Найти значения: $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{4})$ и $f(\frac{3}{4})$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{E(x)-x}$,

б) $\varphi(x)=(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

в) $\psi(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

4. Функция $y=f(x)$ определена на $[-1, +1]$. Каковы области определения функций: $f(\sin x)$, $f(x^2-1)$, $f(2x)$ и $f(2x-3)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2+9n^2}}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

Начиная с какого n величина $\left|\frac{\sqrt{2+9n^2}}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|$ не превосходит 0,0001?

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n^3+n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^3+4}}.$$

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x)=\frac{x}{2x+1}$ при $x \to \infty$ имеет пределом число $\frac{1}{2}$. Для каких значений x величина $\left|\frac{x}{2x+1}-\frac{1}{2}\right|$ меньше 0,001?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5+4x-x^2}{x^2-x-1}$, г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^2$,

б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+x^3}{x+2x^2}$, д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+5x-8}\right)$,

в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^3-2x^2-x+2}$, е) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2-1} \text{ при } |x|<1,\\ x^2-1 \text{ при } |x|\geqslant 1,\end{cases}$ в) $f(x)=\frac{2x+3}{3x-2}$,

б) $f(x)=\begin{cases}e^x \text{ при } x\leqslant 0,\\ 2-x \text{ при } x>0,\end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } x\leqslant 0,\\ \ln x \text{ при } x>0.\end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Опираясь на свойства непрерывных функций, доказать, что функция $f(x)=x^5-2x^3+4x^2+3x-1$ на отрезке $[-1, +1]$ принимает значение, равное 4.

Вариант № 6

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству $x^2>4$.

2. Дана функция $f(x)=\frac{x^3-9}{2x+3}$. Найти значение: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ и $f(2a)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x}$,

б) $\varphi(x) = \sqrt{x^2+1} + \log_a x$,

в) $\psi(x) = \frac{x+1}{x-1} + \log_a(x^2-4)$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $[1, 2)$. Каковы области определения функций: $f(-x)$, $f(2-x)$, $f(x-2)$ и $f\left(\frac{x}{2}\right)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-2n+1}{5n^3+n^2+1} = 1.$$

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{n^3-3}{(2n+3)^3}.$$

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = x^2+4$ имеет в точке $x = 1$ предел, равный 5. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-1| < \delta$ следовало неравенство $|f(x)-5| < \frac{1}{15}$? Будет ли $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+5x+3}$,

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-5x^2}{x+2x^2}$,

д) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^2}$,

е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$,

б) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ 1-x & \text{при } x > 0, \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{при } x > 0, \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Доопределить функцию $f(x) = \dfrac{(1+x)^5 - 1}{x}$ в точке $x = 0$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

Вариант № 7

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$4x^2 - 9 \leqslant 0.$$

2. Дана функция $f(x) = |x| - x$. Найти значения: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ и $f(2)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = \lg \cos x^2 + \lg \cos^2 x$,

б) $\varphi(x) = \arcsin \lg \dfrac{x}{10}$,

в) $\psi(x) = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 1}$.

4. Функция $f(x)$ определена на $(-1, +2]$. Каковы области определения функций: $f(-x)$, $f(1-x)$, $f(x-1)$ и $f(2x)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+8}{4-n} = -1.$$

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}.$$

У к а з а н и е. Предварительно следует преобразовать числитель, используя формулу суммы натуральных чисел.

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = \frac{x}{3} + 4$ имеет в точке $x = 3$ предел, равный 5. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x - 3| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 5| < \frac{1}{5}$? Будет ли $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{ax + b}{cx + d}$, г) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$,

б) $\lim\limits_{t \to 1} \frac{t^2 - t}{2t^2 - 2}$, д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^x$,

в) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$, е) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}\right)$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 - 4)(x + 8)}$, в) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 2 & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$, г) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{при } |x| \leqslant 0, \\ x & \text{при } |x| > 0. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Опираясь на свойства непрерывных функций, доказать, что уравнение

$$x^5 - x^2 + 5x - 3 = 0$$

имеет по крайней мере один вещественный корень между числами -1 и $+1$.

Вариант № 8

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$|x + 2| < 1.$$

2. Дана функция $f(x) = E(x)$. Найти значения: $f(2)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(\pi)$ и $f\left(5\frac{1}{4}\right)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = x - |x|$,

б) $\varphi(x) = \arcsin(\sin x)$,

в) $\psi(x) = \sqrt{3-x} + \arccos\frac{x-2}{3}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $[0, 1]$. Каковы области определения функций: $f(x+3)$, $f(x^3)$, $f\left(\frac{x}{3}\right)$ и $f(3x)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-5n}{3-n} = 5.$$

Начиная с какого n величина $\left|\frac{3-5n}{3-n} - 5\right|$ меньше 0,002?

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{1+a+a^2+a^3+\ldots+a^n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}.$$

Указание. Предварительно следует преобразовать числитель и знаменатель по формуле суммы членов геометрической прогрессии.

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = 2x^2 - 3$ имеет в точке $x = 1$ предел, равный -1. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-1| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - (-1)| < \frac{1}{8}$? Будет ли функция $f(x)$ непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+5x+x^4}{2+x^3}$,

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$,

в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{e^{ax} - e^{x^2}}{x-a}$,

г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4-1}$, д) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, е) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3x+2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$

б) $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

в) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \end{cases}$

г) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x + 3x & \text{при } x > 0, \\ 1 - x & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Опираясь на свойства непрерывных функций, установить, что уравнение $x^5 + x^4 + 5x^3 - x^2 = 3$ имеет корень, принадлежащий отрезку $[-1, +1]$.

Вариант № 9

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$|x-2| \geqslant 4.$$

2. Дана функция:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < 0, \\ 1-x & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти значения: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ и $f(-4)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}$,

б) $\varphi(x) = \frac{x}{x-2}$,

в) $\psi(x) = \log_a \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на $[1, 3]$. Каковы области определения функций: $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$ и $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2-2}}{n+3} = \sqrt{2}.$$

Для каких n величина $\left| \frac{\sqrt{2n^2-2}}{n+3} - \sqrt{2} \right| < 0{,}0001$?

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n = \frac{\sin n^2}{5n+4}.$$

7. Пользуясь определением предела функции, доказать, что функция $f(x) = x^2 + 5$ в точке $x = 2$ имеет предел, равный 9. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x-2| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 9| < 0{,}01$? Будет ли функция непрерывна в этой точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+x^2+1}{x^3-5x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$,

б) $\lim\limits_{x\to b} \frac{a^x-a^b}{x-b}$, д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}$, е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - 1}{2x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)(x+2)}$, б) $f(x) = E(x)$, в) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$ г) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ \frac{1}{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$

Построить графики этих функций.

10. Доопределить функцию $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ в точке $x=2$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

Вариант № 10

1. Определить те значения x, которые удовлетворяют неравенству:

$$2x^2-8 \leqslant 0.$$

2. Дана функция $f(x)=\sqrt[3]{x^2+8}-x$. Найти значения: $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$ и $f(a)$.

3. Установить области существования следующих функций:

а) $f(x)=\sqrt{7-2x}$,

б) $\varphi(x)=\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-8}$,

в) $\psi(x)=\log_a(3x-4)$.

4. Функция $y=f(x)$ определена на $(-2, +2)$. Каковы области определения функций: $f(x-2)$, $f(2\cos x)$, $f\left(\frac{x}{3}\right)$ и $f(x+3)$?

5. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3}{3n^2-2}=\frac{2}{3}.$$

Начиная с какого n величина $\left|\dfrac{2n^2+3}{3n^2-2}-\dfrac{2}{3}\right|$ не превосходит 0,005?

6. Найти предел числовой последовательности:

$$x_n=\frac{3n}{9n+2}+\frac{1}{n}\cos 2n.$$

7. Пользуясь определением предела функции, установить, что функция $f(x) = 3x^2 - 1$ в точке $x = 2$ имеет предсл, равный 11. Каково должно быть δ, чтобы из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало неравенство $|f(x) - 11| < 0{,}01$? Будет ли функция непрерывна в данной точке?

8. Вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$, г) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$,

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 - 5x^2 + 4}{9 - x^4}$, д) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^{mx}$,

в) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$, е) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$.

9. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции:

а) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$, в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{при} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при} \quad x \leqslant 1, \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \neq 1, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x = 1, \end{cases}$ г) $f(x) = x - E(x)$.

Построить графики этих функций.

10. Доопределить функцию

$$f(x) = \frac{a^{x-3} - 1}{x - 3}$$

в точке $x = 3$ таким образом, чтобы она стала непрерывной в этой точке.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2 ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Вариант № 0

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$,
б) $y = \cos(2x - 3)$,
в) $y = e^{3x}$.

Решение. а) Для нахождения производной функции $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$ в некоторой точке x поступаем следующим образом:

1) Дадим значению x некоторое приращение Δx и вычислим соответствующее приращение функции Δy:

$$\Delta y = [(x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 4] - (x^3 + 3x^2 - 5x + 4) = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 5\Delta x.$$

2) Составляем отношение приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx и переходим к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 - 5\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 6x + 3\Delta x - 5) = 3x^2 + 6x - 5.$$

Точно такими же действиями находятся производные и других функций. Особенности состоят лишь в том, что в одних случаях предел вычисляется проще, а в других сложнее.

б) $y = \cos(2x - 3)$,

$$\Delta y = \cos[2(x + \Delta x) - 3] - \cos(2x - 3) =$$

$$= -2\sin\frac{4x + 2\Delta x - 6}{2}\sin\frac{2\Delta x}{2} = -2\sin(2x + \Delta x - 3)\cdot\sin\Delta x,$$

$$y = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin(2x + \Delta x - 3)\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right] =$$

$$= -2\sin(2x - 3).$$

в) $y = e^{3x}$, $\qquad \Delta y = e^{3(x+\Delta x)} - e^{3x} = e^{3x}(e^{3\Delta x} - 1)$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{3x}(e^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 3e^{3x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} = 3e^{3x}.$$

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1$. Найти $f'(0)$, $f'(-1)$, $f'(\pi)$ и $f'(a, b)$,

б) $y = x\cos 3x^2$, $\qquad$ г) $y = e^{4x^2}\sin\frac{x}{2}$,

в) $y = \ln \operatorname{tg}^2\frac{x}{3}$, $\qquad$ д) $y = x^{\sqrt{x}}$.

Решение. а) $f'(x) = 9x^2 + 8x - 2$. Подставляя вместо x значения: 0, -1, π и $a - b$, получим: $f'(0) = -2$,

$f'(-1) = -1$, $f'(\pi) = 9\pi^2 + 8\pi - 2$, $f'(a - b) = 9(a - b)^2 + 8(a - b) - 2$,

б) $y' = x'\cos 3x^2 - x(\cos 3x^2)' = \cos 3x^2 - 6x^2\sin 3x^2$,

в) $$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{3}}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}} = \frac{4}{3}\operatorname{cosec}\frac{2x}{3},$$

г) $$y' = 8xe^{4x^2}\sin\frac{x}{2} + e^{4x^2}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{4x^2}\cos\frac{x}{2}\left(16x\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right),$$

д) $y' = x^{\sqrt{x}} \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\, x^{\sqrt{x}-1} = \frac{x^{\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}$.

3. а) Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= b \sin t, \\ y &= a \cos t. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t \cdot y''_{t^2} - y'_t \cdot x''_{t^2}}{(x'_t)^3}.$$

Так как в нашем случае $y'_t = -a \sin t$, $x'_t = b \cos t$, $y''_{t^2} = -a \cos t$ и $x''_{t^2} = -b \sin t$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a \sin t}{b \cos t} = -\frac{a}{b} \operatorname{tg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b \cos t\,(-a \cos t) - (-a \sin t)\cdot(-b \sin t)}{(b \cos t)^3} =$$

$$= \frac{-ab \cos^2 t - ab \sin^2 t}{b^3 \cos^3 t} = \frac{-a}{b^2 \cos^3 t}.$$

б) Найти угловой коэффициент касательной к кривой

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2, \\ y &= 2t \end{aligned}\right\}$$

в точке $x = 1$, $y = 2$.

Р е ш е н и е. Как известно, угловой коэффициент касательной к кривой в некоторой точке равен значению производной в этой точке.

Предварительно найдем значение параметра t, соответствующее точке (1, 2). Из условий $t^2 = 1$ и $2t = 2$ находим $t = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2}{2t}.$$

Искомый угловой коэффициент при $t = 1$ равен $k = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$.

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 + 3x^2$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$; 0,1 и 0,01. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

Решение.

$\Delta y = (x + \Delta x)^3 + 3(x + \Delta x)^2 - x^3 + 3x^2 = 3x^2\Delta x^2 + \Delta x^3 + 6x\Delta x + 3\Delta x^2$, $dy = y' \cdot \Delta x = (3x^2 + 6x) \cdot \Delta x$.

В точке $x = 1$ $\Delta y = 9\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3 \cdot dy = 9\Delta x$.

При $\Delta x = 1$ $\Delta y = 16$; $dy = 9$; абс. погр. $= 7$; отн. погр. $= \frac{7}{16} \approx 44\%$,

При $\Delta x = 0{,}1$ $\Delta y = 0{,}961$; $dy = 0{,}9$; абс. погр. $= 0{,}061$; отн. погр. $= \frac{61}{961} \approx 6\%$,

При $\Delta x = 0{,}01$ $\Delta y = 0{,}090601$; $dy = 0{,}09$; абс. погр. $= 0{,}000601$; отн. погр. $= \frac{601}{90601} \approx \frac{1}{2}\%$.

5. а) Вычислить приближенно изменение, претерпеваемое функцией $y = x^2 - 2x + 4$ при переходе аргумента x от значения 2 к значению 2,01. Полученный результат сравнить с точным.

Решение. Возьмем $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$. Получим: приближенно изменение функции $dy = (2x - 2)\Delta x = 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}02$ точное изменение функции $\Delta y = [(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 4] - (x^2 - 2x + 4) = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - 2 \cdot \Delta x = 4 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 - 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}0201$. Таким образом, dy отличается от Δy только в четвертом десятичном знаке.

б) Используя дифференциальное исчисление, найти приближенно значение $\sin 60^\circ 18'$, если известно, что $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866025$, а $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Результат сравнить с табличным.

Решение. Так как значение $\sin 60°$ известно, то для решения задачи достаточно найти изменение Δy функции $y = \sin x$ при переходе значений x от $60°$ до $60°18'$, т. е. при $\Delta x = 18 = \frac{18\cdot\pi}{60\cdot 180} = \frac{\pi}{600}$ радиан.

$$\Delta y \approx dy = \cos x \cdot \Delta x = \cos 60° \cdot \frac{\pi}{600} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{600} = \frac{\pi}{1200} \approx 0{,}002618$$

$$\sin 60°18' \approx \sin 60° + dy - 0{,}866025 + 0{,}002618 = 0{,}868643.$$

По семизначным таблицам $\sin 60°18' = 0{,}8686315$.

в) Пользуясь дифференциальным исчислением, найти приближенно значение функции:

$$y = \sqrt[7]{\frac{3-x}{3+x}}$$

при $x = 0{,}05$.

Решение. При $x = 0$ значение функции $y = 1$. Остается вычислить изменение функции y при изменении аргумента x от 0 до 0,05, т. е. найти Δy при $x = 0$ и $x = 0{,}05$

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = \frac{1}{7}\sqrt[7]{\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^6} \cdot \frac{-6}{(3+x)^2}\cdot \Delta x =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot 1 \cdot \left(-\frac{6}{9}\right)\cdot 0{,}05 = -\frac{1}{210}.$$

Следовательно,

$$y_{x=0{,}05} \approx 1 + \left(-\frac{1}{210}\right) = \frac{209}{210}.$$

6. а) На кривой $y = x^2 - 5x + 4$ найти точку, касательная в которой параллельна прямой $y = 2x + 1$.

Решение. Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где значение углового коэффициента k равно значению производной $y' = 2x - 5$ в точке (x_0, y_0), т. е. $k = 2x_0 - 5$. Так как у параллельных прямых угловые коэффициенты равны, то $k = 2$, т. е. $2x_0 - 5 = 2$. Откуда $x_0 = \frac{7}{2}$.

Подставляя значение x_0 в уравнение кривой, находим:

$$y_0 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{7}{2} + 4 = -\frac{5}{4}.$$

Искомой точкой будет $\left(\frac{7}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

б) Под каким углом пересекаются кривые $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$?

Решение. Найдем точки пересечения кривых, решая систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin x, \\ y &= \sin 2x. \end{aligned}\right\}$$

Получаем, что $\sin x = \sin 2x$. Абсциссами точек пересечения будут $x = k\pi$ и $x = 2l\pi \pm \frac{\pi}{3}$, где k и l произвольные целые числа.

Угловыми коэффициентами касательных к данным кривым в точке x будут:

$$k_1 = (\sin x)' = \cos x,$$
$$k_2 = (\sin 2x)' = 2\cos 2x.$$

Угол α между кривыми в точке пересечения равен углу между касательными к кривым в этой точке и определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

При $x = k\pi$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\cos k\pi - 2\cos 4k\pi}{1 + 2\cos k\pi \cos 4k\pi} = \pm \frac{(-1)^k - 2}{1 + (-1)^k 2} =$$

$$= \begin{cases} \pm \frac{1}{3} \text{ при четном } k \\ \pm 3 \text{ при нечетном } k \end{cases}$$

При $x = 2l\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\frac{1}{2} - 2 \cdot \quad -\frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}} = \pm 3.$$

Таким образом, данные кривые пересекаются либо под углом $\operatorname{arctg} 3 \approx 71{,}5^\circ$, либо под углом $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 90^\circ - \operatorname{arctg} 3 \approx 18{,}5^\circ$.

7. а) Прямолинейное движение тела осуществляется по закону

$$s = 2t^2 + t^3.$$

Какую скорость и ускорение будет иметь тело через 5 сек. после начала движения?

Р е ш е н и е. Известно, что первая производная функции характеризует собой скорость, а вторая производная — ускорение изменения этой функции. Следовательно, для решения задачи достаточно найти значения s' и s'' при $t = 5$.

$$s' = 4t + 3t^2 \qquad s'_{t=5} = 4\cdot 5 + 3\cdot 5^2 = 95,$$

$$s'' = 4 + 6t \qquad s''_{t=5} = 4 + 6\cdot 5 = 34.$$

б) Одна сторона прямоугольника увеличивается со скоростью 3 *см/сек*, другая — 5 *см/сек*. С какой скоростью увеличивается площадь s этого прямоугольника в момент, когда первая сторона равна 18 *см*, а вторая — 25 *см*?

Р е ш е н и е. Обозначим стороны прямоугольника: первую — через x, вторую — через y. Тогда площадь $s = xy$, $s' = x'y + xy'$. Искомая скорость $v = s' = 3\cdot 25 + 18\cdot 5 = 165$ *см/сек*.

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$, в) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \sin x}{1 + \cos 4x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{\ln x}\right)$,

Р е ш е н и е.

а) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2,$$

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1,$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+\cos 4x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x-\cos x}{-4\sin 4x}=\infty.$

9. а) Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, даст наименьшую сумму?

Решение. Обозначим искомое число через x. Задача сводится к исследованию на минимум функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Находим производную $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$. Составляем уравнение $1-\frac{1}{x^2}=0$. Откуда $x^2=1$ и $x=1$, значение $x=-1$ сразу отбрасывается как неудовлетворяющее условию задачи. Значение $f(1)=2$ и будет миминальным, так как для любых положительных $x\neq 1$

$f(x)=x+\frac{1}{x}>2.$

В наличии минимума функции при $x=1$ можно убедиться также и по знаку второй производной $f''(x)=\frac{2}{x^3}$, $f''(1)=2>0.$

б) Из картона изготовить цилиндрическую коробку (без крышки), заданной вместимости v с наименьшей затратой материала.

Решение. Обозначим радиус коробки через x, а высоту через y. Тогда количество расходуемого материала определится формулой:

$$s=2\pi xy+\pi x^2.$$

Получили для исследования функцию двух переменных. Однако переменные x и y не являются независимыми, поскольку объем коробки $v=\pi x^2y$ задан. Из последнего выразим одну переменную через другую и подставим в исследуемую функцию:

$$y=\frac{v}{\pi x^2},\quad s=2\pi x\cdot\frac{v}{\pi x^2}+\pi x^2=\frac{2v}{x}+\pi x^2.$$

Находим производную $s' = -\frac{2v}{x^2} + 2\pi x$;

$$2\pi x - \frac{2v}{x^2} = 0; \quad 2\pi x^3 - 2v = 0; \quad x^3 = \frac{v}{\pi}; \quad x = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}};$$

$$y = \frac{v}{\pi x^2} = \frac{v}{\pi \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}^2}} = \sqrt[3]{\frac{v^3\pi^2}{v^2\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}.$$

Таким образом, получили, что наименьшее количество материала идет на коробку, у которой радиус равен высоте.

10. Провести полное исследование и построить график функции:

$$f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}.$$

1) Функция существует везде, кроме точек $x = \pm 1$.

2) Функция нечетна, так как $f(-x) = -\frac{2x}{1 - x^2}$ и $f(-x) = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат. Учитывая это, ограничимся исследованием и построением графика только для $x \geqslant 0$. Ветвь графика, соответствующая значениям $x < 0$ легко достраивается по симметрии.

3) Функция имеет в точке $x = 1$ разрыв второго рода, причем,

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{2x}{1 - x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+\infty} \frac{2x}{1 - x^2} = -\infty.$$

Отсюда сразу видно, что прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой кривой.

4) Исследуем на экстремум

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) + 2x \cdot 2x}{(1 - x^2)^2} = \frac{2(1 + x^2)}{(1 - x^2)^2}$$

$f'(x) > 0$ при любых x.

$f(x) = \infty$ при $x = 1$, но в этой точке разрыв и экстремума быть не может. Следовательно, $f(x)$ не имеет точек экстремума.

5) Найдем точки пересечения кривой с осями координат. С осью OX

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2x}{1-x^2}, \\ y &= 0 \quad . \end{aligned}\right\} (0,\ 0)$$

С осью OY

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{2x}{1-x^2}, \\ x &= 0. \end{aligned}\right\} (0,\ 0)$$

Следовательно, кривая проходит через начало координат.

6) Исследуем на выпуклость, вогнутость и перегиб.

$$f''(x) = \left(\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\right)' = \frac{(1-x^2)^2\ 4x + 2(1+x^2)\cdot 2(1-x^2)\cdot 2x}{(1-x^2)^4} =$$

$$= \frac{4x(3+x^2)}{(1-x^2)^3},$$

$f''(x) = 0$ при $x = 0$, $f''_{x<0}(x) < 0$, $f''_{0<x<1}(x) > 0$, $f''_{x>1}(x) < 0$.

Значит, в точке $x = 0$ перегиб, на $(0,\ 1)$ кривая вогнута, на $(1 + \infty)$ = выпукла.

7) Выясним вопрос об асимптотах.

а) Наличие вертикальной асимптоты $x = 1$ уже установлено в пункте 3.

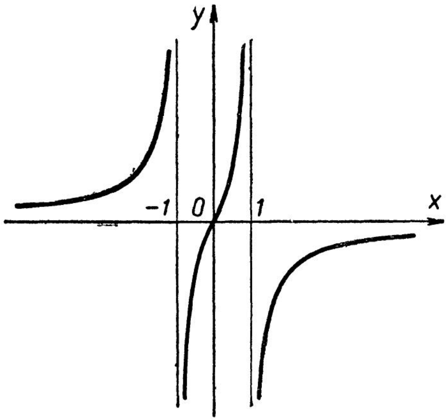
б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0$. Следовательно, прямая $y=0$ (т. е. ось OX) является горизонтальной асимптотой кривой.

в) $\kappa = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0$. Следовательно, наклонных асимптот у кривой нет.

Все полученные нами сведения можно представить в виде следующей таблицы.

x	0	(0,1)	1	$(1, +\infty)$
y'	+	+		+
y''	0	+		—
y		Возрастает Вогнута	Разрыв 2-го р. $f(1-0)=+\infty$ $f(1+0)=-\infty$	Возрастает Выпукла

График данной функции изображен на чертеже 6.



Черт. 6

Вариант № 1

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = x^4 - 5x^2 + 3x + 1$,

б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$,

в) $y = a^{x^2}$.

2. Пользуясь общими выражениями дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $f(x) = (x-2)^4$. Найти $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(-2)$ и $f'(\pi)$,

б) $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}\,(x^2 + 3x)$,

в) $y = \sqrt{1+x^2} + x \arcsin x$,

г) $y = (\sqrt{x})^x$,

д) $y = \ln\frac{x-1}{2x+1}$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t, \\ y &= t^2 + 1. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - 3x + 4$ в точке $x = 2$ при $\Delta x = 1; 0{,}1; 0{,}01$. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом.

5. Используя понятие дифференциала, найти приближенно значение $\operatorname{tg} 44°45'$. Результат сравнить с табличным.

6. Доказать, что касательная к окружности в любой точке перпендикулярна радиусу-вектору, проведенному к этой точке.

7. Угол Θ (в радианах), на который поворачивается колесо через t секунд, равен

$$\Theta = 2t^3 - 54t + 3.$$

Определить угловую скорость движения колеса. Через сколько времени колесо остановится?

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} (\pi - 2\operatorname{arctg} x) \ln x,$

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x},$

в) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^n - 1}.$

9. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара данного радиуса.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = \frac{2}{(x-2)(x-1)}.$$

Вариант № 2

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 3$,
б) $y = \sin(2x + 1)$,
в) $y = \ln(2x + 3)$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $f(x) = (x^2 + 2)^3$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$ и $f'(a+b)$,

б) $y = \sqrt{x^2 + \sin 2x}$,
в) $y = e^{3x} \sin 2x$,

г) $y = \sqrt[x]{x^2 + 1}$,

д) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 2}$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= \ln t, \\ y &= \arcsin t. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 - 5x + 3$ в точке $x = 0$ при $\Delta x = 2$; 0,2 и 0,02. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Используя понятие дифференциала, найти приближенное значение функции

$$y = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6$$

при $x = 1{,}001$.

6. На кривой $y = 4x^2 - 6x + 3$ найти точку, в которой касательная: а) параллельна прямой $y = 2x$, б) перпендикулярна прямой $y = \frac{x}{4}$, в) составляет с положительным направлением оси Ox угол в $45°$.

7. Две стороны треугольника равномерно увеличиваются со скоростями 5 *см/сек* и 6 *см/сек*, а угол, заключен-

ный между ними, уменьшается со скоростью $\frac{\sqrt{3}}{10}$ сек$^{-1}$. Определить скорость изменения площади этого треугольника в момент, когда названные его элементы соответственно равны 20 *см*, 40 *см* и 30°.

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы следующих функций:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$,

б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$,

в) $\lim\limits_{x \to 0} x \ln \frac{1}{x}$.

9. Из всех ваз одинаковой вместимости и имеющих форму усеченного конуса, в котором образующая составляет с основанием угол α, найти ту, у которой полная поверхность минимальна.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2.$$

Вариант № 3

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = (x - 2)^2$,

б) $y = \frac{1}{x}$,

в) $y = \sin^2 x$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $f(t) = t^3 - 2t + e^{2t}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(-1)$ и $f'(\ln 2)$,

б) $y = \ln \frac{x + 2}{x - 2} + \arcsin \sqrt{x}$, в) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

г) $y = x^{2x}$,

д) $y = \cos^2(2x^2 + 3x + 1)$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(1 - \cos t), \\ y &= a(t - \sin t). \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = (x + 3)^3$ в точке $x = 1$ при $x = 1$; 0,1 и 0,01. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Найти приближенно значение $\sqrt[5]{\frac{2 - 0{,}01}{2 + 0{,}01}}$, используя понятие дифференциала.

6. Показать, что синусоида ($y = \sin x$) пересекает ось Ox каждый раз под углом 45° или 135°.

7. С какой скоростью изменяются поверхность и объем шара, если радиус его изменяется со скоростью $v = 10$ *м/сек*?

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$,

б) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - 4\sin^2 \frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$,

в) $\lim\limits_{x \to \infty} x^4 e^{-x}$.

9. Над центром круглой площадки нужно повесить фонарь. Радиус площадки R. На какой высоте это сделать, чтобы он наилучшим образом освещал дорожку, которой обведена площадка? (Степень освещенности прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей и обратно

пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 4.$$

Вариант № 4

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = (x + 1)^3$,

б) $y = \sec\ x$,

в) $y = e^{2x}$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $s(t) = \frac{gt^2}{2}$. Найти $s'(0)$, $s'(1)$, $s'(\sqrt{2})$ и $s'(5)$,

б) $y = \cos^2(4x^3 + 3) + \sin^3\frac{\pi}{4}$,

в) $y = \frac{1 + x\ \operatorname{arctg}\ x}{\sqrt{1 + x^2}}$,

г) $y = x^x + (\sin\ x)^{\cos x}$,

д) $y = x^2\ e^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2 - 3t + 4, \\ y &= t^2 - 4t + 4. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = \frac{3x - 1}{x + 2}$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$; -1 и $0{,}1$. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, ко-

торые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Используя понятие дифференциала, найти приближенно значение функции

$$y = (x - 2)^3 (x - 3)^2 (x - 4)$$

при $x = 3{,}001$.

6. Определить, под каким углом тангенсоида ($y = \operatorname{tg} x$) пересекает ось абсцисс.

7. Показать, что если тело движется по закону

$$s = ae^t + be^{-t},$$

то его ускорение численно равно пройденному пути.

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 8}{2x^3 - 3x^2 - 4x + 3}$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$,

в) $\lim\limits_{x \to 2} (2 - x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4}$.

9. Каково должно быть соотношение размеров консервной банки цилиндрической формы с заданной поверхностью, чтобы она имела наибольшую емкость?

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x.$$

Вариант № 5

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = \cos(2x + 1)$,
б) $y = x^4$,
в) $y = a^{2x}$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $s(t) = t^2 + 5t - 8$. Найти $s'(0)$, $s'(-1)$, $s'(a)$ и $s'(a + b)$, б) $y = \sin(\sin^2 x)$,

в) $y = (x^2 + 2)^{x^2+2}$,

г) $y = \operatorname{arctg}^3(x^2 + 4x)$,

д) $y = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 - x$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 1$; -1 и $0{,}01$. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Вычислить приближенно изменение функции

$$y = (x-2)^3 + 4$$

при переходе аргумента x от значения 2 к значению 2,001.

6. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8 \text{ и } y^2 = 2x?$$

7. Точка движется по параболе $y = x^2 + 2$ так, что ее абсцисса x изменяется с течением времени t по закону $x = t^3$. С какой скоростью изменяется ордината точки y?

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to a} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$,

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^4}{e^x}$,

в) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x}$.

9. Бак с квадратным основанием должен вмещать T литров. Каковы должны быть его размеры, при которых внутренняя поверхность (без крышки) была бы наименьшей?

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = \frac{3x}{1+x^2}.$$

Вариант № 6

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^2$,
б) $y = a^{2x}$,
в) $y = \operatorname{ctg}\ (x+1)$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $\varphi(t) = 2t^3 - 5t^2 + \frac{1}{t}$. Найти $\varphi'(1)$, $\varphi'(-1)$, $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\varphi'(\pi)$,

б) $y = \sqrt[3]{(x+1)^3}$,

в) $y = \ln\left(\sqrt{1-x^2}\ \cos\ x^2\right)$,

г) $y = 5^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$,

д) $y = x^{\sin(2x+3)}$.

3. Найти угловой коэффициент касательной к кривой, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^4 - 2t^3 - t^2 + 4t - 2, \\ y &= t^4 + 2t^3 - t^2 - 4t - 2 \end{aligned}\right\}$$

в точке $x = 0, y = 0$.

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ в точке $x = 3$ при $\Delta x = 1$; 0,5 и 0,25. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Ход стенных часов регулируется маятником. Передвигая (при помощи микрометрического винта) груз маятника, можно изменять его «приведенную длину» l (*см*), от которой зависит период качания T (*сек*) маятника, согласно формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где ускорение $g = 980$ *см/сек*^{2}. Часы спешат вследствие того, что маятник совершает одно качание в течение 0,499 сек. вместо того, чтобы совершать его в течение 0,5 сек. Насколько должна быть увеличена длина l, чтобы правильный ход часов был восстановлен?

У к а з а н и е. Решение задачи сводится к нахождению дифференциала dl из формулы $l = \frac{gT^2}{2\pi^2}$.

6. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить числа b и c так, чтобы она касалась прямой $y = 2x - 1$ в точке $x = 1$.

7. Тело, брошенное под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 90$ *м/сек*, движется по кривой, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned}\right\}$$

где ускорение $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}. Определить момент времени, когда тело будет двигаться горизонтально (т. е. определить точку наивысшего подъема).

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + x}{x^2}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$,

в) $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x-a)^3}{x - a^3}$.

9. На оси параболы $y^2 = 2px$ дана точка M на расстоянии d от вершины. Найти абсциссу ближайшей к ней точки кривой.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}.$$

Вариант № 7

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$,
б) $y = \sin 2x$,
в) $y = e^{2x}$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $f(\varphi) = \sin\varphi + \cos^2\varphi$. Найти $f'(0)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,

б) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{x}$, г) $y = \ln\dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}$,

в) $y = \arccos\dfrac{1}{x+1}$, д) $y = x^{x^2}$.

3. Написать уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned}\right\}$$

в точке $x = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, $y = a$.

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 2x^2 + 5x + 3$ в точке $x = 2$ при $\Delta x = 1$; -1 и $0{,}01$. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Используя дифференциальное исчисление, найти приближенно значение $\sin 60°\,15'$, если $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx$ $\approx 0{,}866025$, а $\cos 60° = \frac{1}{2}$. Результат сопоставить с табличным.

6. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 3x^2 - 8$ в точке ее пересечения с параболой $y = 3x^2$.

7. Два самолета вылетают (не одновременно) из пункта A и летят: один — со скоростью 350 *км/час* в южном направлении, другой — со скоростью 375 *км/час* в западном направлении. С какой скоростью возрастает расстояние между самолетами?

Какова эта скорость в момент, когда расстояние первого самолета от пункта A равно 100 *км*, а второго — 150 *км*?

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \ln(1 + x)}$,

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x + a)}{x}$,

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x - \sec x)$.

9. Тело движется по закону $s = t^3 - 6t^2 + 12t$. Найти его максимальную скорость.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = (x^2 - 4)^2.$$

Вариант № 8

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^3 + 2x^2 - x$,
б) $y = \sec(x - a)$,
в) $y = e^{-x}$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $\varphi(s) = 2s^3 + 3s^2 - 4$. Найти $\varphi'(0)$, $\varphi'(-1)$, $\varphi'(\sqrt{2})$ и $\varphi'(b-a)$,

б) $y = \frac{x^2}{e^x}$,

в) $y = \sin^2 x^3$,

г) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$,

д) $y = x^{\sin x}$.

3. Написать уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t + t \end{aligned}\right\}$$

в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{3}$.

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^3 + 3x$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{20}$. Найти для каждого значения x абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Насколько увеличится величина степени 5^7, если основание увеличить на 0,004?

6. Под каким углом пересекаются параболы $y^2 = ax$ и $x^2 = by$? Рассмотреть также частный случай, когда $a = b$.

7. Разложение некоторого химического вещества протекает в соответствии с уравнением

$$m = m_0 e^{-kt},$$

где m — количество вещества в момент времени t, k — положительная постоянная. Найти скорость v разложения вещества и выразить ее как функцию от m.

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 + 5x}$,

б) $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - \sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax} - x}$,

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - \cos 2x - 1}{\sin x - \cos x}$.

9. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиуса?

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = \frac{x^3}{e^x}.$$

Вариант № 9

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = x^5$,
б) $y = \operatorname{ctg} 2x$,
в) $y = \log_a(2x + 1)$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $\varphi(\Theta) = 2\Theta^3 - 5\Theta^2 + 2$. Найти $\varphi'(0)$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\varphi'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\varphi'\left(\sqrt{\pi}\right)$,

б) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$,

в) $y = x^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$,
г) $y = \ln[\ln(\ln x)]$,
д) $y = (\sin x)^{\cos x}$

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^2\varphi, \\ y &= b\ \sin^2\varphi. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = (x-2)^3$ в точке $x = 0$ при $\Delta x = 1$; 0,1 и 0,01. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Цилиндр, диаметр которого был 20 *см*, при шлифовке боковой поверхности потерял в весе 3 *г*. Насколько уменьшился его диаметр, если удельный вес вещества цилиндра равен 2,5?

6. Составить уравнения касательных к гиперболе

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1,$$

перпендикулярных к прямой $2x + 4y - 3 = 0$.

7. Лестница длиной 16 *м*, прислоненная к вертикальной стене, падает, скользя одним концом о стену, а другим о пол. С какой скоростью опускается верхний конец лестницы в момент, когда нижний конец, отодвигающийся от стены с постоянной скоростью 2 *м/мин*, отстоит от нее на расстоянии 5 *м*?

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\ \ln(1+x)}$,

б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\arcsin(3-x)}{\sqrt{x^2-5x+6}}$,

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$.

9. В данный конус вписать цилиндр наибольшего объема.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = x\ \ln x,$$

Вариант № 10

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = x^3$,
б) $y = \operatorname{tg}(2x - 1)$,
в) $y = a^{-x}$.

2. Пользуясь общими правилами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $\rho(\varphi) = \operatorname{tg}^2 \varphi + \cos^2 \varphi$. Найти $\rho'(0)$, $\rho'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\rho'(-\pi)$,

б) $y = \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$,

в) $y = \operatorname{arctg} x^2$,

г) $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}}$,

д) $y = (\cos x)^x$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= e^t \sin t, \\ y &= e^t \cos t. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = x^2 + 3x + 5$ в точке $x = 0$ при $\Delta x = 1$; 0,1 и 0,01. Найти для каждого значения Δx абсолютную погрешность $|\Delta y - dy|$ и относительную погрешность $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, которые допускаются при замене приращения дифференциалом функции.

5. Период качания маятника вычисляется по формуле: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. С какой погрешностью вычисляется период T, если погрешность при измерении длины маятника и ускорения силы тяжести была в 1%?

6. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8ax \text{ и } y^2 = \frac{x^3}{2a - x}\,?$$

7. Закон движения тела дан формулой:

$$s = a + bt + ct^2.$$

Показать, что действующая сила постоянна.

8. Пользуясь правилом Лопиталя, найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a}$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right]$,

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{3x} + 6x}{x^2}$.

9. В данный шар вписать конус с наибольшей боковой поверхностью.

10. Провести полное исследование и построить график функции

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3 ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

Вариант № 0.

1. Определить четность перестановки 2 5 4 3 1 7 8 5.

Решение. Подсчитаем количество инверсий в данной перестановке. Если их окажется четное число, то перестановка будет четной, если же их окажется нечетное число, то перестановка будет нечетной.

Впереди 1 стоит 4 цифры. Зачеркиваем 1.
Впереди 2 ничего не стоит. Зачеркиваем 2.
Впереди 3 стоят 2 цифры. Зачеркиваем 3.
Впереди 4 стоит 1 цифра. Зачеркиваем 4.
Впереди 5 ничего не стоит. Зачеркиваем 5.
Впереди 6 стоит 2 цифры. Зачеркиваем 6.
Впереди 7 ничего не стоит. Зачеркиваем 7.
Впереди 8 ничего не стоит.

Сосчитаем число инверсий:

$$4 + 0 + 2 + 1 + 0 + 2 + 0 + 0 = 9.$$

Следовательно, перестановка нечетная.

2. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 0 & A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Решение. Разложим определитель Δ по элементам первой строки:

$$\Delta = A(-1)^{1+2}M_{12} + B(-1)^{1+4} \quad M_{14}. \qquad (1)$$

Вычислим отдельно миноры:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & C & 0 & 0 & 0\\ D & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & F\\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{vmatrix} = C(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} D & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & F\\ 0 & G & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -CD(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & E & 0\\ 0 & 0 & F\\ G & 0 & 0 \end{vmatrix} = -CDE(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & F\\ G & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -CDEFG, \text{ т. е. } M_{12} = -CDEFG, \qquad (2)$$

$$M_{14}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & C & 0 & 0\\ D & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & F\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

так как все элементы его последней строки равны нулю. (2) и (3) подставим в (1) и получим:

$$\Delta = A(-1)^{1+2}M_{12} + B(-1)^{1+4}M_{14} = ACDEFG.$$

Ответ: $\Delta = ACDEFG$.

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & -1\\ 2 & 0 & X & -3 & 1\\ 0 & 3 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложив определитель D по элементам второй строки, видим, что коэффициентом при X будет его алгебраическое дополнение A_{23}.

Вычислим A_{23}:

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1 & 4\\ 1 & 9 & 0 & 14\\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -89.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\bar{a}_1 = (2, \quad 3, \ -4, \ -1),$$
$$\bar{a}_2 = (1, \ -2, \quad 1, \quad 3),$$
$$\bar{a}_3 = (5, \ -3, \ -1, \quad 8),$$
$$\bar{a}_4 = (3, \quad 8, \ -9, \ -5),$$

и выразить остальные векторы через векторы, входящие в эту систему.

Решение. Найдем ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix},$$

строками которой являются координаты данных векторов. Стоящий в левом верхнем углу матрицы A минор второго порядка отличен от нуля

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7.$$

Следовательно, ранг матрицы A не меньше двух. Если хотя бы один из окаймляющих миноров минора Δ окажется отличным от нуля, то ранг матрицы будет не меньше трех; если же все окаймляющие его миноры будут равны нулю, то ранг матрицы будет равен двум. Оказывается все миноры третьего порядка, окаймляющие минор Δ, равны нулю. Покажем это:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 15 + 12 - 40 + 6 + 3 = 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -32 + 45 + 3 - 10 + 18 - 23 = 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 36 - 32 + 9 - 24 - 16 + 27 = 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 + 27 - 8 - 6 - 48 + 15 = 0.$$

Отсюда заключаем, что ранг матрицы A равен двум.

Так как определитель Δ мы составили из элементов первых двух строк матрицы A, то векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ линейно-независимы и, следовательно, образуют одну из максимальных линейно-независимых подсистем данной системы векторов. Векторы же $\overline{a_3}$ и $\overline{a_4}$ являются линейными комбинациями векторов.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}$ линейно зависимы. Значит, мы можем подобрать такие $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$, не все равные нулю, что будет иметь место равенство:

$$\kappa_1\overline{a_1} + \kappa_2\overline{a_2} + \kappa_3\overline{a_3} + \kappa_4\overline{a_4} = 0. \qquad (1)$$

Найдем $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$. Для этого равенство (1) запишем в таком виде:

$$(2\kappa_1 + \kappa_2 + 5\kappa_3 + 3\kappa_4,\ \ 3\kappa_1 - 2\kappa_2 - 3\kappa_3 + 8\kappa_4,\ \ -4\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - 9\kappa_4,\ \ -\kappa_1 + 3\kappa_2 + 8\kappa_3 - 5\kappa_4 = 0.$$

Из того что вектор может быть нулевым только тогда, когда его координаты равны нулю, имеем:

$$\left.\begin{aligned} 2\kappa_1 + \kappa_2 + 5\kappa_3 + 3\kappa_4 &= 0,\\ 3\kappa_1 - 2\kappa_2 - 3\kappa_3 + 8\kappa_4 &= 0,\\ -4\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - 9\kappa_4 &= 0,\\ -\kappa_1 + 3\kappa_2 + 8\kappa_3 - 5\kappa_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Решив полученную однородную систему уравнений, найдем $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$.

Выпишем матрицу системы уравнений (2):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3\\ 3 & -2 & -3 & 8\\ -4 & 1 & -1 & -9\\ -1 & 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица является транспонированной по отношению к матрице A и, следовательно, ее ранг, так же как и ранг матрицы A, равен двум.

Из отличных от нуля миноров второго порядка выберем минор, стоящий в левом верхнем углу матрицы A. Тогда два первых уравнения системы (2) будут линейно-независимыми, а два остальных уравнения будут их линейными комбинациями. Перенесем в первых двух уравнениях члены, содержащие κ_3 и κ_4 в правую часть и получим:

$$\begin{aligned} 2\kappa_1 + \kappa_2 &= -5\kappa_3 - 3\kappa_4,\\ 3\kappa_1 - 2\kappa_2 &= 3\kappa_3 - 8\kappa_4. \end{aligned}$$

Решим эту систему:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-7;$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -5\kappa_3-3\kappa_4 & 1 \\ 3\kappa_3-8\kappa_4 & -2 \end{vmatrix}=7\kappa_3+14\kappa_4;$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -5\kappa_3-3\kappa_4 \\ 3 & 3\kappa_3-8\kappa_4 \end{vmatrix}=21\kappa_3-7\kappa_4.$$

По формулам Крамера имеем:

$$k_1=\frac{D_1}{D}=\frac{7k_3+14k_4}{-7}=-\ k_3-2k_4,$$

$$k_2=\frac{D_2}{D}=\frac{21k_3-7k_4}{-7}=-3k_3+\ k_4,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \kappa_1&=-\ \kappa_3-2\kappa_4, \\ \kappa_2&=-3\kappa_3+\ \kappa_4. \end{aligned}$$

При $\kappa_3=1$, $\kappa_4=0$ имеем $\kappa_1'=-1$, $\kappa_2'=-3$, $\kappa_3'=1$, $\kappa_4'=0$.

При $\kappa_3=0$, $\kappa_4=1$ имеем $\kappa_1''=-2$, $\kappa_2''=1$, $\kappa_3''=0$, $\kappa_4''=1$.

Мы получили два решения системы уравнений (2). Подставив значения этих решений в соотношение (1), получим:

$$-\bar{a}_1-3\bar{a}_2+\bar{a}_3=\bar{0},$$

$$-2\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_4=\bar{0},$$

откуда и имеем ответ :

$$\bar{a}_3=\ \bar{a}_1+3\bar{a}_2,$$

$$\bar{a}_4=2\bar{a}_1-\bar{a}_2.$$

5. Определить λ таким образом, чтобы система линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2+2x_3+\ 6x_4+4x_5&=-\ 6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3+\ 5x_4+7x_5&=-19, \\ 3x_1+9x_2+3x_3+10x_4+8x_5&=\lambda, \\ 10x_1+2x_2+3x_3+\ 7x_4+7x_5&=-\ 7 \end{aligned}$$

была совместной и решить ее при найденном значении λ.

Р е ш е н и е. Вычислим ранг матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 3 & 10 & 8 \\ 10 & 2 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix},$$

умножим элементы первых двух строк на 3 и последних двух на 2 и получим:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 6 & 18 & 12 \\ 9 & 15 & 6 & 15 & 21 \\ 6 & 18 & 6 & 20 & 16 \\ 20 & 4 & 6 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

Сократив элементы третьего столбца на 6 и вычтя элементы первой строки из соответствующих элементов всех остальных строк, получим:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 1 & 18 & 12 \\ -6 & 6 & 0 & -3 & 9 \\ -9 & 9 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сократим элементы второй строки на 3 и, вычитая третий столбец (соответственно умноженный на 15, 9, 18 и 12) из первого, второго, четвертого и пятого столбцов, получим матрицу:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -9 & 9 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычеркнув первый столбец, пропорциональный второму, получим

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ отличен от нуля,

следовательно, ранг матрицы A не меньше двух.

Вычислим окаймляющий его определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -10.$$

Следовательно, ранг матрицы не меньше трех.

Вычислим определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 9 & 2 & 4 \\ -5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как для определителя Δ имеется только единственный его окаймляющий определитель четвертого порядка и он равен нулю, то отсюда заключаем, что ранг матрицы равен трем.

За главный определитель примем определитель третьего порядка, составленный из коэффициентов при третьем, четвертом и пятом неизвестных первых трех уравнений данной системы.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix} = -10.$$

Для того чтобы система была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы, или, что то же, чтобы все характеристические определители были равны нулю.

Для определителя D имеется только один характеристической определитель:

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & 7 & -19 \\ 3 & 10 & 8 & \lambda \\ 3 & 7 & 7 & -7 \end{vmatrix}.$$

Он должен быть равен нулю. Мы его вычислим и полученное выражение приравняем нулю, откуда и найдем λ.

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & 7 & -19 \\ 3 & 10 & 8 & \lambda \\ 3 & 7 & 7 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 & -6 \\ 2 & 5 & 7 & -19 \\ 3 & 10 & 8 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & -17 \\ 3 & 7 & -1 & \lambda+3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -17 \\ 7 & -1 & +3 \end{vmatrix} =$$

$= -(4\lambda+12+238+12+28-68+6\lambda+18) = -(10\lambda+240)=0$, откуда $\lambda = -24$.

Итак, при $\lambda = -24$ система совместна. Так как ранг матрицы равен трем, а система имеет 5 неизвестных, то она имеет бесчисленное множество решений и ее решения зависят от двух параметров.

Найдем эти решения. Для этого в соответствии с выбором главного определителя $D \neq 0$ возьмем три уравнения и в правые их части перенесем члены с x_1 и x_2:

$$\left.\begin{aligned} 2x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= -6 - 5x_1 - 3x_2, \\ 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 &= -19 - 3x_1 - 5x_2, \\ 3x_3 + 10x_4 + 8x_5 &= -24 - 3x_1 - 9x_2. \end{aligned}\right\}$$

Для решения последней системы уравнений при помощи формул Крамера найдем дополнительные определители этой системы:

$$D_3 = \begin{vmatrix} -6-5x_1-3x_2 & 6 & 4 \\ -19-3x_1-5x_2 & 5 & 7 \\ -24-3x_1-9x_2 & 10 & 8 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 19 & 5 & 7 \\ 12 & 5 & 4 \end{vmatrix} -$$

$$- x_1 \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 5 & 7 \\ 9 & 10 & 8 \end{vmatrix} = -196 + 108x_1 - 68x_2.$$

Так же найдем:

$$D_4 = 38 - 19x_1 + 19x_2,$$
$$D_5 = 56 - 13x_1 + 13x_2.$$

По формулам Крамера имеем:

$$x_3 = \frac{196 - 108x_1 + 68x_2}{10}; \qquad x_4 = \frac{-38 + 19x_1 - 19x_2}{10};$$

$$x_5 = \frac{-56 + 13x_1 - 13x_2}{10}.$$

Ответ:

$x_3 = 19{,}6 - 10{,}8x_1 + 6{,}8x_2$; $x_4 = -3{,}8 + 1{,}9x_1 - 1{,}9x_2$; $x_5 = -5{,}6 + 1{,}3x_1 - 1{,}3x_2$.

Давая x_1 и x_2 всевозможные действительные значения, мы и получим бесчисленное множество решений.

6. Решить уравнение:

$$XA = B, \tag{1}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Сначала установим, имеет ли матрица A обратную ей матрицу A^{-1}. Для того чтобы матрица A была невырожденной, достаточно, чтобы определитель, порожденный матрицей A, был отличен от нуля. Вычислим его:

$$D_A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Так как $D_A \neq 0$, то матрица A невырожденная и, следовательно, имеет обратную матрицу A^{-1}.

Умножим обе части равенства (1) справа на A^{-1} и получим:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}.$$

Так как $AA^{-1} = E$, то

$$X = BA^{-1}. \tag{2}$$

Для вычисления матрицы A^{-1} найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как элемент обратной матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца, равен $\frac{A_{ji}}{D_A}$, то имеем:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Для нахождения матрицы X надо согласно (2) матрицу умножить справа на матрицу A^{-1}.

Имеем:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 1

1. Доказать четность перестановки:

$$5\ 4\ 1\ 3\ 2\ 8\ 6\ 7.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 21 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 13 & 3 \\ 17 & 25 & 14 & X & -9 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (1, \; 2, \; 3, \; 1), \\ \bar{a}_2 &= (2, \; 3, \; 1, \; 2), \\ \bar{a}_3 &= (3, \; 1, \; 2, \; 2), \\ \bar{a}_4 &= (0, \; 4, \; 2, \; 5). \end{aligned}$$

и выразить остальные векторы через векторы, входящие в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 &= 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 + x_5 &= a, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 5x_4 + 6x_5 &= -23, \\ 8x_1 - 10x_2 + 12x_3 \qquad - 14x_5 &= 32 \end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение:

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 2

1. Доказать четность перестановки:

8 2 1 3 5 4 6 7.

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & C & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ -14 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ X & 19 & 17 & 9 & -7 \\ 21 & 0 & 4 & -1 & 2 \\ 17 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (2, & -1, && 3, && 4, && -1), \\ \bar{a}_2 &= (1, & 2, && -3, && 1, && 2), \\ \bar{a}_3 &= (5, & -5, && 12, && 11, && -5), \\ \bar{a}_4 &= (1, & -3, && 6, && 3, && 3) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 &= 1, \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 &= a, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 &= -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 &= 2, \\ 13x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= 7 \end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AX = BC,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 3

1. Доказать четность перестановки:

$$7\ 2\ 8\ 1\ 3\ 5\ 4\ 6.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 1 & 14 \\ -2 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 7 & 9 & -13 & 8 & X \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\bar{a}_1 = (2,\ 1),$$
$$\bar{a}_2 = (3,\ 2),$$
$$\bar{a}_3 = (1,\ 2),$$
$$\bar{a}_4 = (2,\ 3)$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 &= a, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= -2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 8x_4 - 5x_5 &= 5, \\ 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 10x_4 &= 4 \end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXB = A^{-1} \cdot B^{-1},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 4

1. Доказать четность перестановки:

$$5\ 3\ 1\ 4\ 2\ 8\ 7\ 6.$$

2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & A & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 17 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 9 & 0 \\ 15 & 13 & 9 & X & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= (2, \quad 1, \quad -3), \\ \overline{a}_2 &= (3, \quad 1, \quad -5), \\ \overline{a}_3 &= (4, \quad 2, \quad -1), \\ \overline{a}_4 &= (1, \quad 0, \quad -7) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 &= 12, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= a, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 6x_1 + 7x_2 - 4x_3 + x_4 &= 10, \\ 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 &= 12 \end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXA^{-1} = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 5

1. Доказать четность перестановки:

$$4\ 7\ 2\ 8\ 3\ 1\ 5\ 6.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & A & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} 3 & 17 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 15 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & X & 19 & 11 & -5 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (3, \quad 2, \quad -5, \quad 4), \\ \bar{a}_2 &= (3, \quad -1, \quad 3, \quad 3), \\ \bar{a}_3 &= (3, \quad 5, \quad -13, \quad 11) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций, входящих в эту подсистему.

5. Определить значение a таким образом, чтобы система однородных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + ax_4 &= 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

имела ненулевые решения, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXB = E,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 6

1. Доказать четность перестановки:

$$3\ 7\ 1\ 8\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} 15 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 13 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ X & 9 & -8 & 14 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (4, \quad 3, \ -1, \quad 1, \ -1), \\ \bar{a}_2 &= (2, \quad 1, \ -3, \quad 2, \ -5), \\ \bar{a}_3 &= (1, \ -3, \quad 0, \quad 1, \ -2), \\ \bar{a}_4 &= (1, \quad 5, \quad 2, \ -2, \quad 6) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить значение a таким образом, чтобы система однородных уравнений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + ax_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 9x_2 + 8x_3 - 15x_4 &= 0, \\ -x_1 - 11x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

имела ненулевые решения и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXB = C,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 7

1. Доказать четность перестановки:

$$2\ 5\ 7\ 1\ 8\ 3\ 6\ 4.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя.

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 3 \\ 6 & X & 7 & 9 & -10 \\ 1 & 12 & 0 & 2 & -3 \\ -2 & 13 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (1,\ 2,\ 3,\ 1), \\ \bar{a}_2 &= (2,\ 3,\ 1,\ 2), \\ \bar{a}_3 &= (3,\ 1,\ 2,\ -2), \\ \bar{a}_4 &= (0,\ 4,\ 2\ \ 5) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned}
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1,\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 6,\\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &= a,\\
5x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 4,\\
4x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= -8
\end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXB = C,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 8

1. Доказать нечетность перестановки:

$$2\ 4\ 8\ 6\ 7\ 5\ 3\ 1.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A \\
0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\
0 & D & 0 & 0 & E & 0 \\
F & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & G & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix}
3 & -1 & 1 & 0 & 8 \\
0 & 1 & -3 & 1 & 5 \\
1 & -1 & 0 & 0 & 9 \\
4 & 0 & 2 & 1 & X \\
-1 & 2 & -3 & 0 & 7
\end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned}
\overline{a_1} &= (\,2, & -1, && 3, && 4, && -1),\\
\overline{a_2} &= (\,1, & 2, && -3, && 1, && 2),\\
\overline{a_3} &= (\,5, & -5, && 12, && 11, && -5),\\
\overline{a_4} &= (\,1, & -3, && 6, && 3, && -3)
\end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить значение a таким образом, чтобы система однородных уравнений:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0,\\
2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0,\\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + ax_4 &= 0,\\
-x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

имела ненулевые решения, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AX = B,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 9

1. Доказать четность перестановки:

$$7\ 1\ 2\ 5\ 4\ 3\ 8\ 6.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & X & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (4, \quad 3, \; -1, \quad 1, \; -1), \\ \bar{a}_2 &= (2, \quad 1, \; -3, \quad 2, \; -5), \\ \bar{a}_3 &= (1, \; -3, \quad 0, \quad 1, \; -2), \\ \bar{a}_4 &= (1, \quad 5, \quad 2, \; -2, \quad 6) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить значение a таким образом, чтобы система однородных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - ax_5 &= 0, \\ 5x_1 + 11x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 10x_4 - 3x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 13x_2 + 4x_3 + 16x_4 - 10x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

имела ненулевые решения, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$AXB^{-1} = B \cdot A^{-1},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант № 10

1. Доказать четность перестановки:

$$1\ 3\ 2\ 7\ 4\ 8\ 6\ 5.$$

2. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & G & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Вычислить коэффициент при X в разложении определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & X & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Найти какую-либо из максимальных линейно-независимых подсистем системы векторов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (1,\ 0,\ 2,\ -5), \\ \bar{a}_2 &= (0,\ 3,\ -1,\ 4), \\ \bar{a}_3 &= (1,\ 6,\ 0,\ 3), \\ \bar{a}_4 &= (2,\ 3,\ -5,\ 14) \end{aligned}$$

и представить остальные векторы в виде линейных комбинаций векторов, входящих в эту подсистему.

5. Определить a таким образом, чтобы система уравнений:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 &= -1, \\ 7x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 &= -10, \\ 6x_1 + 5x_2 + 11x_3 - x_4 &= a, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

была совместной, и решить ее при найденном значении a.

6. Решить уравнение

$$XA = B^{-1},$$

где

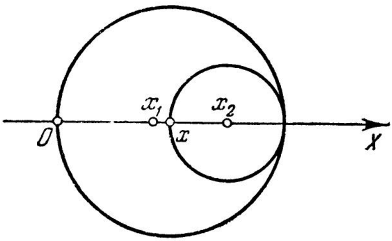
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4 ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Вариант № 0

1. Из круглой пластинки радиуса R вырезан круг радиуса $\frac{R}{2}$ (черт. 7). Найти положение центра тяжести оставшейся части.

Решение. Обозначим через m массу вырезанной пластинки. Тогда масса оставшейся части будет, очевидно, равна $3m$. Пусть x_1 — координата центра тяжести оставшейся части. Координата центра тяжести вырезанной части будет $x_2 = \frac{3}{2}R$, наконец, координата центра тяжести всего круга, который мы будем рассматривать как состоящий из вырезанной и оставшейся части, будет $x = R$. Применяя хорошо известную формулу из курса аналитической геометрии, будем иметь:



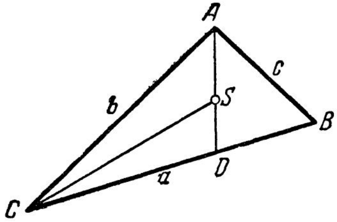
Черт. 7

$$R = \frac{3mx_1 + m\frac{3}{2}R}{4m},$$

откуда:

$$x_1 = \frac{5}{6}R.$$

2. Найти координаты центра окружности, вписанной в треугольник, вершины которого: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$.



Черт. 8

Решение. Пусть $D(x_D;\ y_D)$ — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла A (черт. 8) треугольника со стороной BC.
Так как

$$\frac{CD}{DB}=\frac{b}{c},$$

то

$$x_D=\frac{x_3+\frac{b}{c}x_2}{1+\frac{b}{c}}=\frac{bx_2+cx_3}{b+c};$$

и аналогично

$$y_D=\frac{by_2+cy_3}{b+c}.$$

Пусть $S(x;\ y)$ — центр вписанного круга.
Так как

$$CD=\frac{ab}{b+c},$$

то

$$\frac{DS}{SA}=\frac{CD}{CA}=\frac{a}{b+c}$$

и, значит,

$$x=\frac{x_D+\frac{a}{b+c}x_1}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{\frac{bx_2+cx_3}{b+c}+\frac{ax_1}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}=\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c};$$

аналогично

$$y=\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}.$$

Подставляя сюда выражения для длин сторон треугольника через координаты его вершин, получим:

$$x = \frac{x_1 \sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2} + x_2 \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} + x_3 \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}{\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2} + \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} + \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}};$$

$$y = \frac{y_1 \sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2} + y_2 \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} + y_3 \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}{\sqrt{(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2} + \sqrt{(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2} + \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}}.$$

3. Составить уравнение геометрического места точек $M(x;\ y)$, для каждой из которых отрезки касательных, проведенных к окружностям

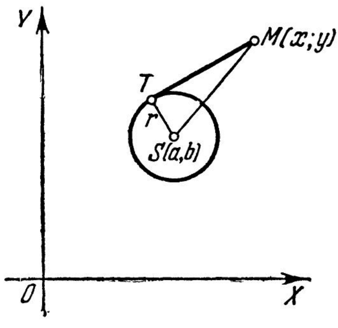
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad \text{и} \quad (x-2)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

были бы равны между собой.

Решение. Пусть $M\ (x;\ y)$ — точка, лежащая вне окружности (S) радиуса r с центром в точке $S(a;\ b)$, а T — точка прикосновения к окружности одной из касательных, проведенных из точки M (черт. 9). Тогда

$$MT^2 = MS^2 - ST^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2.$$

Таким образом, квадрат длины касательной, проведенной из точки M, лежащей вне окружности, равен результату подстановки координат точки M в левую часть нормального уравнения окружности: $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$. Пусть MT_1 и MT_2 — отрезки касательных, проведенных из точки $M\ (x;\ y)$ к данным окружностям. На основании доказанного



Черт. 9

$$MT_1^2 = x^2 + y^2 - 4,$$
$$MT_2^2 = (x-2)^2 + y^2 - 1.$$

Таким образом, если точка M принадлежит заданному геометрическому месту, т. е. $MT_1 = MT_2$, то

$$x^2 + y^2 - 4 = (x-2)^2 + y^2 - 1,$$

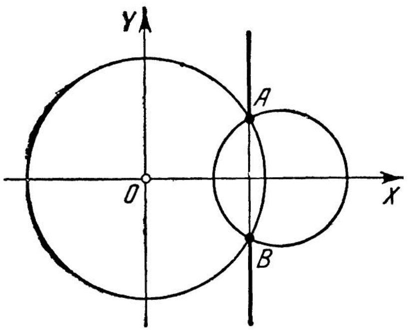
или

$$x = \frac{7}{4}.$$

Мы получили уравнение прямой, параллельной оси OY и пересекающей ось OX в точке $\frac{7}{4}$; 0 (черт. 10). Эта прямая проходит через точки

$$A\left(\frac{7}{4};\ +\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \text{ и } B\left(\frac{7}{4};\ -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

пересечения двух данных окружностей (их мы находим, решая совместно уравнения данных окружностей), так как



Черт. 10

если

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

и

$$(x-2)^2 + y^2 - 1 = 0,$$

то

$$x^2 + y^2 - 4 = (x - 2)^2 + y^2 - 1,$$

или

$$x = \frac{7}{4}.$$

Итак, условие $x = \frac{7}{4}$ есть *необходимое* условие того, что точка M принадлежит заданному геометрическому месту. Это условие, однако, *не достаточно*, так как хотя из условия $x = \frac{7}{4}$ следует, что

$$x^2 + y^2 - 1 = (x-2)^2 + y^2 - 1$$

(эти уравнения — эквивалентны), но из последнего равенства не следует, что

$$MT_1^2 = MT_2^2,$$

так как

$$x^2 + y^2 - 4 = MT_1^2,$$

тогда и только тогда, когда

$$x^2 + y^2 - 4 > 0;$$

в противном случае, т. е. если

$$x^2 + y^2 - 4 < 0,$$

точка M $(x; y)$ лежит внутри окружности $x^2 + y^2 = 4$; из нее нельзя провести к этой окружности ни одной касательной. Таким образом, искомое геометрическое место точек состоит из всех точек прямой $x = \frac{7}{4}$, лежащих вне обеих данных окружностей. Аналитически это множество точек определяется условием:

$$x = \frac{7}{4}; \qquad |y| > \frac{\sqrt{15}}{4},$$

а геометрически состоит из двух лучей, которые получаются удалением из прямой $x = \frac{7}{4}$ отрезка AB с концами $\left(\frac{7}{4};\ \pm\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; 3) параллельно прямой:

$$4x + 5y + 1 = 0.$$

Решение. Первый способ. Разрешим данное уравнение относительно y:

$$y = -\frac{4}{5}x - \frac{1}{5},$$

находим угловой коэффициент данной прямой:

$$k = -\frac{4}{5},$$

а следовательно, и угловой коэффициент:

$$k_1 = \frac{5}{4}$$

прямой, перпендикулярной к данной. Теперь уравнение прямой, проходящей через заданную точку (2; 3) перпендикулярно заданной прямой, запишется в виде:

$$y - 3 = \frac{5}{4}(x - 2)$$

или

$$5x - 4y + 2 = 0.$$

Второй способ. Вектор $\{4;\ 5\}$ перпендикулярен данной прямой и, значит, является направляющим для искомой прямой. Уравнения искомой прямой можно записать в параметрическом виде:

$$x = 2 + 4t,$$
$$y = 3 + 5t$$

или в виде

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$5x - 4y + 2 = 0.$$

Третий способ. Искомое уравнение можно взять в виде

$$5x - 4y + C = 0.$$

Так как эта прямая должна проходить через точку $(2; 3)$, то

$$5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + C = 0,$$

откуда:

$$C = 2,$$

и окончательно:

$$5x - 4y + 2 = 0.$$

5. Даны две пересекающиеся прямые:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

(т. е. $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$)

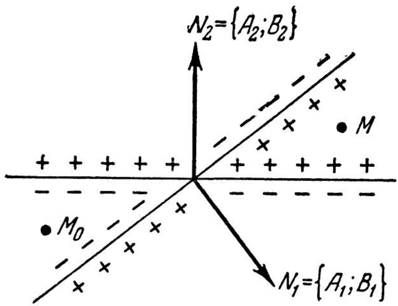
и точка $M_0(x_0;\ y_0)$. Доказать, что необходимым и достаточным условием того, что эта точка лежит в остром угле, образованном этими прямыми, является условие

$$(A_1A_2 + B_1B_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) < 0. \quad (2)$$

Необходимость. Даны: прямые (1) пересекающиеся, невзаимно перпендикулярные, и точка M_0, лежащая в одном из острых углов, образованных этими прямыми.

Требуется доказать, что выполняется неравенство (2).

Доказательство. Пусть векторы $N_1 = \{A_1;\ B_1\}$ и $N_2 = \{A_2;\ B_2\}$ направлены так, как указано на чертеже 11. Так как точка M_0 лежит в остром угле, образованном данными прямыми, то для случая, изображенного на чертеже 11, она будет лежать либо в положительных полуплоскостях от данных прямых, либо в отрицательных полуплоскостях от этих прямых. Таким образом, числа



Черт. 11

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \text{ и } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$$

будут либо оба положительны, либо оба отрицательны, а, значит, их произведение будет положительно:

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) > 0.$$

Для случая, изображенного на чертеже 11, угол между векторами $N_1 = \{A_1;\ B_1\}$ и $N_2 = \{A_2;\ B_2\}$ тупой, и, значит, их скалярное произведение отрицательно:

$$N_1N_2 = A_1A_2 + B_1B_2 < 0;$$

из двух последних неравенств следует неравенство (2).

Докажем теперь, что неравенство (2) будет выполняться во всех случаях, а не только для случая, изображенного на чертеже 11. В самом деле, предположим, что вектор N_1 имеет направление, противоположное тому, которое указано на чертеже 11. Тогда положительные и отрицательные полуплоскости от первой прямой поменяются местами; так как точка M_0 лежит по-прежнему в остром угле, то теперь она будет лежать в разноименных полуплоскостях от данных прямых, т. е. теперь числа

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \text{ и } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$$

будут разных знаков и

$$(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) < 0,$$

а так как по предположению теперь вектор N_1 имеет направление, противоположное тому, которое указано на чертеже 11, то угол между векторами N_1 и N_2 будет острый, а потому скалярное произведение этих векторов положительно:

$$N_1N_2 = A_1A_2 + B_1B_2 > 0;$$

из двух последних неравенств опять следует неравенство (2). Точно такими же рассуждениями устанавливаем, что при изменении направления вектора N_2 на противоположное знак неравенства (2) сохраняется. Итак, при любом распределении положительных и отрицательных полуплоскостей неравенство (2) будет выполнено, как только прямые (1) пересекаются и невзаимно перпендикулярны, а точка M_0 лежит в одном из острых углов, ими образованных. Тем самым необходимость признака (2) доказана.

Достаточность. Дано:

$$(A_1A_2 + B_1B_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) < 0. \quad (2)$$

Требуется доказать, что точка $M_0(x_0;\ y_0)$ лежит в остром угле, образованном данными прямыми.

Доказательство. Из неравенства (2) следует, что $A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0$, т. е. что данные прямые невзаимно перпендикулярны.

Из того же неравенства (2) следует, что

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 \neq 0 \quad \text{и} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 \neq 0,$$

т. е. что точка $M_0(x_0;\ y_0)$ не лежит ни на одной из данных прямых. Предположим, что точка $M_0(x_0;\ y_0)$ лежит в одном из тупых углов, образованных данными прямыми. Тогда, повторив те рассуждения, которые проводились при доказательстве необходимости признака (2), мы получим, что

$$(A_1A_2 + B_1B_2)(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) > 0,$$

что противоречит данному неравенству (2). Полученное противоречие убеждает нас в том, что точка $M_0(x_0;\ y_0)$ лежит в одном из острых углов, образованных данными прямыми.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 3)$ и образующую с прямой $4x + 5y + 1 = 0$ углы, тангенсы которых равны $\pm\frac{7}{6}$.

Решение. Искомых прямых будет две (черт. 12). Заметим, что тангенс угла от данной прямой до одной из искомых равен $+\frac{7}{6}$, а тангенс угла от данной прямой до второй из искомых прямых равен $-\frac{7}{6}$.

Применяя формулу для тангенса угла от одной прямой до другой и учитывая, что угловой коэффициент данной прямой равен $-\frac{4}{5}$, будем иметь:

$$\frac{7}{6}=\frac{k_2+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}k_2} \quad \text{и} \quad -\frac{7}{6}=\frac{k_1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}k_1},$$

отсюда:

$$k_2=\frac{11}{58}; \quad k_1=-\frac{59}{2}.$$

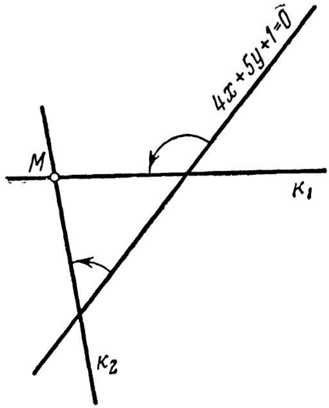
Искомые уравнения

$$y-3=\frac{11}{58}(x-2),$$

$$y-3=-\frac{59}{2}(x-2),$$

или

$$11x-58y+152=0,$$
$$59x+2y-124=0.$$



Черт. 12

7. Найти косинус внутреннего угла A треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$2x+y-7=0 \qquad (AB),$$
$$3x-4y-5=0 \qquad (BC),$$
$$5x-3y-1=0 \qquad (CA).$$

Решение. Первый способ. Решая данные уравнения попарно, находим вершины треугольника:

$$A(2;\ 3),\ B(3;\ 1),\ C(-1;\ -2).$$

Теперь находим векторы:

$$AB = \{3 - 2;\ 1 - 3\} = \{1; -2\},$$
$$AC = \{-1 - 2;\ -2 - 3\} = \{-3;\ -5\}$$

и затем находим:

$$\cos A = \frac{AB \cdot AC}{|AB| \cdot |AC|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{34}}.$$

В т о р о й с п о с о б. Находим сначала вершины треугольника:

$$A(2;\ 3),\ B(3;\ 1),\ C(-1;\ -2).$$

Подставляем координаты точки B в уравнение AC, а координаты точки C в уравнение AB:

$$5 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 1 > 0,$$
$$2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 7 < 0,$$

значит, внутренний угол A образован разноименными полуплоскостями от прямых AB и AC и, значит, угол между векторами

$$N_1 = \{2;\ 1\} \text{ и } N_2 = \{5;\ -3\}$$

будет равен внутреннему углу A треугольника ABC:

$$\cos A = \frac{N_1 N_2}{|N_1|\ |N_2|} = \frac{2 \cdot 5 - 3 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}\ \sqrt{5^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{34}};$$

получаем тот же результат.

8. Составить уравнение гиперболы, асимптотами которой являются прямые

$$y = \pm 2x$$

и которая проходит через точку (1; 3).

Р е ш е н и е. Биссектрисы углов между асимптотами гиперболы являются осями гиперболы. Но биссектрисами углов между данными прямыми служат оси координат. Значит, осями гиперболы служат оси координат и потому ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

если действительная ось совпадает с осью OX, и в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, \tag{2}$$

если действительная ось совпадает с осью OY. Так как мы не знаем, какой из этих случаев имеет место в данной задаче, то необходимо исследовать обе возможности. Предположим сначала, что уравнение гиперболы имеет вид (1), тогда из условия прохождения гиперболы (1) через данную точку (1; 3) имеем:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Так как угловой коэффициент одной из асимптот гиперболы (1) равен $\frac{b}{a}$, то в нашем случае

$$\frac{b}{a} = 2,$$

или

$$\frac{b^2}{a^2} = 4. \tag{4}$$

Решая совместно систему уравнений (3) и (4) относительно a^2 и b^2, находим:

$$a^2 = -\frac{5}{4} < 0, \quad b^2 = -5 < 0,$$

что невозможно. Таким образом, не существует гиперболы, действительной осью которой является ось OX и которая удовлетворяет условиям задачи.

Возьмем теперь искомое уравнение в виде (2). Подставляя в это уравнение вместо x и y координаты точки A, получим:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2} = -1$$

и, кроме того, по-прежнему

$$\frac{b}{a} = 2,$$

или

$$\frac{b^2}{a^2} = 4.$$

Решая теперь эту систему, находим:

$$a^2 = \frac{5}{4}, \quad b^2 = 5$$

и искомое уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{5}{4}} - \frac{y^2}{5} = -1.$$

9. Фокус линии второго порядка находится в точке F (3; 0); директрисой, соответствующей этому фокусу, является прямая $x = 12$. Определить вид линии и составить ее уравнение, зная, что она проходит через точку $A(7; 3)$.

Решение. Расстояние от точки A до точки F равно

$$AF = \sqrt{(7-3)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

Расстояние от точки A (7; 3) до директрисы $x - 12 = 0$ равно

$$d_0 = |7 - 12| = 5.$$

Так как $AF = d_0$, то эксцентриситет линии равен 1 и, значит, искомая линия — парабола.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка этой параболы. Тогда:

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + y^2},$$

а расстояние от точки M до директрисы $x - 12 = 0$ равно

$$d = |x - 12|.$$

Отсюда:

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x - 12|,$$

или

$$y^2 + 18x - 135 = 0.$$

10. Найти фокусы и директрисы линии второго порядка.

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Решение. Находим:

$$\delta = -9 < 0, \ \Delta = 81 \neq 0,$$

следовательно, данное уравнение определяет гиперболу.

Находим:

$$s = 0 + 8 = 8.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0,$$

его корни

$$\lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = -1$$

(через λ_1, здесь обозначен корень, имеющий тот же знак, что и Δ). Простейшее уравнение

$$9x^2 - y^2 - \frac{81}{9} = 0,$$

или

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

откуда:

$$a = 1, \quad b = 3,$$

следовательно,

$$c = \sqrt{10}.$$

Координаты центра определяются из уравнений

$$3y - 6 = 0, \ 3x + 8y - 13 = 0,$$

откуда:

$$x = -1, \ y = 2,$$

центр

$$O'(-1; \ 2).$$

Угловой коэффициент действительной оси

$$k = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9 - 0}{3} = 3.$$

Пусть α — угол наклона действительной оси гиперболы к оси Ox, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = 3,$$

следовательно,

$$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

а так как новое начало координат — центр гиберболы

O' $(-1;\ 2)$, то формулы преобразования координат имеют вид:

$$x = \frac{X - 3Y}{\sqrt{10}} - 1, \quad y = \frac{3X + Y}{\sqrt{10}} + 2. \qquad \text{(A)}$$

Так как координаты фокусов в новой системе $XO'Y$ суть соответственно

$$X_1 = -\sqrt{10}, \quad Y_1 = 0; \quad X_2 = \sqrt{10}, \quad Y_2 = 0,$$

то их координаты в начальной системе xOy мы получим, подставив в последние формулы вместо X и Y их значения:

$$x_1 = \frac{-\sqrt{10} - 3\cdot 0}{\sqrt{10}} - 1 = -2, \quad x_2 = \frac{\sqrt{10} - 3\cdot 0}{\sqrt{10}} - 1 = 0,$$

$$y_1 = \frac{-3\sqrt{10} + 0}{\sqrt{10}} + 2 = -1, \quad y_2 = \frac{3\sqrt{10} + 0}{\sqrt{10}} + 2 = 5,$$

$$F_1(-2;\ -1); \quad F_2(0;\ 5).$$

Уравнение директрис в новой системе координат

$$X = \pm\frac{a^2}{c},$$

т. е. в нашем случае

$$X = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Выражая из формул (A) координаты X и Y через x и y, получим:

$$X = \frac{(x+1) + 3(y-2)}{\sqrt{10}},$$

$$Y = \frac{-3(x+1) + (y-2)}{\sqrt{10}}. \qquad \text{(B)}$$

Отсюда уравнения директрис будут:

$$\frac{x + 1 + 3(y-2)}{\sqrt{10}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}},$$

т. е.

$$x + 1 + 3y - 6 = \pm 1,$$

или

$$x + 3y - 6 = 0,$$
$$x + 3y - 4 = 0.$$

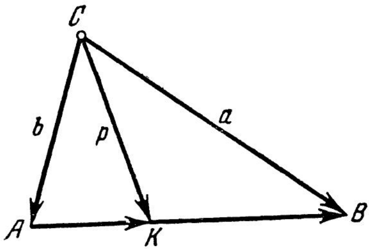
11. Определить длину биссектрисы p угла C в треугольнике ABC.

Р е ш е н и е. Пусть K — точка пересечения биссектрисы угла C со стороной AB (черт. 13).

Тогда

$AK = \mathbf{p} - \mathbf{b}$, $KB = \mathbf{a} - \mathbf{p}$.

Векторы $\mathbf{AK}$ и $\mathbf{KB}$ параллельны и направлены в одну сторону. Из элементарной геометрии мы знаем, что биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам.



Черт. 1

$$\frac{AK}{KB} = \frac{b}{a},$$

или

$$\frac{\mathbf{p} - \mathbf{B}}{\mathbf{a} - \mathbf{p}} = \frac{b}{a},$$

откуда:

$$a\mathbf{p} - a\mathbf{b} = b\mathbf{a} - b\mathbf{p},$$

т. е.

$$a\mathbf{p} + b\mathbf{p} = (a + b)\,\mathbf{p} = b\mathbf{a} + a\mathbf{b},$$

или

$$\mathbf{p} = \frac{b\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a + b}.$$

Для определения длины $\mathbf{p}$ возведем обе части полученного равенства скалярно в квадрат:

$$\mathbf{p}^2 = \frac{(b\mathbf{a} + a\,\mathbf{b})^2}{(a + b)^2} = \frac{b^2a^2 + 2ab\mathbf{ab} + a^2b^2}{(a + b)^2}.$$

Заменим скалярное произведение $\mathbf{ab}$ через $ab\cos C$ и квадраты векторов через их скалярные квадраты, получим:

$$p^2 = \frac{2b^2a^2 + 2a^2b^2\cos C}{(a + b)^2} = \frac{2a^2b^2(1 + \cos C)}{(a + b)^2} = \frac{4a^2b^2\cos^2\frac{C}{2}}{(a + b)^2},$$

После извлечения квадратного корня из обеих частей равенства получим:

$$p = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}.$$

12. Найти площадь треугольника, если заданы его вершины:

$$A(\boldsymbol{r}_1), \quad B(\boldsymbol{r}_2), \quad C(\boldsymbol{r}_3),$$

причем

$$\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3; \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3;$$
$$\boldsymbol{r}_3 = 3\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3.$$

Р е ш е н и е. Площадь треугольника ABC равна половине модуля вектора $[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}]$. Найдем $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{AC}$:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3;$$

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3;$$

$$[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}] = [(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3,$$

а потому

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|[\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2+5^2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

13. Вычислить объем V параллелепипеда, зная длины a, b и c его ребер OA, OB, OC, выходящих из вершины O, и углы $\alpha = \angle BOC$, $\beta = \angle COA$, $\gamma = \angle AOB$ между ними.

Р е ш е н и е. Положим:

$$\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{в}, \quad \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{c}.$$

Тогда:

$$V = |\boldsymbol{abc}|,$$

где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.

Введем прямоугольную систему координат и пусть в этой системе

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \\ \boldsymbol{b} &= \{x_2;\ y_2;\ z_2\}, \\ \boldsymbol{c} &= \{x_3;\ y_3;\ z_3\}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix};$$

откуда:

$$V^2 = \boldsymbol{abc}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2.$$

Используя правило для умножения определителей, получим:

$$V^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 & x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 & x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{ac} \\ \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{bc} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^2b^2c^2 (1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma).$$

откуда окончательно:

$$V = abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

14. Пользуясь выражением для векторного и скалярного произведения в координатах, доказать, что

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}).$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \{x_1;\ y_1;\ z_1\}, \\ \boldsymbol{b} &= \{x_2;\ y_2;\ z_2\}, \\ \boldsymbol{c} &= \{x_3;\ y_3;\ z_3\}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$[\boldsymbol{bc}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right\},$$

$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{вc}]] =$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} \right\}.$$

Далее:

$$\boldsymbol{ac} = x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3;$$
$$\boldsymbol{ab} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2;$$

значит:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}) = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}\ (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - \\ - \{x_3;\ y_3;\ z_3\}\ (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \{x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + \\ + z_1z_3) - x_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_3),\ \ y_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - \\ - y_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2),\ \ z_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - \\ - z_3\ (x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)\}.$$

Первая координата этого вектора может быть преобразована так:

$$x_2(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_3(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = \\ = x_2y_1y_3 + x_2z_1z_3 - x_3y_1y_2 - x_3z_1z_2 = y_1(x_2y_3 - x_3y_2) - \\ - z_1(x_3z_2 - x_2z_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ x_3z_2 - x_2z_3 & x_2y_3 - x_3y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} z_2 & x_2 \\ z_3 & x_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, первая координата вектора $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab})$ равна первой координате вектора $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$; аналогично доказывается, что равны вторые и третьи координаты этих векторов.

Значит, сами векторы равны:

$$[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{ab}).$$

15. Доказать, что

$$[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})\,(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})\,(\boldsymbol{bc}).$$

Доказательство. Обозначим вектор $[\boldsymbol{cd}]$ буквой $\boldsymbol{p}$. Тогда:

$$[\boldsymbol{ab}][\boldsymbol{cd}] = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{p} = \boldsymbol{abp} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{bp}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}]]$$

на основании предыдущей задачи

$$[b[cd]] = c(bd) - d(bc),$$

значит:

$$[ab][cd] = ac(bd) - ad(bc) = (ac)(bd) - (ad)(bc).$$

16. Плоские углы трехгранного угла равны α, β, γ. Найти двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ.

Решение. Обозначим единичные векторы, направленные по ребрам трехгранного угла, через e_1, e_2, e_3. Тогда внутренний угол, противолежащий плоскому углу γ, будет равен углу между векторными произведениями

$$[e_2e_3] \text{ и } [e_1e_3].$$

Косинус угла между этими векторами будет равен

$$\cos\varphi = \frac{[e_2e_3]\,[e_1e_3]}{|[e_2e_3]|\cdot|[e_1e_3]|}.$$

Но модуль векторного произведения двух единичных векторов равен синусу угла между ними, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{[e_2e_3]\,[e_1e_3]}{\sin\alpha\,\sin\beta}.$$

Применяя формулу, доказанную в предыдущей задаче, будем иметь:

$$[e_2e_3]\,[e_1e_3] = (e_1e_2)\,e_3^2 - (e_1e_3)(e_2e_3) = \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta,$$

значит:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,\sin\beta}.$$

17. Вершина конуса находится в точке $S(0;\ 0;\ h)$, в основании конуса лежит окружность $x^2 + y^2 = r^2$; $z = 0$. Составить уравнение конуса.

Решение. Рассмотрим точку $A(r;\ 0;\ 0)$, лежащую на поверхности конуса. Уравнение образующей SA в плоскости ZOX будет $\frac{x}{r} + \frac{z}{h} = 1$. При вращении этой образующей вокруг оси OZ получим данный конус. Его уравнение

$$\frac{\pm\sqrt{x^2+y^2}}{r} + \frac{z}{h} = 1,$$

или

$$x^2 + y^2 = r^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2.$$

18. Вокруг оси OZ вращается линия

$$X = f(Z); \quad Y = g(Z).$$

Составить уравнение поверхности вращения.

Возьмем на данной линии произвольную точку $M(x; y; z)$. При вращении линии эта точка опишет окружность радиуса $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ с центром на оси OZ. Для всех точек этой окружности

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где x, y и $Z = z$ — координаты точки окружности. Следовательно,

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2 = f^2(Z) + g^2(Z) = f^2(z) + g^2(z).$$

Обратно, если

$$x^2 + y^2 = f^2(z) + g^2(z),$$

то точка $M(x; y; z)$ лежит на рассматриваемой поверхности. В самом деле, проведем через точку M плоскость, перпендикулярную к оси, и рассмотрим окружность радиуса $r = \sqrt{x_2 + y_2}$ с центром на оси OZ, лежащую в этой плоскости.

Пусть $M_0(X; Y; Z)$ — точка пересечения этой плоскости с данной линией. Тогда $X = f(Z)$, $Y = g(Z)$, $Z = z$ и, значит, точка M лежит на окружности, описываемой точкой M_0 данной линии при вращении ее вокруг оси OZ.

19. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_1; y_1; z_1)$ перпендикулярно плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Решение. Вектор с координатами $\{A; B; C\}$ перпендикулярен заданной плоскости, следовательно, для искомой прямой известна точка $M(x_1; y_1; z_1)$ (через которую проходит прямая) и направляющий вектор с координатами $\{A; B; C\}$.

Уравнения прямой будут:

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}.$$

20. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ параллельно векторам:

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 \text{ и } \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$4x + 3y + z = 16 = 0.$$

21. Дана точка $M(1;\ 2;\ 3)$ и прямая

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{4}.$$

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через заданные точку и прямую.

Решение. Так как плоскость проходит через прямую, то она проходит и через точку $N(1;\ -3;\ 2)$, принадлежащую прямой. Искомая плоскость проходит через точки $M(1;\ 2;\ 3)$ и $N\ (1;\ -3;\ 2)$ параллельно вектору $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$, следовательно, она параллельна вектору $\overrightarrow{MN} = -5\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$.

Тогда ее уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$19x + 2y - 10z + 7 = 0.$$

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ -5;\ 8)$ $C(0;\ 2;\ -3)$.

Решение. Условие того, что плоскость проходит через три точки A; B; C, равносильно тому, что плоскость проходит через точку C параллельно векторам:

$$\boldsymbol{AB} = \{3;\ -7;\ 5\} \text{ и } \boldsymbol{CA} = \{1;\ 0;\ 6\},$$

поэтому ее уравнение будет:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z+3 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$42x + 13y - 7z - 47 = 0.$$

23. Дана прямая

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{1}$$

и плоскость

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0.$$

Требуется найти уравнения проекции данной прямой на данную плоскость.

Р е ш е н и е. Очевидно, что проекцией данной прямой на данную плоскость будет прямая пересечения данной плоскости с плоскостью, проходящей через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости.

Данная плоскость

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0$$

и будет одним из уравнений искомой проекции.

Проектирующая плоскость проходит через данную прямую, следовательно, она проходит и через точку, ей принадлежащую $(1; -2; 5)$, и параллельна вектору $\{2; 3; 1\}$, а так как проектирующая плоскость перпендикулярна к данной плоскости, то она параллельна и вектору $\{2; 3; -4\}$.

Поэтому уравнение проектирующей плоскости будет:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

или

$$3x - 2y - 7 = 0.$$

Искомые уравнения проекции:

$$\begin{gathered} 2x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 3x - 2y - 7 = 0. \end{gathered}$$

24. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (2;\ 3;\ -1)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{3}.$$

Эта прямая получается в результате пересечения: плоскости P_1, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, и плоскости P_2, проходящей через данную точку и данную прямую.

Плоскость P_1 проходит через точку $(2;\ 3;\ -1)$ перпендикулярно данной прямой, т. е. ее направляющий вектор: $\{1;\ 2;\ 3\}$. Ее уравнение будет:

$$1\cdot(x-2)+2(y-3)+3(z+1)=0,$$

или

$$x+2y+3z-5=0.$$

Плоскость P_2 проходит через точку $(2;\ 3;\ -1)$ и через данную прямую, т. е. через точку $N\ (1;\ 0;\ -2)$, принадлежащую данной прямой, следовательно, плоскость P_2 параллельна вектору $\boldsymbol{NM}=\{1;\ 3;\ 1\}$. Кроме этого, плоскость P_2 параллельна направляющему вектору прямой $\{1;\ 2;\ 3\}$. Тогда уравнение P_2 будет:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$7x-2y-z-9=0.$$

Так как плоскости P_1 и P_2 пересекаются по искомой прямой, то их уравнения и являются уравнениями этой прямой:

$$x+2y+3z-5=0,$$
$$7x-2y-z-9=0.$$

25. Дан гиперболический параболоид:

$$x^2-y^2=2z$$

и плоскость

$$2x+y-z+3=0.$$

Составить уравнение плоскости, параллельной данной и пересекающей гиперболический параболоид по паре прямых.

Решение. Пусть $2x + y - z + D = 0$ — искомое уравнение.

Уравнения проекции на плоскость XOY линии сечения будут:

$$z = 0,$$
$$x^2 - y^2 = 2(2x + y + D),$$

или

$$\left.\begin{array}{c} x^2 - 4x - y^2 - 2y - 2D = 0 \\ z = 0. \end{array}\right\},$$

т. е.

$$\left.\begin{array}{r} (x - 2)^2 - (y + 1)^2 - 4 + 1 - 2D = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\}.$$

Так как линия сечения должна быть парой прямых, то

$$-4 + 1 - 2D = 0,$$

откуда:

$$D = -\frac{3}{2}.$$

Искомое уравнение

$$2x + y - z - \frac{3}{2} = 0,$$

или

$$4x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

26. Даны две вершины двуполостного гиперболоида

$$(0;\ 0;\ 2) \text{ и } (0;\ 0;\ -2)$$

и уравнение асимптотического конуса

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{1}$$

Составить уравнение этого гиперболоида.

Решение. Пусть $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{4} = 1$ —искомое уравнение.

Уравнение асимптотического конуса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{4}=0. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнение (2) с уравнением (1), получаем:

$$a^2 : b^2 : 4 = 1 : 1 : 1,$$

искомое уравнение

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1.$$

27. Дано уравнение однополостного гиперболоида:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 10,$$

пересечь этот гиперболоид плоскостью

$$y = \text{const}$$

по гиперболе с данной действительной полуосью, равной $\sqrt{6}$.

Решение. Пусть $y = k$. Линия сечения

$$x^2 + k^2 - z^2 = 10,\ y = k,$$

или

$$\frac{x^2}{10-k^2}-\frac{z^2}{10-k^2}=1, \quad y=k,$$

Пусть $10 - k^2 = 6$, тогда $k = \pm 2$ и искомые сечения

$$\frac{x^2}{6}-\frac{z^2}{6}=1, y = \pm 2.$$

Пусть $10 - k^2 = -6$, тогда $k = \pm 4$ и мы получим еще два сечения:

$$\frac{x^2}{6}-\frac{z^2}{6}=-1, \quad y=\pm 4.$$

Вариант № 1

1. Составить уравнение прямой, если известно, что отрезок этой прямой между осями координат в точке (2; 1) делится пополам.

2. Найти уравнение траектории точки, которая в каждый момент своего движения одинаково удалена от точек A (3; $-$3) и B (1; 5).

3. Составить уравнение окружности радиуса $R = 5$, касающейся прямой $2x - y + 4 = 0$ в точке ($-$1; 2).

4. Доказать, что для всякой точки $P(x_1;\ y_1)$, лежащей внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

имеет место неравенство

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1,$$

а для всякой внешней точки $Q(x_2;\ y_2)$ — неравенство

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}>1.$$

5. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Требуется найти точки пересечения гиперболы с прямыми:

а) $x-y+1=0$,
б) $x-4y-8=0$,
в) $5x-4y-16=0$.

Сделать чертеж.

6. Определить, какая кривая задается уравнением

$$y^2-2x-6y-5=0.$$

Найти оси симметрии этой кривой. Сделать чертеж.

7. Вычислить угол между медианами острых углов прямоугольного равнобедренного треугольника.

8. Найти двойное векторное произведение трех векторов $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]]$, если $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$; $\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+6\boldsymbol{e}_3$.

9. Через две точки $M(4;\ -1;\ 1)$ и $N(4;\ 2;\ -3)$ проходит прямая. Определить направление прямой, одновременно перпендикулярной оси абсцисс и прямой MN.

10. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+6y-3\ \ -14=0$ и отстоящей от нее на расстоянии 3.

11. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно к прямой

$$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{4}$$

и пересекающей эту прямую.

12. Даны две прямые:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{5}; \qquad \frac{x}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{6} \text{ и}$$

точка $M(1; -3; 4)$. Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно каждой из заданных прямых.

13. Определить координаты центра C и радиус R сферы, уравнение которой

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0.$$

14. Найти геометрическое место точек, разность расстояний каждой из которых до точек $M(3; 0; 0)$ и $N(5; 0; 0)$ равна единице.

15. Гипербола, лежащая в плоскости XOY с фокусным расстоянием, равным 8, и расстоянием между директрисами, равным 6, вращается вокруг своей мнимой оси, совпадающей с осью OY. Составить уравнение поверхности вращения, если начало координат совпадает с центром гиперболы.

16. По какой кривой пересекается поверхность

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=z$$

с плоскостью $z=1$?

Вариант № 2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и середину отрезка AB, координаты концов которого $A(3; -4)$, $B(-2; 0)$.

2. Найти геометрическое место середин отрезка постоянной длины $2a$, если отрезок движется, опираясь своими концами на стороны прямого угла.

3. Найти координаты центра и радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 1)$, $C(-1; 2)$.

4. Составить уравнение эллипса, если известно, что правая вершина его находится в точке $A(1; 2)$, правый фокус — в точке $B(0, 2)$, а эксцентриситет $e=\frac{4}{5}$. Определить координаты центра и уравнения директрис.

5. При каком условии асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

будут взаимно перпендикулярны.

6. Найти диаметры параболы $y^2 = 6x$, сопряженные с направлениями:

$$\text{а)}\quad y - 2x - 5 = 0;$$
$$\text{б)}\ 2y + 3x + 1 = 0.$$

7. Три вектора $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{a}$, и $\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{b}$ служат сторонами треугольника. При помощи $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ выразить векторы, совпадающие с медианами треугольника.

8. Показать, что если вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен одновременно двум векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, т. е. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$, то $[\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]] = 0$.

9. Плоскость пересекает оси координат в точках $A(3; 0; 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$. Определить площадь треугольника ABC.

10. Из некоторой точки прямой

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

проведен к ней перпендикуляр. Требуется составить уравнения этого перпендикуляра, если известно, что он проходит через точку $M(1;\ 3;\ 2)$.

11. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{7} \text{ и } \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{7}.$$

12. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей:

$$6x + 3y + 2 \quad - 35 = 0,$$
$$6x + 3y + 2 \quad + 63 = 0,$$

если известно, что координаты точки касания сферы к одной из этих плоскостей $(5;\ 1;\ 1)$.

13. Определить положение точек $M(8;\ 4;\ 5)$ и $N\ (1;\ 2;\ 3)$ относительно трехосного эллипсоида

$$5x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 60 = 0.$$

14. Найти уравнение однополостного гиперболоида вращения, полученного от вращения гиперболы, лежащей в плоскости XOY, если расстояние между ее вершинами равно 8, а расстояние между фокусами равно 10. OX — действительная ось, OY — мнимая ось гиперболы.

15. По какой линии пересекается поверхность

$$\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = y$$

с плоскостью $x = 5$?

16. Даны две параллельные плоскости

$$10x + 2y - 11z - 15 = 0$$

и

$$10x + 2y - 11 \quad + 45 = 0.$$

Определить расстояние между этими плоскостями.

Вариант № 3

1. Найти косинусы внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} &3x + 4y - 2 = 0, \\ &x + 2 = 0, \\ &y - 4 = 0. \end{aligned}$$

2. Найти геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух данных точек $M(0;\ 4)$ и $N(0;\ -4)$ есть величина постоянная, равная 10.

3. Составить уравнение какой-либо окружности, касающейся оси OY в начале координат.

4. Составить уравнение окружности радиуса $R = 1$, касающейся прямой $3x + 4y - 5 = 0$ и проходящей через точку $M(-4;\ 4)$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4} x$ и уравнения директрис

$$x = \pm \frac{16}{5}.$$

6. Преобразовать уравнение параболы $y^2 = 2x$, перенеся начало координат в точку $(-1; 2)$ и повернув оси на угол $45°$.

7. Даны векторы $\boldsymbol{OA} = \{2; 3\}$, $\boldsymbol{OB} = \{4; -5\}$ и $\boldsymbol{OC} = \{-6; 2\}$. Найти векторы $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{CD}$.

8. Найти длину вектора $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2$.

9. Дан параллелепипед, построенный на векторах

$$\boldsymbol{AB} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3; \quad \boldsymbol{AD} = -\boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 \text{ и}$$

$$\boldsymbol{AA'} = 3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \text{где } \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \text{ и } \boldsymbol{e}_3 \text{ — три}$$

взаимно перпендикулярных единичных вектора. Найти объем параллелепипеда и длину его диагонали.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через две точки $M(1; -2; 3)$ и $N(0; 4; 1)$.

11. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-12}{4}$$

и плоскости

$$x - 5y - 3z + 2 = 0.$$

12. Составить уравнение сферы, проходящей через две точки $M(-3; -5; 8)$ и $N(3; 3; 6)$, если известно, что отрезок MN является диаметром искомой сферы.

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3; 7; -2)$ параллельно плоскости

$$5x - 4y + z - 1 = 0.$$

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 1; 1)$ и линию пересечения двух плоскостей

$$3x - y + 4z - 1 = 0,$$
$$x - 5y - z - 2 = 0.$$

15. Составить уравнение конуса, вершина которого лежит в точке $M(0; 2; 3)$, а направляющей которого служит эллипс

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, \quad z = -2.$$

16. Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$$

по гиперболе. Найти ее полуоси и вершины.

Вариант № 4

1. Найти высоту h_a треугольника ABC, вершины которого

$$A(2;\ 6),\ B(-3;\ 0),\ C(2;\ 4).$$

2. Найти геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек:

$$A(4;\ 0) \text{ и } B(8;\ 0).$$

3. Определить, какие значения должны иметь коэффициенты уравнения

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

для того чтобы это было уравнением окружности с центром в точке $(2;\ -5)$ и радиусом, равным 6.

4. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а расстояние между директрисами равно 6. Начертить гиперболу, ее директрисы и асимптоты.

5. Дана парабола $y^2 = 4x$ и уравнение касательной к ней $x + 3y + 9 = 0$. Найти точку их прикосновения.

6. Преобразовать уравнение окружности $x^2 + y^2 - 7x - 11y - 3 = 0$, повернув координатные оси на угол 45°.

7. Даны три вектора:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 2\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{b} &= 3\boldsymbol{e}_1 + 7\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3, \\ \boldsymbol{c} &= 4\boldsymbol{e}_1 + 10\boldsymbol{e}_2 + 9\boldsymbol{e}_3. \end{aligned}$$

Проверить, лежат ли концы данных векторов на одной прямой.

8. Упростить произведения

$$[\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2];\quad [\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3];\quad [\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1],$$

зная, что $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ взаимно перпендикулярные орты, образующие правую тройку.

9. Четыре точки $A(4;\ -1;\ 1)$, $B(-5;\ 11;\ 2)$ $C(4;\ 6;\ 0)$ и $D(3;\ 5;\ 3)$ являются вершинами тетраэдра. Определить высоту тетраэдра, проведенную из вершины C на основание ABD.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к двум плоскостям:

$$\begin{aligned} x - 3y - z + 7 &= 0, \\ 5x - y + 2z + 3 &= 0. \end{aligned}$$

11. Провести плоскость параллельно оси ординат и проходящую через линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z - 1 &= 0, \\ x - 5y - z - 2 &= 0. \end{aligned}$$

12. Плоскость $3x - y - 2z - 1 = 0$ пересекается с двумя прямыми:

$$\frac{x+4}{-6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$$

и

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-3}{1},$$

в точках M и N.

Требуется составить уравнения прямой, проходящей через эти точки.

13. Составить уравнение шаровой поверхности, проходящей через точку $M(0; -3; 1)$, и окружность радиуса $R = 4$, лежащую в плоскости XOY с центром в начале координат.

14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ вокруг оси абсцисс.

15. Дана поверхность

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

Определить, по какой кривой она пересекается с плоскостью

$$y = 2.$$

16. Какую поверхность изображает уравнение

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Вариант № 5

1. Высота треугольника, равная h, делит основание треугольника на два отрезка $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Считая, что основание треугольника лежит на оси абсцисс, а высота — на оси ординат, составить уравнения какой-либо высоты и какой-либо медианы этого треугольника.

2. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний до точки $A(0; 3)$ и до точки B $(0; -3)$ равна 24.

3. Составить каноническое уравнение эллипса по данной сумме полуосей и его эксцентриситету:

$$a + b = 13, \ e = \frac{\sqrt{13}}{7}.$$

4. Сторона ромба равна 5 и высота 4,8. Через две противолежащие его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат.

5. Написать уравнения двух сопряженных гипербол, зная, что расстояние между директрисами первой из них равно 7,2, а расстояние между директрисами второй равно 12,8.

6. Преобразовать уравнение прямой $2x - 3y + 5 = 0$, перенеся начало координат в точку $O(-4; 5)$ и сохраняя направление осей.

7. Вычислить скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, зная их разложение по трем единичным взаимно перпендикулярным векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 - 4\boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3.$$

8. К одной точке приложены две силы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, действующие под углом $\frac{2\pi}{3}$. Определить равнодействующую, если

$$|\boldsymbol{p}| - 7, \text{ а } |\boldsymbol{q}| = 4.$$

9. Даны три точки: $A(7; -1; 5)$, $B(3; -5; 1)$ и $C(8; 0; 6)$. Определить, лежат ли эти точки на одной прямой.

10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;\ 0;\ 0)$ и $B(0;\ 0;\ 3)$ и образующей угол в 60° с плоскостью YOZ.

11. Дана прямая

$$3x + 3y - 2z + 9 = 0,$$
$$x - 2y + z + 3 = 0.$$

Требуется привести к каноническому виду уравнения данной прямой.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-3}{2},$$

и параллельной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+5}{4}.$$

13. Определить, как расположена плоскость $z = 3$ по отношению к сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 22 = 0$$

(пересекает, касается или не пересекает).

14. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до точек $M(0;\ 4;\ 0)$ и $N(0;\ -4;\ 0)$ равна 10.

15. Требуется определить, какая поверхность дана уравнением:

$$x^2 - y^2 - z^2 - 8x - 6\ \ - 3 = 0.$$

16. Какую поверхность в пространстве изображает уравнение

$$z^2 = 2x?$$

К задаче построить чертеж.

Вариант № 6

1. На прямой $x + 2y - 12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых

$$x + y - 5 = 0,$$
$$7x - y + 11 = 0.$$

2. Найти геометрическое место точек, находящихся на расстоянии 5 от прямой

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

3. Дан эллипс

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{36}=1.$$

Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса, а фокусы — в вершинах эллипса.

4. Найти уравнение директрис эллипса

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1.$$

и их расстояния от фокусов и вершин.

5. Дана окружность $(x-a)^2+y^2=1$ и гипербола

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{1}=1.$$

Найти их точки пересечения и исследовать, сколько будет таких точек и как они будут расположены в зависимсcти от значений параметра a.

6. Преобразовать уравнение прямой $2x-y-1=0$, повернув координатные оси на $60°$.

7. Даны вершины треугольника

$$\boldsymbol{A}(3;\ 2;\ 1),\ \boldsymbol{B}(4;\ -3;\ 5)\ \text{и}\ \boldsymbol{C}\ (6;\ 1;\ 2).$$

Разложить векторы $\boldsymbol{AB}$; BC и CD по основным единичным векторам $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

8. Найти векторное произведение двух векторов

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3\ \text{и}\ \boldsymbol{N}=\{0;\ 1;\ 2\}.$$

9. Даны четыре точки: $A(-1;\ -8;\ 2)$, $B(5;\ 0;\ 2)$, $C(3;\ -2;\ 3)$ и $D(-1;\ -8;\ 2)$. Определить, лежат ли эти точки в одной плоскости.

10. Установить, будут ли три плоскости

$$\begin{aligned} x-2y+2z-3&=0,\\ 2x-5y+4z&=0,\\ 6x-3y-1&=0. \end{aligned}$$

11. Даны уравнения двух прямых

$$\begin{aligned} 6x-y-4z+12&=0, \\ 3x-y-2&=0 \end{aligned} \quad \text{и} \quad \begin{aligned} 2x+4y-3z&=0,\\ 2x-y-2z&=0. \end{aligned}$$

Требуется привести уравнение прямых к каноническому виду и определить угол между ними.

12. Можно ли провести плоскость, параллельную плоскости $7x - y - 2z - 1 = 0$, проходящую через прямую
$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4}?$$

13. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 49$. Составить уравнение касательной плоскости к сфере, если точка, симметричная центру сферы относительно искомой плоскости, имеет координаты (4; 6, 12).

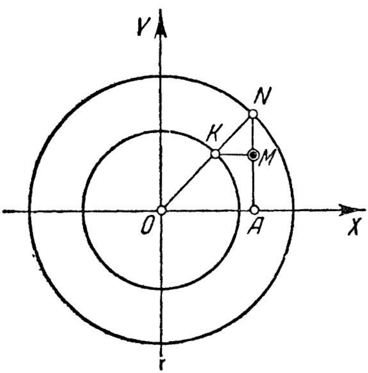
14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$ вокруг оси ординат.

15. Исследовать сечениями поверхность
$$3x^2 + 3y^2 - z^2 - 18 = 0$$
и сделать чертеж.

16. Определить, какую поверхность в пространстве изображает уравнение
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1.$$
К задаче построить чертеж.

Вариант № 7

1. Составить уравнение прямой, параллельной прямым
$$x - 2y + 3 = 0,$$
$$x - 2y + 5 = 0$$
и равноудаленной от этих прямых.



Черт. 14

2. Найти геометрическое место точек, образуемое вершинами всех прямых углов прямоугольных треугольников, имеющих общую гипотенузу, концы которой $A(2;\ 4)$ и $B(4;\ -10)$.

3. На чертеже 14 изображены концентрические окружности, радиусы которых $r = b$, $R = a$. Требуется доказать, что построенная на этом чертеже точка M ($KM \parallel OX$) лежит на эллипсе, уравнение ко-

торого относительно изображенных на чертеже осей будет:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{2}{5}$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Вычислить расстояние от точки M до соответствующей этому фокусу директрисы.

5. Составить уравнение гиперболы, если известно, что асимптоты даны уравнениями

$$y=\pm\frac{x}{2},$$

а расстояние между фокусами равно 10.

6. Определить вид кривой, уравнение которой в полярных координатах

$$\rho=\frac{16}{5+3\cos\varphi}.$$

Найти уравнение этой линии в декартовых координатах. Сделать чертеж.

7. Проверить, что $[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ca}]$, если $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — любые три вектора, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

8. Проверить, что $[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{ca}]$, если $\boldsymbol{ab}$ и $\boldsymbol{c}$ — любые три вектора, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$.

9. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка $A(-3;\ 0;\ 4)$, $B(2;\ -5;\ 7)$ и перпендикулярно к нему.

10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2;\ -6;\ 3)$, если прямая OP перпендикулярна этой плоскости (точка O принята за начало координат).

11. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной плоскости $5x-y+2z-3=0$

и проходящей через линию пересечения двух плоскостей:

$$3x-y+4z-1=0,$$
$$x-5y-z-2=0.$$

12. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}.$$

13. Составить уравнение сферы, касающейся одновременно двух данных сфер:

а) $(x+3)^2+(y-5)^2+(z-4)^2=25$;
б) $(x+3)^2+(y+5)^2+(z-4)^2=9$,

если известно, что центр искомой сферы лежит на линии центров данных сфер.

14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ вокруг оси ординат.

15. Дана поверхность

$$x^2-4y^2-4z^2+24y-8z-44=0.$$

Исследовать ее сечениями и сделать чертеж.

16. Установить, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$$

по параболе. Найти ее параметр и вершину.

Вариант № 8

1. Составить уравнение прямой, параллельной прямой

$$3x+y+6=0$$

и отстоящей от этой прямой на расстоянии $\sqrt{10}$.

2. Найти геометрическое место точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ есть величина постоянная.

3. На эллипсе

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

4. Эксцентриситет эллипса $e=\frac{1}{3}$, центр его совпадает с началом координат, один из фокусов $F(-2;0)$. Вычис-

лить расстояния от точки M эллипса с абсциссой, равной 2, до его директрис.

5. Составить уравнение гиперболы, зная, что асимптоты выражаются уравнениями $y = \pm 2x$, а фокусное расстояние $2c = 10$. Оси симметрии гиперболы совпадают с осями координат.

6. Преобразовать уравнение параболы $y^2 = 4x$, перенеся начало координат в точку $(-2; 0)$, сохраняя направление осей.

7. Зная разложения вектора $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 - 6\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$ по трем перпендикулярным ортам, вычислить длину вектора $\boldsymbol{a}$ и углы, которые он образует с каждым из ортов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$.

8. Доказать, что векторное произведение не изменится, если к одному из сомножителей прибавить вектор, коллинеарный другому сомножителю.

9. Найти геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек $M(c; 0; 0)$ и $N(-c; 0; 0)$ есть величина постоянная, равная $2a$.

10. Координатные плоскости и плоскость $6x - 3y - 2z + 4 = 0$ образуют тетраэдр. Найти центр сферы, вписанной в данный тетраэдр, и написать ее уравнение.

11. В пучке плоскостей $2x - y - 3z + 6 + \lambda(5x - 2y + z - 1) = 0$ найти плоскости, перпендикулярные плоскостям, определяемым данный пучок.

12. Определить расстояние от точки $M(7; 9; 7)$ до прямой

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

13. Найти координаты центра и радиус окружности, по которой пересекается сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z - 86 = 0$$

и плоскость

$$2x - 2y - z + 9 = 0.$$

14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 11 = 0$ вокруг прямой $x = 4$.

15. Составить уравнение поверхности, описываемой гиперболой при ее вращении вокруг своей действительной оси, совпадающей с осью абсцисс. Полуоси гиперболы $a = 8$ и $b = 6$, а центр ее совпадает с началом координат.

16. Найти точку пересечения поверхности

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$$

с прямой

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

Вариант № 9

1. Найти косинус того угла между двумя прямыми

$$x - y + 2 = 0,$$
$$2x + y = 0,$$

в котором лежит точка (1; 0).

2. Найти геометрическое место точек, расстояния каждой из которых от точек $A(-8; 0)$ и $B(-2; 0)$ относятся как $2:1$.

3. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.

4. Найти точки пересечения эллипса

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$$

с прямыми, проходящими через фокусы данного эллипса и концы его малой оси.

5. Эксцентриситет гиперболы $e = \frac{3}{2}$, центр ее лежит в начале координат, одна из директрис дана уравнением $x = -8$.

Вычислить расстояние от точки M гиперболы с абсциссой, равной 10, до фокуса, соответствующего данной директрисе.

6. Преобразовать уравнение окружности

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$

7. Вычислить угол между двумя векторами $\boldsymbol{b} = 5\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2$, если $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

8. Векторы

$$a = 3e_1 + e_2 + 4e_3,$$

$$b = -3e_1 + 2e_2 + 6e_3 \text{ и } c = -e_1 + 2e_2 + 5e_3$$

являются ребрами тетраэдра (трехугольной пирамиды). Найти объем этого тетраэдра.

9. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух данных точек M $(c;\ 0;\ 0)$ и $N(-c;\ 2;\ 10)$ есть величина постоянная, равная 20.

10. Даны две плоскости

$$3x - 4y - z + 2 = 0 \text{ и } x + 5z + 8 = 0.$$

На оси абсцисс найти точку, равноудаленную от заданных плоскостей.

11. Составить уравнение плоскости, образующей угол в 45° с плоскостью

$$8x + 4y - z - 12 = 0$$

и проходящей через линию пересечения двух плоскостей:

$$\text{а) } x + 5y + z = 0,$$
$$\text{б) } x - y - 4 = 0.$$

12. На прямой

$$\begin{cases} 4x - y + 3z - 29 = 0, \\ x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

найти точку, равноудаленную от двух данных точек

$$M(4;\ 11;\ 3) \text{ и } N(-2;\ -13;\ -5).$$

13. Составить уравнение сферы, проходящей через две окружности

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 25, \\ y = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2 + z^2 = 16, \\ y = 3. \end{cases}$$

14. Найти уравнение параболоида вращения, зная, что парабола, которую вращали вокруг оси абсцисс, лежит в плоскости XOY, а расстояние от фокуса до вершины равно 3.

15. Определить, какая поверхность задана уравнением

$$\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{8} = 1,$$

и установить, по какой линии она пересекается с плоскостью

$$z + 2 = 0.$$

16. Определить, какая поверхность задана уравнением

$$x^2 + y^2 - 4z = 0,$$

и установить, по какой кривой она пересекается с плоскостью $x - 2 = 0$.

Вариант № 10

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и равноудаленной от точек

$$A(3;\ 1) \text{ и } B(0;\ 2).$$

2. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1\ (x_1;\ y_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2)$.

3. Эллипс проходит через точки $M\ (+\sqrt{3};\ -2)$ и $N\ (-2\sqrt{3};\ +1)$. Составить уравнение эллипса, приняв его оси за оси координат.

4. Найти точки пересечения параболы $y^2 = 12x$ с прямыми:

$$\text{а) } y - 2x - 1 = 0,$$
$$\text{б) } y - 2x - 5 = 0.$$

Сделать чертеж и указать особенности расположения каждой прямой относительно параболы.

5. Левая вершина гиперболы находится в точке $A\ (-3;\ 0)$, а левый фокус — в точке $B\ (-5;\ 0)$. Составить уравнение гиперболы.

6. Дано уравнение второй степени с двумя переменными:

$$14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0.$$

Требуется его привести к каноническому виду; установить, какой геометрический образ оно определяет; изобразить на чертеже оси первоначальной координатной системы и оси тех координатных систем, которые вводятся по ходу решения.

7. Найти вектор $\boldsymbol{a} = \{x;\ y\}$, если известно, что модуль его равен 2 и что он с вектором $\boldsymbol{b}\ \{3;\ 4\}$ составляет угол $\varphi = 60°$.

8. Векторное произведение $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\ (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})]$ преобразовать в предположении, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неколлинеарны, и дать геометрическое толкование полученному результату.

9. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и данной плоскости.

10. Определить, на каком расстоянии находится точка: $M(2;\ -3;\ -4)$ от плоскости

$$5x - y + 3z + 1 = 0.$$

11. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось аппликат и входящую в связку, определяемую плоскостями

а) $y + 2z - 5 = 0$,
б) $x - y - z - 2 = 0$,
в) $x - 3y + 4z - 1 = 0$.

12. В пучке

$$4x - 5y - 5z - 3 + \lambda(3x - y - 2z - 2) = 0$$

выделить плоскость, проходящую через точку $M\ (1;\ -3;\ 4)$.

13. Составить уравнение сферы, касающейся координатных плоскостей в точках

$$A\ (4;\ 4;\ 0),\quad B\ (0;\ 4;\ 4),\quad C\ (4;\ 0;\ 4).$$

14. Параболу, симметричную относительно оси ординат, проходящую через начало координат и через точку $M\ (6;\ -2;\ 0)$, вращают вокруг оси ординат. Составить уравнение параболоида вращения.

15. Определить, какая поверхность задана уравнением

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

и установить, по какой кривой она пересекается с плоскостью $x + 2 = 0$.

16. Определить, по какой кривой плоскость $y + 6 = 0$ пересекает поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 6z.$$

СОДЕРЖАНИЕ