Г. В. КАМЕНКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

Г. В. КАМЕНКОВ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В ДВУХ ТОМАХ

ТОМ II

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва 1972 г.

УДК 531.36
534.1
629.7.015:533.6

Второй том избранных трудов содержит монографию Г. В. Каменкова, в которой обобщены результаты работ по устойчивости и колебаниям нелинейных систем. Для многих задач теории устойчивости движения в критических по Ляпунову случаях дано новое оригинальное решение. Изложен ряд новых результатов об устойчивости в критических и близких к критическим случаях. Развит новый метод исследования колебаний нелинейных систем.

КОМИССИЯ ПО ИЗДАНИЮ ТРУДОВ Г. В. КАМЕНКОВА:

А. А. БОГОЯВЛЕНСКИЙ, В. Г. ВЕРЕТЕННИКОВ (уч. секретарь),
А. С. ГАЛИУЛЛИН, С. А. ГОРБАТЕНКО, В. Т. ДУБАСОВ,
Н. Н. КРАСОВСКИЙ (председатель), А. Л. КУНИЦИН,
И. Ф. ОБРАЗЦОВ, И. В. ОСТОСЛАВСКИЙ, Г. К. ПОЖАРИЦКИЙ,
В. В. РУМЯНЦЕВ (зам. председателя), Н. А. ТАЛИЦКИХ

ОТВЕТСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ

РЕДАКТОР

Н. А. ТАЛИЦКИХ

3-3-13; 2-4
512-71(I)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейные задачи теории колебаний привлекают внимание ученых в области механики, физиков, а также инженеров в различных областях техники.

К системам нелинейных дифференциальных уравнений, не допускающих линеаризацию, приводят многие задачи радиоэлектроники, автоматического регулирования, ракетодинамики и др.

Исследование нелинейных систем непосредственным интегрированием соответствующих дифференциальных уравнений, к сожалению, в общих случаях невозможно.

В сочинении Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения», а также в исследованиях Четаева заложены основы прямого метода решения задачи устойчивости, который позволяет обойтись без интегрирования дифференциальных уравнений. Главные трудности в этом методе заключаются в отсутствии вычислительных алгоритмов для построения функций Ляпунова и Четаева.

В настоящей работе делается попытка построения этих функций для нелинейных систем дифференциальных уравнений достаточно широкого класса.

Следует заметить, что в развитие работ Ляпунова и Четаева к настоящему времени опубликовано весьма большое число глубоких исследований. Дать хотя бы краткий обзор всей литературы, относящейся к этой теме, не входило в задачу автора.

Г. Каменков

ВВЕДЕНИЕ

Термину «устойчивость» в настоящее время приписываются различные понятия и даются различные определения. В своих исследованиях я буду пользоваться двумя определениями устойчивости в зависимости от характера решаемых задач.

Первое определение устойчивых и неустойчивых движений, ставшее классическим, дано Ляпуновым в сочинении «Общая задача об устойчивости движения» [1]. Второе определение в общих чертах изложено Пуанкаре в третьем мемуаре его монографии «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями» [2].

Если термину «устойчивость» приписывать значение, которое дано Ляпуновым, то поставленные задачи сводятся к исследованию интегралов систем дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots, \qquad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{0.1}$$

В этих уравнениях величины $x_1, \ldots, x_n$ представляют собой возмущения некоторых известных функций, зависящих от координат и скоростей, в каком-нибудь определенном движении материальной системы, устойчивость которого исследуется. Величины $X_1, \ldots, X_n$ являются известными голоморфными функциями вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, обращающимися в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Математическое определение устойчивости, данное Ляпуновым, формулируется следующим образом.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — суть произвольно задаваемые числа. Если при всяких A_s $(s = 1, \ldots, n)$, как бы малы они ни были, могут быть выбираемы положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ так, чтобы при всяких вещественных x_{s0}, удовлетворяющих условиям

$$|x_{s0}| \leqslant \lambda_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

и при всех t, превосходящих начальное значение t_0, выполнялись неравенства

$$|x_s| < A_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

то невозмущенное движение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ по отношению к величинам x_s устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Под x_{s0} подразумеваются значения функций $x_s(t)$ при $t = t_0$.

Не искажая смысла, вложенного Ляпуновым в определение устойчивости, Четаев дает иную, более удобную запись определения устойчивости: если при всяком произвольно заданном числе A, как бы оно мало ни было, может быть выбираемо положительное число λ так, чтобы при всяких возмущениях $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющих условию

$$x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 \leqslant \lambda$$

и при всяком t, превосходящем t_0, выполнялось неравенство

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 < A$$

то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае — неустойчиво.

Это определение устойчивости положено в основу решения большинства задач, исследуемых в данной работе.

Ляпунов исследовал задачу об устойчивости движения для достаточно малых возмущений, определяя малость любой величины x неравенством $|x| > |x|^{1+\alpha}N$, где α и N — любые положительные числа. Что касается чисел A и λ, то в определении, данном Ляпуновым, эти числа не ограничены снизу, и, следовательно, предельное значение этих чисел в общем случае есть нуль. Хотя последнее обстоятельство и ограничивает область применения результатов Ляпунова, но метод, им разработанный, позволяет решать задачи более широкого класса, чем те, которые рассматривал Ляпунов.

Определение устойчивости, данное Пуанкаре, отлично от определения Ляпунова.

Рассматривая переменные x_s в системе уравнений (0.1) как координаты движущейся точки и предполагая, что правые части системы явно не зависят от времени t, Пуанкаре [2] вводит понятие об устойчивости и неустойчивости траекторий этой точки: «Мы скажем, что траектория подвижной точки устойчива, если, сколь бы мал ни был радиус r окружности (сферы), описанной вокруг начальной точки, подвижная точка, выйдя из этой окружности (или сферы), вновь войдет в нее бесконечное множество раз.

Траектория будет неустойчива, если, выйдя из этой окружности или сферы, подвижная точка уже больше в нее не вернется».

Далее Пуанкаре замечает: «Определенная таким образом устойчивость имеет лишь теоретическую важность. Для приложений следовало бы определить ту часть пространства, из которой не выходит подвижная точка».

В дальнейшем я буду в некоторых случаях пользоваться вышеприведенными соображениями Пуанкаре. Математическая формулировка устойчивости, основанная на этих соображениях, будет дана в главе IX.

Возвращаясь к системе уравнений (0.1), я буду предполагать, что правые части их в области, достаточно близкой к началу координат, разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$. В задачах нелинейных колебаний эту область буду считать конечной.

Многие задачи механики приводятся к исследованию таких систем дифференциальных уравнений возмущенного движения, в которых коэффициенты разложения правых частей являются или постоянными величинами, или периодическими функциями времени t с некоторым общим периодом ω. В этих предположениях преимущественно и будут вестись дальнейшие исследования.

Чаще всего вопрос об устойчивости различного рода систем решается рассмотрением так называемых уравнений первого приближения, т. е. тех уравнений, которые получены из системы (0.1), когда в правых частях ее отбрасываются члены выше первого порядка и рассматриваются системы уравнений в виде

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{0.2}$$

где p_{sk} — вещественные непрерывные и ограниченные функции времени t при $t \geqslant t_0$.

Однако прием этот не всегда приводит к правильному решению, и во многих, весьма важных, с точки зрения приложений, случаях рассмотрение лишь уравнений первого приближения задачи об устойчивости не решает. Такие случаи относятся к особенным или критическим.

Для установившихся движений они характеризуются тем, что определяющее (характеристическое) уравнение, соответствующее системе (0.2),

$$D(\varkappa)=|p_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$$

где p_{sk} — постоянные коэффициенты, кроме корней с отрицательными вещественными частями, имеет нулевые и чисто мнимые корни.

Несмотря на внешнюю частность этих задач, решение их представляет весьма большой интерес как с точки зрения общей теории устойчивости, так и с точки зрения приложений к задачам механики.

Необходимость решения проблемы устойчивости движения и нелинейных колебаний в особенных или критических случаях следует уже из того, что любая задача об устойчивости консервативных систем приводится к исследованию системы дифференциальных уравнений, определяющее уравнение которой имеет нулевые и чисто мнимые корни.

Придавая исключительно большое значение этой проблеме, Ляпунов в «Общей задаче об устойчивости движения» рассмотрел два критических случая устойчивости установившихся движений: 1) определяющее уравнение с одним, равным нулю корнем, 2) определяющее уравнение с двумя чисто мнимыми корнями.

Рассматривая уравнения с периодическими коэффициентами, Ляпунов дал решение аналогичных задач в случаях:

1) характеристичное уравнение с одним равным единице корнем,
2) два мнимых корня с модулями, равными единице.

Необходимо отметить, что из перечисленных четырех задач только первая задача, соответствующая одному нулевому корню, является независимой. Остальные три задачи, как будет видно из содержания главы I, с помощью преобразования переменных, не изменяющих задачи устойчивости, приводятся к первой задаче.

В более поздней работе «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» [1] Ляпунов ставит задачу о двух нулевых корнях определяющего уравнения, при n остальных с отрицательными вещественными частями, намереваясь ограничить свое исследование тем случаем, когда этим двум нулевым корням отвечает одна группа решений. При этом условии задача, поставленная Ляпуновым, приводится к исследованию системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{dx}{dt}=y+X(x,\, y,\, x_1,\, \ldots,\, x_n), \qquad \frac{dy}{dt}=Y(x,\, y,\, x_1,\, \ldots,\, x_n)$$

$$\frac{dx_i}{dt}=p_{i1}x_1+\ldots+p_{in}x_n+X_i(x,\, y,\, x_1,\, \ldots,\, x_n) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

В вышеуказанной работе дается решение этой задачи лишь в том случае, когда $n=0$, т. е. когда исследуемая система является системой второго порядка. Решение задачи при $n\neq 0$ также дано Ляпуновым [3], но стало известно и опубликовано лишь в 1963 г. Хотя Ляпунов и ограничился этими частными случаями, но метод, который он разработал, позволяет решить более общие задачи. Истоки этого метода, по признанию Ляпунова, находятся в монографии Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями».

Непреодолимые трудности решения задач устойчивости, связанные с интегрированием линейных уравнений с переменными коэффициентами или с интегрированием нелинейных систем уравнений с постоянными коэффициентами, обусловили создание нового метода, который, как уже указывалось в предисловии, не связан с интегрированием соответствующих уравнений. Этот метод в настоящее время именуется прямым методом. В основании этого метода лежат знаменитые теоремы Ляпунова об устойчивости и Четаева о неустойчивости.

Исследование устойчивости движения с помощью этих теорем заключается в отыскании вещественных функций V вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, которые вместе со своими полными производными по времени, вычисленными в соответствии с уравнениями (0.1), обладают некоторыми специальными свойствами. Остановимся подробнее на функциях прямого метода.

Пусть V представляет собой непрерывную и однозначную функцию переменных $t, x_1, \ldots, x_n$ для всех значений этих переменных, находящихся в области

$$t > t_0, \qquad |x_s| \leqslant H \tag{0.3}$$

и обращающихся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Функция V называется знакопостоянной, если в области (0.3) она принимает кроме нулевых значений значения какого-либо одного знака. Функция V, не зависящая явно от t, называется знакоопределенной в области (0.3), если она знакопостоянна и обращается в нуль только при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Функция V, зависящая явно от t, называется знакоопределенной в области (0.3), если она в этой области удовлетворяет условиям

$$V \geqslant W, \ V \leqslant -W$$

где W — не зависящая от t знакоопределенная положительная функция.

Всякая функция V, для которой постоянная H может быть выбрана настолько малой, чтобы для числовых значений этой функции при условии (0.3) существовал некоторый высший предел, называется ограниченной.

Ограниченная функция может быть такова, что для всякого положительного ε, как бы оно мало ни было, найдется такое отличное от нуля число h, при котором для всех значений переменных, удовлетворяющих условиям

$$t > t_0, \qquad |x_s| \leqslant h$$

будем иметь

$$V \leqslant \varepsilon$$

В этом случае считают, что V допускает бесконечно малый высший предел.

При решении задач устойчивости прямым методом одновременно с функциями V рассматривают выражение

$$\frac{dV}{dt} = V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n$$

представляющее собой полную производную функцию V по t, взятую в предположении, что $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе уравнений (0.1). Это выражение, так же как и функция V, является функцией переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, обладающей всеми свойствами, присущими функции V.

Теорема Ляпунова об устойчивости формулируется следующим образом.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти знакоопределенную функцию V, производная которой V' в силу этих уравнений была бы или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Если функция V, удовлетворяющая условиям теоремы, допускает бесконечно малый высший предел, а производная ее представляет знакопределенную функцию, то всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет приближаться к нему асимптотически. Функции V, удовлетворяющие теореме Ляпунова, называются функциями Ляпунова.

Теорема о неустойчивости, доказанная Четаевым, имеет следующую формулировку [4].

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что

1) для некоторой допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует область, где $VV'>0$;

2) если для некоторых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в этой области ($VV' > 0$) возможно выделить область, где некоторая функция $W > 0$, на границе которой ($W = 0$) значение полной производной по времени W' суть одного какого-либо знака;

3) производная V', рассматриваемая как функция времени, в области ($W > \varepsilon$) имеет точный низший предел, отличный от нуля, то невозмущенное движение неустойчиво.

Следствие. Если рассматриваемая в теореме область VV' ограничена поверхностью $V = 0$ и при этом $V' \gg 0$, то за функцию W теоремы возможно взять функцию V.

Функции, удовлетворяющие этой теореме, называются функциями Четаева. Кроме этих двух теорем я в дальнейшем буду часто ссылаться на теоремы Ляпунова из сочинения «Общая задача об устойчивости движения», формулировки которых считаю целесообразным здесь привести, не приводя их доказательства. Эти теоремы являются вычислительным аппаратом для отыскания функций Ляпунова и Четаева.

Рассмотрим следующую задачу {19}[1].

Дано уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_s} = \varkappa V \tag{0.4}$$

в котором $\varkappa$ означает некоторую постоянную. Требуется найти все значения последней, при которых этому уравнению можно удовлетворить (не равными нулю тождественно) целыми однородными функциями V данной степени m величин $x_1, \ldots, x_n$.

Легко составить алгебраическое уравнение, которому должны удовлетворять искомые значения $\varkappa$. Функция V заключает в себе

$$N = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,2\,3\ldots m} = \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1\,2\,3\ldots(n-1)}$$

коэффициентов. Таково же будет и число уравнений, линейных и однородных относительно последних, которые получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых произведениях вида $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}$ в обеих частях уравнения (0.4). Исключая из этих уравнений коэффициенты функции V, получим алгебраическое уравнение следующего вида:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varkappa & a_{12} & \ldots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22}-\varkappa & \ldots a_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{N1} & a_{N2} & \ldots a_{NN}-\varkappa \end{vmatrix} = 0$$

где a_{ij} — известные линейные формы коэффициентов p_{sk}.

Уравнение это будет, следовательно, N-й степени.

[1] Здесь и далее цифра в фигурных скобках означает номер параграфа сочинения А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

Определитель, представляющий первую часть его, обозначим через $D_m(\varkappa)$.

Рассматривая всевозможные числа m, получим ряд определителей: $D_1(\varkappa), D_2(\varkappa), D_3(\varkappa), \ldots$, из которых первый не будет отличаться от того, который мы обозначили через $D(\varkappa)$ и который в дальнейшем будем называть основным. Все остальные называются производными, так что $D_m(\varkappa)$ будет $(m-1)$-м производным определителем.

Зная все корни определяющего уравнения, легко найти и все корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$, ибо можно доказать следующее предложение.

Теорема {19}. Если $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ суть все корни определяющего уравнения, то все корни уравнения $D_m(\varkappa) = 0$ найдутся по формуле

$$\varkappa = m_1 \varkappa_1 + \ldots + m_n \varkappa_n \tag{0.5}$$

когда числам $m_1, \ldots, m_n$ будем давать всевозможные целые неотрицательные значения, удовлетворяющие соотношению $m_1 + \ldots + m_n = m$ так, чтобы одна и та же система значений не встречалась более одного раза.

Когда определяющее уравнение не имеет кратных корней, а также когда в случае существования таких корней каждый из них обращает в нуль все миноры основного определителя о наивысшего возможного при кратности этого корня порядка, тем же свойством обладает и каждый кратный корень уравнения $D_m(\varkappa) = 0$ по отношению к минорам определителя $D_m(\varkappa)$.

Теорема I {20}. Когда корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ определяющего уравнения таковы, что при данном целом положительном m для них невозможны никакие соотношения вида

$$m_1 \varkappa_1 + \ldots + m_n \varkappa_n = 0$$

в которых все m_s были бы целыми неотрицательными числами, дающими в сумме m, то всегда можно найти — и притом только одну целую однородную функцию V степени m величин x_s, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1} x_1 + p_{s2} x_2 + \ldots + p_{sn} x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = U \tag{0.6}$$

при произвольно заданной целой однородной функции U величин x_s той же степени m.

Теорема II {20}. Когда вещественные части всех корней $\varkappa_s$ отрицательны и когда в уравнении (0.6) функция U есть знакоопределенная форма какой-либо четной степени m, то удовлетворяющая этому уравнению форма m-й степени V будет также знакоопределенной и притом противоположной по знаку с U.

Теорема III {20}. Если между корнями $\varkappa_s$ находятся такие, вещественные части которых положительны, и если при данном четном m корни эти удовлетворяют условию теоремы I {20}, то всякий раз, когда в уравнении (0.6) U есть знакоопределенная форма m-й степени, удовлетворяющая этому уравнению, форма той же степени V, наверное, не будет знакопостоянной противоположного знака с U.

Теорема I {24}. Когда определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет только корни с отрицательными вещественными частями, невозмущенное движение устойчиво и притом так, что всякое возмущенное движение, для которого возмущения достаточно малы, будет асимптотически приближаться к невозмущенному.

Теорема III {24}. Когда между корнями определяющего уравнения находятся такие, вещественные части которых положительны, невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема [30]. Пусть дана система уравнений с частными производными вида

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)\frac{\partial z_j}{\partial x_s}=q_{j1}z_1+\ldots+q_{jk}z_k+Z_j \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{0.7}$$

где $X_1, \ldots, X_n, Z_1, \ldots, Z_k$ суть голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, $z_1, \ldots, z_k$, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные делаются нулями; притом функции X_s не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка, а функции Z_j если и содержат члены первого порядка, то только не зависящие от величин $z_1, \ldots, z_k$. Коэффициенты p_{si}, q_{jl} суть некоторые постоянные.

Тогда, если $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ суть корни уравнения

$$\Delta(\varkappa)=\begin{vmatrix} p_{11}-\varkappa & p_{12} & \ldots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-\varkappa & \ldots p_{2n} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots p_{nn}-\varkappa \end{vmatrix}=0$$

а $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — корни уравнения

$$D(\nu)=\begin{vmatrix} q_{11}-\nu & q_{12} & \ldots q_{1k} \\ q_{21} & q_{22}-\nu & \ldots q_{2k} \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ q_{k1} & q_{k2} & \ldots q_{kk}-\nu \end{vmatrix}=0$$

если притом вещественные части $\varkappa_s$ отличны от нуля и одного и того же знака и если между величинами $\varkappa_s$ и ν_j не существует никаких соотношений вида

$$m_1\varkappa_1+\ldots+m_n\varkappa_n=\nu_j \qquad (j=1,\ldots,k) \tag{0.8}$$

где все m_s были бы целыми неотрицательными числами, удовлетворяющими условию $\Sigma m_s > 0$, то всегда найдется одна определенная система голоморфных функций $z_1, \ldots, z_k$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих уравнениям (0.7) и обращающихся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Примечание I. Определение величин $z_1, \ldots, z_k$ в виде рядов, формально удовлетворяющих уравнениям (0.7), можно осуществить лишь при условии (0.8), не налагая дополнительных условий на корни уравнения $\Delta(\varkappa) = 0$.

Примечание II. Заметим также, что теорема имеет место для систем с периодическими ограниченными коэффициентами.

Все перечисленные теоремы в значительной степени облегчают отыскание функций прямого метода.

В предлагаемой работе даны решения задач устойчивости в различных критических по Ляпунову случаях, полученные мною за период 1934—1966 гг.; исследованы задачи об устойчивости движения в случаях, близких к критическим. В последних рассматриваются системы дифференциальных уравнений, определяющее уравнение которых имеет по крайней мере один малый вещественный корень или пару комплексных корней с малой вещественной частью. При этом я был вынужден отказаться от классического определения устойчивости, данного Ляпуновым, и пользоваться новым определением, которое вытекает из соображений Пуанкаре.

Рассмотрены также различные вопросы теории нелинейных колебаний.

Приведу краткое содержание настоящей работы. Первые десять глав посвящены исследованию различных задач устойчивости движения. Последние две главы посвящены вопросам нелинейных колебаний.

В главе I излагается решение задач в критических случаях, разобранных Ляпуновым, и в этой части она дублирует материал, изложенный им в «Общей задаче об устойчивости движения». Несмотря на это, я счел целесообразным изложить решение этих задач, подходя к построению функций прямого метода приемом, несколько отличным от того, которым пользовался Ляпунов.

В главе II исследуется проблема двух нулевых корней определяющего уравнения с одной группой решений, рассмотренная Ляпуновым. Исследуя эту задачу, я отказался от введения специальных функций, которыми пользовался Ляпунов, ограничившись применением обычных sin и cos.

В главе III доказываются основные теоремы общей задачи устойчивости в критических случаях. Формулируется так называемый «принцип сведения» по функциям Ляпунова и Четаева. Дается способ приведения задачи устойчивости в критическом случае m нулевых и q пар чисто мнимых корней к критическому случаю кратного нулевого корня. Обобщается теорема Ляпунова {30}. Показывается, что в случаях, несущественно особенных от исследования устойчивости периодических движений, всегда можно перейти к исследованию устойчивости равновесия.

В главе IV исследуется общий случай задачи двух нулевых корней с двумя группами решений.

Глава V посвящена решению задачи одного нулевого и пары чисто мнимых корней определяющего уравнения при n остальных с отрицательными вещественными частями.

В главе VI решается задача двух пар чисто мнимых корней для системы $(n+4)$-го порядка.

Глава VII посвящена общему случаю, когда определяющее уравнение имеет m нулевых корней, q пар чисто мнимых и p корней с отрицательными вещественными частями.

В главе VIII рассмотрены вопросы устойчивости канонических систем.

В главе IX решается задача об устойчивости установившихся движений в случаях, близких к критическим.

В главе X рассмотрен случай неустановившихся движений. В этой главе вводится определение устойчивости движения на конечном интервале времени и даются необходимые и достаточные условия устойчивости по первому приближению.

В главе XI рассмотрены колебания автономных систем, в главе XII — неавтономных систем.

ГЛАВА I

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ, ИССЛЕДОВАННЫЕ ЛЯПУНОВЫМ

В этой главе рассматриваются системы дифференциальных уравнений вида

$$z_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} q_{sk} z_k + Z_s(z_i, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, n_1) \tag{1.1}$$

где q_{sk} — или постоянные величины, или непрерывные и периодические функции t с общим вещественным периодом ω. Функции Z_s для малых значений $z_1, \ldots, z_{n_1}$ разлагаются в абсолютно сходящиеся степенные ряды по этим переменным, не содержащие членов первого порядка. Коэффициенты этих рядов обладают свойствами коэффициентов q_{sk}.

§ 1. Один нулевой корень определяющего уравнения. Предположим, что система (1.1) автономна и среди корней уравнения $|q_{sk} - \delta_{sk} \varkappa| = 0$ имеется один нулевой корень и n корней с отрицательными вещественными частями ($n = n_1 - 1$). Линейной подстановкой $y = a_1 z_1 + \ldots + a_{n+1} z_{n+1}$ преобразуем систему (1.1) к виду

$$y^{\cdot} = Y^*(y, z_i), \qquad z_s^{\cdot} = \Sigma p_{sk} z_k + p_s y + Z_s^*(y, z_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Вводя замену $z_s = y_s + u_s(y)$, из (1.2) получим

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + p_s y + Z_s^*(y, y_1 + u_1, \ldots, y_n + u_n) -$$

$$- \frac{du_s}{dy} Y^*(y, y_1 + u_1, \ldots, y_n + u_n) \tag{1.3}$$

Совокупности членов, не зависящих от $y_1, \ldots, y_n$, в правых частях этих уравнений определятся выражениями

$$H_s(y) = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + p_s y + Z_s^{**}(y, u_i) - \frac{du_s}{dy} Y^{**}(y, u_i)$$

Определим функции $u_s(y)$ из уравнений $H_s(y) = 0$. Эти уравнения можно формально удовлетворить рядами

$$u_s = c_{s1} y + c_{s2} y^2 + \ldots + c_{sk} y^k + \ldots \tag{1.4}$$

Такое определение u_s всегда возможно[1]. Эти ряды в большинстве случаев будут расходящимися.

Принимая за функции u_s многочлены вида

$$u_s = c_{s1} y + c_{s2} y^2 + \ldots + c_{sk-1} y^{k-1} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

[1] См. примечание к теореме {30} на стр. 13.

и считая число k достаточно большим, мы в результате подстановки u_s в выражения $H_s(y)$ будем иметь

$$H_s(y) = g_{s0}\, y^{m_s} + g_{s1}\, y^{m_s+1} + \dots \qquad (s = 1, \dots, n)$$

где $m_s \geqslant k$.

Подставим в правую часть первого уравнения (1.2)

$$z_s = y_s + c_{s1}\, y + c_{s2}\, y^2 + \dots + c_{sk-1}\, y^{k-1} \qquad (s = 1, \dots, n)$$

Обозначим в полученном выражении совокупность членов, не зависящих от $z_1, \dots, z_n$, через

$$H(y) = g_0\, y^m + g_1\, y^{m+1} + \dots$$

Относительно числа m мы можем сделать два предположения: 1) $m \leqslant k$ и 2) $m > k$.

Первое предположение характеризует общий случай, второе возможно при наличии бесконечного числа известных соотношений между коэффициентами правых частей системы (1.2). В этом случае задача об устойчивости может быть решена лишь при рассмотрении всей правой части уравнений возмущенного движения. Такие случаи в дальнейшем будем называть существенно особенными.

Легко убедиться, что ряды (1.4) во втором случае будут определяться из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, u_k + p_s y + Z_s^{**}(y, u_i) = 0 \qquad (s, i = 1, \dots, n)$$

и при достаточно малых значениях y будут абсолютно сходящимися (см. теорему § 19).

Если в первом случае будем иметь $m = k$, то, обрывая ряд (1.4) на члене $c_{sk} y^k$, мы получим $m_s \geqslant m + 1$.

В результате преобразований мы придем к системе

$$\begin{gathered} y^{\cdot} = g_0\, y^m + g_1\, y^{m+1} + \dots + Y(y, y_i) \\ y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, y_k + g_{s0}\, y^{m_s} + g_{s1}\, y^{m_s+1} + \dots + Y_s(y, y_i) \\ (s, i = 1, \dots, n;\ m_s \geqslant m + 1) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Функции Y и Y_s обращаются в нуль при $y_1 = \dots = y_n = 0$.

Во втором случае все g_ν и $g_{s\nu}$ $(s = 1, \dots, n;\ \nu = 0, 1, 2, \dots)$ обратятся в нули.

Представим функции $Y(y, y_i)$ и $Y_s(y, y_i)$ $(s = 1, \dots, n)$ в виде

$$\begin{gathered} Y(y, y_i) = y_1 P_1 + \dots + y_n P_n + Y_1(y, y_i) \\ Y_s(y, y_i) = y_1 P_{s1} + \dots + y_n P_{sn} + Y_{s1}(y, y_i) \qquad (s, i = 1, \dots, n) \end{gathered}$$

где Y_1 и Y_{s1} обращаются в нуль при $y_1 = \dots = y_n = 0$ и не содержат линейных членов в отношении этих переменных. Коэффициенты P_s и P_{sk} представляются голоморфными функциями y, обращающимися в нуль при $y = 0$.

Преобразуем систему (1.5), положив

$$x = y - x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_n v_n, \quad y_s = x_s \qquad (s = 1, \dots, n) \tag{1.6}$$

подразумевая под v_s голоморфные функции y, подлежащие определению.

Нетрудно убедиться, что если эти функции определить из уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{n} v_s (p_{s1} + P_{s1}) = P_1 \\ \sum_{s=1}^{n} v_s (p_{s2} + P_{s2}) = P_2, \dots, \sum_{s=1}^{n} v_s (p_{sn} + P_{sn}) = P_n \end{gathered} \tag{1.7}$$

то первое уравнение системы (1.5) будет содержать линейные члены в отношении $x_1, \ldots, x_n$ только с множителями x в степени не ниже m, а члены, не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, своего значения не изменят. Остальные n уравнений сохранят прежнюю структуру.

В результате преобразования получим

$$x^{\cdot} = g_0 x^m + g_1 x^{m+1} + \ldots + x^m Q_m + x^{m+1} Q_{m+1} + \ldots + X(x, x_i)$$

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + g_{s0} x^{m_s} + g_{s1} x^{m_s+1} + \ldots + X_s(x, x_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \quad (1.8)$$

В этой системе $Q_m, Q_{m+1}, \ldots$ являются линейными формами от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Функции X и X_s обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и, кроме того, функция X не содержит линейных членов в отношении этих переменных.

Преобразования системы (1.1) к виду (1.8) таковы, что решение задачи об устойчивости в переменных z_s эквивалентно решению той же задачи в переменных x_s. Однако структура правых частей системы уравнений (1.8) значительно облегчает построение функции Ляпунова.

В случае четного m функцию Ляпунова, отвечающую системе (1.8), можно взять в виде $V = x + V_1$, подразумевая под V_1 квадратичную форму, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n) = g_0 (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \quad (1.9)$$

Производную функции V по t в силу уравнений (1.8) можно представить в виде

$$\frac{dV}{dt} = g_0 (x^m + x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} x^\nu \psi_\nu (x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_s x_k \psi_{sk} (x, x_1, \ldots, x_n) \quad (1.10)$$

Правая часть этого уравнения представляет знакоопределенную функцию от $x, x_1, \ldots, x_n$ одинакового знака с g_0. Соответствующим выбором переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ знак функции V можно сделать совпадающим со знаком g_0. Для этого достаточно положить $x_1 = \ldots = x_n = 0$, а знак x выбрать одинаковым со знаком g_0. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво {16}. Если m — нечетное, то функцию V выберем в виде

$$V = {}^1/_2 x^2 + V_1$$

Производной этой функции по t можно придать вид

$$\frac{dV}{dt} = g_0 (x^{m+1} + x_1^2 + \ldots + x_n^2) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} x^\nu \psi_\nu (x_1, \ldots, x_n) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_s x_k \psi_{sk} (x, x_1, \ldots, x_n)$$

При $g_0 > 0$ dV/dt будет определенно-положительной функцией от $x, x_1, \ldots, x_n$. Функцию V соответствующим выбором переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ можно сделать также положительной. Отсюда следует неустойчивость невозмущенного движения.

Если $g_0 < 0$, то V_1, определяемая уравнением (1.9), будет определенно-положительной функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$, а функция V — определенно-положительной от переменных $x, x_1, \ldots, x_n$.

Так как dV/dt при $g_0 < 0$ является определенно-отрицательной функцией, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь второй случай, когда в системе (1.5)

$$g_0 = g_1 = \dots = g_{s0} = g_{s1} = \dots = 0 \qquad (s = 1, \dots, n)$$

Если систему (1.5) при этом предположении преобразовать согласно замене (1.6) и функции $v_1, \dots, v_n$ определить из уравнений (1.7), то система (1.8) примет вид

$$x^{\cdot} = X(x, x_i), \quad x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, x_i) \qquad (s, i = 1, \dots, n) \tag{1.11}$$

В этой системе функция $X(x, x_i)$ не содержит линейных членов в отношении $x_1, \dots, x_n$ и обращается в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$. Функции $X_s(x, x_i)$ могут содержать линейные члены в отношении $x_1, \dots, x_n$, но они также должны обращаться в нуль, когда все эти переменные равны нулю.

Функцию Ляпунова, отвечающую системе (1.11), можно взять в виде

$$V = x^2 + V_1$$

определяя функцию V_1 из уравнения (1.9), если в нем положить $g_0 = -1$.

Производную функции V по t в силу уравнений (1.11) можно записать в виде

$$\frac{dV}{dt} = -(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_s x_k \psi_{sk}(x, x_1, \dots, x_n)$$

где ψ_{sk} обращается в нуль при $x = x_1 = \dots = x_n = 0$.

Следовательно, dV/dt представляет постоянно-отрицательную функцию переменных $x, x_1, \dots, x_n$. Функция же V является определенно-положительной. Отсюда следует, что невозмущенное движение устойчиво.

Примечание 1. Заключения об устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения по уравнениям (1.8) и (1.11) останутся в силе и в том случае, когда функции $X(x, x_i)$ и $X_s(x, x_i)$ в своих разложениях имеют коэффициенты, зависящие от t. Коэффициенты форм Q_m, Q_{m+1}, ... и коэффициенты $g_1, g_2, \dots, g_{s0}, g_{s1}, \dots$ могут также являться функциями времени. Эти функции должны удовлетворять условиям непрерывности и ограниченности по t.

Примечание 2. Преобразование системы (1.5) согласно формулам (1.6) не изменяет коэффициента g_0. Это преобразование было введено нами для упрощения построения функции Ляпунова. Поэтому при решении задач достаточно произвести преобразования системы (1.1) в систему (1.5).

Система (1.2) может быть приведена к виду (1.5) способом, указанным Ляпуновым [28].

§ 2. Один корень характеристичного уравнения, равный единице. Рассмотрим систему уравнений (1.1), предполагая, что коэффициенты g_{sk}, а также и коэффициенты разложений функций Z_s по степеням $z_1, \dots, z_n$ являются вещественными, непрерывными и периодическими функциями t с общим периодом 2π.

Предположим, что один из корней характеристичного уравнения этой системы равен единице, а остальные n корней имеют модули, меньшие единицы ($n = n_1 - 1$).

В этом случае систему (1.1) линейной подстановкой с вещественными и периодическими коэффициентами можно преобразовать к виду

$$x^{\cdot} = X(x, x_i, t), \quad x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, x_i, t) \qquad (s, i = 1, \dots, n) \tag{1.12}$$

где p_{sk} — постоянные величины, а функции X, X_s обладают свойствами функций Z_s.

Обозначим через $X^{(0)}(x, t)$ и $X_s^{(0)}(x, t)$ совокупности членов выше первого порядка в правых частях этих уравнений, не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$. Представим

$$X^{(0)}(x, t) = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} A^{(k)} x^k, \quad X_s^{(0)}(x, t) = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} A_s^{(k)} x^k$$

где $A^{(k)}$ и $A_s^{(k)}$ — периодические функции t с периодом 2π.

Преобразуем систему (1.12), положив

$$x_s = y_s + u_s(x, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

Переменные y_s будут удовлетворять уравнениям

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}(y_k + u_k) + X_s(x, y_1 + u_1, \ldots, y_n + u_n, t) - \frac{\partial u_s}{\partial t} -$$
$$- \frac{\partial u_s}{\partial x} X(x, y_1 + u_1, \ldots, y_n + u_n, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.14}$$

Совокупности членов в правых частях этой системы, не зависящие от $y_1, \ldots, y_n$, будут иметь вид

$$Y_s^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, u_i, t) - \frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial x} X(x, u_i, t)$$
$$(s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

Уравнениям $Y_s^{(0)} = 0$ можно удовлетворить по крайней мере формально рядами[1]

$$u_s = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} a_s^{(k)}(t) x^k \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

где $a_s^{(k)}(t)$ — вещественные, непрерывные и периодические функции t с периодом 2π.

Относительно функций $X(x, u_i, t)$ можно сделать два предположения: 1) $X(x, u_i, t) \equiv 0$, 2) $X(x, u_i, t) \not\equiv 0$.

Первый случай является частным случаем, так как возможен при наличии бесчисленного множества известных числовых соотношений между коэффициентами разложений функций Z_s.

Для этого случая функции u_s определятся из уравнений

$$Y_s^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, u_i, t) - \frac{\partial u_s}{\partial t} = 0 \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.17}$$

и будут представлять собой ряды вида (1.16), абсолютно сходящиеся по крайней мере для достаточно малых значений $|x|$ и для любых вещественных значений t (теорема § 21 главы III).

Систему уравнений (1.12) для переменных $x, y_1, \ldots, y_n$ можно записать в виде

$$x^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} y_k P_k(x, t) + X^{(2)}(x, y_i, t)$$
$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k P_{sk}(x, t) + Y_s^{(2)}(x, y_i, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.18}$$

где $P_k(x, t)$ и $P_{sk}(x, t)$ — голоморфные функции x с коэффициентами, обладающими свойствами коэффициентов $g_{sk}(t)$. Функции $X^{(2)}$ и $Y_s^{(2)}$ обра-

[1] См. примечание к теореме {30} на стр. 13.

щаются в нуль при $y_1 = \dots = y_n = 0$ и не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка по отношению к этим переменным.

Рассмотрим частный случай, который может представить система (1.18).

Предположим, что все функции $P_k(x, t) \equiv 0$. При этом предположении вопрос об устойчивости будет решаться так же, как и в случае одного нулевого корня. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = x^2 + V_1(y_i)$$

где V_1 — квадратичная форма от $y_1, \dots, y_n$, определяемая из уравнения (1.9), если в нем положить $g_0 = -1$.

Производную функции V можно представить в виде

$$V' = -\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \psi_{sk}\, y_s y_k$$

Функции $\psi_{sk}(x, y_1, \dots, y_n)$ обращаются в нуль при $x = y_1 = \dots = y_n = 0$.

Отсюда видно, что V' будет определенно-отрицательной функцией $y_1 \dots, y_n$ и постоянно-отрицательной функцией $x, y_1, \dots, y_n$.

Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

Покажем, что к этому частному случаю приводится любой другой, представляемый системой (1.18).

Пусть $P_k(x, t) \not\equiv 0$. Преобразуем систему (1.18), положив

$$x = y + \sum_{s=1}^{n} y_s v_s(x, t)$$

Функции $v_s(x, t)$ определим так, чтобы в правой части первого уравнения системы (1.18) после преобразования отсутствовали линейные члены относительно $y_1, \dots, y_n$.

Новая переменная y будет удовлетворять уравнению

$$y^{\cdot} + \sum_{s=1}^{n} y_s \left[\frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial v_s}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k P_k(x, t) + X^{(2)}(x, y_i, t)\right)\right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} v_s(x, t)\left[(p_{s1} + P_{s1}) y_1 + (p_{s2} + P_{s2}) y_2 + \dots + (p_{sn} + P_{sn}) y_n +\right.$$

$$\left. + Y_s^{(2)}(x, y_i, t)\right] = \sum_{k=1}^{n} y_k P_k(x, t) + X^{(2)}(x, y_i, t)$$

Представим совокупность членов в этом уравнении, содержащих $y_1, \dots, y_n$ в первой степени, в виде

$$Y^{(1)} = \sum_{s=1}^{n} y_s Q_s(x, t)$$

где

$$Q_s(x, t) = -\partial v_s/\partial t - \sum_{k=1}^{n} p_{ks} v_k - \sum_{k=1}^{n} P_{ks} v_k + P_s \qquad (s = 1, \dots, n)$$

Из уравнений $Q_s(x, t) = 0$ функции v_s определятся в виде рядов с периодическими коэффициентами вида

$$v_s(x, t) = \Sigma\, b_s^{(k)}(t)\, x^k$$

которые будут абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|x|$ и для любых вещественных значений t (теорема § 21 главы III).

Следовательно, решение задачи об устойчивости в переменных $x, y_1, \dots, y_n$ эквивалентно решению той же задачи в переменных $y, y_1, \dots, y_n$. Но преобразованная система по структуре ничем не отличается от системы (1.18), если в последней положить $P_k \equiv 0$ ($k = 1, \ldots, n$), а этот случай нами уже разобран.

Отметим, что система (1.18) имеет решение $x = c$, $y_1 = \ldots = y_n = 0$, а система (1.12) при условии $X(x, y_i, t) \equiv 0$ имеет периодическое решение вида $x = c$, $x_s = u_s\ (c,\ t)$.

Рассмотрим случай $X(x, u_i, t) \not\equiv 0$.

Ряды (1.16) при этом предположении в большинстве случаев оказываются расходящимися. Возьмем вместо функции u_s вида (1.16) функции

$$u_s^* = \sum_{k\geqslant 2}^{N} a_s^{(k)}(t)\, x^k$$

и произведем замену

$$x_s = y_s + u_s^*(x, t)$$

Функции $X(x, u_i^*, t)$ и $X_s(x, u_i^*, t)$ при таком определении u_s^* можно представить в виде

$$X(x, u_i^*, t) = \sum_{k\geqslant m}^{\infty} \alpha^{(k)}(t)\, x^k, \qquad X_s(x, u_i^*, t) = \sum_{k\geqslant N+1}^{\infty} \alpha_s^{(k)}(t)\, x^k \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.19}$$

где $m \geqslant 2$.

Преобразованную систему можно записать в виде

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = \alpha^{(m)}(t)\, x^m + \ldots + X^{(1)}(x, y_i, t) \\ y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, y_k + \alpha_s^{(m+k+1)}(t)\, x^{m+k+1} + \ldots + Y_s^{(1)}(x, y_i, t) \\ (s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.20}$$

где k — сколь угодно большое число ($k = N - m$), а функции $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$ обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Преобразуем систему (1.20), положив

$$x = y + \sum_{p=m}^{m+k} v_p(t)\, x^p \tag{1.21}$$

Переменная y будет удовлетворять уравнению

$$y^{\cdot} = -\sum_{p=m}^{m+k} x^p \frac{dv_p}{dt} - \sum_{p=m}^{m+k} v_p(t)\, p x^{p-1} [\alpha^{(m)} x^m + \ldots + \alpha^{(m+k)} x^{m+k} + \\ + \ldots + X^{(1)}(x, y_i, t)] + \alpha^{(m)} x^m + \ldots + \alpha^{(m+k)} x^{m+k} + \ldots + X^{(1)}(x, y_i, t)$$

Коэффициент при x^m в правой части этого уравнения будет иметь вид

$$-\frac{dv_m}{dt} + \alpha^{(m)} = g_m$$

Коэффициент при $x^{m+\delta}$ можно записать следующим образом:

$$-\frac{dv_{m+\delta}}{dt} + \alpha^{(m+\delta)} + F_{m+\delta}(v_m, \ldots, v_{m+\delta-1}) = g_{m+\delta}$$

где $F_{m+\delta}$ — многочлен от тех v_p, у которых $p \leqslant m + \delta - 1$.

Определим периодические функции $v_p(t)$ так, чтобы все $g_p(p = m, m + 1, \ldots, m + k)$ были постоянными величинами. Для этого необходимо и достаточно числа g_p определить из уравнений

$$\int_0^{2\pi} (\alpha^{(m)} - g_m)\,dt = 0, \qquad \int_0^{2\pi} (\alpha^{(m+\delta)} - g_{m+\delta} + F_{m+\delta})\,dt = 0 \quad (\delta = 1, \ldots, k)$$

Тогда все функции v_p $(p = m, m + 1, \ldots, m + k)$ будут периодическими с периодом 2π

$$v_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^t (\alpha^{(m)} - g_m)\,dt$$

$$v_{m+\delta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^t (\alpha^{(m+\delta)} - g_{m+\delta} + F_{m+\delta})\,dt$$

В дальнейшем при решении задачи могут представиться два случая: 1) все $g_{m+\delta} = 0$ $(\delta = 0, 1, \ldots, k)$; 2) $g_{m+\delta} \neq 0$ по крайней мере для одного значения $\delta \leqslant k$.

Второй случай является общим, а первый — возможен при наличии известных числовых соотношений между коэффициентами разложения функций Z_s.

Рассмотрим вначале второй случай.

Пусть первый коэффициент $g_{m+\delta}$, отличный от нуля, соответствует $\delta \leqslant k$. Тогда систему уравнений (1.20) в переменных y, $y_1, \ldots, y_n$ можно представить в виде

$$y^{\cdot} = g_{m+\delta}\, y^{m+\delta} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} y_k P_k(y, t) + Y^{(2)}(y, y_i, t)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, y_k + \alpha_s^{(m+k+1)}(t)\, y^{m+k+1} + \ldots + \sum_{k=1}^{n} y_k P_{ks}(y, t) + Y_s^{(2)}(y, y_i, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \qquad (1.22)$$

где P_k и P_{ks} — голоморфные функции y с периодическими коэффициентами, разложение которых по степеням y может начинаться с линейных членов. Функции $Y^{(2)}$ и $Y_s^{(2)}$ обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$ и не содержат в своих разложениях членов ниже второго порядка по отношению к $y_1, \ldots, y_n$.

Если окажется, что разложение функций P_k не содержит y в степени ниже $m + \delta$, то вопрос об устойчивости будет решаться знаком числа $g_{m+\delta}$ и числом $m + \delta$ (§ 1, примечание 1). В случае $g_{m+\delta} > 0$ невозмущенное движение неустойчиво при любом числе $m + \delta$. В случае $g_{m+\delta} < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво при нечетном $m + \delta$ и неустойчиво — при четном $m + \delta$.

Легко убедиться, что к этому частному случаю приводится любая система (1.22). Действительно, полагая

$$y = z + \sum_{k=1}^{n} y_k u_k(y, t)$$

и определяя функции u_k из уравнений

$$-\frac{\partial u_k}{dt} - \sum_{s=1}^{n} u_s [p_{ks} + P_{ks}(y, t)] + P_k(y, t) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

в виде рядов, которые будут абсолютно сходящимися для достаточно малых значений $|y|$ и для любых действительных значений t (теорема § 21 главы III), мы в результате преобразования получим новую систему, аналогичную системе (1.22), в которой функции, играющие роль P_k, не будут содержать в своих разложениях переменную z в степени ниже $m+\delta$. А этот случай нами уже разобран.

Отметим, что последнее преобразование не изменяет числа $g_{m+\delta}$ и при решении конкретных задач это преобразование проводить не следует.

Нам осталось рассмотреть тот частный случай, когда все $g_{m+\delta}=0$ для всех $\delta \leqslant m+k+1$, как бы велико число k мы ни брали.

Если систему (1.12) преобразовать с помощью замены (1.13), подразумевая под u_s формальные ряды (1.16), то в результате преобразования мы получим систему

$$x^{\cdot}=\alpha^{(m)}(t)\,x^m+\ldots+X^{(1)}(x,\,y_i,\,t)$$

$$y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}\,y_k+Y_s^{(1)}(x,\,y_i,\,t) \qquad (s,\,i=1,\ldots,n) \tag{1.23}$$

в которой функции $X^{(1)}$ и $Y_s^{(1)}$ обращаются в нуль при $y_1=\ldots=y_n=0$.

Заменяя переменную x на переменную y согласно (1.21), мы для определения функций $v_{m+\delta}$ получим уравнения

$$v_m=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\alpha^{(m)}\,dt, \qquad v_{m+\delta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^t\left(\alpha^{(m+\delta)}+F_{m+\delta}\right)dt$$

Все эти функции будут периодическими, так как по предположению все $g_{m+\delta}=0$ $(\delta\geqslant 0)$. При этом условии система уравнений (1.12) примет вид

$$y^{\cdot}=Y^{(1)}(y,\,y_i,\,t), \qquad y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}\,y_k+Y_s^{(1)}(y,\,y_i,\,t)$$
$$(s,\,i=1,\ldots,n) \tag{1.24}$$

в котором все функции $Y^{(1)}$ и $Y_s^{(1)}$ обращаются в нуль при $y_1=\ldots=y_n=0$. Системе (1.24) можно удовлетворить решением $y=c$, $y_1=\ldots=y_n=0$.

Следовательно, системе (1.12) можно удовлетворить, по крайней мере формально, рядами

$$x=c+c^2v_2+c^3v_3+\ldots, \qquad x_s=cv_{s1}+c^2v_{s2}+\ldots \tag{1.25}$$

где $v_2,\ v_3,\ \ldots,\ v_{s1},\ v_{s2},\ \ldots$ — периодические функции t.

Докажем, что эти ряды являются абсолютно сходящимися для $|c|$ достаточно малого и для любых вещественных значений t.

Обозначим через $\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_n$ корни уравнения $|p_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$. Систему (1.12) линейной подстановкой с постоянными коэффициентами можно преобразовать таким образом, чтобы коэффициенты q_{sk}, играющие в преобразованной системе роль коэффициентов p_{sk}, все были нулями, за исключением коэффициентов

$$q_{11}=\varkappa_1, \qquad q_{22}=\varkappa_2,\ \ldots, \qquad q_{nn}=\varkappa_n$$

$$q_{21}=\sigma_1, \qquad q_{32}=\sigma_2,\ \ldots, \qquad q_{nn-1}=\sigma_{n-1}$$

Допустим, что система (1.12) уже имеет преобразованную форму.

Подставляя ряды (1.25) в систему (1.12), мы получим для определения функций v_s и v_{sk} $(s=1,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \ldots)$ следующую систему:

$$v_l^{\cdot}=V_l, \qquad v_{1l}^{\cdot}=\varkappa_1 v_{1l}+V_{1l},\ \ldots$$

$$v_{sl}^{\cdot}=\varkappa_s v_{sl}+\sigma_{s-1}v_{s,-1l}+V_{sl} \qquad (s=2,\,3,\ldots,n),\ (l=1,2,\ldots) \tag{1.26}$$

где V_l и V_{sl} — многочлены от v_j и v_{sj}, для которых $j\leqslant l-1$. Коэффициенты этих многочленов являются линейными формами от коэффициентов разложения функций $X(x, x_i, t)$ и $X_s(x, x_i, t)$.

Интегрируя систему уравнений (1.26) в предположении, что все v_j, v_{sj} $(1 \leqslant j \leqslant l-1)$ уже известны, будем иметь

$$v_l = \int_0^t V_l\,dt, \quad v_{1l} = e^{\varkappa_1 t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\varkappa_1 t} V_{1l}\,dt$$

$$v_{sl} = e^{\varkappa_s t} \int_{-\infty}^{t} e^{-\varkappa_s t} (\sigma_{s-1} v_{s-1,\,l} + V_{sl})\,dt \qquad (s = 2,\ 3, \ldots, n) \tag{1.27}$$

Обозначим через $F(x, x_i)$ и $F_s(x, x_i)$ те значения функций $X(x, x_i, t)$ и $X_s(x, x_i, t)$, которые они примут, если в рядах, представляющих эти функции, заменить периодические коэффициенты их наибольшими модулями при изменении t в пределах от 0 до 2π, а через $-k_1, -k_2, \ldots, -k_n$ — вещественные части корней $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$. Кроме того, будем считать σ_j $(j = 1, \ldots, n-1)$ положительными величинами.

Система уравнений (1.27), если в ней заменить $\varkappa_s$ на $-k_s$, а в выражениях V_l, V_{sl} коэффициенты разложений функций X и X_s на коэффициенты функций F и F_s, определит нам наибольшие значения функций v_l и v_{sl} в пределах изменения t от 0 до 2π, которые обозначим w_l и w_{sl}. Эти наибольшие значения определяются равенствами

$$w_l = 2\pi W_l, \qquad k_1 w_{1l} = W_{1l}, \qquad k_s w_{sl} = \sigma_{s-1} W_{s-1,\,l} + W_{sl}$$
$$(s = 2,\ 3, \ldots, n)$$

где W_l, W_{sl} — наибольшие значения функций V_l и V_{sl}, если в последних коэффициенты разложений X и X_s заменить соответствующими коэффициентами разложений F и F_s, а значения v_j, v_{sj} для $(1 < j \leqslant l-1)$ заменить через w_j, w_{sj}.

Легко убедиться, что ряды

$$x = c + c^2 w_2 + c^3 w_3 + \ldots$$

$$x_s = c w_{s1} + c^2 w_{s2} + c^3 w_{s3} + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

являются решением системы уравнений

$$x = c + F(x, x_i), \qquad k_1 x_1 = F_1(x, x_i)$$

$$k_s x_s = \sigma_{s-1} x_{s-1} + F_s(x, x_i) \qquad (s = 2,\ 3, \ldots, n) \tag{1.28}$$

и, следовательно, будут абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|c|$. В силу этого и ряды (1.25) будут абсолютно сходящимися для достаточно малых значений $|c|$ и для любых вещественных значений t и представят периодическое решение системы уравнений (1.12).

Преобразуем теперь систему уравнений (1.12), положив

$$x = \xi + v_2 \xi^2 + v_3 \xi^3 + \ldots, \qquad x_s = y_s + v_{s1} \xi + v_{s2} \xi^2 + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где v_l и v_{sl} — периодические функции, фигурирующие в рядах (1.25). В силу сходимости рядов (1.25) решение задачи об устойчивости в переменных x и x_s эквивалентно решению задачи об устойчивости в переменных ξ и y_s.

В результате преобразования мы получим новую систему относительно переменных $\xi, y_1, \ldots, y_n$, которая по структуре будет аналогична системе (1.12), но правые части этой системы обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

А этого, как мы уже убедились, достаточно для устойчивости невозмущенного движения.

§ 3. Одна пара чисто мнимых корней определяющего уравнения. Предположим, что система (1.1) имеет два чисто мнимых корня и n корней с отрицательными вещественными частями ($n = n_1 - 2$).

Такую систему с помощью линейной подстановки с постоянными вещественными коэффициентами можно преобразовать к виду

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X(x, y, y_i), \qquad y^{\cdot} = \lambda x + Y(x, y, y_i)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, y_k + Y_s(x, y, y_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.29}$$

Следуя Ляпунову, преобразуем систему (1.29), положив

$$x = \xi + u(y_i), \qquad y = \eta + v(y_i) \tag{1.30}$$

Определяя $u(y_i)$ и $v(y_i)$ из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_s}(p_{s1}\, y_1 + \ldots + p_{sn}\, y_n) = -\lambda v + X(u, v, y_i)$$

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_s}(p_{s1}\, y_1 + \ldots + p_{sn}\, y_n) = \lambda u + Y(u, v, y_i) \tag{1.31}$$

получим систему, аналогичную системе (1.29), в которой правые части уравнений для $\xi^{\cdot}$ и $\eta^{\cdot}$ будут обращаться в нули при $\xi = \eta = 0$.

Будем предполагать, что над системой (1.29) преобразование (1.30) выполнено и функции X и Y обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, получим

$$\frac{dr}{dt} = X\cos\theta + Y\sin\theta, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \lambda + \frac{1}{r}(Y\cos\theta - X\sin\theta) \tag{1.32}$$

Учитывая, что X и Y обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$, запишем второе уравнение в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + F(r, y_i, \cos\theta, \sin\theta) \tag{1.33}$$

Функция F обращается в нуль при $r = y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Мы можем утверждать, что если $|r|$, $|y_1|$, ..., $|y_n|$ достаточно малы, то θ будет являться монотонно возрастающей функцией t. Следовательно, в вопросах устойчивости переменная θ может играть роль t.

Исключая из первого уравнения системы (1.32) и из уравнений для $y_s^{\cdot}$ системы (1.29) время t, получим

$$\frac{dr}{d\theta} = rR(r, y_i, \theta), \qquad \frac{dy_s}{d\theta} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}\, y_k + Y_{s1}(r, y_i, \theta) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.34}$$

Правые части этой системы являются голоморфными функциями переменных r, y_1, ..., y_n, коэффициентами разложения которых являются целые рациональные функции от $\cos\theta$ и $\sin\theta$.

Эта система является частным случаем системы (1.12), рассмотренной в § 2.

§ 4. Два мнимых корня характеристичиого уравнения с модулями, равными единице. Рассмотрим теперь систему уравнений (1.1), предполагая, что характеристичное уравнение, соответствующее этой системе, имеет два мнимых сопряженных корня, модули которых равны единице, и n корней с модулями, меньшими единицы ($n = n_1 - 2$).

Пусть $e^{2\pi i\lambda}$ и $e^{-2\pi i\lambda}$ — корни с модулями, равными единице.

При этом предположении линейной подстановкой с вещественными периодическими коэффициентами систему уравнений (1.1) можно привести к виду

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X(x, y, y_i, t), \qquad y^{\cdot} = \lambda x + Y(x, y, y_i, t)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_s(x, y, y_i, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1.35}$$

где p_{sk} — постоянные величины, причем такие, что все корни уравнения $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ имеют отрицательные вещественные части. Функции X, Y и Y_s имеют структуру функций Z_s системы (1.1).

Ляпунов ограничивает исследование системы (1.35) тем случаем, когда λ иррационально. Это ограничение в случаях несущественно особенных позволяет свести поставленную задачу к задаче об устойчивости автономной системы (1.1), определяющее уравнение которой имеет два чисто мнимых корня.

Если же число λ рационально, то исследование задачи об устойчивости тривиального решения системы (1.35) заменой $t = \beta\tau$ и $x = \xi \cos \alpha\tau + \eta \sin \alpha\tau$, $y = \xi \sin \alpha\tau - \eta \cos \alpha\tau$ приводится к задаче об устойчивости тривиального решения системы вида (1.35), в которой правые части первых двух уравнений не содержат линейных членов.

Подобного рода задачи будут рассмотрены в главе IV.

Обозначим совокупности членов, не зависящих от $y_1, \ldots, y_n$, в правых частях системы (1.35) через

$$X_0 = \sum_{k=2}^{\infty} X_0^{(k)}(x, y, t), \quad Y_0 = \sum_{k=2}^{\infty} Y_0^{(k)}(x, y, t), \quad Y_{s0} = \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} Y_{s0}^{(k)}(x, y, t)$$

$$X_0^{(k)} = \sum_{k_1+k_2=k} A^{(k_1 k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2}, \quad Y_0^{(k)} = \sum_{k_1+k_2=k} B^{(k_1 k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2} \tag{1.36}$$

$$Y_{s0}^{(k)} = \sum_{k_1+k_2=k} C_s^{(k_1 k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2} \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Если положить

$$y_s = x_s + u_s(x, y, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1.37}$$

то будем иметь

$$x_s^{\cdot} = -\frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial x}(-\lambda y + X) - \frac{\partial u_s}{\partial y}(\lambda x + Y) + \sum_{k=1}^{n} p_{sk}(x_k + u_k) +$$

$$+ Y_s(x, y, x_1 + u_1, x_2 + u_2, \ldots, x_n + u_n, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1.38}$$

Совокупности членов, не зависящих от $x_1, \ldots, x_n$, в правых частях этих уравнений будут иметь вид

$$X_{s0}(x, y, t) = -\frac{\partial u_s}{\partial t} - \frac{\partial u_s}{\partial x}[-\lambda y + X(x, y, u_i, t)] -$$

$$-\frac{\partial u_s}{\partial y}[\lambda x + Y(x, y, u_i, t)] + \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + Y_s(x, y, u_i, t)$$

$$(s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.39}$$

Определим функции u_s из уравнений $X_{s0}(x, y, t) = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Эти уравнения можно удовлетворить рядами

$$u_s(x, y, t) = \sum_{k_1+k_2\geqslant 2}^{\infty} a_s^{(k_1, k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2} \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{1.40}$$

где $a_s^{(k_1, k_2)}$ — периодические функции t с периодом 2π. Эти ряды в большинстве случаев будут расходящимися.

Рассмотрим функции $v_s(x, y, t)$, представляющие суммы членов рядов (1.40) до N-го порядка включительно,

$$v_s = \sum_{k_1+k_2\geqslant 2}^{N} a_s^{(k_1, k_2)} x^{k_1} y^{k_2} \tag{1.41}$$

Число N мы будем считать сколь угодно большим.

Преобразуем систему (1.35), положив

$$y_s = x_s + v_s(x, y, t) \tag{1.42}$$

Тогда в правых частях системы (1.38) разложения функций X_{s0} будут начинаться с членов не ниже $(N+1)$-го порядка.

Члены же, не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$, в правых частях первых двух уравнений системы (1.35) будут иметь вид

$$-\lambda y + X(x, y, v_i, t), \qquad \lambda x + Y(x, y, v_i, t)$$

Здесь мы должны различать два возможных случая. В первом — функции $X(x, y, v_i, t)$ и $Y(x, y, v_i, t)$ не содержат в своих разложениях членов ниже $(N+2)$-го порядка при любом сколь угодно большом N.

Это частный случай; он возможен лишь при условии $X(x, y, u_i, t) = Y(x, y, u_i, t) \equiv 0$, где $u_1, \ldots, u_n$ представляются рядами (1.40). В этом случае функции u_s определятся из уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} - \lambda\frac{\partial u_s}{\partial x}y + \lambda\frac{\partial u_s}{\partial y}x = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}u_k + Y_s(x, y, u_i, t) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{1.43}$$

Эти уравнения определят функции u_s в виде абсолютно сходящихся рядов (1.40) для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$ и для любых вещественных значений t (теорема § 21 главы III).

Система уравнений (1.35) при этом условии заменой (1.37) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= -\lambda y + \sum_{k=1}^{n} x_k P_k(x, y, t) + P^{(2)}(x, y, x_i, t) \\ y^{\cdot} &= \lambda x + \sum_{k=1}^{n} x_k Q_k(x, y, t) + Q^{(2)}(x, y, x_i, t) \\ x_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k P_{sk}(x, y, t) + X_s^{(2)}(x, y, x_i, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.44}$$

где P_k, Q_k и P_{sk} — функции, обращающиеся в нуль при $x = y = 0$, а функции $P^{(2)}$, $Q^{(2)}$, $X_s^{(2)}$ не содержат в своих разложениях линейных членов относительно $x_1, \ldots, x_n$ и обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Таким образом, мы убеждаемся, что эта система имеет частное решение

$$x = c\cos\lambda(t - t_0), \qquad y = c\sin\lambda(t - t_0), \qquad x_1 = \ldots = x_n = 0$$

а систему (1.35) можно удовлетворить рядами

$$\begin{aligned} y_s &= \sum_{k_1+k_2\geqslant 2}^{\infty} a_s^{(k_1 k_2)}(t)\, c^{k_1+k_2}\cos^{k_1}\lambda(t - t_0)\sin^{k_2}\lambda(t - t_0) \\ x &= c\cos\lambda(t - t_0), \qquad y = c\sin\lambda(t - t_0) \end{aligned} \tag{1.45}$$

Эти ряды при достаточно малом $|c|$ будут абсолютно сходящимися, но они не будут периодическими, так как коэффициенты $a_s^{(k_1 k_2)}(t)$ являются периодическими функциями времени с периодом 2π, а $\cos\lambda(t - t_0)$ и

$\sin\lambda(t-t_0)$ имеют период $2\pi/\lambda$, и, следовательно, при λ иррациональном решения (1.45) не будут периодическими.

Возвращаясь к системе (1.44), преобразуем ее, положив

$$x=\xi+\sum_{k=1}^{n} x_k u_k(x, y, t), \qquad y=\eta+\sum_{k=1}^{n} x_k v_k(x, y, t) \tag{1.46}$$

Функции u_k и v_k найдем из уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}-\frac{\partial u_k}{\partial x}\lambda y+\frac{\partial u_k}{\partial y}\lambda x=-\sum_{s=1}^{n} u_s(p_{sk}+P_{sk})-\lambda v_k+P_k$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial t}-\frac{\partial v_k}{\partial x}\lambda y+\frac{\partial v_k}{\partial y}\lambda x=-\sum_{s=1}^{n} v_s(p_{sk}+P_{sk})+\lambda u_k+Q_k$$

в виде абсолютно сходящихся рядов по крайней мере для $|x|$ и $|y|$ достаточно малых. Коэффициенты этих рядов будут периодическими функциями с периодом 2π (теорема § 21 главы III).

В результате преобразования мы получим систему уравнений, аналогичную системе (1.44), в которой функции, играющие роль функций P_k и Q_k, обратятся в нули.

Предполагая, что над системой (1.44) преобразование по формулам (1.46) выполнено, т. е. полагая $P_k = Q_k \equiv 0$, возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V=x^2+y^2+V_1(x_1, \ldots, x_n);$$

Функцию V_1 определим из уравнения (1.9) при условии $g_0=-1$. Тогда производную функции V можно представить в следующей форме:

$$V'=-\sum x_s^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\psi_{sk}x_s x_k$$

где ψ_{sk} обращаются в нуль при $x=y=x_1=\ldots=x_n=0$.

Так как V — определенно-положительная функция от $x, y, x_1, \ldots, x_n$, а V' — постоянно-отрицательная функция тех же переменных, то невозмущенное движение устойчиво.

Перейдем теперь к рассмотрению второго возможного случая. Будем предполагать, что результат подстановки рядов (1.40) в функции X и Y приводит хотя бы к одному из неравенств

$$X(x, y, u_i, t)\not\equiv 0, \qquad Y(x, y, u_i, t)\not\equiv 0$$

Этот случай является общим.

Преобразуя систему уравнений (1.35) согласно (1.42), получим

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= -\lambda y+\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty}\alpha^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}+P(x, y, x_i, t)\\ y^{\cdot} &= \lambda x+\sum_{k_1+k_2=m}^{\infty}\beta^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}+Q(x, y, x_i, t)\\ x_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n}p_{sk}x_k+\sum_{k_1+k_2=m+k+1}^{\infty}\gamma^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}+X_s(x, y, x_i, t)\\ & \qquad (s=1, \ldots, n, \quad m+k=N) \end{aligned} \tag{1.47}$$

где $\alpha^{(k_1k_2)}$, $\beta^{(k_1k_2)}$, $\gamma^{(k_1k_2)}$ — периодические функции t с периодом 2π, а P, Q, X_s — голоморфные функции $x, y, x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1=\ldots=x_n=0$.

Полагая $x + iy = z$, $x - iy = \bar{z}$, запишем первые два уравнения этой системы в виде

$$
\begin{aligned}
z^{\cdot} &= i\lambda z + \sum_{k_1+k_2=m}^{m+k} a^{(k_1 k_2)}(t)\, z^{k_1} \bar{z}^{k_2} + Z(z, \bar{z}, x_i, t) \\
\bar{z}^{\cdot} &= -i\lambda \bar{z} \sum_{k_1+k_2=m}^{m+k} \bar{a}^{(k_1 k_2)}(t)\, \bar{z}^{k_1} z^{k_2} + \bar{Z}(z, \bar{z}, x_i, t)
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Преобразуем эту систему, положив

$$
z = \zeta + \sum_{k_1+k_2=m} u^{(k_1 k_2)}(t)\, z^{k_1} \bar{z}^{k_2}, \qquad \bar{z} = \bar{\zeta} + \sum_{k_1+k_2=m} \bar{u}^{(k_1 k_2)}(t)\, \bar{z}^{k_1} z^{k_2}
$$

где $u^{(k_1 k_2)}(t)$, $\bar{u}^{(k_1 k_2)}(t)$ — периодические функции t периода 2π. Определим эти функции так, чтобы в преобразованной системе коэффициенты, играющие роль коэффициентов $a^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{a}^{(k_1 k_2)}$, были постоянными величинами $g^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{g}^{(k_1 k_2)}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $u^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{u}^{(k_1 k_2)}$ удовлетворяли уравнениям

$$
\begin{aligned}
&u^{\cdot(k_1 k_2)} - i\lambda(-k_1 + k_2 + 1)\, u^{(k_1 k_2)} - a^{(k_1 k_2)} - L^{(k_1 k_2)} = -g^{(k_1 k_2)} \\
&\bar{u}^{\cdot(k_1 k_2)} + i\lambda(-k_1 + k_2 + 1)\, \bar{u}^{(k_1 k_2)} - \bar{a}^{(k_1 k_2)} - \bar{L}^{(k_1 k_2)} = -\bar{g}^{(k_1 k_2)}
\end{aligned}
$$

Функции $u^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{u}^{(k_1 k_2)}$ можно определить, последовательно давая $k_1 + k_2$ значения $m, m+1, \ldots, m+k$. Для чисел $k_1 + k_2 = m$ выражения $L^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{L}^{(k_1 k_2)}$ равны нулю, а для $k_1 + k_2 = m + l$ $(l \leqslant k)$ они представляются линейными формами от тех коэффициентов $a^{(k_1 k_2)}$, $\bar{a}^{(k_1 k_2)}$ и функций $u^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{u}^{(k_1 k_2)}$, для которых $k_1 + k_2 \leqslant m + l - 1$.

Легко убедиться, что все числа $g^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{g}^{(k_1 k_2)}$, у которых разности индексов $k_1 - k_2 \neq 1$, можно принять равными нулю (λ иррационально). Числа же $g^{(k_1 k_2)}$, $\bar{g}^{(k_1 k_2)}$ для $k_1 - k_2 = 1$ необходимо определить равенствами

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \left(a^{(k_1 k_2)} + L^{(k_1 k_2)} - g^{(k_1 k_2)}\right) dt = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \left(\bar{a}^{(k_1 k_2)} + \bar{L}^{(k_1 k_2)} - \bar{g}^{(k_1 k_2)}\right) dt = 0
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

В противном случае функции $u^{(k_1 k_2)}$ и $\bar{u}^{(k_1 k_2)}$ не будут периодическими.

Обозначим числа $g^{(k_1 k_2)}$, $\bar{g}^{(k_1 k_2)}$, у которых $k_1 = k_2 + 1$, через $g_{2\varkappa+1}$, $\bar{g}_{2\varkappa+1}$. Тогда уравнения (1.48) в переменных ζ и $\bar{\zeta}$ примут вид

$$
\begin{aligned}
\zeta^{\cdot} &= i\lambda\zeta + \sum_{\varkappa=(m-1)/2}^{m+k} g_{2\varkappa+1}\, \zeta (\zeta\bar{\zeta})^{\varkappa} + P_1(\zeta, \bar{\zeta}, x_i, t) \\
\bar{\zeta}^{\cdot} &= -i\lambda\bar{\zeta} + \sum_{\varkappa=(m-1)/2}^{m+k} \bar{g}_{2\varkappa+1}\, \bar{\zeta} (\zeta\bar{\zeta})^{\varkappa} + Q_1(\zeta, \bar{\zeta}, x_i, t)
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

Если теперь положить

$$
g_{2\varkappa+1} = \delta_{2\varkappa+1} + i\sigma_{2\varkappa+1}, \qquad \bar{g}_{2\varkappa+1} = \delta_{2\varkappa+1} - i\sigma_{2\varkappa+1}
$$

$$
\zeta = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \bar{\zeta} = r(\cos\theta - i\sin\theta)
$$

и отделить действительные и мнимые части, то система (1.50) и n последних уравнений системы (1.47) примут вид

$$\frac{dr}{dt}=\sum_{\varkappa=(m-1)/2}^{m+k}\delta_{2\varkappa+1}r^{2\varkappa+1}+\sum_{k_1=m+k}^{\infty}\alpha_1^{(k_1)}(t)\,r^{k_1}+R(r,\,x_i,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,t)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\lambda+\sum_{\varkappa=(m-1)/2}^{m+k}\sigma_{2\varkappa+1}r^{2\varkappa}+\sum_{k_1=m+k}^{\infty}\beta_1^{(k_1)}(t)\,r^{k_1}+F(r,\,x_i,\cos\theta,\,\sin\theta,t)$$

$$x_s{}^{\bullet}=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}x_k+\sum_{k_1=m+k}^{\infty}\gamma_1^{(k_1)}r^{k_1}+X_{s1}(r,\,x_i,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,t)$$

$$(s,\,i=1,\ldots,n) \qquad (1.51)$$

Предположим, что первый коэффициент $\delta_{2\varkappa+1}$, отличный от нуля, имеет индекс $l=2\varkappa+1\leqslant m+k$. Представим функцию R в виде

$$R=\sum_{j=1}^{n}x_jR_j(r,\,\cos\theta,\sin\theta,t)+R^{(2)}(r,\,x_i,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,t)$$

В общем случае функции R_j имеют вид

$$R_j=\sum_{k=\nu_j}^{\infty}c_j^{(k)}(\theta,\,t)\,r^k,\qquad \nu_j\geqslant 1 \qquad (1.52)$$

Рассмотрим частный случай системы (1.51). Пусть в (1.52) все $\nu_j\geqslant l+1$. Тогда функцию Ляпунова, отвечающую системе уравнений (1.51), при $\delta_l<0$ можно взять в виде

$$V=r^2+V_1$$

где V_1 определим из уравнения (1.9) для $g_0=\delta_l$. Функция V_1, как нетрудно видеть, представляет собой определенно-положительную функцию.

Производной dV/dt можно придать вид

$$\frac{dV}{dt}=\delta_l\left(r^{l+1}+\sum_{s=1}^{n}x_s{}^2\right)+\sum_{k=l+2}^{\infty}r^k\psi_k(x_i,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\,x_j\,\psi_{ij}(r,\,x_i,\,\cos\theta,\,\sin\theta,\,t)$$

При достаточно малых значениях r и $|x_s|$ производная dV/dt представляет определенно-отрицательную функцию переменных $r,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Следовательно, невозмущенное движение при $\delta_l<0$ асимптотически устойчиво.

Если $\delta_l>0$, то функция V_1, определяемая уравнением (1.9), при $g_0=\delta_l>0$ представит определенно-отрицательную квадратичную форму переменных $x_1,\ \ldots,\ x_n$. Следовательно, функция V может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Производная же функции V будет определенно-положительной.

Отсюда заключаем, что при $\delta_l>0$ невозмущенное движение неустойчиво.

Покажем теперь, что к рассмотренному частному случаю системы (1.51) приводится любой другой, для которого в (1.52) хотя бы одно из $\nu_j<l+1$.

Преобразуем систему (1.51), положив

$$r=\rho+\sum_{j=1}^{n}x_ju_j,\qquad u_j=\sum u_j^{(k)}(\theta,\,t)\,r^k$$

Определим функции $u_j^{(k)}$ таким образом, чтобы в преобразованной системе все коэффициенты, играющие роль коэффициентов $c_j^{(k)}$ для всех $k \leqslant l$, обратились в нули. Для этого достаточно определить $u_j^{(k)}$ из уравнений

$$\frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial \theta}\lambda = -\sum_{s=1}^{n} p_{sj} u_s^{(k)} + c_j^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta, t) +$$
$$+ L_j^{(k)}(\cos\theta, \sin\theta, u_j^{(1)}, \ldots, u_j^{(k-1)}, t) \qquad (k=2, \ldots, l,\ j=1, \ldots, n)$$

где $c_j^{(k)}$ — формы k-й степени от $\cos\theta$ и $\sin\theta$ с периодическими относительно t коэффициентами, а $L_j^{(k)}$ — многочлены от $\cos\theta$, $\sin\theta$ и $u_j^{(\mu)}$, у которых $\mu \leqslant k-1$.

Очевидно, что суммы $c_j^{(k)} + L_j^{(k)} = F_j^{(k)}$ можно представить в виде

$$F_j^{(k)} = \sum_{q=-p}^{p} \Phi_{jq}^{(k)}(t)\, e^{iq\theta}$$

где p — наивысшая из степеней $\cos\theta$ или $\sin\theta$, входящих в выражения $c_j^{(k)}$ и $L_j^{(k)}$.

Функции $u_j^{(k)}$ будем отыскивать в такой же форме

$$u_j^{(k)} = \sum_{q=-p}^{p} f_{jq}^{(k)}(t)\, e^{iq\theta}$$

Функции $f_{jq}^{(k)}(t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\dot{f}_{jq}^{(k)} + i\lambda q f_{jq}^{(k)} = -\sum_{s=1}^{n} p_{sj} f_{sq}^{(k)} + \Phi_{jq}^{(k)} \qquad (k=2, \ldots, l,\ j=1, \ldots, n)$$

Эта система определит все $f_{jq}^{(k)}$ в виде периодических функций с периодом 2π.

В результате преобразования уравнений (1.51) к переменным $\rho, x_1, \ldots, x_n$ мы получим новую систему, которая будет иметь частный вид, только что нами исследованный.

Замена переменной r на ρ не изменит значения δ_l, поэтому выводы об устойчивости невозмущенного движения, относящиеся к системе (1.51) для частного случая, имеют силу для любой системы этого вида.

Может оказаться, что все $g^{(k_1k_2)}$, определяемые (1.49), обратятся в нуль для всех $k_1 + k_2 \leqslant m + k$ при любом сколь угодно большом k. В этом случае систему (1.35) необходимо преобразовать согласно (1.37), определяя функции u_s рядами (1.40). Но эти ряды в общем случае являются расходящимися. Доказательство их сходимости при условии $g^{(k_1k_2)} = 0$ для всех $2 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant \infty$ представляет задачу весьма трудную.

Нам удалось доказать сходимость этих рядов лишь в том случае, когда результат подстановки их в выражения $X(x, y, x_i)$ и $Y(x, y, x_i)$ приводит к тождеству $X(x, y, u_i) = Y(x, y, u_i) \equiv 0$. В этом случае система (1.35) имеет решение (1.45), которое представляется почти-периодическими функциями t. В результате замены (1.37) система (1.35) будет иметь все числа $g^{(k_1k_2)} = 0$, и вопрос об устойчивости решается в положительном смысле.

Предположим, что нам каким-либо способом удалось доказать сходимость рядов (1.40) для случая, когда все числа $g^{(k_1k_2)}$, определяемые равенствами (1.49), обращаются в нули. Тогда система уравнений (1.35) с помощью этих рядов преобразовывалась бы в систему (1.47), в которой все функции $\gamma^{(k_1k_2)}$ для любых значений $2 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant \infty$ обратились бы в нули, и эта система допускала бы решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$, а систему (1.35) можно было бы удовлетворить рядами

$$y_s = \sum_{k_1+k_2\geqslant 2}^{\infty} a_s^{(k_1k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2} \qquad (s=1,\ldots,n)$$

определяя x и y из уравнений

$$x^{\cdot} = -\lambda y + \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} \alpha^{(k_1k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2},\quad y^{\cdot} = \lambda x + \sum_{k_1+k_2=m}^{\infty} \beta^{(k_1k_2)}(t)\, x^{k_1} y^{k_2} \qquad (m\geqslant 2) \quad (1.53)$$

Таким путем мы могли бы свести задачу об устойчивости тривиального решения системы (1.35) $(n+2)$-го порядка к задаче об устойчивости тривиального решения системы (1.53) второго порядка.

ГЛАВА II

ДВА НУЛЕВЫХ КОРНЯ С ОДНОЙ ГРУППОЙ РЕШЕНИЙ

В «Общей задаче об устойчивости движения» Ляпунов ограничил исследование нелинейных задач об устойчивости движения случаями, рассмотренными в главе I. Все четыре задачи, исследованные Ляпуновым, как мы убедились, приводятся к построению функций V для одного нелинейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = gx^m + \ldots \tag{2.1}$$

и системы n линейных уравнений.

В главе II исследуется устойчивость тривиального решения системы дифференциальных уравнений вида (1.1) в предположении, что определяющее уравнение последней имеет n корней с отрицательными вещественными частями и два нулевых корня, которым соответствует одна группа решений.

Впервые данная задача привлекла внимание автора в 30-х годах. В то время было известно, что эта задача, поставленная Ляпуновым, решена им [1] только для случая $n_1 = 2$.

В 1935 г. автором [5] был исследован вопрос об устойчивости в общем случае для систем $(n + 2)$-го порядка, когда для его решения достаточно рассмотреть члены до N-го порядка включительно в преобразованной к специальному виду системе (1.1), считая N сколь угодно большим конечным числом.

Для существенно особенного случая, когда $N = \infty$, вопрос об устойчивости движения остался открытым.

В 1963 г. стало известно о существовании работы Ляпунова [3], в которой рассмотрена задача об устойчивости в общем случае систем $(n + 2)$-го порядка. Для случаев несущественно особенных (N — конечное) результаты работ Ляпунова и автора совпадают.

Исследование задач устойчивости в существенно особенных случаях сводится Ляпуновым [3] к отысканию некоторой функции $\varphi(c)$. Если бы эту функцию каким-либо способом удалось найти, то решение вопроса не представляло бы существенных затруднений. Но отыскание этой функции представляет задачу весьма сложную и до настоящего времени не указаны какие-либо пути для ее решения. Поэтому вопрос об устойчивости в сущест венно особенных случаях остается открытым.

В этой главе изложены результаты, полученные автором в 1935 г. с незначительными изменениями, упрощающими исследование задачи. В частности, ляпуновские функции $\mathrm{Sn}\,\theta$ и $\mathrm{Cs}\,\theta$ удалось заменить обычными $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

§ 5. Преобразования исходных уравнений. Предполагая, что определяющее уравнение системы (1.1) имеет два нулевых корня с одной группой решений при n остальных с отрицательными вещественными частями, мы можем линейной подстановкой с постоянными вещественными коэффициентами преобразовать систему (1.1) к виду

$$x^{\cdot} = y_1 + X(x, y_1, x_i), \quad y_1^{\cdot} = Y(x, y_1, x_i)$$

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y_1, x_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

где X, Y, X_s имеют структуру функций Z_s системы (1.1).

Вводя новую переменную y, согласно равенству

$$y = y_1 + X(x, y_1, x_i)$$

систему (2.2) можно привести к виду

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = Y_0(x, y) + Y_1(x, y, x_i) \\ x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_{s0}(x, y) + X_{s1}(x, y, x_i) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Функции $Y_0(x, y)$ и $X_{s0}(x, y)$ представляют всю совокупность членов, не содержащих $x_1, \ldots, x_n$ в разложениях правых частей системы (2.3). Вследствие этого функции $Y_1(x, y, x_i)$ и $X_{s1}(x, y, x_i)$ обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Представим $Y_0(x, y)$ и $X_{s0}(x, y)$ в следующей форме:

$$\begin{gathered} Y_0(x, y) = f_0(x) + y\varphi_0(x) + y^2\psi_0(x) + \ldots \\ X_{s0}(x, y) = f_s(x) + y\varphi_s(x) + y^2\psi_s(x) + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.4}$$

подразумевая под f_k, φ_k и ψ_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ голоморфные функции переменной x вида

$$\begin{gathered} f_0(x) = a_0 x^{\alpha_0} + a_1 x^{\alpha_0+1} + \ldots, \qquad \varphi_0(x) = b_0 x^{\beta_0} + b_1 x^{\beta_0+1} + \ldots \\ \psi_0(x) = c_0 x^{\gamma_0} + c_1 x^{\gamma_0+1} + \ldots, \qquad f_s(x) = a_{s0} x^{\alpha_s} + a_{s1} x^{\alpha_s+1} + \ldots \\ \varphi_s(x) = b_{s0} x^{\beta_s} + b_{s1} x^{\beta_s+1} + \ldots, \qquad \psi_s(x) = c_{s0} x^{\gamma_s} + c_{s1} x^{\gamma_s+1} + \ldots \\ (s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{2.5}$$

Очевидно, что $\alpha_k \geqslant 2$, $\beta_k \geqslant 1$, $\gamma_k \geqslant 0$ для всех значений $k = 0, 1, \ldots, n$.

Функции $f_0(x)$, $\varphi_0(x)$ будут играть особую роль при решении задач об устойчивости невозмущенного движения. Поэтому прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению системы (2.3), преобразуем ее таким образом, чтобы эти функции удовлетворяли некоторым условиям.

Эти преобразования будут известным образом деформировать систему интегральных кривых, описываемых уравнениями (2.3), но, как увидим, задача об устойчивости по отношению к исходным и преобразованным уравнениям будет эквивалентна.

Функции Ляпунова и Четаева для преобразованной системы будут иметь весьма простую структуру.

С этой целью преобразуем систему уравнений (2.3) к новым переменным $y_1, \ldots, y_n$, положив

$$x_s = y_s + u_s(x) + y v_s(x) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Функции $u_s(x)$ и $v_s(x)$ подлежат определению. Правая часть второго уравнения системы (2.3) в результате замены переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $y_1, \ldots, y_n$ примет вид

$$Y_0^*(x, y) + Y_1^*(x, y, y_i)$$

где Y_1^* — функция, обращающаяся в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$, а

$$Y_0^*(x, y) = Y_0(x, y) + Y_1(x, y, u_i) + y\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial Y_1(x, y, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i} + \ldots$$

Если функцию $Y_0^*(x, y)$ разложить в ряд по степеням y, то получим

$$Y_0^*(x, y) = f_0^*(x) + y\varphi_0^*(x) + y^2\psi_0^*(x) + \ldots$$

где

$$f_0^*(x) = f_0(x) + Y_1(x, 0, u_1, \ldots, u_n)$$

$$\varphi_0^*(x) = \varphi_0(x) + \left.\frac{\partial Y_1(x, y, u_i)}{\partial y}\right|_{y=0} + \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial Y_1(x, y, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}\right|_{y=0} \tag{2.7}$$

Уравнения присоединенной системы в новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} y_s^\cdot = & -y\frac{du_s}{dx} - y^2\frac{dv_s}{dx} - v_s[f_0^*(x) + y\varphi_0^*(x) + y^2\psi_0^*(x) + \ldots + Y_1^*] + \\ & + \sum_{i=1}^{n} p_{si}y_i + \sum_{i=1}^{n} p_{si}u_i + y\sum_{i=1}^{n} p_{si}v_i + f_s(x) + y\varphi_s(x) + \\ & + y^2\psi_s(x) + \ldots + X_{s1}(x, 0, u_i) + y\left[\frac{\partial X_{s1}(x, y, u_i)}{\partial y} + \right. \\ & \left.+ \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial X_{s1}(x, y, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}\right]_{y=0} + \ldots + X_{s1}^*(x, y, y_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{2.8}$$

или

$$y_s^\cdot = p_{s1}y_1 + \ldots + p_{sn}y_n + f_s^*(x) + y\varphi_s^*(x) + y^2\psi_s^*(x) + \ldots + Y_{s1}(x, y, y_i)$$

В этих уравнениях выражения $Y_{s1}(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Функции $f_s^*(x)$ и $\varphi_s^*(x)$ определяются формулами

$$f_s^*(x) = p_{s1}u_1 + p_{s2}u_2 + \ldots + p_{sn}u_n + f_s(x) + X_{s1}(x, 0, u_i) - v_s f_0^*(x)$$

$$\begin{aligned} \varphi_s^*(x) = & \, p_{s1}v_1 + p_{s2}v_2 + \ldots + p_{sn}v_n + \varphi_s(x) - \frac{du_s}{dx} + \left.\frac{\partial X_{s1}(x, y, u_i)}{\partial y}\right|_{y=0} + \\ & + \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial X_{s1}(x, y, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}\right|_{y=0} - v_s\varphi_0^*(x) \end{aligned} \tag{2.9}$$

В зависимости от выбора функций $u_s(x)$ и $v_s(x)$ мы будем получать различные выражения для $f_0^*(x)$, $\varphi_0^*(x)$, $f_s^*(x)$ и $\varphi_s^*(x)$.

Определим функции $u_s(x)$ так, чтобы наинизшая степень разложения функций $f_s^*(x)$ была больше наинизшей степени разложения функций $f_0^*(x)$, а в случае $f_0^*(x) \equiv 0$ имели бы место тождества: $f_s^*(x) \equiv 0$ $(s = 1, \ldots, n)$.

Такому условию удовлетворяют функции $u_s(x)$, определяемые уравнениями

$$p_{s1}u_1 + p_{s2}u_2 + \ldots + p_{sn}u_n + f_s(x) + X_{s1}(x, 0, u_i) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Из этих уравнений можно найти функции $u_s(x)$ в виде абсолютно сходящихся рядов, причем разложение функций $u_s(x)$ по степеням x будет начинаться с членов не ниже второго порядка, так как функции $X_{s1}(x_1, 0, u_i)$ не содержат линейных членов относительно x.

Следовательно,

$$u_s(x) = A_s x^{\alpha_s} + A_{s+1} x^{\alpha_s+1} + \ldots \qquad (s=1, \ldots, n, \ \alpha_s \geqslant 2) \tag{2.11}$$

Коэффициенты A_s, $A_{s+1}, \ldots$ определятся в результате подстановки рядов (2.11) в уравнения (2.10).

Подставляя найденные значения функций $u_s(x)$ в выражения (2.9), будем иметь

$$f_s^*(x) = -v_s f_0^*(x) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Функции $v_s(x)$ определим так, чтобы $\varphi_s^*(x) \equiv 0$.
Для этого достаточно $v_s(x)$ определить из уравнений

$$p_{s1} v_1 + p_{s2} v_2 + \ldots + p_{sn} v_n + \varphi_s(x) - v_s \varphi_0(x) - \frac{du_s}{dx} + \left.\frac{\partial X_{s1}(x, y, u_i)}{\partial y}\right|_{y=0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} v_i \left.\frac{\partial X_{s1}(x, y, u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i}\right|_{y=0} = 0 \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{2.12}$$

Наинизшая степень разложения по степеням x функций $v_s(x)$, удовлетворяющих этим уравнениям, будет не менее единицы.

Следовательно, наинизшая степень разложения функций $f_s^*(x)$ будет по крайней мере на единицу больше наинизшей степени разложения функции $f_0^*(x)$.

На основании изложенного следует, что система уравнений (2.3) всегда может быть преобразована в систему такого же вида, но в которой степень α_0 будет по крайней мере на единицу меньше наинизшей степени α_s.

Если окажется, что $f_0^*(x) \equiv 0$, то и все функции $f_s^*(x)$ обратятся тождественно в нули. Функции же $\varphi_s^*(x)$ всегда можно обратить тождественно в нули.

§ 6. Случай $f_0^*(x) \equiv \varphi_0^*(x) \equiv 0$. Предположим, что в результате преобразования (2.6) функции $f_0^*(x) = \varphi_0^*(x) \equiv 0$. Тогда и

$$f_s^*(x) = \varphi_s^*(x) \equiv 0 \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Преобразованную систему в прежних обозначениях можно представить в следующем виде:

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = y^2 \psi_0(x) + \ldots + Y_1(x, y, x_i)$$

$$x_s^{\cdot} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + y^2 \psi_s(x) + \ldots + X_{s1}(x, y, x_i) \tag{2.13}$$

$$(s, i = 1, \ldots, n)$$

Эта система уравнений является частным случаем системы (2.3), однако условия устойчивости тривиального решения системы уравнений (2.13) нельзя вывести из соответствующих условий устойчивости, которые мы получим для общего случая.

Докажем, что во всех случаях, которые может представить система уравнений (2.13), невозмущенное движение неустойчиво.

Представим функции Y_1 и X_{s1} в виде

$$Y_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j P_j(x) + Y_1^*(x, y, x_i)$$

$$X_{s1} = \sum_{j=1}^{n} x_j P_{sj}(x) + X_{s1}^*(x, y, x_i) \tag{2.14}$$

где P_j и P_{sj} — голоморфные функции x, разложение которых начинается с членов не ниже первого порядка. Функции Y_1^* и X_{s1}^*, если и содержат линейные члены в отношении переменных $x_1, \ldots, x_n$, то только с множителем y.

Рассмотрим вначале частный случай. Предположим, что в правых частях системы (2.13) все $P_j \equiv 0$.

Тогда функцию Четаева для системы (2.13) можно взять в виде

$$V = xy + V_1(x_1, \ldots, x_n) \tag{2.15}$$

Функцию V_1 определим из уравнения (1.9) при $g_0 = 1$. Производную dV/dt в силу уравнений (2.13) можно представить следующим образом:

$$V' = y^2 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 + xy^2\psi_0(x) + \ldots + xY_1{}^*(x, y, x_i) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial x_s}[y^2\psi_s(x) + \ldots + X_{s1}(x, y, x_i)]$$

или, учитывая, что $Y_1{}^*$ может содержать линейные члены в отношении $x_1, \ldots, x_n$ только в произведении с y, будем иметь

$$V' = y^2 + x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2 + y^2F(x, y, x_i) + y\sum_{s=1}^{n} x_sF_s(x, y, x_i) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_s x_j F_{sj}(x, y, x_i) \tag{2.16}$$

где F, F_s и F_{sj} обращаются в нули при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Очевидно, что в области $V \geqslant 0$, где $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, функция V' является определенно-положительной. Следовательно, функции V и V' удовлетворяют теореме Четаева о неустойчивости.

Покажем, что к этому частному случаю приводится любой другой, представляемый системой уравнений (2.13). Произведем замену

$$y = \eta + \sum_{s=1}^{n} x_s u_s(x) \tag{2.17}$$

Функции $u_s(x)$ определим из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{sj} + P_{sj})u_s = P_j \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

в виде степенных рядов в отношении x, обращающихся в нуль при $x = 0$. Такое определение всегда возможно.

В результате этого преобразования система (2.13) примет вид

$$x^{\cdot} = \eta + \sum_{s=1}^{n} x_s u_s(x), \qquad \eta^{\cdot} = \eta^2\psi_0(x) + \ldots + Y_1{}^*(x, \eta, x_i) \tag{2.18}$$
$$x_s{}^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k + \eta^2\psi_s(x) + \ldots + X_{s1}{}^*(x, \eta, x_i) \qquad (s, i = 1, \ldots, n)$$

В этой системе функция $Y_1{}^*$, если и содержит линейные члены в отношении $x_1, \ldots, x_n$, то только с множителем η.

Функцию Четаева для системы (2.18) можно взять в виде (2.15). Легко убедиться, что производной этой функции в силу уравнений (2.18) можно придать вид (2.16).

Следовательно, и в общем случае при $f_0{}^*(x) = \varphi_0{}^*(x) \equiv 0$ невозмущенное движение неустойчиво.

Вышеизложенное позволяет формулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть определяющее уравнение, соответствующее системе уравнений возмущенного движения, имеет два нулевых корня с одной группой решений при n остальных с отрицательными вещественными частями.

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения приведется тогда к виду (2.3).

Если в результате преобразования

$$x_s = y_s + u_s(x) + y v_s(x) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где $u_s(x)$ и $v_s(x)$ — корни уравнений (2.10) и (2.12), функции $f_0{}^*(x)$ и $\varphi_0{}^*(x)$ обратятся тождественно в нуль, то невозмущенное движение неустойчиво.

§ 7. Случай $f_0{}^*(x) = f_s{}^*(x) = \varphi_s{}^*(x) \equiv 0$, $\varphi_0{}^*(x) \neq 0$. Система уравнений (2.3) в этом случае может быть представлена в виде

$$\begin{gathered}x^\cdot = y\\ y^\cdot = y\varphi_0(x) + y^2\psi_0(x) + y^3\chi_0(x) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} y^k x_j P_j{}^{(k)}(x) + Y(x, y, x_i)\\ x_s{}^\cdot = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k + y^2\psi_s(x) + y^3\chi_s(x) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} y^k x_j P_{sj}{}^{(k)}(x) + X_s(x, y, x_i)\\ (s = 1, \ldots, n)\end{gathered} \tag{2.19}$$

где Y и X_s — функции, разложение которых по степеням x, y, x_1, ..., x_n начинается с членов не ниже второго порядка, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и не содержащие переменных x_1, ..., x_n в первой степени.

Выражения $P_j^{(k)}$ и $P_{sj}^{(k)}$ являются голоморфными функциями одной переменной x, причем $P_j{}^{(0)}$ и $P_{sj}^{(0)}$ обращаются в нуль при $x = 0$.

Не уменьшая общности задачи, мы можем считать все функции $\psi_s(x)$, фигурирующие в системе (2.19), обращающимися в нуль при $x = 0$. Если эти функции будут отличны от нуля при $x = 0$, то, полагая

$$x_s = y_s + l_s y^2$$

и определяя l_s из уравнений

$$\sum p_{sk} l_k = c_{s0}$$

получим систему, аналогичную (2.19), в которой функции, играющие роль функций $\psi_s(x)$, будут обращаться в нуль при $x = 0$.

Будем предполагать, что над системой (2.19) указанное преобразование выполнено, и все $\psi_s(x) = 0$ при $x = 0$.

Отметим, что это преобразование не изменит коэффициентов разложения функции $\varphi_0(x)$.

Преобразуем систему (2.19) к переменным ξ, η согласно равенствам

$$x = \xi + \sum_{j=1}^{n} x_j u_j(x), \qquad y = \eta + \sum_{j=1}^{n} x_j v_j(x)$$

Функции $u_j(x)$ и $v_j(x)$ определим так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль $P_j^{(0)}(x)$, обратились тождественно в нули. Для этого достаточно $u_j(x)$ и $v_j(x)$ определить из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} p_{sj} v_j = P_j{}^{(0)}(x) + \varphi_0(x) v_j - \sum_{s=1}^{n} P_{sj}{}^{(0)} v_s$$

$$\sum_{s=1}^{n} p_{sj} u_j = v_j(x) - \sum_{s=1}^{n} P_{sj}{}^{(0)} u_s$$

Отметим, что функции $u_j(x)$ и $v_j(x)$ обращаются в нуль при $x = 0$.

Преобразованная система примет вид

$$\xi^{\cdot} = \eta + \eta^2 \theta_2(\xi) + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \eta^k x_j L_j^{(k)}(\xi) + X(\xi, \eta, x_i)$$

$$\eta^{\cdot} = \eta\varphi_0(\xi) + \eta^2 \psi_0(\xi) + \ldots + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \eta^k x_j Q_j^{(k)}(\xi) + Y^*(\xi, \eta, x_i) \qquad (2.20)$$

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + \eta^2 \psi_s(\xi) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \eta^k x_j Q_{sj}^{(k)}(\xi) + X_s^*(\xi, \eta, x_i)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

В этой системе функции $L_j^{(k)}$, $Q_j^{(k)}$, $Q_{sj}^{(k)}$ имеют структуру функций $P_j^{(k)}$ и $P_{sj}^{(k)}$, но функции $L_j^{(0)}$, $Q_j^{(0)}$ тождественно равны нулю. Функции X, Y^* и X_s^* по структуре не отличаются от Y и X_s. Функция $\theta_2(\xi)$ в первом уравнении этой системы обращается в нуль при $\xi = 0$. Совокупности членов, не зависящих от $x_1, \ldots, x_n$ в правых частях оставшихся уравнений системы (2.20), будут теми же, что и в системе (2.19), с заменой x на ξ, y на η.

Рассмотрим вначале тот случай, когда младший член в разложении функции $\varphi_0(\xi)$ по степеням ξ имеет коэффициент $b_0 > 0$.

Отметим, что в случае β_0 — нечетного коэффициент b_0 можно считать положительным, так как замена ξ на $-\xi$ и η на $-\eta$ меняет знак выражения $b_0\xi^{\beta_0}$ на обратный.

Функцию Четаева для системы уравнений (2.20) возьмем в виде

$$V = \xi\eta + V_1(x_1, \ldots, x_n)$$

Определяем функцию V_1 из уравнения (1.9) при $g_0 = 1$.

Производную функции V по t запишем следующим образом:

$$V' = \eta^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 + b_0 \eta \xi^{\beta_0+1} + S(\xi, \eta, x_i)$$

Выражение $S(\xi, \eta, x_i)$ можно представить в виде

$$S(\xi, \eta, x_i) = \eta\xi^{\beta_0+1} H_0(\xi) + \eta^2 H_1(\xi, \eta, x_i) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_s x_j H_{sj}(\xi, \eta, x_i) +$$

$$+ \eta \sum_{j=1}^{n} x_j P_j(\xi)$$

в котором $H_0(\xi)$ и $P_j(\xi)$ обращаются в нуль при $\xi = 0$, а функции H_1 и H_{sj} обращаются в нуль при $\xi = \eta = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Так как функция V_1 является определенно-отрицательной квадратичной формой переменных $x_1, \ldots, x_n$, то функция V может принимать положительные значения только в области $\xi > 0$ и $\eta > 0$ или в области $\xi < 0$ и $\eta < 0$.

Рассмотрим область $\xi > 0$ и $\eta > 0$, где $V > 0$. В этой области V' при $b_0 > 0$ является определенно-положительной. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Предположим теперь, что коэффициент $b_0 < 0$ и степень β_0 — четная.

Рассмотрим частный случай, считая, что в системе (2.20) функции $L_j^{(1)}$ и $Q_j^{(1)}(\xi)$ тождественно равны нулю.

Построим вначале функцию Ляпунова для первых двух уравнений системы (2.20), если в правых частях этих уравнений положить $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Определим предварительно две функции $F_1(\xi, \eta)$ и $F_2(\xi, \eta)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi}[\eta + \eta^2\theta_2(\xi) + \ldots] + \frac{\partial F_1}{\partial \eta}[\eta\varphi_0(\xi) + \eta^2\psi_0(\xi) + \ldots] = 0 \qquad (2.21)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \xi}[\eta + \eta^2\theta_2(\xi) + \ldots] + \frac{\partial F_2}{\partial \eta}[\eta^2\psi_0(\xi) + \ldots] = -\eta^4$$

Согласно теореме Коши такое определение функций всегда возможно. Оно будет единственным при условии, что функции F_1 и F_2 при $\xi = 0$ обращаются в наперед заданные функции η. Пусть

$$F_1(0, \eta) = \eta, \quad F_2(0, \eta) = \eta^2 \tag{2.22}$$

Легко убедиться, что функция $F_1(\xi, \eta)$ будет иметь вид

$$F_1 = \eta + \psi_1(\xi, \eta)$$

причем функция $\psi_1(\xi, \eta)$ не содержит линейных членов, а младший член разложения функции $\psi_1(\xi, 0)$ равен

$$\frac{b_0}{\beta_0 + 1}\xi^{\beta_0 + 1}$$

Функция $F_2(\xi, \eta)$ в силу второго уравнения (2.21) и условия (2.22) представится в виде

$$F_2 = \eta^2 + \eta^2\psi_2(\xi, \eta)$$

где $\psi_2(\xi, \eta)$ обращается в нуль при $\xi = \eta = 0$.

Очевидно, что выражение

$$[\eta + \psi_1(\xi)]^2 + F_2(\xi, \eta)$$

представляет определенно-положительную функцию от ξ, η. Легко обнаружить, что это выражение является функцией Ляпунова для первых двух уравнений системы (2.20), если в правых их частях положить $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Функцию Ляпунова для системы уравнений (2.20), при условии $L_j^{(1)} = Q_j^{(1)} \equiv 0$, $b_0 < 0$, β_0 — четное, возьмем в виде

$$V = [\eta + \psi(\xi, \eta)]^2 + \eta^2 + \eta^2\psi_2(\xi, \eta) + V_1(x_1, \ldots, x_n)$$

Функцию V_1 определим из уравнения (1.9) при условии $g_0 = -1$. Тогда функция V будет определенно-положительной по отношению к переменным ξ, η, x_1, ..., x_n.

Производная dV/dt в силу уравнений (2.20) и (2.21) примет вид

$$V' = 2[\eta + \psi_1(\xi, \eta)]\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\eta^k x_j L_j^{(k)}(\xi) + X(\xi, \eta, x_i)\right] +$$
$$+\left[1 + \frac{\psi_1(\xi, \eta)}{\partial\eta}\right]\left[\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\eta^k x_j Q_j^{(k)}(\xi) + Y^*(\xi, \eta, x_i)\right] +$$
$$+\eta^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\xi}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\eta^k x_j L_j^{(k)}(\xi) + X(\xi, \eta, x_i)\right] +$$
$$+\left(2\eta + 2\eta\psi_2 + \eta^2\frac{\partial\psi_2}{\partial\eta}\right)\left[\eta\varphi_0(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\eta^k x_j Q_j^{(k)} + Y^*(\xi, \eta, x_i)\right] +$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_1}{\partial x_s}\left[\eta^2\psi_s(\xi) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\eta^k x_j Q_{sj}^{(k)}(\xi) + X_s^*(\xi, \eta, x_i)\right] -$$
$$-\eta^4 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$$

Это выражение можно представить в форме

$$V' = -\eta^4 - x_1^2 - \ldots - x_n^2 + 2b_0\eta^2\xi^{\beta_0} + \eta^2\xi^{\beta_0}H_0(\xi) +$$
$$+\eta^2\sum_{j=1}^{n}x_j H_j(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}x_j x_s H_{js}(\xi, \eta, x_i)$$

где H_0 обращается в нуль при $\xi = 0$, $H_j(\xi, \eta)$ — при $\xi = \eta = 0$ и $H_{js}(\xi, \eta, x_i)$ — при $\xi = \eta = x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Вследствие этого функция V' при условии $b_0 < 0$ и β_0 — четное представляет постоянно-отрицательную функцию переменных $\xi, \eta, x_1, \ldots, x_n$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

Мы предполагали, что в правых частях системы (2.20) функции $L_j^{(1)}$ и $Q_j^{(1)}$ тождественно равны нулю. Если окажется, что хотя бы одна из этих функций не равна тождественно нулю, то систему (2.20) всегда можно преобразовать в новую систему, в которой функции, играющие роль функций $L_j^{(1)}$ и $Q_j^{(1)}$, будут тождественно равны нулю. Для этого достаточно положить

$$\xi = \xi_1 + \eta \sum_{j=1}^{n} x_j A_j(\xi), \qquad \eta = \eta_1 + \eta \sum_{j=1}^{n} x_j B_j(\xi) \tag{2.23}$$

и определить функции $A_j(\xi)$ и $B_j(\xi)$ из уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n} p_{sj} B_s = Q_j^{(1)}(\xi) + \sum_{s=1}^{n} Q_{sj}^{(1)}(\xi) B_s \\ &\sum_{j=1}^{n} p_{sj} A_s = B_j(\xi) + \sum_{s=1}^{n} Q_{sj}^{(1)}(\xi) A_s \end{aligned} \tag{2.24}$$

В результате преобразования (2.23) мы получим новую систему, в правых частях которой совокупность членов, не зависящих от $x_1, \ldots, x_n$, останется без изменения, а функции, играющие роль функций $L_j^{(1)}$ и $Q_j^{(1)}$, будут тождественно равны нулю.

Следовательно, заключение об устойчивости, полученное в предположении $L_j^{(1)} = Q_j^{(1)} \equiv 0$, остается справедливым для любых систем (2.20).

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Если в результате преобразования системы (2.3) к переменным y_s согласно равенствам

$$x_s = y_s + u_s(x) + y v_s(x)$$

где $u_s(x)$ и $v_s(x)$ — корни уравнений (2.10) и (2.12), функция $f_0^*(x)$ обратится тождественно в нуль, а функция $\varphi_0^*(x) = b_0 x^{\beta_0} + \ldots$ имеет нечетную степень β_0 или при четной степени — коэффициент $b_0 > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если же при четном β_0 коэффициент $b_0 < 0$, то — устойчиво.

§ 8. Общий случай. Предположим, что система (2.3) преобразована согласно равенствам (2.6). Будем рассматривать тот случай, когда $f_0(x) \not\equiv 0$ и $\alpha_s > \alpha_0$.

Построение функций Ляпунова и Четаева было бы значительно проще, если бы разложение функций $X_{s0}(x, y)$ начиналось с членов достаточно высокого порядка.

Покажем, что систему (2.3) при условии $f_0(x) \not\equiv 0$ и $\alpha_s > \alpha_0$ можно всегда преобразовать так, чтобы разложение функций, играющих роль X_{s0} в преобразованной системе, начиналось с членов сколь угодно высокого порядка.

Положим

$$x_s = y_s + u_s(x, y)$$

Совокупность членов, не зависящих от y_s, в правых частях преобразованной системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} Y_{s0} = &-\frac{\partial u_s}{\partial x} y - \frac{\partial u_s}{\partial y} [f_0(x) + y\varphi_0(x) + \ldots + Y_1(x, y, u_i)] + \\ &+ \sum_{j=1}^{n} p_{sj} u_j + f_s(x) + y\varphi_s(x) + \ldots + X_{s1}(x, y, u_i) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Рассмотрим уравнения $Y_{s0}=0$. Эти уравнения можно удовлетворить рядами вида (введение, примечание к теореме {30})

$$u_s=\sum_{k_1+k_2\geqslant 2}^{\infty} c_s^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}\qquad (s=1,\ldots,n)\tag{2.26}$$

Эти ряды, как правило, будут расходящимися.

Возьмем вместо рядов (2.26) многочлены

$$v_s=\sum c_s^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}\qquad (2\leqslant k_1+k_2\leqslant N,\ s=1,\ldots,n)\tag{2.27}$$

представляющие сумму форм до N-го порядка включительно рядов u_s. Число N можно полагать достаточно большим.

Преобразуем систему (2.3) по формулам

$$x_s=y_s+v_s(x,y)\qquad (s=1,\ldots,n)\tag{2.28}$$

В результате получим новую систему, аналогичную системе (2.3), с той только разницей, что в правых частях n последних уравнений разложения функций Y_{s0} будут начинаться с членов не ниже $(N+1)$-го порядка.

Отметим, что младший член разложения функции $f_0(x)$, равный $a_0x^{\alpha_0}$, останется без изменения и неравенства $\alpha_s>\alpha_0$ не нарушатся, а в случае $\beta_0\leqslant\alpha_0$ младший член функции $\varphi_0(x)$ останется также без изменения.

Сохраняя прежние обозначения, перепишем преобразованную систему в виде

$$\begin{aligned}
&x^{\cdot}=y\\
&y^{\cdot}=f_0(x)+y\varphi_0(x)+\ldots+\sum_{k_1+k_2\geqslant 1}P^{(k_1k_2)}(x_i)x^{k_1}y^{k_2}+Y(x,y,x_i)\\
&x_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}x_k+\sum_{k_1+k_2\geqslant N+1}^{\infty}c_s^{(k_1k_2)}x^{k_1}y^{k_2}+\sum_{k_1+k_2\geqslant 1}P_s^{(k_1k_2)}(x_i)x^{k_1}y^{k_2}+\\
&\qquad +X_s(x,y,x_i)\qquad (s,i=1,\ldots,n)
\end{aligned}\tag{2.29}$$

где $P^{(k_1k_2)}$ и $P_s^{(k_1k_2)}$ — линейные формы переменных $x_1,\ldots,x_n$, а $Y(x,y,x_i)$ и $X_s(x,y,x_i)$ — функции, обращающиеся в нуль при $x_1=\ldots=x_n=0$ и не содержащие линейных членов в отношении этих переменных; $c_s^{(k_1k_2)}$ — постоянные величины.

Если окажется, что в результате преобразования линейные формы $P^{(k_1k_2)}$ для всех $k_1+k_2\leqslant N$ обратятся тождественно в нуль, то для первых двух уравнений системы (2.29) функции Ляпунова и Четаева можно строить независимо от уравнений присоединенной системы во всех случаях, когда знак производных этих функций определяется членами не выше N-го порядка независимо от членов более высокого порядка.

Решение задачи об устойчивости в этих случаях приводится к исследованию первых двух уравнений системы (2.29) при $x_1=\ldots=x_n=0$.

Предположим, что нам удалось отыскать функцию Ляпунова для первых двух уравнений. Пусть эта функция есть $V_1(x,y)$. Функцию Ляпунова V_2 для присоединенной системы, если в правых ее частях положить $x=y=0$, всегда можно определить в виде квадратичной формы из уравнения (1.9) с заменой g_0 на $+1$ или -1.

Тогда функция Ляпунова для системы (2.29) будет иметь вид

$$V=V_1(x,y)+V_2(x_1,\ldots,x_n)$$

Аналогичным образом мы можем строить функции Четаева.

Докажем теперь, что любую систему вида (2.29) можно преобразовать так, чтобы все $P^{(k_1k_2)}(x_i)$ для $k_1+k_2\leqslant N$ обратились тождественно в нуль. Это преобразование будет обладать тем свойством, что задачи об устойчивости в переменных исходной и преобразованной систем будут эквивалентны.

Предположим, что все функции $P^{(k_1k_2)}(x_i)$, для которых $k_1+k_2=k-1$, тождественно равны нулю. Докажем, что заменой

$$x=\xi+\sum_{k_1+k_2=k} u^{(k_1k_2)}(x_i)\,x^{k_1}y^{k_2},\qquad y=\eta+\sum_{k_1+k_2=k} v^{(k_1k_2)}(x_i)\,x^{k_1}y^{k_2} \tag{2.30}$$

систему (2.24) можно преобразовать так, чтобы в новой системе функции, играющие роль $P^{(k_1k_2)}(x_i)$, для $k_1+k_2=k$ обратились тождественно в нули.

Для этого достаточно определить линейные формы $u^{(k_1k_2)}$ и $v^{(k_1k_2)}$ из уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial v^{(k_1k_2)}}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)=-(k_1+1)\,v^{(k_1+1,\,k_2-1)}+P^{(k_1k_2)}(x_i)$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u^{(k_1k_2)}}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n)=-(k_1+1)\,u^{(k_1+1,\,k_2-1)}+$$
$$+v_s^{(k_1k_2)}(x_i)\qquad (k_1+k_2=k) \tag{2.31}$$

Первую группу уравнений можно разрешить относительно $v^{(k_1k_2)}$, определяя последовательно линейные формы $v^{(k,0)}$, $v^{(k-1,1)}$, …, $v^{(0,k)}$. Подставляя эти формы во вторую группу уравнений, мы таким же путем определим все $u^{(k_1k_2)}$.

Давая k значения 1, …, N, мы после каждого преобразования будем получать новые системы, в которых функции, играющие роль функций $P^{(k_1k_2)}$ для $k_1+k_2=1$, $k_1+k_2=2$, …, $k_1+k_2=N$, будут обращаться тождественно в нули.

Отметим, что в результате этого преобразования совокупности членов, не зависящих от x_1, …, x_n в правых частях системы (2.30), не изменятся.

Очевидно, что задача об устойчивости в переменных новой системы эквивалентна задаче об устойчивости в переменных системы (2.29).

§ 9. **Системы второго порядка**. Рассмотрим систему второго порядка, выводимую из системы (2.29), если в правых частях двух первых уравнений положить $x_1=\ldots=x_n=0$

$$x^{\cdot}=y,\qquad y^{\cdot}=f_0(x)+y\varphi_0(x)+y^2\psi_0(x)+\ldots \tag{2.32}$$

где $f_0(x)=a_0x^{\alpha_0}+\ldots$, $\qquad\varphi_0(x)=b_0x^{\beta_0}+\ldots$, $\qquad\psi_0(x)=c_0x^{\gamma_0}+\ldots$

$$\alpha_0\geqslant 2,\qquad \beta_0\geqslant 1,\qquad \gamma_0\geqslant 0$$

Пусть $a_0\neq 0$, α_0 — четное число и $\gamma_0=0$. Отметим, что при четном α_0 коэффициент a_0 можно считать положительным, так как заменой x на $-x$ и y на $-y$ выражение $a_0x^{\alpha_0}$ меняет знак. Функция Ляпунова для системы (2.32) будет иметь вид

$$V=(1+a_0x)\,ye^{-c_0x}-\int_0^x\varphi_0(x)(1+a_0x)\,e^{-c_0x}\,dx$$

Производную функции V по t, вычисленную согласно уравнениям (2.32), можно записать следующим образом:

$$V'=[a_0y^2+(1+a_0x)f_0(x)+y^2(1+a_0x)(\psi_0-c_0)+\ldots]\,e^{-c_0x}$$

Так как разность $\psi_0 - c_0$ при $x=0$ обращается в нуль, то знак V' определяется знаком выражения $a_0 y^2 + a_0 x^{\alpha_0}$ независимо от членов более высокого порядка. Отсюда видно, что V' является знакоопределенной функцией x, y, а функции V можно приписать любой знак. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Если функция $\psi_0(x)$ обращается в нуль при $x=0$, то функции Ляпунова следует положить $c_0=0$.

Предложим теперь, что $a_0 > 0$ и α_0 — нечетное. Функцию Ляпунова при этих условиях можно взять в виде

$$V = xy - \int_0^x x\varphi_0(x)dx$$

В силу уравнений (2.32) будем иметь

$$V' = y^2 + xf_0(x) + y^2 x\psi_0(x) + \ldots$$

Эта функция при $a_0 > 0$ и α_0 нечетном является определенно-положительной, а функция V может принимать значения любого знака. Следовательно, при $a_0 > 0$ и α_0 нечетном невозмущенное движение неустойчиво.

Исследуем случай $a_0 < 0$ и α_0 — нечетное.

Предположим вначале, что $\beta_0 < \alpha_0$, β_0 — четное. Следуя Ляпунову, определим функцию $F_1(x, y)$ из уравнения

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}[\varphi_0(x) + y\psi_0(x) + \ldots] = 0 \tag{2.33}$$

и подчиним ее условию обращения в y при $x = 0$. Эта функция, как мы уже видели, будет иметь вид

$$F_1(x, y) = y + \psi_1(x, y)$$

где $\psi_1(x, 0) = -\frac{b_0}{\beta_0+1}x^{\beta_0+1} + \ldots$

Если положим

$$[y + \psi_1(x, y)]\left[1 + \frac{\partial\psi_1(x, y)}{\partial y}\right] = \theta(x) + y(1 + H) \tag{2.34}$$

разумея под H голоморфную функцию, уничтожающуюся при $x = y = 0$, то младший член функции $\theta(x)$ будет равен

$$-\frac{b_0}{\beta_0+1}x^{\beta_0+1}$$

Рассмотрим теперь функцию $F_2(x, y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}[\varphi_0(x) + y\psi_0(x) + \ldots] = b_0 y^{\alpha_0+\beta_0} - 2(1 + H)f_0(x) \tag{2.35}$$

и обращающуюся в нуль при $x = 0$.

Эта функция будет иметь вид

$$F_2 = -\frac{2a_0}{\alpha_0+1}x^{\alpha_0+1} + u(x, y)$$

где $u(x, y)$ не содержит членов ниже $(\alpha_0 + 2)$-го порядка. Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V = [y + \psi_1(x, y)]^2 + F_2(x, y)$$

Производная функции V по t с учетом (2.33) и (2.35) представится следующим образом:

$$V' = 2F_1 \frac{\partial F_1}{\partial y} f_0(x) + b_0 y^{\alpha_0+\beta_0+1} - 2y(1+H) f_0(x) + \frac{\partial F_2}{\partial y} f_0(x)$$

Правую часть этого выражения, подставляя вместо $F_1\ \partial F_1/\partial y$ его значение из (2.34), можно преобразовать к виду

$$V' = -\frac{2b_0 a_0}{\beta_0+1} x^{\alpha_0+\beta_0+1} + b_0 y^{\alpha_0+\beta_0+1} + P(x, y)$$

где $P(x, y)$ — голоморфная функция x, y, разложение которой по степеням этих переменных начинается с членов не ниже $(\alpha_0 + \beta_0 + 2)$-го порядка.

При $b_0 < 0$ производная V' в силу того, что $a_0 < 0$ и α_0 нечетное, будет определенно-отрицательной функцией x и y, а если $b_0 > 0$, то — определенно-положительной. Следовательно, невозмущенное движение при $b_0 < 0$ асимптотически устойчиво, а при $b_0 > 0$ неустойчиво.

§ 10. Случай нечетного β_0. При β_0 нечетном коэффициент b_0 можно считать положительным, так как заменой x на $-x$ и y на $-y$ знак выражения $b_0 y x^{\beta_0}$ в системе (2.32) меняется на обратный.

Преобразуем систему (2.32), положив

$$y = y_1 + h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots$$

В результате будем иметь

$$x^{\cdot} = y_1 + h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots, \qquad \dot{y}_1 = f(x) + y_1 \varphi(x) + y_1^2 \psi(x) + \ldots \tag{2.36}$$

где

$$\begin{gathered} f(x) = f_0(x) - [(\beta_0+1) h_1 x^{\beta_0} + \ldots](h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots) + (h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots)\times \\ \times \varphi_0(x) + (h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots)^2 \psi_0(x) + \ldots \\ \varphi(x) = \varphi_0(x) - [(\beta_0+1) h_1 x^{\beta_0} + \ldots)] + (2h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots)\psi_0(x) + \ldots \end{gathered} \tag{2.37}$$

Определим коэффициенты $h_1, h_2, \ldots, h_{\beta_0+p}$ так, чтобы разложение $f(x)$ не содержало членов ниже $(2\beta_0 + p)$-го порядка. Будем считать, что $p > 3$.

Коэффициент h_1 в случае $\alpha_0 > 2\beta_0 + 1$ будет равен $h_1 = b_0/(\beta_0+1)$, а при $\alpha_0 = 2\beta_0 + 1$ коэффициент h_1 определится из уравнения

$$(\beta_0+1) h_1^2 - b_0 h_1 - a_0 = 0$$

Это уравнение при условии $b_0^2 + 4a_0(\beta_0 + 1) > 0$ и при $b_0 > 0$ будет иметь по крайней мере один положительный корень. Следовательно, в обоих случаях коэффициент h_1 можно считать положительным.

Отметим, что степень младшего члена разложения функции $\varphi(x)$ не ниже степени младшего члена функции $\varphi_0(x)$, т. е. $\beta \geqslant \beta_0$.

Для решения вопроса об устойчивости возьмем функцию Четаева в виде

$$V = x^2 + y_1^2$$

Покажем, что в области D, где

$$\mu^2 x^{2(\beta_0+1)} - y_1^2 > 0, \qquad x > 0 \qquad (\mu < h_1)$$

произведение VV' при достаточно малом x положительно и обращается в нуль только при $x = 0$. Дифференцируя V по t, будем иметь

$$V' = 2x(y_1 + h_1 x^{\beta_0+1} + \ldots) + 2y_1 [f(x) + y_1 \varphi(x) + \ldots]$$

Отсюда видно, что в области D знак V' при достаточно малом x определяется одним членом $2h_1 x^{\beta_0+2}$. Следовательно, в области D произведение $VV' > 0$ и равно нулю только при $x = 0$.

Внутри области D возьмем функцию

$$W = x^{2(\beta_0+2)} - y_1^2$$

Покажем, что при $W = 0$ функция W' сохраняет постоянный знак. Дифференцируя W по t, будем иметь

$$W' = 2(\beta_0+2)x^{2\beta_0+3}(y_1 + h_1 x^{\beta_0+1}) - 2y_1[f(x) + y_1\varphi(x) + y_1^2\psi(x) + \ldots]$$

Знак этого выражения при условии

$$W = x^{2(\beta_0+2)} - y^2{}_1 = 0$$

определяется или членом

$$2(\beta_0+2)h_1 x^{3\beta_0+4}$$

в случае $\beta > \beta_0$, или знаком разности двух членов

$$2(\beta_0+2)h_1 x^{3\beta_0+4} - 2b_0 x^{3\beta_0+4}$$

если $\beta = \beta_0$. В последнем случае знак W' при $W = 0$ определится знаком выражения

$$A = 2[(\beta_0+2)h_1 - b_0]$$

Следовательно, W' при $W = 0$ сохраняет постоянный знак. Таким образом, функции V и W удовлетворяют теореме Четаева о неустойчивости.

Если окажется, что $A = 0$, то функцию W можно взять в виде

$$W = x^{2(\beta_0+3)} - y^2{}_1$$

Тогда соответствующее для A выражение будет иметь вид

$$A = 2[(\beta_0+3)h_1 - b_0] \neq 0$$

Сформулируем результаты, полученные в § 9 и 10, следующей теоремой.

Теорема. Если система (2.3) такова, что преобразование к переменным

$$x_s = y_s + u_s(x) + yv_s(x)$$

где $u_s(x)$ и $v_s(x)$ — корни уравнений (2.10) и (2.12), определяет функции $f_0{}^*(x)$ и $\varphi_0{}^*(x)$ с младшими членами разложения $a_0 x^{\alpha_0}$, $b_0 x^{\beta_0}$ и при этом $a_0 > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво, если же $a_0 < 0$, $\beta_0 < \alpha_0$, β_0 — четное, α_0 — нечетное, то в случае $b_0 < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $b_0 > 0$ — неустойчиво.

Если же β_0 — нечетное и $\beta_0 < (\alpha_0 - 1)/2$, то невозмущенное движение неустойчиво при любых α_0, a_0, b_0. В случае β_0 нечетного и равного $(\alpha_0 - 1)/2$ движение также неустойчиво, если $b_0{}^2 + 4a_0(\beta_0 + 1) \geqslant 0$.

§ 11. Случай $\alpha_0 \leqslant 2\beta_0 + 1$, α_0 — нечетное. Все случаи, которые нам осталось рассмотреть, относятся к предположению $\alpha_0 \leqslant 2\beta_0 + 1$, $a_0 < 0$ и α_0 — нечетное число.

Если $\alpha_0 = 2\beta_0 + 1$, то число b_0 удовлетворяет условию

$$b_0^2 + 4(\beta_0+1)a_0 < 0$$

Полагая $\alpha_0 = 2n - 1$ $(n \geqslant 2)$, будем иметь $\beta_0 \geqslant n - 1$.

Для исследования задачи об устойчивости в указанных случаях, Ляпунов вводит в рассмотрение специальные функции $\mathrm{Cs}\,\theta$ и $\mathrm{Sn}\,\theta$, удовлетворяющие соотношениям

$\mathrm{Cs}^{2n}\,\theta + \mathrm{Sn}^2\,\theta = 1$, $\quad d\,\mathrm{Cs}\,\theta/d\theta = -\mathrm{Sn}\,\theta$, $\quad d\,\mathrm{Sn}\,\theta/d\theta = \mathrm{Cs}^{2n-1}\theta$ и условиям $\mathrm{Cs}\,0 = 1$, $\mathrm{Sn}\,0 = 0$.

Эти функции при $n = 1$ обращаются в обычные $\sin\theta$ и $\cos\theta$, а при $n = 2$ в эллиптические функции.

Покажем, что эту задачу можно решить и не прибегая к специальным функциям $\mathrm{Cs}\,\theta$, $\mathrm{Sn}\,\theta$, используя лишь обычные $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

Не уменьшая общности задачи, мы можем отрицательный коэффициент a_0 принять за -1. Для этого в системе (2.32) достаточно заменить

$$x=(-a_0)^{-\frac{1}{2(n-1)}}x_1, \qquad y=(-a_0)^{-\frac{1}{2(n-1)}}y_1$$

Допустим поэтому, что в системе (2.32) $a_0=-1$.

Преобразуем эту систему к переменным r и θ

$$x=r\cos\theta, \qquad y=-r^n\sin\theta \tag{2.38}$$

будем иметь

$$r^{\cdot}\cos\theta-r\theta^{\cdot}\sin\theta=-r^n\sin\theta$$

$$-nr^{n-1}r^{\cdot}\sin\theta-r^n\theta^{\cdot}\cos\theta=r^{2n-1}(-\cos^{2n-1}\theta+$$
$$+ra_1\cos^{2n}\theta+\ldots)-r^{n+\beta_0}(b_0\cos^{\beta_0}\theta\sin\theta+\ldots)+\ldots$$

Отсюда после очевидных преобразований получим

$$r^{\cdot}(\cos^2\theta+n\sin^2\theta)=-r^n(\sin\theta\cos\theta-\cos^{2n-1}\theta\sin\theta)+$$
$$+\ldots+r^{\beta_0+1}b_0\cos^{\beta_0}\theta\sin^2\theta+\ldots$$

$$\theta^{\cdot}(\cos^2\theta+n\sin^2\theta)=r^{n-1}(n\sin^2\theta+\cos^{2n}\theta)+$$
$$+\ldots+r^{\beta_0}b_0\cos^{\beta_0+1}\theta\sin\theta+\ldots$$

Эту систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} r^{\cdot}(\cos^2\theta+n\sin^2\theta)&=r^nR_0(\theta)+r^{n+1}R_1(\theta)+\ldots\\ \theta^{\cdot}(\cos^2\theta+n\sin^2\theta)&=r^{n-1}F_0(\theta)+r^nF_1(\theta)+\ldots \end{aligned} \tag{2.39}$$

В случае $\beta_0>n-1$ будем иметь

$$R_0(\theta)=-\sin\theta\cos\theta+\cos^{2n-1}\theta\sin\theta$$

$$F_0(\theta)=n\sin^2\theta+\cos^{2n}\theta$$

Если же $\beta_0=n-1$, то

$$R_0(\theta)=-\sin\theta\cos\theta+\cos^{2n-1}\theta\sin\theta+b_0\cos^{n-1}\theta\sin^2\theta$$

$$F_0(\theta)=n\sin^2\theta+\cos^{2n}\theta+b_0\cos^n\theta\sin\theta$$

При замене функций $\mathrm{Cs}\,\theta$ и $\mathrm{Sn}\,\theta$ на обычные $\sin\theta$ и $\cos\theta$ выражение F_0 так же, как и при введении специальных функций, не обращается в нуль ни при одном вещественном значении θ как в случае $\beta_0>n-1$, так и в случае $\beta_0=n-1$. Для случая $\beta_0>n-1$ это свойство $F_0(\theta)$ очевидно. В случае $\beta_0=n-1$ эту функцию можно представить в виде

$$F_0(\theta)=\frac{4n-b_0^2}{4}\sin^2\theta+\left(\cos^n\theta+\frac{b_0}{2}\sin\theta\right)^2$$

из которого следует, что в интересующем нас случае $(4n-b_0^2>0)$ функция $F_0(\theta)$ не обращается в нуль ни при одном вещественном значении θ. Следовательно, роль t может играть переменная θ. Исключая dt из системы (2.39), будем иметь

$$\frac{dr}{d\theta}=rR_1(\theta)+r^2R_2(\theta)+\ldots \tag{2.40}$$

где $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$, ... — дроби, числителями которых являются многочлены от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, а знаменатели — выражения, представляющие различные степени $F_0(\theta)$. Вопрос об устойчивости для уравнения типа (2.40) нами рассмотрен в § 2 главы I. Согласно результатам, полученным в этой главе, он решается следующим образом.

Уравнение (2.40) преобразуется к новой переменной ρ по формуле

$$r = \rho e^{u(\theta)}$$

Функция $u(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{du}{d\theta} = R_1 - g_1$$

где

$$g_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_1 d\theta$$

При этом значении g_1 функция $u(\theta)$ будет периодической.

Для новой переменной ρ получаем уравнение

$$\frac{d\rho}{d\theta} = g_1 \rho + \rho^2 P_2(\theta) + \rho^3 P_3(\theta) + \ldots \tag{2.41}$$

Если окажется, что $g_1 < 0$, то невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым. Если же $g_1 > 0$, то — неустойчивым.

В случае $g_1 = 0$, полагаем

$$\rho = c + c^2 u_2(\theta) + c^3 u_3(\theta) + \ldots \tag{2.42}$$

Подставляя значение ρ в (2.41) и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях c, будем иметь

$$u_2^{\cdot} = P_2, \qquad u_3^{\cdot} = P_3 + 2u_2 P_2, \ldots$$

Определим последовательно функции u_2, u_3, ... Первая непериодическая функция u_k, определяемая из этих уравнений, будет иметь вид

$$u_k = g_k \theta + \text{периодическая функция}$$

Тогда при $g_k < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $g_k > 0$ — неустойчиво.

Может оказаться, что все g_k ($k = 1, \ldots, N$) обратятся в нули. Это будет указывать на то, что задача об устойчивости членами N-го порядка правой части уравнения (2.41) не решается и дальнейшее вычисление функций u_k не имеет смысла.

В этом случае необходимо в системе уравнений (2.27) вместо числа N взять число $N_1 > N$, получить уравнение, аналогичное уравнению (2.41), и продолжить вычисление функций u_k до $k = N_1$. Если в числе новых функций u_k ($N < k < N_1$) будет непериодическая, то вопрос об устойчивости решается знаком соответствующего g_k.

Может оказаться, что как бы велико число N_1 мы ни брали, функции u_k все будут периодическими. Этот случай, так же как случаи $f_0(x) = \varphi_0(x) \equiv 0$ и $f_0(x) \equiv 0$, $\varphi_0(x) \not\equiv 0$, является существенно особенным.

Если предположить, что ряды (2.26), определяющие функции $u_s(x, y)$, будут сходящимися, то в результате преобразования по формулам (2.28) в присоединенной системе уравнений (2.29) правые части будут обращаться в нуль, когда $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Следовательно, система (2.29) будет иметь частное решение

$$x = r\cos\theta, \qquad y = -r^n \sin\theta, \qquad x_1 = \ldots = x_n = 0$$

где $r = \rho e^u$, ρ определяется абсолютно-сходящимся рядом (2.42), а u — периодическая функция.

В этом случае система (2.3) будет иметь периодическое решение

$$x = r\cos\theta, \qquad y = -r^n \sin\theta, \qquad x_s = u_s(x, y)$$

Однако ряды, представляющие функции $u_s(x, y)$, как правило, являются расходящимися. Установление того, будут ли они сходящимися в случае u_s периодических, представляют задачу весьма трудную.

§ 12. Общие выводы. Покажем теперь, как следует решать задачу об устойчивости движения, когда определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет два нулевых корня с одной группой решений.

Возьмем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в следующей форме:

$$y_s^{\cdot} = q_{s1} y_1 + q_{s2} y_2 + \ldots + q_{sn+2} y_{n+2} + Y_s(y_1, \ldots, y_{n+2})$$
$$(s = 1, \ldots, n+2) \tag{2.43}$$

Определяющее уравнение этой системы можно представить в виде алгебраического уравнения $(n+2)$-й степени

$$\varkappa^{n+2} + B_{n+1}\varkappa^{n+1} + B_n \varkappa^n + \ldots + B_1 \varkappa + B_0 = 0$$

Если окажется, что $B_0 = B_1 = 0$, а $B_2 \neq 0$, то определяющее уравнение будет иметь два нулевых корня. Если при этом хотя бы один из миноров первого порядка определителя линейной части системы (2.43) при $\varkappa = 0$ не обратится в нуль, то этому двойному нулевому корню будет отвечать одна группа решений. Будем далее предполагать, что уравнение

$$\varkappa^n + B_{n+1}\varkappa^{n-1} + \ldots + B_3 \varkappa + B_2 = 0$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями. Это свойство корней можно обнаружить непосредственно по коэффициентам B_k, не решая самого уравнения. Для этого достаточно воспользоваться критерием Гурвица или критерием Рауса, или любым другим критерием.

Если определяющее уравнение обладает указанными свойствами, то система уравнений (2.43) преобразуется к виду (2.2). Это преобразование проще всего осуществляется следующим образом. Возьмем две линейные формы с постоянными коэффициентами от переменных $y_1, \ldots, y_{n+2}$:

$$x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_{n+2} y_{n+2}, \qquad y = B_1 y_1 + B_2 y_2 + \ldots + B_{n+2} y_{n+2} \tag{2.44}$$

Определим коэффициенты A_s и B_s так, чтобы два из уравнений системы (2.43) приняли вид

$$x^{\cdot} = y + X(y_1, \ldots, y_{n+2}), \qquad y^{\cdot} = Y(y_1, \ldots, y_{n+2}) \tag{2.45}$$

где X и Y — голоморфные функции в окрестности начала координат, разложения которых по степеням $y_1, \ldots, y_{n+2}$ не содержат членов ниже второго порядка. Для этого необходимо, чтобы коэффициенты A_s и B_s удовлетворяли тождествам

$$\sum_{s=1}^{n+2} A_s (q_{s1} y_1 + q_{s2} y_2 + \ldots + q_{s,\,n+2} y_{n+2}) = B_1 y_1 + B_2 y_2 + \ldots + B_{n+2} y_{n+2}$$

$$\sum_{s=1}^{n+2} B_s (q_{s1} y_1 + q_{s2} y_2 + \ldots + q_{s,\,n+2} y_{n+2}) = 0$$

Эти два тождества приводят к $(2n+4)$ однородным уравнениям

$$q_{1s}A_1+q_{2s}A_2+\ldots+q_{n+2,s}A_{n+2}=B_s$$

$$q_{1s}B_1+q_{2s}B_2+\ldots+q_{n+2,s}B_{n+2}=0 \qquad (s=1,\ldots,n+2) \tag{2.46}$$

Полученные линейные однородные уравнения разрешимы относительно неизвестных коэффициентов A_s и B_s. Причем два из них могут иметь произвольные численные значения.

Предположим, что система (2.44) при найденных значениях A_s и B_s разрешена относительно переменных y_{n+1} и y_{n+2}. Тогда, заменяя в системе (2.45) и в n первых уравнениях системы (2.43) переменные y_{n+1} и y_{n+2} из (2.44) на переменные x, y, y_1, ..., y_n, получим новую систему уравнений вида

$$x^{\cdot}=y+X(x, y, y_1, \ldots, y_n), \qquad y^{\cdot}=Y(x, y, y_1, \ldots, y_n)$$

$$y_s^{\cdot}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sn}y_n+p_sx+q_sy+Y_s(x, y, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s=1,\ldots,n)$$

Определяющее уравнение присоединенной системы $D(\varkappa)=0$ имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Полагая $x_s=y_s+C_sx+D_sy$ $(s=1, \ldots, n)$ и определяя коэффициенты C_s и D_s из уравнений

$$p_{s1}C_1+p_{s2}C_2+\ldots+p_{sn}C_n=p_s$$

$$p_{s1}D_1+p_{s2}D_2+\ldots+p_{sn}D_n=q_s+C_s \qquad (s=1,\ldots,n)$$

разрешимых относительно C_s и D_s, так как определитель $D(0)\neq 0$, заменяя y на y_1, получим систему уравнений вида (2.2). Эта система преобразованием переменной y_1 к переменной y согласно уравнению

$$y=y_1+X(x, y_1, x_1, \ldots, x_n)$$

приводится к виду (2.3).

Если окажется, что все числа α_s, определяющие степени младших членов разложения функций $f_s(x)$, будут больше или равняться α_0 — показателю степени младшего члена разложения функции $f_0(x)$ и если при этом a_0 — коэффициент младшего члена $f_0(x)$ будет величиной положительной, то невозмущенное движение неустойчиво независимо от числа α_0. Если окажется, что $a_0<0$, но число α_0 — четное, то движение будет также неустойчиво. Случай $a_0<0$ и α_0 — нечетное может быть разрешен без дополнительных преобразований лишь тогда, когда числа β_s, определяющие степени младших членов разложения функций $\varphi_s(x)$, будут больше или равняться β_0 — показателю степени младшего члена разложения функции $\varphi_0(x)$ и $\beta_0<\alpha_0$. Если β_0 — четное, вопрос об устойчивости будет решаться знаком коэффициента младшего члена разложения $\varphi_0(x)$. При $b_0>0$ будем иметь неустойчивость, при $b_0<0$ — асимптотическую устойчивость. В случае β_0 — нечетного и $\beta_0<(\alpha_0-1)/2$ невозмущенное движение неустойчиво. Движение будет неустойчиво и в том случае, когда $\beta_0= (\alpha_0-1)/2$, если $b_0^2+4a_0(\beta_0+1)\geqslant 0$.

Если уравнения (2.3) этим условиям не удовлетворяют, то их необходимо преобразовать к новым переменным. В том случае, когда хотя бы одно из чисел α_s будет меньше α_0, то вначале следует вместо преобразования (2.6) рассмотреть преобразование

$$x_s=y_s+u_s(x) \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.47}$$

где $u_s(x)$ — корни уравнений

$$p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+f_s(x)+X_s(x, 0, x_1, \ldots, x_n)=0 \qquad (s=1,\ldots,n)$$

В результате этого преобразования мы получим новую систему, аналогичную системе (2.3), но в которой все $f_s(x) \equiv 0$. При этом числа α_0, β_0, β_s могут изменить свои значения. Может, в частности, оказаться, что $f_0(x) \equiv 0$.

Если число α_0 в новой системе будет четным или при нечетном α_0 число $a_0 > 0$ и если при этом $\beta_s \geqslant \beta_0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

В случае α_0 нечетного и $a_0 < 0$, а также в случае $f_0(x) \equiv 0$ систему уравнений (2.3) необходимо преобразовать по формулам (2.6). При решении уравнений (2.10) и (2.12) нет необходимости в точном определении функций $u_s(x)$ и $v_s(x)$. В рядах, определяющих эти функции, необходимо вычислить те первые члены, которые определяют младшие члены разложения функций $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$, если последние не обращаются тождественно в нули. Вопрос об устойчивости будет решаться числами a_0, α_0, b_0 и β_0 согласно теореме § 10.

Лишь только в двух случаях, когда 1) $\beta_0 > (\alpha_0 - 1)/2$ или $\varphi_0(x) \equiv 0$, 2) $\beta_0 = (\alpha_0 - 1)/2$ и $b_0^2 + 4a_0(\beta_0 + 1) < 0$ и при этом $a_0 < 0$, α_0 — нечетное, младшие члены разложения функций $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ вопроса об устойчивости не решают. Только в этих двух случаях систему уравнений (2.3) необходимо преобразовать по формулам (2.28). Для решения задачи в первых двух уравнениях преобразованной системы полагаем $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и рассматриваем систему второго порядка (2.32). Эту систему преобразуем к переменным r, θ согласно (2.38). Получаем уравнение (2.40).

Вопрос об устойчивости в этих случаях будет решаться знаком

$$g_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_1\, d\theta$$

Если $g_1 < 0$ — движение асимптотически устойчиво, если $g_1 > 0$ — неустойчиво.

В случае $g_1 = 0$ рассматриваем уравнение (2.41). Полагая

$$\rho = c + c^2 u_2(\theta) + c^3 u_3(0) + \ldots$$

находим первую непериодическую функцию $u_k(\theta)$ и постоянную g_k. При $g_k < 0$ будем иметь асимптотическую устойчивость, при $g_k > 0$ — неустойчивость, если только $k \leqslant N$. Если все u_k, как бы велико k ни было, будут получаться периодическими, вопрос об устойчивости остается открытым. Этот случай относится к существенно особенным.

В двух других существенно особенных случаях, характеризуемых тождествами 1) $f_0(x) = \varphi_0(x) \equiv 0$ и 2) $f_0(x) \equiv 0$, $\varphi_0(x) \not\equiv 0$, задача об устойчивости разрешается. В первом случае движение неустойчиво, во втором — движение может быть устойчиво, когда младший член разложения функции $\varphi_0(x)$ имеет четную степень и отрицательный коэффициент.

§ 13. Примеры. В качестве примеров рассмотрим системы дифференциальных уравнений, аналогичные тем, которые приводит Ляпунов в своих исследованиях для систем второго порядка.

Пример 1. Пусть предложенная система имеет вид

$$\begin{aligned} &x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + x_1(ax + by) \\ &x_1^{\cdot} = -x_1 + M_{20}x^2 + M_{11}xy + M_{02}y^2 + x_1(cx + dy) \end{aligned} \tag{2.48}$$

где B_{ij}, M_{ij}, a, b, c, d — некоторые постоянные.

Для этой системы будем иметь:

$$f_0(x) = B_{20}x^2, \qquad \varphi_0(x) = B_{11}x, \qquad f_1(x) = M_{20}x^2, \qquad \varphi_1(x) = M_{11}x$$

Следовательно, если $B_{20} \neq 0$, то на основании теоремы § 10 можно утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво, так как $\alpha_0 = 2$ — число четное.

Если же $B_{20} = 0$, то систему уравнений (2.48) необходимо преобразовать согласно (2.47). Для этого в правой части третьего уравнения полагаем $y = 0$ и полученное выражение приравниваем нулю

$$-x_1 + M_{20}x^2 + x_1 cx = 0$$

Решая это уравнение относительно $x_1 = u(x)$, получим

$$u(x) = M_{20}x^2 + M_{20}cx^3 + M_{20}c^2x^4 + \dots$$

Производя замену $x_1 = z + u$, будем иметь

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = f_0(x) + y\varphi_0(x) + \dots + z(ax + by) \tag{2.49}$$

$$z^{\cdot} = -z + y\varphi_1(x) + \dots + z(cx + dy)$$

где

$$f_0(x) = M_{20}a(x^3 + cx^4 + \dots)$$

$$\varphi_0(x) = B_{11}x + M_{20}b(x^2 + cx^3 + \dots)$$

$$f_1(x) \equiv 0, \quad \varphi_1(x) = (M_{11} - 2M_{20})x + M_{20}(d - 3c)x^2 + \dots$$

Если $M_{20}a > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Движение будет так же неустойчиво и при $M_{20}a < 0$, если предположить, что $B_{11}^2 + 8M_{20}a > 0$ (теорема § 10).

Если окажется, что $M_{20}a = 0$, то $f_0(x) \equiv 0$. Это может иметь место или когда $M_{20} = 0$, или $a = 0$. В этом случае систему (2.49) необходимо преобразовать к переменной z_1, положив $z = z_1 + yv(x)$.

Предположим вначале, что $M_{20} = 0$, а $a \neq 0$. В этом случае функцию $v(x)$ определим так, чтобы в преобразованной системе не только $f_0(x) \equiv 0$, но и $\varphi_1(x) \equiv 0$. Для этого необходимо удовлетворить уравнение

$$v(1 + B_{11}x - cx) - M_{11}x + av^2x = 0$$

Решая это уравнение, получим

$$v = M_{11}x - M_{11}(B_{11} - c)x^2 + M_{11}[(B_{11} - c)^2 - aM_{11}]x^3 + \dots$$

Преобразованная система примет вид

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = B_{11}xy + B_{02}y^2 + \{z_1 + y[M_{11}x - M_{11}(B_{11} - c)x^2 + \dots]\}(ax + by) \tag{2.50}$$

$$z_1^{\cdot} = -z_1 + \psi_1(x)y^2 + \dots + z_1(cx + dy) - z_1 v(x)(ax + by)$$

Следовательно,

$$f_0(x) \equiv 0, \qquad \varphi_0 = B_{11}x + aM_{11}x^2 - aM_{11}(B_{11} - c)x^3 + \dots$$

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad \varphi_1(x) \equiv 0$$

Имея в виду теорему § 7, мы можем утверждать, что при $B_{11} \neq 0$ невозмущенное движение неустойчиво, так как $\beta_0 = 1$. Если $B_{11} = 0$, но $aM_{11} \neq 0$, то на основании той же теоремы заключаем, что при $aM_{11} > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $aM_{11} < 0$ — устойчиво, так как β_0 четное число, а $b_0 = aM_{11} < 0$.

В случае $aM_{11} = 0$ будем иметь

$$f_0(x) = \varphi_0(x) \equiv 0, \qquad f_1(x) = \varphi_1(x) \equiv 0$$

На основании теоремы § 6 заключаем о неустойчивости движения.

Мы рассмотрели случай, когда при $B_{20} = 0$ имеет место равенство $M_{20}a = 0$. Причем мы полагали $M_{20} = 0$, $a \neq 0$.

Рассмотрим теперь случай $M_{20} \neq 0$, $a = 0$. Система уравнений (2.49) при этом условии примет вид

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = B_{11}xy + B_{02}y^2 + (z + M_{20}x^2 + M_{20}cx^3 + \ldots)by$$

$$z^{\cdot} = -z - M_{20}(2x + 3cx^2 + \ldots)y + M_{11}xy + M_{02}y^2 + \\ + (z + M_{20}x^2 + M_{20}cx^3 + \ldots)dy + czx \qquad (2.51)$$

Следовательно,

$$f_0(x) \equiv 0, \qquad \varphi_0(x) = B_{11}x + bM_{20}x^2 + bM_{20}cx^3 + \ldots$$

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad \varphi_1(x) = (M_{11} - 2M_{20})x + \ldots$$

В этом случае будем иметь: при $B_{11} \neq 0$ — неустойчивое движение; при $B_{11} = 0$ и $bM_{20} < 0$ — устойчивое движение, а при $B_{11} = 0$ и $bM_{20} > 0$ — неустойчивое.

При $B_{11} = 0$ $bM_{20} = 0$ в обоих случаях, т. е. при $b = 0$ $M_{20} \neq 0$ или при $b \neq 0$ $M_{20} = 0$, будем иметь неустойчивое движение.

Пример 2.

Пусть предложенная система имеет вид

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= y_1 + A^*_{20}x^2 + A^*_{11}xy_1 + A^*_{02}y_1^2 \\ y_1^{\cdot} &= B^*_{20}x^2 + B^*_{11}xy_1 + B^*_{02}y_1^2 + x_1(ax + by_1) \\ x_1^{\cdot} &= -x_1 + M^*_{20}x^2 + M^*_{11}xy_1 + M^*_{02}y_1^2 + x_1(cx + dy_1) \end{aligned} \qquad (2.52)$$

В отношении системы уравнений

$$x^{\cdot} = y_1 + A^*_{20}x^2 + A^*_{11}xy_1 + A^*_{02}y_1^2$$

$$y_1^{\cdot} = B^*_{20}x^2 + B^*_{11}xy_1 + B^*_{02}y_1^2$$

Ляпунов приходит к заключению, что каковы бы ни были числа A^*_{ij} и B^*_{ij}, невозмущенное движение неустойчиво. В отношении системы (2.52) это утверждение в общем случае будет несправедливо.

Для решения задачи об устойчивости в этом случае мы должны поступить следующим образом.

Преобразуем вначале систему уравнений (2.52), положив

$$y = y_1 + A^*_{20}x^2 + A^*_{11}xy_1 + A^*_{02}y_1^2$$

Откуда будем иметь

$$y_1 = y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - A_{02}y^2 + A_{30}x^3 + \ldots$$

где

$$A_{20} = A^*_{20}, \qquad A_{11} = A^*_{11}, \qquad A_{02} = A^*_{02}, \qquad A_{30} = A_{11}A_{20}, \ldots$$

Преобразованные уравнения примут вид

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + B_{30}x^3 + \ldots + x_1(ax + by + \ldots)$$

$$x_1^{\cdot} = -x_1 + M_{20}x^2 + M_{11}xy + M_{02}y^2 + M_{30}x^3 + \ldots + x_1(cx + dy + \ldots) \qquad (2.53)$$

Коэффициенты разложения правых частей двух последних уравнений определятся через коэффициенты B^*_{ij}, M^*_{ij}, ..., A_{ij}, a, b, c, d. При этом

$$B_{20} = B^*_{20}, \qquad B_{11} = B^*_{11} + 2A_{20}, \qquad B_{02} = B^*_{02} + A_{11}$$

$$B_{30} = -A_{20}B_{11} + A_{11}B_{20}, \ldots, \qquad M_{20} = M^*_{20}, \qquad M_{11} = M^*_{11}$$

$$M_{02} = M_{02}^*, \qquad M_{30} = -M_{11}A_{20}, \ldots$$

Выражения функций $f_0(x)$ и $\varphi_0(x)$ в системе уравнений (2.52) примут следующий вид:

$$f_0(x) = B_{20}x^2 + B_{30}x^3 + \ldots, \qquad \varphi_0(x) = B_{11}x + \ldots$$

$$f_1(x) = M_{20}x^2 + M_{30}x^3 + \ldots, \qquad \varphi_1(x) = M_{11}x + \ldots$$

Так как $\alpha_0 = 2$ — число четное, то при $B_{20} \neq 0$ согласно теореме § 10 невозмущенное движение неустойчиво.

Предположим, что $B_{20} = 0$, а $B_{30} = -A_{20}B_{11} \neq 0$. Систему уравнений (2.53) необходимо преобразовать, положив

$$x_1 = z + u_1(x)$$

определяя $u_1(x)$ из уравнения

$$-u_1 + M_{20}x^2 + M_{30}x^3 + u_1(cx + \ldots) = 0$$

получим

$$u_1(x) = M_{20}x^2 + (M_{30} + M_{20}c)x^3 + \ldots$$

Подставляя значение $u_1(x)$ в правую часть второго уравнения системы (2.53) и располагая результат подстановки по степеням y, получим

$$f_0(x) = (M_{20}a - A_{20}B_{11})x^3 + \ldots, \qquad \varphi_0(x) = B_{11}x + \ldots$$

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad \varphi_1(x) = M_{11}x + \ldots$$

Если окажется, что $a_0 = (M_{20}a - A_{20}B_{11}) > 0$, то согласно теореме § 10 невозмущенное движение неустойчиво.

При $a_0 \leqslant 0$ вопрос об устойчивости будет решаться числами a_0, b_0, α_0, β_0. При различных значениях A_{ij}, B_{ij}, M_{ij}, a, b, c, d мы можем встретиться с одним из случаев, предусмотренных изложенными выше теоремами.

Пример 3.

Рассмотрим систему уравнений

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = A_{m0}x^m + A_{m-1,\,1}x^{m-1}y + \ldots + A_{0m}y^m + x_1(ax + by)$$

$$x_1^{\cdot} = -x_1 + B_{n0}x^n + B_{n-1,\,1}x^{n-1}y + \ldots + B_{0n}y^n + x_1(cx + dy)$$

$$(n > 2, \; m > 2) \qquad (2.54)$$

В случае $n \geqslant m$ вопрос об устойчивости решается членом $A_{m0}x^m$. Если m — четное или при нечетном m $A_{m0} > 0$, то движение неустойчиво. Если же при m нечетном $A_{m0} < 0$ и $A_{m-1,1} < 0$, то движение асимптотически устойчиво. В случае m нечетного $A_{m0} < 0$, $A_{m-1,1} > 0$ — движение неустойчиво (теорема § 10).

Если же $A_{m0} = 0$, то в системе (2.54) необходимо переменную x_1 заменить на новую переменную z по формуле

$$x_1 = z + u(x) \qquad (2.55)$$

разумея под $u(x)$ корень уравнения

$$-x_1 + B_{n0}x^n + cx_1x = 0$$

в отношении x_1, т. е.

$$u(x) = B_{n0}x^n + cB_{n0}x^{n+1} + c^2B_{n0}x^{n+2} + \ldots \qquad (2.56)$$

В результате замены получим новую систему

$$x^{\cdot} = y$$

$$y^{\cdot} = aB_{n0}x^{n+1} + acB_{n0}x^{n+2} + \ldots + A_{m-1,1}x^{m-1}y + \ldots + z(ax + by) \qquad (2.57)$$

$$z^{\cdot} = -z + (B_{n-1,\,1} - nB_{n0})x^{n-1}y + \ldots + B_{0n}y^n + z(cx + dy)$$

Для этой системы имеем

$$f_0(x) = aB_{n0}x^{n+1} + acB_{n0}x^{n+2} + \dots, \quad \varphi_0(x) = A_{m-1,1}x^{m-1} + \dots$$

$$f_1(x) \equiv 0, \qquad \varphi_1(x) = (B_{n-1,1} - nB_{n0})x^{n-1} + \dots$$

Следовательно, $a_0 = aB_{n0}$, $\alpha_0 = n + 1$, $b_0 = A_{m-1,1}$, $\beta_0 = m - 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = (B_{n-1,1} - nB_{n0})$.

Поэтому, если n — нечетное или при четном n, произведение $aB_{n0} > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если при четном n это произведение меньше нуля, то при β_0 четном и $A_{m-1,1} < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при β_0 четном и $A_{m-1,1} > 0$ — неустойчиво (теорема § 10).

Если $aB_{n0} = 0$, будем иметь

$$f_0(x) \equiv 0, \qquad \varphi_0(x) = A_{m-1,1}x^{m-1} + \dots, \qquad f_1(x) \equiv 0$$

$$\varphi_1'(x) = (B_{n-1,1} - nB_{n0})x^{n-1} + \dots$$

Следовательно, при m четном или при нечетном m и $A_{m-1,1} > 0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при m нечетном и при $A_{m-1,1} < 0$ — устойчиво (теорема § 7).

Если $A_{m-1,1} = 0$, то необходимо рассмотреть члены более высокого порядка.

Мы рассмотрели случай $n \geqslant m$.

Если $n < m$, то в системе (2.54) необходимо переменную x_1 заменить на новую переменную z по формуле

$$x_1 = z + u(x) + yv(x)$$

где $u(x)$ определяется выражением (2.56), а функция $v(x)$ находится из уравнения

$$-v + B_{n-1,1}x^{n-1} + ud + vcx - \frac{du}{dx} - v(A_{m-1,1}x^{m-1} + ub + vax) = 0$$

и равна

$$v(x) = (B_{n-1,1} - nB_{n0})x^{n-1} + \dots$$

В результате такой замены мы получим новую систему

$$\begin{aligned}
x^{\cdot} &= y \\
y^{\cdot} &= aB_{n0}x^{n+1} + \dots + A_{m0}x^m + \dots + A_{0m}y^m + y[(aB_{n-1,1} - anB_{n0} + \\
&\quad + bB_{n0})x^n + \dots] + \dots + z(ax + by) \\
z^{\cdot} &= -z - [(B_{n-1,1} - nB_{n0})x^{n-1} + \dots][A_{m0}x^m + aB_{n0}x^{n+1} + \dots] + \\
&\quad + \dots + z(cx + dy)
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Для этой системы

$$a_0 = aB_{n0}, \quad \alpha_0 = n + 1, \quad b_0 = aB_{n-1,1} - anB_{n0} + bB_{n0}, \quad \beta_0 = n.$$

Следовательно, при n нечетном или при n четном и $aB_{n0} > 0$ невозмущенное движение неустойчиво. Если при n четном $aB_{n0} < 0$, то движение неустойчиво, когда $b_0 > 0$, и асимптотически устойчиво, когда $b_0 < 0$ (теорема § 10).

При $aB_{n0} = 0$ вопрос об устойчивости будет решаться членами более высокого порядка.

ГЛАВА III

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

§ 14. Теорема о сведении для установившегося движения. Предположим, что мы имеем систему уравнений

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k + X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (n = m+2q+p,\ s = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где X_s не содержат членов ниже второго порядка, a_{sk} — постоянные величины.

Пусть определяющее уравнение этой системы имеет m нулевых, q пар чисто мнимых и p корней с отрицательными вещественными частями. Линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами эту систему всегда можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered} y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{m+2q} q_{sk} y_k + Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1};\ z_1, \ldots, z_p) \\ z_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji} z_i + Z_j(y_1, \ldots, y_{n_1};\ z_1, \ldots, z_p) \quad (s = 1, \ldots, n_1;\ n_1 = m+2q;\ j = 1, \ldots, p) \end{gathered} \tag{3.2}$$

где y_s — критические переменные, z_j — переменные присоединенной системы.

Представим

$$Z_j = Z_j^{(0)}(y_1, \ldots, y_{n_1}) + Z_j^{(1)}(y_1, \ldots, y_{n_1};\ z_1, \ldots, z_p) \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

Функции $Z_j^{(1)}$ обращаются в нуль при $z_1 = \ldots = z_p = 0$, а

$$Z_j^{(0)} = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} Z_j^{(k)}(y_1, \ldots, y_{n_1})$$

Докажем, что систему уравнений (3.2) можно преобразовать в новую систему, в которой функции, играющие роль функций $Z_j^{(0)}$, не будут содержать членов ниже $(N+1)$-го порядка. Число N можно считать сколь угодно большим.

Положим

$$z_j = \zeta_j + u_j(y_1, \ldots, y_{n_1}) \qquad (j = 1, \ldots, p,\ n_1 = m+2q) \tag{3.3}$$

и определим функции u_j из уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial u_j}{\partial y_s} [q_{s1} y_1 + \ldots + q_{sn_1} y_{n_1} + Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1};\ u_1, \ldots, u_p)] = \\ = \sum_{i=1}^{p} p_{ji} u_i + Z_j(y_1, \ldots, y_{n_1};\ u_1, \ldots, u_p) \qquad (j = 1, \ldots, p;\ n_1 = m+2q) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Эти уравнения определят u_j в виде степенных рядов в отношении $y_1, \ldots y_{m+2q}$, которые, как правило, будут расходящимися. Обозначим сумму форм этих рядов до N-го порядка включительно через $v_j\ (y_1, \ldots, y_{n_1})$ и преобразуем систему (3.2) к переменным $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, положив

$$z_j = \zeta_j + v_j (y_1, \ldots, y_{m+2q}) \qquad (j = 1, \ldots, p)$$

В результате преобразования система (3.2) примет вид

$$\begin{gathered} y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} q_{sk}\, y_k + Y_s^{(0)}(y_1, \ldots, y_{n_1}) + Y_s (y_1, \ldots, y_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p) \\ \zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\, \zeta_i + Z_j^{(N+1)} (y_1, \ldots, y_{n_1}) + Z_{j0} (y_1, \ldots, y_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p) \\ (s = 1, \ldots, n_1),\ (j = 1, \ldots, p),\ (n_1 = m + 2q) \end{gathered} \tag{3.5}$$

Функции $Z_j^{(N+1)}$ не содержат членов ниже $(N+1)$-го порядка, а функции Y_s и Z_{j0} обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_p = 0$.

Это преобразование подобно преобразованию, которым пользовался Ляпунов при исследовании особенных случаев, изложенных в главе I.

Представим Y_s и Z_{j0} в виде

$$\begin{gathered} Y_s = \sum P_s^{*} y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} + Y_{s1}, \qquad Z_{j0} = \sum Q_j^{*} y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} + Z_{j1} \\ (s = 1, \ldots, n_1,\ j = 1, \ldots, p, n_1 = m + 2q) \end{gathered} \tag{3.6}$$

где знак $*$ означает индекс $(k_1, \ldots, k_{n_1})$, функции Y_{s1} и Z_{j1} не содержат линейных членов в отношении $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ и обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_p = 0$; функции P_s^* и Q_j^* представляют линейные формы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

Предположим, что в системе (3.5) все q_{sk} и p_{ji} равны нулю, за исключением

$$\begin{matrix} q_{11} = \nu_1, \ldots, & q_{n_1 n_1} = \nu_{n_1}, & q_{21} = \sigma_1, \ldots, & q_{n_1\, n_1 - 1} = \sigma_{n_1 - 1} \\ p_{11} = \varkappa_1, \ldots, & p_{pp} = \varkappa_p, & p_{21} = \delta_1, \ldots, & p_{pp-1} = \delta_{p-1} \end{matrix} \tag{3.7}$$

где ν_s — нулевые и чисто мнимые корни, а $\varkappa_j$ имеют отрицательные вещественные части.

К такому виду систему (3.5) всегда можно преобразовать с помощью линейных подстановок.

Преобразуем теперь систему (3.5), положив

$$y_s = \eta_s + \sum_{k_1 + \ldots + k_{n_1} \geqslant 1}^{N} u_s^{*} y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} \tag{3.8}$$

где u_s^* — линейные формы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

Эти формы определим из уравнений

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_s^*}{\partial \zeta_j} (\varkappa_j \zeta_j - \delta_{j-1} \zeta_{j-1}) = -[k_1 \nu_1 + \ldots + (k_s - 1)\ \nu_s + \ldots + k_{n_1} \nu_{n_1}]\, u_s^* + \\ + \sigma_{s-1} u_{s-1}^* - (k_2 + 1)\, \sigma_1 u^{(k_1 - 1,\, k_2 + 1\, \ldots\, k_{n_1})} - \ldots - \\ - (k_{n_1} + 1)\, \sigma_{n_1 - 1}\, u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1 - 1} - 1,\, k_{n_1} + 1)} + P_s^* + F_s^* \\ (s = 1, \ldots, n_1,\ k_1 + \ldots + k_{n_1} = \delta,\ 1 \leqslant \delta \leqslant N) \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $F_s^{(k_1, \ldots, k_{n_1})}$, $(k_1 + \ldots + k_{n_1} = \delta)$— известные линейные формы $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$, коэффициентами которых являются коэффициенты разложений функций Y_{s1}, Z_{j1} и тех форм $u_s^{(k_1, \ldots, k_{n_1})}$, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant \delta - 1$.

Для $\delta = 1$ все $F_s^* \equiv 0$.

Предположим, что все формы u_s^* для $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant \delta - 1$ уже определены. Тогда u_s^* для $k_1 + \ldots + k_{n_1} = \delta$ отыскиваются в следующем порядке. Определяем $u_1^{(0,0\ldots 0,\delta)}$ из уравнения (3.9), в котором все члены с множителем σ_j равны нулю. Представим $u_1^{(0,0\ldots 0\delta)}$в виде

$$u_1^{(0\ldots\delta)} = \alpha_{11}^{(0\ldots\delta)}\zeta_1 + \ldots + \alpha_{1p}^{(0\ldots\delta)}\zeta_p$$

а

$$P_1^{(0\ldots\delta)} + F_1^{(0\ldots\delta)} = \beta_{11}^{(0\ldots\delta)}\zeta_1 + \ldots + \beta_{1p}^{(0\ldots\delta)}\zeta_p$$

Подставляя последние выражения в систему (3.9) при $\sigma_j = 0$, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения всех коэффициентов $\alpha_{1j}^{(0\ldots\delta)}$. Далее найдем функцию $u_1^{(0,0\ldots 1,\delta-1)}$. В правую часть уравнения, определяющего эту функцию, кроме $P_1^{(0\ldots 1,\delta-1)}$ и $F_1^{(0\ldots 1,\delta-1)}$ войдет уже найденный член $(\delta - 1)\,\sigma_{n_1-1}\,u_s^{(0\ldots 0,\delta)}$. Аналогичным образом определятся и все остальные функции u_s^*.

Формы $u_s^*(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ могут иметь комплексные коэффициенты, которые могут появиться в результате линейного преобразования, связанного с обращением в нуль коэффициентов q_{sk} и p_{ji}. Сделаем обратное преобразование. Тогда для выражений $u_s^* y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}}$ получим вещественные значения, а система (3.5) примет вид

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} q_{sk}\eta_k + Y_s^{(0)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}) + \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} P_s^*(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)\,\eta_1^{k_1}\ldots$$
$$\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} + H_s(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$$
$$\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + Z_j^{(N+1)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}) + E_j(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p) \tag{3.10}$$
$$(s=1,\ldots, n_1;\ j=1,\ldots, p;\ n_1 = m + 2q)$$

где H_s и E_j обращаются в нуль при $\zeta_1 = \ldots = \zeta_p = 0$ и не содержат линейных членов от этих переменных.

Отметим, что преобразование (3.8) не изменяет члены, не зависящие от переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$. Эти члены полностью определяются в результате преобразования (3.3). Следовательно, функции $Y_s^{(0)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1})$ не содержат членов ниже второго порядка, а $Z_j^{(N+1)}$— ниже $(N + 1)$-го порядка.

Система (3.10) такова, что для нее мы можем строить функции Ляпунова и Четаева отдельно для первой группы уравнений, которую можно взять в виде

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} q_{sk}\eta_k + \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}\geqslant 2}^{N} A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} \tag{3.11}$$
$$(s=1,\ldots, n_1)$$

и для второй, сохранив в ней лишь линейные члены

$$\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i \qquad (j=1,\ldots, p) \tag{3.12}$$

Такое построение всегда возможно, если знак производных от функций Ляпунова и Четаева, соответствующих первой группе уравнений, определяется формами не выше N-го порядка, входящих в их правую часть, независимо от форм более высокого порядка.

Пусть $V_1(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1})$ — определенно-положительная функция Ляпунова, отвечающая системе уравнений (3.11), и производная ее по t — определенно-отрицательная.

Предположим, что на знак этой производной не влияют члены выше N-го порядка правых частей соответствующих уравнений.

Функцию Ляпунова V_2 (ζ_1, ..., ζ_p), отвечающую системе (3.12), можно всегда определить из уравнения

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_j}(p_{j1}\zeta_1 + \ldots + p_{jp}\zeta_p) = -M^2(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_p^2) \tag{3.13}$$

Эта функция в силу теоремы {19} будет определенно-положительной функцией переменных ζ_1, ..., ζ_p.

Тогда функция Ляпунова, отвечающая системе уравнений (3.10), будет иметь вид

$$V = V_1(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}) + V_2(\zeta_1, \ldots, \zeta_p) \tag{3.14}$$

и будет определенно-положительной от всех переменных η_1, ..., η_{n_1}, ζ_1, ..., ζ_p.

Вычислим производную dV/dt в силу системы (3.10)

$$V' = \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_s}\left[\sum_{k=1}^{n_1} q_{sk}\eta_k + Y_s^{(0)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} P_s^*(\zeta_1, \ldots, \zeta_p)\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} + H_s(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial V_2}{\partial \zeta_j}\left[\sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + Z_j^{(N+1)}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}) + E_j(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)\right] \tag{3.15}$$

Отметим, что

$$Y_s^{(0)} = \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}\geqslant 2}^{N} A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} +$$

$$+ \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}\geqslant N+1}^{\infty} A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}$$

$$Z_j^{(N+1)} = \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} B_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}$$

а функции H_s и E_j можно представить в виде

$$H_s = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \zeta_i\zeta_j H_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$$

$$E_j = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \zeta_i\zeta_j E_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$$

Обозначим производную функции V_1, вычисленную в силу уравнения (3.11) через V_1'. Тогда из уравнения (3.15) будем иметь

$$V' = V_1' - M^2(\zeta_1^2 + \ldots + \zeta_p^2) + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_s}\left[\sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\right.$$

$$\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} + \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} P_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \zeta_i\zeta_j H_{ij}(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial V_2}{\partial \zeta_j}\left[\sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} B_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j E_{ij}(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\right]$$

Представим это выражение в виде

$$V'=V_1'-M^2(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_p^2)+\sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} R^*(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};$$

$$\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p) \qquad (3.16)$$

где R^* и L_{ij} обращаются в нуль при $\eta_1=\ldots=\eta_{n_1}=\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$.

Для достаточно малых значений η_s, ζ_j знак производной V' определяется знаком выражения

$$-M^2(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_p^2)$$

независимо от

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$$

Выражение же $\sum\limits_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} R^*(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}$ не может изменить знак V_1'. Следовательно, знак V' определяется знаком $V_1'+V_2'$, т. е. функция V, вычисленная в силу системы уравнений (3.11) и (3.12), будет являться функцией Ляпунова для системы (3.10).

Пусть теперь система (3.11) такова, что ей отвечает функция Четаева $V_1(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1})$.

Тогда область $V_1>0$ будет заключена внутри области $V_1'>0$, и это свойство функции V_1' определяется формами N-го порядка независимо от форм более высокого порядка правых частей соответствующих уравнений.

Возьмем функцию

$$V=V_1(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1})+V_2(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$$

где $V_2(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$ определим из уравнения (3.12) с заменой $-M^2$ на M^2.

Найдем производную функции V в силу уравнений (3.10). Аналогично предыдущему получим выражение (3.16), в котором $-M^2$ заменится на M^2. В отличие от предыдущего случая функции L_{ij} могут и не обращаться в нуль при $\eta_1=\ldots=\eta_{n_1}=\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$, так как функция V_1 может содержать линейные члены.

Докажем, что выбором числа M^2 производная V', вычисленная в силу уравнений (3.10), в области $V_1'>0$ будет определенно-положительной функцией всех переменных.

Представим выражение V' в следующем виде:

$$V'=V_1'+M^2(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_p^2)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}^{(0)}+$$

$$+\sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} R^*(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}^{(1)}(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$$

где R^* и $L_{ij}^{(1)}$ обращаются в нуль при $\eta_1=\ldots=\eta_{n_1}=\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$.

Определим число M^2 так, чтобы выражение

$$M^2(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_p^2)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}^{(0)} \tag{3.17}$$

являлось определенно-положительной функцией переменных $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$.

Тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\zeta_i\zeta_j L_{ij}^{(1)}(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\ \zeta_1,\ldots,\zeta_p)$$

не изменит знака выражения (3.17), а

$$\sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}=N+1}^{\infty} R^*(\eta_1,\ldots,\eta_{n_1};\ \zeta_1,\ldots,\zeta_p)\,\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}}$$

не изменит знака V_1'. Следовательно, в области $V_1'>0$ функция V' представит знакоопределенную функцию всех переменных η_s, ζ_j. Так как функция $V_2<0$, то область $V>0$ заключена внутри области $V'>0$. Таким образом, V является функцией Четаева для системы уравнений (3.10).

Таким же путем для системы (3.9) можно построить функции V и W, удовлетворяющие теореме Четаева.

Изложенное в этом параграфе доказывает следующую теорему.

Теорема. Пусть определяющее уравнение системы (3.2) имеет m нулевых корней, $2q$ чисто мнимых и p корней с отрицательными вещественными частями. Заменяя в правых частях первой группы этих уравнений переменные z_j на функции $v_j\,(y_1,\ldots,y_{n_1})$, представляющие сумму форм до N-го порядка включительно рядов u_j, определяемых уравнениями (3.4), получим систему уравнений

$$y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n_1}q_{sk}\,y_k+Y_s^{(0)}(y_1,\ldots,y_{n_1})\qquad (s=1,\ldots,n_1) \tag{A}$$

Если для системы (А) построены функции, отвечающие теореме 1 Ляпунова, или функции, удовлетворяющие теореме Четаева о неустойчивости, причем знак производных этих функций определяется суммой форм до N-го порядка включительно правых частей системы (А) независимо от форм более высокого порядка, то для системы (3.2) функции Ляпунова и Четаева представятся суммой двух функций: V_1+V_2, где V_1 — функция Ляпунова или Четаева, отвечающая системе (А), а V_2 определяется из уравнения (3.13).

Из этой теоремы следует, что устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения, соответствующего системе (3.2), следует из рассмотрения лишь критической системы, полученной в результате преобразования (3.4), если только вопрос об устойчивости решается рассмотрением суммы форм до N-го порядка включительно этой системы.

Эта теорема для случая двух нулевых корней доказана в работе [6], для общего случая она доказывается в работе [7].

§ 15. Приведение к случаю нулевых корней с понижением порядка. Рассмотрим теперь группу уравнений с критическими переменными, считая $\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$,

$$y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{m+2q}q_{sk}\,y_k+Y_s(y_1,\ldots,y_{m+2q})\qquad (s=1,\ldots,m+2q) \tag{3.18}$$

Определяющее уравнение этой системы имеет m нулевых корней и q пар чисто мнимых.

Пусть $\pm i\lambda_s$ $(s = 1, \ldots, q)$ — чисто мнимые корни. Будем предполагать, что эти корни удовлетворяют неравенству

$$\sum_{s=1}^{q} m_s \lambda_s \neq 0 \tag{3.19}$$

при любых целых числах m_s, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{q} |m_s| \leqslant N$$

Линейной подстановкой с постоянными вещественными коэффициентами систему (3.18) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}
\dot{\xi}_s = -\lambda_s \eta_s + P_s(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu), \qquad \dot{\eta}_s = \lambda_s \xi_s + Q_s(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu) \\
\dot{z}_1 = Z_1(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu), \; \dot{z}_j = \sigma_{j-1} z_{j-1} + Z_j(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu) \\
(s, \nu = 1, \ldots, q), \; (j = 2, \ldots, m), \; (\mu = 1, \ldots, m)
\end{gathered} \tag{3.20}$$

где $P_s = P_{s0}(z_\mu) + P_{s1}(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu)$, $Q_s = Q_{s0}(z_\mu) + Q_{s1}(\xi_\nu, \eta_\nu, z_\mu)$.

Функции P_{s1} и Q_{s1} обращаются в нуль при $\xi_1 = \ldots = \xi_q = \eta_1 = \ldots = \eta_q = 0$, а P_{s0} и Q_{s0} имеют вид

$$P_{s0} = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} P_{s0}^{(k)}(z_\mu), \qquad Q_{s0} = \sum_{k \geqslant 2}^{\infty} Q_{s0}^{(k)}(z_\mu)$$

Выражения $P_{s0}^{(k)}$ и $Q_{s0}^{(k)}$ являются формами k-го порядка от $z_1, \ldots, z_m$.

Преобразуем систему (3.20) к новым переменным x_k и y_k, положив

$$\xi_s = x_s + u_s(z_1, \ldots, z_m), \qquad \eta_s = y_s + v_s(z_1, \ldots, z_m) \tag{3.21}$$

подразумевая под u_s и v_s сумму форм до N-го порядка включительно рядов, формально удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_s}{\partial z_1} Z_1(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_q; z_1, \ldots, z_m) + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial u_s}{\partial z_j} [\sigma_{j-1} z_{j-1} + Z_j(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_q; z_1, \ldots, z_m)] = \\
&\quad = -\lambda_s v_s + P_{s0}(z_1, \ldots, z_m) + P_{s1}(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_q; z_1, \ldots, z_m) \\
&\frac{\partial v_s}{\partial z_1} Z_1(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_q; z_1, \ldots, z_m) + \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial v_s}{\partial z_j} [\sigma_{j-1} z_{j-1} + Z_j(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_q; z_1, \ldots, z_m)] = \\
&\quad = \lambda_s u_s + Q_{s0}(z_1, \ldots, z_m) + Q_{s1}(u_1, \ldots, u_q; v_1, \ldots, v_\nu, z_1, \ldots, z_m)
\end{aligned}$$

В результате этой замены мы получим новую систему, в которой функции, играющие роль функций $P_{s0}(z_1, \ldots, z_m)$ и $Q_{s0}(z_1, \ldots, z_m)$, не будут содержать членов ниже $(N + 1)$-го порядка.

Будем предполагать, что система (3.20) преобразована к виду (3.21) и, следовательно, разложение функций P_{s0} и Q_{s0} по степеням $z_1, \ldots, z_m$ начинается с членов не ниже $(N + 1)$-го порядка.

Преобразуем систему (3.20) при этом предположении к переменным r_s и θ_s, положив $\xi_s = r_s \cos\theta_s$, $\eta_s = r_s \sin\theta_s$.

Тогда будем иметь

$$r_s^{\cdot} = \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} R_s^{(k)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots,\ z_m)$$

$$r_s \theta_s^{\cdot} = \lambda_s r_s + \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} F_s^{(k)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots,\ z_m)$$

$$z_1^{\cdot} = \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} Z_1^{(k)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots,\ z_m) \tag{3.22}$$

$$z_j^{\cdot} = \sigma_{j-1} z_{j-1} + \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} Z_j^{(k)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots,\ z_m)$$

$$(j=2,\ldots,\ m;\ s,\nu=1,\ldots,\ q)$$

где

$$\sum_{k\geqslant 2}^{\infty} R_s^{(k)} = P_s \cos\theta_s + Q_s \sin\theta_s, \qquad \sum_{k\geqslant 2}^{\infty} F_s^{(k)} = Q_s \cos\theta_s - P_s \sin\theta_s$$

$R_s^{(k)}$, $F_s^{(k)}$; $Z_j^{(k)}$ являются формами k-го порядка от переменных $r_1, \ldots, r_q$, $z_1, \ldots, z_m$ с коэффициентами в виде многочленов от $\cos\theta_\nu$ и $\sin\theta_\nu$, так что

$$R_s^{(k)} = \sum A_s^* (\theta_1, \ldots,\ \theta_q)\, r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m}$$

$$Z_j^{(k)} = \sum B_j^* (\theta_1, \ldots,\ \theta_q)\, r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m}$$

$$F_s^{(k)} = \sum C_s^* (\theta_1, \ldots,\ \theta_q)\, r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m}$$

$$(k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + n_m = k)$$

где знак * заменяет индекс $(k_1 \ldots k_q,\ n_1 \ldots n_m)$.

Наша дальнейшая задача будет заключаться в том, чтобы систему (3.22) преобразовать к виду, в котором суммы форм до N-го порядка включительно в $R_s^{(k)}$ и $Z_j^{(k)}$ не зависели бы от $\cos\theta_\nu$ и $\sin\theta_\nu$.

Предположим вначале, что m-кратный корень имеет m групп решений, т. е. $\sigma_1 = \ldots = \sigma_{m-1} = 0$.

Пусть наинизшая из форм $R_s^{(k)}$, $Z_j^{(k)}$ есть $R_s^{(\delta)}$ и $Z_j^{(\delta)} (\delta \geqslant 2)$.

Положим

$$\begin{aligned} r_s &= \rho_s + \sum u_s^* (\theta_1, \ldots,\ \theta_q)\, r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m} \\ z_j &= \zeta_j + \sum v_j^* (\theta_1, \ldots,\ \theta_q)\, r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m} \end{aligned} \tag{3.23}$$

где u_s^* и v_j^* — подлежащие определению многочлены от $\cos\theta_\nu$ и $\sin\theta_\nu$.

Система уравнений (3.22) в новых переменных будет иметь вид

$$\rho_s^{\cdot} = \sum_{k=\delta}^{\infty} H_s^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots,\ \zeta_m)$$

$$\rho_s \theta_s^{\cdot} = \lambda_s \rho_s + \sum_{k=\delta}^{\infty} f_s^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots,\ \zeta_m) \tag{3.24}$$

$$\zeta_j^{\cdot} = \sum_{k=\delta}^{\infty} L_j^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots,\ \zeta_m)$$

$$(s,\ \nu=1,\ldots,\ q;\ j=1,\ldots,\ m)$$

Формы $H_s^{(\delta)}$ и $L_j^{(\delta)}$ можно представить так

$$H_s^{(\delta)}=\sum a_s^* r_1^{k_1}\dots r_q^{k_q}\zeta_1^{n_1}\dots\zeta_m^{n_m}$$

$$L_j^{(\delta)}=\sum b_j^* r_1^{k_1}\dots r_q^{k_q}\zeta_1^{n_1}\dots\zeta_m^{n_m}$$

$$(s=1,\dots,\ q;\ j=1,\dots,\ m;\ k_1+\dots+k_q+n_1+\dots+n_m=\delta)$$

Коэффициенты a_s^* и b_j^* определятся равенствами

$$\begin{aligned} a_s^*&=A_s^*-\frac{\partial u_s^*}{\partial\theta_1}\lambda_1-\frac{\partial u_s^*}{\partial\theta_2}\lambda_2-\dots-\frac{\partial u_s^*}{\partial\theta_q}\lambda_q\\ b_j^*&=B_j^*-\frac{\partial v_j^*}{\partial\theta_1}\lambda_1-\frac{\partial v_j^*}{\partial\theta_2}\lambda_2-\dots-\frac{\partial v_j^*}{\partial\theta_q}\lambda_q\end{aligned}\qquad(3.25)$$

В зависимости от выбора функций u_s^* и v_j^* мы будем получать различные значения a_s^* и b_j^*. Определим эти функции так, чтобы все a_s^* и b_j^* были постоянными величинами.

Полагая в выражениях A_s^* и B_j^*

$$\cos\theta_\nu=\frac{e^{i\theta_\nu}+e^{-i\theta_\nu}}{2},\qquad \sin\theta_\nu=\frac{e^{i\theta_\nu}-e^{-i\theta_\nu}}{2i}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} A_s^*&=\sum g_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\\ B_j^*&=\sum h_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\\ &(-\delta-1\leqslant l_1+\dots+l_q\leqslant\delta+1)\end{aligned}\qquad(3.26)$$

где $g_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}$ и $h_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}$ — постоянные величины. Здесь * также заменяет индекс $k_1+\dots+k_q+n_1+\dots+n_m$.

Будем отыскивать u_s^* и v_j^* в виде (3.26)

$$\begin{aligned} u_s^*&=\sum\alpha_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\\ v_j^*&=\sum\beta_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\end{aligned}\qquad(3.27)$$

Подставляя значения u_s^* и v_j^* в уравнения (3.25), получим

$$\begin{aligned} a_s^*=\sum g_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}-\sum\alpha_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}i(l_1\lambda_1+\dots+\\ +l_q\lambda_q)e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\\ b_j^*=\sum h_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}-\sum\beta_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}i(l_1\lambda_1+\dots+\\ +l_q\lambda_q)e^{i(l_1\theta_1+\dots+l_q\theta_q)}\end{aligned}$$

Определим числа $\alpha_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}$ и $\beta_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}$ равенствами

$$\alpha_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}=\frac{g_{s*}^{(l_1,\dots,l_q)}}{i(l_1\lambda_1+\dots+l_q\lambda_q)},\qquad \beta_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}=\frac{h_{j*}^{(l_1,\dots,l_q)}}{i(l_1\lambda_1+\dots+l_q\lambda_q)}$$

Тогда в правых частях каждого уравнения системы (3.25) останется по одному слагаемому, отличному от нуля, равному $g_{s*}^{(0,0\dots0)}$ и $h_{j*}^{(0,0\dots0)}$ соответственно. Обозначая эти числа через g_s^* и h_j^*, будем иметь: $a_s^*=g_s^*$, $b_j^*=h_j^*$.

Отметим, что числа g_s^* и h_j^* можно определить следующим образом. Заменяя в выражениях A_s^* и B_j^* значения $\cos\theta_\nu$ и $\sin\theta_\nu$ через $e^{i\theta_\nu}$

и $e^{-i\theta_\nu}$ и вычисляя члены, не зависящие от θ_ν, мы получим значения коэффициентов q_s^* и h_j^*, которые будут все действительными.

Уравнение (3.24) теперь можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\dot\rho_s &= \sum g_s^* \rho_1^{k_1} \ldots \rho_q^{k_q} \zeta_1^{n_1} \ldots \zeta_m^{n_m} + \\
&+ \sum_{k=\delta+1}^{\infty} H_{s1}^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \\
\dot\zeta_j &= \sum h_j^* \rho_1^{k_1} \ldots \rho_q^{k_q} \zeta_1^{n_1} \ldots \zeta_m^{n_m} + \\
&+ \sum_{k=\delta+1}^{\infty} L_{j1}^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \\
\rho_s \dot\theta_s &= \lambda_s \rho_s + \sum_{k=\delta}^{\infty} f_{s1}^{(k)} (\rho_\nu \cos\theta_\nu,\ \rho_\nu \sin\theta_\nu,\ \zeta_1, \ldots, \zeta_m) \\
&(k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + n_m = \delta;\ s = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Предположим теперь, что все формы $H_{s1}^{(l)}$ и $L_{j1}^{(l)}$ имеют постоянные коэффициенты для всех $l \leqslant k - 1$. Произведем замену переменных

$$\rho_s = \omega_s + \sum u_s^* (\theta_1, \ldots, \theta_q)\ \rho_1^{k_1} \ldots \rho_q^{k_q} \zeta_1^{n_1} \ldots \zeta_m^{n_m}$$

$$\zeta_j = \psi_j + \sum v_j^* (\theta_1, \ldots, \theta_q)\ \rho_1^{k_1} \ldots \rho_q^{k_q} \zeta_1^{n_1} \ldots \zeta_m^{n_m}$$

где * опять заменяет индекс $k_1 \ldots k_q n_1 \ldots n_m$, но здесь уже сумма $k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + n_m = k$.

Записывая систему (3.28) в новых переменных и подсчитывая коэффициенты при произведениях $\rho_1^{k_1} \ldots \rho_q^{k_q}\ \zeta_1^{n_1} \ldots \zeta_m^{n_m}$ для $k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + n_m = k$, придем к равенствам, аналогичным (3.25).

Определяя числа g_s^* и h_j^* по коэффициентам форм k-го порядка, мы получим систему, аналогичную (3.28), в которой все формы $H_{s1}^{(k)}$ и $L_{j1}^{(k)}$ будут иметь постоянные коэффициенты.

Придавая k последовательно значения $k = 2, 3, \ldots, N$, мы после $N - 2$ преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot r_s &= \sum A_s^* r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m} + \\
&+ R_s^{(N+1)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots, z_m) \\
\dot z_j &= \sum B_j^* r_1^{k_1} \ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1} \ldots z_m^{n_m} + \\
&+ Z_j^{(N+1)} (r_\nu \cos\theta_\nu,\ r_\nu \sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots, z_m) \\
&(2 \leqslant k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + \\
&\quad + n_m \leqslant N;\ s = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, m)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Здесь A_s^* и B_j^* — новые постоянные, r_s и z_j — новые переменные, отличные от r_s и z_j, фигурирующих в системе (3.22).

В тех случаях, когда задача об устойчивости решается формами не выше N-го порядка независимо от форм более высокого порядка, уравнения, определяющие переменные $\theta_1, \ldots, \theta_q$, можно не рассматривать, так как задача об устойчивости в переменных ξ_s и η_s эквивалентна задаче об устойчивости в переменных r_s.

Вышеизложенное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема. Если определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет m нулевых и q пар чисто мнимых корней, удовлетворяющих условию $\sum m_s\lambda_s \neq 0$, для всех целых чисел m_s, включая нуль, для которых $\sum |m_s| \leqslant N$, а m-кратному нулевому корню отвечает m групп решений, то задача об устойчивости в случаях несущественно особенных приводится к исследованию системы $m+q$ уравнений, определяющее уравнение которой имеет $m+q$ нулевых корней с $m+q$ группами решений.

Эта теорема доказана в работе автора [7].

Предположим теперь, что среди чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+1}$ имеется $(p-1)$ число, равное нулю. Тогда системе (3.20) будет соответствовать m-кратный нулевой корень с p группами решений.

Преобразуя систему (3.20) по формулам (3.21) и (3.23), мы вместо первой группы уравнений системы (3.25) получим систему

$$a_s^* = A_s^* - \frac{\partial u_s^*}{\partial\theta_1}\lambda_1 - \ldots - \frac{\partial u_s^*}{\partial\theta_q}\lambda_q - n_2\sigma_1 u_s^{(k_1\ldots k_q,\, n_1-1,\, n_2+1\ldots n_m)} -$$
$$- \ldots - n_m\sigma_{m-1} u_s^{(k_1\ldots k_q,\, n_1\ldots n_{m-1}-1,\, n_m+1)} \tag{3.30}$$

Здесь * заменяет индекс $(k_1 \ldots k_q,\ n_1 \ldots n_m)$.

Аналогичные уравнения построим и для определения функций v_j^*. Функции u_s^* можно найти следующим образом. Задавшись определенными значениями чисел $k_1 \ldots k_q$ $(k_1 + \ldots + k_q = \delta_1)$, отыскиваем функции u_s^*, начиная с $u_s^{(k_1\ldots k_q,0,0\ldots\delta_2)}(\delta_1+\delta_2=k)$. При этом все дополнительные члены с множителем σ_s, фигурирующие в системе (3.30), будут равны нулю. Функции $u_s^{(k_1\ldots k_q,0,0\ldots\delta_2)}$ определятся аналогично предыдущему. Затем найдем функции $u_s^{(k_1\ldots k_q,0,0\ldots 1,\delta_2-1)}$. В этом случае все члены с σ_j обратятся в нули, за исключением уже известного нам последнего члена, равного $\sigma_{m-1} u_s^{(k_1\ldots k_q,0,0,\ldots,\delta_2)}$. Объединяя этот член с коэффициентом $A_s^{(k_1\ldots k_q,\,0,0,\ldots,1,\delta_2-1)}$, определим функции $u_s^{(k_1\ldots k_q,0,0,\ldots,1,\delta_2-1)}$. Поступая аналогичным образом и далее, мы отыщем все функции u_s^*, а также и v_j^*.

Придавая k значения 2, 3, ..., N, мы, как и в предыдущем случае, приведем систему к виду

$$\begin{aligned}
r_s^{\cdot} &= \sum A_s^* r_1^{k_1}\ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1}\ldots z_m^{n_m} + \\
&\quad + R_s^{(N+1)}(r_\nu\cos\theta_\nu,\ r_\nu\sin\theta_\nu, z_1, \ldots, z_m) \\
z_1^{\cdot} &= \sum B_1^* r_1^{k_1}\ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1}\ldots z_m^{n_m} + \\
&\quad + Z_1^{(N+1)}(r_\nu\cos\theta_\nu,\ r_\nu\sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots, z_m) \\
z_j^{\cdot} &= \sigma_{j-1} z_{j-1} + \sum B_j^* r_1^{k_1}\ldots r_q^{k_q} z_1^{n_1}\ldots z_m^{n_m} + \\
&\quad + Z_j^{(N+1)}(r_\nu\cos\theta_\nu,\ r_\nu\sin\theta_\nu,\ z_1, \ldots, z_m) \\
&(2 \leqslant k_1 + \ldots + k_q + n_1 + \ldots + n_m \leqslant N,\ s = \\
&= 1, \ldots, q;\ j = 2, 3, \ldots, m;\ \nu = 1, \ldots, q)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Таким образом, если определяющее уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения, имеет m нулевых и q пар чисто мнимых корней, удовлетворяющих условию $\sum m_s\lambda_s \neq 0$, для всех целых чисел m_s, включая нуль, для которых $\sum |m_s| \leqslant N$, а m-кратному нулевому корню отвечает p групп решений, то задача об устойчивости в случаях несущественно особенных приводится к исследованию системы $m+q$ уравнений, определяющее уравнение которой имеет $m+q$ нулевых корней с $q+p$-группами решений.

§ 16. Периодическое движение. В следующих параграфах мы будем рассматривать системы уравнений с периодическими коэффициентами

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk} x_k + \sum_{l=2}^{\infty} X_s^{(l)}(x_i,\ t) \qquad (s,\ i = 1, \ldots, n) \tag{3.32}$$

где a_{sk} — непрерывные функции t с периодом ω,

$$
\begin{aligned}
&X_s^{(l)} = \sum C_s^{(k_1 \cdots k_n)}(t)\, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \\
&C_s^{(k_1 \cdots k_n)}(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{sp}^{(k_1 \cdots k_n)} e^{ipt} = \\
&\qquad = \sum_{p=0}^{\infty} \left(a_p^{(k_1 \cdots k_n)} \cos pt + b_p^{(k_1 \cdots k_n)} \sin pt\right)
\end{aligned}
\qquad (3.33)
$$

В последнем равенстве $c_{sp}^{(k_1 \ldots k_n)}$ — комплексные постоянные величины, а $C_s^{(k_1 \ldots k_n)}(t)$ — вещественные функции вещественного аргумента t.

Линейной подстановкой с вещественными периодическими коэффициентами систему уравнений (3.32) всегда можно преобразовать к виду, в котором все коэффициенты линейных частей будут постоянными {47}. Причем линейная подстановка такова, что задачи об устойчивости в переменных преобразованной и исходной систем являются эквивалентными, а периодические коэффициенты этой подстановки имеют тот же период, что и функции $a_{sk}(t)$.

Не ограничивая общности, можно считать $\omega = 2\pi$. Будем также предполагать, что над системой (3.32) указанное преобразование выполнено и все коэффициенты a_{sk} являются постоянными.

В такой постановке исследуется Ляпуновым задача об устойчивости периодических движений, если среди корней характеристичного уравнения имеются корни с модулями, равными единице. Вопрос об устойчивости периодических движений рассматривается Ляпуновым как самостоятельная задача, отличная от задач об устойчивости равновесия или установившихся движений.

Мы сейчас покажем, что в случаях несущественно особенных задача об устойчивости периодических движений и задача об устойчивости установившегося движения являются эквивалентными.

В том случае, когда система (3.32) не содержит нелинейных членов, это предположение доказал Ляпунов, преобразовав систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим общий случай. Предположим, что определяющее уравнение, соответствующее системе (3.32), имеет m нулевых корней, q пар чисто мнимых и p корней с отрицательными вещественными частями.

Представим систему (3.32) в виде (3.2), считая коэффициенты разложений Y_s и Z_j периодическими функциями t. Переменные y_s отвечают критическим корням, а z_j — корням с отрицательными вещественными частями.

Преобразуем систему (3.2) при этих предположениях, положив

$$
z_j = \zeta_j + v_j(y_1, \ldots, y_{n_1}, t) \qquad (j = 1, \ldots, p,\ n_1 = m + 2q) \qquad (3.34)
$$

подразумевая под v_j сумму форм до N-го порядка включительно функций u_j, удовлетворяющих системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n_1} \frac{\partial u_j}{\partial y_s}\left[g_{s1} y_1 + \ldots + g_{sn_1} y_{n_1} + Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1};\ u_1, \ldots, u_p,\ t)\right] = \\
&\quad = \sum_{k=1}^{p} p_{jk} u_k + Z_j(y_1, \ldots, y_{n_1},\ u_1, \ldots, u_p,\ t)
\end{aligned}
$$

$$
(j = 1, \ldots, p;\ n_1 = m + 2q) \qquad (3.35)
$$

Эта система позволяет определить функции $u_j(y_1, \ldots, y_{n_1}, t)$ в виде степенных рядов с периодическими коэффициентами периода 2π (см. введение). Эти ряды, как правило, будут расходящимися.

В результате преобразования получим систему (3.5), в которой коэффициенты разложений функций $Y_s^{(0)}$, Y_s, $Z_j^{(N+1)}$, Z_{j0} будут периодическими функциями t с периодом 2π.

Представляя функции Y_s и Z_{j0} в виде (3.6) и считая P_s^* и Q_j^* линейными формами переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ с периодическими коэффициентами, учитывая (3.7), сделаем преобразование

$$y_s = \eta_s + \sum u_s^* y_1^{k_1} \ldots y_{n_1}^{k_{n_1}} \qquad (2 \leqslant k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant N;\ s = 1, \ldots, n_1) \tag{3.36}$$

где u_s^* — линейные формы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ также с периодическими коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_s^*}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial u_s^*}{\partial \zeta_j} (\varkappa_j \zeta_j - \delta_{j-1} \zeta_{j-1}) = -[k_1 \nu_1 + \ldots + (k_s - 1)\nu_s + \ldots + \\ + k_{n_1} \nu_{n_1}] u_s^* + \sigma_{s-1} u_{s-1}^* - (k_2 + 1)\sigma_1 u_s^{(k_1 - 1,\, k_2 + 1 \ldots k_{n_1})} - \ldots - \\ -(k_{n_1} + 1)\sigma_{n_1 - 1} u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1 - 1} - 1,\ k_{n_1} + 1)} + P_s^* + F_s^* \end{gathered} \tag{3.37}$$

где F_s^* $(k_1 + \ldots + k_{n_1} = \delta)$ — известные линейные формы от тех $u_s^{(k_1 \ldots k_{n_1})}$, у которых $k_1 + \ldots + k_{n_1} \leqslant \delta - 1$. Для $\delta = 1$ все $F_s^* \equiv 0$.

Определение u_s^* будем проводить в том же порядке, как это делают в § 14.

Положим

$$u_s^* = \alpha_{s1}^* \zeta_1 + \ldots + \alpha_{sp}^* \zeta_p$$

считая α_{sj}^* функциями t.

Подставляя значения u_s^* в уравнения (3.37) и отождествляя коэффициенты при $\zeta_1, \ldots \zeta_p$, мы получим для определения α_{sj}^* систему неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В правые части этих уравнений входят известные периодические функции t. Учитывая, что корни определяющего уравнения присоединенной системы имеют отрицательные вещественные части, а вещественные части корней критической системы равны нулю, мы можем утверждать, что полученная линейная система позволит определить все a_{sj}^* в виде периодических функций t с периодом 2π (см. § 19 главы III).

В результате преобразования (3.36) мы получим систему уравнений, аналогичную (3.10), в которой коэффициенты разложений функций $Y_s^{(0)}$, $Z_j^{(N+1)}$, H_s, E_j и P_s^* будут периодическими функциями t.

Предположим, что наинизшая форма в разложении $Y_s^{(0)}$ $(\eta_1, \ldots, \eta_{n_1}, t)$ имеет порядок h. Функция же $Z_j^{(N+1)}$ не содержит членов ниже $(N+1)$-го порядка. Мы должны различать два возможных случая: 1) $h \leqslant N + 1$; 2) $h > N + 1$ при любом сколь угодно большом N.

Второй случай возможен лишь тогда, когда функции $Y_s(y_1, \ldots, y_{n_1}, u_1, \ldots, u_p, t) \equiv 0$. Этот случай будет существенно особенным. Система уравнений (3.35) при этом условии определит u_j в виде абсолютно сходящихся степенных рядов от $y_1, \ldots, y_{n_1}$ с периодическими коэффициентами (см. § 21 главы III). Если в (3.34) v_j заменить на u_j, то в результате преобразования мы получим систему уравнений, аналогичную системе (3.10), в которой $Y_s^{(0)} = Z_j^{(N+1)} \equiv 0$.

В этом случае невозмущенное движение будет устойчиво.

Рассмотрим теперь случай $h \leqslant N + 1$. Если имеет место равенство $h = N + 1$, то мы можем поступить следующим образом. Взять функции v_j равными сумме форм до N_1-го порядка включительно рядов, определяющих $u_j(y_1, \ldots, y_{n_1}, t)$, полагая $N_1 = N + k$, где k — сколь угодно большое число. Тогда наинизшая форма $Y_s^{(0)}$, имеющая порядок $h = N + 1$, останется без изменения, а наинизшая форма $Z_j^{(N+1)}$ будет иметь порядок $N_1 + 1$. Следовательно, порядок наинизшей формы $Z_j^{(N+1)}$ в первом случае мы всегда можем считать выше порядка наинизшей формы $Y_s^{(0)}$ на сколь угодно большое число k.

Легко показать, что в этом случае вопрос об устойчивости системы (3.32) приводится к исследованию системы с разделенными переменными

$$\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1} g_{sk}\eta_k + \sum_{k_1+\ldots+k_{n_1}\geqslant 2}^{N} A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}(t)\,\eta_1^{k_1}\ldots\eta_{n_1}^{k_{n_1}} \tag{3.38}$$

$$(s=1,\ldots,n_1;\ n_1=m+2q)$$

$$\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\,\zeta_i \qquad (j=1,\ldots,p) \tag{3.39}$$

Если каким-либо способом нам удалось бы построить функцию V_1, удовлетворяющую теореме Ляпунова или Четаева для системы уравнений (3.38), то тогда фунция V для системы (3.32) определилась бы в виде суммы $V = V_1 + V_2$, где V_2 — известная квадратичная форма от $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

§ 17. Приведение к исследованию установившегося движения. Частный случай. Рассмотрим теперь систему уравнений (3.38). Докажем, что, не изменяя задачи об устойчивости, эту систему можно преобразовать в новую систему, в которой коэффициенты, играющие роль функций $A_s^{(k_1\ldots k_{n_1})}(t)$, будут постоянными величинами.

Исследование начнем с наиболее важных частных случаев.

Предположим, что определяющее уравнение системы (3.38) имеет m нулевых корней, которым соответствует m групп решений, и q пар чисто мнимых корней $\pm i\lambda_s$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{q} m_s\lambda_s \neq E, \qquad \text{для } 2 \leqslant \sum_{s=1}^{q} |m_s| \leqslant N \tag{3.40}$$

где m_s и E — целые числа, включая нуль.

В этом случае систему (3.38) можно преобразовать к виду

$$x_s^{\cdot} = -\lambda_s y_s + X_s(x_i, y_i, \xi_r, t), \qquad y_s^{\cdot} = \lambda_s x_s + Y_s(x_i, y_i, \xi_r, t)$$

$$\xi_j^{\cdot} = \Xi_j(x_i, y_i, \xi_r, t) \qquad (i,\ s=1,\ldots,q;\ j,\ r=1,\ldots,m) \tag{3.41}$$

Полагая $z_s = x_s + iy_s$, $\bar z_s = x_s - iy_s$, получим

$$\begin{aligned} &z_s^{\cdot} = i\lambda_s z_s + Z_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \qquad \bar z_s^{\cdot} = -i\lambda_s \bar z_s + \bar Z_s(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)\\ &\xi_j^{\cdot} = P_j(z_i, \bar z_i, \xi_r, t) \qquad (s,\ i=1,\ldots,q;\ j,\ r=1,\ldots,m) \end{aligned} \tag{3.42}$$

где

$$Z_s = \sum_{l=2}^{\infty} Z_s^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t), \qquad \bar Z_s = \sum_{l=2}^{\infty} \bar Z_s^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)$$

$$P_j = \sum_{l=2}^{\infty} P_j^{(l)}(z_i, \bar z_i, \xi_r, t)$$

а $Z_s^{(l)}$, $\bar Z_s^{(l)}$ и $P_j^{(l)}$ — формы l-го порядка от z_i, $\bar z_i$ и ξ_r, которые можно представить в виде

$$\begin{aligned} &Z_s^{(l)} = \sum A_s^*(t)\, z_1^{k_1}\ldots z_q^{k_q}\,\bar z_1^{m_1}\ldots \bar z_q^{m_q}\,\xi_1^{\delta_1}\ldots\xi_m^{\delta_m}\\ &\bar Z_s^{(l)} = \sum \bar A_s^*(t)\, \bar z_1^{k_1}\ldots \bar z_q^{k_q}\, z_1^{m_1}\ldots z_q^{m_q}\,\xi_1^{\delta_1}\ldots\xi_m^{\delta_m}\\ &P_j^{(l)} = \sum B_j^*(t)\, z_1^{k_1}\ldots z_q^{k_q}\,\bar z_1^{m_1}\ldots \bar z_q^{m_q}\,\xi_1^{\delta_1}\ldots\xi_m^{\delta_m}\\ &A_s^*(t) = A_s^*(t+2\pi) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Знак * заменяет индекс $(k_1\ldots k_q,\ m_1\ldots m_q,\ \delta_1\ldots\delta_m)$.

Преобразуем систему (3.42) к переменным ζ_s, $\bar{\zeta}_s$ и η_j, положив

$$z_s = \zeta_s + u_s(z_i, \bar{z}_i, \xi_r, t), \quad \bar{z}_s = \bar{\zeta}_s + \bar{u}_s(z_i, \bar{z}_i, \xi_r, t)$$

$$\xi_j = \eta_j + v_j(z_i, \bar{z}_i, \xi_r, t)$$

Считая u_s, $\bar{u}_s$, v_j периодическими функциями t, подлежащими определению, эти функции представим следующим образом:

$$u_s = \sum u_s^*(t) z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar{z}_1^{m_1} \ldots \bar{z}_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m} \qquad (s = 1, \ldots, q)$$

$$v_j = \sum v_j^*(t) z_1^{k_1} \ldots z_q^{k_q} \bar{z}_1^{m_1} \ldots \bar{z}_q^{m_q} \xi_1^{\delta_1} \ldots \xi_m^{\delta_m} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

Преобразованная система будет иметь вид

$$\zeta_s^{\cdot} = i\lambda_s \zeta_s + \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Z_{s1}^{(l)}, \quad \bar{\zeta}_s^{\cdot} = -i\lambda_s \bar{\zeta}_s + \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} \bar{Z}_{s1}^{(l)}, \qquad \eta_j^{\cdot} = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} H_j^{(l)} \tag{3.44}$$

Функции $Z_{s1}^{(l)}$ и $H_j^{(l)}$ можно представить так:

$$\left.\begin{aligned} Z_{s1}^{(l)} &= \sum a_s^*(t) \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_q^{k_q} \bar{\zeta}_1^{m_1} \ldots \bar{\zeta}_q^{m_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} \qquad (s = 1, \ldots, q) \\ H_j^{(l)} &= \sum b_s^*(t) \zeta_1^{k_1} \ldots \zeta_q^{k_q} \bar{\zeta}_1^{m_1} \ldots \bar{\zeta}_q^{m_q} \eta_1^{\delta_1} \ldots \eta_m^{\delta_m} \qquad (j = 1, \ldots, m) \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Коэффициенты $a_s^*(t)$ и $b_s^*(t)$ для $k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k$ определятся по формулам

$$a_s^* = -\frac{du_s^*}{dt} - i\left[(k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s - 1)\lambda_s + \ldots + \right.$$

$$\left. + (k_q - m_q)\lambda_q\right] u_s^* + A_s^*(t) + F_s^*\left(u_s^{(l)}, v_j^{(l)}, \bar{u}_s^{(l)}, t\right)$$

$$b_j^* = -\frac{dv_j^*}{dt} - i\left[(k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q\right] v_j^* +$$

$$+ B_j^*(t) + \Phi_j^*\left(u_s^{(l)}, \bar{u}_s^{(l)}, v_j^{(l)}, t\right) \tag{3.46}$$

где F_s^* и Φ_j^* — известные функции t и тех $u_s^{(l)}$, $\bar{u}_s^{(l)}$, $v_j^{(l)}$, у которых $l \leqslant k - 1$. Для $k = 2$ все F_s^* и Φ_j^* тождественно равны нулю.

Коэффициенты $\bar{a}_s^*$ определятся аналогичными формулами.

Из (3.46) следует, что для различных значений функций u_s^*, $\bar{u}_s^*$ и v_j^* мы будем получать различные значения коэффициентов a_s^*, $\bar{a}_s^*$, b_j^*. Определим u_s^*, $\bar{u}_s^*$ и v_j^* таким образом, чтобы a_s^*, $\bar{a}_s^*$ и b_j^* были или равны нулю, или постоянным величинам.

Предположим, что все функции u_s^* и v_j^*, для которых $k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k - 1$, найдены из условий $a_s^* = 0$, $b_j^* = 0$ или $a_s^* = \text{const}$, $b_j^* = \text{const}$.

Определим u_s^* и v_j^* для $k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k$. Будем рассматривать совокупность чисел k_s, m_s и δ_j, удовлетворяющих условию

$$d = (k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s - 1)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q \neq 0$$
$$(k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k)$$

Очевидно, что для таких чисел k_s, m_s и δ_j функции u_s^* можно вычислить при любых значениях a_s^*. Найдем эти функции при условии $a_s^* = 0$.

Отметим, что равенство $d = 0$ в силу (3.40) возможно лишь при

$$k_1 = m_1, \qquad k_2 = m_2, \ldots, \qquad k_s = m_s + 1, \ldots, \qquad k_q = m_q \tag{3.47}$$

Коэффициенты a_s^*, соответствующие индексу $(k_1 \ldots k_s \ldots k_q,\ k_1 \ldots k_s - 1 \ldots k_q)$, определим равенствами

$$a_s^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(A_s^* + F_s^*)\,dt$$

Тогда периодические функции u_s^* с этим же индексом найдутся из уравнений

$$\frac{du_s^*}{dt} = -a_s^* + A_s^* + F_s^* \qquad (s=1,\ldots,q) \tag{3.48}$$

Функции v_j^* будем определять следующим образом. Для чисел k_s и m_s, удовлетворяющих условию

$$d_1 = (k_1 - m_1)\lambda_1 + \ldots + (k_s - m_s)\lambda_s + \ldots + (k_q - m_q)\lambda_q \neq 0$$
$$(k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m = k)$$

периодические функции v_j найдем при $b_j^* = 0$.

Замечая, что равенство $d_1 = 0$ возможно лишь при

$$k_1 = m_1, \qquad k_2 = m_2, \ldots, \qquad k_q = m_q \tag{3.49}$$

определим коэффициенты b_j^*, соответствующие индексу $(k_1 \ldots k_q k_1 \ldots k_q)$, равенствами

$$b_j^* = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}[B_j^* + \Phi_j^*]\,dt$$

а периодические функции v_j^* — уравнениями

$$\frac{dv_j^*}{dt} = B_j^* + \Phi_j^* - b_j^* \qquad (j=1,\ldots,m)$$

Следовательно, мы можем утверждать, что в выражениях (3.45) формы $Z_{s1}^{(l)}$ будут содержать лишь те слагаемые, у которых степени k_s и m_s удовлетворяют условию (3.47), а формы $H_j^{(l)}$ сохранят степени, удовлетворяющие условию (3.49).

Давая числу k значения 2, 3..., N, мы определим все u_s^* и v_j^*, для которых $k_1 + \ldots + k_q + m_1 + \ldots + m_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m \leqslant N$.

Система уравнений (3.44) в результате преобразований примет вид

$$\begin{aligned}
\zeta_s^{\cdot} &= i\lambda_s\zeta_s + \zeta_s \sum a_s^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1}\ldots(\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q}\eta_1^{\delta_1}\ldots\eta_m^{\delta_m} + \\
&\quad + Z_s^{(N+1)}(\zeta_i,\ \bar{\zeta}_i,\ \eta_r,\ t) \\
\bar{\zeta}_s^{\cdot} &= -i\lambda_s\bar{\zeta}_s + \bar{\zeta}_s \sum \bar{a}_s^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1}\ldots(\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q}\eta_1^{\delta_1}\ldots\eta_m^{\delta_m} + \\
&\quad + \bar{Z}_s^{(N+1)}(\zeta_i,\ \bar{\zeta}_i,\ \eta_r,\ t) \\
\eta_j^{\cdot} &= \sum b_j^* (\zeta_1\bar{\zeta}_1)^{k_1}\ldots(\zeta_q\bar{\zeta}_q)^{k_q}\eta_1^{\delta_1}\ldots\eta_m^{\delta_m} + H_j^{(N+1)}(\zeta_i,\ \bar{\zeta}_i,\ \eta_r,\ t)
\end{aligned} \tag{3.50}$$
$$(s,\ i=1,\ldots,q;\ j,\ r=1,\ldots,m;\ 2 \leqslant 2k_1 + \ldots + 2k_q + \delta_1 + \ldots + \delta_m \leqslant N)$$

где $Z_s^{(N+1)}$, $\bar{Z}_s^{(N+1)}$ и $H_j^{(N+1)}$ не содержат членов ниже $(N+1)$-го порядка.

Исследуя динамические системы в случае иррациональных λ_s и предполагая $m = 0$, Биркгоф [8] получил аналогичную систему уравнений.

Нас в дальнейшем будут интересовать действительные функции действительного переменного t.

Полагая $\zeta_s = r_s e^{i\theta_s}$, $a_s^* = \alpha_s^* + i\beta_s^*$, получим

$$
\begin{aligned}
&r_s^{\cdot} = r_s \sum \alpha_s^* r_1^{2k_1} \dots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_m^{\delta_m} + R_s^{(N+1)} \\
&r_s \theta_s^{\cdot} = \lambda_s r_s + r_s \sum \beta_s^* r_1^{2k_1} \dots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_m^{\delta_m} + F_s^{(N+1)} \\
&\eta_j^{\cdot} = \sum b_j^* r_1^{2k_1} \dots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_m^{\delta_m} + H_j^{(N+1)}
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Если вопрос об устойчивости решается членами N-го порядка независимо от членов более высокого порядка, то задача приводится к исследованию системы уравнений $(m + q)$-го порядка вида

$$
\begin{aligned}
&r_s^{\cdot} = r_s \sum \alpha_s^* r_1^{2k_1} \dots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_m^{\delta_m} \\
&\eta_j^{\cdot} = \sum b_j^* r_1^{2k_1} \dots r_q^{2k_q} \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_m^{\delta_m} \\
&\quad (2 \leqslant 2k_1 + \dots + 2k_q + \delta_1 + \dots + \delta_m \leqslant N)
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

На основании изложенного следует, что исследование устойчивости тривиального решения системы уравнений (3.32), характеристичное уравнение которой имеет n корней, по модулю меньших единицы, m корней, равных единице, и $2q$ корней, по модулю равных единице (корни вида $\varkappa_s = e^{\pm 2\pi i \lambda_s}$), удовлетворяющих условию

$$
\sum_{s=1}^{q} m_s \lambda_s \neq E, \quad \text{для} \quad 2 \leqslant \sum_{s=1}^{q} |m_s| \leqslant N
$$

где m_s и E — целые числа, включая нуль, приводится к исследованию устойчивости тривиального решения системы уравнений с постоянными коэффициентами, характеризуемой $m + q$ нулевыми корнями с $m + q$ группами решений. В случае $m = 0$ и при λ_s/λ_j — иррациональном эта задача исследована автором в работе [7].

§ 18. Приведение к исследованию установившегося движения. Общий случай. Прежде чем перейти к общему случаю, рассмотрим систему (3.38), предполагая, что определяющее уравнение ее имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda_1$ кратности r. Тогда линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами эту систему можно преобразовать к виду

$$
\begin{aligned}
&\eta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n_1 - 2r} b_{sk} \eta_k + H_s(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t) \\
&x_1^{\cdot} = -\lambda_1 y_1 + X_1(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t), \qquad y_1^{\cdot} = \lambda_1 x_1 + Y_1(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t) \\
&x_j^{\cdot} = -\lambda_1 y_j + \sigma_{j-1} x_{j-1} + X_j(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t) \\
&y_j^{\cdot} = \lambda_1 x_j + \sigma_{j-1} y_{j-1} + Y_j(\eta_i, x_\nu, y_\nu, t) \\
&\quad (s, i = 1, \dots, n_1 - 2r;\ j = 2, \dots, r;\ \nu = 1, \dots, r)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

где x_j, y_j — линейные формы от $\eta_s (s = 1, \dots, n_1)$. Уравнение $|b_{sk} - \delta_{sk} \varkappa| = 0$ имеет m нулевых и $2(q - r)$ чисто мнимых корней.

Заметим, что все величины σ_{j-1}, если они отличны от нуля, можно считать равными любому числу. Будем считать их равными λ_1.

Полагая

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \xi_1 \cos \lambda_1 t + \zeta_1 \sin \lambda_1 t, \qquad y_1 = \xi_1 \sin \lambda_1 t - \zeta_1 \cos \lambda_1 t \\
&x_j = \xi_j \cos \lambda_1 t + \zeta_j \sin \lambda_1 t + \xi_{j-1} \cos \sigma_{j-1} t + \zeta_{j-1} \sin \sigma_{j-1} t \\
&y_j = \xi_j \sin \lambda_1 t - \zeta_j \cos \lambda_1 t + \xi_{j-1} \sin \sigma_{j-1} t - \zeta_{j-1} \cos \sigma_{j-1} t
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\dot{\eta_s} = \sum_{k=1}^{n_1-2r} b_{sk}\,\eta_k + H_{s1}(\eta_i,\ \xi_\nu,\ \zeta_\nu,\ t)\\
&\dot{\xi_1} = \Xi_1(\eta_i,\ \xi_\nu,\ \zeta_\nu,\ t), \qquad \dot{\zeta_1} = Z_1(\eta_i,\ \xi_\nu,\ \zeta_\nu,\ t)\\
&\dot{\xi_j} = \sigma_{j-1}\,\xi_{j-1} + \Xi_j(\eta_i,\ \xi_\nu,\ \zeta_\nu,\ t)\\
&\dot{\zeta_j} = \sigma_{j-1}\,\zeta_{j-1} + Z_j(\eta_i,\ \xi_\nu,\ \zeta_\nu,\ t)\\
&\quad (s,\ i=1,\ldots,\ n_1-2r;\ j=2,\ 3,\ldots,\ r;\ \nu=1,\ldots,\ r)
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

Если кратному корню $\pm\, i\lambda_1$ соответствует несколько групп решений, то для каждой такой группы преобразования по формулам (3.54) проводятся совершенно аналогично.

Отметим, что определяющее уравнение системы (3.55) будет иметь $m + 2r$ нулевых корней и $2(q - r)$ чисто мнимых.

Если чисто мнимым корням $\pm\, i\lambda_1$ соответствует одна группа решений, т. е. все $\sigma_{j-1} \neq 0$, то $2r$ дополнительным нулевым корням будут соответствовать две группы решений. Если же этим корням соответствует k групп решений, то $2r$ нулевых корней будут иметь $2k$ групп решений.

Заметим также, что в случае λ_1, равного целому числу, функции H_{s1}, Ξ_j, Z_j будут периодическими функциями t с периодом 2π. Таковыми же они будут и при $\lambda_1 = \alpha_1/\beta_1$ (α_1, β_1 — целые числа). Последний случай заменой $\tau = \beta_1 t$ приводится к случаю λ_1, равного целому числу.

При иррациональном λ_1 задача несколько усложняется. Выражения H_{s1}, Ξ_j, Z_j уже не будут периодическими функциями t. Представим одно из них в виде[1]

$$
H_{s1} = \sum H_s{}^*(t)\,\eta_1{}^{\gamma_1}\ldots\eta_p{}^{\gamma_p}\,\xi_1{}^{m_1}\ldots\xi_r{}^{m_r}\,\zeta_1{}^{\delta_1}\ldots\zeta_r{}^{\delta_r} \tag{3.56}
$$

$$(p=n_1-2r,\ s=1,\ldots,\ p)$$

где знак * заменяет индекс (γ_1, ..., γ_p, m_1, ..., m_r, δ_1, ..., δ_r).

Легко обнаружить, что функции $H(t)$ будут линейными формами от коэффициентов $A^{(k_1\ldots k_{n_1})}(t)$, фигурирующих в системе (3.38), умноженных на $\sin \varepsilon_1\lambda_1 t$ и на $\cos \varepsilon_1\lambda_1 t$. Числа ε_1 в формах l-го порядка могут принимать значения от 1 до l.

Отсюда следует, что функции $H_s^*(t)$, у которых $\gamma_1 + \ldots + \gamma_p + m_1 + \ldots + m_r + \delta_1 + \ldots + \delta_r = l$, можно представить в виде

$$
H_s{}^*(t) = \sum_{\varepsilon_1} A_{s1}{}^*(t)\, e^{i\varepsilon_1\lambda_1 t} \tag{3.57}
$$

где $A_{s1}{}^*(t)$ — периодические функции t с периодом 2π. При λ_1 иррациональном $H_s{}^*(t)$ будут почти-периодическими функциями t.

Такую же структуру будут иметь коэффициенты разложений Ξ_j и Z_j, фигурирующих в системе (3.55).

Аналогичные преобразования можно провести для любой пары простых или кратных чисто мнимых корней $\pm\, i\lambda_s$. Следовательно, в общем случае систему (3.38) всегда можно преобразовать в новую систему, у которой все корни определяющего уравнения будут равны нулю. Эту систему можно представить в виде

$$
\dot{x_1} = X_1(x_1,\ldots,\ x_n,\ t), \quad \dot{x_s} = \sigma_{s-1}\,x_{s-1} + X_s(x_1,\ldots,\ x_n,\ t) \tag{3.58}
$$

$$(s=1,\ldots,\ n;\ n=n_1)$$

где

$$
X_s = \sum_{l=2}^{\infty} X_s{}^{(l)}(x_1,\ldots,\ x_n,\ t), \qquad X_s{}^{(l)} = \sum B_s{}^*(t)\,x_1{}^{k_1}\ldots x_n{}^{k_n}
$$

$$(k_1+\ldots+k_n=l)$$

Знак * заменяет индекс $(k_1, \ldots, k_n)$.

Функции $B_s^*(t)$ имеют следующую структуру:

$$B_s^*(t)=\sum_{\varepsilon_j}\sum_{k_s} A_{s**}^*(t)\,e^{i(\varepsilon_1\lambda_1+\varepsilon_2\lambda_2+\ldots+\varepsilon_\mu\lambda_\mu)t} \tag{3.59}$$

Знак ** заменяет индекс $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\mu)$. Величина μ определяет число иррациональных чисто мнимых корней. Суммирование по k_s распространяется на все целые положительные числа k_s, удовлетворяющие равенству $k_1+ \ldots + k_n = l$, а суммирование по ε_j — на все целые положительные и отрицательные числа ε_j $(j = 1, \ldots, \mu)$, удовлетворяющие условию $\sum|\varepsilon_j| \leqslant l$.

Функции $A_{s**}^{(k_1\ldots k_n)}$ являются периодическими по t с периодом 2π, представляющими линейные формы с постоянными комплексными коэффициентами от $A_s^{(k_1,\ldots,k_n)}(t)$. $B_s^*(t)$ будут вещественными почти-периодическими функциями t для вещественных значений последнего. Новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ являются вещественными функциями вещественного переменного t.

Отметим, что задачи об устойчивости в переменных η_s исходной системы (3.38) и в переменных x_s эквивалентны.

Докажем теперь, что для случаев несущественно особенных задачу об устойчивости периодических движений, характеризуемых системой (3.38), всегда можно привести к задаче об устойчивости установившегося движения.

Будем рассматривать систему (3.58), предполагая, что каким-либо образом нам удалось преобразовать ее к виду, в котором все формы $X_s^{(l)}$ для $l \leqslant k-1$ не зависят от времени t.

Преобразуем эту систему, положив

$$x_s=y_s+\sum u_s^*(t)\,x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} \qquad (k_1+\ldots+k_n=k;\ s=1,\ldots,n) \tag{3.60}$$

где

$$u_s^*(t)=\sum_{\varepsilon_j}\sum_{k_j} u_{s**}^*(t)\,e^{i(\varepsilon_1\lambda_1+\ldots+\varepsilon_\mu\lambda_\mu)t} \tag{3.61}$$

Индексы * и ** имеют прежние значения.

Из (3.60) найдем

$$x_s=y_s+\sum v_s^*(t)\,y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \qquad (k_1+\ldots+k_n \geqslant k) \tag{3.62}$$

Функции v_s^* для $k_1 + \ldots + k_n = k$ будут равны u_s^*, а для $k_1 + \ldots + k_n > k = l$ эти функции представятся в виде многочленов от тех u_s^*, у которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l-1$.

Из (3.60) и (3.62) будем иметь

$$y_1^{\cdot}=\sum Y_1^{(l)}(y_1,\ldots,y_n,t), \qquad y_s^{\cdot}=\sigma_{s-1}y_{s-1}+\sum Y_s^{(l)}(y_1,\ldots,y_n,t) \tag{3.63}$$
$$(s=2,3,\ldots,n;\ l=2,3\ldots)$$

В этой системе формы $Y_s^{(l)}(y_1, \ldots, y_n, t)$ для $l \leqslant k-1$ $(s = 1, \ldots, n)$ будут равны $X_s^{(l)}(x_1, \ldots, x_n)$ с заменой x_s на y_s, а формы $Y_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_n, t)$ будут иметь вид

$$Y_s^{(k)}(y_1,\ldots,y_n,t)=\sum \alpha_s^*(t)\,y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n} \tag{3.64}$$
$$(k_1+\ldots+k_n=k;\ s=1,\ldots,n)$$

Функции $\alpha_s^*(t)$ определятся равенствами

$$\alpha_s^{(k_1\ldots k_n)}(t)=-\frac{du_s^{(k_1\ldots k_n)}}{dt}-k_2\,u_s^{(k_1-1,\,k_2+1,\,k_3\ldots k_n)}-$$
$$-k_3\,u_s^{(k_1,\,k_2-1,\,k_3+1\ldots k_n)}-\ldots-k_n\,u_s^{(k_1\ldots k_{n-1}-1,\,k_n+1)}+$$
$$+B_s^{(k_1\ldots k_n)}(t) \tag{3.65}$$
$$(s=1,\ldots,n;\ k_1+\ldots+k_n=k)$$

Давая функциям $u_s^{(k_1\dots k_n)}(t)$ различные значения, мы будем получать различные значения для функций $\alpha_s^{(k_1\dots k_n)}(t)$. Будем определять функции $u_s^{(k_1\dots k_n)}$ таким образом, чтобы $\alpha_s^{(k_1\dots k_n)}$ обращались в нуль или в постоянные величины.

Очевидно, что функции $u_s^{(k_1\dots k_n)}(t)$ можно определять в том же порядке, как мы это делали в § 16. Приняв этот порядок определения функций, $u_s^{(k_1\dots k_n)}$, подставляя в (3.65) значение u_s^* из (3.61), будем иметь

$$-\frac{du^*_{s**}}{dt} - i(\varepsilon_1\lambda_1 + \dots + \varepsilon_\mu\lambda_\mu)u^*_{s**} + B^*_{s**} + L^*_{s**} = \alpha^*_{s**} \tag{3.66}$$

$$(s=1,\dots,n)$$

где L^*_{s**} являются периодическими функциями t с периодом 2π, представляющими линейные формы от уже найденных $u_{s**}^{(k_1\dots k_j-1-1,k_j+1\dots k_n)}$.

Если числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu$ таковы, что $\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i\lambda_i \neq 0$, то периодическую функцию $u_{s**}^*(t)$ можно определить, полагая $\alpha_{s**}^* = 0$.

Если же для некоторых из чисел $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu$ выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{\mu}\varepsilon_i\lambda_i = 0$, то $\alpha_{s,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\mu}^{(k_1\dots k_n)}$, соответствующие числам $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu$, необходимо определить из равенств

$$\alpha_{s,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\mu}^{(k_1\dots k_n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(B_{s,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\mu}^{(k_1\dots k_n)} + L_{s,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\mu}^{(k_1\dots k_n)}\right)dt$$

$$(s=1,\dots,n;\ k_1+\dots+k_n=k)$$

Тогда уравнения (3.66) определят $u_{s,\varepsilon_1\dots\varepsilon_\mu}^{(k_1\dots k_n)}(t)$ в виде периодических функций t с периодом 2π. Следовательно, в результате преобразования (3.60), при найденных значениях функций u_s^*, в системе уравнений (3.63) все формы $Y_s^{(k)}$ будут иметь постоянные коэффициенты. Очевидно, что структура коэффициентов форм для $Y_s^{(l)}$ при $l > k$ будет прежней, т. е. (3.59).

Очевидно также, что задачи об устойчивости в переменных $x_1, \dots, x_n$ и в переменных $y_1, \dots, y_n$ эквивалентны.

Давая числу k значения $2, 3, \dots, N$, мы систему (3.58) преобразуем в новую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \sum a_1^{(k_1\dots k_n)} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n} + \sum_{k=N+1}^{\infty} Z_1^{(l)}(z_1,\dots,z_n,t) \\ \dot{z}_s &= \sigma_{s-1}z_{s-1} + \sum a_s^{(k_1,\dots,k_n)} z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n} + \sum_{k=N+1}^{\infty} Z_s^{(l)}(z_1,\dots,z_n,t) \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$(s=2,3,\dots,n;\ 2\leqslant k_1+\dots+k_n\leqslant N)$$

Изложенное в § 16—18 позволяет формулировать следующую теорему.

Теорема. Если система уравнений (3.32) такова, что отвечающее ей характеристичное уравнение имеет m корней, равных единице, q пар корней, по модулю равных единице, и p корней с модулями, меньшими единицы, то задача об устойчивости периодических движений, характеризуемых этой системой, в случаях несущественно особенных всегда приводится к задаче об устойчивости установившегося движения.

Если корни $\varkappa_s = e^{\pm 2\pi i\lambda_s}$, модули которых равны единице, удовлетворяют условию

$$\sum m_s\lambda_s \neq E \quad \text{для} \quad 2\leqslant\sum_{s=1}^{q}|m_s|\leqslant N$$

где m_s и E — целые числа, включая нуль, то задача об устойчивости установившегося движения, к исследованию которой приводится задача об устойчивости периодических движений, характеризуется $m+q$ нулевыми корнями.

§ 19. К теореме Ляпунова о существовании голоморфных функций, удовлетворяющих уравнениям в частных производных. Установившееся движение. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x_1, \dots, x_n;\ z_1, \dots, z_p) \\ z_j^{\cdot} &= \sum_{i=1}^{p} g_{ji} z_i + Z_j(x_1, \dots, x_n;\ z_1, \dots, z_p) \end{aligned} \tag{3.68}$$

где p_{sk} и g_{ji} — постоянные величины, функции X_s не содержат линейных членов, а функции Z_j могут содержать линейные члены только в отношении $x_1, \dots, x_n$.

Найдем условия существования голоморфных функций $z_1, \dots, z_p$ от переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих этой системе и обращающихся в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$.

Очевидно, что эти функции будут удовлетворять уравнениям с частными производными вида

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_j}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \dots + p_{sn} x_n + X_s) = \sum_{i=1}^{p} g_{ji} z_i + Z_j(x_1, \dots, x_n;\ z_1, \dots, z_p) \tag{3.69}$$

$$(j = 1, \dots, p)$$

Исследуя эту систему, Ляпунов доказал теорему [30], играющую весьма важную роль в исследовании нелинейных задач устойчивости движения.

Достаточные условия существования голоморфных функций $z_j(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе (3.69) и обращающихся в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$, заключаются в следующем:

1) корни уравнения

$$|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0 \tag{3.70}$$

имеют отличные от нуля вещественные части и все одного и того же знака;

2) между корнями уравнения (3.70) и корнями уравнения

$$|g_{ji} - \delta_{ji}\nu| = 0$$

не существует зависимостей вида

$$\nu_j = m_1\varkappa_1 + \dots + m_n\varkappa_n \qquad (j = 1, \dots, p)$$

для всех целых положительных $m_1, \dots, m_n$, включая нуль, удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{n} m_s > 0$$

При этих условиях Ляпунов доказывает существование функций $z_j(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих требуемым условиям. Эти функции Ляпунов представляет в виде степенных рядов в отношении $x_1, \dots, x_n$ с постоянными коэффициентами. Отметим, что определение коэффициентов этих рядов можно произвести, не накладывая условия 1), а пользуясь лишь условием 2).

Условие 1) в доказательстве теоремы § 30 используется Ляпуновым для доказательства сходимости рядов $z_j(x_1, \dots, x_n)$.

Докажем теперь теорему о существовании голоморфных функций $z_j = z_j(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих системе (3.69) и обращающихся в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$, при условиях, отличных от условий теоремы § 30.

Теорема. Если система уравнений (3.68) такова, что

1) уравнение $| p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa | = 0$ или не имеет кратных корней, или при наличии кратных корней каждому такому корню отвечает столько групп решений, какова его кратность;

2) $\nu_j \neq \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s m_s$, где $\sum_{s=1}^{n} m_s \geqslant 1$ для любых целых положительных m_s, включая нуль;

3) функции $X_s [x_1, \ldots, x_n, z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n)] \equiv 0$, то всегда найдется одна определенная система голоморфных функций $z_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$ $\ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнениям (3.69) и обращающихся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Линейной подстановкой с постоянными коэффициентами систему (3.68) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}
\xi_s' = \varkappa_s \xi_s + \Xi_s(\xi_i,\ \eta_r) \\
\eta_1' = \nu_1 \eta_1 + H_1(\xi_i,\ \eta_r),\quad \eta_j' = \nu_j \eta_j + \sigma_{j-1}\eta_{j-1} + H_j(\xi_i,\ \eta_r) \qquad (3.71) \\
(s,\ i = 1, \ldots, n;\ j,\ r = 1, \ldots, p)
\end{gathered}$$

Рассмотрим систему функций $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ $(j = 1, \ldots, p)$, удовлетворяющих системе уравнений с частными производными вида

$$\begin{gathered}
\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s} \varkappa_s \xi_s = \nu_1 \eta_1 + H_1^{(0)}(\xi_i) + H_1^{(1)}(\xi_i,\ \eta_r) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s} \Xi_s \\
\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s} \varkappa_s \xi_s = \nu_j \eta_j + \sigma_{j-1}\eta_{j-1} + H_j^{(0)}(\xi_i) + H_j^{(1)}(\xi_i,\ \eta_r) - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s} \Xi_s \qquad (3.72) \\
(j = 2, \ldots, p) \quad (i = 1, \ldots, n)
\end{gathered}$$

где $H_j^{(1)}$ $(j = 1, \ldots, p)$ обращаются в нуль при $\eta_1 = \ldots = \eta_p = 0$, а $H_j^{(0)}(\xi_i) = \sum A_j^{(k_1 \cdots k_n)} \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$ $(j = 1, \ldots, p)$.

Представим решение системы (3.71) в виде

$$\eta_j = \sum a_j^{(k_1 \cdots k_n)} \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \qquad (j = 1, \ldots, p) \qquad (3.73)$$

Отметим, что Ξ_s обращаются тождественно в нуль, если в их выражения подставить ряды (3.73).

Коэффициенты $a_j^{(k_1 \cdots k_n)}$ определятся равенствами

$$\begin{gathered}
\left(\sum_{s=1}^{n} \varkappa_s k_s - \nu_1\right) a_1^{(k_1 \cdots k_n)} = A_1^{(k_1 \cdots k_n)} + L_1^{(k_1 \cdots k_n)} \\
\left(\sum_{s=1}^{n} \varkappa_s k_s - \nu_j\right) a_j^{(k_1 \cdots k_n)} = \sigma_{j-1} a_{j-1}^{(k_1 \cdots k_n)} + A_j^{(k_1 \cdots k_n)} + L_j^{(k_1 \cdots k_n)} \qquad (3.74) \\
(k_1 + k_2 + \ldots + k_n = l),\ (l = 1,\ 2, \ldots)
\end{gathered}$$

где $L_j^{(k_1 \cdots k_n)}$ $(j = 1, \ldots, p)$ являются линейными формами от коэффициентов разложения $H_j^{(1)}$. Для $k_1 + \ldots + k_n = 1$ все $L_j^{(k_1 \cdots k_n)} = 0$. Коэффициентами этих линейных форм будут являться многочлены различных степеней от тех $a_j^{(k_1 \cdots k_n)}$, у которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$.

Обозначим через B_j наибольшие значения величин $\dfrac{1}{| \Sigma \varkappa_s k_s - \nu_j |}$ для любых значений k_s, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_n \geqslant 1$, и определим наибольшие значения $| a_j^{(k_1 \cdots k_n)} |$, для которых $k_1 + \ldots + k_n =$

$= 1$. Обозначим эти $|a_j^{(k_1 \dots k_n)}|$ через $u_j^{(k_1 \dots k_n)} (k_1 + \dots + k_n = 1)$ и определим последние из уравнений

$$u_1^{(k_1 \dots k_n)} = B_1 \alpha_1^{(k_1 \dots k_n)}, \qquad u_j^{(k_1 \dots k_n)} = B_j \left[|\sigma_{j-1}| u_{j-1}^{(k_1 \dots k_n)} + \alpha_j^{(k_1 \dots k_n)} \right]$$

где $\alpha_j^{(k_1 \dots k_n)} = |A_j^{(k_1 \dots k_n)}|$.

Подставляя значения $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$ $(k_1 + \dots + k_n = 1)$ в (3.74), считая при этом $k_1 + \dots + k_n = 2$, определим $u_j^{(k_1 \dots k_n)} (k_1 + \dots + k_n = 2)$ из уравнений

$$u_1^{(k_1 \dots k_n)} = B_1 \left[\alpha_1^{(k_1 \dots k_n)} + \rho_1^{(k_1 \dots k_n)} \right]$$

$$u_j^{(k_1 \dots k_n)} = B_j \left[|\sigma_{j-1}| u_{j-1}^{(k_1 \dots k_n)} + \alpha_j^{(k_1 \dots k_n)} + \rho_j^{(k_1 \dots k_n)} \right] \qquad (j = 2, \dots, p) \tag{3.75}$$

где $\rho_j^{(k_1 \dots k_n)}$ представляют линейные формы $L_j^{(k_1 \dots k_n)}$, если коэффициенты этих форм заменить их модулями, а выражения $a_j^{(k_1 \dots k_n)}$, для которых $k_1 + \dots + k_n = 1$, заменить на $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$ $(k_1 + \dots + k_n = 1)$.

Предположим, что все u_j для $k_1 + \dots + k_n \leqslant l - 1$ найдены. Тогда из уравнений вида (3.75), где $k_1 + \dots + k_n = l$, определим все $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$ для $k_1 + \dots + k_n = l$.

Давая l значения 1, 2, ..., мы последовательно определим все $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$u_1 = B_1 [P_1^{(0)}(\xi_i) + P_1^{(1)}(\xi_i, u_r)]$$

$$u_j = B_j [|\sigma_{j-1}| u_{j-1} + P_j^{(0)}(\xi_i) + P_j^{(1)}(\xi_i, u_r)] \tag{3.76}$$

где $P_j^{(0)}$, $P_j^{(1)}$ получены из $H_j^{(0)}$, $H_j^{(1)}$ соответственно в результате замены коэффициентов последних их модулями.

Представим решение системы (3.76) в виде

$$u_j = \sum u_j^{(k_1 \dots k_n)} \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} \tag{3.77}$$

Эти ряды будут абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|\xi_i|$. Легко убедиться, что коэффициенты $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$, определяемые формулами (3.75), будут не менее $|a_j^{(k_1 \dots k_n)}|$, т. е. будем иметь

$$u_j^{(k_1 \dots k_n)} \geqslant |a_j^{(k_1 \dots k_n)}| \qquad (k_1 + \dots + k_n \geqslant 1;\ j = 1, \dots, p)$$

Следовательно, ряды (3.73) будут также абсолютно сходящимися и представят решение системы (3.72).

Возвращаясь к переменным $x_1, \dots, x_n$, мы получим решения системы (3.69) $z_j = z_j(x_1, \dots, x_n)$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$.

§ 20. Случай периодического движения. Предположим теперь, что в системе (3.68) коэффициенты p_{sk} и g_{ji} — постоянные величины, а коэффициентами разложения функций X_s и Z_j являются периодические функции t с общим вещественным периодом 2π.

Если вещественные части корней уравнения $|p_{sk} - \sigma_{sk}\varkappa| = 0$ не равны нулю и имеют один и тот же знак и между этими корнями и корнями уравнения $|g_{ji} - \sigma_{ji}\nu| = 0$ не существует соотношений

$$\nu_j = m_1 \varkappa_1 + \dots + m_n \varkappa_n \qquad (j = 1, \dots, p)$$

для всех целых положительных $m_1, \dots, m_n$, включая нуль, удовлетворяющих условию $\Sigma m_s > 0$, то можно доказать, руководствуясь соображениями {30}, существование голоморфных функций $z_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n, t)$, представляемых степенными рядами с периодическими по t коэффициентами с периодом 2π. Эти функции будут удовлетворять системе уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial z_j}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial z_j}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s)=g_{j1}z_1+\ldots+g_{jp}z_p+ \tag{3.78}$$
$$+Z_j(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_p) \qquad (j=1, \ldots, p)$$

и обращаться в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$ {60}.

Докажем теорему, аналогичную теореме § 19 в отношении системы (3.78).

Теорема. Если система уравнений (3.78) такова, что

1) уравнение $| p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa | = 0$ или не имеет кратных корней, или при наличии кратных корней каждому такому корню отвечает столько групп решений, какова его кратность;

2) между корнями уравнений $| p_{sk} - \sigma_{sk}\varkappa | = 0$ и $| g_{ji} - \sigma_{ji}\nu | = 0$ не существует зависимости

$$m_1\varkappa_1+\ldots+m_n\varkappa_n-\nu_j=iE$$

где E — любое целое число, включая нуль, а m_s — целые положительные числа, удовлетворяющие условию $\sum m_s \geqslant 1$;

3) функции $X_s[x_1, \ldots, x_n; z_1(x_1, \ldots, x_n, t), \ldots, z_p(x_1, \ldots, x_n, t), t] \equiv 0$, то существует единственная система голоморфных функций $z_j = z_j(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, t)$ с периодическими коэффициентами, удовлетворяющих системе (3.78) и обращающихся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Предположим, что система (3.68) приведена к виду (3.71), где Ξ_s, H_j ($s = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, p$) являются периодическими функциями t с периодом 2π.

Рассмотрим систему функций $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$, удовлетворяющих системе уравнений с частными производными

$$\begin{gathered}\frac{\partial \eta_1}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s}\varkappa_s\xi_s=\nu_1\eta_1+H_1^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)+\\ +H_1^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_p, t)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_1}{\partial \xi_s}\Xi_s\\ \frac{\partial \eta_j}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s}\varkappa_s\xi_s=\nu_j\eta_j+\sigma_{j-1}\eta_{j-1}+H_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)+\\ +H_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_p, t)-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_s}\Xi_s \qquad (j=2, 3, \ldots, p)\end{gathered} \tag{3.79}$$

где

$$\begin{gathered}H_j^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)=\sum A_j^{(k_1\cdots k_n)}(t)\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}\\ H_j^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_p, t)=\sum A_j^{(k_1\cdots k_n, n_1\cdots n_p)}(t)\xi_1^{k_1}\ldots\\ \ldots\xi_n^{k_n}\eta_1^{n_1}\ldots\eta_p^{n_p}\end{gathered} \tag{3.80}$$

$H^{(1)}$ ($j = 1, \ldots, p$) обращаются в нуль при $\eta_1 = \ldots = \eta_p = 0$.

Представим решения системы (3.79) в виде

$$\eta_j=\sum a_j^{(k_1\cdots k_n)}(t)\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n} \tag{3.81}$$

где $a_j^{(k_1\cdots k_n)}(t)$ — периодические функции t с периодом 2π, подлежащие определению.

Отметим, что в результате подстановки η_j (3.81) в выражения Ξ_s последние обращаются тождественно в нуль.

Подставляя значения η_j (3.81) в систему (3.79) и отождествляя коэффициенты при одинаковых выражениях $\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n}$, получим линейные дифференциальные уравнения для определения коэффициентов $a_j{}^*$

$$a_1'{}^* + h_1{}^* a_1{}^* = A_1{}^* + P_1{}^*, \quad a_j'{}^* + h_j{}^* a_j{}^* = \sigma_{j-1} a_{j-1}^* + A_j{}^* + P_j{}^* \qquad (3.82)$$

$$(k_1 + \ldots + k_n = l; \; l = 1, 2, \ldots) \qquad (j = 2, \ldots, p)$$

где знак * заменяет индекс $(k_1 \ldots k_n)$, а $h_j{}^* = k_1\varkappa_1 + k_2\varkappa_2 + \ldots + k_n\varkappa_n - \nu_j$.

Выражения $P_j{}^*$ будут представлять многочлены от коэффициентов $A_j{}^{(k_1 \ldots k_n,\, n_1 \ldots n_p)}(t)$ и различных степеней тех $a_j{}^*$, у которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$.

Руководствуясь соображениями Ляпунова, изложенными в {35, 42}, докажем сходимость рядов (3.81).

Определим функции $a_j{}^*$ для всех значений $k_1, \ldots, k_n$, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_n = l$, считая, что все $a_j{}^*$, у которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$ известны, в виде

$$a_1{}^* = \frac{e^{h_1{}^* t}}{e^{-2\pi h_1{}^*} - 1} \int\limits_t^{t+2\pi} e^{-h_1{}^* t} (A_1{}^* + P_1{}^*)\, dt$$

$$a_j{}^* = \frac{e^{h_j{}^* t}}{e^{-2\pi h_j{}^*} - 1} \int\limits_t^{t+2\pi} e^{-h_j{}^* t} (\sigma_{j-1} a_{j-1}{}^* + A_j{}^* + P_j{}^*)\, dt \qquad (3.83)$$

$$(j = 2, \ldots, p)$$

Пусть B_j есть наибольшие значения величин $1/|k_1\varkappa_1 + \ldots + k_n\varkappa_n - \nu_j|$, для всех значений k_s, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_n \geqslant 1$, а величины $u_1{}^*, u_2{}^*, \ldots, u_p{}^*$ представляют наибольшие значения модулей тех $a_1{}^*, \ldots, a_p{}^*$, для которых $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$. Обозначим наибольшие значения модулей $A_j{}^*(t)$ через $\alpha_j{}^*$, а через $\rho_j{}^*$ наибольшие значения модулей выражений $P_j{}^*$, если в последних заменить значения $A_j{}^{(k_1 \ldots k_n,\, n_1 \ldots n_p)}(t)$ наибольшими значениями их модулей, а $a_j{}^*$ для $k_1 + \ldots + k_n \leqslant l - 1$ на $u_j{}^*$.

Из выражений (3.83) получим наибольшие значения модулей тех $a_j{}^*$, у которых $k_1 + \ldots + k_n = l$, в виде

$$u_1{}^* = B_1(\alpha_1{}^* + \rho_1{}^*), \qquad u_j{}^* = B_j(|\sigma_{j-1}| u_{j-1}{}^* + \alpha_j{}^* + \rho_j{}^*) \qquad (3.84)$$

$$(j = 2, \ldots, p)$$

Очевидно, что

$$u_j{}^{(k_1 \cdots k_n)} \geqslant |a_j{}^{(k_1 \cdots k_n)}| \qquad (k_1 + \ldots + k_n = l; \; j = 1, \ldots, p) \qquad (3.85)$$

Давая l значения $1, 2, 3, \ldots$, мы определим наибольшие значения модулей всех коэффициентов, входящих в ряды (3.81).

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\zeta_1 = B_1 [F_1{}^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n) + F_1{}^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)]$$

$$\zeta_j = B_j [|\sigma_{j-1}| \zeta_{j-1} + F_j{}^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n) + F_j{}^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)] \qquad (3.86)$$

$$(j = 2, \ldots, p)$$

где $F_j{}^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $F_j{}^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ $(j = 1, \ldots, p)$ получены из $H_j{}^{(0)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, t)$ и $H_j{}^{(1)}(\xi_1, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p, t)$ заменой $A_j{}^{(k_1 \ldots k_n)}(t)$ и $A_j{}^{(k_1 \ldots k_n,\, n_1 \ldots n_p)}(t)$ наибольшими значениями их модулей.

Решение этих уравнений представим в виде рядов

$$\zeta_j = \sum u_j^{(k_1 \dots k_n)} \xi_1^{k_1} \dots \xi_n^{k_n} \qquad (j=1,\dots, p) \quad (k_1+\dots+k_n \geqslant 1) \tag{3.87}$$

абсолютно сходящихся по крайней мере для значений $|\xi_i|$ достаточно малых.

Легко обнаружить, что коэффициенты $u_j^{(k_1 \dots k_n)}$ определятся по формулам (3.84).

На основании условий (3.85) можно утверждать, что ряды (3.81) являются абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|\xi_i|$.

§ 21. **Обобщение теоремы Брио и Буке.** В дальнейших исследованиях нам будет необходима следующая теорема.

Теорема[1]. Пусть дана система дифференциальных уравнений вида

$$x \frac{dy_i}{dx} = Y_i(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (i=1,\dots, n) \tag{3.88}$$

где Y_i — голоморфные функции переменных x, y_1, ..., y_n, обращающиеся в нуль, когда все переменные делаются нулями.

Тогда, если уравнение

$$|p_{ij} - \delta_{ij}\varkappa| = 0, \qquad p_{ij} = \left.\frac{\partial Y_i}{\partial y_j}\right|_{x=y_1=\dots=y_n=0}$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i=j, \qquad \delta_{ij}=0 \text{ при } i \neq j \qquad (i, j=1, \dots, n).$$

не имеет целых положительных корней, то всегда найдется одна определенная система голоморфных функций y_1, ..., y_n переменной x, удовлетворяющих системе (3.88) и обращающихся в нуль при $x = 0$.

Доказательство. Построим для величин y_1, ..., y_n ряды, формально удовлетворяющие системе уравнений (3.88)

$$y_i = c_1^{(i)} x + c_2^{(i)} x^2 + \dots \qquad (i=1,\dots, n) \tag{3.89}$$

Коэффициенты $c_k^{(i)}$ однозначно определяются в результате подстановки этих рядов в систему (3.88) из уравнений

$$k c_k^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} p_{ij} c_k^{(j)} = P_k^{(i)} \tag{3.90}$$

где $P_k^{(i)}$ — известные полиномы от коэффициентов разложения функций Y_j и коэффициентов $c^{(j)}_1$, ..., $c^{(j)}_{k-1}$ ($j = 1$, ..., n).

Из уравнений (3.90) находим

$$c_k^{(i)} = \frac{1}{D(k)} [D_1^{(i)}(k) P_k^{(1)} + D_2^{(i)}(k) P_k^{(2)} + \dots + D_n^{(i)}(k) P_k^{(n)}]$$

Здесь определитель $D(k) = |\delta_{ij}k - p_{ij}|_1^n$ в силу условий теоремы не равен нулю. $D^{(i)}_j(k)$ — алгебраические дополнения элементов $(\delta_{ij}k - p_{ij})$ определителя $D(k)$.

Отношения $D^{(i)}_j(k)/D(k)$ стремятся к нулю, когда k, оставаясь целым положительным числом, стремится к бесконечности.

Возьмем n^2 чисел $\mu^{(i)}_j$, удовлетворяющих неравенствам

$$\mu_j^{(i)} > |D_j^{(i)}(k)/D(k)| \qquad (i, j=1,\dots, n)$$

[1] Эта теорема впервые доказана автором в работе [7].

для всех целых положительных чисел k, и рассмотрим систему уравнений

$$g_{i1} y_1 + g_{i2} y_2 + \ldots + g_{in} y_n = Y_i^* \tag{3.91}$$

где Y_i^* получены из функций Y_i заменой коэффициентов в последних их модулями, а коэффициенты g_{ij} таковы, что выполняются неравенства $(-1)^{i+j} \Delta_j^{(i)} / \Delta \geqslant \mu_j^{(i)}$ в предположении, что $\Delta = |g_{ij}|_1^n \neq 0$, а $\Delta_j^{(i)}$ — миноры этого определителя для элементов g_{ji}.

На основании теоремы существования неявных функций можно утверждать, что система уравнений (3.91) однозначно определит n функций $y_i = y_i(x)$, голоморфных в области начала координат и обращающихся в нуль при $x = 0$. Эти функции можно представить так:

$$y_i = C_1^{(i)} x + C_2^{(i)} x^2 + \ldots \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.92}$$

Нетрудно заметить, что коэффициенты этих сходящихся рядов удовлетворяют неравенствам

$$C_k^{(i)} \geqslant |c_k^{(i)}|$$

Следовательно, ряды (3.89) будут также сходящимися и представят искомую систему голоморфных функций.

Если определитель $D(k)$ равен нулю при целом положительном k и при этом полиномы, стоящие в правых частях уравнений (3.90), будут отличны от нуля, то голоморфного интеграла, представляемого рядами (3.89), не существует. В этом случае систему уравнений (3.88) можно удовлетворить функциями, голоморфными в отношении x и $x \ln x$, причем эти функции будут также обращаться в нуль при $x = 0$.

Если окажется, что указанные полиномы равны нулю при $D(k) = 0$, то систему уравнений (3.88) можно удовлетворить системой голоморфных в отношении x функций, обращающихся в нуль при $x = 0$, при этом определение этих функций будет неоднозначно, так как в их разложения будут входить произвольные постоянные.

В случае $n = 1$ отсюда вытекает известная теорема Брио и Буке.

§ 22. Основная теорема об устойчивости неустановившихся движений в критических случаях. В § 14 было показано, что от исследования устойчивости установившегося движения, описываемого системой $(m + 2q + p)$-го порядка с $m + 2q$ критическими переменными, в случаях несущественно особенных всегда можно перейти к исследованию системы $(m + 2q)$-го порядка и по этой системе судить об асимптотической устойчивости или неустойчивости невозмущенного движения всей системы.

Эта же теорема, как следует из дальнейших рассуждений, имеет место и для периодических движений.

В данном параграфе результаты по сведению распространяются на системы уравнений вида

$$\begin{gathered} y_j^{\cdot} = q_{j1} y_1 + \ldots + q_{jp} y_p + Y_j(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p; t) \\ x_s^{\cdot} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p; t) \\ (j = 1, \ldots, p;\ s = 1, \ldots, n) \end{gathered} \tag{3.93}$$

В этой системе q_{ji} и p_{sk} — непрерывные ограниченные функции t в интервале $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Функции Y_j и X_s имеют структуру

$$Y_j = Y_{j0}^{(m_j)}(y_1, \ldots, y_p; t) + \ldots + Y_{j0}^{(N)}(y_1, \ldots, y_p; t) + \ldots +$$
$$+ \sum Q_j^{(k_1, \ldots, k_p)}(x_1, \ldots, x_n; t) y_1^{k_1} \ldots y_p^{k_p} + Y_{j1}$$

$$X_s = X_{s0}^{(n_s)}(y_1, \ldots, y_p; t) + \ldots + \sum P_s^{(k_1, \ldots, k_p)}(x_1, \ldots, x_n; t) y_1^{k_1} \ldots y_p^{k_p} + X_{s1}$$

где $Y_{j0}^{(l)}$ и $X_{s0}^{(l)}$ — формы l-й степени от $y_1, \ldots, y_p$, $Q_j^{(k_1, \ldots, k_p)}, P_s^{(k_1, \ldots, k_p)}$ — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$. Коэффициенты этих форм являются ограниченными и непрерывными функциями t.

Функции Y_{j1} и X_{s1} не содержат в своих разложениях линейных членов в отношении $x_1, \ldots, x_n$ и обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

Будем предполагать, что для первой группы уравнений (3.93) вопрос об устойчивости не решается первым приближением, а уравнения

$$x_s^{\cdot} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n$$

допускают существование знакоопределенной квадратичной формы, удовлетворяющей теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости.

Основываясь на теореме Перрона [9], можно утверждать, что, не уменьшая общности задачи, можно считать p_{sk} и q_{ji} равными нулю, если $k > s$ и $i > j$, т. е. форма линейных частей треугольная.

Докажем, что, не изменяя задачи об устойчивости, систему уравнений (3.93) можно преобразовать так, чтобы выполнялись условия

$$n_s \geqslant N + 1 \quad (A), \qquad k_1 + \ldots + k_p \geqslant N + 1 \quad (B)$$

если только модуль выражения

$$\left|\left[\exp\int_0^t\left(p_{ss} - \sum_{j=1}^{p} k_j q_{jj}\right) dt\right]\int_0^t \exp\left[-\int_0^t\left(p_{ss} - \sum_{j=1}^{p} k_j q_{jj}\right) dt\right] dt\right| < M \tag{3.94}$$

при любых $t \geqslant 0$ и при любых целых $k_1, \ldots, k_p$, удовлетворяющих условию $k_1 + \ldots + k_p \leqslant N$.

Предположим, что все формы $X_s^{(n_s)}$, у которых $n_s \leqslant k - 1$, тождественно равны нулю.

Введем замену

$$x_s = \xi_s + u_s(y_1, \ldots, y_p;\ t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где u_s — формы k-й степени, подлежащие определению.

Если эти формы найти из уравнений

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \sum \frac{\partial u_s}{\partial y_j}(q_{j1} y_1 + \ldots + q_{jj} y_j) = p_{s1} u_1 + \ldots + p_{ss} u_s + \\ + X_s^{(k)}(y_1, \ldots, y_p;\ t) \tag{3.95}$$

то в преобразованной системе все функции, играющие роль функций $X_s^{(k)}$, обратятся тождественно в нуль.

Представим формы u_s в виде

$$u_s = \sum c_s^{(k_1, \ldots, k_p)}(t)\, y_1^{k_1} \ldots y_p^{k_p} \qquad (k_1 + \ldots + k_p = k)$$

Определение коэффициентов $c_s^{(k_1, \ldots, k_p)}(t)$ можно вести в следующем порядке.

Вначале определяются все коэффициенты $c_s^{(0, \ldots, 0, k)}$ из системы уравнений

$$c_s^{*\cdot} = p_{s1} c_1^* + \ldots + (p_{ss} - kq_{pp}) c_s^* + A_s^* \tag{3.96}$$

где A_s^* — соответствующий коэффициент формы

$$X_s^{(k)} = \sum A_s^{(k_1, \ldots, k_p)} y_1^{k_1} \ldots y_p^{k_p}$$

Затем определяются коэффициенты $c_s^{(0,\dots,0,1,k-1)}$ и т. д. Для определения коэффициентов $c_s^{(k_1,\dots,k_p)}$ при фиксированных $k_1, \dots, k_p$ получим уравнения

$$\dot{c}_s^{(k_1,\dots,k_p)} = p_{s1} c_1^{(k_1,\dots,k_p)} + \dots + \left[p_{ss} - \sum_{j=1}^{p} k_j q_{jj}\right] c_s^{(k_1,\dots,k_p)} + A_s^{(k_1,\dots,k_p)} \tag{3.97}$$

При условии (3.94) уравнения (3.96) и (3.97) определят коэффициенты $c_s^{(k_1,\dots,k_p)}$ $(k_1 + \dots + k_p = k)$ в виде непрерывных и ограниченных функций t.

Придавая k значения $k = 1, 2, \dots, N$, получим систему, для которой условие (A) выполняется.

Для того чтобы система (3.93) удовлетворяла условию (B), преобразуем ее, положив

$$y_j = \eta_j + \sum u_j^{(k_1,\dots,k_p)} (x_1, \dots, x_n;\ t)\, y_1^{k_1} \dots y_p^{k_p} \tag{3.98}$$

Предположим, что все линейные формы $Q_j^{(k_1,\dots,k_p)}$ тождественно равны нулю для $k_1 + \dots + k_p \leqslant k - 1$.

Полагая, что сумма, фигурирующая в (3.98), распространяется на все k_s, удовлетворяющие условию $k_1 + \dots + k_p = k$, определим формы $u_j^{(k_1,\dots,k_p)}$ таким образом, чтобы в преобразованной системе исчезли линейные формы, аналогичные $Q_j^{(k_1,\dots,k_p)}$ для $k_1 + \dots + k_p = k$.

Формы $u_j^{(k_1,\dots,k_p)}$ можно определять в следующем порядке. Вначале определяются формы $u_j^{(0,\dots,0,k)}$ из уравнений

$$\frac{\partial u_j^{(0,\dots,0,k)}}{\partial t} + k q_{pp} u_j^{(0,\dots,0,k)} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_j^{(0,\dots,0,k)}}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \dots + p_{ss} x_s) =$$
$$= q_{j1} u_1^{(0,\dots,0,k)} + \dots + q_{jj} u_j^{(0,\dots,0,k)} + Q_j^{(0,\dots,0,k)}$$

Затем определяются формы $u_j^{(0,\dots,0,1,k-1)}$ и т. д. Для определения форм $u_j^{(k_1,\dots,k_p)}$ получим уравнения

$$\frac{\partial u_j^{(k_1,\dots,k_p)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{p} k_j q_{jj} u_j^{(k_1,\dots,k_p)} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial u_j^{(k_1,\dots,k_p)}}{\partial x_s} (p_{s1} x_1 + \dots + p_{ss} x_s) =$$
$$= q_{j1} u_1^{(k_1,\dots,k_p)} + \dots + q_{jj} u_j^{(k_1,\dots,k_p)} + Q_j^{(k_1,\dots,k_p)} \tag{3.99}$$

Представляя формы $u_j^{(k,\dots,k_p)}$ в виде $u_j^* = c_1^* x_1 + \dots + c_n^* x_n$ и подставляя эти выражения в (3.99), получим уравнения для определения коэффициентов c_s^*. Эти уравнения при условии (3.94) представят ограниченные и непрерывные решения для c_s^*.

Давая числу k значения от 0 до N, получим в результате N-кратного преобразования новую систему, удовлетворяющую условию (B).

Относительно преобразованной системы справедлива теорема, аналогичная сформулированной в § 14.

Теорема. Если укороченная система

$$y_j^{\cdot} = q_{j1} y_1 + \dots + q_{jj} y_j + Y_j^{(m_j)} (y_1, \dots, y_p;\ t) + \dots + Y_j^{(N)} (y_1, \dots, y_p;\ t) \tag{3.100}$$

допускает существование функций Ляпунова или Четаева, причем знак производных этих функций определяется формами не выше N-го порядка независимо от форм более высокого порядка, а уравнения

$$x_s^{\cdot} = p_{s1} x_1 + \dots + p_{ss} x_s \tag{3.101}$$

допускают существование знакоопределенной квадратичной формы, удовлетворяющей теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, то функции Ляпунова или Четаева для полной системы определяются в виде суммы

$$V = V_1(y_1, \dots, y_p; t) + V_2(x_1, \dots, x_n; t)$$

где V_1 — функция Ляпунова или Четаева, отвечающая системе уравнений (3.100), а V_2 — функция Ляпунова для системы (3.101).

Эта теорема является обобщением результатов работы [7] для систем с постоянными и периодическими коэффициентами на системы с коэффициентами, являющимися произвольными ограниченными и непрерывными функциями времени.

ГЛАВА IV

ДВА НУЛЕВЫХ КОРНЯ С ДВУМЯ ГРУППАМИ РЕШЕНИЙ

§ 23. Предварительные преобразования. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения $(n+2)$-го порядка

$$\frac{dy_s}{dt}=g_{s1}y_1+\ldots+g_{s,\,n+2}\,y_{n+2}+Y(y_1,\ldots,\;y_{n+2})\qquad (s=1,\ldots,\;n+2)\quad(4.1)$$

где g_{sk} — постоянные величины, а $Y_s(y_1,\ldots,y_{n+2})$ — голоморфные функции в окрестности точки $y_1=\ldots=y_{n+2}=0$, разложения которых не содержат линейных членов.

Предположим, что определяющее уравнение

$$\|g_{sk}-\delta_{sk}\varkappa\|=0\qquad(4.2)$$

имеет два нулевых корня.

В главе II мы предполагали, что по крайней мере один из миноров первого порядка определителя $|g_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ отличен от нуля при $\varkappa=0$. В этом случае система уравнений (4.1) приводилась к виду (2.1).

Если все миноры первого порядка определителя $|g_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ обращаются в нуль при $\varkappa=0$, то всегда найдутся две линейные формы с постоянными действительными коэффициентами

$$\begin{aligned}x=A_1y_1+A_2y_2+\ldots+A_{n+1}y_{n+1}+A_{n+2}y_{n+2},\qquad y=B_1y_1+\\+B_2y_2+\ldots+B_{n+1}y_{n+1}+B_{n+2}y_{n+2}\end{aligned}\qquad(4.3)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{dx}{dt}=X_1^*(y_1,\ldots,\;y_{n+2}),\qquad \frac{dy}{dt}=Y_1^*(y_1,\ldots,\;y_{n+2})\qquad(4.4)$$

где X_1^* и Y_1^* — голоморфные функции в окрестности нулевой точки, не содержащие линейных членов.

Предположим, что уравнения (4.3) разрешимы относительно y_{n+1} и y_{n+2}. Тогда, принимая за новые переменные величины x, y, y_1, ..., y_n и подставляя в первые n уравнений и в уравнения (4.4) значения y_{n+1} и y_{n+2}, выраженные через x, y, y_1, ..., y_n, получим новую систему следующего вида:

$$\frac{dx}{dt}=X^*(x,\;y,\;y_1,\ldots,\;y_n),\qquad \frac{dy}{dt}=Y^*(x,\;y,\;y_1,\ldots,\;y_n)$$

$$\frac{dy_s}{dt}=p_{s1}y_1+\ldots+p_{sn}y_n+p_sx+g_sy+Y_s^*(x,\;y,\;y_1,\ldots,\;y_n)\qquad(4.5)$$

$$(s=1,\ldots,\;n)$$

где p_{sk}, p_s, g_s — вещественные постоянные, а X^*, Y^* и Y_s^* — голоморфные функции прежней структуры.

Кроме того, уравнение $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ имеет корни только с отрицательными вещественными частями. Заменой

$$x_s = y_s + C_s x + D_s y \qquad (s=1,\dots, n)$$

систему уравнений (4.5) всегда можно преобразовать к виду

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y, x_1, \dots, x_n), \qquad \frac{dy}{dt} = Y(x, y, x_1, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y, x_1, \dots, x_n) \qquad (s=1,\dots, n) \tag{4.6}$$

если постоянные C_s и D_s определить из уравнений

$$p_{s1} C_1 + p_{s2} C_2 + \dots + p_{sn} C_n - p_s = 0$$

$$p_{s1} D_1 + p_{s2} D_2 + \dots + p_{sn} D_n - g_s = 0 \qquad (s=1,\dots, n)$$

Такое определение чисел C_s и D_s всегда возможно.

Представим правые части системы (4.6) в виде

$$X(x, y, x_i) = X_0(x, y) + X_{01}(x, y, x_i), \qquad Y(x, y, x_i) = $$
$$= Y_0(x, y) + Y_{01}(x, y, x_i)$$

$$X_s(x, y, x_i) = X_{s0}(x, y) + X_{s1}(x, y, x_i) \qquad (s, i=1,\dots, n) \tag{4.7}$$

Функции X_{01}, Y_{01}, X_{s1} обращаются в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$, а X_0, Y_0 и X_{s0} представляются рядами

$$X_0(x, y) = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} X_0^{(l)}(x, y), \qquad Y_0(x, y) = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Y_0^{(l)}(x, y)$$

$$X_{s0} = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} X_{s0}^{(l)}(x, y)$$

где $X_0^{(l)}$, $X_{s0}^{(l)}$ и $Y_0^{(l)}$ — формы l-й степени от x, y.

Преобразуем систему (4.6), положив

$$x_s = y_s + u_s(x, y) \qquad (s=1,\dots, n) \tag{4.8}$$

Переменные y_s будут удовлетворять системе уравнений

$$\dot{y_s} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_{s0}(x, y) + Y_{s1}(x, y, y_i) \qquad (s=1,\dots, n) \tag{4.9}$$

в которой

$$Y_{s0}(x, y) = -\frac{\partial u_s}{\partial x} X(x, y, u_i) - \frac{\partial u_s}{\partial y} Y(x, y, u_i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, y, u_i) \qquad (s, i=1,\dots, n) \tag{4.10}$$

Рассмотрим уравнения

$$Y_{s0} = 0 \qquad (s=1,\dots, n)$$

Эти уравнения можно формально удовлетворить степенными рядами $u_s(x, y)$ (см. прим. к теореме [30]). Ряды $u_s(x, y)$, как правило, будут расходящимися.

В исследовании поставленной задачи мы должны различать два возможных случая:

1. Результат замены в выражениях $X(x, y, x_s)$ и $Y(x, y, x_s)$ переменных x_s на $u_s(x, y)$ приводит к тождествам

$$X[x, y, u_s(x, y)] = Y[x, y, u_s(x, y)] \equiv 0 \qquad (4.11)$$

2. В результате этой замены, по крайней мере одна из функций $X[x, y, u_s(x, y)]$ или $Y[x, y, u_s(x, y)]$, не обращается тождественно в нуль (общий случай).

§ 24. Существенно особенный случай. Рассмотрим случай, характеризуемый тождествами (4.11). Этот случай относится к категории существенно особенных. Легко убедиться, что ряды $u_s(x, y)$ при условии (4.11) будут абсолютно сходящимися, по крайней мере для достаточно малых значений $|x|$ и $|y|$ (см. теорему § 19 главы III).

Система уравнений (4.6) в результате преобразования (4.8) будет такова, что правые части ее обращаются тождественно в нуль при $y_1 = \dots = y_n = 0$. Предположим, что система (4.6) преобразована к указанному виду и правые части ее тождественно равны нулю при $x_1 = \dots = x_n = 0$, т. е. в выражениях (4.7) функции $X_0 = Y_0 = X_{s0} \equiv 0$.

Представим функции X_{01}, Y_{01} и X_{s1} в виде

$$X_{01} = \sum_{k=1}^{n} x_k P_k(x, y) + X_0^{(2)}(x, y, x_1, \dots, x_n), \qquad Y_{01} = \sum_{k=1}^{n} x_k Q_k(x, y) + Y_0^{(2)}(x, y, x_1, \dots, x_n)$$

$$X_{s1} = \sum_{k=1}^{n} x_k P_{sk}(x, y) + X_s^{(2)}(x, y, x_1, \dots, x_n) \qquad (s = 1, \dots, n) \qquad (4.12)$$

где функции P_k, Q_k, P_{sk} от x, y обращаются в нуль при $x = y = 0$, а $X_0^{(2)}$, $Y_0^{(2)}$ и $X_s^{(2)}$ обращаются в нуль при $x_1 = \dots = x_n = 0$ и не содержат в своих разложениях линейных членов в отношении $x_1, \dots, x_n$.

Преобразуем систему (4.6), положив

$$x = \xi + \sum_{k=1}^{n} x_k u_k(x, y), \qquad y = \eta + \sum_{k=1}^{n} x_k v_k(x, y) \qquad (4.13)$$

считая u_k и v_k корнями системы уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} p_{ks} u_k &= P_s(x, y) - \sum_{k=1}^{n} P_{ks} u_k \\ \sum_{k=1}^{n} p_{ks} v_k &= Q_s(x, y) - \sum_{k=1}^{n} P_{ks} v_k \qquad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \qquad (4.14)$$

которая определит u_k и v_k в виде абсолютно сходящихся степенных рядов от x, y по крайней мере для $|x|$, $|y|$ достаточно малых (см. теорему § 19 главы III).

В результате преобразования получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \xi^{\cdot} &= \Xi(\xi, \eta, x_1, \dots, x_n), \qquad \eta^{\cdot} = H(\xi, \eta, x_1, \dots, x_n) \\ x_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k Q_{sk}(\xi, \eta) + X_{s1}^{(2)}(\xi, \eta, x_1, \dots, x_n) \\ &\qquad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \qquad (4.15)$$

В этой системе функции Ξ, H, $X_{s1}^{(2)}$ не содержат в своих разложениях линейных членов в отношении $x_1, \dots, x_n$, а $Q_{sk}(\xi, \eta)$ обращаются в нуль при $\xi = \eta = 0$.

Функцию Ляпунова, отвечающую системе уравнений (4.15), можно взять в виде

$$V=\xi^2+\eta^2+V_2(x_1,\dots,x_n)$$

где V_2 — определенно-положительная квадратичная форма от $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_2}{\partial x_s}(p_{s1}x_1+\dots+p_{sn}x_n)=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2$$

Производная V по t будет иметь вид

$$V'=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2+2\xi\Xi+2\eta H+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V_2}{\partial x_s}\left[\sum_{k=1}^{n}x_k Q_{sk}+X_{s1}^{(2)}\right]$$

Правую часть этого уравнения можно представить следующим образом:

$$V'=-\sum_{s=1}^{n}x_s^2+\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_s x_k\psi_{sk}(x,\ y,\ x_1,\dots,x_n) \tag{4.16}$$

где ψ_{sk} обращаются в нуль при $x=y=x_1=\dots=x_n=0$.

Из (4.16) следует, что V' является постоянно-отрицательной функцией от переменных $x, y, x_1, \dots, x_n$.

На основании теоремы Ляпунова {16} можно утверждать, что невозмущенное движение устойчиво.

§ 25. Общий случай. Приведение к системе второго порядка. Предположим, что тождества (4.11) не существует.

Пусть

$$\begin{aligned}X[x,\ y,\ u_s(x,\ y)]&=X^{(m)}(x,\ y)+X^{(m+1)}(x,\ y)+\dots\\ Y[x,\ y,\ u_s(x,\ y)]&=Y^{(m)}(x,\ y)+Y^{(m+1)}(x,\ y)+\dots\end{aligned} \tag{4.17}$$

Определим функции $u_s(x, y)$ таким образом, чтобы в выражениях $Y_{s0}(x, y)$ исчезли все формы от x, y, степень которых менее $m+N$.

Для этого в рядах $u_s(x, y)$ достаточно взять сумму форм до $(m+N)$-го порядка включительно. Обозначая совокупность этих форм через $v_s(x, y)$ и преобразуя систему (4.6) по формулам

$$x_s=y_s+v_s(x,\ y)\qquad (s=1,\dots,n)$$

получим новую систему вида

$$\begin{aligned}x^{\cdot}&=X^{(m)}(x,\ y)+X^{(m+1)}(x,\ y)+\dots+X^{*}(x,\ y,\ y_1,\dots,y_n)\\ y^{\cdot}&=Y^{(m)}(x,\ y)+Y^{(m+1)}(x,\ y)+\dots+Y^{*}(x,\ y,\ y_1,\dots,y_n)\\ y_s^{\cdot}&=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}y_k+Y_s^{(m+N)}(x,\ y)+Y_s^{(m+N+1)}(x,\ y)+\dots+\\ &\quad+Y_s(x,\ y,\ y_1,\dots,y_n)\qquad (s=1,\dots,n)\end{aligned} \tag{4.18}$$

На основании теоремы § 14 мы можем утверждать, что в случаях несущественно особенных задача об устойчивости нулевого решения системы (4.18) эквивалентна задаче об устойчивости нулевого решения системы второго порядка, которую мы получим, полагая в первых двух уравнениях системы (4.18) $y_1=\dots=y_n=0$.

§ 26. Теорема о неустойчивости по формам m-го порядка. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$x^{\cdot}=X^{(m)}(x,\ y)+X^{(m+1)}(x,\ y)+\ldots,\qquad y^{\cdot}=Y^{(m)}(x,\ y)+$$
$$+Y^{(m+1)}(x,\ y)+\ldots \tag{4.19}$$

где

$$\begin{aligned} X^{(l)}(x,\ y)&=a_0^{(l)}x^l+a_1^{(l)}x^{l-1}y+\ldots+a_l^{(l)}y^l\\ Y^{(l)}(x,\ y)&=b_0^{(l)}x^l+b_1^{(l)}x^{l-1}y+\ldots+b_l^{(l)}y^l \qquad (l=m,\ m+1,\ldots)\end{aligned} \tag{4.20}$$

Исследование начнем с простейшего случая, когда вопрос об устойчивости решается формами m-го порядка независимо от форм более высокого порядка. Этот случай был полностью исследован в работах [6,10].

Рассмотрим вначале частный случай. Предположим, что в системе (4.20) коэффициент $b_0^{(m)}=0$. Система (4.19) представится тогда в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot}&=a_0^{(m)}x^m+a_1^{(m)}x^{m-1}y+\ldots+a_m^{(m)}y^m+X^{(m+1)}(x,\ y)+\ldots\\ y^{\cdot}&=b_1^{(m)}x^{m-1}y+\ldots+b_m^{(m)}y^m+Y^{(m+1)}(x,\ y)+\ldots\end{aligned} \tag{4.21}$$

Докажем, что при $a_0^{(m)}>0$ невозмущенное движение неустойчиво. Возьмем функцию

$$V=x^2+y^2$$

Тогда

$$V'=2x\,(a_0^{(m)}x^m+a_1^{(m)}x^{m-1}y+\ldots+a_m^{(m)}y^m+\ldots)+$$
$$+2y\,(b_1^{(m)}x^{m-1}y+\ldots+b_m^{(m)}y^m+\ldots)$$

Рассмотрим область D

$$\varepsilon^2x^2-y^2>0,\quad x>0,$$

где ε — малая величина.

В области D будем иметь $VV'>0$. Выберем функцию

$$W=x^{2k}-y^2,\quad k>1$$

Очевидно, что область $W>0$ заключена в области $VV'>0$. Производная dW/dt будет иметь вид

$$W'=2kx^{2k-1}\,(a_0^{(m)}x^m+\ldots+a_m^{(m)}y^m+\ldots)-2y\,(b_1^{(m)}x^{m-1}y+\ldots+$$
$$+b_m^{(m)}y^m+\ldots)$$

На границе области $W>0$, где $W=0$, знак W' будет определяться совокупностью членов $2ka_0^{(m)}x^{2k+m-1}-2b_1^{(m)}x^{2k+m-1}$. Выберем число k из условия $ka_0^{(m)}\neq b_1^{(m)}$. Тогда знак W' на границе области $W>0$ будет определяться знаком выражения $ka_0^{(m)}-b_1^{(m)}$ по крайней мере для достаточно малого значения $|x|$. Отсюда следует, что функции V и W удовлетворяют условиям теоремы Четаева о неустойчивости невозмущенного движения.

Пусть теперь $b_0^{(m)}\neq 0$. Преобразуем систему (4.19), положив

$$x=\lambda_1x_1+\lambda_2y_1,\qquad y=\mu_1x_1+\mu_2y_1 \tag{4.22}$$

Переменные x_1 и y_1 будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot}\,\Delta&=A_0^{(m)}x_1^m+A_1^{(m)}x_1^{m-1}y_1+\ldots+A_m^{(m)}y_1^m+X_1^{(m+1)}(x_1,\ y_1)+\ldots\\ y_1^{\cdot}\,\Delta&=B_0^{(m)}x_1^m+B_1^{(m)}x_1^{m-1}y_1+\ldots+B_m^{(m)}y_1^m+Y_1^{(m+1)}(x_1,\ y_1)+\ldots\end{aligned} \tag{4.23}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}$$

Коэффициенты $A_j^{(l)}$ и $B_j^{(l)}$ ($j = 0, 1, \ldots, m$), ($l = m, m + 1, \ldots$) определятся через коэффициенты $a_j^{(l)}$ и $b_j^{(l)}$, а также через $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$. В частности, коэффициенты

$$B_0^{(m)} = \lambda_1 Y^{(m)}(\lambda_1, \mu_1) - \mu_1 X^{(m)}(\lambda_1, \mu_1), \qquad A_0^{(m)} = \mu_2 X^{(m)}(\lambda_1, \mu_1) - \\ - \lambda_2 Y^{(m)}(\lambda_1, \mu_1) \tag{4.24}$$

Введем в рассмотрение функции $F_0(x, y)$ и $R_0(x, y)$, определяемые выражениями

$$F_0(x, y) = xY^{(m)}(x, y) - yX^{(m)}(x, y), \qquad R_0(x, y) = \\ = xX^{(m)}(x, y) + yY^{(m)}(x, y)$$

Эти функции играют весьма существенную роль в исследовании вопроса об устойчивости движения, характеризуемого системой (4.21).

Предположим, что уравнение $F_0(x, y) = 0$ имеет вещественные решения, отличные от $x = y = 0$. Полагая $y = \varkappa x$, представим уравнение $F_0(x, y) = 0$ в виде

$$F_0(1, \varkappa) = b_0^{(m)} \varkappa^{m+1} + (b_1^{(m)} - a_0^{(m)}) \varkappa^m + \ldots + \\ + (b_m^{(m)} - a_{m-1}^{(m)}) \varkappa - a_m^{(m)} = 0 \tag{4.25}$$

Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ ($p \leqslant m + 1$) — вещественные корни этого уравнения. Докажем следующую теорему.

Теорема. Если система (4.21) такова, что уравнение $F_0(x, y) = 0$ имеет вещественные решения $y = \varkappa_j x$ ($j = 1, \ldots, p$) и если при этом выражение $L = X^{(m)}/x = Y^{(m)}/y$ можно сделать величиной положительной по крайней мере для одного из решений $y = \varkappa_j x$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Очевидно, что при $\mu_1 = \varkappa_j \lambda_1$ ($j = 1, \ldots, p$) коэффициент $B_0^{(m)} = 0$, а

$$A_0^{(m)} = \frac{X^{(m)}}{\lambda_1} \Delta = \frac{Y^{(m)}}{\mu_1} \Delta$$

Легко убедиться, что при $L > 0$ выражения

$$\frac{X^{(m)}(\lambda_1, \mu_1)}{\lambda_1} = \frac{Y^{(m)}(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_1} > 0$$

Следовательно, замена (4.22) преобразует исследуемую систему, в которой $b_0^{(m)} \neq 0$, к виду (4.23), если положить $B_0^{(m)} = 0$ и $A_0^{(m)}/\Delta > 0$.

Условия $B_0^{(m)} = 0$ и $A_0^{(m)}/\Delta > 0$, как мы убедились, обеспечивают неустойчивость невозмущенного движения.

Отметим, что условие $L = X^{(m)}/x = Y^{(m)}/y > 0$ на прямых $y = \varkappa_j x$ эквивалентно условию $R_0(x, y) > 0$ на тех же прямых.

§ 27. Случай знакоопределенности функции $F_0(x, y)$. Предположим, что уравнение $F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$ не имеет вещественных решений, кроме очевидного $x = y = 0$. Относительно системы уравнений (4.19) при этом предположении можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть правые части системы (4.19) таковы, что уравнение

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$$

не имеет вещественного решения, кроме очевидного $x = y = 0$.

Тогда вопрос об устойчивости невозмущенного движения решается знаком выражения

$$J=F_0(\cos\theta,\ \sin\theta)\int\limits_0^{2\pi}\frac{X^{(m)}(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+Y^{(m)}(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}{Y^{(m)}(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-X^{(m)}(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta}\,d\theta \qquad (4.26)$$

При $J<0$ движение асимптотически устойчиво, а при $J>0$— неустойчиво.

Действительно, преобразуем систему уравнений (4.19) с помощью подстановки $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

Переменные r и θ будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt}&=X\cos\theta+Y\sin\theta=r^mP_0+r^{m+1}P_1+\ldots\\ r\frac{d\theta}{dt}&=Y\cos\theta-X\sin\theta=r^mF_0+r^{m+1}F_1+\ldots\end{aligned} \qquad (4.27)$$

где

$$X=\sum_{l=m}^{\infty}X^{(l)}(x,y),\qquad Y=\sum_{l=m}^{\infty}Y^{(l)}(x,y)$$

а выражения P_ν и F_ν определяются равенствами

$$P_\nu(\cos\theta,\sin\theta)=X^{(m+\nu)}(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta+Y^{(m+\nu)}(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta$$

$$F_\nu(\cos\theta,\sin\theta)=Y^{(m+\nu)}(\cos\theta,\sin\theta)\cos\theta-X^{(m+\nu)}(\cos\theta,\sin\theta)\sin\theta$$

$$(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$$

Исключая t из уравнений (4.27), получим

$$\frac{dr}{d\theta}=rR_1+r^2R_2+\ldots \qquad (4.28)$$

где R_1, R_2, ... — рациональные функции от $\sin\theta$ и $\cos\theta$, знаменателями которых служат различные степени выражения

$$F_0=Y^{(m)}\cos\theta-X^{(m)}\sin\theta$$

не обращающегося в нуль ни при одном вещественном значении θ. Отметим, что $R_1=P_0/F_0$.

Рассмотрим сначала случай, когда

$$g=\int\limits_0^{2\pi}\frac{X^{(m)}\cos\theta+Y^{(m)}\sin\theta}{Y^{(m)}\cos\theta-X^{(m)}\sin\theta}\,d\theta\neq0$$

Из уравнения (4.28) следует, что за исключением очевидного решения $r=0$ все другие решения будут для достаточно малых r сохранять знак своего начального значения, а поэтому, не уменьшая общности задачи, переменную r можно считать положительной.

Преобразуем уравнение (4.28), положив

$$\rho=r\exp\left[\int\limits_0^{\theta}(g-R_1)\,d\theta\right]$$

где $\int\limits_0^{\theta}(g-R_1)d\theta$ представляет непрерывную периодическую функцию для всех вещественных значений θ.

Очевидно, что задача об устойчивости по отношению к переменной r эквивалентна той же задаче по отношению к переменной ρ.

Переменная ρ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d\rho}{d\theta}=g\rho+H_2\rho^2+\ldots \tag{4.29}$$

где H_2, ... — непрерывные периодические функции θ.

Функцию Ляпунова, отвечающую этому уравнению, можно взять в виде

$$V=\rho$$

Производная V' запишется следующим образом:

$$\frac{dV}{dt}=(g\rho+H_2\rho^2+\ldots)\exp\left[-(m-1)\int_0^\theta (g-R_1)d\theta\right]\rho^{m-1}\times$$
$$\times F_0(\cos\theta, \sin\theta)\left[1+\rho\frac{F_1}{F_0}\exp\left[-\int_0^\theta (g-R_1)\,d\theta\right]+\ldots\right]$$

Нетрудно видеть, что знак производной при достаточно малом ρ определяется членом $\rho^m gF_0(\cos\theta,\ \sin\theta)$.

Если условимся рассматривать значения $\rho>0$, то знак V' будет тот же, что и знак произведения gF_0. Функция V при этом будет определенно-положительной.

Следовательно, при $gF_0>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $gF_0<0$ асимптотически устойчиво.

Переходим к случаю, в котором

$$g=\int_0^{2\pi} R_1\,d\theta=0$$

Преобразуем уравнение (4.28), положив

$$r=\rho\exp\left[\int_0^\theta R_1\,d\theta\right]$$

В результате преобразования будем иметь

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\rho^2 H_2(\theta)+\rho^3 H_3(\theta)+\ldots \tag{4.30}$$

где H_2, H_3, ... — периодические функции θ.

Предполагая, что $\int_0^{2\pi} H_2 d\theta=g_1\neq 0$, вводим замену

$$\rho=\rho_1-\rho^2\int_0^\theta (H_2-g_1)\,d\theta$$

Уравнение (4.30) преобразуется тогда к виду

$$\frac{d\rho_1}{d\theta}=g_1\rho_1^2+H_3^*\rho_1^3+\ldots \tag{4.31}$$

где H_3^*, ... — новые периодические функции.

Уравнение (4.31) позволяет сделать заключение, что в случае $F_0g_1>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а в случае $F_0g_1<0$ асимптотически устойчиво.

Если $\int\limits_0^{2\pi} H_2 d\theta = 0$, то к уравнению необходимо применить преобразование переменной ρ_1 по формуле

$$\rho_1 = \rho_2 - \rho_1^3 \int\limits_0^{\theta} (H_3 - g_2)\, d\theta$$

считая, что $\int\limits_0^{2\pi} H_3 d\theta = g_2$.

В случае $g_2 \neq 0$, вопрос будет решаться, как и в предыдущем случае, знаком $F_0 g_2$. Если окажется, что $g_2 = 0$, то к уравнениям относительно ρ_2 необходимо применить преобразование, аналогичное предыдущему. Такого рода преобразование необходимо производить до тех пор, пока одно из чисел g_N окажется отличным от нуля, и тогда вопрос об устойчивости будет решаться знаком произведения $F_0 g_N$.

Тот же результат можно получить следующим образом.

Представим решение уравнения (4.29) в виде

$$\rho = c + c^2 u_2 + c^3 u_3 + \ldots$$

Тогда первая непериодическая функция u_N в ряду функций u_2, $u_3, \ldots$ будет иметь вид

$$u_N = g_N \theta + v$$

где v — периодическая функция θ.

Если теперь положить

$$\rho = z + z^2 u_2 + \ldots + z^N v$$

то переменная z, которая в вопросе устойчивости может играть роль ρ или r, будет удовлетворять уравнению

$$\frac{dz}{d\theta} = g_N z^N + Z z^{N+1} + \ldots \tag{4.32}$$

Функцию Ляпунова, отвечающую этому уравнению, можно определить равенством $V = z$.

Производная dV/dt будет иметь вид

$$V' = (g_N z^N + Z z^{N+1} + \ldots) \exp\left[-(m-1)\int\limits_0^{\theta} R_1\, d\theta\right] z^{m-1} F_0 (1 + zZ^* + \ldots)$$

Знак V' при достаточно малом положительном z будет определяться знаком выражения $g_N F_0(\cos\theta,\ \sin\theta)$.

Поэтому, если $g_N F_0 > 0$, невозмущенное движение неустойчиво, а если $g_N F_0 < 0$ — асимптотически устойчиво.

Может случиться, что как бы велико число N мы ни брали, все функции u_2, u_3, ... будут периодическими.

Если каким-либо образом нам удалось это доказать, то ряд

$$\rho = c + c^2 u_2 + c^3 u_3 + \ldots$$

при достаточно малом c будет сходящимся для всех вещественных значений θ и будет являться общим интегралом уравнения (4.30). На основании этого можно было бы заключить, что невозмущенное движение в этом существенно особенном случае устойчиво.

§ 28. Теорема об асимптотической устойчивости по формам *m*-го порядка. Все случаи, которые нам осталось исследовать в задаче двух нулевых корней с двумя группами решений, относятся к предположению, что уравнение

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$$

имеет вещественные решения, отличные от $x = y = 0$, и для всех этих вещественных решений выражение

$$L = X^{(m)}/x = Y^{(m)}/y$$

неположительно.

Докажем теорему.

Теорема. Если при всех вещественных решениях уравнения

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$$

отличных от очевидного $x = y = 0$, отношения $X^{(m)}/x = Y^{(m)}/y$ отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Преобразуем систему уравнений (4.19) к полярным координатам $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. В результате получим

$$\frac{dr}{dt} = r^m R_0 + r^{m+1} R_1 + \ldots, \qquad \frac{d\theta}{dt} = r^{m-1} F_0 + r^m F_1 + \ldots \tag{4.33}$$

где

$$R_0 = X^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Y^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

$$F_0 = Y^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - X^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

Если при всех вещественных значениях θ, удовлетворяющих условию $F_0 = 0$, выражение

$$L = \frac{X^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{Y^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)}{\sin\theta} \tag{4.34}$$

отрицательно, то R_0 для этих значений θ будет также отрицательно.

Действительно, из равенств (4.34) следует, что

$$X^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta = L\cos^2\theta, \qquad Y^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta = L\sin^2\theta$$

Следовательно,

$$R_0 = X^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Y^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin 0 = L < 0$$

Если окажется, что R_0 для любых действительных значений θ, не обращаясь в нуль, принимает только отрицательные значения, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво согласно первому уравнению системы (4.33).

Если же R_0 кроме отрицательных значений принимает и положительные значения, то в области $R_0 \geqslant 0$ будем иметь $F_0 \neq 0$. Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = r\exp\left[\int_0^\theta \psi(\theta)\, d\theta\right] \tag{4.35}$$

Тогда будем иметь

$$V' = r^m \exp\left[\int_0^\theta \psi(\theta)\, d\theta\right][R_0(\theta) + \psi(\theta) F_0(\theta)] + r^{m+1}[\ldots] + \ldots$$

где $\psi(\theta)$ — непрерывная и периодическая функция θ с периодом 2π.

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ — значения θ, для которых $F_0 = 0$ и $R_0 < 0$. В силу непрерывности функции R_0 можно утверждать, что неравенство $R_0 < 0$ существует в интервалах

$$(\theta_1 - \varepsilon_1, \theta_1 + \varepsilon_1), (\theta_2 - \varepsilon_2, \theta_2 + \varepsilon_2), \ldots, (\theta_k - \varepsilon_k, \theta_k + \varepsilon_k)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ — отличные от нуля положительные числа.

Выберем функцию $\psi(\theta)$ так, чтобы удовлетворялись условия

$$A)\ R_0(\theta) + \psi(\theta) F_0(\theta) < 0, \qquad B)\ \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = 0$$

Отметим, что неравенству (A) можно удовлетворить функцией $\psi(\theta)$, знак которой противоположен знаку функции $F_0(\theta)$ и $|\psi(\theta)| > \frac{R_0(\theta)}{|F_0(\theta)|}$ для тех значений θ, при которых $R_0(\theta) \geqslant 0$.

Для значений θ, удовлетворяющих условию $R_0 < 0$, функцию $\psi(\theta)$ можно положить равной нулю или считать ее достаточно малой величиной, удовлетворяющей неравенству (A).

Условию (B) легко удовлетворить, если $F_0(\theta)$ меняет знак в интервале $(0, 2\pi)$.

Функцию $\psi(\theta)$ в этом случае можно взять в виде $\psi = -N(\theta)F_0(\theta)$, предполагая, что $N(\theta)$ является непрерывной периодической функцией с периодом 2π, сохраняющей положительное значение для всех действительных θ и удовлетворяющей условиям

$$R_0 - N(\theta) F_0^2(\theta) < 0, \qquad \int_0^{2\pi} N(\theta) F_0(\theta)\, d\theta = 0$$

При таком выборе функции $\psi(\theta)$ ее знак для любых значений θ в интервале $(0, 2\pi)$ противоположен знаку функции $F_0(\theta)$.

Предположим теперь, что $F_0(\theta)$ кроме нулевых значений принимает значения лишь одного знака. Пусть $F_0(\theta) > 0$, а θ_1 — значение θ, при котором $F_0(\theta) = 0$.

Представим значение функции $F_0(\theta_1 \pm \varepsilon)$ в виде

$$F_0(\theta_1 \pm \varepsilon) = \varepsilon^{2\nu}(k_{2\nu} + \varepsilon k_{2\nu+1} + \ldots) \tag{4.36}$$

где $\nu \geqslant 1$, а коэффициенты $k_{2\nu+n}$ имеют вид

$$k_{2\nu+n} = (-1)^n \frac{1}{(2\nu+n)!} \left. \frac{d^{2\nu+n} F_0(\theta)}{d\theta^{2\nu+n}} \right|_{\theta=\theta_1}$$

В этом случае знак функции $\psi(\theta)$ нельзя считать противоположным знаку $F_0(\theta)$ для любых значений θ в интервале $(0, 2\pi)$, так как условие (B) для такого рода функций невыполнимо.

В случае $F_0(\theta) \geqslant 0$ условие (B) представляется в виде

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta < 0$$

Определим функцию $\psi(\theta)$ в интервалах $(0, \theta_1 - \varepsilon_1)$, $(\theta_1 + \varepsilon_1, 2\pi)$, считая $\varepsilon_1 < \varepsilon$, так, чтобы удовлетворялось неравенство (A). Тогда получим

$$\int_0^{\theta_1 - \varepsilon_1} \psi(\theta)\, d\theta + \int_{\theta_1+\varepsilon_1}^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = -S^2$$

Мы можем положить, не нарушая неравенства (A), что

$$\psi(0)=\psi(2\pi), \qquad \psi(\theta_1-\varepsilon_1)=\psi(\theta_1+\varepsilon_1)=0$$

Пусть h — значение функции $\psi(\theta_1)$. В интервале $(\theta_1-\varepsilon_1, \theta_1)$ функцию $\psi(\theta)$ определим уравнением $\psi=\frac{h}{\varepsilon_1}(\theta-\theta_1+\varepsilon_1)$, а в интервале $(\theta_1, \theta_1+\varepsilon_1)$ — уравнением $\psi=-\frac{h}{\varepsilon_1}(\theta-\theta_1-\varepsilon_1)$. Тогда

$$\int\limits_{\theta_1-\varepsilon_1}^{\theta_1+\varepsilon_1}\psi(\theta)\,d\theta=\int\limits_{\theta_1-\varepsilon_1}^{\theta_1}\frac{h}{\varepsilon_1}(\theta-\theta_1+\varepsilon_1)\,d\theta-\int\limits_{\theta_1}^{\theta_1+\varepsilon_1}\frac{h}{\varepsilon_1}(\theta-\theta_1-\varepsilon_1)\,d\theta=h\varepsilon_1$$

Определим h из равенства

$$h\varepsilon_1=S^2$$

При таком определении функции $\psi(\theta)$ условие (B) выполняется. Покажем, что неравенство (A) при найденной функции $\psi(\theta)$ не нарушается.

Обозначим через ρ наименьшее значение $|(R_0(\theta)|$ в интервале $(\theta_1-\varepsilon_1, \theta_1+\varepsilon_1)$. Тогда, принимая во внимание (4.36), получим

$$R_0+\psi F_0\leqslant-\rho+S^2\varepsilon^{2\nu-1}\,[\,|k_{2\nu}|+\varepsilon\,|k_{2\nu+1}|+\ldots]$$

Выбирая ε достаточно малым, мы будем иметь

$$R_0+\psi F_0<0$$

Функцию $\psi(\theta)$ в интервале $\pm\infty$ определим равенством

$$\psi(\theta)=\psi(2\pi+\theta)$$

При таком выборе $\psi(\theta)$ производная V' будет определенно-отрицательной. Следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

§ 29. Необходимые и достаточные условия устойчивости по формам m-го порядка. Нам осталось рассмотреть лишь тот случай, когда при вещественных решениях уравнения $F_0(x, y)=0$ форма $R_0(x, y)$, кроме отрицательных, принимает значения, равные нулю. Этот случай представляет большой интерес как с точки зрения общей теории дифференциальных уравнений, так и с точки зрения приложений к задачам механики. Исследование его сопряжено с затруднениями более существенными, чем те, которые имели место при исследовании рассмотренных нами ранее критических случаев.

Докажем, что в этом случае задача об устойчивости формами m-го порядка не решается.

Если формы $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$ таковы, что уравнения

$$\begin{aligned}F_0(x, y)&=xY^{(m)}(x, y)-yX^{(m)}(x, y)=0\\ R_0(x, y)&=xX^{(m)}(x, y)+yY^{(m)}(x, y)=0\end{aligned}\tag{4.37}$$

имеют общие вещественные решения вида $a_jx+b_jy=0$, то формы $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$ также имеют эти решения.

Пусть

$$\begin{aligned}F_0&=\prod_{j=1}^{p}(a_jx+b_jy)^{\nu_j}F_{-k}(x, y)\\ R_0&=\prod_{j=1}^{p}(a_jx+b_jy)^{\nu_j}R_{-k}(x, y)\qquad (k=\nu_1+\ldots+\nu_p,\quad p\leqslant m+1)\end{aligned}\tag{4.38}$$

Тогда

$$\begin{aligned} X^{(m)}(x, y) &= \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} X^{(m-k)}(x, y) \\ Y^{(m)}(x, y) &= \prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} Y^{(m-k)}(x, y) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Рассмотрим систему уравнений вида

$$x^{\cdot} = (a_1 x + b_1 y)^{\nu_1} X^{(m-\nu_1)}(x, y), \qquad y^{\cdot} = (a_1 x + b_1 y)^{\nu_1} Y^{(m-\nu_1)}$$

Предположим, что нулевое решение этой системы устойчиво. Легко убедиться, что устойчивость может быть только неасимптотическая.

Полагая $y_1 = a_1 x + b_1 y$, получим

$$x^{\cdot} = y_1^{\nu_1} X_*^{(m-\nu_1)}(x, y_1), \qquad y^{\cdot}_1 = y_1^{\nu_1} Y_*^{(m-\nu_1)}(x, y_1) \tag{4.40}$$

Одновременно с этой системой будем рассматривать другую систему

$$x^{\cdot} = y_1^{\nu_1} X_*^{(m-\nu_1)}(x, y_1) + a x^{m+k}, \qquad y_1^{\cdot} = y_1^{\nu_1} Y_*^{(m-\nu_1)}(x, y_1)$$

отличающуюся от системы (4.40) членом $(m + k)$-го порядка.

Для этой системы прямая $y_1 = 0$ является интегральной. Легко убедиться, что движение изображающей точки по этой прямой зависит от знака коэффициента a и показателя степени $m + k$. Если $a > 0$, то движение будет неустойчиво, если же $a < 0$ и $m + k$ — нечетное, то движение устойчиво.

Отсюда заключаем, что формы m-го порядка вопроса об устойчивости не решают и устойчивое по формам m-го порядка движение будет неустойчиво или устойчиво в зависимости от вида членов более высокого порядка.

В заключение последних четырех параграфов сформулируем необходимые и достаточные условия устойчивости по формам m-го порядка для системы уравнений (4.19).

Если формы $X^{(m)}(x, y)$ и $Y^{(m)}(x, y)$ таковы, что уравнение

$$F_0 = xY^{(m)} - yX^{(m)} = 0$$

имеет вещественные решения

$$a_k x + b_k y = 0 \qquad (k = 1, \ldots, p), \ (p \leqslant m + 1)$$

и если хотя бы на одной прямой $a_k x + b_k y = 0$ форма $R_0 = xX^{(m)} + yY^{(m)}$ может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво; если же на всех этих прямых $R_0 < 0$, то движение асимптотически устойчиво.

Если уравнение $F_0 = 0$ не имеет вещественных решений, отличных от $x = y = 0$, вопрос об устойчивости решается знаком выражения

$$J = F_0(\cos\theta, \sin\theta) \int_0^{2\pi} \frac{R_0(\cos\theta, \sin\theta)}{F_0(\cos\theta, \sin\theta)} d\theta$$

Если $J < 0$, невозмущенное движение асимптотически устойчиво, если же $J > 0$ — неустойчиво.

Случай $J = 0$ и случай, когда при $F_0 = 0$ форма R_0, кроме отрицательных значений, может обращаться в нуль на одной или нескольких прямых, являются сомнительными.

Отметим, что случай $J = 0$ не представляет каких-либо особых затруднений и он полностью исследован в § 27. Случай $R_0 \leqslant 0$ при $F_0 = 0$, как уже указывалось, может в известных случаях привести к весьма серьезным затруднениям.

§ 30. Особенные прямые. Рассмотрим систему (4.19), предполагая, что формы m-го порядка имеют вид (4.39).

Прямые $a_j x + b_j y = 0$, на которых формы $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ обращаются в нуль, будем называть особенными прямыми.

Уравнения особенных прямых отыскиваются следующим образом.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} X^{(m)}(x, y) &= a_0^{(m)} x^m + a_1^{(m)} x^{m-1} y + \ldots + a_m^{(m)} y^m = 0 \\ Y^{(m)}(x, y) &= b_0^{(m)} x^m + b_1^{(m)} x^{m-1} y + \ldots + b_m^{(m)} y^m = 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Полагая $\varkappa = y/x$, получим

$$\begin{aligned} X^{(m)}(1, \varkappa) &= a_m^{(m)} \varkappa^m + a_{m-1}^{(m)} \varkappa^{m-1} + \ldots + a_1^{(m)} \varkappa + a_0^{(m)} = 0 \\ Y^{(m)}(1, \varkappa) &= b_m^{(m)} \varkappa^m + b_{m-1}^{(m)} \varkappa^{m-1} + \ldots + b_1^{(m)} \varkappa + b_0^{(m)} = 0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Каждое из этих уравнений имеет m корней.

Если уравнения (4.42) имеют общие вещественные корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ $\ldots, \varkappa_q$, $(q \leqslant m)$, то уравнения $y = \varkappa_j x (j = 1, \ldots, q)$ определят уравнения особенных прямых для форм m-го порядка.

Уравнение прямых $y - \varkappa_j x = 0$ удобнее записывать в виде $a_j x + b_j y = 0$. Тогда корню $\varkappa = \infty$ будет соответствовать $b_j = 0$.

Если все общие вещественные корни уравнений (4.42) простые, то, обозначая через k число таких корней, мы можем записать $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ в виде

$$X^{(m)} = \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) X^{(m-k)}(x, y)$$

$$Y^{(m)} = \prod_{j-1}^{k} (a_j x + b_j y) Y^{(m-k)}(x, y)$$

где $X^{(m-k)}$ и $Y^{(m-k)}$ — формы $(m-k)$-го порядка.

В случае $m = k$ выражения $X^{(0)}$ и $Y^{(0)}$ обращаются в вещественные постоянные. Формы F_0 и R_0 при $k < m$ примут вид

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) F_{-k}(x, y) \\ R_0(x, y) &= \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) R_{-k}(x, y) \end{aligned} \tag{4.43}$$

где

$$\begin{aligned} F_{-k}(x, y) &= x Y^{(m-k)}(x, y) - y X^{(m-k)}(x, y) \\ R_{-k}(x, y) &= x X^{(m-k)}(x, y) + y Y^{(m-k)}(x, y) \end{aligned} \tag{4.44}$$

и являются формами $(m - k + 1)$-го порядка.

В случае $k = m$ будем иметь

$$F_0 = \prod_{j=1}^{m} (a_j x + b_j y)(\alpha_1 x - \beta_1 y), \qquad R_0 = \prod_{j=1}^{m} (a_j x + b_j y)(\alpha_2 x + \beta_2 y)$$

Если среди общих вещественных корней имеются кратные, то, обозначая через q число различных корней, а через ν_j — кратность корня $\varkappa_j$, получим

$$
\begin{aligned}
X^{(m)}(x, y) &= \prod_{j=1}^{q} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} X^{(m-k)}(x, y) \\
Y^{(m)}(x, y) &= \prod_{j=1}^{q} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} Y^{(m-k)}(x, y) \\
F_0 &= \prod_{j=1}^{q} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} F_{-k}(x, y) \\
R_0 &= \prod_{j=1}^{q} (a_j x + b_j y)^{\nu_j} R_{-k}(x, y)
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Очевидно, что все вещественные корни уравнений (4.42) будут являться корнями уравнений $F_0(1, \varkappa) = 0$ и $R_0(1, \varkappa) = 0$.

Кроме форм $F_0(x, y)$ и $R_0(x, y)$, $F_{-k}(x, y)$ и $R_{-k}(x, y)$ мы в дальнейшем будем встречаться с формами более высокого порядка, но имеющими ту же структуру.

Обозначим через $F_\alpha(x, y)$ и $R_\alpha(x, y)$ формы $(m + \alpha + 1)$-го порядка следующего вида

$$
\begin{aligned}
F_\alpha(x. y) &= xY^{(m+\alpha)}(x, y) - yX^{(m+\alpha)}(x, y) \\
R_\alpha(x, y) &= xX^{(m+\alpha)}(x, y) + yY^{(m+\alpha)}(x, y)
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Кроме этих форм в исследовании устойчивости движения существенную роль будут играть следующие функции

$$
\Phi_{-k, \alpha}(x, y) = \frac{X^{(m+\alpha)}(x, y)\, Y^{(m-k)}(x, y) - Y^{(m+\alpha)}(x, y)\, X^{(m-k)}(x, y)}{xY^{(m-k)}(x, y) - yX^{(m-k)}(x, y)}. \tag{4.47}
$$

Значения функций

$$
F_\alpha(x, y), \quad R_\alpha(x, y), \quad \Phi_{-k, \alpha}(x, y) \qquad (k = 1, \ldots, m;\ \alpha = 0, 1, \ldots)
$$

при $x = \cos\theta$ и $y = \sin\theta$ будем обозначать через

$$
F_\alpha(\theta), \quad R_\alpha(\theta), \quad \Phi_{-k, \alpha}(\theta)
$$

Очевидно, что

$$
\begin{aligned}
\Phi_{-k, \alpha}(\theta) &= \frac{X^{(m+\alpha)}(\theta)\, Y^{(m-k)}(\theta) - Y^{(m+\alpha)}(\theta)\, X^{(m-k)}(\theta)}{Y^{(m-k)}(\theta)\cos\theta - X^{(m-k)}(\theta)\sin\theta} = \\
&= \frac{F_{-k}(\theta) R_\alpha(\theta) - R_{-k}(\theta) F_\alpha(\theta)}{F_{-k}(\theta)}
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Значение функций $\Phi_{-k,\alpha}(x, y)$ при $x = 1$, $y = \varkappa$ будем обозначать $\Phi_{-k,\alpha}(1, \varkappa)$.

§ 31. Исследование устойчивости при отсутствии кратных особенных прямых. Исследование системы (4.19) при наличии особенных прямых начнем с того случая, когда вопрос об устойчивости решается формами $(m + 1)$-го порядка независимо от форм высших порядков. Кроме того, будем вначале предполагать, что $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_k = 1$. Система (4.19) перепишется в виде

$$
\begin{aligned}
x^{\cdot} &= \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) X^{(m-k)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots \\
y^{\cdot} &= \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) Y^{(m-k)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

где

$$X^{(m)} = \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) X^{(m-k)}(x, y) = a_0^{(m)} x^m + a_1^{(m)} x^{m-1} y + \ldots + a_m^{(m)} y^m$$

$$Y^{(m)} = \prod_{j=1}^{k} (a_j x + b_j y) Y^{(m-k)}(x, y) = b_0^{(m)} x^m + b_1^{(m)} x^{m-1} y + \ldots + b_m^{(m)} y^m$$

Исследуем поведение интегральных кривых в окрестности особенной прямой $a_1 x + b_1 y = 0$. Не уменьшая общности задачи, мы можем положить $b_1 = -1$. (Случай $b_1 = 0$ приводится к случаю $b_1 \neq 0$ заменой $x = y_1$, $y = x_1$.) Уравнение особенной прямой можно взять в форме $-y + \varkappa_1 x = 0$ $(\varkappa_1 = -a_1/b_1)$.

Представим формы m-го порядка системы (4.49) в виде

$$X^{(m)} = (-y + \varkappa_1 x) X^{(m-1)}(x, y), \qquad Y^{(m)} = (-y + \varkappa_1 x) Y^{(m-1)}(x, y) \tag{4.50}$$

Произведем замену переменной $y_1 = -y + \varkappa_1 x$, тогда

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= y_1 X_*^{(m-1)}(x, y_1) + X_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots \\ y_1^{\cdot} &= y_1 Y_*^{(m-1)}(x, y_1) + Y_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots \end{aligned} \tag{4.51}$$

где

$$X_*^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} A_{k*}^{(m+l)} x^{m+l-k} y_1^k, \qquad Y_*^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} B_{k*}^{(m+l)} x^{m+l-k} y_1^k$$

$$\begin{aligned} A_{k*}^{(m+l)} &= \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{d^k X^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^k} \\ B_{k*}^{(m+l)} &= \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \left[\frac{d^k Y^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^k} - \varkappa_1 \frac{d^k X^{(m+l)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1^k} \right] \\ & (l = -1, 1, \ldots) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Отметим, что

$$B_{0*}^{(m-1)} = -[Y^{(m-1)}(1, \varkappa_1) - \varkappa_1 X^{(m-1)}(1, \varkappa_1)] = -F_{-1}(1, \varkappa_1)$$

Будем вначале предполагать, что общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ не является корнем уравнения

$$F_{-1}(1, \varkappa) = Y^{(m-1)}(1, \varkappa) - \varkappa X^{(m-1)}(1, \varkappa) = 0$$

Тогда $B_{0*}^{(m-1)} \neq 0$. Преобразуем систему (4.51), положив $x_1 = x - \mu y_1$, $\mu = A_{0*}^{(m-1)} / B_{0*}^{(m-1)}$.

В результате будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= y_1 X_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + X_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots \\ y_1^{\cdot} &= y_1 Y_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + Y_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots \end{aligned} \tag{4.53}$$

где

$$X_1^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} A_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} y_1^k, \qquad Y_1^{(m+l)} = \sum_{k=0}^{m+l} B_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} y_1^k$$

$$A_{m+l-q}^{(m+l)} = \frac{1}{q!} \left[\frac{d^q X_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q} - \mu \frac{d^q Y_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q} \right]$$

$$B_{m+l-q}^{(m+l)} = \frac{1}{q!} \cdot \frac{d^q Y_*^{(m+l)}(\mu, 1)}{d\mu^q}$$

Отметим, что

$$A_0^{(m+1)} = \Phi_{-11}(1, \varkappa_1), \qquad B_0^{(m-1)} = -F_{-1}(1, \varkappa_1), \qquad A_0^{(m-1)} = 0$$

Не уменьшая общности задачи, можно коэффициенты $B_0^{(m+l)}$ считать равными нулю для $l = 1, 2, \ldots, N$. Если эти коэффициенты не равны нулю, то заменой

$$y_1 = z + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \ldots + a_N x_1^N \tag{4.54}$$

и соответствующим выбором чисел $a_2, a_3, \ldots, a_N$ можно коэффициенты $B_0^{(m+l)}$ преобразованной системы обратить в нуль для $l \leqslant N$. При этом преобразовании коэффициенты форм $X_1^{(m-1)}$ и $X_1^{(m+1)}$ не изменятся. Ряд

$$y_1(x_1) = c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + \ldots \tag{4.55}$$

будет формально удовлетворять уравнению

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 Y_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + Y_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots}{y_1 X_1^{(m-1)}(x_1, y_1) + X_1^{(m+1)}(x_1, y_1) + \ldots} \tag{4.56}$$

Ряды (4.55) обычно расходятся.

В результате преобразований система (4.53) примет вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= z^2 \left(A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1}^{(m-1)} z^{m-2}\right) + A_0^{(m+1)} x_1^{m+1} + \ldots + \\ &+ A_{m+1}^{(m+1)} z^{m+1} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} H_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \\ z^{\cdot} &= z\left(B_0^{(m-1)} x_1^{m-1} + \ldots + B_{m-1}^{(m-1)} z^{m-1}\right) + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} E_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \end{aligned} \tag{4.57}$$

Отметим, что $E_0^{(m+l)} = 0$ для $l \leqslant N$.

Для этой системы можно построить функции V и W, удовлетворяющие теореме Четаева. Положим

$$V = x_1^2 + z^2$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} V' = 2x_1 \Bigg[& z^2 \left(A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + \ldots + A_{m-1}^{(m-1)} z^{m-2}\right) + A_0^{(m+1)} x_1^{m+1} + \ldots + \\ & + A_{m+1}^{(m+1)} z^{m+1} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} H_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \Bigg] - \\ - 2z \Bigg[& z\left(B_0^{(m-1)} x_1^{m-1} + \ldots + B_{m-1}^{(m-1)} z^{m-1}\right) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m+l} E_k^{(m+l)} x_1^{m+l-k} z^k \Bigg] \end{aligned}$$

В области (D), определяемой неравенствами $x_1^4 - z^2 > 0$, $x_1 > 0$, знак V' определяется знаком выражения $2A_0^{(m+1)} x_1^{m+2} = 2\,\Phi_{-11}(1, \varkappa_1) x_1^{m+2}$, который совпадает со знаком $\Phi_{-11}(1, \varkappa_1)$.

Предположим, что $\Phi_{-11}(1, \varkappa_1) > 0$, тогда в области (D) будем иметь $VV' > 0$.

За функцию W теоремы Четаева возьмем функцию

$$W = x_1^{2k} - z^2 \qquad (k > 2)$$

Очевидно, что для достаточно малых $|x_1|$ область $W > 0$ находится внутри области $VV' > 0$. Легко убедиться, что знак W' на границе области $W > 0$, на которой $W = 0$, определяется знаком выражения $- B_0^{(m-1)} z^2 x_1^{m-1}$, сохраняющим знак при $x_1 > 0$.

Следовательно, нулевое решение уравнений возмущенного движения вида (4.49) будет неустойчиво, если хотя бы один общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ не является корнем уравнения $F_{-1}(1, \varkappa) = 0$ и на прямой $y = \varkappa x$ функция $\Phi_{-11}(x, y)$ принимает положительное значение.

Предположим теперь, что на всех прямых $y = \varkappa_j x$ функция $\Phi_{-11}(x, y)$ принимает только отрицательные значения, а уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ или не имеет вещественных корней, или вещественные корни этого уравнения не совпадают с общими вещественными корнями уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ не имеет вещественных корней.

Преобразуем систему (4.49), положив $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Тогда

$$\begin{aligned} r^{\cdot} &= r^m R_{-k}(\theta) \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) + r^{m+1} R_1(\theta) + \ldots \\ \theta^{\cdot} &= r^{m-1} F_{-k}(\theta) \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) + r^m F_1(\theta) + \ldots \end{aligned} \tag{4.58}$$

где

$$R_l = X^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta + Y^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

$$F_l = Y^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\cos\theta - X^{(m+l)}(\cos\theta, \sin\theta)\sin\theta$$

$$(l = -k, 1, 2, \ldots)$$

Функцию Ляпунова для этой системы возьмем в виде (4.35), определяя функцию $\psi(\theta)$ из уравнения

$$R_{-k} + \psi F_{-k} = -h(\theta) \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) \tag{4.59}$$

считая $h(\theta)$ непрерывной, ограниченной, положительной и периодической функцией θ с периодом 2π, не обращающейся в нуль ни при одном вещественном значении θ.

Для обеспечения периодичности функции $\psi(\theta)$ на функцию $h(\theta)$ наложим условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{F_{-k}(\theta)} \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{R_{-k}(\theta)}{F_{-k}(\theta)}\, d\theta$$

Производная V' при таком определении функции $\psi(\theta)$ будет иметь вид

$$V' = r^m \exp\left[\int_0^{\theta} \psi(\theta)\, d\theta\right] \left\{ -h(\theta) \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{F_{-k}(\theta)} \left[F_{-k} R_1 - R_{-k} F_1 - F_{-1} h \prod_{j=1}^{k} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta) \right] + \ldots \right\}$$

Для значений θ, отличных от значений θ_j, определяемых уравнениями $\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta = 0$, производная V' принимает только отрицательные значения. Для значений $\theta = \theta_j$ знак второго члена, стоящего в квадратных скобках, совпадает со знаком выражения

$$\frac{F_{-k}R_1 - R_{-k}F_1}{F_{-k}} = \frac{X^{(m+1)}Y^{(m-k)} - Y^{(m+1)}X^{(m-k)}}{Y^{(m-k)}\cos\theta - X^{(m-k)}\sin\theta}$$

которое по условию отрицательно для значений $\theta = \theta_j (j = 1, \ldots, k)$. Следовательно, V' — определенно-отрицательная функция r для любых значений θ. Отсюда следует асимптотическая устойчивость невозмущенного движения.

Предположим, что уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ имеет вещественные корни, отличные от общих вещественных корней уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$. Пусть эти корни имеют значения μ_s $(s = 1, \ldots, q)$.

Тогда выражение

$$R_0 = R_{-k}\prod_{j=1}^{k}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)$$

будет отрицательным для значений θ, определяемых уравнениями $\mu_s\cos\theta - \sin\theta = 0$. В противном случае невозмущенное движение будет неустойчиво.

Определим теперь функцию $\psi(\theta)$ в интервале $(0, 2\pi)$, а следовательно, и для любых вещественных значений θ из уравнения (4.59) следующим образом: положим $\psi(\theta) \equiv 0$ в интервалах $\theta_s - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_s + \varepsilon$, считая ε малой величиной. Для этого достаточно $h(\theta)$ определить из уравнения

$$R_{-k} = -h(\theta)\prod_{j=1}^{k}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)$$

Такое определение $h(\theta)$ возможно в силу условия $R_0 < 0$ и $\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta \neq 0$ в интервалах $\theta_s - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \theta_s + \varepsilon$. На функцию $h(\theta)$ наложим условие, чтобы

$$\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta = 0$$

которому всегда можно удовлетворить, предполагая, что $h(0) = h(2\pi)$.

При таком выборе функции $\psi(\theta)$ производная V' будет определенно-отрицательной для всех вещественных значений θ.

Следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Изложенное в этом параграфе позволяет формулировать следующую теорему.

Теорема. Если система уравнений (4.19) такова, что

1) уравнения $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ имеют общие вещественные корни $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$,

2) уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = Y^{(m-k)}(1, \varkappa) - \varkappa X^{(m-k)}(1, \varkappa) = 0$ или не имеет вещественных корней, или вещественные корни его не равны $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_k$,

3) формы $R_0(x, y) \leqslant 0$ при условии $F_0(x, y) = 0$, то невозмущенное движение будет неустойчиво, если по крайней мере на одной из прямых $y = \varkappa_j x$ функция $\Phi_{-k1}(x, y)$ может принимать положительные значения. Если же на всех прямых $y = \varkappa_j x (j = 1, \ldots, k)$ функция $\Phi_{-k1} < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что по крайней мере один общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ является корнем уравнения $F_{-1}(1, \varkappa) = 0$. Эту задачу ввиду ее частности не будем исследовать со всеми подробностями, а ограничимся наиболее общими случаями, которые она может представить.

1) Пусть общий вещественный корень $\varkappa_1$ уравнений

$$X^{(m)}(1, \varkappa)=0, \qquad Y^{(m)}(1, \varkappa)=0, \qquad F_{-1}(1, \varkappa)=0$$

не обращает в нуль выражений

$$\begin{gathered} Y^{(m+1)}(1, \varkappa_1)-\varkappa_1 X^{(m+1)}(1, \varkappa_1) \\ 3X^{(m-1)}(1, \varkappa_1)-2\left[\frac{dY^{(m-1)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1}-\varkappa_1 \frac{dX^{(m-1)}(1, \varkappa_1)}{d\varkappa_1}\right] \end{gathered} \tag{4.60}$$

а если и обращает, то одновременно.

Докажем, что нулевое решение системы (4.19) при этих условиях всегда неустойчиво.

Представляя формы $X^{(m)}\ (x, y)$ и $Y^{(m)}\ (x, y)$ в виде (4.50) и производя замену $y_1=-y+\varkappa_1 x$, получим систему (4.51), в которой коэффициент $B_{0*}^{(m-1)}=-F_{-1}(1, \varkappa_1)=0$, а коэффициент $A_{0*}^{(m-1)}\neq 0$. Коэффициент $A_{0*}^{(m-1)}$ может обратиться в нуль лишь в том случае, когда $\nu_1 \geqslant 2$.

Из системы (4.51) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy_1}{dx}=\frac{y_1^2\left(B_{1*}^{(m-1)} x^{m-2}+\ldots+B_{m-1*}^{(m-1)} y_1^{m-2}\right)+B_{0*}^{(m+1)} x^{m+1}+\ldots}{y_1\left(A_{0*}^{(m-1)} x^{m-1}+\ldots+A_{m-1*}^{(m-1)} y_1^{m-1}\right)+A_{0*}^{(m+1)} x^{m+1}+\ldots} \tag{4.61}$$

Это уравнение заменой $y_1=(z+h)x^{3/2}$ приводится к виду

$$x \frac{dz}{dx}=az+\varphi_1(x, z)+x^{\frac{1}{2}} \varphi_2(x, z) \tag{4.62}$$

если число h определить из уравнения

$$\left[\frac{3}{2} A_{0*}^{(m-1)}-B_{1*}^{(m-1)}\right] h^2=B_{0*}^{(m+1)} \tag{4.63}$$

Вещественное решение для h мы можем получить в том случае, если знак разности, стоящей в квадратных скобках, совпадает со знаком $B_{0*}^{(m+1)}$. Для любой системы этого можно добиться заменой x на $-x$ в случае четного m и заменой x на $-x$ и y на $-y$ в случае нечетного m.

Если же корень $\varkappa_1$ обращает в нуль выражения (4.60), то уравнение (4.63) удовлетворяется при любых значениях h.

Докажем, что уравнение (4.62) имеет интеграл, голоморфный относительно x и $x^{1/2}$, если число $a\neq k$ и $a\neq k+{}^1/_2$, где k — целое положительное число.

Полагая $\xi=x^{1/2}$ и рассматривая функцию $z(x, \xi)$, удовлетворяющую уравнению (4.62), получим

$$x \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2} \xi \frac{\partial z}{\partial \xi}=az+\varphi_1(x, z)+\xi\varphi_2(x, z)$$

На основании теоремы {30} мы можем утверждать, что при $a\neq k$ и $a\neq k+{}^1/_2$, где k — целое положительное число, это уравнение имеет голоморфный интеграл $z=z(x, \xi)$, обращающийся в нуль при $x=\xi=0$. Очевидно, что интегралу $z=z(x, \xi)$ можно придать вид

$$z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k+x^{1/2} \sum_{k=0}^{\infty} D_k x^k \tag{4.64}$$

Частное решение уравнения (4.61) можно представить следующим образом:

$$y_1=[z(x)+h]\, x^{3/2}$$

Подставляя это решение в первое уравнение (4.51), будем иметь

$$\frac{dx_1}{dt}=A_{0*}^{(m-1)}hx^{m+1/2}+x^{m+1}f(x,\ x^{1/2}) \tag{4.65}$$

Если число h выберем таким образом, чтобы $A_{0*}^{(m-1)}h$ было величиной положительной, то из (4.65) будет следовать, что невозмущенное движение неустойчиво. В случае a, равного целому положительному числу k или $a = k + {}^1/_2$, интеграл $z(x)$ будет голоморфным в отношении x, $x^{1/2}$, $x^{1/2}\ln x$, $x\ln x$, и невозмущенное движение также неустойчивым.

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. Если система уравнений (4.19) такова, что по крайней мере один общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ является корнем уравнения $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$, и если этот корень не обращает в нуль ни одно из выражений (4.60) или обращает их в нуль одновременно, то невозмущенное движение неустойчиво.

Рассмотрим теперь случай, когда общий вещественный корень $\varkappa_1$ уравнений

$$X^{(m)}(1,\varkappa)=0,\qquad Y^{(m)}(1,\varkappa)=0,\quad F_{-1}(1,\varkappa)=0 \tag{4.66}$$

обращает в нуль только первое выражение (4.60), т. е.

$$Y^{(m+1)}(1,\varkappa_1)-\varkappa_1X^{(m+1)}(1,\varkappa_1)=0 \tag{4.67}$$

Эту задачу будем решать, предполагая, что

$$(2A_{0*}^{(m+1)}-B_{1*}^{(m+1)})^2+4\,(2A_{0*}^{(m-1)}-B_{1*}^{(m-1)})\,B_{0*}^{(m+2)}\geqslant 0 \tag{4.68}$$

Отметим, что при наличии условия (4.67) коэффициент $B_{0*}^{(m+1)}(1, \varkappa_1) = 0$.

Возвращаясь к уравнению (4.61) и полагая $y_1 = (z + h)x^2$, получим

$$x\frac{dz}{dx}=az+\varphi(x,\ z) \tag{4.69}$$

если число h определим из уравнения

$$h^2\,(B_{1*}^{(m-1)}-2A_{0*}^{(m-1)})+h\,(B_{1*}^{(m+1)}-2A_{0*}^{(m+1)})+B_{0*}^{(m+2)}=0$$

которое при условии (4.68) имеет вещественное решение.

Уравнение (4.69) при a, отличном от целого положительного числа, будет иметь голоморфный интеграл $z = z(x)$, обращающийся в нуль при $x = 0$. В случае a, равного целому положительному числу, этот интеграл будет голоморфным относительно x и $x\ln x$ и также обращающимся в нуль при $x = 0$.

Следовательно, уравнение (4.61) при выполнении условий (4.67) и (4.68) будет иметь интеграл

$$y_1 = hx^2 + x^2z(x)$$

Подставляя значение y_1 в первое уравнение системы (4.51), получим

$$\frac{dx}{dt}=(A_{0*}^{(m-1)}h+A_{0*}^{(n+1)})\,x^{m+1}+x^{m+1}\,\varphi(x) \tag{4.70}$$

Отсюда следует, чть при нечетном m невозмущенное движение неустойчиво.

Неустойчивость будет иметь место и при четном m, если только выражение $(A_{0*}^{(m-1)}h + A_{0*}^{(m+1)}) > 0$.

Невозмущенное движение при четном m будет неустойчиво независимо от знака выражения $(A_{0*}^{(m-1)}h + A_{0*}^{(m+1)})$, если только вещественный корень уравнения $F_{-2}(1, \varkappa) = 0$, где $F_{-2}(1,\varkappa) = F_0(1, \varkappa)/(\varkappa - \varkappa_1)^2$ не является общим вещественным корнем уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$.

В этом случае неустойчивость можно обнаружить из рассмотрения форм m-го порядка. Действительно, в случае четного m уравнение $F_0(1, \varkappa) = 0$ имеет нечетную степень, равную $m + 1$, и это уравнение в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$F_0(1, \varkappa) = (\varkappa - \varkappa_1)^2 F_{-2}(1, \varkappa) = 0$$

Отсюда следует, что уравнение $F_0(1, \varkappa) = 0$ кроме корня $\varkappa_1$ имеет еще хотя бы один вещественный корень, который по условию не является общим вещественным корнем уравнений

$$X^{(m)}(1, \varkappa) = 0, \; Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$$

Пусть этот корень равен $\varkappa_2$. Тогда на прямой $y = \varkappa_2 x$ будем иметь

$$R_0(x, y) = x^{m+1} R_0(1, \varkappa_2)$$

Это выражение при $R_0(1, \varkappa_2) \neq 0$ соответствующим выбором x можно сделать положительным, откуда следует неустойчивость невозмущенного движения.

Отметим, что равенство $R_0(1, \varkappa_2) = 0$ при условии $F_0(1, \varkappa_2) = 0$ возможно лишь в том случае, когда $X^{(m)}(1, \varkappa_2) = Y^{(m)}(1, \varkappa_2) = 0$.

§ 32. Исследование устойчивости при наличии кратных особенных прямых. В предыдущих параграфах этой главы рассмотрена задача об устойчивости системы уравнений (4.19) в тех случаях, когда для ее решения достаточно рассмотреть формы m-го и $(m + 1)$-го порядка, когда общий вещественный корень уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ является простым.

Предположим теперь, что эти уравнения имеют общий вещественный корень кратности $\nu \geqslant 2$. Системе уравнений (4.49) в этом случае можно придать вид

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= (-y + \varkappa_1 x)^{\nu} X^{(m-\nu)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots \\ y^{\cdot} &= (-y + \varkappa_1 x)^{\nu} Y^{(m-\nu)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots \end{aligned} \qquad (4.71)$$

Полагая $y_1 = -y + \varkappa_1 x$, получим

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= y_1^{\nu} X_*^{(m-\nu)}(x, y_1) + X_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots \\ y_1^{\cdot} &= y_1^{\nu} Y_*^{(m-\nu)}(x, y_1) + Y_*^{(m+1)}(x, y_1) + \ldots \end{aligned} \qquad (4.72)$$

где коэффициенты форм $X_*^{(\alpha)}$, $Y_*^{(\alpha)}$ $(\alpha = m - \nu, m + 1, \ldots)$ определятся равенствами (4.52).

Рассмотрим случай, когда корень $\varkappa_1$ не является корнем уравнения

$$F_{-\nu} = Y_*^{(m-\nu)}(1, \varkappa) - \varkappa X_*^{(m-\nu)}(1, \varkappa) = 0 \qquad (4.73)$$

т. е. когда коэффициент $B_{0*}^{(m-\nu)} = -F_{-\nu}(1, \varkappa_1) \neq 0$.

Произведем замену

$$x_1 = x - \mu y_1, \; \mu = A_{0*}^{(m-\nu)}/B_{0*}^{(m-\nu)}$$

В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= y_1^{\nu+1}\left(A_1^{(m-\nu)} x_1^{m-\nu-1} + \ldots + A_{m-\nu}^{(m-\nu)} y_1^{m-\nu-1}\right) + \\ &\quad + A_0^{(m+1)} x_1^{m+1} + \ldots \\ y_1^{\cdot} &= y_1^{\nu}\left(B_0^{(m-\nu)} x_1^{m-\nu} + \ldots + B_{m-\nu}^{(m-\nu)} y_1^{m-\nu}\right) + B_0^{(m+1)} x_1^{m+1} + \ldots \end{aligned} \qquad (4.74)$$

Коэффициенты $A_k^{(l)}$ и $B_k^{(l)}$ $(k = 0, 1, \ldots, l;\; l = m - \nu, m + 1, \ldots)$ определяются формулами (4.53).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{y_1^{\nu}(B_0^{(m-\nu)}x_1^{m-\nu}+\ldots)+B_0^{(m+1)}x_1^{m+1}+\ldots}{y_1^{\nu+1}(A_1^{(m-\nu)}x^{m-\nu}+\ldots)+A_0^{(m+1)}x_1^{m+1}+\ldots}$$

Это уравнение можно удовлетворить рядом

$$y_1(x_1)=h_1x_1^{1+1/\nu}+h_2x_1^{1+2/\nu}+\ldots+h_kx_1^{1+k/\nu}+\ldots \tag{4.75}$$

Коэффициент h_1 определится из уравнения

$$B_0^{(m-\nu)}h_1^{\nu}+B_0^{(m+1)}=0$$

которое всегда имеет решение, так как в случае четного ν при замене x_1 на $-x_1$ в системе (4.74) знак одного из коэффициентов $B_0^{(m-\nu)}$ или $B_0^{(m+1)}$ меняется на обратный. Коэффициенты $h_s(s=2,\ 3,\ \ldots)$ определятся в виде дробей, знаменателями которых являются различные степени коэффициента h_1.

Обозначим через $y_k(x_1)$ сумму k первых членов ряда (4.75) и произведем замену $y=z+y_k(x_1)$. В результате замены получим систему уравнений

$$x_1^{\cdot}=A_0^{(m+1)}x_1^{m+1}+A_1^{(m-\nu)}x_1^{m+1+1/\nu}+\ldots+$$
$$+z\{[A_1^{(m+1)}+(\nu+1)h_1^{\nu}A_1^{(m-\nu)}]x_1^{m}+\ldots\}+\ldots$$
$$z^{\cdot}=z(B_0^{(m-\nu)}\nu h_1^{\nu-1}x_1^{m-1/\nu}+\ldots)+z^2(ax_1^{m-1-1/\nu}+\ldots)+$$
$$+c_0^{(m+\sigma)}x_1^{m+\sigma}+c_1^{(m+\sigma)}x_1^{m+\sigma+1/2}+\ldots$$

При достаточно большом k число σ можно считать достаточно большим. Для этой системы возьмем функцию Четаева вида

$$V=x_1^2+z^2$$

Производная этой функции

$$V'=2A_0^{(m+1)}x_1^{m+2}+2[A_1^{(m+1)}+(\nu+1)h_1^{\nu}A_1^{(m-\nu)}]zx_1^{m+1}+\ldots+$$
$$+2z^2B_0^{(m-\nu)}\nu h_1^{\nu-1}x_1^{m-1/\nu}+\ldots$$

в области (D), определяемой неравенствами $x_1^4-z^2>0,\ x_1>0$, будет положительна при $A_0^{(m+1)}>0$. За функцию W теоремы Четаева возьмем функцию $W=x_1^6-z^2$. Область $W>0$ при достаточно малых $|x_1|$ и $|z|$ заключена в области (D). Знак производной W' при $W=0$ определяется выражением $-2z^2x_1^{m+6-1/\nu}\ B_0^{(m-\nu)}\ \nu h_1^{\nu-1}$, сохраняющим знак при $x_1>0$. Следовательно, невозмущенное движение при $A_0^{(m+1)}>0$ неустойчиво. Из формул (4.53) следует, что знак $A_0^{(m+1)}$ определяется знаком $\Phi_{-k1}(x,\ y)$ на прямой $y=\varkappa_1x$.

Мы рассмотрели случай, когда уравнения $X^{(m)}(1,\varkappa)=0,\ Y^{(m)}(1,\varkappa)=0$ имеют один кратный корень $\varkappa_1$ кратности ν. Очевидно, что выводы будут справедливы и в том случае, когда эти уравнения имеют несколько кратных корней, если выражение $\Phi_{-k1}(x,y)$ хотя бы на одной из прямых $y=\varkappa_jx$ положительно.

Отметим, что если уравнение $F_{-k}(1,\ \varkappa)=0$ не имеет вещественных корней и все числа $\nu_1,\ \ldots,\ \nu_p$ четные, то движение может быть устойчиво лишь в случае, когда $\Phi_{-k1}=0$ на прямых $y=\varkappa_jx(j=1,\ \ldots,\ p)$. Если $\Phi_{-k1}\neq 0$ хотя бы на одной из указанных прямых, то движение будет неустойчиво, так как функцию $\Phi_{-k1}(x,\ y)$ при этих условиях можно сделать положительной.

Перейдем к рассмотрению того случая, когда уравнения $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ имеют несколько общих кратных корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$, а функция $\Phi_{-k1}(x, y)$ на всех прямых $y = \varkappa_j x (j = 1, \ldots, p)$ отрицательна. Будем предполагать, что уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ или не имеет вещественных корней, или корни его отличны от $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$.

Систему (4.19) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\begin{gathered} x^{\cdot} = \prod_{j=1}^{p} (-y + \varkappa_j x)^{\nu_j} X^{(m-k)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots \\ y^{\cdot} = \prod_{j=1}^{p} (-y + \varkappa_j x)^{\nu_j} Y^{(m-k)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots \\ (\nu_1 + \ldots + \nu_p = k; \quad \nu_j \geqslant 2) \end{gathered} \tag{4.76}$$

или, полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, в виде

$$\begin{gathered} r^{\cdot} = r^m \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j} R_{-k}(\cos\theta, \sin\theta) + \\ + r^{m+1} R_1(\cos\theta, \sin\theta) + \ldots \\ \theta^{\cdot} = r^{m-1} \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j} F_{-k}(\cos\theta, \sin\theta) + \\ + r^m F_1(\cos\theta, \sin\theta) + \ldots \end{gathered} \tag{4.77}$$

Пусть уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ не имеет вещественных корней, тогда среди чисел $\nu_j (j = 1, \ldots, p)$ имеется хотя бы одно нечетное.

В этом случае функцию Ляпунова V для системы (4.77) выберем в виде (4.35), определяя функцию $\psi(\theta)$ из уравнения

$$R_{-k} + \psi F_{-k} = -h(\theta) \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j} \tag{4.78}$$

считая $h(\theta)$ ограниченной, непрерывной, положительной и периодической функцией θ с периодом 2π, не обращающейся в нуль ни при одном вещественном значении θ.

Функция $\psi(\theta)$ будет периодической, если на $h(\theta)$ наложим условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{F_{-k}} \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j} d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{R_{-k}(\theta)}{F_{-k}(\theta)} d\theta$$

которому всегда можно удовлетворить, так как среди чисел ν_j имеется нечетное.

Производная V' будет иметь вид

$$\begin{gathered} V' = r^m \exp\left[\int \psi(\theta)\, d\theta\right] \left\{ -h(\theta) \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{2\nu_j} + \right. \\ \left. + r \left[R_1 - \frac{R_{-k} F_1 + F_1 h \prod_{j=1}^{p} (\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j}}{F_{-k}} \right] + \ldots \right\} \end{gathered} \tag{4.79}$$

Для значений θ, отличных от значений θ_j, определяемых уравнениями $\varkappa_j \cos\theta - \sin\theta = 0$, производная V' принимает только отрицательные значения. Для значений $\theta = \theta_j$ знак второго члена, стоящего в квадратных скобках, совпадает со знаком функции Φ_{-k1}, которая по условию отрицательна. Следовательно, V' — определенно-отрицательная функция r для любых вещественных значений θ, и невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Предположим теперь, что уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ имеет вещественные корни $\mu_1, \ldots, \mu_q$, отличные от корней $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$. Здесь мы должны различать два случая: 1) среди чисел $\nu_1, \ldots, \nu_p$ имеется по крайней мере одно нечетное; 2) все ν_j ($j = 1, \ldots, p$) — четные. Выберем функцию Ляпунова V в виде (4.35).

В первом случае функции $\psi(\theta)$ и $h(\theta)$ определяются аналогично тому, как это делалось в § 31. Функцию $\psi(\theta)$ положим равной нулю в интервалах $\theta_s - \varepsilon < \theta < \theta_s + \varepsilon$ ($s=2, \ldots, q$). В интервале $[\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 + \varepsilon]$ выделим интервал $[\theta_1 - \varepsilon_1, \theta_1 + \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon$, в котором функцию $\psi(\theta)$ будем также считать равной нулю. Предположим, что

$$\int_0^{\theta_1-\varepsilon} \psi(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_1+\varepsilon}^{2\pi} \psi(\theta)\,d\theta = M$$

Пусть $M < 0$. Если окажется, что $F_{-k}(\theta_1 - \varepsilon_1) > 0$, то $F_{-k}(\theta_1 + \varepsilon_1) < < 0$. В этом случае функцию $\psi(\theta)$ в интервале $[\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 - \varepsilon_1]$ положим равной нулю. Функцию $h(\theta)$ в интервале $[\theta_1 + \varepsilon_1, \theta_1 + \varepsilon]$ выберем так, чтобы

$$-\int_{\theta_1+\varepsilon_1}^{\theta_1+\varepsilon} \frac{R_{-k} + h\prod\limits_{j=1}^{p}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j}}{F_{-k}}\,d\theta = -M$$

Тогда будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\,d\theta = 0$$

Если окажется, что $F_{-k}[\theta_1 - \varepsilon_1) < 0$, то $F_{-k}(\theta_1 + \varepsilon_1) > 0$. В этом случае функцию $\psi(\theta)$ выберем равной нулю в интервале $[\theta_1 - \varepsilon_1, \theta_1 + \varepsilon]$. Функцию $h(\theta)$ в интервале $[\theta_1 - \varepsilon, \theta_1 - \varepsilon_1]$ выберем так, чтобы

$$-\int_{\theta_1-\varepsilon}^{\theta_1-\varepsilon_1} \frac{R_{-k} + h\prod\limits_{j=1}^{p}(\varkappa_j\cos\theta - \sin\theta)^{\nu_j}}{F_{-k}}\,d\theta = -M$$

т. е. опять будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \psi(\theta)\,d\theta = 0$$

В случае $M > 0$ функции $\psi(\theta)$ и $h(\theta)$ выбираются аналогичным образом.

На всем интервале $(0, 2\pi)$ функцию $h(\theta)$ выберем так, чтобы удовлетворялось равенство (4.78) при $h(\theta) > 0$.

При таком выборе функций $h(\theta)$ и $\psi(\theta)$ мы можем утверждать, что определенно-положительная функция V (4.35) будет иметь определенно-отрицательную производную, если функция $\Phi_{-k1} < 0$ на всех прямых $y = \varkappa_j x$ ($j = 1, \ldots, p$). Следовательно, невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво.

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. Если система дифференциальных уравнений (4.19) такова, что

1) уравнения $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ имеют общие кратные вещественные корни $\cancel{\varkappa_1}, \ldots, \varkappa_p$ ($p < m + 1$) любых кратностей $\nu_1, \ldots$ $\ldots, \nu_p$ ($\nu_1 + \ldots + \nu_p = k$);

2) уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = Y^{(m-k)}(1, \varkappa) - \varkappa X^{(m-k)}(1, \varkappa) = 0$ не имеет корней, равных $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_p$.

3) функция $\Phi_{-k1}(x, y)$ принимает положительные значения хотя бы на одной из прямых $y = \varkappa_j x (j = 1, \ldots, p)$, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же на всех прямых $y = \varkappa_j x (j = 1, \ldots, p)$ функция $\Phi_{-k1}(x, y) < < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение $F_{-k}(1, \varkappa) = 0$ имеет корень $\varkappa_1$, равный по крайней мере одному из общих кратных вещественных корней кратности ν уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, $Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$. Будем предполагать, что этот корень не обращает в нуль выражения

$$a = (\nu+2) X^{(m-\nu)}(1, \varkappa) - (\nu+1)\left[\frac{dY^{(m-\nu)}(1, \varkappa)}{d\varkappa} - \varkappa \frac{dX^{(m-\nu)}(1, \varkappa)}{d\varkappa}\right]$$
$$b = Y^{(m+1)}(1, \varkappa) - \varkappa X^{(m+1)}(1, \varkappa) \tag{4.80}$$

а если и обращает, то одновременно.

Рассмотрим систему (4.72), предполагая, что $F_{-k}(1, \varkappa_1) = 0$. Тогда $B_0^{(m-\nu)} = F_{-k}(1, \varkappa_1) = 0$, а $A_0^{(m-\nu)}(1, \varkappa) = X^{(m-\nu)}(1, \varkappa) \neq 0$, так как в противном случае мы будем иметь $Y^{(m-\nu)}(1, \varkappa_1) = 0$, т. е. $\varkappa_1$ является корнем $(\nu + 1)$-й кратности для уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa_1) = 0$.

При этих условиях система (4.72) примет вид

$$x^{\cdot} = y_1^{\nu}\left(A_{0*}^{(m-\nu)} x^{m-\nu} + A_{1*}^{(m-\nu)} y_1 x^{m-\nu-1} + \ldots\right) + A_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + \ldots$$
$$y_1^{\cdot} = y_1^{\nu+1}\left(B_{1*}^{(m-\nu)} x^{m-\nu-1} + B_{2*}^{(m-\nu)} y_1 x^{m-\nu-2} + \ldots\right) + \tag{4.81}$$
$$+ B_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + B_{1*}^{(m+1)} y_1 x^m + \ldots$$

Из этой системы получим

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1^{\nu+1}\left(B_{1*}^{(m-\nu)} x^{m-\nu-1} + B_{2*}^{(m-\nu)} y_1 x^{m-\nu-2} + \ldots\right) + B_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + \ldots}{y_1^{\nu}\left(A_{0*}^{(m-\nu)} x^{m-\nu} + A_{1*}^{(m-\nu)} y_1 x^{m-\nu-1} + \ldots\right) + A_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + \ldots} \tag{4.82}$$

Положим $y_1 = (z + h) x^{\frac{\nu+2}{\nu+1}}$ и определим число h из уравнения

$$h^{\nu+1}\left(\frac{\nu+2}{\nu+1} A_{0*}^{(m-\nu)} - B_{1*}^{(m-\nu)}\right) = B_{0*}^{(m+1)} \tag{4.83}$$

При условиях $a \neq 0$, $b \neq 0$ это уравнение в случае ν четного всегда имеет вещественное решение. Если $a = b = 0$, то величину h можно считать произвольной постоянной. Если ν нечетное, то уравнение (4.83) имеет вещественное решение в том случае, когда разность, стоящая в скобках, одного знака со знаком коэффициента $B_{0*}^{(m+1)}$. Этого всегда можно добиться при ν нечетном заменой в системе (4.81) переменой x на $-x_1$.

Уравнение (4.82) в результате замены преобразуется к виду

$$x\frac{dz}{dx} = \alpha z + \varphi\left(x, x^{\frac{1}{\nu+1}}, z\right) \tag{4.84}$$

Если $\alpha \neq k_1 + k_2/(\nu+1)$, где k_1 и k_2 — целые положительные числа $(k_1 + k_2 \geqslant 1)$, то это уравнение имеет интеграл, голоморфный в отношении x и $x^{1/(\nu+1)}$, а интеграл уравнения (4.82) запишется следующим образом: $y_1 = hx^{\frac{\nu+2}{\nu+1}} + x^{\frac{\nu+3}{\nu+1}} \psi(x, x^{\frac{1}{\nu+1}})$.

Если $\alpha = k_1 + k_2/(\nu+1)$, то интеграл будет голоморфным относительно x, $x^{1/(\nu+1)}$, $x \ln x$ и $x^{1/(\nu+1)} \ln x$.

Подставляя значение y_1 в первое уравнение системы (4.81), получим

$$x^{\cdot}=h^{\nu} A_{0*}^{(m-\nu)} x^{m+1-\frac{1}{\nu+1}}+x^{m+1} f\left(x, x^{\frac{1}{\nu+1}}, x \ln x, x^{\frac{1}{\nu+1}} \ln x\right)$$

В случае нечетного ν коэффициент $h^{\nu} A_{0*}^{(m-\nu)}$ можно считать положительным. При четном ν этот коэффициент можно также считать положительным, если только число m четное. В обоих случаях невозмущенное движение неустойчиво. Движение будет неустойчиво и в случае ν четного, m нечетного, если $A_{0*}^{(m-\nu)}>0$.

Рассмотрим случай, когда $a \neq 0$, $b=0$ при $\varkappa=\varkappa_1$. Отметим, что при этом условии коэффициент $B_{0*}^{(m+1)}=0$.

Уравнение (4.82) заменой $y_1=(z+h) x^{\frac{\nu+1}{\nu}}$ приводится к виду

$$x \frac{dz}{dx}=\alpha z+\varphi\left(x, x^{1/\nu}, z\right) \tag{4.85}$$

если число h определить из уравнения

$$h^{\nu}\left(B_{1*}^{(m-\nu)}-\frac{1+\nu}{\nu} A_{0*}^{(m-\nu)}\right)=\frac{1+\nu}{\nu} A_{0*}^{(m+1)}-B_{1*}^{(m+1)} \tag{4.86}$$

которое при ν нечетном всегда имеет вещественное решение. В случае ν четного это уравнение имеет вещественное решение, когда знак разности, стоящей слева, совпадает со знаком правой части. Если знаки этих разностей различны, то, заменяя x на $-x_1$, мы вместо системы (4.81) получим новую систему, для которой уравнение (4.86) имеет вещественное решение.

Уравнение (4.85) имеет интеграл, голоморфный относительно x и $x^{1/\nu}$ при $\alpha \neq k_1+k_2/\nu$. При $\alpha=k_1+k_2/\nu$ интеграл этого уравнения будет голоморфным относительно x, $x^{1/\nu}$, $x \ln x$ и $x^{1/\nu} \ln x$.

Уравнение (4.82) при $B_{0*}^{(m+1)}=0$ будет иметь интеграл

$$y_1=h x^{(\nu+1)/\nu}+x^{(\nu+2)/\nu} f\left(x, x^{1/\nu}, x \ln x, x^{1/\nu} \ln x\right)$$

Подставляя значение y_1 в первое уравнение системы (4.81), получим

$$x^{\cdot}=\left(h^{\nu} A_{0*}^{(m-\nu)}+A_{0*}^{(m+1)}\right) x^{m+1}+x^{m+1} \psi(x)$$

где $\psi(x)$ обращается в нуль при $x=0$.

Из этого уравнения следует, что в случае m нечетного невозмущенное движение всегда неустойчиво. Движение будет неустойчиво и при m четном, если только выражение

$$h^{\nu} A_{0*}^{(m-\nu)}+A_{0*}^{(m+1)}>0$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно было бы рассмотреть исследуемый случай более подробно. В частности, легко поддаются исследованию те системы, в которых не только $B_{0*}^{(m+1)}=0$, но и последующие коэффициенты $B_{1*}^{(m+1)}=B_{2*}^{(m+1)}=\ldots=B_{l*}^{(m+1)}=0$.

§ 33. Исследование устойчивости по формам высших порядков. Рассмотрим теперь систему (4.19) в случае, когда не только формы m-го, но и формы $(m+1)$-го порядка вопроса об устойчивости не решают.

При исследовании этой задачи будем считать $\nu_1=\ldots=\nu_p=1$.

Предположим также, что общие вещественные корни уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa)=0$ и $Y^{(m)}(1, \varkappa)=0$ не являются корнями уравнения $F_{-k}(1, \varkappa)=0$. При этих предположениях нам необходимо рассмотреть лишь те случаи, когда функция $\Phi_{-k1}(x, y) \equiv 0$ на прямых $y=\varkappa_j x$ $(j=1, \ldots, p_1)$, а на прямых $(j=p_1+1, \ldots, p)$ она принимает только отрицательные значения.

Представим систему (4.49) в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= (-y+\varkappa_1 x) X^{(m-1)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots + X^{(m+\alpha)}(x, y) + \ldots \\ y^{\cdot} &= (-y+\varkappa_1 x) Y^{(m-1)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots + Y^{(m+\alpha)}(x, y) + \ldots \end{aligned} \tag{4.87}$$

Пусть все функции $\Phi_{-1\delta}(x, y) \equiv 0$ на прямой $y = \varkappa_1 x$ ($\delta = 1, \ldots, \alpha - 1$), а функция $\Phi_{-1\alpha}(x, y) \not\equiv 0$ на этой прямой. Кроме этих функций будем рассматривать многочлены $F_\delta(1, \varkappa)$ ($\delta = 1,2, \ldots$). Может оказаться, что $F_1(1, \varkappa_1) \neq 0$, но может представиться и тот случай, когда $F_1(1, \varkappa_1) = F_2(1, \varkappa_1) = \ldots = F_{\beta-1}(1, \varkappa_1) = 0$, а $F_\beta(1, \varkappa_1) \neq 0$. Числа α и β могут принимать любые значения $\alpha = 2, 3, \ldots$, $\beta = 1, 2, \ldots$

Если систему уравнений преобразовать согласно § 32, то получим

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= y_1^2 (A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + A_2^{(m-1)} y_1 x_1^{m-3} + \ldots) + \\ &+ y_1 (A_1^{(m+1)} x_1^m + \ldots) + y_1 (A_1^{(m+\alpha-1)} x_1^{m+\alpha-2} + \ldots) + \\ &+ A_0^{(m+\alpha)} x_1^{m+\alpha} + A_1^{(m+\alpha)} y_1 x_1^{m+\alpha-1} + \ldots \\ y_1^{\cdot} &= y_1 (B_0^{(m-1)} x_1^{m-1} + B_1^{(m-1)} y_1 x_1^{m-2} + \ldots + B_1^{(m+1)} x_1^m + \\ &+ B_2^{(m+1)} y_1 x_1^{m-1} + \ldots + B_1^{(m+\beta-1)} x_1^{m+\beta-1} + \\ &+ B_2^{(m+\beta-1)} y_1 x_1^{m+\beta-2} + \ldots) + B_0^{(m+\beta)} x_1^{m+\beta} + \\ &+ B_1^{(m+\beta)} y_1 x_1^{m+\beta-1} + \ldots \end{aligned} \tag{4.88}$$

Коэффициенты $A_0^{(m+1)}, \ldots, A_0^{(m+\alpha-1)}$ обращаются в нуль в силу условия $\Phi_{-1\delta}(1, \varkappa_1) = 0$ ($\delta = 2, 3, \ldots, \alpha - 1$), а коэффициенты $B_0^{(m+1)}, \ldots, B_0^{(m+\beta-1)}$ в силу условия $F_\delta(1, \varkappa_1) = 0$ ($\delta = 1, \ldots, \beta - 1$).

Полагая

$$y_1 = c_1 x_1^k + c_2 x_1^{k+1} + \ldots \tag{4.89}$$

из системы (4.88) получим уравнения для определения постоянных c_k и наинизшей степени k.

Приводя результат подстановки к общему знаменателю и приравнивая члены с одинаковыми степенями x_1, получим $k = \beta + 1$, $c_1 = B_0^{(m+\beta)}/B_0^{(m-1)}$. Отметим, что коэффициент $B_0^{(m-1)} = F_{-1}(1, \varkappa_1) \neq 0$.

Последующие коэффициенты c_k представятся дробями, у которых числители являются многочленами от коэффициентов форм правых частей системы (4.88) и ранее определенных коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$. Знаменателями будут служить выражения, содержащие различные степени $B_0^{(m-1)}$.

Ряд (4.89) будет иметь вид

$$y_1(x_1) = c_1 x^{\beta+1} + c_2 x^{\beta+2} + \ldots \tag{4.90}$$

Такого рода ряды, как правило, будут расходящимися, в чем легко убедиться, положив в системе (4.88) $A_0^{(m+\alpha)} = 1$, $B_0^{(m-1)} = 1$, $B_0^{(m+\beta)} = 1$. Все остальные коэффициенты положим равными нулю. Кроме того, допустим, что $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

При этих условиях из системы (4.88) получим

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{y_1 - x_1^4}{x_1^3}$$

Это уравнение можно удовлетворить формально рядом

$$y_1(x_1) = \sum_{n=2}^{\infty} 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n-2)\, x_1^{2n}$$

который будет расходящимся при любых значениях x_1, кроме $x_1 = 0$.

Преобразуем систему (4.88), положив

$$y_1 = \eta + c_1 x_1^{\beta+1} + \ldots + c_N x_1^N \tag{4.91}$$

В результате при $\beta > \alpha - 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} = {} & \eta^2 (A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + \ldots) + \eta (A_1^{(m+1)} x_1^m + \ldots \\ & \ldots + A_1^{(m+2)} x_1^{m+1} + \ldots + A_1^{(m+\alpha-1)} x_1^{(m+\alpha-2)} + \ldots) + \\ & + A_0^{(m+\alpha)} x_1^{m+\alpha} + A_1^{(m+\alpha)} y_1 x_1^{m+\alpha-1} + \ldots \\ \eta^{\cdot} = {} & \eta (B_0^{(m-1)} x_1^{m-1} + \ldots + B_1^{(m+1)} x_1^m + \ldots + \\ & + B_1^{(m+\beta-1)} x_1^{m+\beta-2} + \ldots + c_1^{(m+\beta)} x_1^{m+\beta-1} + \ldots + \\ & + c_1^{(m+\beta+N)} x_1^{m+\beta+N-1} + \ldots) + c_0^{(m+\beta+N+1)} x_1^{m+\beta+N+1} + \ldots \end{aligned} \tag{4.92}$$

В правой части первого уравнения этой системы коэффициенты форм, порядок которых менее $m + \beta + 1$, останутся теми же, что и в системе (4.88). Коэффициенты форм правой части второго уравнения, порядок которых менее $m + \beta$, также останутся без изменения. Коэффициенты $c_0^{(m+\beta)}, \ldots, c_0^{(m+\beta+N)}$ обратятся в нули в результате замены (4.91).

Предположим теперь, что $\Phi_{-1\alpha}(x, y)$ на прямой $y = \varkappa_1 x$ может принимать положительное значение. Тогда можно считать $A_0^{(m+\alpha)} > 0$.

Докажем, что при этом условии невозмущенное движение неустойчиво.

Возьмем функцию Четаева в виде

$$V = x_1^2 + \eta^2$$

В силу условия $A_0^{(m+\alpha)} > 0$ мы всегда можем найти такое число N, что в области $-\eta^2 + x_1^{2N} \geqslant 0$ при достаточно малом $x_1 > 0$ произведение VV' будет положительным. Для этого достаточно положить $N = \alpha + 3$. Функцию W возьмем в виде

$$W = -\eta^2 + x_1^{2(\alpha+4)}$$

Очевидно, что область $W > 0$ для достаточно малых $x_1 > 0$ находится внутри области $-\eta^2 + x_1^{2(\alpha+3)} > 0$, где $VV' > 0$.

Определим производную W' при $\eta^2 = x_1^{2(\alpha+4)}$.

$$\begin{aligned} W' = {} & 2(\alpha+4) x_1^{2\alpha+7} [\eta^2 (A_1^{(m-1)} x_1^{m-2} + \ldots) + \eta (A_1^{(m+1)} x_1^m + \ldots) + \\ & + A_0^{(m+\alpha)} x_1^{m+\alpha} + \ldots] - 2\eta^2 [B_0^{(m-1)} x_1^{m+2} + \ldots + \\ & + c_1^{(m+\beta)} x_1^{m+\beta-1} + \ldots] - 2\eta (c_0^{(m+\beta+\alpha+5)} x_1^{m+\beta+N+1} + \ldots) + \ldots = \\ = {} & -2B_0^{(m-1)} x_1^{m+2\alpha+6} + \ldots \end{aligned} \tag{4.93}$$

Отсюда следует, что знак W' при $\eta^2 = x_1^{2(\alpha+4)}$ и достаточно малых $x_1 > 0$ постоянен. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво.

Аналогичные рассуждения можно провести в отношении любой прямой $y = \varkappa_j x$ $(j = 1, \ldots, p)$.

На основании изложенного можно формулировать теорему.

Теорема. Если система уравнений (4.87) такова, что хотя бы на одной прямой $y = \varkappa_j x$ $(j = 1, \ldots, p)$ функции $\Phi_{-1\delta}(x, y) = 0$ для $\delta = 1, \ldots, \alpha - 1$, а $\Phi_{-1\alpha}(x, y) > 0$, и если при этом многочлен $F_{-1}(1, \varkappa_j) \neq 0$, а многочлены $F_\delta(1, \varkappa_j) = 0$ для $\delta = 1, \ldots, \beta$, $\beta > \alpha - 1$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Предположим теперь, что $\beta \leqslant \alpha - 1$. В этом случае в результате замены (4.91) система (4.88) примет вид

$$x_1^{\cdot}=\eta_1^2(A_1^{(m-1)}x_1^{m-2}+\ldots)+\eta(H_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots+H_1^{(m+2)}x_1^{m+1}+\ldots+$$
$$+H_1^{(m+k-1)}x_1^{m+k-2})+H_0^{(m+k)}x_1^{m+k}+\ldots$$

$$\eta_1^{\cdot}=\eta_1(B_0^{(m-1)}x_1^{m-1}+\ldots+E_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots+E_1^{(m+N-1)}x_1^{m+N-2})+$$
$$+E_0^{(m+N)}x_1^{m+N}+\ldots \tag{4.94}$$

Коэффициенты $H_j^{(m+\gamma)}$ и $E_j^{(m+\gamma)}$ определятся через коэффициенты $A_j^{(m+\gamma)}$, $B_j^{(m+\gamma)}$ и коэффициенты $c_{\beta+1}, \ldots, c_{\beta+k}$.

Отметим, что коэффициент $H_0^{(m+k)}$ будет в вопросе устойчивости играть роль коэффициента $A_0^{(m+\alpha)}$.

В общем случае число $k<\alpha$, но в частных случаях может оказаться, что $k\geqslant\alpha$. Не исключается и тот случай, когда $k=\infty$. Легко показать, что при $k=\infty$, ряд (4.89) будет абсолютно сходящимся для $|x|$ достаточно малых. Этот ряд будет определяться уравнением

$$y(B_0^{(m-1)}x^{m-1}+\ldots+B_1^{(m+\beta-1)}x^{m+\beta-2}+\ldots)+B_0^{(m+\beta)}x^{m+\beta}+\ldots=0$$

Система (4.94) в результате преобразования

$$\eta_1=\eta+\sum_{n=1}^{\infty}c_{\beta+n}x_1^n \quad (\text{случай } k=\infty)$$

примет вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot}&=\eta[\eta(A_1^{(m-1)}x_1^{m-2}+\ldots)+H_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots] \\ \eta^{\cdot}&=\eta[B_0^{(m-1)}x_1^{m-1}+\ldots+E_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots] \end{aligned} \tag{4.95}$$

Прямая $\eta=0$ будет особенной для правых частей этой системы.

Для исследования системы (4.95) рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot}&=\eta(A_1^{(m-1)}x_1^{m-2}+\ldots+A_{m-1}^{(m-1)}\eta^{m-2})+H_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots \\ \eta^{\cdot}&=B_0^{(m-1)}x_1^{m-1}+\ldots+B_{m-1}^{(m-1)}\eta^{m-1}+E_1^{(m+1)}x_1^m+\ldots \end{aligned} \tag{4.96}$$

Пусть для этой системы уравнение $F_0^*(1,\varkappa)=F_{-1}(1,\varkappa)=0$ не имеет вещественных корней и

$$\int_0^{2\pi}\frac{R_0^*}{F_0^*}\,d\theta\neq 0$$

Тогда, очевидно, нулевое решение системы (4.95) будет устойчивым. Поведение интегральных кривых, определяемых системой (4.96), при наличии вещественных корней уравнения $F_0^*(1,\varkappa)=0$ можно исследовать ранее изложенным способом.

Предположим, что поведение интегральных кривых системы (4.96) нам известно, такую же картину в фазовой плоскости представит система (4.95). Движение изображающей точки по интегральным кривым будет для систем (4.95) и (4.96) различным. Для решения вопроса об устойчивости интегралов системы (4.95) необходимо учесть, что направление движения в верхней полуплоскости ($\eta>0$) будет совпадать с тем направлением, которое определяется системой (4.96), а в нижней ($\eta<0$) оно будет обратным.

Возвращаемся к общему случаю, когда в системе (4.94) $k=\alpha$. Будем предполагать, что число N в (4.91) выбрано согласно равенству $N=k+N_1$, где N_1 — достаточно большое число.

Если окажется, что $H_0^{(m+\alpha)}>0$ или при $H_0^{(m+\alpha)}<0$ число $(m+k)$ четное, то невозмущенное движение, определяемое системой (4.99), будет неустойчиво. Доказательство этого положения аналогично предыдущему случаю ($\beta \geqslant \alpha - 1$).

Рассмотрим теперь системы вида (4.94), у которых $(m+k)$ нечетное, а $H_0^{(m+\alpha_1)} < 0$. Предположим вначале, что $p = 1$, т. е. мы имеем единственную особенную прямую $y = \varkappa_1 x$.

Кроме того, будем предполагать, что все коэффициенты $H_1^{(m+\delta)}$ ($\delta = 1, \ldots, k-1$) равны нулю. Полагая $x_1 = r_1 \cos\theta_1$, $\eta_1 = r_1 \sin\theta_1$, получим

$$
\begin{aligned}
r_1^{\cdot} &= \sin^2\theta_1 \left(r_1^m R_{-1}^{(1)} + r_1^{m+1} R_1^{(1)} + \ldots + r_1^{m+k-1} R_{\alpha_1-1}^{(1)}\right) + r_1^{m+k} R_{\alpha_1}^{(1)} + \ldots \\
\theta_1^{\cdot} &= \sin\theta_1 \left(r_1^{m-1} F_{-1}^{(1)} + r_1^m F_1^{(1)} + \ldots + r_1^{m+N-2} F_{N-1}^{(1)}\right) + r_1^{m+N} F_N^{(1)} + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.97}
$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде (4.35), тогда будем иметь

$$
\begin{aligned}
V' = \exp\left[\int_0^{\theta_1} \psi(\theta_1)\, d\theta_1\right] r_1^m \Big\{ &\sin\theta_1 \Big[R_{-1}^{(1)} \sin\theta_1 + \psi F_{-1}^{(1)} + \\
&+ \left(R_1^{(1)} \sin\theta_1 + \psi F_1^{(1)}\right) r_1 + \ldots + \left(R_{\alpha_1-1}^{(1)} \sin\theta_1 + \psi F_{\alpha_1-1}^{(1)}\right) r_1^{\alpha_1-1}\Big] + \\
&+ \left(R_{\alpha_1}^{(1)} + \psi F_{\alpha_1}^{(1)} \sin\theta_1\right) r_1^{\alpha_1} + \ldots \Big\}
\end{aligned}
$$

Функцию ψ определим из уравнения

$$
R_{-1}^{(1)} \sin\theta_1 + \psi F_{-1}^{(1)} = -h_1(\theta_1) \sin\theta_1
$$

согласно § 28. Подставляя значение $\psi(\theta_1)$ в (4.97), получим

$$
\begin{aligned}
V' = \exp\left[\int_0^{\theta_1} \psi(\theta_1)\, d\theta_1\right] r_1^m \Big\{ &\left[-h_1(\theta_1) + P_1^{(1)} r_1 + \ldots + P_{\alpha_1-1}^{(1)} r_1^{\alpha_1-1}\right] \sin^2\theta_1 + \\
&+ \left(R_{\alpha_1}^{(1)} - \frac{h_1(\theta_1) + R_{-1}^{(1)}}{F_{-1}^{(1)}} F_{\alpha_1}^{(1)} \sin^2\theta_1\right) r_1^{\alpha_1} + \ldots \Big\} + \ldots
\end{aligned}
\tag{4.98}
$$

где $P_1^{(1)}, \ldots, P_{\alpha_1-1}^{(1)}$ — ограниченные и периодические функции с периодом 2π.

Отметим, что V' при достаточно малых r отрицательна для любых вещественных значений θ_1 в интервале $(0 \div 2\pi)$, кроме $-\varepsilon < \theta_1 < \varepsilon$ и $\pi - \varepsilon < \theta_1 < \pi + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая величина, отличная от нуля.

В интервалах $-\varepsilon < \theta_1 < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \theta_1 < \pi + \varepsilon$ знак производной совпадает со знаком выражения $R_{\alpha_1}^{(1)}$. Но знак $R_{\alpha_1}^{(1)}$ в указанных интервалах определяется знаком коэффициента $H_0^{(m+\alpha_1)}$, который по условию менее нуля. Следовательно V', определяемая (4.98), представляет определенно-отрицательную функцию r при любых вещественных значениях θ_1. На основании теоремы Ляпунова мы можем утверждать, что невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Покажем теперь, что любую систему (4.94) при $H_1^{(m+\delta)} \neq 0$ ($\delta = 1, \ldots, \alpha - 1$) можно преобразовать в новую, в которой коэффициенты, играющие роль $H_1^{(m+\delta)}$, будут равны нулю. Предположим, что $H_1^{(m+1)} = H_1^{(m+2)} = \ldots = H_1^{(m+h)} = 0$, $h < \alpha - 1$, а $H_1^{(m+h+1)} \neq 0$. Полагая

$$
\xi_1 = x_1 - \frac{H_1^{(m+h+1)}}{B_0^{(m-1)}} x_1^{h+1} \eta_1
\tag{4.99}
$$

получим новую систему, аналогичную (4.94), в которой коэффициент, играющий роль коэффициента $H_1^{(m+h+1)}$, будет равен нулю. Давая h значения $0, 1, \ldots, \alpha - 2$ и производя указанные преобразования (4.99), получим систему, аналогичную (4.99), в которой $H_1^{(m+\delta)} = 0$ ($\delta = 1, \ldots, \alpha - 1$). Отметим, что при этом преобразовании коэффициенты $B_0^{(m-1)}$ и $H_0^{(m+\alpha)}$ останутся без изменения.

Исследуем тот случай, когда имеется несколько особенных прямых, т. е. $p > 1$. Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ — общие корни уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$, а $F_{-p}(1, \varkappa) \neq 0$ при $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$.

Представим формы m-го порядка в виде

$$X^{(m)}(x, y) = (y - \varkappa_j x) \prod_{j=1}^{p}{}' (y - \varkappa_j x) X^{(m-p)}(x, y) = (y - \varkappa_j x) \Pi_j X^{(m-p)}$$

$$Y^{(m)}(x, y) = (y - \varkappa_j x) \prod_{j=1}^{p}{}' (y - \varkappa_j x) Y^{(m-p)}(x, y) = (y - \varkappa_j x) \Pi_j Y^{(m-p)}$$

Систему (4.87) можно представить в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= (y - \varkappa_j x) \Pi_j X^{(m-p)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots + X^{(m+\alpha)}(x, y) + \ldots \\ y^{\cdot} &= (y - \varkappa_j x) \Pi_j Y^{(m-p)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots + Y^{(m+\alpha)}(x, y) + \ldots \end{aligned} \tag{4.100}$$

Если эту систему подвергнуть тем же преобразованиям, что и систему (4.87), то для любого корня $\varkappa_j$ мы получим уравнения, аналогичные уравнениям (4.94), предполагая, что $H_1^{(m+\delta)} = 0$ ($\delta = 1, \ldots, \alpha_j - 1$)

$$\begin{aligned} x_j^{\cdot} &= \eta_j^2 [\Pi_j X^{(m-p)}(x_j, \eta_j) + H_{2j}^{(m+1)} x_j^{(m-1)} + \ldots \\ &\ldots + H_{2j}^{(m+\alpha_j-1)} x^{m+\alpha_j-3}] + H_{j0}^{(m+\alpha_j)} x_j^{m+\alpha_j} + \ldots \\ \eta_j^{\cdot} &= \eta_j [\Pi_j Y^{(m-p)}(x_j, \eta_j) + E_{j1}^{(m+1)} x_j^{m} + \ldots \\ &\ldots + E_{j1}^{(m+N-1)} x^{m+N-2}] + E_{j0}^{(m+N)} x_j^{(m+N)} + \ldots \end{aligned} \tag{4.101}$$

Полагая $x_j = r_j \cos\theta_j$, $\eta_j = r_j \sin\theta_j$, получим систему, аналогичную (4.97), где вместо верхнего индекса (1) будет стоять индекс (j), а выражения $R_{-1}^{(j)}$ и $F_{-1}^{(j)}$ представятся в виде

$$R_{-1}^{(j)} = \Pi_j R_{-p}^{(j)}, \qquad F_{-1}^{(j)} = \Pi_j F_{-p}^{(j)}.$$

Давая j значения $1, \ldots, p$, получим p систем уравнений относительно $r_1, \ldots, r_p, \theta_1, \ldots, \theta_p$.

Построим для каждой системы функцию

$$V_j(r_j, \theta_j) = r_j \exp\left[\int_0^{\theta_j} \psi_j(\theta_j)\, d\theta_j\right]$$

и определим функцию $\psi_j(\theta_j)$ из уравнения

$$R_{-p}^{(j)} \sin\theta_j + \psi_j F_{-p}^{(j)} = -h_j(\theta_j) \sin\theta_j$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} V_j' &= \frac{\partial V_j}{\partial r_j} r^{\cdot}_j + \frac{\partial V_j}{\partial \theta_j} \theta_j^{\cdot} = \exp\left[\int_0^{\theta_j} \psi_j\, d\theta_j\right] \Big\{\Big[-h_j(\theta_j) \Pi_j(\theta_j) + \\ &+ P_1^{(j)}(\theta_j) r_j + P_{\alpha_j-1}^{(\alpha_j)} r_j^{\alpha_j-1}\Big] \sin^2\theta_j + \\ &+ \left(R_{\alpha_j}^{(j)} - \frac{h_j + R_{-p}^{(j)}}{F_{-p}^{(j)}} F_{\alpha_j}^{(j)} \sin^2\theta_j\right) r_j^{\alpha_j} + \ldots\Big\} \end{aligned}$$

Легко убедиться, что функция V_j' будет менее нуля для всех вещественных значений θ_j, за исключением $-\varepsilon < \theta_s < \varepsilon$, $\pi - \varepsilon < \theta_s < \pi + \varepsilon$ $(s = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, p)$, если только $R_{\alpha_j}^{(j)} < 0$ при $\sin\theta_j = 0$. Легко убедиться, что знак $R_{\alpha_j}^{(j)}$ совпадает со знаком выражения $H_0^{(m+\alpha_j)}$, который по условию менее нуля.

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = V_1(r_1, \theta_1) + V_2(r_2, \theta_2) + \ldots + V_p(r_p, \theta_p)$$

Тогда

$$V' = -\sum_{j=1}^{p} \exp\left[\int_0^{\theta_j} \psi_j d\theta_j\right] h(\theta_j) \Pi_j(\theta_j) r_j^m \sin^2\theta_j +$$

$$+ r_j^m \sum_{s=1}^{\alpha_j - 1} P_s^{(j)} r_j^s \sin^2\theta_j + \sum_{j=1}^{p} \left(R_{\alpha_j}^{(j)} - \frac{h_j + R_{-p}^{(j)}}{F_{-p}^{(j)}} \prod_l \sin^2\theta_l\right) r_j^{\alpha_j} + \ldots$$

и представляет определенно-отрицательную функцию $r_1, \ldots, r_p$ для любых вещественных значений θ_j. Следовательно, невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

Изложенное в § 33 доказывает следующую теорему.

Теорема. Если система уравнений (4.87) такова, что в результате преобразований $y_j = y - \varkappa_j x$ и $x = \varkappa_j + \mu_j y_j$, $\mu_j = A_{0*j}^{(m-1)}/B_{0*j}^{(m-1)}$ и последующего преобразования

$$\eta_j = y_j + c_{j\beta_j+1}\, x^{\beta_j+1} + c_{jN}\, x^N$$

получаем систему (4.101), в которой по крайней мере одно из чисел $H_{j0}^{(m+\alpha_j)} > 0$, или при $H_{j0}^{(m+\alpha_j)} < 0$ число $(m + \alpha_j)$ четное, то невозмущенное движение неустойчиво. Если же при нечетном $(m + \alpha_j)$ все коэффициенты $H_{j0}^{(m+\alpha_j)} < 0$, то движение асимптотически устойчиво.

Руководствуясь методом построения функций Ляпунова и Четаева, изложенным в этой главе, можно было бы рассмотреть задачи более сложные, связанные с наличием общих, кратных, вещественных корней уравнений $X^{(m)}(1, \varkappa) = Y^{(m)}(1, \varkappa) = 0$ при условии, что $\Phi(x, y)$ обращаются в нуль на всех прямых $y = \varkappa_j x$.

Такого рода задачи представляют несомненный интерес для качественной теории дифференциальных уравнений. Но ввиду их частности мы здесь на этих задачах останавливаться не будем.

§ 34. Случай $F_0(x, y) \equiv 0$. Легко обнаружить, что тождество $F_0(1, \varkappa) \equiv 0$ возможно лишь при условиях $X^{(m)} = xX^{(m-1)}(x, y)$, $Y^{(m)} = yX^{(m-1)}(x, y)$. Если форма $X^{(m-1)}$ может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво, так как $R_0 = (x^2 + y^2)\, X^{(m-1)}$ может принимать положительные значения на прямых $y = \varkappa x$ (число $\varkappa$ в этом случае произвольно). Следовательно, устойчивость может иметь место, когда форма $X^{(m-1)}(x, y)$ определенно-отрицательная, или когда она имеет вид

$$X^{(m-1)} = -\prod_{j=1}^{p} (a_j x + b_j y)^{2\nu_j} X^{(m-1-k)} \qquad (k = 2\nu_1 + \ldots + 2\nu_p)$$

где $X^{(m-1-k)}(x, y)$ — определенно-положительна. Отсюда следует, что число m должно быть нечетным.

Полагая, что $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, будем иметь

$$r^{\cdot} = r^m \prod_{j=1}^{p} (a_j\cos\theta + b_j\sin\theta)^{2\nu_j} R_{-k}(\theta) + r^{m+1} F_1(\theta) + \ldots \tag{4.102}$$

$$\theta^{\cdot} = r^m F_1(\theta) + r^{m+1} F_2(\theta) + \ldots$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде (4.35). Тогда

$$V' = r^m \exp\left[\int_0^\theta \psi d\theta\right]\left[-\prod_{j=1}^{p}(a_j\cos\theta + b_j\sin\theta)^{2\nu_j} R_{-k}(\theta) + \right.$$

$$\left. + r(R_1 + \psi F_1) + \dots\right]$$

Если $F_1(\theta) \neq 0$ на прямых $a_j\cos\theta + b_j\sin\theta = 0$, то функцию ψ можно выбрать так, чтобы выражение $R_1 + \psi F_1$ было отрицательно для значений углов, определяемых уравнениями $a_j\cos\theta + b_j\sin\theta = 0$. В этом случае невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво. Если $F_1 = 0$ для этих углов, то мы должны рассмотреть лишь случай $F_1(\theta) = 0$, $R_1(\theta) > 0$ для одной или нескольких прямых. Случай $R_1 < 0$ исключается, так как число m — нечетное.

Предположим вначале, что мы имеем дело только с одной прямой. Запишем систему уравнений (4.87) в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= -(y - \varkappa_1 x)^{2\nu_1} X^{(m-2\nu_1)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \dots \\ y^{\cdot} &= -y(y - \varkappa_1 x)^{2\nu_1} X^{(m-2\nu_1)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \dots \end{aligned} \qquad (4.103)$$

Полагая $y_1 = y - \varkappa_1 x$, получим

$$x^{\cdot} = y_1^{2\nu_1}\left(A_{0*}^{(m-2\nu_1)} x^{m-2\nu_1} + \dots + A_{m-2\nu_1*}^{(m-2\nu_1)} y_1^{m-2\nu_1}\right) +$$

$$+ A_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + A_{1*}^{(m+1)} y_1 x^m + \dots$$

$$y_1^{\cdot} = y_1^{2\nu_1}\left(B_{0*}^{(m-2\nu_1)} x^{m-2\nu_1} + \dots + B_{m-2\nu_1*}^{(m-2\nu_1)} y_1^{m-2\nu_1}\right) + B_{1*}^{(m+1)} y_1 x^m + \dots$$

Отсюда, полагая $y_1 = (z + h)x^2$, где $h = B_0^{(m+2)}/A_0^{(m+1)}$, получим

$$x\frac{dz}{dx} = \delta x + \varphi(x, z)$$

Обозначая через $z(x)$ интеграл этого уравнения, который при $x = 0$ обращается в нуль, и подставляя значение $y_1 = [z(x) + h]x^2$, получим

$$x^{\cdot} = A_{0*}^{(m+1)} x^{m+1} + x^{m+1} P(x) \qquad (4.104)$$

где $P(x)$ обращается в нуль при $x = 0$.

Нам необходимо рассмотреть лишь тот случай, когда m — нечетное, так как при m четном, как указывалось, имеет место неустойчивость. При m нечетном уравнение (4.104) определит неустойчивое движение.

Если $R_1 = 0$ на прямых $a_j\cos\theta + b_j\sin\theta = 0$, то вопрос об устойчивости членами $(m + 1)$-го порядка не решается.

ГЛАВА V

ОДИН НУЛЕВОЙ И ДВА ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЯ

§ 35. **Установившееся движение.** Рассмотрим теперь систему

$$y_j^{\cdot} = g_{j1} y_1 + \ldots + g_{jn+3} y_{n+3} + Y_j(y_1, \ldots, y_{n+3}) \qquad (j=1, \ldots, n+3) \qquad (5.1)$$

предполагая, что g_{ji} — постоянные величины, $Y_j(y_1, \ldots, y_{n+3})$ — голоморфные функции в окрестности точки $y_1 = \ldots = y_{n+3} = 0$, разложения которых не содержат линейных членов, определяющее уравнение $|g_{ji} - \delta_{ji}\varkappa| = 0$ имеет один корень, равный нулю, два чисто мнимых корня $\pm i\lambda$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Линейной подстановкой

$$x = \sum_{j=1}^{n+3} A_j y_j, \qquad y = \sum_{j=1}^{n+3} B_j y_j, \qquad z = \sum_{j=1}^{n+3} C_j y_j$$

систему (5.1) можно преобразовать к виду

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X^*(x, y, z, y_1, \ldots, y_n), \qquad y^{\cdot} = \lambda x + Y^*(x, y, z, y_1, \ldots, y_n)$$

$$z^{\cdot} = Z^*(x, y, z, y_1, \ldots, y_n)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + a_s x + b_s y + c_s z + Y_s^*(x, y, z, y_1, \ldots, y_n) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Полагая далее $x_s = y_s + \alpha_s x + \beta_s y + \gamma_s z$ $(s = 1, \ldots, n)$, определим постоянные величины α_s, β_s и γ_s так, чтобы в присоединенной системе линейные члены не содержали переменных x, y, z.

В результате будем иметь

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X(x, y, z, x_1, \ldots, x_n), \qquad y^{\cdot} = \lambda x + Y(x, y, z, x_1, \ldots, x_n)$$

$$z^{\cdot} = Z(x, y, z, x_1, \ldots, x_n)$$

$$x_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y, z, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n) \qquad (5.2)$$

где

$$X = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} X^{(l)}, \qquad Y = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Y^{(l)}, \qquad Z = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} Z^{(l)}, \qquad X_s = \sum_{l \geqslant 2}^{\infty} X_s^{(l)}$$

а $X^{(l)}$, $Y^{(l)}$, $Z^{(l)}$, $X_s^{(l)}$ — формы l-й степени от x, y, z, x_1, …, x_n.

Преобразуем систему уравнений (5.2), вводя замену

$$x_s = \omega_s + \vartheta_s(x, y, z) \qquad (5.3)$$

Здесь $v_s(x, y, z)$ — многочлены, представляющие сумму форм до N-го порядка включительно в рядах $u_s(x, y, z)$, формально удовлетворяющих системе уравнений с частными производными

$$\frac{\partial u_s}{\partial x}[-\lambda y+X(x, y, z, u_1, \ldots, u_n)] + \frac{\partial u_s}{\partial y}[\lambda x+ Y(x, y, z, u_1, \ldots, u_n)] + \\ +\frac{\partial u_s}{\partial z} Z(x, y, z, u_1, \ldots, u_n) = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, y, z, u_1, \ldots, u_n) \qquad (5.4)$$

Система (5.4) не удовлетворяет теорему Ляпунова о существовании голоморфного решения системы уравнений в частных производных {30}. А. М. Ляпунов в своем сочинении подчеркивает, что в общем случае для u_s можно строить лишь формальные ряды. Однако расходимость рядов u_s не играет никакой роли, поскольку в дальнейших преобразованиях в замене (5.3) берутся не ряды u_s, а многочлены v_s. Эта замена не меняет задачи об устойчивости, однако с ее помощью, как правило, удается добиться того, чтобы степень переменных x, y, z, входящих отдельно от $\omega_1, \ldots, \omega_n$ в присоединенной системе была выше степени тех же переменных в критической системе. Последнее не удается при сколь угодно большом увеличении числа членов в многочленах v_s, если

$$X[x, y, z, u_s(x, y, z)] = Y[x, y, z, u_s(x, y, z)] = Z[x, y, z, u_s(x, y, z)] \equiv 0 \quad (5.5)$$

Когда же имеют место эти тождества, ряды $u_s(x, y, z)$ на основании теоремы § 19 будут абсолютно сходящимися и в замене (5.3) вместо многочленов v_s можно брать ряды u_s. Докажем, что при выполнении (5.5) невозмущенное движение устойчиво.

Система (5.2) в результате преобразования

$$x_s = \omega_s + u_s(x, y, z) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

примет вид

$$x^{\cdot} = -\lambda y + X_*(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n), \qquad y^{\cdot} = \lambda x + Y_*(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$z^{\cdot} = Z_*(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$\omega_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\omega_k + \Omega_s(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (s=1, \ldots, n) \qquad (5.6)$$

Функции X_*, Y_*, Z_*, Ω_s обращаются тождественно в нуль при $\omega_1 = \ldots = \omega_n = 0$.

Представим эти функции в виде

$$X_* = \sum_{s=1}^{n} \omega_s P_s(x, y, z) + X_*'(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$Y_* = \sum_{s=1}^{n} \omega_s Q_s(x, y, z) + Y_*'(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$Z_* = \sum_{s=1}^{n} \omega_s R_s(x, y, z) + Z_*'(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$

$$\Omega_s = \sum_{k=1}^{n} \omega_k H_{sk}(x, y, z) + \Omega_s'(x, y, z, \omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad (s=1, \ldots, n)$$

где P_s, Q_s, R_s, H_{sk} — голоморфные функции x, y, z, обращающиеся в нуль при $x = y = z = 0$, а X_*', Y_*', Z_*', Ω_s' не содержат в своих разложениях линейных членов от $\omega_1, \ldots, \omega_n$ и обращаются в нуль при $\omega_1 = \ldots = \omega_n = 0$.

Произведем замену

$$x=\xi+\sum_{s=1}^{n}\omega_s A_s(x, y, z), \qquad y=\eta+\sum_{s=1}^{n}\omega_s B_s(x, y, z)$$
$$z=\zeta+\sum_{s=1}^{n}\omega_s C_s(x, y, z) \tag{5.7}$$

где функции A_s, B_s, C_s определим таким образом, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль P_s, Q_s и R_s, обратились тождественно в нуль.

Для этого определим функции A_s, B_s, C_s из уравнений

$$-\lambda\frac{\partial A_s}{\partial x}y+\lambda\frac{\partial A_s}{\partial y}x=-\lambda B_s-\sum_{k=1}^{n}p_{ks}A_k-\sum_{k=1}^{n}H_{ks}A_k+P_s$$
$$-\lambda\frac{\partial B_s}{\partial x}y+\lambda\frac{\partial B_s}{\partial y}x=\lambda A_s-\sum_{k=1}^{n}p_{ks}B_k-\sum_{k=1}^{n}H_{ks}B_k+Q_s \tag{5.8}$$
$$-\lambda\frac{\partial C_s}{\partial x}y+\lambda\frac{\partial C_s}{\partial y}x=-\sum_{k=1}^{n}p_{ks}C_k-\sum_{k=1}^{n}H_{ks}C_k+R_s \qquad (s=1, \ldots, n)$$

Основываясь на теореме § 19, можем утверждать, что система (5.8) определит функции A_s, B_s, C_s в виде степенных рядов от x, y, z, абсолютно сходящихся для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$, $|z|$.

В результате преобразования получим систему уравнений

$$\xi^{\cdot}=-\lambda\eta+\Xi(\xi, \eta, \zeta, \omega_1, \ldots, \omega_n), \qquad \eta^{\cdot}=\lambda\xi+H(\xi, \eta, \zeta, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$
$$\zeta^{\cdot}=Z^*(\xi, \eta, \zeta, \omega_1, \ldots, \omega_n) \qquad \omega_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n}p_{sk}\omega_k+\Omega_s(\xi, \eta, \zeta, \omega_1, \ldots, \omega_n)$$
$$(s=1, \ldots, n) \tag{5.9}$$

В правых частях этой системы все функции Ξ, H, Z^* и Ω_s обращаются в нуль при $\omega_1=\ldots=\omega_n=0$, а функции Ξ, H и Z^* не содержат линейных членов от этих переменных.

Функцию Ляпунова, отвечающую системе (5.9), можно взять в виде

$$V=\xi^2+\eta^2+\zeta^2+W(\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

где W — определенно-положительная квадратичная форма $\omega_1, \ldots, \omega_n$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial\omega_s}(p_{s1}\omega_1+\ldots+p_{sn}\omega_n)=-(\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2)$$

Производную V' в силу уравнений (5.9) можно представить в виде

$$V'=-(\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2)+\sum_{s,\,k=1}^{n}\omega_s\omega_k\psi_{sk}(\xi, \eta, \zeta, \omega_1, \ldots, \omega_n) \tag{5.10}$$

где ψ_{sk} обращаются в нуль при $\zeta=\eta=\zeta=\omega_1=\ldots=\omega_n=0$.

Из равенства (5.10) следует, что V' является определенно-отрицательной функцией от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и постоянно отрицательной от ξ, η, ζ, ω_1, .., ω_n Отсюда заключаем, что невозмущенное движение устойчиво.

Заметим, что система (5.9) имеет частное решение

$$\xi=c_1\cos\lambda(t-t_0), \qquad \eta=c_1\sin\lambda(t-t_0), \qquad \zeta=c_2, \qquad \omega_1=\ldots=\omega_n=0$$

Следовательно, система (5.2) имеет периодическое решение вида

$$x_s = u_s[c_1 \cos\lambda(t-t_0),\ c_1 \sin\lambda(t-t_0), c_2]$$

$$x = c_1 \cos\lambda(t-t_0), \qquad y = c_1 \sin\lambda(t-t_0), \qquad z = c_2$$

которое будет существовать по крайней мере для $|c_1|$ и $|c_2|$ достаточно малых.

Предположим, что тождества (5.5) не имеют места. Тогда руководствуясь преобразованиями, изложенными в § 15, можем утверждать, что исследование системы (5.2) в случаях несущественно особенных приводится к исследованию системы второго порядка, определяющее уравнение которой имеет два нулевых корня

$$r^{\cdot} = rR(r^2, z) \qquad z^{\cdot} = Z(r^2, z) \tag{5.11}$$

Полагая $r^2 = \rho$ будем иметь

$$\rho^{\cdot} = 2\rho R(\rho, z), \qquad z^{\cdot} = Z(\rho, z) \tag{5.12}$$

При исследовании устойчивости переменную ρ мы должны считать величиной положительной.

Система (5.12) впервые рассматривалась в работе [10], где приводится исследование простейшего случая, когда система (5.12) имеет вид

$$\rho^{\cdot} = R^{(m)}(\rho, z) + R^{(m+1)}(\rho, z) + \ldots, \qquad z^{\cdot} = Z^{(m)}(\rho, z) + Z^{(m+1)}(\rho, z) + \ldots$$

и вопрос об устойчивости решается формами m-го порядка независимо от форм более высокого порядка. Результаты этих исследований приводятся также в работе [6] и в монографии [7]. Более общие случаи изложены впервые в работе [11].

Систему уравнений (5.12) в общем случае можно представить в виде

$$\rho^{\cdot} = \rho\,(a^{(2.0)}\rho + a^{(1.1)}z + a^{(3.0)}\rho^2 + a^{(2.1)}\rho z + a^{(1.2)}z^2) +$$

$$+ \rho \sum_{k_1+k_2=4}^{N} a^{(k_1, k_2)} \rho^{k_1-1} z^{k_2} + \ldots \tag{5.13}$$

$$z^{\cdot} = b^{(1.0)}\rho + b^{(2,0)}\rho^2 + b^{(1.1)}\rho z + b^{(0.2)}z^2 + \sum_{k_1+k_2=2}^{N} b^{(k_1, k_2)}\rho^{k_1} z^{k_2} + \ldots$$

Если $b^{(1.0)} \neq 0$, то задача об устойчивости системы (5.12) приводится к задаче двух нулевых корней с одной группой решений.

В случае $b^{(1.0)} = 0$ системе (5.13) соответствует два нулевых корня с двумя группами решений.

Исследование системы (5.13) представляет некоторые затруднения лишь в том случае, когда все коэффициенты $b^{(0,k)}$ $(k = 2, 3, \ldots, N)$ обращаются в нуль при любом как угодно большом числе N. Этот случай является существенно особенным. В этом случае члены выше N-го порядка в правой части второго уравнения системы (5.13) могут не обращаться в нуль при $\rho = 0$.

Исследуем этот случай. Возвращаясь к системе (5.2) преобразуем ее, положив

$$x = \xi + u(z), \qquad y = \eta + v(z), \qquad x_s = y_s + u_s(z) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

В результате будем иметь

$$\xi^{\cdot} = -\lambda\eta + \Xi(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k), \qquad \eta^{\cdot} = \lambda\xi + H(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k)$$

$$z^{\cdot} = Z^*(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k), \qquad y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_s(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k) \tag{5.14}$$

$$(s, k = 1, \ldots, n)$$

Совокупности членов выше первого порядка, не зависящих от ξ, η, $y_1, \ldots, y_n$, в правых частях этой системы представятся в виде

$$\begin{aligned}
&\Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = -\frac{du}{dz} Z(u, v, z, u_k) - \lambda u + X(u, v, z, u_k) \\
&H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = -\frac{dv}{dz} Z(u, v, z, u_k) + \lambda v + Y(u, v, z, u_k) \\
&Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = Z(u, v, z, u_k) \qquad (5.15) \\
&Y_s(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = -\frac{du_s}{dz} Z(u, v, z, u_k) + \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + Y_s(u, v, z, u_k)
\end{aligned}$$

Обращение в нуль коэффициентов $b^{(0,k)}$ ($k = 2, 3, \ldots, \infty$) возможно лишь в том случае, когда

$$Z(u, v, z, u_1, \ldots, u_n) = Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) \equiv 0$$

Определим значения функций u, v, u_s из (5.15) при условии

$$\begin{aligned}
Z(u, v, z, u_k) &= \Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = \\
&= H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) = Y_s^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0) \equiv 0
\end{aligned}$$

Мы можем утверждать, что правые части системы (5.14) обратятся тождественно в нуль, если положить $\xi = \eta = y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Применяя к системе уравнений (5.14) преобразования § 24, мы получим систему, аналогичную (5.13), в которой вся правая часть второго уравнения будет обращаться в нуль при $\rho = 0$.

Дальнейшее исследование этой задачи аналогично случаю, рассмотренному в § 24.

В главах II и IV приводятся подробные исследования системы (5.13) как в случае $b^{(1.0)} \neq 0$, так и в случае $b^{(1.0)} = 0$.

§ 36. Периодическое движение. Задача об устойчивости периодических движений в критическом случае двух корней характеристичного уравнения, по модулю равных единице, одного корня, равного единице, и n корней с модулями, меньшими единицы, преобразованиями Ляпунова приводится к исследованию устойчивости системы

$$\begin{aligned}
&x^\cdot = -\lambda y + X(x, y, z, x_k, t), \qquad y^\cdot = \lambda x + Y(x, y, z, x_k, t) \\
&z^\cdot = Z(x, y, z, x_k, t), \qquad x_s^\cdot = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} x_k + X_s(x, y, z, x_k, t) \qquad (5.16) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (s = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

Здесь X, Y, Z, X_s — голоморфные функции x, y, z, $x_1, \ldots, x_n$ с периодическими коэффициентами общего вещественного периода ω.

Преобразуем систему (5.16), положив

$$x_s = y_s + v_s(x, y, z, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (5.17)$$

считая v_s многочленами, представляющими сумму форм до N-го порядка включительно в рядах u_s, формально удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_s}{\partial t} + \frac{\partial u_s}{\partial x}[-\lambda y + X(x, y, z, u_k, t)] + \frac{\partial u_s}{\partial y}[\lambda x + Y(x, y, z, u_k, t)] + \\
&\quad + \frac{\partial u_s}{\partial z} Z(x, y, z, u_k, t) = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + X_s(x, y, z, u_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

(5.18)

Если

$$X[x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] =$$

$$= Y[x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] = Z, [x, y, z, u_k(x, y, z, t), t] \equiv 0 \tag{5.19}$$

то система (5.18) будет удовлетворять всем условиям теоремы, доказанной в § 20. Следовательно, ряды $u_s(x, y, z, t)$ будут абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|x|$, $|y|$, $|z|$.

В этом случае в результате замены

$$x_s = y_s + u_s(x, y, z, t) \quad (s = 1, .., n)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= -\lambda y + X_1(x, y, z, y_k, t), \quad y^{\cdot} = \lambda x + Y_1(x, y, z, y_k, t) \\ z^{\cdot} &= Z_1(x, y, z, y_k, t), \quad y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_{s1}(x, y, z, y_k, t) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Функции X_1, Y_1, Z_1, Y_{s1} обращаются тождественно в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Проводя далее доказательство, подобное доказательству § 35, легко убедиться, что невозмущенное движение устойчиво.

Система (5.20) имеет частное решение

$$x = c_1 \cos \lambda (t - t_0), \qquad y = c_1 \sin \lambda (t - t_0), \qquad z = c_2,$$

$$y_1 = \ldots = y_n = 0$$

Следовательно, система (5.16) имеет почти-периодическое решение вида

$$\begin{aligned} x_s &= u_s[c_1 \cos \lambda (t - t_0), \quad c_1 \sin \lambda (t - t_0), c_2, t] \\ x &= c_1 \cos \lambda (t - t_0), \qquad y = c_1 \sin \lambda (t - t_0), \ z = c_2 \end{aligned} \tag{5.21}$$

которое будет существовать по крайней мере для $|c_1|$ и $|c_2|$, достаточно малых. Решение (5.21) будет периодическим, если $\lambda\omega/\pi$ рационально.

Если тождества (5.19) не имеют места и отношение $\lambda\omega/\pi$ иррационально, то систему (5.16) с помощью преобразований, изложенных в главе III, можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} r^{\cdot} &= r[R^{(m)}(r^2, z) + \ldots + R^{(N)}(r^2, z)] + R^{(N+1)}(r, z, \theta, t) + \\ &\quad + R(r, z, \theta, y_k, t) \\ z^{\cdot} &= Z^{(m_1)}(r^2, z) + \ldots + Z^{(N)}(r^2, z) + Z^{(N+1)}(r, z, \theta, t) + Z(r, z, \theta, y_k, t) \\ y_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + Y_s^{(N+1)}(r, z, \theta, t) + Y_s(r, z, \theta, y_k, t) \\ r\frac{d\theta}{dt} &= \lambda r + F(r, z, \theta, y_k, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{5.22}$$

где $R^{(l)}$, $Z^{(l)}$ — формы l-й степени от r^2, z $(l \leqslant N)$; $R^{(N+1)}$, $Z^{(N+1)}$, $Y_s^{(N+1)}$ — совокупности членов выше N-го порядка, а R, Z, Y_s — обращаются в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$. Функции R и Z или не содержат линейных членов в отношении $y_1, \ldots, y^n$, или содержат их в произведении с $r^{k_1} z^{k_2}$ $(k_1+k_2 \geqslant N)$.

Если вопрос об устойчивости в переменных r, z решается формами $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ при условии $l \leqslant N$ независимо от форм более высокого порядка, то при исследовании устойчивости соответствующего невозмущенного движения достаточно рассмотреть систему второго порядка

$$r^{\cdot} = r\,[R^{(m)}(r^2, z) + \ldots + R^{(N)}(r^2, z)], \qquad z^{\cdot} = Z^{(m_1)}(r^2, z) + \ldots + Z^{(N)}(r^2, z) \tag{5.23}$$

Систему (5.23), полагая $r^2 = \rho$, можно представить в виде (5.13). Вопрос об устойчивости системы (5.13), как уже отмечалось, исследован в главах II и IV.

Остановимся лишь на том случае, когда все коэффициенты $b^{(0k)}$ $(k = 1, \ldots, N)$ обращаются в нуль при любом сколь угодно большом числе N. Возвращаясь к системе (5.20), преобразуем ее, положив

$$x = \xi + u(z, t), \qquad y = \eta + v(z, t), \qquad x_s = y_s + u_s(z, t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
&\xi^{\cdot} = -\lambda\eta + \Xi(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t)\\
&\eta^{\cdot} = \lambda\xi + H(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t)\\
&z^{\cdot} = Z^*(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t)\\
&y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, y_k + Y_s(\xi, \eta, z, u, v, u_k, y_k, t)\\
&\qquad (s, k = 1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Совокупности членов выше первого порядка, не зависящих от $\xi, \eta, y_1, \ldots, y_n$, в правых частях этой системы представятся в виде

$$\begin{aligned}
&\Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial u}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) -\\
&\qquad\qquad - \lambda v + X(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial u}{\partial t}\\
&H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial v}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) +\\
&\qquad\qquad + \lambda u + Y(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial v}{\partial t}\\
&Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = Z(u, v, z, u_k, t)\\
&Y_s(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = -\frac{\partial u_s}{\partial z} Z(u, v, z, u_k, t) +\\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, u_k + Y_s(u, v, z, u_k, t) - \frac{\partial u_s}{\partial t}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Обращение в нуль коэффициентов $b^{(0,k)}$ $(k = 2, \ldots, \infty)$ возможно лишь в том случае, когда

$$Z(u, v, z, u_1, \ldots, u_n, t) = Z^*(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0$$

Определим значения функций u, v, u_s из (5.25) при условии

$$
\begin{aligned}
Z(u, v, z, u_k, t) &= \Xi(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = \\
&= H(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) = \\
&= Y_s(0, 0, z, u, v, u_k, 0, \ldots, 0, t) \equiv 0
\end{aligned}
$$

Тогда правые части системы (5.24) будут обращаться тождественно в нуль, если положить $\xi = \eta = y_1 = \ldots = y_n = 0$.

Если систему (5.24) преобразовать к виду (5.22), то формы $Z^{(l)}$ будут обращаться в нуль при $r = 0$ для любых l, как бы велико число l ни бралось. Система второго порядка (5.23), соответствующая системе (5.24), будет такова, что прямая $r = 0$ будет особенной прямой для форм $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ любого сколь угодно высокого порядка. Исследование подобных систем представляет затруднения лишь в тех случаях, когда формы $R^{(l)}$ и $Z^{(l)}$ при сколь угодно больших l определяют устойчивое движение. Очевидно, устойчивость может быть только неасимптотической.

Если же будет обнаружено, что невозмущенное движение неустойчиво по формам l-го порядка ($l \leqslant N$), то нулевое решение системы (5.24) будет также неустойчивым.

Отметим, что если $\lambda\omega/\pi$ рационально, то задача об устойчивости нулевого решения системы уравнений (5.16) способом, изложенным в главе III, приводится к анализу трех уравнений с тремя нулевыми корнями.

ГЛАВА VI

ДВЕ ПАРЫ ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

§ 37. Установившееся движение. Пусть исследуемая система является системой $(n+4)$-го порядка вида

$$y_j^{\cdot} = g_{j1} y_1 + \ldots + g_{jn+4} y_{n+4} + Y_j(y_1, \ldots, y_{n+4}) \qquad (j=1, \ldots, n+4) \qquad (6.1)$$

где g_{jl} — постоянные коэффициенты; $Y_j(y_1, \ldots, y_{n+4})$ — голоморфные функции $y_1, \ldots, y_{n+4}$, обращающиеся в нуль при $y_1 = \ldots = y_{n+4} = 0$. Разложения $Y_j(y_1, \ldots, y_{n+4})$ по степеням $y_1, \ldots, y_{n+4}$ начинаются с членов не ниже второго порядка. Уравнение $|g_{jl} - \delta_{jl}\varkappa| = 0$ имеет две пары чисто мнимых корней $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ и n корней с отрицательными вещественными частями.

Линейной подстановкой с постоянными коэффициентами

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^{n+4} A_j y_j, \qquad \eta_1 = \sum_{j=1}^{n+4} B_j y_j, \qquad \xi_2 = \sum_{j=1}^{n+4} C_j y_j, \qquad \eta_2 = \sum D_j y_j$$

систему (6.1) преобразуем к виду

$$\xi_i^{\cdot} = -\lambda_i \eta_i + \Xi_i^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\eta_i^{\cdot} = \lambda_i \xi_i + H_i^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_1, \ldots, y_n)$$

$$y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} y_k + a_s \xi_1 + b_s \xi_2 + c_s \eta_1 + d_s \eta_2 + Y_s^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, y_1, \ldots, y_n)$$

$$(s=1, \ldots, n;\ i=1, 2)$$

Вводя далее замену

$$\zeta_s = y_s + \alpha_s \xi_1 + \beta_s \xi_2 + \gamma_s \eta_1 + \delta_s \eta_2 \qquad (s=1, \ldots, n)$$

и определяя постоянные величины α_s, β_s, γ_s, δ_s так, чтобы в присоединенной системе линейные члены не содержали переменных ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, получим

$$\xi_i^{\cdot} = -\lambda_i \eta_i + \Xi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

$$\eta_i^{\cdot} = \lambda_i \xi_i + H_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$$

$$\zeta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} \zeta_k + Z_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n) \qquad (i=1, 2;\ s=1, \ldots, n) \qquad (6.2)$$

где $\Xi_i = \sum_{l \geq 2}^{\infty} \Xi_i^{(l)}, \qquad H_i = \sum_{l \geq 2}^{\infty} H_i^{(l)}, \qquad Z_s = \sum_{l \geq 2}^{\infty} Z_s^{(l)}$

а $\Xi_i^{(l)}$, $H_i^{(l)}$, $Z_s^{(l)}$ — формы l-й степени от ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1, …, ζ_n.

Такое преобразование можно провести всякий раз, когда чисто мнимые корни — простые.

В случае кратных мнимых корней систему уравнений (6.1) можно привести к виду (6.2) лишь тогда, когда кратный корень обращает в нуль все миноры первого порядка основного определителя, соответствующего данной системе.

Дальнейшие преобразования системы (6.2) преследуют цель разделения критических и некритических переменных.

Замена

$$\zeta_s = z_s + v_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \qquad (s=1, \dots, n)$$

где $v_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ — многочлены с ограниченными коэффициентами, представляющие сумму форм до N-го порядка включительно в рядах $u_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$, формально удовлетворяющих системе уравнений с частными производными

$$\sum_{i=1,2} \frac{\partial u_s}{\partial \xi_i}[-\lambda_i \eta_i + \Xi_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1, \dots, u_n)] +$$
$$+ \sum_{i=1,2} \frac{\partial u_s}{\partial \eta_i}[\lambda_i \xi_i + H_i(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1, \dots, u_n)] =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + Z_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1, \dots, u_n) \qquad (6.3)$$

в большинстве случаев позволяет и для системы вида (6.2) добиться того, чтобы степень отдельно входящих критических переменных в присоединенной системе была выше степени тех же переменных в критической системе. Исключение представляет тот случай, когда

$$\Xi_i[\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_k(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)] = H_i[\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_k(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)] \equiv 0 \qquad (6.4)$$

Предположим, что тождества (6.4) действительно имеют место. Тогда ряды $u_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ на основании теоремы § 19 будут абсолютно сходящимися по крайней мере для достаточно малых значений $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, $|\eta_1|$, $|\eta_2|$. Докажем, что в этом случае невозмущенное движение устойчиво.

Система (6.2) в результате преобразования

$$\zeta_s = z_s + u_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) \qquad (s=1, \dots, n)$$

примет вид

$$\begin{aligned} \xi_i^{\cdot} &= -\lambda_i \eta_i + \Xi_{*i}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, z_1, \dots, z_n) \\ \eta_i^{\cdot} &= \lambda_i \xi_i + H_{*i}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, z_1, \dots, z_n) \qquad (i=1,2;\ s=1, \dots, n) \qquad (6.5) \\ z_s^{\cdot} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} z_k + Z_s^*(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, z_1, \dots, z_n) \end{aligned}$$

Функции Ξ_{*i}, H_{*i}, Z_s^* обращаются тождественно в нуль при $z_1 = \dots = z_n = 0$.

Представим эти функции в виде

$$\Xi_{*i} = \sum_{s=1}^{n} z_s P_{is}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + \Xi_{*i}'(\xi_1, \xi_2, \eta_1 \eta_2, z_1, \dots z_n)$$

$$H_{*i} = \sum_{s=1}^{n} z_s Q_{is}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + H_{*i}'(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, z_1, \dots, z_n)$$

$$Z_s^* = \sum_{k=1}^{n} z_k R_{sk}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) + Z_{*s}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, z_1, \dots, z_n)$$
$$(s=1, \dots, n;\ i=1,2)$$

где P_{is}, Q_{is}, R_{sk} — голоморфные функции $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, обращающиеся в нуль при $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$, а $\Xi_{*i}', H_{*i}', Z_{*s}$ не содержат в своих разложениях линейных членов от $z_1, \ldots, z_n$ и обращаются в нуль при $z_1 = \ldots = z_n = 0$.

Произведем замену

$$\xi_i = x_i + \sum_{s=1}^{n} z_s u_{is}, \quad \eta_i = y_i + \sum_{s=1}^{n} z_s v_{is} \tag{6.6}$$

где u_{is}, v_{is} — функции от $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$, удовлетворяющие уравнениям

$$-\sum_{l=1,2}\left(\frac{\partial u_{is}}{\partial \xi_l}\lambda_l \eta_l - \frac{\partial u_{is}}{\partial \eta_l}\lambda_l \xi_l\right) = -\sum_{k=1}^{n} p_{ks} u_{ik} - \lambda_i v_{is} + P_{is} - \sum u_{ik} R_{ks}$$

$$-\sum_{l=1,2}\left(\frac{\partial v_{is}}{\partial \xi_l}\lambda_l \eta_l - \frac{\partial v_{is}}{\partial \eta_l}\lambda_l \xi_l\right) = -\sum_{k=1}^{n} p_{ks} v_{ik} + \lambda_i u_{is} + Q_{is} - \sum v_{ik} R_{ks} \tag{6.7}$$

$$(s=1, \ldots, n; \ i=1, 2)$$

Система уравнений (6.7) удовлетворяет всем условиям теоремы § 19. Следовательно, функции u_{is}, v_{is} определятся из этой системы в виде абсолютно сходящихся рядов от $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ по крайней мере для достаточно малых значений $|\xi_1|, |\xi_2|, |\eta_1|, |\eta_2|$.

При таком определении u_{is}, v_{is} в преобразованной системе функции, играющие роль P_{is}, Q_{is} обратятся тождественно в нули.

Система уравнений (6.5) в результате преобразования (6.6) примет вид

$$x_i^{\cdot} = -\lambda_i y_i + X_i(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_n)$$

$$y_i^{\cdot} = \lambda_i x_i + Y_i(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_n)$$

$$z_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} z_k + Z_s(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1, 2; \ s=1, \ldots, n) \tag{6.8}$$

где X_i, Y_i, Z_s — обращаются в нуль при $z_1 = \ldots = z_n = 0$, а функции X_i, Y_i, кроме того, не содержат линейных членов в отношении $z_1, \ldots, z_n$.

Функцию Ляпунова для системы (6.8) возьмем в виде

$$V = \sum_{i=1,2}(x_i^2 + y_i^2) + W(z_1, \ldots, z_n) \tag{6.9}$$

Здесь W — определенно-положительная квадратичная форма $z_1, \ldots, z_n$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial z_s}(p_{s1} z_1 + \ldots + p_{sn} z_n) = -(z_1^2 + \ldots + z_n^2)$$

Производную V' в силу уравнений (6.8) можно представить в виде

$$V' = -(z_1^2 + \ldots + z_n^2) + \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} z_s z_k \psi_{sk}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, \ldots, z_n)$$

где ψ_{sk} обращаются в нуль при $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = z_1 = \ldots = z_n = 0$. Таким образом, V' представляет собой постоянно-отрицательную функцию, а V — определенно-положительную. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

Система (6.8) имеет частное решение

$$x_1 = c_1 \cos \lambda_1 (t-t_0), \qquad y_1 = c_1 \sin \lambda_1 (t-t_0), \qquad x_2 = c_2 \cos \lambda_2 (t-t_0)$$
$$y_2 = c_2 \sin \lambda_2 (t-t_0), \qquad z_1 = \ldots = z_n = 0$$

а система (6.2) имеет решение вида

$$\zeta_s = u_s [c_1 \cos \lambda_1 (t-t_0), \quad c_1 \sin \lambda_1 (t-t_0), \quad c_2 \cos \lambda_2 (t-t_0), \quad c_2 \sin \lambda_2 (t-t_0)]$$
$$\xi_1 = c_1 \cos \lambda_1 (t-t_0), \qquad \eta_1 = c_1 \sin \lambda_1 (t-t_0), \qquad \xi_2 = c_2 \cos \lambda_2 (t-t_0)$$
$$\eta_2 = c_2 \sin \lambda_2 (t-t_0)$$

по крайней мере для $|c_1|$ и $|c_2|$, достаточно малых.

Предположим, что тождества (6.4) не имеют места и вопрос об устойчивости системы (6.2) решается членами порядка не выше, чем N.

Пользуясь преобразованиями, изложенными в § 15, исследование устойчивости системы (6.2) при выполнении условия $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \neq 0$ для всех целых чисел m_1 и m_2, включая нуль, удовлетворяющих неравенству $m_1 + m_2 \leqslant N$, можно свести к эквивалентной задаче об устойчивости системы

$$r_i^{\cdot} = r_i R_i^{(m-1)} + r_i R_i^{(m+1)} + \ldots + r_i R_i^{(N-1)}, \quad R_i^{(l)} = \\ = \sum_{2k_1+2k_2=l} a_i^{(k_1, k_2)} r_1^{2k_1} r_2^{2k_2} \qquad (i=1, 2;\ m \geqslant 3;\ k_1, k_2 = 0, 1, \ldots,\ r_i \geqslant 0) \tag{6.10}$$

которой соответствуют два нулевых корня с двумя группами решений.

Применяя к системе (6.10) критерии устойчивости, полученные в главе IV, можно судить об устойчивости и неустойчивости.

Так, например, для асимптотической устойчивости по формам третьего порядка необходимо и достаточно, чтобы на вещественных решениях уравнения

$$F_0 = r_1 r_2 (R_2^{(m-1)} - R_1^{(m-1)}) = r_1 r_2 [r_1^2 (a_2^{(1.0)} - a_1^{(1.0)}) + \\ + r_2^2 (a_2^{(0.1)} - a_1^{(0.1)})] = 0 \qquad (m=3)$$

выражение

$$R_0 = r_1^2 R_2^{(m-1)} + r_2^2 R_2^{(m-1)} = a_1^{(1.0)} r_1^4 + r_1^2 r_2^2 (a_1^{(0.1)} + a_2^{(1.0)}) + a_2^{(0.1)} r_2^4$$

было меньше нуля.

В отличие от общего случая двух нулевых корней с двумя группами решений, когда уравнение

$$F_0 = 0$$

может не иметь вещественных решений (F_0 — знакоопределенна), в рассматриваемом случае уравнение $F_0 = 0$ всегда имеет вещественные решения.

Так, два таких решения получим, полагая 1) $r_1 = 0$, $r_2 = \text{const}$, 2) $r_2 = 0$, $r_1 = \text{const}$. Третье вещественное решение, определяемое из уравнения

$$r_1^2 (a_2^{(1.0)} - a_1^{(1.0)}) + r_2^2 (a_2^{(0.1)} - a_1^{(0.1)}) = 0 \tag{6.11}$$

существует лишь при условии $(a_1^{(0.1)} - a_2^{(0.1)})/(a_2^{(1.0)} - a_1^{(1.0)}) > 0$.

Используя первые два вещественных решения, получим, что для асимптотической устойчивости прежде всего необходимо, чтобы $a_1^{(1.0)} < 0$, $a_2^{(0.1)} < 0$.

Если существует и третье вещественное решение, то для значений r_1 и r_2 из уравнения (6.11) выражение R_0 также должно быть меньше нуля при асимптотической устойчивости по формам третьего порядка.

В том случае, когда хотя бы на одном из трех вещественных решений уравнения $F_0 = 0$ выражение R_0 больше нуля, имеет место неустойчивость невозмущенного движения. Если же хотя бы на одном вещественном решении уравнения $F_0 = 0$ R_0 также равно нулю, то формы третьего порядка задачи об устойчивости не решают и необходимо привлекать к рассмотрению формы более высокого порядка. При этом также можем воспользоваться критериями устойчивости по формам высших порядков, полученными в главе IV.

Мы рассмотрели случай двух пар чисто мнимых корней $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ при выполнении неравенства $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \neq 0$ $(m_1 + m_2 \leqslant N)$ для любых целых m_1, m_2, включая нуль. Задача об устойчивости свелась к случаю двух нулевых корней с двумя группами решений. При $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ $(m_1 + m_2 \leqslant N)$ задача об устойчивости в случае двух пар чисто мнимых корней уже не может быть сведена к двум нулевым.

С помощью преобразований, изложенных в § 18, ее можно свести к задаче четырех нулевых корней.

§ 38. Периодическое движение. При исследовании устойчивости периодических движений в критическом случае четырех корней характеристичного уравнения, по модулю равных единице (корни вида $e^{\pm i\lambda_1\omega}$, $e^{\pm i\lambda_2\omega}$) и n корней с модулями, меньшими единицы, приходим к системе

$$\begin{aligned}
&\xi_i^{\cdot} = -\lambda_i \eta_i + \Xi_i (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, t) \\
&\eta_i^{\cdot} = \lambda_i \xi_i + H_i (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, t) \\
&\zeta_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} \zeta_k + Z_{s1} (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \ldots, \zeta_n, t) \quad (s=1, \ldots, n, \ i=1, 2)
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Здесь Ξ_i, H_i, Z_{s1} — голоморфные функции ξ_1, ξ_2, η_1, η_2, ζ_1, ..., ζ_n с периодическими коэффициентами общего периода, который можно считать равным 2π.

Преобразуем систему (6.12) заменой

$$\zeta_s = z_s + u_s (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{6.13}$$

Ряды u_s, определяемые системой

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_s}{\partial t} &+ \sum_{i=1,2} \frac{\partial u_s}{\partial \xi_i} [-\lambda_i \eta_i + \Xi_i (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1, \ldots, u_n; t)] + \\
&+ \sum_{i=1,2} \frac{\partial u_s}{\partial \eta_i} [\lambda_i \xi_i + H_i (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1, \ldots, u_n; t)] = \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} u_k + Z_{s1} (\xi_1, \xi_2, \eta_1 \eta_2, u_1, \ldots, u_n; t)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

будут абсолютно сходящимися по крайней мере для малых значений $|\xi_1|$, $|\xi_2|$, $|\eta_1|$, $|\eta_2|$, если только имеют место тождества

$$\begin{aligned}
&\Xi_i [\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1 (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t), \ldots, u_n (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t), t] = \\
&\quad = H_i [\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, u_1 (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t), \ldots, u_n (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t), t] \equiv 0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

В этом случае невозмущенное движение устойчиво. Доказательство этого утверждения проводится совершенно аналогично доказательству в § 37.

Если тождества (6.15) не имеют места, то ряды u_s, как правило, расходятся. В этом случае вместо замены (6.13) вводится следующая

$$\zeta_s = z_s + v_s (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t) \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{6.16}$$

Здесь $v_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t)$ — многочлены, представляющие сумму форм до N-го порядка включительно в рядах $u_s(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, t)$.

Применяя далее к системе (6.12) преобразования, изложенные в главе III, исследование устойчивости этой системы в случаях несущественно особенных без наложения каких-либо ограничений на корни $\pm i\lambda_j$ ($j = 1, 2$) можно свести к эквивалентной задаче об устойчивости установившегося движения в критическом случае четырех нулевых корней.

Если же корни $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ удовлетворяют условию

$$\sum_{j=1,2} m_j \lambda_j \neq E \qquad \left(2 \leqslant \sum_{j=1,2} |m_j| \leqslant N\right)$$

где m_j и E — целые числа, включая нуль, то задача об устойчивости системы (6.12) может быть сведена к эквивалентной задаче об устойчивости установившегося движения в случае двух нулевых корней с двумя группами решений (т. е. к системе вида (6.10), рассмотренной подробно в главе IV).

ГЛАВА VII

СЛУЧАЙ m НУЛЕВЫХ И q ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

§ 39. Существенно особенный случай. Рассмотрим систему уравнений

$$x_l^{\cdot}=\sum_{\sigma=1}^{n_1} a_{l\sigma}x_\sigma+X_l(x_1,\ldots,x_{n_1};t)\qquad (l=1,\ldots,n_1)\tag{7.1}$$

предполагая, что $a_{l\sigma}$ — постоянные, и уравнение $|a_{l\sigma}-\delta_{l\sigma}\lambda|=0$ имеет m нулевых корней, q пар чисто мнимых и p корней с отрицательными вещественными частями. Функции X_l голоморфны в окрестности $x_1=\ldots=x_{n1}=0$, не содержат линейных членов и являются непрерывными и периодическими по t для $t\geqslant 0$.

В этом общем случае систему уравнений (7.1) можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}y_s^{\cdot}=\sum_{k=1}^{n} g_{sk}y_k+Y_s(y_1,\ldots,y_n;\ z_1,\ldots,z_p;t)\\ z_j^{\cdot}=\sum_{i=1}^{p} p_{ji}z_i+Z_j(y_1,\ldots,y_n;\ z_1,\ldots,z_p;\ t)\\ (s=1,\ldots,n;\ n=m+2q,\ j=1,\ldots,p)\end{gathered}\tag{7.2}$$

где g_{sk} и p_{ji} — постоянные, а Y_s, Z_j имеют структуру X_l.

Уравнение $|g_{sk}-\delta_{sk}\nu|=0$ имеет корни с нулевыми вещественными частями, а уравнение $|p_{ji}-\delta_{ji}\varkappa|=0$ с отрицательными.

Преобразуем систему (7.2) с помощью замены

$$z_j=\zeta_j+v_j(y_1,\ldots,y_n;t)\qquad (j=1,\ldots,p,\ n=m+2q)\tag{7.3}$$

где $v_j(y_1,\ldots,y_n;t)$ — многочлены от $y_1,\ldots,y_n$ с периодическими коэффициентами, представляющие сумму форм до N-го порядка включительно в рядах u_j, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial y_s}[g_{s1}y_1+\ldots+g_{sn}y_n+Y_s(y_1,\ldots,y_n;u_1,\ldots,u_p;t)]=\\ =\sum_{i=1}^{p} p_{ji}u_i+Z_j(y_1,\ldots,y_n;\ u_1,\ldots,u_p;\ t)\end{gathered}\tag{7.4}$$

Как мы видели в главе III, преобразование (7.3) применяется для того, чтобы в присоединенной системе свободно входящие критические переменные имели степень не ниже $(N+1)$-й.

При подстановке в критическую систему вместо z_j новых переменных может представиться два случая. Первый характеризуется тем, что в результате замены переменных z_j по формулам (7.3) обращаются тождественно в нуль все формы $Y_s^{(k)}$ $(y_1, \ldots, y_n; t)$ для $k \leqslant N+1$, как бы велико число N ни бралось. Это возможно лишь в том случае, когда

$$Y_s(y_1, \ldots, y_n; u_1, \ldots, u_p; t) \equiv 0 \tag{7.5}$$

где u_j — ряды, удовлетворяющие системе (7.4). Этот случай является существенно особенным.

При исследовании этого случая будем предполагать, что уравнение $|g_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ или не имеет кратных корней, или при наличии кратных корней каждому такому корню отвечает столько групп решений, какова его кратность.

Введем замену

$$z_j = \zeta_j + u_j(y_1, \ldots, y_n; t) \qquad (j = 1, \ldots, p) \tag{7.6}$$

Последняя возможна лишь тогда, когда ряды, определяемые уравнениями (7.4), являются сходящимися. При нашем предположении относительно корней ν_s и $\varkappa_j$ и при выполнии (7.5) на основании § 20 ряды u_j будут абсолютно сходящимися, по крайней мере для достаточно малых значений $|y_s|$.

Система уравнений (7.2) в результате преобразования (7.6) примет вид

$$\begin{gathered}
y_s^{\cdot} = \sum_{k=1}^{n} g_{sk} y_k + \sum_{j=1}^{p} P_{sj}^*(y_1, \ldots, y_n; t)\zeta_j + Y_s^*(y_1, \ldots, y_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p; t) \\
\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + \sum_{i=1}^{p} Q_{ji}^*(y_1, \ldots, y_n; t)\zeta_i + Z_j^*(y_1, \ldots, y_n; \zeta_1, \ldots, \zeta_p; t) \\
(s = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, p)
\end{gathered} \tag{7.7}$$

где P_{sj}^* и Q_{ji}^* — голоморфные функции $y_1, \ldots, y_n$, обращающиеся в нуль при $y_1 = \ldots = y_n = 0$, а Y_s^* и Z_j^* не содержат линейных членов в отношении $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$.

Линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами первую группу уравнений (7.7) преобразуем к каноническому виду, тогда получим

$$\begin{gathered}
\xi_s^{\cdot} = -\lambda_s \eta_s + \sum_{j=1}^{p} P_{sj}(\xi_l, \eta_l, r_\mu, t)\zeta_j + \Xi_s(\xi_l, \eta_l, r_\mu, \zeta_i, t) \\
\eta_s^{\cdot} = \lambda_s \xi_s + \sum_{j=1}^{p} S_{sj}(\xi_l, \eta_l, r_\mu, t)\zeta_j + H_s(\xi_l, \eta_l, r_\mu, \zeta_i, t) \\
r_k^{\cdot} = \sum_{j=1}^{p} R_{kj}(\xi_l, \eta_l, r_\mu, t)\zeta_j + R_k(\xi_l, \eta_l, r_\mu, \zeta_i, t) \\
\zeta_j^{\cdot} = \sum_{i=1}^{p} p_{ji}\zeta_i + \sum_{i=1}^{p} Q_{ji}(\xi_l, \eta_l, r_\mu, t)\zeta_i + Z_j(\xi_l, \eta_l, r_\mu, \zeta_i, t) \\
(s, l = 1, \ldots, q; \ k, \mu = 1, \ldots, m; \ j, i = 1, \ldots, p)
\end{gathered} \tag{7.8}$$

Положим теперь

$$\xi_s = x_s + \sum_{j=1}^{p} \zeta_j u_{sj}, \qquad \eta_s = y_s + \sum_{j=1}^{p} \zeta_j v_{sj}, \qquad r_k = \rho_k + \sum_{j=1}^{p} \zeta_j w_{kj}$$
$$(s = 1, \ldots, q, \ k = 1, \ldots, m) \tag{7.9}$$

где x_s, y_s, ρ_k — новые переменные, а u_{sj}, v_{sj}, w_{kj} — функции от ξ_l, η_l, r_μ и t, определяемые уравнениями

$$\frac{\partial u_{sj}}{\partial t}-\sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial u_{sj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l-\frac{\partial u_{sj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right)=-\sum_{i=1}^{p}u_{si}\,p_{ij}-\lambda_s v_{sj}+P_{sj}-\sum_{i=1}^{p}u_{si}Q_{ij}$$

$$\frac{\partial v_{sj}}{\partial t}-\sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial v_{sj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l-\frac{\partial v_{sj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right)=-\sum_{i=1}^{p}v_{si}\,p_{ij}+\lambda_s u_{sj}+S_{sj}-\sum_{i=1}^{p}v_{si}Q_{ij}$$

$$\frac{\partial w_{kj}}{\partial t}-\sum_{l=1}^{q}\left(\frac{\partial w_{kj}}{\partial \xi_l}\lambda_l\eta_l-\frac{\partial w_{kj}}{\partial \eta_l}\lambda_l\xi_l\right)=-\sum_{i=1}^{p}w_{ki}\,p_{ij}+R_{kj}-\sum_{i=1}^{p}w_{ki}Q_{ij}$$

$$(s=1,\ldots,q,\ k=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,p)$$

Эта система уравнений удовлетворяет всем условиям теоремы § 20. Следовательно, функции v_{sj}, u_{sj}, w_{kj} определятся в виде абсолютно сходящихся рядов с периодическими коэффициентами. Система уравнений (7.8) в результате преобразований (7. 9) примет вид

$$\begin{aligned} &x_s^{\cdot}=-\lambda_s y_s+X_s(x_l,y_l,\rho_\mu,\zeta_i;t) && y_s^{\cdot}=\lambda_s x_s+Y_s(x_l,y_l,\rho_\mu,\zeta_i,t)\\ &\rho_k^{\cdot}=P_k(x_l,y_l,\rho_\mu,\zeta_i,t), && \zeta_j^{\cdot}=\sum_{i=1}^{p}p_{ji}\zeta_i+Z_j^*(x_l,y_l,\rho_\mu,\zeta_i,t)\\ & && (s,l=1,\ldots,q;\ \mu,k=1,\ldots,m;\ j,i=1,\ldots,p)\end{aligned} \tag{7.10}$$

где X_s, Y_s, P_k, Z_j^* обращаются в нуль при $\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$, а функции X_s, Y_s, P_k, кроме того, не содержат линейных членов в отношении $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$.

Функцию Ляпунова, отвечающую системе (7.10), возьмем в виде

$$V=\sum_{s=1}^{q}(x_s^2+y_s^2)+\sum_{k=1}^{m}\rho_k^2+W(\zeta_1,\ldots,\zeta_p) \tag{7.11}$$

где W — определенно-положительная квадратичная форма, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial W}{\partial \zeta_j}(p_{j1}\zeta_1+\ldots+p_{jp}\zeta_p)=-(\zeta_1^2+\ldots+\zeta_p^2)$$

Производную V' можно представить в виде

$$V'=-\sum_{j=1}^{p}\zeta_j^2+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\psi_{ij}\zeta_i\zeta_j$$

где ψ_{ij} обращаются в нуль при $x_1=\ldots=x_q=y_1=\ldots=y_q=\rho_1=\ldots=\rho_m=\zeta_1=\ldots=\zeta_p=0$. Функция V' является постоянно-отрицательной при V определенно-положительной. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво.

§ 40. Теорема о неустойчивости. Рассмотрим теперь второй возможный случай, когда в результате замены переменных z_j по формулам (7.3) в системе (7.2)

$$\sum_{k\geqslant 2}^{\infty}Y_s^{(k)}(y_1,\ldots,y_n;t)\not\equiv 0$$

В главе III доказано, что исследование устойчивости невозмущенного движения системы (7.2) в случаях несущественно особенных без каких-либо ограничений на корни уравнения $|g_{sk}-\delta_{sk}\nu|=0$ всегда приводится к исследованию устойчивости невозмущенного движения системы n-го ($n = m + 2q$) порядка вида

$$\eta_1^{\cdot} = H_1^{(m)}(\eta_1, \dots, \eta_n) + \dots + H_1^{(N)}(\eta_1, \dots, \eta_n) + \dots$$

$$\eta_s^{\cdot} = \sigma_{s-1}\eta_{s-1} + H_s^{(m_s)}(\eta_1, \dots, \eta_n) + \dots \qquad (s = 2, 3, \dots, n) \tag{7.12}$$

где $H_s^{(m_s)}(\eta_1, \dots, \eta_n)$ — формы m_s-го порядка с постоянными коэффициентами. В общем случае часть величин $\sigma_{s-1}(s = 2, \dots, n)$ может принимать нулевые значения. Если уравнение $|g_{sk} - \delta_{sk}\nu| = 0$ не имеет кратных корней или если при наличии таковых каждому кратному корню отвечает столько групп решений, какова его кратность, то все $\sigma_{s-1} = 0$. Рассмотрим этот случай.

Не уменьшая общности задачи, мы можем считать числа m_s равными наименьшему числу m_k. К такому виду приводится любая система (7.12) при $\sigma_{s-1} = 0$ заменой

$$\eta_s = x_s + \eta_k \qquad (s = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n), \quad \eta_k = x_k$$

Таким образом получаем следующую систему уравнений

$$x_s^{\cdot} = X_s^{(m)}(x_1, \dots, x_n) + X_s^{(m+1)}(x_1, \dots, x_n) + \dots \tag{7.13}$$

Эта система имеет n-кратный нулевой корень с n группами решений. Введем в рассмотрение функции

$$F_{sk}^{(l)} = x_k X_s^{(m+l)} - x_s X_k^{(m+l)} \qquad (l = 0, 1, \dots) \tag{7.14}$$

Для каждого фиксированного числа k будем иметь n — 1 группу функций $F_{kk}^{(l)} \equiv 0$. Очевидно, что $F_{sk}^{(l)} = -F_{ks}^{(l)}$.

Кроме этих функций будем рассматривать функции

$$R_l = x_1 X_1^{(m+l)} + \dots + x_n X_n^{(m+l)} \qquad (l = 0, 1, \dots)$$

Докажем теорему.

Теорема[1]. Если система уравнений (7.13) такова, что

1) алгебраические уравнения

$$F_{sk}^{(0)} = 0 \qquad (s = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \tag{7.15}$$

имеют вещественное решение хотя бы для одного $k = 1, \dots, n$ при $x_k \neq 0$,

2) функция R_0 может принимать положительные значения при условии $F_{sk} = 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Не уменьшая общности задачи, положим $k = 1$. Тогда из системы уравнений (7.13) получим

$$\frac{dx_s}{dx_1} = \frac{X_s^{(m)} + X_s^{(m+1)} + \dots}{X_1^{(m)} + X_1^{(m+1)} + \dots} \qquad (s = 2, \dots, n) \tag{7.16}$$

Полагая

$$x_s = (z_s + h_s)x_1 \qquad (s = 2, \dots, n) \tag{7.17}$$

будем иметь

$$x_1\frac{dz_s}{dx_1} = -z_s - h_s + \frac{X_s^{(m)}(1, z_2 + h_2, \dots) + x_1 X_s^{(m+1)}(1, z_2 + h_2, \dots) + \dots}{X_1^{(m)}(1, z_2 + h_2, \dots) + x_1 X_1^{(m+1)}(1, z_2 + h_2, \dots) + \dots} \tag{7.18}$$

Числа $h_2, \dots, h_n$ определим из уравнений

$$X_s^{(m)}(1, h_2, \dots, h_n) - h_s X_1^{(m)}(1, h_2, \dots, h_n) = 0 \quad (s = 2, \dots, n) \tag{7.19}$$

[1] Эта теорема впервые доказана автором в работе [7].

Эта система при условии 1) имеет вещественные решения, и эти решения не обращают в нуль выражение $X_1^{(m)}$ $(1, h_2, \ldots, h_n)$. В противном случае выражение $R_0(x_1, \ldots, x_n)$ обратится тождественно в нуль при значениях $x_s = h_s x_1$, что противоречит условию 2).

Система уравнений (7.18) при условии (7.19) примет вид

$$x_1 \frac{\partial z_s}{\partial x_1} = \sum b_{sk} z_k + b_s x_1 + \varphi_s (x_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (s = 2, \ldots, n) \tag{7.20}$$

Согласно теореме § 21 эта система имеет решение $z_s = z_s(x_1)$, голоморфное относительно x_1 или x_1 и $x_1 \ln x_1$, обращающееся в нуль при $x_1 = 0$. Подставляя значения $z_s(x_1)$ в (7.17), получим уравнение интегральной кривой

$$x_s = h_s x_1 + x_1 z_s(x_1) \qquad (s = 2, 3, \ldots, n)$$

которое удовлетворяет системе (7.13).

Подставляя значения x_s в первое уравнение этой системы, получим

$$x_1^{\cdot} = X_1^{(m)} (1, h_2, \ldots, h_n) x_1^m + x_1^m H(x_1) \tag{7.21}$$

где $H(x_1)$ обращается в нуль при $x_1 = 0$.

Из этого уравнения следует, что при m четном независимо от знака $X_1^{(m)}$ $(1, h_2, \ldots, h_n)$ $x_1(t)$ будет возрастать с увеличением t и невозмущенное движение, соответствующее системе (7.13), будет неустойчиво.

При m нечетном $x_1(t)$ будет возрастать при условии $X^{(m)}$ $(1, h_2 \ldots, h_n) >$ > 0. Очевидно, что $x_1(t)$ будет возрастать с ростом t, если отношение $X_1^{(m)}$ $(x_1, \ldots, x_n)/x_1$ соответствующим выбором x_1 можно сделать величиной положительной при $x_s = h_s x_1 (s = 2, \ldots, n)$. Но из условия (7.14) при $k = 1$ будем иметь равенства

$$\frac{X_1^{(m)}}{x_1} = \frac{X_2^{(m)}}{x_2} = \ldots = \frac{X_n^{(m)}}{x_n} \tag{7.22}$$

Следовательно, если хотя бы одно из отношений $X_s^{(m)}/x_s$ окажется бóльшим нуля, то невозмущенное движение системы (7.13) будет неустойчиво.

Покажем, что при условии 2) отношение $X_1^{(m)}$ $/x_1 > 0$.

Из (7.22) имеем

$$X_s = \frac{x_s}{x_1} X_1 \qquad (s = 2, \ldots, n)$$

Подставляя эти значения в выражение R_0 будем иметь

$$R_0 = x_1 X_1^{(m)} + \frac{x_2^2}{x_1} X_1^{(m)} + \ldots + \frac{x_n^2}{x_1} X_1^{(m)} > 0$$

Отсюда получаем

$$\frac{X_1^{(m)}}{x_1} (x_1^2 + \ldots + x_n^2) > 0, \qquad \text{т. е.} \ \frac{X_1^{(m)}}{x_1} > 0$$

Решение системы однородных уравнений $F_{sk} = 0$ всегда можно представить в виде $x_s = h_s x_1$ $(s = 2, \ldots, n)$. Это решение представляет уравнения прямых, проходящих через начало координат при h_s вещественных. Если на этих прямых выражение R_0 соответствующим выбором x_1 можно сделать величиной положительной, то невозмущенное движение неустойчиво.

Следовательно, необходимое условие для устойчивости невозмущенного движения системы (7.13) при наличии вещественных решений алгебраических уравнений $F_{sk} = 0$ заключается в том, чтобы выражение R_0 при условии $F_{sk} = 0$ не принимало положительных значений на всех прямых $x_s = h_{sk} x_k$. Доказать достаточность этого условия в общем случае удалось только для систем второго порядка (см. главу IV). Решение этой задачи при $n > 2$ представляет затруднения весьма существенные. Если R_0 хотя бы на одной прямой $x_s = h_{sk}x_k$ обращается в нуль, а на остальных прямых $R_0 < 0$, то задача об устойчивости, как мы убедились в § 30, формами m-го порядка не решается.

§ 41. Исследование устойчивости приведением системы уравнений к специальной форме. Теорема о неустойчивости, сформулированная в предыдущем параграфе, а также исследования, проведенные в главе IV, позволяют утверждать, что формы $F_{sk}^{(l)}$ и R_l играют весьма существенную роль в решении задачи устойчивости. Поэтому представляет интерес вместо системы (7.13) получить новую форму уравнений возмущенного движения, в правые части которой входили бы формы $F_{sk}{}^{(l)}$ и R_l непосредственно.

Положим

$$x_s = ry_s, \quad y_1{}^2 + y^2{}_2 + \ldots + y_n{}^2 = 1 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{7.23}$$

тогда

$$r^2 = x_1{}^2 + \ldots + x_n{}^2$$

Дифференцируя это равенство по t и определяя производные от $y_1, \ldots, y_n$ по t в силу уравнений (7.13), получим

$$\frac{dr}{dt} = r^m [y_1 X_1{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n) + \ldots + y_n X_n{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n)] +$$

$$+ r^{m+1} [y_1 X_1{}^{(m+1)}(y_1, \ldots, y_n) + \ldots + y_n X_n{}^{(m+1)}(y_1, \ldots, y_n)] + \ldots$$

$$\frac{dy_s}{dt} = r^{m-1} \{X_s{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n) - y_s [y_1 X_1{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n) +$$

$$+ y_2 X_2{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n) + \ldots + y_n X_n{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n)]\} + r^m\{\ldots\} + \ldots$$

Для $s = 1$ имеем

$$\frac{dy_1}{dt} = r^{m-1} [X_1{}^{(m)}(y_1, \ldots, y_n) - y_1 (y_1 X_1{}^{(m)} + y_2 X_2{}^{(m)} + \ldots + y_n X_n{}^{(m)})] +$$

$$+ r^m [\ldots] + \ldots$$

Вводя формы $F_{sk}^{(l)} = y_k X_s^{(m+l)} - y_s X_k^{(m+l)}$, вычислим значения

$$y_1 X_2{}^{(m+l)} = y_2 X_1{}^{(m+l)} - F_{12}{}^{(l)}, \qquad y_1 X_3{}^{(m+l)} = y_3 X_1{}^{(m+l)} - F_{13}{}^{(l)}, \ldots,$$

$$y_1 X_n{}^{(m+l)} = y_n X_1{}^{(m+l)} - F_{1n}{}^{(l)}$$

Подставляя значения $y_1 X_2{}^{(m)}, \ldots, y_1 X_n^{(m)}, \; y_1 X_2^{(m+1)}, \ldots, y_1 \; X_n^{(m+1)}, \ldots,$ в уравнение для y_1, получим

$$\frac{dy_1}{dt} = r^{m-1} (y_2 F_{12}{}^{(0)} + y_3 F_{13}{}^{(0)} + \ldots + y_n F_{1n}{}^{(0)}) + r^m (\ldots) + \ldots$$

Для $s = 2$ имеем

$$\frac{dy_2}{dt} = r^{m-1} [X_2{}^{(m)} - y_2 (y_1 X_1{}^{(m)} + y_2 X_2{}^{(m)} + \ldots + y_n X_n{}^{(m)})] + r^m [\ldots] + \ldots$$

$$y_2 X_1{}^{(m+l)} = y_1 X_2{}^{(m+l)} - F_{21}{}^{(l)}, \quad y_2 X_3{}^{(m+l)} = y_3 X_2{}^{(m+l)} -$$

$$- F_{23}{}^{(l)}, \ldots, y_2 X_n{}^{(m+l)} = y_n X_2{}^{(m+l)} - F_{2n}{}^{(l)}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = r^{m-1}(y_1 F_{21}{}^{(0)} + y_3 F_{23}{}^{(0)} + \ldots + y_n F_{2n}{}^{(0)}) + r^m(\ldots) + \ldots$$

Применяя аналогичные преобразования к уравнениям для $y_3^{\cdot}, \ldots, y^{\cdot}_n$ и учитывая, что $F_{sk}^{(l)} = -F_{ks}^{(l)}$, $F_{ss}^{(l)} \equiv 0$, получим систему

$$\frac{dr}{dt} = r^m R_0(y_1, \ldots, y_n) + r^{m+1} R_1(y_1, \ldots, y_n) + \ldots$$

$$\frac{dy_1}{dt} = r^{m-1}(y_2 F_{12}{}^{(0)} + y_3 F_{13}{}^{(0)} + \ldots + y_n F_{1n}{}^{(0)}) + r^m \sum_{s=1}^{n} y_s F_{1s}{}^{(1)} + \ldots$$

$$\frac{dy_2}{dt} = r^{m-1}(-y_1 F_{12}{}^{(0)} + y_3 F_{23}{}^{(0)} + \ldots + y_n F_{2n}{}^{(0)}) + r^m \sum_{s=1}^{n} y_s F_{2s}{}^{(1)} + \ldots$$

. . . .

$$\frac{dy_n}{dt} = r^{m-1}(-y_1 F_{1n}{}^{(0)} - y_2 F_{2n}{}^{(0)} - \ldots - y_{n-1} F_{n-1,\, n}^{(0)}) +$$

$$+ r^m \sum_{s=1}^{n} y_s F_{ns}{}^{(1)} + \ldots \tag{7.24}$$

Здесь $R_l(y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{s=1}^{n} y_s X_s^{(m+l)}$. Выражения R_l и $F_{sk}^{(l)}$ являются формами $(m + l + 1)$-го порядка.

Система (7.24) имеет $(n + 1)$-й порядок, но легко убедиться, что выражение $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = c^2$ является ее общим интегралом. При $c = 1$ переменные $y_1, \ldots, y_n$ обращаются в направляющие косинусы радиуса-вектора r, а новые переменные являются сферическими координатами.

Эта новая форма уравнений возмущенного движения сводит задачу об устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ к эквивалентной задаче об устойчивости решения $r = 0$.

Форма уравнений (7.24) во многих случаях имеет несомненные преимущества по сравнению с обычной формой (7.13).

Так, например, пусть исследуется задача устойчивости при наличии q пар чисто мнимых корней, а $m = 0$, т. е. определяющее уравнение системы (7.1), кроме корней с отрицательными вещественными частями, имеет только чисто мнимые корни $\pm i\lambda_s$. В случае, когда корни $\pm i\lambda_s$ удовлетворяют условию $\sum\limits_{s=1}^{q} m_s\lambda_s \neq E$ для всех $2 \leqslant \sum\limits_{s=1}^{q} m_s \leqslant N$ (m_s и E — любые целые числа, включая нуль) и задача об устойчивости решается членами не выше N-го порядка, мы можем с помощью преобразований, изложенных в главе III перейти от исследования устойчивости нулевого решения системы (7.1) к эквивалентной задаче для системы

$$r_s^{\cdot} = r_s R_s{}^{(m-1)} + r_s R_s{}^{(m+1)} + \ldots + r_s R_s{}^{(N-1)} + R_s(r_1, \ldots, r_q, \theta_1, \ldots, \theta_q, t)$$

$$(m = 2k+1,\ k \geqslant 1) \tag{7.25}$$

$$R_s{}^{(l)} = \sum_{2(k_1+\ldots+k_q)=l} \alpha_s^{(k_1 \ldots k_q)} r_1^{2k_1} \ldots r_q^{2k_q} \qquad (s = 1, \ldots, q)$$

Здесь $\alpha_s^{(k_1 \ldots k_q)}$ — постоянные коэффициенты, R_s включают в себя все формы не ниже $(N + 1)$-го порядка относительно r_s. Все $r_s \geqslant 0$.

Полагая

$$r_s = ry_s, \qquad z_s = y_s^2, \qquad \rho = r^2 = \sum_{s=1}^{q} r_s^2$$

и учитывая, что $F_{sk}^{(l)} = r_s r_k (R_s^{(2k+2l)} - R_k^{(2k+2l)}) = r_s r_k R_{sk}^{(l)}$, будем иметь

$$\frac{d\rho}{dt} = 2\rho^{k+1} R_0(z_1, \dots, z_q) + 2\rho^{k+2} R_1(z_1, \dots, z_q) + \dots \tag{7.26}$$

$$\frac{dz_s}{dt} = 2\rho^k z_s (z_1 R_{s1}{}^{(0)} + z_2 R_{s2}{}^{(0)} + \dots + z_q R_{sq}{}^{(0)}) + \dots$$

$$R_l = z_1 R_1{}^{(k+l)} + \dots + z_q R_q{}^{(k+l)} \qquad (s = 1, \dots, q, \ z_1 + \dots + z_q = 1)$$

Система алгебраических уравнений $F_{sk}^{(0)} = z_s z_k R_{sk}^{(0)} = 0$, составленная для системы (7.26), всегда имеет хотя бы одно вещественное решение для каждого фиксированного k при $z_k \neq 0$. Действительно, мы можем положить все z_s, за исключением z_k, равными нулю, а z_k взять равным единице, и это, как нетрудно убедиться, будет решением системы уравнений $F_{sk}^{(0)} = 0$.

Если хотя бы на одном вещественном решении какой-либо системы $F_{sk}^{(0)} = 0$ выражение $R_0 > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво в силу теоремы, доказанной в § 40.

Таким образом, в рассматриваемом случае устойчивость может иметь место только тогда, когда при значениях $z_1, \dots, z_q$, являющихся решениями систем алгебраических уравнений $F_{sk}^{(0)} = 0$, выражение $R_0 \leqslant 0$.

Предположим теперь, что при всех таких значениях $z_1, \dots, z_q$ выражение $R_0 < 0$.

Для системы (7.26) в этом случае функцию Ляпунова можно взять в виде

$$V = \rho e^{-Nu} \tag{7.27}$$

где N — достаточно большое положительное число, а $u(z_1, \dots, z_q)$ — непрерывная и ограниченная функция $z_1, \dots, z_q$.

Производная этой функции по t в силу уравнений (7.26) будет иметь вид

$$V' = 2\rho^{k+1} e^{-Nu} \left\{ \left[R_0 - N \sum \left(\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) z_s z_k R_{sk}{}^{(0)} \right] + \right.$$
$$\left. + \rho \left[R_1 - N \sum \left(\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} \right) z_s z_k R_{sk}{}^{(1)} \right] + \dots \right\} \tag{7.28}$$

Если окажется, что функцию u можно выбрать из уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial z_s} - \frac{\partial u}{\partial z_k} = R_{sk}{}^{(0)} P_{sk}$$

где P_{sk} — положительные, непрерывные и ограниченные функции $z_1, \dots, z_q$, не обращающиеся в нуль, или постоянные величины, то

$$V' = 2\rho^{k+1} e^{-Nu} [R_0 - N \sum P_{sk} (R_{sk}{}^{(0)})^2 z_s z_k] + \dots$$

Предположим, что такая функция u найдена. Тогда, как легко видеть, функция V' будет определенно-отрицательной при V определенно-положительной, и, следовательно, нулевое решение системы (7.26) при $R_0 < 0$ для $F_{sk}^{(0)} = 0$ будет асимптотически устойчивым по формам m-го порядка.

Ограничимся исследованием простейшего случая $q = 2$, т. е. случаем, когда характеристическое уравнение исходной системы имеет две пары чисто мнимых корней.

В этом случае функция u определяется уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} - \frac{\partial u}{\partial z_2} = R_{12}{}^{(0)}(z_1, z_2) \tag{7.29}$$

Форма $R_{12}^{(0)}$ k-го порядка, полученная после преобразований исходной системы, может быть представлена в виде

$$R_{12}{}^{(0)}(z_1, z_2) = \sum_k a^{(k_1, k_2)} z_1{}^{k_1} z_2{}^{k_2} \qquad (k_1 + k_2 = k)$$

Функцию u можно взять в виде формы l-го порядка ($l = k + 1$)

$$u = \sum_l A^{(l_1, l_2)} z_1{}^{l_1} z_2{}^{l_2} \qquad (l = l_1 + l_2)$$

В результате подстановки функции u в уравнение (7.29) определим коэффициенты $A^{(l_1, l_2)}$ через коэффициенты $a^{(k_1, k_2)}$ из системы

$$\begin{aligned}
&(k+1) A^{(k+1.\ 0)} - A^{(k.\ 1)} = a^{(k.\ 0)} \\
&kA^{(k.\ 1)} - 2A^{(k-1.\ 2)} = a^{(k-1.\ 1)} \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&2A^{(2.\ k-1)} - kA^{(1.\ k)} = a^{(1.\ k-1)} \\
&A^{(1.\ k)} - (k+1) A^{(0.\ k+1)} = a^{(0.\ k)}
\end{aligned}$$

Здесь можно $A^{(k+1.0)}$ выбрать равным нулю, тогда все остальные коэффициенты формы u определятся однозначно.

Возвращаясь к производной V', которая в случае $q = 2$ имеет вид

$$V' = 2\rho^{k+1} e^{-Nu} [R_0 - N (R_{12}{}^{(0)})^2 z_1 z_2] + \ldots$$

приходим к заключению, что если при $F_{12}^{(0)} = z_1 z_2 R_{12}^{(0)} = 0$ форма $R_0 < 0$, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, т. е. получили тот же результат, что и в предыдущей главе.

Рассматривая формы более высокого порядка и принимая за функцию V выражение

$$V = \rho \exp(-Nu_1) + \rho^2 \exp u_2 + \ldots + \rho^\alpha \exp u_\alpha$$

где $u_1, \ldots, u_\alpha$ той же структуры, что и u, мы могли бы получить критерии устойчивости по формам выше m-го порядка. Но на этих вопросах мы здесь останавливаться не будем.

Отметим, что форма уравнений возмущенного движения вида (7.26), хотя и облегчает построение функций Ляпунова, но не позволяет избежать всех трудностей, связанных с их определением, если $q \geqslant 3$. В этих случаях мы можем встретиться с затруднениями, весьма серьезными.

ГЛАВА VIII

КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

§ 42. Системы второго порядка. Рассмотрим задачу об устойчивости нулевого решения канонической системы уравнений второго порядка

$$\frac{dx}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial x} \tag{8.1}$$

с гамильтонианом

$$H={}^{\alpha}/_{2\beta}\,(x^2+y^2)+{}^{1}/_{\beta}\sum_{l=3}^{\infty}H^{(l)}(x, y, \tau)$$

где

$$H^{l}(x, y, \tau)=\sum_{k_1+k_2=l}a^{(k_1,\,k_2)}(\tau)\,x^{k_1}y^{k_2}$$

$$a^{(k_1,\,k_2)}(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}(\delta_n^{(k_1,\,k_2)}\cos n\tau+\gamma_n^{(k_1,\,k_2)}\sin n\,\tau)$$

$\delta_n^{(k_1,\,k_2)}$ и $\gamma_n^{(k_1,\,k_2)}$ — вещественные постоянные, а α и β — целые положительные числа.

Частные случаи этой задачи рассматривались в работах [12—14].

Систему уравнений (8.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt}=-\alpha y-\frac{\partial H^{(3)}(x, y, t)}{\partial y}-\frac{\partial H^{(4)}(x, y, t)}{\partial y}-\ldots$$

$$\frac{dy}{dt}=\alpha x+\frac{\partial H^{(3)}(x, y, t)}{\partial x}+\frac{\partial H^{(4)}(x, y, t)}{\partial x}+\ldots \tag{8.2}$$

где $\tau=\beta t$.

Задача об устойчивости нулевого решения системы (8.2) в случае α иррационального, рассмотренная Ляпуновым, изложена в § 4. Там же отмечено, что в случае α рационального эта задача может быть сведена к исследованию устойчивости нулевого решения системы в критическом случае двух нулевых корней с двумя группами решений. Метод сведения содержится в § 18, а само решение задачи об устойчивости приведено в главе IV.

Преобразовав эту системы согласно § 18, получим

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=\alpha^{(2,\,0)}x_1^2+\alpha^{(1,\,1)}x_1y_1+\alpha^{(0,\,2)}y_1^2+X_1^{(3)}(x_1, y_1)+\ldots+\\&\quad+X_1^{(N)}(x_1, y_1)+X_1^{(N+1)}(x_1, y_1, t)+\ldots\\\frac{dy_1}{dt}&=\beta^{(2,\,0)}x_1^2+\beta^{(1,\,1)}x_1y_1+\beta^{(0,\,2)}y_1^2+Y_1^{(3)}(x_1, y_1)+\ldots+\\&\quad+Y_1^{(N)}(x_1, y_1)+Y_1^{(N+1)}(x_1, y_1, t)+\ldots\end{aligned} \tag{8.3}$$

Постоянные $\alpha^{(k_1, k_2)}$ и $\beta^{(k_1, k_2)}$ $(k_1+k_2=2)$ при $\alpha/\beta=1$ в силу канонического характера системы (8.2) будут удовлетворять условиям

$$\beta^{(1.1)} = -2\alpha^{(2.0)}, \quad \alpha^{(1.1)} = -2\beta^{(0.2)}$$

$$\begin{aligned}\alpha^{(2.0)} &= \frac{1}{8}(-3\gamma_1^{(3.0)}+3\gamma_3^{(3.0)}-3\gamma_3^{(1.2)}+\gamma_1^{(1.2)}-\delta_1^{(2.1)}-\\ &\quad -3\delta_3^{(2.1)}-3\delta_1^{(0.3)}+3\delta_3^{(0.3)})\\ \beta^{(0.2)} &= \frac{1}{8}(-3\delta_1^{(3.0)}+3\delta_3^{(3.0)}-\delta_1^{(1.2)}-3\delta_3^{(1.2)}-\gamma_1^{(2.1)}+\\ &\quad +3\gamma_3^{(2.1)}-3\gamma_1^{(0.3)}-3\gamma_3^{(0.3)})\end{aligned} \tag{8.4}$$

$$\alpha^{(0.2)} = \frac{3}{8}(3\gamma_1^{(3.0)}-\gamma_3^{(3.0)}+\gamma_1^{(1.2)}+\gamma_3^{(1.2)}-\delta_1^{(2.1)}+\delta_3^{(2.1)}-3\delta_1^{(0.3)}-\delta_3^{(0.3)})$$

$$\begin{aligned}\beta^{(2.0)} &= \frac{3}{8}(-\delta_3^{(3.0)}-3\delta_1^{(3.0)}-\delta_1^{(1.2)}+\delta_3^{(1.2)}-\gamma_1^{(2.1)}-\\ &\quad -\gamma_3^{(2.1)}-3\gamma_1^{(0,3)}+\gamma_3^{(0.3)})\end{aligned}$$

Согласно полученным в главе IV критериям устойчивости по формам m—го порядка нулевое решение системы (8.3) при $X_1^{(l)} = Y_1^{(l)} \equiv 0\,(l \geqslant 3)$ в общем случае может быть устойчивым, если:

1) $\alpha^{(k_1, k_2)} = \beta^{(k_1, k_2)} = 0 \quad (k_1+k_2=2)$

2) формы второго порядка имеют общий множитель вида $ax+by$ и форма $F_{-1}(x_1, y_1)$ знакоопределенна.

Случай 1) может представиться, когда $\beta > 3\,\alpha$ или когда соотношения (8.4) при отличных от нуля $\delta_1^{(k_1, k_2)}$, $\gamma_1^{(k_1, k_2)}$, $\delta_3^{(k_1, k_2)}$, $\gamma_3^{(k_1, k_2)}$ приводят к равенствам $\alpha^{(k_1, k_2)} = \beta^{(k_1, k_2)} = 0$. Легко убедиться, что для канонических систем в силу условий $\beta^{(1.1)} = -2\alpha^{(2.0)}$, $\alpha^{(1.1)} = -2\beta^{(0.2)}$ случай 2) не имеет места. Действительно, согласно условиям (8.4) систему (8.3) можно записать в виде

$$\frac{dx_1}{dt} = Ax_1^2-2Bx_1y_1+Cy_1^2+\ldots, \qquad \frac{dy_1}{dt} = Dx_1^2-2Ax_1y_1+By_1^2+\ldots$$

где постоянные A, B, C, D могут, очевидно, принимать произвольные значения.

Для того чтобы формы $X_1^{(2)}(x_1, y_1)$ и $Y_1^{(2)}(x_1, y_1)$ имели общий множитель вида ax_1+by_1, необходимо, чтобы уравнения

$$A\varkappa^2-2B\varkappa+C=0 \qquad D\varkappa^2-2A\varkappa+B=0$$

где $\varkappa = x_1/y_1\,(y_1 \neq 0)$, имели общий вещественный корень $\varkappa_1$. Составляя результант многочленов $X_1^2\,(\varkappa)$ и $Y_1^2\,(\varkappa)$ и приравнивая его нулю, получим

$$(AB-C^2)^2 = 4(B^2-AC)(A^2-BD)$$

что не противоречит условиям вещественности корня $\varkappa_1(B^2 > AC$ и $A^2 > BD)$.

Составляя выражение для формы F_0 по совокупности членов второго порядка $X_1^{(2)}(\varkappa)$ и $Y_1^{(2)}(\varkappa)$, будем иметь

$$F_0(\varkappa) = \varkappa Y_1^{(2)}(\varkappa)-X_1^{(2)}(\varkappa) = D\varkappa^3-3A\varkappa^2+3B\varkappa-C$$

Теперь остается показать, что выражение

$$F_{-1}(\varkappa) = F_0(\varkappa)/(\varkappa-\varkappa_1) = D\varkappa^2+(D\varkappa_1-3A)\varkappa+(D\varkappa_1-3A)\varkappa_1+3B$$

не может быть знакоопределенным относительно $\varkappa$. Действительно, полагая $\varkappa = \varkappa_1$, получим

$$F_{-1}(\varkappa_1) = 3(D\varkappa_1^2 - 2A\varkappa_1 + B) = 0$$

Во всех других случаях движение либо неустойчиво, либо вопрос об устойчивости решается рассмотрением членов более высокого порядка (как, например, в случае, когда формы $X_1^{(2)}(x_1, y_1)$ и $Y_1^{(2)}(x_1, y_1)$ имеют общий множитель вида $ax_1 + by_1$).

В частности, неустойчивость всегда будет иметь место, если разложения правых частей системы (8.3) начинаются с форм четного порядка $X_1^{(2l)}(x_1, y_1)$ и $Y_1^{(2l)}(x_1, y_1)$ $(l \geqslant 1)$ и уравнение

$$\varkappa Y_1^{(2l)}(\varkappa) - X_1^{(2l)}(\varkappa) = 0$$

где $\varkappa = x_1/y_1$, имеет по крайней мере один вещественный корень $\varkappa_1$, не являющийся корнем уравнения

$$\varkappa X_1^{(2l)}(\varkappa) + Y_1^{(2l)}(\varkappa) = 0$$

В этом случае форма $R_0(x_1, y_1)$ при $\varkappa = \varkappa_1$ представится в виде

$$R_0 = y_1^{2l+1}[\varkappa_1 X_1^{(2l)}(\varkappa_1) + Y_1^{(2l)}(\varkappa_1)]$$

Очевидно, каков бы ни был знак выражения, стоящего в квадратных скобках, величину R_0 всегда можно сделать положительной, следовательно, нулевое решение неустойчиво.

Предположим, что наинизшие формы, неравные тождественно нулю, есть $X_1^{(m)}$ и $Y_1^{(m)}$. Тогда устойчивость по формам m-го порядка возможна лишь в двух случаях:

1) при $F_0(x_1, y_1) = 0$ форма $R_0 = 0$;

2) $F_0(x_1, y_1)$ — функция знакоопределенная и

$$g = F_0(\cos\theta, \sin 0)\int_0^{2\pi}\frac{R_0(\cos\theta, \sin\theta)}{F_0(\cos\theta, \sin\theta)}\,d\theta = 0$$

Случай $R_0 < 0$ при $F_0(x_1, y_1) = 0$ и случай $g < 0$ для канонических систем вида (8.2) не имеет места, так как приводит к асимптотической устойчивости, что противоречит теореме Лиувилля.

Если же форма R_0 при $F_0(x_1, y_1) = 0$ принимает положительные значения, а также если при $F_0(x_1, y_1)$ знакоопределенной $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Для исследования случаев 1) и 2) необходимо привлечь к рассмотрению формы высших порядков. Рассмотрим формы $(m + 1)$-го порядка. Применяя критерий устойчивости, полученный в главе IV, мы убеждаемся, что для канонических систем устойчивость в случае 1) возможна только тогда, когда при $F_0(x_1, y_1) = 0$ функции Φ_j также обращаются в нуль. В противном случае предложенный метод позволит выделить лишь случай неустойчивости, так как случай асимптотической устойчивости для канонических систем дифференциальных уравнений с голоморфными правыми частями невозможен. К тому же заключению мы придем и при исследовании случая 2).

Рассматривая формы выше $(m + 1)$-го порядка, например, формы $(m+k)$-го порядка, придем к аналогичным заключениям, т. е. будем получать или неустойчивость, или встретимся опять с сомнительным случаем, когда формы $(m + k)$-го порядка вопроса об устойчивости не решают.

Таким образом, в случае рациональных λ устойчивость может иметь место лишь в существенно особенных случаях.

Пользуясь результатами, полученными в главах II, III можно также решить вопрос об устойчивости для канонических систем с функцией Гамильтона вида

$$H = \lambda y^2 + H^{(m)}(x, y, \tau) + H^{(m+1)}(x, y, \tau) + \dots$$

где $H^{(m)}(x, y, \tau)$ — формы m-го порядка ($m \geqslant 3$) с периодическими относительно τ коэффициентами. Функция H будет иметь такой вид, если разложение силовой функции $U(x, \tau)$ по x не содержит линейных и квадратичных членов.

§ 43. Системы высших порядков. Перейдем к рассмотрению канонической системы вида

$$\frac{dx_s}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \frac{dy_s}{\partial \tau_s} = \frac{\partial H}{\partial x_s} \tag{8.5}$$

с гамильтонианом

$$H = \sum_{s=1}^{p} \frac{\alpha_s}{2\beta_s}(x_s^2 + y_s^2) + \frac{1}{\beta}\sum_{l=3}^{\infty} H^{(l)}(x_1, \dots, x_p;\ y_1, \dots, y_p, \tau) \tag{8.6}$$

где

$$H^{(l)} = \sum a^{(k_1, \dots, k_p, n_1, \dots, n_p)}\, x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} y_1^{n_1} \dots y_p^{n_p}$$
$$(k_1 + \dots + k_p + n_1 + \dots + n_p = l)$$

$$a^*(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\delta_n^* \cos n\tau + \gamma_n^* \sin n\tau)$$

δ^*_n и γ^*_n — вещественные постоянные, а * обозначает индекс $(k_1, \dots, k_p, n_1, \dots, n_p)$.

Преобразованиями, указанными в главе III, систему (8.5) можно привести к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dx_{s1}}{dt} &= X_{s1}^{(m)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}) + \dots + \\
&+ X_{s1}^{(m+N)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}) + \\
&+ X_{s1}^{(m+N+1)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}, t) + \dots \\
\frac{dy_{s1}}{dt} &= Y_{s1}^{(m)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}) + \dots + \\
&+ Y_{s1}^{(m+N)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}) + \\
&+ Y_{s1}^{(m+N+1)}(x_{11}, \dots, x_{p1};\ y_{11}, \dots, y_{p1}, t) + \dots \qquad (m \geqslant 2,\ s = 1, \dots p)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

где $X_{s1}^{(m+N+1)}$ и $Y_{s1}^{(m+N+1)}$ — формы $(m + N + 1)$-го порядка с периодическими относительно t коэффициентами.

Несмотря на частный характер правых частей полученной системы, исследование ее сопряжено с весьма большими затруднениями. Дело в том, что канонические системы относятся к тем особенным системам, для которых вопрос об устойчивости, как правило, не решается конечным числом форм правых частей системы (8.7). Если же положить $N = \infty$, то мы могли бы получить автономную систему для форм любого порядка, и решение вопроса не представляло бы затруднений, если бы при этом преобразовании соответствующие ряды были сходящимися. Но ряды эти в общем случае расходятся, а исследование их сходимости даже для случая $p = 1$ представляет задачу весьма трудную.

Обходя трудности, связанные с исследованием устойчивости этих систем, рассмотрим те канонические системы, у которых неустойчивость невозмущенного движения может быть обнаружена рассмотрением N первых форм правых частей системы уравнений возмущенного движения. При этом мы вынуждены ограничить исследование рациональными λ_s, так как в случае λ_s иррациональных вопрос об устойчивости не решается конечным числом форм правых частей дифференциальных уравнений, на каком бы большом конечном числе N мы не остановились.

Предположим, что в результате преобразования наинизшие формы $X_{s1}^{(l)}$ и $Y_{s}^{(l)}{}_1$, входящие в систему (8.7), имеют индекс $l = 2$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &X_{s1}^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p;\ \mu_1, \ldots, \mu_p) = 0 \\ &Y_{s1}^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, 1, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p;\ \mu_1, \ldots, \mu_p) = 0 \\ &\qquad (\lambda_s = x_{s1}/x_{k1},\ \mu_s = y_{s1}/x_{k1},\ k, s = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{8.8}$$

и систему уравнений

$$\begin{aligned} &X_{s1}^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p;\ \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, 1, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_p) = 0 \\ &Y_{s1}^{(2)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p;\ \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, 1, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_p) = 0 \\ &\qquad (\lambda_s = x_{s1}/y_{k1},\ \mu_s = y_{s1}/y_{k1},\ k, s = 1, \ldots, p) \end{aligned} \tag{8.9}$$

Таким образом, для каждого значения k мы будем иметь две системы уравнений $2p$-го порядка с $2p$-1 неизвестными $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_p$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_p$ соответственно.

Если для какого-нибудь фиксированного k по крайней мере одна из этих систем не имеет общих вещественных корней, то нулевое решение системы (8.7) неустойчиво.

Если системы (8.8), (8. 9) для любых значений k имеют общие корни, но уравнения

$$F_{sk} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, 2p,\ k = 1, \ldots, 2p) \tag{8.10}$$

составленные для системы (8.7), имеют вещественные корни, отличные от общих корней систем (8.8) и (8.9), то невозмущенное движение также неустойчиво.

Если окажется, что формы $X_{s1}^{(l)}$ и $Y_{s1}^{(l)}$ для $l = 2, 3, \ldots, m-1$ обращаются тождественно в нули, а формы $X_{s1}^{(m)}$ и $Y_{s1}^{(m)}$ отличны от нуля, то, применяя к такого рода системам критерии неустойчивости, мы придем к аналогичным результатам в случае m четного.

В случае m нечетного мы должны рассмотреть $2p - 1$ систему алгебраических уравнений (8.10) с $2p - 1$ неизвестными. Если окажется, что хотя бы для одного из k эта система уравнений имеет вещественные решения, и при условии (8.10) форма

$$R_0 = \sum_{s=1}^{s=p} (x_{s1} X_{s1}^{(m)} + y_{s1} Y_{s1}^{(m)})$$

может принимать положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

ГЛАВА IX

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В СЛУЧАЯХ, БЛИЗКИХ К КРИТИЧЕСКИМ

§ 44. Предварительные замечания. В этой главе мы будем исследовать случаи, близкие к критическим. Будем предполагать, что определяющее уравнение системы дифференциальных уравнений возмущенного движения кроме корней отрицательных и равных нулю, корней с отрицательными и нулевыми вещественными частями имеет по крайней мере один корень с малой по модулю вещественной частью или малый вещественный корень.

В термин «корень с малой по модулю вещественной частью» или «малый вещественный корень» будем вкладывать то понятие, которое Пуанкаре приписывает «малому параметру», т. е. там, где это нужно, мы будем предполагать «малые корни» сколь угодно малыми с предельным значением, равным нулю.

Постановка задачи об устойчивости такого рода систем требует предварительных пояснений. Дело в том, что наличие корня с положительной вещественной частью согласно известной теореме Ляпунова {24} гарантирует неустойчивость невозмущенного движения независимо от старших членов. С другой стороны, наличие только отрицательных корней и корней с отрицательными вещественными частями обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного движения.

Эти две замечательные теоремы Ляпунова, лежащие в основе всей теории линейных колебаний механических систем и устойчивости их движений, получены им при весьма жестких ограничениях, налагаемых на начальные возмущения. Определяя устойчивость движения, Ляпунов предполагает, что все начальные возмущения по модулю могут быть сделаны менее любого наперед заданного числа. Таким образом, предельное значение начальных возмущений есть нуль.

Если же предположить, что модуль хотя бы одного из начальных возмущений не может быть менее некоторого, пусть очень малого положительного числа ε (что имеет место в реальных условиях), то наличие положительного корня определяющего уравнения не является критерием неустойчивости движения независимо от старших членов, так же как наличие только корней с отрицательными вещественными частями не является критерием устойчивости.

Поясним это двумя примерами.

Пример 1. Рассмотрим систему двух уравнений

$$x_1^{\boldsymbol{\cdot}} = \mu x_1 + g x_1^3, \qquad x_2^{\boldsymbol{\cdot}} = -x_2 \tag{9.1}$$

Предположим, что $\mu > 0$, $g < 0$. Корнями определяющего уравнения этой системы являются $\varkappa_1 = \mu$, $\varkappa_2 = -1$. Допустим, что $-\mu/g = \lambda^2$ мало по сравнению с единицей. Интегрируя систему (9.1), получим

$$x_1^2 = \frac{x_{10}^2}{\left(1 - \frac{x_{10}^2}{\lambda^2}\right) e^{-2\mu t} + \frac{x_{10}^2}{\lambda^2}}, \qquad x_2 = x_{20} e^{-t}$$

Функция $x_1(t)$, определяемая первым уравнением, является ограниченной на всем диапазоне t от $t = 0$ до $t = \infty$ и для всех значений x_{10}^2 больших и меньших параметра λ^2. При $t = \infty$ получим $x_1{}^2 = \lambda^2$.

Кроме того, при $x_{10}^2 > \lambda^2$ функция $x_1(t)$ является убывающей. Что касается функции $x_2(t)$, то согласно второму уравнению она всегда будет убывающей.

Следовательно, для переменных системы уравнений (9.1) всегда можно установить область G, за которую они никогда не выйдут, если только их начальные значения будут находиться внутри этой области. В нашем случае эту область можно задать прямоугольником с ребрами $x^2_{10} \leqslant A_1$ и $x^2_{20} \leqslant \leqslant A_2$. Число A_2 ограничено снизу только максимальным значением x^2_{20}, и если последнее сколь угодно мало, то и A_2 может быть выбрано сколь угодно малым. Число же A_1 ограничено снизу неравенством $A_1 > > \lambda^2$. Если по условию задачи мы будем иметь, что максимально допустимые начальные отклонения x_{10} удовлетворяют условию $\lambda^2 \leqslant x^2_{10} \leqslant \lambda^2 + h$, а функция $x_1(t)$ — условию $x_1{}^2(t) \leqslant \lambda^2 + h$, в которых h — наперед заданное положительное число, то число A_1 можно взять равным $\lambda^2 + h$.

Число h можно выбирать по нашему усмотрению, исходя из физического содержания самой задачи. В частности, его можно принять за сколь угодно малое, отличное от нуля, положительное число.

Что касается числа λ^2, то оно определяется параметрами правой части первого уравнения системы (9.1) и не связано с величиной допустимых возмущений.

Представляет интерес сопоставить поведение интегральных кривых системы (9.1) в области, близкой к началу координат, соответствующее линеаризованным уравнениям с той картиной, которая имеет место в действительности (т. е. при сохранении члена $gx_1{}^3$).

В случае $\mu > 0$ линеаризованные уравнения (9.1) дают фазовую картину, представленную на фиг. 1; а с учетом члена $gx_1{}^3$ при условии $g < 0$ получаем фазовый портрет, изображенный на фиг. 2.

Для $\mu \ll |g|$ $(\mu > 0)$ отрезок B_1B_2 может быть сделан достаточно малым, но вполне определенным по своей величине. Если же $\mu < 0$, а $g > 0$, то без учета члена $gx_1{}^3$ фазовая картина интегральных кривых будет иметь вид, представленный на фиг. 3. С учетом же члена $gx_1{}^3$ интегральные кривые изображены на фиг. 4.

Поведение интегральных кривых, изображенное на фиг. 1—4, наглядно представляет те качественно ошибочные выводы, к которым можно прийти без учета нелинейных членов. Очевидно, что система, удовлетворяющая условиям $\mu > 0$, $g < 0$, $|\mu/g| \ll 1$, предпочтительнее системы, удовлетворяющей условиям $\mu < 0$, $g > 0$, $|\mu/g| \ll 1$, несмотря на то что в последней корни определяющего уравнения отрицательны, а в первой один корень положительный.

Рассмотрим еще один пример.

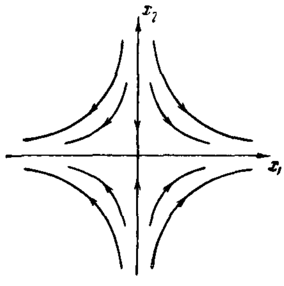
Пример 2. Предположим, что уравнения возмущенного движения имеют вид

$$x^{\cdot} = \mu x + y + gx(x^2 + y^2), \qquad y^{\cdot} = \mu y - x + gy(x^2 + y^2) \qquad (9.2)$$
$$z^{\cdot} = -z$$

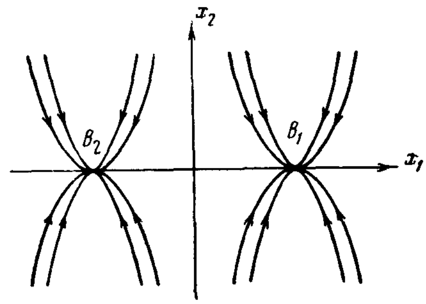
Определяющее уравнение этой системы имеет два комплексных корня, равных $\mu \pm i$, и один отрицательный корень, равный — 1. Заменой $x = = -r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ эта система приводится к виду

$$r^{\cdot} = \mu r + gr^3, \qquad z^{\cdot} = -z, \qquad \theta^{\cdot} = 1 \qquad (9.3)$$

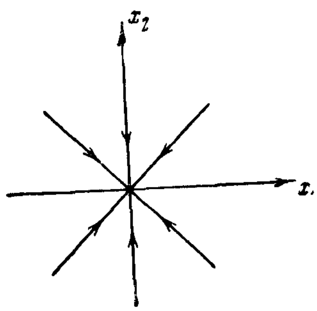
Первые два уравнения полученной системы по внешнему виду аналогичны уравнениям (9.1) с той только разницей, что в первом уравнении переменная r имеет смысл радиуса в полярной системе координат и в силу этого перемен-



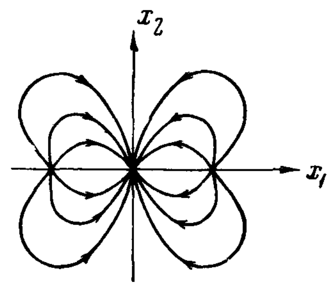
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ной r мы должны приписать положительный знак. Третье уравнение можно вообще отбросить, так как оно дает $\theta + \theta_0 = t + t_0$.

Как и в первом примере, переменные r и z определятся равенствами

$$r^2 = \frac{r_0^2}{\left(1 - \frac{r_0^2}{\lambda^2}\right) e^{-2\mu\theta} + \frac{r_0^2}{\lambda^2}}, \qquad z = z_0 e^{-\theta}$$

в которых $\lambda^2 = -\mu/g$.

Первое уравнение системы (9.3) имеет частное решение $r^2 = r_0^2 = \lambda^2$, указывающее на существование предельного цикла.

В случае $-\mu/g \ll 1$ радиус этого предельного цикла будет достаточно малым, и если максимально допустимые начальные возмущения выходят за этот предел, то возникает задача об устойчивости движения для области изменения начальных возмущений, удовлетворяющих условию

$$\lambda^2 \leqslant x_0^2 + y_0^2 \leqslant \lambda^2 + h$$

Очевидно, что при решении задач подобного рода нельзя руководствоваться одним лишь классическим определением устойчивости движения, данным Ляпуновым. Однако методы, созданные Ляпуновым, применимы и к решению поставленных задач, если только ввести некоторые дополнительные условия, накладываемые на функции V и V'.

Исследуем уравнения (9.1) и (9.2) прямым методом Ляпунова. Для системы уравнений (9.1) можно взять функцию Ляпунова в виде

$$V = x_1^2 - g x_2^2$$

Производная этой функции по t в силу уравнений (9.1) будет иметь вид

$$V' = 2g\left(\mu/_g x_1^2 + x_1^4 + x_2^2\right)$$

Очевидно, в случае $\mu > 0$ и $g < 0$ функция V' в области $x_1^2 > -\mu/g$ является отрицательной. Следовательно, функция V в этой области будет убывающей. Отсюда мы приходим к заключению, что, несмотря на наличие положительного корня, переменные x_1 и x_2, рассматриваемые как функции времени, определяемые уравнениями (9.1), для всех значений $t > 0$ будут ограничены.

Если значения x_1 и x_2 в начальный момент времени удовлетворяли условию $x_1^2 - gx_2^2 \leqslant A$, то они его не нарушат во все время движения, если только $A > -\mu/g$.

Для системы (9.2) функцию Ляпунова можно взять в виде

$$V = x^2 + y^2 - gz^2$$

Ее производная по t согласно уравнениям (9.3) запишется следующим образом:

$$V' = 2g\,[{}^{\mu}/_{g}\,(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 + z^2]$$

При $\mu > 0$, $g < 0$ функция V' является отрицательной для любых значений x, y, z, если только $x^2 + y^2 > -\mu/g$, а функция V вследствие этого является убывающей.

Переменные x, y, z, рассматриваемые как функции времени, определяемые уравнениями (9.2) будут ограничены и, если их значения в момент $t = 0$ удовлетворяли условию $x^2 + y^2 - gz^2 \leqslant A$, то они этому условию будут удовлетворять для всех значений $t > 0$, если $A > -\mu/g$.

Таким образом, мы пришли к тем же результатам, которые получили путем интегрирования уравнений (9.1) и (9.2).

§ 45. Определение устойчивости. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$u_s^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}\, u_k + U_s(u_1, \ldots, u_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{9.4}$$

где p_{sk} — постоянные коэффициенты, а U_s — голоморфные функции в окрестности точки $u_1 = \ldots = u_n = 0$, разложения которых не содержат членов ниже второго порядка.

Будем предполагать, что уравнение $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ имеет q корней с отрицательными вещественными частями и m нулевых корней; остальные p корней имеют малые по модулю вещественные части.

Линейной подстановкой с постоянными действительными коэффициентами систему (9.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered}
x_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, x_k + X_i(x_1, \ldots, x_p;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_q) \\
y_j^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{h=1}^{m} b_{jh}\, y_h + Y_j(x_1, \ldots, x_p;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_q) \\
z_l^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{r=1}^{q} c_{lr}\, z_r + Z_l(x_1, \ldots, x_p;\ y_1, \ldots, y_m;\ z_1, \ldots, z_q) \\
(i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, q;\ p + m + q = n)
\end{gathered} \tag{9.5}$$

Пусть уравнение $|a_{ik} - \delta_{ik}\mu| = 0$ имеет p корней с модулями вещественных частей, близкими к нулю, уравнение $|b_{jh} - \delta_{jh}\nu| = 0$ имеет m нулевых корней, уравнение $|c_{lr} - \delta_{lr}\lambda| = 0$ имеет q корней с отрицательными вещественными частями.

В дальнейшем переменные y_j будем называть критическими, а переменные x_i — близкими к критическим.

В главе III при $p=0$ задача об устойчивости системы (9.5) в случаях несущественно особенных с помощью преобразований, не изменяющих задачи об устойчивости, сводилась к исследованию системы только с критическими переменными. Преобразованиями, аналогичными изложенным в главе III, исследование системы (9.5) при $p \neq 0$ в случаях несущественно особенных может быть сведено к исследованию устойчивости системы, содержащей лишь критические и близкие к критическим переменные, которую в общем случае можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\xi_1^{(s)}}{dt} = \mu_s \xi_1^{(s)} + \Xi_1^{(s)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{d\xi_i^{(s)}}{dt} = \mu_s \xi_i^{(s)} + \alpha_{i-1}^{(s)} \xi_{i-1}^{(s)} + \Xi_i^{(s)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{du_1^{(r)}}{dt} = \mu_{1r} u_1^{(r)} - \lambda_{1r} v_1^{(r)} + U_1^{(r)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{dv_1^{(r)}}{dt} = \mu_{1r} v_1^{(r)} + \lambda_{1r} u_1^{(r)} + V_1^{(r)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{du_q^{(r)}}{dt} = \mu_{1r} u_q^{(r)} - \lambda_{1r} v_q^{(r)} + \beta_{q-1}^{(r)} u_{q-1}^{(r)} + U_q^{(r)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{dv_q^{(r)}}{dt} = \mu_{1r} v_q^{(r)} + \lambda_{1r} u_q^{(r)} + \beta_{q-1}^{(r)} v_{q-1}^{(r)} + V_q^{(r)}(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&\frac{d\eta_1}{dt} = H_1(\xi, u, v, \eta, \mu), \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = \gamma_{j-1}\eta_{j-1} + H_j(\xi, u, v, \eta, \mu)\\
&(s=1, \ldots, \sigma;\ r=1, \ldots, \delta,\ i=2, \ldots, n_s,\ q=2, \ldots, l_r,\ j=r, \ldots, m)
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_\delta$; $\mu_{11} \pm i\lambda_{11}, \ldots, \mu_{1\delta} \pm i\lambda_{1\delta}$ — все корни уравнения $|a_{ik} - \delta_{ik}\mu| = 0$ в предположении, что каждый кратный корень повторяется столько раз, сколько соответствует ему групп решений; n_s, l_r означают число решений в группе; $\Xi_i^{(s)}$, $U_q^{(r)}$, $V_q^{(r)}$, H_j — голоморфные функции $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{n1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\sigma)}, \ldots, \xi_{n\sigma}^{(\sigma)}$, $u_1^{(1)}, \ldots, u_{l_1}^{(1)}, \ldots, u_1^{(\delta)}, \ldots, u_{l_\delta}^{(\delta)}$, $v_1^{(1)}, \ldots, v_{l_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(\delta)}, \ldots, v_{l_\delta}^{(\delta)}$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ в окрестности точки $\xi_1^{(1)} = \ldots = \eta_m = 0$, причем

$$
\begin{aligned}
&\Xi_i^{(s)} = \Xi_{i0}^{(s)}(\xi, u, v, \eta, 0) +\\
&\qquad + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} \Xi_{ip_1 \ldots p_{1\delta}}^{(s)}(\xi, u, v, \eta, 0)\\
&H_j = H_{j0}(\xi, u, v, \eta, 0) +\\
&\qquad + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} H_{jp_1 \ldots p_{1\delta}}(\xi, u, v, \eta, 0)\\
&U_q^{(r)} = U_{q0}^{(r)}(\xi, u, v, \eta, 0) +\\
&\qquad + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} U_{qp_1 \ldots p_{1\delta}}^{(r)}(\xi, u, v, \eta, 0)\\
&V_q^{(r)} = V_{q0}^{(r)}(\xi, u, v, \eta, 0) +\\
&\qquad + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} V_{qp_1 \ldots p_{1\delta}}^{(r)}(\xi, u, v, \eta, 0)\\
&(s=1, \ldots, \sigma;\ i=1, \ldots, n_s;\ r=1, \ldots, \delta;\ q=1, \ldots, l_r;\\
&\qquad j=1, \ldots, m;\ p_1 + \ldots + p_{1\delta} \geqslant 1)
\end{aligned}
\tag{9.7}
$$

Прежде чем перейти к исследованию системы (9.6), необходимо установить понятие устойчивости в случаях, близких к критическим. Определим устойчивость невозмущенного движения следующим образом: если в пространстве переменных $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{n_1}^{(1)}, \ldots, \xi_1^{(\sigma)}, \ldots, \xi_{n\sigma}^{(\sigma)}$, $u_1^{(1)}, \ldots, u_{l_1}^{(1)}, \ldots, u_1^{(\delta)}, \ldots, u_{l_\delta}^{(\delta)}$, $v_1^{(1)}, \ldots, v_{l_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(\delta)}, \ldots v_{l_\delta}^{(\delta)}$, $\eta_1, \ldots, \eta_m$ можно указать замкнутую односвязную область G, обладающую тем свойством, что возмущения $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_{n_\sigma}^{(\sigma)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{l_\delta}^{(\delta)}, v_1^{(1)}, \ldots, v_{l_\delta}^{(\delta)}, \eta_1, \ldots, \eta_m$, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения (9.6), не выходят за эту область для любых значений $t \geqslant t_0$, если только их начальные значения $\xi_{10}^{(1)}, \ldots, \xi_{n_\sigma 0}^{(\sigma)}, u_{10}^{(1)}, \ldots, u_{l_\delta 0}^{(\delta)} \ldots, v_{10}^{(1)}, \ldots, v_{l_\delta 0}^{(\delta)}, \eta_{10}, \ldots, \eta_{m0}$ находились внутри или на границе этой области, то невозмущенное движение устойчиво; в противном случае оно неустойчиво.

Может оказаться, и это будет общий случай, что внутри области G существует другая замкнутая область G_1, по отношению к которой движение может оказаться неустойчивым. Не исключаются и те случаи, когда таких областей будет несколько, причем эти области могут быть вложены одна в другую.

Поясним данное определение примером. Предположим, что уравнения возмущенного движения имеют вид

$$x^{\cdot} = \mu x + y + gx(x^2 + y^2), \qquad y^{\cdot} = \mu y - x + gy(x^2 + y^2)$$

где μ и g — постоянные величины. В полярных координатах $x = -r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ будем иметь

$$r^{\cdot} = \mu r + gr^3, \qquad \theta^{\cdot} = 1$$

Рассмотрим различные случаи, представляемые этой системой.

1. Пусть $\mu < 0$, $g < 0$. Тогда круг любого радиуса может играть роль области G и устойчивость невозмущенного движения будет иметь место для любых значений x_0, y_0.

2. Пусть $\mu \geqslant 0$, $g > 0$. В этом случае область G не существует.

3. Пусть $\mu > 0$ и $g < 0$. В этом случае движение будет неустойчиво по отношению к любой области, представляющей собой круг радиуса $R < \sqrt{-\mu/g}$, и устойчиво по отношению к любой области, представляющей собой круг радиуса $R \geqslant \sqrt{-\mu/g}$, т. е. за область G мы можем принять круг сколь угодно большого радиуса $R \geqslant \sqrt{-\mu/g}$. Областью G_1 может являться любой круг радиуса $R < \sqrt{-\mu/g}$.

4. Пусть $\mu < 0, g \geqslant 0$. Тогда для возмущений x_0, y_0, находящихся внутри или на самой окружности радиуса $R = \sqrt{-\mu/g}$, движение будет устойчивым, а для любых возмущений внешних по отношению к этой окружности, оно будет неустойчиво. В этом случае областью G является круг радиуса R, а области G_1 не существует.

Приведенное определение не нарушает механического смысла, заложенного Ляпуновым в определение устойчивости движения, но исключает весьма жесткие требования, предъявляемые к начальным возмущениям.

Данное определение по своему смыслу также близко к пониманию устойчивости, высказанному Пуанкаре в третьем мемуаре его монографии «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями».

Введем понятие устойчивой области G. Будем рассматривать только такие замкнутые области G, которые включают начало координат. Кроме того, будем предполагать, что любой луч, выходящий из начала координат, пересекает границу области G лишь в одной точке и не касается ее ни в одной точке.

Обозначим через $r(t_0)$ радиус-вектор точки $\xi_{i0}^{(s)}, u_{q0}^{(r)}, v_{q0}^{(r)}, \eta_{j0}$, лежащей вне области G, через r_0^*— радиус-вектор точки пересечения границы области G с радиусом-вектором $r(t_0)$. Радиус-вектор точки $\xi_i^{(s)}(t)$, $u_q^{(r)}(t)$, $v_q^{(r)}(t)$, $\eta_j(t)$, определяемой системой (9.6) при начальных значениях $\xi_{i0}^{(s)}$, $u_{q0}^{(r)}, v_{q0}^{(r)}, \eta_{j0}, t_0$, обозначим через $r(t)$, а через r^*—радиус-вектор точки пересечения $r(t)$ с границей области G.

Область G будем называть устойчивой, если для заданного достаточно малого ε можно определить такое число ν, что при любых значениях $\xi_{i0}^{(s)}$, $u_{q0}^{(r)}$,

$v_{q0}^{(r)}$, η_{j0}, лежащих во внешней окрестности границы области G и удовлетворяющих условию $r(t_0) - r_0^* \leqslant \nu$, будем иметь $r(t) - r^* \leqslant \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$.

В противном случае область G будем называть неустойчивой. Область G будем называть асимптотически устойчивой, если $r(t) - r^* \to 0$ при $t \to \infty$.

Наибольший интерес для приложений представляют устойчивые области G, обладающие тем свойством, что при малых по модулю вещественных частях корней уравнения $|a_{sk} - \delta_{sk}\mu| = 0$ расстояния точек, лежащих на границе этих областей до начала координат, являются также малыми и стремятся к нулю, когда положительные вещественные части μ_s, μ_{1r} стремятся к нулю.

§ 46. Основная теорема. Для системы (9.6) докажем следующую теорему.

Теорема. Если система (9.6) такова, что при всех $\mu_s = \mu_{1r} = 0$ допускает существование функции Ляпунова V, удовлетворяющей теореме об асимптотической устойчивости, причем уравнение $V = \mathrm{const}$ представляет односвязную замкнутую область для всех ξ^s_i, $u_q^{(r)}$, $v_q^{(r)}$, η_j, принадлежащих области исследования, то эта система при μ_s, μ_{1r}, отличных от нуля, допускает существование устойчивой области G, включающей в себя начало координат. При этом наибольший радиус-вектор области G стремится к нулю, когда все положительные вещественные части μ_s, μ_{1r} стремятся к нулю.

Пусть $V(\xi_i^{(s)}, u_q^{(r)}, v_q^{(r)}, \eta_j)$ есть указанная в теореме определенно-положительная функция, а $V_0'(\xi_i^{(s)}, u_q^{(r)}, v_q^{(r)}, \eta_j)$ — ее производная, вычисленная согласно уравнениям (9.6) при $\mu_s = \mu_{1r} = 0$.

Производная функции V, вычисленная в силу системы уравнений (9.6) при μ_s, $\mu_{1r} \neq 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned}
V' = V_0' &+ \sum_{s=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\partial V}{\partial \xi_i^{(s)}} \left[\mu_s \xi_i^{(s)} + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} \Xi^{(s)}_{ip_1 \ldots p_{1\delta}}\right] + \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial \eta_j} \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} H_{jp_1 \ldots p_{1\delta}} + \\
&+ \sum_{r=1}^{\delta} \sum_{q=1}^{l_r} \frac{\partial V}{\partial u_q^{(r)}} \left[\mu_{1r} u_q^{(r)} + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} U^{(r)}_{qp_1 \ldots p_{1\delta}}\right] + \\
&+ \sum_{r=1}^{\delta} \sum_{q=1}^{l_r} \frac{\partial V}{\partial v_q^{(r)}} \left[\mu_{1r} v_q^{(r)} + \sum \mu_1^{p_1} \ldots \mu_\sigma^{p_\sigma} \mu_{11}^{p_{11}} \ldots \mu_{1\delta}^{p_{1\delta}} V^{(r)}_{qp_1 \ldots p_{1\delta}}\right] \\
&\qquad (l_1 + \ldots + l_\delta \geqslant 1)
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Правая часть этого выражения при $\mu_1 = \ldots = \mu_\sigma = \mu_{11} = \ldots = \mu_{1\delta} = 0$ принимает значение V_0'. Отметим, что для переменных $\xi_i^{(s)}$, $u_q^{(r)}$, $v_q^{(r)}$, η_j, удовлетворяющих условию $V = c$, будем иметь $|V_0'| \geqslant \alpha^2(c)$. Очевидно, что число α не зависит от $\mu_1, \ldots, \mu_{1\delta}$. В силу непрерывности значение V' будет менее нуля для $\mu_1, \ldots, \mu_{1\delta}$, достаточно малых. Следовательно, интегральные кривые, определяемые системой (9.6), пересекают замкнутую поверхность $V = c$ снаружи во внутрь. Отсюда следует, что в некоторой окрестности начала координат можно выделить область G для любой точки внешней границы, которой для заданного достаточно малого ε можно определить такое число ν, что при условии $r(t_0) - r_0^* < \nu$ будут выполняться неравенства

$$r(t) - r^* \leqslant \varepsilon$$

для любого $t > t_0$.

При $\mu_1, \ldots, \mu_{1\delta}$, стремящихся к нулю, граница области G будет стягиваться к началу координат $\xi_i^{(s)} = u_q^{(r)} = v_q^{(r)} = \eta_j = 0$.

При наличии устойчивой области G можно указать замкнутую область, из которой возмущения $\xi_i^{(s)}$, $u_q^{(r)}$, $v_q^{(r)}$, η_j, рассматриваемые как функции времени не выйдут для любого t в интервале $[t_0, \infty]$, если они находились в ней при $t = t_0$.

Таким образом, если решена задача об асимптотической устойчивости в каком-то критическом случае, можно указать область устойчивости для соответствующего близкого к нему случая, когда определяющее уравнение имеет корни с малыми положительными вещественными частями.

В дальнейшем рассмотрим подробно решение задачи в двух простейших близких к критическим случаях: одного малого положительного корня определяющего уравнения, и пары комплексных корней с малой положительной вещественной частью.

§ 47. Случай одного положительного корня. В случае одного малого положительного корня определяющего уравнения система уравнений возмущенного движения с помощью линейной подстановки с постоянными вещественными коэффициентами всегда может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} &x^{\cdot} = \mu x + X(x, x_1, \ldots, x_n) \\ &x_s^{\cdot} = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s(x, x_1, \ldots x_n) \end{aligned} \tag{9.9}$$

В этой системе μ — малый положительный корень; X, X_s — голоморфные функции переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности начала координат, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка. Определяющее уравнение присоединенной системы $| p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa | = 0$ имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Система уравнений (9.9) и будет являться предметом наших дальнейших исследований.

Мы видели, что при $\mu = 0$ система (9.9) не всегда допускает существование сколь угодно малой замкнутой области, за которую не выходят переменные $x, x_1, \ldots, x_n$.

Представим правые части системы уравнений в виде

$$X = f_0(x) + X^*(x, x_1, \ldots, x_n), \qquad X_s = f_s(x) + X_s^*(x, x_1, \ldots x_n)$$

Функции $f_0(x)$ и $f_s(x)$ представляют собой значения функций X и X_s, когда в последних положено $x_1 = \ldots = x_n = 0$, так как функции X^* и X_s^* обращаются в нуль при нулевых значениях $x_1, \ldots, x_n$. Запишем функции $f_0(x)$ и $f_s(x)$ в виде

$$f_0(x) = a_{k_0} x^{k_0} + \ldots, \qquad f_s(x) = b_{k_s} x^{k_s} + \ldots$$

где $a_{k_0}, \ldots, b_{k_s}$ — постоянные величины.

Прежде чем перейти к исследованию интегралов системы (9.9), преобразуем ее к такому виду, чтобы любой показатель степени k_s был больше показателя степени k_0. С этой целью введем замену

$$x_s = y_s + u_s(x) = y_s + C_{s2} x^2 + \ldots + C_{sM} x^M \tag{9.10}$$

Тогда y_s будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dy_s}{dt} = &-(2C_{s2} x + 3C_{s3} x^2 + \ldots + MC_{sM} x^{M-1}) \left[\mu x + a_{k_0} x^{k_0} + \ldots + \right. \\ &\left. + X^*(x, u_1, \ldots, u_n) + X_*(x, y_1, \ldots, y_n)\right] + \\ &+ p_{s1} y_1 + \ldots + p_{sn} y_n + p_{s1} u_1 + \ldots + p_{sn} u_n + b_{k_s} x^{k_s} + \ldots + \\ &+ X_s^*(x, u_1, \ldots, u_n) + X_{s*}(x, y_1, \ldots y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

Если в правых частях этих уравнений положить $y_1 = \ldots = y_n = 0$, то совокупность оставшихся членов определит нам функции, которые в преобразованной системе будут играть роль функций $f_s(x)$. Обозначая эти функции через $f_s^*(x)$, будем иметь

$$f_s^*(x) = -(2C_{s2}x + 3C_{s3}x^2 + \dots + MC_{sM}x^{M-1})\left[\mu x + a_{k_0}x^{k_0} + \dots + X^*(x, u_1, \dots, u_n)\right] + p_{s1}u_1 + p_{s2}u_2 + \dots + p_{sn}u_n + b_{k_s}x^{k_s} + \dots + X_s^*(x, u_1, \dots, u_n) \qquad (s = 1, \dots, n)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, без члена μx представляет функцию $f^*_0(x)$, которая в преобразованной системе будет играть роль функции $f^*_0(x)$. Эта функция имеет вид

$$f_0^*(x) = f_0(x) + X^*(x, u_1, \dots, u_n)$$

с низшим показателем степени по x, равным некоторому числу M. Подставляя в выражения $f_s^*(x)$ значения u_s в виде полиномов (9.10), мы получим

$$f_s^*(x) = B_2x^2 + B_3x^3 + \dots + B_{m+N+1}x^{m+N+1} + \dots$$

где $m + N = M$.

Коэффициенты B_2, B_3, ... определяются через C_{sr} и через коэффициенты разложения правых частей системы (9.9).

Выберем коэффициенты C_{sr} так, чтобы выражения $B_2, \dots, B_{m+N}$ обратились в нули. Тогда для определения C_{sr} получим следующие уравнения:

$$(p_{11} - \mu r)C_{1r} + p_{12}C_{2r} + \dots + p_{1n}C_{nr} = F_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{n1}C_{1r} + p_{n2}C_{2r} + \dots + (p_{nn} - \mu r)C_{nr} = F_n$$

в которых $F_1, \dots, F_n$ — полиномы от коэффициентов C_{sr} с индексами $r_1 < r$ и коэффициентов разложения правых частей системы (9.9).

Определитель $|p_{sk} - \delta_{sk}\mu r| \neq 0$, так как определяющее уравнение присоединенной системы не имеет положительных корней. Последнее неравенство позволяет определить все коэффициенты C_{sr} при $s = 1, \dots, n$ и для всех r до $m + N$.

Мы здесь, как и в случае одного нулевого корня, должны различать два случая:

Первый случай характеризуется тем, что результат подстановки полиномов $u_1, \dots, u_n$ в выражение $f^*_0(x)$ определит низший показатель степени m, меньший $M + 1$ (общий случай); а второй, когда низший показатель степени разложения такой функции будет больше $M + 1$, как бы велико число M мы ни брали.

Если каким-либо способом удалось установить, что имеет место второй случай, то вместо полиномов $u_1, \dots, u_n$ определим функции $u_1, \dots, u_n$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\mu x\frac{du_s}{dx} = p_{s1}u_1 + \dots + p_{sn}u_n + b_{k_s}x^{k_s} + \dots + X_s^*(x, u_1, \dots, u_n) - \frac{du_s}{dx}\left[a_{k_0}x^{k_0} + \dots + X^*(x, u_1, \dots, u_n)\right] \qquad (s = 1, \dots, n)$$

Функции $u_s(x)$ в силу теоремы, доказанной в главе III, § 19, представляются в виде абсолютно сходящихся рядов для любых значений $\mu \geqslant 0$. Радиус сходимости этих рядов при $\mu = 0$ будет отличен от нуля.

Как в первом, так и во втором случае заменой (9.10) система уравнений (9.9) приведется к виду

$$\begin{gathered}
\frac{dx}{dt}=\mu x+gx^m+\ldots+\sum_{k=1}^{\infty} x^k P_k(y_1, \ldots, y_n)+X_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\
\frac{dy_s}{dt}=p_{s1} y_1+\ldots+p_{sn} y_n+g_{s, m+1} x^{m+1}+\ldots+Y_s(x, y_1, \ldots, y_n) \\
(s=1, \ldots n)
\end{gathered} \tag{9.11}$$

В первом случае числа g и g_{sk} будут отличны от нуля, во втором — все эти числа обратятся в нули.

В системе уравнений (9.11) выражения P_k представляют линейные формы переменных $y_1, \ldots, y_n$, а функция X_1 не содержит линейных членов в отношении этих переменных; $Y_s(x, y_1, \ldots, y_n)$ — голоморфные функции всех переменных, обращающиеся в нуль при $y_1=\ldots=y_n=0$ и не содержащие в своих разложениях членов ниже второго порядка.

Будем предполагать, что в правой части первого уравнения суммирование по k начинается с $k=m$. В противном случае нам пришлось бы произвести преобразования, аналогичные тем, которые мы производили в главе I, рассматривая задачу одного нулевого корня.

Это преобразование не изменит μ, g и g_{sk}.

Предположим, что в результате преобразования мы получим $g<0$ и m нечетное. С этого случая и начнем исследование нашей задачи.

Возьмем определенно-положительную функцию V в виде

$$V=x^2+V_1(y_1, \ldots, y_n)$$

Функцию V_1 определим в виде квадратичной формы, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial y_s}(p_{s1} y_1+\ldots+p_{sn} y_n)=g(y_1^2+\ldots+y_n^2)$$

В случае $g<0$ квадратичная форма V_1 будет определенно-положительной.

Производная функции V по t в силу уравнений (9.11) будет иметь вид

$$\begin{gathered}
V'=2x\left[\mu x+gx^m+\ldots+\sum_{k=m}^{\infty} x^k P_k+X_1\right]+g(y_1^2+\ldots+y_n^2)+ \\
+\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial y_s}(g_{s, m+1} x^{m+1}+\ldots+Y_s)
\end{gathered}$$

Это выражение можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered}
V'=2\mu x^2+2gx^{m+1}+g(y_1^2+\ldots+y_n^2)+x^{m+1}\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)+ \\
+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \varphi_{ij}(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{gathered}$$

где функция $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ содержит только линейные члены в отношении $y_1, \ldots, y_n$ и обращается в нуль при $x=y_1=\ldots=y_n=0$.

Функции φ_{ij} могут содержать любые члены в отношении $x, y_1, \ldots, y_n$, но они так же, как и функция φ, обращаются в нуль при равенстве нулю этих переменных.

Задача наша будет решена, если мы докажем, что на поверхности

$$x^2+V_1=c$$

при достаточно малом c производная V' меньше нуля.

Очевидно, что совокупность последних членов в выражении V' не может влиять на знак выражения $g(y^2_1 + \ldots + y^2_n)$, а совокупность членов $x^{m+1}\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ — на знак выражения $2gx^{m+1}$. Следовательно, знак производной определится совокупностью членов

$$S=2\mu x^2+2gx^{m+1}+g(y_1^2+\ldots+y_n^2)$$

Установим знак этого выражения при условии $x^2 + V_1 = c$. Подставляя значение x^2 в выражение S, получим

$$S=2g(c-V_1)[\mu/g+(c-V_1)^{(m-1)/2}]+g(y_1^2+\ldots+y_n^2)=$$
$$=2g(c-V_1)(\mu/g+c^{(m-1)/2})+g(y_1^2+\ldots+y_n^2)-$$
$$-g(c-V_1)(m-1)c^{(m-3)/2}V_1+F$$

Выражение $-g(c-V_1)(m-1)c^{(m-3)/2}V_1$ не изменит знака выражения $g(y^2_1 + \ldots + y^2_n)$ в силу малости числа c. Функция F, зависящая от $y_1, \ldots, y_n$ не содержит членов ниже четвертого порядка и в силу этого также не изменит знака производной.

Следовательно, при $g<0$ знак выражения S, а следовательно, и V' определится членами $\mu/g + c^{(m-1)/2}$.

Если число c выбрать согласно неравенству

$$c^{(m-1)/2}>-\mu/g$$

то V' на поверхности $x^2 + V_1 = c$ будет иметь только отрицательные значения. А этого вполне достаточно для решения нашей задачи. При μ достаточно малом последнее неравенство всегда выполнимо.

Руководствуясь соображениями, изложенными в главе I, можно доказать, что при m четном или при m нечетном и $g>0$ движение будет неустойчиво, т. е. какую бы область мы ни брали, если только c достаточно мало, функции $x(t)$, $y_1(t)$, $\ldots$, $y_n(t)$, определенные уравнениями (9.11) для значений $t>T$, нарушат условие $x^2 + y^2_1 + \ldots + y^2_n \leqslant c$, несмотря на то что их начальные значения удовлетворяли этому условию.

К такому же заключению приводит случай, когда все числа g и g_{sk} равны нулю.

§ 48. Случай одной пары комплексных корней с положительной вещественной частью. Систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в этом случае можно привести к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}=\mu x+\beta y+X(x, y, x_1, \ldots, x_n)\\
&\frac{dy}{dt}=\mu y-\beta x+Y(x, y, x_1, \ldots, x_n)\\
&\frac{dx_s}{dt}=\sum_{k=1}^{n} p_{sk}x_k+X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s=1, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{9.12}$$

где μ, β и p_{sk} — постоянные величины, причем определяющее уравнение присоединенной системы имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Функции X, Y, X_s будем считать голоморфными в некоторой конечной окрестности начала координат и не содержащими в своих разложениях членов ниже второго порядка; μ — малая положительная вещественная часть пары комплексных корней.

В случае $\mu = 0$ система (9.12) переходит в ляпуновскую систему, отвечающую одной паре чисто мнимых корней.

Если же μ мало, а функции X, Y, X_s имеют вид

$$X = \mu f(x, y, x_s, \mu), \qquad Y = \mu\varphi(x, y, x_s, \mu) \qquad X_s = \mu f_s(x, y, x_s, \mu)$$

то такого рода системы являются предметом исследования квазилинейной теории, в основу которой положен метод «малого параметра» Пуанкаре. На этих системах мы подробно остановимся в главе XI.

В случаях несущественно особенных после соответствующих преобразований системы (9.12), ее укороченную часть можно представить в виде

$$x^{\cdot} = \mu x + \beta y + X(x, y), \qquad y^{\cdot} = \mu y - \beta x + Y(x, y) \tag{9.13}$$

Функции X и Y представим следующим образом:

$$X = X_0(x, y) + \mu X_1(x, y) + \ldots, \qquad Y = Y_0(x, y) + \mu Y_1(x, y) + \ldots$$

Если в окрестности начала координат правые части уравнений (9.13) обращаются в нуль только при $x = y = 0$, то, очевидно, при $\mu > 0$ устойчивость невозмущенного движения для малых начальных возмущений x_0 и y_0 возможна только в том случае, когда уравнения (9.13) имеют предельный цикл. Если этот предельный цикл будет устойчив, то он определит устойчивую область G.

Для системы (9.13) решим следующую задачу. Найдем необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять функции $X_0(x,y)$, $Y_0(x,y)$, чтобы независимо от членов $X_1, X_2, \ldots, Y_1, Y_2, \ldots$ система уравнений (9.13) имела в окрестности начала координат предельный цикл, стягивающийся в точку при $\mu = 0$. Рассмотрим также вопрос об устойчивости предельного цикла, если он существует.

Запишем систему уравнений (9.13) в виде

$$\begin{aligned} x^{\cdot} &= \mu x + \beta y + X_0^{(m)} + X_0^{(m+1)}(x, y) + \ldots + \mu X^*(x, y, \mu) \\ y^{\cdot} &= \mu y - \beta x + Y_0^{(m)}(x, y) + \ldots + \mu Y^*(x, y, \mu) \end{aligned} \tag{9.14}$$

Решим вначале частную задачу. Будем отыскивать условия, при которых вопрос о существовании предельного цикла, стягивающегося в точку при $\mu = 0$, решается формами $X^{(m)}{}_0$ и $Y^{(m)}{}_0$ независимо от членов более высокого порядка.

Система уравнений (9.14) в полярных координатах r и θ, где $x = -r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, будет иметь вид

$$\begin{aligned} r^{\cdot} &= \mu r + r^m R_0^{(m)}(\theta) + r^{m+1} R_0^{(m+1)}(\theta) + \ldots + \mu R_1(r, \theta, \mu) \\ \theta^{\cdot} &= \beta + r^{m-1} Q_0^{(m)}(\theta) + r^m Q_0^{(m+1)}(\theta) + \ldots + \mu Q_1(r, \theta, \mu) \qquad (m \geqslant 2) \end{aligned} \tag{9.15}$$

Здесь $R^{(k)}{}_0$ и $Q^{(k)}{}_0$ определяются выражениями

$$R_0^{(k)}(\theta) = -X_0^{(k)}\cos\theta + Y_0^{(k)}\sin\theta, \qquad Q_0^{(k)}(\theta) = X_0^{(k)}\sin\theta + Y_0^{(k)}\cos\theta$$

с подстановкой в $X^{(k)}{}_0$ и $Y^{(k)}{}_0$ вместо x и y $\cos\theta$ и $\sin\theta$ соответственно.

Функции R_1 и Q_1 определяются аналогичными формулами

$$R_1 = -X_1\cos\theta + Y_1\sin\theta, \qquad Q_1 = X_1\sin\theta + Y_1\cos\theta$$

с заменой $x = -r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ в X_1 и Y_1.

Следовательно, разложение этих функций по степеням r будет начинаться с членов не ниже второго порядка.

Если вопрос о существовании предельного цикла, стягивающегося в точку при $\mu = 0$, решается формами $X_0^{(m)}$ и $Y_0^{(m)}$, то достаточно рассмотреть укороченную систему

$$r^{\cdot} = \mu r + r^m R_0^{(m)}(\theta), \qquad \theta^{\cdot} = \beta \tag{9.16}$$

Покажем, что рассмотрения форм $X_0^{(m)}$ и $Y_0^{(m)}$ достаточно в том случае, когда

$$\int_0^{2\pi} R_0^{(m)}(\theta)\, d\theta \neq 0$$

Если же этот интеграл обращается в нуль, то для решения поставленной задачи необходимо рассматривать формы более высокого порядка.

Рассмотрим с этой целью функцию Ляпунова, определяемую из уравнения

$$r = V + V^m u_m(\theta) \tag{9.17}$$

где

$$u_m(\theta) = \frac{1}{\beta} \int [R_0^{(m)}(\theta) - g]\, d\theta + C^{(m)}$$

Число g определим из условия периодичности функции $u_m(\theta)$, т. е. из равенства

$$\int_0^{2\pi} (R_0^{(m)} - g)\, d\theta = 0 \tag{9.18}$$

Производная функции V по t согласно (9.15) определяется выражением

$$[1 + mV^{m-1} u_m(\theta)] \frac{dV}{dt} = -V^m \frac{du_m}{d\theta} [\beta + (V + V^m u_m)^{m-1} Q_0^m +$$
$$+ \ldots + \mu Q_1] + \mu (V + V^m u_m) + (V + V^m u_m)^m R_0^{(m)} +$$
$$+ (V + V^m u_m)^{m+1} R_0^{(m+1)} + \ldots + \mu R_1$$

При нашем выборе $u_m(\theta)$ производную V по t можно представить в виде

$$(1 + mV^{m-1} u_m) \frac{dV}{dt} = \mu V + gV^m + V^{m+1} F_1(V, \theta) + \mu V^2 F_2(V, \theta, \mu),$$

где $F_1(V, \theta)$ и $F_2(V, \theta, \mu)$ — голоморфные функции V с периодическими относительно θ коэффициентами.

Рассмотрим все случаи, которые может представить система уравнений (9.14).

Пусть m нечетное, $\mu > 0$, $g < 0$. Полагая $-\mu/g = \alpha^{m-1}$ и $V = z\alpha$, будем иметь

$$(1 + mz^{m-1} \alpha^{m-1} u_m) \frac{dV}{dt} =$$
$$= \alpha\mu z \left[1 - z^{m-1} - \frac{\alpha z^m}{g} F_1(z\alpha, \theta) - \alpha z F_2(z\alpha, \theta, \alpha)\right]$$

В рассматриваемом случае знак производной при α, достаточно малом, определяется двучленом $1 - z^{m-1}$. Если мы положим $z^{m-1} = 1 - \varepsilon$, то получим $dV/dt > 0$, если же $z^{m-1} = 1 + \varepsilon$, то будем иметь $dV/dt < 0$.

Отсюда следует, что как бы ни было мало число ε, мы всегда можем выбрать число $\alpha = \sqrt[m-1]{-\mu/g}$ настолько малым, чтобы производная dV/dt в интервале изменения $z(1 - \varepsilon_1, 1 + \varepsilon_1)$ меняла знак.

Следовательно, для значений $V_1 = \alpha(1-\varepsilon_1)$, будем иметь $dV/dt > 0$, а для $V_2 = \alpha(1+\varepsilon_1)$ будем иметь $dV/dt < 0$, как бы мало число $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{(m-1)} + \frac{\varepsilon^2(m-2)}{2(m-1)^2} + \ldots$ ни было. На основании этого мы можем утверждать, что невозмущенное движение для начальных возмущений r_0 и θ_0, удовлетворяющих условию $r_0 - (1+\varepsilon_1)\alpha - (1+\varepsilon_1)^m \alpha^m u_m(\theta_0) > 0$, устойчиво, а для начальных возмущений, удовлетворяющих условию $r_0 - (1-\varepsilon_1)\alpha - (1-\varepsilon_1)^m \alpha^m u_m(\theta_0) < 0$, неустойчиво.

Уравнение (9.17) значениями V_1 и V_2 определяет два не имеющих общих точек семейства замкнутых циклов, которые для интегральных кривых, соответствующих системе (9.15), являются циклами без контакта.

Уравнения этих циклов имеют вид

$$r = (1+\varepsilon_1)\alpha + (1+\varepsilon_1)^m \alpha^m u_m(\theta), \qquad r = (1-\varepsilon_1)\alpha + (1-\varepsilon_1)^m \alpha^m u_m(\theta) \quad (9.19)$$

Первое семейство замкнутых циклов пересекается интегральными кривыми уравнений (9.15) с его внешней стороны во внутреннюю, а второе — с внутренней стороны во внешнюю, если считать внешней стороной ту область, которая соответствует росту функции V. Знак производной dV/dt как мы убедились, для сколь угодно малых $\alpha = \sqrt[m-1]{-\mu/g}$ определяется знаком величины $1 - z^{m-1}$.

Если бы мы пожелали определить достаточный верхний предел численного значения α, при котором dV/dt имеет отрицательное значение, то мы должны были бы рассмотреть знак выражения

$$S = -\varepsilon - \alpha^2 g(1+\varepsilon)^{m/(m+1)} F_1(\alpha, \varepsilon, \theta) - \alpha(1+\varepsilon)^{1/(m-1)} F_2(\varepsilon, \alpha, \theta) \quad (9.20)$$

Это выражение при α достаточно малом будет всегда отрицательным, но оно может быть отрицательным и для всех $\alpha \leqslant \alpha_0$, если под α_0 подразумевать максимально возможное значение α, удовлетворяющее уравнению $S = 0$ для любых значений ε и для всех значений θ в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Если мы пожелаем определить для достаточно малого значения α уравнение предельного цикла с точностью до величины первого порядка малости в отношении α, то мы должны найти по заданному числу α минимальное значение ε из уравнения $S = 0$ для любых значений $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Затем по найденному числу ε определить значение ε_1. Этими двумя значениями ε_1 и α мы определим два замкнутых цикла, представляемых уравнениями (9.19), внутри которых находится предельный цикл.

Радиус этого предельного цикла с точностью до α в первой степени определяется неравенством $(1-\varepsilon_1)\alpha < r < (1+\varepsilon_1)\alpha$.

Легко убедиться, что при $\mu > 0$ и $g > 0$ уравнения (9. 15) не допускают существования предельного цикла, стягивающегося в точку при $\mu = 0$.

Можно также убедиться, что при $\mu < 0$ и $g > 0$ предельный цикл, стягивающийся в точку, существует, но он неустойчив. И, наконец, при $\mu < 0$ и $g < 0$ предельного цикла, обладающего указанным выше свойством, также не существует.

Таким образом, сомнительным случаем является тот, когда $g = 0$. Этот случай нельзя считать исключительно частным случаем. Действительно, в случае четного m форма $R^{(m)}(\cos\theta, \sin\theta)$ будет формой от $\sin\theta$ и $\cos\theta$ $(m+1)$-го порядка. Следовательно, равенство (9.18) нам всегда представляет число $g = 0$.

В этом случае формы $X_0^{(m)}$ и $Y_0^{(m)}$ не решают вопроса о существовании предельного цикла, стягивающегося в точку при $\mu = 0$. Для решения этого вопроса нам необходимо рассмотреть формы более высокого порядка.

Возвращаясь к системе (9.15), поставим задачу в более общей форме. Определим, какому условию должны удовлетворять формы $R_0^{(m)}$, $R_0^{(m+1)}, \ldots, R_0^{(m+k)}$, $Q_0^{(m)}$, $Q_0^{(m+1)}, \ldots, Q_0^{(m+k)}$ для того, чтобы уравнения (9.15) допускали существование предельного цикла, стягивающегося в точку при $\mu = 0$, независимо от членов $R_0^{(m+k+1)}, \ldots, Q_0^{(m+k+1)}, \ldots, \mu R_1, \mu Q_1$.

Для решения этого вопроса возьмем функцию Ляпунова из уравнения $r = V + V^m u_m + V^{m+1} u_{m+1} + \ldots + V^{m+k} u_{m+k}$, в котором функции $u_s(\theta)$ подлежат дальнейшему определению. Производная dV/dt в силу уравнения (9.15) определяется выражением

$$[1 + mV^{m-1} u_m + \ldots + (m+k) V^{m+k-1} u_{m+k}] \frac{dV}{dt} =$$

$$= -\left(V^m \frac{du_m}{d\theta} + V^{m+1} \frac{du_{m+1}}{d\theta} + \ldots + V^{m+k} \frac{du_{m+k}}{d\theta}\right) \times$$

$$\times [\beta + (V + V^m u_m + \ldots + V^{m+k} u_{m+k})^{m+k} Q_0 + \ldots + \mu Q_1] +$$

$$+ \mu (V + V^m u_m + \ldots + V^{m+k} u_{m+k}) + (V + V^m u_m + \ldots + V^{m+k} u_{m+k})^m \times$$

$$\times R_0 + \ldots + (V + V^m u_m + \ldots + V^{m+k} u_{m+k})^{m+k} R_0^{m+k} + \mu R_1 (V, \theta, \mu)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены в отношении различных степеней V, не содержащих множителей μ, и приравнивая коэффициенты при различных степенях V к постоянным величинам $g, g_1, g_2, \ldots, g_k$ получим $k + 1$ уравнение для определения функций $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}$. Эти уравнения будут иметь вид

$$\beta \frac{du_m}{d\theta} = R_0^{(m)} - g$$

$$\beta \frac{du_{m+1}}{d\theta} = R_0^{(m+1)} - g_1 + F_1 (R_0^{(m)}, u_m, g)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta \frac{du_{m+k}}{d\theta} = R_0^{(m+k)} - g_k + F_k (R_0^{(m)}, R_0^{(m+1)}, \ldots$$

$$\ldots, R_0^{(m+k-1)}, u_m, \ldots, u_{m+k}, g, g_1, \ldots, g_{k-1})$$

В этих уравнениях $F_1, F_2, \ldots, F_k$ представляются в виде многочленов от различных степеней $\sin\theta$ и $\cos\theta$ с коэффициентами, зависящими от коэффициентов форм $R_0^{(m)}, \ldots, R_0^{(m+k)}, Q_0^{(m)}, \ldots, Q_0^{(m+k)}$ и функций $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}$ с верхним индексом у форм R_0 и Q_0, на единицу меньшим индекса определяемой функции $u_s(\theta)$.

Таким образом, все функции $u_s(\theta)$ будут последовательно определены. Числа $g, g_1, g_2, \ldots, g_k$ определяются из равенств

$$\int_0^{2\pi} [R_0^{(m)}(\theta) - g]\, d\theta = 0 \qquad \int_0^{2\pi} [R_0^{(m+s)} - g_s + F_s(\theta)]\, d\theta = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

а функции $u_m(\theta), u_{m+1}(\theta), \ldots, u_{m+k}(\theta)$ являются многочленами от различных степеней $\sin\theta$ и $\cos\theta$. Предположим, что все числа $g = g_1 = \ldots = g_{k-1} = 0$, а $g_k \neq 0$. Тогда dV/dt будет удовлетворять уравнению

$$[1 + mV^{m-1} u_m + \ldots + (m+k) V^{m+k-1} u_{m+k}] \frac{dV}{dt} =$$

$$= \mu V + g_k V^{m+k} + V^{m+k-1} F_1 (V, \theta) + \mu V^2 F_2 (V, \theta, \mu)$$

Определяя знак производной dV/dt в окрестности начала координат при различных предположениях относительно знаков μ и g_k, мы придем к тем же результатам, к которым пришли в предыдущем параграфе, так как правая часть уравнения, определяющего знак dV/dt, принимает прежний вид, если положить $m + k = m_1$. Множитель при dV/dt в силу малости V на знак производной не влияет.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные случаи, которые может представить система уравнений (9.15) в случае поставленной нами задачи, за исключением случая, когда все $g_k = 0$, как бы велико число k ни было.

Мы здесь можем утверждать, что если система (9.15) при $\mu = 0$ является канонической, т. е.

$$X_0(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad Y_0(x, y) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

где H — голоморфная функция, разложение которой по степеням x, y начинается с членов не ниже 3-го порядка, то все числа g_k, как бы велико число k ни было, будут равны нулю.

В том случае, когда система (9.15) допускает существование знакоопределенного интеграла, не зависящего от t, все числа g_k так же, как и в случае канонической системы, обратятся в нуль. Если нам каким-либо способом удалось обнаружить, что все числа $g_k = 0$, то тогда бесконечный ряд

$$r = V + V^m u_m(\theta) + V^{m+1} u_{m+1}(\theta) + \ldots$$

в котором все $u_{m+k}(\theta)$ будут периодическими функциями θ с периодом 2π, будет абсолютно сходящимся для достаточно малых значений V.

Рассматривая теперь функцию V как новую переменную, мы вместо уравнений (9.15) получим новую систему вида

$$(1 + mV^{m-1} u_m + \ldots)\frac{dV}{dt} = \mu V + \mu R_1(V, \theta, \mu)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \beta + V^{m-1} Q_0^{(m)}(V, \theta) + \ldots + \mu Q_1(V, \theta, \mu)$$

Из первого уравнения следует, что при $\mu > 0$ система (9.15) не имеет предельного цикла, стягивающегося в точку, и, следовательно, в области, близкой к началу координат, невозмущенное движение будет неустойчиво. В случае $\mu < 0$ движение будет асимптотически устойчиво. В этом случае устойчивость и неустойчивость понимаются в смысле Ляпунова.

Мы рассмотрели решение вопроса об устойчивости системы (9.13), исходя из структуры функций $X_0(x, y)$, $Y_0(x, y)$ независимо от X_1, Y_1, ...,. Найденному нами устойчивому предельному циклу соответствуют устойчивые периодические колебания системы. Таким образом, мы непосредственно подошли к вопросу об исследовании колебательных движений.

На вопросах отыскания предельных циклов, не стягивающихся в точку при $\mu = 0$, и исследования их устойчивости подробно остановимся в главе XI.

В заключение заметим, что, пользуясь результатами по исследованию критических случаев двух нулевых и двух пар чисто мнимых корней, можно отыскивать устойчивые области G в близких к ним случаях. На этих вопросах мы здесь останавливаться не будем.

Результаты данной главы легко обобщаются на системы с периодическими коэффициентами.

ГЛАВА X

УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

В данной главе исследуется устойчивость невозмущенного движения на некотором, отличном от нуля, конечном интервале времени τ. Предполагается, что решение задачи об устойчивости приводится к исследованию нулевого решения уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{10.1}$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — известные вещественные функции вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, обращающиеся в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Функции эти в области, достаточно близкой к началу координат, разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными и непрерывными по отношению к t коэффициентами на некотором конечном интервале.

§ 49. Определение устойчивости движения на конечном интервале времени. Во введении было приведено определение устойчивых и неустойчивых движений, данное Ляпуновым в его фундаментальном сочинении [1].

Геометрический смысл этого определения заключается в следующем.

Построим в n-мерном пространстве параллелепипед с центром в начале координат и с гранями, параллельными координатным плоскостям. Стороны этого параллелепипеда определим числами $2A_1, \ldots, 2A_n$.

Если для этого параллелепипеда со сколь угодно малыми сторонами возможно построить второй параллелепипед со сторонами $2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n$, такой, что все интегральные кривые системы уравнений (10.1), исходящие в момент $t = t_0$ из второго параллелепипеда, будут оставаться внутри первого для всех $t > t_0$, то нулевое решение этой системы устойчиво.

Геометрическая интерпретация определения устойчивости Четаева (см. введение) аналогична изложенному выше, с той только разницей, что вместо двух n-мерных параллелепипедов берутся две n-мерные сферы с радиусами A и λ.

Совершенно ясно, что, не уменьшая общности задачи и не искажая смысла определения устойчивости, можно было бы вместо двух n-мерных сфер взять две любые n-мерные поверхности, определенным образом построенные. Например, можно было бы взять два n-мерных соосных эллипсоида вида

$$A_1 x_1^2 + \ldots + A_n x_n^2 = A, \qquad \lambda_1 x_{10}^2 + \ldots + \lambda_n x_{n0}^2 = \lambda$$

Эти два соосных эллипсоида можно записать уравнениями

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 = A, \qquad y_{10}^2 + \ldots + y_{n0}^2 = \lambda \tag{10.2}$$

где

$$y_s = a_{s1} x_1 + \ldots + a_{sn} x_n, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Определение устойчивости движения, сформулированное Ляпуновым, подразумевает изменение интегралов системы уравнений (10.1) в интервале времени от t_0 до ∞, причем величина t_0 может быть сколь угодно большой. На начальные возмущения x_{i0} Ляпуновым накладывается условие, ограничивающее изменение их сверху гранями параллелепипеда со сколько угодно малыми сторонами λ_i, определяемыми в зависимости от заданных значений A_i. При этом x_{i0} ничем не ограничиваются снизу.

Решение математической задачи относительно изменения функций $x_i(t)$ в интервале времени от t_0 до ∞ в известной степени будет характеризовать невозмущенное движение, определяя его качество в смысле прочности или неподатливости к действию начальных возмущений. Это механическое свойство движения Ляпунов называет устойчивостью.

Сохраняя механический смысл понятия устойчивости и неустойчивости, которое вкладывает в него Ляпунов, поставим задачу отыскать условия устойчивости невозмущенного движения на конечном интервале времени, начиная с того момента времени, при котором рассматриваемые элементы движения получили возмущения.

Очевидно, что любое движение, не обладающее устойчивостью по Ляпунову, будет удовлетворять соответствующим неравенствам (см. введение) на конечном интервале времени; причем этот интервал времени соответствующим выбором чисел A и λ можно сделать сколь угодно большим. Поэтому, сохраняя механический смысл понятия устойчивости и неустойчивости, вытекающий из определения Ляпунова, определение устойчивости и неустойчивости на конечном интервале времени дадим в несколько иной форме.

Предположим, что задача об устойчивости движения некоторой материальной системы приведена к исследованию n функций $x_i(t)$, удовлетворяющих системе уравнений возмущенного движения вида (10.1).

Определение. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом положительном числе A величины x_s, рассматриваемые как функции времени, удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n)^2 \leqslant A, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{10.3}$$

на конечном интервале времени $[t_0, t_0 + \tau]$, если только начальные значения этих функций x_{i0} удовлетворяют условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_{10} + \ldots + a_{sn}x_{n0})^2 \leqslant A \tag{10.4}$$

то невозмущенное движение будет устойчиво на интервале времени τ, в противном случае — неустойчиво, т. е. $\tau = 0$. Здесь следует отметить, что в отличие от определения Ляпунова числа A и λ равны между собой.

Геометрический смысл определения устойчивости на конечном интервале времени имеет следующую интерпретацию. Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ система получила некоторые отличные от нуля произвольно малые возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$. Если эти возмущения в момент времени t_0 находились внутри или на поверхности n-мерного эллипсоида

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1}x_{10} + \ldots + a_{sn}x_{n0})^2 = A$$

и если затем функции $x_i(t)$ оставались внутри области, ограниченной этим эллипсоидом, по крайней мере до значения $t_1 = t_0 + \tau$, то движение устойчиво на интервале $[t_0, t_1]$; в противном случае — неустойчиво.

Запишем систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1} x_1 + \ldots + p_{in} x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{10.5}$$

где функции X_i имеют ту же структуру, что и функции, фигурирующие в системе уравнений (10.1), с той только разницей, что разложение их по целым положительным степеням x_i начинается с членов не ниже второго порядка. Величины p_{ij} представляют собой вещественные, непрерывные и ограниченные функции времени t. Задача заключается в том, чтобы, не интегрируя систему уравнений (10.5), определить:

1) необходимые и достаточные условия устойчивости по первому приближению, т. е. условия, когда в исследуемых дифференциальных уравнениях можно отбросить все члены выше первого порядка относительно величин x_i и вместо первоначальных уравнений рассматривать полученную таким путем систему линейных дифференциальных уравнений;

2) интервал времени τ, на котором имеет место устойчивость невозмущенного движения.

§ 50. Основные теоремы. Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет вид (10.5).

Предположим, что невозмущенное движение в момент времени t_0 получило возмущения $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{s=1}^{n} (a_{s1} x_{10} + \ldots + a_{sn} x_{n0})^2 \leqslant A$$

Запишем систему уравнений (10.5) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t_0) x_1 + \ldots + p_{in}(t_0) x_n + \Delta p_{i1}(t) x_1 + \ldots + \Delta p_{in}(t) x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{10.6}$$

где $\Delta p_{ij}(t) = p_{ij}(t) - p_{ij}(t_0)$, а $p_{ij}(t_0)$ — значения функций $p_{ij}(t)$ при $t = t_0$.

Эту систему уравнений линейным преобразованием с постоянными вещественными коэффициентами

$$y_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n \qquad (i=1, \ldots, n), \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{10.7}$$

можно привести к системе уравнений, линейные члены которой будут удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Если уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11}(t_0) - \varkappa & \ldots & p_{1n}(t_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1}(t_0) & \ldots & p_{nn}(t_0) - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{10.8}$$

которое в дальнейшем изложеиии будем называть характеристическим, не имеет кратных корней, то система уравнений (10.6) может быть приведена к виду

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_i}{dt} &= \varkappa_i y_i + \sum_{j=1}^{m} \Delta P_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}{}^{(0)} u_j + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}{}^{(0)} v_j + Y_i(y, v, u, t) \\
\frac{du_s}{dt} &= \lambda_s u_s - \mu_s v_s + \sum_{j=1}^{m} \Delta Q_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{sj}{}^{(1)} u_j + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{sj}{}^{(1)} v_j + U_s(y, u, v, t) \\
\frac{dv_s}{dt} &= \lambda_s v_s + \mu_s u_s + \sum_{j=1}^{m} \Delta R_{sj} y_j + \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta U_{sj}{}^{(2)} u_j + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \Delta V_{sj}{}^{(2)} v_j + V_s(y, u, v, t)
\end{aligned} \tag{10.9}
$$

$$(i=1, \ldots, m;\ s=1, \ldots, \sigma;\ m+2\sigma=n)$$

где ΔP_{ij}, ΔQ_{sj}, ΔR_{sj}, ΔU_{sj}, ΔV_{sj} представляются линейными формами от Δp_{ij} и, следовательно, все они равны нулю при $t = t_0$. Функции $Y_i(y, u, v, t)$, $U_s(y, u, v, t)$, $V_s(y, u, v, t)$ таковы, что разложения их по степеням переменных y_i, u_s, v_s начинаются с членов не ниже второго порядка. В уравнениях (10.9) m равно числу вещественных корней, а 2σ — числу комплексных корней. Величины u_s и v_s так же, как и y_i, являются линейными формами переменных $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами. Относительно системы уравнений (10.6) можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Если характеристическое уравнение, соответствующее системе дифференциальных уравнений возмущенного движения (10.5) при $t = t_0$, не имея кратных корней, имеет только отрицательные корни или комплексные с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение обладает устойчивостью на некотором конечном интервале времени τ.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим изменение величины

$$r^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} (u_s^2 + v_s^2)$$

во времени, подразумевая под y_i, u_s, v_s линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$ с постоянными коэффициентами, удовлетворяющие уравнениям (10.9).

Дифференцируя r^2 по t, получим

$$
\begin{aligned}
r\frac{dr}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \Delta P_{ij} y_j y_i + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \Delta U_{ij}^{(0)} u_j y_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{m} \Delta V_{ij}^{(0)} v_j y_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta Q_{ij} y_j u_i + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}^{(1)} u_j u_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}^{(1)} v_j u_i + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta R_{ij} y_j v_i + \\
&+ \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta U_{ij}^{(2)} u_j v_i + \sum_{j=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} \Delta V_{ij}^{(2)} v_j v_i + \\
&+ S(y_1, \ldots, y_m;\ u_1, \ldots, u_\sigma;\ v_1, \ldots, v_\sigma;\ t)
\end{aligned} \tag{10.10}
$$

где $S(y, u, v, t)$ представляет собой голоморфную функцию переменных y_j, u_s, v_s, разложение которой по степеням этих переменных начинается с членов не ниже третьего порядка.

Все двойные суммы в выражении (10.10) обращаются в нуль при $t = t_0$, так как все функции ΔP_{ij}, ΔQ_{ij}, ΔU_{ij}, ΔV_{ij} являются линейными формами от Δp_{ij}, последние же обращаются в нуль при $t = t_0$.

Докажем, что знак производной от r^2 по t определяется совокупностью членов

$$\sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2)$$

для всех значений времени в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, причем разность $t_1 - t_0 = \tau$ является величиной по крайней мере конечной.

Действительно, из уравнения (10.10) следует, что

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} \leqslant & \sum_{i=1}^{m} \varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + \\ & + \left[\sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} (u_s^2 + v_s^2)\right] \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |\Delta P_{ij}| + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{m} |\Delta Q_{ij}| + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{m} |\Delta R_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta U_{ij}^{(0)}\right| + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta U_{ij}^{(1)}\right| + \\ & + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta U_{ij}^{(2)}\right| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta V_{ij}^{(0)}\right| + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta V_{ij}^{(1)}\right| + \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\sigma}\sum_{j=1}^{\sigma} \left|\Delta V_{ij}^{(2)}\right|\right] + S(y_1, \ldots, y_m; u_1, \ldots, u_\sigma; v_1, \ldots, v_\sigma; t) \end{aligned} \tag{10.11}$$

В силу тех свойств, которыми обладают все функции ΔP_{ij}, ΔQ_{ij}, ΔU_{ij}, ΔV_{ij}, можно утверждать, что здесь выражение в скобках, содержащее двойные суммы, представляет собой некоторую положительную и непрерывную функцию $H(t)$, обращающуюся в нуль при $t = t_0$.

На основании изложенного неравенство (10.11) можно записать в форме

$$r\frac{dr}{dt} \leqslant \sum_{i=1}^{m} [\varkappa_i + H(t)]\, y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} [\lambda_s + H(t)]\,(u_s^2 + v_s^2) + S(y, u, v, t) \tag{10.12}$$

Очевидно, что в силу условий, наложенных на корни характеристического уравнения и на значения x_{i0}, правая часть выражения (10.12), будет отрицательной независимо от S по крайней мере до того момента времени, когда одно из выражений $\varkappa_i + H(t)$ или $\lambda_s + H(t)$ не обратится в нуль. Пусть наименьшее из чисел $\varkappa_i$ и λ_s есть ν; тогда, определяя t_1 из уравнения

$$\nu + H(t_1) = 0$$

получим момент времени, когда знак dr^2/dt может измениться и принять положительное значение.

В силу непрерывности функции $H(t)$ этот момент времени будет таков, что величина $\tau = t_1 - t_2$ будет иметь по крайней мере конечное значение. Таким образом, теорему можно считать доказанной.

Теорема 2. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один положительный корень или два с положительными вещественными частями, то невозмущенное движение не обладает устойчивостью на конечном интервале времени, т. е. $\tau = 0$.

Для доказательства теоремы рассмотрим знак производной от r^2 по t. Пусть положительным корнем характеристического уравнения является корень $\varkappa_1$. Тогда, обозначая сумму двойных сумм, фигурирующих в правых частях уравнения (10.10), через L, запишем это уравнение в виде

$$r\frac{dr}{dt}=\varkappa_1 y_1^2+\sum_{i=2}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+L+S \tag{10.13}$$

подразумевая под L квадратичную форму переменных y_i, u_s, v_s с ограниченными и непрерывными относительно t коэффициентами, обращающимися в нуль при $t=t_0$. Из равенства (10.13) получим

$$r^2=r_0^2\exp\left(2\int_{t_0}^{t}\left[\varkappa_1 y_1^2+\sum_{i=2}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+L+S\right]\frac{dt}{r^2}\right) \tag{10.14}$$

Пользуясь возможностью произвольного выбора начальных значений, подберем их согласно равенству

$$y_{10}^2=A,\qquad y_{20}=\ldots=y_{m0}=0,\qquad u_{10}=\ldots=u_{\sigma 0}=0\qquad v_{10}=\ldots=v_{\sigma 0}=0$$

Тогда знак величины подынтегральной функции в окрестности выбранной точки определяется знаком выражения $\varkappa_1 y_1^2$. Из (10.14) получаем неравенство $r^2>A$, которое и доказывает теорему 2.

Аналогичным приемом можно доказать, что если характеристическое уравнение имеет хотя бы два корня с положительной вещественной частью, то движение также неустойчиво. Нам остается теперь рассмотреть случаи, когда среди корней характеристического уравнения имеются нулевые, чисто мнимые и кратные корни.

В теореме 1 дано условие, при котором решение вопроса об устойчивости не зависит от членов выше первого порядка. При этом доказывается только достаточность приведенного условия; докажем теперь его необходимость.

Теорема 3. Если среди корней характеристического уравнения имеется по крайней мере один нулевой или два чисто мнимых корня при остальных отрицательных или комплексных с отрицательными вещественными частями, то невозмущенное движение может не обладать устойчивостью на конечном интервале времени.

Положим в уравнениях (10.9)

$$\varkappa_1=0\qquad Y_1=a^2y_1^3,\qquad Y_2=\ldots=Y_m=0,\qquad U_1=\ldots=$$
$$=U_\sigma=0,\qquad V_1=\ldots=V_\sigma=0;$$

При этих условиях будем иметь

$$r\frac{dr}{dt}=\sum_{i=2}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+L+a^2y_1^4 \tag{10.15}$$

где L, как и в предыдущей теореме, представляет собой квадратичную форму переменных y_i, v_s, u_s с непрерывными и ограниченными коэффициентами, обращающимися в нуль при $t=t_0$.

Из уравнения (10.15) находим

$$r^2=r_0^2\exp\left[2\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=2}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}\lambda_s(u_s^2+v_s^2)+L+ay_1^4\right)\frac{dt}{r^2}\right] \tag{10.16}$$

Пользуясь произвольным выбором начальных значений величин y_i, v_s, u_s наложим на них условие

$$y_{10}^2=A,\qquad y_{20}=\ldots=y_{m0}=0,\qquad u_{10}=\ldots=u_{\sigma 0}=0,\qquad v_{10}=\ldots=v_{\sigma 0}=0$$

Тогда можно утверждать, что подынтегральная функция в уравнении (10.16) при $t=t_0$ принимает значение, которое является величиной положительной.

В силу непрерывности интегралов y_i, u_s, v_s системы уравнений (10.9) и коэффициентов правых частей этих уравнений можно утверждать, что значение подынтегральной функции будет положительным для значений t, близких к t_0. Следовательно, $r^2 > A$, для всех $t_1 > t > t_0$.

Последнее неравенство служит доказательством теоремы 3 и одновременно показывает, что условие теоремы 1 является не только достаточным, но и необходимым.

Рассмотрим теперь систему уравнений (10.6) в предположении, что ее характеристическое уравнение имеет кратные корни.

В этом случае всегда найдется линейная подстановка с постоянными вещественными коэффициентами, преобразующая систему уравнений (10.6) в такую, которая распадается на несколько групп уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dt} = \varkappa_1 y_1 + E_1 + Y_1, \qquad \frac{dy_i}{dt} = \varkappa_1 y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i = 2, 3, \ldots, k_1) \\
&\frac{dy_{k_1+1}}{dt} = \varkappa_2 y_{k_1+1} + E_{k_1+1} + Y_{k_1+1} \\
&\frac{dy_i}{dt} = \varkappa_2 y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i \qquad (i = k_1+2, \ldots, k_1+k_2) \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\frac{dy_{m-k_\alpha+1}}{dt} = \varkappa_\alpha y_{m-k_\alpha+1} + E_{m-k_\alpha+1} + Y_{m-k_\alpha+1} \\
&\frac{dy_i}{dt} = \varkappa_\alpha y_i + y_{i-1} + E_i + Y_i \qquad (i = m-k_\alpha+2, \ldots, m) \\
&\frac{du_1}{dt} = \lambda_1 u_1 - \mu_1 v_1 + H_1 + U_1 \\
&\frac{du_s}{dt} = \lambda_1 u_s - \mu_1 v_s + u_{s-1} + H_s + U_s \\
&\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1 + \mu_1 u_1 + K_1 + V_1, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \lambda_1 v_s + \mu_1 u_s + \\
&\qquad + v_{s-1} + K_s + V_s \qquad (s = 2, 3, \ldots, r_1) \\
&\frac{du_{r_1+1}}{dt} = \lambda_2 u_{r_1+1} - \mu_2 v_{r_1+1} + H_{r_1+1} + U_{r_1+1} \\
&\frac{dv_{r_1+1}}{dt} = \lambda_2 v_{r_1+1} + \mu_2 u_{r_1+1} + K_{r_1+1} + V_{r_1+1} \\
&\frac{du_s}{dt} = \lambda_2 u_s - \mu_2 v_s + u_{s-1} + H_s + U_s \qquad (s = r_1+2, r_1+3, \ldots, r_1+r_2) \\
&\frac{dv_s}{dt} = \lambda_2 v_s + \mu_2 u_s + v_{s-1} + K_s + V_s \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\frac{du_{\sigma-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta u_{\sigma-r_\beta+1} - \mu_\beta u_{\sigma-r_\beta+1} + H_{\sigma-r_\beta+1} + U_{\sigma-r_\beta+1} \\
&\frac{dv_{\sigma-r_\beta+1}}{dt} = \lambda_\beta v_{\sigma-r_\beta+1} + \mu_\beta u_{\sigma-r_\beta+1} + K_{\sigma-r_\beta+1} + V_{\sigma-r_\beta+1} \\
&\frac{du_s}{dt} = \lambda_\beta u_s - \mu_\beta v_s + u_{s-1} + H_s + U_s, \qquad \frac{dv_s}{dt} = \lambda_\beta v_s + \\
&\qquad + \mu_\beta u_s + v_{s-1} + K_s + V_s \quad (s = \sigma - r_\beta + 2, \ldots, \sigma)
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

где α и β равны числу групп решений, соответствующих действительным и комплексным корням. Числа $k_1, \ldots, k_\alpha, r_1, \ldots, r_\beta$ определяют кратность каждого корня.

Может случиться, что некоторые вещественные корни $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_\alpha$ или комплексные корни $\lambda_1 \pm \mu_1\sqrt{-1}$, $\lambda_2 \pm \mu_2\sqrt{-1}$, $\ldots$, $\lambda_\sigma \pm \mu_\sigma\sqrt{-1}$ равны между собой.

Все величины E, H, K представляются линейными формами переменных y_i, u_s, v_s с коэффициентами, зависящими линейно от Δp_{ij}.

Относительно системы уравнений (10.6) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Если характеристическое уравнение системы уравнений (10.6), не имея положительных или комплексных корней с положительными вещественными частями, имеет кратные вещественные отрицательные корни $\varkappa_i$ и кратные комплексные корни с отрицательными вещественными частями λ_s и если при этом все диагональные миноры определителей

$$\left.\begin{aligned}
&D(\varkappa_i)=\begin{vmatrix} -\varkappa_i & -1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1/2 & -\varkappa_i & -1/2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1/2 & -\varkappa_i \end{vmatrix} \qquad (i=1, \ldots, \alpha)\\
&D(\lambda_s)=\begin{vmatrix} -\lambda_s & -1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1/2 & -\lambda_s & -1/2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1/2 & -\lambda_s \end{vmatrix} \qquad (s=1, \ldots, \beta)
\end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

будут больше нуля, то невозмущенное движение устойчиво на конечном интервале времени независимо от членов высших порядков.

В том случае, когда хотя бы один диагональный минор окажется отрицательным, невозмущенное движение будет неустойчиво независимо от членов высших порядков.

Числа k_i и r_s указывают на порядок определителей $D(\varkappa_i)$ и $D(\lambda_s)$.

Для доказательства теоремы исследуем изменение величины r^2 с течением времени, принимая за r^2 величину

$$r^2=\sum_{i=1}^{m} y_i^2+\sum_{s=1}^{\sigma}(u_s^2+v_s^2)$$

Из этого выражения и при помощи системы уравнений (10.17) получаем

$$r^2=A\exp\left(-2\int_{t_0}^{t}(H-L-S)\frac{dt}{r^2}\right)$$

где

$$2H=-\varkappa_1\sum_{i=1}^{k_1} y_i^2-\varkappa_2\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} y_i^2-\ldots-\varkappa_\alpha\sum_{i=m-k_\alpha+1}^{m} y_i^2-$$

$$-\lambda_1\sum_{s=1}^{r_1}(u_s^2+v_s^2)-\lambda_2\sum_{s=r_1+1}^{r_1+r_2}(u_s^2+u_s^2)-\ldots-\lambda_\beta\sum_{s=\sigma-r_\beta+1}^{\sigma}(u_s^2+v_s^2)-$$

$$-y_1y_2-\ldots-y_{k_1-1}y_{k_1}-y_{k_1+1}y_{k_1+2}-\ldots-y_{k_2+1}y_{k_2}-\ldots-y_{m-1}y_m-$$

$$-u_1u_2-u_2u_3-\ldots-u_{r_1-1}u_{r_1}-u_{r_1+1}u_{r_1+2}-\ldots-u_{r_2-1}u_{r_2}-$$

$$-\ldots-u_{\sigma-1}u_\sigma-v_1v_2-\ldots-v_{\sigma-1}v_\sigma$$

При условии положительности всех диагональных миноров определителей $D(\varkappa_i)$ и $D(\lambda_s)$ квадратичную часть функции $2H$, состоящую из членов, коэффициенты которых не зависят от t, при помощи линейного преобразования можно привести к сумме квадратов, коэффициенты при которых будут положительными.

Функцию $2(H - L - S)$ после преобразования можно записать в виде

$$2(H-L-S) = a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \ldots + a_n z_n^2 + L_1(z, t) + S_1(z, t)$$

Здесь $L_1(z, t)$ является квадратичной формой с непрерывными коэффициентами, обращающимися в нуль при $t = t_0$; через S_1 обозначена голоморфная функция, разложение которой по степеням z_i начинается с членов не ниже третьего порядка; переменные z_i являются линейными формами от y_i, u_s, v_s.

Очевидно, что для значений t, близких к t_0, знак функции $2(H - L - S)$ определяется совокупностью членов $a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + \ldots + a_n z_n^2$ независимо от выражений L_1 и S_1.

На основании изложенного можно утверждать, что $r^2 < A$ до некоторого момента t_1, причем разность $t_1 - t_0 = \tau$ является величиной по меньшей мере конечной. Это неравенство доказывает первую часть теоремы 4.

Если предположить, что хотя бы один диагональный минор определителей $D(\varkappa_i)$ или $D(\lambda_s)$ является величиной отрицательной, то одно из чисел a_i будет также отрицательным.

Пусть это число будет a_1. Воспользовавшись возможностью произвольного выбора значений y_{i0}, u_{s0}, v_{s0}, подберем начальное значение z_{i0} таким образом, чтобы $z_{20} = \ldots = z_{n0} = 0$, и проведя рассуждения, аналогичные тем, которые были изложены в теореме 2, можно утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво.

Для того чтобы доказать необходимость условий теоремы 4, можно предположить, что одно из чисел a_i, например a_1, обращается в нуль.

Тогда можно подобрать члены высшего порядка таким образом, что невозмущенное движение станет неустойчивым (полагая, например, $S_1 = az_1^4$). Это и доказывает необходимость условий теоремы 4.

§ 51. Определение интервала времени. При доказательстве необходимых и достаточных условий устойчивости движения по первому приближению на конечном интервале времени мы не интересовались величиной этого интервала. В приложениях же эта величина играет существенную роль, поэтому необходимо дать способ определения интервала времени, гарантирующего устойчивость, т. е. необходимо определить разность $t_1 - t_0 = \tau$ или величину несколько меньше ее, при которой удовлетворяется неравенство (10.3).

Для решения этой задачи обратимся к системе уравнений (10.6) и к выражению (10.10), которое запишем в несколько иной форме

$$r\frac{dr}{dt} = \sum_{i=1}^{m} [\varkappa_i y_i^2 + \sum_{s=1}^{\sigma} \lambda_s (u_s^2 + v_s^2) + L(y, u, v, t) + S(y, u, v, t) \qquad (10.19)$$

где $L(y, u, v, t)$ является квадратичной формой с непрерывными по отношению к t коэффициентами, обращающимися в нуль при $t = t_0$.

В дальнейшем для удобства записи обозначим переменные u_s и v_s буквами y_i, пронумеровав их в следующем порядке:

$$u_1 = y_{m+1}, \qquad u_2 = y_{m+2}, \ldots, \qquad u_\sigma = y_{m+\sigma}$$

$$v_1 = y_{m+\sigma+1}, \qquad v_2 = y_{m+\sigma+2}, \ldots, \qquad v_\sigma = y_{m+2\sigma}$$

Тогда выражение (10.19) можно записать в следующей форме:

$$r\frac{dr}{dt}=\sum_{i=1}^{m}\varkappa_i y_i^2+\sum_{i=m+1}^{m+\sigma}\lambda_i\left(y_i^2+y_{i+\sigma}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta C_{ij}y_i y_j+S$$

где ΔC_{ij} равны нулю при $t=t_0$.

Обозначая сумму членов второго порядка правой части через H, получим

$$r^2=A\exp\left(-2\int_{t_0}^{t}(H-S)\frac{dt}{r^2}\right) \tag{10.20}$$

где H — квадратичная форма переменных $y_1, \ldots, y_n$.

Для определения интервала времени, гарантирующего устойчивость невозмущенного движения, составим определитель, являющийся дискриминантом формы H:

$$H=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_i y_j \qquad c_{ii}=-\varkappa_i-\Delta C_{ii} \qquad (i=1, \ldots, m)$$

$$c_{s+\sigma,\, s+\sigma}=-\lambda_s-\Delta C_{s+\sigma,\, s+\sigma} \qquad c_{ss}=-\lambda_s-\Delta C_{ss} \quad (s=m+1, \ldots, \sigma), \qquad c_{ij}=c_{ji}$$

$$D(\varkappa_i, \lambda_s)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn}\end{vmatrix}$$

Квадратичная форма H будет определять знак подынтегральной функции $H-S$ независимо от S в том случае, когда в результате преобразования ее к сумме квадратов все коэффициенты при квадратах переменных, являющиеся функциями времени, будут отличны от нуля и будут иметь одинаковые знаки на всем интервале времени $\tau=t_1-t_0$.

Из уравнения (10.20) следует, что для устойчивости невозмущенного движения достаточно, чтобы H была определенно-положительной формой для всех значений времени, заключающихся в интервале $\tau=t_1-t_0$.

Это условие будет выполняться в том случае, если все диагональные миноры определителя $D(\varkappa_i, \lambda_s)$ являются положительными, т. е. будут иметь место неравенства

$$\Delta_1=c_{11}>0, \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}>0, \ldots, \qquad \Delta_n=D(\varkappa_i, \lambda_s)>0 \tag{10.21}$$

В том случае, когда хотя бы один из миноров меняет знак, квадратичная форма H перестает быть определенно-положительной.

Предположим, что для некоторых значений времени Δ_i обращается в нуль:

$$\Delta_i=0 \qquad (i=1, \ldots, n) \tag{10.22}$$

Из этих уравнений мы можем определить несколько моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$.

Пусть t_1 является наименьшей величиной из всех t_1, ..., t_N. Выбираем теперь момент времени t_1^*, меньший t_1 на сколь угодно малую величину. Тогда разность $t_1^* - t_0 = \tau$ будет тем интервалом времени, на котором гарантируется устойчивость невозмущенного движения. Может случиться, что неравенства (10.21) справедливы для всех значений времени $t > t_0$, тогда будет гарантирована устойчивость невозмущенного движения на интервале времени (t_0, ∞).

Замечание. Необходимо отметить, что равенства (10.22) не определяют максимального значения времени t, гарантирующего соблюдения неравенства

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n)^2 < A \tag{10.23}$$

Очевидно, это значение времени будет больше найденного t_1, так как t_1 определено из условия убывания величины r^2. Но для значений $t > t_1$ величина r^2 может возрастать, оставаясь на конечном интервале времени меньше A.

ГЛАВА XI

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 52. Предварительные замечания. В главе IX мы показали, что в случаях, близких к критическим, изучаемая система может допустить существование устойчивой области G, включающей начало координат. В этом случае невозмущенное движение не является состоянием равновесия, которому соответствует начало координат, а является некоторым ограниченным движением (глава XII), имеющим в общем случае колебательный характер. Если невозмущенное движение является периодическим колебательным процессом, то ему соответствует предельный цикл. Хотя задача отыскания таких предельных циклов, а в общем случае ограниченных решений в этой главе и не ставилась, тем не менее мы непосредственно подошли к вопросу об исследовании колебательных движений.

В данной главе мы специально рассмотрим колебания, описываемые следующими системами дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \mu X(x, y, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \mu Y(x, y, \mu) \tag{11.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + X_0(x, y) + \mu X(x, y, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + Y_0(x, y) + \mu Y(x, y, \mu) \end{aligned} \tag{11.2}$$

$$\frac{dx}{dt} = y + \mu X(x, y, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = Y_0(x, y, \mu) + \mu Y(x, y, \mu)$$

а также системами $(n+2)$-го порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \mu X(x, y, z_1, \ldots, z_n, \mu) \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + \mu Y(x, y, z_1, \ldots, z_n, \mu) \\ \frac{dz_s}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} p_{sk} z_k + \mu Z_s(x, y, z_1, \ldots, z_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{11.3}$$

в том случае, когда их правые части, т. е. функции X, Y, X_0, Y_0, Z_s не являются явными функциями времени t. Такие системы будем называть автономными.

При этом вместо понятия «малые корни» (глава IX) будем рассматривать некоторый «малый параметр», обозначаемый величиной μ, вкладывая в него то понятие, которое приписывает ему Пуанкаре[1].

[1] Содержание данной главы представляет собой доклад автора на конференции по устойчивости и управляемости механических систем, проходившей в Московском авиационном институте в феврале 1962 г.

§ 53. **Условия существования периодических решений по первому приближению.** Исследование начнем с рассмотрения системы двух уравнений, обращающейся в линейную при равенстве параметра нулю

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda y + \mu X_1(x, y) + \mu^2 X_2(x, y) + \dots \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda x + \mu Y_1(x, y) + \mu^2 Y_2(x, y) + \dots \end{aligned} \tag{11.4}$$

где μ — параметр; $X_k(x, y)$ и $Y_k(x, y)$ $(k = 1, 2, \dots)$ — многочлены от x, y любой степени m_k, обращающиеся в нуль при $x = y = 0$. Здесь m_k — степень наивысшей из форм, входящих в многочлены $X_k(x, y)$ и $Y_k(x, y)$.

Будем предполагать, что правые части имеют только одну особую точку $x = y = 0$ и являются абсолютно сходящимися рядами относительно μ в исследуемой области изменения переменных x, y и параметра μ.

В отличие от метода Пуанкаре мы будем отыскивать условия существования периодических решений, не привлекая к рассмотрению так называемые порождающие решения.

Исследование задачи удобнее вести в полярных координатах. Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \mu R_1(r, \theta) + \mu^2 R_2(r, \theta) + \dots \\ \frac{d\theta}{dt} &= \lambda + \mu F_1(r, \theta) + \mu^2 F_2(r, \theta) + \dots \end{aligned} \tag{11.5}$$

где

$$\begin{aligned} R_k(r, \theta) &= X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ F_k(r, \theta) &= \frac{1}{r}\left[Y_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - X_k(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right] \end{aligned} \tag{11.6}$$

следовательно, R_k и F_k определяются многочленами в отношении r с коэффициентами, являющимися формами от $\sin\theta$ и $\cos\theta$

$$\begin{aligned} R_k(r, \theta) &= rR_k^{(1)}(\theta) + r^2 R_k^{(2)}(\theta) + \dots + r^{m_k} R_k^{(m_k)}(\theta) \\ F_k(r, \theta) &= F_k^{(0)}(\theta) + rF_k^{(1)}(\theta) + \dots + r^{m_k - 1} F_k^{(m_k - 1)}(\theta) \end{aligned} \tag{11.7}$$

Решим вначале следующую задачу.

Определим необходимые и достаточные условия существования периодических решений системы (11.4) или (11.5), когда этот вопрос полностью решается членами первого порядка в отношении μ независимо от членов более высокого порядка.

Рассмотрим с этой целью функцию Ляпунова, определяемую уравнением

$$r = V + \mu\left(Vu_1^{(1)} + V^2 u_1^{(2)} + \dots + V^{m_1} u_1^{(m_1)}\right) \tag{11.8}$$

где $u_1^{(k)}(\theta)$ $(k = 1, 2, \dots, m_1)$ — подлежащие определению непрерывные периодические функции с периодом 2π.

Функцию V определим из уравнения (11.8) через r и θ. При достаточно малом значении μ она будет определенно-положительной в отношении r для любых его положительных значений и при любых вещественных значениях θ. Наибольшее значение μ мы определим после отыскания функций $u_1^{(k)}(\theta)$. Отметим, что два замкнутых цикла $V = C_1$ и $V = C_2$, определяемые равенством (11.8), не имеют общих точек, и если $C_2 > C_1$, то цикл $V = C_1$ будет целиком находиться внутри цикла $V = C_2$. Для этого достаточно предположить, что μ мало.

Производная функции V по t будет иметь вид

$$H\frac{dV}{dt}=\mu\,[VP_1^{(1)}(\theta)+V^2P_1^{(2)}(\theta)+\ldots+V^{m_1}P_1^{(m_1)}(\theta)]+\mu^2P_2(V,\theta,\mu) \quad (11.9)$$

Такое представление dV/dt возможно для значений μ, удовлетворяющих условию

$$H=1+\mu\,[u_1^{(1)}+2Vu_1^{(2)}+\ldots+m_1V^{m_1-1}u_1^{(m_1)}]>0$$

В уравнении (11.9) коэффициенты $P_1^{(k)}$ ($k=1,\ldots,m_1$) определяются равенствами

$$P_1^{(k)}(\theta)=-\lambda\frac{du_1^{(k)}}{d\theta}+R_1^{(k)} \qquad (k=1,\ldots,m_1)$$

$P_2(V,\theta,\mu)$ представляется степенным рядом в отношении V с коэффициентами, зависящими от $\sin\theta$, $\cos\theta$ и μ.

В зависимости от выбора функций $u_1^{(k)}$ мы будем получать различные значения $P_1^{(k)}$. Подберем эти функции так, чтобы все $P_1^{(k)}$ были постоянными величинами. Обозначим эти постоянные через $g_1^{(k)}$, тогда функции $u_1^{(k)}$ определятся из уравнений

$$u_1^{(k)}=\frac{1}{\lambda}\int[R_1^{(k)}(\theta)-g_1^{(k)}]\,d\theta+C_1^{(k)} \qquad (k=1,\ldots,m_1) \quad (11.10)$$

Числа $g_1^{(k)}$ выберем так, чтобы все функции $u_1^{(k)}$ были периодическими, для этого необходимо и достаточно обращения в нуль интегралов

$$\int_0^{2\pi}[R_1^{(k)}(\theta)-g_1^{(k)}]\,d\theta=0 \qquad (k=1,\ldots,m_1)$$

Константы $C_1^{(k)}$ определим так, чтобы все функции $u_1^{(k)}$ обращались в нуль при каком-нибудь определенном значении θ_0, например при $\theta_0=0$.

Производная функции V по t при найденных значениях примет вид

$$H\frac{dV}{dt}=\mu\,(g_1^{(1)}V+\ldots+g_1^{(m_1)}V^{m_1})+\mu^2P_2(V,\theta,\mu) \quad (11.11)$$

Исследуем поведение интегральных кривых при различных предположениях относительно правой части этого равенства.

Предположим, что алгебраическое уравнение

$$L_1(V)=V\,(g_1^{(1)}+g_1^{(2)}V+\ldots+g_1^{(m_1)}V^{m_1-1})=0$$

имеет $m<m_1$ различных положительных корней.

Тогда его можно представить в виде

$$L_1(V)=V^{k_0}(V_1-V)^{k_1}(V_2-V)^{k_2}\ldots(V_m-V)^{k_m}A_1(V)=0 \quad (11.12)$$

где $A_1(V)$ — многочлен, степень которого равна $m_1-k_0-k_1-k_2-\ldots-k_m$; для всех значений $V>0$ этот многочлен будет сохранять постоянный знак.

Докажем, что каждому положительному корню V_j нечетной кратности соответствует по крайней мере одно периодическое решение. Пусть $0<V_1<V_2<\ldots<V_m$. Выберем два положительных числа ε_1 и ε_2 согласно неравенствам $\varepsilon_1<V_{j+1}-V_j$; $\varepsilon_2<V_j-V_{j-1}$. Рассмотрим два замкнутых цикла, определяемых уравнением (11.8), если в него подставить $V=V_j+\varepsilon_1$ и $V=V_j-\varepsilon_2$. Очевидно, что цикл $V=V_j-\varepsilon_2$ будет находиться внутри цикла $V=V_j+\varepsilon_1$. Покажем, что все интегральные кривые, определяемые уравнениями (11.4), пересекают циклы $V=V_j+\varepsilon_1$

и $V = V_j - \varepsilon_2$ в разных направлениях. Для цикла $V = V_j + \varepsilon_1$ при условии, если k_j нечетное, будем иметь

$$H \frac{dV}{dt} = \mu \left[-\varepsilon_1^{k_j} V^{k_0} (V_1 - V_j - \varepsilon_1)^{k_1} \dots (V_{j-1} - V_j - \varepsilon_1)^{k_{j-1}} (V_{j+1} - \right.$$
$$\left. - V_j - \varepsilon_1)^{k_{j+1}} \dots (V_m - V_j - \varepsilon_1)^{k_m} A_1 (V_j + \varepsilon_1) \right] +$$
$$+ \mu^2 P_2 (V_j + \varepsilon_1, \theta, \mu) \tag{11.13}$$

Для цикла $V = V_j - \varepsilon_2$ получим

$$H \frac{dV}{dt} = \mu \left[\varepsilon_2^{k_j} V^{k_0} (V_1 - V_j + \varepsilon_2)^{k_1} \dots (V_{j-1} - V_j + \varepsilon_2)^{k_{j-1}} (V_{j+1} - \right.$$
$$\left. - V_j + \varepsilon_2)^{k_{j+1}} \dots (V_m - V_j + \varepsilon_2)^{k_m} A_1 (V_j - \varepsilon_2) \right] +$$
$$+ \mu^2 P_2 (V_j - \varepsilon_2, \theta, \mu) \tag{11.14}$$

Очевидно, что при достаточно малом μ знак производных dV/dt как в (11.13), так и в (11.14) определяется первым членом, стоящим в квадратных скобках, независимо от членов $\mu^2 P_2(V_j + \varepsilon_1, \theta, \mu)$, $\mu^2 P_2(V_j - \varepsilon_2, \theta, \mu)$.

Если окажется, что для цикла $V = V_j + \varepsilon_1$ $dV/dt < 0$, то тогда для цикла $V = V_j - \varepsilon_2$ будем иметь $dV/dt > 0$. Следовательно, интегральные кривые пересекают внешний цикл снаружи внутрь, а внутренний — изнутри наружу. Если окажется, что для цикла $V = V_j + \varepsilon_1$ значение производной $dV/dt > 0$, то, заменяя в уравнениях (11.4) t на $-t$, мы знак производной dV/dt изменим на обратный.

На основании теоремы Бендиксона [15] мы можем утверждать, что внутри кольца, образованного циклами $V = V_j + \varepsilon_1$ и $V = V_j - \varepsilon_2$ заключается по крайней мере один предельный цикл, которому соответствует периодическое решение системы (11.4).

Таким образом, мы установили, что достаточное условие существования периодических решений системы уравнений (11.4) по членам первого порядка независимо от старших членов заключается в том, что уравнение $L_1(V) = 0$ имеет по крайней мере один положительный корень нечетной кратности.

Докажем теперь необходимость этого условия.

Предположим, что положительный корень уравнения $L_1(V) = 0$ имеет четную кратность. Наше предположение будет доказано, если мы установим, что выбором членов, порядок которых в отношении μ выше первого, периодическое решение нарушится или сохранится по нашему желанию.

Рассмотрим с этой целью уравнения первого приближения

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \mu X_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \mu Y_1(x, y) \tag{11.15}$$

допускающие периодическое решение. Предположим, что уравнение $L_1(V) = 0$, соответствующее этой системе, имеет положительный корень четной кратности, равный V_0. Тогда многочлен $L_1(V)$ можно представить в виде $L_1(V) = (V - V_0)^{2k} A_1(V)$. Многочлен $A_1(V)$ будет иметь степень $m_1 - 2k$. Для него можно указать интервал $V_0 - \varepsilon_2 < V < V_0 + \varepsilon_1$, где он сохраняет постоянный знак.

Рассмотрим теперь уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \mu X_1(x, y) + \mu^2 Bx(x^2 + y^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = \lambda x + \mu Y_1(x, y) + \mu^2 By(x^2 + y^2) \tag{11.16}$$

где B — некоторая постоянная.

В полярных координатах эта система будет иметь вид

$$\frac{dr}{dt} = \mu(rR_1^{(1)} + \ldots + r^{m_1} R_1^{(m_1)}) + \mu^2 Br^3$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \mu(F_1^{(0)} + rF_1^{(1)} + \ldots + r^{m_1-1} F_1^{(m_1-1)}) \tag{11.17}$$

Если функцию Ляпунова определить из уравнения (11.8), то будем иметь

$$H\frac{dV}{dt} = \mu(V-V_0)^{2k} A_1(V) + \mu^2[BV^3 + Q(V,\theta)] + \mu^3 P_3(V,\theta,\mu)$$

Если $A_1(V_0) > 0$, то число $B > 0$ выберем согласно неравенствам

$$B(V_0+\varepsilon_1)^3 + Q(V_0+\varepsilon_1,\theta) > 0 \qquad B(V_0-\varepsilon_2)^3 + Q(V_0-\varepsilon_2,\theta) > 0 \tag{11.18}$$

для всех вещественных значений θ.

При таком выборе числа B выражение dV/dt будет сохранять положительные значения в окрестности цикла $V = V_0$, что указывает на отсутствие периодического решения для системы (11.16), несмотря на то что члены первого порядка такое решение допускают.

В случае $A_1(V_0) < 0$ число B необходимо взять отрицательным с соблюдением неравенств, обратных неравенствам (11.18).

Для того чтобы периодическое решение системы (11.16) сохранилось, необходимо знак достаточно большого числа B взять противоположным знаку $A_1(V_0)$.

В заключение можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если система уравнений (11.4) такова, что соответствующее ей уравнение

$$L_1(V) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [X_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\cos\theta + Y_1(V\cos\theta, V\sin\theta)\sin\theta]\,d\theta = 0$$

в отношении V имеет k положительных корней нечетной кратности, то каждому из этих корней будет соответствовать по крайней мере один предельный цикл и каждому из этих предельных циклов соответствует периодическое решение этой системы. Если же уравнение $L_1(V) = 0$ имеет положительные вещественные корни четной кратности, то вопрос о существовании периодических решений, соответствующих этим корням, членами первого порядка в отношении μ не решается.

§ 54. Устойчивость периодических решений. Исследуем теперь устойчивость колебаний, соответствующих найденным периодическим решениям. В том случае, когда положительный корень уравнения $L_1(V) = 0$ является простым, вопрос об устойчивости решается теоремой Андронова и Витта [16]. Если же корень уравнения $L_1(V) = 0$ является кратным, т. е. $dL_1(V)/dV = 0$ при $V = V_j$, то среди характеристичных чисел, соответствующих решениям уравнений в вариациях, могут оказаться два характеристичных числа, равных 0. Это обстоятельство приводит к весьма существенным затруднениям.

Исследуем устойчивость невозмущенного движения, не привлекая к рассмотрению уравнений в вариациях.

Предположим вначале, что уравнение $L_1(V) = 0$ имеет корень $V = V_j$ нечетной кратности k_j. Пусть этому корню соответствует единственное периодическое решение. Представим уравнения (11.13) и (11.14) в виде

$$
\begin{aligned}
&H \frac{dV}{dt} = -\mu\varepsilon_1^{2k-1} P_1(V_j+\varepsilon_1) + \mu^2 P_2(V_j+\varepsilon_1, \theta, \mu)\\
&H \frac{dV}{dt} = \mu\varepsilon_2^{2k-1} P_1(V_j-\varepsilon_2) + \mu^2 P_2(V_j-\varepsilon_2, \theta, \mu)
\end{aligned}
\qquad (11.19)
$$

где $2k - 1 = k_j$.

Можно утверждать, что при $P_1(V_j) > 0$ периодическое решение устойчиво, а при $P_1(V_j) < 0$ — неустойчиво. Эти условия можно сформулировать следующей теоремой.

Теорема 2. Если система уравнений (11.4) такова, что соответствующее этой системе уравнение $L_1(V) = 0$ имеет корень $V = V_j$ нечетной кратности, равной $2k - 1$, и если

$$d^{2k-1} L_1(V)/dV^{2k-1} < 0 \qquad \text{при} \qquad V = V_j \qquad (11.20)$$

то периодические колебания, отвечающие корню $V = V_j$, устойчивы; если же

$$d^{2k-1} L_1(V)/dV^{2k-1} > 0 \qquad \text{при} \qquad V = V_j \qquad (11.21)$$

то неустойчивы.

При $k = 1$ эта теорема совпадает с теоремой Андронова и Витта.

Если окажется, что корню $V = V_j$ соответствует несколько периодических решений, и если при этом μ достаточно мало, то имеет смысл ввести понятие устойчивости по отношению к области, ограниченной циклами $V = V_j + \varepsilon_1$ и $V = V_j - \varepsilon_2$. Можно утверждать, что эту область выбором чисел ε_1 и ε_2 можно сделать сколь угодно малой, т. е. расстояние между точками внутреннего и внешнего цикла, измеренное по радиусу, будет сколь угодно мало, если μ достаточно малая величина, и стремится к нулю вместе с μ.

Мы можем положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \mu^\gamma$, $\gamma = \delta/(2k - 1)$, $\delta < 1$. Тогда уравнения (11.19) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&H \frac{dV}{dt} = -\mu^{1+\delta} [P_1(V_j+\mu^\gamma) - \mu^{1-\delta} P_2(V_j+\mu^\gamma, \mu, \theta)]\\
&H \frac{dV}{dt} = \mu^{1+\delta} [P_1(V_j-\mu^\gamma) + \mu^{1-\delta} P_2(V_j-\mu^\gamma, \mu, \theta)]
\end{aligned}
\qquad (11.22)
$$

При μ достаточно малом и при условии (11.20) будем иметь устойчивые колебания по отношению к области, ограниченной циклами $V = V_j + \mu^\gamma$ и $V = V_j - \mu^\gamma$, а при условии (11.21) — неустойчивые. Расстояние между циклами, определяемое из (11.8) для $V = V_j + \mu^\gamma$ и $V = V_j - \mu^\gamma$, будет стремиться к нулю при $\mu \to 0$.

Предположим теперь, что корень V_j четной кратности $k_j = 2k$. Легко убедиться, что область, ограниченная циклами $V = V_j + \mu^\gamma$ и $V = V_j - \mu^\gamma$ будет неустойчивой, так как dV/dt для обоих циклов будет сохранять постоянный знак.

На основании изложенного можно формулировать теорему.

Теорема 3. Если система уравнений (11.4) такова, что уравнение $L_1(V)$ имеет корень $V = V_j$ четной кратности $2k$, то область существования периодических решений будет неустойчивой, причем в случае

$$d^{2k} L_1(V)/dV^{2k} < 0 \qquad \text{при} \qquad V = V_j$$

область будет устойчивой для внешних возмущений и неустойчивой для внутренних. Если же $d^{2k}L_1(V)/dV^{2k} > 0$ при $V = V_j$, то область существования периодических решений будет устойчивой для внутренних возмущений и неустойчивой для внешних.

§ 55. Определение величины параметра. Мы предполагали, что в системе уравнений (11.4) параметр μ является достаточно малой величиной.

Очевидно, представляет существенный интерес следующая задача: определить то значение μ, при котором и менее которого периодические решения системы (11.4) продолжают существовать, если эта система имеет их при достаточно малых значениях μ.

Исследуем вначале случай, когда кратность корня уравнения $L_1(V) = 0$ нечетная. Предположим, что в формулах (11.19) выражение $P_1(V_j)$ более нуля, тогда будем иметь

$$P_1(V_j+\varepsilon_1) > 0, \qquad P_1(V_j-\varepsilon_2) > 0$$

Для существования периодического решения необходимо

$$-\varepsilon_1^{2k-1} P_1(V_j+\varepsilon_1)+\mu P_2(V_j+\varepsilon_1,\ \theta,\ \mu) < 0 \tag{11.23}$$

$$\varepsilon_2^{2k-1} P_1(V_j-\varepsilon_2)+\mu P_2(V_j-\varepsilon_2,\ \theta,\ \mu) > 0 \tag{11.24}$$

Эти неравенства всегда имеют место при μ достаточно малом, но они могут существовать и для конечных значений μ и даже для очень больших его значений. Чтобы определить искомое значение μ мы можем поступить следующим образом.

Заменим в (11.23) выражение $P_2(V_j + \varepsilon_1,\ \theta,\ \mu)$ наибольшим значением, которое оно может принимать при любых значениях $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Обозначим этот максимум через $P_2^*(V_j + \varepsilon_1,\ \mu)$ и рассмотрим уравнение

$$-\varepsilon_1^{2k-1} P_1(V_j+\varepsilon_1)+\mu P_2^*(V_j+\varepsilon_1,\ \mu)=0$$

Из этого уравнения мы можем определить значение $\mu = \mu(\varepsilon_1)$. Обозначим наибольшее значение μ, определяемое этим равенством, через μ_1 в предположении, что $\varepsilon_1 < V_{j+1} - V_j$.

Далее находим наименьшее значение $P_2\ (V_j-\varepsilon_2,\ \theta,\ \mu)$ для любых значений $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Пусть это наименьшее значение есть $P_2^{**}\ (V_j - \varepsilon_2,\ \mu)$. Из равенства

$$\varepsilon_2^{2k-1} P_1(V_j-\varepsilon_2)+\mu P_2^{**}(V_j-\varepsilon_2,\ \mu)=0$$

определяем $\mu = \mu(\varepsilon_2)$ и находим наибольшее значение μ при условии $\varepsilon_2 < V_j - V_{j-1}$. Пусть этот максимум μ равен μ_2.

Если окажется, что максимумов μ_1 и μ_2 будет несколько, то мы должны взять наименьший из них.

Выберем теперь число μ_0, меньшее μ_1 и μ_2 на сколь угодно малую величину. Очевидно, что при $\mu = \mu_0$ неравенства (11.23) и (11.24) соблюдаются.

Число μ_0 будет искомым числом, если для всех $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}
&1+\mu\,[u_1^{(1)}(\theta)+Vu_1^{(2)}(\theta)+\ldots+V^{m_1-1}u_1^{(m_1)}(\theta)] > 0\\
&1+\mu\,[u_1^{(1)}(\theta)+2Vu_1^{(2)}(\theta)+\ldots+m_1V^{m_1-1}u_1^{(m_1)}(\theta)] > 0
\end{aligned} \tag{11.25}$$

при $V = V_j + \varepsilon_1^*$ и $V = V_j - \varepsilon_2^*$, где ε_1^* и ε_2^* те значения ε_1 и ε_2, которые определяют максимальные значения $\mu(\varepsilon_1)$ и $\mu(\varepsilon_2)$. Если же одно из этих неравенств обращается в нуль, хотя бы при одном значении $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, то тогда за искомое значение μ необходимо взять число $\mu < \mu_0$ такое, чтобы неравенства (11.25) имели место.

§ 56. Условия существования периодических решений по членам высших порядков. Исследуем теперь случай, когда члены первого порядка вопроса о существовании предельных циклов не решают. Это имеет место, когда, например,

$$X_1(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \qquad Y_1(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$$

где $H(x, y)$ — определенно-положительная функция для значений x, y, принадлежащих к области исследования.

Может также оказаться, что уравнение $L_1(V) = 0$ обращается в тождество. Это уравнение будет обязательно обращаться в тождество, если многочлены $X_1(x, y)$ и $Y_1(x, y)$ содержат только четные степени выражений $x^{k_1}y^{k_2}$, т. е. $k_1 + k_2 = 2k$.

В дальнейшем будем предполагать, что вопрос о существовании предельных циклов решается конечным числом членов правых частей системы уравнений (11.4).

Для решения поставленной задачи определим функцию Ляпунова из уравнения

$$r = V + \sum_{k=1}^{k=\alpha} \mu^k \left(V u_k^{(1)} + V^2 u_k^{(2)} + \ldots + V^{m_k} u_k^{(m_k)}\right) \tag{11.26}$$

где число α равно степени μ, определяющей существование предельного цикла независимо от членов, порядок которых выше α, а $u_k^{(s)}$— непрерывные периодические функции θ, подлежащие определению.

Это уравнение при достаточно малом μ представляет определенно-положительную функцию V для любых положительных значений r и для любых вещественных значений θ.

Производная функции V по t в силу уравнений (11.5) будет иметь вид

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{k=\alpha} \mu^k \left[V P_k^{(1)}(\theta) + \ldots + V^{m_k} P_k^{(m_k)}(\theta)\right] +$$
$$+ \mu^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(V, \theta, \mu) \tag{11.27}$$

Такая запись производной возможна, если параметр μ удовлетворяет условию

$$H_1 = 1 + \sum_{k=1}^{k=\alpha} \mu^k \left[u_k^{(1)} + 2V u_k^{(2)} + \ldots + m_k V^{m_k-1} u_k^{(m_k)}\right] > 0 \tag{11.28}$$

В правой части выражения (11.27) функции $P_k^{(s)}(\theta)$ имеют вид

$$P_k^{(s)}(\theta) = -\lambda \frac{du_k^{(s)}}{d\theta} + R_k^{(s)}(\theta) + Q_k^{(s)}(\theta)$$
$$(k = 1, \ldots, \alpha, \; s = 1, \ldots, m_k) \tag{11.29}$$

Функции $Q_1^{(s)}(\theta)$ тождественно равны нулю, а функции $Q_k^{(s)}$ ($k = 2, 3, \ldots, \alpha$) представляются многочленами от различных степеней $\sin\theta$, $\cos\theta$ и от функций $u_j^{(s)}$, у которых $j < k - 1$. Эти функции являются также многочленами от различных степеней $\sin\theta$, $\cos\theta$.

В зависимости от выбора функций $u_k^{(s)}$ мы будем получать различные значения $P_k^{(s)}$. Подберем функции $u_k^{(s)}$так, чтобы все $P_k^{(s)}$ были постоянными величинами. Обозначим эти постоянные через $g_k^{(s)}$ и определим их из равенств

$$\int_0^{2\pi} \left[R_k^{(s)}(\theta) + Q_k^{(s)}(\theta) - g_k^{(s)}\right] d\theta = 0 \tag{11.30}$$

тогда функции $u_k^{(s)}$ определятся из уравнений

$$u_k^{(s)} = \frac{1}{\lambda} \int [R_k^{(s)}(\theta) + Q_k^{(s)}(\theta) - g_k^{(s)}]\, d\theta + C_k^{(s)} \tag{11.31}$$

Постоянные $C_k^{(s)}$ определим так, чтобы все функции $u_k^{(s)}$ обращались в нуль при $\theta = 0$. Тогда производная функции V по t примет вид

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k L_k(V) + \mu^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(V, \theta, \mu) \tag{11.32}$$

где

$$L_k(V) = g_k^{(1)} V + g_k^{(2)} V^2 + \ldots + g_k^{(m_k)} V^{m_k} \tag{11.33}$$

Очевидно, что выражение $\sum\limits_{k=1}^{\alpha} \mu^k \; L_k(V)$ представится многочленом относительно V с коэффициентами, являющимися также многочленами относительно μ. Обозначим этот многочлен $L^{(\alpha)}(V)$, тогда

$$L^{(\alpha)}(V) = B_{\alpha_1} V + B_{\alpha_2} V^2 + \ldots + B_{\alpha_n} V^n \tag{11.34}$$

где n — наивысшая из степеней многочленов $L_k(V)$. Числа B_{α_k} являются многочленами от μ.

Может случиться, что все многочлены $L_k(V)$ обращаются тождественно в нуль для любых сколь угодно больших значений α. Тогда система уравнений (11.4) будет иметь бесчисленное множество периодических решений. Этот случай может иметь место, например, для системы

$$\frac{dx}{dt} = -y - \mu \frac{\partial H(x, y, \mu)}{\partial y}; \qquad \frac{dy}{dt} = x + \mu \frac{\partial H(x, y, \mu)}{\partial x}$$

где $H(x, y, \mu)$ — определенно-положительная функция при любых вещественных значениях x, y.

Пусть первый многочлен $L_k(V)$, не обращающийся тождественно в нуль, имеет индекс β, т. е. $L_\beta(V) \not\equiv 0$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Может оказаться, что уравнение $L_\beta(V) = 0$ не имеет вещественных корней. Тогда, очевидно, система уравнений (11.4) при достаточно малом μ не имеет периодических решений, кроме решений, соответствующих $\mu = 0$.

Предположим, что уравнение $L_\beta(V) = 0$ имеет $m \leqslant m_\beta$ положительных корней $0 < V_1 < V_2 < \ldots < V_j < \ldots < V_m$. Найдем условие существования периодических решений, отвечающих одному из корней. Пусть этот корень равен V_j. Многочлен $L_\beta(V)$ можно представить в виде

$$L_\beta(V) = (V_j - V)^{\gamma_\beta} A_\beta(V)$$

Предположим вначале, что $L_{\beta+1}(V_j) \neq 0$. Полагая $\alpha = \beta + 1$, мы можем выражение (11.32) представить в виде

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \mu^\beta (V_j - V)^{\gamma_\beta} A_\beta(V) + \mu^{\beta+1} L_{\beta+1}(V) + \mu^{\beta+2} P_{\beta+2}(V, \theta, \mu) \tag{11.35}$$

Рассмотрим уравнение

$$(V_j - V)^{\gamma_\beta} A_\beta(V) + \mu L_{\beta+1}(V) = 0 \tag{11.36}$$

Это уравнение имеет единственный вещественный положительный корень при γ_β нечетном независимо от величин $A_\beta(V_j)$, $L_{\beta+1}(V_j)$. Этот корень при $\mu = 0$ примет значение V_j.

Если γ_β четное, то уравнение (11.26) имеет два положительных вещественных корня, стремящихся к V_j, при $\mu = 0$, если $L_{\beta+1}(V_j)/A_\beta(V_j) < 0$, и не имеет вещественных корней в случае $L_{\beta+1}(V_j)/A_\beta(V_j) > 0$.

В случае γ_β нечетного выражение этого корня будет иметь вид

$$V_j^* = V_j + \nu a_1 + \nu^2 a_2 + \dots$$

где $\nu = \mu^{1/\gamma_\beta}$, $a_1 = + [L_{\beta+1}(V_j)/A_\beta(V_j)]^{1/\gamma_\beta}$. При γ_β четном получим

$$V_{j1}^* = V_j + \nu b_1 + \nu^2 b_2 + \dots, \quad V_{j2}^* = V_j + \nu c_1 + \nu^2 c_2 + \dots$$

где

$$b_1 = [L_{\beta+1}(V_j)/A_\beta(V_j)]^{1/\gamma_\beta}, \qquad c_1 = -[L_{\beta+1}(V_j)/A_\beta(V_j)]^{1/\gamma_\beta}$$

Очевидно, что эти корни будут простые.

Если γ_β нечетное, то (11.35) можно представить в виде

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \mu^\beta (V_j^* - V) A_\beta^*(V) + \mu^{\beta+2} P_2(V, \theta, \mu)$$

Из этого уравнения следует, что корню V_j^* соответствует единственное периодическое решение системы (11.4).

В случае γ_β четного выражение (11.35) представится в виде

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \mu^\beta (V_{j1}^* - V)(V_{j2}^* - V) A_\beta^{**}(V) + \mu^{\beta+2} P_2(V, \theta, \mu)$$

Отсюда можно заключить, что система (11.4) имеет два периодических решения. Оба эти решения при $\mu \to 0$ сливаются в одно.

Вопрос об устойчивости колебаний, описываемых системой (11.4), при этих предположениях решается способом, изложенным в § 54.

Предположим, что многочлен $L_{\beta+1}(V_j) = 0$. Пусть $L_{\beta+1}(V_j) = L_{\beta+2}(V_j) = \dots = L_{\alpha-1}(V_j) = 0$, а $L_\alpha(V_j) \neq 0$. Полиномы $L_k(V)$ ($k = \beta, \beta+1, \dots, \alpha-1$) можно представить в виде

$$L_k(V) = (V - V_j)^{\gamma_k} A_k(V)$$

Вопрос о существовании периодических решений при этом предположении приводится к определению простых положительных корней алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} L^{(\alpha)}(V) = \mu^\beta (V - V_j)^{\gamma_\beta} A_\beta(V) + \mu^{\beta+1} (V - V_j)^{\gamma_{\beta+1}} A_{\beta+1}(V) + \\ + \dots + \mu^{\alpha-1} (V - V_j)^{\gamma_{\alpha-1}} A_{\alpha-1}(V) + \mu^\alpha L_\alpha(V) = 0 \end{aligned} \tag{11.37}$$

Искомые корни обращаются в V_j при $\mu = 0$.

Число β может принимать одно из значений $\beta = 1, 2, \dots, \alpha - 1$. В том случае, когда $\gamma_\beta = 1$, мы получим единственный вещественный корень уравнения (11.37), обращающийся в V_j при $\mu = 0$. В случае $\gamma_\beta \geqslant 2$ каждому корню V_j уравнения $L_\beta(V) = 0$ может соответствовать несколько вещественных корней уравнения (11.37), обращающихся в V_j, при $\mu = 0$.

Эти корни могут оказаться простыми, но может случиться, что в числе их находятся кратные корни, кратность которых менее γ_β. Если мы будем иметь дело с последним случаем, то тогда функцию Ляпунова, определяемую уравнением (11.26), найдем из того же уравнения с заменой числа α на $\alpha_1 > \alpha$. Число α_1 выберем так, чтобы уравнение

$$L^{(\alpha_1)}(V) = \sum_{k=\beta}^{\alpha_1} \mu^k L_k(V) = 0$$

не имело кратных корией. Этот случай является общим.

Может, однако, случиться, что какое бы большое число α_1 мы ни брали, корень V_j будет являться корнем для всех многочленов $L_k(V)$ $(k = 1, \dots, \alpha_1)$, а следовательно, и для многочлена $L^{(\alpha_1)}(V)$.

Обнаружить это свойство многочленов $L_k(V)$ указанным выше способом вообще, конечно, нельзя. Но если каким-либо другим способом нам это удалось доказать, то тогда можно утверждать, что корню V_j будет соответствовать единственное периодическое решение независимо от кратности корня.

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k (a^2 - x^2 - y^2)^{n_k} x f_k(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k (a^2 - x^2 - y^2)^{n_k} y f_k(x, y)$$

Полагая $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k (a^2 - r^2)^{n_k} r f_k(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

Если все $n_k \geqslant 1$, выражения $x = a\cos(t + t_0)$, $y = a\sin(t + t_0)$ представят периодическое решение исходной системы. Это решение будет существовать и в том случае, если в функцию $f_k(x, y)$ входит явно t.

Исключая из рассмотрения эти частные случаи и определяя функцию V указанным выше способом, мы можем утверждать, что первые α членов многочлена $L^{(\alpha_1)}(V)$ останутся без изменения. В этом случае вместо (11.37) будем иметь уравнение

$$L^{(\alpha_1)}(V) = \mu^{\beta}(V - V_j)^{\gamma_\beta} A_\beta(V) + \mu^{\beta+1}(V - V_j)^{\gamma_{\beta+1}} A_{\beta+1}(V) + \dots + \\ + \mu^{\alpha-1}(V - V_j)^{\gamma_{\alpha-1}} A_{\alpha-1}(V) + \mu^{\alpha} L_\alpha(V) + \dots + \mu^{\alpha_1} L_{\alpha_1}(V) = 0 \qquad (11.38)$$

Докажем теперь, что каждому простому положительному корню этого уравнения соответствует одно периодическое решение системы уравнений (11.4).

Для этого достаточно показать, что каждому простому положительному корню уравнения (11.37) соответствует предельный цикл. Представим корни этого уравнения в виде $V = V_j + \mu^{\sigma} z$, где новая неизвестная $z(\mu)$ не обращается в нуль при $\mu = 0$.

Подставляя значение V в (11.38) и сокращая на μ^{β}, будем иметь

$$\mu^{\sigma\gamma_\beta} z^{\gamma_\beta} A_\beta(V) + \mu^{1+\sigma\gamma_{\beta+1}} z^{\gamma_{\beta+1}} A_{\beta+1}(V) + \dots + \\ + \mu^{\alpha-\beta-1+\sigma\gamma_{\alpha-1}} z^{\gamma_{\alpha-1}} A_{\alpha-1}(V) + \mu^{\alpha-\beta} L_\alpha(V) + \dots + \\ + \mu^{\alpha_1-\beta} L_{\alpha_1}(V) = 0 \qquad (11.39)$$

Очевидно, что сумма членов, содержащих наинизшие степени μ, равна левой части этого уравнения с заменой V на V_j. Из рассмотрения этих членов мы приходим к заключению, что степень σ может определяться одним из уравнений

$$\sigma\gamma_\beta = \alpha - \beta, \qquad p + \sigma\gamma_{\beta+p} = \alpha - \beta$$

$$p + \sigma\gamma_{\beta+p} = p_1 + \sigma\gamma_{\beta+p_1}, \qquad \sigma\gamma_\beta = p + \sigma\gamma_{\beta+p}$$

где p и p_1 — любые целые числа от 1 до $\alpha - \beta - 1$.

Первое уравнение дает значение σ, равное $(\alpha - \beta)/\gamma_\beta$, наибольшее значение которого $\sigma_{m_1} = (\alpha - \beta)/2$.

Определим σ из второго уравнения $\sigma = (\alpha - \beta - p)/\gamma_{\beta+p}$. Наибольшее значение σ_{m_2}, определяемое из этого уравнения, равно $\sigma_{m_2} = \alpha - \beta - 1$. Наибольшее значение σ_{m_3}, определяемое из третьего уравнения, имеет вид $\sigma_{m_3} = \alpha - \beta - 2$. Четвертое уравнение дает $\sigma_{m_4} = \alpha - \beta - 1$.

Отсюда заключаем, что наинизший член разложения корня уравнения (11.38) по дробным степеням μ по крайней мере на единицу ниже степени μ, стоящего перед многочленом $L_\alpha(V)$.

Предположим, что корню V_j, кратность которого γ_β, соответствует δ простых положительных корней ($\delta \leqslant \gamma_\beta$). Тогда будем иметь

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \mu^\beta (V - V_{j1})(V - V_{j2}) \dots (V - V_{j\delta}) B(V, \mu) + \mu^{\alpha_1+1} P_{\alpha_1+1}(V, \theta, \mu) \tag{11.40}$$

где V_{jk} — простые корни уравнения (11.39).

Будем считать $V_{j1} < V_{j2} < \dots < V_{j\delta}$. Многочлен $B(V, \mu)$ не обращается в нуль для $V_{jk-1} < V < V_{jk+1}$.

Докажем, что каждому корню V_{jk}, ($k = 1, \dots, \delta$) соответствует предельный цикл. Возьмем произвольный корень V_{jk} и два замкнутых цикла, соответствующих значениям $V = V_{jk} + \mu^{\alpha-\beta-1+h}$ и $V = V_{jk} - \mu^{\alpha-\beta-1+h}$, где h — достаточно малое положительное число.

Подставляя первое выражение V в (11.40), будем иметь

$$H_1 \frac{dV}{dt} = \mu^\tau Q(V_{jk} + \mu^{\alpha-\beta-1+h}) + \mu^{\alpha_1+1} P_{\alpha_1+1}(V_{jk}, \theta, \mu) \tag{11.41}$$

Для второго цикла получим

$$H_1 \frac{dV}{dt} = -\mu^\tau Q(V_{jk} - \mu^{\alpha-\beta-1+h}) + \mu^{\alpha_1+1} P^*_{\alpha_1+1}(V_{jk}, \theta, \mu) \tag{11.42}$$

Выражения $Q(V_{jk} + \mu^{\alpha-\beta-1+h})$ и $Q(V_{jk} - \mu^{\alpha-\beta-1+h})$ имеют одинаковые знаки, так как оба цикла заключены внутри кольца, ограниченного циклами $V = V_{jk-1}$ и $V = V_{jk+1}$. Функция $Q(V)$ для значений V, принадлежащих интервалу $V_{jk-1} < V < V_{jk+1}$, сохраняет постоянный знак.

Число τ не может превышать числа $\beta + \delta(\alpha - \beta - 1) + h$. Если теперь число α_1 выберем согласно неравенству

$$\alpha_1 + 1 > \beta + \delta(\alpha - \beta - 1) + h$$

то знак производных будет определяться первым членом выражений (11.41) и (11.42).

Следовательно, знак производной dV/dt, определяемой уравнением (11.41), противоположен знаку производной (11.42).

Следовательно, интегральные кривые пересекают исследуемые замкнутые кривые в разных направлениях.

На основании теоремы Бендиксона [15] мы можем утверждать, что внутри кольца, ограниченного циклами $V = V_{jk} + \mu^{\alpha-\beta+h-1}$ и $V = V_{jk} - \mu^{\alpha-\beta+h-1}$, находится один предельный цикл системы (11.4). Этому циклу будут соответствовать периодические колебания, описываемые этой системой.

Устойчивость этих колебаний исследуется способом, изложенным в § 54, т. е., если $dL^{(\alpha_1)}(V)/dV < 0$ при $V = V_{jk}$, то колебания, определяемые этим корнем, устойчивы. Если же $dL^{(\alpha_1)}(V)/dV > 0$ при $V = V_{jk}$, то колебания неустойчивы.

§ 57. Построение периодических решений. Уравнения предельных циклов системы (11.4) можно получить следующим образом.

В результате исключения dt из системы (11.5) получим уравнение

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k [rP_k^{(1)}(\theta) + r^2 P_k^{(2)}(\theta) + \ldots + r^{n_k} P_k^{(n_k)}(\theta)] \tag{11.43}$$

Числа n_k могут быть более соответствующих чисел m_k, но $n_1 = m_1$.

В дальнейшем исследовании мы будем предполагать параметр μ таким, что выражение $\lambda + \mu F_1(r, \theta) + \mu^2 F_2(r, \theta) + \ldots$, фигурирующее в (11.5), сохраняет знак для $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и для значений r, принадлежащих области исследования. При этом условии правая часть (11.43) будет голоморфной функцией от r и μ для любых значений $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Для нахождения уравнений предельных циклов с точностью до порядка α найдем функцию Ляпунова из уравнения

$$r = V + \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k [Vu_k^{(1)}(\theta) + \ldots + V^{n_k} u_k^{(n_k)}(\theta)] \tag{11.44}$$

где $u_k^{(s)}$ (θ) — непрерывные периодические функции с периодом 2π.

Производная функции V по θ будет иметь вид, аналогичный (11.27)

$$\frac{dV}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k [VP_k^{*(1)}(\theta) + \ldots + V^{n_k} P_k^{*(n_k)}(\theta)] + \mu^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(V, \theta, \mu) \tag{11.45}$$

Функции $P_k^{*(s)}(\theta)$ имеют вид

$$P_k^{*(s)}(\theta) = -\frac{du_k^{(s)}}{d\theta} + P_k^{(s)}(\theta) + Q_k^{(s)}(\theta)$$
$$(k = 1, \ldots, \alpha, \ s = 1, \ldots, n_k) \tag{11.46}$$

Функции $Q_1^{(s)}$ тождественно равны нулю, а функции $Q_k^{(s)}$ $(k = 2, 3, \ldots, \alpha)$ представляются многочленами от различных степеней $\sin\theta$, $\cos\theta$ и от функций $u_j^{(s)}$, у которых индекс $j \leqslant k - 1$.

Определяя функции $u_k^{(s)}(\theta)$ и постоянные $C_k^{(s)}$ согласно формулам (11.30) и (11.31) будем иметь

$$\frac{dV}{d\theta} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k (Vg_k^{(1)} + \ldots + V^{n_k} g_k^{(n_k)}) + \mu^{\alpha+1} P_{\alpha+1}(V, \theta, \mu) \tag{11.47}$$

Выберем число α так, чтобы положительные корни уравнения

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k [Vg_k^{(1)} + \ldots + V^{n_k} g_k^{(n_k)}] = 0 \tag{11.48}$$

были простыми. Если требуется большая точность, то число α можно заменить на число $\alpha_1 > \alpha$.

Предположим, что уравнение (11.48) имеет m положительных корней $V_1, \ldots, V_m$. Подставляя эти значения V_k в выражение (11.44), мы получим для каждого V_k уравнение предельного цикла в полярных координатах с точностью до членов порядка α в отношении μ.

Если найденное значение r подставить в выражения $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, то получим параметрическое уравнение периодических решений системы (11.4).

Подставляя значение r из (11.44) во второе уравнение (11.5), получим

$$\frac{d\theta}{dt} = \lambda + \mu f_1(\theta) + \mu^2 f_2(\theta) + \ldots + \mu^\alpha f_\alpha(\theta) + \ldots \tag{11.49}$$

Это уравнение определяет значение θ как функцию от t.

Ограничиваясь членами порядка α в правой части уравнения (11.49), разделяя переменные и интегрируя, будем иметь

$$T=\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda+\mu f_1(\theta)+\ldots+\mu^{\alpha}f_{\alpha}(\theta)}$$

Это выражение определяет период колебаний системы.

В § 55 мы определили значение μ_0, при котором и менее которого система (11.4) имеет периодические решения. Дополнительным условием существования решения в форме (11.44) является ограничение, которое мы наложим на правую часть второго уравнения системы (11.5). Это ограничение при $\lambda>0$ имеет вид

$$\lambda+\mu F_1(r,\theta)+\mu^2F_2(r,\theta)+\ldots>0 \tag{11.50}$$

для значений r, определяемых равенством (11.44), если в последнее поставить значения $V_1, \ldots, V_m$.

Неравенство (11.50) налагает еще одно ограничение на параметр μ.

Может оказаться, что наибольшее значение μ, удовлетворяющее неравенству (11.50), менее μ_0, которое определено в § 55. При этом условии, несмотря на существование периодического решения для значения параметра, равного μ_0, аналитическое выражение этого решения может отличаться от выражения (11.44). В этом случае найдется такое значение параметра μ^*, при котором аналитическое выражение периодического решения изменяется, и оно может принять структуру, отличную от (11.44). Этот случай имеет место, например, в уравнении Ван-дер-Поля.

Если мы будем рассматривать предельный цикл, соответствующий одному из периодических решений, то неравенство (11.50) имеет простое геометрическое представление.

Очевидно, что при условии (11.50) радиус-вектор, выходящий из начала координат, пересекает предельный цикл только в одной точке и нигде не касается его.

Если же неравенство (11.50) при некоторых значениях r и θ обращается в нуль, а затем меняется на обратное, то радиус-вектор касается предельного цикла и будет пересекать его в одной или нескольких точках.

Очевидно, что вышеизложенный анализ к такого рода задачам неприменим.

Рассмотрим подробнее случай простых корней амплитудного уравнения, соответствующего уравнению (11.43). Полагая

$$r=V+\mu\left(Vu_1^{(1)}+\ldots+V^{m_1}u_1^{(m_1)}\right) \tag{11.51}$$

и определяя функции $u_1^{(s)}$ согласно формулам (11.30) и (11.31), получим

$$\frac{dV}{d\theta}=\mu\left(g_1^{(1)}V+g_1^{(2)}V^2+\ldots+g_1^{(m_1)}V^{m_1}\right)+\mu^2P_2(V,\theta,\mu) \tag{11.52}$$

Рассмотрим один из положительных корней уравнения

$$L(V)=g_1^{(1)}V+g_1^{(2)}V^2+\ldots+g_1^{(m_1)}V^{m_1}=0 \tag{11.53}$$

Пусть этот корень равен V_j.

Если уравнение (11.53) имеет другие положительные корни, то ближайший корень, меньший V_j, обозначим через V_{j-1}, а больший — через V_{j+1}. Будем предполагать, что в интервале (V_{j+1}, V_{j-1}) уравнение (11.53) не имеет других корней, кроме корня V_j.

Представим уравнение (11.52) в виде

$$\frac{dV}{d\theta}=\mu(V-V_j)A(V)+\mu^2P_2(V,\theta,\mu)$$

Уравнение предельного цикла, отвечающего корню V_j, с точностью до членов первого порядка малости в отношении μ имеет вид

$$r=V_j+\mu(V_ju_1^{(1)}+\ldots+V_j^{m_1}u_1^{(m_1)}) \tag{11.54}$$

Если параметр μ удовлетворяет условиям существования периодических решений, то члены более высокого порядка, стоящие в правой части уравнения (11.52), не изменяют качественной картины поведения интегральных кривых и не нарушают существования предельного цикла.

До сих пор мы рассматривали величину V как функцию Ляпунова, но эту величину можно рассматривать как новую переменную, вводимую вместо переменной r. Рассматривая уравнение (11.51) с этой точки зрения, мы можем отыскать новую переменную в виде многочлена, расположенного по возрастающим степеням параметра μ, и получить второй способ построения предельных циклов.

Построим этот многочлен в предположении, что исследуемый корень уравнения (11.53) является простым, вследствие чего ему будет отвечать единственное периодическое решение.

Положим

$$V=V_0+\mu V_1+\mu^2V_2+\ldots+\mu^\alpha V_\alpha \tag{11.55}$$

где V_0, V_1, ... — искомые функции θ.

Подставляя этот многочлен в (11.52) и приравнивая члены с одинаковыми степенями μ, будем иметь

$$V_0^{\cdot}=0$$

$$V_1^{\cdot}=L_1(V_0)$$

$$V_2^{\cdot}=V_1\frac{dL_1(V_0)}{dV_0}+V_0P_2^{(1)}(\theta)+V_0^2P_2^{(2)}(\theta)+\ldots+V_0^{n_2}P_2^{(n_2)}(0)$$

$$V_k^{\cdot}=V_{k-1}\frac{dL_1(V_0)}{dV_0}+F_k(V_0,V_1,\ldots,V_{k-2},\theta)$$

Из первого уравнения имеем $V_0=C_0$. Подставляя значение V_0 во второе уравнение, из условия периодичности функции $V_1(\theta)$ приходим к заключению, что C_0 должно являться корнем уравнения (11.53), а $V_1=C_1$. Подставляя значения C_0 и C_1 в третье уравнение и приравнивая нулю интеграл от правой части, взятый в пределах от 0 до 2π, определим постоянную C_1. Функция V_2 определяется с точностью до произвольной постоянной C_2, которая будет являться просто приданной. Подставляя значение V_2 в четвертое уравнение, мы определим константу C_2 и функцию V_3 и т. д.

Таким путем мы однозначно определим все функции V_0, V_1, .., а следовательно, и многочлен (11.55). Подставляя значение V из (11.55) в равенство (11.51), мы найдем уравнение предельного цикла, соответствующего одному из корней уравнения (11.53), с точностью до сколь угодно высокого порядка в отношении μ.

Легко убедиться, что результат подстановки этого многочлена в (11.48) и непосредственное вычисление функции Ляпунова по уравнению

$$r=V+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k(Vu_k^{(1)}+\ldots+V^{n_k}u_k^{(n_k)}) \tag{11.56}$$

при соответствующем выборе $C_s^{(k)}$ дают один и тот же результат.

§ 58. Системы $(n+2)$-го порядка. Изложенный способ построения периодических решений применим также к системам $(n+2)$-го порядка

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -\lambda y + \mu X_1(x, y) + \mu^2 X_2(x, y) + \ldots + \mu X(x, y, z_s, \mu) \\
&\frac{dy}{dt} = \lambda x + \mu Y_1(x, y) + \mu^2 Y_2(x, y) + \ldots + \mu Y(x, y, z_s, \mu) \\
&\frac{dz_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{si} z_i + \mu Z_{s1}(x, y) + \mu^2 Z_{s2}(x, y) + \ldots + \mu Z_s(x, y, z_s, \mu) \\
&\qquad\qquad (s = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
\tag{11.57}
$$

где X, Y, Z_s — голоморфные функции своих переменных в области исследования периодических решений и малого параметра μ. Постоянные p_{si} таковы, что уравнение

$$
|p_{si} - \delta_{si} \varkappa| = 0
$$

не имеет корней $\varkappa = \pm\lambda m\sqrt{-1}$, соответствующих целым действительным числам m, включая нуль.

Для вычисления периодических решений системы (11.57) вводим замену $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z_s = r\,y_s$. Из полученной системы исключаем dt. В результате получим новую систему следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr}{d\theta} = \mu\,[rR_1^{(1)}(\theta) + \ldots + r^{m_1} R_1^{(m_1)}(\theta)] + \mu^2\,[rR_2^{(1)}(\theta) + \ldots + \\
&\qquad + r^{m_2} R_2^{(m_2)}(\theta)] + \ldots + \mu R(r, y_s, \theta, \mu) \\
&\frac{dy_s}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_{si} y_i + \mu\,[rY_1^{(1)}(\theta) + \ldots + r^{n_1} Y_1^{(n_1)}(\theta)] + \\
&\qquad + \mu^2\,[rY_2^{(1)}(\theta) + \ldots + r^{n_2} Y_2^{(n_2)}(\theta)] + \ldots + \mu Y_s(r, y_s \theta, \mu)
\end{aligned}
\tag{11.58}
$$

Отыскиваем периодические решения этой системы в виде

$$
r = r_0 + \mu r_1 + \mu^2 r_2 + \ldots + \mu^\alpha r_\alpha, \quad y_s = \mu y_{s1} + \mu^2 y_{s2} + \ldots + \mu^\alpha y_{s\alpha} \tag{11.59}
$$

Подставляя значение r и y_s в (11.58) и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr_1}{d\theta} = r_0 R_1^{(1)} + \ldots + r_0^{m_1} R_1^{(m_1)} \\
&\frac{dr_2}{d\theta} = r_1 (R_1^{(1)} + 2r_0 R_1^{(2)} + \ldots + m_1 r_0^{m_1-1} R_1^{(m_1)}) + F_2(r_0, y_{s1}, \theta) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{dy_{s1}}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_{si} y_{i1} + r_0 Y_1^{(1)} + \ldots + r_0^{n_1} Y_1^{(n_1)} \\
&\frac{dy_{s2}}{d\theta} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} p_{si} y_{i2} + F_{s2}(r_0, r_1, y_{s1}, \theta) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{11.60}
$$

Из условия периодичности функции r_1 будем иметь

$$
\int_0^{2\pi} (r_0 R_1^{(1)} + \ldots + r_0^{m_1} R_1^{(m_1)})\, d\theta = 0 \tag{11.61}
$$

Предположим вначале, что это уравнение имеет несколько простых корней r_{0k}. Подставляя одно из этих значений в уравнения, определяющие неизвестные r_1 и y_{s1}, мы определим функцию r_1 с точностью до приданной константы C_1. Определение периодических функций y_{s1} сводится к отысканию периодических решений уравнений

$$\frac{d\xi_{s1}}{d\theta} = \varkappa_s \xi_{s1} + f_{s1}(\theta) \tag{11.62}$$

где $f_{s1}(\theta)$ представляется полиномом от различных степеней $\sin\theta$ и $\cos\theta$, а ξ_{s1} — линейной формой от переменных y_{s1}.

Эти решения имеют вид

$$\xi_{s1} = \frac{e^{\varkappa_s \theta}}{e^{-2\pi\varkappa_s} - 1} \int_0^{2\pi+\theta} e^{-\varkappa_s\theta} f_{s1}(\theta)\, d\theta \tag{11.63}$$

Подставляя эти значения в уравнения, определяющие функции r_2, y_{s2}, мы из условия периодичности функции r_2 определяем константу C_1, а затем и функцию r_2, которая также определится с точностью до просто приданной константы C_2.

Определение функций y_{s2} сводится к отысканию периодических решений уравнений, аналогичных (11.62).

Таким приемом мы определим все функции, входящие в многочлены (11.59), а следовательно, и периодическое решение системы (11.57), отвечающее одному из простых корней уравнения (11.61) с точностью до сколь угодно высокого порядка в отношении μ.

§ 59. Системы, не обращающиеся в линейные при $\mu = 0$. До сих пор мы рассматривали такие системы, которые при $\mu=0$ обращались в линейные. Рассмотрим теперь более сложные системы, не обращающиеся в линейные при $\mu = 0$.

Исследуем вначале колебания системы с одной степенью свободы, описываемые уравнением

$$x^{\cdot\cdot} + \lambda^2 x^{2n-1} = \mu_1 f_1(x, x^{\cdot}, \mu_1) \qquad (\lambda > 0) \tag{11.64}$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x^{2n-1} + \mu f(x, y, \mu) \tag{11.65}$$

где

$$\mu = \frac{\mu_1}{\lambda} > 0$$

$$f_1(x, y, \mu_1) = f_1(x, y, \lambda\mu) = Y_1(x, y) + \mu Y_2(x, y) + \ldots$$

При $\mu = 0$ эта система имеет семейство периодических решений, зависящих от одной произвольной постоянной

$x = c \operatorname{Cs}\theta$, $y = c^n \operatorname{Sn}\theta$, $\theta = c^{n-1}\lambda t$

где $\operatorname{Cs}\theta$ и $\operatorname{Sn}\theta$ — ляпуновские функции [1], обладающие свойством

$$\operatorname{Cs}^{2n}\theta + \operatorname{Sn}^2\theta = 1, \qquad \frac{d\operatorname{Cs}\theta}{d\theta} = -\operatorname{Sn}\theta$$

$$\frac{d\operatorname{Sn}\theta}{d\theta} = \operatorname{Cs}^{2n-1}\theta, \qquad \operatorname{Cs}0 = 1, \qquad \operatorname{Sn}0 = 0$$

Эти функции при $n = 1$ обращаются в обычные $\sin\theta$ и $\cos\theta$.

При $n = 2$ и $n = 3$ они выражаются через эллиптические функции. При $n > 3$ они являются функциями дифференциальных биномов.

На фазовой плоскости интегральные кривые системы (11.65) при $\mu = 0$ определят центр, который запишется уравнением

$$x^{2n} + ny^2 = c^2$$

Исследование системы (11.65) можно было бы вести при помощи функций $\mathrm{Cs}\,\theta$ и $\mathrm{Sn}\,\theta$, но оперировать ими весьма сложно. Поэтому мы ограничимся обычными синусами и косинусами. Положим

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r^n \sin\theta \tag{11.66}$$

Система уравнений (11.65) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} r^{n-1}(\cos^2\theta + n\sin^2\theta)\frac{dr}{dt} &= \lambda r^{2n-1}(\cos^{2n-1}\theta\sin\theta - \\ &\quad -\sin\theta\cos\theta) + \mu f(r\cos\theta, r^n\sin\theta, \mu)\sin\theta \\ r^n(\cos^2\theta + n\sin^2\theta)\frac{d\theta}{dt} &= \lambda r^{2n-1}(\cos^{2n}\theta + n\sin^2\theta) + \\ &\quad + \mu f(r\cos\theta, r^n\sin\theta, \mu)\cos\theta \end{aligned} \tag{11.67}$$

На функцию $f(x, y, \mu)$ мы должны наложить условие, чтобы она не обращалась в нуль ни при одном значении x, y, кроме $x=y=0$. Вследствие этого правые части системы (11.67) должны обращаться в нуль только при $r = 0$.

По этой причине функция $f(r\cos\theta, r^n\sin\theta, \mu)$ не должна содержать переменную r в степени ниже $2n-1$. Это требование эквивалентно тому, что разложение функции $f(x, y, \mu)$ по степеням x, y не содержит переменную x в степени ниже $2n-1$, переменную y в первой степени и произведение yx^k для $k < n-1$.

Исключая dt из системы (11.67), будем иметь

$$\frac{dr}{d\theta} = rR_0(\theta) + \mu\,[rR_1^{(1)} + \ldots + r^{m_1}R_1^{(m_1)}] + \ldots \tag{11.68}$$

где

$$R_0(\theta) = \frac{\cos^{2n-1}\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta}{\cos^{2n}\theta + n\sin^2\theta}$$

а $R_k^{(s)}(\theta)$ представляются дробями, числителями которых будут являться многочлены от различных степеней $\sin\theta$ и $\cos\theta$, а знаменателями — различные степени выражения $\cos^{2n}\theta + n\sin^2\theta$.

Полагая в (11.68)

$$r = \rho\exp\left[\int\limits_0^\theta R_0\,d\theta\right] \tag{11.69}$$

и учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi} R_0 d\theta = 0$, получим

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \mu\,[\rho P_1^{(1)} + \ldots + \rho^{m_1}P_1^{(m_1)}] + \ldots \tag{11.70}$$

где $P_k^{(s)}$ — непрерывные периодические функции с общим периодом 2π. Дальнейшее исследование этого уравнения проводится согласно § 57.

К такому же уравнению приводятся исследования колебаний систем, описываемых уравнениями более общего вида.

Исследуем колебания системы, описываемой уравнением

$$x^{\cdot\cdot}+\lambda^2 x^{2n-1}+b_1 x^{\cdot} x^m=\mu_1 f_1(x, x^{\cdot}, \mu_1) \qquad (\lambda>0)$$

или эквивалентной ей системы

$$\frac{dx}{dt}=-\lambda y, \qquad \frac{dy}{dt}=\lambda x^{2n-1}-byx^m+\mu f(x, y, \mu) \tag{11.71}$$

где $\mu>0$.

Эта система при $m=n-1$ и $b^2-4n\lambda^2<0$ может иметь семейство периодических решений, зависящих от одной произвольной постоянной.

Производя замену (11.66), получим уравнение, аналогичное (11.68), в котором

$$R_0=\frac{\lambda\cos^{2n-1}\theta\sin\theta-\lambda\cos\theta\sin\theta-b\cos^{n-1}\theta\sin^2\theta}{\lambda\left[n\left(\sin\theta-\frac{b}{2n\lambda}\cos^n\theta\right)^2+\delta^2\cos^{2n}\theta\right]} \tag{11.72}$$

где $\delta^2=1-b^2/4n\lambda^2$. Будем предполагать, что $\delta\neq 0$.

Если $\int\limits_0^{2\pi} R_0 d\theta\neq 0$, то система (11.71) при $\mu=0$ не имеет периодических решений. Если же этот интеграл равен нулю, то она при $\mu=0$ имеет семейство периодических решений.

Если теперь в полученном уравнении заменить r на ρ согласно равенству (11.69), в котором значение R_0 определено уравнением (11.72), то вычисление периодических решений будет аналогично изложенному выше.

Предположим теперь, что колебания системы описываются уравнениями

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=-\lambda y+X_0(x, y)+\mu X_1(x, y)+\dots\\ \frac{dy}{dt}&=\lambda x+Y_0(x, y)+\mu Y_1(x, y)+\dots\end{aligned} \tag{11.73}$$

где $X_0(x, y)$ и $Y_0(x, y)$ не содержат линейных членов.

Предположим, что эта система при $\mu=0$ имеет семейство периодических решений, зависящих от одной произвольной постоянной. Наиболее общий признак существования такого рода решений заключается в том, что система (11.73) при $\mu=0$ допускает существование знакоопределенного голоморфного интеграла. Этот интеграл имеет вид

$$x^2+y^2+F(x, y)=c^2 \tag{11.74}$$

Такой интеграл всегда будет существовать, если система (11.73) при $\mu=0$ является канонической, т. е. $X_0=-\partial H/\partial y$, $Y_0=\partial H/\partial x$; а функция $\lambda/_2(x^2+y^2)+H$ — знакоопределенной.

В дальнейшем будем исследовать только такие системы (11.73), у которых интеграл (11.74) сохраняет знакоопределенность во всей области исследования периодических решений и представляет при различных значениях c замкнутые кривые. Кроме того, будем предполагать, что луч, выходящий из начала координат, пересекает любую из этих замкнутых кривых только в одной точке и не касается их ни в одной точке. Эти свойства знакоопределенных интегралов типа (11.74) при значениях c, достаточно малых, всегда выполняются. При больших значениях c не все интегралы, представленные выражением (11.74), могут обладать указанными свойствами, если при малых значениях c они ими обладали.

Полагая в уравнении (11.74) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, получим

$$r^2 + F(r\cos\theta, r\sin\theta) = c^2 \tag{11.75}$$

При наших ограничениях, накладываемых на интеграл (11.74), уравнение (11.75) определит два решения для r при заданных значениях c и θ. Эти решения представятся рядами

$$r = \pm c + u_2 c^2 \pm u_3 c^3 + \ldots \tag{11.76}$$

Мы можем взять любое из этих решений, так как заменой θ на $\pi + \theta$ одно из этих решений переходит в другое {43}.

Будем также предполагать, что аналитическое выражение корня уравнения (11.75), представляемое рядами (11.76), сохраняется для значений $r > r_m$, где r_m — наибольшее значение радиуса-вектора, принадлежащего исследуемому предельному циклу.

Преобразуем теперь систему уравнений, приняв за новые переменные полярный угол θ и величину ρ, где

$$\rho^2 = r^2 + F(r\cos\theta, r\sin\theta) \tag{11.77}$$

Очевидно, что эти переменные будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{gathered} 2\rho\frac{d\rho}{dt} = \left(2x + \frac{\partial F}{\partial x}\right)(\mu X_1 + \mu^2 X_2 + \ldots) + \left(2y + \frac{\partial F}{\partial y}\right)(\mu Y_1 + \mu^2 Y_2 + \ldots) \\ r^2\frac{d\theta}{dt} = \lambda r^2 + xY_0 - yX_0 + x(\mu Y_1 + \mu^2 Y_2 + \ldots) - y(\mu X_1 + \mu^2 X_2 + \ldots) \end{gathered} \tag{11.78}$$

Мы можем утверждать, что выражение $\lambda(x^2 + y^2) + xY_0 - yX_0$ не обращается в нуль ни в одной точке, кроме начала координат, и представляет собой определенно-положительную функцию во всей области исследования периодических решений.

В противном случае луч, выходящий из начала координат, является касательной к одной из замкнутых кривых, представляемых уравнением (11.74).

Полагая в уравнениях (11.78) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ и заменяя r на ρ согласно (11.77) получим

$$\begin{gathered} \frac{d\rho}{dt} = \mu P_1^*(\rho, \theta) + \mu^2 P_2^*(\rho, \theta) + \ldots \\ \frac{d\theta}{dt} = \lambda + Q_0(\rho, \theta) + \mu Q_1(\rho, \theta) + \mu^2 Q_2(\rho, \theta) + \ldots \end{gathered} \tag{11.79}$$

где $Q_0(\rho, \theta)$ — определенно-положительная функция ρ для любых значений, принадлежащих области исследования периодических решений и для любых вещественных значений θ.

Исключая из (11.79) dt, мы получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \mu P_1(\rho, \theta) + \mu^2 P_2(\rho, \theta) + \ldots$$

В этом уравнении функции P_1, P_2, ... можно представить бесконечными рядами, расположенными по целым положительным степеням ρ с периодическими коэффициентами, период которых равен 2π.

Функцию Ляпунова для этого уравнения нужно определять из уравнения

$$\rho = V + \mu\sum_{k=1}^{\infty} V^k u_k(\theta)$$

Дальнейшие исследования аналогичны вышеизложенному.

Очевидно, что этот метод построения периодических решений системы 2-го порядка обобщается на системы $(n+2)$-го порядка, если определяющее уравнение присоединенной системы не имеет корней вида $\pm m\lambda\sqrt{-1}$ для всех целых положительных чисел m, включая и нуль.

Этот метод легко распространяется на системы уравнений вида

$$\frac{dx}{dt}=-y+X_0(x,y)+\mu X_1(x,y)+\ldots \qquad \frac{dy}{dt}=Y_0(x,y)+\mu Y_1(x,y)+\ldots \tag{11.80}$$

если только эта система при $\mu=0$ допускает существование знакоопределенного голоморфного интеграла, обладающего свойствами интеграла (11.74), или когда $X_0=-\partial H/\partial y$, $Y_0=\partial H/\partial x$ при условии, что $^1/_2\, y^2+ +H(x,y)$ является определенно-положительной функцией.

В отличие от задачи, представленной системой уравнеиий (11.73), система уравнений (11.80) такова, что при наличии периодических решений в случае $\mu=0$ она может не иметь голоморфного интеграла, не зависящего от t. Нетрудно убедиться, что если иам известио периодическое решение системы (11.80) при $\mu=0$, то периодические решения, соответствующие этой системе при $\mu\neq 0$, отыскиваются таким же путем, как и для системы (11.73).

§ 60. Становление периодических колебаний. Исследуем теперь процесс становления периодических колебаний. Определим с точностью до μ^k непериодическое решение системы уравнений (11.4), которое переходит в периодическое.

С этой целью отбросим в первом уравнении системы (11.5) члены выше k-го порядка в отношении μ. В результате соответствующих преобразований получим систему уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{dV}{d\theta}=\mu L_1(V)+\mu^2L_2(V)+\ldots+\mu^kL_k(V)\\ &\frac{d\theta}{dt}=\lambda+\mu F_1^*(V,\theta)+\mu^2F_2^*(V,\theta)+\ldots\end{aligned}\tag{11.81}$$

Исследуем становление периодического колебания, определяющегося корнем V_j. Предположим, что соответствующее периодическое решение устойчиво.

Предположим далее, что при $t=t_0$ $V=V_{0j}$, где $V_{j-1}<V_{0j}<V_{j+1}$. При этих начальных значениях первое уравнение (11.81) определит спираль, асимптотически приближающуюся к периодическому решению, соответствующему корню V_j. Подставив данное значение $V(\theta)$ во второе уравнение системы (11.81), мы получим выражение $\theta=\theta(t)$. Подставляя найденное значение V в уравнение для r, а затем значения r и θ в уравнения $x= =r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, мы получим непериодическое решение, стремящееся к периодическому, которое соответствует корню $V=V_j$.

Если же предельный цикл неустойчив, но имеется условная устойчивость для возмущений $V<V_j$ или $V>V_j$, то в первом случае при интегрировании первого уравнения системы (11.81) мы должны взять значения $V_j>V_{0j}>V_{j-1}$, а во втором случае $V_{j+1}>V_{0j}>V_j$.

§ 61. Пример. Для пояснения вышеизложенного рассмотрим следующую систему

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=-y+\mu x(x^2+y^2-a_1)^{m_1}(x^2+y^2-a_2)^{m_2}\ldots(x^2+y^2-\\ &\qquad -a_n)^{m_n}A+\mu^2x(x^2+y^2-b)^nB\\ &\frac{dy}{dt}=x+\mu y(x^2+y^2-a_1)^{m_1}(x^2+y^2-a_2)^{m_2}\ldots(x^2+y^2-\\ &\qquad -a_n)^{m_n}A+\mu^2y(x^2+y^2-b)^nB\end{aligned}\tag{11.82}$$

В полярных координатах $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = \mu r (r^2 - a_1)^{m_1} (r^2 - a_2)^{m_2} \dots (r^2 - a_n)^{m_n} A + \mu^2 r (r^2 - b)^n B \qquad (11.83)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1$$

Очевидно, что радиусы предельных циклов в системе (11.82) определятся из уравнения

$$r (r^2 - a_1)^{m_1} (r^2 - a_2)^{m_2} \dots (r^2 - a_n)^{m_n} A + \mu r (r^2 - b)^n B = 0 \qquad (11.84)$$

Пусть $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1$, тогда в случае $B = 0$ предельными циклами системы (11.82) будут являться окружности $r = 0$, $r^2 = a_1$, $r^2 = a_2$, ..., $r^2 = a_n$. Эти предельные циклы будут существовать независимо от значений чисел m_1, ..., m_n для любых значений μ, как для достаточно малых значений μ, так и для сколь угодно больших.

При m_1 нечетном предельный цикл $r^2 = a_1$ будет устойчив, если $A < 0$ и неустойчив при $A > 0$. В случае четного m_1 этот цикл будет неустойчив независимо от знака числа A. Если $A < 0$, то он будет условно устойчив, т. е. для возмущений, соответствующих $r^2 > a_1$, он устойчив, а для $r^2 < a_1$ неустойчив. В случае $A > 0$ он будет устойчив для возмущений, соответствующих $r^2 < a_1$. Предельный цикл $r^2 = a_2$ при m_1 и m_2 нечетных и $A < 0$ будет неустойчив, а при $A > 0$ устойчив. Устойчивость следующих предельных циклов определяется аналогичным образом.

Рассмотрим случай $B \neq 0$. Если $A/B < 0$, то каждому числу m_k будет соответствовать предельный цикл, радиус которого стремится к $\sqrt{a_k}$ при $\mu \to 0$. Если m_k четное, то система (11.82) будет иметь два предельных цикла, соответствующих m_k, радиусы которых будут стремиться к $\sqrt{a_k}$ при $\mu \to 0$. Если $A/B > 0$, то предельные циклы, соответствующие нечетным m_k, сохранятся, а циклов, соответствующих четным m_k, система (11.82) иметь не будет.

Пусть $m_1 = 1$, $m_2 = m_3 = \dots = m_n = 0$, $n = 2$, $A/B = -1$. Тогда из (11.84) получим

$$-(r^2 - a_1) + \mu (r^2 - b)^2 = 0 \qquad (11.85)$$

Уравнение (11.85) имеет корни

$$r^2 = \frac{2\mu b + 1}{2\mu}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2\mu (a_1 + \mu b^2)}{(2\mu b + 1)^2} - \dots\right)\right] \qquad (11.86)$$

При $\mu \to 0$ один из корней стремится к a_1, а другой неограниченно возрастает как $1/\mu$.

Пусть теперь $m_1 = n = 1$, $m_2 = m_3 = \dots = m_n = 0$, $A/B = -1$, $a_1 < 0$, $b = 0$, тогда

$$r^2 = \frac{-a_1}{-1 + \mu} \qquad (11.87)$$

Очевидно, что при $\mu < 1$, в том числе и при $\mu = 0$, предельный цикл не существует. Он появляется только для $\mu > 1$.

ГЛАВА XII

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 62. Предварительные замечания. В данной главе мы продолжим исследование колебательных процессов. Рассмотрим теперь колебания, описываемые неавтономной системой, т. е. системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\lambda_s y_s + \mu X_s(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n, t, \mu) + f_s(t, \mu) \\ \frac{dy_s}{dt} &= \lambda_s x_s + \mu Y_s(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n, t, \mu) + \varphi_s(t, \mu) \\ & \qquad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{12.1}$$

где μ — малый параметр, а $X_s(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; t, \mu)$, $f_s(t, \mu)$, $Y_s(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; t, \mu)$, $\varphi_s(t, \mu)$ представляются рядами в отношении параметра μ. Коэффициентами рядов, представляющих функции X_s и Y_s, при различных степенях μ являются многочлены от x и y сколь угодно высокой степени, при этом коэффициенты многочленов являются непрерывными периодическими функциями t. Коэффициенты рядов, представляющих функции f_s и φ_s, при различных степенях μ являются также непрерывными периодическими функциями t.

Система (12.1) может определять при различных условиях как периодические, так и непериодические колебания. Поэтому в общем случае мы будем исследовать ограниченные колебания, понимая под таковыми колебания, у которых координаты x_s и y_s при $t \to \infty$ не стремятся ни к нулю, ни к бесконечности и ни к какому определенному числу. Такие колебаиия в дальнейшем называются стационарными[1].

§ 63. Стационарные решения по первому приближению. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= -\lambda_s y_s + \mu X_{s1}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; t) + \mu^2 X_{s2}(x_1, \dots \\ &\dots, x_n; y_1, \dots, y_n, t) + \dots + f_{s0}(t) + \mu f_{s1}(t) + \mu^2 f_{s2}(t) + \dots \\ \frac{dy_s}{dt} &= \lambda_s x_s + \mu Y_{s1}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n; t) + \mu^2 Y_{s2}(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots \\ &\dots y_n; t) + \dots + \varphi_{s0}(t) + \mu\varphi_{s1}(t) + \mu^2 \varphi_{s2}(t) + \dots \qquad (s = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{12.2}$$

где $X_{s1}, X_{s2}, \dots, Y_{s1}, Y_{s2}, \dots$ — многочлены сколь угодно высоких степеней с непрерывными периодическими относительно t коэффициентами общего

[1] Содержание данной главы представляет собой доклад автора на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Москва, январь-февраль 1964 г.).

периода, который будем считать равным 2π; $f_{s0}, f_{s1}, \ldots, \varphi_{s0}, \varphi_{s1}, \ldots$ — непрерывные периодические функции с тем же периодом 2π. Число μ является малым параметром.

Будем предполагать, что правые части системы (12.2) представляются сходящимися рядами для достаточно малых μ и для любых значений x_s и y_s, принадлежащих области исследования.

Положительные числа λ_s удовлетворяют соотношению

$$\sum_{s=1}^{n} \lambda_s m_s \neq E \tag{12.3}$$

где m_s и E — целые положительные и отрицательные числа, включая и 0; m_s удовлетворяют условию $\Sigma \mid m_s \mid \leqslant M$. Число M определяется показателями наивысших форм, входящих в многочлены $X_{s1}, \ldots, X_{sk}, Y_{s1}, \ldots \ldots, Y_{sk}$.

Полагая $z_s = x_s + iy_s$, $\bar{z}_s = x_s - iy_s$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dz_s}{dt} &= i\lambda_s z_s + \mu Z_{s1}(z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, t) + \ldots + F_{s0}(t) + \mu F_{s1}(t) + \ldots \\ \frac{d\bar{z}_s}{dt} &= -i\lambda_s \bar{z}_s + \mu \bar{Z}_{s1}(z_1, \ldots z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n, t) + \ldots + \bar{F}_{s0}(t) + \mu \bar{F}_{s1}(t) + \ldots \end{aligned} \tag{12.4}$$

Любое из этих уравнений эквивалентно соответствующим двум уравнениям системы (12.2).

Решим вначале основной вопрос нашей задачи, т. е. определим необходимые и достаточные условия существования стационарных колебаний по членам первого порядка в отношении μ.

Положим

$$z_s = \zeta_s^* + u_{s0}(t) + \mu u_{s1}(t), \qquad \bar{z}_s = \bar{\zeta}_s^* + \bar{u}_{s0}(t) + \mu \bar{u}_{s1}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{12.5}$$

Функции $u_{s0}(t)$, $u_{s1}(t)$, $\bar{u}_{s0}(t)$, $\bar{u}_{s1}(t)$ определим так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль функций $F_{s0}(t)$, $F_{s1}(t)$, $\bar{F}_{s0}(t)$, $\bar{F}_{s1}(t)$, обратились в нуль. Для этого достаточно, чтобы функции u_{s0}, u_{s1} удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{du_{s0}}{dt} &= i\lambda_s u_{s0} + F_{s0}(t) \\ \frac{du_{s1}}{dt} &= i\lambda_s u_{s1} + Z_{s1}(u_{10}, \ldots, u_{n0}; \bar{u}_{10}, \ldots, \bar{u}_{n0}, t) + F_{s1}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{12.6}$$

Периодические решения этих уравнений определяются из равенств

$$\begin{aligned} u_{s0} &= \frac{e^{i\lambda_s t}}{e^{-2\pi\lambda_s i} - 1} \int_t^{t+2\pi} F_{s0}(\tau) e^{-i\lambda_s \tau} d\tau \\ u_{s1} &= \frac{e^{i\lambda_s t}}{e^{-2\pi\lambda_s i} - 1} \int_t^{t+2\pi} [Z_{s1}(u_{10}, \ldots, u_{n0}, \bar{u}_{10}, \ldots, \bar{u}_{n0}, \tau) + F_{s1}(\tau)] e^{-i\lambda_s \tau} d\tau \end{aligned} \tag{12.7}$$

Преобразованная система будет иметь вид

$$\frac{d\zeta_s^*}{dt}=i\lambda_s\zeta_s^*+\mu Q_{s1}^*(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)+\ldots+\mu^2\Phi_{s2}^*(t)+\ldots$$

$$\frac{d\bar\zeta_s^*}{dt}=-i\lambda_s\bar\zeta_s^*+\mu\bar Q_{s1}^*(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)+\ldots+\mu^2\bar\Phi_{s2}^*(t)+\ldots \quad (12.8)$$

где Q_{s1}^* и $\bar Q_{s1}^*$ — многочлены, аналогичные многочленам Z_{s1} и $\bar Z_{s1}$.

Преобразуем эту систему, положив

$$\zeta_s^*=\zeta_s+\mu u_s(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta^*_n,t)$$

$$\bar\zeta_s^*=\bar\zeta_s+\mu\bar u_s(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)$$

функции u_s, $\bar u_s$ подберем так, чтобы в преобразованной системе функции, играющие роль функций Q_{s1}^* и $\bar Q_{s1}^*$, не зависели от времени.

Пусть

$$Q_{s1}^*=\sum_{k=1}^{m_s}Q_{s1}^{*(k)}(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)$$

$$Q_{s1}^{*(k)}=\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}Q_{s,\,k-p}^{*\,(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{*p-\alpha}\bar\zeta_s^{*\alpha}$$

формы $Q_{s,\,k-p}^{*\,(p-\alpha,\alpha)}$ имеют $(k-p)$-й порядок и зависят от всех ζ_k^*, $\bar\zeta_k^*$, за исключением ζ_s^* и $\bar\zeta_s^*$.

Функции u_s определим в виде выражений

$$u_s=\sum_{k=1}^{m_s}u_s^{(k)}(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*;\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)$$

$$u_s^{(k)}(\zeta_1^*,\ldots,\zeta_n^*,\bar\zeta_1^*,\ldots,\bar\zeta_n^*,t)=\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{*p-\alpha}\bar\zeta_s^{*\alpha}$$

Формы $u_{s,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}$ не содержат ζ_s^* и $\bar\zeta_s^*$. Переменные ζ_s и $\bar\zeta_s$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\zeta_s}{dt}=i\lambda_s\zeta_s+\mu Q_{s1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n;\bar\zeta_1,\ldots,\bar\zeta_n,t)+\ldots+\mu^2\Phi_{s2}(t)+\ldots$$

$$\frac{d\bar\zeta_s}{dt}=-i\lambda_s\bar\zeta_s+\mu\bar Q_{s1}(\zeta_1,\ldots,\zeta_n;\bar\zeta_1,\ldots,\bar\zeta_n,t)+\ldots+\mu^2\bar\Phi_{s2}(t)+\ldots \quad (12.9)$$

где Q_{s1} определяются формулами

$$-\left[\frac{\partial u_s}{\partial t}+\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial u_s}{\partial\zeta_\beta}i\lambda_\beta\zeta_\beta-\frac{\partial u_s}{\partial\bar\zeta_\beta}i\lambda_\beta\bar\zeta_\beta\right)\right]+i\lambda_s u_s+Q_{s1}^*=Q_{s1} \quad (12.10)$$

Очевидно, что $Q_{s1}=\sum_{k=1}^{m_s}Q_{s1}^{(k)}(\zeta_1,\ \ldots,\ \zeta_n;\ \bar\zeta_1,\ \ldots,\ \bar\zeta_n,\ t)$. Потребуем, чтобы в эти выражения не входило t.

Определим, чему равняются $Q_{s,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}$. Для произвольного k получим

$$
\begin{gathered}
-\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial t}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}-\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}\left(\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial\zeta_\beta}i\lambda_\beta\zeta_\beta-\right.\\
\left.-\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial\bar{\zeta}_\beta}i\lambda_\beta\bar{\zeta}_\beta\right)\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}-\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}(p-\alpha)i\lambda_s u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}+\\
+\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}\alpha i\lambda_s u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}+\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}Q_{s,\,k-p}^{*(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}+\\
+i\lambda_s\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}=\sum_{p=0}^{k}\sum_{\alpha=0}^{p}Q_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}\zeta_s^{p-\alpha}\bar{\zeta}_s^{\alpha}
\end{gathered}
\tag{12.11}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta_s^{p-\alpha}\,\bar{\zeta}_s^{\alpha}$, будем иметь

$$
\begin{gathered}
-\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial t}-\sum_{\beta=1}^{n}{}'\left(\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial\zeta_\beta}i\lambda_\beta\zeta_\beta-\frac{\partial u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}}{\partial\bar{\zeta}_\beta}i\lambda_\beta\bar{\zeta}_\beta\right)-\\
-i\lambda_s(p-2\alpha-1)u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}+Q_{s,\,k-p}^{*(p-\alpha,\,\alpha)}=Q_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}
\end{gathered}
$$

Представим формы $u_{s,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}$, $Q_{s,k-p}^{*(p-\alpha,\alpha)}$, $Q_{s,k-p}^{(p-\alpha,\alpha)}$, порядок которых равен $k-p=\delta$ в виде

$$
\begin{aligned}
u_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}&=\sum{}' u_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}(t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}\\
Q_{s,\,k-p}^{*(p-\alpha,\alpha)}&=\sum{}' A_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}(t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}\\
Q_{s,\,k-p}^{(p-\alpha,\,\alpha)}&=\sum{}' B_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}(t)\,\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}\\
&(k_1+\ldots+k_n+q_1+\ldots+q_n=\delta,\ \delta=0,1,\ldots,m)
\end{aligned}
$$

где m — наивысшая из форм, входящих в многочлены Z_s.

Знак $'$ указывает на то, что в данную форму не входят ζ_s и $\bar{\zeta}_s$. Подставляя эти значения в (12.11), будем иметь

$$
\begin{gathered}
-\sum{}'\frac{du_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}}{dt}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}-\\
-\sum{}' i\left[(k_1-q_1)\lambda_1+\ldots+(k_n-q_n)\lambda_n\right]u_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\\
\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}-i\lambda_s(p-2\alpha-1)\sum{}' u_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}+\\
+\sum{}' A_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}=\\
=\sum{}' B_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}\zeta_1^{k_1}\ldots\zeta_n^{k_n}\bar{\zeta}_1^{q_1}\ldots\bar{\zeta}_n^{q_n}
\end{gathered}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\zeta_1^{k_1}, \ldots, \zeta_n^{k_n}$, $\bar{\zeta}_1^{q_1}, \ldots, \bar{\zeta}_n^{q_n}$, получим

$$
\begin{gathered}
-\frac{du_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}}{dt}-\left[\sum_{\gamma=1}^{n}{}' i(k_\gamma-q_\gamma)\lambda_\gamma+\right.\\
\left.+i\lambda_s(p-2\alpha-1)\right]u_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}+A_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}=\\
=B_s^{(k_1,\ldots,k_n;\,q_1,\ldots,q_n)}
\end{gathered}
$$

Из последнего равенства следует, что соответствующим выбором функций $u_s^{(k_1,\dots,k_n;\, q_1,\dots,q_n)}(t)$ все числа $B_s^{(k_1,\dots,k_n;\, q_1,\dots,q_n)}$, для которых $k_\gamma \neq q_\gamma$ и $p \neq 2\alpha+1$, можно обратить в нуль, а для $k_\gamma = q_\gamma$ и $p = 2\alpha+1$ эти величины можно выбрать постоянными. Эти постоянные определяются равенствами

$$B_s^{(k_1,\dots,k_n;\, q_1,\dots,q_n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_s^{(k_1,\dots,k_n;\, q_1,\dots,q_n)}(t)\,dt$$

Следовательно, выражения $Q_{s1}(\zeta_1, \dots, \zeta_n; \bar\zeta_1, \dots, \bar\zeta_n, t)$, стоящие в (12.9), будут содержать переменные ζ_γ, $\bar\zeta_\gamma$ только в одинаковых степенях $k_\gamma = q_\gamma$, а выражения ζ_s и $\bar\zeta_s$ в виде комбинации $\zeta_s(\zeta_s\bar\zeta_s)^\alpha$, так как $k = 2\alpha+1$.

В результате будем иметь

$$\frac{d\zeta_s}{dt} = i\lambda_s\zeta_s + \mu\zeta_s\sum B_s^{(k_1,\dots,k_n)}(\zeta_1\bar\zeta_1)^{k_1}(\zeta_2\bar\zeta_2)^{k_2}\dots(\zeta_n\bar\zeta_n)^{k_n} + \mu^2(\dots)+\dots$$

Полагая $B^{(k_1,\dots,k_n)} = a_s^{(k_1,\dots,k_n)} + ib_s^{(k_1,\dots,k_n)}$, $\zeta_s = \xi_s + i\eta_s$, получим

$$\frac{d\xi_s}{dt} = -\lambda_s\eta_s + \mu\,[\xi_s\sum a_s^{(k_1,\dots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\dots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n} -$$
$$- \eta_s\sum b_s^{(k_1,\dots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\dots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n}] + \mu^2(\dots)+\dots$$
$$\frac{d\eta_s}{dt} = \lambda_s\xi_s + \mu\,[\xi_s\sum b_s^{(k_1,\dots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\dots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n} +$$
$$+ \eta_s\sum a_s^{(k_1,\dots,k_n)}(\xi_1^2+\eta_1^2)^{k_1}\dots(\xi_n^2+\eta_n^2)^{k_n}] + \mu^2(\dots)+\dots$$

Вводя $\xi_s = r_s\cos\theta_s$, $\eta_s = r_s\sin\theta_s$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{dr_s}{dt} &= \mu r_s\sum a_s^{(k_1,\dots,k_n)}\, r_1^{2k_1}\dots r_n^{2k_n} + \mu^2(\dots)+\dots \\ r_s\frac{d\theta_s}{dt} &= \lambda_s r_s + \mu r_s\sum b_s^{(k_1,\dots,k_n)}\, r_1^{2k_1}\dots r_n^{2k_n} + \mu^2(\dots)+\dots \end{aligned} \qquad (12.12)$$

В том случае, когда правые части системы (12.12) обращаются в нуль при $x_1 = \dots = x_n = y_1 = \dots = y_n = 0$, а X_{sk} и Y_{sk} представляются формами k-го порядка, приведение уравнений к виду, аналогичному (12.12), дано в работе автора [7].

Определим интегралы этой системы с точностью до первого порядка в отношении μ. Для этого приравняем нулю коэффициенты в правых частях первых n уравнений при μ в первой степени

$$L_s = r_s\sum a_s^{(k_1,\dots,k_n)}\, r_1^{2k_1}\dots r_n^{2k_n} = 0 \qquad (12.13)$$

Предположим, что система алгебраических уравнений (12.13) имеет вещественные положительные решения относительно r^2_{s0}.

Тогда переменные ξ_s и η_s запишутся в виде

$$\xi_s = r_{s0}\cos\theta_s, \qquad \eta_s = r_{s0}\sin\theta_s$$

Подставляя эти значения в выражения

$$\zeta_s^* = \zeta_s + \mu u_s(\zeta_1^*, \dots \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \dots, \bar\zeta_n^*, t)$$

и решая их в отношении ξ_s^* и η_s^*, найдем

$$\begin{aligned} \xi_s^* &= r_{s0}\cos\theta_s + \mu\, P_s(r_{s0}\cos\theta_s, r_{s0}\sin\theta_s, t) \\ \eta_s^* &= r_{s0}\sin\theta_s + \mu G_s(r_{s0}\cos\theta_s, r_{s0}\sin\theta_s, t) \end{aligned} \qquad (12.14)$$

где ξ_s^* и η_s^* — действительные и мнимые части ζ_s^*.

Из уравнений (12.14) и (12.5) будем иметь

$$\begin{aligned} x_s &= p_{s0}(t) + \mu p_{s1}(t) + r_{s0}\cos\theta_s + \mu P_s(r_{s0}\cos\theta_s, r_{s0}\sin\theta_s, t) \\ y_s &= q_{s0}(t) + \mu q_{s1}(t) + r_{s0}\sin\theta_s + \mu G_s(r_{s0}\cos\theta_s, r_{s0}\sin\theta_s, t) \end{aligned} \tag{12.15}$$

где $p_{s0}(t)$ и $p_{s1}(t)$ — вещественные части функций $u_{s0}(t)$ и $u_{s1}(t)$, а $q_{s0}(t)$ и $q_{s1}(t)$ — коэффициенты при мнимых частях.

Выражение θ_s через t с точностью до членов первого порядка малости в отношении μ найдем из уравнения

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \lambda_s + \mu \sum b_s^{(k_1,\ldots,k_n)} r_{10}^{2k_1} \ldots r_{n0}^{2k_n}$$

Решения (12.15) будут стационарными, но не периодическими.

§ 64. Устойчивость стационарных решений. Исследуем теперь устойчивость этих колебаний. Полагая в (12.12) $r_s = r_{s0} + u_s$, будем иметь

$$\frac{du_s}{dt} = \mu(p_{s1}u_1 + \ldots + p_{sn}u_n) + \mu f_s(u_1, \ldots, u_n) + \mu^2(\ldots) + \ldots \tag{12.16}$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

где

$$p_{sk} = \frac{\partial [r_{s0} L_s(r_{10}^2, \ldots, r_{n0}^2)]}{\partial r_{k0}}$$

а $f_s(u_1, \ldots, u_n)$ не содержит линейных членов в отношении $u_1, \ldots, u_n$.

Если окажется, что среди корней уравнения $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то решения (12.15) будут неустойчивы. Если же все корни уравнения имеют отрицательные вещественные части, то они устойчивы, но неасимптотически.

В этом случае уравнения (12.12), если в правых частях отбросить члены со степенями μ выше первой, представят решения, которые при достаточно малом μ будут сколь угодно мало отличаться от решений полной системы (12.12) при изменении t в интервале $\pm\infty$.

Докажем это утверждение.

Пусть $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — корни уравнения $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$. Предположим, что все $\varkappa_s$ вещественны и различны. Тогда систему (12.16) можно представить в виде

$$\frac{dz_s}{dt} = \mu\varkappa_s z_s + \mu Z_{s1}(z_1, \ldots z_n) + \mu^2 Z_{s2}(z_1, \ldots, z_n, \theta, t, \mu)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

где $z_1, \ldots, z_n$ — линейные формы от $u_1, \ldots, u_n$.

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V^2 = \sum_{s=1}^{n} z_s^2$$

Тогда

$$VV' = \mu \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s z_s^2 + \mu \sum_{s=1}^{n} z_s Z_{s1} + \mu^2 \sum_{s=1}^{n} z_s Z_{s2}$$

Полагая $z_s = \rho\cos\varphi_s$, будем иметь

$$VV' = \mu\rho^2 \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s \cos^2\varphi_s + \mu\rho^3 H_1(\cos\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_n, \rho) +$$

$$+ \mu^2 \rho H_2(\rho, \theta, t, \cos\varphi_1, \ldots, \cos\varphi_n, \mu)$$

Очевидно, что на сфере $V = \rho = \mu^{1-\varepsilon}$, где ε сколь угодно малое положительное число, произведение VV' меньше нуля.

Отсюда следует, что все $|u_s| < \mu^{1-\varepsilon}$ для любых t в интервале $\pm\infty$, если только $u(t_0)$ удовлетворяли этому условию.

Аналогичные рассуждения можно провести для случая кратных и комплексных корней.

Может оказаться, что уравнения $r_s L_s(r_1^{2k_1}, \ldots, r_n^{2k_n}) = 0$ имеют только единственное решение $r_{s0} = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$. Тогда многочлены $L_s(r_1^{2k_1}, \ldots, r_n^{2k_n})$ сохраняют определеный знак для любых значений $r_1, \ldots$ $\ldots, r_n$. Это обстоятельство будет указывать на то, что система (12.12) не имеет ограниченных колебаиий типа (12.15).

§ 65. Стациоиарные решения по членам высших порядков. Если уравнение $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ имеет корни с нулевыми вещественными частями, то, как было уже указано, вопрос о существовании стационарных колебаний членами первого порядка в отношении μ не решается. В этом случае систему (12.4) необходимо преобразовать по формулам

$$\begin{aligned} z_s &= \zeta_s^* + u_{s0} + \mu u_{s1} + \mu^2 u_{s2} + \ldots + \mu^\alpha u_{s\alpha} \\ \bar{z}_s &= \bar{\zeta}_s^* + \bar{u}_{s0} + \mu\bar{u}_{s1} + \mu^2\bar{u}_{s2} + \ldots + \mu^\alpha \bar{u}_{s\alpha} \end{aligned} \tag{12.17}$$

разумея под u_{sk} и $\bar{u}_{sk}$ непрерывные периодические функции, определяющиеся формулами, аналогичными (12.7). В уравнениях (12.8) в результате замены исчезнут все функции $\Phi_{sk}^*(t)$ и $\bar{\Phi}_{sk}^*(t)$ до $k \leqslant \alpha$.

Производя замену

$$\begin{aligned} \zeta_s^* = \zeta_s &+ \mu u_{s1}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*; \bar{\zeta}_1^*, \ldots, \bar{\zeta}_n^*, t) + \ldots + \\ &+ \mu^\alpha u_{s\alpha}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*; \bar{\zeta}_1^*, \ldots, \bar{\zeta}_n^*, t) \end{aligned} \tag{12.18}$$

и определяя функции u_{sk} при $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, как это было указано в § 63, мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr_s}{dt} &= \mu r_s [L_{s1}(r_1^2, \ldots, r_n^2) + \mu L_{s2}(r_1^2, \ldots, r_n^2) + \ldots + \\ &\quad + \mu^{\alpha-1} L_{s\alpha}(r_1^2, \ldots, r_n^2)] + \mu^{\alpha+1}(\ldots) + \ldots \\ \frac{d\theta_s}{dt} &= \lambda_s + \mu [Q_{s1}(r_1^2, \ldots, r_n^2) + \mu Q_{s2}(r_1^2, \ldots, r_n^2) + \ldots + \\ &\quad + \mu^{\alpha-1} Q_{s\alpha}(r_1^2, \ldots, r_n^2) + \mu^{\alpha+1}(\ldots) + \ldots \end{aligned} \tag{12.19}$$

Стационарные колебания определяются решениями алгебраических уравнений

$$L_s = r_s(\mu L_{s1} + \mu^2 L_{s2} + \ldots + \mu^\alpha L_{s\alpha}) = 0$$

Дальнейшее исследование этих решений ведется согласно § 64.

Решения r_{s0} $(s=1, \ldots, n)$, найденные из уравнений $L_s = 0$, будут отличаться от решений системы (12.19) на величину порядка малости $\mu^{1-\varepsilon}$ для любых значений t в интервале $\pm\infty$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству, изложенному в § 64.

§ 66. О стационарных решениях, не обращающихся в порождающие при $\mu=0$. Рассмотрим теперь систему (12.2), предполагая, что $\varphi_{sk}(t) = f_{sk}(t) \equiv 0$ для $k = 1, 2, \ldots$, а $f_{s0}(t)$ и $\varphi_{s0}(t)$ не равны тождественно нулю.

Если λ_s не равны целым числам, то система (12.2) имеет только одно периодическое решение с периодом 2π, обращающееся в порождающее при $\mu = 0$. Это решение имеет вид

$$x_s^*(t) = x_0(t) + \mu x_1(t) + \ldots, \qquad y_s^*(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \ldots \tag{12.20}$$

Возникает вопрос, при каких условиях система (12.2) имеет другие стационарные ограниченные решения, а также решения, сколь угодно близкие к периодическим, почти период которых сколь угодно мало отличается от 2π, и не обращающиеся в порождающие при $\mu = 0$.

Для решения этого вопроса составим уравнения возмущенного движения, приняв за невозмущенное движение периодическое решение (12.20).

Полагая $x_s = x_s^*(t) + \xi_s^*$, $y_s = y_s^*(t) + \eta_s^*$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_s^*}{dt} &= -\lambda_s \eta_s^* + \mu X_{s1}^*(\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*;\ \eta_1^*, \ldots, \eta_n^*, t) + \mu^2 X_{s2}^*(\ldots) + \ldots \\ \frac{d\eta_s^*}{dt} &= \lambda_s \xi_s^* + \mu Y_{s1}^*(\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*;\ \eta_1^*, \ldots, \eta_n^*, t) + \mu^2 Y_{s2}^*(\ldots) + \ldots \end{aligned} \qquad (12.21)$$

Если в правых частях этих уравнений сохранить только члены первого порядка в отношении ξ_s^* и η_s^*, то они представят уравнения в вариациях Пуанкаре, которые позволяют исследовать общее решение в окрестности, сколь угодно близкой к решению $x_s^*(t)$ и $y_s^*(t)$.

Если же начальные вариации ξ_{s0}^* и η_{s0}^* считать произвольными, в том числе и сколь угодно большими, то пренебрегать членами выше первого порядка мы уже не имеем оснований.

Если окажется, что решение $x_s^*(t)$ и $y_s^*(t)$ неустойчиво согласно уравнениям в вариациях, то возникает вопрос, будут ли некоторые или все величины ξ_s^*, η_s^* стремиться к бесконечности при $t \to \infty$ или все ξ_s^*, η_s^* будут определять при $t \to \infty$ некоторые новые ограниченные (стационарные) колебания. Аналогичный вопрос возникает и в том случае, когда решения $x_s^*(t)$, $y_s^*(t)$ будут устойчивы для возмущений ξ_{s0}^* и η_{s0}^* достаточно малых.

Для выяснения этих вопросов преобразуем систему (12.21) к виду (12.12).

Такое преобразование возможно, если функции X_{s1}^* и Y_{s1}^* удовлетворяют некоторым известным условиям (§ 63). Правые части преобразованной системы будут обращаться в нуль при $r_1 = \ldots = r_n = 0$. В том случае, когда интересующие нас вопросы решаются членами первого приближения в отношении μ, нам необходимо исследовать алгебраические уравнения

$$r_s L_{s1}^{(*)}(r_1^2, \ldots, r_n^2) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \qquad (12.22)$$

Если окажется, что эта система уравнений не имеет вещественных корней, кроме $r_1 = \ldots = r_n = 0$, то, очевидно, система (12.2) не имеет стационарных колебаний, кроме тех, которые описываются периодическим решением (12.20). Если же система имеет вещественные корни $r_{10}, \ldots, r_{n0}$ и если при этом корни определяющего уравнения, соответствующего системе (12.6), имеют отрицательные вещественные части, то указанные стационарные решения существуют и они будут устойчивы.

Очевидно, к этим колебаниям будут стремиться возмущенные периодические колебания $x_s^*(t)$ и $y_s^*(t)$, если последним соответствуют специально подобранные, достаточно большие, начальные возмущения ξ_{s0}^* и η_{s0}^*. Процесс перехода от периодического решения к стационарному с точностью до членов первого порядка в отношении μ определяется из уравнений

$$\frac{dr_s}{dt} = \mu r_s L_{s1}(r_1^2, \ldots, r_n^2) \qquad \frac{d\theta_s}{dt} = \lambda_s + \mu Q_{s1}(r_1^2, \ldots, r_n^2)$$

Если окажется, что система уравнений (12.22) допускает не одно, а несколько положительных решений $r_{10}^{(k)}, \ldots, r_{n0}^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, n)$, то каждому k-му решению будут соответствовать свои стационарные колебания.

В тех случаях, когда вопрос об устойчивости стационарных колебаний членами первого порядка не решается, необходимо исследовать систему (12.19), ограничив правые части членами μ^α.

§ 67. Стационарные решения в резонансных случаях. Все вышеизложенное остается справедливым при условии, что числа λ_s не удовлетворяют соотношению (12.3).

Исследуем теперь случай, когда такие соотношения имеют место. Предположим, что для совокупности чисел $k_1, \ldots, k_n, q_1, \ldots, q_n$ имеют место условия (§ 63)

$$\sum_{\gamma=1}^{n}{}' (k_\gamma - q_\gamma)\lambda_\gamma + (p - 2\alpha - 1)\lambda_s = n_\nu \tag{12.23}$$

где n_ν — целые числа.

Отметим, что каждому целому числу n_ν будет соответствовать число $-n_\nu$. В том случае, когда среди чисел $\lambda_s (s=1, \ldots, n)$ встречаются целые, условия (12.23) всегда имеют место.

Будем предполагать, что, несмотря на наличие целых значений λ_s, система (12.2) при $f_{sk}(t) = \varphi_{sk}(t) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет единственное периодическое решение с периодом 2π, стремящееся к порождающему при $\mu \to 0$. В этом случае ее можно преобразовать к виду (12.21). Дальнейшее преобразование этой системы к виду (12.19) сопряжено с некоторыми затруднениями, вызываемыми наличием условий (12.23).

Мы увидим, что система (12.21) при условиях (12.23) не всегда преобразуется к указанной форме. Полагая $\zeta_s^* = \xi_s^* + i\eta_s^*$, $\bar\zeta_s^* = \xi_s^* - i\eta_s^*$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_s^*}{dt} &= i\lambda_s\zeta_s^* + \mu Q_{s1}^*(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \ldots, \bar\zeta_n^*, t) + \mu^2 Q_{s2} + \ldots \\ \frac{d\bar\zeta_s^*}{dt} &= -i\lambda_s\bar\zeta_s^* + \mu\bar Q_{s1}^*(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \ldots, \bar\zeta_n^*, t) + \mu^2 \bar Q_{s2} + \ldots \end{aligned} \tag{12.24}$$

Правые части этой системы обращаются в нуль при $\zeta_s^* = \bar\zeta_s^* = 0$.

Заменяя ζ_s^* и $\bar\zeta_s^*$ по формулам

$$\begin{aligned} \zeta_s^* &= \zeta_s + \mu u_{s1}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \ldots, \bar\zeta_n^*, t) + \ldots + \\ &\quad + \mu^\alpha u_{s\alpha}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^* \ldots, \bar\zeta_n^*, t) \\ \bar\zeta_s^* &= \bar\zeta_s + \mu\bar u_{s1}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \ldots, \bar\zeta_n^*, t) + \ldots + \\ &\quad + \mu^\alpha \bar u_{s\alpha}(\zeta_1^*, \ldots, \zeta_n^*, \bar\zeta_1^*, \ldots, \bar\zeta_n^*, t) \end{aligned}$$

и руководствуясь соображениями, изложенными в § 63, мы для определения функций u_{sk}, $\bar u_{sk}$ получим систему уравнений вида (12.10).

Нам необходимо рассмотреть только те уравнения, у которых выражения, стоящие в квадратных скобках, равны целому числу n_ν.

Запишем эти уравнения в виде

$$-\frac{du_{s1}^{(*)}}{dt} + in_{\nu_1}u_{s1}^{(*)} + A_{s1}^*(t) = B_{s1}^*(t) \tag{12.25}$$

Здесь знак * заменяет индекс $(k_1, \ldots, k_n; q_1, \ldots, q_n)$. В уравнениях (12.25) функции $A_{s1}^{(*)}$ являются коэффициентами многочленов Q_{n1}^*. Пусть порядок наивысшей из форм, встречающейся в этих многочленах, равен M_1, тогда мы должны рассматривать только те целые значения n_{ν_1}, которые определяются совокупностью значений $(k_1, \ldots, k_n; q_1, \ldots, q_n)$, удовлетворяющих неравенству

$$1 \leqslant \left(\sum_{s=1}^{n} k_s + \sum_{s=1}^{n} q_s\right) \leqslant M_1$$

Представим функции $A_{s1}^*(t)$ рядами Фурье

$$A_{s1}^{(*)}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_{s1,k}^{(*)}e^{ikt}$$

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на постоянные $A_{s1,k}^{(*)}$. Предположим теперь, что коэффициенты, отвечающие индексам $k=n_{\nu_1}$, равны нулю.

Тогда система (12.25) будет иметь непрерывные периодические решения с периодом 2π при значении $B_{s1}^*=0$

$$u_{s1}^{(*)}=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{A_{s1,k}^{(*)}}{k-n_{\nu_1}}e^{ikt}+H_{s1}^{(n_{\nu_1})}e^{in_{\nu_1}t} \tag{12.26}$$

Здесь $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$ — произвольные постоянные. Знак $'$ указывает на то, что члены с индексами $k=n_{\nu_1}$ отсутствуют.

Функции $u_{s2}^{(*)}$ определяются из уравнений

$$-\frac{du_{s2}^{(*)}}{dt}+in_{\nu_2}u_{s2}^{(*)}+A_{s2}^{(*)}(t)+L_{s2}^{(*)}(u_{s1}^*,t)=B_{s2}^{(*)} \tag{12.27}$$

где $A_{s2}^{(*)}(t)$ — коэффициенты многочленов Q_{s2}^*, а $L_{s2}^{(*)}(u_{s1}^*,t)$ — известные коэффициенты, появляющиеся в выражениях при μ^2. Эти коэффициенты зависят от произвольных постоянных $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$.

Представим выражения $A_{s2}^{(*)}+L_{s2}^{(*)}$ рядами Фурье

$$A_{s2}^{(*)}(t)+L_{s2}^{(*)}(u_{s1}^{(*)},t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{s2,k}^{(*)}e^{ikt} \tag{12.28}$$

Коэффициенты $C_{s2,k}^{(*)}$ зависят от произвольных постоянных $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$. Определим эти произвольные постоянные из уравнений

$$C_{s2,n_{\nu_2}}^{(*)}=0 \tag{12.29}$$

Будем полагать, что уравнения (12.29) позволяют определить все $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$.

Отметим, что в некоторых случаях определение постоянных $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$ не представляется возможным. Такие случаи имеют место, когда некоторые из уравнений (12.29) обращаются в тождества.

Определив постоянные $H_{s1}^{(n_{\nu_1})}$ из уравнений (12.29), мы можем найти функции $u_{s2}^{(*)}$, соответствующие всем числам n_{ν_2} при значениях $B_{s2}^{(*)}=0$, в виде

$$u_{s2}^{(*)}=-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C_{s2,k}^{(*)}}{k-n_{\nu_2}}e^{ikt}+H_{s2}^{(n_{\nu_2})}e^{in_{\nu_2}t}$$

Необходимо отметить, что в общем случае показатель M_2, определяющийся наивысшей из форм, входящих в выражения при μ^2, которое равно $Q_{s2}^{(*)}+L_{s2}^*$, будет более M_1. Поэтому мы должны учесть все целые числа, представляемые равенствами (12.23) при условии

$$1\leqslant\left(\sum_{s=1}^{n}k_s+\sum_{s=1}^{n}q_s\right)\leqslant M_2$$

Вследствие этого мы на коэффициенты форм Q_{s2}^* будем накладывать условия, аналогичные (12.25) для всех чисел n_{ν_2}. Тогда уравнения (12.27) определят все $u_{s2}^{(*)}$ при значениях $B_{s2}^{(*)}=0$ в виде непрерывных и периодических функций с периодом 2π. Аналогичным образом мы определим все функции $u_{sk}^{(*)}$. Преобразованная система после разделения на действительные и мнимые части и замены $\xi_s=r_s\cos\theta_s$, $\eta_s=r_s\sin\theta_s$ примет вид (12.19). Отметим, что в рассматриваемом случае правые части преобразованной системы будут обращаться в нуль при $r_1=\ldots=r_n=0$.

Определим стационарные колебания этой системы с точностью до членов μ^α. Для этого достаточно рассмотреть систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dr_s}{dt} &= r_s \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k L_{sk}(r_1^2, \ldots, r_n^2) \\ \frac{d\theta_s}{dt} &= \lambda_s + \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^k Q_{sk}(r_1^2, \ldots, r_n^2) \end{aligned} \tag{12.30}$$

Стационарные колебания определятся из решения алгебраических уравнений

$$r_s \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^{k-1} L_{sk}(r_1^2, \ldots, r_n^2) = 0 \tag{12.31}$$

§ 68. Стационарные колебания автономных систем. Метод, развитый в данной главе, можно применить и для исследования стационарных колебаний автономных систем со многими степенями свободы. Будем предполагать, что правые части системы (12.2) не зависят явно от времени.

Полагая $z_s = x_s + iy_s$, $\bar{z}_s = x_s - iy_s$, получим систему, аналогичную (12.8), с независящими от t правыми частями

$$\begin{aligned} \frac{dz_s}{dt} &= i\lambda_s z_s + \mu Z_{s1}(z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) + \ldots \\ \frac{d\bar{z}_s}{dt} &= -i\lambda_s \bar{z}_s + \mu \bar{Z}_{s1}(z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) + \ldots \end{aligned} \tag{12.32}$$

Полагая

$$z_s = \zeta_s + \mu u_{s1}(z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) + \ldots + \mu^\alpha u_{s\alpha}(z_1, \ldots, z_n; \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

определим коэффициенты функций u_{sk} в соответствии с приемом, изложенным в § 63. Предполагая, что $u_s^{(k_1, \ldots, k_n; q_1, \ldots, q_n)}$ не зависят от времени, мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_s}{dt} &= i\lambda_s \zeta_s + \mu\zeta_s \sum A_{s1}^{(k_1, \ldots, k_n)} (\zeta_1 \bar{\zeta}_1)^{k_1} (\zeta_2 \bar{\zeta}_2)^{k_2} \ldots (\zeta_n \bar{\zeta}_n)^{k_n} + \ldots + \\ &+ \mu^\alpha \zeta_s \sum A_{s\alpha}^{(k_1, \ldots, k_n)} (\zeta_1 \bar{\zeta}_1)^{k_1} \ldots (\zeta_n \bar{\zeta}_n)^{k_n} + \mu^{\alpha+1}(\ldots) + \ldots \end{aligned}$$

Подставляя в эту систему

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s, \qquad \bar{\zeta}_s = \xi_s - i\eta_s, \qquad A_{sk}^{(*)} = a_{sk}^{(*)} + ib_{sk}^{(*)}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= -\lambda_s \eta_s + \mu\,[\xi_s \sum a_{s1}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n} - \\ &- \eta_s \sum b_{s1}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n}] + \ldots + \\ &+ \mu^\alpha\,[\xi_s \sum a_{s\alpha}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n} - \\ &- \eta_s \sum b_{s\alpha}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n}] + \mu^{\alpha+1}(\ldots) + \ldots \\ \frac{d\eta_s}{dt} &= \lambda_s \xi_s + \mu\,[\eta_s \sum a_{s1}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n} + \\ &+ \xi_s \sum b_{s1}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n}] + \ldots + \\ &+ \mu^\alpha\,[\eta_s \sum a_{s\alpha}^{(*)} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n} + \\ &+ \xi_s \sum b_{s\alpha} (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n}] + \mu^{\alpha+1}(\ldots) + \ldots \end{aligned}$$

Полагая $\xi_s = r_s \cos\theta_s$, $\eta_s = r_s \sin\theta_s$, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{dr_s}{dt} &= \mu r_s \sum a_{s1}^{(*)} r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n} + \dots + \\ &\quad + \mu^\alpha r_s \sum a_{s\alpha}^{(*)} r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n} + \mu^{\alpha+1}(\dots) + \dots, \\ r_s \frac{d\theta_s}{dt} &= \lambda_s r_s + \mu r_s \sum b_{s1}^{(*)} r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n} + \dots + \\ &\quad + \mu^\alpha r_s \sum b_{s\alpha}^{(*)} r_1^{2k_1} \dots r_n^{2k_n} + \mu^{\alpha+1}(\dots) + \dots\end{aligned} \tag{12.33}$$

Стационарные решения исходной автономной системы с точностью до членов μ^α определяются из уравнений (12.33).

К виду (12.33) приводится любая автономная система, если между числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ не существует соотношений (12.3). Если такие соотношения существуют, то при известных условиях, которым должны удовлетворять выражения X_{sk} и Y_{sk}, исходную систему можно преобразовать к виду (12.33), в том числе когда λ_s являются целыми числами.

§ 69. О методе функций Ляпунова в теории нелинейных колебаний[1]. В заключение отметим, что метод построения периодических решений с помощью функций Ляпунова, изложенный в главах XI и XII, представляет некоторое обобщение классических методов Пуанкаре и Крылова—Боголюбова [[17]]. Этот метод позволяет отыскивать периодические решения как аналитические, так и неаналитические в отношении μ. Если исследуемая система такова, что вопрос о существовании периодических колебаний решается членами первого порядка в отношении μ в правых частях системы, т. е. амплитудное уравнение $L_1(V) = 0$ не имеет кратных корней и не обращается в тождество, то периодические решения будут аналитическими в отношении μ и результаты, полученные этим методом, в качественном отношении совпадают с результатами классических методов. В этом случае вопрос о существовании периодических колебаний решается членами первого порядка в отношении μ в правых частях системы уравнений.

При наличии кратных корней уравнения $L_1(V) = 0$ или в случае $L_1(V) \equiv 0$ метод функций Ляпунова дает возможность получить необходимые и достаточные условия существования периодических решений, неаналитических в отношении μ, по членам высших порядков правых частей системы уравнений и построить эти решения.

Этот метод позволяет также отыскивать периодические решения и в тех случаях, когда система уравнений при $\mu = 0$ не обращается в линейную.

Вопрос об устойчивости периодических колебаний решается методом без привлечения уравнений в вариациях.

Метод функций Ляпунова для систем с n степенями свободы при отсутствии внутреннего резонанса ($\Sigma\, m_s\lambda_s \neq 0$) и при условии, что уравнение $|p_{sk} - \delta_{sk}\varkappa| = 0$ не имеет корней с нулевыми вещественными частями, дает результаты, в качественном отношении также совпадающие с результатами метода Крылова—Боголюбова.

Метод функций Ляпунова позволяет отыскивать стационарные одночастотные и многочастотные колебания и при наличии такого рода корней а также решать вопрос об их устойчивости. Решения в этом случае будут неаналитическими в отношении μ.

Этот метод применим и в тех случаях, когда имеется внутренний резонанс, т. е. когда $\Sigma\, m_s\lambda_s = E$.

[1] В настоящее время метод исследования нелинейных колебаний, изложенный в данной книге и именуемый автором «методом функций Ляпунова», вошел в литературу как метод Каменкова.

Такого рода системы рассматривались в § 67 при весьма существенных ограничениях. Мы предполагали, что в правых частях отсутствуют резонансные члены. При таких же ограничениях рассмотрена эта задача в работе [18]. Это предположение достаточно, но оно не является необходимым для определения стационарных и периодических колебаний.

Покажем, как с помощью функций Ляпунова доказывается существование стационарных колебаний, в том числе и периодических, в случае, когда $\Sigma m_s\lambda_s = E$, а правые части системы содержат резонирующие члены.

Предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \lambda$, а система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\lambda y_1 + \mu X_{11}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, t) + \mu^2 X_{12} + \ldots \\
\frac{dy_1}{dt} &= \lambda x_1 + \mu Y_{11}(x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_k, t) + \mu^2 Y_{12} + \ldots \\
\frac{dx_s}{dt} &= -\lambda y_s + \sigma_{s-1} x_{s-1} + \mu X_{s1}, (x_1, \ldots, x_k;\ y_1, \ldots, y_k, t) + \mu^2 X_{s2} + \ldots \\
\frac{dy_1}{dt} &= \lambda x_s + \sigma_{s-1} y_{s-1} + \mu Y_{s1}(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k, t) + \mu^2 Y_{s2} + \ldots
\end{aligned} \tag{12.34}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, k)$$

Не уменьшая общности задачи, можно положить $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_{k-1} = \lambda$. Произведем замену

$$\begin{aligned}
x_1 &= \xi_1 \cos\lambda t + \eta_1 \sin\lambda t, \qquad y_1 = \xi_1 \sin\lambda t - \eta_1 \cos\lambda t \\
x_s &= \xi_s \cos\lambda t + \eta_s \sin\lambda t + \xi_{s-1} \cos\lambda t + \eta_{s-1} \sin\lambda t \\
y_s &= \xi_s \sin\lambda t - \eta_s \cos\lambda t + \xi_{s-1} \sin\lambda t - \eta_{s-1} \cos\lambda t
\end{aligned} \tag{12.35}$$

В результате будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= \mu \Xi_{11}(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) + \ldots \\
\frac{d\eta_1}{dt} &= \mu H_{11}(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) + \ldots \\
\frac{d\xi_s}{dt} &= \lambda\xi_{s-1} + \mu \Xi_{s1}(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) + \ldots \\
\frac{d\eta_s}{dt} &= \lambda\eta_{s-1} + \mu H_{s1}(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) + \ldots
\end{aligned} \tag{12.36}$$

Функции Ξ_{sk} и H_{sk} для λ целого будут периодическими функциями t периода 2π; для λ иррационального они будут почти периодическими.

Заменим переменные ξ_s и η_s на r_s и ρ_s согласно равенствам

$$\xi_s = r_s + \mu u_s(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) \qquad \eta_s = \rho_s + \mu v_s(\xi_1, \ldots, \xi_k;\ \eta_1, \ldots, \eta_k, t) \tag{12.37}$$

где u_s и v_s — многочлены, коэффициенты которых подлежат определению.

Эти коэффициенты можно определить так, что преобразованная система примет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr_1}{dt} = \mu R_{11}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k) + \mu^2 R_{12}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k, t) + \ldots \\
&\frac{d\rho_1}{dt} = \mu P_{11}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k) + \mu^2 P_{12}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k, t) + \ldots \\
&\frac{dr_s}{dt} = \lambda r_{s-1} + \mu R_{s1}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k) + \\
&\qquad + \mu^2 R_{s2}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k, t) + \ldots \\
&\frac{d\rho_s}{dt} = \lambda \rho_{s-1} + \mu P_{s1}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k) + \\
&\qquad + \mu^2 P_{s2}(r_1, \ldots, r_k;\ \rho_1, \ldots, \rho_k, t) + \ldots
\end{aligned}
\tag{12.38}
$$

Рассмотрим уравнения

$$
\begin{aligned}
&R_{11}(r_{10}, \ldots, r_{k0};\ \rho_{10}, \ldots, \rho_{k0}) = 0, \qquad P_{11}(r_{10}, \ldots, r_{k0}, \rho_{10}, \ldots, \rho_{k0}) = 0 \\
&\lambda r_{s-1,0} + \mu R_{s1}(r_{10}, \ldots, r_{k0};\ \rho_{10}, \ldots, \rho_{k0}) = 0 \\
&\lambda \rho_{s-1,0} + \mu P_{s1}(r_{10}, \ldots, r_{k0};\ \rho_{10}, \ldots, \rho_{k0}) = 0
\end{aligned}
\tag{12.39}
$$

Из последних $2(k-1)$ уравнений определим r_{s0}, ρ_{s0}, $(s = 1, \ldots, k-1)$ через r_{k0}, ρ_{k0}. Подставляя найденные значения в первые два уравнения, получим

$$
R_{11}^*(r_{k0}, \rho_{k0}, \mu) = 0, \qquad P_{11}^*(r_{k0}, \rho_{k0}, \mu) = 0
$$

Если эти уравнения имеют вещественные корни, то, подставляя их в (12.37), определим $\xi_{s0}(t)$ и $\eta_{s0}(t)$. Подставляя значения $\xi_{s0}(t)$ и $\eta_{s0}(t)$ в (12.35), получим решение для $x_{s0}(t)$ и $y_{s0}(t)$.

Если λ целое число, то $\xi_{s0}(t)$ и $\eta_{s0}(t)$, а также $x_{s0}(t)$ и $y_{s0}(t)$ будут периодическими функциями с периодом 2π.

Периодические решения для $x_{s0}(t)$, $y_{s0}(t)$ можно получить и в случае $\lambda = \alpha/\beta$ (α и β — целые числа). Для этого в системе (12.34) положим $t = \beta\tau$. В результате получим новую систему, аналогичную (12.34), в которой число λ заменится на целое число α, а период функций X_{sj} и Y_{sj} можно считать равным 2π.

Если же λ иррационально, то решения будут почти периодическими.

Руководствуясь способом построения функций Ляпунова, изложенным § 64, можно легко показать, что для устойчивых колебаний будут иметь место неравенства

$$
|r_s - r_{s0}| < \mu^{1-\varepsilon}, \qquad |\rho_s - \rho_{s0}| < \mu^{1-\varepsilon}
$$

где ε — сколь угодно малое положительное число для любых значений t в интервале $\pm\infty$. Из последних неравенств можно сделать заключения, что

$$
|x_s(t) - x_{s0}(t)| < \mu^{1-\varepsilon}, \qquad |y_s(t) - y_{s0}(t)| < \mu^{1-\varepsilon}
$$

для любых значений t в интервале $\pm\infty$.

Последние заключения нельзя распространять на решения, полученные для автономных систем в главе XI, и на стационарные решения неавтономных систем, полученные в предыдущих параграфах. Из неравенств

$$
|r_s - r_{s0}| < \mu^{1-\varepsilon}
$$

не следует, что модули разностей

$$|x_s(t)-x_{s0}(t)|, \qquad |y_s(t)-y_{s0}(t)|$$

где

$$x_s=r_s\cos\theta_s, \qquad y_s=r_s\sin\theta_s, \qquad x_{s0}=r_{s0}\cos\theta_{s0}, \qquad y_{s0}=r_{s0}\sin\theta_{s0}$$

будут менее $\mu^{1-\varepsilon}$. Эти модули могут достигать значений $2|x_{s0}|$ и $2|y_{s0}|$, сколь бы высокие приближения по μ мы ни брали.

Таким же свойством обладают решения, полученные классическими методами.

Мы рассмотрели резонансный случай для кратных корней $\pm i\lambda$, но метод функций Ляпунова применим также к исследованию нелинейных колебаний, описываемых системой уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=\sum_{k=1}^{n_1}p_{sk}x_k+\mu X_{s1}(x_1, \ldots, x_n, t)+\mu^2X_{s2}(x_1, \ldots, x_n, t)+\ldots$$
$$(s=1, \ldots, n_1, \; n_1=m+2q+n) \qquad (12.40)$$

где p_{sk} — постоянные величины, а X_{sj} — многочлены сколь угодно высоких степеней с периодическими или почти периодическими коэффициентами.

Уравнение $|p_{sk}-\delta_{sk}\varkappa|=0$ может иметь m нулевых корней, $2q$ чисто мнимых и n корней с отрицательными вещественными частями. Чисто мнимые корни могут быть целыми, рациональными и иррациональными, как простыми, так и кратными с произвольным числом групп решений.

В этом общем случае легко доказать существование стационарных и периодических решений, если система (12.10) допускает их, а также исследовать вопрос об устойчивости этих колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. М. Ляпунов.* Собр соч., т. 2. Изд-во АН СССР, 1956.
2. *А. Пуанкаре.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Перев. с франц. Гостехиздат, 1947.
3. *А. М. Ляпунов.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд. Ленингр. ун-та, 1963.
4. *Н. Г. Четаев.* Одна теорема о неустойчивости. — ДАН СССР, 1934, т. I, № 9.
5. *Г. В. Каменков.* Об устойчивости движения в одном особенном случае. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 4.
6. *Г. В. Каменков.* Исследование одного особенного случая задачи об устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5.
7. *Г. В. Каменков.* Об устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1939, № 9.
8. *Д. Д. Биркгоф.* Динамические системы. М. — Л., ГИТТЛ, 1941.
9. *O. Perron.* Über ein Matrixtransformation. Matem. Z., 1930, Bd. 32.
10. *Г. В. Каменков.* Исследование одного особенного, по Ляпунову, случая задачи устойчивости движения. — Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1935, № 3.
11. *Г. В. Каменков.* К задаче об устойчивости движения в критических случаях. — ПММ, 1965, 29, вып. 6.
12. *T. Levi-Civita.* Sorpa alcuni criteri di instabilita. Ann. Mat. Pura ed Appl., 1901, ser III, v. 5.
13. *C. L. Siegel.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer — Verlag, 1956 (русск. перев.: *Зигель К. Л.* Лекции по небесной механике. ИЛ, 1959).
14. *Г. А. Мерман.* О неустойчивости периодического решения канонической системы с одной степенью свободы в случае главного резонанса. — Сб. «Пробл. движ. искусств. небесн. тел». Изд-во АН СССР, 1963.
15. *I. Bendixson.* Sur les corbes de finies par des equations differentielles. Acta Mathem., 1901, 24.
16. *А. А. Андронов, А. А. Витт.* Об устойчивости по Ляпунову. — Журн. эксп. и теор. физики, 1933, 3, вып. 5.
17. *Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов.* Введение в нелинейную механику. Киев, Изд-во АН УССР, 1937.
18. *И. Г. Малкин.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Изд-во техн.-теор. лит., 1956.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Георгий Владимирович Каменков

ИЗВРАННЫЕ ТРУДЫ, т. II

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Утверждено к печати
Институтом проблем механики

Редактор издательства *Соколова Н. Н.*

Художник *Л. С. Эрман*

Технические редакторы *И. Н. Жмуркина*
Ю. В. Рылина

Сдано в набор 13/VII 1971 г. Подписано к печати 17/I 1972 г.
Формат $70\times108^1/_{16}$. Усл. печ. л. 18,9 Уч.-изд. л. 13,7.
Тираж 2500 экз. Тип. зак. 115
Т—01011 Бумага № 2.
Цена *1 р. 21 к.*

Издательство «Наука»
Москва К-62, Подсосенский пер., 21

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46
Отпечатано во 2-й типографии изд. «Наука»
Шубинский пер., 10.