

# Задачи по физике элементарных частиц

**А. КАМАЛ**

А. КАМАЛ

# ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО  
В. П. ПАВЛОВА и А. Д. СУХАНОВА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Ю. М. ШИРОКОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
Москва 1968

530.3  
К 18  
УДК 539.12

Задачи по физике элементарных частиц. Камал А., Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1968 г.

Книга представляет собой изложение практических задач и вопросов, возникающих при изучении студентами физики элементарных частиц. Подобный задачник по физике элементарных частиц появляется на книжном рынке в первый раз.

Задачник Камала в первую очередь адресован студентам-экспериментаторам, однако и студент-теоретик найдет в нем много интересных для себя задач. При построении книги автор учитывал различие в теоретической подготовке читателей, поэтому в начале каждого параграфа коротко излагаются необходимые теоретические сведения. От читателя требуется при этом лишь самое поверхностное знакомство с общими понятиями физики элементарных частиц. При каждой задаче приводятся основные соображения, необходимые при ее решении.

Рисунков 17, таблиц 2, библиография — 185 названий.

*А. Камал*

Задачи по физике  
элементарных частиц

М., 1968 г., 128 стр. с илл.

Редактор *В. Я. Дубнова*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова*

Корректоры *М. Ф. Алексеева, Е. А. Белицкая*

---

Сдано в набор 2/1 1968 г. Подписано к печати 20/V 1968 г. Бумага 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Физ. печ. л. 4. Условн. печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 5,81. Тираж 30 000 экз. Цена книги 20 коп. Заказ № 1030.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция  
физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров  
СССР. Измайловский пр., 29.

2-3-7  
55-68

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора . . . . .	4
Предисловие автора . . . . .	5
§ 1. Пространственная четность . . . . .	7
§ 2. Зарядовое сопряжение . . . . .	12
§ 3. Обращение времени . . . . .	17
§ 4. Теорема $ТСР$ и ее приложения . . . . .	25
§ 5. Изотопический спин . . . . .	29
§ 6. $G$ -четность . . . . .	35
§ 7. Законы симметрии для позитрония и системы $p\bar{p}$ . . . . .	41
§ 8. Симметрии в системе $K\bar{K}$ . . . . .	45
§ 9. Распад $K^+ \rightarrow 3\pi$ и спин $K$ -мезона . . . . .	52
§ 10. Элементы теории нейтрального $K$ -мезона . . . . .	55
§ 11. Вычисление двухчастичных фазовых объемов . . . . .	62
§ 12. Вычисление трехчастичных фазовых объемов . . . . .	69
§ 13. Зарядовая независимость и некоторые отношения вероятностей распада . . . . .	76
§ 14. Правило $ \Delta I  = 1/2$ . . . . .	80
§ 15. Распад $\pi \rightarrow \mu + \tilde{\nu}$ (или $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu}$ ) . . . . .	87
§ 16. Расчеты «типа Ферми» . . . . .	91
§ 17. Спины $\pi$ -(заряженного) и $\phi$ -мезонов . . . . .	95
§ 18. Бета-распад . . . . .	100
§ 19. Элементы двухкомпонентной теории нейтрино . . . . .	106
§ 20. Фазовый анализ . . . . .	113
§ 21. Приложение: Суммирование по спинам . . . . .	119
Литература . . . . .	124

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Задачник по физике элементарных частиц появляется на книжном рынке впервые. Это закономерно, ибо идеи и методы теории элементарных частиц выделились в особую область теоретической физики. Задачник в первую очередь адресован студентам-экспериментаторам, обычно не получающим необходимой для самостоятельной теоретической работы подготовки. Поэтому почти все нужные сведения сообщаются в тексте непосредственно перед задачами. От читателя требуется лишь знакомство с общими понятиями:  $S$ -матрица, лагранжиан взаимодействия, волновая функция.

Большая часть задач посвящена «классическим» симметриям: пространственное отражение, обращение времени, зарядовое сопряжение,  $G$ -четность, изотопическая инвариантность. Правила отбора иллюстрируются на примерах недавних оригинальных статей. Разобраны тонкие вопросы теории распада нейтрального  $K$ -мезона, несохранения четности в слабых взаимодействиях, правила отбора при распадах элементарных частиц. Значительное количество задач посвящено приближенным расчетам различных времен жизни и отношений вероятностей распадов. Впервые в такого рода литературе рассмотрены вопросы фазового анализа.

Автор включил в книгу весьма широкий материал, затрагивающий самые животрепещущие проблемы теории элементарных частиц.

Книга Камала, несомненно, займет свое место в ряду самых нужных пособий, взятых на вооружение преподавателями университетов и физических институтов.

*Ю. Широков*

19 июня 1967 г.  
Москва

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Основу книги составил курс «Задачи по физике элементарных частиц», который я прочитал в 1960—1962 годах в Ливерпульском университете для дипломников. Курс предназначался для экспериментаторов. Цель состояла в ознакомлении студентов с рядом понятий и методов, необходимых для их работы. При написании книги я предполагал, что читатель имеет элементарные сведения по квантовой теории поля и знаком с некоторыми основными понятиями, такими как разложение  $S$ -матрицы по теории возмущений и лагранжианы взаимодействия для простейших процессов. Текст состоит из необходимых сведений о существовании задачи и перемежается самими задачами. Каждый раз, когда вводится новое понятие или даются малознакомые сведения, делаются литературные ссылки, так чтобы читатель мог освежить знания или глубже изучить вопрос. Студенту, приступающему к решению задачи, было бы весьма полезно предварительно просмотреть некоторые из общих работ, упоминаемых в начале каждого параграфа. Параграфы, посвященные пространственной четности, зарядовому сопряжению, бета-распаду, и ряд других содержат значительное количество ссылок на общие руководства. В этих случаях достаточно просмотреть одно-два из них. Большая часть общих ссылок представляет собой обзорные статьи и конспекты лекций, полезные и при дальнейшем чтении книги. Большое число общих ссылок помещено в списке литературы, чтобы сообщить читателю об их существовании и предоставить ему широкий выбор.

По-видимому, уместно кратко изложить здесь содержание книги. В первых трех параграфах вводятся понятия пространственной четности, зарядового сопряжения и обращения времени. Затем следует параграф о теореме  $TCP$ .

Параграф 5 посвящен формализму изотопического спина. После этого идет параграф о  $G$ -четности и два параграфа о симметриях у позитрония и  $p\bar{p}$ - и  $K\bar{K}$ -систем, где студенту предлагается использовать знания, полученные им в предыдущих параграфах. В параграфах 9 и 10 речь идет о распаде  $K \rightarrow 3\pi$  и спине  $K$ -мезона и о теории нейтрального  $K$ -мезона соответственно. Недавно появились сведения о нарушении  $CP$ -инвариантности. В этих параграфах я все же исходил из сохранения  $CP$ . Параграфы 11 и 12 посвящены вычислениям фазовых объемов. Задачи параграфа 13 состоят в вычислении отношения вероятностей распадов с использованием зарядовой независимости. Правило  $|\Delta I| = 1/2$  обсуждается в параграфе 14. Далее следуют задачи по вычислению отношения вероятностей распадов  $\pi \rightarrow \mu$  и  $\pi \rightarrow e$ . Параграф 16 служит примером приближенного расчета для различных каналов распада  $\pi$ -мезона. В параграфе 17 вводится принцип детального равновесия, который используется для определения спина заряженного  $\pi$ -мезона. Здесь предлагаются также простые расчеты спина  $\phi$ -мезона. Далее следуют два параграфа: о бета-распаде и двухкомпонентной теории нейтрино. Задачи параграфа 20 касаются фазового анализа для процессов упругого рассеяния. Книгу заканчивает приложение о суммировании по спинам, необходимое для решения задач.

Я попытался включить в книгу как можно более обширный материал и надеюсь, что он в какой-то степени удовлетворит студентов-экспериментаторов.

Работать над книгой я начал в докторантуре Отдела теоретической физики Ливерпульского университета. Мне хотелось бы поблагодарить проф. Г. Фрелиха за оказанное мне там гостеприимство. Мне приятно поблагодарить проф. Шиффа за гостеприимство, оказанное мне в Институте теоретической физики в Эдмонтоне, где работа над книгой была продолжена. Я искренне благодарю д-ра Г. Рикайзена, прочитавшего рукопись, за ценные замечания. Позвольте мне отнести на свой счет все возможные промахи и ошибки.

Мне хочется поблагодарить мою жену за перепечатку первого варианта рукописи, а миссис Полин Бабет — за перепечатку окончательного варианта.

*А. Н. Камал*

Отдел физики Университета Альберта  
Эдмонтон

## § 1. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЧЕТНОСТЬ

Хорошие обзоры преобразований симметрии, включая отражения, можно найти в [1—5]. В частности, по поводу пространственной четности читателю рекомендуются параграфы 2 и 5 гл. IV книги Романа [4].

При пространственном отражении меняются знаки трех пространственных координат, а временная координата и спин остаются неизменными:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \quad t \rightarrow t' = t, \quad \sigma \rightarrow \sigma' = \sigma. \quad (1.1)$$

Поля, описывающие частицы, преобразуются при пространственном отражении следующим образом [1—5]. Скалярное поле  $\varphi_s(\mathbf{r}, t)$  (индекс  $s$  означает скалярное) не меняется, и новое поле, отнесенное к новым координатам,  $\varphi'_s(\mathbf{r}', t')$ , совпадает со старым полем в старых координатах:

$$\varphi_s(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi'_s(\mathbf{r}', t') = \varphi'_s(-\mathbf{r}, t) = \varphi_s(\mathbf{r}, t), \quad (1.2)$$

или

$$\varphi'_s(\mathbf{r}, t) = \varphi_s(-\mathbf{r}, t).$$

Мы можем ввести оператор пространственной четности  $P$  [4], действующий в гильбертовом пространстве, такой, что

$$\varphi'_s(\mathbf{r}, t) = P\varphi_s(\mathbf{r}, t)P^{-1} = \varphi_s(-\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

(Из уравнений (1.5) и (1.6) следует, что  $P$  действительно действует в гильбертовом пространстве.) С другой стороны, псевдоскалярное поле  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  (например, поле  $\pi$ -мезона) меняется при пространственном отражении:

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = P\varphi(\mathbf{r}, t)P^{-1} = -\varphi(-\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

1. Разложив скалярное и псевдоскалярное поля на плоские волны и введя операторы рождения и уничтожения [6], показать, что преобразование



операторов рождения выражается формулой

$$Pa_k^+ P^{-1} = \eta a_{-k}^+, \quad (1.5)$$

а для операторов уничтожения —

$$Pa_k P^{-1} = \eta a_{-k}, \quad (1.6)$$

где  $\eta$  равно  $+1$  для скалярного и  $-1$  для псевдоскалярного поля.

Таким образом, операция пространственного отражения меняет знак импульса частицы.

2. Показать, что собственные состояния оператора импульса являются для отдельной частицы собственными состояниями оператора  $P$  только при  $k = 0$ .

Следовательно, мы не можем построить одновременные собственные состояния оператора импульса и оператора  $P$ . Сферические же гармоники,  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , являются собственными функциями и оператора момента и оператора  $P$  [7]. Поэтому очевидно, что для порождения одночастичных состояний с определенной четностью мы должны породить состояния частицы с определенным моментом. Итак, поле  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  следует разлагать по одночастичным собственным состояниям энергии и момента [4, 8—10]:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, l, m} \{ a_{klm} g_l(r) Y_l^m(\Omega_r) + a_{klm}^+ g_l^+ Y_l^{m+}(\Omega_r) \}. \quad (1.7)$$

Здесь  $k$  — модуль импульса  $\mathbf{k}$ ;  $a_{klm}^+$  — оператор рождения частицы в состоянии с моментом  $l$ , проекцией момента  $m$  и модулем импульса  $k$ ;  $g_l(r)$  — сферическая функция Бесселя;  $\Omega_r \equiv (\theta, \varphi)$ .

3. Используя свойства сферических гармоник  $Y_l^m(\Omega_r)$  при отражении [7], показать, что

$$\left. \begin{aligned} Pa_{klm}^+ P^{-1} &= \eta (-1)^l a_{lkm}^+, \\ Pa_{klm} P^{-1} &= \eta (-1)^l a_{lkm}. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

где  $\eta$  равно  $+1$  для скалярного поля и  $-1$  для псевдоскалярного поля.

4. Показать, что одночастичные состояния  $|k, l, m\rangle$  являются собственными состояниями  $P$ . Найти собственные значения этого оператора.

5. Показать, что одночастичные состояния бесспинового бозона и бесспинового антибозона с оди-

наковыми моментами  $l$  имеют одинаковую четность. В качестве примеров бозона и антибозона взять состояния  $\pi^+$  и  $\pi^-$  (см. гл. 7 книги [6] по поводу операторов рождения частиц  $\pi^+$  и  $\pi^-$ ).

6. Используя разложение плоской волны [11], показать, что с точностью до нормировочного множителя

$$a_k \sim \frac{1}{k} \sum_{l, m} a_{klm} Y_l^m(\Omega_k). \quad (1.9)$$

## Двухбозонные состояния

Двухбозонное состояние (бозоны скалярные)  $|k_1, k_2\rangle$  определяется формулой (множитель  $2^{-1/2}$  введен для нормировки на 1):

$$|k_1, k_2\rangle = 2^{-1/2} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ |0\rangle. \quad (1.10)$$

7. Показать, что в системе центра масс двух бозонов ( $k_1 = -k_2 = k$ ) будет:

$$|k, -k\rangle \sim \frac{1}{k^2} \sum_{l, m, m'} a_{klm}^+ a_{k'l'm'}^+ Y_l^{m*}(\Omega_k) Y_{l'}^{m'*}(\Omega_k) |0\rangle. \quad (1.11)$$

Складываясь, два момента  $l$  и  $l'$  дают относительный момент  $L$ , а  $m$  и  $m'$  — полную проекцию  $M$ . Тогда мы можем переписать (1.11) в виде

$$|k, -k\rangle = \sum_{L, M} |k, L, M\rangle Y_L^{M*}(\Omega_k), \quad (1.12)$$

где  $|k, L, M\rangle$  — двухбозонное состояние с относительным моментом  $L = l + l'$ .

8. Используя уравнения (1.11) и (1.12), показать, что состояние  $|k, L, M\rangle$  имеет четность, равную  $(-1)^L$ . Свойства сферических гармоник описаны в [11].

## Уравнение Дирака

Рассмотрим уравнение Дирака для свободной частицы массы  $m$

$$\left( -i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \psi(r, t) = 0 \quad (1.13)$$

(в уравнениях (1.13)–(1.20)  $\psi$  считается  $c$ -числом).

В этой книге мы используем представление  $\gamma$ -матриц, в котором

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{где} & & & \\ \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

Инвариантность уравнения (1.13) относительно преобразования  $(\mathbf{r}, t) \rightarrow (\mathbf{r}', t')$  означает, что существует такая функция  $\psi'(\mathbf{r}', t')$ , что удовлетворяется уравнение

$$\left( -i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial'_\mu + m \right) \psi'(\mathbf{r}', t') = 0. \quad (1.15)$$

Предположим, что существует такая матрица  $S$ , что

$$\psi'(\mathbf{r}', t') = S\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.16)$$

для  $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$  и  $t' = t$ .

9. Подставив (1.16) в (1.15), показать, что для выполнения инвариантности относительно пространственных отражений мы должны выбрать  $S$  так, чтобы

$$S^{-1}\gamma_0 S = \gamma_0 \quad \text{и} \quad S^{-1}\gamma_i S = -\gamma_i. \quad (1.17)$$

10. Показать, что

$$S = \xi \gamma_0. \quad (1.18)$$

где  $\xi$  — произвольный фазовый множитель, причем  $|\xi| = 1$ .

Таким образом, из (1.18) следует, что

$$\psi'(-\mathbf{r}, t) = \xi \gamma_0 \psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.19)$$

или

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = \xi \gamma_0 \psi(-\mathbf{r}, t), \quad (1.20)$$

и мы можем так определить унитарный оператор  $P$ , что оператор фермионного поля будет преобразовываться согласно уравнению

$$P\psi(\mathbf{r}, t)P^{-1} = \psi'(\mathbf{r}, t) = \xi \gamma_0 \psi(-\mathbf{r}, t). \quad (1.21)$$

11. Показать, что  $(\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0)$

$$\bar{\psi}'(-\mathbf{r}, t) = \bar{\psi}(\mathbf{r}, t) S^{-1}, \quad (1.22)$$

где  $S$  определена уравнением (1.18).

12. Показать, что при пространственных отражениях

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}\psi, \quad \bar{\psi}i\gamma_5\psi \rightarrow \bar{\psi}i\gamma_5\psi, \quad (1.23)$$

где все  $\psi$  принадлежат одной и той же частице.

13. Показать, что комбинация  $\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi$ , где  $\phi$  — нейтральное псевдоскалярное поле, остается инвариантной при пространственном отражении.

14. Как должен преобразовываться при пространственном отражении  $A_\mu$ , если комбинация  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$  должна оставаться при этом инвариантной? Показать, что отсюда следуют такие правила преобразования для электрического и магнитного полей:

$$\left. \begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &\rightarrow E'(-\mathbf{r}, t) = -E(\mathbf{r}, t), \\ H(\mathbf{r}, t) &\rightarrow H'(-\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Преобразования (1.24) необходимы для инвариантности уравнений Максвелла относительно пространственных отражений.

### Внутренняя четность системы фермион — антифермион

Четыре решения уравнения Дирака для покоящегося фермиона (эти решения можно получить, положив  $\mathbf{p} = 0$  в решении задачи 2 из § 19) имеют вид

$$E = m, \quad \begin{array}{cc} \text{спин вверх} & \text{спин вниз} \\ \left( \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right), \end{array} \quad (1.25)$$

$$E = -m, \quad \begin{array}{cc} \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right) & \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right). \end{array} \quad (1.26)$$

15. Показать, что четность решений с положительной энергией равна  $+1$ , а четность решений с отрицательной энергией равна  $-1$ . Таким образом, «внутренняя» четность системы фермион — антифермион отрицательна.

## § 2. ЗАРЯДОВОЕ СОПРЯЖЕНИЕ

Сведения о зарядовом сопряжении читатель может найти в параграфах 4 и 5 книги Романа [4]. Эта проблема тщательно обсуждается также в обзорах и конспектах лекций [1—5].

Операция зарядового сопряжения переводит частицу в античастицу, не затрагивая пространственных и временной координат [1—5]. Обозначая соответствующий оператор через  $C$ , мы имеем

$$C|P\rangle = |\bar{P}\rangle, \quad (2.1)$$

где  $|P\rangle$  и  $|\bar{P}\rangle$  — состояния частицы и античастицы соответственно. В частности, зарядовое сопряжение переводит положительно заряженный  $\pi$ -мезон в отрицательно заряженный:

$$C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle. \quad (2.2)$$

1. Предположив, что при зарядовом сопряжении вакуум не меняется, показать, что

$$Ca_1^+C^{-1} = a_1^+ \quad \text{и} \quad Ca_2^+C^{-1} = -a_2^+, \quad (2.3)$$

где  $a_i^+$  — обычные операторы рождения, соответствующие действительному полю  $\varphi_i$   $\pi$ -мезонов. Они определены уравнением [6]:

$$\varphi_i = \sum_k (a_i e^{ikr} + a_i^+ e^{-ikr}). \quad (2.4)$$

2. Определив оператор заряда  $I_3$  так, что его собственные значения совпадают с тремя значениями зарядов  $\pi$ -мезонов, показать, что оператор  $C$  при  $I_3 \neq 0$  антикоммутирует с  $I_3$ . Итак,

$$\{I_3, C\} = 0, \quad I_3 \neq 0. \quad (2.5)$$

Из определения зарядового сопряжения (2.1) с очевидностью следует, что состояния заряженных частиц не

являются собственными состояниями  $C$ . Это видно и из (2.5): поскольку  $I_3$  и  $C$  не коммутируют при  $I_3 \neq 0$ , они не имеют одновременных собственных состояний.

Для нейтральных частиц, совпадающих со своими античастицами (например,  $\pi^0$ - и  $\omega$ -мезоны), имеем

$$C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle, \quad C|\omega\rangle = |\omega\rangle. \quad (2.6)$$

Таким образом, если  $a_3^+$  — оператор рождения  $\pi^0$ , то

$$Ca_3^+C^{-1} = a_3^+. \quad (2.7)$$

Однако многочастичная система с нулевым зарядом может оказаться собственным состоянием  $C$ . Ведь действие оператора  $C$  сводится к замене частиц и античастиц друг на друга, после чего можно перевести их в исходные состояния перестановкой координат.

3. Показать, что для системы  $\pi^+\pi^-$  в состоянии с относительным моментом  $l$  выполняется следующее соотношение:

$$C|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^l |\pi^+\pi^-\rangle. \quad (2.8)$$

4. Показать, что для системы  $\pi^0\pi^0$

$$C|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle. \quad (2.9)$$

Итак, система  $\pi^0\pi^0$  всегда является собственным состоянием оператора  $C$  с собственным значением  $+1$ . Это — прямое следствие того факта, что относительный момент системы четен.

Взаимодействие электромагнитного поля с заряженным током задается лагранжианом взаимодействия [6]

$$\mathcal{L} = A_\mu J^\mu, \quad (2.10)$$

где  $A_\mu$  — электромагнитное поле, а  $J^\mu$  — ток.

5. Вспомнив, что заряды меняют свои знаки при зарядовом сопряжении, показать, что электромагнитное поле при этом преобразуется так:

$$CA_\mu C^{-1} = -A_\mu. \quad (2.11)$$

Операторы рождения и уничтожения, соответствующие  $A_\mu$ , преобразуются аналогично. Именно, если

$$A_\mu = \sum_k (b_\mu e^{ikr} + b_\mu^+ e^{-ikr}), \quad (2.12)$$

то

$$Cb_{\mu}C^{-1} = -b_{\mu} \quad \text{и} \quad Cb_{\mu}^{+}C^{-1} = -b_{\mu}^{+}. \quad (2.13)$$

Из (2.13) вытекает, что вне зависимости от момента фотонов, состояния с нечетным числом их будут собственными состояниями  $C$  с собственными значениями  $-1$ , а состояния с четным числом фотонов будут принадлежать собственным значениям  $+1$ . Итак,

$$C|n\gamma\rangle = (-1)^n |n\gamma\rangle, \quad (2.14)$$

где  $n$  — число фотонов.

6. Используя полученные выше результаты, показать, что:

а) распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  не запрещен,

б) фотон может взаимодействовать с системой  $\pi^+\pi^-$  только при условии, что  $2\pi$ -система находится в состоянии с моментом  $l=1$ ,

в) переходы типа  $n\gamma \rightarrow (n+1)\gamma$  запрещены.

Последнее утверждение в) принято называть теоремой Фарри. Согласно теореме Фарри любая диаграмма с нечетным числом внешних фотонных линий не дает вклада в матричный элемент.

## Зарядовое сопряжение для поля Дирака

Рассмотрим уравнение Дирака для заряженного фермиона в электромагнитном поле [12, 13] ( $\gamma$ -матрицы — те же, что и в предыдущем параграфе):

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = eA_{\mu}\gamma^{\mu}\psi \quad (2.15)$$

(по повторяющимся индексам — суммирование!). Под действием зарядового сопряжения поля  $\psi$  и  $A_{\mu}$  в системе заменяются на зарядово-сопряженные поля  $\psi^c$  и  $A_{\mu}^c$ :

$$\psi \rightarrow \psi^c, \quad A_{\mu} \rightarrow A_{\mu}^c = -A_{\mu}. \quad (2.16)$$

Инвариантность относительно зарядового сопряжения означает, что уравнение Дирака для зарядово-сопряженных полей имеет вид

$$(i\gamma_{\mu}\partial^{\mu} - m)\psi^c = eA_{\mu}^c\gamma^{\mu}\psi^c = -eA_{\mu}\gamma^{\mu}\psi^c. \quad (2.17)$$

Отрицательный знак в правой части уравнения (2.17) означает, что заряд поля  $\psi^c$ , взаимодействующего с электро-

магнитным полем, равен  $-e$ . Но зарядовое сопряжение переводит частицу в античастицу и поэтому должно содержать в себе преобразование  $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ . Чтобы получить связь между  $\psi$  и  $\psi^c$ , мы поступим следующим образом.

7. Проделаем над уравнением (2.15) перечисленные ниже операции в том порядке, как они выписаны. Их цель состоит в выводе уравнения для  $\bar{\psi}$ , которое мы сравним с уравнением для  $\psi^c$ .

а) Применим к (2.15) эрмитово сопряжение;

б) опираясь на то, что  $\gamma_0$  — эрмитова, а  $\gamma_i$  — антиэрмитовы, перейдем к первоначальным  $\gamma$ -матрицам;

в) умножим справа на  $\gamma_0$  и, антикоммутируя  $\gamma_0$  с  $\gamma_i$ , проведем  $\gamma_0$  налево (поскольку наша цель — образовать  $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0$ ). Мы получим

$$\bar{\psi} (-i\gamma^\mu \partial_\mu - m) = e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu. \quad (2.18)$$

г) Применив к (2.18) транспонирование, мы получаем

$$(-i\tilde{\gamma}_\mu \partial_\mu - m) \tilde{\psi} = e A_\mu \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}. \quad (2.19)$$

Итак, мы нашли уравнение для  $\bar{\psi}$ , которое собирались сравнить с уравнением (2.17) для  $\psi^c$ . Если умножить (2.19) слева на унитарную матрицу  $C$  и выбрать  $C$  так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$C\tilde{\gamma}_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad C\tilde{\psi} = \psi^c, \quad (2.20)$$

то (2.17) и (2.19) окажутся идентичными. Итак, преобразования, описываемые соотношениями (2.20), обеспечивают инвариантность уравнения Дирака при зарядовом сопряжении.

8. а) Используя (2.20), показать, что

$$\bar{\psi}^c = -\tilde{\psi} C^{-1}. \quad (2.21)$$

б) Представить  $C$  в виде произведения  $\gamma$ -матриц, обеспечив выполнение первого из уравнений (2.20).

Ток  $J_\mu$  должен быть таким, чтобы он менял знак под действием зарядового сопряжения (когда частицы переходят в античастицы). Такой ток можно представить в виде

$$J_\mu = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^c). \quad (2.22)$$

Ясно, что при  $\psi \rightarrow \psi^c$  будет  $J_\mu \rightarrow -J_\mu$ .



9. Показать, что вследствие (2.20) и (2.21)  $J_\mu$  можно переписать в виде

$$J_\mu = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi - \tilde{\psi} \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}). \quad (2.23)$$

Этот антисимметризованный вид тока можно получить из антисимметризованного с самого начала лагранжиана. В свою очередь необходимость антисимметризованного лагранжиана возникает из требования неотрицательности собственных значений энергии системы (см. гл. 8 книги [6]).

Представим нуклонное поле  $\psi_N$  в виде

$$\psi_N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Зарядово-сопряженное поле запишется так:

$$\psi_{\bar{N}} = \begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Определим третью компоненту изотопического спина так, чтобы было

$$I_3 = \frac{1}{2} \tau_3, \quad (2.26)$$

где

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Оператор  $I_3$  можно получить, антисимметризовав выражение [9]:

$$I_3 = \frac{1}{2} \int \psi_N^\dagger \tau_3 \psi_N d^3r. \quad (2.28)$$

10. Применяя такой же способ антисимметризации, что и в (2.22), показать, что

$$I_3 = \frac{1}{2} \left\{ N(p) - N(\bar{p}) - N(n) + N(\bar{n}) \right\}, \quad (2.29)$$

где  $N(p) = \int \psi_p^\dagger \psi_p d^3r$  — оператор числа частиц для протонов.

Поскольку оператор  $I_3$  меняет знак при зарядовом сопряжении, он антикоммутирует с  $C$ :

$$C I_3 C^{-1} = -I_3, \quad (2.30)$$

или

$$\{I_3, C\} = 0. \quad (2.31)$$

Определим теперь оператор числа барионов  $B$  так, чтобы

$$B\psi_N = \psi_N. \quad (2.32)$$

11. Представив оператор числа барионов в виде результата антисимметризации выражения [9]

$$B = \int \psi_N^+ B \psi_N d^3r, \quad (2.33)$$

показать, что

$$B = \{N(p) - N(\bar{p}) + N(n) - N(\bar{n})\}. \quad (2.34)$$

Итак, число барионов, как и следовало ожидать, меняет знак при зарядовом сопряжении, поскольку барионы переходят в антибарионы. Другими словами,  $B$  и  $C$  антикоммутируют:

$$\{B, C\} = 0. \quad (2.35)$$

Соотношение (2.35) теряет силу для  $B = 0$ . — Таким образом, хотя для  $B \neq 0$  нельзя построить одновременные собственные состояния  $B$  и  $C$ , система барион — антибарион может оказаться одновременным собственным состоянием этих операторов.

Из (2.29) и (2.34) следует, что заряд  $Q$  можно представить в форме

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}. \quad (2.36)$$

Как и следовало ожидать, при  $Q \neq 0$  заряд  $Q$  антикоммутирует с  $C$ .

### § 3. ОБРАЩЕНИЕ ВРЕМЕНИ

Классическое уравнение движения частицы с массой  $m$  в поле с потенциалом  $V(r)$

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla V(r) \quad (3.1)$$

инвариантно относительно операции обращения времени, т. е.

$$t \rightarrow t' = -t, \quad \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r}, \quad (3.2)$$

если  $V(r)$  не зависит от времени. Читатель легко может проверить, что в новых координатах уравнение

$$m \frac{d^2 r'}{dt'^2} = -\nabla' V(r') \quad (3.3)$$

остаётся в силе. Инвариантность уравнения (3.1) является следствием квадратичной зависимости от времени  $t$  левой части этого уравнения. Так, если  $r(t)$  — решение уравнения (3.1), то  $r(-t)$  — также его решение. Однако скорость теперь другая, так как

$$\frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dr'}{dt'} = -\frac{dr}{dt}. \quad (3.4)$$

В системе координат с обращенным временем частица движется по своей траектории в обратную сторону.

Поскольку уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(r, t) = \left\{ -\frac{\nabla^2}{2m} + V(r) \right\} \psi(r, t) \quad (3.5)$$

— это дифференциальное уравнение первого порядка по времени, то нельзя ожидать, что оно будет иметь такой же простой вид при обращении времени как уравнение Ньютона.

1. В предположении, что гамильтониан  $H$  не зависит от времени (представление Шредингера), показать, что  $\psi(-t)$  не является решением уравнения (3.5). (В классической механике  $r(-t)$  является решением уравнения движения одновременно с  $r(t)$ .) Показать, что одновременно с  $\psi(t)$  решением уравнения (3.5) является  $\psi^*(-t)$ .

Итак, согласно уравнению Шредингера,  $\psi^*(-t)$  изменяется во времени совершенно так же, как  $\psi(t)$ . Следовательно,  $\psi(t)$  и  $\psi^*(-t)$  отличаются не более чем на фазовый множитель, который может зависеть от пространственных координат.

2. Взяв  $\psi(r, t)$  в форме

$$\psi(r, t) \sim \exp\{-i(Et - pr)\} \quad (3.6)$$

и определив плотности вероятности и тока формулами [7—11]

$$P(r, t) = \frac{i}{2m} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi), \quad (3.7)$$

$$J(r, t) = \frac{1}{2im} \{\psi^* (\nabla \psi) - (\nabla \psi^*) \psi\}, \quad (3.8)$$

показать, что если

$$\psi(r, t) \rightarrow \psi^*(r, -t), \quad (3.9)$$

то  $P(r, t)$  и  $J(r, t)$  преобразуются согласно формулам

$$P(r, t) \rightarrow P(r, t), \quad J(r, t) \rightarrow -J(r, t). \quad (3.10)$$

Таким образом,  $\psi^*(r, -t)$  описывает волну, импульс которой равен по величине и противоположен по направлению импульсу волны  $\psi(r, t)$  (это, конечно, можно усмотреть и непосредственно из уравнений (3.6) и (3.9)). Ситуация в точности та же, что и в классической механике: координаты не меняются, а скорость меняет знак.

Рассмотрим теперь в представлении Шредингера общий случай, когда уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = H |\psi, t\rangle. \quad (3.11)$$

3. Показать, что если вектор состояния  $|\psi, t\rangle$  удовлетворяет уравнению Шредингера, то ему удовлетворяет и вектор  $|\psi', t\rangle$  такой, что

$$|\psi', t\rangle = UK |\psi, -t\rangle, \quad (3.12)$$

где  $U$  — унитарный оператор со свойством

$$UH^*U^{-1} = H, \quad (3.13)$$

а  $K$  — оператор комплексного сопряжения.

Назовем  $|\psi', t\rangle$  «обращенным во времени вектором  $|\psi, t\rangle$ », а  $T = UK$  — оператором обращения во времени. Этот оператор  $T$  антилинеен\*), поскольку он содержит множителем  $K$ . Его называют антиунитарным (сокращенное от антилинейный унитарный), поскольку он удовлетворяет условию унитарности,  $T^{-1} = T^+$ .

4. Разложив вектор состояния по стационарным состояниям [17], показать, что последовательное проведение четырех указанных ниже операций (рис. 1) возвращает нас в первоначальное состояние (с точностью

\*) Оператор  $Q$  называется линейным, если  $Q\lambda|\psi\rangle = \lambda Q|\psi\rangle$ , и антилинейным, если  $Q\lambda|\psi\rangle = \lambda^* Q|\psi\rangle$ , где  $\lambda$  — комплексное число. Эрмитово сопряжение,  $Q \rightarrow Q^+$ , линейного оператора  $Q$  определяется формулой  $\langle \varphi, Q\psi \rangle = \langle Q^+\varphi, \psi \rangle$ , а для антилинейного оператора — формулой  $\langle \varphi, Q\psi \rangle = \langle Q^+\varphi, \psi \rangle^*$ .

до не зависящего от времени фазового множителя).  
Начиная с вектора состояния  $|\psi, 0\rangle$ ,

- а) провести трансляцию во времени на интервал  $\tau$ ,
- б) обратить время,
- в) провести обратную трансляцию на интервал  $\tau$ ,
- г) обратить время.

5. Показать, что для скалярных произведений векторов двух систем выполнено соотношение (можно представить себе, что правая и левая части уравнения вычисляются для состояний, изображенных в верхней и нижней половинах рис. 1):

$$\langle \varphi'(-t) | \psi'(-t) \rangle = \langle \psi(t) | \varphi(t) \rangle. \quad (3.14)$$

Мы видим, что норма  $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$  сохраняется.

6. Показать, что если матричный элемент оператора  $Q$  преобразуется по формуле  $\langle \varphi'(-t) | Q' | \psi'(-t) \rangle = \langle \varphi(t) | Q | \psi(t) \rangle^*$ , (3.15)

то сам оператор преобразуется по формуле

$$Q' = TQT^{-1}. \quad (3.16)$$

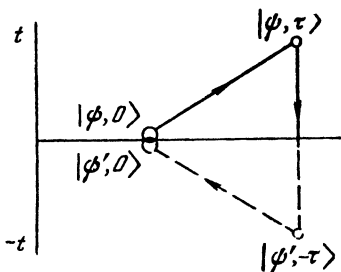


Рис. 1.

Из (3.16) следует, что если  $U$  коммутирует и с  $r$ , и с  $p$  (их следует считать операторами в  $q$ -представлении), то выполняются следующие соотношения:

$$r' = TrT^{-1} = r, \quad p' = TpT^{-1} = -p, \quad L' = TLT^{-1} = -L. \quad (3.17)$$

Из уравнения (3.17) очевидно, что в  $q$ -представлении мы можем выбрать  $U = 1$ . Чтобы удовлетворить уравнению (3.13), мы должны тогда потребовать, чтобы  $H^* = H$ . Эти замечания справедливы только для бесспиновых частиц.

В случае частиц со спином  $1/2$  мы потребуем, чтобы спиновой момент преобразовывался точно также, как и орбитальный, т. е. чтобы

$$\sigma' \rightarrow -\sigma. \quad (3.18)$$

Теперь наш выбор  $U$  должен обеспечить выполнение этого соотношения.

7. В представлении

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

показать, что для  $U = 1$  условие (3.18) не выполнено. Показать, что если  $U = \varepsilon \sigma_2$  [1, 3, 15] (фазовый множитель  $\varepsilon$  произволен), то

$$T \sigma T^{-1} = -\sigma. \quad (3.20)$$

Поскольку обращение времени меняет знак спина частицы, оно должно преобразовывать состояние со спином вверх  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  в состояние со спином вниз  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

8. Показать, что можно так выбрать фазы базисных векторов

$$\chi_{1/2}^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \chi_{1/2}^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что для произвольной фазы  $\varepsilon$  ( $U = \varepsilon \sigma_2$ ) будет

$$T \chi_{1/2}^{m_s} = i^{2m_s} \chi_{1/2}^{-m_s}. \quad (3.21)$$

С другой стороны, для сферических гармоник можно принять  $T = K$ . Тогда обращение времени сведется для них к комплексному сопряжению [15, 18]:

$$T Y_l^{m_l} = K Y_l^{m_l} = (Y_l^{m_l})^* = (-1)^{m_l} Y_l^{m_l}. \quad (3.22)$$

9. Построить состояние  $\psi_J^m$ , взяв  $Y_l^{m_l}$  и  $\chi_{1/2}^{m_s}$  в качестве базисных векторов и используя формулу

$$\psi_J^m = \sum_{l, m_l} \left( l, m_l; \frac{1}{2}, m_s \mid J, m \right) Y_l^{m_l} \chi_{1/2}^{m_s}. \quad (3.23)$$

Затем, используя свойства коэффициентов Клебша — Гордана [15] (см. также стр. 38 в [18]), показать, что

$$T \psi_J^m = i^{2m} \psi_J^{-m}. \quad (3.24)$$

Кроме уже упомянутых ссылок, читателю рекомендуются книги Ватанабе [16], Мессиа [11] и Гольдбергера и Ватсона [19], содержащие более подробные сведения об обращении времени в волновой механике.

**Квантованные поля.** (Вигнеровское обращение времени [17]; Людерс [20] и Сакураи [3]. Излагаемый ниже материал тесно связан с этими работами. К ним мы и рекомендуем обращаться студентам.)

Мы видели, что в волновой механике волновая функция преобразуется при обращении времени так, что «обращенная во времени  $\psi(t)$ » (обозначенная раньше через  $\psi'(t)$ ) получается из  $\psi(-t)$  при помощи комплексного сопряжения. Имея это в виду, выведем свойства скалярного квантованного поля относительно обращения времени. Обозначим классическую волновую функцию через  $\varphi_c(\mathbf{r}, t)$  (индекс  $c$  значит «классическая»), а соответствующее квантованное поле — через  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Тогда связь между волновой функцией частицы с импульсом  $\mathbf{k}$  и полем  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  запишется в форме

$$\varphi_c(\mathbf{r}, t) = \langle 0 | \varphi(\mathbf{r}, t) | \mathbf{k} \rangle, \quad (3.25)$$

где

$$| \mathbf{k} \rangle = a_{\mathbf{k}}^+ | 0 \rangle. \quad (3.26)$$

10. Показать, что

$$\varphi_c(\mathbf{r}, t) \sim e^{-i(Et - \mathbf{k}\mathbf{r})}. \quad (3.27)$$

«Обращенная во времени  $\varphi_c(\mathbf{r}, t)$ » (обозначается как  $\varphi'_c(\mathbf{r}, t)$ ) получается комплексным сопряжением  $\varphi_c(\mathbf{r}, -t)$ :

$$\varphi'_c(\mathbf{r}, t) = \varphi_c^*(\mathbf{r}, -t) = \langle 0 | \varphi(\mathbf{r}, -t) | \mathbf{k} \rangle^*. \quad (3.28)$$

Поскольку  $\varphi'_c(\mathbf{r}, t)$  — волновая функция с импульсом  $-\mathbf{k}$ , ее можно выразить как матричный элемент оператора  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  между обращенными во времени состояниями  $\langle T0 |$  и  $| T\mathbf{k} \rangle$ . Итак,

$$\varphi'_c(\mathbf{r}, t) = \langle T0 | \varphi(\mathbf{r}, t) | T\mathbf{k} \rangle = \langle O | \varphi(\mathbf{r}, -t) | \mathbf{k} \rangle^*. \quad (3.29)$$

11. Используя известные ранее свойства  $T$ , показать, что

$$T\varphi(\mathbf{r}, t)T^{-1} = \varphi(\mathbf{r}, -t) \quad (3.30)$$

с точностью до произвольного фазового множителя.

## Уравнение Дирака

Уравнение Дирака имеет вид

$$\left( -i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{\mu} \partial_{\mu} + m \right) \psi = 0. \quad (3.31)$$

Сначала будем считать  $\psi$   $c$ -числом, а не оператором поля.

12. Следуя той же процедуре, что и для уравнения Шредингера, показать, что уравнению Дирака удовлетворяет функция  $\psi'(\mathbf{r}, t)$ , определяемая формулой

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = B\psi^*(\mathbf{r}, -t), \quad (3.32)$$

где  $B$  — унитарная матрица, удовлетворяющая условиям

$$B\gamma_0^*B^{-1} = \gamma_0, \quad B\gamma_i^*B^{-1} = -\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.33)$$

13. Выразить  $B$  (с точностью до произвольного фазового множителя) через произведение  $\gamma$ -матриц так, чтобы удовлетворить уравнению (3.33). Каков нерелятивистский вид  $B$ ?

14. Показать, что  $\tilde{B} = -B$  и что фазовый множитель при  $B$  можно выбрать так, чтобы было  $BB^* = -1$  и  $B^+B = 1$ .

Уравнение (3.32) очень похоже на уравнение (3.12), о котором шла речь в случае с уравнением Шредингера. Матрица  $B$  служит для такого перемешивания компонент  $\psi(\mathbf{r}, t)$ , чтобы обращенное во времени состояние имело обращенный спин. Комплексное сопряжение в правой части (3.32) обеспечивает то, что импульс состояния  $\psi'(\mathbf{r}, t)$  имеет знак, противоположный знаку импульса в состоянии  $\psi(\mathbf{r}, t)$ . Мы будем называть  $\psi'(\mathbf{r}, t)$  «обращенным во времени  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ».

Преобразование обращения времени для квантованного фермионного поля *определим* соотношением

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = T\psi(\mathbf{r}, t)T^{-1} = B^{-1}\psi(\mathbf{r}, -t). \quad (3.34)$$

Предвидя, что  $T$  антиунитарен, предположим, что  $T$  комплексно сопрягает все  $c$ -числа.

15. Показать, что при преобразовании  $\psi$  по (3.34) уравнение Дирака останется инвариантным относительно вращения времени, если выбрать  $B$  удовлетворяющим (3.33).

16. Показать, что если  $\psi(\mathbf{r}, t)$  преобразуется по (3.34), то  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)$  преобразуется следующим образом ( $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_0$ ):

$$\bar{\psi}'(\mathbf{r}, t) = T\bar{\psi}(\mathbf{r}, t)T^{-1} = \bar{\psi}(\mathbf{r}, -t)B. \quad (3.35)$$



17. Показать, что под действием оператора  $T$  4-вектор тока

$$J_{\mu} = e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi \quad (3.36)$$

преобразуется по формулам

$$J'_0(\mathbf{r}, t) = J_0(\mathbf{r}, -t), \quad \mathbf{J}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{J}(\mathbf{r}, -t), \quad (3.37)$$

что и следует ожидать от плотности заряда и тока. Сравнить с уравнением (3.10) в случае волновой механики.

Очевидно, что для сохранения инвариантности лагранжиана электромагнитного взаимодействия  $A^{\mu}J_{\mu}$  электромагнитный потенциал должен преобразовываться согласно уравнениям

$$A'_0(\mathbf{r}, t) = A_0(\mathbf{r}, -t), \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(\mathbf{r}, -t). \quad (3.38)$$

18. При каких условиях следующие комбинации:

1)  $g_V(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)$ , 2)  $g_{PV}(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi)(\bar{\psi}i\gamma_5\gamma_{\mu}\psi)$ , будут инвариантны относительно обращения времени, если:  
а) каждая  $\psi$  принадлежит одной и той же частице,  
б) все  $\psi$  принадлежат разным частицам?

Следует напомнить читателю, что описанный здесь формализм обращения во времени принадлежит Вигнеру [14]. Имеется, однако, и другой широко используемый метод обращения времени для квантованных полей, принадлежащий Швингеру [21] (и Паули [22]). Различие их в следующем. Для квантованного скалярного поля мы выбрали (с точностью до фазового множителя)

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, -t).$$

С тем же успехом мы могли бы выбрать

$$\varphi'(\mathbf{r}, t) = \varphi^+(\mathbf{r}, -t). \quad (3.39)$$

Функция  $\varphi^+(\mathbf{r}, -t)$  также является решением уравнения Клейна — Гордона. Трансформационные свойства  $a_{\mathbf{k}}^+$  и  $a_{\mathbf{k}}$ , следующие из (3.39), примут вид

$$a_{\mathbf{k}}^+ \rightarrow a_{-\mathbf{k}}, \quad a_{\mathbf{k}} \rightarrow a_{-\mathbf{k}}^+. \quad (3.40)$$

Однако теперь при обращении времени вакуум должен преобразовываться по формуле

$$|0\rangle \rightarrow \langle 0|, \quad (3.41)$$

так что если  $a_k^+$  действует на  $|0\rangle$ , то  $Ta_k^+T^{-1}$  действует на  $\langle 0|$ . В формализме Швингера комплексное сопряжение не появляется. Весьма ясное изложение швингеровского обращения времени содержат лекции Мандла [5]. Поскольку имеются различные способы трактовать обращение времени (в тексте не упоминалась еще работа Белла [23]), читатель должен быть начеку при изучении соответствующих мест в учебниках по квантовой теории поля и других печатных материалах.

## § 4. ТЕОРЕМА $TCP$ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Теорема  $TCP$  [20] утверждает, что релятивистски инвариантная локальная теория поля с обычной связью спина со статистикой (т. е. такая, в которой частицы со спином  $1/2$  подчиняются статистике Ферми — Дирака) инвариантна также и относительно комбинированной операции  $TCP$  с любым порядком операторов в ней. Читатель убедится в том, что если имеется инвариантность относительно комбинированной инверсии  $PC$ , то из теоремы  $TCP$  следует инвариантность относительно обращения времени. Рассмотрим теперь ряд приложений теоремы  $TCP$ .

### А. Равенство масс стабильной частицы и ее античастицы

(В связи с излагаемым ниже материалом читателю рекомендуется литература, перечисленная в [4, 24—27].)

Предположим, что мы «выключили» все слабые и электромагнитные взаимодействия, которые могли бы привести к распаду частицы; в такой ситуации частица станет стабильной. Обозначим через  $H^s$  ту часть полного гамильтониана, которая не может вызвать распада частицы. Такое взаимодействие даст вклад в наблюдаемую массу частицы только благодаря эффектам собственной энергии. Соответствующие собственно-энергетические диаграммы будут содержать лишь *виртуальные* промежуточные состояния.

Рассмотрим случай скалярного бозона. Действуя на физическое бозонное состояние  $|E, \mathbf{p}\rangle$ , полный гамильтониан даст полную энергию однобозонной системы:

$$H^s |E, \mathbf{p}\rangle = E |E, \mathbf{p}\rangle. \quad (4.1)$$

Мы получим массу бозона, приведя его в состояние покоя.

1. Предполагая, что частица с импульсом  $\mathbf{p}$  движется вдоль оси  $z$ , показать, что преобразование Лоренца со скоростью  $\mathbf{p}/E$  в качестве параметра приведет частицу в состояние покоя.

Это применимо только к случаю с  $m \neq 0$ .

Обозначив указанное выше преобразование Лоренца через  $L(\mathbf{v})$ , мы имеем

$$L(\mathbf{v})|E, \mathbf{p}\rangle = |m, 0\rangle, \quad (4.2)$$

где  $m$  — масса частицы.

2. Применить преобразование Лоренца  $L(\mathbf{v})$  к уравнению (4.1) и показать, что (в предположении, что  $H^s$  инвариантен относительно собственных преобразований Лоренца)

$$H^s|m, 0\rangle = m|m, 0\rangle. \quad (4.3)$$

Обозначим состояние античастицы, соответствующей частице  $|E, \mathbf{p}\rangle$ , через  $|E, \mathbf{p}\rangle^c$ . Тогда

$$C|E, \mathbf{p}\rangle = |E, \mathbf{p}\rangle^c. \quad (4.4)$$

3. Обозначив символом  $\theta$  тройную операцию  $TCP$ , показать, что для скалярного бозона

$$\theta|E, \mathbf{p}\rangle = |E, \mathbf{p}\rangle^c. \quad (4.5)$$

4. Предположив, что  $H^s$  инвариантен относительно операции  $\theta$ , подействовать оператором  $\theta$  на уравнение (4.1) и показать, что

$$H^s|E, \mathbf{p}\rangle^c = E|E, \mathbf{p}\rangle^c, \quad (4.6)$$

а после этого показать, что  $m = \bar{m}$  ( $\bar{m}$  — масса античастицы).

Рассмотрим теперь случай фермиона. Физическое фермионное состояние обозначим через  $|E, \mathbf{p}, \sigma\rangle$ .

5. Показать, что

$$\theta|E, \mathbf{p}, \sigma\rangle = |E, \mathbf{p}, -\sigma\rangle^c, \quad (4.7)$$

а после этого — что масса фермиона со спином  $\sigma$  равна массе антифермиона со спином  $-\sigma$ .

Под действием оператора  $\theta$  спин античастицы становится противоположным ее спину в начальном состоянии.

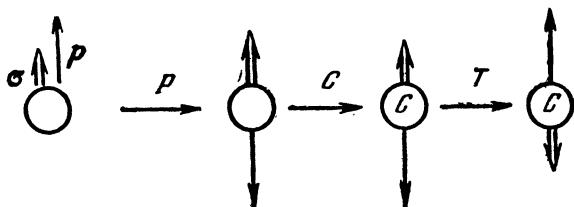


Рис. 2.

Результат действия оператора  $\theta$  графически представлен на рис. 2 [24].

## В. Равенство времен распада частицы и античастицы

Для простоты рассмотрим распад бозона со спином 0 посредством слабого взаимодействия, частично сохраняющего четность и частично нарушающего ее:

$$H_{\text{расп}} = H^W + H^{W'}, \quad (4.8)$$

где  $H^W$  — часть, сохраняющая четность ( $PH^WP^{-1} = H^W$ ), а  $H^{W'}$  — часть, нарушающая ее. Предположим, что распадающийся бозон покоится. Обозначаемое через  $|u\rangle$  конечное состояние будет иметь  $J=0$  и  $m_J=0$ . В первом порядке по  $H^W$  и  $H^{W'}$  амплитуда перехода при распаде равна  $\langle u | H_{\text{расп}} | \psi \rangle = \langle u | H^W | \psi \rangle + \langle u | H^{W'} | \psi \rangle \equiv a + b$ ; (4.9)

$a$  является скалярной частью амплитуды, а  $b$  — ее псевдоскалярной частью. Полная вероятность перехода, которая должна быть скаляром, пропорциональна сумме квадратов  $a$  и  $b$ :

$$\Gamma \sim |a|^2 + |b|^2. \quad (4.10)$$

Амплитуды, соответствующие  $a$  и  $b$  для античастиц, равны

$$\bar{a} = \langle \bar{u} | H^W | \bar{\psi} \rangle, \quad \bar{b} = \langle \bar{u} | H^{W'} | \bar{\psi} \rangle. \quad (4.11)$$

Черточки над  $a$ ,  $b$  и  $|u\rangle$  означают, что мы имеем дело с античастицами.

6. Предположив, что  $H^W$  и  $H^{W'}$  инвариантны относительно  $\theta$ , показать, что  $\Gamma = \bar{\Gamma}$ .

### С. Условия инвариантности для четырехфермионных взаимодействий

Рассмотрим следующую плотность гамильтониана для четырех отличных друг от друга фермионов:

$$h = g_1 \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b \bar{\psi}_c \gamma_\mu \psi_d + g_2 \bar{\psi}_a \gamma_\mu \psi_b \bar{\psi}_c \gamma_\mu i \gamma_5 \psi_d + \\ + g_3 \bar{\psi}_a \gamma_\mu i \gamma_5 \psi_b \bar{\psi}_c \gamma_\mu \psi_d + g_4 \bar{\psi}_a \gamma_\mu i \gamma_5 \psi_b \bar{\psi}_c \gamma_\mu i \gamma_5 \psi_d + \text{э. с.} \quad (4.12)$$

Постоянные  $g_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) не зависят от координат и времени. Рассмотрим поведение  $h$  при следующих преобразованиях:

#### Пространственное отражение (см. § 1).

7. Имея в виду поведение фермионных полей  $\psi$  и  $\gamma$ -матриц при пространственном отражении, показать, что  $h$  преобразуется при этом по формуле

$$Ph(g_1, g_2, g_3, g_4)P^{-1} = \\ = h(g_1 \eta^P, -g_2 \eta^P, -g_3 \eta^P, g_4 \eta^P), \quad (4.13)$$

где

$$\eta^P = \eta_a^P \eta_b^P \eta_c^P \eta_d^P. \quad (4.14)$$

Индекс  $P$  в уравнении (4.14) означает, что  $\eta_i^P$  — фазовые множители, характерные для отражения.

8. Показать, что для сохранения четности при  $\eta^P = 1$  должны выполняться условия

$$g_2 = g_3 = 0. \quad (4.15)$$

#### Зарядовое сопряжение (см. § 2).

9. Найти эрмитово-сопряженную часть  $h$  из формулы (4.12) и показать, что

$$\text{э. с.} = g_1^* \tilde{\psi}_a \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_b \tilde{\psi}_c \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_d + g_2^* \tilde{\psi}_a \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_b \tilde{\psi}_c i \gamma_5 \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_d + \\ + g_3^* \tilde{\psi}_a i \gamma_5 \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_b \tilde{\psi}_c \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_d + g_4^* \tilde{\psi}_a i \gamma_5 \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_b \tilde{\psi}_c i \gamma_5 \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\psi}_d. \quad (4.16)$$

10. Выполнить зарядовое сопряжение уравнения (4.12) и показать, что  $h$  преобразуется при этом по формуле

$$Ch(g_1, g_2, g_3, g_4)C^{-1} = \\ = h(g_1^* \eta^c, -g_2^* \eta^c, -g_3^* \eta^c, g_4^* \eta^c). \quad (4.17)$$

11. Найти ограничения на  $g_i$ , следующие из инвариантности  $h$  относительно зарядового сопряжения при  $\eta^c = 1$ .

**Обращение времени** (см. § 3).

12. Выполнить обращение времени в уравнении (4.12) и показать, что

$$Th(g_1, g_2, g_3, g_4)T^{-1} = h(g_1^*\eta^T, g_2^*\eta^T, g_3^*\eta^T, g_4^*\eta^T). \quad (4.18)$$

13. Найти ограничения на  $g_i$ , следующие из инвариантности  $h$  относительно обращения времени при  $\eta^T = 1$ .

14. Применить к  $h$  операцию  $\theta = TCP$  в указанном порядке и показать, что для инвариантности  $h$  относительно  $\theta$  должно быть выполнено условие

$$\eta^P \eta^c \eta^T = 1. \quad (4.19)$$

## § 5. ИЗОТОПИЧЕСКИЙ СПИН

В отсутствие электромагнитных взаимодействий нельзя отличить протон от нейтрона. Вырождение этих частиц можно снять, включив электромагнитные взаимодействия. Ситуация совершенно аналогична поведению спина в магнитном поле. Поэтому неудивительно, что обычный формализм спина можно целиком применить к состояниям с различным зарядом — нейтрону и протону. Гейзенберг [28] первым предположил, что нейтрон и протон можно считать двумя состояниями одной частицы — нуклона. Формализм изотопического спина подробно развили Кассен и Кондон [29].

Рассмотрим три матрицы  $\tau_i$ :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

и два базисных вектора в пространстве, где действуют  $\tau_i$ :

$$\psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Определим оператор заряда так, чтобы было

$$Q\psi_p = \psi_p, \quad Q\psi_n = 0. \quad (5.3)$$

1. Найти матричное представление  $Q$  и выразить его через  $\tau_3$ .

Определим оператор числа барионов  $B$  так, чтобы было

$$B\psi_p = \psi_p, \quad B\psi_n = \psi_n. \quad (5.4)$$

2. Найти матричное представление  $B$ .

3. Показать, что

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) \quad (5.5)$$

и

$$\tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) \quad (5.6)$$

являются соответственно «повышающим» и «понижающим» операторами со свойствами:

$$\tau_+\psi_n = \psi_p, \quad \tau_-\psi_n = 0, \quad \tau_+\psi_p = 0, \quad \tau_-\psi_p = \psi_n. \quad (5.7)$$

4. Подействовать на функции  $\psi_p$  и  $\psi_n$  оператором  $\tau^2 = \sum_i \tau_i^2$  и показать, что они являются собственными состояниями оператора  $\tau^2$  с собственным значением 3.

Рассмотрим теперь вращения в изотопическом пространстве. Вращение вокруг 3-й оси на угол  $\theta$  порождается оператором  $\exp(i\tau_3\theta/2)$ .

5. Используя разложение для  $e^a$ , показать, что

$$\exp(i\tau_3\theta/2) = \cos(\theta/2) + i\tau_3 \sin(\theta/2). \quad (5.8)$$

Определим теперь нуклонное состояние

$$\psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

так, чтобы было

$$\tau_3\psi_N = \begin{pmatrix} \psi_p \\ -\psi_n \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

6. Показать, что при вращении на угол  $\theta$  вокруг 3-й оси  $\psi_N$  преобразуется по формуле

$$\psi_N \rightarrow \psi'_N = \begin{pmatrix} \psi'_p \\ \psi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2)) \psi_p \\ (\cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)) \psi_n \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Операторы числа барионов и заряда можно записать в виде (см. § 2 и 6):

$$B = \int \Psi_N^+ \Psi_N d^3r, \quad (5.12)$$

$$Q = \int \Psi_N^+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_N d^3r. \quad (5.13)$$

7. Показать, что при вращении на угол  $\theta$  вокруг 3-й оси, как  $B$ , так и  $Q$  остаются инвариантными.

8. Показать, что билинейная комбинация  $\bar{\Psi}_N \Psi_N$  остается инвариантной при вращении на угол  $\theta$  вокруг 3-й оси.

### Двухнуклонная система

Волновая функция двух нуклонов может быть либо симметричной либо антисимметричной относительно перестановки этих двух нуклонов. Однако в целом волновая функция должна быть антисимметричной относительно комбинированной перестановки координат, спинов и зарядов. Поэтому, обозначив через  $\psi(1, 2)$  волновую функцию двух нуклонов, а через  $P_r$ ,  $P_\sigma$  и  $P_\tau$  — операторы перестановки координат, спинов и зарядов, мы должны получить

$$P_r P_\sigma P_\tau \psi(1, 2) = -\psi(1, 2). \quad (5.14)$$

Двухнуклонное состояние с полным изотопическим спином  $I$  и его третьей компонентой  $I_3$  можно записать в виде

$$\psi_I^{I_3} = \sum_{I_3', I_3''} \left( \frac{1}{2}, I_3'; \frac{1}{2}, I_3'' \mid I, I_3 \right) \psi_{1/2}^{I_3'} \psi_{1/2}^{I_3''}, \quad (5.15)$$

где  $\left( \frac{1}{2}, I_3'; \frac{1}{2}, I_3'' \mid I, I_3 \right)$  — коэффициенты Клебша — Гордана [30, 31],  $\psi_{1/2}^{1/2} = \psi_p$  и  $\psi_{1/2}^{-1/2} = \psi_n$ .

9. Выписать явно четыре двухнуклонных состояния (три — для  $I=1$  и одно — для  $I=0$ ).

Из вида волновой функции  $\psi_I^{I_3}$  можно усмотреть, что триплетные состояния симметричны относительно перестановки



новки зарядов, а синглетное — антисимметрично. Другими словами,

$$P_{\tau} \psi'_{I^3} = (-1)^{I+1} \psi'_{I^3}. \quad (5.16)$$

10. Найти собственные значения потенциала

$$V = V_0 + \sigma^{(1)} \sigma^{(2)} V_1 + \tau^{(1)} \tau^{(2)} V_2 \quad (5.17)$$

для различных вариантов спиновых и изоспиновых состояний двух нуклонов (например, синглетное по спину и синглетное по изоспину состояние и т. д.).

### Формализм изотопического спина для $\pi$ -мезонов

$\pi$ -мезонное поле в изотопическом пространстве представляет собой вектор. Это необходимо потому, что, как известно,  $\pi$ -мезон существует в трех состояниях с различным зарядом, и для описания этих состояний можно использовать три компоненты изотопического вектора. Декартов базис в трехмерном пространстве можно выбрать в виде

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Единичные векторы  $e_i$  ортогональны и образуют полный набор. Любой вектор в пространстве с базисом  $e_i$  можно представить в виде линейной комбинации этих базисных векторов. Следовательно,  $\pi$ -мезонное поле, описываемое тремя действительными компонентами  $\varphi_i$ , можно записать в форме

$$\varphi = \sum_i \varphi_i e_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Простое геометрическое рассуждение показывает, что результат вращения на бесконечно малый угол  $\delta\theta$  вокруг 3-й оси описывается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &\rightarrow \varphi'_1 = \varphi_1 \cos \delta\theta + \varphi_2 \sin \delta\theta \approx \varphi_1 + \varphi_2 \delta\theta, \\ \varphi_2 &\rightarrow \varphi'_2 = -\varphi_1 \sin \delta\theta + \varphi_2 \cos \delta\theta \approx -\varphi_1 \delta\theta + \varphi_2, \\ \varphi_3 &\rightarrow \varphi'_3 = \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Будем считать, что преобразование (5.20) есть результат действия унитарного оператора  $\exp(iI_3 \delta\theta)$ , тогда

$$\psi' = \exp(iI_3 \delta\theta) \psi. \quad (5.21)$$

11. Показать, что матрица  $I_3$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

является генератором бесконечно малого поворота вокруг 3-й оси.

Генераторы поворотов вокруг 1-й и 2-й осей имеют, соответственно, вид

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

12. Показать, что справедливы следующие перестановочные соотношения:

$$[I_1, I_2] = iI_3 \quad (5.24)$$

и получающиеся из него циклической перестановкой индексов, а также

$$[I^2, I_3] = 0, \quad \text{где} \quad I^2 = \sum_i I_i^2. \quad (5.25)$$

Уравнение (5.25) показывает, что можно найти одновременно собственные состояния  $I^2$  и  $I_3$  (т. е. одновременно диагонализировать  $I^2$  и  $I_3$ ). С другой стороны, (5.24) показывает, что никакие два генератора  $I_i$  не имеют одновременных собственных состояний, т. е. в одно и то же время диагональным может быть только один из них.

13. Используя (5.22), найти собственные значения  $I_3$ . Найти новые базисные векторы  $e'_i$ , нормированные на единицу, являющиеся собственными векторами  $I_3$  (тогда  $I_3$  будет диагональным в базисе  $e'_i$ ).

14. Показать, что новые базисные векторы можно выразить через старые формулой

$$e'_i = \sum_j t_{ij} e_j, \quad (5.26)$$

где

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

15. Вычислив  $t^{-1}I_3t$ , показать, что  $t$  действительно диагонализует  $I_3$ . (Поскольку  $t$  унитарна, можно воспользоваться уравнением  $t^{-1} = t^+$ . Унитарность  $t$  можно проверить непосредственно, исходя из (5.27).)

16. Записать  $\varphi$  в новом базисе в виде

$$\varphi = \sum_i \varphi'_i e'_i. \quad (5.28)$$

Новые компоненты  $\varphi'_i$  соответствуют трем зарядовым состояниям  $\pi$ -мезона.

## Взаимодействие $\pi$ -мезонов и нуклонов

Выразим взаимодействие  $\pi$ -мезонов и нуклонов формулой

$$h = G \bar{\psi}_N \Gamma \tau \varphi \psi_N, \quad (5.29)$$

где  $\Gamma$  равна  $i\gamma_5$  для псевдоскалярных мезонов и псевдоскалярной связи.

17. Выразив (5.29) через  $\psi_p$ ,  $\psi_n$  и три зарядовых состояния  $\pi$ -мезона, показать, что вершины  $pp\pi^0$  и  $nn\pi^0$  характеризуются константами связи с одинаковыми величинами и противоположными знаками.

Силы между двумя нуклонами порождаются обменом  $\pi$ -мезонами. Сила с наибольшим радиусом действия порождается обменом одним  $\pi$ -мезоном. Например, на рис. 3 графически представлена такая сила между двумя прото-

нами. С точностью до множителя, связанного с виртуальным  $\pi$ -мезоном (множитель  $\sim (k^2 - m_\pi^2)^{-1}$  в пространстве импульсов),  $(p-p)$  сила пропорциональна  $+G^2$ .

18. Нарисовав все диаграммы для  $(n-n)$  и  $(n-p)$  сил и воспользовавшись ответом задачи 17, показать, что силы  $(n-n)$  и  $(p-n)$  одинаковы.

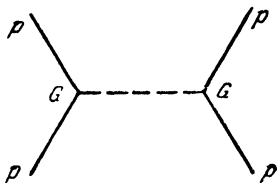


Рис. 3.

В этом и состоит зарядовая независимость (только для сил, порожденных одномезонным обменом). Мы видели, что она вытекает из нашего выбора взаимодействия в форме (5.29). Дальнейшие сведения об изотопическом спине содержатся в работах Романа [4], Сакураи [3], Кеммера и др. [2].

## § 6. G-ЧЕТНОСТЬ

Оператор  $G$  определяется как вращение на  $180^\circ$  вокруг 2-й оси в изотопическом пространстве (короче, в изопространстве), сопровождаемое зарядовым сопряжением [32, 33]:

$$G = C e^{iI_2}, \quad (6.1)$$

где  $I_2$  — генератор вращения в изоплоскости 1—3, совпадающий со второй компонентой оператора изоспина. (Очень хороший обзор на тему о  $G$ -четности имеется в лекциях Сакураи [3].)

$\pi$ -мезон, частица с изоспином 1, представлен в изопространстве вектором  $\varphi$  с тремя действительными компонентами  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Соответствующие операторы рождения и уничтожения обозначаются через  $a_i^+$  и  $a_i$ . Три состояния  $\pi$ -мезона с определенным зарядом выражаются формулами [13]:

$$\left. \begin{aligned} |\pi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ + ia_2^+) |0\rangle, \\ |\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^+ - ia_2^+) |0\rangle, \\ |\pi^0\rangle &= a_3^+ |0\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

1. Показать, что для каждого из этих трех состояний

$$G|\pi\rangle = -|\pi\rangle. \quad (6.3)$$

Таким образом, одночастичное состояние  $\pi$ -мезона независимо от его заряда является собственным состоянием оператора  $G$  с собственным значением  $-1$ . Это — общее правило для изоспиновых мультиплетов: все члены изомультиплета имеют одинаковое собственное значение  $G$  (если оно существует). Поэтому достаточно найти собственное значение  $G$  лишь для одного члена изомультиплета.

2. Определив оператор заряда для одночастичного состояния  $\pi$ -мезона как  $I_3$ , показать, что  $[G, I_3] = 0$ . Напомним, что оператор зарядового сопряжения  $C$  не коммутирует с  $I_3$  (§ 2).

3. Дважды подействовав оператором рождения  $\pi^+$ -мезона на вакуум, построить двухчастичное состояние  $|\pi^+\pi^+\rangle$  и показать, что оно является собственным состоянием  $G$  с собственным значением  $+1$ .

Полученные для одномезонного и двухмезонного состояний результаты можно обобщить на многомезонные состояния. Состояние  $n$   $\pi$ -мезонов является собственным состоянием  $G$  с собственным значением  $(-1)^n$ . Так,  $\rho$ -мезон, сильно распадающийся на два  $\pi$ -мезона, имеет  $G = +1$ , а  $\omega$ -мезон, распадающийся в сильном взаимодействии на три  $\pi$ -мезона, имеет  $G = -1$ .

Поскольку  $G$  есть произведение одного из поворотов в изопространстве на зарядовое сопряжение, то взаимодействия, которые по отдельности инвариантны как относительно вращений в изопространстве, так и относительно зарядового сопряжения (а сильные взаимодействия обладают этим свойством), инвариантны и относительно  $G$ . Итак, если пренебречь электромагнитными (зарядово-зависимыми) и слабыми (не сохраняющими  $C$ ) взаимодействиями,  $G$  становится хорошим квантовым числом. Это позволяет обобщить теорему Фарри в том смысле, что все диаграммы с нечетным числом внешних  $\pi$ -мезонных линий дают нулевой вклад. Рис. 4 иллюстрирует это утверждение: три  $\pi$ -мезона в начальном состоянии имеют  $G = -1$ , а два  $\pi$ -мезона в конечном —  $G = +1$ . Тогда при наличии только сильных взаимодействий этот процесс будет запрещен сохранением  $G$ .

Теперь ясно, что если выключены все электромагнитные взаимодействия, то распад  $\omega$ -мезона (трех- $\pi$ -мезонного резонанса) на два  $\pi$ -мезона запрещен. Однако такой распад наблюдается [34]. Его механизм состоит в переходе

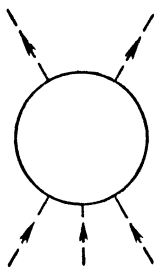


Рис. 4.

$\omega \rightarrow \rho$  посредством  $G$ -нарушающего электромагнитного взаимодействия с последующим распадом  $\rho \rightarrow 2\pi$  посредством  $G$ -сохраняющего сильного взаимодей-

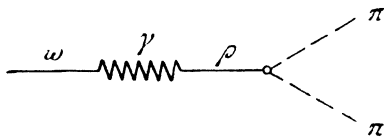


Рис. 5.

действия [35—38]. Эти два этапа представлены графически на рис. 5. Обратимся теперь к случаю нуклонов. Выразив через  $\tau_2$  вторую компоненту оператора изоспина  $I_2 = \tau_2/2$  [9, 30, 39], мы получим для генератора бесконечно малого поворота на угол  $\delta\theta$  вокруг 2-й оси в изопространстве формулу

$$\exp(i\tau_2 \delta\theta/2). \quad (6.4)$$

4. Воспользовавшись разложением для  $e^a$  и формулой

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

показать, что

$$\exp\left(i\tau_2 \frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos \frac{\theta}{2} + i\tau_2 \sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (6.6)$$

Следовательно,

$$\exp\left(i\tau_2 \frac{\pi}{2}\right) = i\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

5. Воспользовавшись уравнением (6.7), показать, что

$$G \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{n} \\ -\bar{p} \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где  $\bar{p}$  и  $\bar{n}$  — антипротон и антинейтрон соответственно.

Итак, при  $G$ -преобразовании  $p \rightarrow \bar{n}$  и  $n \rightarrow -\bar{p}$ . Соответствующие поля преобразуются по формулам

$$\psi_p \rightarrow \psi_{\bar{n}} = \psi_n^c, \quad (6.9)$$

$$\psi_n \rightarrow -\psi_{\bar{p}} = -\psi_p^c. \quad (6.10)$$

Через  $\psi_p$  обозначено здесь протонное поле, через  $\psi_{\bar{p}}$  — антипротонное, а через  $\psi_p^c$  — зарядово-сопряженное протонное (т. е. антипротонное) поле.

6. Показать, что

$$G^2 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Третья компонента  $I_3$  изоспина связана с зарядом  $Q$  и барионным числом  $B$  (в отсутствие странных частиц) формулой

$$Q = I_3 + B/2. \quad (6.12)$$

Матричное представление  $I_3$  имеет вид

$$I_3 = \tau_3/2. \quad (6.13)$$

Компоненту изоспина  $I_3$  можно выразить также через операторы числа частиц [31] (см. также § 2):

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} \int \{ \psi_N^+ \tau_3 \psi_N \}_- d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \int (\psi_p^+ \psi_p - \psi_n^+ \psi_n - \psi_{\bar{p}}^+ \psi_{\bar{p}} + \psi_{\bar{n}}^+ \psi_{\bar{n}}) d^3r = \\ &= \frac{1}{2} \{ N(p) - N(n) - N(\bar{p}) + N(\bar{n}) \}, \quad (6.14) \end{aligned}$$

где  $\{ \quad \}_-$  — символ антисимметризации, а  $N(p)$  — оператор числа протонов.

7. Воспользовавшись трансформационными свойствами  $\psi_p$  и др. при  $G$ -преобразовании, показать, что  $I_3$  инвариантна относительно этого преобразования:

$$GI_3G^{-1} = I_3. \quad (6.15)$$

Следовательно,

$$[I_3, G] = 0. \quad (6.16)$$

Барионное число определяется формулой

$$B\psi_N = \psi_N. \quad (6.17)$$

Выражение  $B$  через операторы числа частиц имеет следующий вид (см. также § 2):

$$\begin{aligned} B &= \int \psi_N^+ B \psi_N d^3r = \\ &= \int (\psi_p^+ \psi_p + \psi_n^+ \psi_n - \psi_{\bar{p}}^+ \psi_{\bar{p}} - \psi_{\bar{n}}^+ \psi_{\bar{n}}) d^3r = \\ &= N(p) + N(n) - N(\bar{p}) - N(\bar{n}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

8. Воспользовавшись трансформационными свойствами полей  $\psi$  при  $G$ -преобразовании, показать, что  $G$  и  $B$  антикоммутируют, т. е. что

$$GBG^{-1} = -B. \quad (6.19)$$

Этого результата и следовало ожидать, поскольку  $G$  преобразует нуклоны в антинуклоны и наоборот. Уравнение (6.19) показывает, что при  $B \neq 0$  собственные состояния оператора  $B$  не являются собственными состояниями  $G$  (поскольку  $G$  и  $B$  не коммутируют). Одновременное собственное состояние  $G$  и  $B$  реализуется в единственном случае, когда  $B = 0$ .

Построим теперь собственные состояния  $G$  для нуклонов. Из предыдущего ясно, что однонуклонное ( $B = 1$ ) либо двухнуклонное ( $B = 2$ ) состояния не могут быть собственными состояниями  $G$ . Однако таким может быть нуклон-антинуклонное состояние ( $B = 0$ ). Рассмотрим, например, состояние  $|p\rangle|\bar{n}\rangle$ . Для него  $B = 0$  (см. таблицу 1):

Т а б л и ц а 1

$I_3 \backslash B$	$1/2$	$-1/2$
$1$	$p$	$n$
$-1$	$\bar{n}$	$\bar{p}$

При  $G$ -преобразовании  $p \rightleftharpoons \bar{n}$  (с точностью до знака), и мы получим состояние  $|\bar{n}\rangle|p\rangle$ . Однако в этом новом состоянии частицы обменялись своими координатами. Поэтому



для получения первоначального состояния необходимо переставить частицы в их старые положения. Поведение нуклон-antinуклонного состояния при операции такого обмена зависит от относительного орбитального момента и полного спина состояния (см. задачи § 7).

9. Воспользовавшись формулами преобразования (6.9) и свойствами волновых функций относительно операции обмена, показать, что

$$G |p, x_1, \sigma_1\rangle |\bar{n}, x_2, \sigma_2\rangle = \\ = -(-1)^{l+s} |p, x_1, \sigma_1\rangle |\bar{n}, x_2, \sigma_2\rangle, \quad (6.20)$$

где  $l$  — относительный момент, а  $s$  — полный спин пары частица-античастица.

Классификация нуклонов и антинуклонов по барионному числу и по  $I_3$  приведена в таблице 1. Так, состоянием с  $I=1, I_3=1$  будет, очевидно,  $|p\rangle |\bar{n}\rangle$ . Другие состояния ( $I=1, I_3=0, -1$  и  $I=0, I_3=0$ ) можно выразить через однонуклонное и одноantinуклонное состояния по общей формуле

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I'_3, I''_3} \left( \frac{1}{2}, I'_3; \frac{1}{2}, I''_3 | I, I_3 \right) \left| \frac{1}{2}, I'_3 \right\rangle \left| \frac{1}{2}, I''_3 \right\rangle, \quad (6.21)$$

где  $\left( \frac{1}{2}, I'_3; \frac{1}{2}, I''_3 | I, I_3 \right)$  — обычные коэффициенты Клебша — Гордана.

10. Воспользовавшись таблицей 1 и формулой (6.21), выписать три состояния:  $|1, 0\rangle, |1, -1\rangle$  и  $|0, 0\rangle$ . Важно отметить, что:

а) для  $\bar{p}$  везде следует использовать состояние  $-\left| \bar{p} \right\rangle$  [3, 31].

б) чтобы обеспечить равенство  $B=0$ , нуклонное состояние везде должно появляться вместе с антинуклонным.

11. Найти собственные значения  $G$  для трех состояний:  $|1, 0\rangle, |1, -1\rangle$  и  $|0, 0\rangle$  и показать, что они согласуются с формулой

$$G = (-1)^{l+s+I} \quad (6.22)$$

для системы нуклон-antinуклон [40].

## § 7. ЗАКОНЫ СИММЕТРИИ ДЛЯ ПОЗИТРОНИЯ И СИСТЕМЫ $p\bar{p}$

В задачах этого параграфа демонстрируется роль различных сохраняющихся величин: полного момента, четности и т. д. Ознакомиться с проблемами читателю помогут ссылки [3--5, 41].

### Позитроний

Позитронием называют связанное состояние электрона и позитрона. Наглядно его можно представить себе как атом водорода, в котором протон заменен позитроном. Поскольку приведенная масса  $e^-e^+$ -системы равна  $\frac{1}{2} m_e$ , в то время как для атома водорода она порядка  $m_e$ , то позитроний — более «протяженный» объект, чем атом водорода. В нерелятивистском приближении величины энергетических уровней позитрония в два раза меньше, чем у атома водорода.

Волновая функция системы  $e^-e^+$  (системы из двух фермионов) должна быть полностью антисимметричной. К системе  $e^-e^+$  применимы следующие операции перестановок: а) перестановка координат, б) перестановка спинов и в) перестановка зарядов (закрывающаяся в зарядовом сопряжении). Волновая функция  $e^-e^+$  должна быть антисимметрична относительно совокупности этих трех операций, проведенных последовательно.

Если атом позитрония находится в состоянии с моментом  $l$ , то координатная часть его волновой функции ведет себя как  $Y_l^m(0, \varphi)$ .

1. Показать, что после перестановки координат волновая функция приобретает множитель  $(-1)^l$ .

2. Выписать синглетную и триплетную спиновые волновые функции и показать, что после перестановки спинов возникает множитель  $(-1)^{s+1}$ , где  $s$  — спин системы (0 для синглета и 1 для триплета).

Если перестановка зарядов приводит к численному множителю  $C$ , то требование антисимметрии для системы  $e^-e^+$  примет вид

$$(-1)^{l+s+1} C = -1. \quad (7.1)$$

В распадах, сохраняющих зарядовую четность, число  $S$  для начального состояния можно найти из зарядовой четности конечного состояния.

Рассмотрим распад

$$e^+ + e^- \rightarrow n\gamma. \quad (7.2)$$

3. Воспользовавшись сведениями о зарядовой четности системы  $n\gamma$  (см. § 2), показать, что распад позитрония на  $n$  фотонов разрешен, если

$$l + s + n - \text{четно}. \quad (7.3)$$

4. Воспользовавшись правилом отбора (7.3), определить, на какое число фотонов может распадаться орто- и парапозитроний.

(Ортопозитроний — это  ${}^3S_1$ -состояние атома позитрония.  $S$  означает здесь, что орбитальный момент  $l=0$ , верхний индекс 3 означает триплетное спиновое состояние, а нижний индекс 1 означает, что полный момент  $J=1$ . Парапозитроний — это состояние  ${}^1S_0$  атома позитрония.)

### Система $p\bar{p}$ (протоний)

С точки зрения законов симметрии система  $p\bar{p}$  очень похожа на систему  $e^+e^-$ . Мы снова должны потребовать полной антисимметрии волновой функции  $p\bar{p}$ .

Рассмотрим реакцию

$$p + \bar{p} \rightarrow n\pi^0. \quad (7.4)$$

По тем же соображениям, что и для системы  $e^+e^-$ , соотношение (7.1) здесь выполняется.

5. Воспользовавшись сведениями о зарядовой четности системы  $n\pi^0$  (см. § 2), показать, что реакция (7.4) может идти лишь при ограничении

$$(-1)^{l+s} = 1. \quad (7.5)$$

Для состояний системы  $p\bar{p}$  можно использовать спектроскопические обозначения:

$${}^1S_0, \quad {}^3S_1, \quad {}^1P_1, \quad {}^3P_{2,1,0}, \quad {}^1D_2, \quad {}^3D_{3,2,1}, \dots \quad (7.6)$$

6. Для каких из перечисленных состояний разрешен распад на  $n\pi^0$  при ограничении (7.5)?

До сих пор мы рассматривали ограничения, налагаемые лишь антисимметрией волновой функции системы  $p\bar{p}$ . Однако сохраняться должны также полный момент и четность (если в процессе не принимают участия слабые взаимодействия). Эти требования приведут к дальнейшим ограничениям на орбитальный момент и спин системы  $p\bar{p}$  (ср. уравнение (7.5)). Рассмотрим, например, частный случай,  $n = 2$ :

$$p + \bar{p} \rightarrow 2\pi^0. \quad (7.7)$$

Конечное состояние содержит два тождественных бозона. Поэтому волновая функция (пропорциональная  $Y_{l'}(\theta, \varphi)$ , где  $l'$  — момент системы  $2\pi^0$ ) должна быть симметричной относительно перестановки двух  $\pi^0$ . Итак, вследствие свойств функций Лежандра при пространственном отражении должно выполняться соотношение

$$(-1)^{l'} = 1. \quad (7.8)$$

Это соотношение показывает, что система  $2\pi^0$  может обладать нулевым или четным моментом.

7. Предположив, что полный момент в реакции (7.7) сохраняется, выписать состояния  $S$ ,  $P$  и  $D$  системы  $p\bar{p}$  (из перечисленных в (7.6)), для которых разрешена аннигиляция на  $2\pi^0$ .

8. Будем считать  $\pi^0$  связанным состоянием системы  $p\bar{p}$  (это означает, что процесс  $p + \bar{p} \rightarrow \pi^0$  должен быть разрешен с точки зрения сохранения различных квантовых чисел). Какие из состояний (7.6) при этом могут соответствовать  $\pi^0$  с точки зрения закона сохранения полного момента?

Наконец, рассмотрим ограничения, налагаемые сохранением четности. Вернемся к реакции (7.7). Если конечное состояние  $2\pi^0$  обладает моментом  $l'$ , то четность этого состояния равна  $\xi(-1)^{l'}$ , где  $\xi$  — внутренняя четность системы  $2\pi^0$ , а множитель  $(-1)^{l'}$  отражает свойства  $Y_{l'}(\theta, \varphi)$ . Внутренняя четность  $\pi^0$  равна  $-1$  (он псевдоскалярный), поэтому  $\xi = (-1)^2 = 1$ . Далее, мы уже видели, что  $l'$  может быть нулевым или четным. Итак,  $(-1)^{l'} = +1$ . Следовательно, пространственная четность системы  $2\pi^0$  равна  $+1$ .

9. Пусть орбитальный момент системы  $p\bar{p}$  равен  $l$ . Вспомнив, что относительная внутренняя четность системы  $p\bar{p}$  отрицательна (§ 1), показать, что для сохранения четности в реакции (7.7) мы должны потребовать, чтобы было

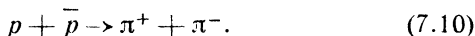
$$l + 1 \text{ — четно.} \quad (7.9)$$

10. Какие из состояний, допустимых в задаче 8, удовлетворяют соотношению (7.9)?

11. Воспользовавшись ответом предыдущей задачи, показать, что  $\pi^0$  можно считать лишь синглетным  $S$ -состоянием системы  $p\bar{p}$ .

Рассуждения, проведенные выше для системы  $p\bar{p}$ , применимы и к системе  $n\bar{n}$ . Поэтому  $\pi^0$  можно считать и синглетным связанным  $S$ -состоянием системы  $n\bar{n}$ . Итак, в наиболее общем виде  $\pi^0$  можно записать как линейную комбинацию систем  $p\bar{p}$  и  $n\bar{n}$  в  $^1S_0$ -состоянии. Аналогично,  $\pi^+$  (отрицательная внутренняя четность и  $I_3 = +1$ ) можно рассматривать как связанное  $^1S_0$ -состояние  $p\bar{n}$  (отрицательная внутренняя четность и  $I_3 = +1$ ). В свою очередь  $\pi^-$  можно рассматривать как связанное  $^1S_0$ -состояние  $\bar{p}n$ .

Рассмотрим теперь реакцию



Различие между реакциями (7.10) и (7.6) заключается в том, что в то время как система  $2\pi^0$  симметрична относительно обмена обоих  $\pi$ -мезонов вследствие их неразличимости, операция перестановки обоих  $\pi$ -мезонов в системе  $\pi^+\pi^-$  не приводит к тому же самому состоянию. Чтобы получить первоначальное состояние, операцию перестановки следует провести дважды.

12. Воспользовавшись результатом задачи 1, показать, что в реакции (7.10) разрешены все четные и нечетные значения  $l'$  (момента системы  $\pi^+\pi^-$ ).

13. Показать, что из сохранения четности следует:

переход  $p\bar{p}$  в  $S$ -состоянии  $\rightarrow \pi^+\pi^-$  в  $S$ -состоянии запрещен,

переход  $p\bar{p}$  в  $S$ -состоянии  $\rightarrow \pi^+\pi^-$  в  $P$ -состоянии разрешен.

14. Исходя из сохранения момента, показать, что аннигиляция  $p\bar{p}$  в  $\pi^-\pi^+$  с  $l' = 1$  возможна для системы  $p\bar{p}$  только в состоянии  ${}^3S_1$ .

Любопытно, что  $\rho$ -мезон [42] сильно распадается на два  $\pi$ -мезона в  $P$ -состоянии. Обладая поэтому спином 1, он, как известно, существует в трех зарядовых состояниях. Нейтральная компонента векторного мезона  $\rho^0$  должна распадаться на  $\pi^+\pi^-$  в  $P$ -состоянии, поскольку система  $2\pi^0$  не может иметь нечетного момента. Выше установлено, что система  $p\bar{p}$  в  ${}^3S_1$ -состоянии может аннигилировать на  $\pi^+\pi^-$  в  $P$ -состоянии. Сопоставив эти факты, мы испытываем соблазн считать  $\rho^0$ -мезон связанным  ${}^3S_1$ -состоянием  $p\bar{p}$ . Мезоны  $\rho^+$  и  $\rho^-$ , распадающиеся на  $\pi^+\pi^0$  и  $\pi^-\pi^0$  соответственно, можно считать связанными  ${}^3S_1$ -состояниями систем  $p\bar{n}$  и  $\bar{p}n$ . Продолжая это занятие, мы сможем и другие мезонные резонансы  $\eta$  [43] и  $\omega$  [44] трактовать как связанные состояния нуклон-antinуклонной системы. См. обзорную статью Пуппи [45].

## § 8. СИММЕТРИИ В СИСТЕМЕ $K\bar{K}$

$K$ -мезон обладает спином 0 и изоспином 1/2. Его четыре зарядовых состояния (два — для частиц и два — для античастиц) вместе со значениями их компонент изоспина и странности, записываются так:

		$I_3$	$S$
частицы	$K^+$	1/2	+1
	$K^0$	-1/2	+1
античастицы	$K^-$	-1/2	-1
	$\bar{K}_0$	1/2	-1

(со свойствами  $K$ -мезонов поможет ознакомиться любая из ссылок [46—48]).  $K^+$  и  $K^0$ , обладая одинаковой странностью, образуют дублет

$$(K) = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Аналогично, дублет античастиц обозначается через

$$(\bar{K}) = \begin{pmatrix} K^- \\ \bar{K}^0 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

1. Воспользовавшись формулой

$$\exp\left(i\theta \frac{\tau_2}{2}\right) = \cos \frac{\theta}{2} + i\tau_2 \sin \frac{\theta}{2} \quad (8.3)$$

для матрицы поворота на угол  $\theta$  вокруг оси  $y$  в изопространстве и представлением

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.4)$$

показать, что при повороте на  $180^\circ$  вокруг оси  $y$  будет

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} K^0 \\ -K^+ \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

2. Воспользовавшись результатом (8.5), показать, что

$$G \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{K}^0 \\ -K^- \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

и

$$G^2 \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Ситуация совершенно аналогична поведению изодублета  $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$  при  $G$ -преобразовании (см. уравнение (6.11)).

### Состояния системы $K\bar{K}$

Мы можем построить два ортогональных состояния  $K\bar{K}$  с  $I=0$  и  $I_3=0$ : симметричное и антисимметричное относительно перестановки зарядов:

$$|K\bar{K}\rangle_s = \frac{1}{2} \{ |K^+K^- \rangle + |K^-K^+ \rangle + |K^0\bar{K}^0 \rangle + |\bar{K}^0K^0 \rangle \} \quad (8.8)$$

и

$$|K\bar{K}\rangle_a = \frac{1}{2} \{ |K^+K^- \rangle - |K^-K^+ \rangle + |K^0\bar{K}^0 \rangle - |\bar{K}^0K^0 \rangle \}. \quad (8.9)$$

Символ  $|K^+K^- \rangle$  в правых частях уравнений (8.8) и (8.9) означает, что  $K^+$  занимает положение 1, а  $K^-$  занимает положение 2. В состоянии  $|K^-K^+ \rangle$  зарядовые переменные поменялись местами, а координаты положений 1 и 2 остались нетронутыми. Читатель может легко проверить, что функции  $|K\bar{K}\rangle_s$  и  $|K\bar{K}\rangle_a$  соответственно симметричны и антисимметричны относительно перестановки зарядов. Множитель  $1/2$  нормирует состояния на 1.

3. Воспользовавшись свойствами  $(K)$  и  $(\bar{K})$  при  $G$ -преобразовании, показать, что

$$G|K\bar{K}\rangle_s = |K\bar{K}\rangle_s, \quad (8.10)$$

$$G|K\bar{K}\rangle_a = -|K\bar{K}\rangle_a. \quad (8.11)$$

Являются ли  $|K\bar{K}\rangle_s$  и  $|K\bar{K}\rangle_a$  собственными состояниями оператора зарядового сопряжения  $C$ ? Если да, то каковы их собственные значения?

4. Какие из этих двух состояний могут быть связаны с  $2\pi$ - и  $3\pi$ -состояниями (принимать во внимание лишь соображения  $G$ -инвариантности)?

Система  $K\bar{K}$  состоит из двух бозонов, и ее волновая функция должна быть в целом антисимметричной.

5. Используя это утверждение, показать, что для  $|K\bar{K}\rangle_s$  допустимы нулевое и четные значения относительного момента, а для  $|K\bar{K}\rangle_a$  — нечетные.

Читатель легко может проверить, что собственные значения  $G$  (см. уравнения (8.10) и (8.11)) удовлетворяют уравнению [40]:

$$G|K\bar{K}\rangle = (-1)^{l+l} |K\bar{K}\rangle. \quad (8.12)$$

Напомним, что соответствующее утверждение для системы  $N\bar{N}$  имело вид [3, 40] (см. уравнение (6.22)):

$$G|N\bar{N}\rangle = (-1)^{l+l+s} |N\bar{N}\rangle. \quad (8.13)$$

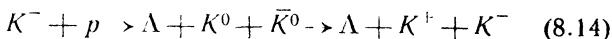
6. Выразить члены в (8.8) и (8.9), содержащие  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , через  $K_1^0$  и  $K_2^0$  (см. § 10), и показать, что  $K^0\bar{K}^0$ -компонента состояния  $|K\bar{K}\rangle_s$  может распадаться на  $2K_1^0$  или  $2K_2^0$ , в то время как  $K^0\bar{K}^0$ -компонента состояния  $|K\bar{K}\rangle_a$  может распадаться на  $(K_1^0 + K_2^0)$ .



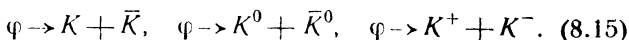
Таким образом, состояния  $|K\bar{K}\rangle_s$  и  $|K\bar{K}\rangle_a$  можно отличить по их распаду. При переходе в два короткоживущих мезона  $K_1^0$  каждый из них успевает распасться на  $2\pi$ . При переходе в  $(K_1^0 + K_2^0)$  ускользает от наблюдения долгоживущий мезон  $K_2^0$  и мы видим распад на  $2\pi$  лишь одного  $K_1^0$ .

**$\phi$ -мезон** (см. обзорную статью Далитца [49]).

Бертацца и др. [50], Шлейн и др. [51] и Конноли и др. [52] обнаружили в реакциях



пик в распределении для масс системы  $K\bar{K}$  вблизи  $1020 \text{ Мэв}$  с малой шириной,  $\leq 5 \text{ Мэв}$ . Этот пик считается резонансным состоянием, названным  $\phi$ -мезоном, с преимущественным способом распада, т. е.



Определенный методами Глэшоу [53] и Сакураи [54]. спин  $\phi$ -мезона равен 1 (см. § 17).

7. Предположив, что в распадах (8.15) четность сохраняется, показать, что четность  $\phi$ -мезона отрицательна. (Относительная внутренняя четность бозон-антибозонной пары положительна.)

8. Показать, что компоненты  $K^0\bar{K}^0$  и  $K^+K^-$  распада (8.15) должны принадлежать состоянию  $|K\bar{K}\rangle_a$  из уравнения (8.9).

Поскольку состояние  $|K\bar{K}\rangle_a$  обладает  $G = -1$ , то из сохранения  $G$ -четности в распаде (8.15) следует, что  $G = -1$  для  $\phi$ -мезона. Поэтому  $\phi$ -мезон не может взаимодействовать с системой  $2\pi$ , и распад  $\phi \rightarrow 2\pi$  запрещен [52]. По той же причине  $\phi$ -мезон не должен возбуждаться как резонанс в периферийных  $pN$ -столкновениях. Однако никакие квантовые числа не запрещают распада



И все же совершенно таинственным образом  $\phi$ -мезон предпочитает распадаться на  $K\bar{K}$  [49, 52], хотя фазовый объем  $3\pi$  гораздо больше.

9. Воспользовавшись уравнением (8.12), показать, что  $\phi$ -мезон — изоскалаляр.

Отсутствие заряженных продуктов распада  $\phi$ -мезона подтверждает это заключение. Итак, квантовые числа  $\phi$ -мезона  $J^{PC}$  суть  $1^{- -}$ .

В наших предыдущих рассуждениях требовалось заранее знать спин  $\phi$ -мезона. Однако двух фактов: а)  $\phi$  не распадается на заряженные  $K\bar{K}$ , б)  $\phi$  распадается на  $K_1^0 + K_2^0$  — достаточно, чтобы фиксировать спин (впрочем, неоднозначно) и четность  $\phi$ -мезона.

10. Зная собственные значения  $CP$  для  $K_1^0$  и  $K_2^0$  (см. § 10), показать, что  $\phi$ -мезон должен иметь  $CP = -1$ .

11. Предположить, что  $K\bar{K}$  в уравнении (8.15) имеет  $I = 0$  (отсутствие заряженных продуктов распада  $\phi$ -мезона свидетельствует в пользу этого предположения) и  $l = 0$ . Подвергнуть  $|K\bar{K}, I = 0, l = 0\rangle$  преобразованию  $CP$  и показать, что  $CP = +1$ . Тогда  $\phi$  не может иметь  $l = 0, I = 0$ .

12. Подвергнуть  $|K\bar{K}, I = 0, l = 1\rangle$  преобразованию  $CP$  и показать, что  $CP = -1$ .

Итак, спин  $\phi$ -мезона равен 1, если мы возьмем низшее из возможных его значений. Далее, сохранение четности в уравнении (8.15) приводит к отрицательной четности  $\phi$ -мезона.

Аргументы, приведенные в задачах 10 и 12, принадлежат Сакураи [55]. Эрвин и др. [56], а затем Александер и др. [57] обнаружили отчетливый пик в распределении масс  $K\bar{K}$ , опять-таки вблизи  $1020 \text{ Мэв}$ , в реакции

$$\pi^+ + p \rightarrow n + K^0 + \bar{K}^0. \quad (8.17)$$

Впоследствии мы увидим, что этот  $K^0\bar{K}^0$ -пик ничего общего не имеет с  $\phi$ -мезоном. Здесь мы будем считать, что у этого резонансного состояния  $I = 0$ , поскольку Эрвин и др. [56] не обнаружили никакого пика в распределении масс  $K^-K^0$  в реакции

$$\pi^+ + p \rightarrow p + K^- + K^0.$$

13. Показать, что если в реакции (3.17) работает механизм обмена одним  $\pi$ -мезоном, то состояние  $K\bar{K}$  должно иметь  $G = +1$ . Далее, показать, что если для него  $I = 0$ , то его момент  $l$  должен быть нулевым или четным.

Поскольку пик в распределении  $K\bar{K}$  появляется при 1020 Мэв очень близко к порогу  $2K$ , мы думаем, что это резонансное состояние имеет  $l = 0$ . Четность его будет положительной.

Приведенные рассуждения были основаны на модели обмена одним  $\pi$ -мезоном. В дальнейшем мы примем способ рассуждения, использованный в задачах 10 и 12 для случая  $\phi$ -мезона.

Эрвин и др. [56] обнаружили, что их резонансное  $K\bar{K}$ -состояние распадается на  $2K_1^0$ .

14. Показать, что это резонансное состояние должно иметь  $CP = +1$ . Предположив, что для него  $I = 0$ , и повторив рассуждения задач 11 и 12, показать, что оно должно иметь нулевой или четный момент.

На основе уравнения (8.12) последнее заключение приводит нас к выводу, что  $G = +1$ . Итак, квантовые числа

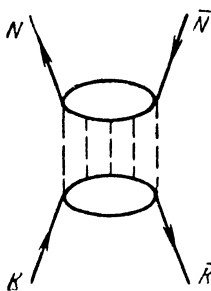


Рис. 6.

этого резонансного  $K\bar{K}$ -состояния суть  $0^{++}$ , если взять низшее значение  $l$ .

Наконец, обсудим правила отбора для аннигиляции  $K\bar{K}$  в  $N\bar{N}$ . Рассмотрим аннигиляцию, протекающую через промежуточное состояние  $n$   $\pi$ -мезонов (рис. 6):



Система  $K\bar{K}$ , так же как и  $N\bar{N}$ , может существовать в состояниях с изоспином  $I = 0$  или 1 (каждая частица имеет  $I = 1/2$ ).

Сначала рассмотрим случай  $n = 1$ . Поскольку  $\pi$ -мезон — изовектор ( $I = 1$ ), реакция если вообще и может протекать, то только в состоянии с  $I = 1$ .

15. Вспомнив, что  $K$ -мезоны — бозоны, показать, что вершина

$$K + \bar{K} \rightleftharpoons \pi$$

нарушает четность. С помощью аналогичных рассуждений показать, что вершина

$$N + \bar{N} \rightleftharpoons \pi$$

сохраняет четность.

Таким образом, процесс второго порядка в целом

$$K + \bar{K} \rightarrow \pi \rightarrow N + \bar{N}$$

идет с нарушениями четности. Следовательно, состояние с одним  $\pi$ -мезоном должно быть исключено.

Рассмотрим случай  $n = 2$  с  $I = 0$  и  $I = 1$ .

16. Зная  $G$ -четность системы  $2\pi$  и воспользовавшись уравнением (8.12), показать, что двумя низшими состояниями системы  $K\bar{K}$  при  $I = 0$ , допускающими взаимодействие с системой  $2\pi$ , являются  ${}^1S_0$  и  ${}^1D_2$ . Каковы два низшие состояния системы  $K\bar{K}$ , допускающие взаимодействие с системой  $2\pi$  при  $I = 0$ ?

17. Предположив  $G$ -инвариантность в состоянии с  $I = 0$  и воспользовавшись уравнением (8.13), показать, что  ${}^1S_0$ -состояние системы  $K\bar{K}$  может аннигилировать в  ${}^3P_0$ -состояние системы  $N\bar{N}$ , а  ${}^1D_2$ -состояние — в  ${}^3P_2$ - и  ${}^3F_2$ -состояния системы  $N\bar{N}$ . Найти соответствующие правила отбора при  $I = 1$ .

Хотя сохранение четности и запрещает состояние с одним  $\pi$ -мезоном, на высшие состояния с нечетным числом  $\pi$ -мезонов такого запрета нет.

18. Показать, что двумя низшими состояниями системы  $K\bar{K}$ , которые могут взаимодействовать с промежуточным состоянием  $3\pi$  с  $I = 0$ , являются  ${}^1P_1$  и  ${}^1F_3$ . Показать, что состояние  ${}^1P_1$  может аннигилировать в состояния  ${}^3S_1$  и  ${}^3D_1$  системы через промежуточное состояние  $3\pi$  с  $I = 0$ , а состояние  ${}^1F_3$  системы  $K\bar{K}$  может аннигилировать в состояния  ${}^3D_3$  и  ${}^3G_3$  системы  $N\bar{N}$  через то же самое промежуточное состояние.

## § 9. РАСПАД $K^+ \rightarrow 3\pi$ И СПИН $K$ -МЕЗОНА

Два канала распада  $K^+$ -мезона на  $3\pi$ :

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-,$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^+,$$

называются в литературе  $\tau$ - и  $\tau'$ -каналами соответственно. Этот распад — слабый, со скоростью порядка  $10^6 \text{ сек}^{-1}$ . С первого же взгляда видно, что изоспин в нем не сохраняется, поскольку изоспин  $K$ -мезона равен  $1/2$ , а  $\pi$ -мезона — единица. По-видимому, в этом распаде выполняется правило  $|\Delta I| = 1/2$  [58]. Читателю рекомендуются превосходные обзоры [47, 48, 59] литературы об этом распаде.

При распаде покоящегося  $K^+$ -мезона три  $\pi$ -мезона движутся в одной плоскости, так что их импульсы образуют

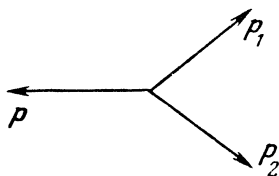


Рис. 7.

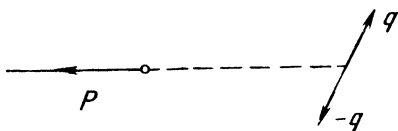


Рис. 8.

стороны треугольника (сумма их импульсов должна равняться нулю). Поэтому только два из трех импульсов независимы. Мы примем систему отсчета, в которой два *одинаковых*  $\pi$ -мезона находятся в системе их центра масс. Вследствие сохранения импульса центр масс этой пары движется с импульсом, равным по величине и противоположным по направлению импульсу третьего  $\pi$ -мезона.

Для примера рассмотрим случай  $\tau$ -распада. Пусть в системе, связанной с покоящимся  $K^+$ -мезоном, отрицательный  $\pi$ -мезон имеет импульс  $p$ , а два положительных — импульсы  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 7). Тогда

$$p_1 + p_2 = -p. \quad (9.1)$$

Вместо этого мы можем взять оба положительных  $\pi$ -мезона в системе их центра масс, с импульсами  $q$  и  $-q$ . Тогда для сохранения полного импульса пара должна двигаться с импульсом  $-p$  (рис. 8). После этого процесс

распада можно описывать двумя импульсами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ . Разность масс  $m_K - 3m_\pi$  имеет порядок  $\frac{1}{2}m_\pi$ , так что имеющаяся у  $\pi$ -мезонов кинетическая энергия мала, и импульс  $|\mathbf{p}|$  также мал.

1. Получить соотношение

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{2} (m_K^2 - 3m_\pi^2 - 2m_K \omega_p)^{1/2}, \quad (9.2)$$

где  $\omega_p = \sqrt{p^2 + m_\pi^2}$ , и затем показать, что максимальное значение  $|\mathbf{q}|$  меньше, чем  $m_\pi$ .

Поскольку и  $|\mathbf{p}|$ , и  $|\mathbf{q}|$  малы, мы можем трактовать  $\pi$ -мезоны нерелятивистски.

Пусть  $\mathbf{L}$  — момент третьего  $\pi$ -мезона, а  $\mathbf{l}$  — относительный момент двух одинаковых  $\pi$ -мезонов в системе их центра масс.

2. Показать, что  $\mathbf{l}$  может принимать только нулевое и четные значения.

3. Учитывая псевдоскалярность  $\pi$ -мезона, показать, что четность системы  $3\pi$  равна  $(-1)^{L+1}$ .

Поскольку, как известно, четность в слабых распадах не сохраняется, мы можем говорить о четности лишь *конечного* состояния, но не *исходного*  $K$ -мезона.

Сохранение момента приводит к заключению, что спин  $K$ -мезона  $\mathbf{J}$  может лежать только в пределах

$$|\mathbf{L} - \mathbf{l}| \leq |\mathbf{J}| \leq |\mathbf{L} + \mathbf{l}|. \quad (9.3)$$

Поэтому богатый набор комбинаций  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{l}$  приведет к одним и тем же  $\mathbf{J}$ .

4. Взяв  $\mathbf{J} = 0$  и четность конечного состояния  $3\pi$  отрицательной (мы будем обозначать этот набор квантовых чисел символом  $0^-$ ), выписать две низшие конфигурации  $(\mathbf{L}, \mathbf{l})$ . Сделать это и для состояний  $1^+$  и  $1^-$  [46].

Эффект центробежного барьера заставляет нас брать лишь несколько низших конфигураций  $(\mathbf{L}, \mathbf{l})$ . С повышением  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{l}$  центробежный барьер все значительнее затрудняет распад.

Вне некоторой области, которую мы будем называть «областью реакции»,  $\pi$ -мезоны можно считать свободными. Поскольку они медленные, то для радиальной части волновой функции мы можем записать уравнение Шредингера:

$$\left( \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \psi(\rho) = 0, \quad (9.4)$$

где  $\rho \equiv |\mathbf{p}|R$ , а  $R$  — радиус «области реакции». Как известно, решением уравнения (9.4) являются сферические функции Бесселя, а  $\psi(\rho)$  ведет себя при  $\rho \rightarrow 0$  как  $\rho^l$  [7].

Полную волновую функцию  $3\pi$  можно построить в виде

$$\begin{aligned} \psi_J^m = \sum_{L,l} \sum_{m_L, m_l} \psi_L^{m_L}(\rho) \psi_l^{m_l}(\rho) (L, m_L; l, m_l | J, m) \times \\ \times Y_L^{m_L}(\theta_\rho, \varphi_\rho) Y_l^{m_l}(\theta_q, \varphi_q). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Здесь  $(L, m_L; l, m_l | J, m)$  — коэффициенты Клебша — Гордана [30], а  $Y_l^{m_l}$  — обычные сферические гармоники. Выбрав направление вектора  $\mathbf{p}$  вдоль оси квантования, так что  $\cos \theta_\rho = +1$ ,  $m_L = 0$  и  $Y_L^{m_L} = 1$ , мы получим

$$\psi_J^m = \sum_{L,l} \psi_L^0 \psi_l^m (L, 0; l, m | J, m) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (9.6)$$

Вероятность обнаружить все три  $\pi$ -мезона вне центробежного барьера пропорциональна  $|\psi_J^m(R)|^2$ .

5. Зная поведение  $\psi_L$  и  $\psi_l$  при  $\rho \rightarrow 0$  (этот предел допустим, поскольку и  $|\mathbf{p}|$ , и  $|\mathbf{q}| < m_\pi$ , а  $R \leq m_\pi^{-1}$ ), показать, что вероятность прохождения через центробежный барьер непренебрежима лишь для низших конфигураций  $(L, l)$ .

6. Взяв самые низшие из допустимых конфигураций  $(L, l)$ , показать, что вероятность прохождения через барьер для состояния  $0^-$  не зависит от  $|\mathbf{p}|$ .

7. Показать, что вероятность прохождения для состояния  $1^-$  (взять снова самые низшие конфигурации  $(L, l)$ ) стремится к 0, когда  $|\mathbf{p}|$  стремится к 0 или к его максимальному значению. Показать, что для состояния  $1^+$  эта вероятность стремится к нулю, когда  $|\mathbf{p}|$  стремится к нулю, и что она стремится к конечной величине, когда  $|\mathbf{p}|$  стремится к своему максимальному значению.

Экспериментальные данные отдают предпочтение состоянию  $0^-$  [60—65]. Однако вероятность распада обнаруживает слабую зависимость от энергии [48]. Для объяснения этой зависимости пытались тем или иным способом учесть взаимодействие в конечном состоянии. Интересующимся читателям мы рекомендуем работы [66—72], из которых вытекает, что если объяснять энергетическую зависимость  $\pi\pi$ -взаимодействием  $S$ -волны в конечном состоянии, то возникает [66] определенное соотношение между длинами  $\pi\pi$ -рассеяния в состояниях с изоспинами 0 и 2 (обозначаемыми далее, как  $a_0$  и  $a_2$ ). Сведения об  $a_2$  [73], сопоставленные с упомянутым соотношением между двумя длинами рассеяния, приводят к заключению об отталкивании  $\pi$ -мезонов в состоянии с изоспином нуль. Однако имеются [74—76] серьезные свидетельства в пользу притяжения в этом состоянии \*). Но допустив притяжение для  $a_0$ , мы теряем надежду на объяснение энергетической зависимости вероятности распада одной лишь  $S$ -волной взаимодействия в конечном состоянии. Однако, приняв, что пара  $\pi$ -мезонов разного знака резонируют в  $\rho$ -мезонном состоянии, мы можем согласовать [69] экспериментальные данные об энергетической зависимости с экспериментальными оценками  $a_0$  и  $a_2$  [73—76].

## § 10. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ НЕЙТРАЛЬНОГО $K$ -МЕЗОНА

Обсуждение теории нейтрального  $K$ -мезона мы начнем с замечания о том, что в слабых взаимодействиях вместе с законом сохранения четности нарушается и инвариантность относительно зарядового сопряжения [77—81]. Нарушение этой инвариантности можно наблюдать в реакциях

$$\begin{aligned} \pi^\pm &\rightarrow \mu^\pm + \nu \\ \underline{\quad} &\rightarrow e^\pm + \nu + \tilde{\nu}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

графически представленных на рис. 9. Электроны испускаются преимущественно назад. Предположим теперь, что

---

\*) Справедливости ради следует отметить, что недавно идея о низкоэнергетическом отталкивании в состоянии с  $I=0$  возродилась (например, K r e p s et al., Phys. Rev. **133**, B1526, 1964). Эффект отталкивания заставил бы фазовый сдвиг пройти через  $-90^\circ$ , симулируя тем самым резонансное взаимодействие.



$\mu^-$ -распадный электрон  $e^-$  имеет спиральность  $-1$  (т. е. его спин направлен противоположно его скорости). Если применить ко всей реакции зарядовое сопряжение, так что  $\pi^- \rightarrow \pi^+$ ,  $\mu^- \rightarrow \mu^+$ ,  $e^- \rightarrow e^+$  и  $\nu \rightleftharpoons \tilde{\nu}$ , то, казалось бы, можно ожидать, что  $\mu^+$ -распадный позитрон  $e^+$  будет иметь ту же спиральность, что и  $\mu^-$ -распадный электрон  $e^-$ ,

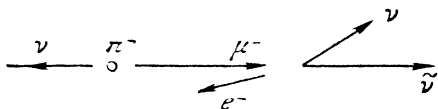


Рис. 9.

поскольку зарядовое сопряжение не затрагивает спины и импульсы. Однако эксперименты показывают [77—79], что  $e^+$  имеет спиральность  $+1$ , противоположную спиральности  $e^-$ . (По поводу общей проблемы пространственной и зарядовой четности читателю рекомендуются ссылки [4] и [46].)

Ландау [82] предположил, что хотя в слабых взаимодействиях пространственная и зарядовая четности в отдельности нарушаются, комбинированная инверсия  $CP$  (пространственное отражение, сопровождаемое зарядовым сопряжением) могла бы сохраниться. Когда пространственное отражение меняет знак импульса частицы, не меняя ее спина, спиральность меняется. Применив после этого зарядовое сопряжение, мы получим античастицу с противоположной спиральностью. Эксперименты [77—79] подтверждают эту гипотезу.

Нейтральный  $K$ -мезон — «странная» частица, распадающаяся путем слабого взаимодействия, но порождаемая сильным взаимодействием совместно с другой «странной» частицей. Понятие об этом «ассоциативном рождении» было введено Пайсом [83]. Медленный распад (с нарушением странности) и быстрое рождение (с сохранением странности) характерны для всех «странных» частиц. По поводу странных частиц мы рекомендуем читателю превосходные обзоры Далитца [47], Гелл-Манна и Розенфельда [48] и книгу Далитца [84] (они написаны еще до открытия несохранения четности).

Нейтральный  $K$ -мезон  $K^0$  отличается от своей античастицы  $\bar{K}^0$ . Квантовыми числами  $K^0$  являются  $I_3 = -\frac{1}{2}$ ,

$S = +1$ , а у  $\bar{K}^0$  они таковы:  $I_3 = +\frac{1}{2}$ ,  $S = -1$  ( $S$ —странность).

Согласно нашему правилу получения частицы из античастицы, для слабых распадов мы имеем

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle, \quad (10.2)$$

и наоборот. Ясно, что  $|K^0\rangle$  и  $|\bar{K}^0\rangle$  не являются собственными состояниями оператора  $CP$ .

1. Взяв

$$|K^0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |\bar{K}^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (10.3)$$

найти два собственных значения  $CP$ . Взяв подходящие линейные комбинации  $|K^0\rangle$  и  $|\bar{K}^0\rangle$ , построить два ортогональных собственных состояния  $CP$  (нормировать их на 1).

Обозначим состояния с  $CP = +1$  и  $-1$  через  $|K_1^0\rangle$  и  $|K_2^0\rangle$  соответственно. Такие смешанные состояния впервые были введены Гелл-Манном и Пайсом [85].

В распадах нейтрального  $K$ -мезона мы имеем дело с сохранением  $CP$  (откуда благодаря теореме  $TCP$  следует инвариантность относительно обращения времени). Поскольку  $K_1^0$  и  $K_2^0$ , а не  $K^0$  и  $\bar{K}^0$ , являются собственными состояниями  $CP$ , именно они должны обладать определенными временами жизни. Таким образом, при распадах о  $K_1^0$  и  $K_2^0$  говорят как о «частицах».

2. Исходя из инвариантности относительно  $CP$ , показать, что распад  $K_1^0$  на  $2\pi$  разрешен, а распад  $K_2^0$  на  $2\pi$  запрещен:

$$\left. \begin{array}{l} K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad \text{или} \quad \pi^0 + \pi^0 \quad (\text{разрешен}), \\ K_2^0 \not\rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad \text{или} \quad \pi^0 + \pi^0 \quad (\text{запрещен}). \end{array} \right\} \quad (10.4)$$

Исследуем теперь возможность распада

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0. \quad (10.5)$$

Предположим, что распадающийся  $K_1^0$  покоится. Для изучения кинематики распада можно выбрать следующую систему отсчета. Обозначим импульсы двух заряженных

$\pi$ -мезонов в системе их центра масс через  $q$  и  $-q$ . Их центр масс и нейтральный  $\pi$ -мезон должны тогда вылетать из области реакции в противоположных направлениях, обладая равными по величине и противоположными по знаку импульсами, чтобы полный импульс сохранился. (Сравни с кинематикой в предыдущем параграфе.) Пусть относительный момент заряженных  $\pi$ -мезонов в системе их центра масс равен  $l$ , а момент нейтрального  $\pi$ -мезона относительно центра масс пары равен  $L$ . Тогда волновая функция системы  $3\pi$  (с точностью до радиальной части) примет вид

$$\psi^{(3\pi)} \sim Y_L^{mL}(\theta_p, \varphi_p) Y_l^{ml}(\theta_q, \varphi_q). \quad (10.6)$$

Здесь  $p$  — импульс нейтрального  $\pi$ -мезона, а  $\theta_p$  — угол между ним и осью квантования.

3. Зная, что внутренняя четность  $\pi$ -мезона равна  $-1$ , найти собственное значение  $CP$  для системы  $3\pi$  (уравнение (10.6)), выразив его через  $L$  и  $l$ , и показать, что  $L$  может принимать лишь нечетные значения.

Ясное графическое представление операции  $CP$  для системы  $3\pi$  можно найти в [24].

4. Тем же методом, что и для  $K_1^0$ , показать, что распад  $K_2^0$  на  $3\pi$  разрешен в состоянии с  $L=0$ .

В итоге оказывается, что  $K_1^0$  может распадаться как на два, так и на три  $\pi$ -мезона. Распад на  $3\pi$  относительно подавлен из-за того, что: а)  $L \gg 1$ , поэтому оказывает свое действие центробежный барьер; б) в трехчастичном распаде фазовый объем  $\pi$ -мезонов меньше. Однако в случае распада  $K_2^0$  единственным возможным каналом является  $3\pi$ , поскольку  $CP$ -инвариантность строго запрещает распад на  $2\pi$ . Распад  $K_2^0$  на три  $\pi$ -мезона также подавлен относительно распада  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ , благодаря б). Скорость распада  $K_2^0 \rightarrow 3\pi$  намного больше, чем у распада  $K_1^0 \rightarrow 3\pi$ , поскольку в первом случае отсутствует центробежный барьер. Итак, обозначив скорости распадов через  $\Gamma$ , мы получим следующие неравенства:

$$\Gamma(K_1^0 \rightarrow 2\pi) \gg \Gamma(K_2^0 \rightarrow 3\pi) \gg \Gamma(K_1^0 \rightarrow 3\pi). \quad (10.7)$$

Посмотрим теперь, что случится с  $K^0$ -мезоном, порожденным совместно с другой «странной» частицей, например, в реакции ( $\Lambda$  имеет  $S = -1$ )

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda. \quad (10.8)$$

При  $t = 0$  волновой функцией  $K^0$ -мезона будет комбинация

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle). \quad (10.9)$$

Поведение пучка  $K^0$ -мезонов во времени определяется зависимостью от времени волновых функций  $K_1^0$  и  $K_2^0$ . Распад  $K_1^0$  и  $K_2^0$  будет протекать с характерными для них временами жизни,  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно. В волновые функции будут входить множителями затухающие со временем экспоненты. Если же трактовать  $K^0$ -мезон нерелятивистски, то распространение плоских волн  $|K_1^0(t)\rangle$  и  $|K_2^0(t)\rangle$  можно записать в виде  $e^{-im_1 t}$  и  $e^{-im_2 t}$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — массы  $K_1^0$  и  $K_2^0$  соответственно.

5. Выписать, следуя приведенным выше рассуждениям, волновую функцию  $|K^0(t)\rangle$ . Затем, воспользовавшись этой волновой функцией и представлением (10.9) для  $|K^0\rangle$ , вычислить компоненту  $K^0$ , оставшуюся в пучке к моменту времени  $t$  (эта компонента пропорциональна  $|\langle K^0 | K^0(t)\rangle|^2$ ), а также порожденную к этому времени компоненту  $\bar{K}^0$ .

Исчезновение  $K^0$  и регенерация  $\bar{K}^0$  происходят в нарушающем странность ( $\Delta S = 2$ ) переходе  $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ . Такой переход может идти посредством нарушающего странность слабого взаимодействия, например,

$$K^0 \xrightarrow{\Delta S=1} 2\pi \xrightarrow{\Delta S=1} \bar{K}^0.$$

Состояние  $|K^0(t)\rangle$  (уравнение (10.9) с соответствующей зависимостью от времени) будет теперь распадаться по различным каналам, например,  $\pi^- + e^+ + \nu$ ,  $\pi^+ + e^- + \nu$ ,  $2\pi$ ,  $3\pi$  и т. д., с временами распада, характерными для  $K_1^0$  и  $K_2^0$ . Обозначим амплитуду перехода  $K_1^0 \rightarrow \pi^- + e^+ + \nu$  (конечное состояние такого перехода мы будем называть

$\pi^- + \text{лептоны}$ ) через  $A$ , а через  $B$  — амплитуду перехода  $K_2^0 \rightarrow \pi^- + \text{лептоны}$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} |K_1^0\rangle &\rightarrow A|\pi^-, l\rangle + f, \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow B|\pi^-, l\rangle + g, \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

где  $f$  и  $g$  обозначают волновые функции прочих конечных состояний.

Чтобы найти скорость распада  $K^0 \rightarrow \pi + l$ , нам следует вычислить величины типа  $A^*A$  и  $B^*B$ . Прежде всего попытаемся понять, не вещественны ли  $A$  и  $B$ . Ответ можно получить следующим образом. Гамильтониан, отвечающий за распад  $K_1^0$ , обозначим через  $H_W$ . Тогда

$$A = \langle K_1^0 | H_W | \pi^-, l \rangle. \quad (10.11)$$

Поскольку обращение времени меняет местами начальное и конечное состояния (бра и кет), то после комплексного сопряжения  $A^*$  должно быть каким-то образом связано с  $A$ .

6. В предположении, что  $H_W$  инвариантен относительно обращения времени,

$$T^{-1}H_W T = H_W, \quad (10.12)$$

показать, что

$$A = A^T = A^*, \quad (10.13)$$

где  $A^T$  — это  $A$  после обращения времени.

Итак,  $A$  вещественна. Аналогичным методом можно показать, что  $B$  также вещественна.

7. Подставив выражения (10.10) в зависящую от времени волновую функцию  $|K^0(t)\rangle$ , вычислить скорость распада  $K^0$  на  $\pi^- + \text{лептоны}$  в момент времени  $t$ . Рассмотреть возможность измерения разности масс  $m_1 - m_2$ , основываясь на такой формуле.

Теорию проблемы измерения разности масс читатель может найти в статьях [86—90], а экспериментальные данные — в [91—94].

Следует отметить, что  $K_1^0$  и  $K_2^0$  не обладают определенной «странностью». Распад компоненты со странностью  $\pm 1$

(т. е. распад  $K^0$ ) содержит переход с  $\Delta S = \Delta Q$  (это распад  $K^0 \rightarrow \pi^- + l$ , причем разности  $\Delta S$  и  $\Delta Q$  берутся только для сильно взаимодействующих частиц,  $K$  и  $\pi$ ). Другая компонента,  $\bar{K}^0$ , имеет странность  $-1$ , и ее распад содержит переход с  $\Delta S = -\Delta Q$  (это распад  $\bar{K}^0 \rightarrow \pi^- + l$ ).

Обозначим амплитуду распада с  $\Delta S = \Delta Q$  через  $a$ , а амплитуду распада с  $\Delta S = -\Delta Q$  — через  $b$ . Тогда

$$|K^0\rangle \rightarrow a|\pi^-, l\rangle \quad \text{и} \quad |\bar{K}^0\rangle \rightarrow b|\pi^-, l\rangle. \quad (10.14)$$

8. Воспользовавшись уравнениями (10.10) и (10.14), выразить  $A$  и  $B$  через  $a$  и  $b$  и переписать ответ задачи 7 в терминах  $a$  и  $b$ .

Расчет, подобный приведенному выше, можно провести для распада  $K^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \tilde{\nu}$  (сокращенно  $\pi^+ +$  антилептоны). Обозначив  $e^- + \tilde{\nu}$  через  $\tilde{l}$ , мы можем по аналогии с (10.10) записать

$$\left. \begin{aligned} |K_1^0\rangle &\rightarrow \bar{A}|\pi^+, \tilde{l}\rangle + \bar{f}, \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow \bar{B}|\pi^+, \tilde{l}\rangle + \bar{g}, \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

где

$$\bar{A} = \langle K_1^0 | H_W | \pi^+, \tilde{l} \rangle; \quad (10.16)$$

такой же вид имеет и  $\bar{B}$ .

9. Воспользовавшись тем фактом, что два состояния,

$$|\pi^-, l\rangle + |\pi^+, \tilde{l}\rangle \quad \text{и} \quad |\pi^-, l\rangle - |\pi^+, \tilde{l}\rangle \quad (10.17)$$

обладают противоположными по знаку собственными значениями оператора  $CP$ , показать, что

$$A^2 = \bar{A}^2, \quad B^2 = \bar{B}^2, \quad AB = -\bar{A}\bar{B}. \quad (10.18)$$

10. Поступая так же, как с распадом  $K^0 \rightarrow \pi^- + l$ , получить выражения для скорости распада  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \tilde{l}$  через  $A$  и  $B$ , а также через  $a$  и  $b$ .

Выражения для скоростей распадов  $K^0 \rightarrow \pi^- + l$  и  $K^0 \rightarrow \pi^+ + \tilde{l}$  через величины  $a$  и  $b$  можно использовать для проверки правила  $\Delta Q = \Delta S$  в нарушающих странность лептонных распадах (если правило  $\Delta S = \Delta Q$  строго выполняется, то величина  $b$  должна равняться нулю). Соответствующие экспериментальные данные имеются [95—97].

## § 11. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУХЧАСТИЧНЫХ ФАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ

В этой главе мы будем иметь дело: 1) с вычислением интегралов по двухчастичному фазовому объему и 2) с полными расчетами некоторых процессов распада, в конечных состояниях которых присутствуют по две частицы.

### Интегралы по фазовому объему

*Распад  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$  (все частицы будем считать скалярными)*

Рассмотрим случай распада одного скалярного бозона на два скалярных бозона. Если считать, что ответственное за данный распад взаимодействие по своему характеру локально, то  $S$ -матрица \*) для такого распада будет иметь простую структуру (здесь мы считаем, что  $K_1^0$ -мезон распадается, будучи в состоянии покоя)

$$S(K_1^0 \rightarrow 2\pi) = i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \frac{C_K}{(8m_K \omega_1 \omega_2)^{1/2}}. \quad (11.1)$$

Четырехмерная  $\delta$ -функция выражает собой закон сохранения полной энергии-импульса системы,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — энергии двух пионов, а  $m_K$  — масса  $K$ -мезона. Множители  $\frac{1}{(2\omega)^{1/2}}$  появились здесь в результате определенной нормировки волновых функций (см. главы, посвященные квантованию бозе-полей в работах [6, 13, 25]), а константа  $C_K$  объединяет все другие численные множители, подобные  $(2\pi)^{3/2}$  и т. д.

Для случая, когда начальное и конечное состояния различны, определим матрицу  $T$  равенством

$$S = i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T. \quad (11.2)$$

Тогда для распада  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$   $T$ -матрица имеет вид

$$T(K_1^0 \rightarrow 2\pi) = C_K (8m_K \omega_1 \omega_2)^{-1/2}. \quad (11.3)$$

---

\*) Предполагается, что читатели знакомы с определением  $S$ -матрицы и ее разложением по теории возмущений. Соответствующую информацию можно получить из § 3, 4, 6 гл. 11 работы [13].

Элемент фазового объема для двухчастичного конечного состояния (см., например, гл. 14d работы [13]) равен

$$(2\pi)^4 d^3 p_1 d^3 p_2 \delta^4 (m_K - P_1 - P_2), \quad (11.4)$$

где  $p_i$  — импульс  $i$ -го  $\pi$ -мезона; четырехмерная  $\delta$ -функция выражает закон сохранения полной энергии-импульса;  $P_i$  — 4-импульс  $i$ -го  $\pi$ -мезона. Тогда скорость распада определяется так (см. § 4 гл. 14 работы [13] и приложение В работы [98]):

$$\Gamma = (2\pi)^4 \int \frac{|T|^2}{\eta} d^3 p_1 d^3 p_2 \delta^4 (m_K - P_1 - P_2), \quad (11.5)$$

где  $\eta$  — плотность начальных  $K$ -мезонов, равная [13]

$$\eta = (2\pi)^{-3} \quad (11.6)$$

(читатели без труда могут проверить справедливость этой формулы).

1. Подставить формулу (11.3) в (11.5) и выполнить одно из интегрирований по импульсу  $p$ . После этого придать полученному выражению форму интеграла

$$\int d^3 p \delta (m_K - E_f), \quad (11.7)$$

где  $E_f = \sum_i E_i$ .

2. Выполнив интегрирование по углу  $\theta$ , преобразовать

$$\int_{\theta} d^3 p \rightarrow \int p^2 \frac{d|p|}{dE} dE_f.$$

Рассчитать  $d|p|/dE_f$ , используя кинематику данного распада.

Интегрирование по  $E_f$  теперь тривиально.

3. Выразить постоянную распада  $\Gamma$  через константу  $C_K$  из формулы (11.3).

### Распад $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$

В этом распаде фермион присутствует как в начальном, так и в конечном состояниях. Нормировочный множитель волновой функции для фермионов, соответствующий множителю  $(2\omega)^{-1/2}$  для бозонов, равен  $\left(\frac{m}{E}\right)^{1/2}$  (см. гл. 14



работы [13], приложение В работы [98]). Однако если вычислять  $|T|^2$  и производить суммирование по спинам фермионов, то в дополнение к множителю  $m/E$ , следующему из выбора нормировки волновых функций, возникают проекционные операторы

$$\sum_{\text{спины}} U\bar{U} = \frac{\gamma_{\mu} p^{\mu} + m}{2m}$$

(см. любой учебник по квантовой теории поля и последнюю главу этой книги), которые также безразмерны. Мы будем рассматривать произведение множителя  $m/E$  и спиновых проекционных операторов в качестве безразмерной константы (см. гл. 1 из работы [98]). С учетом этого упрощения, вновь игнорируя «структуру» амплитуды распада,  $S$ -матрицу для распада  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  можно представить в виде

$$S(\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-) = i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \frac{C_{\Lambda}}{(2\omega)^{1/2}}, \quad (11.8)$$

где  $C_{\Lambda}$  — постоянная, так что  $S$ -матрица зависит явно только от энергии  $\pi$ -мезона  $\omega$ .

4. Исходя из вида  $S$ -матрицы, данного в выражении (11.8), выразить постоянную распада  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$  (частица  $\Lambda^0$  распадается в состоянии покоя) через константу  $C_{\Lambda}$ .

*Распад  $\pi \rightarrow e + \nu$*

В этом распаде начальная частица — бозон, в то время как обе частицы в конечном состоянии — фермионы.

5. Выразить постоянную  $\pi$ -распада через константу  $C_{\pi}$ , вводимую по аналогии с формулами (11.1) и (11.8) (нормировку волновой функции фермиона выберем точно так же, как и для  $\Lambda$ -распада).

Результаты вычислений интегралов по двухчастичному фазовому объему для начальных и конечных состояний различных типов были получены Джексоном [98]. Кроме того, для вычислений фазовых объемов рекомендуется ознакомиться с работой [24].

## Полные расчеты постоянных распадов, порождающих двухчастичные конечные состояния

Ниже мы будем производить полные, хотя в отдельных случаях, вероятно, грубые расчеты постоянных распадов, порождающих двухчастичные конечные состояния. В качестве первого примера рассмотрим распад гипотетической скалярной частицы с  $I = 0$  на два  $\pi$ -мезона. Этим процессом мог бы быть распад  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ , поскольку спин  $K$ -мезона равен нулю, но для  $K$ -мезона  $I = 1/2$ . Однако с учетом шпунрионного механизма (см. § 14, стр. 85) мы можем действовать так, как если бы  $K$ -мезон был бы изоскаляром ( $I = 0$ ), а изоспин в процессе распада сохранялся бы. Во всяком случае припишем гипотетической частице (назовем ее  $K$ ) спин нуль и  $I = 0$ , и рассмотрим распад

$$K \rightarrow 2\pi. \quad (11.9)$$

В качестве первого шага при вычислении постоянной этого распада следует выписать гамильтониан взаимодействия, которое индуцирует данный распад. Гамильтониан взаимодействия должен быть скаляром как в обычном, так и в изотопическом пространстве. Затем следует потребовать зарядовой независимости, поскольку мы не хотим, чтобы взаимодействие зависело от ориентации полей в изотопическом пространстве. Поскольку  $\pi$ -мезонное поле  $\varphi$  представляет собой вектор в изотопическом пространстве ( $I = 1$ ), то соответствующий скаляр можно образовать из двух  $\pi$ -мезонных полей, например, в виде  $\varphi^2$ . Поскольку в то же время  $K$ -мезонное поле  $\varphi_K$  является изоскаляром, то простейший гамильтониан для распада (11.9) можно записать в виде

$$h = g\varphi_K\varphi^2, \quad (11.10)$$

где  $g$  — константа связи.

6. Выразив  $\varphi^2$  через заряженные мезонные поля, показать, что этот гамильтониан можно переписать в виде

$$h = g\varphi_K(\varphi^+\varphi^- + \varphi^-\varphi^+ + \varphi^0\varphi^0). \quad (11.11)$$

Тем самым интенсивность взаимодействия  $\pi^+\pi^-$ - и  $\pi^0\pi^0$ -мезонов с  $K$ -мезоном оказывается одинаковой, поскольку соответствующие члены входят в формулу (11.11) с одной и той же константой связи.

Сначала вычислим  $S$ -матрицу для распада  $K \rightarrow 2\pi^0$ , которая с точностью до первого порядка теории возмущений имеет вид (см. приложение  $B$  в работе [98] или любую другую монографию по квантовой теории поля):

$$S = 1 - i \int h(\mathbf{r}, t) d^3r dt. \quad (11.12)$$

Тогда матричный элемент между двумя состояниями  $|f\rangle$  и  $|i\rangle$  равен

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int \langle f | h(\mathbf{r}, t) | i \rangle d^3r dt. \quad (11.13)$$

В рассматриваемом случае  $|i\rangle = |K\rangle$  и  $\langle f| = \langle 2\pi^0|$ .

7. Используя обычное разложение нейтрального скалярного поля  $\varphi_K$  по операторам рождения и уничтожения, а также используя перестановочные соотношения между этими операторами, показать, что

$$\langle 0 | \varphi_K | K \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E} (2\pi)^3} \exp \{-i(Et - \mathbf{kr})\}. \quad (11.14)$$

8. Аналогичным образом показать, что

$$\langle \pi | \varphi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega} (2\pi)^3} \exp \{i(\omega t - \mathbf{pr})\}. \quad (11.15)$$

9. Используя формулы (11.12) — (11.15) и определение  $T$ -матрицы (формула (11.2)), показать, просимметризовав по двум одинаковым  $\pi$ -мезонам, что

$$T(K \rightarrow 2\pi^0) = - \frac{2g}{(2\pi)^{3/2}} (8m_K \omega_1 \omega_2)^{-1/2}. \quad (11.16)$$

Затем вычислить (учитывая тождественность  $\pi$ -мезонов) постоянную данного распада, используя формулу (11.5).

До сих пор мы пользовались системой единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ . Поэтому, прежде чем пытаться получить численное значение  $\Gamma$  по известному значению  $g$ , и наоборот, необходимо выяснить истинную размерность  $\Gamma$ , введя подходящее число множителей  $\hbar$  и  $c$ .

Начнем с того, что установим размерность константы связи  $g$ . Это можно сделать, заметив, что величина  $\int \hbar d^3r$  должна иметь размерность энергии. Тем самым, знание размерности полей  $\varphi_K$  и  $\varphi$  позволило бы нам установить размерность  $g$ .

Чтобы определить размерность  $\varphi$ , заметим, что гамильтониан свободного  $\pi$ -мезонного поля содержит член  $m_\pi^2 \varphi^2$ , тогда, с точки зрения размерности, имеет место следующее равенство:

$$m_\pi^2 \int \varphi^2 d^3r = E. \quad (11.17)$$

Энергия имеет размерность массы ( $M$ ).

10. Показать, что

$$[\varphi] = M. \quad (11.18)$$

Поскольку  $\varphi_K$  — скалярное поле, то последнее утверждение должно быть справедливо и для  $\varphi_K$ , так что и

$$[\varphi_K] = M. \quad (11.19)$$

11. Используя формулы (11.18) и (11.19), показать, что

$$[g] = M. \quad (11.20)$$

Подставляя размерность  $g$  в полученное выражение для  $\Gamma$ , показать, что

$$[\Gamma] = M. \quad (11.21)$$

Постоянная распада  $\Gamma$  должна, однако, иметь размерность  $\text{сек}^{-1}$ .

12. Вставляя должное число констант  $\hbar$  и  $c$ , добиться того, чтобы было

$$[\Gamma] = \text{сек}^{-1}.$$

Поскольку  $g$  не безразмерна, то безразмерную константу связи можно ввести равенством

$$m_K^{-1} g = f. \quad (11.22)$$

13. Получить численное значение константы  $f$  пользуясь следующими данными:

$$\left. \begin{aligned} m_K &\approx 500 \text{ Мэв}, \quad m_\pi = 140 \text{ Мэв}, \\ \tau &= \Gamma^{-1} = 10^{-11} \text{ сек}. \end{aligned} \right\} \quad (11.23)$$

Вернемся теперь ко второму каналу распада  $K$ -мезона, т. е. к реакции

$$K \rightarrow \pi^+ + \pi^-. \quad (11.24)$$

Поскольку наш  $K$ -мезон имеет  $I=0$ , то состояние  $\pi^+\pi^-$  должно быть симметричным относительно перестановки зарядов.

14. Показать, что  $T$ -матрица для распада  $K \rightarrow \pi^+\pi^-$  (соответственным образом симметризованного) равна  $T$ -матрице для распада  $K \rightarrow 2\pi^0$ .

15. Установить, каково отношение интенсивностей распадов

$$\frac{K \rightarrow 2\pi^0}{K \rightarrow \pi^+\pi^-} ?$$

Распад  $\Lambda_0 \rightarrow p + \pi^-$

Чтобы не усложнять изложение, запишем плотность гамильтониана для распада  $\Lambda_0 \rightarrow p + \pi^-$  в виде

$$h = g_\Lambda \bar{\psi}_p \psi_\Lambda \varphi^-. \quad (11.25)$$

Здесь оператор  $\psi_p$  порождает протон, оператор  $\psi_\Lambda$  уничтожает  $\Lambda$ -гиперон, а оператор  $\varphi^-$  порождает  $\pi^-$ -мезон. Эта плотность гамильтониана должна быть лишь составной частью полной плотности гамильтониана, которая индуцирует также распад  $\Lambda_0 \rightarrow n + \pi^0$ .

16. Используя разложение оператора  $\psi_\Lambda$  по операторам рождения и уничтожения (см. гл. 8 работы [13], гл. 8 работы [6]) и соотношения антикоммутиации между этими операторами, показать, что для покоящегося  $\Lambda$ -гиперона будет

$$\langle 0 | \psi_\Lambda | \Lambda \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_{p=0} \exp(-im_\Lambda t). \quad (11.26)$$

Поскольку возможная кинетическая энергия очень мала ( $m_\Lambda - m_p - m_\pi \approx 38$  Мэв), то протон можно рассматривать нерелятивистски.

17. Показать, что

$$\langle p | \psi_p | 0 \rangle \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{U}_{p=0} \exp(iEt - \mathbf{p}\mathbf{r}). \quad (11.27)$$

Волновая функция  $\pi$ -мезона нам уже известна (см. (11.15)).

18. Используя полученную выше информацию, рассчитать амплитуду распада

$$\int \langle p\pi | h(\mathbf{r}, t) | \Lambda \rangle d^3r dt.$$

19. Получить выражение для  $|T|^2$ , используя определение матрицы  $T$  (см. (11.2)). Произвести суммирование по спинам протона и  $\Lambda$ -гиперона, не обращаясь к спиновым проекционным операторам. Чтобы это сделать, напомним, что как для протона, так и для  $\Lambda$ -гиперона имеют место соотношения:

$$U \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для спина вверх,}$$

$$U \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ для спина вниз.}$$

В заключение усреднить по значениям спина  $\Lambda$ -гиперона.

20. Рассчитать постоянную этого распада.

21. Показать, что константа связи  $g_\Lambda$  безразмерна.

22. Учитывая, что время жизни  $\Lambda$ -гиперона приблизительно равно  $2,5 \cdot 10^{-10}$  сек, найти величину константы  $g_\Lambda$  (необходимо включить несколько множителей  $\hbar$  и  $c$ , чтобы получить правильную размерность величины  $\Gamma$ ).

## § 12. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ ФАЗОВЫХ ОБМЕНОВ

*Распад  $K \rightarrow 3\pi$*

Все частицы, участвующие в этом распаде, являются бозонами со спином нуль. Поскольку нас будет интересовать только вычисление фазовых объемов, мы отбросим все усложнения, обусловленные зарядами. Если считать,

что взаимодействие, ответственное за распад, является локальным (с чрезвычайно коротким радиусом действия), то  $S$ -матрица для распада покоящегося  $K$ -мезона будет иметь простую структуру (следует отметить, что такая форма  $S$ -матрицы может быть получена из гамильтониана взаимодействия вида  $\varphi_K \varphi \varphi^2$ , где  $\varphi$  —  $\pi$ -мезонное поле (т. е. изовектор), а  $\varphi_K$  — изовекторное поле, образованное из  $K$ -мезонного и шпурионного полей (см. понятие о шпурионе в § 14, стр. 85):

$$S(K \rightarrow 3\pi) = i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) C (16m_K \omega_1 \omega_2 \omega_3)^{-1/2}. \quad (12.1)$$

Здесь  $C$  — постоянная, множители  $(2\omega)^{-1/2}$  появляются вследствие используемой нами нормировки волновых функций свободных частиц (см. § 11, стр. 69), а все численные множители типа  $(2\pi)^{-3/2}$  и т. д. включены в постоянную  $C$ .

$T$ -матрица имеет вид (см. формулу (11.2) из § 11):

$$T(K \rightarrow 3\pi) = C (16m_K \omega_1 \omega_2 \omega_3)^{-1/2}. \quad (12.2)$$

Элемент фазового объема для трехчастичного конечного состояния равен

$$(2\pi)^4 d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta\left(m_K - \sum_i P_i\right), \quad (12.3)$$

где  $p_i$  — импульс  $i$ -го  $\pi$ -мезона; четырехмерная  $\delta$ -функция обеспечивает сохранение полной энергии-импульса, а  $P_i$  является 4-импульсом  $i$ -го  $\pi$ -мезона. Постоянная распада теперь запишется в виде [13]

$$\Gamma = (2\pi)^4 \int \frac{|T|^2}{\eta} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta\left(m_K - \sum_i P_i\right), \quad (12.4)$$

где  $\eta = (2\pi)^{-3}$  — плотность первоначальных  $K$ -мезонов.

Вычисление интеграла в формуле (12.4) производится следующим образом.

1. Подставить выражение (12.2) в формулу (12.4) и произвести интегрирование по  $p_3$ , воспользовавшись трехмерной  $\delta$ -функцией, обеспечивающей сохранение импульса.

После этого останется интегрирование по  $p_1$  и  $p_2$ , ограниченное  $\delta$ -функцией, обеспечивающей сохранение энер-

гии. Далее, в силу того, что  $\omega_3^2 = m_\pi^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2$ , энергия  $\omega_3$  будет зависеть от угла между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ .

2. Переписать член  $\frac{1}{2\omega} \delta(x - \omega)$  в виде  $\delta(x^2 - \omega^2)$  (относительно свойств  $\delta$ -функции см. книгу Шиффа [7]). Аргумент полученной  $\delta$ -функции будет теперь включать косинус угла между векторами  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , так что можно произвести интегрирование по углу  $\theta$  (для выполнения этого интегрирования надо воспользоваться свойствами  $\delta$ -функции, приведенными в книге Шиффа [7]).

После проведенных выше интегрирований рассматриваемый интеграл сведется (с точностью до постоянного множителя) к виду

$$\int \int d\omega_1 d\omega_2. \quad (12.5)$$

Интегрирование по  $\omega_2$  дает энергетический спектр частицы 1 (т. е. частицы с энергией  $\omega_1$ ), и наоборот. В рассматриваемом нами частном случае (т. е. в случае распада  $K \rightarrow 3\pi$ ),  $\pi$ -мезоны можно считать нерелятивистскими, поскольку их допустимая полная кинетическая энергия мала ( $m_K - 3m_\pi \approx 75$  Мэв). Итак, обозначая кинетическую энергию  $\pi$ -мезонов  $p^2/2m_\pi$  через  $T$ , получаем (для  $i$ -го  $\pi$ -мезона) соотношение

$$\omega_i = m_\pi + T_i. \quad (12.6)$$

Интеграл (12.5) можно также записать в виде

$$I = \int \int d\omega_1 d\omega_2 = \int \int dT_1 dT_2. \quad (12.7)$$

Введем следующее обозначение:

$$Q = m_K - 3m_\pi = \sum_i T_i \approx 75 \text{ Мэв}. \quad (12.8)$$

3. Изучив кинематику обсуждаемого распада, показать, что если два  $\pi$ -мезона разлетаются в противоположные стороны, в то время как третий остается неподвижным, то кинетическая энергия, уносимая каждым из двух  $\pi$ -мезонов, приблизительно равна 38 Мэв.

4. Показать, что если два  $\pi$ -мезона вылетают в одном и том же направлении с одинаковыми



импульсами, а третий — в противоположном направлении (рис. 10), то максимальная кинетическая энергия, уносимая одним  $\pi$ -мезоном, приблизительно равна 50 Мэв.

Вернемся к вычислению интеграла  $I$  в формуле (12.7). Нам необходимо найти максимальное и минимальное значения  $T_2$  (если сначала будет выполняться интегрирование по  $T_2$ ) для любого фиксированного значения  $T_1$ .

5. Используя закон сохранения трехмерного импульса, показать, что

$$(T_2)_{\max}^{\min} = T_1 + T_3 \pm 2\sqrt{T_1 T_3}. \quad (12.9)$$

Используя закон сохранения энергии, показать, что

$$(T_2)_{\max}^{\min} = \frac{1}{2} [Q - T_1 \pm \sqrt{(2Q - 3T_1)T_1}]. \quad (12.10)$$

Из формулы (12.10) нетрудно видеть, что когда  $T_1 = Q/2$  ( $\approx 38$  Мэв), то  $(T_2)_{\min} = 0$ , как и следовало ожидать, поскольку  $\pi$ -мезоны 1 и 3 уносят весь трехмерный импульс. Точно так же, если  $T_1 = Q/2$ , то  $(T_2)_{\max} = Q/2$ , что соответствует случаю, когда  $\pi$ -мезон 3 покоится. На-

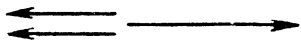


Рис. 10.

конец, когда  $T_1 = \frac{2}{3}Q$  ( $\approx 50$  Мэв), то оказывается, что  $T_2$  имеет только одно значение,  $\approx 12,5$  Мэв, что соответствует ситуации, изображенной на рис. 10.

6. Используя предельные значения  $T_2$ , определяемые формулой (12.10), показать, что энергетический спектр  $\pi$ -мезона 1 имеет вид

$$P(T_1) \sim \sqrt{(2Q - 3T_1)T_1}. \quad (12.11)$$

Вычертить общую форму этого спектра, даваемого формулой (12.11).

Форма (12.11) энергетического спектра  $\pi$ -мезона (нормированного должным образом, ведь в формуле (12.5) мы опустили все константы) была нами получена в предполо-

жении, что матричный элемент рассматриваемого распада с точностью до нормировочных множителей  $1/2\omega$  является постоянной величиной (не имеющей структуры). Обнаружение на эксперименте любых отклонений от статистической формы кривой (12.11) означало бы, что этот матричный элемент обладает «структурой» (зависит от энергии в конечном состоянии). На опыте [47, 48, 61] были обнаружены небольшие отклонения от расчетной формы спектра (12.11) (см. § 9, стр. 58).

Интеграл по трехчастичному фазовому объему, обсуждавшийся здесь, рассматривается также в приложении к обзорной статье Гелл-Манна и Розенфельда [48]. Различные типы интегралов по фазовому объему трех частиц рассмотрены в приложении С работы [98] и в работе [24].

Если бы нас интересовала величина константы связи, то, зная постоянную распада, мы должны были бы произвести заключительное интегрирование по спектру (12.11) энергии  $T_1$ . Интегрирование следует производить в пределах от 0 до  $2/3Q$  и оно может быть выполнено в замкнутой форме.

Обратимся теперь к вычислению интегралов по фазовому объему для релятивистских частиц. Примерами распадов с такими частицами являются распады  $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu} + \gamma$  (так называемое внутреннее тормозное излучение) и  $\mu \rightarrow \nu + \tilde{\nu} + e$ . Здесь в конечном состоянии все частицы ультрарелятивистские, и мы примем приближение  $m_e = 0$ . Массу нейтрино мы будем считать строго равной нулю, независимо от того, является ли оно мюонным или электронным.

### *Распад $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu} + \gamma$*

Для полного расчета энергетического спектра электрона или фотона следовало бы выбрать форму гамильтониана взаимодействия, ответственного за этот распад. Такие полные расчеты обсуждаемого распада существуют [99—101]. Здесь мы будем интересоваться только вычислением интеграла по фазовому объему и поэтому не будем заниматься таким рискованным делом, как выписывание гамильтониана взаимодействия, ответственного за этот распад.

7. Предполагая, что амплитуда распада для бозонов и фермионов является постоянной (с точностью

до нормировочных множителей), показать (опираясь на данные, использованные при рассмотрении нормировки волновой функции фермиона в предыдущем параграфе), что постоянная распада  $\Gamma$  для реакции  $\pi \rightarrow e + \bar{\nu} + \gamma$  имеет вид

$$\Gamma \sim \int \frac{1}{4m_\pi E_2} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta\left(m - \sum_i P_i\right), \quad (12.12)$$

где считается, что распадающийся  $\pi$ -мезон покоился,  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  — 4-импульсы электрона, фотона и нейтрино соответственно, а  $E_2$  — энергия фотона.

Рассчитать энергетический спектр электрона следующим образом.

8. Сначала выполнить интегрирование по  $p_2$ . Тот факт, что интегрирование следует выполнять по  $p_2$ , а не по  $p_3$ , обусловлен наличием в знаменателе (12.12) множителя  $E_2$ . Преимущество такого способа действий вскоре станет очевидным. Затем, следуя процедуре, использованной при обсуждении распада  $K \rightarrow 3\pi$ , показать, что

$$\Gamma \sim \int \int E_1 E_3 dE_1 dE_3. \quad (12.13)$$

Отсюда энергетический спектр электрона можно получить, проинтегрировав (12.13) по  $E_3$ .

9. Показать, что если фотон не уносит никакой энергии (мягкие фотоны), то электрон уносит энергию  $m_\pi/2$ . Показать также, что электрон уносит то же количество энергии, если фотон и нейтрино излучаются в одном и том же направлении с равными импульсами (см. рис. 10).

10. Используя законы сохранения энергии-импульса, показать, что при любом выборе  $E_1$  предельные значения  $E_3$  равны:

$$(E_3)_{\max} = \frac{m_\pi}{2}, \quad (E_3)_{\min} = \frac{1}{2} (m_\pi - 2E_1). \quad (12.14)$$

11. Используя эти предельные значения  $E_3$ , получить выражение для энергетического спектра электрона.

Преимущество первоначального интегрирования по  $p_2$  состояло в том, что возникающее выражение  $\frac{1}{E_2} \delta(X - E_2)$  можно было представить в виде  $\delta(X^2 - E_2^2)$ . Это позволяет осуществить интегрирование по углу  $\theta$  почти тривиально.

12. Повторить весь расчет, первоначально проинтегрировав по  $p_3$ . Затем выполнить интегрирование по углу  $\theta$ , используя следующее тождество [7]:

$$\delta(X - E) = \frac{2E}{2E} \delta(X - E) = \frac{2X}{2E} \delta(X - E) = 2X \delta(X^2 - E^2) \quad (12.15)$$

для  $X > 0, E > 0$ .

Третий переход в формуле (12.15) является следствием тождества  $y \delta(y) = 0$ .

13. Показать, что теперь вместо формулы (12.13) получится выражение

$$\Gamma \sim \int \int (m_\pi - E_1 - E_2) E_1 dE_1 dE_2. \quad (12.16)$$

14. Выполнив интегрирование по  $E_2$  в допустимых пределах, показать, что полученный энергетический спектр электрона совпадает с соответствующим спектром из задачи 11.

15. Выполнив в формуле (12.16) интегрирование по  $E_1$  в допустимых пределах, получить выражение для энергетического спектра фотона.

*Распад  $\mu \rightarrow \nu + \tilde{\nu} + e$*

Здесь все участвующие частицы оказываются фермионами. Поскольку все частицы в конечном состоянии ультррелятивистские, предположим, что все они безмассовые.

16. Исходя из принятой ранее нормировки волновых функций фермионов, показать, что постоянная распада  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma \sim \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 \delta\left(m_\mu - \sum_i P_i\right). \quad (12.17)$$

Здесь  $P_1$  — импульс электрона, а  $P_2$  и  $P_3$  — 4-импульсы двух нейтрино.

17. Выполнив интегрирование по  $p_3$  и используя тождество (12.15), показать, что

$$\Gamma \sim \int \int E_1 E_2 (m_\mu - E_1 - E_2) dE_1 dE_2. \quad (12.18)$$

Кинематика этого распада полностью аналогична кинематике распада  $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu} + \gamma$  (с заменой  $m_\pi \rightarrow m_\mu$ ), поскольку все частицы в конечном состоянии в обоих распадах считаются безмассовыми. Значит, предельные значения  $E_2$  можно получить из формулы (12.14), заменив  $m_\pi$  на  $m_\mu$ .

18. Выполнив интегрирование по  $E_2$ , показать, что энергетический спектр электрона имеет вид (см. стр. 387 книги [98], стр. 32 работы [24])

$$P(E_1) \sim E_1^2 \left( 1 - 2E_1 + \frac{2}{3} E_1^2 \right). \quad (12.19)$$

Наш результат, как и предполагалось, является несколько грубым, поскольку мы сделали ряд упрощающих предположений. Полное вычисление энергетического спектра электрона было осуществлено Мишелем [102]. См. также работы Джексона [98] и Треймана [103].

### § 13. ЗАРЯДОВАЯ НЕЗАВИСИМОСТЬ И НЕКОТОРЫЕ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПАДА

Гипотеза зарядовой независимости в ядерной физике гласит, что силы, действующие между частицами в парах  $p$ - $p$ ,  $n$ - $p$  и  $n$ - $n$ , равны при условии, что соответствующие нуклоны находятся в состояниях с одинаковой пространственной и спиновой симметрией. Это, например, означает, что силы в парах  $p$ - $p$ ,  $n$ - $p$  и  $n$ - $n$  равны в синглетном  $S$ -состоянии [29, 104, 105]. Принцип зарядовой независимости выполняется строго только в отсутствие электромагнитных взаимодействий, которые позволяют отличать протон от нейтрона. Кеммер [106, 107] (и Фрелих с соавторами [108]) распространил эту идею на пион-нуклонное взаимодействие, которое во втором порядке

теории возмущений порождает силы, действующие между двумя нуклонами (сведения об экспериментах по зарядовой независимости читатели могут найти в обзоре Бэрчема [109]). Иными словами, принцип зарядовой независимости гласит, что сильные взаимодействия инвариантны относительно вращений в изотопическом пространстве и поэтому не зависят от компонент изоспина, хотя они и зависят от полного изотопического спина. Предположив, что принцип зарядовой независимости применим к сильно взаимодействующим частицам и их сильным взаимодействиям, из него можно вывести ряд следствий, не обращаясь к детальной динамике.

Рассмотрим случай пион-нуклонного рассеяния. В этом случае полный изоспин  $I$  может равняться  $3/2$  или  $1/2$ . Тем самым  $\pi N$ -рассеяние определяется при каждом значении полного момента двумя амплитудами рассеяния. Обозначим волновую функцию нуклона в изотопическом пространстве через  $N_{1/2}^{I_3}$ , где значение  $I_3 = 1/2$  соответствует протону  $p$ , а  $I_3 = -1/2$  — нейтрону  $n$ . Волновую функцию  $\pi$ -мезона обозначим через  $\pi_1^{I_3}$ , где  $I_3 = +1, 0, -1$ , соответственно для  $\pi^+$ ,  $\pi^0$ - и  $\pi^-$ -мезонов. Волновая функция системы  $\pi N$  с заданными значениями  $I$  и  $I_3$  может быть образована в виде

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I_3', I_3''} \left( \frac{1}{2}, I_3'; 1, I_3'' | I, I_3 \right) N_{1/2}^{I_3'} \pi_1^{I_3''}. \quad (13.1)$$

1. Используя коэффициенты Клебша — Гордана, приведенные в приложении А книги Блатта и Вайскопфа [31], выписать шесть волновых функций  $|I, I_3\rangle$ , из которых четыре соответствуют изоспину  $I = 3/2$  и две — изоспину  $I = 1/2$ .

2. Используя результаты задачи 1, выразить состояния  $|\pi^+ p\rangle$  и  $|\pi^0 p\rangle$  через состояния, введенные выше.

Результаты задачи 2 должны показать, что упругое рассеяние  $\pi^+ p$  полностью определяется одной зарядовой амплитудой  $A(3/2)$  вида

$$A(3/2) = \frac{\exp\{(2i\delta) - 1\}}{2ik}. \quad (13.2)$$

В то же время упругое рассеяние  $\pi^- p$  определяется комбинацией зарядовых амплитуд  $A(3/2)$  и  $A(1/2)$ . Эти

амплитуды представляют указанное рассеяние так:

$$|3/2, 3/2\rangle \xrightarrow{\text{после рассеяния}} A(3/2) |3/2, 3/2\rangle. \quad (13.3)$$

3. Полностью пренебрегая рассеянием в состоянии с  $I = 1/2$ , показать, что сечения упругого рассеяния  $\pi^+ p$  и  $\pi^- p$  при любой заданной энергии относятся друг к другу как

$$\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)} = 9. \quad (13.4)$$

Если же  $A(3/2) \approx A(1/2)$ , то показать, что

$$\frac{\sigma(\pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p)} = 1. \quad (13.5)$$

Читатель должен хорошо уяснить себе следующее. Поскольку массы частиц, участвующих в двух процессах, которые мы сравниваем, почти одинаковы, то отношения сечений рассеяния будут зависеть только от квадратов соответствующих амплитуд, ибо фазовые множители при образовании таких отношений сокращаются.

Рассмотрим теперь следующие реакции:



Изотопические спины здесь таковы:

реакция (13.6):

$$\left. \begin{array}{l} p + d \rightarrow \text{He}^3 + \pi^0, \\ I \quad \frac{1}{2} + 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 1, \\ I_3 \quad \frac{1}{2} + 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 0, \end{array} \right\} \quad (13.8)$$

реакция (13.7):

$$\left. \begin{array}{l} p + d \rightarrow \text{H}^3 + \pi^+, \\ I \quad \frac{1}{2} + 0 \rightarrow \frac{1}{2} + 1, \\ I_3 \quad \frac{1}{2} + 0 \rightarrow -\frac{1}{2} + 1. \end{array} \right\} \quad (13.9)$$

Для ядра  $\text{He}^3$ , представимого как  $(p + d)$ , будет  $I = \frac{1}{2}$ ,  $I_3 = \frac{1}{2}$ , тогда как для ядра  $\text{H}^3$ , представимого как  $(n + d)$ , будет  $I = \frac{1}{2}$ ,  $I_3 = -\frac{1}{2}$ . Обозначим изотопическую волновую функцию ядер  $\text{He}^3$  и  $\text{H}^3$  общим символом  $U_{1/2}^I$ . Тогда эта ситуация будет напоминать случай нуклонов с заменами  $\text{He} \rightarrow p$  и  $\text{H}^3 \rightarrow n$ .

4. Записать состояния  $|\text{He}^3\pi^0\rangle$  и  $|\text{H}^3\pi^+\rangle$ , используя результаты задачи 2.

Поскольку состояние  $|pd\rangle$  является чистым состоянием с  $I = 1/2$ ,  $I_3 = 1/2$ , то не будет никаких переходов в состояние с  $I = 3/2$ .

5. Показать, что сечения рассеяния  $p + d \rightarrow \text{He}^3 + \pi^0$  и  $p + d \rightarrow \text{H}^3 + \pi^+$  удовлетворяют соотношению

$$\frac{\sigma(pd \rightarrow \text{He}^3\pi^0)}{\sigma(pd \rightarrow \text{H}^3\pi)} = \frac{1}{2}. \quad (13.10)$$

Выписанное отношение сечений было измерено на опыте Бандтелем и сотрудниками [110]. Это измерение подтверждает принцип зарядовой независимости.

Рассмотрим теперь следующие реакции:

$$p + p \rightarrow d + \pi^+, \quad (13.11)$$

$$n + p \rightarrow d + \pi^0. \quad (13.12)$$

В реакции (13.11) как начальное, так и конечное состояния являются чистыми состояниями с  $I = 1$ ,  $I_3 = 1$ . В то же время в реакции (13.12) начальное состояние содержит смесь состояний с  $I = 0$ ,  $I_3 = 0$  и с  $I = 1$ ,  $I_3 = 0$ , а конечное состояние имеет  $I = 1$ ,  $I_3 = 0$ .

6. Выразить три состояния  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$  и  $|0, 0\rangle$  через состояния  $|p\rangle$  и  $|n\rangle$ . Затем выразить состояние  $|np\rangle$  через  $|1, 0\rangle$  и  $|0, 0\rangle$  и, наконец, показать, что

$$\frac{\sigma(pp \rightarrow d\pi^+)}{\sigma(np \rightarrow d\pi^0)} = 2. \quad (13.13)$$

Эксперименты Гильдебранда [111] и Шлетера [112, 113] и здесь подтверждают гипотезу зарядовой независимости.



7. Следуя применявшейся выше процедуре, показать, что [114]

$$\frac{\sigma(K^- + \text{He}^4 \rightarrow \Sigma^0 + \text{He}^3)}{\sigma(K^- + \text{He}^4 \rightarrow \Sigma^- + \text{He}^3)} = \frac{1}{2}. \quad (13.14)$$

Изотопические квантовые числа для  $K$ -мезона равны  $I = 1/2$ ,  $I_3 = -1/2$  (а странность  $S = -1$ ). Ядро  $\text{He}^4$  — изоскаляр, а  $\Sigma$ -гиперон — изовектор.

Относительно применения принципа зарядовой независимости к странным частицам см. работу Фельдмана [115].

### Изотопический спин $K^*$ -резонанса

Как известно,  $K^*$ -резонанс [116, 49] (масса  $888 \text{ Мэв}$ ) распадается преимущественно на  $\pi + K$ . Тем самым, в силу закона сохранения изотопического спина  $K^*$ -резонанс может иметь либо  $I = 3/2$ , либо  $I = 1/2$ . Выбор между этими двумя значениями можно сделать, измерив отношение сечений

$$\frac{\sigma(K^{*-} \rightarrow \bar{K} + \pi^-)}{\sigma(K^{*-} \rightarrow \bar{K} + \pi^0)}. \quad (13.15)$$

Из эксперимента известно, что это отношение равно  $1,4 \pm 0,4$  [34, 49, 116].

8. Используя гипотезу зарядовой независимости, найти отношение сечений (13.15), сначала предположив, что  $K^*$ -резонанс имеет  $I = 3/2$ ,  $I_3 = -1/2$ , а затем предположив, что он имеет  $I = 1/2$ ,  $I_3 = -1/2$  ( $\bar{K}^0$ -мезон имеет  $I = 1/2$ ,  $I_3 = 1/2$ ). Показать, что выбор значения  $I = 1/2$  для  $K^*$ -резонанса лучше согласуется с экспериментом.

Обсуждение следствий гипотезы зарядовой независимости читатель найдет в работах [3, 24, 47].

## § 14. ПРАВИЛО $|\Delta I| = 1/2$

Рассмотрим следующий нелептонный распад  $\Lambda^0$ -гиперона, который, как известно, наблюдается на опыте [4, 46—48, 59] (работы [47, 48, 59] — это обзорные статьи, читатели могут получить научную информацию из любой из них):

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi \quad \text{или} \quad \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0. \quad (14.1)$$

Изотопический спин  $\Lambda^0$ -гиперона равен 0. Изоспин  $\pi$ -мезона равен 1, а нуклона  $1/2$ . Поэтому пион-нуклонное конечное состояние в (14.1) может иметь полный изоспин, равный либо  $1/2$ , либо  $3/2$ . Тем самым, при распаде  $\Lambda^0$ -гиперона изотопический спин не сохраняется.

Чтобы понять природу этого нарушения закона сохранения изотопического спина, следует вспомнить, что в то время как  $\Lambda^0$ -гиперон — странная частица со странностью  $-1$  (странность  $\Lambda$ -,  $\Sigma$ -гиперонов и  $\bar{K}$ -мезонов равна  $-1$ , а странность  $K$ -мезонов равна  $+1$  [46, 48]), в конечном состоянии странных частиц нет. Однако полный заряд  $Q$  сохраняется. Согласно схеме Гелл-Манна и Нишиджимы [46—48, 117—119] связь между зарядом  $Q$ , третьей проекцией изотопического спина  $I_3$ , числом барионов  $B$  и странностью  $S$  имеет вид

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \quad (14.2)$$

(величину  $B + S$  принято называть «гиперзарядом» и обозначать через  $Y$ ). В формуле (14.2) строго сохраняются величины  $Q$  и  $B$ . Таким образом, если странность меняется на 1, как это имеет место в слабых распадах типа (14.1), то величина  $I_3$  должна измениться на  $1/2$ . Тогда

$$\Delta S = \pm 1 \text{ и } \Delta I_3 = \frac{1}{2}. \quad (14.3)$$

Однако изменение третьей компоненты  $I_3$  на  $1/2$  может возникнуть за счет изменения значения самого  $I$  на  $1/2$ ,  $3/2$  и т. д. Гелл-Манн предположил, что имеет место правило

$$|\Delta I| = \frac{1}{2}. \quad (14.4)$$

Подробные обзоры читатель найдет в работах [47] и [48].

Правило  $|\Delta I| = 1/2$  можно проверить, измерив отношение вероятностей распадов

$$\frac{\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-}{\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0} \text{ или } \frac{\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-}{\Lambda^0 \rightarrow \text{все нелептоны}}.$$

Правило  $|\Delta I| = 1/2$  позволяет сделать определенные предсказания относительно этих отношений. Обратимся вновь к распаду  $\Lambda^0$ -гиперона вида (14.1).

1. Показать, применив правило  $|\Delta I| = 1/2$ , что пион-нуклонная система в нелептонном распаде  $\Lambda^0$ -гиперона (см. (14.1)) может иметь только  $I = 1/2$  и тем самым  $I_3 = +1/2$  или  $-1/2$ . Показать также, что закон сохранения заряда не разрешает значение  $I_3 = 1/2$ . Таким образом, единственным дозволенным пион-нуклонным состоянием в формуле (14.1) является состояние с  $I = 1/2$ ,  $I_3 = -1/2$ .

2. Используя формулу для образования собственных состояний операторов  $I^2$  и  $I_3$ ,

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I', I'_3, I'', I''_3} (I', I'_3, I'', I''_3 | I', I'_3\rangle | I'', I''_3\rangle, \quad (14.5)$$

выразить состояние  $|1/2, -1/2\rangle$  через комбинации состояний  $|p\rangle|\pi^- \rangle$  и  $|n\rangle|\pi^0 \rangle$  (коэффициенты Клебша — Гордана можно найти в книгах Блатта и Вайскопфа [31] или Кондона и Шортли [30]). Пользуясь этим, показать (учитывая зарядовую независимость), что

$$\frac{\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-}{\Lambda^0 \rightarrow n\pi^0} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{\Lambda^0 \rightarrow p\pi^-}{\Lambda^0 \rightarrow \text{все нелептоны}} \approx \frac{2}{3},$$

если считать, что  $\Lambda^0$ -гиперон распадается главным образом через канал  $nN$ .

Экспериментальные значения последнего отношения сечений согласуются с теоретическими в пределах ошибок эксперимента [26, 120—123].

Один из способов «сбалансирования» изотопических спинов в распаде (14.1), который позволяет как бы имитировать зарядово независимую теорию, состоит во введении понятия «шпуриона» [124]. «Шпурион» представляет собой частицу, способную уносить (или приносить) дополнительный изотопический спин  $I = 1/2$ , чтобы сбалансировать изотопические спины в распадах типа (14.1). Однако шпурион не должен влиять на закон сохранения энергии-импульса, поскольку он является лишь гипотетической частицей, вводимой для сбалансирования изотопических спинов. Поэтому он не способен переносить какую-либо энергию-импульс и, кроме того, должен быть незаряженным. В этом случае трехчастичная вершина (рис. 11)

заменяется на четырехчастичную (рис. 12). Распад (14.1) переписывается в виде

$$\Lambda^0 + \text{«шпурион»} \rightarrow p + \pi \quad \text{или} \quad n + \pi^0. \quad (14.6)$$

Входящий в формулу (14.6) «шпурион» должен обладать странностью  $S = +1$  с тем, чтобы в реакции сохранялась странность, и проекцией  $I_3 = -1/2$ , чтобы сохранялась проекция  $I_3$ . Как нетрудно видеть из формулы (14.2), барионный заряд шпуриона равен нулю.

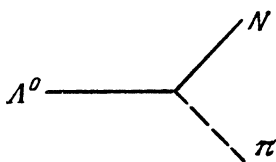


Рис. 11.

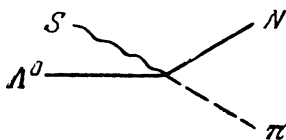


Рис. 12.

Рассмотрим другой распад, на котором можно проверить правило  $|\Delta I| = 1/2$ . Это распад  $K_1^0$ -мезона на два  $\pi$ -мезона:

$$K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-, \quad K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0. \quad (14.7)$$

$K_1^0$ -мезон — это частица со спином нуль и  $I = 1/2$ . С другой стороны, система  $2\pi$  может иметь  $I = 0, 1$  или  $2$ . Правило  $|\Delta I| = 1/2$  позволяет нам сохранить только состояния с  $I = 0$  или  $1$ . Рассмотрим теперь, какие дальнейшие ограничения на значение  $I$  следуют из симметрии двухпионной волновой функции (это — двухбозонная система). В полной аналогии с поведением волновой функции в обычном пространстве относительно пространственных вращений, двухпионная изотопическая волновая функция с относительным изоспином  $I$  при вращениях в изотопическом пространстве ведет себя как  $Y_I(\theta, \varphi)$ .

3. Каким образом преобразуется изотопическая волновая функция  $Y_I(\theta, \varphi)$  при изменении знака зарядов (отражение в изопространстве)?

Можно сделать вывод, что изотопическая волновая функция симметрична относительно изменения знака зарядов в состояниях с  $I = 0$  или  $2$  и антисимметрична в состояниях с  $I = 1$ . К тому же выводу можно прийти и более длинным путем, построив состояние с каким-то частным

значением  $I$  (скажем, с  $I=2$  и произвольным значением  $I_3$ ), используя формулу (14.5), а затем исследовав его поведение при изменении знака зарядов.

4. Показать, что система  $2\pi$  в состояниях с  $I=0$  и  $2$  может иметь суммарный орбитальный момент, равный  $0$  или четному целому числу, а та же система в состоянии с  $I=1$  может обладать только нечетным целым орбитальным моментом.

Поскольку  $K$ -мезон имеет спин нуль, то для системы, чтобы не нарушить закон сохранения момента импульса, можно допустить только состояние с  $I=0$ .

5. Построить, используя формулу (14.5), двухпионное состояние  $|I=0, I_3=0\rangle$ . Показать на основе этого, что амплитуды двух каналов распада (14.7) равны по величине (симметризовать состояние  $2\pi^0$ )

$$T(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = T(K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-), \quad (14.8)$$

и показать, что отношение вероятностей распада (будьте осторожны с тождественностью двух пионов в состоянии  $2\pi^0$ , чтобы не учесть дважды одни и те же элементы фазового пространства)

$$\frac{K_1^0 \rightarrow 2\pi^0}{K_1^0 \rightarrow \text{все } 2\pi} = \frac{1}{3}. \quad (14.9)$$

Эксперименты [25, 121—123] удивительно хорошо согласуются со сделанными выше предсказаниями.

«Формализуем» то, что уже было сказано о распаде  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ , введя «шпурион» и выписав гамильтониан слабого взаимодействия, который мог бы породить подобный распад. Мы уже указывали, что правило  $|\Delta I|=1/2$  позволяет сохранить для двухпионной системы только состояния с  $I=0$ .  $K_1^0$ -мезон с  $I=1/2$  можно скомбинировать со шпурионом, имеющим  $I=1/2$ , так что получится  $I=0$ . Тогда можно считать все так, как будто изотопический спин сохраняется. Можно определить изоскалярное  $K$ -мезонное поле, скажем,  $\varphi_K$ , которое должно теперь взаимодействовать с изоскаляром, образованным из двух  $\pi$ -мезонных полей. Поскольку  $\pi$ -мезонное поле—изовектор,

то тем самым  $\varphi\varphi = \varphi^2$  — изоскаляр. Иначе говоря, простейший гамильтониан, приводящий к распаду  $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ , имеет вид

$$h = g_W \varphi_K \varphi^2. \quad (14.10)$$

6. Выразить  $\varphi^2$  через  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонные поля.

7. Показать теперь, что константа связи для вершины  $\pi^+ \pi^- K_1^0$  совпадает с константой связи для вершины  $\pi^0 \pi^0 K_1^0$ , т. е. что

$$\int \langle \pi^+ \pi^- | h | K_1^0 \rangle d^3r = \int \langle \pi^- \pi^+ | h | K_1^0 \rangle d^3r = \\ = \int \langle \pi^0 \pi^0 | h | K_1^0 \rangle d^3r. \quad (14.11)$$

Как явствует из формулы (14.11), амплитуды распада для заряженного и нейтрального каналов равны. Полный их расчет был произведен в § 11 (стр. 65).

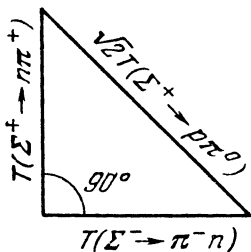
8. Следуя в точности тем же аргументам, что и при рассмотрении распада  $K_1^0$  (обращая особое внимание на  $I$  и  $I$ ), показать, что правило  $|\Delta I| = 1/2$  строго запрещает распад  $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ . Показать, что примесь перехода  $|\Delta I| = 3/2$  допускает такой распад. Этот распад действительно наблюдается [63, 125—127].

Проведем еще одну проверку правила  $|\Delta I| = 1/2$ . Рассмотрим нелептонные распады  $\Sigma$ -гиперона

$$\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0, \quad \Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+, \quad \Sigma^- \rightarrow n + \pi^-. \quad (14.12)$$

$\Sigma$ -гиперон — изовектор ( $I_\Sigma = 1$ ). В силу правила  $|\Delta I| = 1/2$  в конечном состоянии может быть как  $I = 1/2$ , так и  $I = 3/2$ . Посмотрим теперь, каковы возможные значения  $I_3$ . В случае распада  $\Sigma^+$ -гиперона конечное состояние имеет  $I_3 = 1/2$  и, тем самым, в него могут дать вклады состояния с  $I_3 = 1/2$  и  $I_3 = 3/2$ . С другой стороны, конечное состояние в распаде  $\Sigma^-$ -гиперона имеет  $I_3 = -3/2$ , и поэтому является чистым

состоянием с  $I = 3/2$ . Читатель сможет без труда убедиться в том, что введение «шпуриона» в левую часть формулы (14.12) с  $I = 1/2$  и  $I_3 = -3/2$  обеспечивает сохранение  $I$  и  $I_3$ . Распады (14.12) можно теперь записать так:



$$\left. \begin{aligned} \Sigma^+ + \text{шпурион} &\rightarrow p + \pi^0, \\ \Sigma^+ + \text{шпурион} &\rightarrow n + \pi^+, \\ \Sigma^- + \text{шпурион} &\rightarrow n + \pi^-. \end{aligned} \right\} (14.13)$$

Рис. 13.

Последняя из этих двух реакций в силу зарядовой независимости будет зависеть только от  $I = 3/2$ , в то время как первые две содержат смеси состояний с  $I = 3/2$  и  $I = 1/2$ .

9. Построив состояния  $|I = 3/2, I_3 = 1/2\rangle$  и  $|I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle$  (используя формулу (14.5)) для системы из  $\Sigma$ -гиперона и шпуриона (для шпуриона следует ввести изодублет) и системы  $\pi N$ , выразить состояния  $|\Sigma^+, \text{шпурион}\rangle$ ,  $|p\pi^0\rangle$  и  $|n\pi^+\rangle$  в виде линейной суперпозиции состояний  $|I = 3/2, I_3 = 1/2\rangle$  и  $|I = 1/2, I_3 = 1/2\rangle$ .

10. С помощью полученных выше состояний  $|\Sigma^+, \text{шпурион}\rangle$ ,  $|p, \pi^0\rangle$  и  $|n, \pi^+\rangle$  написать выражения для амплитуд трех рассматриваемых распадов через амплитуды распадов в состояниях с  $I = 3/2$  и  $I = 1/2$ . Показать, что между амплитудами этих трех распадов имеет место следующее соотношение треугольника (рис. 13):

$$T(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) + \sqrt{2} T(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0) = T(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-). \quad (14.14)$$

Отсюда

$$|T(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+)| = |T(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0)| = |T(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-)|,$$

т. е. постоянные распадов по трем каналам в (14.12) равны. Эксперименты действительно подтверждают этот результат [48].

## § 15. РАСПАД $\pi \rightarrow \mu + \tilde{\nu}$ (ИЛИ $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu}$ )

Причина, в силу которой следует ожидать распада  $\pi \rightarrow \mu + \tilde{\nu}$  (или  $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu}$ ) (мы будем всюду использовать термин «лептон» для заряженных лептонов  $\mu$  или  $e$  и будем обозначать их  $l$ ) состоит в том, что он может законно произойти в следующие два этапа:

$$\pi \xrightarrow{\text{сильное}} N + \bar{N} \xrightarrow{\text{слабое}} l + \tilde{\nu}. \quad (15.1)$$

Эти два этапа показаны на рис. 14.

Относительные скорости распадов для электронного и мюонного каналов были первоначально вычислены Рудерманом и Финкельштейном [128]. Они установили, что в случае псевдоскалярного мезона и псевдоскалярной связи в четырехфермионной вершине (см. рисунок 14) пион должен распадаться преимущественно по электронному каналу, а

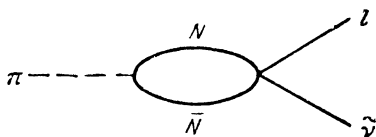


Рис. 14.

отношение вероятностей распадов  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$  должно быть  $\approx 5$ . Однако в случае псевдоскалярной связи в четырехфермионной вершине электронный канал оказывается чрезвычайно подавленным и соответствующее отношение вероятностей  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu} \approx 10^{-4}$ . Ранние эксперименты [129—131] либо вовсе не обнаруживали существования электронного канала, либо устанавливали для отношения  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$  слишком низкий предел. Надежные измерения этого отношения были первоначально доложены Фаццини и др. [132], Импедугла и др. [133], а позднее Андерсоном и др. [134, 135], Эшкином и др. [136]. Недавнее измерение Ди Капуа и др. [137] дало

$$\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu} = (1,247 \pm 0,028) 10^{-4}. \quad (15.2)$$

Поскольку точность измерений возросла, было признано необходимым учесть радиационные поправки (см. работы [99—101, 138]).



Рудерман и Финкельштейн [128] вычисляли отношение  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$ , используя второй порядок теории возмущений, как это следовало бы делать, если бы для представления промежуточных состояний использовался рис. 14. Такой расчет был также произведен в обзорной статье Конопинского [139] в свете существующих сегодня знаний о нейтрино. Мы будем действовать по-другому и значительно упростим данный расчет.

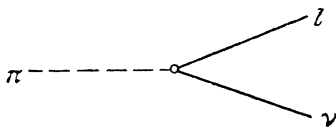


Рис. 15.

Граф, изображенный на рис. 14, действительно является простейшим из тех, которые можно начертить. Сильные взаимодействия в высших порядках будут приводить к гораздо более сложным графам. Например, можно представить себе граф, в котором внутри  $N\bar{N}$ -петли пересекаются мезонные линии. Поскольку, однако,  $N\bar{N}$ -петля довольно «компактна» из-за большой массы  $N\bar{N}$ -пары (и соответственно малой комптоновской длины волны), то можно заменить  $N\bar{N}$ -петлю (и все другие сильные взаимодействия) локальной вершиной. Поэтому граф рис. 14 может быть заменен графом рис. 15.

Феноменологическая вершина на рис. 15 будет теперь характеризоваться эффективной константой связи. Выпишем теперь формы эффективных взаимодействий, которые могут привести к распаду  $\pi \rightarrow l + \bar{\nu}$ . Поскольку  $\pi$ -мезон — псевдоскалярная частица, а четность в слабых распадах не сохраняется, то можно выписать следующие лагранжианы взаимодействия (здесь  $\psi^{(-)} = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_5)\psi$ )

$$L_W = g_W \bar{\psi}_e \psi_v^{(-)} \quad (15.3)$$

или

$$L'_W = f_W \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_v^{(-)}. \quad (15.4)$$

Сначала обсудим взаимодействие (15.3), которое по очевидным причинам мы будем называть  $S-P$ -взаимодействием.

1. Выписать  $S$ -матрицу для распада  $\pi \rightarrow l + \bar{\nu}$  ( $\pi$ -мезон считать покоящимся), воспользовавшись пер-

вым порядком теории возмущений по  $L_W$  вида (15.3). Использовать нормировку волновых функций, принятую в книгах Швебера [13] и Джексона [98].

2. Выписать  $T$ -матрицу, воспользовавшись определением  $T$ -матрицы (11.2) из § 11 (стр. 65).

3. Рассчитать  $\sum_{\substack{\text{состояния} \\ e, \tilde{\nu}}} |T|^2$  и показать, что

$$\sum_{\substack{\text{состояния} \\ e, \tilde{\nu}}} |T|^2 \sim \left(1 - \frac{v}{c} \hat{g}\right), \quad (15.5)$$

где  $\hat{g}$  — единичный вектор, направленный вдоль импульса  $\tilde{\nu}$ ,  $v$  — скорость лептона, а  $c$  — скорость света.

4. Вычислить постоянные распада для двух распадов  $\pi \rightarrow e + \tilde{\nu}$  и  $\pi \rightarrow \mu + \tilde{\nu}$ , воспользовавшись выражением для постоянной распада (11.5) из § 11, и показать, что

$$\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu} \approx 5. \quad (15.6)$$

5. Исходя из полученного выражения для отношения вероятностей распадов  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$ , получить оценку для отношения  $\frac{K \rightarrow e}{K \rightarrow \mu}$  (конечно, для  $S-P$ -взаимодействия). Относительно  $K_{e2}$  и  $K_{\mu 2}$  распадов см. работу Окуня [140].

Теперь рассмотрим взаимодействие (15.4), которое мы будем называть  $V-A$ -взаимодействием.

6. Проинтегрировав по частям выражение  $\int L'_W d^3r$ , показать, что лагранжиан взаимодействия (15.4) эквивалентен лагранжиану

$$L''_W = -f_W \bar{\psi} \frac{\vec{\partial}}{\partial x_\mu} (\bar{\psi}_l \gamma_\mu \psi^{(-)}). \quad (15.7)$$

7. Воспользовавшись для преобразования выражения (15.7) уравнением Дирака, показать, что лагранжиан  $L''_W$  эквивалентен лагранжиану  $S-P$ -взаимодействия с константой связи  $m_l f_W$ .

8. С помощью предыдущего результата показать, что  $V - A$ -взаимодействие приводит к

$$\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu} \approx 10^{-4}. \quad (15.8)$$

Подавление электронного канала можно понять, исходя из следующих соображений. Если использовать  $S - P$ -взаимодействие вида (15.3), то нетрудно убедиться в том, что такое взаимодействие выделяет правовинтовое антинейтрино  $\tilde{\nu}$  и левовинтовой лептон. Таким образом, нет никаких препятствий к тому, чтобы сохранялись как суммарный импульс, так и спин  $\tilde{\nu}$  и лептона. Поскольку эти законы сохранения выполняются без труда, то следует ожидать большего числа распадов  $\pi$ -мезона на  $e + \tilde{\nu}$ , ибо этому каналу отвечает больший фазовый объем, чем каналу  $\mu + \tilde{\nu}$ . Однако в случае  $V - A$ -взаимодействия вида (15.4) антинейтрино  $\tilde{\nu}$  оказывается правовинтовым, а доля левовинтовых лептонов оказывается порядка  $v/c$ . Поэтому возникает проблема одновременного выполнения законов сохранения суммарного импульса и спина. Однако поскольку поляризация электрона неполная ( $v/c < 1$ ), то данная реакция все же может происходить. Поскольку электрон по отношению к мюону является «более релятивистской» частицей, то в реакции с ним труднее добиться сохранения как импульса, так и спина, в силу чего канал  $e + \tilde{\nu}$  оказывается подавленным. В пределе, когда массу электрона можно считать равной нулю, соответствующее отношение вероятностей распада будет равно нулю, поскольку электрон будет полностью левовинтовым.

9. Пользуясь полученным выражением для отношения вероятностей распада  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$ , получить отношение  $\frac{K \rightarrow e}{K \rightarrow \mu}$  в случае  $V - A$ -взаимодействия.

### Влияние массы нейтрино на отношение вероятностей распада

Как известно, масса электронного нейтрино (т. е. нейтрино, которое появляется вместе с электроном при распаде пиона) мала [141] ( $< 0,5$  кэв) и для любых целей ее можно считать строго равной нулю. Масса же мюонного

нейтрино, которое по своей природе отличается от электронного [142], неизвестна. Лучшая оценка верхнего предела для нее в настоящее время составляет  $3,5 \text{ Мэв}$  [143].

В этой части главы мы рассчитываем в грубом приближении влияние массы мюонного нейтрино на отношение вероятностей распада  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$ .

Если предположить, что соответствующее взаимодействие имеет вид (15.4) и тогда, когда масса нейтрино конечна, то наличие у нейтрино массы будет сказываться таким образом: 1) станет иным двухчастичный фазовый объем и 2) использование в формуле (15.7) уравнения Дирака приведет к члену, пропорциональному массе нейтрино. В этом случае амплитуда распада будет содержать член, пропорциональный массе нейтрино.

10. Пренебрегая влиянием массы мюонного нейтрино на амплитуду распада (только что указанная возможность 2)) и предполагая также, что

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ \mu \text{ и } \tilde{\nu}}} |T|_{m_{\nu} \neq 0}^2 = \sum_{\substack{\text{спины} \\ \mu \text{ и } \tilde{\nu}}} |T|_{m_{\nu} = 0}^2, \quad (15.9)$$

получить отношение вероятностей распада  $\frac{\pi \rightarrow e}{\pi \rightarrow \mu}$  в случае мюонного нейтрино с конечной массой.

Расчет влияния массы мюонного нейтрино на это отношение был произведен в работе [101].

## § 16. РАСЧЕТЫ «ТИПА ФЕРМИ» \*)

### $\pi$ -распад

В этой главе мы произведем очень грубую оценку отношения постоянных распада для распадов  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  и  $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \tilde{\nu}$ . Грубость нашего вычисления (которая не является помехой, поскольку наша цель — оценить лишь порядок величины) станет очевидной, как только мы

\*) Название «типа Ферми» напоминает о том, что такие расчеты порядков величин широко использовались автором восхитительной и яркой книги [144].

приступим к делу. Однако такие вычисления полезны, ибо они позволяют быстро оценить постоянные распада и т. д.

Распад

$$\pi^0 \rightarrow 2\gamma \quad (16.1)$$

может проходить через следующие две промежуточные стадии (рис. 16):

$$\pi^0 \rightarrow N + \bar{N} \rightarrow N + \bar{N} + \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2. \quad (16.2)$$

В то же время распад

$$\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu \quad (16.3)$$

может проходить только одну промежуточную стадию (рис. 17)

$$\pi \rightarrow N + \bar{N} \rightarrow \mu + \nu. \quad (16.4)$$

В любом случае скорость распада определяется золотым правилом Ферми [7, 11]

$$\begin{aligned} \tau^{-1} &= 2\pi |K_{fi}|^2 \rho_f = 2\pi \int |K_{fi}|^2 \rho_f \delta(E_f - E_i) dE_f = \\ &= 2\pi \sum_f |K_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i). \end{aligned} \quad (16.5)$$

Суммирование по конечным состояниям должно ограничиваться теми из них, в которых сохраняется полная энергия.



Рис. 16.

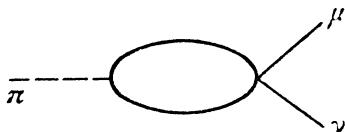


Рис. 17.

Величина  $K_{fi}$  для распада (16.2) в третьем порядке теории возмущений [7, 11] имеет вид

$$K_{fi} = \sum_{m, n} \frac{\langle f | H_{\text{int}} | m \rangle \langle m | H_{\text{int}} | n \rangle \langle n | H_{\text{int}} | i \rangle}{(E_i - E_n)(E_i - E_m)}. \quad (16.6)$$

Для процесса (16.4) во втором порядке теории возмущений [7, 11] мы имеем

$$K_{fi} = \sum_n \frac{\langle f | H_{\text{int}} | n \rangle \langle n | H_{\text{int}} | i \rangle}{E_i - E_n}. \quad (16.7)$$

Дальше вычисления проводятся следующим образом. Поместим рассматриваемую систему в ящик объема  $\Omega$ . Нормированная в ящике волновая функция для бозонов имеет вид  $\frac{1}{\Omega^{3/2} (2\omega)^{1/2}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ . Соответствующая волновая функция фермиона равна  $\frac{1}{\Omega^{3/2}} \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})$  (отметим отсутствие энергетического множителя для фермиона, этот факт уже упоминался в начале § 11).

Гамильтониан взаимодействия будет содержать три члена: сильное взаимодействие приводит к вершине  $\pi \rightarrow N + \bar{N}$ , электромагнитное взаимодействие — к вершине  $N + \bar{N} \rightarrow \gamma$  и слабое взаимодействие — к вершине  $N + \bar{N} \rightarrow \mu + \tilde{\nu}$ . Поскольку нас интересует только оценка порядка величин, мы будем пренебрегать псевдоскалярностью  $\pi$ -мезона и тем, что фотон — вектор. Тогда

$$H_{\text{сильн}} = g_S \int_{\Omega} \bar{\psi} \psi \varphi d^3r, \quad H_{\text{электромагн}} = e \int_{\Omega} \bar{\psi} \psi A d^3r,$$

$$H_{\text{слаб}} = g_W \int_{\Omega} (\bar{\psi} \psi) (\bar{\psi} \psi) d^3r.$$

1. Используя этот гамильтониан, показать, что множители, которые следует ввести в вершины графов на рис. 16 и 17, имеют такой вид:

$$\langle N\bar{N} | H_{\text{int}} | \pi \rangle \sim g_S \Omega^{-1,2} (2\omega)^{-1,2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},^3$$

$$\langle N\bar{N} | H_{\text{int}} | \gamma \rangle \sim e \Omega^{-1,2} (2\omega)^{-1,2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},^3$$

$$\langle N\bar{N} | H_{\text{int}} | \mu \tilde{\nu} \rangle \sim g_W \Omega^{-1} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},^3$$

$\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},^3$  — это символ Кронекера [7], где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  — суммы импульсов по любую сторону вершины.

Поскольку мы производим только грубую оценку, то в формулах (16.6) и (16.7) мы положим [144]  $E_n \approx E_m \approx 2m$  ( $m$  — масса нуклона). В пределе  $\Omega \rightarrow \infty$  суммирование  $\sum_{m, n}$  можно превратить в интегрирование согласно [7]

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k, \quad \Omega \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'},^3 \rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

По импульсам виртуальных нуклонов и антинуклонов необходимо трижды проинтегрировать в формуле (16.6) и дважды в формуле (16.7).

2. Произвести два из трех интегрирований в формуле (16.6) и одно из двух — в формуле (16.7), используя все  $\delta$ -функции, обеспечивающие закон сохранения импульсов, кроме одной.

Последняя оставшаяся  $\delta$ -функция отвечает просто закону сохранения полного импульса. Впредь мы будем ее опускать.

3. Произвести последнее оставшееся интегрирование по промежуточным импульсам, которое приводит к расходимости. Обрезать этот интеграл произвольным образом, скажем, при  $|\mathbf{k}|_{\max} = m$ .

4. Только что полученную величину  $K_{fi}$  можно теперь подставить в формулу (16.5) и оценить  $\tau^{-1}$  с учетом плотности конечных состояний  $\Omega (2\pi)^{-3} d^3 p$ , где  $p$  — импульс одной из частиц в конечном состоянии, рассматриваемый в системе покоя распадающегося пиона.

(Отметим, что эта плотность должна быть  $\sim d^3 p d^3 p'$ , где  $p$  и  $p'$  — импульсы двух частиц в конечном состоянии. Однако суммирование по конечным состояниям производится по состояниям с сохраняющимся импульсом и, тем самым, следовало бы воспользоваться одним из интегрирований по  $p$ .)

5. Установить правильную размерность величины  $\tau^{-1}$ , вставив должное число множителей  $\hbar$  и  $c$ . Для этого необходимо знать размерности  $e$ ,  $g_S$  и  $g_W$ .

6. Наконец, используя следующие значения констант связи:

$$e^2 \approx 10^{-1} (e^2/4\pi \approx 1/137), \quad g_W m^2 \approx 10^{-5},$$

найти отношение

$$\frac{\tau(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)}{\tau(\pi \rightarrow \mu\bar{\nu})}.$$

## § 17. СПИНЫ $\pi$ - (ЗАРЯЖЕННОГО) И $\phi$ -МЕЗОНОВ

### Спин заряженного $\pi$ -мезона

Начнем с того, что введем принципы взаимности и детального равновесия. Рассмотрим переход из состояния  $\phi_i$  в состояние  $\phi_f$ . Матричный элемент  $S$ -матрицы ( $S$ -матрица с точностью до первого порядка по гамильтониану взаимодействия  $h$  есть  $S = 1 - i \int h(\mathbf{r}, t) d^3r dt$ ) между состояниями  $\phi_i$  и  $\phi_f$  имеет вид

$$S_{fi} = \langle \phi_f | S | \phi_i \rangle. \quad (17.1)$$

1. Предполагая, что  $S$ -матрица инвариантна относительно обращения времени, показать, что ( $T$  — оператор обращения времени)

$$\langle \phi_f | S | \phi_i \rangle = \langle T\phi_i | S | T\phi_f \rangle. \quad (17.2)$$

Будем теперь считать, что начальные и конечные состояния — это плоские волны вида

$$|\phi_i\rangle = |\mathbf{p}_i, m_s\rangle \quad (17.3)$$

и

$$|\phi_f\rangle = |\mathbf{p}_f, m'_s\rangle, \quad (17.4)$$

где через  $m_s$  обозначена величина проекции спина на ось квантования.

2. Используя известное поведение состояний  $|\mathbf{p}_i, m_s\rangle$  и  $|\mathbf{p}_f, m'_s\rangle$  относительно преобразования обращения времени, показать, что

$$\langle \mathbf{p}_f, m'_s | S | \mathbf{p}_i, m_s \rangle = \langle -\mathbf{p}_i, -m_s | S | -\mathbf{p}_f, -m'_s \rangle. \quad (17.5)$$

3. Показать, используя инвариантность  $S$ -матрицы относительно отражения пространства, что

$$\langle \mathbf{p}_f, m'_s | S | \mathbf{p}_i, m_s \rangle = \pm \langle \mathbf{p}_i, -m_s | S | \mathbf{p}_f, -m'_s \rangle. \quad (17.6)$$

Соотношение (17.6) составляет содержание так называемого принципа взаимности. Если теперь образовать квадраты модулей этих матричных элементов и произвести

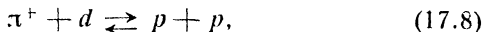


суммирование по спинам, то соотношение (17.6) приведет к

$$\sum_{\text{спины}} |\langle \mathbf{p}_f, m'_s | S | \mathbf{p}_i, m_s \rangle|^2 = \sum_{\text{спины}} |\langle \mathbf{p}_i, m_s | S | \mathbf{p}_f, m'_s \rangle|^2. \quad (17.7)$$

Последнее соотношение называется принципом детального равновесия. По поводу обсуждавшихся вопросов читатели отсылаются к работам Костера [145], Сакураи [3], Мандля [5] и Нишиджимы [25].

Рассмотрим теперь две реакции,



которые мы будем называть прямым ( $\rightarrow$ ) и обратным ( $\leftarrow$ ) процессами соответственно. Начнем с прямого процесса и вычислим дифференциальное сечение рассеяния для него в релятивистском случае. Используя определение  $T$ -матрицы, данное в § 11 на стр. 65, можно написать

$$T(\rightarrow) = (4\omega_\pi \omega_d E E')^{-1/2} C(\rightarrow), \quad (17.9)$$

где множители  $(2\omega)^{-1/2}$  возникают из-за нормировки бозонных волновых функций, а множители  $(m/E)^{1/2}$  — из-за нормировки фермионных волновых функций. Величина  $C(\rightarrow)$  включает в себя все константы типа  $m$  (масса протона),  $(2\pi)^{-3/2}$  и т. д. и, вообще говоря, является функцией импульсов падающих и уходящих частиц. Дифференциальное сечение рассеяния  $d\sigma(\rightarrow)$  имеет вид [13]

$$d\sigma(\rightarrow) = \frac{(2\pi)^4}{(2s_d + 1)(2s_\pi + 1)} \int \frac{|T(\rightarrow)|^2}{\eta_\pi \eta_d v_i} \delta^4(P_f - P_i) d^3p d^3p'. \quad (17.10)$$

Множитель  $(2s_\pi + 1)^{-1}$  появился за счет статистического усреднения по спинам  $\pi$ -мезонов. Соответствующий множитель для дейтона имеет вид  $(2s_d + 1)^{-1}$ .  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$  — это импульсы двух протонов.  $P_f$  и  $P_i$  — это 4-импульсы конечного и начального состояний соответственно.  $\eta_\pi$  и  $\eta_d$  — плотности  $\pi$ -мезонов и дейтонов, а  $v_i$  — относительная скорость частиц в начальном состоянии. В системе центра масс частиц начального состояния (с импульсом  $\mathbf{p}_i$ ) имеем

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{p}_i}{w_\pi} + \frac{\mathbf{p}_i}{w_d}. \quad (17.11)$$

4. Показать, что

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega} = \text{const} \frac{1}{3} \frac{|p_f|}{|p_i|} \sum_{\text{спины}} \frac{|C(\rightarrow)|^2}{2s_{\pi} + 1}. \quad (17.12)$$

5. Тем же способом, что и выше, показать, что

$$\frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega} = \text{const} \frac{1}{4} \frac{|p_i|}{|p_f|} \sum_{\text{спины}} |C(\leftarrow)|^2. \quad (17.13)$$

Используя принцип детального равновесия, который в рассматриваемом случае гласит

$$\sum_{\text{спины}} |C(\rightarrow)|^2 = \sum_{\text{спины}} |C(\leftarrow)|^2,$$

получим, что

$$\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega} / \frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega} = \left( \frac{p_f}{p_i} \right)^2 \frac{4}{3(2s_{\pi} + 1)}. \quad (17.14)$$

Таким образом, измерения  $\frac{d\sigma(\rightarrow)}{d\Omega}$  и  $\frac{d\sigma(\leftarrow)}{d\Omega}$  при некотором значении энергии дают нам значение  $s_{\pi}$ . Эти измерения фиксируют значение  $s_{\pi}$  совершенно однозначно, поскольку величина (17.14) при  $s_{\pi} = 1$  составляет 1/3 от той же величины при  $s_{\pi} = 0$ . Соответствующий эксперимент по измерению  $s_{\pi}$  был предложен Маршаком [146] и Честоном [147]. См. также работу Маршака [148]. Экспериментальные данные, приведенные в работах [149—157], дали значение  $s_{\pi} = 0$ .

## Внутренняя четность заряженного $\pi$ -мезона

Большинство реакций захвата  $\pi$ -мезонов



происходит в  $S$ -состоянии (т. е. когда относительный орбитальный момент импульса  $\pi$ -мезона и дейтона равен нулю. См. работу Маршака [148]). Тем самым, в начальном состоянии  $J = 1$ .

6. Учитывая статистику частиц, показать, что  $pp$ -система в реакции (17.15) может находиться в состояниях  ${}^1S_0, {}^3P_{0,1,2}, {}^1D_2, \dots$  (игнорируя на данной стадии вопрос о сохранении  $J$ ).

Из перечисленных выше состояний законом сохранения  $J$  допускается только  ${}^3P_1$ -состояние.

7. Какова четность этого состояния?

8. Приравнивая четности в правой и левой частях этого процесса (относительная четность  $n$  и  $p$  выбирается четной по условию), найти внутреннюю четность  $\pi$ -мезона.

## Спин $\phi$ -мезона

(Эту задачу следует рассматривать только после того, как читатели ознакомились с § 8 (стр. 48).)

Свойства  $\phi$ -мезона (масса  $\approx 1021$  Мэв) уже обсуждались в § 13; напомним некоторые из них.  $\phi$ -мезон распадается на  $K_1^0 K_2^0$  и тем самым для него  $CP = -1$ . Это позволяет сразу же отождествить его с состоянием  $|K\bar{K}\rangle_a$  в формуле (8.9) (стр. 49). В § 13 также упоминалось, что у  $\phi$ -мезона спин нечетен и если принято для него наименьшее возможное значение, равен 1.

9. Выразить состояние  $|K\bar{K}\rangle_a$  (формула (8.9)) через одночастичные состояния  $K^+$ ,  $K^-$ ,  $K_1^0$  и  $K_2^0$ -мезонов и показать, что если пренебречь разницей масс заряженных  $K$ -мезонов, то следует ожидать, что

$$\frac{\phi \rightarrow K^+ K^-}{\phi \rightarrow K_1^0 K_2^0} = 1. \quad (17.17)$$

Поскольку, однако, энергетический порог рождения двух  $K$ -мезонов очень близок к значению массы  $\phi$ -мезона, то разность масс между нейтральными и заряженными  $K$ -мезонами становится существенной, так что ее следует учитывать. Допустимая кинетическая энергия (и тем самым фазовый объем) для системы  $K^+ K^-$  ( $m_\phi - 2K^+ \approx 30$  Мэв) достаточно сильно отличается от допустимой кинетической энергии системы  $K_1^0 K_2^0$  ( $m_\phi - 2m_{K_1^0} \approx 20$  Мэв). Иначе говоря, следует ожидать, что отношение (17.17) вероятностей распада довольно сильно отличается от единицы. В последующих вычислениях мы будем учитывать эту разность масс.

Поскольку масса  $\phi$ -мезона всего на 20—30 Мэв превышает порог рождения  $K\bar{K}$ , то  $\phi$ -мезоны можно считать

нерелятивистскими. Можно предполагать, что они движутся в своего рода потенциальной яме, ограниченной центробежным барьером. Радиальная волновая функция  $\psi_l(pr)$  для системы  $K\bar{K}$  в состоянии с орбитальным моментом  $l$  имеет при  $pr \rightarrow 0$  хорошо известный вид [7] (здесь  $p$  — абсолютная величина импульса  $K$ -мезона в системе центра масс  $K\bar{K}$ ). При разумном выборе радиуса потенциальной ямы  $R$  следует ожидать, что внутри потенциальной ямы  $pr \ll 1$ . Следовательно, можно пользоваться асимптотическим выражением функции  $\psi_l(pr)$  при  $pr \rightarrow 0$ . Вероятность проникновения под потенциальный барьер будет  $\sim |\psi_l(pr)|^2$ , что в общем совпадает с величиной |амплитуда распада|^2.

10. Показать, что скорость распада на  $K^+K^-$  пропорциональна  $p^{2l}$ , где  $p$  — абсолютная величина импульса  $K$ -мезона в системе центра масс  $K^+K^-$ . Аналогично скорость распада на  $K_1^0K_2^0$  будет пропорциональна  $q^{2l}$ , где  $q$  — абсолютная величина импульса в системе центра масс  $K_1^0K_2^0$ .

Второй фактор, который следует учесть, — это фазовый объем.

11. Используя тот факт, что постоянная распада имеет вид

$$\Gamma \sim \int |\text{амплитуда}|^2 \times \text{элемент фазового объема}, \quad (17.18)$$

показать, что

$$\frac{\varphi \rightarrow K^+K^-}{\varphi \rightarrow K_1^0K_2^0} = \frac{p^{(2l+1)}}{q^{(2l+1)}}. \quad (17.19)$$

12. Используя равенства

$$\left. \begin{aligned} m_\varphi - 2m_{K^+} &\approx 30 \text{ Мэв}, \\ m_\varphi - 2m_{K_1^0} &\approx 20 \text{ Мэв}, \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

найти значения  $p$  и  $q$ . Наконец, найти значения отношения вероятностей распада, рассматриваемых при  $l=1$  и  $l=3$ .

Приведенные выше расчеты были проделаны Глэшоу [53] и Сакураи [54] в предположении, что спин  $\varphi$ -мезона  $l$  определяется при измерении отношения вероятностей распада

$$\frac{\varphi \rightarrow K^+ K^-}{\varphi \rightarrow K_1^0 K_2^0}.$$

Проведенные эксперименты [51, 52] показали, что спин  $\varphi$ -мезона действительно равен 1.

## § 18. БЕТА-РАСПАД

Ряд хороших обзоров по бета-распаду перечислен в работах [3, 46, 98, 139, 153—155]. С наименьшими затратами читатели могут извлечь всю полезную информацию из работ [139] и [154].

Наиболее общее выражение для взаимодействия, ответственного за бета-распад нейтрона,

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}, \quad (18.1)$$

записывается в виде (здесь  $h$  — плотность гамильтониана взаимодействия)

$$h = \sum_{i=1}^5 C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu). \quad (18.2)$$

Выше мы не включили взаимодействия, нарушающие четность (вариант, предшествующий открытию несохранения четности), и использовали следующие обозначения (здесь  $\gamma$ -матрицы определены так же, как в книгах Швебера [13] и Швебера, Бете и Гофмана [12] (см. ниже (18.11)):

скалярное взаимодействие:	$C_1 = C_S;$	$\Gamma_1 = 1,$
псевдоскалярное взаимодействие:	$C_2 = C_P;$	$\Gamma_2 = i\gamma_5,$
векторное взаимодействие:	$C_3 = C_V;$	$\Gamma_3 = \gamma_\mu,$
тензорное взаимодействие:	$C_4 = C_T;$	$\Gamma_4 = \gamma_\mu \gamma_\nu,$
псевдовекторное взаимодействие:	$C_5 = -C_A;$	$\Gamma_5 = i\gamma_5 \gamma_\mu.$

Любую другую комбинацию вида  $(pn)(ev)$  можно записать в форме (18.2) [98, 103]. Таким образом, пока допускаются только взаимодействия, сохраняющие четность, существует пять независимых констант связи  $C_i$ .

Рассмотрим теперь распад свободного покоящегося нейтрона. В бета-распаде ядер ни начальный нейтрон, ни конечный протон не являются свободными. Мы начнем с изучения распада свободного нейтрона, а затем перейдем к бета-распаду ядер. Амплитуда распада для реакции (18.1) имеет вид

$$M = \int \langle e\tilde{\nu}p | h | n \rangle d^3r. \quad (18.3)$$

Оператор  $\psi_n$ , входящий в  $h$ , уничтожает нейтрон в начальном состоянии, так что  $\langle 0 | \psi_n | n \rangle$  представляет собой волновую функцию уничтоженного нейтрона. Поскольку нейтрон распадается в состоянии покоя, то

$$|n\rangle = |E = m, \mathbf{k} = 0\rangle = a_{\mathbf{k}=0}^\dagger |0\rangle. \quad (18.4)$$

1. Разложив оператор  $\psi_n$  по плоским волнам и операторам рождения и уничтожения (см. любой стандартный учебник по квантовой теории поля) и используя антиперестановочные соотношения для операторов  $a_k^\dagger$  и  $a_k$ , показать, что

$$\langle 0 | \psi_n | n \rangle \sim U_n e^{-imt}. \quad (18.5)$$

Наличие вакуума в левой части формулы (18.5) указывает на то, что в конечном состоянии нет ни одного нейтрона.

2. Показать аналогичным образом, что

$$\langle p | \bar{\psi}_p | 0 \rangle \sim \bar{U}_p \exp \{i(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})\}. \quad (18.6)$$

Поскольку разность масс нейтрона и протона очень мала ( $\approx 2,5 m_e$ ), то возможная кинетическая энергия также очень мала. Поэтому протон наверняка можно считать нерелятивистским. Тем самым для протона  $E \approx m$  и  $\mathbf{p}/(E + m) \approx \mathbf{p}/2E = \mathbf{v}/2c$ , где  $\mathbf{v}$  — скорость протона. Матрица  $U_p$  определяется формулой [13,98] (с точностью до нормировочного множителя, близкого к 1)

$$U_p \approx \begin{bmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{E + m} \chi \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \mathbf{v}}{2c} \chi \end{bmatrix}, \quad (18.7)$$

где

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ для двух спиновых состояний.} \quad (18.8)$$

3. Тем же способом, что и для волновых функций нуклонов, показать, что

$$\langle e | \bar{\psi}_e | 0 \rangle \sim \bar{U}_e \exp \{ i(E_e t - \mathbf{p}_e \mathbf{r}) \}$$

и

$$\langle \tilde{\nu} | \psi_\nu | 0 \rangle \sim V_\nu \exp \{ i(E_\nu t - \mathbf{p}_\nu \mathbf{r}) \}. \quad (18.9)$$

Поскольку мы производим расчет нерелятивистским образом, то ниже во всех волновых функциях будем опускать зависимость от времени. При полностью релятивистском расчете зависящие от времени экспоненты дают только  $\delta$ -функцию, обеспечивающую сохранение энергии. Тогда для распада покоящегося нейтрона будет

$$M = \int \exp \{ i(\mathbf{p} + \mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu) \mathbf{r} \} d^3 r (\bar{U}_p \Gamma_i U_n) (\bar{U}_e \Gamma_i V_\nu). \quad (18.10)$$

Теперь можно выполнить интегрирование по  $\mathbf{r}$ , что приведет к  $\delta$ -функции, обеспечивающей сохранение импульса.

Рассмотрим теперь нуклонный матричный элемент  $\bar{U}_p \Gamma_i U_n$  в нерелятивистском пределе.

4. Показать, используя следующее представление  $\gamma$ -матриц [12,13] ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma_i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \\ i\gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (18.11)$$

что для различных типов взаимодействий будет

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_p U_n &\approx \langle 1 \rangle; & \bar{U}_p i\gamma_\mu \gamma_5 U_n &\approx \langle \sigma \rangle; \\ \bar{U}_p \gamma_\mu U_n &\approx \langle 1 \rangle; & \bar{U}_p \gamma_\mu \gamma_\nu U_n &\approx \langle \sigma \rangle \\ & & \text{и } \bar{U}_p i\gamma_5 U_n &\approx 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.12)$$

Символ  $\langle \quad \rangle$  обозначает здесь матричный элемент между двумя значениями проекции спина нуклонов. Члены, которыми пренебрегли в формулах (18.12), имеют порядок по крайней мере  $v/c$ .

Формулы (18.12) показывают, что в бета-распаде существуют два типа связей: связи, в которых билинейная

по нуклонам комбинация — порядка 1, и связи, в которых эта комбинация — порядка  $\sigma$ . Взаимодействия, приводящие к билинейной по нуклонам комбинации порядка 1, названные взаимодействиями Ферми ( $S$  и  $V$ ), не могут вызвать переверачивание спина нуклонов (в единичном операторе нет ничего, что могло бы вызвать переверачивание спина и поэтому матричный элемент  $\langle 1 \rangle$  следует брать между состояниями с одинаковым спином). Взаимодействия, приводящие к билинейной по нуклонам комбинации порядка  $\sigma$ , названные взаимодействиями Гамова — Теллера ( $A$  и  $T$ ), могут вызвать изменение направления спина при переходе от  $p$  к  $n$ , поскольку матричные элементы  $\langle \sigma \rangle$  будут отличны от нуля между состояниями с противоположными спинами.

Подставляя формулы (18.12) в (18.10), получим следующее:

для взаимодействия Ферми

$$M \approx \int d^3r \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) \langle 1 \rangle \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) (\bar{U}_e \Gamma_i V_\nu) \times \\ \times \exp\{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu)\mathbf{r}\}; \quad (18.13)$$

для взаимодействия Гамова — Теллера

$$M \approx \int d^3r \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{r}) \langle \sigma \rangle \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) (\bar{U}_e \Gamma_i V_\nu) \times \\ \times \exp\{-i(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_\nu)\mathbf{r}\}. \quad (18.14)$$

В приведенные выше формулы мы ввели волновую функцию нейтрона  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , которая в (18.10) для покоящегося нейтрона равнялась 1.

В случае бета-распада ядра  $Z \rightarrow (Z+1) + e + \tilde{\nu}$  мы заменим начальную волновую функцию нейтрона  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  на начальную волновую функцию ядра  $\Phi_i$ , а конечную волновую функцию протона  $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}$  на конечную волновую функцию ядра  $\Phi_f^*$ . Дальнейшее приближение состоит в том, что лептонные волновые функции разлагаются по степеням  $\mathbf{p}_e\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}_\nu\mathbf{r}$ , причем в этих разложениях оставляются только первые члены. Это приближение эквивалентно утверждению, что лептоны рождаются в  $S$ -состоянии относительно ядра. Читатели могут проверить это утверждение, разложив функцию  $e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}$  по сферическим волнам (см. книгу Шиффа [7]) и оставив только вклад сферической волны с  $l=0$ . Это приближение оказывается законным, поскольку лептоны уносят лишь небольшой импульс. Таким образом, чтобы иметь возможность унести отличный от нуля момент, они



должны рождаться далеко от ядра [139]. Поэтому амплитуды распада для бета-распада ядра можно записать так: взаимодействия Ферми

$$M \approx M^F (\bar{U}_e \Gamma_i V_\nu), \quad (18.15)$$

взаимодействия Гамова — Теллера:

$$M \approx M^{G-T} (\bar{U}_e \Gamma_i V_\nu), \quad (18.16)$$

где

$$M^F = \int d^3r \Phi_f^* \langle 1 \rangle \Phi_i \quad (18.17)$$

и

$$M^{G-T} = \int d^3r \Phi_f^* \langle \sigma \rangle \Phi_i. \quad (18.18)$$

Интегрирование по  $\mathbf{r}$  теперь всецело «ядерное» и его необходимо производить по координатам всех нуклонов.

### Корреляция $e\tilde{\nu}$

Здесь мы будем искать член типа  $\mathbf{p}_e \mathbf{p}_{\tilde{\nu}}$  в функции распределения электронов. Такой член характеризует преимущественное направление импульса электрона относительно импульса антинейтрино. Взаимодействия различных типов приводят к различным предсказаниям относительно величины и знака коэффициента при  $\mathbf{p}_e \mathbf{p}_{\tilde{\nu}}$ . Поэтому для установления типа имеющего место взаимодействия используются экспериментальные результаты по корреляции  $e\tilde{\nu}$ .

Рассмотрим сначала скалярное взаимодействие. Амплитуда распада имеет вид

$$M \approx M^F (\bar{U}_e V_\nu), \text{ ибо } \Gamma_i = 1. \quad (18.19)$$

Тогда

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 = \sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M^F|^2 |\bar{U}_e V_\nu|^2. \quad (18.20)$$

5. Используя правила суммирования по спиновым состояниям, определенные в § 21, показать, что

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 \sim \left(1 - \frac{v}{c} \mathbf{p}_{\tilde{\nu}}\right), \quad (18.21)$$

где  $v$  — скорость электрона.

Таким образом, в случае скалярного взаимодействия корреляция отрицательна, т. е. электроны вылетают пре-

имущественно в направлении, противоположном направлению вылета антинейтрино.

Рассмотрим теперь векторное взаимодействие. В этом случае амплитуда распада имеет вид

$$M \approx M^F (\bar{U}_e \gamma_\mu V_\nu) = (\bar{U}_e \gamma_\mu M_\mu^F V_\nu). \quad (18.22)$$

Единственной ненулевой компонентой вектора  $M_\mu^F$  является  $M_0^F$ . Однако мы настаиваем на записи амплитуды распада (18.22) в ковариантной форме, чтобы упростить суммирование по спинам.

6. Используя метод суммирования по спинам из § 21, показать, что

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 \sim \left(1 + \frac{v}{c} p_{\tilde{\nu}}\right). \quad (18.23)$$

Формула (18.23) указывает на положительную корреляцию  $e\tilde{\nu}$ . Следовательно, вообще для взаимодействий Ферми

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 \sim \left(1 + a_F \frac{v}{c} p_{\tilde{\nu}}\right), \quad (18.24)$$

где

$$a_F = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \text{ для } \begin{pmatrix} S \\ V \end{pmatrix}. \quad (18.25)$$

Наконец, рассмотрим псевдовекторное взаимодействие. Для простоты будем обсуждать бета-распад нейтрона. Матричный элемент этого распада имеет вид

$$M \approx M_\mu^{G-T} (\bar{U}_e i \gamma_\mu \gamma_5 V_\nu), \quad (18.26)$$

где

$$M_0^{G-T} \approx 0, \quad M_i^{G-T} = \langle \sigma \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (18.27)$$

7. Записав

$$|M|^2 = M_\mu^{G-T} M_\rho^{G-T \dagger} (\bar{U}_e i \gamma_\mu \gamma_5 V_\nu) (\bar{U}_e i \gamma_\rho \gamma_5 V_\nu), \quad (18.28)$$

произвести суммирование по спинам и показать, что

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ \text{нуклонов} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 \sim |\langle \sigma \rangle|^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{v}{c} p_{\tilde{\nu}}\right). \quad (18.29)$$

Для бета-распада ядер в формуле (18.29) нужно произвести следующую замену:

$$|\langle \sigma \rangle|^2 \rightarrow \left| \int d^3r \Phi_f^* \langle \sigma \rangle \Phi_i \right|^2. \quad (18.30)$$

Формула (18.29) показывает, что псевдовекторное взаимодействие приводит к отрицательной корреляции  $e\tilde{\nu}$ .

Обширные эксперименты по изучению корреляции  $e\tilde{\nu}$  были проведены Алленом и его группой. Читатель может найти детали в следующих работах этой группы, выполненных после 1957 года: Хермансфельдт и др. [155] для распада  $\text{Ar}^{35}$ , Хермансфельдт и др. [156] для распада  $\text{Ne}^6$ , Бармен и др. [159] для распада  $\text{Ne}^{23}$  и следующие три работы для распадов  $\text{Ne}^6$ ,  $\text{Ne}^{19}$ ,  $\text{Ne}^{23}$  и  $\text{Ar}^{35}$  Хермансфельдта [157], Аллена [158] и Аллена и др. [160]. Для распада  $\text{Ne}^{19}$  см. также работы Гуда и Лауэра [161] и Алфорда и Гамильтона [162]. Эти эксперименты показали (Аллен [158]), что в бета-распадах ядер доминируют векторные и псевдовекторные взаимодействия.

## § 19. ЭЛЕМЕНТЫ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ТЕОРИИ НЕЙТРИНО

Рассмотрим уравнение Дирака для случая  $m \neq 0$ :

$$\left( -i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \psi = 0. \quad (19.1)$$

Мы пользуемся следующим представлением  $\gamma$ -матриц [12,13]:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19.2)$$

1. Выразив оператор  $\psi$  через большую и малую компоненты

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (19.3)$$

показать, что ( $E$  и  $\mathbf{p}$  — это  $c$ -числа, а не операторы)

$$E\chi_1 - \sigma\mathbf{p}\chi_2 = m\chi_1, \quad E\chi_2 + \sigma\mathbf{p}\chi_1 = m\chi_2. \quad (19.4)$$

2. Исходя из уравнений (19.4), показать, что решения уравнения Дирака для некоторого импульса  $\mathbf{p}$  записываются в виде:

$$\text{при } E > 0, \quad \chi_2 = \frac{\sigma \mathbf{p}}{E + m} \chi_1; \quad (19.5)$$

тогда

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{E + m} \chi \end{pmatrix} e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (19.6)$$

где  $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;

а при  $E < 0$ ,  $E = -|E|$ ,

$$\chi_1 = -\frac{\sigma \mathbf{p}}{|E| + m} \chi_2; \quad (19.7)$$

тогда

$$\psi_- = \begin{pmatrix} \frac{-\sigma \mathbf{p}}{|E| + m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i(-|E|t - \mathbf{p}\mathbf{r})}, \quad (19.8)$$

где  $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

В случае нейтрино уравнение Дирака имеет вид

$$i \sum_{\mu=1}^3 \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0. \quad (19.9)$$

Подставляя значение  $m = 0$  также в формулы (19.4) — (19.8), получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} E\chi_{1\nu} &= \sigma \mathbf{p} \chi_{2\nu}, \\ E\chi_{2\nu} &= \sigma \mathbf{p} \chi_{1\nu} \end{aligned} \right\} \quad (19.10)$$

и их решения для заданного импульса  $\mathbf{p}$  в виде

$$\text{при } E > 0, \quad \chi_{2\nu} = \sigma \hat{\mathbf{p}} \chi_{1\nu}; \quad (19.11)$$

поэтому

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma \hat{\mathbf{p}} \chi \end{pmatrix} e^{-i(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})}; \quad (19.12)$$

$$\text{а при } E < 0, \quad \chi_{1\nu} = -\sigma \hat{\mathbf{p}} \chi_{2\nu}; \quad (19.13)$$

тогда

$$\psi_- = \begin{pmatrix} -\sigma \hat{p} \chi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-i(-|E|t - pr)}, \quad (19.14)$$

где  $\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

3. Исходя из (19.9), показать, что гамильтониан взаимодействия имеет вид (здесь все величины — операторы)

$$H = -i\sigma \nabla i\gamma_5 = \frac{\sigma p}{|p|} i\gamma_5. \quad (19.15)$$

Иначе говоря, общие собственные функции операторов  $H$  и  $\sigma \hat{p}$  (оператор спиральности) являются также собственными функциями оператора  $i\gamma_5$ . В этом можно убедиться, образовав коммутатор  $[H, \sigma \hat{p}]$  и потребовав, чтобы он обращался в нуль.

4. Выбирая импульс  $p$  направленным вдоль оси  $z$ , показать, что решениями уравнений (19.12) и (19.14) являются такие собственные функции операторов  $\sigma \hat{p}$  и  $i\gamma_5$ , что соответствующие собственные значения определяются следующей таблицей:

Т а б л и ц а 2

Энергия	$\sigma \hat{p}$	$i\gamma_5$
$> 0$	$+1$	$+1$
$> 0$	$-1$	$-1$
$< 0$	$+1$	$-1$
$< 0$	$-1$	$+1$

5. Показать, что если на решение  $\psi$  уравнения (19.9) для плоских волн наложить условие

$$\psi = \pm i\gamma_5 \psi, \quad (19.16)$$

то

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm \sigma \hat{p} \psi, \quad (19.17)$$

где верхний (нижний) знак в уравнении (19.17) соответствует верхнему (нижнему) знаку в формуле (19.16).

Читателям следует самим удостовериться в том, что решение  $\psi$ , удовлетворяющее (19.16) и (19.17), также удовлетворяет условиям таблицы 2.

Теперь мы в состоянии дать рецепт для выбора состояний нейтрино с определенной спиральностью. Определим волновые функции  $\psi^{(\pm)}$  равенством

$$\psi^{(\pm)} = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_5)\psi. \quad (19.18)$$

6. Показать, что волновые функции  $\psi^{(+)}$  и  $\psi^{(-)}$  действительно являются собственными функциями оператора  $i\gamma_5$ . Показать, что волновые функции  $\psi^{(+)}$  и  $\psi^{(-)}$  описывают нейтрино с положительной энергией и значениями спиральности  $+1$  и  $-1$  соответственно.

7. Показать, что уравнение (19.17) неинвариантно относительно пространственного отражения.

То обстоятельство, что оператор  $\psi$  удовлетворяет уравнению, не обеспечивающему сохранение четности, на первый взгляд должно бы показаться препятствием. Поскольку, однако, в бета-распаде [81] (и в других слабых распадах [78, 164]) четность не сохраняется, то ограничения, подобные требованию сохранения четности, на уравнение для оператора  $\psi$  накладывать не следует. Читателям рекомендуются прекрасные обзоры теории бета-распада и двухкомпонентной теории нейтрино Коппинского [139], Ву [152] и Смородинского [153]. Оказалось, что природа распорядилась так, чтобы нейтрино было левовинтовым [139, 152—153, 155—160, 164] (в экспериментах Гольдхабера, Гродзинса и Сеньяра [164] непосредственно измерялась спиральность нейтрино, тогда как в экспериментах Аллена и его группы [155—160] измерялась корреляция  $\tilde{\epsilon}\nu$ ; затем из сравнения этих результатов устанавливалась спиральность нейтрино). Стоит отметить, что в своей оригинальной работе Ли и Янг [165] считали нейтрино правовинтовым.

Теперь в гамильтониане слабого взаимодействия

$$H = \sum_i C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + \text{э. с.}, \quad i = S, P, T, V, A \quad (19.19)$$

заменим  $\psi_\nu$  на  $\psi_\nu^{(-)}$ . Тогда

$$H = \frac{1}{2} \sum_i C_i (\bar{\psi}_p \Gamma_i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i (1 - i\gamma_5) \psi_\nu) + \text{э. с.} \quad (19.20)$$

Рассмотрим подробно скобку  $\bar{\psi}_e \Gamma_i (1 - i\gamma_5) \psi_\nu$  с лептонными операторами.

8. Используя тот факт, что матрица  $\gamma_5$  антикоммутирует со всеми  $\gamma$ -матрицами, показать, что для  $S$ -,  $T$ - и  $P$ -взаимодействий будет

$$\frac{1}{2} \bar{\psi}_e \Gamma_i (1 - i\gamma_5) \psi_\nu = \bar{\psi}_e^{(+)} \Gamma_i \psi_\nu. \quad (19.21)$$

Таким образом,  $S$ -,  $T$ - и  $P$ -взаимодействия порождают правовинтовые электроны. Этот результат находится в противоречии с экспериментальными измерениями поляризации электрона, которые показали, что электрон является левовинтовым независимо от взаимодействия [166—169]. Тем самым, следует считать, что

$$C_{S, T, P} = 0. \quad (19.22)$$

9. Действуя так же, как и в задаче 8, показать, что  $V$ - и  $A$ -взаимодействия порождают электроны с правильной „нарезкой“, так что

$$C_{V, A} \neq 0. \quad (19.23)$$

Поэтому следует сохранить только взаимодействия  $V$ - и  $A$ -типов. Тогда гамильтониан взаимодействия (19.20) принимает вид

$$H = \frac{1}{2} C_V \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - i\gamma_5) \psi_\nu - \\ - \frac{1}{2} C_A \bar{\psi}_p \gamma_\mu (i\gamma_5) \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\mu (i\gamma_5) (1 - i\gamma_5) \psi_\nu. \quad (19.24)$$

(Обратите внимание на знак минус перед  $C_A$ . Такой выбор позволит нам в дальнейшем использовать обычное равенство  $C_V = -C_A$ .)

10. Используя свойства оператора  $i\gamma_5$ , показать, что выражение (19.24) записывается в виде

$$H = \frac{1}{2} C \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n^{(-)} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu^{(-)}, \quad (19.25)$$

где  $C = C_V = -C_A$ .

Отсюда возникло наименование « $V-A$ »-взаимодействие.

Взаимодействие вида (19.25) автоматически отбирает левовинтовые нуклонные состояния. Теоретические соображения, приводящие к  $V - A$ -взаимодействию (или поиски требований симметрии, которые приводили бы к  $V - A$ -взаимодействию), см. в работах [170—172].

Поскольку полученное взаимодействие обладает прищом ему свойством всегда выделять левовинтовые нейтрино (правовинтовые антинейтрино) и левовинтовые электроны (правовинтовые позитроны), то теоретические предсказания относительно поляризации электронов и корреляций электрон-антинейтрино, вытекающие из такого гамильтониана взаимодействия, должны быть согласованы с экспериментом. Убедимся, что это действительно так.

### Корреляция $e\bar{\nu}$

Гамильтониан вида (19.25) можно расщепить следующим образом:

$$H = \frac{1}{2} C \bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu^{(-)} - \frac{1}{2} C \bar{\psi}_p i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_n \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu^{(-)}. \quad (19.26)$$

Первая часть его описывает переходы типа Ферми, а вторая — переходы типа Гамова—Теллера (см. § 18, стр. 106). Как уже было показано в § 18, в случае бета-распада ядра  $Z \rightarrow (Z + 1) + e + \bar{\nu}$  амплитуда распада с гамильтонианом (19.26) может быть записана в виде

$$M \sim M_\mu^F (\bar{U}_e \gamma_\mu (1 - i \gamma_5) V_\nu) + M_\mu^{G-T} (\bar{U}_e \gamma_\mu (1 - i \gamma_5) V_\nu). \quad (19.27)$$

Константой  $1/2C$  мы пренебрегли, поскольку она не относится к тому, что нас сейчас интересует.  $M_\mu^F$  и  $M_\mu^{G-T}$  — это «ядерные части» амплитуды распада. В силу присутствия в нуклонной части (19.27) матрицы  $\gamma_\mu$  они являются 4-векторами.

Рассмотрим чистый переход типа Ферми. Тогда  $M_\mu^{G-T} = 0$  и амплитуда распада имеет вид

$$M \sim M_\mu^F \bar{U}_e \gamma_\mu (1 - i \gamma_5) V_\nu. \quad (19.28)$$

11. Считая нуклон нерелятивистским, показать, что

$$M_0^F \sim 1, \quad M_i^F (i = 1, 2, 3) \approx 0. \quad (19.29)$$



12. Используя метод суммирования по спинам из § 21, показать, что (расчет, в котором не используется вычисление шпуров  $\gamma$ -матриц, см. ниже)

$$\sum_{\substack{\text{спины} \\ e, \tilde{\nu}}} |M|^2 \sim \left(1 + \frac{v}{c} \hat{q}\right), \quad (19.30)$$

где  $v$  — скорость электрона, а  $q$  — импульс  $\tilde{\nu}$

Формула (19.30) показывает, что в переходе типа Ферми электрон и антинейтрино преимущественно вылетают в одном и том же направлении [139, 152, 158]. Поскольку, однако, они имеют противоположные спиральности, то их спины сокращаются, так что момент сохраняется.

Дадим теперь более простой вывод формулы (19.30). Для простоты будем считать, что масса электрона равна нулю. Также ограничимся рассмотрением относительно чистого случая бета-распада нейтрона, происходящего за счет векторной части взаимодействия (19.26).

13. Показать, что для распада нейтрона посредством одного лишь векторного взаимодействия амплитуда распада имеет вид

$$M \sim \chi_e^+ (1 - \sigma \hat{p})(1 - \sigma \hat{q}) \chi_{\nu}, \quad (19.31)$$

где  $\hat{p}$  — единичный вектор вдоль импульса электрона, а  $\hat{q}$  — единичный вектор вдоль импульса рождающегося антинейтрино ( $-q$  — импульс уничтожаемого нейтрино).

Записав

$$Q = (1 + \sigma \hat{p})(1 - \sigma \hat{q}), \quad (19.32)$$

мы получим, что

$$M \sim \chi_e^+ Q \chi_{\nu}. \quad (19.33)$$

14. Показать, что

$$\sum_{\text{спины } \tilde{\nu}} |M|^2 \sim \chi_e^+ Q Q^+ \chi_e, \quad (19.34)$$

где

$$Q Q^+ = 2(1 - \sigma \hat{p})(1 - \sigma \hat{q})(1 - \sigma \hat{p}). \quad (19.35)$$

15. Представить выражение (19.35) для  $Q Q^+$  в виде членов, не зависящих от  $\sigma$ , и членов, линейных по  $\sigma$ . (Использовать тождество  $(\sigma p)(\sigma q) = pq + i\sigma(p \times q)$ .)

Выполнить суммирование по спинам электрона и показать, что полученный результат согласуется с формулой (19.30).

## Поляризация электронов

Рассмотрим опять чистое взаимодействие типа Ферми. Тогда амплитуда распада определяется формулой (19.28). Поскольку  $M_0^F \sim 1$  и  $M_i^F \approx 0$ , то эту формулу можно перенести в виде

$$M \sim U_e^+ (1 - i\gamma_5) V_{\nu}. \quad (19.36)$$

16. Исходя из (19.36), образовать  $|M|^2$  и выполнить суммирование только по спинам  $\tilde{\nu}$  (использовать § 21). Членами, линейными по импульсу  $\tilde{\nu}$ , можно пренебречь, поскольку в силу того, что  $\tilde{\nu}$  не наблюдается, они при усреднении обратятся в нуль. Наконец, используя следующее приближенное выражение для электронного спинора ( $E \gg m$ ):

$$U_e \approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{E} \chi \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (19.37)$$

показать, что

$$\sum_{\text{спины } \tilde{\nu}} |M|^2 \sim \left(1 - \frac{\sigma v}{c}\right). \quad (19.38)$$

Итак, электроны преимущественно возникают с направлением спина, противоположным направлению их импульса. Иначе говоря, поляризация электрона равна  $-v/c$  [167—170].

## § 20. ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ

**Пион-нуклонное рассеяние** (см. книгу Бете и Гофмана [39] и работу Андерсона и соавторов [173]).

По соображениям простоты будем рассматривать рассеяние  $\pi^+$ -мезонов на протонах. Система  $\pi^+ p$  образует чистое состояние с  $I = 3/2$ ,  $I_3 = 3/2$  и поэтому в силу зарядовой независимости расчету подлежит только одна зарядовая амплитуда  $A_{3/2}$  (буква  $A$  будет использоваться

для обозначения амплитуды рассеяния, тогда как букву  $a$  мы сохраним для обозначения длины рассеяния). Рассмотрим  $\pi^+$ -мезон низкой энергии, налетающий на неподвижный протон. Поскольку относительный орбитальный момент  $\pi^+$ -мезона и протона равен  $l = r \times k$ , где  $r$  — радиус-вектор между  $\pi^+$ -мезоном и протоном, а  $k$  — импульс  $\pi^+$ -мезона (который мал, например,  $|k| \leq m_\pi$ ), то получится, что для  $l > 1$  величина  $|r|$  должна превышать  $m_\pi^{-1}$ . Однако и сильные взаимодействия, переносимые  $\pi$ -мезонами, имеют радиус действия  $\sim m_\pi^{-1}$ . Следовательно, если мы ограничим свое внимание исследованием рассеяния при низких энергиях, то необходимо рассматривать только случаи  $l=0$  и  $l=1$  ( $S$ - и  $P$ -волны соответственно), поскольку только эти парциальные волны оказываются чувствительными к сильным взаимодействиям. Свое рассмотрение мы начнем со случая упругого  $\pi N$ -рассеяния с произвольным значением орбитального момента импульса, а случаями  $l=0$  и  $l=1$  ограничимся лишь в самом конце.

Рассмотрим пион-протонное столкновение в системе центра масс, причем будем считать, что спин протона ориентирован вдоль оси квантования. Падающая плоская волна  $\sim e^{ikz}$ , где  $k$  — импульс в системе центра масс, а полная начальная волновая функция имеет вид

$$\psi_i = \alpha e^{ikz}, \quad (20.1)$$

где  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , описывает состояние со спином вверх. Плоская волна  $e^{ikz}$  содержит все парциальные волны и может быть записана в виде линейной суперпозиции сферических волн [7]:

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \{4\pi(2l+1)\}^{1/2} i^l j_l(kr) Y_l^0(\cos \theta), \end{aligned} \quad (20.2)$$

где [7]

$$Y_l^0(\cos \theta) = \left( \frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_l(\cos \theta). \quad (20.3)$$

До сих пор мы описывали падающую волну квантовыми числами  $l$  и  $m_s$ . Однако для каждого значения  $l$  полный момент может принимать два значения  $J = l \pm 1/2$ . Следовательно, для каждого значения  $l$  необходимо ввести

две амплитуды рассеяния  $A_{lJ}$  (впредь мы будем опускать изотопический индекс, поскольку нас интересует только одно изотопическое состояние). Наша следующая задача состоит в том, чтобы выразить рассматриваемую функцию через состояния  $(l, J, m)$  при  $m = m_l + m_s = 1/2$ , поскольку в начальном состоянии  $m_s = 1/2$  (протон со спином вверх). Другими словами, мы хотели бы провести следующий переход:

$$|l, m_l, m_s\rangle \rightarrow |l, J, m\rangle. \quad (20.4)$$

1. Используя формулу

$$|l, J, m\rangle = \sum_{m_l, m_s} \left( l, m_l; \frac{1}{2}, m_s | J, m \right) \times \\ \times Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \left| \frac{1}{2}, m_s \right\rangle \quad (20.5)$$

и коэффициенты Клебша — Гордана, определенные в книге Блатта и Вайскопфа [31], показать, что

$$\left| l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} Y_l^0 \alpha + \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} Y_l^1 \beta, \quad (20.6)$$

и

$$\left| l, l - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = - \left( \frac{l}{2l+1} \right)^{1/2} Y_l^0 \alpha + \left( \frac{l+1}{2l+1} \right)^{1/2} Y_l^1 \beta \quad (20.7)$$

при  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2. Выразить функцию  $Y_l^0 \alpha$  из формул (20.6) и (20.7) через состояния  $|l, J, 1/2\rangle$  и, подставив ее в формулу (20.2), показать, что уходящая часть волны в (20.2) при  $r \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\sim (4\pi)^{1/2} \frac{\exp(ikr)}{kr} \sum_l \left\{ (l+1)^{1/2} \left| l, l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \right. \\ \left. + l^{1/2} \left| l, l - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \right\}, \quad (20.8)$$

где  $k$  — абсолютная величина  $\mathbf{k}$ .

После рассеяния уходящая часть волны приведет к виду

$$A_{l,J} \times \text{уходящая волна.}$$

3. Введя две амплитуды рассеяния  $A_{l, l \pm 1/2}$ , выписать рассеянную волну, используя формулу (20.8). Амплитуда  $A_{l, J}$  связана с фазами  $\delta_{l, J}$  соотношением

$$A_{l, J} = \frac{e^{2i\delta_{l, J}} - 1}{2ik}. \quad (20.9)$$

4. Наконец, используя формулы (20.6) и (20.7), выразить состояния  $|l, J, 1/2\rangle$  через функции  $Y_l$  и  $\alpha$  (или  $\beta$ ) и показать, что рассеянная волна ведет себя как

$$\begin{aligned} \sim (4\pi)^{1/2} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_l (2l+1)^{-1/2} \times \\ \times \left[ \{(l+1)A_{l, l+1/2} + lA_{l, l-1/2}\} Y_l^0 \alpha + \right. \\ \left. + l^{1/2}(l+1)^{1/2} \{A_{l, l+1/2} - A_{l, l-1/2}\} Y_l^1 \beta \right]. \quad (20.10) \end{aligned}$$

Член, пропорциональный  $Y_l^0 \alpha$ , дает амплитуду рассеяния без переворачивания спина, а член, пропорциональный  $Y_l^1 \beta$ , дает амплитуду рассеяния с переворачиванием спина. В принятых обычно обозначениях уходящая рассеянная волна имеет вид  $f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$ , где функция  $f(\theta)$  содержит в себе информацию о всех парциальных волнах.

5. Сохраняя только вклады  $S$ - и  $P$ -волн, показать, что

$$\begin{aligned} f(\theta) = \{A_{0, 1/2} + (A_{1, 1/2} + 2A_{1, 3/2}) \cos \theta\} \alpha + \\ + (A_{1, 3/2} - A_{1, 1/2}) \sin \theta e^{i\varphi} \beta, \quad (20.11) \end{aligned}$$

где два индекса у амплитуд  $A$  отмечают значения  $l$  и  $J$  соответственно.

Записав формулу (20.11) в виде

$$f(\theta) = f_1(\theta) \alpha + f_2(\theta) \beta, \quad (20.12)$$

можно представить дифференциальное сечение упругого  $\pi^+ p$ -рассеяния так:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_1(\theta)|^2 + |f_2(\theta)|^2. \quad (20.13)$$

6. Пренебрегая рассеянием в состоянии с  $l=1$ ,  $J=1/2$ , показать, что

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} (\sin^2 \delta_{0, 1/2} + 2 \sin^2 \delta_{1, 3/2}). \quad (20.14)$$

Фазовый анализ для  $\pi^- p$ -рассеяния из-за наличия двух зарядовых амплитуд оказывается гораздо более запутанным. Читатели могут без труда установить (см. § 13, стр. 80), что  $A_{l,J}(\pi^- p) = 2/3 A_{l,J}(I=1/2) + 1/3 A_{l,J}(I=3/2)$ . (20.15)

Анализ амплитуды  $A_{l,J}(I=1/2)$  производится по тому же образцу, что и анализ амплитуды  $A_{l,J}(I=3/2)$ . Итак, в случае  $\pi^- p$ -рассеяния по сравнению с  $\pi^- p$ -рассеянием в каждом состоянии с определенным моментом импульса существует удвоенный набор фаз. Подробности читатели смогут найти в работе [39]. Информацию о фазах и длинах рассеяния можно получить из выражений типа (20.14). Литературу по этому вопросу можно найти в работах [174—177].

7. Тем же методом, что и выше, произвести фазовый анализ упругого  $K^- p$ -рассеяния, учитывая вклад только  $S$ - и  $P$ -волн и пренебрегая неупругими каналами. По поводу  $K^- p$ -рассеяния с учетом неупругих каналов см. работу Далитца [84].

## Пороговое $\pi\pi$ -рассеяние

Мы сосредоточим свое внимание только на пороговом рассеянии, так что нужно будет рассматривать только вклад  $S$ -волн. Система  $2\pi$  может существовать в трех состояниях с полным изотопическим спином  $I=0, 1$  и  $2$ . Поскольку двухбозонная волновая функция должна быть полностью симметричной, то с четными значениями  $l$  можно ассоциировать только четные значения  $I$ , а с нечетными значениями  $l$  — только нечетные значения  $I$  (волновая функция ведет себя как  $Y_l(\theta_l, \varphi_l) Y_l(\theta_l, \varphi_l)$ ). В качестве примера рассмотрим волновую функцию  $|\pi^+ \pi^+\rangle$ . Совершенно ясно, что в этом состоянии  $I=2$ , а при перестановке частиц появляется множитель  $(-1)^l$ , где  $l$  — орбитальный момент системы  $2\pi$ . Поскольку система  $\pi^+ \pi^+$  должна быть симметричной относительно перестановки двух пионов, то число  $l$  должно равняться либо нулю, либо целому четному числу. Если ограничиться только рассеянием в  $S$ -состоянии, то необходимо рассматривать лишь амплитуды рассеяния  $A_0$  и  $A_2$  в состояниях с  $I=0$  и  $I=2$  соответственно.

Рассмотрим упругое  $\pi^0 \pi^-$ -рассеяние. Для этой двухпионной системы  $I_3 = -1$ , и следовательно, оно может

находиться в состояниях с  $I=1$  и  $I=2$ . Однако интересующее нас пороговое рассеяние будет происходить только в чистом состоянии с  $I=2$ .

8. Используя формулу

$$|I, I_3\rangle = \sum_{I'_3, I''_3} (1, I'_3; 1, I''_3 | I, I_3) |1, I'_3\rangle |1, I''_3\rangle \quad (20.16)$$

и коэффициенты Клебша — Гордана, определенные в книге [31], показать, что

$$|\pi^0\pi^-\rangle = \frac{1}{2}(|2, -1\rangle + |1, -1\rangle). \quad (20.17)$$

9. Выразить амплитуду рассеяния  $A(\pi^0\pi^-)$  через амплитуды рассеяния  $A_1$  и  $A_2$  (индексы соответствуют значениям  $I$ ). Наконец, выразив эти амплитуды через фазы, показать, что (по поводу симметризации см. книги Мотта и Мессии [178] и Мессии [11])

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_2 \quad (\text{на пороге}), \quad (20.18)$$

и что отсюда следует

$$\sigma(\pi^-\pi^0) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_2. \quad (20.19)$$

Таким образом, определяя длину рассеяния  $a_2$  равенством (знак в нем выбран так, чтобы слабое притяжение соответствовало малой отрицательной длине рассеяния)

$$\delta_2 = -|k|a_2, \quad |k| \rightarrow 0, \quad (20.20)$$

получаем

$$\sigma(\pi^0\pi^-) = 4\pi a_2^2. \quad (20.21)$$

В силу зарядовой независимости полное сечение для упругого  $\pi^0\pi^+$ -рассеяния должно совпадать с соответствующим сечением для  $\pi^0\pi^-$ -рассеяния.

10. Показать, что полное сечение для упругого  $\pi^+\pi^+$ - (или  $\pi^-\pi^-$ -) рассеяния равно  $8\pi a_2^2$ .

Измерение этих сечений ( $\pi^0\pi^+$ ,  $\pi^0\pi^-$ ,  $\pi^+\pi^+$ ,  $\pi^-\pi^-$ ) на пороге (эти величины непосредственно не измеримы, но их можно получить из измерений сечений рождения  $\pi$ -мезонов в  $\pi N$ -столкновениях [42, 179—182]) позволяет получить информацию о величине  $a_2$  [73, 183—185].

Наконец, рассмотрим упругое  $\pi^+\pi^-$ -рассеяние. Эта двухпионная система может существовать в состояниях со всеми тремя возможными значениями изотопического спина.

11. Используя (20.16), показать, что амплитуда такого рассеяния на пороге может быть представлена в виде

$$A(\pi^+\pi^-) = \frac{1}{6} A_2 + \frac{1}{3} A_0. \quad (20.22)$$

12. Выражая эти амплитуды рассеяния через фазы  $\delta_I$ , показать, что

$$\begin{aligned} \sigma(\pi^+\pi^-) &= \\ &= \frac{4\pi}{9k^2} \{4 \sin^2 \delta_0 + \sin^2 \delta_2 + 4 \sin \delta_0 \sin \delta_2 \cos(\delta_0 - \delta_2)\}, \end{aligned} \quad (20.23)$$

и сделав приближение длины рассеяния (20.20), показать, что на пороге

$$\sigma(\pi^+\pi^-) \approx \frac{4\pi}{9} (4a_0^2 + a_2^2 + 2a_0a_2). \quad (20.24)$$

## § 21. ПРИЛОЖЕНИЕ: СУММИРОВАНИЕ ПО СПИНАМ

Эта глава в основном представляет собой набор формул, необходимых для выполнения суммирования по спинам. Все эти формулы можно также найти в книгах Швебера, Бете и Гофмана [12] и Швебера [13]. Мы предпочли принять нормировку спиноров, используемую в этих двух трактатах, так что читатели смогут пользоваться этими книгами без необходимости переходить от одной нормировки к другой. Эта глава написана в том же стиле, что и остальная часть книги, так что читателям нужно будет получить часть результатов самим.

Допустим, что решение уравнения Дирака с положительной энергией обозначено через  $U$ :

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)U = 0. \quad (21.1)$$

1. Выбирая следующее представление  $\gamma$ -матриц

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \gamma_0 \alpha_i,$$



с

$$a_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (21.2)$$

показать, что

$$EU = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + m\gamma_0) U, \quad (21.3)$$

$$EU^\dagger = U^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + m\gamma_0). \quad (21.4)$$

2. Используя уравнения (21.3) и (21.4), показать, что  $(\bar{U} = U^\dagger \gamma_0)$

$$\bar{U}U = \frac{m}{E} U^\dagger U. \quad (21.5)$$

Таким образом, если выбрать нормировку

$$U^\dagger U = \frac{E}{m}, \quad (21.6)$$

то получится

$$\bar{U}U = 1. \quad (21.7)$$

Уравнение для античастицы (решение уравнения Дирака с отрицательной энергией) имеет вид

$$(\gamma_\mu p^\mu + m)V = 0. \quad (21.8)$$

3. Показать, что если использовать нормировку

$$V^\dagger V = \frac{|E|}{m}, \quad (21.9)$$

то получится

$$\bar{V}V = -1. \quad (21.10)$$

Соотношения (21.7) и (21.10) можно записать так:

$$\bar{U}^r U^s = -\bar{V}^r V^s = \delta^{rs}, \quad (21.11)$$

где  $r, s = 1, 2$  — два спиновых индекса.

Получим теперь  $U\bar{U}$  ( $4 \times 4$  матрицу). Рассмотрим

$$\sum_{r, s} U^r \bar{U}^r U^s \bar{U}^s.$$

4. Используя формулу (21.11), показать, что

$$\sum_{r, s} U^r \bar{U}^r U^s \bar{U}^s = \sum_r U^r \bar{U}^r. \quad (21.12)$$

Переписанное в матричной форме соотношение (21.12) принимает вид

$$\sum_{r,s} (U^r \bar{U}^r)_{\alpha\delta} (U^s \bar{U}^s)_{\delta\beta} = \sum_r (U^r \bar{U}^r)_{\alpha\beta} \quad (21.13)$$

5. Показать, что уравнение (21.13) будет удовлетворено, если

$$\sum_{r=1}^2 (U^r \bar{U}^r)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4). \quad (21.14)$$

6. С помощью такой же процедуры показать, что

$$\sum_{r=1}^2 (V^r \bar{V}^r)_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}. \quad (21.15)$$

Используя ортогональность решений  $U$  и  $V$ , соотношения (21.14) и (21.15) можно объединить в формулу

$$\sum_{r=1}^2 (U^r \bar{U}^r - V^r \bar{V}^r)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (21.16)$$

## Проекционные операторы

7. Исходя из уравнений движения (21.1) и (21.8) для  $U$  и  $V$  соответственно, показать, что оператор

$$\Lambda_r = \frac{\gamma_\mu p^\mu + m}{2m} \quad (21.17)$$

обладает свойствами

$$\Lambda_+ U^r = U^r, \quad \Lambda_+^2 U^r = \Lambda_+ U^r = U^r, \quad \Lambda_- V^r = 0. \quad (21.18)$$

Таким образом, оператор  $\Lambda_+$  обладает свойством выделять состояния с положительной энергией и уничтожать состояния с отрицательной энергией. Эти свойства оператора  $\Lambda_+$  отвечают двум его собственным значениям 1 и 0, которые имеют место в силу того, что  $\Lambda_+^2 = \Lambda_+$ .

Переписывая первое из равенств (21.18) в матричной форме, получим

$$(\Lambda_+)_{\alpha\beta} U_\beta = U_\alpha = \delta_{\alpha\beta} U_\beta. \quad (21.19)$$

Следовательно,

$$(\Lambda_+)_\alpha\beta = \delta_{\alpha\beta} = \left( \sum_r U^r \bar{U}^r \right)_{\alpha\beta}. \quad (21.20)$$

Определим теперь оператор проектирования состояния с отрицательной энергией

$$\Lambda_- = \frac{m - \gamma_\mu p^\mu}{2m}. \quad (21.21)$$

8. Показать, что оператор  $\Lambda_-$  обладает следующими свойствами:

$$\Lambda_- V = V, \quad \Lambda_-^2 V = \Lambda_- V = V, \quad \Lambda_- U = 0. \quad (21.22)$$

9. Показать, что

$$(\Lambda_-)_\alpha\beta = - \left( \sum_r V^r \bar{V}^r \right)_{\alpha\beta}. \quad (21.23)$$

Предположим теперь, что для некоторого процесса (например,  $\pi \leftrightarrow e + \tilde{\nu}$ )  $T$ -матрица имеет вид

$$T = \bar{U} M V, \quad (21.24)$$

где  $\bar{U}$  отвечает рождающемуся электрону, а  $V$  — рождающемуся  $\tilde{\nu}$ . Вероятность этого процесса пропорциональна  $|T|^2$ . Во многих экспериментах спины частиц в конечном состоянии не наблюдаются и поэтому необходимо произвести суммирование по спинам этих частиц. Аналогично, если частицы в начальном состоянии неполяризованы, то необходимо просуммировать по спинам начальных частиц и произвести по ним усреднение. Следует отметить, что тот факт, что масса нейтрино равна нулю, не порождает никаких новых проблем. Можно использовать все формулы с  $m \neq 0$  и только в конце положить  $m = 0$ . Итак,

$$\sum_{\text{спины}} |T|^2 = \sum_{\text{спины}} (\bar{U} M V) (\bar{U} M V)^+. \quad (21.25)$$

10. Показать, что

$$\sum_{\text{спины}} |T|^2 = \sum_{\text{спины}} (\bar{U} M V \bar{V} \gamma_0 M^+ \gamma_0 U). \quad (21.26)$$

Далее, пользуясь тем, что

$$\sum_{\text{спины}} V \bar{V} = - \Lambda_- = - \frac{(m - \gamma_\mu p^\mu)}{2m}, \quad (21.27)$$

находим, что

$$\sum_{\text{спины}} |T|^2 = - \sum_{\text{спины}} \bar{U}_\alpha (M \Lambda_- \gamma_0 M^+ \gamma_0)_{\alpha\beta} U_\beta. \quad (21.28)$$

11. Показать, что формулу (21.28) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спины}} |T|^2 &= - \sum_{\alpha} (M \Lambda_- \gamma_0 M^+ \gamma_0 \Lambda_+)_{\alpha\alpha} = \\ &= \text{Sp} (M \Lambda_- \gamma_0 M^+ \gamma_0 \Lambda_+). \end{aligned} \quad (21.29)$$

Здесь, если рассматривать распад  $\pi$ -мезона, оператор  $\Lambda_-$  соответствует  $\tilde{\nu}$ , а оператор  $\Lambda_+$  — электрону. Когда масса нейтрино  $m_\nu$  в знаменателе  $\Lambda_-$  устремляется к нулю, никаких трудностей не возникает. Этот стремящийся к нулю множитель сокращается с множителем нормировки спинора  $m_\nu/E_\nu$ . В числителе оператора  $\Lambda_-$  есть еще член, линейный по  $m_\nu$ , который при  $m_\nu \rightarrow 0$  обратится в нуль.

Величина  $M$  в формуле (21.24) может либо быть, либо не быть функцией  $\gamma$ -матриц. Если она не зависит от  $\gamma$ -матриц, то для того чтобы избавиться в (21.29) от  $\gamma_0$ -матриц, можно использовать формулу

$$\gamma_0 M^+ \gamma_0 = M^+. \quad (21.30)$$

Если же  $M$  является функцией  $\gamma$ -матриц, то для исключения  $\gamma_0$ -матриц можно использовать соотношение

$$\gamma_0 \gamma_\mu^+ \gamma_0 = \gamma_\mu. \quad (21.31)$$

В заключение произведем вычисление шпуров  $\gamma$ -матриц и их произведений. Здесь полезны следующие формулы:

$$\text{Sp } 1 = 4, \quad \text{Sp } \gamma_\mu = 0, \quad \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu = 4g_{\mu\nu},$$

$$\text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu = 0, \quad \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\sigma = 4(g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (21.32)$$

Шпур произведения нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю. Шпур  $\gamma_5$ -матрицы равен нулю. Также, поскольку  $\gamma_5$ -матрица есть произведение четырех  $\gamma$ -матриц, то и  $\text{Sp}(\gamma_5 \gamma_\mu) = 0$ , ибо  $\gamma_5 \gamma_\mu$  — произведение нечетного числа  $\gamma$ -матриц.

## ЛИТЕРАТУРА \*)

1. G. C. Wick, Ann. Rev. Nucl. Sci. **8**, 1 (1958).
2. N. Kemmer, J. C. Polkinghorne, D. L. Pursey, Rep. Progr. Phys. **XXII**, 368 (1959).
3. J. J. Sakurai, Lectures in Theoretical Physics, V. II, 1959. Lectures at Boulder, Colorado, N. Y. (1960).
4. P. Roman, Theory of Elementary Particles, Amsterdam, 1960, см. также Г. Челлен, Физика элементарных частиц, «Наука», 1967.
5. F. Mandl, Symmetry Properties of Particles and Fields, CERN, Lectures, Geneva, 1960, см. также Р. Маршак и Э. Судершан, Введение в физику элементарных частиц, ИЛ, 1962.
6. F. Mandl, Introduction to Quantum Field Theory, N. Y., 1959; см. также Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
7. Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957.
8. J. Hamilton, Proc. Camb. Phil. Soc. **52**, 97 (1956).
9. J. Hamilton, Theory of Elementary Particles, Oxford, 1959.
10. R. G. Sachs, Phys. Rev. **87**, 1100 (1952).
11. A. Messiah, Quantum Mechanics, v. I—II, Amsterdam, 1961/1962; см. также А. С. Давыдов, Квантовая механика, Физматгиз, 1963; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
12. С. Швебер, Г. Бете, Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. I, ИЛ, 1958.
13. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
14. E. P. Wigner, Göttinger Nachrichten, Math.-Phys., 546 (1932).
15. R. G. Sachs, Nuclear Theory, Cambridge, Mass., 1953.
16. S. Watanabe, Phys. Rev. **84**, 1008 (1954).
17. Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, 1961.
18. M. E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum, N. Y., 1957, см. также А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванagas, Математический аппарат теории момента количества движения, Госполитнауиздат, АН ЛитССР, 1960.

---

\*) При переводе мы сочли полезным для удобства пользования добавить в список литературы некоторые руководства на русском языке. (Прим. ред.)

19. М. Гольдбергер и К. Ватсон, Теория рассеяния, «Мир», 1967.
20. G. Lüders, Ann. Phys. (N. Y.) 2, 1 (1957).
21. Ю. Швингер, Теория квантованных полей, ИЛ, 1956; статья в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.
22. В. Паули, статья в сб. «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.
23. J. S. Bell, Proc. Roy. Soc. 231, 479 (1955).
24. B. d'Espagnat, J. M. Jauch, Y. Yamaguchi, Strange Particle Physics. CERN Lectures, 1959.
25. К. Нишиджима, Фундаментальные частицы, «Мир», 1966.
26. T. D. Lee, R. Oehme, C. N. Yang, Phys. Rev. 106, 340 (1957).
27. G. Lüders, B. Zumino, Phys. Rev. 106, 385 (1957).
28. W. Heisenberg, Z. Physik 77, 1 (1932).
29. B. Cassen, E. U. Condon, Phys. Rev. 50, 846 (1936).
30. Е. Кондон и Г. Шортли, Теория атомных спектров, ИЛ, 1947.
31. Дж. Блатти и В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1952.
32. L. Michel, Nuovo Cimento 10, 319 (1953).
33. T. D. Lee, C. N. Yang, Nuovo Cimento 3, 749 (1956).
34. G. R. Lynch, Proc. Phys. Soc. 80, 46 (1962).
35. S. Glashow, Phys. Rev. Letts 7, 469 (1961).
36. J. C. Taylor, Phys. Rev. Letts 8, 219 (1962).
37. G. Feinberg, Phys. Rev. Letts 8, 151 (1962).
38. В. Т. Фелд, Phys. Rev. Letts 8, 181 (1962).
39. Г. Бере и Ф. Гофман, Мезоны и поля, т. 2, ИЛ, 1960.
40. С. Гоебел, Phys. Rev. 103, 258 (1956).
41. J. M. Jauch, F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Reading, 1955; см. также А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Физматгиз, 1959.
42. J. A. Anderson et al., Rev. Mod. Phys. 33, 431 (1961); Phys. Rev. Letts 6, 365 (1961); A. R. Erwin et al., Phys. Rev. Letts 6, 628 (1961); E. Pickup et al., Phys. Rev. Letts 7, 192, 472 (1961).
43. A. Pevsner et al., Phys. Rev. Letts 7, 421 (1961); P. L. Bastien et al., Phys. Rev. Letts 8, 114 (1962).
44. В. С. Maglic et al., Phys. Rev. Letts 7, 178 (1961); N. H. Huong, G. R. Lynch, Phys. Rev. Letts 7, 327 (1961).
45. G. Puppi, Ann. Rev. Nucl. Sci. 13, 287 (1963).
46. J. D. Jackson, The Physics of Elementary Particles, Princeton, 1958.
47. R. H. Dalitz, Rep. Progr. Phys. XX, 163 (1957).
48. M. Gell-Mann, A. H. Rosenfeld, Ann. Rev. Nucl. Sci. 7, 407 (1957).
49. R. H. Dalitz, Ann. Rev. Nucl. Sci. 13, 339 (1963).
50. L. Bertanza et al., Phys. Rev. Letts 9, 180 (1962).
51. P. Schlein et al., Phys. Rev. Letts 10, 368 (1963).
52. P. L. Connolly et al., Phys. Rev. Letts 10, 371 (1963).
53. S. L. Glashow, Phys. Letts 2, 251 (1962).
54. J. J. Sakurai, Phys. Rev. Letts 9, 472 (1962).

- 55 J. J. Sakurai, Proc. of the Intern. Conf. on High Energy Physics, crp. 288, CERN, 1962.
56. A. R. Erwin et al., Phys. Rev. Letts 9, 34 (1962); 10, 204 (E) (1963).
57. G. Alexander et al., Phys. Rev. Letts 9, 460 (1962).
58. S. Björklund et al., Phys. Rev. Letts 4, 424, 475 (1960).
59. C. Franzinetti, G. Morpurgo, Nuovo Cimento, Suppl. VI, № 1 (1957).
60. M. Baldo-Ceslin et al., Nuovo Cimento 6, 84 (1957).
61. S. McKenna et al., Nuovo Cimento 10, 763 (1958).
62. S. Taylor et al., Phys. Rev. 114, 359 (1959).
63. J. K. Boggild et al., Nuovo Cimento 19, 621 (1961).
64. M. Ferro-Luzzi et al., Nuovo Cimento 22, 1087 (1962).
65. L. T. Smith et al., Phys. Letts 2, 204 (1962).
66. N. N. Khuri, S. B. Treiman, Phys. Rev. 119, 1115 (1960).
67. E. Lomon et al., Ann. Phys. 13, 359 (1961).
68. Riazuddin, Fayazuddin, Phys. Rev. Letts 7, 464 (1961).
69. M. A. Baqi Beg, P. C. De Celles, Phys. Rev. Letts 8, 46 (1962).
70. G. Barton, C. Kacser, Phys. Rev. Letts 8, 226, 353 (1962).
71. G. Barton, C. Kacser, S. P. Rosen, Phys. Rev. 130, 783 (1963).
72. C. Kacser, Phys. Rev. 130, 355 (1963).
73. H. J. Schnitzer, Phys. Rev. 125, 1059 (1962).
74. J. Hamilton et al., Phys. Rev. 128, 1881 (1962).
75. A. Abashian, N. E. Booth, K. M. Crowe, Phys. Rev. Letts 5, 258 (1960).
76. A. Abashian et al., Phys. Rev. 132, 2296 (1963).
77. G. Culligan et al., Nature 180, 751 (1957).
78. R. L. Garwin et al., Phys. Rev. 105, 1415 (1957).
79. P. C. Macq, K. M. Crowe, R. P. Haddock, Phys. Rev. 112, 2061 (1958).
80. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. 104, 254 (1956).
81. C. S. Wu et al., Phys. Rev. 105, 1413 (1957).
82. L. D. Landau, Nucl. Phys. 3, 127 (1957).
83. A. Pais, Phys. Rev. 86, 663 (1952).
84. П. Далитц, Странные частицы и сильные взаимодействия, ИЛ, 1966.
85. M. Gell-Mann, A. Pais., Phys. Rev. 97, 1387 (1955).
86. A. Pais, O. Piccioni, Phys. Rev. 100, 1487 (1957).
87. W. F. Fry, R. G. Sachs, Phys. Rev. 109, 2212 (1958).
88. S. B. Treiman, R. G. Sachs, Phys. Rev. 103, 1545 (1956).
89. M. L. Good, Phys. Rev. 110, 550 (1958).
90. Л. Б. Окунь, Б. М. Понтекорво, ЖЭТФ 32, 1587 (1957).
91. E. Bolt et al., Phys. Rev. Letts 1, 150 (1958).
92. V. L. Fitch et al., Nuovo Cimento 22, 1160 (1961).
93. U. Camerini et al., Phys. Rev. 128, 362 (1962).
94. R. H. Good et al., Phys. Rev. 124, 1223 (1961).
95. R. P. Ely et al., Phys. Rev. Letts 8, 132 (1962).
96. B. Aubert et al., Phys. Letts 10, 215 (1964).
97. L. Kirsch et al., Phys. Rev. Letts 13, 35 (1964).
98. J. D. Jackson, Elementary Particle Physics and Field Theory, Brandeis Summer School Lectures 1962, N. Y., 1963.

99. T. Kinoshita, *Phys. Rev. Letts* **2**, 477 (1959).
100. Я. А. Смородинский, Ху Ши-ко, *ЖЭТФ* **41**, 438 (1961).
101. A. N. Kamal, *Nuovo Cimento* **33**, 1108 (1964).
102. L. Michel, *Proc. Phys. Soc.* **A63**, 514, 1371 (1950).
103. S. B. Treiman, *Dispersion Relations and Elementary Particles*, Les Houches Summer School, N. Y., 1960.
104. G. Breit, E. U. Condon, R. D. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1936).
105. G. Breit, E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936).
106. N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc.* **A166**, 127 (1938).
107. N. Kemmer, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **34**, 354 (1938).
108. H. Fröhlich, W. Heitler, N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc.* **A166**, 154 (1938).
109. W. Burcham, *Progr. Nucl. Phys.* **4**, 171 (1955).
110. K. C. Bandtel et al., *Phys. Rev.* **95**, 639 (1954).
111. R. H. Hildebrand, *Phys. Rev.* **89**, 1090 (1953).
112. R. A. Schluter, *Phys. Rev.* **95**, 639 (1954).
113. R. A. Schluter, *Phys. Rev.* **96**, 734 (1954).
114. T. D. Lee, *Phys. Rev.* **99**, 337 (1955).
115. D. Feldman, *Phys. Rev.* **103**, 254 (1956).
116. M. H. Alston et al., *Phys. Rev. Letts* **6**, 300 (1961).
117. M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **92**, 833 (1953).
118. T. Nakano, K. Nishijima, *Progr. Theor. Phys.* **10**, 581 (1953).
119. K. Nishijima, *Progr. Theor. Phys.* **13**, 285 (1955).
120. F. Sisler et al., *Nuovo Cimento* **5**, 1700 (1957).
121. F. S. Grawford et al., *Phys. Rev. Letts* **2**, 266 (1959).
122. J. L. Brown et al., *Phys. Rev. Letts* **3**, 563 (1959).
123. C. Baglin et al., *Nuovo Cimento* **18**, 1043 (1960).
124. G. Wentzel, *Rochester Conf. on High Energy Physics*, VIII-5, N. Y., 1956.
125. G. Alexander et al., *Nuovo Cimento* **6**, 478 (1957).
126. S. Taylor et al., *Phys. Rev.* **114**, 359 (1959).
127. B. P. Roe et al., *Phys. Rev. Letts* **7**, 346 (1961).
128. M. Ruderman, R. Finkelstein, *Phys. Rev.* **76**, 1458 (1949).
129. H. L. Friedman, J. Rainwater, *Phys. Rev.* **84**, 684 (1951).
130. S. Lokanathan, J. Steinberger, *Nuovo Cimento*, Suppl. **2**, 151 (1955).
131. H. L. Anderson, C. M. G. Lattes, *Nuovo Cimento* **6**, 1356 (1956).
132. T. Fazzini et al., *Phys. Rev. Letts* **1**, 247 (1958).
133. G. Impeduglia et al., *Phys. Rev. Letts* **1**, 249 (1958).
134. H. L. Anderson et al., *Phys. Rev. Letts* **2**, 53 (1959).
135. H. L. Anderson et al., *Phys. Rev.* **119**, 2050 (1960).
136. J. Ashkin et al., *Nuovo Cimento* **13**, 1240 (1959).
137. E. Di Capua et al., *Phys. Rev.* **133**, B1333 (1964).
138. S. M. Berman, *Phys. Rev. Letts* **1**, 468 (1958).
139. E. J. Konopinski, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **9**, 99 (1959).
140. L. Okun, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* **9**, 61 (1959).
141. J. S. Allen, *The Neutrino*, Princeton, 1958.
142. G. Danby et al., *Phys. Rev. Letts* **9**, 36 (1962).
143. W. H. Barkas et al., *Phys. Rev.* **101**, 778 (1956).



144. Э. Ферми, Элементарные частицы, ИЛ, 1953.
145. F. Coester, Phys. Rev. **84**, 1259 (1951).
146. R. E. Marshak, Phys. Rev. **82**, 313 (1951).
147. W. B. Cheston, Phys. Rev. **83**, 1118 (1951).
148. R. E. Marshak, Meson Physics, N. Y., 1952.
149. R. Durbin et al., Phys. Rev. **83**, 646 (1951).
150. D. L. Clark et al., Phys. Rev. **83**, 649 (1951).
151. F. S. Crawford et al., Phys. Rev. **82**, 97 (1951).
152. С. Ву, статья в сб. «Теоретическая физика 20 века», ИЛ, 1964.
153. Я. А. Смородинский, УФН **67**, 43 (1959).
154. E. C. G. Sudarshan, Brandeis Summer School Lectures, 1959.
155. W. B. Hermannsfeldt et al., Phys. Rev. **107**, 641 (1957).
156. W. B. Hermannsfeldt et al., Bull. Amer. Phys. Soc. **4**, 77 (1959).
157. W. B. Hermannsfeldt et al., Phys. Rev. Letts **1**, 61 (1958).
158. J. S. Allen, Rev. Mod. Phys. **31**, 791 (1959).
159. R. L. Burman et al., Phys. Rev. Letts **2**, 9 (1959).
160. J. S. Allen et al., Phys. Rev. **116**, 134 (1959).
161. M. L. Good, E. J. Lauer, Phys. Rev. **105**, 213 (1957).
162. W. P. Alford, D. R. Hamilton, Phys. Rev. **105**, 673 (1957).
163. J. I. Friedman, V. Telegdi, Phys. Rev. **105**, 1681; **106**, 1290 (1957).
164. M. Goldhaber et al., Phys. Rev. **109**, 1015 (1958).
165. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. **105**, 1671 (1957).
166. H. Frauenfelder et al., Phys. Rev. **106**, 386 (1957).
167. H. Frauenfelder et al., Phys. Rev. **107**, 643 (1957).
168. De-Shalit et al., Phys. Rev. **107**, 1459 (1957).
169. J. D. Ullman et al., Phys. Rev. **122**, 536 (1961).
170. E. C. G. Sudarshan, R. E. Marshak, Phys. Rev. **109**, 1860 (1958).
171. J. J. Sakurai, Nuovo Cimento **7**, 1306 (1958).
172. R. P. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
173. H. L. Anderson et al., Phys. Rev. **91**, 155 (1953).
174. G. Puppi, Proc. of Intern. Conf. on High Energy Physics, стр. 39, Geneva, 1958.
175. H. Y. Chin, E. L. Lomon, Ann. Phys. **6**, 50 (1959).
176. S. W. Barnes et al., Phys. Rev. **117**, 226 (1960).
177. S. W. Barnes et al., Phys. Rev. **117**, 238 (1960).
178. Н. Мотт, Г. Мессси, Теория атомных столкновений, ИЛ, 1954.
179. C. Goebel, Phys. Rev. Letts **1**, 337 (1958).
180. G. F. Chew, F. E. Low, Phys. Rev. **113**, 1640 (1959).
181. F. Bonsignori et al., Nuovo Cimento **18**, 1237 (1960).
182. D. D. Carmony, R. T. Van de Walle, Phys. Rev. Letts **8**, 73 (1962).
183. C. Ceolin, R. Stroffolini, Nuovo Cimento **22**, 437 (1961).
184. J. Kirz et al., Phys. Rev. **126**, 763 (1962).
185. N. Schmitz, Nuovo Cimento **31**, 255 (1964).