Э.Камке

СПРАВОЧНИК ПО ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Оглавление

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДОПОЛНЕНИЯ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

«Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям» известного немецкого математика Эриха Камке (1890—1961) представляет собой уникальное по охвату материала издание и занимает достойное место в мировой справочной математической литературе.

Первое издание русского перевода этой книги появилось в 1951 году. Прошедшие с тех пор два десятилетия были периодом бурного развития вычислительной математики и вычислительной техники. Современные вычислительные средства позволяют быстро и с большой точностью решать разнообразные задачи, ранее казавшиеся слишком громоздкими. В частности, численные методы широко применяются в задачах, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Тем не менее возможность записать общее решение того или иного дифференциального уравнения или системы в замкнутом виде имеет во многих случаях значительные преимущества. Поэтому обширный справочный материал, который собран в третьей части книги Э. Камке, — около 1650 уравнений с решениями — сохраняет большое значение и сейчас.

Помимо указанного справочного материала, книга Э. Камке содержит изложение (правда, без доказательств) основных понятий и важнейших результатов, относящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Здесь освещается и ряд таких вопросов, которые обычно не включаются в учебники по дифференциальным уравнениям (например, теория краевых задач и задач о собственных значениях).

Книга Э. Камке содержит множество фактов и результатов, полезных в повседневной работе, она оказалась ценной и нужной для широкого круга научных работников и специалистов в прикладных областях, для инженеров и студентов. Три предыдущих издания перевода этого справочника на русский язык были одобрительно встречены читателями и давно разошлись.

При подготовке второго издания перевода в 1961 году книга подверглась переработке, заключавшейся в следующем:

1) Были исключены некоторые устаревшие параграфы, не соответствующие современному уровню развития теории. Так, в

первой части опущены разделы о графических и машинных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений; из третьей части исключена глава о функциональных дифференциальных уравнениях, написанная без учета достижений теории уравнений с отклоняющимся аргументом.

2) Значительно переработана имеющаяся в книге библиография. Ссылки на старые и малодоступные иностранные издания всюду, где это оказалось возможным, заменены ссылками на современную отечественную или переводную литературу. Всю эту большую и трудоемкую работу по переработке библиографии осуществил редактор книги Н. Х. Розов.

3) Перевод на русский язык был заново сверен с шестым немецким изданием (1959 года); исправлены замеченные неточности, ошибки и опечатки. Все вставки, замечания и дополнения, сделанные в тексте редактором и переводчиком, заключены в квадратные скобки. В конце книги под заголовком «Дополнения» помещены сокращенные переводы (выполненные Н. Х. Розовым) тех нескольких журнальных статей, дополняющих справочную часть, которые автор упомянул в шестом немецком издании.

Настоящее, четвертое издание перевода Справочника существенно не отличается от второго или третьего. Текст еще раз сверен с последним (восьмым) немецким изданием (1967 года), исправлены отдельные опечатки и неточности. Так как за период с момента выхода второго издания появилось значительное число новых книг по обыкновенным дифференциальным уравнениям, а некоторые более старые книги переизданы, то редактором книги Н. Х. Розовым была вновь тщательно просмотрена и обновлена библиография.

Справочник Э. Камке не претендует сегодня на всеобъемлющее освещение современного состояния исследований в области обыкновенных дифференциальных уравнений. Он слабо отражает результаты, полученные после (примерно) 1940 года. Хотелось бы, естественно, учесть новые результаты. Однако это потребовало бы радикальной переработки справочника, по существу — создания новой книги. Поэтому при подготовке настоящего издания ссылки на журнальную литературу не обновлялись и не пополнялись, а новые результаты в книгу не включались. Читателю, интересующемуся дальнейшими подробностями и новейшей библиографией (отсутствующими в книге), можно рекомендовать обратиться к выходившим в последние годы монографиям по обыкновенным дифференциальным уравнениям и соответствующему разделу Реферативного журнала «Математика».

С. Фомин

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$a, b, \ldots, A, B, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, k, m, n, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ — данные постоянные величины (если не сказано другое).

$C, C_1, C_2, \ldots$ — произвольные постоянные интегрирования.

$\left.\begin{array}{l}\Re z = x\\ \Im z = y\end{array}\right\}$ действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$.

$\exp u = e^u$.

$$\operatorname{sign} u = \begin{cases} -1, & \text{если}\quad u < 0,\\ 0, & \text{если}\quad u = 0,\\ 1, & \text{если}\quad u > 0.\end{cases}\qquad e_{p,\,q} = \begin{cases} 0, & \text{если}\quad p \neq q,\\ 1, & \text{если}\quad p = q.\end{cases}$$

$\operatorname{Det}|a_{\mu,\,\nu}|$ есть определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

$$C_n^m = \frac{m!}{n!\,(n-m)!}.$$

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to a$ означает, что $f(x)/g(x) \to 0$ при $x \to a$.

$f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ означает, что $f(x)/g(x)$ ограничено при $x \to a$.

(a, b) — открытый интервал $a < x < b$.

$[a, b]$ — замкнутый отрезок $a \leqslant x \leqslant b$.

$G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — область в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$.

inf — нижняя грань. sup — верхняя грань.

$$\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^n F(x) = f(x)\frac{d}{dx}\left[\left(f(x)\frac{d}{dx}\right)^{n-1} F(x)\right].$$

[Обозначения всех функций и операций приведены в соответствие с обозначениями, установившимися в русской литературе. — *Прим. ред.*]

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ В БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ УКАЗАНИЯХ

[При ссылках на следующие книги указывается только фамилия автора

Айнс — Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Беллман — Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.

Ватсон — Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, тт. I, II, 1949.

Еругин — Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, Минск, 1970.

Коддингтон и Левинсон — Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Курант и Гильберт — Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, 1951.

Лефшец — С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.

Матвеев — Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, «Высшая школа», 1963.

Наймарк — М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, 1954; «Наука», 1969.

Петровский — И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, «Наука», 1970.

Понтрягин — Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1970.

Сансоне — Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, ИЛ, т. I, 1953; т. II, 1954.

Степанов — В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1958.

Трикоми — Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962.

Уиттекер и Ватсон — Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. I, 1962; т. II, 1963.

Хартман — Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Мир», 1970.

Янке, Эмде и Лёш — Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Лёш, Специальные функции (формулы, графики, таблицы), «Наука», 1968.

Цифровые данные при ссылках на журналы расположены в следующем порядке: (серия), том (год издания), страница; например, *Journal de Math.* (4), 5 (1889), стр. 376 = Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris, серия 4, том 5, 1889 год, стр. 376.

Ниже приводится список принятых сокращений названий журналов, на которые имеются ссылки.

[*ДАН СССР* — Доклады Академии наук СССР. Москва.
ЖТФ — Журнал технической физики. Ленинград.
ИАН СССР — Известия Академии наук СССР. Москва.
ИАН УССР — Известия Академии наук УССР. Киев.
Изв. Харьк. матем. об-ва — Известия Харьковского математического общества. Харьков.
Матем. сборник — Математический сборник. Москва.
УМН — Успехи математических наук. Москва. — *Прим. ред.*]

Abhandlungen München: Abhandlungen der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse. München.

Acad. Belgique Bulletins: Académie royale de Belgique. Bulletins de la Classe des Sciences. Bruxelles.

Acad. Serbe: Académie Royale Serbe. Bulletin de l'Académie des Sciences mathématiques et naturelles. A: Sciences mathématiques et physiques. Belgrade.

Acta Math.: Acta Mathematica. Uppsala.

Acta Soc. Fennicae: Acta Societatis scientiarum Fennicae. Helsingforsiae.

Actualités scientif.: Actualités scientifiques et industrielles. Paris.

Akad. Wien: Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. IIa. Sitzungsberichte. Wien.

Americ. Journ. Math.: American Journal of Mathematics. Baltimore.

Americ. Math. Monthly: The American Mathematical Monthly. Menasha, Ithaca.

Annalen Phys.: Annalen der Physik. Leipzig.

Annales Bruxelles: Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. Louvain.

Annales Ecole Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. Paris.
Annales Toulouse: Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Paris, Toulouse.
Annali di Mat.: Annali di Matematica pura ed applicata. Bologna.
Annali Pisa: Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Bologna.
Annals of Math.: Annals of Matematics. Princeton.
Archiv. Math.: Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig, Berlin.
Arkiv för Mat.: Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysık, Stookholm.
Atti Accad. Lincei: Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma.
Atti Pontificia Accad.: Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei. Roma.
Atti Soc. Italiana: Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze. Roma.
Atti Veneto: Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Berichte Leipzig: Berichte über die Verhandlungen der (Königlich) Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig.
Buletinul Cernăuţi: Buletinul Facultăţii de Stiinţe din Cernăuţi. Cernăuţi.
Bulletin Acad. Polonaise Cracovie A: Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles. Série A. Sciences Mathématiques. Krakau.
Bulletin Americ. Math. Soc.: Bulletin of the American Mathematical Society. Menasha, New York.
Bulletin Liège: Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège.
Bulletin math. Fac. Sc.: Bulletin mathématique des Facultés des Sciences et des Grandes Écoles.
Bulletin math. Soc. Roumaine: Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Bucureşti.
Bulletin Sc. math.: Bulletin des Sciences mathématiques. Paris.
Bulletin Soc. Math. France: Bulletin de la Société Mathématique de France. Paris.

Compos. math.: Compositio mathematica. Groningen.
C. R. Paris: Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Paris.
C. R. Roumanie: Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Roumanie. Bucureşti.

Denkschriften Wien: Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Wien. Mathematisch-naturvissenschaftliche Klasse.
Deutsche Math.: Deutsche Mathematik. Leipzig.
Duke Math. Journal: Duke Mathematical Journal. Durham.

Enseignement math.: L'Enseignement mathématique, Paris — Genève.
Ergebnisse Math.: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin.

Giornale Mat.: Giornale di Matematiche di Battaglini. Napoli.

Ingenieur-Archiv: Ingenieur-Archiv. Berlin.
Intermédiaire math.: L'intermédiaire des mathematiciens. Paris.

Jahrbuch FdM: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Berlin.
Jahresbericht DMV: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Leipzig.

Japanese Journal of Math.: Japanese Journal of Mathematics. Tokyo.
Journal de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées. Paris.
Journ. f. Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik. Berlin.
Journal Hokkaido: Journal of the Faculty of Science, Hokkaido Imperial University.
Journál London Math. Soc.: Journal of the London Mathematical Society. London.
Journal Washington Acad.: Journal of the Washington Academy of Sciences. Washington.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. Berlin.
Math. Gazette: The Mathematical Gazette. London.
Math. Zeitschrift: Mathematische Zeitschrift. Berlin.
Mémoires Liège: Mémoires de la Société des Sciences de Liège. Bruxelles.
Mémoires par divers Savants: Mémoires présentés par divers Savants à l'Académin des Sciences de l'Institut de France. Paris.
Memoirs College Engineering Kyoto: Memoirs of the College of Engineering. Kyoto Imperial University.
Memoirs Kyoto: Memoirs of the College of Science. Kyoto Imperial University. Series A.
Memoirs Kyūsyū: Memoirs of the Faculty of Science. Kyūsyū Imperial University. Series A, Mathematics. Hukuoka, Japan.
Memoirs Manchester: Memoirs and Proceedings of the Manchester Litterary and Philosophical Society. Manchester.
Memorie Accad. d'Italia: Memorie della Reale Accademia d'Italia Classe di Scienze fisiche e naturali.
Memorie Bologna: Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Classe di Sciencze Fisiche. Bologna.
Monatshefte f. Math.: Monatschefte für Mathematik und Physik. Leipzig.
Monthly Notices: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London.

Nachrichten Göttingen: Nachrichten von der (Königlichen) Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Göttingen.
Nouvelles Annales Math.: Nouvelles Annales de Mathématiques. Paris.
Nova Acta Halle: Nova Acta. Abhandlungen der Kaiserlich Leopoldinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Halle.

Oregon Publication: University of Oregon Publication. Eugene (Oregon).
Oregon Publication, Math.: University of Oregon Publication, Mathematics Series. Eugene (Oregon).

Philos. Magazine: The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine. London.
Philosophical Transactions London: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London.
Physical. Review: The Physical Review. Lancaster.
Physikal. Zeitschrift: Physikalische Zeitschrift. Leipzig.
Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. Warschau.
Proc. Acad. Allahabad: Proceedings of the Academy of Sciences. Allahabad.
Proc. Phys. — math. Soc. Japan: Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan. Tokyo.
Proceedings Acad. Tokyo: Proceedings of the Imperial Academy. Tokyo.
Proceedings Americ. Acad.: Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston.
Proceedings Amsterdam: Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. Proceedings of the Section of Sciences. Amsterdam.

Proceedings Cambridge: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cambridge.
Proceedings Edinburgh: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.
Proceedings Edinburgh Math. Soc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. London.
Proceedings London Math. Soc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London.
Proceedings Soc. Japan: Proceedings of the Physico-mathematical Society of Japan. Tokyo.
Proceedings Soc. London A: Proceedings of the Royal Society of London, Series A. London.
Proceedings USA Academy: Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. Boston.
Publications math. Belgrade: Publications mathématiques de l'Université de Belgrade. Belgrade.

Quarterly Journal: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. London.
Quarterly Journal Oxford: The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford series. Oxford.

Rendiconti Cagliari: Rendiconti del Seminario delle Facoltà di Scienze delle R. Università di Cagliari. Padova.
Rendiconti Istituto Lombardo: Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti. Milano.
Rendiconti mat.: Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni. Regia Universitá di Roma e Reale Istituto Nazionale di alta Matematica. Roma.
Rendiconti Napoli: Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli.
Rendiconti Palermo: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo.
Rendiconti Sem. Mat. Milano: Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. Milano.
Rendiconti Sem. Mat. Padova: Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova. Padova.
Rendiconti Sem. Mat. Roma: Rendiconti del Seminario Matematico della R. Universitá di Roma.
Revue Électricité: Revue générale de l'Électricité. Organe de l'Union des Syndicats de l'Électricité et du Comité Électrotechnique Francais. Paris.

Schweiz. Bauzeitung: Schweizerische Bauzeitung Zürich.
Schweiz. Naturf. Ges.: Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft. Zürich.
Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Göttingen.
Sitzungsberichte Heidelberg: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt. A. Heidelberg.
Sitzungsberichte München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der K. B. Akademie der Wissenschaften zu München. München.
Sitzungsberichte Preuß. Akad.: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse. Berlin.

Tôhoku Math. Journ.: The Tôhoku Mathematical Journal. Sendai (Japan).
Transactions Americ. Math. Soc.: Transactions of the American Mathematical Society. Menasha — New York.
Transactions Cambridge Soc.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge.

Transactions Soc. Edinburgh: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh.

Washington Publications: University of Washington. Publications in Mathematics. Washington.

ZAMP: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. Basel.
Zeitschrift f. angew. Math. Mech.: Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Berlin.
Zeitschrift f. Astrophysik: Zeitschrift für Astrophysik. Berlin.
Zeitschrift f. Math. Phys.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig.
Zeitschrift f. Phys.: Zeitschrift für Physik. Berlin.
Zeitschrift math. Unterricht: Zeitschrift für mathematishen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig.
Zeitschrift VDI.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Berlin.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

[Обстоятельное изложение рассматриваемых в первой части вопросов и дальнейшие подробности можно найти в следующей литературе:

И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1970;

Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1970;

Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 1970;

В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1958;

Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939;

Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 1963;

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, 1953; т. II, 1954;

Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, 1958;

Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1970;

Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, 1954. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА I
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной: $y' = f(x, y)$; основные понятия

1.1. Обозначения и геометрический смысл дифференциального уравнения. *Решением*, *интегралом* или *интегральной кривой* дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y) \quad \text{или} \quad y' = f(x,\ y) \tag{1}$$

называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, что $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$ тождественно по x на некотором участке изменения x.

Общим решением или *общим интегралом* называют такое отличное от тождества уравнение

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0, \tag{2}$$

что интегралами уравнения (1) являются те дифференцируемые функции $y = \varphi(x)$, которые получаются при решении относительно y этого уравнения при значениях постоянной C, принадлежащих некоторой определенной области. Сама функция Φ при этом также обычно называется общим интегралом дифференциального уравнения (1).

Рассмотрим уравнение $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ определена в некоторой открытой области G плоскости xy. Пусть в каждой точке (x, y) этой области определен такой угол α, что $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$. Точка (x, y) вместе с отрезком малой длины, составляющим угол α с положительным направлением оси Ox, называется *линейным элементом.* Совокупность линейных элементов образует *поле направлений*, наглядно изображающих данное дифференциальное уравнение (рис. 1). Интегральная кривая — это такая гладкая кривая, которая «согласована» с данным полем направлений, т. е. которая имеет в каждой своей точке касательную, предписанную этим полем.

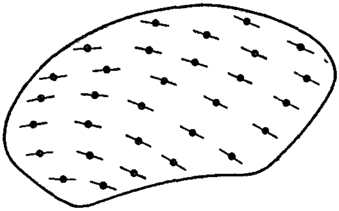

Рис. 1.

В некоторых случаях легко можно найти совокупность точек плоскости, которым данное дифференциальное уравнение ставит в соответствие одно и то же направление α (например, для уравнения $y' = g(y)$ такой совокупностью точек будет одна или несколько прямых, параллельных оси x и определяемых равенством $g(y) = \operatorname{tg} \alpha$). Точки, в каждой из которых данное дифференциальное уравнение определяет одно и то же направление α, образуют кривую, называемую *изоклиной*, соответствующей α.

1.2. Существование и единственность решения. В дальнейшем всюду, если только не оговорено противное, мы будем предполагать (наряду с другими допущениями), что *функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой открытой области G плоскости xy.* Тогда справедлива следующая, принадлежащая Пеано теорема существования: *через каждую точку (ξ, η) области G проходит по крайней мере одна интегральная кривая, и каждая из этих кривых может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой области, целиком содержащейся в G и содержащей точку (ξ, η) внутри себя.*

Пример 1.57 ч. III показывает, что через некоторую точку (ξ, η) действительно может проходить более чем одна интегральная кривая[1]).

Через каждую точку проходит заведомо лишь *одна* интегральная кривая, если $f(x, y)$ имеет в области G непрерывные частные производные первого порядка или *удовлетворяет*

[1]) Может случиться даже, что через *каждую* точку области проходит бесконечно много интегральных кривых; см. М. А. Лаврентьев, *Math. Zeitschrift* **23** (1925), стр. 197—209. [О дальнейших свойствах пучков интегральных кривых см. Сансоне, т. I; Хартман. — *Прим. ред.*]

условию Липшица по y:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant L|y_2 - y_1| \quad (L \text{ — постоянная}). \tag{3}$$

В случае, когда (ξ, η) есть точка разрыва функции $f(x, y)$, из п. 5.3, например, вытекает еще следующее: если $f(x, y)$ при $0 < |x - \xi| \leqslant a$, $|y - \eta| \leqslant b$ непрерывна (непрерывность на прямой $x = \xi$, следовательно, не предполагается) и

$$|f(x, y)| \leqslant M(x), \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant |y_2 - y_1| N(x),$$

где $M(x)$ и $N(x)$ интегрируемы *на всем отрезке* $|x - \xi| \leqslant a$, то существует одна и только одна функция $y = \varphi(x)$ такая, что

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

при $x \neq \xi$ и $y \to \eta$ при $x \to \xi$. Функции $M(x)$ и $N(x)$ заведомо интегрируемы, если, например,

$$M(x) \leqslant A(x - \xi)^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$
$$N(x) \leqslant B(x - \xi)^{-\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

Если функция $f(x, y)$ имеет вид $f(x, y) = h(x, y)/g(x, y)$, то дифференциальное уравнение (1) можно написать в виде

$$g(x, y)\, y' = h(x, y)$$

или в форме системы

$$\frac{dx}{dt} = g(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = h(x, y).$$

Об уравнениях такого вида см. также пп. 4.12, 4.13, 7.2.

О зависимости решения от начальных условий и от изменения самого уравнения см. пп. 2.7 и 5.4.

§ 2. Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной: $y' = f(x, y)$; методы решения

2.1. Метод ломаных. Если построить для данного дифференциального уравнения § 1 (1) поле направлений, то легко построить приближенные изображения его интегральных кривых и таким образом составить общее представление о ходе этих интегральных кривых[1]).

---

[1]) Часто бывает полезно изобразить так называемую «кривую перегибов» интегральных кривых, т. е. совокупность точек, в которых $y'' = 0$. В случае непрерывно дифференцируемой функции $f(x, y)$ для каждого решения уравнения § 1 (1) имеем $y'' = f_x + y' f_y = f_x + f f_y$, так что условие $y'' = 0$ приводит к уравнению

$$f_x + f f_y = 0. \tag{*}$$

Так как условие $y'' = 0$ является только необходимым, но не достаточным для того, чтобы данная точка была точкой перегиба, то «кривой перегибов» могут принадлежать и точки, не являющиеся точками перегиба.

Пример. Для уравнения Риккати $y' = x - y^2$ уравнение кривой перегибов (*) имеет вид: $2y(x - y^2) = 1$.

Точность чертежа может быть, очевидно, увеличена путем увеличения масштаба изображения и числа построенных линейных элементов. Однако, не говоря уже о том, что увеличение масштаба имеет свои границы, основным недостатком этого метода является то, что, когда нужно получить лишь одну интегральную кривую, приходится строить лишние линейные элементы, причем определение линейных элементов по заданному в аналитической форме дифференциальному уравнению далеко не всегда бывает достаточно просто.

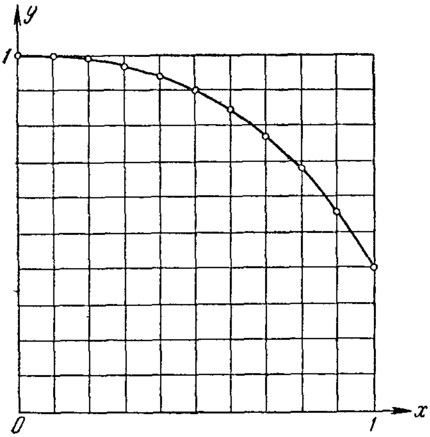

Рис 2.

В методе ломаных, желая построить интегральную кривую, проходящую через данную точку (ξ, η), исходят из того, что проводят из точки (ξ, η) отрезок в направлении, определяемом соответствующим точке (ξ, η) линейным элементом, до некоторой точки (ξ_1, η_1), затем проводят отрезок в направлении, определяемом линейным элементом, соответствующим точке (ξ_1, η_1), до точки (ξ_2, η_2) и т. д. Таким образом получается некоторая ломаная, аппроксимирующая искомую кривую. (Рис. 2 изображает получающуюся таким образом ломаную для уравнения $y' = -x/y$, причем $\xi = 0$, $\eta = 1$, а длина шага по оси x постоянна и равна 0,1; см. также п. 28 1) Эти геометрические соображения можно изложить и аналитически, так что этот способ может служить и для приближенного численного нахождения решения.

Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет указанным в п. 1.2 условиям единственности, то последовательность ломаных, получающаяся при неограниченном уменьшении длин звеньев (и увеличении их числа), сходится к интегральной кривой, проходящей через точку (ξ, η).

Теоретически, выбирая соответствующую длину шага, можно получить сколь угодно точное приближение к искомой интегральной кривой. Однако практически такую длину шага найти непросто, а приближенное решение, даже если изображающая его ломаная идет весьма плавно, может довольно значительно отклоняться от точного. Например, для истинной интегральной кривой (полуокружность), соответствующей рис. 2, при $x = 1$ ордината равна нулю, в то время как приближенная кривая дает значение

$y = 0{,}4$. О дальнейшем развитии этого метода и его улучшении см. п. 28.2.

2.2. Метод последовательных приближений Пикара — Линделёфа. Пусть функция $f(x, y)$ в прямоугольнике

$$|x - \xi| < a \leqslant \infty,$$
$$|y - \eta| < b \leqslant \infty$$

с центром (ξ, η) удовлетворяет условию Липшица, § 1 (3), и ограничена: $|f| \leqslant A$. Возьмем произвольную непрерывную кривую

$$y = \varphi_0(x),$$

проходящую через точку (ξ, η), например $\varphi_0(x) \equiv \eta$. Положим далее

$$\varphi_1(x) = \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(x,\ \varphi_0(x))\, dx,$$

$$\varphi_2(x) = \eta + \int\limits_{\xi}^{x} f(x,\ \varphi_1(x))\, dx,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots;$$

тогда последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ при $n \to \infty$ сходится, по крайней мере на интервале

$$|x - \xi| < \min(a,\ b/A),$$

к интегральной кривой $\varphi(x)$, проходящей через точку (ξ, η).

Если положить $\varphi_0 = \eta$, то для разности $\varphi_n(x) - \varphi(x)$ имеем следующую оценку:

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \frac{A}{L} \sum_{\nu = n+1}^{\infty} \frac{L^\nu |x - \xi|^\nu}{\nu!}.$$

Если функция $f(x, \eta)$ и разностное отношение

$$D(x,\ y_1,\ y_2) = \frac{f(x,\ y_2) - f(x,\ y_1)}{y_2 - y_1} \qquad (y_2 \neq y_1)$$

не меняют знака в интервале $\xi \leqslant x \leqslant \xi + a$, то при $\varphi_0 = \eta$

$$\varphi_n(x) \lesseqgtr \varphi_{n+1}(x) \qquad \text{при} \quad D > 0, \quad f(x,\ \eta) \gtreqless 0,$$
$$\varphi_{2n}(x) \lesseqgtr \varphi(x) \lesseqgtr \varphi_{2n+1}(x) \qquad \text{при} \quad D < 0, \quad f(x,\ \eta) \gtreqless 0$$ [1].

Метод последовательных приближений применим для отыскания решения и в случае, когда (ξ, η) есть точка разрыва функции $f(x, y)$ (см. п. 1.2).

---

[1] См. M. Müller, *Jahrbuch FdM* 60_{I} (1934), стр. 374.

Этот метод может быть применен и для приближенного численного нахождения решения. При этом соответствующие определенные интегралы вычисляются тем или иным приближенным методом, например по формуле трапеций

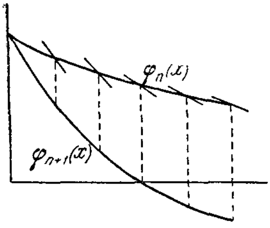

Рис. 3.

$$\int_{x}^{x+h} g(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[g(x)+g(x+h)]$$

или по формуле Симпсона

$$\int_{x}^{x+2h} g(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[g(x)+4g(x+h)+g(x+2h)].$$

О дальнейшем развитии этого метода см. п. 28.4.

Геометрический смысл метода последовательных приближений состоит в следующем (рис. 3). Пусть известна кривая $y=\varphi_n(x)$, представляющая собой n-е приближение решения. Дополним ее точки до линейных элементов, задав в каждой из них угловой коэффициент $f(x, \varphi_n(x))$. Если эти линейные элементы сместить параллельно самим себе вдоль соответствующих им ординат так, чтобы они расположились вдоль непрерывно дифференцируемой кривой, то эта кривая и будет следующим приближением: $y=\varphi_{n+1}(x)$. Это смещение может производиться и иначе[1]: например, можно смещать каждый линейный элемент перпендикулярно к его направлению; сходимость последовательных приближений при этом будет даже лучше, однако новое приближение будет получаться уже на другом интервале (рис. 4).

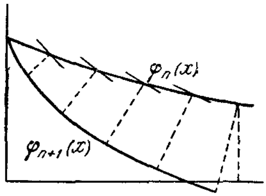

Рис. 4

2.3. Применение степенных рядов. Если функция $f(x, y)$ разложима в прямоугольнике $|x-\xi|<a\leqslant\infty$, $|y-\eta|<b\leqslant\infty$ в степенной ряд

$$f(x, y)=\sum_{p,\,q} a_{p,\,q}(x-\xi)^p(y-\eta)^q,$$

то и проходящая через точку (ξ, η) интегральная кривая $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения § 1 (1) может быть представлена в окрестности точки $x=\xi$ степенным рядом вида

$$\varphi(x)=\eta+\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu(x-\xi)^\nu.$$

---

[1]) См. L. Vietoris, *Monatshefte f. Math.* **39** (1932), стр. 15—50; **41** (1934), стр. 384—391; **48** (1939), стр. 19—25. Там рассматриваются также смещения с изменением направлений линейных элементов.

Этот ряд сходится во всяком случае при

$$|x-\xi| < \min(a, b/A),$$

где A — верхняя грань значений $|f(x, y)|$ в рассматриваемом прямоугольнике. Коэффициенты c_ν можно вычислить последовательно путем приравнивания соответствующих степеней $x-\xi$ в равенстве

$$\sum_{p,\,q} a_{p,\,q}(x-\xi)^p \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu (x-\xi)^\nu\right\}^q = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu c_\nu (x-\xi)^{\nu-1}.$$

2.4. Более общий случай разложения в ряд[1]**.** Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\, y^\nu. \tag{1}$$

Подставляя в него формально ряд

$$y = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x), \tag{2}$$

получим

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu' = \sum_{p} \sum_{k_1,\,\ldots,\,k_p} \frac{(k_1+\ldots+k_p)!}{k_1!\ldots k_p!} f_{k_1+\ldots+k_p} \varphi_1^{k_1} \ldots \varphi_p^{k_p}. \tag{3}$$

Правой части этого выражения посредством перестановки членов может быть придана форма обычного бесконечного ряда, так что равенство (3) примет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu'(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \omega_\nu(x); \tag{4}$$

каждое $\omega_\nu(x)$ представляет собой сумму конечного или бесконечного числа членов, стоящих в правой части равенства (3), причем ω_1 не содержит ни одного φ_ν и каждое из остальных $\omega_\nu(x)$ содержит лишь $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$. Уравнение (4), а следовательно, и (1) формально удовлетворяются, если $\varphi_\nu' = \omega_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Если ищется некоторое решение $y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(a) = \eta$, то можно, например, положить

$$\varphi_1(x) = \eta + \int_a^x \omega_1(t)\,dt \quad \text{и} \quad \varphi_\nu(x) = \int_a^x \omega_\nu(t)\,dt \quad \text{при} \quad \nu > 1.$$

---

[1]) [Дальнейшие подробности можно найти в книгах: Еругин; Трикоми; Сансоне, т. I; Коддингтон и Левинсон; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950. — *Прим. ред.*]

Составленный из этих функций ряд (2), как и ряд, полученный его почленным дифференцированием, сходится абсолютно и равномерно и представляет решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(a)=\eta$, в том случае, если:

(а) функции $f_\nu(x)$ непрерывны при $a\leqslant x\leqslant b$;

(б) существуют такие непрерывные при $a\leqslant x\leqslant b$ функции $F_\nu(x)$, что $|f_\nu|\leqslant F_\nu$ и ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(x)Y^\nu$ сходится при $Y=r>0$ равномерно на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$;

(в) дифференциальное уравнение

$$Y'=\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu(x)Y^\nu$$

имеет такое решение $Y=Y(x)$, удовлетворяющее начальному условию $Y(a)=|\eta|$, $|\eta|\leqslant r$, что $|Y(x)|\leqslant r$.

В частности, отсюда получаем:

(А) Пусть $F_\nu=KM^\nu$ (K и M — положительные постоянные числа). Если коэффициенты $f_\nu(x)$ уравнения (1) при $a\leqslant x\leqslant b$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|f_\nu(x)|\leqslant KM^\nu \qquad (\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и если $M|\eta|<1$, то указанный метод дает решение в виде ряда (2) по крайней мере на отрезке

$$a\leqslant x\leqslant \min\left(b,\ a+\frac{(1-M|\eta|)^{2-\varepsilon}}{2KM}\right),$$

где $\varepsilon>0$ может быть взято произвольно малым.

(Б) Пусть $F_0=F_1=0$, $F_\nu=KM^{\nu-2}$ при $\nu\geqslant 2$; при этом, следовательно, $f_0=f_1=0$. Если коэффициенты $f_\nu(x)$ дифференциального уравнения

$$y'=\sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu(x)\,y^\nu$$

при $a\leqslant x\leqslant b$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$|f_\nu(x)|\leqslant KM^{\nu-2} \qquad (\nu=2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$$

и если $M|\eta|<1$, то указанный выше метод дает решение в виде ряда (2) по крайней мере на отрезке

$$a\leqslant x\leqslant \min\left\{b,\ a+\frac{M}{K}\left[\ln(M|\eta|)+\frac{1}{M|\eta|}-1-\varepsilon\right]\right\}.$$

Этот метод решения может быть применен и к другим типам дифференциальных уравнений, если воспользоваться следующими преобразованиями: из

$$y' = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\, y^\nu,$$

полагая $y = zE$, где $E = \exp \int f_1\, dx$, получаем

$$z' = \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu E^{\nu-1} z^\nu;$$

из

$$y' = g(x)\, y + \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu y^{-\nu},$$

полагая $y = E/z$, где $E = \exp \int g\, dx$, получаем

$$z' = -\sum_{\nu=2}^{\infty} f_{\nu-2} E^{1-\nu} z^\nu.$$

2.5. Разложение в ряд по параметру[1]. Пусть в уравнении

$$y'(x) = \sum_{p+q \geqslant 1} f_{p,q}(x)\, \rho^p y^q \qquad (p \geqslant 0,\ q \geqslant 0), \tag{5}$$

содержащем параметр ρ, коэффициенты $f_{p,q}(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ непрерывны и пусть при некоторых $A > 0$, $r > 0$ и $s > 0$ выполнены неравенства $|f_{p,q}(x)| \leqslant Ar^{-p}s^{1-q}$, так что ряд, стоящий в правой части уравнения (5), сходится при $0 \leqslant x \leqslant a$, $|\rho| < r$, $|y| < s$. Тогда решение $y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$, может быть представлено рядом

$$y(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\, \rho^\nu \qquad (\varphi_\nu(0) = 0 \text{ для всех } \nu), \tag{6}$$

сходящимся при

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{и} \quad |\rho| < r \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} (a+1)^{\nu-1} e^{-\nu(a+1)}.$$

Функции $\varphi_\nu(x)$ можно найти, подставляя ряд (6) в уравнение (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ в обеих частях равенства. О случае произвольного начального условия $y(0) = c$ см. п. 6.3.

2.6. Связь с уравнениями в частных производных. Дифференциальное уравнение § 1 (1) тесно связано с однородным линейным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y)\, \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{7}$$

[1]) См. O. Perron, *Math. Ann.* **113** (1936), стр. 292.

Следующее легко доказываемое предложение об уравнениях такого вида является одним из основных[1]): если функция $f(x, y)$ непрерывна в области G, то функция $z = \psi(x, y)$, имеющая в G непрерывные частные производные, будет решением уравнения (7) в том и только в том случае, когда $\psi(x, y) = \mathrm{const}$ вдоль каждой интегральной кривой уравнения § 1 (1) (эта константа зависит, вообще говоря, от интегральной кривой φ). Геометрически это означает, что проекции линий уровня поверхности $z = \psi(x, y)$ на плоскость xy суть интегральные кривые уравнения § 1 (1).

Обратно, пусть известно некоторое решение $z = \psi(x, y)$ уравнения в частных производных (7), имеющее в области G непрерывные частные производные первого порядка, причем $|\psi'_x| + |\psi'_y| > 0$ (за исключением, может быть, лишь некоторого числа изолированных точек в области G); тогда известны и решения уравнения § 1 (1): все такие непрерывно дифференцируемые решения $y = \varphi(x)$ определяются из равенств $\psi(x, y) = C$ при всевозможных значениях постоянной C. Функция $\psi(x, y)$ есть, таким образом, общий интеграл в смысле п. 1.1. Заметим, что даже если функция $f(x, y)$ имеет производные всех порядков, то не всегда $\psi(x, y) = C$ есть общее решение соответствующего уравнения § 1 (1) во всей области G. Все же, если $f(x, y)$ имеет в G непрерывную частную производную f_y, то для каждой подобласти G_1, которая не имеет с G общих граничных точек в конечной части плоскости и в которой функция $f(x, y)$ ограничена, существует непрерывно дифференцируемое решение $\psi(x, y)$ уравнения (7), удовлетворяющее условию $\psi_y > 0$ и являющееся общим интегралом уравнения § 1 (1).

2.7. Теоремы об оценках.

(а) Пусть функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывны в области G плоскости xy и f удовлетворяет в этой области условию Липшица с константой M; пусть, далее, $|f(x, y) - g(x, y)| \leqslant \delta$ во всей области G и $y = \psi(x)$ — проходящая через точку (ξ, η) интегральная кривая уравнения

$$y' = g(x, y).$$

Тогда для интегральной кривой $y = \varphi(x)$ уравнения § 1 (1), проходящей через точку (ξ, η), из (б) вытекает следующая оценка:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \frac{\delta}{M}(e^{M|x-\xi|} - 1).$$

Отсюда получается возможность приближенного решения сложных дифференциальных уравнений путем замены их соот-

---

[1]) [Подробности см., например, в книгах: Петровский; Степанов; Еругин. — *Прим. ред.*]

ветствующим образом подобранными приближенными уравнениями, решающимися проще. Это обстоятельство может быть весьма существенно использовано уже при составлении дифференциального уравнения, отвечающего той или иной физической или технической задаче, между тем как при чисто математическом подходе это часто упускают из виду.

(б) Пусть функция $f(x, y)$ в области G ограничена и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(x, y)| \leqslant A, \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant M|y_2 - y_1|.$$

Пусть, далее, $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, $a < x < b$, — две непрерывно дифференцируемые кривые, лежащие в области G, проходящие через точки (ξ, η) и $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ соответственно и «приблизительно удовлетворяющие» дифференциальному уравнению § 1 (1), в том смысле, что

$$|\varphi'(x) - f(x, \varphi(x))| \leqslant \varepsilon_1, \quad |\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leqslant \varepsilon_2.$$

Тогда на всем интервале $a < x < b$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{M}(e^{M|x-\xi|} - 1) + [|\eta - \bar{\eta}| + (A + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)|\xi - \bar{\xi}|]\, e^{M|x-\xi|}.$$

(в) Пусть функция $f(x, y)$ и $g(x, y)$ непрерывны в области $G(x, y)$ и пусть

$$f(x, y) < g(x, y). \tag{8}$$

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два решения дифференциальных уравнений

$$\varphi' = f(x, \varphi) \quad \text{и} \quad \psi' = g(x, \psi),$$

удовлетворяющие условию $\varphi(\xi) \leqslant \psi(\xi)$, то

$$\varphi(x) \gtreqless \psi(x) \quad \text{при} \quad \xi \gtreqless x. \tag{9}$$

Если хотя бы одна из функций f, g удовлетворяет условиям теоремы единственности п. 1.2, то в (8) знак $<$ может быть заменен знаком $\leqslant$; при этом следует добавить знак равенства и в формуле (9).

(г) Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и (ξ, η) есть некоторая точка в G. Пусть, далее, $\psi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2)$ — непрерывные функции, имеющие в каждой точке интервала $\xi \leqslant x < a$ производную справа $D_+\psi_\nu$ и производную слева $D_-\psi_\nu$. Область, заключенная между кривыми $y = \psi_1$ и $y = \psi_2$, пусть принадлежит G. Если при этом $\psi_1(\xi) \leqslant \eta \leqslant \psi_2(\xi)$ и если для $\xi \leqslant x < a$

$$D_\pm\psi_1(x) \leqslant f(x, \psi_1(x)), \quad D_\pm\psi_2(x) \geqslant f(x, \psi_2(x)),$$

то интегральная кривая $y=\varphi(x)$ уравнения § 1 (1), проходящая через точку (ξ, η), существует во всем интервале $\xi \leqslant x < a$, и на этом интервале

$$\psi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \psi_2(x);$$

ψ_1 и ψ_2 называются соответственно *нижней* и *верхней функциями*.

Если $\psi_1(\xi)=\psi_2(\xi)=\eta$, то верхняя грань всех ψ_1 и нижняя грань всех ψ_2 являются решениями уравнения § 1 (1) с начальным значением η при $x=\xi$.

(д) Если функция $y(x)$ при $a \leqslant x < b$ непрерывна и дифференцируема справа и если для постоянных $M>0$, $N \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|y'_+(x)| \leqslant M|y(x)|+N$$

[где $y'_+(x)$ означает производную справа функции y в точке x.— *Прим. ред.*], то для любых двух чисел x, ξ, принадлежащих указанному интервалу, выполняется неравенство

$$|y(x)| \leqslant |y(\xi)|\, e^{M|x-\xi|}+\frac{N}{M}\left(e^{M|x-\xi|}-1\right).$$

В более общем случае справедливо следующее. Если функция $y(x)$ при $a \leqslant x < b$ непрерывна и дифференцируема справа и если для двух непрерывных на этом интервале функций $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$|y'_+(x)| \leqslant f(x)\,|y(x)|+g(x),$$

то

$$|y(x)| \leqslant F(x)\left(|y(\xi)|+\left|\int_\xi^x \frac{g(x)}{F(x)}\,dx\right|\right),$$

где $F(x)=\exp\left|\int_\xi^x f(x)\,dx\right|$ для любых двух чисел x и ξ, принадлежащих вышеуказанному интервалу.

2.8. Поведение решений при больших значениях x[1]**.**

(а) $$y'=g(x)\,y+f(x,\ y).$$

[1]) О случае линейных уравнений см. п. 4.4. [Дальнейшие подробности можно найти в книгах: Сансоне, т. II; Беллман; Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1964. — *Прим. ред.*]

Функции y, g, f в данном случае могут быть и комплексными. Пусть f и g непрерывны в области

$$x \geqslant a, \quad |y| \leqslant b; \tag{B}$$

пусть, далее,

$$g_1(x) = \Re g(x) > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x, 0)}{g_1(x)} = 0$$

и

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \Theta g_1(x) |y_2 - y_1|, \quad \text{где} \quad 0 < \Theta < 1.$$

Тогда дифференциальное уравнение имеет одно и только одно решение, существующее для всех достаточно больших значений x, принадлежащее области (B) и стремящееся к нулю при $x \to \infty$.

Если интеграл

$$\int_a^\infty g_1(x)\,dx \tag{10}$$

расходится, то не существует никакого другого решения, которое принадлежало бы области (B) при всех достаточно больших значениях x. Если интеграл (10) сходится, то существует для всех достаточно больших значений x такая проходящая через точку (x_0, y_0) интегральная кривая $y = y(x)$, что при соответствующем выборе постоянной c, при достаточно малом $|y_0|$ и достаточно большом x_0 имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty} \left[y(x) - c \exp \int_a^x g(t)\,dt \right] = 0. \tag{11}$$

(б) $$y' = -g(x)y + f(x, y),$$

где g и f удовлетворяют условиям, указанным в первой части (а). Для всех достаточно больших x_0 и достаточно малых $|y_0|$ существует проходящая через точку (x_0, y_0) интегральная кривая, определенная для всех $x \geqslant x_0$ и лежащая в области (B). Если интеграл (10) расходится, то все же решения стремятся к нулю при $x \to \infty$. Если интеграл (10) сходится, то для решений снова справедливо соотношение (11), но только с функцией $-g$ вместо g.

(в) Те же результаты остаются в силе при соответствующих условиях и для уравнения

Если, например, функция F в области (B) непрерывна, дважды дифференцируема по y и

$$\Re F_y > 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{F(x,\,0)}{\Re F_y(x,\,0)} = 0, \quad \frac{F_{yy}(x,\,y)}{\Re F_y(x,\,0)} \text{ ограничено в } (B),$$

то существует в точности одно решение, определенное для всех достаточно больших значений x и стремящееся к нулю при $x \to \infty$.

§ 3. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной: $F(y', y, x) = 0$

3.1. О решениях и методах решения. Для уравнения

$$F(y',\, y,\, x) = 0, \tag{1}$$

не разрешенного относительно производной, даже при весьма простом виде функции F, дело может обстоять существенно иначе, чем для уравнения вида § 1 (1). Например, уравнение

$$y'^2 - 2y' + y^2 + 1 = 0, \quad \text{т. е.} \quad (y' - 1)^2 + y^2 = 0,$$

вообще не имеет ни одного (действительного) решения. Для уравнения $y'^2 = 1$ решениями являются взаимно перпендикулярные прямые вида $y = \pm x + C$, так что через каждую точку проходят две интегральные кривые.

Поэтому здесь не существует методов решения столь общих, как для уравнений, разрешенных относительно производной. Можно, конечно, и здесь определить линейные элементы x, y, $t = \operatorname{tg}\alpha$, удовлетворяющие уравнению $F(t, y, x) = 0$, построить тем же способом, что и в пп. 1.1 и 2.1, с их помощью соответствующее данному дифференциальному уравнению поле направлений, а по нему графически найти приближенное решение.

При этом опять может оказаться полезной кривая перегибов (см. п. 2.1), которая здесь определяется совокупностью двух уравнений:

$$F = 0, \quad F_y y' + F_x = 0,$$

причем y' следует рассматривать как параметр.

Если функция $F(t, y, x)$ может быть разложена в степенной ряд, то можно, как и в п. 2.3, искать решение $y(x)$ в виде степенного ряда, подставить этот ряд в уравнение и, сравнивая соответствующие степени x, найти его коэффициенты; при этом необходимо, конечно, исследовать сходимость полученного для $y(x)$ ряда.

Иногда уравнение может быть также записано в виде

$$G(y',\, y,\, x) \cdot H(y',\, y,\, x) = 0$$

(*распадающееся* уравнение); тогда, очевидно, решение каждого из двух уравнений

$$G(y', y, x) = 0, \quad H(y', y, x) = 0$$

удовлетворяет и исходному уравнению (1). При этом, однако, необходимо исследовать, нельзя ли из отдельных частей интегральных кривых этих двух уравнений составить еще и новые решения.

В общем случае дифференциальное уравнение (1) сводится к уравнению, разрешенному относительно производной: $y' = f(x, y)$, причем $t = f(x, y)$ означает решение уравнения $F(t, y, x) = 0$. Согласно известной теореме о неявных функциях, это сведение возможно в окрестности некоторой точки (ξ, η, τ), если $F(\tau, \eta, \xi) = 0$ и $F_t(\tau, \eta, \xi) \neq 0$. Однако при этом методе некоторые решения уравнения могут быть потеряны.

Далее, существует метод так называемого интегрирования посредством дифференцирования (см. п. 4.14), а для некоторых отдельных типов уравнений — еще и другие методы (см. § 4) [1]).

3.2. Регулярные и особые линейные элементы. Линейный элемент x, y, t, удовлетворяющий уравнению $F(t, y, x) = 0$, называется *регулярным*, если $F_t(t, y, x) \neq 0$, и *особым*, если $F_t(t, y, x) = 0$ [2]). Точки (x, y) — носители особых линейных элементов — образуют так называемую *дискриминантную кривую*. Интегральная кривая называется *регулярной* и, соответственно, *особой*, если она состоит целиком из регулярных и, соответственно, из особых линейных элементов.

Пример 1. $xy' = y$. Особые линейные элементы суть: $x = 0$, $y = 0$, t произвольно. Дискриминантная кривая состоит из единственной точки (0, 0). Решения этого уравнения — прямые $y = Cx$. Через точку (0, 0), к которой сводится дискриминантная кривая, проходят все интегральные кривые.

Пример 2. $y'^2 = 4x^2$. Особые линейные элементы: $x = 0$, y произвольно, $t = 0$. Дискриминантная кривая есть ось ординат. Решения уравнения суть параболы $y = x^2 + C$, $y = -x^2 + C$ и те дифференцируемые кривые, которые можно составить из их частей. Через каждую точку дискриминант-

---

[1]) О более общих теоремах существования см. В. Mania, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **69** (1936), стр. 461—476; M. Müller, *Jahrbuch FdM* **62**II, стр. 1258.

[2]) Против приведенного определения можно возразить, что по этому определению в примере $F \equiv (t - x)^2 = 0$ каждый линейный элемент, удовлетворяющий дифференциальному уравнению, — особый, в то же время это дифференциальное уравнение в точности эквивалентно весьма простому уравнению, разрешенному относительно производной: $y' = x$. Необходимость различения регулярных и особых линейных элементов объясняется тем, что, согласно теореме о неявных функциях, в окрестности регулярного линейного элемента уравнение (1) может быть решено относительно y'. Указанная теорема дает, однако, лишь достаточное, но вовсе не необходимое условие разрешимости; уравнение может быть разрешимо относительно y' и в окрестности особого линейного элемента. Поэтому имеются различные видоизменения приведенного определения.

ной кривой проходят в точности две такие параболы (рис. 5). Сама дискриминантная кривая не является интегральной кривой. Ни одна из интегральных кривых, если только она продолжена достаточно далеко, не регулярна.

Пример 3. $y'^2 = 4|y|$. Дискриминачтной кривой является ось абсцисс. Особые элементы: x произвольно, $y = 0$, $t = 0$. Дискриминантная кривая представляет собой решение, при этом особое. Она касается ннтегральных кривых $y = \pm(x + C)^2$ (рис. 6). Интегральные кривые получаются также, если взять ветвь одной из этих парабол до точки ее соприкосновения с осью x, затем произвольный отрезок этой оси и потом опять перейти на некоторую новую параболу.

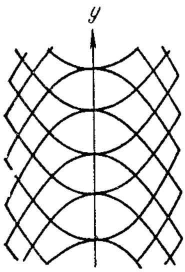

Рис. 5.

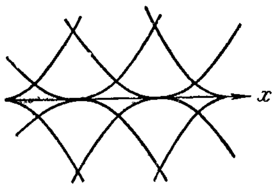

Рис. 6.

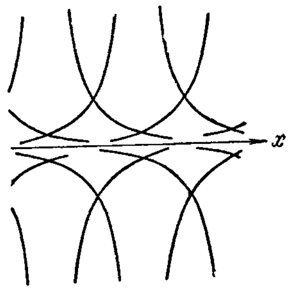

Рис. 7.

Пример 4. $y'^2 = 4|y|^3$. Особые линейные элементы и дискриминантная кривая здесь те же самые, что в предыдущем примере. Дискриминантная кривая представляет собой особое решение. Остальные решения имеют вид:

$$y = \frac{1}{(x+C)^2} \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{(x+C)^2};$$

все эти решения регулярны, и для каждого из них дискриминантная кривая является асимптотой (рис. 7).

Дальнейшие примеры см. п. 4.18.

§ 4. Решение частных видов дифференциальных уравнений первого порядка

[Подробное рассмотрение различных частных видов дифференциальных уравнений, разрешимых в квадратурах, содержится, например, в книгах:

В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1958;

Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, 1963;

Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 1970;

Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939;

А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, 1967;

Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное нсчисление, 1969,

к которым можно обратиться за доказательствами и дальнейшими подробностями. — *Прим. ред.*]

4.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

(а) $y' = f(x)$. Это простейший тип дифференциального уравнения. Для непрерывной функции $f(x)$ его интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), имеет уравнение

$$y = \eta + \int_{\xi}^{x} f(x)\, dx.$$

(б) $y' = (x)g(y)$, причем случай $f(x) \equiv 1$ не исключается.

Если функции $f(x)$, $g(y)$ непрерывны и $g(\eta) \neq 0$, то интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), получается решением относительно y уравнения

$$\int_{\eta}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{\xi}^{x} f(x)\, dx.$$

Если $g(\eta) = 0$, то прямая $y = \eta$ есть решение. Могут быть и другие решения, получающиеся комбинированием двух указанных типов интегральных кривых.

4.2. $y' = f(ax + by + c)$. Если $b = 0$, то получаем случай 4.1 (а). Если $b \neq 0$, то это уравнение сводится к типу 4.1 (б) подстановкой $u(x) = ax + by + c$. Если функция $f(y)$ непрерывна и $a + bf(u) \neq 0$, то интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), получается решением относительно y уравнения

$$\int_{a\xi+b\eta+c}^{ax+by+c} \frac{du}{a + bf(u)} = x - \xi.$$

4.3. Линейные дифференциальные уравнения. Общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка таков: $y' + f(x)y = g(x)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a < x < b$, то интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), определяется уравнением

$$y = e^{-F}\left(\eta + \int_{\xi}^{x} g(x)\, e^{F}\, dx\right), \qquad \text{где } F(x) = \int_{\xi}^{x} f(x)\, dx.$$

Если $g(x) \neq 0$, то эта кривая имеет с осью x не более *одной* общей точки, так как выражение, стоящее в скобках, будет в этом случае монотонной функцией.

Формула $y = \varphi_0(x) + \varphi(x)$ дает все решения, если $\varphi_0(x)$ — какое-либо фиксированное частное решение, а $\varphi(x)$ пробегает все решения соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения, в котором $g \equiv 0$. Для любых трех различных решений φ_ν выражение $(\varphi_3 - \varphi_2)/(\varphi_2 - \varphi_1)$ есть постоянная.

Построение поля направлений для такого уравнения облегчается тем, что направления, соответствующие точкам, лежащим на вертикальной прямой $x = x_0$, все указывают в одну и ту же точку $P(x_0)$, именно точку с координатами

$$\xi = x_0 + \frac{1}{f(x_0)}, \quad \eta = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}.$$

Точки $P(x_0)$ образуют *направляющую кривую*[1]). Например, если дано уравнение

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}\, y = \frac{2x^2}{x^2+1},$$

то направляющая кривая определяется параметрическими уравнениями

$$\xi = \frac{3x_0^2+1}{2x_0}, \quad \eta = x_0,$$

т. е. представляет собой гиперболу $2\xi\eta - 3\eta^2 = 1$, изображенную на рис. 8. Стоящие на гиперболе числа суть значения x_0.

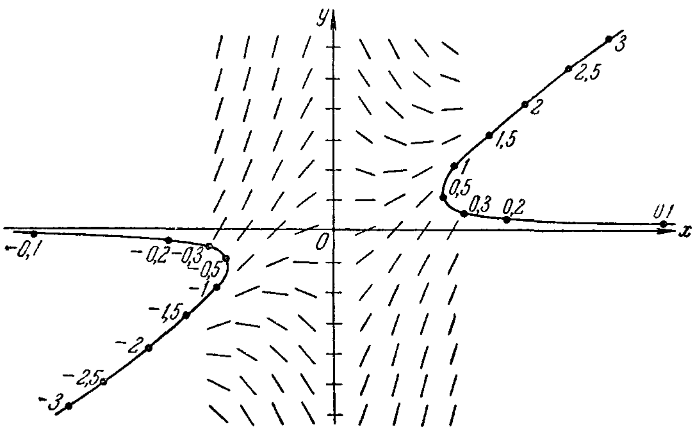

Рис. 8.

4.4. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений. См. также п. 2.8.

(A) $y' + ay = g(x)$, причем $g(x) \to b$ при $x \to \infty$.

Согласно п. 4.3

$$y = e^{-ax}\left(C + \int g(x)\, e^{ax}\, dx\right);$$

---

[1]) [Термин автора — *Leitkurve*. — *Прим. перев.*] См. E. Czuber, *Zeitschrift f. Math. Phys.* **44** (1899), стр. 41—49.

применяя правило Лопиталя, получаем, что при $\Re a > 0$ *каждое* решение стремится к b/a при $x \to \infty$. В случае $\Re a < 0$ к b/a стремится только решение

$$y = -e^{-ax} \int_x^\infty e^{ax} g(x)\, dx.$$

(Б) $xy' + (ax + b)y = x^\alpha P(1/x)$, где $P(x)$ — многочлен, $P(0) \neq 0$, α — целое число, $a \neq 0$ и $\alpha + b \leqslant 1$.

(а) $a < 0$. Для того чтобы входящие в решение интегралы сходились, следует ограничиться областью $x > 0$. Решение

$$y = x^{-b} e^{-ax} \left(C - \int_x^\infty e^{ax} Q(x)\, dx \right), \qquad \text{где } Q(x) = x^{\alpha+b-1} P\left(\frac{1}{x}\right),$$

обладает тем свойством, что $yx^b e^{ax} \to C$ при $x \to \infty$. Интегрирование по частям дает при любом $m \geqslant 0$

$$yx^b e^{ax} - C = e^{ax} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + \frac{(-1)^m}{a^{m+1}} \int_x^\infty e^{ax} Q^{(m+1)}(x)\, dx;$$

отсюда, оценивая при некотором фиксированном m соответствующий интеграл, получаем

$$\left| y - Cx^{-b} e^{-ax} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}} x^{-b} \right| < Ax^{\alpha-m-2}.$$

Так как значение A можно уточнить с помощью решения предыдущего уравнения, то эта формула может быть использована для приближенного вычисления y при больших значениях x даже и в том случае, когда ряд $\sum\limits_k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}}$ расходится.

(б) $a > 0$. Пусть теперь $x < 0$. Тогда, соответственно, получаем:

$$y|x|^b e^{ax} - C = e^{ax} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{a^{m+1}} \int_{-\infty}^{x} e^{ax} Q^{(m+1)}(x)\, dx,$$

где $Q(x) = x^{\alpha-1} |x|^b P(1/x)$. Отсюда при фиксированном m получаем

$$\left| y - C|x|^{-b} e^{-ax} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{Q^{(k)}(x)}{a^{k+1}} |x|^{-b} \right| < A|x|^{\alpha-m-2}.$$

Пример. $xy' + xy = 1$. Точное решение имеет вид

$$y = e^{-x}\left(C + \int \frac{e^x}{x}\,dx\right).$$

Согласно (б), получаем при больших $x < 0$ для решения, соответствующего случаю $C = 0$:

$$\left| y - \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{x^{k+1}} \right| < \frac{(m+1)!}{|x|^{m+2}}.$$

Поэтому можно написать

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

даже и в том случае, когда этот ряд не сходится. Тогда этот ряд называют *асимптотическим разложением* [1]).

(В) $x^2y' - (bx + a)y = x^{-\alpha}P(x)$. При этом P, a, b, α имеют тот же смысл и удовлетворяют тем же условиям, что и в (Б). Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = 1/x$ переводит это уравнение в уравнение (Б) с переменными ξ, η вместо x, y. Делая обратную замену в полученном для того случая асимптотическом разложении, получим асимптотическое разложение для данного случая, пригодное при малых значениях $|x|$.

Пример. $x^2y' + y = x$. Согласно (Б) (а), получаем при малых $x > 0$:

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k!\, x^{k+1}.$$

(Г) О решениях уравнения $x^k y' + f(x)y = g(x)$ при $x \to 0$ см. J. Horn, *Journal f. Math.* 120 (1899), стр. 1—26; 122 (1900), стр. 73—83, 143 (1913), стр. 212—240.

4.5. Уравнение Бернулли $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$. Полагая $u(x) = y^{1-\alpha}$, получаем уравнение вида 4.3:

$$u' + (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x) = 0.$$

4.6. Однородные дифференциальные уравнения и приводящиеся к ним.

(а) $y' = f(y/x)$. Делая подстановку $y = xu(x)$, получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$xu' = f(u) - u.$$

---

[1]) [Об асимптотических разложениях см. подробнее в книгах: Еругин; Трикоми; Беллман, стр. 70; Сансоне, т. II, стр. 8. — *Прим. ред*]

Если $f(\eta/\xi) \neq \eta/\xi$, то интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), получается решением относительно y уравнения

$$\int\limits_{\eta/\xi}^{y/x} \frac{du}{f(u)-u} = \ln\frac{x}{\xi}.$$

Если $f(\eta/\xi) = \eta/\xi$, то $y = \eta\xi^{-1}x$ есть решение. Могут существовать также решения, являющиеся комбинациями указанных двух типов.

Уравнение

$$P(x,\ y)\,y' = Q(x,\ y),$$

где P, Q — однородные многочлены одной и той же степени, приводится к виду (а) делением на наивысшую входящую в уравнение степень x и на многочлен $P\left(1,\ \frac{y}{x}\right)$.

(б) $\boldsymbol{F\left(y',\ \frac{y}{x}\right) = 0}$. Во многих случаях это уравнение может быть сведено к виду (а). Все решения этого уравнения с отличной от нуля непрерывной производной y' можно получить также, найдя все непрерывные функции $\varphi(u)$ и все непрерывно дифференцируемые функции $\psi(u)$, такие, что $F(\varphi(u), \psi(u)) \equiv 0$ и $\psi' \neq 0$, $\varphi \neq \psi$ для всех u. Тогда формулы

$$x = \exp\int\frac{\psi'}{\varphi-\psi}\,du,\quad y = x\psi(u)$$

дают решение в параметрической форме.

(в) $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$. Если $\Delta = a\beta - b\alpha \neq 0$, то подстановка

$$au + bv = ax + by + c,\quad \alpha u + \beta v = \alpha x + \beta y + \gamma,$$

т. е.

$$x = u + \frac{b\gamma - c\beta}{\Delta},\quad y = v(u) + \frac{c\alpha - a\gamma}{\Delta},$$

приводит это уравнение к виду (а):

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right);$$

если $\Delta = 0$, $b \neq 0$, то подстановка $v(x) = ax + by + c$ приводит его к виду п. 4.1:

$$\frac{dv}{dx} = a + bf\left(\frac{bv}{\beta v + b\gamma - c\beta}\right);$$

если $\Delta = 0$, $\beta \neq 0$, то подстановка $v(x) = \alpha x + \beta y + \gamma$ приводит его также к виду п. 4.1:

$$\frac{dv}{dx} = \alpha + \beta f\left(\frac{bv + c\beta - b\gamma}{\beta v}\right).$$

(г) $y' = \frac{y}{x} + g(x) f\left(\frac{y}{x}\right)$. Подстановка $y = xu(x)$ приводит это уравнение к уравнению вида п. 4.1:

$$xu' = g(x) f(u).$$

(д) $\left[f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{\alpha} h\left(\frac{y}{x}\right)\right] y' = g\left(\frac{y}{x}\right) + y x^{\alpha-1} h\left(\frac{y}{x}\right)$. Если сделать подстановку $y = xu(x)$ и затем принять u за независимое переменное, то получим уравнение Бернулли

$$[g(u) - uf(u)] \frac{dx}{du} = xf(u) + x^{\alpha+1} h(u).$$

(е) Уравнение Дарбу[1]:

$$[P(x, y) + xR(x, y)]\, y' = Q(x, y) + yR(x, y),$$

где P, Q, R — однородные многочлены, причем P и Q имеют одинаковые степени, приводится к указанному выше типу, если его разделить на наивысшую степень x, содержащуюся в P.

4.7. Обобщенно-однородные уравнения. Дифференциальное уравнение

$$P(y', y, x) = 0$$

называется *обобщенно-однородным*, если $P(u, v, w)$ есть многочлен или, в более общем случае, сумма членов вида $au^{\lambda} v^{\mu} w^{\nu}$, причем при соответствующем выборе чисел r и k, $|r| + |k| > 0$, все члены в выражении $P(x^{k-r}, x^{k}, x^{r})$ имеют одну и ту же степень[2].

(а) $r \neq 0$. Тогда можно всегда считать, что $r = 1$. Подстановка

$$y(x) = |x|^{k} \eta(\xi), \quad \xi = \ln|x|$$

приводит к уравнению, не содержащему ξ явно.

(б) $r = 0$. Подстановка $u(x) = y'/y$ переводит исходное уравнение в уравнение, алгебраическое относительно u. После того как оно решено, остается лишь решить уравнение $y' = uy$ с разделяющимися переменными.

4.8. Специальное уравнение Риккати: $y' + ay^2 = bx^{\alpha}$[3]. См. также 4.9.

---

[1]) Подробнее см. Айнс, стр. 42—46.

[2]) Методы, примыкающие к п. 4.7, могут быть использованы и в других случаях. Например, к уравнению $x^2 y' = e^{xy}$ можно применить метод (а) настоящего пункта: подстановка $y(x) = x^{-1}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ приводит к уравнению $\eta' - \eta = e^{\eta}$.

[3]) [Подробнее см. Еругин; Степанов; Матвеев; Ватсон, т. I, стр. 99 и сл., 124 и сл.; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950, стр. 60 и сл. — *Прим. ред.*]

Полагая $u(x)=ay$, $c=ab$, $q=\frac{1}{2}\alpha+1$, приводим это уравнение к виду

$$u'+u^2=cx^{2q-2}.$$

О других видах этого уравнения см. ч. III, 1.30, 1.99, 1.107. Для $\alpha=0$ см. ч. III. 1.23, для $\alpha=-2$ см. ч. III, 1.143. При $\alpha_n=-\frac{4n}{2n-1}$ (n — целое) подстановка

$$\frac{1}{\eta(\xi)}=x^2y(x)-\frac{x}{a}, \quad \xi=x^{\alpha_n+3}$$

приводит уравнение к виду

$$\eta'+\frac{b}{\alpha_n+3}\eta^2=\frac{a}{\alpha_n+3}\xi^{\alpha_n-1},$$

а подстановка

$$\frac{1}{y(x)}=\xi^2\eta(\xi)+\frac{\alpha_n+1}{b}\xi, \qquad \xi=x^{-(\alpha_n+1)}$$

— к виду

$$\eta'-\frac{b}{\alpha_n+1}\eta^2=-\frac{a}{\alpha_n+1}\xi^{\alpha_n+1}$$

(*Д. Бернулли*). Повторно применяя первую или вторую из указанных подстановок, в зависимости от того, положительно n или отрицательно, можно свести уравнение для указанных выше значений α к случаю $\alpha=0$. Во всех остальных случаях решение этого уравнения не сводится к квадратурам и не может быть выражено в конечном виде через элементарные функции (*Лиувилль*).

Исходное уравнение (ср. п. 4.9) может быть также сведено к линейному уравнению второго порядка $y''=abx^{\alpha}y$ (см. ч. III, 2.14). Решение этого уравнения может быть, согласно ч. III, 2.162(10), выражено через бесселевы функции.

4.9. Общее уравнение Риккати: $y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$ [1]. Подстановка

$$y=E(x)u(x), \quad \text{где} \quad E(x)=\exp\int g\,dx,$$

приводит это уравнение к виду

$$u'=fEu^2+\frac{h}{E},$$

---

[1]) Подробнее см. литературу, указанную в п. 4.8. Различные случаи интегрируемости в квадратурах рассматриваются в следующих статьях: M. Kourensky, *Atti Accad. Lincei* (6), **9** (1929), стр. 450; R. Lagrange, *Bulletin Soc. Math. France* **66** (1938), стр. 155; Chiellini, *Rendiconti Cagliari* **9** (1939), стр. 142; L. Tchacaloff, *Giornale Mat.* **63** (1925), стр. 139.

т. е. линейный член обращается в нуль. Если $f \neq 0$ и f, g непрерывно дифференцируемы, то подстановка $u(x)=y+\frac{g}{2f}$ приводит к аналогичному результату, именно

$$u'=fu^2+\left(\frac{g}{2f}\right)'-\frac{g^2}{4f}+h.$$

Полагая

$$y=E(x)\,\eta(\xi), \quad \xi=-\int f(x)\,E(x)\,dx,$$

приходим к уравнению

$$fE^2(\eta'+\eta^2)+h=0,$$

причем x в f, h и E нужно выразить через ξ.

При $h\equiv 0$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли, и подстановка $u(x)=y^{-1}$ приводит к линейному уравнению

$$u'+gu+f=0.$$

Общее уравнение Риккати тесно связано с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Если при $a<x<b$ функции f и g непрерывны и f дифференцируема, то каждое решение $y(x)$ уравнения Риккати, определенное в интервале $\alpha<x<\beta$ $(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$, переводится преобразованием

$$u(x)=\exp\left(-\int fy\,dx\right)$$

в отличное от нуля решение линейного дифференциального уравнения

$$fu''-(f'+fg)\,u'+f^2hu=0$$

(которое для специального уравнения Риккати 4.8 сводится к уравнению $u''=abx^{\alpha}u$). Обратно, если $f\neq 0$, то каждое ненулевое решение u этого линейного уравнения переводится преобразованием

$$y(x)=-\frac{u'}{uf(x)}$$

в решение уравнения Риккати. Это преобразование существенно потому, что линейное уравнение часто решается проще, чем исходное уравнение Риккати.

Если известно одно частное решение $\varphi(x)$, $a<x<b$, то нахождение общего решения сводится к решению линейного уравнения первого порядка. Функция $y(x)$, $a\leqslant\alpha<x<\beta\leqslant b$, будет отличным от $\varphi(x)$ решением уравнения Риккати в том и только в том случае, если

$$\Phi(x) = \frac{1}{y(x) - \varphi(x)}, \qquad \alpha < x < \beta,$$

есть нигде не обращающееся в нуль решение уравнения

$$z' + (2f\varphi + g)z + f = 0.$$

Для любых четырех решений φ_ν уравнения Риккати двойное отношение

$$\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{\varphi_4 - \varphi_1} : \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{\varphi_4 - \varphi_2}$$

постоянно. Если известны три решения, то все остальные могут быть получены путем приравнивания вышеуказанного двойного отношения произвольной постоянной величине. Если четыре функции $\varphi_\nu(x)$ имеют в интервале $a < x < b$ непрерывные производные и $\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3 \neq 0$, то совокупность всех функций

$$y = \frac{\varphi_1 + C\varphi_2}{\varphi_3 + C\varphi_4}$$

удовлетворяет некоторому уравнению Риккати.

В силу тесной связи между уравнением Риккати и важными типами линейных уравнений второго порядка следует всегда пытаться отыскать те случаи, когда могут быть легко найдены одно или даже все решения этого уравнения. Это возможно, например, в следующих случаях:

(а) $f + g + h \equiv 0$:

$$y = \frac{C + \int (f+h) E\,dx - E}{C + \int (f+h) E\,dx + E}, \qquad \text{где } E = \exp \int (f - h)\,dx.$$

M. Kourensky, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **24** (1926), стр. 202—210.

(б) Более общий случай: существуют такие постоянные a, b, причем $|a| + |b| > 0$, что

$$a^2 f + abg + b^2 h \equiv 0.$$

Если $b = 0$, т. е. $f \equiv 0$, то уравнение сводится к линейному, а при $b \neq 0$ оно сводится подстановкой $y = ab^{-1} + u(x)$ к уравнению Бернулли

$$u' = fu^2 + (2ab^{-1}f + g)u$$

и, следовательно, в обоих случаях легко решается.

(в) Если $h = C_0^2 f \exp 2\int g\,dx$ и $fh > 0$, то

$$y = \sqrt{\frac{h}{f}}\,\mathrm{tg}\left(\int \sqrt{fh}\,dx + C\right)$$

есть решение. Если $fh < 0$, то

$$y = \sqrt{-\frac{h}{f}}\,\mathrm{th}\left(\int \sqrt{-fh}\,dx + C\right).$$

(г) Если при соответствующим образом подобранной функции $\Phi(x)$ и при $\Psi = \frac{\Phi - g}{2f}$ будет

$$h = f\Psi^2 - \Phi\Psi + \Psi',$$

то $y = \Psi$ есть, очевидно, решение. Это условие выполняется, например, если f, g и h связаны одним из следующих соотношений:

$$4h = \frac{g^2}{f} - 2\left(\frac{g}{f}\right)' \qquad (\Phi = 0);$$

$$2g = 4\sqrt{fh} + \frac{h'}{h} - \frac{f'}{f} \qquad (\Phi = g - 2\sqrt{fh});$$

$$4h = 2\left(\frac{1}{f}\right)'' - f\left(\frac{1}{f}\right)'^2 - 2\left(\frac{g}{f}\right)' + \frac{g^2}{f} \qquad \left(\Phi = -\frac{f'}{f}\right).$$

D. Mitrinovitch, *C. R. Paris* **206** (1938), стр. 411—413; R. Guigue, *Bulletin Sc. math* (2), **62** (1938), стр. 166—171.

(д) Пусть $G(x)$ и $H(x)$ — многочлены. Если степень многочлена $\Delta = G^2 - 2G' - 4H$ нечетна, то уравнение

$$y' = y^2 + G(x)y + H(x)$$

не может иметь полиномиального решения. Если же Δ имеет четную степень, то этому уравнению могут удовлетворять лишь многочлены

$$y = -\frac{1}{2}\left(G \pm \left[\sqrt{\Delta}\right]\right), \tag{1}$$

где $[\sqrt{\Delta}]$ означает целую рациональную часть разложения $\sqrt{\Delta}$ по убывающим степеням x (так, например, $\left[\sqrt{x^4 - 2x^3 + x - 6}\right] = x^2 - x - {}^1/_2$). Решениями являются *обе* функции (1) в том и только в том случае, когда $\Delta = \mathrm{const}$.

E. D. Rainville, *Americ. Math. Monthly* **43** (1936), стр. 473—476.

4.10. Уравнение Абеля первого рода.

Литература: P. Appel, *Journal de Math.* (4), **5** (1889), стр. 361—423; R. Liouville, *Acta Math.* **27** (1903), стр. 55—78; P. Boutroux, *Annals of Math.* (2), **22** (1920—1921), стр. 1—10.

Уравнением Абеля первого рода называется уравнение вида

$$y' = \sum_{\nu=0}^{3} f_\nu(x)\, y^\nu, \quad \text{т. е.} \quad y' = f_3(x)\, y^3 + f_2(x)\, y^2 + f_1(x)\, y + f_0(x).$$

(а) Если f_1 непрерывна, f_2 и f_3 непрерывно дифференцируемы и $f_3 \neq 0$, то подстановка

$$y = w(x)\,\eta(\xi) - \frac{f_2}{3f_3}, \quad \xi = \int f_3 w^2\, dx,$$

где

$$w(x) = \exp \int \left(f_1 - \frac{f_2^2}{3f_3}\right) dx,$$

приводит уравнение

$$y' = \sum_{\nu=0}^{3} f_\nu(x)\, y^\nu \tag{2}$$

к нормальной форме

$$\eta' = \eta^3 + I(x), \tag{3}$$

где

$$f_3 w^3 I = f_0 + \frac{d}{dx}\frac{f_2}{3f_3} - \frac{f_1 f_2}{3f_3} + \frac{2f_2^3}{27f_3^2}.$$

(б) Если $u(x)$ есть решение исходного уравнения, то подстановка

$$y = u(x) + \frac{E(x)}{z(x)}, \quad \text{где} \quad E(x) = \exp \int (3f_3u^2 + 2f_2u + f_1)\, dx$$

приводит его к виду

$$z' + \frac{\Phi_1}{z} + \Phi_2 = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi_1(x) = f_3E^2, \quad \Phi_2(x) = (3f_3u + f_2)\, E.$$

По поводу этого уравнения см. п. 4.11. Если $\Phi_2 = 0$, т. е. если $u = -\frac{f_2}{3f_3}$ есть решение исходного уравнения (2), то уравнение (4), а следовательно и (2), может быть решено.

(в) Это имеет место, например, для уравнения

$$y' = f_3y^3 + f_2y^2 + f_1y - \left(\frac{f_2}{3f_3}\right)' + \frac{f_2}{3f_3}\left(f_1 - \frac{2f_2^2}{9f_3}\right);$$

решение имеет вид

$$y(x) = E_1\left(C - 2\int f_3E_1^2\, dx\right)^{-1/2} - \frac{f_2}{3f_3},$$

где

$$E_1(x) = \exp \int \left(f_1 - \frac{f_2^2}{3f_3}\right) dx.$$

P. Scalizzi, *Atti Accad. Lincei* (5), **26** (1917), стр. 60—64.

(г) Если $f_0 \equiv 0$, т. е. если уравнение имеет вид

$$y' = f_3 y^3 + f_2 y^2 + f_1 y,$$

и если $f_2 \neq 0$, то подстановка

$$y(x) = u(x)\eta(\xi), \quad \xi = \int u f_2 \, dx, \quad u = \exp \int f_1 \, dx$$

приводит уравнение к виду

$$\eta'(\xi) = g(\xi)\eta^3 + \eta^2, \tag{5}$$

где

$$g(\xi) = u(x)\frac{f_3(x)}{f_2(x)}.$$

Далее, подстановка

$$\xi'(t) = -\frac{1}{t\eta(\xi)} \tag{6}$$

переводит (5) в уравнение

$$t^2\xi'' + g(\xi) = 0. \tag{7}$$

Если из (7) можно найти $\xi(t)$, то из (6) определяется функция $\eta(\xi)$.

H. Lemke, *Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.* **18** (1920), стр. 26.

(д) Если $f_0 \equiv 0$ и $f_2 \equiv 0$, то уравнение переходит в уравнение Бернулли и подстановкой

$$y = u(x) \exp \int f_1 \, dx$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$u' = u^3 \exp 2 \int f_1 \, dx,$$

из которого получаем

$$\frac{1}{u^2} = -2 \int \exp\left(2 \int f_1 \, dx\right) dx + C.$$

(е) Если $f_0 \equiv 0$, $f_1 \equiv 0$ и $(f_3/f_2)' = af_2$ при некотором постоянном a, то подстановкой $y = \frac{f_2}{f_3} u(x)$ уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$u' = \frac{f_2^2}{f_3}(u^3 + u^2 + au).$$

A. Chiellini, *Bolletino Unione Mat. Italiana* **10** (1931), стр. 301—307.

(ж) Если функция

$$\Phi(x)=f_0f_3^2+\frac{1}{3}(f_2'f_3-f_2f_3'-f_1f_2f_3)+\frac{2}{27}f_2^3$$

при соответствующем выборе постоянной α удовлетворяет уравнению

$$f_3\Phi'+(f_2^2-3f_1f_3-3f_3')\Phi=3\alpha\Phi^{5/3},$$

то решение уравнения Абеля имеет вид:

$$y=\frac{3\Phi^{1/3}u-f_2}{3f_3},$$

где $u=u(x)$ определяется из равенства

$$\int\frac{du}{u^3-\alpha u+1}+C=\int\frac{\Phi^{2/3}}{f_3}\,dx.$$

Если $\Phi\equiv 0$, то $y=-\frac{f_2}{3f_3}$ есть решение. Подстановка

$$y=u(x)-\frac{f_2}{3f_3}$$

приводит рассматриваемое уравнение к уравнению Бернулли

$$u'=f_3u^3+\left(f_1+\frac{f_2^2}{3f_3}\right)u.$$

M. Chini, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 57 (1924), стр. 506.

4.11. Уравнения Абеля второго рода.

(a) $[y+g(x)]\,y'=f_2(x)\,y^2+f_1(x)\,y+f_0(x)$.

Подстановка

$$u(x)=(y+g)E,\quad \text{где}\quad E=\exp\left(-\int f_2\,dx\right),$$

приводит это уравнение к специальному виду

$$uu'=(f_1+g'-2f_2g)Eu+(f_0-f_1g+f_2g^2)E^2, \tag{8}$$

а подстановка

$$y+g=1/u(x),$$

применимая, если $y+g\neq 0$, приводит его к уравнению п. 4.10:

$$u'+(f_2g^2-f_1g+f_0)u^3+(f_1-2f_2g+g')u^2+f_2u=0.$$

Уравнение (8) имеет вид

$$yy'=f_1(x)\,y+f_0(x),$$

а это уравнение подстановкой

$$y=u(x)+F(x),\quad \text{где}\quad F(x)=\int f_1\,dx,$$

приводится к виду

$$(u+F)\,u'=f_0.$$

Если $f_0 \neq 0$, то, полагая здесь

$$u(x)=\eta(\xi), \quad \xi=\int f_0\,dx,$$

получим в результате

$$(\eta+F)\,\eta'=1.$$

Отдельные уравнения этого вида допускают решение в квадратурах. Например, если в уравнении (а)

$$f_1=2f_2g-g',$$

то

$$y=-g+E\left[2\int(f_0+gg'-f_2g^2)\,E^{-2}\,dx\right]^{1/2},$$

где $E=\exp\int f_2\,dx$.

Уравнение

$$(y+g)\,y'=f_2y^2+f_1y+f_1g-f_2g^2$$

имеет решение

$$y=-g+E\int(f_1+g'-2f_2g)\,E^{-1}\,dx,$$

где $E=\exp\int f_2\,dx$.

(б) $[g_1(x)\,y+g_0(x)]\,y'=f_2(x)\,y^2+f_1(x)\,y+f_0(x)$.

Если $g_0(2f_2+g_1')=g_1(f_1+g_0')$ и $g_1\neq 0$, то

$$\frac{g_1y^2+2g_0y}{g_1I}=2\int\frac{f_0}{g_1I}\,dx+C,$$

где $I=\exp\int\frac{2f_2}{g_1}\,dx$.

(в) $[g_1(x)\,y+g_0(x)]\,y'=\sum\limits_{\nu=0}^{3}f_\nu(x)\,y^\nu$.

Пусть g_1 и g_0 дифференцируемы и $g_1\neq 0$. Если $y(x)$ — решение этого уравнения и $g_1y+g_0\neq 0$, то подстановка

$$g_1y+g_0=1/u(x)$$

приводит это уравнение к виду п. 4.10. Если $f_0\equiv 0$, то подстановка $y=u^{-1}$ дает уравнение вида (а):

$$(g_0u+g_1)\,u'+f_1u^2+f_2u+f_3=0.$$

См. E. Haentzschel, *Journal f. Math.* 112 (1893), стр. 148—155.

4.12. Уравнение в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение вида

$$h(x, y)y' + g(x, y) = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует такая функция $F(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка, что $F_x = g$, $F_y = h$. Тогда $F(x, y)$ является общим интегралом дифференциального уравнения (см. п. 1.1), а решения уравнения суть те дифференцируемые функции $y = \varphi(x)$, для которых $F(x, \varphi(x)) = \text{const}$.

Если g, h, g_y, h_x определены и непрерывны в некоторой односвязной области $G(x, y)$, то дифференциальное уравнение будет уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $g_y = h_x$.

Общий интеграл представляется в виде

$$F(x, y) = \int_{(\xi, \eta)}^{(x, y)} (g\,dx + h\,dy),$$

где (ξ, η) — произвольная точка в G, а интеграл берется по любой непрерывной спрямляемой кривой, лежащей в G и соединяющей (ξ, η) с (x, y). Однако обычно удобнее сперва найти такую функцию $\Phi(x, y)$, что $\Phi_x = g$, а затем, положив $F = \Phi + \Psi(y)$, подобрать Ψ так, чтобы выполнялось и условие $F_y = h$.

4.13. Интегрирующий множитель. Функция $M(x, y) \neq 0$ называется *интегрирующим множителем* дифференциального уравнения $g + hy' = 0$, если

$$Mg + Mhy' = 0$$

есть уравнение в полных дифференциалах (см. п. 4.12). Так как по предположению $M \neq 0$, то это уравнение имеет те же решения, что и исходное. Если G, g и h удовлетворяют указанным в п. 4.12 условиям, то функция $M(x, y) \neq 0$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка, будет интегрирующим множителем в том и только в том случае, если

$$h\frac{\partial M}{\partial x} - g\frac{\partial M}{\partial y} = M\left(\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right).$$

Если g и h имеют непрерывные частные производные первого порядка и $|g| + |h| > 0$, то это уравнение разрешимо во всякой ограниченной подобласти G_1 области G, лежащей вместе со своей границей внутри G[1]. Таким образом, принципиально каждое обыкновенное дифференциальное уравнение может быть решено методом интегрирующего множителя. Однако

[1]) E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **41** (1936), стр. 66, **42** (1937), стр. 287 и сл.

фактическое нахождение такого множителя может оказаться весьма сложным.

Если известны два интегрирующих множителя M_1 и M_2, имеющих непрерывные частные производные первого порядка, и если

$$\frac{D(M_1,\ M_2)}{D(x,\ y)} = M_{1x}M_{2y} - M_{1y}M_{2x} \neq 0,$$

то решения исходного дифференциального уравнения суть такие функции $y = \varphi(x)$, для которых $\dfrac{M_1(x,\ \varphi(x))}{M_2(x,\ \varphi(x))} = \text{const}$.

Уравнение имеет интегрирующий множитель:

$M = (xg + yh)^{-1}$, если выражение в скобках не обращается в нуль, а g и h — однородные функции одной и той же степени однородности;

$M = (xg - yh)^{-1}$, если выражение в скобках не обращается в нуль и $g = yg_1(x \cdot y)$, $h = xh_1(x \cdot y)$;

зависящий только от x, если $(g_y - h_x)/h$ зависит только от x;

множитель вида $M = m(x) \cdot n(y)$, если выражение $g_y - h_x$ может быть представлено в виде $gY(y) - hX(x)$;

$M = (g^2 + h^2)^{-1}$, если $g_x = h_y$, $g_y = -h_x$, т. е. если $g + ih$ является в области G регулярной функцией комплексного переменного $x + iy$.

4.14. $F(y', y, x) = 0$, «интегрирование посредством дифференцирования». Если решение $y = \varphi(x)$ имеет не обращающуюся в нуль вторую производную $\varphi''(x)$, то для функции $t = \varphi'(x)$ существует дифференцируемая обратная функция $x = x(t)$. Дифференцируя заданное дифференциальное уравнение по t, получим, если только $F_x + tF_y \neq 0$, следующие уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{F_t}{F_x + tF_y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{tF_t}{F_x + tF_y}.$$

Если решить эту систему двух дифференциальных уравнений, то получится в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ решение исходного дифференциального уравнения $F = 0$. Остается еще исследовать, могут ли таким путем быть получены все решения или же при некоторых условиях часть решений будет потеряна.

4.15. (а) $y = G(x, y')$; (б) $x = G(y, y')$.

Для (а) метод, рассмотренный в п. 4.14, дает: если $x(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{G_t(x,\ t)}{t - G_x(x,\ t)}$$

и если в этом уравнении и числитель и знаменатель не обращаются в нуль, то

$$x = x(t), \qquad y = G(x(t),\ t)$$

есть решение в параметрической форме.

Для (б) метод, рассмотренный в п. 4.14, дает: если $y(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \frac{tG_t(y, t)}{1 - tG_y(y, t)}$$

и если G_t и знаменатель этого уравнения не обращаются в нуль, то

$$x = G(y(t), t), \quad y = y(t)$$

есть решение в параметрической форме.

4.16. (а) $G(y', x) = 0$; (б) $G(y', y) = 0$.

Для (а). Если это уравнение может быть разрешено относительно y', то его интегрирование не представляет никакого труда. Если ограничиться теми решениями $y(x)$, для которых $y' \neq 0$, то, рассматривая y как независимое переменное, а x как функцию, можно свести это уравнение к случаю (б).

Для (б). В ряде случаев это уравнение может быть сведено к типу п. 4.1, т. е. $y' = g(y)$, или же к типу п. 4.17 (а). Кроме того, все решения, имеющие непрерывную производную y', можно также получить, если найти все такие непрерывные функции $\varphi(u) \neq 0$ и все такие непрерывно дифференцируемые функции $\psi(u)$, что $G(\varphi(u), \psi(u)) \equiv 0$ и $\psi'(u) \neq 0$. Тогда решения представляются в параметрической форме следующим образом:

$$x = \int \frac{\psi'(u)}{\varphi(u)}\, du, \quad y = \psi(u).$$

4.17. (а) $y = g(y')$; (б) $x = g(y')$.

Для (а). Пусть в некотором не содержащем нуля интервале (t_1, t_2) функция $g(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема, $t_1 < t_0 < t_2$, ξ произвольно, $\eta = g(t_0)$, и пусть a — нижняя, а b — верхняя грани значений выражения

$$\xi + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{t}\, dt.$$

Тогда существует одна и только одна проходящая через точку (ξ, η) интегральная кривая $y = \varphi(x)$, определенная на интервале $a < x < b$ и имеющая следующее параметрическое представление:

$$x = \xi + \int_{t_0}^{t} \frac{g'(t)}{t}\, dt, \quad y = g(t).$$

Для (б). Пусть $g(t)$ — строго монотонная и непрерывно дифференцируемая функция на интервале $t_1 < t < t_2$, и пусть a — нижняя, а b — верхняя грань значений $g(t)$. Тогда для каждого ξ, такого, что $a < \xi < b$, любого η существует одна и только одна интегральная кривая $y=\varphi(x)$, проходящая через точку (ξ, η). Она существует на интервале $a<x<b$ и определяется параметрическими уравнениями

$$x=g(t), \quad y=\eta+\int_{t_0}^{t} tg'(t)\,dt,$$

причем $g(t_0)=\xi$.

4.18. Уравнения Клеро.

(а) $y=xy'+g(y')$. Если функция $g(t)$ в точке $t=a$ определена, то прямая

$$y=ax+g(a)$$

есть решение. Если $g'(t)$ существует и не обращается в нуль в интервале $t_1<t<t_2$, то интегральными кривыми являются: кривая, определяемая параметрическими уравнениями

$$x=-g'(t), \quad y=-tg'(t)+g(t),$$

касательные $y=ax+g(a)$ к ней и кривые, состоящие из отрезка первой кривой и касательных в его концах.

(б) $F(y-xy', y')=0$. Решая это уравнение относительно $y-xy'$, сводим его к предыдущему случаю.

4.19. Уравнение Лагранжа — Даламбера. Это уравнение имеет следующий вид:

$$y=xf(y')+g(y').$$

Изоклинами этого уравнения являются прямые $y=xf(c)+g(c)$.

При $f(t)=t$ уравнение сводится к рассмотренному в п. 4.18.

Если $f(t)$, $g(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на интервале $\tau_1<t<\tau_2$, то можно получить все решения $y=\varphi(x)$, имеющие непрерывную производную и удовлетворяющие неравенствам

$$f(\varphi'(x)) \neq \varphi'(x), \qquad xf'(\varphi'(x))+g'(\varphi'(x)) \neq 0, \tag{9}$$

выбирая числа x_0, t_0 так, чтобы в некоторой окрестности точки t_0 выполнялось неравенство $f(t)\neq t$, а функция

$$x=\left(\exp\int_{t_0}^{t}\frac{f'(t)}{t-f(t)}\,dt\right)\left\{x_0+\int_{t_0}^{t}\frac{g'(t)}{t-f(t)}\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{f'(t)}{f(t)-t}\,dt\right)dt\right\} \tag{10}$$

имела бы отличную от нуля производную. Именно, пусть (t_1, t_2) — наибольший содержащийся в (τ_1, τ_2) интервал, в котором выполнены эти условия; тогда решение, определенное на интервале $t_1<t<t_2$ в параметрической форме, дается уравнением (10) и уравнением $y=xf(t)+g(t)$. При этом нужно еще исследовать, не будут ли в силу ограничений (9) потеряны некоторые решения.

4.20. $F(x, xy' - y, y') = 0$. Преобразование Лежандра. Если $y = x(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $y'' \neq 0$, то функция $X = y'(x)$ имеет дифференцируемую обратную функцию $x = h(X)$. Функция

$$Y = Y(X) = Xh(X) - y(h(X))$$

дважды дифференцируема и

$$X = x'(x), \quad Y(x) = xy'(x) - y(x), \quad Y'(X) = x,$$
$$x = Y'(X), \quad y(x) = XY'(X) - Y(X), \quad y'(x) = X,$$

причем $Y''(X) \neq 0$. Это — так называемое преобразование Лежандра. Оно переводит каждое решение $y(x)$ $(y'' \neq 0)$ исходного уравнения в решение уравнения $F(Y', Y, X) = 0$, которое иногда интегрируется проще. Если $Y(X)$ есть решение этого уравнения и $Y'' \neq 0$, то уравнения

$$x = Y'(X), \quad y = XY'(X) - Y(X)$$

дают в параметрической форме решение исходного уравнения.

ГЛАВА II

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

§ 5. Основные понятия

5.1. Обозначения и геометрический смысл системы дифференциальных уравнений. Мы будем рассматривать в этой главе системы уравнений вида

$$y'_\nu = f_\nu(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \quad (\nu = 1,\ \ldots,\ n). \tag{1}$$

Решением, *интегралом* или *интегральной кривой* системы (1) называется совокупность n дифференцируемых функций

$$y_1 = \varphi_1(x),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x),$$

удовлетворяющих уравнениям (1). Систему чисел $x, y_1, \ldots, y_n$ будем рассматривать как точку в $(n+1)$-мерном пространстве, а систему чисел $x, y_1, \ldots, y_n, p_1, \ldots, p_n$, где $p_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ — как линейный элемент в этом пространстве. Совокупность линейных элементов, соответствующих данной системе дифференциальных уравнений, образует поле направлений, которое можно рассматривать как наглядное представление этой системы. (О наглядном представлении в полном смысле этого слова можно говорить лишь при $n = 1$ и $n = 2$.)

Систему (1) можно записать в векторной форме

$$\mathfrak{y}'(x) = \mathfrak{f}(x,\ \mathfrak{y}).$$

Здесь $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{f}$ означают векторы

$$\mathfrak{y} = (y_1,\ \ldots,\ y_n), \quad \mathfrak{f} = (f_1,\ \ldots,\ f_n).$$

5.2. Существование и единственность решения. Справедлива следующая теорема существования Пеано: *если функции* $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$, $\nu = 1, \ldots, n$, *непрерывны в области* G $(n+1)$-*мерного пространства переменных* $x, y_1, \ldots, y_n$, *то через каждую точку* $P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ *области* G *проходит по крайней мере одна* *интегральная кривая, и каждая из этих кривых может быть продолжена в обе стороны вплоть до границы любой замкнутой области, целиком содержащейся в G и содержащей точку P внутри себя.*

Если через точку P проходит более чем одна интегральная кривая, то через нее проходит целый пучок, содержащий бесконечно много интегральных кривых. В пересечении с каждой плоскостью $x = x_0$ этот пучок дает некоторый континуум. Если Q есть некоторая точка на границе пучка, то существует интегральная кривая, соединяющая Q с P и состоящая на отрезке между Q и P только из граничных точек пучка [1]).

Через каждую точку $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ проходит *единственная* интегральная кривая, если функции f_ν имеют частные производные по y_k, непрерывные по $x, y_1, \ldots, y_n$ в области G, или если каждая функция f_ν удовлетворяет *условию Липшица*:

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant L \sum_{k=1}^{n} |\bar{y}_k - y_k|. \tag{2}$$

[В связи с рассмотренными вопросами см. также ч. III, 8.26. *Прим. ред.*]

5.3. Теорема существования Каратеодори. Пусть функции $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$, определенные в области G:

$$a < x < b; \quad -\infty < y_1, \ldots, y_n < +\infty,$$

при любых фиксированных значениях $y_1, \ldots, y_n$ измеримы по x, а при каждом фиксированном значении x, принадлежащем некоторому подмножеству полной меры интервала $a < x < b$, непрерывны по $y_1, \ldots, y_n$; наконец, пусть

$$|f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где $M(x)$ — некоторая интегрируемая по Лебегу функция на интервале $a < x < b$. Тогда для каждой точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ области G существует система непрерывных функций $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$, удовлетворяющих на интервале $a < x < b$ уравнениям

$$y_\nu(x) = \eta_\nu + \int_\xi^x f_\nu(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))\, dx \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Всюду, где подынтегральное выражение непрерывно, функции y_ν удовлетворяют системе (1). Если функции $y_\nu(x)$ удовлетворяют уравнениям (3) и если при любых значениях $\bar{y}_\nu$ выполнено обобщенное условие Липшица

$$|f_\nu(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_\nu(x, y_1(x), \ldots, y_n(x))| \leqslant N(x) \sum_{p=1}^{n} |\bar{y}_p - y_p(x)|$$
$$(\nu = 1, \ldots, n),$$

---

[1]) H. Kneser, *Sitzungsberichte Preuß. Akad.* (1923), стр. 171—174; M. Müller, *Math. Zeitschrift* 28 (1928), стр. 349—355. M. Fukuhara, *Proceedings Acad. Tokyo* 6 (1930), стр. 360—362; E. Kamke, *Acta Math.* 58 (1932), стр. 71; E. Digel, *Math. Zeitschrift* 39 (1934), стр. 157—160.

где $N(x)$ — некоторая интегрируемая по Лебегу функция, то система (3) имеет *единственное* решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ и это решение непрерывно зависит от $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ [1]).

Применение этой теоремы к уравнению Томаса — Ферми см. ч. III, 6.100.

5.4. Зависимость решения от начальных условий и от параметров. Если функции $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывны в области G и если система (1) *простая*, т. е. если через каждую точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ в области G проходит только одна интегральная кривая, то мы обозначим через

$$y_1 = \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, y_n = \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$$

эту кривую, продолженную до границ области G. Функции φ_ν, рассматриваемые как функции своих $n+2$ аргументов, называются *характеристическими функциями*. Каждая из них в своей области определения есть непрерывная функция своих $n+2$ аргументов. Если f_ν имеют непрерывные частные производные по y_ν порядка $r\,(r \geqslant 1)$, то и φ_ν имеют непрерывные частные производные r-го порядка по всем своим аргументам, с тем лишь ограничением, что в каждую из этих производных входит не более одного дифференцирования по x или по ξ (если f_ν имеют непрерывные частные производные порядка r по всем своим $n+1$ аргументам, то это ограничение отпадает). Далее,

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi} + \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n) \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \eta_k} = 0$$

и функциональный детерминант

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_1} \\ \cdot & \cdot \; \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_n} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}$$

равен

$$\exp \int_{\xi}^{x} \sum_{\nu=1}^{n} f'_{\nu(y_\nu)}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_n))\, dx,$$

где

$$f'_{\nu(y_k)} = \frac{\partial}{\partial y_k} f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n).$$

---

[1]) [Подробнее см., например, Коддингтон и Левинсон; Хартман, Сансоне, ч. I. — *Прим. ред.*]

Эта теорема, принадлежащая Линделёфу, играет основную роль в теории линейных уравнений с частными производными.

Если функции f_ν зависят еще и от каких-либо параметров, например $f_\nu = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n, \mu_1, \ldots, \mu_k)$, то, конечно, от параметров $\mu_1, \ldots, \mu_k$ зависят и функции φ_ν. Если f_ν зависят от параметров непрерывно, то это же верно и для φ_ν; аналогично дифференцируемость f_ν по μ влечет за собой то же самое и для φ_ν [1]).

5.5. Вопросы устойчивости. Во многих приложениях роль независимого переменного играет время. Система (1) записывается в этом случае в следующих обозначениях:

$$x'_\nu(t) = f_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Здесь $x_\nu = x_\nu(t)$ — искомые функции, определяющие траекторию движущейся точки. Если функции f_ν непрерывны в области

$$t \geqslant \tau, \quad -\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty$$

и система (4) простая (см. п. 5.4) в этой области, то из п. 5.4 для каждого решения

$$x_1 = \varphi_1(t, \tau, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0), \ldots, x_n = \varphi_n(t, \tau, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \tag{5}$$

системы (4) вытекает следующее. Если при некоторых фиксированных значениях $\tau, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ траектория (5) существует для всех $t \geqslant \tau$, то все траектории, проходящие через точки, близкие к точке $(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$, остаются при всех значениях t, удовлетворяющих условию $\tau \leqslant t \leqslant T$, вблизи траектории (5). Точнее: для любых $T > \tau$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что все решения

$$x_1 = \varphi_1(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \ldots, x_n = \varphi_n(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) \tag{6}$$

при $\tau \leqslant t \leqslant T$ существуют и удовлетворяют неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \varphi_\nu(t, \tau, \xi_1, \ldots, \xi_n) - \varphi_\nu(t, \tau, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \right| \leqslant \varepsilon, \tag{7}$$

если только

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left| \xi_\nu - \xi_\nu^0 \right| \leqslant \delta. \tag{8}$$

Если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что, как только выполнено условие (8), решение (6) даже на всей полупрямой $\tau \leqslant t < \infty$ существует и удовлетворяет неравенству (7), то

[1]) Случай, когда f_ν непрерывны, но система не предполагается простой, рассмотрен E. Kamke, *Acta Math.* 58 (1932), стр. 57—85.

решение (5) называется *устойчивым по Ляпунову*[1]). Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ такого δ найти нельзя, то решение (5) называется *неустойчивым.*

При исследовании устойчивости можно, очевидно, без ограничения общности положить $\tau = \xi_1^0 = \ldots = \xi_n^0 = 0$. Далее, с помощью преобразования

$$y_\nu = x_\nu - \varphi_\nu(t, \tau, \xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \quad (\nu = 1, \ldots, n)$$

всегда можно свести вопрос к случаю, когда исследуемое на устойчивость решение состоит из n постоянных функций $0, \ldots, 0$.

Из всех обширных исследований по устойчивости[2]) и примыкающим сюда вопросам мы приведем здесь следующий результат[3]).

Пусть в системе

$$x_\nu' = a_{\nu,1} x_1 + \ldots + a_{\nu,n} x_n + \psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

(где a_ν, x_ν, ψ_ν могут принимать и комплексные значения) функции ψ определены и непрерывны в области $t \geqslant 0$, $|x_\nu| \leqslant a$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ и, кроме того,

$$\sum |\psi_\nu| \leqslant K \sum |x_\nu|$$

при некотором постоянном K. В частности, это означает, что $\psi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$, и поэтому $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ есть решение системы (9). Пусть, далее,

$$\frac{\sum |\psi_\nu|}{\sum |x_\nu|} \to 0 \quad \text{при} \quad \sum |x_\nu| \to 0, \qquad t \to \infty$$

---

[1]) [О других понятиях устойчивости см. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1952; Лефшец; Сансоне, т. II, гл. VII, § 1; Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, 1955, гл. IV, § 3. — *Прим. ред.*]

[2]) [Литература, касающаяся вопросов устойчивости по Ляпунову, особенно устойчивости автономных систем (см. п. 7.1), очень богата. См., например, А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950; Понтрягин; Еругин; Беллман; Лефшец; Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, 1967; Е. А. Барбашин, Введение в теорию устойчивости, 1967; Ж. Ла-Салль и С. Лефшец, Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, 1964; И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, 1966; В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд. ЛГУ, 1957; Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, 1959; Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, 1956; Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1964; К. А. Карачаров и А. Г. Пилютик, Введение в техническую теорию устойчивости движения, 1962. — *Прим. ред.*]

[3]) О. Perron, *Math. Zeitschrift* **29** (1929), стр. 129—160

и, наконец, пусть действительные части всех корней характеристического определителя

$$\operatorname{Det}|a_{p,q}-se_{p,q}|$$

отрицательны. Тогда решение $x_1=0,\ldots,x_n=0$ устойчиво.

§ 6. Методы решения

6.1. Метод ломаных. Поле направлений, соответствующее системе

$$y'(x)=f(x,\ y,\ z),\quad z'(x)=g(x,\ y,\ z),$$

лежит в трехмерном пространстве и потому оно мало пригодно для выяснения хода интегральных кривых. Поэтому здесь для первоначального суждения о ходе интегральных кривых целесообразно воспользоваться методом ломаных следующим образом: сделав чертежи для плоскости xy и для плоскости xz, вычислить из заданных уравнений величины $p(\xi)=y'(\xi)=f(\xi,\eta,\zeta)$ и $q(\xi)=z'(\xi)=g(\xi,\eta,\zeta)$; в плоскости xy провести отрезок в направлении, определяемом линейным элементом ξ, η, $p(\xi)$, до некоторой точки (ξ_1,η_1) и соответственно в плоскости xz провести отрезок из точки ξ, ζ в направлении, определяемом линейным элементом ξ, ζ, $q(\xi)$, до точки (ξ_1,ζ_1). В точке (ξ_1,η_1,ζ_1) можно тогда вычислить направления $p(\xi_1)=y'(\xi_1)$, $q(\xi_1)=z'(\xi_1)$. Для каждого из этих двух направлений откладывается в соответствующей плоскости отрезок, идущий из точки (ξ_1,η_1), соответственно (ξ_1,ζ_1), в точку (ξ_2,η_2), соответственно (ξ_2,ζ_2). Для точки (ξ_2,η_2,ζ_2) можно снова с помощью исходных дифференциальных уравнений вычислить два направления и т. д. О дальнейшем развитии этого метода см. п. 29.1 (а). Этот же способ может быть применен и для системы более чем двух уравнений.

6.2. Метод последовательных приближений Пикара — Линделёфа. Пусть функции $f_\nu(x,y_1,\ldots,y_n)$ в параллелепипеде

$$|x-\xi|<a,\quad |y_1-\eta_1|<b,\ \ldots,\ |y_n-\eta_n|<b \tag{1}$$

(a и b могут быть равны ∞) непрерывны, удовлетворяют условию Липшица § 5 (2) и пусть $|f_\nu|\leqslant A$ ($\nu=1,\ldots,n$). Чтобы найти интегральную кривую системы § 5 (1), проходящую через точку $(\xi,\eta_1,\ldots,\eta_n)$, положим $\varphi_{\nu,0}(x)\equiv\eta_\nu$ ($\nu=1,\ldots,n$) и определим последовательно функции $\varphi_{\nu,k}(x)$ ($\nu=1,\ldots,n$) для $k=$ $=1,2,\ldots$ следующим образом:

$$\varphi_{\nu,k}(x)=\eta_\nu+\int\limits_{\xi}^{x}f_\nu(x,\ \varphi_{1,k-1}(x),\ \ldots,\ \varphi_{n,k-1}(x))\,dx.$$

Тогда на интервале

$$|x-\xi|<\min(a,\ b/A) \tag{2}$$

функции $\varphi_{\nu, k}(x)$ сходятся при $k \to \infty$ к интегральной кривой, проходящей через точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, и справедлива следующая оценка:

$$|\varphi_{\nu, k}(x) - \varphi_\nu(x)| \leqslant \frac{A}{nL} \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{(nL\,|x-\xi|)^p}{p!}.$$

6.3. Применение степенных рядов[1]. Если функции f_ν могут быть разложены по степеням переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, то можно, аналогично п. 2.3, искать также и функции $y_\nu(x)$ в виде степенных рядов и, сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, вычислить неизвестные первоначально коэффициенты этих рядов. Получающиеся таким образом для функций $y_\nu(x)$ степенные ряды сходятся в области (2) в том случае, если ряды для функций f_ν сходятся в области (1), и дают в этой области искомое решение системы § 5 (1). Число A имеет здесь то же значение, что и в п. 6.2.

В отношении разложения решения в ряды по начальным значениям и по параметру имеет место следующее обобщение результатов, указанных в п. 2.5[2]. Если в системе

$$y_p'(x) = \sum_{q_0+\ldots+q_n \geqslant 1} f_{p, q_0, \ldots, q_n}(x)\,\rho^{q_0} y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n} \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

коэффициенты f при $0 \leqslant x \leqslant a$ непрерывны и если для некоторых фиксированных положительных постоянных A и r_ν выполнено неравенство

$$|f_{p, q_0, \ldots, q_n}(x)| \leqslant \frac{(q_0+q_1+\ldots+q_n)!}{q_0!\,q_1!\ldots q_n!} \cdot \frac{A r_p}{r_0^{q_0} r_1^{q_1} \ldots r_n^{q_n}},$$

то решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ с начальными значениями $y_p(0) = c_p$ $(p = 1, \ldots, n)$ может быть разложено в ряд по степеням $\rho, c_1, \ldots$ $\ldots, c_n$:

$$y_p = \sum_{q_0+\ldots+q_n \geqslant 1} \varphi_{p, q_0, \ldots, q_n}(x)\,\rho^{q_0} c_1^{q_1} \ldots c_n^{q_n},$$

и этот ряд абсолютно сходится в области

$$\frac{|\rho|}{r_0} + \frac{|c_1|}{r_1} + \ldots + \frac{|c_n|}{r_n} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} e^{-\nu(naA+1)}.$$

---

[1]) О применении, аналогично п. 2.4, рядов более общего вида см. O. Perron, *Sitzungsberichte Heidelberg*, 1920, вып. 9.

[2]) O. Perron, *Math. Annalen* **113** (1936), стр. 300. Ср. также § 12.

6.4. Связь с уравнениями в частных производных[1]**.** Система § 5 (1) тесно связана с однородным линейным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}=0. \tag{3}$$

Именно, если f_ν непрерывны в области G $(n+1)$-мерного пространства $x, y_1, \ldots, y_n$, то функция $z=\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, имеющая в G непрерывные частные производные первого порядка, в том случае будет решением уравнения (3), когда эта функция постоянна вдоль каждой интегральной кривой системы § 5 (1), т. е. когда для каждой интегральной кривой $y_1=\varphi_1(x), \ldots, y_n(x)=\varphi_n(x)$ системы § 5 (1) имеем: $\psi(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))=\text{const}$. Это обстоятельство может быть полезно (ср. п. 6.5) для решения системы § 5 (1).

6.5. Редукция системы с помощью известного соотношения между решениями. В некоторых случаях можно легко найти такую непрерывно дифференцируемую функцию $z=\psi(x, y_1, \ldots, y_n)$, которая вдоль каждой интегральной кривой рассматриваемой системы имеет некоторое постоянное значение и, следовательно, в силу п. 6.4 представляет собой решение уравнения (3) в частных производных. [Такая функция называется *первым интегралом* системы уравнений. — *Прим. перев.*]

Если известен первый интеграл, то, решая уравнение $\psi(x, y_1, \ldots, y_n)=C$ относительно одного из y_ν и подставляя полученное выражение вместо y_ν в исходную систему, можно уменьшить число искомых функций. Если известно n независимых функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ такого типа, то решение системы § 5 (1) может быть найдено просто решением системы уравнений

$$\psi_1=C_1,\ \ldots,\ \psi_n=C_n$$

относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$.

Например, из системы

$$y_1'=y_2+x;\qquad y_2'=y_1+x$$

получаем $(y_1-y_2)'+(y_1-y_2)=0$, откуда имеем первый интеграл

$$x+\ln|y_1-y_2|=C.$$

Далее, имеем также

$$y_1'+y_2'+2=y_1+y_2+2x+2,$$

[1]) [Подробнее см., например, в книгах: Петровский; Степанов; Еругин. — *Прим. ред.*]

и, следовательно, $x-\ln|y_1+y_2+2x+2|=C^*$. Из этих двух соотношений находим

$$y_1=-x-1+C_1e^{-x}+C_2e^{x},$$
$$y_2=-x-1-C_1e^{-x}+C_2e^{x}.$$

6.6. Редукция системы с помощью дифференцирования и исключения. Иногда часть искомых функций вместе с их производными может быть без труда исключена из системы путем дифференцирования некоторых из входящих в систему уравнений. При этом в системе появятся, конечно, производные более высоких порядков. Так, в примере, приведенном в п. 6.5, дифференцируя первое уравнение, получаем $y_1''=y_2'+1$, откуда, принимая во внимание второе, получаем уравнение $y_1''-y_1=x+1$, решение которого не представляет труда.

6.7. Теоремы об оценках.

(а) Пусть функции $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ и $g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(\nu=1, \ldots, n)$ непрерывны в области G $(n+1)$-мерного пространства $x, y_1, \ldots, y_n$; пусть, далее, g_ν удовлетворяют в этой области условию Липшица § 5(2) и пусть $|f_\nu-g_\nu|\leqslant\varepsilon$ $(\nu=1, \ldots, n)$.

Если $y_1=\varphi_1(x), \ldots, y_n=\varphi_n(x)$ и $y_1=\psi_1(x), \ldots, y_n=\psi_n(x)$, $a<x<b$, — интегральные кривые системы § 5(1) и системы

$$y_\nu'=g_\nu(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n) \qquad (\nu=1,\ \ldots,\ n)$$

соответственно, проходящие через точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, то

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\varphi_\nu(x)-\psi_\nu(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{L}\left(e^{nL|x-\xi|}-1\right).$$

Здесь, как и в случае одного уравнения, можно получить приближенное решение более сложной системы, переходя к соответствующим образом подобранной системе, интегрируемой проще.

(б) Пусть функции $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяют в области G $(n+1)$-мерного пространства $x, y_1, \ldots, y_n$ предположениям, указанным в п. 6.2 (непрерывность, ограниченность, условие Липшица). Пусть, далее,

$$y_1=\varphi_1(x),\ \ldots,\ y_n=\varphi_n(x) \quad \text{и} \quad y_1=\psi_1(x),\ \ldots,\ y_n=\psi_n(x),$$
$$a<x<b,$$

— две лежащие в области G непрерывно дифференцируемые кривые, проходящие соответственно через точки $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$ и $\bar\xi, \bar\eta_1, \ldots, \bar\eta_n$ и являющиеся приближенными решениями системы § 5(1) в том смысле, что

$$|\varphi_\nu'-f_\nu(x,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n)|\leqslant\varepsilon_1, \quad |\psi_\nu'-f_\nu(x,\ \psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)|\leqslant\varepsilon_2.$$

Тогда при $a<x<b$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu(x)-\psi_\nu(x)| \leqslant \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{L}\left(e^{nL|x-\xi|}-1\right)+$$

$$+\left\{n(A+\varepsilon_1+\varepsilon_2)|\xi-\bar{\xi}|+\sum_{\nu=1}^{n}|\eta_\nu-\bar{\eta}_\nu|\right\}e^{nL|x-\xi|}.$$

(в) [1]) Пусть точки $P(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ и $\bar{P}(\xi, \bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n)$ лежат в области G $(n+1)$-мерного пространства $x, y_1, \ldots, y_n$, причем

$$\eta_\nu \leqslant \bar{\eta}_\nu \quad (\nu=1, \ldots, n).$$

Пусть, далее, функции

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n), \quad g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (\nu=1, \ldots, n)$$

определены в G и при $x \geqslant \xi$ выполнены неравенства:

$$f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) < g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (\nu=1, \ldots, n); \tag{4}$$

пусть, кроме того, для каждого ν функция f_ν (или g_ν) есть монотонно возрастающая функция каждой из переменных y_μ, $\mu \neq \nu$. Если

$$y_1=\varphi_1(x), \ldots, y_n=\varphi_n(x)$$

— интегральная кривая системы § 5 (1), определенная при $\xi \leqslant x < \xi + a$ и проходящая через точку P, а

$$y_1=\psi_1(x), \ldots, y_n=\psi_n(x)$$

— интегральная кривая системы

$$y'_\nu = g_\nu(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (\nu=1, \ldots, n), \tag{5}$$

определенная при $\xi \leqslant x < \xi + a$ и проходящая через точку $\bar{P}$, то при $\xi < x < \xi + a$ имеем:

$$\varphi_\nu(x) < \psi_\nu(x) \quad (\nu=1, \ldots, n). \tag{6}$$

Если в неравенстве (4) поставить знак $\leqslant$ вместо $<$, то теорема останется в силе, если одновременно допустить знак равенства и в (6) и предположить, что f_ν и g_ν непрерывны, а система (5) простая (в смысле п. 5.4).

§ 7. Автономные системы

[Из многочисленных исследований, посвященных автономным системам и общим динамическим системам, можно указать следующие: Понтрягин; Еругин; Лефшец; В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная

[1]) E. Kamke, *Acta Math.* 58 (1932), стр. 74, 82; M. Picone, *Annali di Mat.* (4), 20 (1941), стр. 67—103.

теория дифференциальных уравнений, 1952; Д. Д. Биркгоф, Динамические системы, 1941; Э. Хопф, Эргодическая теория, *УМН* 4 (1949), вып. 1 (29), стр. 113; А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959; Коддингтон и Левинсон, гл. XIV. Литературу об устойчивости по Ляпунову для автономных систем см. в п. 5.5.]

7.1. Определение и геометрический смысл автономной системы. Мы будем рассматривать систему

$$\frac{dx_\nu}{dt}=f_\nu(x_1, \ldots, x_n) \qquad (\nu=1, \ldots, n), \tag{1}$$

которая отличается от рассмотренной в §§ 5, 6, во-первых, несущественными изменениями в обозначениях (t, x_ν вместо x, y_ν, как это уже было в п. 5.5), а во-вторых (и это существенно), тем, что независимое переменное не входит в f_ν явно. [Такая система называется *автономной. — Прим. ред.*]

В этом случае характеристические функции (см. п. 5.4) зависят уже не от t и τ отдельно, а только от разности $t-\tau$:

$$x_1=\varphi_1(t-\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n), \ \ldots, \ x_n=\varphi_n(t-\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{2}$$

Отсюда получается такое геометрическое истолкование интегральных кривых. При фиксированных $\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n$ выражения (2) можно рассматривать как параметрические уравнения некоторой кривой (характеристики) в n-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ или как траекторию некоторой точки, имеющей в момент времени $t-\tau$ координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Предположим, что в области G n-мерного пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$ система (1) — простая, т. е. что функции f_ν непрерывны в G и что для любого τ и любой точки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из G через точку $(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x_1, \ldots, x_n$ проходит единственная интегральная кривая; тогда и через каждую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ проходит единственная интегральная кривая, если только условиться отождествлять между собой все кривые, отличающиеся лишь моментами времени, в которые они пробегают точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Основной областью применения систем (1) является механика, в первую очередь динамика и гидродинамика. При этом рассматриваемый поток нужно считать несжимаемым, т. е. если интегральные кривые интерпретируются как линии тока жидкости, то нужно допустить, что объем любой ограниченной части этой жидкости не меняется во время движения.

При исследовании системы (1) и истолковании ее решений как траекторий точек в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ возникают некоторые сложности при наличии так называемых *особых* точек (точек покоя или стационарных точек); это те точки $(x_1, \ldots, x_n)$, в которых

$$f_1(x_1, \ldots, x_n)= \ldots =f_n(x_1, \ldots, x_n)=0.$$

В случае $n = 2$ полное исследование системы сводится к изучению поведения кривых вблизи особых точек (см. п. 7.2).

7.2. О поведении интегральных кривых в окрестности особой точки в случае $n = 2$ [1]**.** Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y). \tag{3}$$

Там, где $f \neq 0$, кривые, определяемые в плоскости xy этой системой, могут быть определены также и одним уравнением

$$y'(x) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{4}$$

В этом смысле система (3) эквивалентна этому одному уравнению, и часто исследование интегральных кривых уравнения (4) проводится в форме соответствующего исследования для системы (3). Точки покоя системы (3) суть особые точки (специального типа) уравнения (4).

При сформулированных в п. 7.1 условиях (непрерывность и простота) справедливо следующее: внутри каждой замкнутой траектории, внутренность которой принадлежит области $G(x, y)$, содержится по крайней мере одна точка покоя. Если односвязная область $G(x, y)$ содержит *единственную* точку покоя S, то возможен лишь один из следующих случаев (в качестве примера см. ч. III, 8.5):

(а) траектория является замкнутой кривой, внутри которой лежит точка S; все остальные замкнутые траектории, если они существуют, расположены так, что точка S лежит внутри каждой из них;

(б) траектория примыкает обоими концами к точке S, тогда и каждая другая замкнутая траектория, лежащая внутри первой, примыкает обоими концами к точке S;

(в) каждый конец траектории представляет собой спираль, асимптотически приближающуюся к кривой типа (а) или (б);

(г) один конец траектории достигает границы области G, а другой примыкает к точке S;

(д) один конец траектории достигает границы области G, а другой образует спираль, асимптотически приближающуюся к кривой типа (а) или (б);

(е) траектория проходит от одной точки на границе области G до другой.

---

[1] [См., например, Понтрягин; Еругин; Лефшец; Трикоми; А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон и А. Е. Майер, Качественная теория динамических систем второго порядка, 1966; В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1952; Коддингтон и Левинсон, гл. XV, XVI; Степанов; И. Г. Петровский, *Матем. сборник* 41 : 1 (1934), стр. 107—156. — *Прим. ред.*]

Особая точка называется:

у з л о м, если каждая траектория примыкает к ней, имея определенную касательную (рис. 9, 10);

ц е н т р о м, если она окружена только замкнутыми траекториями (рис. 11);

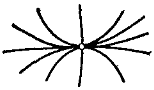

Рис. 9.

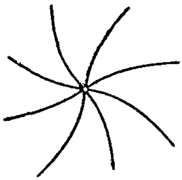

Рис. 10.

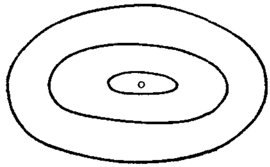

Рис. 11.

Рис. 12.

ф о к у с о м, если траектории асимптотически приближаются к ней, навиваясь на нее в виде спиралей (рис. 12);

с е д л о м, если две пары полутраекторий примыкают к ней, имея определенные касательные, а остальные кривые проходят в окрестности этой точки так, как должны идти горизонтали на карте местности, представляющей собой горный перевал (рис. 13).

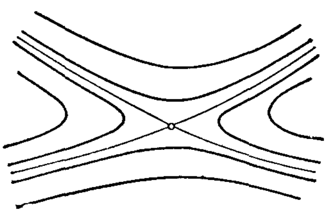

Рис. 13.

Эти случаи могут встречаться в различных комбинациях; например, между двумя замкнутыми кривыми, изображенными на рис. 11, вместо таких же замкнутых кривых могут лежать кривые, приближающиеся к этим двум в виде спиралей, или же «угол» на рис. 13 может представлять собой область, заполненную кривыми, аналогичными изображенным на рис. 9.

7.3. Критерии для определения типа особой точки. [Случай линейной системы

$$x'(t) = ax + by,$$
$$y'(t) = cx + dy$$

подробно рассмотрен в ч. III, 8.5. — *Прим. ред.*]

(А) Предположим, что система (3) имеет вид

$$x'(t) = ax + by + f(x, y), \quad y'(t) = cx + dy + g(x, y) \tag{5}$$

$$(ad - bc \neq 0).$$

(а) [1]) Пусть функции f, g имеют в некоторой окрестности начала координат непрерывные частные производные первого порядка и, кроме того, пусть

$$f(0,\ 0)=g(0,\ 0)=0,$$

$$\lim_{|x|+|y|\to 0}\frac{|f_x|+|f_y|+|g_x|+|g_y|}{(|x|+|y|)^{\delta}}=0 \quad \text{при некотором} \quad \delta>0.$$

Тогда начало будет узловой точкой, если выполнено одно из следующих трех условий:

$$(a-d)^2+4bc>0, \qquad ad-bc>0, \tag{6}$$

$$(a-d)^2+4bc=0,\ |b|+|c|>0, \tag{7}$$

$$a=d, \quad b=c=0. \tag{8}$$

При этом через каждую достаточно близкую к началу точку проходит одна и только одна интегральная кривая, и все эти кривые примыкают к началу координат. В случае (6) все эти кривые имеют в начале координат общую касательную, за исключением двух полухарактеристик, также имеющих общую касательную, но уже другую (рис. 9). В случае (7) все кривые примыкают к началу координат, имея общую касательную, в то время как в случае (8) в каждом направлении к началу подходит одна и только одна кривая (рис. 10).

(б) [2]) Пусть в некоторой окрестности начала координат функции f, g непрерывны; далее, пусть

$$f(x,\ y)=o(|x|+|y|), \qquad g(x,\ y)=o(|x|+|y|)$$

при $|x|+|y|\to 0$ и разностные отношения

$$\frac{f(x_2,\ y)-f(x_1,\ y)}{x_2-x_1}, \qquad \frac{g(x_2,\ y)-g(x_1,\ y)}{x_2-x_1},$$

$$\frac{f(x,\ y_2)-f(x,\ y_1)}{y_2-y_1}, \qquad \frac{g(x,\ y_2)-g(x,\ y_1)}{y_2-y_1}$$

ограничены. Тогда через каждую точку, достаточно близкую к началу, но не совпадающую с ним, проходит одна и только одна траектория.

Далее, если

$$(a-d)^2+4bc>0, \quad ad-bc<0, \tag{9}$$

то существуют по крайней мере две пары полутраекторий, примыкающих к началу с двумя определенными, отличными друг от друга касательными. Кроме того, если при приближении к началу координат указанные выше четыре разностных отношения

[1]) O. Perron, *Math. Zeitschrift* **15** (1922), стр. 121; G. Hohelsel, *Jahresbericht DMV* **42** (1932), стр. 33.

[2]) O. Perron, *Math. Zeitschrift* **16** (1923), стр. 273—295; S. K. Zaremba, *Bulletin Acad. Polonaise Cracovie A* (1934), стр. 197—207.

стремятся к нулю, то мы имеем седло вида, изображенного на рис. 13.

Если

$$(a-d)^2+4bc<0 \tag{10}$$

и если, кроме того, $a+d\neq 0$ или

$$a+d=0 \quad \text{и} \quad (ax+by)\,g(x,\ y)\neq(cx+dy)\,f(x,\ y) \tag{11}$$

для всех точек, отличных от начала координат, то $(0,0)$ есть фокус. Если же второе из условий (11) не выполнено, то начало координат есть центр или центр и фокус одновременно, т. е. оно охватывается замкнутыми кривыми, между которыми могут быть расположены еще и спирали.

(Б)[1]) Пусть система (3) имеет вид

$$y'(t)=f(x,\ y),\quad x'(t)=\varphi(x),$$

тогда уравнение (4), определяющее траектории, запишется так:

$$\varphi(x)\,y'(x)=f(x,\ y). \tag{12}$$

Предположим, что $\varphi(x)$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant a$, $\varphi(x)>0$ при $0<x\leqslant a$ и $f(x,y)$ непрерывна при $0\leqslant x\leqslant a$, $|y-\eta|\leqslant b$.

Если, кроме того, интеграл

$$\xi=\int\limits_0^x\frac{dx}{\varphi(x)} \tag{13}$$

сходится, то ξ можно принять в уравнении (12) за независимую переменную. Полагая $u(\xi)=y(x)$, получаем уравнение

$$u'(\xi)=f(x(\xi),\ u)=f^*(\xi,\ u).$$

Если f удовлетворяет по y условию Липшица, то, согласно п. 1.2, существует единственное решение, такое, что $y(x)\to\eta$ при $x\to 0$.

Предположим теперь, что интеграл (13) расходится. Интегральные кривые могут примыкать к оси y только в тех точках $(0,\eta)$, в которых $f(0,\eta)=0$. Пусть $\eta=0$, $f(0,0)=0$ и

$$0<k<\left|\frac{f(x,\ y_2)-f(x,\ y_1)}{y_2-y_1}\right|<K \quad \text{при} \quad y_2\neq y_1,$$

так что выражение $[f(x,y_2)-f(x,y_1)](y_2-y_1)$ не меняет знака. Если оно отрицательно, то уравнение (12) имеет единственное решение, стремящееся к нулю при $x\to+0$; если оно положительно, то существует бесконечное множество решений, обладающих этим свойством. Далее, если $\varphi(x)=o(x)$ при $x\to 0$ и

[1]) O. Perron, *Math. Ann.* **75** (1914), стр. 256—273; J. Haag, *Bulletin Sc. math.* (2) **60** (1936), стр. 131—138.

если кривая, заведомо существующая, задаваемая уравнением $f(x, y) = 0$, имеет в начале координат определенную касательную, не совпадающую с осью y, то интегральная кривая, примыкающая к точке $(0, 0)$, касается в этой точке кривой $f(x, y) = 0$.

(B) Подробное исследование системы

$$x'(t) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu x^\nu y^{m-\nu} + f(x, y),$$

$$y'(t) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu x^\nu y^{m-\nu} + g(x, y),$$

где f и g имеют в начале координат нули более высоких порядков, чем стоящие перед ними суммы, провели M. Frommer, *Math. Ann.* **99** (1928), стр. 222—272. [Русский перевод: *УМН*, т. IX (1941), стр. 212—253. — *Прим. перев.*]; H. Forster, *Math. Zeitschrift* **43** (1938), стр. 271—320; E. R. Lonn, там же, **44** (1939), стр. 507—530; R. v. Mises, *Compos. math.* **6** (1938), стр. 203—220; M. Hukuhara, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3), **21** (1939), стр. 183—190; (3), **20** (1938), стр. 167—189, 409—441, 865—907.

ГЛАВА III

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 8. Произвольные линейные системы

8.1. Общие замечания. Мы будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$y'_p = f_p(x) + f_{p,1}(x)\, y_1 + \ldots + f_{p,n}(x)\, y_n \quad (p = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

причем f_p и $f_{p,q}$ непрерывны в интервале

$$-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty.$$

Система, получающаяся из системы (1) заменой всех f_p нулями, называется соответствующей *однородной* системой; f_p называются *возмущающими функциями.*

Если известны все решения соответствующей однородной системы и, кроме того, одно решение системы (1), то известны тем самым и *все* решения системы (1). Именно, если $\psi_1(x), \ldots$ $\ldots, \psi_n(x)$ есть некоторое решение системы (1), то все ее решения получаются, если в выражениях

$$y_1 = \psi_1 + \varphi_1, \ \ldots, \ y_n = \psi_n + \varphi_n$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ пробегают все решения соответствующей однородной системы [1]).

Изучение однородных систем особенно существенно потому, что, согласно п. 8.3, решение неоднородной системы может быть получено из решения соответствующей однородной системы одними квадратурами.

8.2. Теоремы существования и единственности. Методы решения. Если функции $f_{p,q}(x)$ и $f_p(x)$ непрерывны на интервале $a < x < b$, то для каждой системы значений $\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n$, где $a < \xi < b$, существует единственная интегральная кривая

$$y_1 = \psi_1(x), \ \ldots, \ y_n = \psi_n(x), \qquad (2)$$

---

[1]) [Теорию линейных систем см. в книгах: Понтрягин; Коддингтон и Левинсон; Хартман; Сансоне; Еругин; Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гродман и В. В. Немыцкий, Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, 1966. — *Прим. ред.*]

проходящая через точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, т. е. такая, что

$$\psi_1(\xi) = \eta_1, \ldots, \psi_n(\xi) = \eta_n, \tag{3}$$

и эта кривая определена на всем интервале $a < x < b$ [1]).

В качестве способов решения здесь, кроме общих методов, указанных в § 6, применимы и редукционные методы п. 8.3.

Можно, кроме того, пытаться аппроксимировать решение с начальными значениями (3) с помощью произвольно заданной последовательности линейно независимых функций [2]) $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, ... Для этого положим

$$y_p(x) = c_{p,1}\chi_1 + \ldots + c_{p,m}\chi_m \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

и подберем числа $c_{p,q}$, например, так, чтобы для некоторого определенного положительного числа r выполнялось условие

$$\sum_{p=1}^{n} \int_a^b \left| y_p' - \sum_{q=1}^{n} f_{p,q} y_q - f_p \right|^r dx = \min.$$

8.3. Сведѐние неоднородной системы к однородной. Пусть

$$\varphi_{p,1}(x), \ldots, \varphi_{p,n}(x) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

есть фундаментальная система решений (см. об этом п. 9.1) однородной системы и пусть Δ_ν означает детерминант, который получается из детерминанта

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n,1} & \cdots & \varphi_{n,n} \end{vmatrix}$$

заменой элементов ν-й строки функциями $f_1, \ldots, f_n$. Тогда функции

$$\psi_p(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_{\nu,p} \left(\int \frac{\Delta_\nu}{\Delta} dx + C_\nu \right) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

представляют собой все решения системы (1). По существу, следовательно, можно произвольную систему (1) рассматривать как решенную, если известно полное решение соответствующей однородной системы.

8.4. Теоремы об оценках. Наряду с общими оценками, приведенными в п. 6.7, имеют место, например, еще следующие результаты:

---

[1]) Из общей теоремы существования п. 5.3 следует, конечно, и в этом случае более общая теорема.

[2]) Это значит, что любая конечная система этих функций линейно независима.

(а) [1]) Пусть функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ на интервале $a \leqslant x < b$ дифференцируемы и при постоянных $M > 0$, $N \geqslant 0$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y'_\nu(x)| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(x)| + N.$$

Тогда для любых двух чисел x, ξ, принадлежащих указанному интервалу, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(x)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(\xi)| e^{M|x-\xi|} + \frac{N}{M}(e^{M|x-\xi|} - 1).$$

(б) Пусть функции $f_p(x)$, $f_{p,q}(x)$, $g_p(x)$, $g_{p,q}(x)$ на интервале $a \leqslant x < b$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам:

$$\sum_{p=1}^{n} |f_p| \leqslant A, \qquad \sum_{p=1}^{n} |f_{p,q}| \leqslant B,$$

$$\sum_{p=1}^{n} |f_p - g_p| \leqslant \delta, \qquad \sum_{p=1}^{n} |f_{p,q} - g_{p,q}| \leqslant \varepsilon.$$

Если (2) есть решение системы (1) с начальными значениями (3) и

$$z_1 = \chi_1(x), \ \ldots, \ z_n = \chi_n(x)$$

— решение системы

$$z'_p = g_p + \sum_{q=1}^{n} g_{p,q} z_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

с теми же начальными значениями, то

$$\sum_{p=1}^{n} |\psi_p - \chi_p| \leqslant \left\{ \frac{\delta}{B} + \frac{\varepsilon}{B} \left(\sum_{p=1}^{n} |\eta_p| + \frac{A}{B} \right) e^{B(b-a)} \right\} e^{(B+\varepsilon)(b-a)}. \tag{5}$$

Аналогичная оценка может быть без труда получена (с помощью (a)) и для отдельных $|\psi_p - \chi_p|$.

§ 9. Однородные линейные системы

9.1. Свойства решений. Фундаментальные системы решений. Мы будем рассматривать систему вида

$$y'_p = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x) y_q \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

[1]) E. Kamke, *Sitzungsberichte Heidelberg* (1930), вып. 17, стр. 10.

где функции $f_{p,q}(x)$ непрерывны на интервале

$$-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty.$$

Очевидно, что функции $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$ представляют собой решение любой системы (1). Это решение обычно называется *тривиальным*, а под *нетривиальным* понимают такое решение, которое не состоит из одних нулей.

Если каждая из p систем функций

$$\varphi_{\nu,1}(x), \ldots, \varphi_{\nu,n}(x) \quad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{2}$$

представляет собой решение системы (1), то и любая их линейная комбинация

$$\varphi_1 = \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,1}, \ \ldots, \ \varphi_n = \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,n}$$

с произвольными постоянными коэффициентами C_ν также есть решение. Если $p > n$, то любые p решений (2) линейно зависимы между собой, т. е. существуют такие постоянные C_ν, не все равные нулю, что

$$\sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,1} \equiv 0, \ \ldots, \ \sum_{\nu=1}^{p} C_\nu \varphi_{\nu,n} \equiv 0.$$

Для любых n решений (2) и любого ξ, $a < \xi < b$, имеем

$$\operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(x)| = \operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(\xi)| \exp \int_{\xi}^{x} \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\nu}(x)\,dx.$$

[Это — *формула Лиувилля. — Прим. ред.*]

Об n решениях (2) говорят, что они образуют *фундаментальную систему* решений, если они линейно независимы, или, что равносильно тому же, если $\operatorname{Det}|\varphi_{p,q}(x)| \neq 0$.

Систему (1) можно записать особенно просто, если ввести (зависящую от x) матрицу $\mathbf{F} = \|f_{p,q}\|$. Тогда нахождение фундаментальной системы решений равносильно отысканию такого решения *матричного* уравнения [1])

$$\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{F}\mathbf{Y}(x), \tag{1a}$$

для которого детерминант $|\mathbf{Y}(x)| \neq 0$; при этом столбцы матрицы $\mathbf{Y}(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнений (1).

---

[1]) Если $A = \|a_{p,q}\|$ и $B = \|b_{p,q}\|$ — две матрицы n-го порядка, то их произведение $C = AB$ (не равное, вообще говоря, BA) есть матрица с элементами $c_{p,q} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{p,\nu} b_{\nu,q}$. [Подробнее о матричной записи систем см., например, Понтрягин; Матвеев, гл. 11; Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, 1967; Беллман, гл. I. — *Прим. ред.*]

9.2. Теоремы существования и методы решения. Из теоремы существования п. 8.2 имеем: через каждую точку $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, такую, что $a < \xi < b$, проходит одна и только одна интегральная кривая

$$y_1 = \varphi_1(x), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(x),$$

причем эта кривая определена на всем интервале $a < x < b$. Далее, всегда существуют фундаментальные системы решений. Фундаментальную систему можно получить, если задать n таких систем чисел

$$\eta_{p,1}, \ \ldots, \ \eta_{p,n} \qquad (p = 1, \ \ldots, \ n),$$

что

$$\mathrm{Det}\,|\eta_{p,q}| \neq 0,$$

и, выбрав произвольное ξ, $a < \xi < b$, найти для каждого p интегральную кривую, проходящую через точку $(\xi, \eta_{p,1}, \ldots, \eta_{p,n})$.

На языке матричного исчисления эта теорема означает: для каждой постоянной матрицы $\mathbf{H} = \| \eta_{p,q} \|$ с отличным от нуля детерминантом матричное уравнение (1a) имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{Y}(\xi) = \mathbf{H}$.

Совокупность всех решений системы (1) состоит из тех решений, которые могут быть получены с помощью линейных комбинаций из некоторой фундаментальной системы решений.

Для решения системы (1), наряду с общими методами, изложенными в § 6, можно в некоторых случаях воспользоваться результатами п. 9 3.

Метод последовательных приближений п. 6.2 здесь может быть применен в следующей форме. Пусть (обозначения те же, что и в п. 9.1)

$$I\mathbf{F} = \int_\xi^x \mathbf{F}\,dx = \left\| \int_\xi^x f_{p,q}(x)\,dx \right\|;$$

через $\mathbf{F}I\mathbf{F}$ обозначим произведение матриц $\mathbf{F}$ и $I\mathbf{F}$ и для каждого натурального $m \geqslant 2$ положим

$$(I\mathbf{F})^m = I\mathbf{F}\,(I\mathbf{F})^{m-1} = \int_\xi^x \mathbf{F}\,(I\mathbf{F})^{m-1}\,dx,$$

и, наконец, положим $(I\mathbf{F})^0 = 1$. Тогда ряд из матриц

$$\mathbf{\Phi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (I\mathbf{F})^m$$

сходится при $a < x < b$ и столбцы матрицы $\mathbf{\Phi}$ образуют фундаментальную систему решений, удовлетворяющих в точке $x = \xi$

начальным условиям, определяемым столбцами единичной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ . & . \ . \ . \ . \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Если коэффициенты $f_{p,q}$ системы (1) суть однозначные аналитические функции комплексного переменного x, то все изложенное выше остается в силе при условии, что все $f_{p,q}$ регулярны в точке ξ. Ряд для Φ сходится и дает решение внутри так называемой звезды Миттаг-Леффлера, определяемой функциями $f_{p,q}$. Она получается, если соединить каждую из особых точек $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ всех функций $f_{p,q}$ с бесконечно удаленной точкой лучом, идущим в направлении от ξ к данной особой точке, а затем в плоскости x произвести разрезы вдоль каждого из этих лучей от соответствующей особой точки до бесконечности (рис. 14). Входящие в решение интегралы должны браться вдоль путей Γ, лежащих внутри оставшейся области[1]).

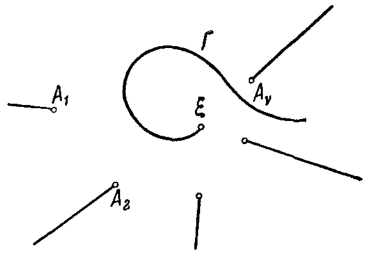

Рис. 14.

9.3. Редукция системы к системе с меньшим числом уравнений. Наряду с общими методами решения, изложенными в § 6, здесь нужно указать следующий прием, позволяющий свести систему (1) к системе такого же вида, но с меньшим числом уравнений, если известно одно нетривиальное решение исходной системы. Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — такое решение, причем $\varphi_1(x) \neq 0$, то оно может быть дополнено до фундаментальной системы решений следующим образом: найдем фундаментальную систему решений

$$\psi_{p,2}(x), \ldots, \psi_{p,n}(x) \qquad (p = 2, \ldots, n)$$

однородной системы, состоящей из $n-1$ уравнений

$$y'_\nu = \sum_{q=2}^{n} \left[f_{\nu,q}(x) - \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_1(x)} f_{1q}(x) \right] y_q \qquad (\nu = 2, \ldots, n), \tag{3}$$

---

[1]) Это так называемый метод Пеано — Бекера. См. Айнс. О доказательстве существования решения с помощью интеграла, рассмотренного Вольтерра и Шлезингером, см. G. Rasch, *Journ. f. Math.* 171 (1934), стр. 75—119.

и положим

$$\psi_{p,1}(x) = \int \frac{1}{\varphi_1(x)} \sum_{q=2}^{n} f_{1,q}(x)\,\psi_{p,q}(x)\,dx \qquad (p=2, \ldots, n);$$

тогда функции

$$\varphi_{p,1} = \psi_{p,1}\varphi_1, \ \varphi_{p,2} = \psi_{p,1}\varphi_2 + \psi_{p,2}, \ \ldots, \ \varphi_{p,n} = \psi_{p,1}\varphi_n + \psi_{p,n}$$
$$(p=2, \ldots, n)$$

вместе с исходным решением образуют фундаментальную систему решений первоначальной системы (1).

9.4. Сопряженная система дифференциальных уравнений. Линейные системы

$$u'_p = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\,u_q \qquad (p=1, \ldots, n) \tag{4}$$

и

$$v'_p = -\sum_{q=1}^{n} f_{q,p}(x)\,v_q \qquad (p=1, \ldots, n) \tag{5}$$

называются *сопряженными* друг с другом. Если $u_1, \ldots, u_n$ есть какое-либо решение системы (4), а $v_1, \ldots, v_n$ — решение системы (5), то, очевидно,

$$\sum_{p=1}^{n} (u_p v_p)' = 0 \quad \text{и, значит,} \quad \sum_{p=1}^{n} u_p v_p = \text{const}.$$

Если

$$u_{p,1}, \ \ldots, \ u_{p,n} \qquad (p=1, \ldots, n)$$

— фундаментальная система решений для (4), то функции

$$v_{p,1} = \frac{U_{p,1}}{U}, \ \ldots, v_{p,n} = \frac{U_{p,n}}{U} \qquad (p=1, \ldots, n), \tag{6}$$

где $U = \operatorname{Det}|u_{p,q}|$, а $U_{p,q}$ означает алгебраическое дополнение элемента $u_{p,q}$ в этом детерминанте, образуют фундаментальную систему решений для (5).

9.5. Самосопряженные системы дифференциальных уравнений. Система (4) называется *самосопряженной* (в строгом смысле), если при замене v_ν функциями u_ν система (5) переходит в систему (4). Иначе говоря, система (4) является самосопряженной в том и только в том случае, когда $f_{p,q} = -f_{q,p}$; в частности, это означает, что $f_{p,p} = 0$ для всех p. Это определение самосопряженной системы является во многих случаях слишком узким; например, система

$$u'_1 = u_2/f, \qquad u'_2 = -g u_1,$$

которая получается из самосопряженного уравнения (см. п. 24.1)

$$(f(x)y')' + g(x)y = 0,$$

если положить $u_1 = y$, $u_2 = fy'$, вообще говоря, не будет самосопряженной в этом смысле.

Мы будем называть систему (4) *самосопряженной* (в обобщенном смысле) в том случае, если существуют такие непрерывно дифференцируемые функции $T_{p,q}(x)$ $(p, q = 1, \ldots, n)$, что

$$\operatorname{Det}|T_{p,q}| \neq 0 \tag{7}$$

и что функции

$$v_p = \sum_{q=1}^{n} T_{p,q}(x) u_q(x) \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

пробегают совокупность всех решений системы (5), когда $u_1, \ldots, u_n$ пробегают все решения системы (4). Система (4) самосопряжена в этом смысле тогда и только тогда, когда система

$$T'_{p,q} = -\sum_{\nu=1}^{n} (T_{p,\nu} f_{\nu,q} + T_{\nu,q} f_{\nu,p}) \qquad (p,\ q = 1, \ldots, n)$$

имеет совокупность решений $T_{p,q}$, удовлетворяющих неравенству (7). Если

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)}$$

— некоторая самосопряженная или антисамосопряженная дифференциальная форма (см. п. 17.5), т. е. если $L^*(y) = \pm L(y)$, то дифференциальное уравнение $L(y) = 0$ всегда переходит при замене $y = u_1$, $y' = u_2$, $\ldots$, $y^{(n-1)} = u_n$ в систему, самосопряженную в этом расширенном смысле. Если при этом желать, чтобы все $T_{p,q}$ были постоянными, то необходимо выполнение равенства $f_{1,1} + f_{2,2} + \ldots + f_{n,n} = 0$; при $n = 2$ это условие является и достаточным.

9.6. Сопряженные системы дифференциальных форм; тождество Лагранжа, формула Грина. Пусть дифференциальная форма n-го порядка

$$L_{p,q}(u) = \sum_{\nu=0}^{n} f_{p,q,\nu}(x) u^{(\nu)}$$

определена с помощью функций $f_{p,q,\nu}$, каждая из которых ν раз непрерывно дифференцируема. Согласно п. 17.5, сопряженная дифференциальная форма

$$L^*_{p,q}(v) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (f_{p,q,\nu} v)^{(\nu)}$$

и связанная с ней билинейная дифференциальная форма $\mathcal{L}_{p,q}[u, v]$ удовлетворяют следующему тождеству Лагранжа:

$$vL_{p,q}(u) - uL^*_{p,q}(v) = \frac{d}{dx}\mathcal{L}_{p,q}[u, v].$$

Если для m функций $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ составить линейную дифференциальную форму

$$L_p(u_1, \ldots, u_m) = \sum_{q=1}^{m} L_{p,q}(u_q),$$

то дифференциальная форма

$$L^*_p(v_1, \ldots, v_m) = \sum_{q=1}^{m} L^*_{q,p}(v_q)$$

называется сопряженной с L_p. Тождество Лагранжа (см. п. 17.6) при этом имеет вид

$$\sum_{p=1}^{m}\left[v_pL_p(u_1, \ldots, u_m) - u_pL^*_p(v_1, \ldots, v_m)\right] = \frac{d}{dx}\sum_{p,\,q=1}^{m}\mathcal{L}_{q,p}[u_p, v_q]; \quad (8)$$

правая часть — билинейная форма относительно $u_p, u'_p, \ldots u_p^{(n-1)}$ и $v_p, v'_p, \ldots, v_p^{(n-1)}$, детерминант которой равен, с точностью до знака, n-й степени детерминанта

$$\mathrm{Det}|f_{p,q,n}(x)| \qquad (p,\ q = 1, \ldots, m).$$

Интегрируя (8) в пределах от a до b, получим *формулу Грина* (ср. п. 17.6).

9.7. Фундаментальные решения. n систем функций

$$g_{\nu,1}(x, \xi), \ldots, g_{\nu,n}(x, \xi) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

называются *фундаментальным решением* системы (4) на интервале $a < x < b$, если они обладают следующими свойствами:

(α) каждая функция $g_{p,q}(x, \xi)$ в каждом из двух треугольников $a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b$ и $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$ в плоскости $x\xi$ имеет по x непрерывные частные производные первого порядка;

(β) в каждом из этих двух треугольников каждая из систем (9) представляет собой при любом ξ некоторое решение системы (4);

(γ) при $a < \xi < b$

$$g_{\nu,k}(\xi + 0, \xi) - g_{\nu,k}(\xi - 0, \xi) = e_{\nu,k}\,[1].$$

---

[1]) Многие авторы пишут здесь $-e_{\nu,k}$ вместо $e^*_{\nu,k}$.

Фундаментальными решениями системы (4) являются:

$$g_{\nu, k}(x) = \begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{n} [c_{p,\nu}(\xi) - v_{p,\nu}(\xi)]\, u_{p,k}(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi, \\ \sum\limits_{p=1}^{n} c_{p,\nu}(\xi)\, u_{p,k}(x) & \text{при} \quad \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

причем

$$u_{p,1}, \ldots, u_{p,n} \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

есть некоторая фундаментальная система решений для (4), $v_{p,1}(x), \ldots, v_{p,n}(x)$ — соответствующие ей функции (6), а $c_{p,\nu}$ — произвольные непрерывные функции.

§ 10. Однородные линейные системы с особыми точками

10.1. Классификация особых точек[1]**.** Предположим теперь, что коэффициенты $f_{p,q}(x)$ системы § 9 (1) суть функции комплексного переменного x, которые в окрестности некоторой точки x_0 мероморфны, т. е. не имеют никаких особенностей, кроме полюсов. Без ограничения общности можно считать, что $x_0 = 0$. Тогда рассматриваемая система может быть представлена в виде

$$x^{\alpha} y_p'(x) = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где α — некоторое *целое* число и все функции $f_{p,q}(x)$ в точке $x = 0$ регулярны и не обращаются одновременно в нуль; иначе говоря, это означает, что функции $f_{p,q}$ могут быть представлены степенными рядами

$$f_{p,q}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p,q}^{(\nu)} x^{\nu}, \tag{2}$$

сходящимися в некоторой определенной окрестности нуля, причем не все $a_{p,q}^{(0)}$ равны нулю.

При $\alpha \leqslant 0$ точка $x = 0$ называется *регулярной*[2], а при $\alpha \geqslant 1$ — *особой*, в частности, при $\alpha = 1$ — *слабо особой* (регулярная особая точка), а при $\alpha \geqslant 2$ — *сильно особой* (нерегулярная особая точка); $\alpha - 1$ называют *рангом* особой точки.

---

[1]) [См. Айнс, гл. 19; Коддингтон и Левинсон, гл. IV, V; Еругин; Трикоми и литературу, указанную в § 18. — *Прим. ред.*]

[2]) Тогда имеет место случай, рассмотренный в п. 6.3.

Преобразование $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^{-1}$ переводит особую точку $x=0$ в точку $\xi=\infty$. Система (1) переходит при этом в

$$\eta_p'(\xi)=\xi^{\alpha-2}\sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(\xi)\,\eta_q \qquad (p=1,\ \ldots,\ n), \tag{3}$$

где $g_{p,q}(\xi)$ могут быть представлены теперь уже рядами по убывающим степеням ξ:

$$g_{p,q}(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p,q}^{(\nu)}\xi^{-\nu},$$

причем не все $a_{p,q}^{(0)}$ равны нулю. Введенные выше определения типа точки $x=0$ в соответствии с возможными значениями α переносятся и на точку $\xi=\infty$. См. также § 18.

10.2. Слабо особые точки. Если точка $x=0$ слабо особая, то система (1) имеет вид

$$xy_p'(x)=\sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\,y_q \qquad (p=1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

где функции $f_{p,q}$ даются равенствами (2) и обладают указанными выше свойствами. Решение системы (4) можно искать в виде

$$y_1=x^r\varphi_1(x),\ \ldots,\ y_n=x^r\varphi_n(x), \tag{5}$$

при этом каждый раз

$$\varphi_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{p,\nu}x^{\nu} \tag{6}$$

должен сходиться в некоторой фиксированной окрестности нуля и $c_{p,0}$ не должны быть все равны нулю одновременно.

Подставляя (5) в уравнения (4), получим

$$x\varphi_p'=f_{p,1}\varphi+\ \ldots\ +(f_{p,p}-r)\varphi_p+\ \ldots\ +f_{p,n}\varphi_n \quad (p=1,\ \ldots,\ n); \tag{7}$$

в частности, при $x=0$,

$$f_{p,1}(0)\,c_{1,0}+\ \ldots\ +[f_{p,p}(0)-r]\,c_{p,0}+\ \ldots\ +f_{p,n}(0)\,c_{n,0}=0$$
$$(p=1,\ \ldots,\ n). \tag{8}$$

Так как не все $c_{p,0}$ равны нулю, то r должно быть корнем характеристического уравнения

$$F(r)=0, \quad \text{где} \quad F(r)=\operatorname{Det}|f_{p,q}(0)-re_{p,q}|. \tag{9}$$

Пусть r будет одним из этих корней. Тогда числа $c_{1,0},\ \ldots,\ c_{n,0}$ можно выбрать так, чтобы они не были все равны нулю и удовлетворяли бы уравнению (8). Если подставить в (7) выражения (6), то получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x для каждого $k=1, 2, \ldots$, систему линейных уравнений

$$\sum_{q=1}^{n}\left[a_{p,q}^{(0)}-(r+k)\,e_{p,q}\right]c_{p,k}=-\sum_{q=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}a_{p,q}^{(k-\nu)}c_{p,\nu} \qquad (p=1, \ldots, n). \tag{10}$$

Если характеристическое уравнение (10) не имеет ни одного корня, который отличался бы от данного корня r на целое число, то из равенства (10) могут быть найдены при $k=1$ все числа $c_{p,1}$, затем ($k=2$) числа $c_{p,2}$ и т. д. Если же характеристическое уравнение имеет корень, отличающийся от r на целое число, то значения $c_{p,k}$ опять-таки можно найти, если из всех корней характеристического уравнения, отличающихся друг от друга на целое число, принять за r «наибольший», т. е. такой корень, что ни одно из чисел $r+1$, $r+2$, ... уже не удовлетворяет уравнению (9) [1]. Ряды (6) с найденными таким образом из (10) значениями $c_{p,\nu}$ сходятся в некоторой окрестности точки $x=0$, и определяемые этими рядами функции (5) представляют в этой окрестности (кроме точки $x=0$) решение системы (4), причем степень x^r нужно еще определить таким образом, чтобы это решение было регулярно в данной окрестности нуля (кроме самой точки $x=0$).

Если существуют характеристические корни, отличающиеся от «наибольшего» корня r на целое число (сюда входит также и случай, когда r есть кратный корень), то с помощью найденного решения система (4) может быть, согласно п. 9.3, сведена к меньшему числу уравнений, и к этой новой системе можно применять снова тот же самый прием. При этом получатся решения, имеющие в общем случае лишь логарифмические особенности.

Частным случаем системы (4) является линейное дифференциальное уравнение § 18 (5):

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} g_{\nu}(x)\, y^{(\nu)}=0;$$

оно переходит в систему вида (4), если положить

$$y_1(x)=y, \quad y_2(x)=xy_1', \ \ldots, \ y_n(x)=xy_{n-1}'.$$

Для случая действительного переменного рассматривались [2]) системы

$$xy_p'(x)=\sum_{q=1}^{n}\left[a_{p,q}+xf_{p,q}(x)\right]y_q \qquad (p=1, \ldots, n),$$

---

[1]) Эта осторожная формулировка необходима потому, что r может быть комплексным.

[2]) O. Dunkel, *Proceedings Americ. Acad.* 38 (1903), стр. 341—370

аналогичные системам (4). Здесь $a_{p,q}$ — постоянные, а функции $f_{p,q}(x)$ непрерывны при $0 < x < a$ и абсолютно интегрируемы при $0 \leqslant x < a$.

10.3. Сильно особые точки. Если точка $x = \infty$ сильно особая, то, согласно (3), в окрестности $x = \infty$ система имеет вид

$$y'_p(x) = x^\alpha \sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

где

$$g_{p,q}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{p,q}^{(\nu)} x^{-\nu},$$

причем не все $a_{p,q}^{(0)}$ равны нулю и α — некоторое неотрицательное целое число; $\alpha + 1$ есть ранг особой точки.

Если в систему (11) подставить вместо y_p выражения

$$y_p = e^{P(x)} x^s \varphi_p(x) \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{\alpha} \rho_\nu \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}, \qquad \varphi_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{p,k} x^{-k},$$

то, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, можно определить числа ρ_ν, s, $c_{p,k}$ [1]). Число $r = \rho_\alpha$ есть корень характеристического уравнения

$$\operatorname{Det} \left| a_{p,q}^{(0)} - r e_{p,q} \right| = 0.$$

Если это уравнение имеет кратные корни, то это вызывает некоторые осложнения. Если все его корни различны, то мы получаем формальное решение, которое, вообще говоря, расходится, однако в некоторой области представляет собой асимптотическое разложение решения при $|x| \to \infty$. С помощью обобщенного преобразования Лапласа [2]) можно получить сходящееся представление решения.

Если $x = 0$ — особая точка и если система имеет вид

$$x^{\alpha_p} y'_p(x) = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

где α_p — такие неотрицательные целые числа, что их сумма $\alpha = \sum \alpha_p < n$, и функции $f_{p,q}(x)$ регулярны в точке $x = 0$, то система имеет по крайней мере $n - \alpha$ линейно независимых решений, регулярных в точке $x = 0$ [3]).

---

[1]) Это выполнено, насколько нам известно, лишь в тех случаях, когда система (11) предварительно приведена к каноническому виду.

[2]) [См. Айнс, гл. 19; Сансоне, т. II, гл. X. — *Прим. ред.*]

[3]) F. Lettenmeyer, *Sitzungsberichte München* (1926), стр. 287—307.

§ 11. Поведение решений при больших значениях x[1])

Независимое переменное x будем считать опять действительным.

(а) Если в системе

$$y'_p(x) = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n)$$

функции $f_{p,q}(x)$ непрерывны и ограничены при $x \geqslant x_0$, то для каждого решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ существует такое (зависящее от этого решения) число λ, что при всех $p = 1, \ldots, n$

$$y_p(x)\, e^{\lambda x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

(б) Пусть в системе

$$y'_p(x) = f_p(x)\, y_p + \sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

функции f_p и $g_{p,q}$ непрерывны при $x \geqslant x_0$ и пусть $g_{p,q}(x) \to 0$ при $x \to \infty$ (например, все $g_{p,q} \equiv 0$).

Если

$$\Re f_1 > \Re f_p + c \qquad (c > 0;\ p = 2, \ldots, n),$$

то система (1) имеет такое решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, что $y_p y_1^{-1} \to 0$ $(p = 2, \ldots, n)$ и $y'_1 y_1^{-1} - f_1 \to 0$ при $x \to \infty$, и существует фундаментальная система, состоящая из решений этого вида.

Если выполнено более сильное условие

$$\Re f_p > \Re f_{p+1} + c \qquad (c > 0;\ p = 1, \ldots, n-1),$$

то существует такая фундаментальная система решений

$$y_{p,1}(x), \ldots, y_{p,n}(x) \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

что

$$\frac{y_{p,q}}{y_{p,p}} \to 0 \quad (q \neq p) \quad \text{и} \quad \frac{y'_{p,p}}{y_{p,p}} - f_p \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty;$$

в частности, если $f_p = \rho_p$ есть постоянная, то последнее соотношение означает

$$y'_{p,p}/y_{p,p} \to \rho_p.$$

---

[1]) [Различные результаты, относящиеся к этому вопросу, можно найти в следующих книгах: Еругин; Трикоми; Айнс, стр. 208 и сл.; Беллман, гл. II; Наймарк, § 22; И. М. Раппопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд. АН УССР, 1954; Л. Чезари, Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1964. — *Прим. ред.*]

Аналогичные утверждения можно, вообще говоря, высказать и о решениях системы вида

$$y'_p = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

где $f_{p,q}$ при $x \to \infty$ стремятся к некоторым предельным значениям [1]).

§ 12. Линейные системы, зависящие от параметра [2])

(а) Из п. 5.4 следует: пусть в системе

$$y'_p(x) = \sum_{q=1}^{n} f_{p,q}(x, \rho)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

функции $f_{p,q}$ имеют вид

$$f_{p,q}(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_{p,q,\nu}(x)\, \rho^{\nu}, \tag{2}$$

причем $g_{p,q,\nu}(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $|g_{p,q,\nu}(x)| \leqslant Gr^{-\nu}$, где G и r — некоторые постоянные, так что ряд (2) при $a \leqslant x \leqslant b$, $|\rho| < r$ сходится к непрерывной по x функции. Тогда для системы (1) существует такая фундаментальная система решений

$$y_{k,1}(x, \rho), \ldots, y_{k,n}(x, \rho) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

что все $y_{k,l}$ — аналитические функции от ρ, регулярные при $|\rho| < r$, и всякое решение $y_1(x, \rho), \ldots, y_n(x, \rho)$, которое при $x = a$ имеет начальные значения, не зависящие от ρ, само не зависит от ρ.

(б) Пусть система имеет вид [3])

$$y'_p(x) = \rho f_p(x)\, y_p + \rho \sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x, \rho)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

где f_p, $g_{p,q}$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и при всех достаточно больших ρ суть непрерывные функции от x, и пусть, далее,

$$\Re f_1(x) > \Re f_p(x) \qquad (p = 2, \ldots, n) \tag{3}$$

$$|g_{p,q}(x, \rho)| < g(\rho), \text{ причем } g(\rho) \to 0 \text{ при } \rho \to \infty.$$

---

[1]) O. Perron, *Journ. f. Math.* 142 (1913), стр. 254—270; 143 (1913), стр. 25—50; T. Peyovitch, *Bulletin Soc. Math. France* 61 (1933), стр. 85—94.

[2]) O. Perron, *Sitzungsberichte Heidelberg*, вып. 13 и 15 (1918); вып. 6 (1919). [См. также Коддингтон и Левинсон, гл. VI; Наймарк, §§ 4, 8. — *Прим. ред.*]

[3]) Функции f_p, $g_{p,q}$ могут иметь комплексные значения; x и ρ действительны.

Тогда существует такое решение $y_1(x, \rho), \ldots, y_n(x, \rho)$, что y_p имеют вид

$$y_p = \omega_p(x, \rho) \exp \rho \left[\int_a^x f_1(x)\, dx + \psi(x, \rho) \right] \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

причем $\omega_1 \equiv 1$ и при $\rho \to \infty$

$$\left.\begin{array}{lll} \psi(x, \rho) = O(g(\rho)), & \omega_p(x, \rho) = O(g(\rho)) & (p > 1), \\ \dfrac{d\psi}{dx} = O(\rho g(\rho)), & \dfrac{d\omega_p}{dx} = O(\rho g(\rho)) & (p > 1) \end{array}\right\} \tag{4}$$

равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Существует даже n линейно независимых решений такого типа.

Если вместо (3) выполнено более сильное условие

$$\Re f_1(x) > \Re f_2(x) > \ldots > \Re f_n(x),$$

то существует такая фундаментальная система решений

$$y_{k,1}(x, \rho), \ldots, y_{k,n}(x, \rho) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

что $y_{k,p}$ имеют вид

$$y_{k,p} = \omega_{k,p}(x) \exp \rho \left[\int_a^x f_k(x)\, dx + \psi_k(x, \rho) \right],$$

причем $\omega_{k,k} \equiv 1$ и выполнены условия, получающиеся из (4) заменой ψ, ω_p, $p > 1$, на ψ_k, $\omega_{k,p}$, $p \neq k$.

(в) Пусть в системе

$$y'_p(x) = \rho^m f_p(x) y_p + \rho^{m-1} \sum_{q=1}^{n} g_{p,q}(x, \rho) y_q \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

m есть некоторое натуральное число, функции $g_{p,q}(x, \rho)$ имеют равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ асимптотические разложения

$$g_{p,q}(x, \rho) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_{p,q,\nu}(x) \rho^{-\nu} \tag{6}$$

при $\rho \to \infty$, а f_p и $\varphi_{p,q,\nu}$ имеют производные всех порядков.

Если, кроме того,

$$\Re f_1(x) > \Re f_p(x) \qquad (p = 2, \ldots, n), \tag{7}$$

то существует такое решение $y_1(x, \rho), \ldots, y_n(x, \rho)$, что при $\rho \to \infty$

$$y_p(x) \sim \left\{ \exp \rho^m \sum_{\mu=0}^{m-1} h_\mu(x) \rho^{-\mu} \right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{p,\nu}(x) \rho^{-\nu}$$

равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; при этом выражения, стоящие справа, подобраны так, что они формально удовлетворяют системе (5). Получающиеся при формальном вычислении значений h_μ и $\omega_{p,\nu}$ постоянные интегрирования могут быть выбраны произвольно; поэтому можно, например, получить

$$h_0(x) = \int f_1(x)\,dx, \qquad \omega_{1,0} \neq 0, \qquad \omega_{2,0} = \ldots = \omega_{n,0} = 0.$$

Если вместо (7) выполнено более сильное условие

$$\Re f_1(x) > \Re f_2(x) > \ldots > \Re f_n(x), \tag{8}$$

то существует такая фундаментальная система решений

$$y_{k,1}(x, \rho), \ldots, y_{k,n}(x, \rho) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

что при $\rho \to \infty$

$$y_{k,p} \sim \exp\left\{\rho^m \sum_{\mu=0}^{m-1} h_{k,\mu}(x)\rho^{-\mu}\right\} \sum_{\nu=0}^{\infty} \omega_{k,p,\nu}(x)\rho^{-\nu}$$

равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, причем снова справедливы сделанные выше замечания, но только здесь

$$h_{k,0}(x) = \int f_k(x)\,dx, \qquad \omega_{k,k,0} \neq 0, \qquad \omega_{k,p,0} = 0 \quad \text{при} \quad p \neq k.$$

Если $m = 1$, то в (7) можно допустить знак равенства, если

$$f_1(x) \neq f_p(x) \quad \text{при} \quad p \neq 1 \quad \text{и} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Знак равенства может быть допущен также и в (8), если

$$f_p(x) \neq f_q(x) \quad \text{при} \quad p \neq q \quad \text{и} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

§ 13. Линейные системы с постоянными коэффициентами

13.1. Однородные системы. Мы будем теперь рассматривать систему

$$y'_p = a_{p,1}y_1 + \ldots + a_{p,n}y_n \qquad (p = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $a_{p,q}$ — заданные постоянные.

Если s_0 — некоторый действительный r-кратный корень характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - s & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - s & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & a_{n,n} - s \end{vmatrix}, \tag{2}$$

то система (1) имеет r линейно независимых решений вида

$$y_1 = P_{h,1}(x)e^{s_0x}, \ldots, y_n = P_{h,n}(x)e^{s_0x} \qquad (h = 1, \ldots, r), \tag{3}$$

где $P_{h,k}$ есть многочлен степени не выше $h-1$. В число решений всегда, следовательно, входит $(h=1)$ решение вида

$$y_1 = C_1 e^{s_0 x}, \ \ldots, \quad y_n = C_n e^{s_0 x}.$$

Если (2) имеет n различных действительных корней $s_1, \ldots, s_n$, то существует n линейно независимых решений вида

$$y_{\nu,1} = C_{\nu,1} e^{s_\nu x}, \ \ldots, \ y_{\nu,n} = C_{\nu,n} e^{s_\nu x} \quad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Если s_0 — комплексный r-кратный корень, то имеет место тот же результат, в предположении, что коэффициенты многочленов $P_{h,k}$ могут быть комплексными. Отделяя в функциях (3) действительную и мнимую части, получим систему $2r$ линейно независимых действительных решений системы (1). Если для каждого действительного корня и для одного из каждой пары сопряженных между собой комплексных корней многочлена (2) составить соответствующую систему линейно независимых решений, то в совокупности они образуют фундаментальную систему решений для (1). Каждое решение системы (1) может быть представлено как линейная комбинация решений указанного вида. Решения (3) находятся обычно проще всего, если подставить выражения вида (3) в уравнения (1).

13.2. Системы более общего вида. Пусть дана система

$$\sum_{\rho=1}^{n} P_{\nu,\rho}(D)\, y_\rho(x) = f_\nu(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $D = d/dx$ и $P_{\nu,\rho}(u)$ — многочлен с постоянными коэффициентами [1]).

Согласно § 14 такая система, если в нее входят производные высших порядков, может быть преобразована в другую систему, содержащую только производные первого порядка. Если, далее, такая система может быть приведена к виду (1), с той лишь, возможно, разницей, что справа могут стоять еще «возмущающие функции» $g_\nu(x)$, то можно решить сперва, согласно п. 13.1, соответствующую однородную систему, а затем, согласно п. 8.3, и неоднородную.

Много проще, однако, следующий прием: пусть $p_{\nu,\rho}(u)$ — алгебраическое дополнение элемента $P_{\nu,\rho}(u)$ детерминанта

$$\Delta(u) = \operatorname{Det} | P_{\nu,\rho}(u) |.$$

Так как с дифференциальными выражениями $P(D)$ можно производить такие же вычисления, как и с многочленами $P(u)$, если

1) [См. Понтрягин; Сансоне, т. II, гл. X. — *Прим. ред.*]

ограничиваться лишь действиями сложения и умножения, то решения системы (4) должны удовлетворять также и уравнениям

$$\Delta(D)\, y_\nu = \sum_{\lambda=1}^{n} p_{\lambda,\nu}(D)\, f_\lambda(x).$$

Это — уравнения типа § 22 (3). Исходя из этого, можно сказать, каков должен быть вид решений системы (4), и найти эти решения, подставив выражения соответствующего вида в уравнения (4). При этом, однако, следует иметь в виду, как показывает пример ч. III, 8.26, что для произвольной системы (4) могут возникнуть некоторые осложнения.

ГЛАВА IV

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

§ 14. Уравнения, разрешенные относительно старшей производной: $y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$

Решением или *интегралом* дифференциального уравнения

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

называется всякая n раз дифференцируемая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению. Дифференциальное уравнение (1) эквивалентно, очевидно, системе n уравнений первого порядка

$$y_0'=y_1,\ y_1'=y_2, \ldots, y_{n-2}'=y_{n-1},\ y_{n-1}'=f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

с n искомыми функциями $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. Поэтому теоремы существования и единственности, а также методы решения, изложенные в гл. II, непосредственно дают соответствующие результаты и для уравнения (1).

Следует отметить, что если функция $f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ непрерывна в области $G(x, y_0, \ldots. y_{n-1})$, то для каждой точки $(\xi, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1})$ из G существует по крайней мере одно решение $y=\varphi(x)$, определенное в некоторой окрестности точки ξ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(\xi)=\eta_0,\ \varphi'(\xi)=\eta_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(\xi)=\eta_{n-1};$$

если же функция f удовлетворяет, кроме того, еще и условию Липшица

$$|f(x, \bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_{n-1})-f(x, y_0, \ldots, y_{n-1})| \leqslant L\sum_{p=0}^{n-1}|\bar{y}_p-y_p|,$$

то такое решение единственно.

Для уравнений высших порядков, наряду с задачами определения решения *по начальным условиям* (задача Коши), когда в некоторой точке задаются значения искомой функции и ее $n-1$

первых производных, важную роль играют так называемые *краевые задачи*, в которых значения искомой функции и ее производных (или соотношения между ними) задаются в нескольких различных точках (см. ч. II).

§ 15. Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

15.1. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = f(x) \tag{1}$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция $\Phi(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$, что

$$F(x, u_0, \ldots, u_n) = \Phi_x + u_1\Phi'_{u_0} + \ldots + u_n\Phi_{u_{n-1}}$$

тождественно по переменным $x, u_0, \ldots, u_n$. Так как некоторая n раз дифференцируемая функция $\varphi(x)$ есть решение уравнения (1) в том и только в том случае, если

$$\Phi(x, \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) = \int f(x)\,dx,$$

то уравнение в полных дифференциалах может быть всегда сведено к уравнению более низкого порядка.

Если $F(x, u_0, \ldots, u_n)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно и если требовать, чтобы Φ имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то условие того, чтобы дифференциальное уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, состоит в следующем: положим

$$\Delta\Phi = \Phi_x + u_1\Phi_{u_0} + \ldots + u_n\Phi_{u_{n-1}},$$

$$\Delta_0 F = F_{u_n}, \quad \Delta_\nu F = F_{u_{n-\nu}} - \Delta\Delta_{\nu-1}F;$$

тогда функции $\Delta_\nu F$ должны быть независимы от u_n и $\Delta_n F$ должно быть равно 0, в частности, u_n может входить в F только линейно.

15.2. Обобщенно-однородные уравнения. Допустим, что $P(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ — целая рациональная функция, или сумма членов вида $ax^\alpha y^\beta y_1^{\beta_1} \ldots y_n^{\beta_n}$ [1]). Дифференциальное уравнение

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

называется *обобщенно-однородным*, если при соответствующем

[1]) Ср. также п. 4.7.

выборе чисел r и k, не равных нулю одновременно, все слагаемые в выражении

$$P(x^r, x^k, x^{k-r}, x^{k-2r}, \ldots, x^{k-nr})$$

имеют одну и ту же степень.

(а) $r \neq 0$; тогда можно считать $r = 1$. Подстановка

$$y(x) = |x|^k \eta(\xi), \quad \xi = \ln|x|$$

приводит к уравнению, не содержащему ξ явно и поэтому допускающему, согласно п. 15.3, понижение порядка.

(б) $r = 0$. Подстановка $u(x) = \dfrac{y'}{y}$ приводит к уравнению более низкого порядка.

15.3. Уравнения, не содержащие явно x или y.

(а) $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Решения $y = y(x)$, для которых $y' \neq 0$, имеют обратные функции $x = x(y)$, так что $p(y) = y'(x(y))$ есть некоторая функция от y и далее

$$y''(x) = pp', \quad y''' = p^2p'' + pp'^2, \ldots$$

Таким образом, это уравнение сводится к уравнению $(n-1)$-го порядка относительно $p(y)$. Если $p = \varphi(y) \neq 0$ есть решение этого нового уравнения, то из равенства

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y)}$$

получается и решение исходного уравнения.

(б) $F(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Полагая $p(x) = y'$, получаем уравнение $(n-1)$-го порядка

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-1)}) = 0.$$

ГЛАВА V

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

§ 16. Произвольные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

16.1. Общие замечания. В общем виде линейное дифференциальное уравнение n-го порядка записывается следующим образом:

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = f(x). \tag{1}$$

Относительно коэффициентов f_ν и f предполагается, что в некоторой области изменения их аргумента они непрерывны, или (см. п. 18.1) мероморфны; далее предполагается, что или $f_n \neq 0$, или f_n имеет лишь изолированные нули.

Дифференциальное уравнение называется *однородным*, если $f(x) \equiv 0$; $f(x)$ называется *возмущающей функцией*.

Если $\psi(x)$ есть некоторое решение уравнения (1), то выражение $\psi(x)+\varphi(x)$ пробегает все решения этого уравнения, когда $\varphi(x)$ пробегает все решения соответствующего однородного уравнения. Так как, согласно п. 16.4, решения уравнения (1) могут быть получены из решений соответствующего однородного уравнения одними лишь квадратурами, то изучение однородных уравнений особенно важно.

Указанное в § 14 преобразование переводит уравнение (1) в систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому из теорем гл. III о линейных системах можно непосредственно вывести соответствующие теоремы для уравнений вида (1).

16.2. Теоремы существования и единственности. Методы решения. Если на интервале $a < x < b$ функции $f_\nu(x)$ и $f(x)$ непрерывны и если $f_n \neq 0$, то для каждой системы значений $\xi, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}$, где $a < \xi < b$, существует одно и только одно решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(\xi) = \eta_0, \quad \varphi'(\xi) = \eta_1, \ \ldots, \ \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1},$$

и это решение определено на всем интервале $a < x < b$.

Из теоремы п. 5.3 может быть получена также более общая теорема существования.

О методах решения см. § 14, пп. 8.2 и 16.4, §§ 18 и 19.

Иногда полезно также следующее простое замечание. Обозначим левую часть уравнения (1) через $L(y)$; если $u_1(x)$, $u_2(x)$ — решения уравнений

$$L(u_1) = f_1(x) \quad \text{и} \quad L(u_2) = f_2(x),$$

то $u_1 + u_2$ есть решение уравнения (1), где $f = f_1 + f_2$.

Если ввести дифференциальный оператор (более общий, чем в п. 22.2)

$$P(D) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) D^\nu, \quad \text{где} \quad D^\nu = \frac{d^\nu}{dx^\nu}, \tag{2}$$

то уравнение (1) запишется в виде

$$P(D)\, y = f(x).$$

Можно ввести еще более общий оператор $Q(D)$, полагая

$$Q(D)\, y = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} Q_\mu(x) D^\mu y, \tag{3}$$

где $Q_\mu(x)$ — некоторые функции, причем для натурального числа k оператор D^{-k} означает k-кратный интеграл

$$D^{-k} y = I^k y = \int_{x_0}^{x} \ldots \int_{x_0}^{x} y(x)\, dx^k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\, y(t)\, dt.$$

Для двух операторов P и Q такого вида выражение

$$P(D)\, Q(D)\, y = R(D)\, y$$

означает функцию, которая получится, если сперва составить функцию $Q(D)y$, а затем применить к ней оператор $P(D)$.

Для того чтобы решить дифференциальное уравнение (1), достаточно построить[1]) оператор Q, обратный оператору (2), т. е. такой оператор (3), что

$$Q(D)\, P(D)\, y \equiv P(D)\, Q(D)\, y \equiv y \tag{4}$$

для любой функции $y(x)$, имеющей достаточное число производных. При этом решение, очевидно, получается в виде

$$y = Q(D)\, f(x). \tag{5}$$

---

[1]) I. M. Sheffer, *Tôhoku Math. Journ.* **39** (1934), стр. 299—315; L. Fantappiè, *Memorie Accad. d'Italia* **1** (1930), № 2.

Подставляя (2) и (3) в тождество (4), получим уравнение для Q_μ, причем при $\mu \geqslant 1-n$ следует полагать, что $Q_\mu = 0$. Тогда из равенства (5) получим:

$$y = \int_{x_0}^{x} H(x, t) f(t)\, dt, \quad \text{где} \quad H(x, t) = \sum_{\nu=n}^{\infty} Q_{-\nu}(x) \frac{(x-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}.$$

Этот метод подходит, следовательно, под принцип § 19.

16.3. Исключение производной $(n-1)$-го порядка. Если $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка и если положить

$$u(x) = \exp\left(-\frac{1}{n}\int \frac{f_{n-1}}{f_n}\, dx\right),$$

то заменой $y = zu$ уравнение (1) приводится к уравнению

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}(zu) = f(x), \quad \text{или} \quad \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x) z^{(\nu)} = f(x),$$

причем $F_{n-1} \equiv 0$, т. е. $n-1$-я производная уже не входит в уравнение. Решения ψ этого последнего уравнения связаны с решениями φ исходного уравнения (1) соотношением $\varphi = \psi u$.

16.4. Све́дение неоднородного дифференциального уравнения к однородному. Пусть выполнены предположения, указанные в п. 16.2. Если $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (1), и если $W_\nu(x)$ означает детерминант, получающийся из соответствующего этой фундаментальной системе детерминанта Вронского W (см. п. 17.1) заменой элементов ν-го столбца через $0, \ldots, 0, f$, то функция

$$\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \int \frac{W_\nu(x)}{f_n(x)\, W(x)}\, dx$$

является решением уравнения (1). В принципе, следовательно, каждое линейное дифференциальное уравнение можно считать решенным, если соответствующее ему однородное уравнение полностью решено.

О решении дифференциального уравнения с помощью фундаментального решения однородного уравнения см. п. 17.4.

16.5. Поведение решений при больших значениях x[1]**.** Пусть в уравнении (1) коэффициенты $f_\nu(x)$, $f(x)$ при всех $x \geqslant x_0$

[1]) [См. литературу к § 11. — *Прим. ред.*]

непрерывны и действительны; $f_n = 1$ и при $x \to \infty$ пусть

$$f_\nu(x) \to a_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1), \quad a_0 \neq 0; \quad f(x) \to a;$$

наконец, пусть все корни «характеристического многочлена»

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{6}$$

действительны и различны. Тогда существует такое решение $y(x)$ уравнения (1), что при $x \to \infty$

$$y \to a/a_0, \quad y^{(\nu)} \to 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Если все корни многочлена (6) отрицательны, то (7) выполняется для каждого решения уравнения (1).

§ 17. Однородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

17.1. Свойства решений и теоремы существования. С этого момента и до п. 17.4 включительно мы будем всегда предполагать, что в однородном дифференциальном уравнении

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0 \tag{1}$$

функции $f_\nu(x)$ непрерывны при $a < x < b$ и что $f_n \neq 0$.

Очевидно, что $y = 0$ есть решение всякого уравнения вида (1). Это решение мы будем называть *тривиальным*, понимая под *нетривиальными* решения, не равные нулю тождественно.

Если известно p решений $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_p(x)$ уравнения (1), то и каждая их линейная комбинация $C_1\varphi_1 + \ldots + C_p\varphi_p$ с произвольными постоянными коэффициентами C_ν также представляет собой решение. Если $p > n$, то любые p решений линейно зависимы, т. е. существуют такие постоянные C_ν, не все равные нулю, что $C_1\varphi_1 + \ldots + C_p\varphi_p \equiv 0$.

Для каждых n решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ и любого ξ, такого, что $a < \xi < b$, детерминант Вронского

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

равен

$$W(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_n(\xi)) \exp\left(-\int_\xi^x \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)}\,dx\right)$$

[*формула Лиувилля.* — *Прим. ред.*] и, следовательно, равен постоянной, если $f_{n-1} \equiv 0$. Про n решений говорят, что они образуют *фундаментальную систему* решений, если они линейно независимы, или, что то же самое, если их детерминант Вронского отличен от нуля.

Если предположить, что входящие в рассмотрение вронскианы нигде не обращаются в нуль, то левая часть уравнения (1) может быть записана как «операторное произведение»

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = f_n \frac{W_n}{W_{n-1}} D \frac{W_{n-1}^2}{W_n W_{n-2}} \ldots D \frac{W_2^2}{W_3 W_1} D \frac{W_1^2}{W_2 W_0} D \frac{W_0}{W_1} y,$$

где $D = d/dx, \quad W_0 = 1, \quad W_r = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$.

Теорема существования сформулирована в п. 16.2.

Далее, всегда существует фундаментальная система решений; ее можно получить, если выбрать n таких систем чисел

$$\eta_{\nu,0}, \ldots, \eta_{\nu,n-1} \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

что $\operatorname{Det}|\eta_{\nu p}| \neq 0$, и при некотором произвольном ξ, таком, что $a < \xi < b$, для каждого ν найти решение φ_ν, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_\nu(\xi) = \eta_{\nu,0}, \ldots, \varphi_\nu^{(n-1)}(\xi) = \eta_{\nu,n-1}$. Совокупность всех решений состоит из всех тех функций, которые могут быть получены как линейные комбинации членов некоторой фундаментальной системы.

17.2. Понижение порядка дифференциального уравнения. Дифференциальное уравнение (1) обобщенно-однородно в смысле п. 15.2 (б), и, следовательно, подстановка $y' = yu(x)$ переводит его в уравнение более низкого порядка, которое, однако, вообще говоря, не будет линейным.

Если известно некоторое решение $\varphi(x)$ уравнения (1), то это уравнение может быть сведено к линейному уравнению более низкого порядка. Именно, решение будем искать в виде $y = u(x)\cdot\varphi(x)$; при этом для $u(x)$ получается линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, не содержащее функцию $u(x)$, а содержащее только ее производные; следовательно (п. 15.3), это уравнение может быть сведено к линейному дифференциальному уравнению $n-1$-го порядка.

Лишь иной формулировкой того же самого является *редукционный метод Даламбера*: пусть $\varphi_1(x)$ — некоторое нигде не обращающееся в нуль решение уравнения (1). Если считать, что y — функция от x, имеющая производные всех порядков, то

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left(\varphi_1 \int y\, dx\right) = 0$$

есть линейное однородное уравнение $(n-1)$-го порядка. Если $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ — фундаментальная система решений этого уравнения, то функции

$$\varphi_1, \ \varphi_1 \int \psi_1\, dx, \ \ldots, \ \varphi_1 \int \psi_{n-1}\, dx$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1). Если для уравнения (1) известны $n-1$ решений, вронскиан которых $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}) \neq 0$ на интервале $a < x < b$, то при любом $C \neq 0$ каждое решение неоднородного дифференциального уравнения $(n-1)$-го порядка

$$W(\varphi_1, \ \ldots, \ \varphi_{n-1}, \ y) = C \exp\left(-\int \frac{f_{n-1}}{f_n}\, dx\right)$$

есть интеграл уравнения (1), который вместе с $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ составляет фундаментальную систему решений.

17.3. О нулях решений. Пусть функции f_ν имеют производные всех порядков. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два нетривиальных решения уравнения (1), x_1, x_2 — два смежных нуля функции $y_1(x)$ и функция $y_2(x)$ в этих точках отлична от нуля, то функции $y_2(x)$ и $y_1 y_2' - y_1' y_2$ имеют между x_1 и x_2 нечетное число нулей (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность). Это — обобщение теоремы о чередовании нулей п. 25.4 (б).

17.4. Фундаментальные решения. Под *фундаментальным решением* дифференциального уравнения (1)[1]) понимают функцию $g(x, \xi)$, определенную в квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$ и обладающую следующими свойствами:

(α) $g(x, \xi)$ в каждом из двух треугольников $a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b$ и $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b$ (рис. 15) имеет частные производные по x до n-го порядка включительно, и эти производные в каждом из треугольников непрерывны по x и ξ;

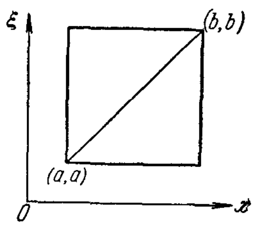

Рис. 15.

(β) $g(x, \xi)$ как функция от x удовлетворяет в каждом из этих треугольников уравнению (1);

(γ) $g(x, \xi)$ во всем квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$ непрерывна и имеет частные производные по x до $(n-2)$-го порядка, непрерывные в этом квадрате по x и ξ;

(δ) при $a < \xi < b$ [2])

$$g_x^{(n-1)}(\xi + 0, \ \xi) - g_x^{(n-1)}(\xi - 0, \ \xi) = 1/f_n(\xi).$$

---

[1]) Предположения, сформулированные в начале п. 17.1, должны теперь выполняться на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Напомним, что, в частности, $f_n(x) \neq 0$ на всем этом отрезке.

[2]) Здесь $g_x^{(p)}$ означает $\partial^p g / \partial x^p$. Некоторые авторы в правой части ставят $-1/f_n(\xi)$, т. е. принимают за фундаментальное решение функцию $-g(x, \xi)$.

Фундаментальные решения всегда существуют. Таким решением будет, как легко проверить,

$$g(x, \xi) = \frac{\operatorname{sign}(x-\xi)}{2f_n(\xi)\, W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ y_1'(\xi) & \dots & y_n'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix},$$

где $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — некоторая фундаментальная система решений уравнения (1), а $W(x)$ — ее вронскиан.

Это специальное фундаментальное решение обладает тем свойством, что для него

$$g(\xi, \xi) = g_x'(\xi, \xi) = \dots = g_x^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0.$$

Совокупность фундаментальных решений дается формулой

$$g(x, \xi) + C_1(\xi)\, y_1(x) + \dots + C_n(\xi)\, y_n(x),$$

где $C_\nu(\xi)$ — непрерывные функции.

Фундаментальное решение важно потому, что

$$y(x) = \int_a^b g(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

представляет собой решение неоднородного уравнения § 16 (1).

17.5. Сопряженные, самосопряженные и антисамосопряженные дифференциальные формы. Если функции $f_\nu(x)$ имеют производные порядков r_ν и s_ν и если $y(x)$ имеет производные всех порядков до $\max(r_\nu + s_\nu)$ включительно, то можно составить дифференциальные формы

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} \left[f_\nu(x)\, y^{(r_\nu)}\right]^{(s_\nu)} \tag{2}$$

и

$$L^*(y) = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{r_\nu + s_\nu} \left[f_\nu(x)\, y^{(s_\nu)}\right]^{(r_\nu)}. \tag{3}$$

Вторая форма $L^*(y)$ называется *сопряженной* с первой, а уравнение $L^*(v) = 0$ — сопряженным с уравнением $L(u) = 0$. Дифференциальной формой, сопряженной с $L^*(y)$, будет, очевидно, снова $L(y)$.

Если все $s_\nu = 0$, то приведенные выше формы принимают специальный вид

$$L_0(y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu y^{(\nu)} \tag{4}$$

и

$$L_0^*(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (f_\nu y)^{(\nu)}. \tag{5}$$

Если каждая из функций f_ν в форме (2) имеет производные даже $(r_\nu + s_\nu)$-го порядка, то L может быть с помощью правила дифференцирования произведения приведено к виду L_0 (с другими f_ν); тогда $L^*(y) \equiv L_0^*(y)$, т. е. сопряженная дифференциальная форма не зависит от способа записи первоначальной формы.

Форма $L(y)$ называется *самосопряженной*, если $L^*(y) \equiv L(y)$, и *антисамосопряженной*, если $L^*(y) = -L(y)$. Соответственно определяются понятия самосопряженности и антисамосопряженности для уравнения $L(y) = 0$. Самосопряженная дифференциальная форма

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} [f_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)}$$

имеет всегда, таким образом, четный порядок. Антисамосопряженная форма

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} \left\{[f_\nu(x)\, y]^{(2\nu+1)} + f_\nu(x)\, y^{(2\nu+1)}\right\}$$

или же

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} \left\{[f_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu+1)} + [f_\nu(x)\, y^{(\nu+1)}]^{(\nu)}\right\}$$

всегда имеет нечетный порядок.

Самосопряженные дифференциальные уравнения играют важную роль в краевых задачах и задачах о собственных значениях (часть II).

17.6. Тождество Лагранжа; формулы Дирихле и Грина. Если $U(x)$ и $V(x)$ суть s раз непрерывно дифференцируемые функции, то интегрированием по частям получим

$$\int U^{(s)} V\, dx = (-1)^s \int U V^{(s)}\, dx + \sum_{p+q=s-1} (-1)^p U^{(q)} V^{(p)}.$$

Если положить $U = f_\nu u^{(r_\nu)}$, $V = v$, то из этой формулы получим для дифференциальной формы (2) *формулу Дирихле*

$$\int v L(u)\, dx = \int \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^{s_\nu} f_\nu(x)\, u^{(r_\nu)} v^{(s_\nu)}\, dx + \mathcal{R}[u, v], \tag{6}$$

где $\mathcal{R}[u, v] = \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{p+q=s_\nu-1} (-1)^p \left[f_\nu u^{(r_\nu)}\right]^{(q)} v^{(p)}$.

Соответствующее выражение получается и для $\int uL^*(v)\,dx$. Вычитая из первого выражения второе, получим

$$\int [vL(u) - uL^*(v)]\,dx = \mathscr{L}[u, v], \tag{7}$$

где $\mathscr{L}$ — билинейная дифференциальная форма

$$\mathscr{L}[u, v] = \sum_{\nu=0}^{m} \Bigg\{ \sum_{p+q=s_\nu-1} (-1)^p \left(f_\nu u^{(r_\nu)}\right)^{(q)} v^{(p)} - \\ - \sum_{p+q=r_\nu-1} (-1)^{r_\nu+s_\nu+p} \left(f_\nu v^{(s_\nu)}\right)^{(q)} u^{(p)} \Bigg\}.$$

Дифференцируя по x, получим *тождество Лагранжа*

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{d}{dx}\mathscr{L}[u, v], \tag{8}$$

а заменяя неопределенный интеграл определенным, — *формулу Грина*

$$\int_a^b [vL(u) - uL^*(v)]\,dx = \mathscr{L}[u, v]\,\Big|_a^b. \tag{9}$$

Для специальной дифференциальной формы (4) $\mathscr{L}$ принимает более простой вид

$$\mathscr{L}[u, v] = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{p+q=\nu-1} (-1)^p u^{(q)} (f_\nu v)^{(p)}.$$

17.7. О решениях сопряженных уравнений и уравнений в полных дифференциалах. Из (7) следует: если известно некоторое решение $v(x) \neq 0$ сопряженного уравнения $L^*(v) = 0$, то решение уравнения

$$L(y) = f(x) \tag{10}$$

получается из уравнения

$$\mathscr{L}[y, v] = \int v(x) f(x)\,dx + C,$$

которое имеет порядок более низкий, чем исходное уравнение.

В частности, если L — дифференциальная форма вида (4) и

$$f_0 - f_1' + f_2'' - \ldots + (-1)^n f_n^{(n)} \equiv 0, \tag{11}$$

то уравнение (10) есть уравнение в полных дифференциалах (см. п. 15.1). Если интегрировать обе части уравнения (10) по x, то в силу (11) интеграл от левой части с помощью интегрирования по частям можно получить и без знания функции y; мы снова получаем для y уравнение более низкого порядка.

Дифференциальное уравнение $L_0(u)=f(x)$ превращается при умножении на функцию $v(x)$ в уравнение в полных дифференциалах в том и только том случае, если $v(x)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $L_0^*(v)=0$. В этом случае v будет интегрирующим множителем данного уравнения.

Если $u_1, \ldots, u_n$ — фундаментальная система решений для уравнения $L_0(u)=0$ и $W(x)$ — вронскиан этой системы, то

$$v_\nu = \frac{1}{f_n}\frac{\partial \ln|W|}{\partial u_\nu^{(n-1)}} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

— фундаментальная система для $L_0^*(v)=0$, и

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^{(k)} v_\nu = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, \ldots, n-2,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu^{(n-1)} v_\nu = f_n.$$

§ 18. Однородные линейные дифференциальные уравнения с особыми точками

[Более подробно вопросы настоящего параграфа рассмотрены в следующих книгах: Айнс; Коддингтон и Левинсон, гл. IV; Трикоми, гл. V, Еругин; Сансоне, т. I, гл. III; Уиттекер и Ватсон, т. I; В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1968; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950; И. А. Лаппо-Данилевский, Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, 1957. — *Прим. ред*]

18.1. Классификация особых точек. Предположим теперь, что коэффициенты $f_\nu(x)$ однородного линейного уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0 \tag{1}$$

в некоторой окрестности точки $x=\xi$ мероморфны, т. е. не имеют никаких особенностей, кроме, быть может, полюсов в точке $x=\xi$ и кроме того, естественно, предположим, что $f_n(x)\not\equiv 0$ и $f_0(x)\not\equiv 0$. Умножая уравнение (1) на $(x-\xi)^m$ при соответствующем целом m, можно добиться того, чтобы все $f_\nu(x)$ в точке ξ были регулярны, но не все обращались в нуль. Тогда ξ называется *регулярной* или *особой точкой* уравнения (1), в зависимости от того, будет ли

$$f_n(\xi)\neq 0 \quad \text{или} \quad f_n(\xi)=0.$$

Итак, пусть ξ есть регулярная или особая точка. После вышеописанной операции можно считать, что

$$f_\nu(x) = (x-\xi)^{\alpha_\nu} h_\nu(x), \tag{2}$$

где α_ν — целые неотрицательные числа, а $h_\nu(\xi)\neq 0$ и $h_\nu(x)$ регулярны в некоторой окрестности точки $x=\xi$, т. е. разлагаются в обычный степенной ряд по степеням $x-\xi$ со свободным членом $h_\nu(\xi)$. Спрашивается, имеет ли уравнение (1) решение вида

$$y=(x-\xi)^r\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu(x-\xi)^\mu \qquad (c_0\neq 0); \tag{3}$$

при этом если r не целое, то $(x-\xi)^r$ означает какую-либо регулярную ветвь этой функции, определенную на комплексной плоскости, которая разрезана вдоль некоторого луча, выходящего из точки ξ (вместо разрезанной плоскости можно оперировать также с римановой поверхностью функции $(x-\xi)^r$).

Для существования у уравнения (1) решения вида (3) необходимо, чтобы r было корнем уравнения $F(r)=0$, где $F(r)$ означает коэффициент при члене низшей степени в выражении

$$\sum_\nu C_r^\nu \nu!\,h_\nu(\xi)(x-\xi)^{\alpha_\nu-\nu}. \tag{4}$$

Уравнение $F(r)=0$ называется *определяющим уравнением* дифференциального уравнения (1) в точке ξ, а каждый из его корней — *показателем* в этой точке. Если точка ξ — особая, то она называется *слабо особой* (регулярная особая точка) или *сильно особой* (нерегулярная особая точка), в зависимости от того, имеет ли $F(r)$ степень n или нет.

Точка ξ будет регулярной, или слабо особой, в том и только в том случае, если дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$\sum_{\nu=0}^{n}(x-\xi)^\nu g_\nu(x)\,y^{(\nu)}=0, \tag{5}$$

причем все $g_\nu(x)$ регулярны в точке ξ и $g_n(\xi)\neq 0$ [1]). Левая часть определяющего уравнения в этом случае имеет вид

$$F(r)=\sum_{\nu=0}^{n}C_r^\nu \nu!\,g_\nu(\xi). \tag{6}$$

Точка ξ будет сильно особой тогда и только тогда, когда $\alpha_\nu-\nu<\alpha_n-n$ хотя бы для одного ν. В этом случае существует такое число ρ, $0\leqslant\rho<n$, что

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\nu-\nu&>\alpha_\rho-\rho \quad \text{при} \quad \rho<\nu\leqslant n,\\ \alpha_\nu-\nu&\geqslant\alpha_\rho-\rho \quad \text{при} \quad 0\leqslant\nu\leqslant\rho;\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

[1]) Точка ξ будет регулярной тогда, когда каждая функция g_ν содержит множитель $(x-\xi)^{n-\nu}$; тогда данное дифференциальное уравнение можно разделить на $(x-\xi)^n$.

определяющее уравнение имеет степень ρ; $n-\rho$ называется *классом* или *характеристическим индексом* особой точки. В окрестности точки $x=\xi$ существует не более ρ линейно независимых решений вида (3).

Все эти понятия могут быть перенесены и на случай точки $\xi=\infty$. Функции $f_\nu(x)$, если они $\not\equiv 0$, можно для всех x, достаточно больших по модулю, представить в виде $f_\nu(x)=x^{\alpha_\nu}h_\nu(1/x)$, где все $h_\nu(0)\neq 0$ и все $h_\nu(x)$ регулярны в точке $x=0$. Отсюда следует, что для существования у уравнения (1) решения вида

$$y=x^r\sum_{\mu=0}^{\infty}c_\mu x^{-\mu} \qquad (c_0\neq 0) \tag{8}$$

необходимо, чтобы r было корнем уравнения $F(r)=0$, где $F(r)$ означает коэффициент при старшем члене в выражении

$$\sum_\nu C_r^\nu \nu!\,h_\nu(0)\,x^{\alpha_\nu-\nu}. \tag{9}$$

Бесконечно удаленная точка называется регулярной или особой точкой уравнения в зависимости от того, будет ли точка $x^*=0$ регулярной или особой точкой уравнения, получающегося из данного заменой $y(x)=y^*(x^*)$, $x^*=x^{-1}$. Разделение особых точек на слабо особые и сильно особые может быть проведено, как и выше, в зависимости от степени выражения $F(r)$. Бесконечно удаленная точка будет регулярной или слабо особой точкой в том и только в том случае, если уравнение может быть записано в виде

$$\sum_{\nu=0}^{n}x^\nu g_\nu(1/x)\,y^{(\nu)}=0 \qquad (g_n(0)\neq 0),$$

где $g_\nu(x)$ регулярны в точке $x=0$. Бесконечно удаленная точка будет сильно особой тогда и только тогда, когда для некоторого ν будет $\alpha_\nu-\nu>\alpha_n-n$. Тогда существует такое число ρ, $0\leqslant\rho<n$, что $\alpha_\nu-\nu<\alpha_\rho-\rho$ при $\rho<\nu\leqslant n$ и $\alpha_\nu-\nu\leqslant\alpha_\rho-\rho$ при $0\leqslant\nu\leqslant\rho$; число $n-\rho$ и в этом случае называется *классом* особенности.

Уравнением *типа Фукса* называется дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{\nu=0}^{n}P^\nu Q_\nu y^{(\nu)}=0,$$

где $P=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)$, причем все a_μ — не равные между собой (действительные или комплексные) числа, Q_ν — многочлен степени $\leqslant(n-\nu)(m-1)$ и $Q_n=1$. Для этого уравнения точка $x=\infty$ может быть только или регулярной или слабо особой. К этому типу принадлежат, очевидно, уравнение

Лежандра (ч. III, 2.240) и гипергеометрическое уравнение (ч. III, п. 2.260). Для уравнения Бесселя (ч. III, 2.162) точка $x = 0$ слабо особая, а $x = \infty$ сильно особая.

18.2. Случай, когда точка $x = \xi$ регулярная или слабо особая. В этом случае уравнение может быть представлено, согласно п. 18.1, в виде (5):

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x-\xi)^{\nu} g_{\nu}(x)\, y^{(\nu)} = 0,$$

причем каждая из функций $g_{\nu}(x)$ может быть записана в виде степенного ряда

$$g_{\nu}(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu}^{(\nu)} (x-\xi)^{\mu}, \tag{10}$$

сходящегося в некоторой определенной окрестности точки $x = \xi$; при этом $g_n(\xi) = a_0^{(n)} \neq 0$.

Первый метод решения. Пусть r есть корень определяющего уравнения

$$F(r) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} C_r^{\nu} \nu!\, g_{\nu}(\xi) = 0. \tag{11}$$

Подставляя выражение

$$y = (x-\xi)^r \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} (x-\xi)^{\nu} \tag{12}$$

в дифференциальное уравнение и приравнивая нулю коэффициенты при всех $(x-\xi)^k$, получим

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_{\mu} \sum_{\nu=0}^{n} C_{r+\mu}^{\nu} \nu!\, a_{k-\mu}^{(\nu)} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{13}$$

Выбрав $c_0 \neq 0$ произвольно, можно единственным образом определить последовательно из (13) все c_{μ}, если только определяющее уравнение не имеет решения, отличающегося от r на целое число. Если же имеется показатель, отличающийся от r на целое число, то вычислить c_{μ} возможно, если из всех показателей, отличающихся друг от друга на целое число, принять за r «наибольший» из них, т. е. такой, что ни одно из чисел $r+1$, $r+2, \ldots$ уже не является показателем[1]. Ряд (12) с найденными таким образом значениями для c_{μ} сходится в каждом круге, в котором все g_{ν} регулярны и $g_n \neq 0$, и в каждом таком круге (разрезанном вдоль выходящего из ξ луча) представляет решение данного дифференциального уравнения (5).

[1] Эта осторожная формулировка необходима потому, что r может быть комплексным.

Если имеется несколько показателей, скажем $r_1, \ldots, r_m$, отличающихся друг от друга на целые числа, то с помощью только что найденного решения порядок уравнения (5), по изложенному в п. 17.2, может быть понижен, а затем снова можно применять тот же самый метод. Если r_ν упорядочены «по убыванию», т. е. так, что $r_1 - r_2 \geqslant 0, \ldots, r_{m-1} - r_m \geqslant 0$, то таким образом получается система независимых решений вида

$$y_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\mu} (x-\xi)^{r_\varkappa} \varphi_{\mu, \mu-\varkappa}(x) \ln^{\mu-\varkappa}(x-\xi) \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \quad (14)$$

где все φ — функции, регулярные в точке ξ.

Если ξ — регулярная точка уравнения, то решение не содержит логарифмических членов, даже если показатели будут $r = 0, 1, \ldots, n-1$ и, следовательно, все будут отличаться друг от друга на целые числа. Более того, в этом случае каждое решение может быть разложено вблизи точки ξ в степенной ряд

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-\xi)^\nu.$$

Второй метод решения (*Фробениус*). Отличие от изложенного выше метода состоит в том, что при составлении ряда (12) не исходят из заранее найденного корня r определяющего уравнения (11). Преимущество этого способа состоит в том, что не требуется применения редукционного метода и легче выяснить вид решений. Для простоты записи будем считать, что $\xi = 0$.

Пусть в круге $|x| < \rho$ функции $g_\nu(x)$ регулярны и $g_n(x) \neq 0$. Положим

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{n} C_r^\nu \nu! g_\nu(0), \quad (15)$$

$$c_0(r) = c(r) F(r+1) \ldots F(r+N), \quad (16)$$

где $c(r)$ — аналитическая функция, регулярная и не обращающаяся в нуль в некоторой определенной окрестности каждого из корней многочлена $F(r)$, и N — наибольшая из всех целочисленных разностей между различными парами корней многочлена $F(r)$ (если ни одна из этих разностей не есть целое число, то $c_0 = c(r)$). Далее, определим $c_k = c_k(r)$ из соотношений

$$\left.\begin{array}{l} c_1 F(r+1) + c_0 F(r) = 0, \\ c_2 F(r+2) + c_1 F_1(r+1) + c_0 F_2(r) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \quad (17)$$

где

$$F_k(r) = \sum_{\nu=0}^{n} C_r^\nu \nu! a_k^{(\nu)}. \quad (18)$$

Наконец, пусть

$$y(x, r) = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k(r) x^k, \tag{19}$$

$$y_p(x, r) = \frac{\partial^p}{\partial r^p} y(x, r); \tag{20}$$

эти ряды сходятся при $|x| < \rho$. Если r_1 есть корень многочлена $F(r)$ и если $r_1, \ldots, r_m (r_p - r_q \geqslant 0$ при $p < q)$ — те из его корней, которые отличаются от r_1 на целые числа, то выражения

$$y_{p-1}(x, r_p) = x^{r_p} \sum_{q=0}^{p-1} C_{p-1}^q \ln^{p-q-1} x \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(q)}(r_p) x^k \tag{21}$$

представляют собой систему линейно независимых решений. Если проделать это для всех корней уравнения $F(r) = 0$, то получится фундаментальная система решений. Решения (21) могут быть записаны также в виде

$$y_{p-1}(x, r_p) = \sum_{q=0}^{p-1} x^{r_{q+1}} \ln^{p-q-1} x \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,q} x^k. \tag{22}$$

18.3. Случай, когда точка $x = \infty$ регулярная или слабо особая. В этом случае уравнение может быть, согласно п. 18.1, записано в виде

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{1}{x}\right) y^{(\nu)} = 0,$$

причем все $g_\nu(x)$ регулярны в некоторой окрестности нуля и $g_n(0) \neq 0$.

Изучение этого уравнения в окрестности бесконечно удаленной точки, т. е. для достаточно больших значений $|x|$, соответствует изучению уравнения (5) в окрестности точки $x = \xi$ при $\xi = 0$. Нужно лишь положить в уравнениях (10) и (11) $\xi = 0$, и тогда из (12) и (13) получим:

$$y = x^r \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{-\nu}, \tag{12a}$$

$$\sum_{\mu=0}^{k} c_\mu \sum_{\nu=0}^{n} C_{r-\mu}^{\nu} \nu! a_{k-\mu}^{(\nu)} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{13a}$$

За r следует принять «наименьший» из показателей, т. е. такой, что ни одно из чисел $r-1, r-2, \ldots$ уже не будет показателем. Ряд (12а) сходится при $|x| > 1/\rho$, если функции $g_\nu(x)$ регулярны при $|x| < \rho$ и $g_n(x) \neq 0$. Числа r_ν следует упорядочить «по возрастанию», т. е. $r_1 - r_2 \leqslant 0, \ldots, r_{m-1} - r_m \leqslant 0$. Тогда (14) дает:

$$y_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{\mu} x^{r_\varkappa} \varphi_{\mu,\,\mu-\varkappa}\left(\frac{1}{x}\right) \ln^{\mu-\varkappa} x, \tag{14a}$$

причем все $\varphi(x)$ регулярны в точке $x = 0$.

При втором методе решения следует $F(r+g)$ в (17) заменить на $F(r-g)$, а x^k в (19), (21), (22) — на x^{-k}, и, кроме того, должно быть $r_p - r_q \leqslant 0$.

18.4. Случай, когда точка $x = \xi$ сильно особая. Согласно п. 18.1, в этом случае уравнение может быть приведено к виду

$$\sum_{\nu=0}^{n} (x-\xi)^{\alpha_\nu} h_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0,$$

причем α_ν — целые числа и все $h_\nu(x)$ регулярны в некоторой окрестности точки $x = \xi$, $h_n(\xi) \neq 0$, $h_0(\xi) \neq 0$, а для всех других ν или $h_\nu(x) \equiv 0$ или $h_\nu(\xi) \neq 0$. При этом еще требуется, чтобы хотя бы для одного ν, такого, что $h_\nu(\xi) \neq 0$, выполнялось условие $\alpha_\nu - \nu < \alpha_n - n$.

Изучение уравнения можно сделать более обозримым, если с помощью подстановки

$$y(x) = y^*(x^*), \qquad x^* = (x-\xi)^{-1}$$

перевести особую точку ξ в бесконечно удаленную.

Необходимое условие существования решения вида (3) состоит в том, что $\alpha_\nu - \nu \leqslant \alpha_0$ по крайней мере для одного ν, такого, что $h_\nu(\xi) \neq 0$.

Если $\alpha_n < n$, то существует по крайней мере $n - \alpha_n$ линейно независимых решений вида (3), сходящихся в некоторой окрестности точки $x = \xi$. Если коэффициенты $f_\nu(x)$ регулярны в области G комплексной плоскости и если f_n в G имеет s нулей (каждый нуль считается столько раз, какова его кратность), то (1) имеет по крайней мере $n - s$ решений, регулярных в области G.

Если

$$k = \max_{\nu=0,\,\ldots,\,n-1} \left(\frac{\alpha_n - \alpha_\nu}{n-\nu} - 1\right),$$

то в достаточно малой окрестности $x - \xi = |x-\xi|\, e^{i\vartheta}$ точки ξ для каждого ϑ-интервала и для каждого решения y имеем, при соответствующем выборе постоянной $K > 0$, $|y| < e^{K|x-\xi|^{-k}}$.

Непосредственный анализ этого случая см. в книге Айнса, гл. 17. См. также O. Perron, *Math. Ann.* **70** (1911), стр. 1—32; *Math. Zeitschrift* **3** (1919), стр. 161—171; E. Hilb, *Math. Ann.* **82** (1921), стр. 40.

18.5. Случай, когда точка $x=\infty$ сильно особая. Согласно п. 18.1, уравнение может быть в этом случае приведено к виду

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\alpha_\nu} h_\nu\left(\frac{1}{x}\right) y^{(\nu)}=0,$$

причем α_ν — целые числа и все $h_\nu(x)$ регулярны в некоторой окрестности точки $x=0$, $h_n(0)\neq 0$, $h_0(0)\neq 0$, а для всех других значений ν или $h_\nu(x)\equiv 0$, или $h_\nu(0)\neq 0$. При этом еще должно быть $\alpha_\nu-\nu>\alpha_n-n$ по крайней мере для одного ν, такого, что $h_\nu(0)\neq 0$. Ниже мы будем рассматривать только такие значения ν, для которых выполнено это последнее неравенство.

Необходимое условие существования решения вида

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k} \qquad (c_0\neq 0) \tag{23}$$

состоит в том, что $\alpha_\nu-\nu\geqslant\alpha_0$ по крайней мере для одного $\nu\geqslant 1$. Это условие, однако, недостаточно, как показывает следующий пример: $x^2y''+ax^2y'+by=0$, для которого хотя и можно вычислить соответствующие значения c_k, но ряд (23) расходится.

Для существования решения[1]), представимого в виде *нормального ряда* $y=e^{P(x)}x^r\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}$, где $P(x)$ — многочлен степени p, необходимо выполнение условий: $\alpha_\nu+\nu(p-1)\geqslant\alpha_0$ для некоторого $\nu\geqslant 1$ и, если $p>1$, $\alpha_\nu\geqslant\alpha_n$ для некоторого ν, $1\leqslant\nu<n$. Если $p>1$, то для p имеет место следующая оценка:

$$1+\min_{0<\nu\leqslant n}\frac{\alpha_0-\alpha_\nu}{\nu}\leqslant p\leqslant 1+\max_{1\leqslant\nu<n}\frac{\alpha_\nu-\alpha_n}{n-\nu};$$

число, стоящее справа, называется *рангом* дифференциального уравнения. Для фактического составления нормального ряда можно, взяв некоторый первоначально неопределенный многочлен, сделать подстановку

$$y=u(x)\exp P$$

и затем подобрать коэффициенты многочлена P так, чтобы получившееся дифференциальное уравнение для u имело определяющее уравнение. Затем подставляют в это уравнение выражение

$$u=x^r\sum c_\nu x^{-\nu}.$$

Если даже получающийся при этом ряд (если он не обрывается) и расходится, что бывает часто, то, во всяком случае при $p=1$, он дает асимптотическое разложение для y; см. об этом § 20.

---

[1]) [Такие решения называются *нормальными решениями*. Подробнее см. Айнс, стр. 571. — *Прим. перев*]

18.6. Дифференциальные уравнения с полиномиальными коэффициентами.

(а) Пусть дано уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0,$$

причем $P_\nu(x)$ — многочлены и степень каждого из многочленов P_ν не превосходит степени многочлена P_n. Тогда это уравнение имеет (исключая бесконечно удаленную точку) только регулярные или слабо особые точки $a_1, \ldots, a_m$, и для каждой из особых точек все показатели целые.

Если это дифференциальное уравнение имеет только такие решения, которые представляют собой функции, однозначные на всей комплексной плоскости, то существует фундаментальная система, состоящая из решений вида $e^{\lambda x}R(x)$, где R — рациональная функция [1]).

(б) Пусть в уравнении

$$P(x)\, y^{(n+1)} + \sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0$$

P означает многочлен степени n, а каждое P_ν есть многочлен степени $\leqslant \nu$. Если для некоторого целого числа $m \geqslant 0$ выражение

$$g(m) = \sum_{\mu=0}^{n} C_m^\mu P_\mu^{(\mu)}$$

обращается в нуль, то среди решений этого дифференциального уравнения имеется по крайней мере один многочлен. Если же $g(m) \neq 0$ для всех целых неотрицательных m, то среди решений уравнения (б) имеется одна и только одна целая (трансцендентная) функция [2]).

18.7. Дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами [3]). Пусть в уравнении

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0 \tag{24}$$

коэффициенты $f_\nu(x)$ — целые мероморфные на всей комплексной плоскости функции с общим периодом ω, причем $f_n(x) \not\equiv 0$, и

---

[1]) K. Yosida, *Japanese Journal of Math.* **9** (1933), стр. 231 и сл.

[2]) О теоремах такого типа см. п. 22.5, а также J. M. Sheffer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **35** (1933), стр. 184—214.

[3]) [См. Айнс, стр. 513; Матвеев, гл. XI, § 2; Сансоне, т. I, гл. VI; Коддингтон и Левинсон, гл. III, § 5; Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Минск, 1963; А. М Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950; Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, 1936. — *Прим. ред.*]

пусть решения этого уравнения суть однозначные функции[1]). Тогда это уравнение имеет по крайней мере одно такое решение $\varphi(x) \not\equiv 0$, что

$$\varphi(x+\omega) = s\varphi(x),$$

где s — некоторое постоянное число; в этом случае функция $\varphi(x)$ называется периодической функцией второго рода; число α, определяемое равенством $s = \exp \alpha\omega$, называется *характеристическим показателем* этого решения; функция $\psi = \varphi(x)\exp(-\alpha x)$ будет периодической с периодом ω.

Далее, существует фундаментальная система решений, удовлетворяющих следующим условиям: если $s_1, \ldots, s_r$ — корни характеристического многочлена[2])

$$\operatorname{Det} | a_{p,q} - se_{p,q} |, \tag{25}$$

а $k_1, \ldots, k_r$ — их кратности, то

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x+\omega) = s_1\varphi_1(x), \\ &\varphi_2(x+\omega) = s_1[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_{k_1}(x+\omega) = s_1\left[\varphi_{k_1-1}(x) + \varphi_{k_1}(x)\right] \end{aligned}$$

и аналогично для остальных s_ν; при этом может оказаться, что в некоторых или даже во всех квадратных скобках первые члены отсутствуют (*теорема Флоке*).

Вычисление характеристических показателей представляет, как правило, известные трудности.

Если $n = 2$, а рассматриваемое уравнение имеет вид

$$y'' = f(x)\,y, \tag{26}$$

где $f(x)$ — периодическая функция с периодом ω, то к сказанному можно добавить следующее[3]): пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (26), причем

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0 \quad \text{и} \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

---

[1]) Это имеет место, например, если $f_1 = 1$ и функции f_ν регулярны; ср. уравнение Матье (ч. III, 2.22) и уравнение Хилла (ч. III, 2.30).

[2]) Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — некоторая фундаментальная система решений, то существуют такие числа $a_{p,q}$, что детерминант $|a_{p,q}| \neq 0$ и что

$$y_p(x+\omega) = \sum_{q=1}^{n} a_{p,q} y_q(x) \qquad (p = 1, \ldots, n). \tag{*}$$

Числа $a_{p,q}$ в формуле (25) определяются из условия (*).

[3]) Можно рассмотреть более общее уравнение

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0,$$

Вронскиан W этой фундаментальной системы тождественно равен единице, а числа $a_{p,q}$ для уравнения (25) равны

$$a_{1,1}=y_1(\omega),\quad a_{1,2}=y_1'(\omega),\quad a_{2,1}=y_2(\omega),\quad a_{2,2}=y_2'(\omega)$$

и с помощью приближенных методов, изложенных в гл. VIII, могут быть вычислены с любой степенью точности. Приравнивая детерминант (25) нулю и используя равенство $W=1$, получаем для s уравнение

$$s^2-\left[y_1(\omega)+y_2'(\omega)\right]s+1=0$$

или для характеристического показателя $\pm\alpha$ — уравнение

$$\operatorname{ch}\alpha\omega=\cos i\alpha\omega=\frac{y_1(\omega)+y_2'(\omega)}{2}. \tag{27}$$

Если $f(x)$ есть четная функция, то (27) принимает более простой вид:

$$\operatorname{ch}\alpha\omega=\cos i\alpha\omega=y_1(\omega). \tag{28}$$

18.8. Дифференциальные уравнения с двоякопериодическими коэффициентами [1]. Пусть теперь коэффициенты $f_\nu(x)$ в уравнении (24) — эллиптические функции, т. е. двоякопериодические мероморфные функции комплексного переменного x, с периодами ω_1 и ω_2. Если решения рассматриваемого уравнения — однозначные функции, имеющие лишь изолированные особенности, то существует такое решение $\varphi(x)\not\equiv 0$, что при соответствующем выборе постоянных s_1 и s_2

$$\varphi(x+\omega_1)=s_1\varphi(x)\quad\text{и}\quad\varphi(x+\omega_2)=s_2\varphi(x)$$

(см. п. 18.7). Если все решения рассматриваемого дифференциального уравнения мероморфны, то $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x)=e^{\lambda x}\frac{\sigma(x-a)}{\sigma(x)}\Phi(x), \tag{29}$$

где f и g — периодические функции с одним и тем же периодом. Характеристическое уравнение в этом случае имеет вид

$$s^2-\left[y_1(\omega)+y_2'(\omega)\right]s+W(\omega)=0,$$

где $W(\omega)=\exp\left\{-\int\limits_0^\omega f(x)\,dx\right\}$.

См G. Calamai, *Atti Accad. Italia* (7), 3 (1942), стр. 183—193.

[1]) См. Айнс, стр. 505 и сл.

где $\Phi(x)$ — эллиптическая функция с периодами ω_1 и ω_2, а σ — функция Вейерштрасса:

$$\sigma(x) = x \prod_{k^2+l^2>0} \left(1 - \frac{x}{k\omega_1 + l\omega_2}\right) \exp\left[\frac{x}{k\omega_1 + l\omega_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{k\omega_1 + l\omega_2}\right)^2\right],$$

для которой точки $k\omega_1 + l\omega_2$ являются нулями первого порядка; a и λ — решения уравнений

$$\omega_1\lambda - \eta_1 a = \ln s_1, \quad \omega_2\lambda - \eta_2 a = \ln s_2,$$

а числа η_ν $(\nu = 1, 2)$ определяются из равенств

$$\sigma(x + \omega_\nu) = -\sigma(x) \exp\left(x + \frac{1}{2}\omega_\nu\right)\eta_\nu.$$

Если $n = 2$, то рассматриваемое уравнение имеет такую фундаментальную систему решений φ_1, φ_2, что

$$\varphi_1(x + \omega_1) = s_1\varphi_1(x), \qquad \varphi_1(x + \omega_2) = s_2\varphi_1(x),$$

$$\varphi_2(x + \omega_1) = s_1\varphi_2(x) + t_1\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x + \omega_2) = s_2\varphi_2(x) + t_2\varphi_1(x),$$

где $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, t_1, t_2 — определенные числа. Если $t_1 = t_2 = 0$, то для φ_2 опять возможно представление (29). Если $|t_1| + |t_2| > 0$, то для φ_2 возможно представление

$$\varphi_2(x) = [A\zeta(x) + Bx + \Phi(x)]\,\varphi_1(x),$$

где $\Phi(x)$ — некоторая эллиптическая функция, $\zeta(x) = \dfrac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}$, и

$$A\eta_1 + B\omega_1 = t_1/s_1, \quad A\eta_2 + B\omega_2 = t_2/s_2.$$

18.9. Случай действительного переменного. Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0$$

функции $f_\nu(x)$ действительного переменного x непрерывны в открытом интервале $a < x < b$; пусть, далее, при $0 \leqslant k \leqslant n$ функции

$$f_{n-1}, \ldots, f_{n-k}, (x-a) f_{n-k-1}, \ldots, (x-a)^{n-k} f_0$$

и их модули интегрируемы на интервале $a \leqslant x < b$. Тогда, каковы бы ни были заданные числа $\eta_k, \ldots, \eta_{n-1}$, данное уравнение имеет одно и только одно решение, такое, что при $x \to a$ оно вместе со своими $k-1$ первыми производными стремится к нулю, а его следующие $n-k$ производных стремятся при этом к $\eta_k, \ldots, \eta_{n-1}$ соответственно; иначе говоря, существует решение, которое может быть представлено в виде

$$y = \eta_k \frac{(x-a)^k}{k!} + \ldots + \eta_{n-1} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + (x-a)^{n-1} \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$ и $\varphi(a) = 0$.

§ 19. Решение линейных дифференциальных уравнений с помощью определенных интегралов [1])

19.1. Общий принцип. Пусть дано линейное уравнение

$$L_x(y) = f(x), \tag{1}$$

где

$$L_x(y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)}. \tag{2}$$

Будем сперва считать, что x принимает только действительные значения. Далее, предположим, что все f_ν при $a < x < b$ непрерывны (значения $a = -\infty$, $b = +\infty$ допускаются). Будем пытаться искать решение уравнения (1) в виде

$$y = \int\limits_{\mathrm{K}} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt; \tag{3}$$

при этом:

(а) К — кривая [2]) в комплексной t-плоскости.

(б) $\varphi(t)$ — функция аналитическая и не равная тождественно нулю в некоторой окрестности G кривой К [3]).

(в) $K(x, t)$, т. е. ядро интеграла, есть функция, которая при каждом фиксированном $t \in G$ представляет собой n раз непрерывно дифференцируемую на интервале $a < x < b$ функцию, причем если $K_x^{(\nu)}$ означает ν-ю производную по x, то каждый из интегралов

$$\int\limits_{\mathrm{K}} K_x^{(\nu)}(x, t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant n)$$

существует и

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}\int\limits_{\mathrm{K}} K(x, t)\,\varphi(t)\,dt = \int\limits_{\mathrm{K}} K_x^{(\nu)}(x, t)\,\varphi(t)\,dt.$$

---

[1]) [См. например, Айнс; близкие вопросы рассмотрены у Сансоне, т. II, гл. X. Подробное рассмотрение теории используемых ниже преобразований имеется, например, в книгах: И. Снеддон, Преобразование Фурье, 1955; Б. Ван дер Поль и X. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, 1952. См. также А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937; М. Л. Расулов, Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений, 1964. — *Прим. ред.*]

[2]) Кривая должна удовлетворять обычным в теории функций условиям, обеспечивающим существование соответствующего интеграла. Эта кривая может быть и замкнута. Она может совпадать с действительной осью или с ее отрезком; в этом случае мы не выходим из области действительного переменного.

[3]) Если К — отрезок действительной оси, то можно положить $G = \mathrm{K}$; в этом случае от $\varphi(t)$ достаточно требовать существования лишь n непрерывных первых производных.

Подставив (3) в уравнение (1), получим

$$L_x(y) = \int_K L_x(K)\varphi(t)\,dt. \tag{4}$$

Пусть, далее

(г) $M_t(u) = \sum_{\nu=0}^{m} g_\nu(t)\,u^{(\nu)}(t)$ есть линейная дифференциальная форма такая, что ее коэффициенты $g_\nu(t)$ аналитичны в G[1]);

(д) существует такая функция $K_1(x, t)$, которая при каждом фиксированном x из интервала $a < x < b$ регулярна по t и для которой

$$L_x(K) = M_t(K_1). \tag{5}$$

Если $M_t^*(v)$ есть форма, сопряженная с $M_t(u)$, и $\mathscr{M}_t[u, v]$ — соответствующая билинейная форма (см. пп. 17.5 и 17.6), то, в силу тождества Лагранжа и равенств (4) и (5),

$$L_x(y) = \int_K K_1(x, t)\,M_t^*(\varphi)\,dt + \int_K \frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]\,dt. \tag{6}$$

Если $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$M_t^*(v) = 0, \tag{7}$$

то функция (3) будет решением уравнения (1), если

$$\int_K \frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]\,dt = f(x). \tag{8}$$

Основными этапами этого метода решения являются: вывод тождества (5), нахождение решения так называемого преобразованного уравнения (7) и осуществление равенства (8).

К этому весьма общему и важному принципу необходимо еще сделать следующие замечания:

(α) Этот метод применим, очевидно, и в случае комплексного переменного x.

(β) Он может быть использован и для нахождения численного решения, так как интеграл (3) может быть вычислен с помощью известных приближенных методов.

(γ) Часто используются следующие ядра:

$K = e^{xt}$ (Лаплас),

$K = k(x \cdot t)$ (Меллин),

$K = (x - t)^\alpha$ (Эйлер).

[1]) Если K — отрезок действительной оси, то можно положить $G = K$.

(δ) Применение этого метода, в особенности подбор функций, удовлетворяющих условию (8), иногда облегчается, если использовать несколько решений φ_h уравнения (7) и несколько путей интегрирования K_h.

При этом решение ищут в виде

$$y=\sum_h C_h \int_{\mathrm{K}_h} K(x, t)\,\varphi_h(t)\,dt. \tag{9}$$

(ε) Если K — некоторая кривая с концами $t=\alpha$ и $t=\beta$ и все функции, входящие под знак интеграла в выражении (8), однозначны, то условию (8) можно придать вид

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]\,\Big|_{t=\alpha}^{t=\beta}=f(x). \tag{10}$$

Если функция, стоящая под знаком интеграла в (8), не однозначна, то в точках $t=\alpha$ и $t=\beta$ для нее надо брать те значения, которые получатся, когда мы проследим изменение ее значений при движении вдоль K на соответствующей римановой поверхности.

(ζ) Если $f\equiv 0$, то, очевидно, условие (8) будет выполнено в том случае, когда мы выберем в качестве K некоторую замкнутую кривую. При этом, однако, K должна охватывать какую-либо особую точку функций $K(x, t)$ или $\varphi(t)$, так как иначе, если под знаком интеграла в (3) будет стоять однозначная функция, этот интеграл будет, по теореме Коши, равен нулю. Если хотя бы одна из функций K_1 или φ неоднозначна, то необходимо иметь в виду, что $\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]$ после обхода вдоль K должно возвращаться к своему исходному значению, когда значения этой функции берутся на соответствующей римановой поверхности.

(η) Выберем в случае $f\equiv 0$ в качестве K, как и в (ε), некоторую незамкнутую кривую, имеющую хотя бы один конец в конечной точке α; если при этом мы хотим удовлетворить условию (10) так, чтобы $\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]$ обращалась на концах кривой K в нуль, то точка α должна быть особой точкой уравнения (7). Действительно, согласно п. 17.6,

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]=\sum_{q=0}^{m-1} K_{1(t)}^{(q)} \sum_{p=0}^{m-q-1}(-1)^p\,(g_{p+q+1}\varphi)^{(p)},$$

где $K_{1(t)}^{(q)}$ означает q-ю производную от K_1 по t. Если каждая из этих производных действительно зависит от x, то тождество

$$\mathscr{M}_t[K_1, \varphi]\,\big|_{t=\alpha}\equiv 0$$

может выполняться лишь в том случае, когда

$$\sum_{p=0}^{m-q-1}(-1)^p\,(g_{p+q+1}\varphi)^{(p)}\equiv 0$$

при $t=\alpha$ и $q=0, 1, \ldots, m-1$. Если $g_m(\alpha)\neq 0$, то должно быть $\varphi(\alpha)=\varphi'(\alpha)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(\alpha)=0$ и, следовательно, $\varphi(t)\equiv 0$, что противоречит (б).

19.2. Преобразование Лапласа. Рассмотрим прежде всего уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\, y^{(\nu)}=0, \tag{11}$$

где

$$P_\nu(x)=\sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu,\,\mu} x^\mu \tag{12}$$

— заданные многочлены[1]). В обозначениях п. 19.1 имеем, следовательно,

$$L_x(y)=\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\, y^{(\nu)}, \tag{13}$$

и нужно положить

$$M_t(u)=\sum_{\mu=0}^{m} Q_\mu(t)\, u^{(\mu)}(t),$$

где

$$Q_\mu=\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu,\,\mu} t^\nu. \tag{14}$$

Тогда

$$L_x(e^{xt})=M_t(e^{xt}),$$

т. е. условие (5) выполнено при $K=K_1=e^{xt}$. Поэтому

$$y=\int\limits_{\text{К}} e^{xt}\varphi(t)\,dt \tag{15}$$

будет решением уравнения (11), если $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$M_t^*(v)=0, \quad \text{где} \quad M_t^*(v)=\sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu (Q_\mu v)^{(\mu)}, \tag{16}$$

называемому преобразованием Лапласа (L-изображением) уравнения (11), и если, кроме того,

$$\int\limits_{\text{К}} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p+q=k} (-1)^p (Q_{k+1}\varphi)^{(p)} x^q e^{xt}\, dt=0. \tag{17}$$

---

[1]) Эти многочлены не обязательно должны иметь все одну и ту же степень.

(A) $a_{n,m} \neq 0$ (и, конечно, $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$). Может оказаться, что уравнение (16) имеет вблизи некоторой особой точки τ решение[1])

$$\varphi(t) = (t-\tau)^r \psi(t-\tau), \tag{18}$$

где $r \geqslant 0$ и не целое, функция $\psi(t-\tau)$ регулярна в точке τ (рис. 16) и $(t-\tau)^r$ нормировано таким образом, что эта функция однозначна и регулярна в t-плоскости, разрезанной вдоль луча

$$t = \tau + \rho e^{i\alpha} \qquad (0 < \rho < +\infty) \qquad \text{(s)}$$

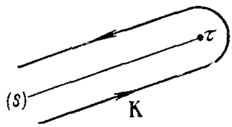

Рис. 16.

(если r — целое, то разрез не нужен). Если на луче (s) окажутся какие-либо особые точки, кроме τ, то они могут быть обойдены небольшим изменением линии (s). Функция (18) может быть тогда продолжена аналитически так, чтобы она была регулярна в некоторой полосе по обе стороны от разреза (s) и удовлетворяла уравнению (16). Если за путь интегрирования **К** принять некоторую кривую, огибающую луч (s) и лежащую внутри соответствующей полосы, то условие (17) будет выполнено и, следовательно, (15) будет решением исходного уравнения для всех x, лежащих внутри угла

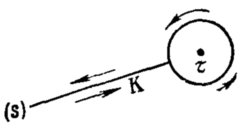

Рис. 17.

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \alpha + \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta \tag{19}$$

и достаточно больших по абсолютной величине. Если перейти к римановой поверхности, соответствующей функции $(t-\tau)^r$, то за **К** можно принять контур, изображенный на рис. 17 и состоящий из отрезка луча (s), круга с центром в τ и снова того же самого отрезка луча (s).

Если r — целое отрицательное число, $N = -r-1$ и

$$\psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (t-\tau)^\nu, \tag{20}$$

то интеграл (15) равен

$$y = 2\pi i e^{\tau x} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{c_\nu}{(N-\nu)!\, x^{N-\nu}}.$$

Для случая нецелых r см. также п. 20.1.

---

[1]) Это будет, например, в том случае, если τ — слабо особая точка уравнения (16), т. е. например, если $Q_m(t)$ не имеет кратных корней; условие, что r не равно никакому целому неотрицательному числу, ставится для того, чтобы исключить возможность $y \equiv 0$.

(Б) $a_{n,m} \neq 0$ и $m < n$. В этом случае можно к тому, что было сказано о случае (А), добавить следующее. Предположим, что корни $\tau_1, \ldots, \tau_n$ многочлена $Q_m(t)$ все различны; каждому из этих τ_ν можно поставить в соответствие решение

$$\varphi_\nu(t) = (t - \tau_\nu)^{r_\nu} \psi_\nu(t - \tau_\nu) \tag{18a}$$

уравнения (16) (r_ν — неотрицательное дробное число). Примем за K_ν простую замкнутую кривую (рис. 18), охватывающую точку τ_ν, не охватывающую ни одной из остальных точек τ_μ и проходящую через некоторую произвольно выбранную точку τ_0. Каждое из решений (18a) может быть аналитически продолжено вдоль такого контура K. При этом

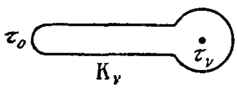

Рис. 18.

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \int_{K_\nu} e^{xt} \varphi_\nu(t)\, dt \tag{21}$$

будет решением уравнения (11), если

$$\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \left[\varphi_{\nu*}^{(\mu)}(\tau_0) - \varphi_\nu^{(\mu)}(\tau_0)\right] = 0 \qquad (\mu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1). \tag{22}$$

Здесь $\varphi_{\nu*}(\tau_0)$ есть то значение функции φ_ν, которое она получает после одного полного обхода вдоль контура K_ν. Так как $m < n$, то m уравнений (22) действительно имеют некоторое ненулевое решение $C_1, \ldots, C_n$.

В некоторых случаях ($r_\nu > -1$) можно интеграл по контуру заменить интегралом по некоторому простому пути между τ_0 и τ_ν или между самими τ_ν.

(В) Пусть теперь дано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{(n-\nu)(k-1)} P_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0,$$

где

$$P_\nu = a_{\nu,0} + \frac{a_{\nu,1}}{x} + \frac{a_{\nu,2}}{x^2} + \ldots \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

и эти ряды сходятся при всех x, достаточно больших по модулю. В этом случае точка $x = \infty$ сильно особая и имеет ранг k. Подстановка

$$y(x) = \eta(\xi), \qquad \xi = x^k$$

переводит это уравнение в уравнение вида

$$\eta^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} Q_\nu(\xi)\, \eta^{(\nu)} = 0,$$

где ряды

$$Q_\nu = b_{\nu,0} + b_{\nu,1}\xi^{-1/k} + b_{\nu,2}\xi^{-2/k} + \ldots$$

сходятся при всех достаточно больших $|\xi|$. Для этих уравнений можно также использовать преобразование Лапласа.

19.3. Специальное преобразование Лапласа. Примем сейчас за путь интегрирования всю положительную действительную полуось. L-изображением некоторой функции $y(x)$, непрерывной при всех действительных $x \geqslant 0$, назовем функцию

$$Y(t) = \int_0^\infty e^{-xt} y(x)\,dx \tag{23}$$

при условии, что этот интеграл при некотором (действительном или комплексном) $t = t_0$ сходится. Если интеграл (23) сходится при $t = t_0$, то он сходится и во всей комплексной полуплоскости $\Re t > \Re t_0$ и, следовательно, определяет там некоторую функцию $Y(t)$, для которой производные всех порядков существуют и выражаются формулами

$$Y^{(n)}(t) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-xt} x^n y(x)\,dx. \tag{23a}$$

Интегрируя по частям, получаем: если функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ имеет n непрерывных производных и n-я производная $y^{(n)}$ удовлетворяет условиям, наложенным выше на y, т. е. если для $y^{(n)}$ существует ее L-изображение, то это L-изображение имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-xt} y^{(n)}(x)\,dx = t^n Y(t) - \sum_{\mu=0}^{n-1} t^{n-\mu-1} y^{(\mu)}(0). \tag{24}$$

Пусть теперь требуется найти решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu y^{(\nu)} = f(x) \qquad (f \text{ может быть} \equiv 0), \tag{25}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = \eta_0, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = \eta_{n-1}.$$

Если предположить, что для функций $f(x)$ и $y^{(n)}(x)$ существуют их L-изображения, то, применив преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (25), получим для всех t, лежащих в комплексной полуплоскости $\Re t > \Re t_0$, в силу (24), уравнение

$$Y(t) \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu-1} t^{\nu-\mu-1} \eta_\mu + F(t),$$

где

$$F(t)=\int_0^\infty e^{-xt}f(x)\,dx.$$

Из этого уравнения непосредственно получаем L-изображение $Y(t)$ искомой функции. Остается лишь найти n раз непрерывно дифференцируемую функцию $y(x)$, имеющую $Y(t)$ своим L-изображением, и, наконец, проверить, что $y^{(n)}$ удовлетворяет указанным выше условиям, или просто, что $y(x)$ есть решение уравнения (25). Для нахождения функции $y(x)$, соответствующей данной функции $Y(t)$, наряду с общей формулой обращения

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xt}Y(t)\,dt$$

могут быть использованы существующие подробные таблицы [1]).

Этот метод может быть применен и в том случае, когда коэффициенты a_ν в уравнении — не постоянные, а многочлены от x. При этом используют формулу (23а) и уравнение

$$\int_0^\infty e^{-xt}x^m y^{(n)}(x)\,dx=(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left\{t^nY(t)-\sum_{\mu=0}^{n-1}t^{n-\mu-1}y^{(\mu)}(0)\right\},$$

вытекающие из (23а) и (24), и получают для $Y(t)$ дифференциальное уравнение, порядок которого равен наивысшей степени x, входящей в (25).

19.4. Преобразование Меллина. Использование ядра Меллина $K(xt)$ целесообразно в случае уравнений

$$L_x(y)=0, \tag{26}$$

если L_x имеет вид

$$L_x(y)=x^nF(xD_x)\,y+G(xD_x)\,y,$$

где $F(s)$ и $G(s)$ многочлены, а $D_x=d/dx$. Если $H(s)$ — многочлен и $K(s)$ — некоторое решение уравнения

$$s^nF(xD_s)\,K(s)=H(sD_s)\,K(s),$$

то

$$L_x(K(xt))=M_t(K(st)),$$

---

[1]) [См., например, Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, 1960; В. А. Диткин и П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, 1951; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. I, 1969; т. II, 1970. — *Прим. ред.*]

где $M_t(u) = t^{-n}H(tD_t)u + G(tD_t)u$ и, следовательно, согласно п. 19.1,

$$y = \int_{\mathrm{K}} K(xt)\,\varphi(t)\,dt$$

есть решение уравнения (26), если $\varphi(t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению $M_t^*(v) = 0$ и если, кроме того,

$$\int_{\mathrm{K}} \frac{d}{dt}\mathscr{M}_t[K, \varphi]\,dt = 0.$$

19.5. Преобразование Эйлера. Применение ядра Эйлера

$$K(x, t) = (t - x)^{\alpha}$$

для уравнения вида (11) целесообразно в том случае, когда каждый из $P_\nu(x)$ есть многочлен степени $\leqslant \nu$ и $P_n(x)$ имеет точно степень n. Такое уравнение можно представить в виде

$$L_x(y) = 0,$$

где

$$L_x(y) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}y^{(\nu)}\sum_{\mu=0}^{n-\nu}C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu-\mu}Q_{\mu}^{(n-\nu-\mu)}(x); \tag{27}$$

здесь Q_μ — многочлен степени $\leqslant n-\mu$ и k — постоянная.

Если в (27) фактически входят только многочлены $Q_0, \ldots, Q_p$, то положим

$$M_t(u) = \sum_{q=0}^{p} Q_{p-q}(t)\,u^{(q)}. \tag{28}$$

Тогда

$$L_x(K) = C_{k+n-1}^{n-p}(n-p)!\,M_t(K_1),$$

где $K = (t-x)^{k+n-1}$, $K_1 = (t-x)^{k+p-1}$. Отсюда следует, согласно п. 19.1, что

$$y = \int_{\mathrm{K}} (t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt \tag{29}$$

есть решение уравнения (27), если $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$M_t^*(v) = 0, \quad \text{где} \quad M_t^*(v) = \sum_{q=0}^{p}(-1)^q(Q_{p-q}v)^{(q)}, \tag{30}$$

и если, кроме того,

$$\int_{\mathrm{K}} \frac{d}{dt}\sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{\nu=0}^{\varkappa-1}(-1)^{\varkappa-\nu-1}u^{(\nu)}(Q_{p-\varkappa}\varphi)^{(\varkappa-\nu-1)}\,dt = 0 \tag{31}$$

где $u^{(\nu)} = \frac{d^\nu}{dt^\nu}(t-x)^{k+p-1}$. Следует иметь в виду указанную в п. 19.1 возможность дифференцирования под знаком интеграла, а также учитывать, что так как $(t-x)^k$ и $\varphi(t)$ могут быть многозначны, то, возможно, придется оперировать на соответствующей римановой поверхности.

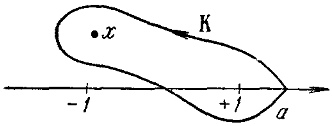

Рис. 19.

Более детальное рассмотрение случая $p=1$ содержится в п. 22.6.

Пример. К рассмотренному нами типу относится, между прочим, уравнение Лежандра (см. ч. III, 2.240):

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - \nu(\nu+1)y = 0. \qquad (32)$$

При этом нужно положить

$$Q_0 = x^2 - 1, \quad Q_1 = -2(k+1)x, \quad Q_2 = (k+1)(k+2) - \nu(\nu+1),$$

где k произвольно. Если выбрать $k = -\nu - 2$, то $Q_2 = 0$, т. е. в этом случае получим $p = 1$. Решение уравнения (32) получается в виде

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_K \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu (t-x)^{\nu+1}}\, dt \qquad (33)$$

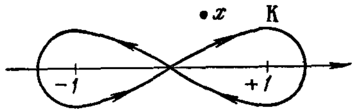

Рис. 20.

и представляет собой функцию Лежандра[1]) первого рода $P_\nu(x)$. При этом здесь t-плоскость следует считать разрезанной вдоль действительной полуоси $t \leqslant -1$; $x \neq 1$ — некоторая точка этой разрезанной плоскости, $a > 1$ и K — некоторая простая замкнутая дуга, проходящая через a и охватывающая точки x и 1 (рис. 19). Если x действительно, то следует выбирать $a > x$; для степеней, входящих в решение, следует брать главные значения. Если ν — натуральное число, то за K можно принять окружность с центром в точке x, при этом только должно быть $x \neq \pm 1$. В этом случае подстановка

$$t - x = e^{i\varphi}\sqrt{x^2-1}$$

приводит при $|\arg x| < \pi/2$ к интегральному представлению Лапласа.

Функция Лежандра второго рода $Q_\nu(x)$ получается следующим образом: t-плоскость разрезается вдоль действительной полуоси, точка x берется в этой разрезанной плоскости. За K при-

[1]) Функции Лежандра P_ν, Q_ν отличаются, разумеется, от функций, которые мы обозначили выше таким же образом.

нимается некоторая кривая, имеющая форму восьмерки, охватывающая точки -1 и $+1$, но не охватывающая точку x (рис. 20). Тогда

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{4\pi \sin \nu\pi} \int\limits_K \frac{(t^2-1)^\nu}{2^\nu (x-t)^{\nu+1}}\, dt \qquad (\nu - \text{не целое число}),$$

если аргументы чисел x и $x-t$ выбраны так, что $|\arg x| < \pi$ и $\arg(x-t) \to \arg x$ при $t \to 0$; далее

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{(1-t^2)^\nu}{(x-t)^{\nu+1}}\, dt,$$

если $\Re\nu > -1$, в частности для натуральных ν.

См. Уиттекер и Ватсон, т. II, 1934, стр. 103 и сл., 117.

19.6. Решение с помощью двойных интегралов. Пусть для уравнения (11) существует такой дифференциальный оператор в частных производных

$$M_{s,t} = A(s,t)\frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t} + B(s,t)\frac{\partial}{\partial s} + C(s,t)\frac{\partial}{\partial t} + D(s,t)$$

и такие две функции $K(x,s,t)$ и $K_1(x,s,t)$, что

$$L_x K(x,s,t) = M_{s,t} K_1(x,s,t).$$

Тогда

$$y(x) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d K_1(x,s,t)\, \psi(s,t)\, ds\, dt$$

будет решением уравнения (11), если ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M^*_{s,t}(w) \equiv \frac{\partial^2}{\partial s\, \partial t}(Aw) - \frac{\partial}{\partial s}(Bw) - \frac{\partial}{\partial t}(Cw) + Dw = 0, \qquad (34)$$

сопряженному к уравнению $M_{s,t}(u) = 0$, и если, кроме того[1]),

$$\mathscr{M}[K_1, \psi]\Big|_{(a,c)}^{(b,d)} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_a^b (AK_{1,s} + CK_1)\psi\Big|_c^d ds + \int\limits_c^d (AK_{1,t} + BK_1)\psi\Big|_a^b dt - AK_1\psi\Big|_{(a,c)}^{(b,d)} = 0$$

для всех x. Нахождение функции $\psi(s,t)$ облегчается, когда уравнение (34) имеет решение вида $\psi = u(s)v(t)$.

Пример. Пусть дано специальное гипергеометрическое уравнение (см. ч. III, 2.249):

$$(x^2-1)y'' + (\alpha+\beta+1)xy' + \alpha\beta y = 0.$$

---

[1]) Здесь $K_{1,s} = \dfrac{d}{ds} K_1$ и т. д.

Здесь можно положить

$$K_1 = K = \exp(xst), \quad M_{s,t} = \left(s\frac{\partial}{\partial s} + \alpha\right)\left(t\frac{\partial}{\partial t} + \beta\right) - s^2t^2.$$

Функция

$$\psi = s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\exp\left(-\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t^2\right)$$

удовлетворяет уравнению $M^*_{s,t}(w) = 0$. Поэтому при $\Re\alpha > 0$ и $\Re\beta > 0$

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\alpha-1}t^{\beta-1}\exp\left(xst - \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t^2\right) ds\, dt$$

есть решение.

§ 20. Поведение решений при больших значениях x

20.1. Полиномиальные коэффициенты[1]. Пусть уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{n} P_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0 \tag{1}$$

удовлетворяет условиям, указанным в п. 19.2. Если контур выбран, как показано на рис. 17 (п. 19.2), и если вдоль выходящей из τ полупрямой имеем $(t-\tau)^r = |t-\tau|^r e^{i\alpha}$, то внутри угла § 19 (19) для решения § 19 (15) имеет место следующее асимптотическое разложение (см. п. 4.4 (Б)):

$$y(x) \sim 2\pi i e^{\tau x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{\Gamma(-r-\nu)} x^{-r-\nu-1}. \tag{2}$$

Это означает, что при произвольном N и при соответствующем выборе C для всех достаточно больших по модулю x, лежащих внутри указанного угла, выполнено следующее неравенство:

$$\left| y(x)\, e^{-\tau x} x^{r+1} - \sum_{\nu=0}^{N} \frac{2\pi i c_\nu}{\Gamma(-r-\nu)} x^{-\nu} \right| < Cx^{-N-1}.$$

Числа c_ν опять-таки определяются из § 19 (20).

---

[1]) См. Айнс, стр. 597—612; J. Horn, *Math. Ann.* **71** (1912), стр. 510—532; L. Fantappiè, *Memorie Accad. d'Italia* **1**, № 2 (1930).

20.2. Коэффициенты более общего вида [1]). Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} x^{(n-\nu)k} P_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0,$$

где k — неотрицательное целое число и ряды

$$P_\nu = a_\nu + \frac{a_{\nu,1}}{x} + \frac{a_{\nu,2}}{x} + \ldots$$

или сходятся при всех достаточно больших действительных x, или же являются асимптотическими разложениями соответствующих функций. Это дифференциальное уравнение имеет ранг $k+1$ (см. п. 19.2 (B)). Если характеристический многочлен

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{3}$$

имеет n корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, действительные части которых все различны, то данному дифференциальному уравнению формально удовлетворяют n нормальных рядов вида

$$S_\nu = e^{g_\nu(x)} x^{\rho_\nu} \left(c_\nu + \frac{c_{\nu,1}}{x} + \frac{c_{\nu,2}}{x^2} + \ldots \right) \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где

$$g_\nu = \frac{\alpha_\nu}{k+1} x^{k+1} + \alpha_{\nu,k} x^k + \ldots + \alpha_{\nu,1} x.$$

В этом случае существует фундаментальная система таких решений $y_1, \ldots, y_n$, что ряд S_ν является при $x \to \infty$ асимптотическим разложением для $y_\nu(x)$, т. е.

$$y_\nu = e^{g_\nu(x)} x^{\rho_\nu} \left(c_\nu + \frac{c_{\nu,1}}{x} + \ldots + \frac{c_{\nu,m}}{x^m} + \frac{\gamma_{\nu,m}(x)}{x^m} \right),$$

причем $\lim\limits_{x\to\infty} \gamma_{\nu,m}(x) = 0$.

Этот результат может быть обобщен на случай комплексного x и на случай, когда многочлен (3) имеет кратные корни.

Рассмотрен также случай [2]), когда $k = 0$ и

$$P_\nu \sim a_\nu(x) + \frac{a_{\nu,1}(x)}{x} + \frac{a_{\nu,2}(x)}{x^2} + \ldots,$$

где $a_{\nu,\mu}(x)$ — периодические функции с одним и тем же периодом.

20.3. Непрерывные коэффициенты [3]). Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} = 0$$

---

[1]) См. J. Horn, *Acta Math.* **24** (1901), стр. 289—308; *Math. Zeitschrift* **8** (1920), стр. 100—114; **21** (1924); стр. 85—95; W. Sternberg, *Math. Ann.* **81** (1920), стр. 119—186; W. J. Trjitzinsky, *Acta Math.* **62** (1934), стр. 167—226; *Transactions Americ. Math. Soc.* **37** (1935), стр. 80—146.

[2]) T. Carleman, *Acta Math.* **43** (1922), стр. 319—336.

[3]) O. Perron, *Journal f. Math.* **143** (1913), стр. 25—50; **142** (1913); стр. 254—270; *Math. Zeitschrift* **1** (1918), стр. 27—43; F. Lettenmeyer, *Sitzungsberichte München* (1929), стр. 201—252; L. Cesari, *Annali Pisa* (2), **9** (1940), III/IV, стр. 1—24.

коэффициенты $f_\nu(x)$ непрерывны при $x \geqslant x_0$, и пусть $f_\nu(x) \to a_\nu$ при $x \to \infty$. Пусть, далее, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни характеристического многочлена

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Если $r_1, \ldots, r_s$ — *различные* действительные части этих корней и если существует e_ν чисел ρ_p (каждый корень считается столько раз, какова его кратность), имеющих одну и ту же действительную часть $\Re\rho_p = r_\nu$, то данное дифференциальное уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, \ldots, y_n$, распадающихся на s классов так, что для e_ν линейно независимых решений, входящих в ν-й класс, при любом $\varepsilon > 0$

$$e^{-(r_\nu+\varepsilon)x} \sum_{k=0}^{n} |y^{(k)}| \to 0, \quad e^{-(r_\nu-\varepsilon)x} \sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}| \to \infty$$

при $x \to \infty$.

Если все ρ_ν имеют различные действительные части, то существует такая фундаментальная система решений $y_1, \ldots, y_n$, что

$$\lim_{x\to\infty} \left(y_\nu^{(n)} : y_\nu^{(n-1)} : \ldots : y_\nu' : y_\nu\right) = \rho_\nu^n : \rho_\nu^{n-1} : \ldots : \rho_\nu : 1.$$

20.4. Осцилляционные теоремы [1]). Пусть в уравнении

$$y^{(n)} + g(x)\, y = 0$$

функция $g(x)$ при $x \geqslant a$ положительна и непрерывна, и пусть интеграл

$$\int_a^\infty g(x)\, dx$$

расходится. При четном n каждое ненулевое решение уравнения (4) бесконечное число раз меняет знак. При нечетном n ненулевое решение или имеет бесконечно много нулей или стремится к нулю при $x \to \infty$.

Если в уравнении

$$y^{(n)} + f(x)\, y^{(n-1)} + g(x)\, y = 0$$

функции f и g непрерывны при $x \geqslant a$, и если $f \geqslant 0$, $g \geqslant C > 0$, а f, кроме того, ограничена, то каждое ненулевое решение или имеет бесконечно много нулей или стремится к 0 при $x \to \infty$.

---

[1]) W. B. Fite, *Transactions Americ. Math. Soc.* **19** (1918), стр. 344—350; A. Kneser, *Math. Ann.* **42** (1893), стр. 421.

§ 21. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка, зависящие от параметра [1]

(a) $y^{(n)}+\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\rho^{k(n-\nu)}f_\nu(x,\rho)\,y^{(\nu)}=0$. Предположим об этом уравнении следующее: k — некоторое натуральное число, ρ — действительный параметр, функции f_ν непрерывны и при $\rho\to\infty$ имеют равномерно на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ асимптотическое разложение

$$f_\nu(x,\rho)\sim\sum_{p=0}^{\infty}a_{\nu,p}(x)\,\rho^{-p}.$$

$a_{\nu,p}(x)$ предполагаются имеющими производные всех порядков, и, наконец, предполагается, что все n решений $\omega_1(x),\ldots,\omega_n(x)$ уравнения

$$\omega^n+a_{n-1,0}(x)\,\omega^{n-1}+\ \ldots\ +a_{0,0}(x)=0$$

различны и имеют производные всех порядков.

(α) Если, кроме того, при соответствующей нумерации функции ω_ν

$$\Re\omega_n(x)>\Re\omega_p(x)\qquad(p=0,\,1,\,\ldots,\,n-1),$$

то данное уравнение имеет решения $y(x)$, для которых (при соответствующем выборе g_p и φ_q) существуют асимптотические разложения вида

$$y(x)\sim\left\{\exp\sum_{p=0}^{k-1}g_p(x)\,\rho^{k-p}\right\}\sum_{q=0}^{\infty}\varphi_q(x)\,\rho^{-q}$$

и производные которых $y',\ldots,y^{(n-1)}$ имеют аналогичные асимптотические разложения, получающиеся из вышеуказанных формальным дифференцированием. Для каждого решения, для которого начальные значения $y(a),\ldots,y^{(n-1)}(a)$ асимптотически представляются соответствующими рядами, указанные разложения справедливы равномерно на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$.

(β) Если же

$$\Re\omega_1(x)<\Re\omega_2(x)<\ \ldots\ <\Re\omega_n(x),$$

то данное уравнение имеет n таких решений $y_\nu(x)$, $(\nu=1,\ldots,n)$, что

$$y_\nu(x)\sim\left\{\exp\sum_{p=0}^{k-1}g_{\nu,p}(x)\,\rho^{k-p}\right\}\sum_{q=0}^{\infty}\varphi_{\nu,q}(x)\,\rho^{-q}\tag{1}$$

---

[1] [Подробное изложение и библиография имеются в книге Наймарка, §§ 4, 8; см. также В. Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, 1968; Коддингтон и Левинсон, гл. VI. — *Прим. ред.*]

при соответствующем выборе функций $g_{\nu, p}$, $\varphi_{\nu, q}$, и производные $y'_\nu, \ldots, y_\nu^{(n-1)}$ этих решений опять-таки асимптотически представляются рядами, получающимися формальным дифференцированием. Функции $g_{\nu, p}$ и $\varphi_{\nu, q}$ должны быть выбраны так, чтобы правая часть выражения (1) формально удовлетворяла рассматриваемому дифференциальному уравнению.

(б) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(x, \rho)\, y^{(\nu)} = 0$. Пусть ρ — комплексный параметр, ряды

$$f_\nu(x, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu, k}(x)\, \rho^{-\nu-k}$$

сходятся и f_ν ограничены при $a \leqslant x \leqslant b$, $|\rho| \geqslant R$, а $a_{\nu, k}(x)$ имеют производные всех порядков. Пусть, далее, $a_{n, 0} \neq 0$ и все n решений уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu, 0}(x)\, \omega^\nu + 0$$

попарно различны и представляют собой n функций $\omega_1(x), \ldots$ $\ldots, \omega_n(x)$, имеющих производные всех порядков. Наконец, пусть при соответствующей нумерации функций ω_ν

$$\Re\rho\omega_\nu(x) \leqslant \Re\rho\omega_{\nu+1}(x) + \varepsilon \qquad (\varepsilon \geqslant 0,\ \nu = 1, \ldots, n-1)$$

для всех ρ, лежащих в секторе

$$\alpha \leqslant \arg(\rho - \rho_0) \leqslant \beta \tag{S}$$

комплексной ρ-плоскости.

Тогда при заданном $m \geqslant 1$ для каждого достаточно большого по модулю ρ из (S) существует фундаментальная система решений

$$y_1(x, \rho), \ \ldots, \ y_n(x, \rho),$$

обладающих следующими свойствами: каждое $y_\nu(x, \rho)$ имеет в (S) производные всех порядков по ρ и для $p = 0, 1, \ldots, n-1$

$$y_\nu^{(p)}(x, \rho) = u_\nu^{(p)}(x, \rho) + e^{\rho\Omega_\nu(x)} \cdot \frac{E_p}{\rho^{m-p}} \tag{2}$$

(производные имеются в виду по x); здесь

$$\Omega_\nu(x) = \int_a^x \omega_\nu(t)\, dt;$$

$u_\nu(x, \rho)$ имеют вид

$$u_\nu(x, \rho) = e^{\rho\Omega_\nu(x)} \sum_{k=0}^{m-1} u_{\nu, k}(x)\, \rho^{-k}, \tag{3}$$

причем $u_{\nu,k}(x)$ имеют производные всех порядков, $u_{\nu,0} \neq 0$; $E_p = E_p(x, \rho, m)$ — некоторая функция, ограниченная при $a \leqslant x \leqslant b$ и при всех ρ из (S), достаточно больших по модулю.

Функции $u_{\nu,k}(x)$ получатся, если подставить выражения (2) и (3) в рассматриваемое уравнение и определить $u_{\nu,k}$ так, чтобы коэффициенты при $e^{\rho\Omega_\nu(x)}\rho^{-\mu}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, m)$ были тождественно равны нулю.

(в) $\sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\, y^{(\nu)} + \rho^n g(x)\, y = 0$. Пусть функции $f_\nu(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$; $f_n \neq 0$, $g \neq 0$; f_n и g имеют n непрерывных производных, а f_{n-1} имеет $n-1$ непрерывную производную; l — целое число и (S) — сектор комплексной ρ-плоскости:

$$\frac{l}{n}\pi \leqslant \arg(\rho - \rho_0) \leqslant \frac{l+1}{n}\pi. \qquad (S)$$

Тогда для всех ρ, достаточно больших по модулю и лежащих в (S), существует фундаментальная система решений

$$y_1(x, \rho), \ \ldots, \ y_n(x, \rho),$$

обладающих следующими свойствами: каждое $y_\nu(x, \rho)$ имеет по ρ производные всех порядков, а

$$\frac{d^p}{dx^p} y_\nu(x, \rho) = \frac{d^p}{dx^p} e^{\rho\Omega_\nu(x)} u_\nu(x) + E_p e^{\rho\Omega_\nu(x)} \rho^{p-1} \quad (p = 0, 1, \ldots, n-1),$$

причем $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$ суть $n-1$ раз непрерывно дифференцируемые решения уравнения $f_n\omega^n + g = 0$ и

$$\Omega_\nu(x) = \int\limits_a^x \omega_\nu(t)\, dt;$$

функции $u_\nu(x)$ не обращаются в нуль и n раз непрерывно дифференцируемы, а функции $E_p = E_p(x, \rho)$ ограничены.

§ 22. Некоторые специальные типы линейных дифференциальных уравнений n-го порядка

22.1. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Если *характеристический многочлен*

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad (1)$$

уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

имеет корни $s_1, \ldots, s_r$ с кратностями $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, т. е. если

$$P(s) = (s - s_1)^{\lambda_1} \ldots (s - s_r)^{\lambda_r},$$

то совокупность всех решений дифференциального уравнения (2) дается формулой

$$e^{s_1 x} P_{\lambda_1 - 1}(x) + \ldots + e^{s_r x} P_{\lambda_r - 1}(x),$$

где $P_h(x)$ — произвольный многочлен (с комплексными коэффициентами) степени $\leqslant h$. Действительные решения этого уравнения — это те выражения указанного вида, которые принимают лишь действительные значения; действительные решения могут быть получены также разделением вышеприведенного выражения на действительную и мнимую части.

Решения уравнения (2) можно получить следующим путем: пусть числа c_ν определяются как коэффициенты степенного ряда

$$(1 + a_{n-1}s + \ldots + a_0 s^n)^{-1} = 1 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots;$$

тогда

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{x^{n+\nu-1}}{(n+\nu-1)!} \qquad (c_0 = 1)$$

есть решение уравнения (2) с начальными значениями

$$y(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1,$$

и каждая производная от y есть также решение.

О решении уравнения (2) с помощью преобразования Лапласа см. п. 19.3.

Об условиях, при которых уравнение

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_0(x)\, y = 0$$

может быть с помощью некоторой подстановки вида $y(x) = u(x)\eta(\xi)$, $\xi = v(x)$ приведено к уравнению с постоянными коэффициентами, см. J. Fayet, *C. R. Paris* **204** (1937), стр. 650; S. Kakeya, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3), **20** (1938), стр. 365—373. [См. также Матвеев, гл. VII, § 4. — *Прим. ред.*]

22.2. Неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами [1]. С помощью символических обозначений

$$P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0, \quad D = d/dx$$

дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

[1] [По поводу символического (операционного) метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений см. литературу к § 19, а также: А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, 1967; Сансоне, т. II, гл. X; Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, 1948; М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах, 1951; А. Н. Лурье, Операционное исчисление, 1950. Оригинальное изложение этих вопросов имеется в книге Я. Микусинского, Операторное исчисление, ИЛ, 1956. — *Прим. ред.*]

можно записать в виде

$$P(D)\,y=f(x). \tag{3}$$

Если известно общее решение однородного уравнения, то достаточно найти лишь какое-нибудь одно решение неоднородного уравнения (см. п. 16.4). Таким решением будет

$$y=\sum_{\chi=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda_\chi} A_{\chi,\lambda}\frac{f(x)}{(D-s_\chi)^\lambda}, \tag{4}$$

где s_χ — корни многочлена $P(s)$, числа λ_χ — их кратности, величины $A_{\chi,\lambda}$ получаются из разложения $1/P(s)$ на элементарные дроби

$$\frac{1}{P(s)}=\sum_{\chi=1}^{r}\sum_{\lambda=1}^{\lambda_\chi}\frac{A_{\chi,\lambda}}{(s-s_\chi)^\lambda}$$

и $f(x)/(D-s)^\lambda$ означает решение дифференциального уравнения

$$(D-s)^\lambda Y=f(x); \tag{5}$$

таким решением будет, при произвольном x_0, функция

$$Y(x)=e^{sx}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}e^{-st}f(t)\,dt.$$

Формально метод заключается в следующем: уравнение (3) рассматривается так, как если бы в нем y было множителем, а $P(D)$ — многочленом от некоторой переменной D; деля (3) на $P(D)$ и разлагая $\frac{1}{P(D)}$ на элементарные дроби, получаем (4); к получающимся при этом членам вида $Y=(D-s)^{-\lambda}f(x)$ применяется тот же самый формальный принцип, что приводит к уравнениям вида (5).

Если, в частности, все корни $s_1, \ldots, s_n$ многочлена $P(s)$ различны, то уравнение (3) имеет решение

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{e^{s_\nu x}}{P'(s_\nu)}\int f(x)\,e^{-s_\nu x}\,dx.$$

Для решения рассматриваемого дифференциального уравнения могут оказаться полезными также следующие замечания:

(a) Если y_1 и y_2 — решения уравнений

$$P(D)\,y_1=f_1(x),\quad P(D)\,y_2=f_2(x),$$

то y_1+y_2 удовлетворяет уравнению

$$P(D)\,y=f_1(x)+f_2(x).$$

(б) Если $f(x)$ — многочлен степени k и если

$$P(u)=u^{\lambda}P_1(u),\quad P_1(0)\neq 0,$$

то среди решений данного уравнения имеется многочлен степени $\leqslant k+\lambda$. Проще всего получить это решение, подставив в уравнение вместо y многочлен такого вида с неопределенными коэффициентами.

(в) Если $f(x)=e^{\alpha x}f_1(x)$ (α — действительное или комплексное), то $y=ze^{\alpha x}$ представляет собой решение уравнения (3), если z удовлетворяет уравнению

$$P(D+\alpha)z=f_1(x).$$

(г) Если $f(x)=f_1(x)e^{ax}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}bx$ (a, b действительны), то $\Re y$ и соответственно $\Im y$ представляют собой решения уравнения (3), если y есть решение для случая (в) при $\alpha=a+bi$.

(д) Если c_ν определяются из разложения

$$(s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ \dots\ +a_0)^{-1}=c_0+c_1s+c_2s^2+\ \dots,$$

то при определенных условиях сходимости ряд

$$y=c_0f(x)+c_1f'(x)+\ \dots$$

представляет собой решение уравнения (3)[1]).

22.3. Уравнения Эйлера.

(а) $$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu y^{(\nu)}=f(x).$$

При $x>0$ решения $y=y(x)$ этого уравнения являются одновременно решениями $Y(t)$, где $t=\ln x$, следующего уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu D(D-1)\ \dots\ (D-\nu+1)Y=f(e^t),\quad D=d/dt.$$

(б) $$\sum_{\nu=0}^{n}A_\nu(ax+b)^\nu y^{(\nu)}=f(x).$$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=ax+b$, получаем тип (а).

22.4. Уравнение Лапласа. Это уравнение имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu x+b_\nu)y^{(\nu)}=c$$

---

[1]) U. Broggi, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **63** (1930), стр. 1047—1050.

и относится к типу п. 19.2. Для введенной там функции $\varphi(t)$ здесь получаем выражение

$$\varphi(t) = \frac{1}{P(t)} \exp \int \frac{Q}{P}\, dt,$$

где

$$P(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu, \qquad Q(t) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu t^\nu.$$

Отсюда следует, что

$$y = \int_{\mathrm{K}} \frac{1}{P(t)} \exp\left(xt + \int \frac{Q(t)}{P(t)}\, dt\right) dt$$

будет решением, если

$$\int_{\mathrm{K}} \frac{d}{dt} e^{xt} P(t)\, \varphi(t)\, dt = c.$$

Если α и β — концы кривой K, то последнее равенство эквивалентно равенству $e^{xt}P(t)\varphi(t)\Big|_\alpha^\beta = c$, причем значения этой функции, возможно, придется брать на соответствующей римановой поверхности. В том единственно интересном случае, когда $n \geqslant 2$, применим также метод (Б) п. 19.2.

22.5. Уравнения с полиномиальными коэффициентами[1]. См. также п. 18.6.

(а) Пусть в уравнении

$$P_{n-1}(x)\, y^{(n)} + \ldots + P_1(x)\, y'' + (a_1 x + b_1)\, y' + (a_0 x + b_0)\, y = 0 \qquad (6)$$

P_ν — многочлены степени $\leqslant \nu$, $|a_0| + |b_0| \neq 0$. Это уравнение имеет решением некоторый многочлен степени m в том и только в том случае, когда $a_0 = 0$, $b_0 = -m a_1$, $a_1 \neq 0$. Этот многочлен имеет вид

$$y = \sum_{k=0}^{m} \left(-\frac{1}{a_1}\right)^k \left[x^m I x^{-m-1} \left(P_{n-1}D^n + \ldots + P_1 D^2 + b_1 D\right)\right]^k x^m,$$

где $D = d/dx$, $Ix^\nu = x^{\nu+1}/(\nu+1)$ при $\nu \neq -1$. Все остальные полиномиальные решения отличаются от данного лишь постоянными множителями; в частности, не существует полиномиальных решений, имеющих другие степени.

Для уравнения Лапласа (п. 22.4) при $b_0 \neq 0$ отсюда следует, например, что оно не может иметь двух линейно независимых полиномиальных решений.

---

[1]) A. Mambriani, *Bolletino Unione Mat. Italiana* 17 (1938), стр. 26—32.

(б) Если в уравнении

$$[a_n x^n + P_{n-1}(x)]\, y^{(n)} + \ldots + [a_1 x + P_0(x)]\, y' + a_0 y = 0$$

P_ν снова суть многочлены степени $\leqslant \nu$ и если $a_0 \neq 0$, то это уравнение имеет решением некоторый многочлен в том и только в том случае, если

$$g(m) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} C_m^\nu \nu! a_\nu = 0$$

при некотором целом $m \geqslant 0$. Если m — наименьшее из чисел, удовлетворяющих этому условию, то существует решение в виде многочлена степени m, и ни один многочлен более низкой степени не удовлетворяет этому уравнению.

22.6. Уравнение Похгаммера [1]). Это уравнение имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu} P^{(n-\nu)} y^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu C_{k+n-\nu-1}^{n-\nu-1} Q^{(n-\nu-1)} y^{(\nu)} = 0,$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены степени $\leqslant n$ и $\leqslant n-1$ соответственно. Это дифференциальное уравнение относится к типу п. 19.5. Согласно изложенному там методу,

$$y = \int_{\mathrm{K}} (t-x)^{k+n-1} \varphi(t)\, dt, \tag{7}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{P(t)} \exp \int \frac{Q(t)}{P(t)}\, dt, \tag{8}$$

будет решением, если

$$\int_{\mathrm{K}} \frac{d}{dt} [(t-x)^k P(t) \varphi(t)]\, dt = 0. \tag{9}$$

Для того чтобы было выполнено условие (9), нужно за **K** принять или некоторую замкнутую кривую, или такую незамкнутую дугу, что выражение

$$\mathfrak{M} = (t-x)^k P(t) \varphi(t) \tag{10}$$

обращается на ее концах в нуль. Первое, вообще говоря, удобнее, если многочлен P имеет степень n и все его корни попарно различны; окружая каждый из этих корней некоторым замкнутым контуром **K**, мы можем получить в этом случае n линейно независимых решений. Если же P не удовлетворяет указанному условию, то приходится использовать и кривые второго типа. В отдельных частных случаях нужно поступать следующим образом

---

[1]) См. Айнс, стр. 612—620.

(А) Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_m$ $(m \leqslant n)$ — различные корни многочлена $P(t)$ и, следовательно,

$$\frac{Q(t)}{P(t)} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{c_\nu}{t-\tau_\nu} + R(t), \tag{11}$$

где $R(t)$ означает сумму некоторого многочлена и членов вида $c/(t-\tau_\nu)^\lambda$, $\lambda \geqslant 2$.

Тогда

$$\varphi(t) = \frac{S(t)}{P(t)} \prod_{\nu=1}^{m} (t-\tau_\nu)^{c_\nu}, \tag{12}$$

где $S(t)$ — однозначная во всей t-плоскости аналитическая функция, регулярная всюду, кроме, может быть, точек τ_ν. Нужно еще подобрать контур $\mathbf{K}$ так, чтобы было выполнено условие (9).

(а) Если $x=\tau_\chi$, то окружим точку x окружностью $\mathbf{K}_x$, а точку τ_χ — окружностью $\mathbf{K}_\chi$ и соединим обе окружности отрезком $\mathbf{s}$; окружности $\mathbf{K}_x$ и $\mathbf{K}_\chi$ не должны охватывать никаких точек τ_λ, кроме τ_χ.

На самих кривых $\mathbf{K}_x$, $\mathbf{K}_\chi$ и $\mathbf{s}$ также не должно быть ни одной точки τ_λ.

Весь контур равен

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_x^+ + \mathbf{s}^+ + \mathbf{K}_\chi^+ + \mathbf{s}^- + {} + \mathbf{K}_x^- + \mathbf{s}^+ + \mathbf{K}_\chi^- + \mathbf{s}^-$$

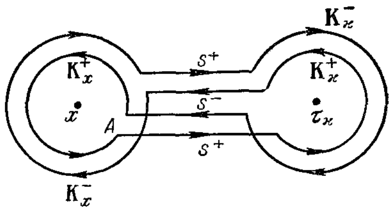

Рис. 21.

(на рис. 21 он изображен схематически, отрезки и круги, в действительности лежащие друг на друге, нарисованы несколько смещенными). Функции, рассматриваемые вдоль этого контура, следует считать заданными на их римановых поверхностях. Тогда условие (9) выполнено и решение имеет вид

$$\begin{aligned} y_{\chi,x} = {} & \left(1-e^{2\pi i c_\chi}\right) \int_{\mathbf{K}_x} (t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt - {} \\ & -\left(1-e^{2\pi i k}\right) \int_{\mathbf{K}_\chi} (t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt + {} \\ & + \left(1-e^{2\pi i c_\chi}\right)\left(1-e^{2\pi i k}\right) \int_{\mathbf{s}} (t-x)^{k+n-1}\varphi(t)\,dt; \end{aligned} \tag{13}$$

при этом $\mathbf{K}_x$ и $\mathbf{K}_\chi$ проходятся в положительном направлении, а $\mathbf{s}$ — в направлении от x к τ_χ и подынтегральная функция определяется как функция, продолженная из точки A (рис. 21) аналитически вдоль $\mathbf{K}_x$ и $\mathbf{s}+\mathbf{K}_\chi$ соответственно.

(б) Если в (а) вместо точки x взять точку $\tau_\lambda \neq \tau_\chi$, то выражение (13) снова будет решением. При этом оно будет решением для всех x, не лежащих ни на контуре $\mathbf{K}$, ни внутри рассматриваемых окружностей. Таким путем можно получить не более m линейно независимых решений.

(Б) Если c_χ — целое число, то $y_{\chi, x}$ и $y_{\chi, \lambda}$ — нули. В этом случае можно перейти к близкому уравнению, заменив $c = c_\chi$ через $c + \varepsilon$, и для этого уравнения построить решение $y_{\chi, x, \varepsilon}$ согласно (Аа). Тогда

$$\bar{y}_{\chi, x} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y_{\chi, x, \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \left[2\pi i \int\limits_{\mathbf{K}_x} + 2\pi i \left(1 - e^{2\pi i k}\right) \int\limits_{\mathbf{s}}\right] (t-x)^{k+n-1} \varphi(t)\, dt +$$

$$+ \left(1 - e^{2\pi i k}\right) \int\limits_{\mathbf{K}_\chi} (t-x)^{k+n-1} \varphi(t) \ln(t - \tau_\chi)\, dt$$

— решение исходного уравнения. Как и в (Аб), здесь можно x заменить на τ_λ.

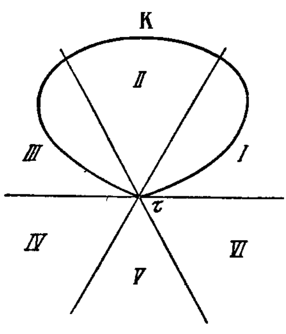

Рис. 22.

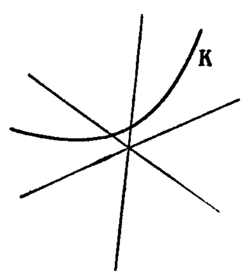

Рис. 23.

(В) Если $\tau = \tau_\chi$ — кратный корень многочлена $P(t)$, то (11) можно записать в виде

$$\frac{Q(t)}{P(t)} = \sum_{\nu=1}^{h} \frac{a_\nu}{(t-\tau)^\nu} + \ldots \qquad (h \geqslant 2). \tag{11a}$$

Если положить $t - \tau = \rho e^{i\psi}$, $a_\nu/(1-\nu) = \sigma_\nu e^{i\theta_\nu}$ $(\nu \geqslant 2)$, то в формуле (10)

$$\mathfrak{M} = \rho^{a_1} e^{i a_1 \psi} (t-x)^k T(t) \exp\left\{\sum_{\nu=2}^{h} \sigma_\nu \rho^{1-\nu} e^{[(1-\nu)\psi + \theta_\nu]\, i}\right\},$$

где $T(t)$ регулярна и не обращается в нуль в некоторой определенной окрестности точки τ. Если ψ фиксировано, то $|\mathfrak{M}|\to 0$ или $\to\infty$ при $\rho\to 0$ в зависимости от того, будет ли

$$\cos[(1-h)\psi+\theta_h]<0 \quad \text{или} \quad >0. \tag{14}$$

При $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi$ существует $2(h-1)$ секторов, в которых выражение (14) поочередно имеет различные знаки; в секторах с нечетным номером (14) отрицательно. Если теперь **K** — некоторая простая кривая, лежащая, как на рис. 22, в области $I+II+III$ и концы которой примыкают к точке τ так, что соответствующие касательные лежат в секторах I и III соответственно, то условие (9) выполнено и (7) есть решение. Если считать, что **K** примыкает к τ так, что концы ее лежат в других нечетных секторах, то получатся другие решения, среди которых будет, однако, не более $h-1$ линейно независимых.

(Г) Если степень $P(t)$ не больше, чем степень $Q(t)$, то

$$\frac{Q(t)}{P(t)}=\sum_{\nu=1}^{g} b_\nu t^{\nu-1}+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{c_\nu}{t-\tau_\nu}+U(t), \tag{11б}$$

где $g\geqslant 1$, $b_g\neq 0$ и U — сумма членов вида $c/(t-\tau_\nu)^\lambda$, $\lambda\geqslant 2$. Полагая

$$t=\rho e^{i\psi}, \quad b_\nu/\nu=\sigma_\nu e^{i\theta_\nu},$$

получим в формуле (10)

$$\mathfrak{M}=(t-x)^k e^{V(t)}\prod_{\mu=1}^{m}(t-\tau_\mu)^{c_\mu}\exp\sum_{\nu=1}^{g}\sigma_\nu\rho^\nu e^{(\nu\psi+\theta_\nu)\,i},$$

где $V(t)$ — рациональная функция, в которой степень знаменателя больше, чем степень числителя. Если ψ фиксировано, то $|\mathfrak{M}|\to 0$ или $\to\infty$ при $\rho\to\infty$, в зависимости от того, будет ли

$$\cos(g\psi+\chi_g)<0 \quad \text{или} \quad >0. \tag{14а}$$

t-плоскость можно разбить на $2g$ секторов с вершинами в точке $t=0$, в которых попеременно выполнены эти неравенства. Отсюда, как и в случае (В), следует существование такой кривой **K** (рис. 23), что $\mathfrak{M}\to 0$ при $\rho\to\infty$, и поэтому (7) есть решение.

Частные случаи. I. *Уравнение Тиссо*, т. е. уравнение, в котором

$$P(x)=\prod_{\nu=1}^{n-1}(x-a_\nu), \qquad Q(x)=P(x)+\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{b_\nu P(x)}{x-a_\nu}.$$

Об этом уравнении см. Pochhammer, *Math. Annalen* **37** (1890), стр. 512—543.

II. *Уравнение Римана* (ч. III, 2.403)

$$y'' + y' \sum_{\nu=1}^{3} \frac{1-\alpha_\nu-\beta_\nu}{x-c_\nu} +$$

$$+ \frac{y}{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)} \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\alpha_\nu\beta_\nu (c_\nu - c_{\nu-1})(c_\nu - c_{\nu+1})}{x-c_\nu} = 0, \qquad (15)$$

где $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu) = 1$, $c_{\nu+3} = c_\nu$.

Если положить

$$y = u(x) \prod_{\nu=1}^{3} (x-c_\nu)^{\alpha_\nu}, \qquad k = -1 - \sum_\nu \alpha_\nu,$$

$$P = (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3),$$

$$Q = \sum_\nu (\beta_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1})(x-c_{\nu-1})(x-c_{\nu+1}),$$

то (15) переходит в уравнение

$$Pu'' - (kP' + Q)u' + [C_{k+1}^2 P'' + (k+1)Q']u = 0.$$

Таким образом, это уравнение приводится к уравнению Похгаммера и имеет решение

$$y(x) = P(x) \int_K (t-x)^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} \prod_{\nu=1}^{3} (t-c_\nu)^{\beta_\nu+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu+1}-1}$$

($\alpha_{\nu+3} = \alpha_\nu$, $\beta_{\nu+3} = \beta_\nu$), где кривую **K** следует выбирать согласно А 6).

ГЛАВА VI

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

[Дифференциальным уравнениям второго порядка, особенно линейным, посвящена обширная литература. См., например, Еругин; Беллман, гл. VI; Айнс; Сансоне, т. II, гл. VII, §§ 4, 5; Коддингтон и Левинсон, гл. VIII. — *Прим. ред.*]

§ 23. Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка

23.1. Методы решения частных типов нелинейных уравнений. Речь идет о тех же методах, которые были в § 15 указаны для случая уравнения n-го порядка. Они относятся, таким образом, к уравнениям в полных дифференциалах, обобщенно-однородным и уравнениям вида $F(y'', y', y) = 0$ или $F(y'', y', x) = 0$. Если, в частности, дано уравнение

$$y'' = f(y),$$

где функция f непрерывна, то из него получаем

$$\frac{dy'^2}{dx} = 2f(y)\,y'$$

и, следовательно,

$$y'^2 = \eta_1^2 + 2\int_{\eta_0}^{y} f(y)\,dy,$$

если решение и его производная в точке ξ должны быть равны η_0 и η_1 соответственно. Отсюда для y' получается уравнение вида п. 4.1.

Отметим еще следующий способ, который иногда ведет к цели. Если дано уравнение

$$F(y'',\ y',\ y,\ x) = 0,$$

то, полагая $\xi = x + iy$, $\eta = x - iy$, вводим комплексные координаты. Пусть $\Phi(\eta'', \eta', \eta, \xi) = 0$ — полученное при этом новое уравнение, и пусть из него можно получить уравнение $\varphi(\eta', \eta, \xi, C) = 0$ с произвольной комплексной постоянной C.

В этом уравнении снова переходим к переменным x и y; разделяя действительную и мнимую части, получим два уравнения:

$$f_1(y', y, x, C_1) = 0, \qquad f_2(y', y, x, C_2) = 0.$$

Исключая из них y', получаем при известных условиях без дальнейших квадратур уравнение $g(y, x, C_1, C_2) = 0$, из которого находим решение для уравнения $F = 0$.

Пример. $2xy'' + y'^3 + y' = 0$ приводится к уравнению ч. III, 6.133:

$$(\xi + \eta)\eta'' + \eta'^2 - \eta' = 0;$$

отсюда получаем $(\xi + \eta)\eta' = 2\eta + C$ и, наконец,

$$(y + C_1)^2 = 2C_2 x - C_2^2.$$

23.2. Некоторые дополнительные замечания.

(а) Если правая часть уравнения

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

определена в некоторой области $G(x, y)$ при всех значениях y', то даже для весьма простых уравнений (например, $y'' = 2y'^3$) может случиться так, что интегральная кривая не достигает края области G, а оканчивается в некоторой ее внутренней точке. Каждая интегральная кривая уравнения (1) может быть продолжена до границ области G, если выполнены следующие условия: для каждой точки (x, y) из G и любого z функция $f(x, y, z)$ непрерывна и

$$|f(x, y, z)| \leqslant \varphi(|z|),$$

где $\varphi(u)$ при $u \geqslant 0$ — некоторая непрерывная положительная функция, такая, что

$$\int_0^\infty \frac{u}{\varphi(u)}\,du = +\infty \text{ [1]}.$$

(б) Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнений

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{и} \quad y'' = g(x, y, y')$$

соответственно, причем

$$y_1(a) \geqslant y_2(a) \quad \text{и} \quad y_1(b) \geqslant y_2(b),$$

и пусть функции f, g определены при $a \leqslant x \leqslant b$ и при любых y и y'. Тогда $y_1(x) \geqslant y_2(x)$ на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если выполнено одно из следующих трех условий:

(α) $f < g$ и f или g — неубывающая функция от y;

(β) $f \leqslant g$ и f или g — строго возрастающая функция от y;

---

[1] M. Nagumo, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3), 19 (1937), стр. 861—865.

(γ) $f \leqslant g$ и f или g — неубывающая функция от y и монотонная функция от y' [1]).

При $f \equiv g$ отсюда получаются теоремы единственности для краевых задач.

23.3. Теоремы о предельных значениях.

(а) Рассмотрим решения уравнения

$$\lambda y'' + f(x, y, y', \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to 0 \text{ [2]}). \tag{2}$$

Пусть $Y(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant h$ есть некоторое дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$F(x, Y, Y') = 0. \tag{3}$$

Пусть, далее, при некоторых положительных непрерывных функциях $a(x)$ и $b(x)$ и $\lambda_0 > \lambda > 0$ функции $f(x, y, z, \lambda)$ и $F(x, y, z)$ непрерывны в области

$$0 \leqslant x \leqslant h, \quad |y - Y(x)| \leqslant a(x), \quad |z - Y'(x)| \leqslant b(x); \tag{4}$$

наконец, при некоторых положительных постоянных ε, K, L пусть

$$|f(x, y, z, \lambda) - F(x, y, z)| \leqslant \varepsilon,$$
$$|F(x, y_2, z) - F(x, y_1, z)| \leqslant K|y_2 - y_1|,$$
$$\frac{F(x, y, z_2) - F(x, y, z_1)}{z_2 - z_1} \geqslant L.$$

Тогда, если $y(x) = y(x, \lambda)$ есть некоторое решение уравнения (2), такое, что $y(0) = Y(0)$, а $y'(0)$ произвольно, то $y(x)$ существует для всех достаточно малых $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ и $p = |y'(0) - Y'(0)|$ на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant h$ и выполняется неравенство

$$|y(x, \lambda) - Y(x)| < \left\{\frac{\varepsilon}{K} + \lambda\left(\frac{p}{L} + \frac{M}{K}\right)\right\} e^{-\frac{K}{L}x},$$

где $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant h} |Y''(x)|$.

Если $f(x, y, z, \lambda)$ зависит от $\lambda \geqslant 0$ непрерывно и если $F(x, y, z) = f(x, y, z, 0)$, то при $\lambda \to 0$ имеем $y(x, \lambda) \to Y(x)$ равномерно на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant h$ и независимо от начального значения $y'(0)$, если только оно достаточно близко к $Y'(0)$.

---

[1]) Ida Groppi, *Bolletino Unione Mat. Italiana* 17 (1938), стр. 179—182; M. Picone, *Annali di Mat.* (4), 20 (1941), стр. 97.

[2]) [Теорию уравнений с малым параметром при старшей производной см. в книгах: Еругин; Л. Э. Эльсгольц, Качественные методы в математическом анализе, 1955, гл. IV, § 2; А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959; В. Ф. Бутузов, А. Б. Васильева, М. Ф. Федорюк, Математический анализ. Итоги науки, 1967. Полное исследование вопроса для автономной системы второго порядка см. у Е. Ф. Мищенко, *Матем. сборник* 44 (86): 4 (1958). — *Прим. ред.*]

(б) $y'' + g(x)y = f(x, y, y')$.

Пусть здесь $g \to \pm 1$ и $f \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда решения этого уравнения можно при некоторых дополнительных условиях сравнить с решениями уравнения $y'' \pm y = 0$; эти дополнительные условия заключаются в том, что $f_y \to 0$, $f_{y'} \to 0$ и сходимость к предельным значениям должна быть достаточно хорошей [1]).

23.4. Осцилляционная теорема [2]). Пусть в уравнении

$$y'' + \varphi(x) f(y) = 0$$

функция $\varphi(x) > 0$ при $x \geqslant a$ непрерывна, ограничена и монотонно возрастает, $f(y)$ непрерывна, монотонно возрастает и нечетна и, кроме того, при $|y| \leqslant b$ удовлетворяет условию Липшица.

Если $\eta\,(0 < |\eta| < b)$ дано, то для всех $x \geqslant a$ существует решение, определяемое начальными условиями $y(a) = \eta$, $y'(a) = 0$ и имеющее бесконечно много нулей, причем амплитуды колебаний монотонно убывают, хотя и не обязательно стремятся к нулю.

§ 24. Произвольные линейные дифференциальные уравнения второго порядка

24.1. Общие замечания. Общее линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = f(x). \tag{1}$$

Об исключении из уравнения члена $f_1 y'$ см. п. 16.3.

Левая часть уравнения (1) представляет собой однородную линейную дифференциальную форму (пишем u вместо y):

$$L(u) = f_2 u'' + f_1 u' + f_0 u.$$

Если функции f_ν непрерывно дифференцируемы ν раз, то сопряженная дифференциальная форма имеет вид (см. п. 17.5):

$$L^*(v) = f_2 v'' + (2f_2' - f_1)\, v' + (f_2'' - f_1' + f_0)\, v,$$

а соответствующая билинейная форма — вид

$$\mathscr{L}[u, v] = f_2(u'v - uv') + (f_1 - f_2')\, uv.$$

Форма $L(u)$ будет самосопряженной, т. е. будет совпадать с $L^*(u)$ в том и только в том случае, если $f_1 = 2f_2'$, т. е. если она имеет вид $L(y) = (f_2 y')' + f_0 y$; здесь достаточно существования у f_2 лишь одной непрерывной производной.

---

[1]) K. Yosida, *Japanese Journal of Math.* 9 (1932), стр. 145—152, 227—230.

[2]) E. Milne, *Bulletin Americ. Math. Soc.* 28 (1922), стр. 102—104.

О тождестве Лагранжа, формулах Грина и Дирихле и о фундаментальном решении см. пп. 17.6 и 17.4.

Уравнение (1) будет уравнением в полных дифференциалах, если

$$f_2'' - f_1' + f_0 = 0;$$

в этом случае оно сводится к уравнению первого порядка:

$$f_2 y' + (f_1 - f_2') y = \int f(x)\,dx + C.$$

Если функции f_ν непрерывны и $f_2 \neq 0$, то уравнение (1) имеет те же самые решения, что и самосопряженное уравнение

$$(Ey')' + \frac{f_0}{f_2} Ey = \frac{f}{f_2} E, \quad \text{где} \quad E = \exp \int \frac{f_1}{f_2}\,dx,$$

т. е. при указанных предположениях можно всегда левую часть уравнения считать самосопряженной.

Метод последовательных приближений п. 6.2 для решения уравнения (приведенного, согласно § 14, к системе дифференциальных уравнений первого порядка) может быть применен здесь в следующей форме: пусть дано уравнение

$$y'' = f(x)\,y' + g(x)\,y + h(x),$$

где f, g, h непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Выберем линейную функцию $y_0(x)$ так, чтобы она удовлетворяла в точке $x = a$ заданным начальным условиям, и затем определим последовательно y_k для всех $k \geqslant 1$ из условий:

$$y_k'' = f y_{k-1}' + g y_{k-1} + h, \qquad y_k(a) = y_k'(a) = 0,$$

т. е. иначе говоря, положим

$$y_k(x) = \int_a^x \int_a^x \left(f y_{k-1}' + g y_{k-1} + h\right) dx\,dx \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда искомым решением будет: $y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots$

24.2. Некоторые методы решения. Если $f_2 \neq 0$, то уравнение (1) можно разделить на f_2; тогда получится уравнение вида

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = h(x). \tag{2}$$

Пусть в рассматриваемом интервале функции f, g, h непрерывны. Тогда справедливо следующее:

(а) Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0, \tag{3}$$

то

$$y=\varphi_2\int\frac{\varphi_1 h}{W}\,dx-\varphi_1\int\frac{\varphi_2 h}{W}\,dx+C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$

где $W(x)=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$, есть общее решение уравнения (2) (частный случай п. 16.4).

(б) Если $\varphi(x)$ — решение уравнения (3) и $\varphi(x)\neq 0$, то подстановка $y=\varphi(x)u(x)$ приводит (2) к уравнению

$$u''+\left(\frac{2\varphi'}{\varphi}+f\right)u'=\frac{h}{\varphi},$$

которое может быть сведено к уравнению первого порядка. Отсюда следует, что общее решение уравнения (2) будет иметь вид

$$y=C_1\varphi+C_2\varphi\int\frac{dx}{E\varphi^2}+\varphi\int\frac{1}{E\varphi^2}\left(\int E\varphi h\,dx\right)dx,$$

где $E(x)=\exp\int f\,dx$; это остается в силе и при $h\equiv 0$. Уравнения (2) и (3) можно, следовательно, в принципе считать решенными, если известно одно нетривиальное решение однородного уравнения (3). О нахождении такого решения см. § 25.

(в) Метод (а) основан на так называемой «вариации постоянных»; это означает, что решения уравнения (2) ищутся в виде

$$y=A(x)\varphi_1+B(x)\varphi_2 \tag{4}$$

и A, B определяются из условий

$$A'\varphi_1+B'\varphi_2=0,\qquad A'\varphi_1'+B'\varphi_2'=h. \tag{5}$$

Этот метод можно обобщить, заменив (4) через

$$y=A(x)\varphi_1+B(x)\varphi_2+z(x) \tag{6}$$

или же через

$$y=[A(x)\varphi_1+B(x)\varphi_2]\,z(x)$$

и используя для определения A, B и z вместо (5) соответствующие уравнения иного вида. Например, если $g\neq 0$, то, используя (6) и уравнения $A'\varphi_1+B'\varphi_2=-z'$, $A'\varphi_1'+B'\varphi_2'=0$, $gz=h$, получим общее решение уравнения (2) в виде

$$y=\frac{h}{g}+\varphi_2\int\frac{\varphi_1'}{W}\left(\frac{h}{g}\right)'dx-\varphi_1\int\frac{\varphi_2'}{W}\left(\frac{h}{g}\right)'dx+C_1\varphi_1+C_2\varphi_2,$$

где $W=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2$. См. также п. 25.8 (в).

24.3. Теоремы об оценках. Пусть $f_\nu(x)$ и $g_\nu(x)$ непрерывны при $a\leqslant x\leqslant b$ $(\nu=1,\,2)$, и пусть

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x),\qquad 0\leqslant g_1(x)\leqslant g_2(x).$$

Если $y_\nu(x)$ — некоторое решение уравнения

$$y_\nu'' = f_\nu(x)\,y + g_\nu(x)$$

и $y_1(a) \leqslant y_2(a)$, $y_1'(a) \leqslant y_2'(a)$, то

$$y_1(x) \leqslant y_2(x) \quad \text{и} \quad y_1'(x) \leqslant y_2'(x)$$

на каждом отрезке $a \leqslant x \leqslant a_1$, на котором $y_2(x) \geqslant 0$.

Так как, согласно п. 16.3, в любом линейном дифференциальном уравнении второго порядка член, содержащий y', может быть исключен, то этот результат дает одновременно и некоторую оценку для уравнения общего вида. Дальнейшие теоремы об оценках можно получить с помощью п. 8.4, если заменить линейное уравнение второго порядка системой двух уравнений первого порядка; см. об этом п. 25.2.

§ 25. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка

25.1. Редукция линейных дифференциальных уравнений второго порядка. С п. 25.1 по п. 25.6 речь будет идти об уравнении

$$f(x)\,y'' + g(x)\,y' + h(x)\,y = 0, \tag{1}$$

причем f, g, h непрерывны в некотором фиксированном интервале и $f \neq 0$. Согласно п. 24.2(б), можно найти все решения данного уравнения, если известно одно решение, не обращающееся в нуль. Для нахождения такого решения, наряду с общими методами, изложенными в гл. V, может оказаться полезным следующее:

(а) Уравнение (1) — обобщенно-однородное в смысле п. 15.2(б) и подстановкой $u(x) = y'/y$ оно приводится к уравнению Риккати:

$$f(x)(u' + u^2) + g(x)\,u + h(x) = 0. \tag{2}$$

(б) Уравнение (1) есть уравнение в полных дифференциалах (см. п. 17.7), если $h = g' - f''$; в этом случае из уравнения (1) получаем

$$fy' + (g - f')\,y = C. \tag{3}$$

(в) О случае, когда коэффициенты f, g, h постоянны или имеют вид $A_\nu(ax+b)^\nu$ $(\nu = 2, 1, 0)$ или вид $a_\nu x + b_\nu$, см. пп. 22.1—22.4.

(г) Полагая $u(x) = y \exp \frac{1}{2} \int \frac{g}{f}\,dx$, получаем из (1) *приведенную* или *нормальную форму* уравнения

$$u'' + Iu = 0, \quad \text{где} \quad I = \frac{h}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)'. \tag{4}$$

При этом предполагается, что функция g/f дифференцируема. Функция $I(x)$ называется *инвариантом* дифференциального уравнения.

(д) Решения $y(x)$ и $u(x)$ двух уравнений, (1) и

$$f_1(x)\,u'' + g_1(x)\,u' + h_1(x)\,u = 0 \qquad (f_1 \neq 0), \tag{1a}$$

связаны между собой соотношением $y = uP(x)$ с некоторой дважды непрерывно дифференцируемой функцией $P(x) \neq 0$ в том и только в том случае, когда оба эти уравнения имеют одинаковые инварианты. Если y_1, y_2 и u_1, u_2 — две фундаментальные системы решений уравнений (1) и (1a), связанные указанным выше соотношением, то

$$s(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{u_1(x)}{u_2(x)},$$

если только знаменатель $\neq 0$, и $s'(x) \neq 0$. Эта функция $s(x)$, зависящая еще от трех произвольных постоянных, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{s,\ x\} = 2I, \tag{5}$$

где выражение

$$\{s,\ x\} = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 \tag{6}$$

называется *дифференциальным уравнением Шварца* уравнения (1), или *производной Шварца* функции $s(x)$. Если функция $s(x)$ при $s'(x) > 0$ удовлетворяет уравнению (5), то

$$\frac{1}{\sqrt{s'}}(C_1 + C_2 s)$$

есть решение уравнения $y'' + Iy = 0$.

(е) Решения $y(x)$ уравнения (1) и $\eta(\xi)$ уравнения

$$f_1(\xi)\,\eta'' + g_1(\xi)\,\eta' + h_1(\xi)\,\eta = 0 \tag{1б}$$

($f_1 \neq 0$) в том и только в том случае связаны между собой преобразованием

$$y(x) = P(x)\,\eta(\xi), \qquad \xi = \xi(x),$$

где $\xi(x)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция и $\xi'(x) \neq 0$, если $\xi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\{\xi,\ x\} + \xi'^2\left[\frac{h_1}{f_1} - \frac{1}{4}\left(\frac{g_1}{f_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{f_1}\right)'\right] = \frac{h}{f} - \frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)' \tag{7}$$

($f = f(x), \ldots, f_1 = f_1(\xi), \ldots$); в этом случае

$$y\sqrt{|\xi'|}\exp\frac{1}{2}\int\frac{g}{f}\,dx = \eta\exp\frac{1}{2}\int\frac{g_1}{f_1}\,d\xi. \tag{8}$$

Можно попытаться, выбирая соответствующим образом P и η, свести уравнение (1) к уравнению (1б), которое было бы проще исходного.

25.2. Дальнейшие замечания о редукции линейных уравнений второго порядка.

(а) Об уравнении $y''=\Phi(x)y$ с периодической функцией $\Phi(x)$ см. уравнение Хилла, ч. III, 2.30.

(б) Об уравнениях третьего порядка, решения которых представляют собой произведения каких-либо двух решений уравнения (1), см. § 26 и ч. III, 3.26. Об уравнении четвертого порядка, решения которого представляют собой произведения некоторого решения уравнения (1) на квадрат того же самого или другого решения уравнения (1), см. ч. III, 4.14.

(в) Уравнение (1) можно многими способами свести к системе

$$y'(x)=P(x)y+Q(x)z, \qquad z'=R(x)y+S(x)z. \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что для этого нужно лишь выбрать P, Q, R, S так, чтобы было

$$P+S+\frac{Q'}{Q}+\frac{g}{f}=0, \qquad RQ+P'+P^2+P\frac{g}{f}+\frac{h}{f}=0.$$

Например:

$$Q=1, \quad P=0, \quad R=-\frac{h}{f}, \quad S=-\frac{g}{f}; \tag{10}$$

$$Q=\frac{1}{E}, \quad P=S=0, \quad R=-\frac{h}{f}E, \text{ где } E=\exp\int\frac{g}{f}\,dx; \tag{11}$$

$$Q=1, \quad P=S=-\frac{g}{2f}, \quad R=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{f}\right)'+\frac{1}{4}\left(\frac{g}{f}\right)^2-\frac{h}{f}; \tag{12}$$

$$Q=\frac{1}{f}, \quad P=S=\frac{f'}{2f}-\frac{g}{2f}, \quad R=\frac{1}{2}(g'-f'')+\frac{1}{4f}(g-f')^2-h. \tag{13}$$

Если дифференциальное уравнение самосопряженное, т. е. если оно имеет вид

$$(fy')'+gy=0 \tag{14}$$

и если $fg>0$, то можно, например, также положить

$$Q=\sqrt{\frac{g}{f}}, \qquad P=S=-\frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}+\frac{g'}{g}\right),$$

$$R=\sqrt{\frac{f}{g}}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f}+\frac{g''}{g}\right)-\frac{1}{16}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{5}{16}\left(\frac{g'}{g}\right)^2+\frac{1}{8}\frac{f'g'}{fg}-\frac{g}{f}\right\}. \tag{15}$$

При этом следует предполагать существование входящих в эти формулы производных.

(г) Решениями системы (9) будут функции

$$y=C\rho(x)\sin\vartheta(x), \qquad z=C\rho(x)\cos\vartheta(x), \tag{16}$$

где C — произвольная постоянная, $\vartheta(x)$ — решение уравнения

$$\vartheta' = Q\cos^2\vartheta + (P-S)\sin\vartheta\cos\vartheta - R\sin^2\vartheta \tag{17}$$

с начальным значением $\vartheta(a)$, $0 \leqslant \vartheta(a) < \pi$ и

$$\rho = \exp\int_a^x [P\sin^2\vartheta + (Q+R)\sin\vartheta\cos\vartheta + S\cos^2\vartheta]\,dx.$$

Это представление решений с помощью «полярных координат» полезно при исследовании нулей решений. Именно, нули функции $y(x)$ соответствуют значениям $\vartheta = k\pi$ (k — целое), а для ϑ имеем дифференциальное уравнение первого порядка (17).

Для уравнения

$$y'' + g(x)\,y = 0 \qquad (g > 0)$$

можно использовать также подстановку

$$\rho(x)\sin\vartheta(x) = y\sqrt{g(x)}, \qquad \rho(x)\cos\vartheta(x) = y';$$

для ϑ получаем при этом уравнение

$$\vartheta' = \sqrt{g} + \frac{1}{4}\frac{g'}{g}\sin 2\vartheta.$$

См. E. Kamke, *Americ. Math. Monthly* (1939); J. K. L. MacDonald, *Bulletin Americ. Math. Soc.* **45** (1939), стр. 164—171; E. Makai, *Compos. math.* **6** (1936), стр. 368—374; *Annali Pisa* (2), **10** (1941), стр. 123—126.

(д) Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения уравнения (14) с начальными значениями

$$y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = 0; \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1$$

и если непрерывные функции $r(x)$ и $\varphi(x)$ определены равенствами

$$y_1 = r\cos\varphi, \qquad y_2 = r\sin\varphi, \qquad \varphi(a) = 0,$$

то имеем: каждое решение уравнения (14) получается из формулы

$$y = Cr\sin(\varphi + \alpha)$$

и притом только один раз; здесь C — произвольная постоянная, α принимает всевозможные значения из заданного интервала $\alpha_0 \leqslant \alpha < \alpha_0 + \pi$, $r(x)$ — решение уравнения

$$(fr')' + gr - \frac{[f(a)]^2}{fr^3} = 0, \tag{18}$$

существующее на всем интервале и удовлетворяющее условиям $r(a)=1$, $r'(a)=0$, и, наконец,

$$\varphi(x)=\int_a^x \frac{f(a)}{f(x)}\frac{dx}{r^2}.$$

Если $f=1$ и $g\to-\infty$ при $|x|\to\infty$, то $r(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$ и $r'(x)\to\pm\infty$ при $x\to\pm\infty$. Указанное преобразование полезно для исследования решения $y(x)$ при больших значениях x.

См. W. E. Milne, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30** (1928), стр. 797—802; H. Milloux, *Prace mat.-fiz.* **41** (1934), стр. 39—54.

Если положить $\omega(x)=1/r^2$, то

$$y=\frac{C}{\sqrt{\omega}}\sin\left(\int\frac{f(a)}{f(x)}\,\omega(x)\,dx+\alpha\right),$$

где $\omega(x)$ — существующее на всем интервале решение уравнения

$$\left(\frac{\omega''}{2\omega}-\frac{3}{4}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\right)f+\frac{\omega'}{2\omega}f'+\frac{\omega^2}{f}=g,$$

удовлетворяющее начальным условиям $\omega(a)=1$, $\omega'(a)=0$.

(е) Преобразование

$$y(x)=u(x)\,\eta(\xi),\qquad \xi=c+\int\frac{dx}{fu^2}$$

с заданной дважды непрерывно дифференцируемой функцией $u(x)\neq0$ переводит (14) в уравнение

$$\eta''+\Phi(\xi)\,\eta=0,\quad \text{где}\quad \Phi(\xi)=f\,(fu')'\,u^3+fgu^4.$$

Если, в частности, $u(x)$ совпадает с введенной в (д) функцией $r(x)$, то получаем уравнение $\eta''+\eta=0$.

См. G. Ascoli, *Atti Accad. Lincei* (6), **22** (1935), стр. 234—243; E. Swift, *Americ. Journ. Math.* **50** (1928), стр. 591—612.

25.3. Разложение решения в непрерывную дробь[1]**.** Если в уравнении (1) $h(x)\neq0$, то это уравнение может быть переписано в виде

$$y=Q_0(x)\,y'+P_1(x)\,y''.$$

Если Q_0 и P_1 имеют производные всех порядков, то, последовательно дифференцируя, получим

$$y'=Q_1y''+P_2y''',$$

где

$$Q_1=\frac{Q_0+P_1'}{1-Q_0'},\qquad P_2=\frac{P_1}{1-Q_0'},$$

[1] [О теории непрерывных (цепных) дробей см., например, А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1961. — *Прим. ред.*]

и вообще

$$y^{(\nu)} = Q_\nu y^{(\nu+1)} + P_{\nu+1} y^{(\nu+2)},$$

где

$$Q_\nu = \frac{Q_{\nu-1} + P'_\nu}{1 - Q'_{\nu-1}}, \qquad P_{\nu+1} = \frac{P_\nu}{1 - Q'_{\nu-1}},$$

если только соответствующие знаменатели $\neq 0$.

Из первоначального уравнения имеем

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + P_1 \frac{y''}{y'};$$

используя следующее уравнение, получим

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1}{Q_1 + P_2 \dfrac{y'''}{y''}}$$

и т. д.; окончательно получаем непрерывную дробь:

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1 |}{| Q_1} + \frac{P_2 |}{| Q_2} + \frac{P_3 |}{| Q_3} + \ldots$$

Остается лишь исследовать в соответствующих конкретных случаях сходимость полученной непрерывной дроби. Если найдено таким способом y/y', а значит и y'/y, то решение получается интегрированием этого выражения.

В частности, для гипергеометрических функций (см. ч. III, 2.260) получаем следующее разложение в непрерывную дробь:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1 |}{| 1} + \frac{a_1 x |}{| 1} + \frac{a_2 x |}{| 1} + \ldots,$$

где

$$a_{2\nu} = \frac{(\beta+\nu)(\alpha-\gamma-\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \qquad a_{2\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\beta-\gamma-\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}.$$

Эта дробь сходится во всей комплексной x-плоскости с разрезом от $+1$ до $+\infty$, за исключением нулей функции $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

25.4. Общие замечания о нулях решений.

(а) Так как интегральная кривая однозначно определяется начальными значениями функции и ее производной, то ни одна интегральная кривая уравнения (1), за исключением $y \equiv 0$, не касается оси x и не имеет с ней ни в каком конечном замкнутом интервале бесконечного числа общих точек.

(б) Теорема о чередовании нулей. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (1), то между каждыми двумя соседними нулями (если такие существуют) одного решения лежит один и только один нуль другого решения.

(в) Для каждого ненулевого решения $y(x)$ справедливо следующее. Если $h \neq 0$ и $f \neq 0$, то нули функций y и y' последовательно чередуются. Если $h \neq 0$ и $h^2 + hg' - gh' \neq 0$, то это же верно и для нулей функций y' и y'', а если $g \neq 0$ и $h^2 + hg' - gh' \neq 0$, то это верно и для нулей функций y и y''.

25.5. Нули решений на конечном интервале. Будем рассматривать дифференциальное уравнение в самосопряженной форме

$$(fy')' + gy = 0, \tag{14}$$

причем функция f предполагается положительной и непрерывно дифференцируемой, а g — непрерывной при $a \leqslant x \leqslant b$.

(а) *Теорема сравнения Штурма.* Если $y_\nu(x)$ — некоторое ненулевое решение уравнения

$$(f_\nu y')' + g_\nu y = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{19}$$

и если $f_1 \geqslant f_2 > 0$, $g_1 \leqslant g_2$, то или между каждыми двумя соседними нулями x_1, x_2 функции y_1 лежит по крайней мере один нуль функции y_2, или $y_2 = Cy_1$ на отрезке $[x_1, x_2]$. Если при этом ни в каком интервале, лежащем в $[x_1, x_2]$, тождества $f_1 \equiv f_2$, $g_1 \equiv g_2$ не выполняются одновременно, то внутри интервала (x_1, x_2) лежит обязательно хотя бы один нуль функции y_2. Для доказательства может быть также использована так называемая *формула Пиконе*:

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{y_1}{y_2}\left(f_1 y_1' y_2 - f_2 y_1 y_2'\right)\right\} = \\ = (g_2 - g_1) y_1^2 + (f_1 - f_2) y_1'^2 + f_2\left(y_1' - y_1 \frac{y_2'}{y_2}\right)^2 .$$

Здесь y_1 и y_2 — решения уравнений (19) при $\nu = 1, 2$, и в рассматриваемом интервале должно быть $y_2 \neq 0$.

(б) Если сравнивать уравнение (14) с уравнением

$$ky'' + k\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2 y = 0$$

с постоянным k (соответственно K вместо k), то отсюда получаются следующие условия для того, чтобы решения были колеблющимися.

Если $g \leqslant 0$ или если

$$f \geqslant k > 0, \qquad g < k\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2,$$

то каждое нетривиальное решение уравнения (14) имеет на отрезке $[a, b]$ не более одного нуля.

Если

$$0 < f \leqslant K, \qquad g > K\left(\frac{m\pi}{b-a}\right)^2, \quad m \text{ целое и } \geqslant 1,$$

то каждое нетривиальное решение уравнения (14) имеет на отрезке $[a, b]$ не менее m нулей.

Отметим еще следующий результат. Если $f>0$, $g\leqslant 0$ и ни на каком подынтервале рассматриваемого интервала функция g не равна тождественно нулю, то yy' имеет для каждого нетривиального решения y не более одного нуля на отрезке $[a, b]$.

(в) Теорема сравнения может быть легко доказана, и при этом в несколько более общем виде, если от уравнения второго порядка перейти к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка (см. п. 25.2 (в)) и далее от системы к уравнению (17). Это уравнение имеет вид

$$\vartheta'(x)=A_\nu(x)\cos^2\vartheta+B_\nu(x)\sin 2\vartheta+C_\nu(x)\sin^2\vartheta. \tag{20}$$

Если рассматривать два уравнения такого вида ($\nu=1, 2$) с коэффициентами A_ν, B_ν, C_ν, причем на всем отрезке $[a, b]$

$$A_2\geqslant A_1,\quad C_2\geqslant C_1,\quad (A_2-A_1)(C_2-C_1)\geqslant(B_2-B_1)^2, \tag{21}$$

и если $\vartheta_\nu(x, \alpha)$ есть решение уравнения (20), удовлетворяющее начальному условию $\vartheta_\nu(a, \alpha)=\alpha$, то

$$\vartheta_2(x,\ \alpha_2)\geqslant\vartheta_1(x,\ \alpha_1)\quad\text{при}\quad\alpha_2\geqslant\alpha_1.$$

Если $B_2\equiv B_1$ (при этом последнее неравенство (21) будет следствием двух первых), то

$$\vartheta_2(b,\ \alpha_2)>\vartheta_1(b,\ \alpha_1)$$

в том и только в том случае, если:

или $\alpha_2>\alpha_1$,

или $\alpha_2=\alpha_1$ и, кроме того, по крайней мере в одной точке отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ будет либо $A_2>A_1$, $|C_1|+|C_2|>0$, либо $C_2>C_1$, $|A_1|+|A_2|>0$.

Отсюда для системы

$$y'=P_\nu(x)y+Q_\nu(x)z,\quad z'=R_\nu(x)y+S_\nu(x)z\qquad(\nu=1,\ 2) \tag{22}$$

вытекает, как частный случай, следующее.

Пусть $P_\nu, \ldots, S_\nu$ непрерывны на $[a, b]$, и пусть

$$Q_2\geqslant Q_1>0,\quad R_2\leqslant R_1,\quad P_2-S_2=P_1-S_1;$$

далее пусть $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — некоторое нетривиальное решение системы (22), причем

или $y_1(a)=0$,

или $y_1(a)\neq 0$, $y_2(a)\neq 0$, $\dfrac{z_1(a)}{y_1(a)}\geqslant\dfrac{z_2(a)}{y_2(a)}$.

Первая теорема сравнения. $y_2(x)$ имеет на интервале $a<x\leqslant b$ по крайней мере столько же нулей, сколько и $y_1(x)$; если x_n и $\bar{x}_n$ n-ые нули решений y_1 и y_2, то $\bar{x}_n\leqslant x_n$; более

того, $\bar{x}_n < x_n$, если хотя бы в одной точке отрезка $a \leqslant x \leqslant x_n$ выполнены условия

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 > Q_1 \quad \text{и} \quad |R_1| + |R_2| > 0 \\ \text{или} \\ R_2 < R_1. \end{array}\right\} \tag{23}$$

Вторая теорема сравнения. Если y_1 и y_2 имеют на интервале $a < x < b$ одинаковое число нулей и если $y_1(b) \neq 0$, $y_2(b) \neq 0$ и хотя бы в одной точке отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ выполнено условие (23), то

$$\frac{z_1(b)}{y_1(b)} > \frac{z_2(b)}{y_2(b)}.$$

При $P_\nu = S_\nu = 0$, $Q_\nu = 1/f_\nu$, $R_\nu = -g_\nu$ отсюда получается теорема (а). Так как от уравнений (14) и (1) можно переходить к системе вида (9) различными способами (см. п. 25.2 (в)), то из двух вышеуказанных теорем сравнения для систем можно легко вывести еще и другие теоремы сравнения для уравнений (14) и (1).

(г) Если $y_\nu(x)$ есть некоторое ненулевое решение уравнения

$$(f_\nu y')' + g_\nu y = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2) \tag{19}$$

и $f_1 \geqslant f_2 > 0$, $g_1 \leqslant g_2$, и, кроме того, или $y_1(a) = 0$, или

$$y_1(a) \neq 0, \quad y_2(a) \neq 0, \quad \frac{f_1(a)\, y_1'(a)}{y_1(a)} \geqslant \frac{f_2(a)\, y_2'(a)}{y_2(a)},$$

то для n-ых нулей x_n и $\bar{x}_n$ решений y_1 и y_2, лежащих на интервале $a < x \leqslant b$, справедливо неравенство $\bar{x}_n \leqslant x_n$.

(д) Отсюда, если сравнивать (14) с уравнением

$$Ky'' - ky = 0,$$

следует: если $f \geqslant K > 0$, $-g \geqslant k > 0$ и если $y(x)$ — некоторое решение уравнения (14) с начальными значениями $y(a) = \alpha$, $y'(a) = \beta$ $(|\alpha| + |\beta| > 0)$, то это решение не имеет в интервале $a < x \leqslant b$ ни одного нуля, если $\alpha = 0$ или если $\alpha \neq 0$, и $f(a)\alpha^{-1}\beta \geqslant -\sqrt{kK}$.

25.6. Поведение решений при $x \to \infty$. Относящиеся сюда теоремы формулируются, как правило, лишь для уравнений вида

$$y'' + f(x)\, y = 0 \qquad (f \text{ непрерывна при } x \geqslant a). \tag{24}$$

Это не является существенным ограничением общности, так как, согласно п. 25.1 (г), всякое уравнение вида (1) может быть приведено к этой форме, если только g/f — дифференцируемая функция.

(а) $f \leqslant 0$. Из п. 25.5 (б) следует, что каждое ненулевое решение имеет не больше одного нуля, следовательно, оно $\neq 0$ при всех достаточно больших x. Дальнейшие теоремы этого типа можно получить, основываясь на п. 25.5, если за уравнение, с которым производится сравнение, принять уравнение $y''=0$.

Если $f(x)\leqslant 0$ для *всех* x, однако $\not\equiv 0$, то $y\equiv 0$ есть единственное решение, ограниченное для всех x.

(б) $f(x)\to-\infty$ при $|x|\to\infty$. Каждое ненулевое решение $y(x)$ имеет лишь конечное число нулей, и

$$\left|\frac{y'(x)}{y(x)}\right|\to\infty \quad \text{при} \quad |x|\to\infty.$$

Существуют два линейно независимых решения $u_1(x)$, $u_2(x)$, таких, что u_1, $u_1'\to 0$, $u_2\to\infty$, $u_2'\to-\infty$ при $x\to-\infty$, и два линейно независимых решения v_1, v_2, таких, что v_1, $v_1'\to 0$, а v_2, $v_2'\to\infty$ при $x\to\infty$.

(в) $f\geqslant\alpha^2>0$. Тогда каждое нетривиальное решение $y(x)$, как и его производная, имеет бесконечно много нулей, т. е. каждое решение совершает бесконечное множество колебаний; расстояния между соседними нулями остаются при этом ограниченными.

Если $f(x)\to\alpha^2>0$ при $x\to\infty$ и если $f(x)$ монотонно возрастает или если $\ln f(x)$ имеет ограниченное изменение при $a\leqslant x<\infty$ [предполагаем, что на этом интервале $f(x)>0$. — *Прим. ред.*], то промежутки между нулями стремятся к π/α. Если η_n и η_n' — амплитуды функций y и y', т. е. максимальные значения $|y|$ и $|y'|$ в интервалах между n-ым и $(n+1)$-м нулями, то существуют $\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n$ и $\eta'=\lim\limits_{n\to\infty}\eta_n'$ и $\eta'=\alpha\eta$. Решения уравнения (24) ведут себя, следовательно, при больших значениях x аналогично решениям уравнения $y''+\alpha^2y=0$.

Пусть $f'(x)$ существует и >0 и, кроме того, или $f(x)\to\infty$, а $f'(x)$ монотонно убывает, или

$$\frac{f\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\right)}{f(x)}\to 1$$

и $f'(x)$ монотонно возрастает (монотонность в обоих случаях понимается в широком смысле). Тогда для любого нетривиального решения $y(x)$ уравнения (24) будет

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=0, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\left|y(x)\sqrt{f(x)}\right|>0.$$

(г) Пусть в уравнениях

$$y''+g_\nu y'+h_\nu y=0 \qquad (\nu=1,\ 2)$$

$g_\nu(x)$ и $h_\nu(x)$ непрерывны при всех $x\geqslant a$, и пусть

$$g_1\leqslant g_2\leqslant 0, \qquad h_1\leqslant h_2, \qquad h_2>0.$$

Если для первого (т. е. при $\nu = 1$) из этих уравнений каждое нетривиальное решение имеет бесконечное множество нулей, то это же верно и для второго уравнения ($\nu = 2$).

(д) $y'' + gy' + hy = 0$; при этом пусть $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны при всех $x \geqslant a$ и, кроме того, $g \to \alpha$, $h \to \beta$ при $x \to \infty$.

Пусть ρ_1 и ρ_2 — решения «характеристического уравнения» $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0$.

Если $\Re\rho_1 \neq \Re\rho_2$, то для каждого нетривиального решения предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} \tag{25}$$

существует и равен ρ_1 или ρ_2. Если $\Re\rho_1 = \Re\rho_2$, то этот предел, как показывает пример уравнения $y'' + y = 0$, может и не существовать, (если $\rho_1 = \rho_2$, то см. ч. III, 2.106). Если $\rho_1 = \rho_2$, то, пользуясь, если нужно, подстановкой $y = u(x)\exp\rho_1 x$, можно считать, что $\rho_1 = \rho_2 = 0$, т. е. $g \to 0$ и $h \to 0$. Если при этом $g \leqslant 0$ и $h \leqslant 0$, то предел (25) опять-таки существует и равен нулю

(е) Если в уравнении

$$(fy')' + gy = 0 \tag{14}$$

f и g непрерывно дифференцируемы, $f > 0$, $g > 0$ и fg — монотонна, то амплитуды каждого решения этого уравнения при возрастании x монотонно убывают или возрастают, в зависимости от того, будет ли fg возрастать или убывать.

(ж) $y'' + [f(x) + \lambda]y = 0$. Если $f(x)$ при $x \geqslant a$ непрерывно дифференцируема и если $f(x) = O(1/x)$, $f'(x) = O(1/x^2)$ при $x \to \infty$, то $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} |\varphi_\lambda(x)|$ (φ_λ означает произвольное решение, соответствующее данному значению λ) при всех $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ лежит между некоторыми границами, не зависящими от λ.

Если $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$ и если при $x \to \infty$ функция $f(x) = O(x^{-k})$, где $k > 1$, то при $\lambda > 0$ каждое решение $\varphi(x) \not\equiv 0$ может быть представлено в виде

$$\varphi = \rho(x)\sin[\lambda x + \sigma(x)], \qquad \varphi' = \lambda\rho(x)\cos[\lambda x + \sigma(x)]$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями $\rho(x)$ и $\sigma(x)$, и при соответствующем выборе чисел $\rho_0 \neq 0$ и σ_0 будет

$$\rho(x) = \rho_0 + O(1/x^{k-1}), \qquad \sigma = \sigma_0 + O(1/x^{k-1}).$$

25.7. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с особыми точками. Пусть теперь в уравнении

$$f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = 0$$

коэффициенты $f_\nu(x)$ будут произвольные мероморфные функции. Из § 18 получаем для того частного случая, когда рассматриваются уравнения второго порядка, следующие результаты:

(а) Дифференциальное уравнение будет уравнением типа Фукса, если оно имеет вид

$$P^2y'' + PQy' + Ry = 0,$$

где $P = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$, причем все a_ν различны и Q, R — многочлены степеней $\leqslant m - 1$ и $\leqslant 2(m - 1)$ соответственно. Для этого уравнения все точки, включая $x = \infty$, могут быть только или регулярными, или слабо особыми.

(б) $$(x - \xi)^2 f(x)\, y'' + (x - \xi)\, g(x)\, y' + h(x)\, y = 0,$$

f, g, h в некоторой окрестности точки $x = \xi$ регулярны, т. е. разложимы в степенные ряды и $f(\xi) \neq 0$. Тогда точка ξ — регулярная или слабо особая. Вид решения в окрестности точки ξ зависит от решения определяющего уравнения

$$r(r - 1) f(\xi) + rg(\xi) + h(\xi) = 0.$$

Пусть его решения r_1, r_2 занумерованы так, что если $r_1 - r_2$ есть целое число, то оно $\geqslant 0$. Тогда решения соответствующего дифференциального уравнения суть $C_1y_1 + C_2y_2$, причем y_1 имеет вид

$$y_1 = (x - \xi)^{r_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x - \xi)^\nu, \qquad c_0 = 1, \tag{α}$$

а для y_2 имеем:

$$y_2 = (x - \xi)^{r_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu^* (x - \xi)^\nu, \qquad c_0^* = 1, \tag{β_1}$$

если $d = r_1 - r_2$ — не целое число;

$$y_2 = y_1 \ln(x - \xi) + (x - \xi)^{r_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu (x - \xi)^\nu, \tag{β_2}$$

если $d = 0$, и, наконец,

$$y_2 = cy_1 \ln(x - \xi) + (x - \xi)^{r_2} \left(-\frac{1}{d} + \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu (x - \xi)^\nu \right), \tag{β_3}$$

если d — целое положительное число (при этом возможно $c = 0$). Коэффициенты в (α) и (β_1) можно найти, подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение. Функции (β_2) и (β_3) получаются с помощью метода Фробениуса (см. п. 18.2), если в дифференциальное уравнение подставить $y(x) = y_1(x) \cdot u(x)$.

К рассмотренному здесь типу принадлежат, например, уравнения Бесселя (ч. III, 2.162), Лежандра (ч. III, 2.240), гипергеометрическое уравнение (ч. III, 2.260).

(в) $$x^2 f(1/x)\, y'' + xg(1/x)\, y' + h(1/x)\, y = 0,$$

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ регулярны в некоторой окрестности точки $x=0$ и $f(0)\neq 0$. Тогда точка $x=\infty$ регулярная или слабо особая. Подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=1/x$ сводит этот случай к случаю (б).

(г) $$x^a f(1/x)\,y''+x^b g(1/x)\,y'+x^c h(1/x)\,y=0,$$

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ регулярны в некоторой окрестности точки $x=0$, $f(0)\neq 0$, $h(0)\neq 0$; $g(x)\equiv 0$ или $g(0)\neq 0$; a, b, c — целые числа.

Выполнение тех из нижеследующих неравенств, которые содержат b, необходимо лишь, если $g(0)\neq 0$. Если $a\geqslant b+1$ и $a\geqslant c+2$, то мы имеем тип (в). Поэтому пусть $a\leqslant b$ или $a\leqslant c+1$. Тогда $x=\infty$ — сильно особая точка. Для существования решения, имеющего вид

$$y=x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k},$$

необходимо: $g(0)\neq 0$, $a\leqslant b$ и $c\leqslant\min(a-2,\ b-1)$. Для существования решения, представимого в виде нормального ряда

$$y=e^{P(x)}x^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-k}$$

(P — многочлен степени p), необходимо:

$$g(0)=0,\quad c-2(p-1)\leqslant a\leqslant c+1$$

или

$$g(0)\neq 0,\quad a\leqslant b,\quad \min\left(c-b,\ \frac{c-a}{2}\right)\leqslant p-1\leqslant b-a.$$

(д) Аналогичные уравнения рассматриваются и в случае действительного переменного. Если A, B — постоянные, а $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $a<x\leqslant b$, и если интегралы

$$\int_a^b |f|\,dx,\qquad \int_a^b (x-a)\,|g|\,dx$$

существуют, то уравнение

$$(x-a)^2y''+[A(x-a)+f(x)(x-a)^2]\,y'+[B+(x-a)^2g(x)]\,y=0$$

может быть решено методом последовательных приближений.

25.8. Приближенные решения. Асимптотические решения; действительное переменное.

(а) Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''+y'\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_\nu}{x^\nu}+y\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{b_\nu}{x^\nu}=0. \tag{26}$$

В том частном случае, когда $a_0 = -1$, $b_0 = b_1 = 0$, коэффициенты c_ν ряда

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^\nu} \tag{27}$$

могут быть вычислены последовательно, если подставить (27) в уравнение (26) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях x. Получающийся таким образом ряд (27), вообще говоря, расходится, однако для решения $y(x)$, стремящегося при $x \to \infty$ к c_0, он дает асимптотическое представление

$$y \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x^\nu}$$

в том смысле, что для любого целого $m > 0$ при соответствующем выборе A

$$\left| y(x) - \sum_{\nu=0}^{m} \frac{c_\nu}{x^\nu} \right| < \frac{A}{x^{m+1}}$$

для всех достаточно больших x. Это полезно при вычислении $y(x)$ для больших значений x.

Общий случай может быть сведен к разобранному, если только $a_0 \neq 0$ и $a_0^2 \neq 4b_0$, с помощью подстановки

$$y(x) = e^{\tau x} x^r \eta(\xi), \quad \xi = \rho x.$$

При этом τ выбирается так, чтобы новый коэффициент b_0 был равен нулю, r — так, чтобы новый коэффициент b_1 равнялся нулю, и ρ — так, чтобы новый коэффициент a_0 был равен -1.

(б)[1]. Пусть в уравнении

$$y'' + f(x) y' + g(x) y = 0 \tag{28}$$

функция g в интервале $a < x \leqslant b$ непрерывна, f — непрерывно дифференцируема. Пусть уравнение (28) в окрестности точки $x = a$ «весьма близко» к уравнению

$$u'' + \varphi(x) u' + \psi(x) u = 0, \tag{29}$$

где ψ непрерывна и φ непрерывно дифференцируема. [Пример: уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2) y = 0$$

и уравнение

$$x^2 u'' + x u' - n^2 u = 0$$

---

[1]) Y. Ikeda, *Math. Zeitschrift* 22 (1925), стр. 16—25. [См. также Сансоне, т. I, гл. II, § 6. — *Прим. ред.*]

вблизи точки $x=0$]. Тогда уравнение (28) может быть записано в виде

$$y''+\varphi y'+\psi y=(\varphi-f)\,y'+(\psi-g)\,y.$$

Пусть известны два линейно независимых решения u_1 и u_2 уравнения (29). С помощью фундаментального решения (см. п. 17.4) уравнения (29)

$$\gamma(x,\ \xi)=\frac{u_1(\xi)\,u_2(x)-u_1(x)\,u_2(\xi)}{u_1(\xi)\,u_2'(\xi)-u_1'(\xi)\,u_2(\xi)}\qquad(x\leqslant\xi)$$

получаем

$$y(x)=\int_a^x\{[\varphi(\xi)-f(\xi)]\,y'(\xi)+[\psi(\xi)-g(\xi)]\,y(\xi)\}\,\gamma(x,\ \xi)\,d\xi$$

или

$$y(x)=[f(a)-\varphi(a)]\,y(a)\,\gamma(x,\ a)+$$
$$+\int_a^x\left(\frac{d}{dx}\{[f(\xi)-\varphi(\xi)]\,\gamma(x,\ \xi)\}+[\psi(\xi)-g(\xi)]\,\gamma(x,\ \xi)\right)y(\xi)\,d\xi.$$

Первый член в правой части представляет собой, если только $[f(a)-\varphi(a)]\ y(a)$ существует, некоторое определенное решение $u(x)$ уравнения (29). Следовательно, для $y(x)$ получается интегральное уравнение типа Вольтерра вида

$$y(x)=u(x)+\int_a^x K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

к которому при соответствующих предположениях может быть применен метод последовательных приближений (ч. II, п. 2.10). Если остановиться после некоторого конечного числа итераций, то получится приближенное выражение для решения.

(в) Пусть снова дано дифференциальное уравнение (28), т. е.

$$L(y)=0,\quad \text{где}\quad L(y)\equiv y''+f(x)\,y'+g(x)\,y,\tag{28a}$$

причем теперь $f(x)$ и $g(x)$ предполагаются непрерывными при всех $x\geqslant a$. Будем искать решение[1]) в виде

$$y(x)=\lambda_1(x)\,z_1(x)+\lambda_2(x)\,z_2(x),\tag{30}$$

где z_1 и z_2 — решения линейной системы

$$z_1'=\alpha(x)\,z_1+\beta(x)\,z_2,\quad z_2'=\gamma(x)\,z_1+\delta(x)\,z_2.$$

---

[1]) G. Fubini, *Atti Accad. Lincei* (6), 26 (1937), стр. 253—259. См. также п. 24.2 (в).

Если λ_1 и λ_2 удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda_1'+\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma)'+(\alpha+f)(\lambda_1'+\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma)+\gamma(\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+g\lambda_1=0,\\ (\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)'+(\delta+f)(\lambda_2'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+\beta(\lambda_1'+\lambda_1\beta+\lambda_2\delta)+g\lambda_2=0,\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

то функция (30) есть решение уравнения (28а). Наконец, если интеграл

$$\int_x^\infty S(t)\,dt, \quad \text{где} \quad S(x)=\max(|\alpha|,\ |\beta|,\ |\gamma|,\ |\delta|),$$

сходится, то такое решение (30), в котором $z_1(x)\to\zeta_1$, $z_2(x)\to\zeta_2$ при $x\to\infty$, может быть представлено с помощью рядов

$$z_1=\sum_{n=0}^\infty u_n(x), \quad z_2=\sum_{n=0}^\infty v_n(x), \tag{32}$$

члены которых даются рекуррентными формулами:

$$u_0=\zeta_1, \quad u_n=\int_\infty^x [\alpha(t)\,u_{n-1}(t)+\beta(t)\,v_{n-1}(t)]\,dt,$$

$$v_0=\zeta_2, \quad v_n=\int_\infty^x [\gamma(t)\,u_{n-1}(t)+\delta(t)\,v_{n-1}(t)]\,dt.$$

Ряды (32) сходятся абсолютно и равномерно при всех значениях x, для которых

$$2\int_x^\infty S(t)\,dt<\varepsilon<1,$$

и мажорируются рядом

$$k\sum_{n=0}^\infty \varepsilon^n, \quad \text{где} \quad k=\max(|\zeta_1|,\ |\zeta_2|).$$

Если, помимо (31), предположить, что

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2\gamma=0, \quad \lambda_1\beta+\lambda_2\delta=0,$$

то

$$\alpha=\frac{\lambda_2 L(\lambda_1)}{W}, \quad \beta=\frac{\lambda_2 L(\lambda_2)}{W}, \quad \gamma=-\frac{\lambda_1 L(\lambda_1)}{W}, \quad \delta=-\frac{\lambda_1 L(\lambda_2)}{W},$$

если только детерминант Вронского $W=\lambda_1\lambda_2'-\lambda_1'\lambda_2\neq 0$ для всех достаточно больших значений x.

Если $\int\limits_x^\infty |Q(t)|e^{2t}\,dt$ сходится, то для уравнения

$$y'' = [Q(x)+1]\,y$$

можно положить $\lambda_{1,2} = e^{\pm x}$.

25.9. Асимптотические решения; комплексное переменное[1]. Пусть в уравнении

$$y''(z) + \left\{a_{1,0} + \frac{a_{1,1}}{z} + \frac{\psi_1(z)}{z^2}\right\} y'(z) + \left\{a_{2,0} + \frac{a_{2,1}}{z} + \frac{\psi_2(z)}{z^2}\right\} y(z) = 0 \tag{33}$$

$a_{1,0}^2 \neq 4a_{2,0}$ и пусть ψ_1, ψ_2 регулярны и ограничены внутри сектора

$$|z| \geqslant r_0 > 0 \quad \varphi_0 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_1 < \varphi_0 + 2\pi. \tag{S}$$

Подстановка

$$y(z) = y^*(z) \exp\left(-a_{1,0}\frac{z}{2}\right)$$

переводит (33) в уравнение того же вида, но в котором уже $a_{1,0} = 0$. Поэтому в (33) можно предполагать, что $a_{1,0} = 0$, $a_{2,0} \neq 0$.

Если σ удовлетворяет уравнению $\sigma^2 = -a_{2,0}$, то два выходящих из точки $z = 0$ луча $\Re(z\sigma) = 0$ называются критическими лучами. Если хотя бы один из критических лучей лежит вне сектора (S), то существует фундаментальная система y_1, y_2 решений уравнения (33), представимых в секторе (S) в виде

$$y_\nu = e^{\sigma_\nu z} z^{\rho_\nu}\left(1 + \sum_{n=1}^\infty \chi_{n,\nu}(z)\right) \qquad (\nu = 1,\ 2),$$

где $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, причем $\chi_{n,1}$, $\chi_{n,2}$ регулярны в (S) и при соответствующем выборе постоянной $C > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$|\chi_{n,\nu}(z)| < \frac{1}{n!}\left(\frac{C}{|z|}\right)^n.$$

Этот результат получается, если уравнение (33) привести с помощью подстановки

$$y = e^{\sigma z} z^\rho \eta, \quad \text{где} \quad 2\rho = -a_{1,1} - a_{2,1}\sigma^{-1},$$

к виду

$$\eta'' + \left(2\sigma + \frac{b}{z}\right)\eta' = -\frac{1}{z^2}(\psi_1\eta' + \psi_2\eta),$$

[1]) См. G. Hoheisel, *Journ. f. Math.* 153 (1924), стр. 228—244.

гда $\sigma b = -a_{2,1}$, и к полученному уравнению применить метод последовательных приближений.

25.10. Метод ВБК. Уравнение

$$y'' - [\rho^2 f(x) + g(x)]\, y = 0 \tag{34}$$

подстановкой

$$y = \exp\left(\rho \int u(x)\, dx\right)$$

сводится к уравнению Риккати

$$\rho u' + \rho^2 u^2 - \rho^2 f - g = 0.$$

Если будем искать формально решение этого уравнения в виде ряда

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu(x)\, \rho^{-\nu} \tag{35}$$

и подставим этот ряд в (34), то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ρ, получим:

$$u_0 = \pm \sqrt{f}, \quad u_1 = -\frac{u_0'}{2u_0}, \quad u_2 = \frac{g - u_1' - u_1^2}{2u_0},$$

$$u_{\nu+1} = -\frac{1}{2u_0}\left(u_\nu' + \sum_{p=1}^{\nu} u_p u_{\nu+1-p}\right) \quad (\nu \geqslant 2).$$

Так как приходится делить на u_0, то следует предполагать, что $f(x)$ в рассматриваемой области не обращается в нуль. Если предположить, что ряд (35) и ряды, получаемые из него двукратным почленным дифференцированием, при всех достаточно больших ρ сходятся равномерно по x во всей области, то решение уравнения (34) получится принципиально весьма простым способом. Этот способ в физической литературе известен под названием ВБК-способа[1]).

---

[1]) [По именам его авторов: Вентцель, Бриллюен, Крамерс. — *Прим. перев*]. См. R. E. Langer, *Bulletin Americ. Math. Soc.* **40** (1934), стр. 545—582. [См. также Н. Фреман и П. У. Фреман, ВБК — приближение, «Мир», 1967. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА VII

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ

§ 26. Линейные дифференциальные уравнения третьего порядка

Линейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$y''' + f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = 0 \tag{1}$$

обладает следующей особенностью: если функция $f_2(x)$ интегрируема, то, умножив (1) на

$$f = \exp \frac{1}{3} \int f_2(x)\, dx,$$

мы приведем это уравнение к виду

$$[f(fy')']' + gy' + hy = 0.$$

В силу нечетности порядка не существует самосопряженных дифференциальных уравнений третьего порядка. Антисамосопряженные дифференциальные формы третьего порядка имеют вид

$$L_1(y) = (fy)''' + fy''' + (gy)' + gy'$$

или

$$L_2(y) = (fy')'' + (fy'')' + (gy)' + gy',$$

а также, если коэффициент при y''' положителен, — вид

$$L_3(y) = [f(fy')']' + 2gy' + g'y.$$

Соответствующие этим формам дифференциальные уравнения $L(y) = 0$ называются все же иногда кратко самосопряженными, так как в этом случае $L^* = -L$ и, следовательно, уравнение $L^*(y) = 0$ имеет те же корни, что и $L(y) = 0$.

Если y_1, y_2 — некоторая фундаментальная система решений самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка

$$2f(fy')' + gy = 0 \qquad (f \neq 0)$$

то y_1^2, $y_1 y_2$, y_2^2 образуют фундаментальную систему решений антисамосопряженного уравнения $L_3(y)=0$. Так как при этом $y_1^2+y_2^2$ также будет решением этого уравнения, то, следовательно, каждое антисамосопряженное дифференциальное уравнение третьего порядка имеет решение, не обращающееся в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала, если только коэффициент при старшей производной в этом интервале нигде не обращается в нуль.

Если y_1, y_2 — два линейно независимых решения уравнения $L_3(y)=0$, в котором $f \neq 0$, то между любыми двумя смежными нулями решения y_1 лежит не более двух нулей решения y_2 и нечетное число нулей функций y_2 и $y_1 y_2' - y_1' y_2$ вместе.

§ 27. Линейные дифференциальные уравнения четвертого порядка

Самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка имеет вид

$$[f(x)\,y'']'' + [g(x)\,y']' + h(x)\,y = 0. \tag{1}$$

Если f не обращается в нуль и трижды непрерывно дифференцируема и если g непрерывно дифференцируема, то подстановка

$$y(x) = f^{-1/8}\eta(\xi), \quad \xi = \int f^{-1/4}\,dx$$

переводит (1) в уравнение вида [1])

$$\eta^{(4)} + [G(\xi)\,\eta']' + H(\xi)\,\eta = 0.$$

Это уравнение подстановкой

$$y(x) = u(x)\,\eta(\xi), \quad \xi(x) = \int \frac{dx}{fu^2},$$

где $u(x)$ — нигде не обращающееся в нуль решение уравнения

$$30\,\frac{u''}{u} - 20\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + 10\,\frac{f'}{f}\,\frac{u'}{u} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 3\,\frac{f''}{f} + 9\,\frac{g}{f} = 0,$$

сводится к уравнению вида

$$\eta^{(4)} = \Phi(\xi)\,\eta.$$

Если положить $v(x) = u'/u$, то уравнение для u приводится к уравнению Риккати

$$30v' + 10v^2 + 10\,\frac{f'}{f}\,v + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 3\,\frac{f''}{f} + 9\,\frac{g}{f} = 0.$$

---

[1]) Коэффициенты найдены в работе: W. Sternberg, *Math. Zeitschrift* 3 (1919), стр. 192.

ГЛАВА VIII

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[Приближенным методам решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем посвящена обширнейшая литература. Мы укажем только несколько книг для общего ознакомления с вопросом:

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, ИЛ, 1954, гл. XI;

А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 1954;

В. Э. Милн, Численное решение дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955;

Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1953;

И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, 1962;

С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий, Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, 1965;

Р. В. Хемминг, Численные методы, 1968;

Ш. Е. Микеладзе, Новые методы интегрирования дифференциальных уравнений, 1951;

Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1952. — *Прим. ред.*]

§ 28. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка

28.1. Метод ломаных. Если начальная точка (x_0, y_0) интегральной кривой дана, то из дифференциального уравнения можно найти направление касательной $(\operatorname{tg}\alpha = y_0' = f(x_0, y_0))$ к этой интегральной кривой в точке x_0. В этом направлении идем, скажем, до точки (x_1, y_1), и в этой точке повторяем тот же прием. Таким образом, мы получаем первое приближение интегральной кривой (рис. 24 сделан для $y' = y/x$, $x_0 = 2$, $y_0 = 6$ при постоянной длине шага; точки, обозначенные маленькими кружками, лежат на истинной интегральной кривой).

Следует остерегаться такого ложного вывода: при графическом методе решения может случиться, что в качестве приближенного решения получится ломаная, имеющая вид не ломаной, а скорее непрерывно дифференцируемой кривой. Может создаться впечатление, что такая ломаная будет очень хорошим приближением к искомой кривой. Пример в п. 2.1 (рис. 2) показывает, что такое заключение может быгь ошибочно.

28.2. Метод добавочного полушага. Для исходной точки (x_0, y_0) находим из дифференциального уравнения угловой коэффициент y'_0 касательной к интегральной кривой. Откладываем

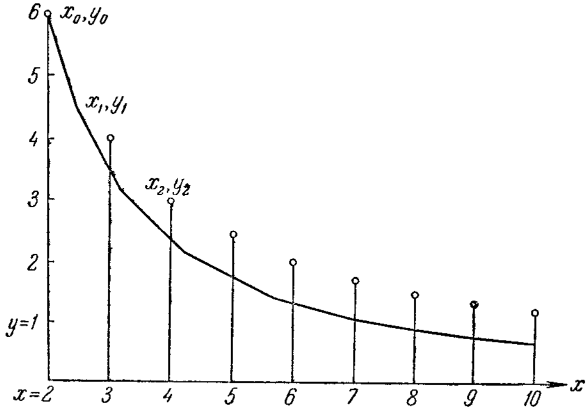

Рис. 24.

в этом направлении некоторый отрезок, скажем, до точки (ξ_1, η_1) (первый полушаг, рис. 25; дифференциальное уравнение и начальная точка здесь те же самые, что и на рис. 24). Для этой

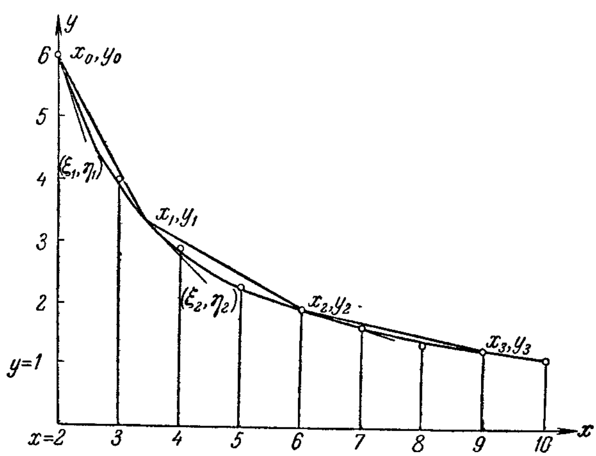

Рис. 25.

точки определяем из дифференциального уравнения угловой коэффициент η'_1. Далее идем из точки (x_0, y_0) в направлении, определяемом угловым коэффициентом η_1'; однако при этом проходим расстояние вдвое больше, чем при первом полушаге, скажем, до точки (x_1, y_1) (первый полный шаг). Затем повторяем тот же прием, беря за начало точку (x_1, y_1); после второго полушага, приводящего в точку (ξ_2, η_2), получаем точку (x_2, y_2) и т. д. Точки (x_n, y_n) суть точки искомого приближенного решения. Так как, кроме того, в каждой точке (x_n, y_n) известна и касательная к искомой кривой — касательной является прямая, ведущая в точку (ξ_{n+1}, η_{n+1}), — то возможно почти точное построение кривой (на рис. 25 точки, обозначенные маленькими кружками, лежат на истинной интегральной кривой).

Введение полушага является общим принципом, который часто может быть с пользой применен для повышения точности.

28.3. Метод Рунге — Хейна — Кутта. Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Принцип часто применяемого метода Рунге — Хейна — Кутта состоит в том, что для отрезка $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ определяются точки (ξ_ν, η_ν) и константы R_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$ так, чтобы для интегральной кривой $y = \varphi(x)$, проходящей через точку (x_0, y_0), ее ордината $y_1 = \varphi(x_0 + h)$ в точке $x_0 + h$ возможно точнее давалась выражением

$$k = y_0 + h\,[R_0 f(\xi_0, \eta_0) + \ldots + R_m f(\xi_m, \eta_m)];$$

«возможно точнее» здесь понимается в том смысле, что при разложении функций φ и f в ряд по степеням h в правой и левой частях равенства $\varphi'(x_0 + h) = f(x_0 + h, \varphi(x_0 + h))$ должно совпадать возможно большее число членов.

При этом должно быть $\xi_0 = x_0$, $\eta_0 = y_0$ и

$$\begin{array}{lll}
\xi_1 = x_0 + \alpha_0 h, & \eta_1 = y_0 + \beta_0 k_1, & k_1 = hf(\xi_0, \eta_0), \\
\xi_2 = x_0 + \alpha_1 h, & \eta_2 = y_0 + \beta_1 k_1 + \gamma_1 k_2, & k_2 = hf(\xi_1, \eta_1) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$R_\nu, \alpha_\nu, \beta_\nu$ должны выбираться независимо от f.

Нахождение решения происходит следующим образом. Для интегральной кривой $y = \varphi(x)$, проходящей через точку (x_0, y_0), в равноотстоящих друг от друга точках $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(x_{\nu+1} - x_\nu = h > 0)$ берутся значения $y_0, y_1, y_2, \ldots$ такие, что $y_\nu \approx \varphi_\nu(x)$, причем для последовательного определения $y_1, y_2, \ldots$ пользуются, в зависимости от желательной степени точности, теми или иными из следующих формул.

Формула первого порядка:

$$y_{\nu+1} - y_\nu = hf(x_\nu, y_\nu).$$

Формулы второго порядка:

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + h, y_\nu + k_1),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_2(k_1 + k_2)$$

или же

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + {}^1/_2h, y_\nu + {}^1/_2k_1),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = 0 \cdot k_1 + k_2.$$

Формулы третьего порядка:

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + {}^1/_2h, y_\nu + {}^1/_2k_1),$$
$$k_3 = hf(x_\nu + h, \quad y_\nu - k_1 + 2k_2),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_6k_1 + {}^2/_3k_2 + {}^1/_6k_3$$

или же

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + {}^1/_3h, y_\nu + {}^1/_3k_1),$$
$$k_3 = hf(x_\nu + {}^2/_3h, y_\nu + {}^2/_3k_2),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_4k_1 + 0 \cdot k_2 + {}^3/_4k_3.$$

Формулы четвертого порядка:

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + {}^1/_2h, y_\nu + {}^1/_2k_1),$$
$$k_3 = hf(x_\nu + {}^1/_2h, y_\nu + {}^1/_2k_2), \quad k_4 = hf(x_\nu + h, y_\nu + k_3),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_6k_1 + {}^1/_3k_2 + {}^1/_3k_3 + {}^1/_6k_4$$

или же

$$k_1 = hf(x_\nu, y_\nu), \quad k_2 = hf(x_\nu + {}^1/_3h, y_\nu + {}^1/_3k_1),$$
$$k_3 = hf(x_\nu + {}^2/_3h, y_\nu - {}^1/_3k_1 + k_2), \quad k_4 = hf(x_\nu + h, y_\nu + k_1 - k_2 + k_3),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_8k_1 + {}^3/_8k_2 + {}^3/_8k_3 + {}^1/_8k_4.$$

Существуют и другие формулы подобного типа.

Ошибка растет, вообще говоря, по мере удаления от начальной точки x_0 все быстрее. Для того, чтобы получить приблизительную оценку погрешности, можно провести вычисления один раз, пользуясь шагом h, а другой раз — шагом $h/2$. Тогда погрешность приближенного решения, даваемого формулами m-го порядка, составляет приблизительно $1/(2^m - 1)$-ю часть разности между этими двумя результатами.

28.4. Комбинирование интерполяции и последовательных приближений. Если для уравнения (1) ищется интегральная кривая $y = \varphi(x)$, соответствующая начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, то в равноотстоящих друг от друга точках $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (где $x_{n+1}-x_n=h>0$) выбираются какие-нибудь значения $y_0^0=y_0,\ y_1^0,\ y_2^0, \ldots$ (например, $y_n^0=y_0$ для всех n или, лучше, такие, что точки $(x_n,\ y_n^0)$ уже лежат вблизи искомой интегральной кривой), затем вычисляют $f_n^0=f(x_n,\ y_n^0)$ и составляют[1]) интерполирующий многочлен (по формуле Лагранжа, Ньютона или методом конечных разностей), принимающий в точках $x=x_n$ значения f_n^0. Интегрируя этот многочлен, получим в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots$ систему более точных значений $y_0^1=y_0,\ y_1^1,\ y_2^1, \ldots$ К этой системе применяется снова тот же метод и т. д., до тех пор пока последовательно получаемые приближения не начнут отличаться друг от друга меньше, чем величина допустимой ошибки. Если члены последовательности, представляющей последнее полученное таким способом приближение, обозначить кратко через y_n, то $y_n \approx \varphi(x_n)$.

Если, например, воспользоваться интерполяционной формулой Бесселя, то получим:

$$y_{n+1}^{\nu+1}-y_n^{\nu+1}=h\left[\frac{f_{n+1}^{\nu}+f_n^{\nu}}{2}-\frac{1}{12}\,\frac{\Delta^2 f_n^{\nu}+\Delta^2 f_{n-1}^{\nu}}{2}+\frac{11}{720}\,\frac{\Delta^4 f_{n-1}^{\nu}+\Delta^4 f_{n-2}^{\nu}}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{191}{60\,480}\,\frac{\Delta^6 f_{n-2}^{\nu}+\Delta^6 f_{n-3}^{\nu}}{2}+\ldots\right]$$

$(n=0, 1, 2, \ldots;\ \nu=0, 1, 2, \ldots)$ и отсюда — следующую схему решения:

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
 & & & * & & & & & * & \\
x_0 & y_0 & f_0 & & & \ldots & y_0 & f_0 & & \ldots \\
 & & & \Delta f_0^0 & & \ldots & & & \Delta f_0^1 & \ldots \\
x_1 & y_1^0 & f_1^0 & & \Delta^2 f_0^0 & \ldots & y_1^1 & f_1^1 & & \ldots \\
 & & & \Delta f_1^0 & & \ldots & & & \Delta f_1^1 & \ldots \\
x_2 & y_2^0 & f_2^0 & & \Delta^2 f_1^0 & \ldots & y_2^1 & f_2^1 & & \ldots \\
 & & & \Delta f_2^0 & & \ldots & & & \Delta f_2^1 & \ldots \\
x_3 & y_3^0 & f_3^0 & & \Delta^2 f_2^0 & \ldots & y_3^1 & f_3^1 & & \ldots \\
 & & & \Delta f_3^0 & & \ldots & & & \Delta f_3^1 & \ldots \\
x_4 & y_4^0 & f_4^0 & & \Delta^2 f_3^0 & \ldots & y_4^1 & f_4^1 & & \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

[1]) [См., например, И. С. Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, 1966, гл. II; В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, 1954; И. Ф. Стефенсен, Теория интерполяции, 1936. — *Прим. ред.*]

Для того чтобы получить значения, которые должны стоять на местах, обозначенных *, нужно экстраполировать значения, стоящие в соответствующих столбцах, или продолжить эти столбцы снизу вверх.

Достоинством этого метода является то, что допущенные неточности или небольшие ошибки в процессе решения автоматически корректируются.

28.5. Метод Адамса. Основная идея этого метода состоит в следующем: если для уравнения (1) нужно найти в равноотстоящих друг от друга точках $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $(x_{\nu+1} - x_\nu = h > 0)$ приближенные значения решения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющего начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, то в качестве подготовительного шага следует для некоторого числа точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (например, $n = 3$) вычислить достаточно точные приближенные значения y_ν функции $\varphi(x_\nu)$ в этих точках (это нужно делать возможно точнее, о проведении этого подготовительного шага см. п. 28.6 (а)). После того как это проделано, вычисляют значения $f_\nu = f(x_\nu, y_\nu)$ для этих ν и составляют, как и в п. 28.4, интерполяционный многочлен $P(x)$, который в последних m (например, $m = 4$) точках x_ν принимает значения f_ν. Интегрируя этот многочлен (например, в пределах от x_n до x_{n+1}), получим приближенное значение y_{n+1} величины $\varphi(x_{n+1})$. Это — первый этап экстраполяции. С помощью y_{n+1} вычисляется $f(x_{n+1}, y_{n+1})$, и соответствующий последним m точкам интерполяционный многочлен используется теперь для вычисления значения y_{n+2} (второй этап экстраполяции), и т. д.

В качестве интерполяционной формулы здесь снова может быть использована формула Бесселя, которая после выполнения интегрирования имеет вид

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} P(x)\,dx = h\sum_{\nu=0}^{m}\left[a_\nu\left(\frac{\xi_2 - x_k}{h}\right) - a_\nu\left(\frac{\xi_1 - x_k}{h}\right)\right]\nabla^\nu f_k; \qquad (2)$$

$P(x)$ в точках x_ν, $\nu = k, k-1, \ldots, k-m+1$ принимает значения f_ν; при этом

$$\nabla^0 f_k = f_k, \quad \nabla^1 f_k = \nabla f_k = f_k - f_{k-1}, \quad \nabla^\nu f_k = \nabla(\nabla^{\nu-1} f_k)$$

и

$$a_0(u) = u, \quad a_1(u) = \frac{u^2}{2},$$

$$a_2(u) = \frac{u^2}{12}(2u + 3), \quad a_3(u) = \frac{u^2}{24}(u + 2)^2,$$

$$a_4(u) = \frac{u^2}{720}(6u^3 + 45u^2 + 110u + 90),$$

$$a_5(u) = \frac{u^2}{1440}(2u^4 + 24u^3 + 105u^2 + 200u + 144),$$

$$a_6(u) = \frac{u^2}{60480}(12u^5 + 210u^4 + 1428u^3 + 4725u^2 + 7672u + 5040).$$

Эта экстраполяция может быть проведена двумя способами.

(а) Непосредственная экстраполяция. При этом пользуются вытекающей из (2) формулой

$$y_{n+1} - y_n = h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720}\nabla^4 f_n + \right.$$
$$\left. + \frac{95}{288}\nabla^5 f_n + \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_n + \ldots\right], \quad (3)$$

или лучше формулой

$$y_{n+1} - y_{n-1} = h\left[2f_n + \frac{1}{3}(\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n + \nabla^4 f_n + \nabla^5 f_n + \nabla^6 f_n) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{90}(\nabla^4 f_n + 2\nabla^5 f_n + 3\nabla^6 f_n) + \frac{1}{756}\nabla^6 f_n + \ldots\right] \quad (4)$$

и такой схемой решения:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \ldots \\
 & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \ldots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \ldots \\
 & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \ldots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \ldots \\
 & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \\
x_n & y_n & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & & \\
 & & & \nabla f_{n+1} & & & \\
x_{n+1} & y_{n+1} & f_{n+1} & & & &
\end{array}$$

До ступенчатой линии все значения, стоящие во втором столбце, известны из подготовительных вычислений; последующие столбцы могут быть по ним легко вычислены. С помощью (3) или (4) находят y_{n+1}, после чего можно найти величины, стоящие под ступенчатой линией. Затем, беря $n+1$ вместо n, находят из (3) или (4) значение y_{n+2} и т. д.

(б) Постепенная экстраполяция путем последовательных приближений, называемая также методом интерполяции. После подготовительных вычислений находят из (3) первое приближенное значение y^0_{n+1}, принимая во внимание в (3) лишь первый член или два первых члена. С помощью этого первого приближения находятся значения, стоящие под ступенчатой линией в следующей схеме:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \cdots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_{n} & \cdots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_{n} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n} & & \nabla^3 f^0_{n+1} & \cdots \\
x_{n} & y_{n} & f_{n} & & \nabla^2 f^0_{n+1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f^0_{n+1} & & \nabla^3 f^1_{n+1} & \cdots \\
x_{n+1} & y^0_{n+1} & f^0_{n+1} & & \nabla^2 f^1_{n+1} & \cdots\cdots & \\
 & & & \nabla f^1_{n+1} & \cdots\cdots & & \\
 & y^1_{n+1} & f^1_{n+1} & \cdots\cdots & & & \\
 & & & & & \nabla^3 f_{n+1} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & & \nabla^2 f_{n+1} & & \cdots \\
 & & & \nabla f_{n+1} & & \nabla^3 f^0_{n+2} & \cdots \\
 & y_{n+1} & f_{n+1} & & \nabla^2 f^0_{n+2} & & \\
 & & & \nabla f^0_{n+2} & & & \\
x_{n+2} & y^0_{n+2} & f^0_{n+2} & & & &
\end{array}
$$

С помощью этих значений находят по формуле (2), полагая в ней $\xi_1 = x_n$, $\xi_2 = x_{n+1}$, $k = n+1$, т. е. по формуле

$$
y^1_{n+1} - y_n = h\left[f^0_{n+1} - \frac{1}{2}\Delta f^0_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f^0_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f^0_{n+1} - \right.
$$
$$
\left. - \frac{19}{720}\nabla^4 f^0_{n+1} - \frac{3}{160}\nabla^5 f^0_{n+1} - \frac{863}{60480}\nabla^6 f^0_{n+1} + \ldots\right], \qquad (5)
$$

второе приближение y^1_{n+1} и, используя y^1_{n+1} вместо y^0_{n+1}, повторяют те же вычисления; так поступают до тех пор, пока не будет получено достаточно хорошее приближение.

При этом методе приближения сходятся, вообще говоря, очень быстро (большей частью достаточно двух или трех таких приближений) к значению y_{n+1}, которое принимается за основу для дальнейших вычислений. Этот метод обладает тем преимуществом, что числовые коэффициенты в (5) меньше, очевидно, чем в (3), и он, обычно, более точен, чем метод (а).

28.6. Дополнения к методу Адамса. Для практических вычислений по методу Адамса постепенная экстраполяция представляется более удобной. При этом возможны различные видоизменения метода. Некоторые из них приводятся ниже.

(а) При подготовительных вычислениях необходимо (возможно точнее) приближенно найти значения решения $y = \varphi(x)$ для довольно малого числа точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Этого часто можно достигнуть, если искать $\varphi(x)$ в виде степенного ряда и, подставив этот ряд в уравнение, определить первые члены этого ряда. Конечно, могут быть использованы и другие общие методы (например, метод последовательных приближений в форме п. 2.2 или п. 28.4, метод Рунге — Хейна — Кутта в форме п. 28.3 или др.).

(б) Для того случая, когда достаточно ограничиться учетом третьих разностей (при достаточно малом h), имеется следующее видоизменение метода п. 28.5 (б). Из (2) при $k = n + 1$ вытекает, что

$$y_{n+1} \approx y_{n-3}+\frac{4}{3}\,h\,(2f_n-f_{n-1}+2f_{n-2})=y_{n-3}+4h\left(f_{n-1}+\frac{2}{3}\,\nabla^2 f_n\right); \qquad (6)$$

с другой стороны имеется формула Симпсона:

$$y_{n+1} \approx y_{n-1}+\frac{1}{3}\,h\,(f_{n+1}+4f_n+f_{n-1})=y_{n-1}+h\left(2f_n+\frac{1}{3}\,\nabla^2 f_{n+1}\right). \qquad (7)$$

Вторая из этих формул, вообще говоря, точнее, чем первая, но зато первая позволяет найти приближенное значение для y_{n+1}, если известны лишь значения $y_{n-3}, \ldots, y_n$. Если эти значения найдены с достаточной точностью, то можно по формуле (6) найти первое приближение y^0_{n+1} и затем улучшить его с помощью формулы (7), полагая $f_{n+1} = f\,(x_{n+1}, y^0_{n+1})$.

Вычисление первой четверки значений (подготовительное вычисление) y_{-1}, y_0, y_1, y_2 может быть проведено следующим образом: мы исходим из

$$y^0_{-1}=y_0-hf_0, \quad y^0_1=y_0+hf_0, \quad y^0_2=y_0+2hf_0,$$

вычисляем f^0_{-1}, f^0_1, f^0_2, следующее приближение вычисляем по формуле (6), а дальнейшие по вытекающим из (2) формулам:

$$y^1_2=y_0+\frac{1}{3}\,h\,(f^0_2+4f^0_1+f_0),$$

$$y^1_1=y_0+\frac{1}{24}\,h\,(-f^0_2+13f^0_1+13f_0-f^0_{-1}),$$

$$y^1_{-1}=y^1_1-\frac{1}{3}\,h\,(f^0_1+4f_0+f^0_{-1});$$

затем с помощью исходного дифференциального уравнения находим f^1_2, f^1_1, f^1_{-1} и далее по тем же формулам, беря f^1_ν вместо f^0_ν, находим y^2_ν. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

(в) Удобен также следующий вариант метода Адамса. Если пренебречь разностями более высоких порядков, то при $\xi_1 = x_{n-1}$, $\xi_2 = x_{n+1}$, $k = n + 2$ из (2) следует:

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\left[2f_n+\frac{1}{3}\,(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n)\right]+\frac{h}{3}\left[\nabla^4 f_{n+1}-\frac{1}{30}\,\nabla^4 f_{n+2}\right]. \qquad (8)$$

Если схема решения п. 28.5(б) заполнена до ступенчатой линии, то в формуле (8) сначала отбрасывают вторую строку и вычисляют y_{n+1}^0 по формуле

$$y_{n+1}^0 - y_{n-1} = h\left[2f_n + \frac{1}{3}\left(\nabla^2 f_n + \nabla^3 f_n\right)\right]. \tag{9}$$

Тем самым можно вычислить $f_{n+1}^0 = f(x_{n+1}, y_{n+1}^0)$ и заполнить в схеме одну ломаную строку под ступенчатой линией. Заменив в (9) n на $n+1$, найдем y_{n+2}^0, f_{n+2}^0 и заполним соответствующую ломаную строку. После этого можно ввести в формулу (8) для y_{n+1}^0 поправку

$$\delta_{n+1} = \frac{h}{3}\left[\nabla^4 f_{n+1}^0 - \frac{1}{30}\nabla^4 f_{n+2}\right].$$

Для следующего шага нужно в (9) заменить n на $n+2$, вычислить y_{n+3}^0 и заполнить следующую ломаную строку. Затем можно найти δ_{n+2} и т. д.

§ 29. Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений высших порядков

Методы, изложенные в § 28, могут быть применены к системе дифференциальных уравнений первого порядка, а значит (см. § 14) — и к уравнениям высших порядков. Для дифференциальных уравнений второго порядка, ввиду их важности, мы разовьем методы решения несколько подробнее.

29.1. Методы приближенного интегрирования систем дифференциальных уравнений первого порядка.

(а) Метод *ломаных*. Если, например, дана система

$$y' = f(x, y, z),$$

$$z' = g(x, y, z),$$

то строим проекции интегральной кривой на плоскости xy и xz, т. е. кривые $y = y(x)$ и $z = z(x)$.

На рис. 26, например, изображена проходящая через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = -1$ интегральная кривая системы $y' = -z$, $z' = y$, построенная по методу ломаных п. 28.1 (величина шага: 0, 1). Маленькие кружки означают точки истинной интегральной кривой.

Совершенно аналогично применяется и метод п. 28.2.

(б) Метод *Рунге — Кутта*. При переносе формул п. 28.3 на систему

$$y'(x) = f(x, y, z), \quad z' = g(x, y, z) \tag{1}$$

формулы второго порядка, например, дают:

$$k_1 = hf(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu), \qquad l_1 = hg(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu),$$
$$k_2 = hf(x_\nu + h,\ y_\nu + k_1,\ z_\nu + l_1), \quad l_2 = hg(x_\nu + h,\ y_\nu + k_1,\ z_\nu + l_1),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = {}^1/_2(k_1 + k_2), \quad z_{\nu+1} - z_\nu = {}^1/_2(l_1 + l_2),$$

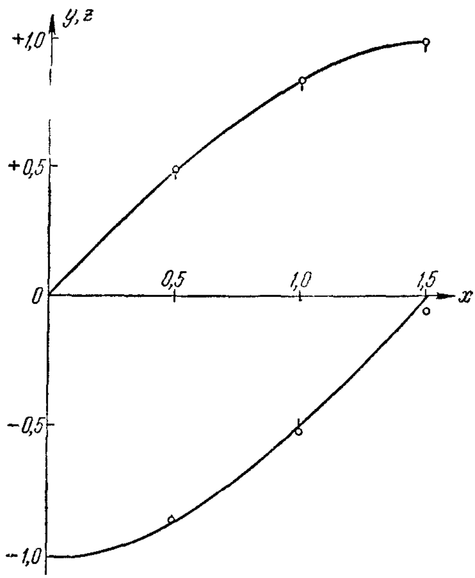

Рис. 26.

а первые из формул четвертого порядка дают:

$$k_1 = hf(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu), \qquad k_2 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{k_1}{2},\ z_\nu + \frac{l_1}{2}\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{k_2}{2},\ z_\nu + \frac{l_2}{2}\right),$$
$$k_4 = hf(x_\nu + h,\ y_\nu + k_3,\ z_\nu + l_3),$$
$$l_1 = hg(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu), \qquad l_2 = hg\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{k_1}{2},\ z_\nu + \frac{l_1}{2}\right),$$
$$l_3 = hg\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{k_2}{2},\ z_\nu + \frac{l_2}{2}\right),$$
$$l_4 = hg(x_\nu + h,\ y_\nu + k_3,\ z_\nu + l_3),$$
$$y_{\nu+1} - y_\nu = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad z_{\nu+1} - z_\nu = \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).$$

(в) Метод *Адамса.* Здесь нужно опять-таки прежде всего получить для некоторого числа точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ достаточно точные приближения y_ν, z_ν значений искомого решения. Если выбирают для системы (1) метод 28.5 (а), то пользуются формулой § 28 (3) (или § 28 (4)) и другой формулой, которая получается из § 28 (3), если y, f заменить на z, g; получаем

$$f_n = f(x_n,\ y_n,\ z_n),$$
$$g_n = g(x_n,\ y_n,\ z_n).$$

Наряду с таблицей разностей п. 28.5 (а) для f следует составить вторую такую же таблицу для g.

29.2. Метод ломаных для дифференциальных уравнений второго порядка. Методы пп. 28.1 и 28.2 можно применить к уравнению второго порядка непосредственно, не переходя явно к системе уравнений первого порядка.

Делается это таким образом. На рис. 27 построена интегральная кривая уравнения (см. ч. III, 6.43)

$$6y'' + yy' = 0,$$

удовлетворяющая начальным условиям $y(2) = 6$, $y'(2) = -3$.

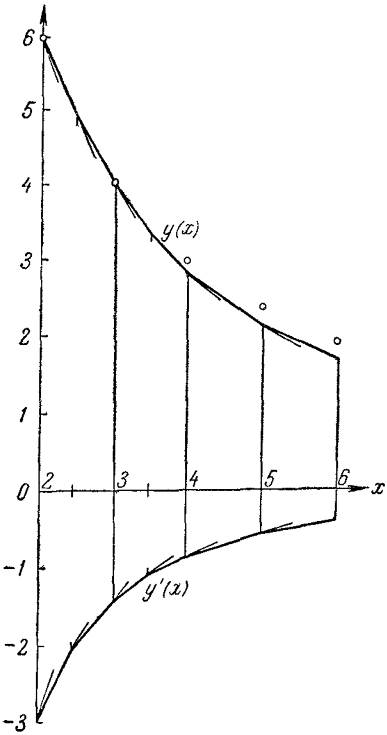

Рис. 27.

Из данных начальных значений для y и y' и дифференциального уравнения получаем, что $y''(2) = 3$. Зная $y'(2)$ и $y''(2)$, можно найти касательные к кривым $y(x)$ и $y'(x)$ в точке $x = 2$. До $x = 2{,}25$ эти касательные принимаются за первые приближения, поэтому из дифференциального уравнения можно найти при $x = 2{,}25$ значение y'' (первый полушаг). Это приближенное значение принимается за среднее значение величины y'' на интервале от $x = 2{,}0$ до $x = 2{,}5$ и берется в качестве уточненного значения для направления отрезка, аппроксимирующего кривую $y'(x)$ на этом интервале. Интегрирование этого приближения по указанному интервалу дает приближенное значение для $y(2{,}5)$. Мы получаем, таким образом, приближенные значения для y и y' в точке $x = 2{,}5$. На этом первый шаг заканчивается. Тот же прием применяется и к следующему интервалу длины 0,5.

Для следующих двух шагов опять берутся интервалы длины 0,5, далее идут два шага длины 1. Маленькие кружки означают точки истинной интегральной кривой.

29.3. Метод Рунге — Кутта для дифференциальных уравнений второго порядка. Для уравнения

$$y'' = f(x,\ y,\ y') \tag{2}$$

имеют место следующие формулы:

$$k_1 = hf(x_\nu,\ y_\nu,\ y'_\nu),$$

$$k_2 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{h}{2}\ y'_\nu + \frac{h}{8} k_1,\ y'_\nu + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{h}{2} y'_\nu + \frac{h}{8} k_1,\ y'_\nu + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_\nu + h,\ y_\nu + hy'_\nu + \frac{h}{2} k_3,\ y'_\nu + k_3\right),$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + hA_\nu,$$

где

$$A_\nu = y'_\nu + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3),$$

$$y'_{\nu+1} = A_\nu + \frac{1}{6}(k_2 + k_3 + k_4).$$

В частности, для уравнения

$$y'' = f(x,\ y) \tag{3}$$

они сводятся к формулам:

$$k_1 = hf(x_\nu,\ y_\nu),$$

$$k_2 = hf\left(x_\nu + \frac{h}{2},\ y_\nu + \frac{h}{2} y'_\nu + \frac{h}{8} k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_\nu + h,\ y_\nu + hy'_\nu + \frac{h}{2} k_2\right),$$

$$y_{\nu+1} = y_\nu + hB_\nu,$$

где

$$B_\nu = y'_\nu + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2),$$

$$y'_{\nu+1} = B_\nu + \frac{1}{6}(2k_2 + k_3).$$

29.4. Метод Адамса — Штёрмера для уравнения $y'' = f(x, y, y')$.

(а) Если в уравнении (2) положить $y' = z$, то получим частный случай системы (1) двух уравнений первого порядка, и вычисления могут быть проведены, например (см. п. 29.1 (в)), с помощью формул:

$$z_{n+1}-z_n=h\left[f_n+\frac{1}{2}\nabla f_n+\frac{5}{12}\nabla^2 f_n+\ \ldots\right]^{1)}$$

и

$$\nabla^2 y_{n+1}=y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=$$

$$=h^2\left[f_n+\frac{1}{12}\nabla^2 f_n+\frac{1}{12}\nabla^3 f_n+\frac{19}{240}\nabla^4 f_n+\frac{3}{40}\nabla^5 f_n+\frac{863}{12096}\nabla^6 f_n+\ldots\right]. \quad (4)$$

(б) В случае применения постепенной экстраполяции п. 28.5 (б) рекомендуется для уточнения приближенного значения y_{n+1} следующие формулы:

$$\nabla^2 y_{n+1}=y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}=h^2\left(f_n+\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right),$$

$$y'_{n+1}-y'_{n-1}=h\left(2f_n+\frac{1}{3}\nabla^2 f_{n+1}\right).$$

29.5. Метод Адамса — Штёрмера для уравнения $y''=f(x,y)$.

(а) В этом случае решение может быть проведено с помощью одной только формулы (4). Мы имеем здесь схему

$$\begin{array}{cccccccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & & \nabla^2 y_{n-2} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & & \ldots \\
 & & \nabla y_{n-2} & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} & \ldots \\
x_{n-2} & y_{n-2} & & \nabla^2 y_{n-1} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & & \ldots \\
 & & \nabla y_{n-1} & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n & \ldots \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & \nabla^2 y_n & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & & \ldots \\
 & & \nabla y_n & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} & \\
x_n & y_n & & \nabla^2 y_{n+1} & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & & \\
 & & \nabla y_{n+1} & & & \nabla f_{n+1} & & & \\
x_{n+1} & y_{n+1} & & & f_{n+1} & & & &
\end{array}$$

После того как все величины, стоящие выше ступенчатой линии, найдены, формула (4) дает значение $\nabla^2 y_{n+1}$. Тем самым оказываются найденными ∇y_{n+1} и y_{n+1}, и можно вычислить величины $f_{n+1}, \nabla f_{n+1}, \ldots$ Следующий шаг состоит в нахождении $\nabla^2 y_{n+2}$ с помощью формулы (4), в которой n заменено на $n+1$, и т. д.

(б) Можно использовать для решения уравнения рассматриваемого типа следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
y_{n+1}-y_n&=y_{n-2}-y_{n-3}+\frac{h^2}{4}(5f_n+2f_{n-1}+5f_{n-2})=\\
&=y_{n-2}-y_{n-3}+h^2\left(3f_{n-1}+\frac{5}{4}\nabla^2 f_n\right),\\
y_{n+1}-y_n&=y_n-y_{n-1}+\frac{h^2}{12}(f_{n+1}+10f_n+f_{\iota-1})=\\
&=y_n-y_{n-1}+h^2\left(f_n+\frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

---

1) Правая часть — та же, что и в § 28 (3), только f имеет здесь другое значение.

если не принимаются во внимание разности четвертого и более высоких порядков, и формулы:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1}-y_n&=y_{n-4}-y_{n-5}+\\ &+\frac{h^2}{48}(67f_n-8f_{n-1}+122f_{n-2}-8f_{n-3}+67f_{n-4}),\\ y_{n+1}-y_n&=y_{n-2}-y_{n-3}+\\ &+\frac{h^2}{240}(17f_{n+1}+232f_n+222f_{n-1}+232f_{n-2}+17f_{n-3}),\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

если отбрасываются уже только разности шестого и более высоких порядков. Вторая формула в каждой из этих двух групп формул является, как правило, более точной. Вычисления по этим формулам проводятся, как и в п. 28.6 (б).

(в) Вычисления по следующим формулам проводятся так же, как и в п. 28.6 (в):

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 y_{n+1}&=h^2\left[f_n+\frac{1}{12}(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n)\right]+\delta_{n+1},\\ \delta_{n+1}&=\frac{h^2}{12}\left[\nabla^4 f_{n+1}-\frac{1}{20}\nabla^4 f_{n+2}\right].\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Если схема решения (а) до ступенчатой линии вся заполнена, то из (7) получаем, прежде всего, отбрасывая δ_{n+1}, приближенное значение y^0_{n+1} и затем вычисляем соответствующее значение y^0_{n+2}. С помощью этих приближенных значений уже можно найти поправку δ_{n+1}.

29.6. Метод Блесса для уравнения $y''=f(x,y,y')$. Пусть для искомого решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y''=f(x,\ y,\ y')$$

в точке x_0 даны начальные значения y_0, y'_0 самого решения и его производной. Значения искомой функции $y_\nu=y(x_\nu)$ и ее производных $y'_\nu=y'(x_\nu)$, $y''_\nu=y''(x_\nu)$ вычисляются последовательно при фиксированном шаге $h>0$, причем в первую очередь они вычисляются для $\nu=1,\ldots,5$. Из дифференциального уравнения находим по заданным значениям

$$y''_0=f(x_0,\ y_0,\ y'_0).$$

По формуле Тейлора приближенно получаем

$$y_1\approx y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0,\quad y'_0\approx y'_0+hy''_0$$

и затем опять-таки с помощью исходного дифференциального уравнения находим y_1''. Продолжая таким образом, получаем первые строки следующей таблицы:

x_0	y_0	hy_0'	$\frac{h^2}{2} y_0''$
x_1	$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2} y_0''$	$hy_1' = hy_0' + 2\frac{h^2}{2} y_0''$	$\frac{h^2}{2} y_1''$
x_2	$y_2 = y_1 + hy_1' + \frac{h^2}{2} y_1''$	$hy_2' = hy_1' + 2\frac{h^2}{2} y_1''$	$\frac{h^2}{2} y_2''$
x_3	$y_3 = y_2 + hy_2' + \frac{h^2}{2} y_2''$	$hy_3' = hy_2' + 2\frac{h^2}{2} y_2''$	$\frac{h^2}{2} y_3''$
x_4	$y_4 = y_3 + hy_3' + \frac{h^2}{2} y_3''$	$hy_4' = hy_3' + 2\frac{h^2}{2} y_3''$	$\frac{h^2}{2} y_4''$
x_5	$y_5 = y_4 + hy_4' + \frac{h^2}{2} y_4''$	$hy_5' = hy_4' + 2\frac{h^2}{2} y_4''$	$\frac{h^2}{2} y_5''$
Попр.	$\delta = \bar{y}_5 - y_5$	$\varepsilon = h\bar{y}_5' - hy_5'$	
x_5	$\bar{y}_5$	$h\bar{y}_5'$	$\frac{h^2}{2} \bar{y}_5''$
x_6	$y_6 = \bar{y}_5 + h\bar{y}_5' + \frac{h^2}{2} \bar{y}_5''$	$hy_6' = h\bar{y}_5' + 2\frac{h^2}{2} \bar{y}_5''$	$\frac{h^2}{2} y_6''$

В выражении

$$y_5 \approx y_4 + hy_4' + \frac{h^2}{2} y_4''$$

заменяем значения функции и первой производной с помощью двух средних столбцов этой таблицы через их значения в точке x_0. Получаем

$$y_5 \approx y_0 + 5hy_0' + \frac{h^2}{2}(9y_0'' + 7y_1'' + 5y_2'' + 3y_3'' + y_4'') \tag{8}$$

и, если значения второй производной представить по формуле Тейлора

$$\frac{h^2}{2} y_\nu'' = \frac{h^2}{2!} y_0'' + 3\nu \frac{h^3}{3!} y_0''' + 6\nu^2 \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + 10\nu^3 \frac{h^5}{5!} y_0^{(5)} + 15\nu^4 \frac{h^6}{6!} y_0^{(6)} + \dots \tag{9}$$

и подставить их в (8), то имеем

$$y_5 \approx y_0 + 5hy_0' + 25\frac{h^2}{2!} y_0'' + 90\frac{h^3}{3!} y_0''' + 420\frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} + \\ + 1920\frac{h^5}{5!} y_0^{(5)} + 8790\frac{h^6}{6!} y_0^{(6)}.$$

Для истинного значения формула Тейлора непосредственно дает

$$\eta_5 = y_0 + 5hy_0' + 25\frac{h^5}{2!}y_0'' + 125\frac{h^3}{3!}y_0''' + 625\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)} + \\ + 3125\frac{h^5}{5!}y_0^{(5)} + 15625\frac{h^6}{6!}y_0^{(6)} + \ldots$$

Следовательно, для того чтобы получить истинное значение, нужно к приближенному значению прибавить поправку

$$\delta^* = \eta_5 - y_5 = 35\frac{h^3}{3!}y_0''' + 205\frac{h_4}{4!}y_0^{(4)} + 1205\frac{h^5}{5!}y_0^{(5)} + 6835\frac{h^6}{6!}y_0^{(6)} + \ldots$$

В эту поправку входят производные высших порядков от y, вычисления которых как раз и нужно избежать. Поэтому δ^* заменяется величиной

$$\delta = \bar{y}_5 - y_5 = \frac{5}{24}\frac{h^2}{2}(9y_4'' + 20y_1'' - 29y_0''),$$

которая выбирается так, что в ее разложении по формуле Тейлора

$$\delta = 35\frac{h^3}{3!}y_0''' + 205\frac{h^4}{4!}y_0^{(4)} + \frac{3725}{3}\frac{h^5}{5!}y_0^{(5)} + \frac{14525}{2}\frac{h^5}{6!}y_0^{(6)} + \ldots,$$

получаемом с помощью (9), два первых члена в точности совпадают с соответствующими членами для δ^*, а в двух следующих разница составляет небольшую величину, именно около 3% и 6%.

Соответственно получается поправка, вносимая в величину hy_5':

$$\varepsilon = h\bar{y}_5' - hy_5' = \frac{1}{12}\frac{h^2}{2}(11y_5'' + 5y_1'' - 16y_0'').$$

Дальнейшие вычисления состоят в том, что в значения y_5, hy_5' вносятся поправки δ, ε; пусть $\bar{y}_5$, $h\bar{y}_5'$ — соответствующие исправленные значения. С помощью этих значений, подставляя x_5 вместо x_0, можно проводить вычисления дальше и находить новые серии значений величин y, y', y'' для $x = x_6, \ldots, x_{10}$; значения, полученные в точке x_{10}, исправляются, как это выше было сделано для x_5, и т. д.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

ГЛАВА I
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА

[В настоящее время имеется большое число работ, посвященных теории краевых задач и задач о собственных значениях. Для более подробного ознакомления с этой теорией можно обратиться к следующим книгам, содержащим доказательства и дальнейшую библиографию·

Э Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939;

М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, 1969;

Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, 1951;

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, 1953;

Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, 1962,

Ф Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, 1968;

Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, 1958. — *Прим. ред.*]

О краевых задачах и задачах о собственных значениях для уравнений низших порядков, в первую очередь для уравнений второго порядка, известно значительно больше отдельных частных результатов, чем это можно получить из излагаемой ниже общей теории. Из многочисленных фактов, относящихся к этим специальным задачам, можно поэтому извлечь некоторые отправные точки и для рассмотрения более общих задач. Эти более частные задачи, особенно простейшую — уравнение $y'' + \lambda y = 0$ с какими-либо краевыми условиями, можно привлечь также и для иллюстрации общей теории. Те краевые задачи и задачи о собственных значениях, которые до сих пор встречались в технических и физических проблемах, были большей частью самосопряженными и относились к уравнениям второго или четвертого порядков; в частности, задачи о продольных и крутильных колебаниях упругого стержня приводятся к уравнению второго порядка, а задача о поперечных колебаниях стержня — к уравнению четвертого порядка.

§ 1. Общая теория краевых задач

1.1. Обозначения и предварительные замечания. Пусть функции $f(x)$ и $f_\nu(x)$ непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $f_n(x) \neq 0$. Образуем с их помощью однородную дифференциальную форму

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) y^{(\nu)} \tag{1}$$

и линейное дифференциальное уравнение

$$L(y) = f(x); \tag{2}$$

соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$L(y) = 0. \tag{3}$$

Взяв постоянные $\alpha_\mu^{(\varkappa)}$, $\beta_\mu^{(\varkappa)}$ так, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} & \ldots & \alpha_1^{(n-1)} & \beta_1^{(0)} & \ldots & \beta_1^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_m^{(0)} & \ldots & \alpha_m^{(n-1)} & \beta_m^{(0)} & \ldots & \beta_m^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

имела ранг m, составим для некоторой $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$ выражения

$$U_\mu(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n-1} \left[\alpha_\mu^{(\varkappa)} y^{(\varkappa)}(a) + \beta_\mu^{(\varkappa)} y^{(\varkappa)}(b)\right] \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{5}$$

В силу сделанного предположения о ранге матрицы (4) эти выражения как функции от $y^{(\varkappa)}(a)$ и $y^{(\varkappa)}(b)$ линейно независимы между собой. С помощью выражений U_μ и заданных чисел γ_μ можно составить *краевые условия*

$$U_\mu(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Эти краевые *условия* называются *однородными*, если все $\gamma_\mu = 0$.

Дифференциальное уравнение (2) вместе с краевыми условиями (6) составляет *краевую задачу*. Решить краевую задачу — значит найти такое решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), что $U_\mu(\varphi) = \gamma_\mu$ при $\mu = 1, \ldots, m$.

Краевая *задача* называется *однородной*, если и дифференциальное уравнение и краевые условия однородны; в любом другом случае она называется неоднородной; иногда *полуоднородной*, если $\gamma_\mu = 0$, но $f(x) \not\equiv 0$.

В этой общей формулировке понятие краевой задачи содержит и обычную задачу Коши (даются значения функции и ее $n-1$ первых производных в точке a).

Функция $\varphi(x) \equiv 0$ является, очевидно, решением любой однородной краевой задачи; это решение называется *тривиальным*. *Нетривиальными* называются лишь те решения однородной краевой задачи, которые $\not\equiv 0$.

Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — решения некоторой однородной краевой задачи, то и всякая их линейная комбинация $C_1\varphi_1 + \ldots + C_k\varphi_k$

с любыми коэффициентами C_ν также представляет собой решение той же краевой задачи.

Так как однородное уравнение (3) имеет n линейно независимых решений, из которых можно получить с помощью линейных комбинаций любое решение этого уравнения, то для каждой однородной краевой задачи, если только она вообще имеет нетривиальные решения, существует система таких k линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, что *любое* решение этой краевой задачи может быть представлено как линейная комбинация $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$; однородная краевая задача называется в этом случае k-кратно разрешимой; число k называется *кратностью разрешимости* или *индексом краевой задачи*. Например, задача

$$y'' = 0, \quad y(0) + y'(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1)$$

имеет индекс 2, так как 1 и x являются ее решениями. Если задача не имеет нетривиальных решений, то полагаем $k = 0$.

Если φ_1, φ_2 — два различных решения неоднородной краевой задачи, то, очевидно, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ есть нетривиальное решение соответствующей однородной задачи.

Если ψ_0 есть некоторое решение неоднородной краевой задачи, то любое решение может быть представлено в виде $\psi = \psi_0 + \varphi$, где φ — решение соответствующей однородной задачи.

1.2. Условия разрешимости краевой задачи. Существуют краевые задачи, не имеющие ни одного решения[1]). Если известно решение φ_0 уравнения (2) и фундаментальная система решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения (3), то краевая задача (2), (6) разрешима, и притом в виде

$$\varphi = \varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

тогда и только тогда, когда коэффициенты c_ν можно выбрать так, что φ удовлетворяет краевым условиям (6). Таким образом, получаем: для разрешимости краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} U_1(\varphi_1) & \ldots & U_1(\varphi_n) & U_1(\varphi_0) - \gamma_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(\varphi_1) & \ldots & U_m(\varphi_n) & U_m(\varphi_0) - \gamma_m \end{pmatrix}$$

имела тот же ранг, что и матрица

$$\begin{pmatrix} U_1(\varphi_1) & \ldots & U_1(\varphi_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(\varphi_1) & \ldots & U_m(\varphi_n) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если ранг матрицы (7) равен r, то соответствующая однородная краевая задача $(n-r)$-кратно разрешима; она, следователь-

[1]) Пример. $y'' = 0$, $y(a) - y(b) = 1$, $y'(a) + y'(b) = 0$.

но, имеет нетривиальное решение во всяком случае при $m < n$, а при $m = n$ — в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} U_1(\varphi_1) & \ldots & U_1(\varphi_n) \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ U_n(\varphi_1) & \ldots & U_n(\varphi_n) \end{vmatrix} = 0.$$

При $m = n$ отсюда вытекает следующий важный факт: или данная неоднородная краевая задача имеет в точности одно решение. или соответствующая однородная краевая задача имеет по крайней мере одно нетривиальное решение.

1.3. Сопряженная краевая задача. Предположим теперь, что функции $f_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, имеют непрерывные производные до ν-го порядка включительно[1]); тогда можно составить дифференциальную форму

$$L^*(y) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu (f_\nu y)^{(\nu)}, \tag{8}$$

сопряженную с L.

Для n раз непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, $v(x)$ имеет место *тождество Лагранжа* (см. ч. I, п. 17.6)

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{d}{dx}\mathscr{L}[u, v], \tag{9}$$

где

$$\mathscr{L}[u, v] = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{p+q=r} (-1)^{(p)} u^{(q)} (f_{r+1} v)^{(p)}. \tag{10}$$

Отсюда следует *формула Грина*

$$\int_a^b [vL(u) - uL^*(v)]\, dx = \mathscr{L}[u, v]\,\Big|_a^b; \tag{11}$$

---

[1]) Это предположение можно ослабить, если L может быть представлена в виде

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{h} \left[f_\nu(x)\, y^{(r_\nu)}\right]^{(s_\nu)}, \tag{*}$$

где $r_{\nu+1} + s_{\nu+1} > r_\nu + s_\nu$ и $r_h + s_h = n$. Тогда достаточно требовать, например, для f_ν существования непрерывных производных до порядка, равного $\max(r_\nu, s_\nu)$; следовательно, если, в частности,

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{h} \left[f_\nu(x)\, y^{(\nu)}\right]^{(\nu)} \qquad (n = 2h),$$

то достаточно существования непрерывных производных до ν-го порядка, в то время как по основному тексту здесь следовало бы требовать существования непрерывных производных порядка до 2ν. Формулы (9) — (11) и все дальнейшие выводы, содержащиеся в пп. 1.3 и 1.4, остаются в силе без всяких изменений для дифференциальной формы (*) вместе с сопряженной и билинейной дифференциальными формами L^*, $\mathscr{L}$, построенными согласно ч. I, пп. 17.5 и 17.6.

правая часть этого выражения есть билинейная форма от

$$\left.\begin{array}{l} u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(a),\ u(b),\ u'(b),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(b), \\ v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(a),\ v(b),\ v'(b),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(b), \end{array}\right\} \quad (12)$$

причем детерминант этой билинейной формы отличен от нуля.

Пусть дана краевая задача

$$L(u)=f(x);\quad U_\mu(u)=\gamma_\mu \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ m). \qquad (13)$$

Так как матрица (4) имеет ранг m, то к ней можно добавить $2n-m$ строк так, чтобы получилась квадратная матрица с отличным от нуля детерминантом. Составленная с помощью этой последней матрицы система уравнений

$$U_\mu=\sum_{\varkappa=0}^{n-1}\left[\alpha_\mu^{(\varkappa)}u^{(\varkappa)}(a)+\beta_\mu^{(\varkappa)}u^{(\varkappa)}(b)\right] \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ 2n)$$

может быть, следовательно, решена относительно $u^{(\varkappa)}(a)$, $u^{(\varkappa)}(b)$.

Если выраженные таким образом через U_μ значения $u^{(\varkappa)}(a)$ и $u^{(\varkappa)}(b)$ подставить в правую часть формулы (11), то получим соотношение

$$\int_a^b [vL(u)-uL^*(v)]\,dx=U_1V_{2n}+U_2V_{2n-1}+\ \ldots\ +U_{2n}V_1,$$

причем V_μ есть линейная форма относительно величин, стоящих в (12) во второй строке. Краевая задача

$$L^*(v)=0;\quad V_\mu(v)=0 \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ 2n-m) \qquad (13^*)$$

называется *сопряженной* с краевой задачей (13). Оказывается, что сопряженная задача не зависит от того, каким образом матрица (4) была дополнена до квадратной.

Пример. Пусть дана краевая задача

$$u''+g(x)\,u=0;\quad u(a)+2u(b)=0,\quad 2u'(a)+u'(b)=0.$$

Здесь

$$L(u)=L^*(u)=u''+gu,\quad \mathscr{L}[u,\ v]=u'v-uv',$$
$$U_1=u(a)+2u(b),\quad U_2=2u'(a)+u'(b),$$

и можно, например, положить $U_3=u(b)$, $U_4=u'(a)$. Тогда

$$\mathscr{L}[u,\ v]\,|_a^b=u'(b)\,v(b)-u(b)\,v'(b)-u'(a)\,v(a)+u(a)\,v'(a)=$$
$$=v'(a)\,U_1+v(b)\,U_2-[2v'(a)+v'(b)]\,U_3-[v(a)+2v(b)]\,U_4.$$

Следовательно,

$$V_1=-v(a)-2v(b),\quad V_2=-2v'(a)-v'(b),\quad V_3=v(b),\quad V_4=v'(a).$$

Сопряженные краевые условия имеют вид:

$$v(a)+2v(b)=0,\quad 2v'(a)+v'(b)=0,$$

т. е. совпадают с исходными.

Если краевые условия в исходной задаче (13) однородны, то сопряженные краевые условия обладают тем свойством, что для любой системы чисел (12), удовлетворяющих краевым условиям (13), соответственно (13*), билинейная дифференциальная форма $\mathscr{L}$ равна нулю, и, следовательно, для любых двух функций $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющих первоначальным, соответственно сопряженным краевым условиям, выполнено равенство

$$\int_a^b [vL(u) - uL^*(v)]\,dx = 0.$$

Это важное свойство является характеристическим для сопряженных краевых условий.

Краевая задача (13) разрешима в том и только в том случае, когда для каждого решения $\psi(x)$ задачи (13*) справедливо равенство

$$\int_a^b \psi(x) f(x)\,dx = \gamma_1 V_{2n}(\psi) + \ldots + \gamma_m V_{2n-m+1}(\psi).$$

Если k есть кратность разрешимости однородной краевой задачи

$$L(u) = 0; \quad U_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, m), \tag{13_0}$$

а k^* — соответствующее число для (13*), то $k^* = k + m - n$. Следовательно, если $m = n$, то каждая из задач (13_0) и (13*) разрешима в том и только в том случае, если разрешима и вторая из них, и обе эти задачи имеют одну и ту же кратность разрешимости.

В дальнейшем мы будем всюду предполагать, что $m = n$.

1.4. Самосопряженные краевые задачи. Однородная краевая задача

$$L(u) = 0; \quad U_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

называется *самосопряженной*, если она совпадает с сопряженной с ней задачей

$$L^*(u) = 0; \quad V_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{14*}$$

(где v заменено на u) в том смысле, что, во-первых, $L(u) = L^*(u)$, т. е. $L(u)$ — самосопряженная дифференциальная форма (см. ч. I, п. 17.5), и, во-вторых, краевые условия (14) и (14*) эквивалентны, т. е. каждая система чисел

$$u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(a), \quad u(b),\ u'(b),\ \ldots,\ u^{(n-1)}(b), \tag{15}$$

удовлетворяющая краевым условиям (14), удовлетворяет и краевым условиям (14*), и обратно.

Для того чтобы выяснить, будет ли данная однородная краевая задача самосопряженной, пользуются большей частью следующим критерием: краевая задача (14) самосопряженна в том и только в том случае, когда $L(u) = L^*(u)$ и, кроме того, для любых двух систем чисел — (15) и

$$v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(a),\quad v(b),\ v'(b),\ \ldots,\ v^{(n-1)}(b), \tag{15a}$$

которые *обе* удовлетворяют краевым условиям (14),— выполнено равенство

$$\mathscr{L}[u,\ v]\,|_a^b = 0,$$

где $\mathscr{L}[u, v]$ — билинейная дифференциальная форма, стоящая в формуле Грина (11).

Пусть $L(u)$ имеет постоянные коэффициенты, причем $L(u) = L^*(u)$. Краевая задача с *периодическими* краевыми условиями

$$L(u) = 0;\quad u^{(\nu)}(a) = u^{(\nu)}(b)\qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

будет самосопряженной. Напротив, задача с начальными условиями (*задача Коши*)

$$L(u) = 0;\quad u(a) = 0,\qquad u'(a) = 0,\ \ldots,\ u^{(n-1)}(a) = 0$$

не является самосопряженной краевой задачей.

Необходимо отметить еще следующий важный факт, вытекающий из последней части п. 1.3. Полуоднородная краевая задача

$$L(u) = f(x);\quad U_\mu(u) = 0\qquad (\mu = 1,\ \ldots,\ n)$$

такая, что соответствующая ей однородная краевая задача самосопряженна, разрешима в том и только в том случае, если для каждого решения $\psi(x)$ однородной краевой задачи будет справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = 0.$$

1.5. Функция Грина. Пусть дана однородная краевая задача

$$L(y) = 0;\quad U_\mu(y) = 0\qquad (\mu = 1,\ \ldots,\ n), \tag{16}$$

причем от функций f_ν снова не требуется ничего, кроме непрерывности. Функция $\Gamma(x, \xi)$, определенная в квадрате $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$, называется *функцией Грина* или *функцией влияния* для этой задачи, если она является фундаментальным решением (см. ч. I, п. 17.4) данного дифференциального уравнения и, кроме того, при каждом фиксированном ξ, $a < \xi < b$, удовлетворяет, как функция от x, краевым условиям (16).

Если краевая задача (16) имеет лишь тривиальное решение $y \equiv 0$, то для этой задачи существует единственная функция

Грина. Ее можно построить, если известна фундаментальная система решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения $L(y)=0$, следующим образом. Для каждого ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$, находим решение $c_1(\xi), \ldots$ $\ldots, c_n(\xi)$ системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu^{(\varkappa)}(\xi) = 0 \qquad (\varkappa = 0, \ldots, n-2), \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu y_\nu^{(n-1)}(\xi) = \dfrac{1}{f_n(\xi)}, \end{cases}$$

затем решение $b_1(\xi), \ldots, b_n(\xi)$ системы

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu U_\mu(y_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu U_{\mu,\,a}(y_\nu) \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

причем $U_{\mu,\,a} U_{\mu,\,b}$ обозначают относящиеся к a, соответственно к b, части выражения

$$U_\mu(y) = U_{\mu,\,a}(y) + U_{\mu,\,b}(y).$$

Наконец, положим $a_\nu = b_\nu - c_\nu$. Тогда

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu(\xi)\, y_\nu(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \\ \sum\limits_{\nu=1}^{n} b_\nu(\xi)\, y_\nu(x) & \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

В обозначениях ч. I, п. 17.4 можно также написать

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{Z(x, \xi)}{\Delta}, \tag{17}$$

где

$$Z = \begin{vmatrix} g(x, \xi) & y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ U_1(g) & U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(g) & U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix},$$

а Δ обозначает детерминант

$$\Delta = \operatorname{Det}|U_p(y_q)| \qquad (p, q = 1, \ldots, n).$$

При $\xi = a$ и $\xi = b$ представление (17), вообще говоря, не имеет места. Однако в этом случае имеем

$$\Gamma(x, a) = \lim_{\xi \to a} \Gamma(x, \xi) \quad \text{и} \quad \Gamma(x, b) = \lim_{\xi \to b} \Gamma(x, \xi).$$

Примеры см. ч. III, 2.1, 2.6, 2.14, 4.1.

Если краевая задача (16) имеет лишь тривиальное решение $y \equiv 0$, то, согласно последней части п. 1.3, то же самое верно и для сопряженной краевой задачи. Для этой последней функция Грина $\overline{\Gamma}(x, \xi)$, таким образом, также существует, причем $\overline{\Gamma}(x, \xi) = \Gamma(\xi, x)$. Если задача (16) — самосопряженная, то, следовательно, $\Gamma(x, \xi) = \Gamma(\xi, x)$, т. е. $\Gamma(x, \xi)$ есть симметрическая функция. Если рассматриваемое дифференциальное уравнение антисамосопряженно (см. ч. I, п. 17.5), то $\Gamma(x, \xi) = -\Gamma(\xi, x)$.

1.6. Решение неоднородной краевой задачи с помощью функции Грина. Пусть дана полуоднородная краевая задача

$$L(y) = f(x); \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (f \not\equiv 0;\ \mu = 1, \ldots, n), \tag{18}$$

и пусть соответствующая однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение. Если $\Gamma(x, \xi)$ — определенная в п. 1.5 функция Грина, то

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{19}$$

представляет собой решение задачи (18). Таким образом, формула (19) позволяет для любой функции $f(x)$ тотчас написать решение соответствующей краевой задачи.

Решение более общей краевой задачи

$$L(y) = f(x); \quad U_\mu(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

может быть сведено к решению некоторой определенной элементарной задачи. Именно, если $\psi_k(x)$ есть решение краевой задачи

$$L(y) = 0; \quad U_k(y) = 1, \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu \neq k;\ \mu = 1, \ldots, n), \tag{21}$$

то

$$y = \int_a^b \Gamma(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k(x)$$

представляет собой решение задачи (20).

Наконец, для того чтобы решить задачу (21), достаточно найти фундаментальную систему решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения $L(y) = 0$ и подобрать постоянные c_ν так, чтобы $\psi_k(x) = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ было решением задачи (21).

1.7. Обобщенная функция Грина[1]**.** В п. 1.5 функция Грина была построена в случае, когда краевая задача (16) не имеет нетривиальных решений. Однако, несколько видоизменив определение функции Грина, можно достигнуть того, чтобы и в том

---

[1]) Подробнее см. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1912; Курант и Гильберт, т. I; W. W. Elliott, *Americ. Journ. Math.* **50** (1928), стр. 243—258; **51** (1929), стр. 397—416. [См. также С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1954, лекция XX. — *Прим. ред.*]

случае, когда (16) имеет нетривиальное решение, решение задачи (18) опять-таки записывалось в виде (19).

Пусть, например, задача (16) k-кратно резрешима; тогда существует *обобщенная функция Грина* $\tilde{\Gamma}(x, \xi)$, которая при $a < \xi < b$ удовлетворяет, как функция от x, краевым условиям (16) и, кроме того, обладает свойствами (α), (γ), (δ) фундаментального решения (см. ч. I, п. 17.4), а условие (β) заменяется следующим:

(β^*) $\tilde{\Gamma}(x, \xi)$ при фиксированном ξ в каждой из областей $a \leqslant x \leqslant \xi$ и $\xi \leqslant x \leqslant b$ является решением дифференциального уравнения

$$L(y) = -\sum_{\rho=1}^{k} \varphi_\rho(x)\, v_\rho(\xi); \tag{22}$$

здесь $v_1(x), \ldots, v_k(x)$ есть система линейно независимых решений краевой задачи, сопряженной с (16), а $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ — произвольная система непрерывных функций, удовлетворяющих следующему *условию биортогональности* (см. п. 2.2):

$$\int_a^b \varphi_p(x)\, v_q(x)\, dx = e_{p,\,q} \qquad (p,\ q = 1,\ \ldots,\ k)^{1)}.$$

Тогда

$$y(x) = \int_a^b \tilde{\Gamma}(x,\ \xi) f(\xi)\, d\xi \tag{23}$$

есть решение задачи (18), если только эта краевая задача вообще разрешима.

Если $\tilde{\Gamma}_0(x, \xi)$ — одна из обобщенных функций Грина, то всякая обобщенная функция Грина может быть представлена в виде

$$\tilde{\Gamma}(x,\ \xi) = \tilde{\Gamma}_0(x,\ \xi) + \sum_{\rho=1}^{k} u_\rho(x)\, \psi_\rho(\xi),$$

где $u_1, \ldots, u_k$ есть некоторая система линейно независимых решений задачи (16), а $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$ — произвольные непрерывные функции.

Если φ_ρ и ψ_ρ даны и если

$$\operatorname{Det}\left|\int_a^b u_p(x)\, \psi_q(x)\, dx\right| \neq 0 \qquad (p,\ q = 1,\ \ldots,\ k),$$

---

[1]) Если краевая задача (16) самосопряженная, то можно выбрать k таких линейно независимых решений $u_1, \ldots, u_k$, что $\int_a^b u_p(x)\, u_q(x)\, dx = e_{p,q}$; тогда можно положить $\varphi_p = v_p = u_p$.

то существует одна и только одна обобщенная функция Грина $\tilde{\Gamma}$, для которой

$$\int_a^b \tilde{\Gamma}(x, \xi)\psi_\rho(x)\,dx = 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, k).$$

Обобщенная функция Грина для сопряженной задачи в этом случае равна $\tilde{\bar{\Gamma}}(x, \xi) = \tilde{\Gamma}(\xi, x)$.

Для построения обобщенной функции Грина можно применить способ, аналогичный изложенному в п. 1.5. Положим

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi) = \Phi(x, \xi) + \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\xi)\, u_\nu(x) & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \\ \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(\xi)\, u_\nu(x) & \text{при} \quad x \geqslant \xi, \end{cases}$$

где $\Phi(x, \xi)$ — такое решение уравнения (22), которое вместе со своими $n-1$ первыми производными в точке $x = a$ обращается в нуль, $u_1, \ldots, u_k$ — линейно независимые решения задачи (16) и $u_{k+1}, \ldots, u_n$ — решения уравнения $L(y) = 0$, образующие вместе с $u_1, \ldots, u_k$ фундаментальную систему решений этого уравнения. Тогда a_ν, b_ν могут быть определены аналогично п. 1.5, причем следует учитывать, что $u_1, \ldots, u_k$ уже удовлетворяют краевым условиям. Примеры см. ч. III, 2.1, 4.1.

Для практического решения задачи (18) наиболее удобна следующая формула для функции Грина. Если задача (16) k-кратно разрешима, то при $a < \xi < b$

$$\tilde{\Gamma}(x, \xi) = \frac{Z(x, \xi)}{\Delta},$$

где

$$Z(x, \xi) = \begin{vmatrix} g(x, \xi) & u_{k+1}(x) & \ldots & u_n(x) \\ U_{k+1}(g) & U_{k+1}(u_{k+1}) & \ldots & U_{k+1}(u_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_n(g) & U_n(u_{k+1}) & \ldots & U_n(u_n) \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \operatorname{Det}|U_\mu(u_\nu)| \qquad (\mu, \nu = k+1, \ldots, n);$$

$g(x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения $L(y) = 0$, а u_{k+1}, $u_{k+2}, \ldots, u_n$ — линейно независимые решения этого уравнения, не удовлетворяющие краевым условиям (16). При этом краевые условия занумерованы так, что $\Delta \neq 0$.

§ 2. Краевые задачи и задачи о собственных значениях для уравнения $\sum\limits_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)\,y^{(\nu)}+\lambda g(x)y=f(x)$

2.1. Собственные значения и собственные функции; характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$. Пусть $L(y)$ и $U_\mu(y)$ имеют тот же смысл, что и в п. 1.1, и пусть функция $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и $\not\equiv 0$. Рассмотрим общую краевую задачу

$$L(y)+\lambda g(x)\,y=f(x);\quad U_\mu(y)=\gamma_\mu\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n)\tag{1}$$

и однородную задачу

$$L(y)+\lambda g(x)\,y=0;\quad U_\mu(y)=0\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n),\tag{2}$$

содержащие некоторый параметр λ.

В однородной задаче (2) требуется часто определить те значения параметра λ, для которых эта задача имеет нетривиальное решение (*задача о собственных значениях*). Эти значения параметра называются *собственными значениями*, их совокупность — *спектром* задачи о собственных значениях, а соответствующие нетривиальные решения задачи (2) — *собственными функциями* этой задачи.

Собственному значению приписывается *кратность* k, если при этом значении параметра задача (2) k-кратно разрешима (см. п. 1.1).

Если $\varphi_1(x,\lambda),\ldots,\varphi_n(x,\lambda)$ есть фундаментальная система решений дифференциального уравнения (2), причем такая, что

$$\varphi_p^{(q)}(a,\ \lambda)=e_{p,\,q+1}\qquad(p=1,\ \ldots,\ n;\ q=0,\ \ldots,\ n-1),$$

то

$$\Delta(\lambda)=\operatorname{Det}|U_\mu(\varphi_\nu)|\qquad(\mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n)\tag{3}$$

называется *характеристическим детерминантом*. Из п. 1.2 следует, что собственные значения представляют собой не что иное, как нули выражения $\Delta(\lambda)$. Кратность собственного значения λ_0 меньше или равна кратности λ_0 как корня функции $\Delta(\lambda)$ [1]. $\Delta(\lambda)$ представляет собой целую (вообще говоря, трансцендентную) функцию от λ. Может оказаться, что $\Delta(\lambda)\equiv 0$, т. е. каждое λ является собственным значением [см. ч. III, 2.9 (e)]. Если $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$, то множество собственных значений не более чем счетно, так как

---

[1]) Эти две кратности не обязаны совпадать; например, $\lambda=0$ есть простое собственное значение задачи

$$y''=\lambda(y);\quad y(0)-y(1)+{}^1/_2y'(1)=0,\quad y'(0)=0,$$

но оно является двукратным корнем соответствующего детерминанта

$$\Delta(\lambda)=1-\operatorname{ch}k+{}^1/_2k\operatorname{sh}k\qquad(k^2=\lambda).$$

не равная тождественно нулю целая функция имеет не более чем счетное множество нулей. Одновременно мы видим, что собственные значения зависят от дифференциального уравнения и от краевых условий непрерывно в том смысле, в котором это вообще следует понимать тогда, когда нули могут быть и кратными.

Пример. Для задачи о собственных значениях

$$y'' + \lambda y = 0; \qquad y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

следует положить

$$\varphi_1 = \begin{cases} \cos kx, \\ 1 \\ \operatorname{ch} kx, \end{cases} \qquad \varphi_2 = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin kx & \text{при} \quad \lambda = k^2 > 0, \\ x & \text{при} \quad \lambda = 0, \\ \frac{1}{k}\operatorname{sh} kx & \text{при} \quad \lambda = -k^2 < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{cases} 2 - 2\cos k(b-a), \\ 0, \\ 2 - 2\operatorname{ch} k(b-a), \end{cases}$$

т. е. собственные значения образуют последовательность

$$\lambda_m = \left(\frac{2\pi m}{b-a}\right)^2, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

причем все λ_m при $m \neq 0$ двухкратны. См. ч. III, 2.9.

Следующие две основные проблемы теории задач о собственных значениях будут рассмотрены дальше.

Задача о нахождении собственных значений. При каких предположениях для задачи (2) вообще существуют собственные значения? В каком случае их число бесконечно? Когда они действительны? Что можно сказать об их величине?

Задача о разложении по собственным функциям. Если $u_\nu(x)$ — собственные функции задачи (2), то при каких условиях заданная функция $F(x)$ может быть разложена в (сходящийся) ряд

$$F(x) = \sum c_\nu u_\nu(x)$$

по функциям $u_\nu(x)$?

2.2. Сопряженная задача о собственных значениях и резольвента Грина; полная биортогональная система. Пусть теперь каждая функция f_ν имеет ν непрерывных производных[1]). Тогда для дифференциального уравнения

$$L(u) + \lambda g u = 0$$

---

[1]) Или L должно быть дифференциальной формой вида, указанного в сноске в п. 1.3, и удовлетворять сформулированным там условиям.

можно составить сопряженное уравнение, которое, согласно ч. I, п. 17.5, имеет вид [1])

$$L^*(v)+\lambda gv=0.$$

Так как билинейная форма $\mathscr{L}[u, v]$ (см. п. 1.3) не содержит $f_0+\lambda g$, то задача, сопряженная с задачей (2), имеет вид

$$L^*(y)+\lambda g(x)\,y=0; \quad V_\mu(y)=0 \qquad (\mu=1, \ldots, n), \tag{4}$$

где V_μ снова означают выражения, найденные в п. 1.3 и не зависящие ни от λ, ни от g.

Из п. 1.3 следует, что задача (2) и сопряженная задача (4) имеют одни и те же собственные значения и их кратности в обоих случаях одинаковы.

Если λ, λ^* — два различных собственных значения, $u(x)$ — соответствующая λ собственная функция задачи (2), а $v^*(x)$ — соответствующая λ^* собственная функция задачи (4), то из формулы Грина следует *соотношение биортогональности*:

$$\int_a^b g(x)\,u(x)\,v^*(x)\,dx=0.$$

Если λ_0 — собственное значение кратности k, то ему соответствует система $u_1, \ldots, u_k$ линейно независимых собственных функций задачи (2) и система $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимых собственных функций задачи (4), и при этом

$$\int_a^b g(x)\,u_p(x)\,v_q(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad p\neq q. \tag{5}$$

Если $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$, то всегда имеется, если только вообще собственные функции существуют, *полная биортогональная система* собственных функций

$$\left\{\begin{array}{lll} u_1(x), & u_2(x), & \ldots, \\ v_1(x), & v_2(x), & \ldots, \end{array}\right. \tag{6}$$

т. е. не более чем счетное множество собственных функций задачи (2) и, соответственно, задачи (4), таких, что каждая собственная функция $u(x)$, соответствующая некоторому собственному значению λ, представима как линейная комбинация конечного числа вышеуказанных функций u_p, соответствующих данному λ (то же самое для v), и при этом выполнено соотношение (5).

Если $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$, то для каждого λ, не являющегося собственным значением, можно, согласно п. 1.5, построить функцию

[1]) [Для действительных λ. — *Прим. ред.*]

Грина[1]) (*резольвенту Грина*) $\Gamma(x, \xi, \lambda)$. Она представляет собой мероморфную функцию от λ; ее полюсами могут быть лишь собственные значения, причем кратность полюса в точке λ меньше или равна кратности λ как нуля функции $\Delta(\lambda)$. Если λ_0 есть k-кратное собственное значение, а $u_1, \ldots, u_k$ и $v_1, \ldots, v_k$ — соответствующая λ_0 биортогональная система собственных функций и если λ_0 — полюс первого порядка для $\Gamma(x, \xi, \lambda)$, то

$$\int_a^b g(t)\, u_p(t)\, v_p(t)\, dt \neq 0 \qquad (p = 1, \ldots, k), \tag{7}$$

и вычет функции $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ относительно точки λ_0 равен

$$\sum_{p=1}^{k} \frac{u_p(x)\, v_p(\xi)}{\int_a^b g(t)\, u_p(t)\, v_p(t)\, dt}. \tag{8}$$

Это существенно для разложения заданной функции по собственным функциям (см. п. 2.5).

2.3. Нормированные краевые условия; регулярные задачи о собственных значениях. С помощью линейных преобразований краевых условий (2) можно добиться того, что

$$U_\mu(y) = U_{\mu,a}(y) + U_{\mu,b}(y),$$

где $U_{\mu,a}$, $U_{\mu,b}$ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} U_{\mu,a}(y) &= \alpha_\mu y^{(k_\mu)}(a) + \sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} \alpha_{\mu,\nu} y^{(\nu)}(a), \\ U_{\mu,b}(y) &= \beta_\mu y^{(k_\mu)}(b) + \sum_{\nu=0}^{k_\mu-1} \beta_{\mu,\nu} y^{(\nu)}(b), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$|\alpha_\mu| + |\beta_\mu| > 0,$$

$$n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \qquad k_{\mu+2} > k_\mu$$

(*нормированные краевые условия*).

При $g(x) \neq 0$ из этих краевых условий выделяется некоторый класс следующим образом. Решения уравнения

$$f_n(x)\, \omega^n + g(x) = 0$$

представляют собой n непрерывных функций $\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)$. Их нумерацию можно выбрать так, чтобы для некоторого целого числа l были выполнены неравенства

$$\Re \rho\omega_\nu(x) \leqslant \Re \rho\omega_{\nu+1}(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1)$$

[1]) Для этого достаточно непрерывности функций f_ν.

для всех комплексных значений ρ, лежащих в секторе

$$l\pi/n \leqslant \arg \rho \leqslant (l+1)\pi/n.$$

Для этих значений ρ составим детерминант

$$\Theta(s_p, s_{p+1}) = \operatorname{Det} |\vartheta_{\mu,\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n),$$

где

$$\vartheta_{\mu,\nu} = \begin{cases} \alpha_\mu \omega_\nu^{k_\mu}(a) & \text{при} \quad \nu \leqslant p-1, \\ s_{\mu,p} & \text{при} \quad \nu = p, \\ s_{\mu,p+1} & \text{при} \quad \nu = p+1, \\ \beta_\mu \omega_\nu^{k_\mu}(b) & \text{при} \quad \nu \geqslant p+2. \end{cases}$$

Задача о собственных значениях[1]) называется при нечетном $n=2p-1$ *регулярной*, если $\Theta \neq 0$ как для

$$s_{\mu,p} = \alpha_\mu \omega_p^{k_\mu}(a), \quad s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b),$$

так и для

$$s_{\mu,p} = \beta_\mu \omega_p^{k_\mu}(b), \quad s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b).$$

Она называется регулярной при четном $n=2p$, если $\Theta \neq 0$ как для

$$s_{\mu,p} = \alpha_\mu \omega_p^{k_\mu}(a), \quad s_{\mu,p+1} = \beta_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(b),$$

так и для

$$s_{\mu,p} = \beta_\mu \omega_p^{k_\mu}(b), \quad s_{\mu,p+1} = \alpha_\mu \omega_{p+1}^{k_\mu}(a).$$

При $n=2$ нерегулярны лишь краевые условия

$$\alpha y'(a) + \beta y'(b) + \gamma y(a) + \delta y(b) = 0,$$
$$\alpha\omega_1(a)\, y(a) + \beta\omega_2(b)\, y(b) = 0,$$

где $|\alpha|+|\beta|>0$ и $\omega_1(a)$, $\omega_2(b)$ — значения корней уравнения

$$f_2(x)\,\omega^2 + g(x) = 0$$

в точках a и b соответственно; в частности, все самосопряженные краевые задачи второго порядка (см. пп. 2.6 и 9.2) регулярны.

Для четного $n=2p$ так называемые «краевые условия типа Штурма»

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\mu^{(\nu)} y^{(\nu)}(a) = 0, \quad \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_\mu^{(\nu)} y^{(\nu)}(b) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, p)$$

---

[1]) Здесь достаточно, чтобы f_ν удовлетворяли условиям, указанным в п. 1.1.

регулярны; здесь половина условий относится лишь к точке a, а другая половина лишь к точке b. Далее, регулярными являются периодические краевые условия

$$y^{(\nu)}(a) = y^{(\nu)}(b) \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

[Нерегулярны *распадающиеся* краевые условия, отличные от условий типа Штурма:

$$U_\mu(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) = 0 \qquad \mu = 1,\ \ldots,\ m,\ m \neq \frac{n}{2},$$

$$U_\mu(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b) = 0 \qquad \mu = m+1,\ \ldots,\ n,$$

где первые m условий относятся только к точке a, а остальные — к точке b. — *Прим. ред.*] Нерегулярны, например, краевые условия при $n \geqslant 3$, если $n-1$ условие относится только к одной из точек a или b.

2.4. Собственные значения для регулярных и нерегулярных задач о собственных значениях. Если $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, задача (2) регулярна (таким образом, $g \neq 0$ — см. п. 2.3; напомним, что и $f_n \neq \neq 0$ — см. п. 1.1), функции f_n и g n раз, а функция f_{n-1} $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы и остальные f_ν непрерывны, то существует бесконечно много собственных значений. При нечетном n все они, за исключением, может быть, конечного числа, однократны; их можно расположить в две последовательности

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots;\ \lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \ldots \tag{10}$$

так, чтобы одна из них приближалась к одной половине мнимой λ-оси, а другая — к другой, в том смысле, что

$$\lambda_h = \left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n \left(1 + \frac{E_1}{h}\right), \quad \lambda_h^* = -\left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n \left(1 + \frac{E_2}{h}\right), \tag{11}$$

где

$$N = \int_a^b \sqrt[n]{\left|\frac{g(x)}{f_n(x)}\right|}\,dx;$$

при этом E обозначает некоторую ограниченную функцию от h (зависящую, возможно, и от других величин). При четном n все собственные значения, за исключением, может быть, конечного числа, имеют кратность 1 или 2. *Нули* характеристического детерминанта $\Delta(\lambda)$ можно, взяв каждый из них с соответствующей кратностью, так расположить в виде двух последовательностей (10), что

$$\lambda_n = \left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n \left(1 + \frac{E_1}{h}\right), \quad \lambda_h^* = \left(\frac{2h\pi i}{N}\right)^n \left(1 + \frac{E_2}{h}\right), \tag{12}$$

где

$$N^n = -\operatorname{sign}(gf_n)\left[\int_a^b \sqrt[n]{\left|\frac{g(x)}{f_n(x)}\right|}\,dx\right]^n.$$

Эти нули являются в то же время и собственными значениями, однако кратный нуль не обязательно будет кратным собственным значением. При четном n собственные значения приближаются, таким образом, асимптотически к одной из действительных полуосей. В обоих случаях из формул (11) и (12) следует, что при больших h собственные значения в большей мере независимы от краевых условий и от коэффициентов дифференциального уравнения.

Для нерегулярной краевой задачи, приведенной в конце п. 2 3, получаются аналогичные результаты[1]).

2.5. Разложение заданной функции по собственным функциям регулярных и нерегулярных задач о собственных значениях. Функции 1, $\cos kx$, $\sin kx$ (k — целые положительные) являются собственными функциями задачи о собственных значениях:

$$y''+\lambda y=0;\quad y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi).$$

Разложение заданной функции $F(x)$ в ряд

$$F(x)=\sum_\nu c_\nu u_\nu(x) \tag{13}$$

по полной ортогональной или биортогональной системе собственных функций задачи (2) является, таким образом, обобщением разложения в ряд Фурье.

Если $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$ и задача (2) имеет бесконечно много собственных значений, то существует полная биортогональная система собственных функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots;\ v_1(x),\ v_2(x),\ \ldots,$$

соответствующих задачам (2) и (4). Тогда, если интегрируемая функция $F(x)$ разложена в равномерно сходящийся ряд (13), то в силу биортогональности непосредственно имеем

$$c_\nu=\int_a^b g(x)F(x)v_\nu(x)\,dx\Bigg/\int_a^b g(x)u_\nu(x)v_\nu(x)\,dx, \tag{14}$$

если только знаменатель здесь отличен от нуля. Коэффициенты c_ν, называемые (обобщенными) *коэффициентами Фурье*, могут быть вычислены для любой интегрируемой функции $F(x)$,

---

[1]) [См. Наймарк, гл. II, где изложены результаты М. В. Келдыша. — *Прим. ред.*]

если только знаменатели соответствующих выражений отличны от нуля. Это, например, заведомо возможно (см. п. 2.2), если $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ не имеет других особенностей, кроме, быть может, полюсов первого порядка. При этом остается лишь исследовать, будет ли ряд (13) с этими коэффициентами сходиться и чему равна его сумма.

Из (8) следует: если $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, а $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ имеет лишь полюсы первого порядка и если собственные функции u_ν занумерованы так, что абсолютные величины соответствующих собственных значений монотонно возрастают, то интеграл

$$I_\rho = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\rho} \int_a^b \Gamma(x, \xi, \lambda) F(\xi) g(\xi) \, d\xi \, d\lambda \tag{15}$$

равен некоторой частной сумме ряда (13); при этом K_ρ обозначает на комплексной λ-плоскости окружность $|\lambda| = \rho$, на которой Γ как функция от λ регулярна. Если I_ρ при $\rho \to \infty$ стремится к некоторому пределу, то отсюда следует, что по крайней мере при соответствующей группировке членов ряд (13) сходится. Для регулярной краевой задачи и для любой кусочно гладкой функции $F(x)$ в интервале $a < x < b$ действительно

$$\lim_{\rho \to \infty} I_\rho = \frac{1}{2}[F(x-0) + F(x+0)], \tag{16}$$

причем это верно и в том случае, если Γ имеет полюсы порядка выше первого (это, однако, в случае наличия полюсов порядка выше первого не означает никакого высказывания относительно сходимости ряда (13)); при $x = a$ имеет место равенство, аналогичное (16), с правой частью, равной $\alpha F(a+0) + \beta F(b-0)$, причем α и β не зависят от F; то же самое и при $x = b$.

[Таким образом, произвольная кусочно гладкая функция разлагается в сходящийся к ней ряд по собственным функциям регулярной задачи, если резольвента Грина этой задачи имеет лишь простые полюсы. Аналогичная теорема справедлива для случая, когда краевая задача порождается нерегулярными распадающимися краевыми условиями (М. В. Келдыш) — см. 2.4. — *Прим. ред.*]

2.6. Самосопряженные нормальные задачи о собственных значениях. Если задача (2) — самосопряженная (см. пп. 1.4 и 2.2)[1]), то каждые две собственные функции ψ, ψ^*, соответствующие раз-

[1]) В частности, пусть $L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} \left(f_\nu y^{(\nu)}\right)^{(\nu)}$, функции f имеют ν непрерывных производных, $f_n \neq 0$ и $n = 2m$.

личным собственным значениям, удовлетворяют, согласно п. 2.2, *соотношению ортогональности*

$$\int_a^b g(x)\,\psi(x)\,\psi^*(x)\,dx=0,$$

и если $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$ и собственные значения вообще существуют (о существовании собственных значений см. п. 2.9 и 2.13), то существует *полная ортогональная система* собственных функций $\psi_1, \psi_2, \ldots$, т. е. такая система собственных функций, что каждая собственная функция ψ может быть представлена как линейная комбинация конечного числа функций из этой системы, соответствующих тому же собственному значению, что и $\psi(x)$, и такая, что

$$\int_a^b g(x)\,\psi_p(x)\,\psi_q(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad p\neq q. \tag{17}$$

Самосопряженная краевая задача (2) называется *нормальной*, если для каждой ее собственной функции $\psi(x)$ выполнено условие

$$\int_a^b g(x)\,|\,\psi(x)\,|^2\,dx\neq 0\,[1]).$$

Для любой нормальной самосопряженной задачи (2) с действительными коэффициентами f_ν и g все собственные значения действительны; кроме того, $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$, так что существует не более чем счетное множество собственных значений, которые могут быть записаны в виде последовательности (возможно обрывающейся)

$$\ldots\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots$$

($\lambda_{-1}<0,\ \lambda_1\geqslant 0$); кратность каждого собственного значения λ^* совпадает с той кратностью, которую λ^* имеет как нуль функции $\Delta(\lambda)$; резольвента Грина $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ имеет лишь полюсы первого порядка.

Самосопряженная краевая задача (2) заведомо нормальна, если выполнено одно из следующих трех условий (см. также п. 4.3):

(а) $g(x)\geqslant 0$ при $a\leqslant x\leqslant b$ (или всюду $g\leqslant 0$)[2]);

---

[1]) По поводу содержания данного пункта см. п. 4.3, а также E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), стр. 231—286.

[2]) Второй случай сводится к первому, если λ, g заменить на $-\lambda$, $-g$. Нужно еще предполагать, что $g\not\equiv 0$ (см. п .2.1).

(б) $\lambda = 0$ не является собственным значением и

$$\int_a^b yL(y)\,dx \geqslant 0$$

для каждой (действительной) функции $y(x)$, n раз непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей краевым условиям (2); в этом случае задача (2) называется самосопряженной и *положительно определенной*;

(в) если самосопряженная дифференциальная форма задачи (2) написана в виде

$$L(y) = \sum_{\nu=0}^{m} [f_\nu(x)\, y^{(\nu)}]^{(\nu)} \qquad (f_m \neq 0,\ n = 2m)$$

(см. по этому поводу ч. I, п. 17.5), то

$$(-1)^\nu f_\nu(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad \nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ m$$

(или всюду $\leqslant 0$), но, однако, $f_0(x) \not\equiv 0$ и, кроме того (см. ч. I, п. 17.6),

$$\mathscr{R}[y,\ y]\Big|_a^b = \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{p+q=r} (-1)^p\, y^{(p)}\, (f_{r+1} y^{(r+1)})^{(q)}\Big|_a^b \geqslant 0$$

(или всюду $\leqslant 0$) для каждой функции $y(x)$, n раз непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей краевым условиям (2); (в) является частным случаем условия (б).

Если, например, $m = 1$ и, следовательно,

$$L(y) = (f_1 y')' + f_0 y,$$

то $\mathscr{R}[y, y] = f_1 y y'$. Согласно (в), задача о собственных значениях заведомо нормальна и самосопряженна, если $f_1 > 0$, $f_0 \leqslant 0$ и $\not\equiv 0$ и если, например, краевые условия имеют вид:

$$y(a) = y(b) = 0, \quad \text{или} \quad y'(a) = y'(b) = 0, \quad \text{или}$$
$$y(a) = y'(b) = 0, \quad \text{или} \quad f_1(a)\, y(a) = f_1(b)\, y(b),\ \ y'(a) = y'(b).$$

Если $g(x) \geqslant 0$, то функции $\psi_p(x)$, образующие полную ортогональную систему, могут быть нормированы так, что

$$\int_a^b g(x)\, \psi_p(x)\, \psi_q(x)\, dx = e_{p,\,q}.$$

Если имеет место случай (б) или (в), то $\lambda = 0$ не может быть собственным значением, и собственные функции ψ_p, образующие полную ортогональную систему, могут быть нормированы так, что

$$\int_a^b g(x)\, \psi_p(x)\, \psi_q(x)\, dx = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\, e_{p,\,q}.$$

Такая система функций ψ_p называется *полной нормированной ортогональной системой* (*ортонормированной системой*); во втором случае, если g может менять знак, т. е. если условие (а) не выполнено, она называется также *нормированной полярной системой.*

Если λ_0 — собственное значение кратности k самосопряженной краевой задачи (2) и $\psi_1(x),\ldots,\psi_k(x)$ — соответствующая этому собственному значению ортогональная система собственных функций, то вычет резольвенты Грина $\Gamma(x,\xi,\lambda)$ относительно точки λ_0 равен

$$\sum_{p=1}^{k}\frac{\psi_p(x)\,\psi_p(\xi)}{\int\limits_a^b g(x)\,\psi_p^2(x)\,dx};$$

если $g(x)\geqslant 0$ и ортогональная система нормирована, то этот вычет равен

$$\sum_{p=1}^{k}\psi_p(x)\,\psi_p(\xi).$$

Коэффициенты Фурье интегрируемой функции $F(x)$ (ср. п. 2.5) можно теперь записать в виде

$$c_p=\int\limits_a^b g(x)\,F(x)\,\psi_p(x)\,dx\Bigg/\int\limits_a^b g(x)\,\psi_p^2(x)\,dx; \tag{18}$$

если система функций ψ_p нормирована, то, если только $g(x)\geqslant 0$

$$c_p=\int\limits_a^b g(x)\,F(x)\,\psi_p(x)\,dx$$

и в случаях (б) и (в)

$$c_p=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\int\limits_a^b g(x)\,F(x)\,\psi_p(x)\,dx. \tag{19}$$

В случае $g\geqslant 0$ имеет место легко проверяемое *тождество Бесселя*

$$\int\limits_a^b\left[F(x)-\sum_{p=1}^{N}c_p\psi_p(x)\right]^2 g(x)\,dx=\int\limits_a^b F^2(x)\,g(x)\,dx-\sum_{p=1}^{N}c_p^2,$$

из которого вытекает *неравенство Бесселя*

$$\sum_{p=1}^{N}c_p^2\leqslant\int\limits_a^b F^2(x)\,g(x)\,dx$$

(для любого N) и, следовательно, — сходимость ряда $\sum c_p^2$. В случаях (б) и (в) получаем для n раз непрерывно дифференцируемой функции $F(x)$, удовлетворяющей краевым условиям (2), равенство

$$\int_a^b \left(F + \sum_{p=1}^N c_p \psi_p\right) L\left(F + \sum_{p=1}^N c_p \psi_p\right) dx = \int_a^b FL(F)\,dx - \sum_{p=1}^N |\lambda_p| c_p^2,$$

откуда

$$\sum_{p=1}^N |\lambda_p| c_p^2 \leqslant \int_a^b FL(F)\,dx,$$

и, следовательно, в этом случае сходится ряд $\sum |\lambda_p| c_p^2$.

2.7. Об интегральных уравнениях типа Фредгольма[1]. Интегральные уравнения

$$\int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{20}$$

$$y(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi + f(x), \tag{21}$$

где $y(x)$ — искомая функция, называются *интегральными уравнениями типа Фредгольма первого и второго рода* соответственно (искомая функция входит в уравнение один раз и соответственно два раза); уравнение (21) называется *однородным*, если $f \equiv 0$. Из всей совокупности весьма обстоятельных и содержательных исследований об интегральных уравнениях мы приведем здесь лишь немногое, ограничиваясь при этом интегральными уравнениями второго рода.

(а) Если ядро $K(x, \xi)$ и функция $f(x)$ при $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$ непрерывны и если

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi)\, dx\, d\xi < 1,$$

---

[1] [Более подробное изложение можно найти в книгах: И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, 1951; И. И. Привалов, Интегральные уравнения, 1937; У. В. Ловитт, Линейные интегральные уравнения, 1957; Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, 1960; С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, 1959; П. П. Забрейко и др., Интегральные уравнения, 1968; Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, 1951; гл. III. — *Прим. ред.*]

то последовательные приближения Неймана

$$y_0(x)=f(x),\quad y_\nu(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)\,y_{\nu-1}(\xi)\,d\xi \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

сходятся равномерно к некоторой предельной функции, являющейся решением уравнения (21).

(б) Если ядро $K(x,\xi)$ при $a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$ непрерывно, то ряд, представляющий *детерминант Фредгольма*

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K(u,u)\,du+$$
$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(u_1,u_1) & K(u_1,u_2)\\ K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2)\end{vmatrix} du_1\,du_2-\ldots,$$

сходится для всех λ; далее, ряд, представляющий *разрешающее ядро* (резольвенту)

$$k(x,\xi,\lambda)=K(x,\xi)-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,\xi) & K(x,u)\\ K(u,\xi) & K(u,u)\end{vmatrix} du+$$
$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,\xi) & K(x,u_1) & K(x,u_2)\\ K(u_1,\xi) & K(u_1,u_1) & K(u_1,u_2)\\ K(u_2,\xi) & K(u_2,u_1) & K(u_2,u_2)\end{vmatrix} du_1\,du_2-\ldots,$$

сходится при любом λ равномерно в квадрате $a\leqslant x,\ \xi\leqslant b$ и, следовательно, $k(x,\xi,\lambda)$ представляет собой непрерывную функцию от x, ξ, которая, так же как и $D(\lambda)$, является целой (трансцендентной) функцией от λ.

(в) Если $f(x)$ непрерывна и $D(\lambda)\neq 0$, то функция

$$y(x)=f(x)+\frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_a^b k(x,\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi$$

представляет собой решение уравнения

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

и притом единственное. При этом однородное интегральное уравнение

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi \tag{23}$$

имеет лишь единственное решение $y(x)\equiv 0$.

Те значения λ, для которых уравнение (23) имеет ненулевые решения, называются *собственными значениями*, а соответствующие решения — *собственными функциями*. Совокупность собственных значений называется *спектром* интегрального уравнения.

(г) Начиная с этого момента, мы будем предполагать, что ядро $K(x, \xi)$ непрерывно и симметрично, т. е. $K(x, \xi) = K(\xi, x)$, и что, кроме того, $K(x, \xi) \not\equiv 0$.

При этих условиях существует по крайней мере одно собственное значение. Все собственные значения действительны и не имеют предельных точек в конечной части плоскости; спектр является, таким образом, дискретным. Если *n-е итерированное ядро* K_n определить условиями

$$K_1 = K, \quad K_n(x, \xi) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, \xi)\, dt$$

и если положить

$$V_n = \int_a^b \int_a^b K_n^2(x, \xi)\, dx\, d\xi,$$

то предел

$$\lambda_1^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{V_{n-1}}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{V_n}}$$

существует и представляет собой квадрат наименьшего собственного значения; для каждого n имеем

$$\frac{1}{\sqrt[n]{V_n}} \leqslant \lambda_1^2 \leqslant \frac{V_{n-1}}{V_n},$$

так что одновременно мы имеем здесь и оценку погрешности.

Далее, для каждой непрерывной функции $u(x)$, для которой

$$\int_a^b u^2(x)\, dx = 1,$$

имеем

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\, u(x)\, u(\xi)\, dx\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|};$$

верхняя грань модуля двойного интеграла равна $|\lambda_1|^{-1}$; мы получаем, таким образом, еще другой способ приближенного вычисления наименьшего собственного значения.

Каждые две собственные функции φ, ψ, соответствующие различным собственным значениям, удовлетворяют *соотношению ортогональности*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx=0.$$

Каждому собственному значению λ соответствует система линейно независимых взаимно ортогональных собственных функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ таким образом, что каждая собственная функция φ, соответствующая собственному значению λ, может быть представлена в виде

$$\varphi=c_1\varphi_1+\ldots+c_m\varphi_m;$$

число m называется кратностью собственного значения λ и удовлетворяет неравенству

$$m\leqslant\lambda^2\int_a^b\int_a^b K^2(x,\xi)\,dx\,d\xi.$$

Совокупность всех таких собственных функций φ_ν, соответствующих всевозможным собственным значениям, образует *полную ортогональную систему* $\psi_1,\psi_2,\ldots$ собственных функций. Умножением их на соответствующие множители можно добиться того, что

$$\int_a^b \psi_p(x)\psi_q(x)\,dx=e_{p,q}$$

(*нормированная ортогональная система*). Если $\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ — собственные значения, каждое из которых повторено столько раз, какова его кратность, то

$$\sum_\nu\frac{1}{\lambda_\nu^2}\leqslant\int_a^b\int_a^b K^2(x,\xi)\,dx\,d\xi$$

и при $n=2, 3, \ldots$

$$\sum_\nu\frac{1}{\lambda_\nu^n}=\int_a^b K_n(x,x)\,dx.$$

Если K — положительно определенное ядро, т. е. если для каждой непрерывной функции $u(x)$

$$\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)\,u(x)\,u(\xi)\,dx\,d\xi\geqslant0,$$

то $K(x, x) \geqslant 0$, все $\lambda_\nu > 0$ и, кроме того,

$$\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu} = \int_a^b K(x, x)\,dx.$$

Для того чтобы одновременно с собственным значением вычислить и соответствующую собственную функцию, можно, например, воспользоваться, как и в (а), методом последовательных приближений. Мы исходим из некоторой функции φ_0, такой, что $\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx = 1$ (нормированная функция), и полагаем

$$\varphi_n(x) = \lambda^{(n)} \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi_{n-1}(\xi)\,d\xi \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{$*$}$$

причем значение $\lambda^{(n)}$ каждый раз выбирается так, чтобы функция φ_n была нормирована. Тогда $\lambda^{(n)}$ при соответствующем выборе знаков перед ними сходятся к некоторому собственному значению, а φ_n — к соответствующей собственной функции. Если предположить, что существует собственная функция, не равная в точке c $(a < c < b)$ нулю, то можно исходить из произвольной непрерывной функции $\varphi_0(x)$, такой, что $\varphi_0(c) = 1$, подставить ее в уравнение $(*)$ и затем выбирать $\lambda^{(n)}$ так, чтобы выполнялось условие $\varphi_n(c) = 1$.

(д) Ядро $K(x, \xi)$ называется *замкнутым*, если для каждой непрерывной функции $u(x) \not\equiv 0$

$$\int_a^b K(x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi \not\equiv 0.$$

Интегральное уравнение с замкнутым симметричным непрерывным ядром имеет бесконечно много собственных значений. Каждая полная нормированная ортогональная система $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots$ состоит в этом случае из бесконечного множества функций, и каждая функция $g(x)$, которая может быть представлена с помощью ядра $K(x, \xi)$ и некоторой непрерывной функции $q(x)$ в виде

$$g(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,q(\xi)\,d\xi$$

(«истокообразное представление»), представима в виде абсолютного и равномерно сходящегося ряда

$$g(x) = \sum c_\nu \psi_\nu(x);$$

при этом

$$c_\nu=\int_a^b g(x)\,\psi_\nu(x)\,dx.$$

(е) Полярные интегральные уравнения. Это интегральные уравнения вида

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,V(\xi)\,y(\xi)\,d\xi,$$

где $V(\xi)$ — некоторая функция, отличная от постоянной, принимающая лишь значения $+1$ и -1. Если снова ядро K симметрично, то имеют место результаты, аналогичные указанным в (г)[1]).

2.8. Связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями типа Фредгольма[2]). Пусть дана краевая задача (1), удовлетворяющая указанным там условиям. Составим для нее вспомогательные задачи

$$L(y)=0;\quad U_\mu(y)=0\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n)\tag{24}$$

и

$$L(y)=0;\quad U_k(y)=1,\quad U_\mu(y)=0\quad\text{при}\quad\mu\neq k.\tag{25}$$

Однородная вспомогательная задача (24) может не иметь ненулевых решений, и тогда для нее существует функция Грина $\Gamma(x,\ \xi)$. Вспомогательная задача (25) имеет в этом случае единственное решение $\psi_k(x)$.

Если написать дифференциальное уравнение (1) в виде

$$L(y)=f(x)-\lambda g(x)\,y,$$

то из п. 1.6, заменяя f через $f-\lambda gy$, получаем: функция $y=\varphi(x)$ есть решение краевой задачи (1) в том и только в том случае, если она удовлетворяет интегральному уравнению типа Фредгольма второго рода

$$y(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi=\Phi(x),$$

где

$$K(x,\ \xi)=\Gamma(x,\ \xi)\,g(\xi),\quad \Phi(x)=\int_a^b\Gamma(x,\ \xi)\,f(\xi)\,d\xi+\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\psi_k(x).$$

---

[1]) О деталях см. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45** (1939), стр. 706—718.

[2]) См. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1912; Айнс, стр. 351 и сл.

Если вспомогательные задачи решены, то для решения задачи (1) можно воспользоваться теорией интегральных уравнений. Решение вспомогательных задач, вообще говоря, не просто; его можно иногда упростить, представляя $f_0 + \lambda g$ в ином виде, скажем, в виде $(f_0 + \lambda_0 g) + \bar{\lambda} g$, где $\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_0$.

2.9. Связь между задачами о собственных значениях и интегральными уравнениями типа Фредгольма. Пусть теперь дана краевая задача (2). Тогда нужно рассматривать лишь вспомогательную задачу (24). Если эта задача не имеет ненулевого решения и, следовательно, существует функция Грина $\Gamma(x, \xi)$, то решения задачи (2) совпадают с решениями интегрального уравнения

$$y(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi) g(\xi) y(\xi) d\xi = 0. \tag{26}$$

Очевидно, если известны собственные значения и собственные функции интегрального уравнения (26), то тем самым известны собственные значения и собственные функции задачи (2).

Предположим теперь, что задача (2) самосопряженная (см. п. 2.6).

(а) Если $g(x)$ не меняет знака, например $g \geqslant 0$, и если g имеет не более чем конечное число нулей, то из (26) получаем для $\eta(x) = y(x)\sqrt{g(x)}$ интегральное уравнение

$$\eta(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \eta(\xi) d\xi = 0$$

с симметричным ядром

$$K(x, \xi) = \Gamma(x, \xi)\sqrt{g(x) g(\xi)}.$$

Так как однородная задача (24) не должна иметь ненулевых решений, то задача

$$L(y) = u(x)\sqrt{g(x)}, \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

разрешима, согласно п. 1.6, для любой непрерывной функции $u(x)$, и ее решение имеет вид

$$y(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)\sqrt{g(\xi)}\, u(\xi) d\xi.$$

Отсюда следует, что ядро K замкнуто и что каждая n раз непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая краевым условиям функция $F(x)$ при $g > 0$ может быть представлена истокообразно с помощью ядра K и функции $q(x) = L(F)/\sqrt{g(x)}$.

Отсюда для самосопряженной задачи (2) получаем:

Существует счетное множество собственных значений, они все действительны и не имеют ни одной конечной предельной точки; если $g>0$, то каждая n раз непрерывно дифференцируемая функция $F(x)$, удовлетворяющая краевым условиям (2), может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$F(x)=\sum_p c_p\psi_p(x)$$

по полной ортогональной системе собственных функций ψ_p, причем коэффициенты этого ряда определяются формулой (18).

(б) Если функция $g(x)$ имеет конечное число перемен знака и если при этом краевая задача *положительно определенная* (см. п. 2.6 (б)), т. е.

$$\int_a^b yL(y)\,dx>0$$

для всякой непрерывной функции $y(x)\not\equiv 0$, имеющей n непрерывных производных и удовлетворяющей краевым условиям задачи (2), то задача (2) эквивалентна полярному интегральному уравнению (см. п. 2.7 (е))

$$\eta(x)+\lambda\int_a^b K(x,\,\xi)\,V(\xi)\,\eta(\xi)\,d\xi=0,$$

где

$$V(x)=\operatorname{sign} g(x),$$

$$K(x,\,\xi)=\Gamma(x,\,\xi)\sqrt{|g(x)\,g(\xi)|},\qquad \eta(x)=y(x)\sqrt{|g(x)|}.$$

Из теории полярных интегральных уравнений можно теперь заключить о существовании бесконечного множества положительных и бесконечного множества отрицательных собственных значений и получить теорему о разложении по собственным функциям.

2.10. Об интегральных уравнениях типа Вольтерра[1]**.** Интегральные уравнения

$$\int_a^x K(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=f(x) \tag{27}$$

и

$$y(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi \tag{28}$$

[1]) [Более подробное изложение можно найти в литературе, указанной к п. 2.7. — *Прим. ред.*]

называются *интегральными уравнениями типа Вольтерра первого и второго рода* (искомая функция входит один или два раза, соответственно, и верхний предел интеграла переменный).

Если ядро $K(x, \xi)$ непрерывно в треугольнике $a \leqslant \xi \leqslant x < b$ ($b = \infty$ допускается) и $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < b$, то уравнение (28) при $a \leqslant x < b$ имеет одно и только одно непрерывное решение $y = y(x)$. Его можно найти методом последовательных приближений: выбрав произвольно непрерывную функцию $y_0(x)$, составим с помощью рекуррентной формулы

$$y_k(x) = f(x) + \int_a^x K(x, \xi)\, y_{k-1}(\xi)\, d\xi \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

последовательность $y_0(x), \; y_1(x), \; y_2(x), \ldots$; эта последовательность для любого c, $a < c < b$, сходится равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant c$ и

$$y(x) = \lim_{k \to \infty} y_k(x)$$

является решением данного интегрального уравнения.

Интегральное уравнение (27) может быть при известных условиях приведено к виду (28). Если $K(x, \xi)$ и производная $K_x(x, \xi)$ непрерывны при $a \leqslant \xi \leqslant x < b$, $K(x, x) \neq 0$, $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $f(a) = 0$, то (27) имеет одно и только одно непрерывное решение $y(x)$, причем это $y(x)$ является непрерывным решением интегрального уравнения второго рода:

$$y(x) + \int_a^x \frac{K_x(x, \xi)}{K(x, x)}\, y(\xi)\, d\xi = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

2.11. Связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями типа Вольтерра. Пусть дана краевая задача (1), удовлетворяющая указанным там предположениям. Каждое решение $y = \psi(x)$ этой задачи будет и решением дифференциального уравнения

$$L(y) = f(x) - \lambda g(x)\, y(x).$$

Решения этого уравнения, т. е. решения краевой задачи (1), являются, согласно ч. I, п. 16.4, решениями интегрального уравнения

$$y(x) = \int_a^x \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \frac{W_\nu(\xi)}{f_n(\xi)\, W(\xi)}\, d\xi + \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \varphi_\nu(x). \tag{29}$$

При этом $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ есть фундаментальная система решений уравнения $L(y) = 0$, $W(x)$ — ее вронскиан и $W_\nu(x)$ — детерминант, получающийся из детерминанта W, если в нем элементы ν-го столбца заменить величинами $0, \ldots, 0, f(x) - \lambda g(x)\, y(x)$.

Для того чтобы $y(x)$ удовлетворяло краевым условиям задачи (1), нужно лишь еще выбрать соответствующим образом значения C_ν, если только это возможно, т. е. если задача (1) разрешима.

Интегральное уравнение (29) может быть записано в виде

$$y(x)=F(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi, \tag{30}$$

где

$$F(x)=\int_a^x \frac{f(\xi)}{f_n(\xi)\,W(\xi)}\,D(x,\xi)\,d\xi+\sum_{\nu=1}^n C_\nu\varphi_\nu(x),$$

$$K(x,\xi)=\frac{g(\xi)}{f_n(\xi)\,W(\xi)}\,D(x,\xi), \tag{31}$$

$$D(x,\xi)=\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \dots & \varphi_n(\xi)\\ \varphi_1'(\xi) & \dots & \varphi_n'(\xi)\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \varphi_1^{(n-2)}(\xi) & \dots & \varphi_n^{n-2)}(\xi)\\ \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x)\end{vmatrix}. \tag{32}$$

Тем самым уравнение (29) записано в форме уравнения типа Вольтерра (30). Если однородная задача (2) при $\lambda=\lambda^*$ имеет лишь тривиальное решение, то задача (1) имеет при $\lambda=\lambda^*$ единственное решение, и при соответствующем выборе значений C_ν решение $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (30). Если C_ν уже известны, то для решения этого интегрального уравнения может быть использован указанный в п. 2.10 метод последовательных приближений. Если C_ν неизвестны, то при каждом шаге их выбирают так, чтобы каждое приближенное решение $y_k(x)$ также удовлетворяло краевым условиям задачи (1).

2.12. Связь между задачами о собственных значениях и интегральными уравнениями типа Вольтерра. Пусть теперь дана задача о собственных значениях (2), удовлетворяющая указанным там предположениям. Эквивалентное этой краевой задаче интегральное уравнение (30) имеет вид

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^n C_\nu\varphi_\nu(x)-\lambda\int_a^x K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi, \tag{33}$$

где K и D опять имеют значения (31) и (32). При этом нужно еще выбрать соответствующим образом значение λ. Если применить метод последовательных приближений, изложенный в 2.10, и если C_ν уже известны или могут быть выбраны определенным образом (см. приведенные ниже примеры), то для (каждого) k-го шага $\lambda = \lambda^*$ выбирается так, чтобы функция $y_k(x)$ удовлетворяла краевым условиям. Иногда величина наименьшего собственного значения может быть получена этим способом с достаточной точностью очень быстро.

Вопрос о том, будут ли сходиться получаемые этим методом последовательности y_k и λ_k и каковы соответствующие предельные значения, остается в общем случае открытым. Изложенный выше метод тесно связан с методом последовательных приближений п. 3.4 и также может быть использован для получения асимптотических выражений собственных значений (см. пример 2).

Пример 1. Вычисление собственных значений задачи

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Полагаем $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$, тогда $W = 1$, $K = D = x - \xi$. Уравнение (33) дает

$$y(x) = C_1 + C_2 x - \lambda \int_0^x (x - \xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Так как должно быть $y(0) = 0$, то $C_1 = 0$. Собственные функции $y(x)$ определены лишь с точностью до постоянного множителя, поэтому данное интегральное уравнение может быть заменено уравнением

$$y(x) = x - \lambda \int_0^x (x - \xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Если положить $y_0 = 1$, то

$$y_1(x) = x - \lambda \int_0^x (x - \xi)\, d\xi = x - \frac{1}{2}\lambda x^2.$$

Так как должно быть $y_1(1) = 0$, то $\lambda = \lambda_1 = 2$ и, следовательно,

$$y_1 = x - x^2.$$

Далее,

$$y_2(x) = x - \lambda \int_0^x (x - \xi)(\xi - \xi^2)\, d\xi = x - \lambda\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right)$$

и условие $y_2(1) = 0$ дает

$$\lambda_2 = 12, \quad y_2 = x - 2x^3 + x^4.$$

Затем получаем

$$\lambda_3 = 10, \quad y_3 = x - \frac{5}{3}x^3 + 3x^5 - \frac{1}{3}x^6.$$

Точная величина наименьшего собственного значения равна, очевидно, $\lambda = \pi^2 = 9{,}8696$; соответствующая ему собственная функция есть

$$y = \frac{1}{\pi}\sin \pi x \approx x - 1{,}6x^3 + 0{,}8x^5.$$

Если исходить, например, из функции $y = (2\pi)^{-1}\sin 2\pi x$, то для всех k имеем $\lambda_k = (2\pi)^2$ и $y_k = y_0$; в этом случае наш метод хотя и дает собственное значение, но не наименьшее.

Пример 2. Вычисление асимптотических выражений для собственных значений задачи

$$y''+g(x)y+\lambda^2 y=0; \quad y(a)=y(b)=0.$$

Для этой цели примем за $L(y)$ выражение, содержащее λ, именно

$$L(y)=y''+\lambda^2 y;$$

роль λg будет играть просто g, а f в данном случае равно нулю. Фундаментальная система решений уравнения $L(y)=0$ будет

$$\varphi_1=\cos\lambda x, \quad \varphi_2=\sin\lambda x.$$

Далее, $W=\lambda$, $D=\sin\lambda(x-\xi)$ и интегральное уравнение (33) примет вид

$$y(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x-\frac{1}{\lambda}\int_a^x g(\xi)\,y(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

Краевое условие $y(a)=0$ дает $C_1\cos\lambda a+C_2\sin\lambda a=0$. Следовательно,

$$C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x=C\sin\lambda(x-a).$$

Так как собственные функции определяются лишь с точностью до произвольного постоянного множителя, то данное интегральное уравнение может быть написано в виде

$$y(x)=\sin\lambda(x-a)-\frac{1}{\lambda}\int_a^x g(\xi)\,y(\xi)\sin\lambda(x-\xi)\,d\xi.$$

Легко видеть, что получаемые таким образом функции $y(x)$ равномерно ограничены для всех достаточно больших $\lambda>0$. Из второго краевого условия получаем

$$\sin\lambda(b-a)=\frac{1}{\lambda}\int_a^b g(\xi)\,y(\xi)\sin\lambda(b-\xi)\,d\xi=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

откуда для натуральных n

$$\lambda=\lambda_n=\frac{n\pi}{b-a}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{n\pi}{b-a}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда можно приближенно найти и соответствующее значение $y(x)$. Если его снова подставить в интегральное уравнение, то полученные оценки можно усилить. Аналогично этим же методом могут быть рассмотрены и другие краевые условия; например, краевые условия типа Штурма (см. п. 9.2) [1]).

2.13. Связь между задачами о собственных значениях и вариационным исчислением [2]). Мы будем предполагать теперь задачу о собственных значениях самосопряженной и положительно определенной. Подробнее: рассматривается следующая задача о собственных значениях:

$$L(y)=\lambda g(x)y; \quad U_\mu(y)=0 \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ n); \tag{34}$$

---

[1]) По поводу самосопряженных краевых условий см. Zaanen, *Compos. math.* 7 (1939), стр. 253.

[2]) Подробнее см. Курант и Гильберт, т. I, гл. VI и E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 45 (1939), стр. 759. [См. также С. Гулд, Вариационные методы в задачах о собственных значениях, 1970. — *Прим. ред.*]

здесь $n=2m$ — четное число, и

$$L(y)=\sum_{\nu=0}^{m}[f_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)} \tag{35}$$

— самосопряженная дифференциальная форма n-го порядка, $f_m \neq 0$, каждая функция f_ν имеет ν непрерывных производных, $g(x)$ — непрерывная функция, $\not\equiv 0$, причем возможно, что $g(x)$ меняет знак, т. е. возможен так называемый полярный случай; U_μ имеет значение, указанное в п. 1.1. Задача предполагается самосопряженной (см. пп. 2.2 и 1.4) и *положительно определенной* (см. п. 2.6 (б)), т. е. $\lambda=0$ не есть собственное значение и

$$\int_a^b yL(y)\,dx \geqslant 0 \tag{36}$$

для каждой *допустимой* функции $y(x)$; при этом функция $y(x)$ называется допустимой, если она n раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяет краевым условиям (34). В этом случае краевая задача нормальна и имеет лишь действительные собственные значения.

Тогда задаче о собственных значениях можно поставить в соответствие следующую вариационную задачу: среди всех допустимых функций $y(x)$, для которых

$$\int_a^b gy^2\,dx > 0, \tag{37}$$

найти такую, для которой

$$\int_a^b yL(y)\,dx \Big/ \int_a^b gy^2\,dx = \min. \tag{38}$$

При указанных условиях эта задача имеет решение $y=\psi_1(x)$. Если λ_1 есть минимальное значение, т. е. если

$$\lambda_1=\frac{\int_a^b \psi_1 L(\psi_1)\,dx}{\int_a^b g\psi_1^2\,dx}=\min_y \frac{\int_a^b yL(y)\,dx}{\int_a^b gy^2\,dx}, \tag{39}$$

то λ_1 является наименьшим положительным собственным значением и ψ_1 — соответствующая ему собственная функция.

Если теперь для задачи (38) ввести, помимо условия (37), еще и другое, дополнительное условие (условие ортогональности)

$$\int_a^b g\psi_1 y\,dx=0,$$

то вариационная задача снова будет иметь некоторое решение $\psi_2(x)$; если λ_2 — соответствующее минимальное значение, то λ_2 является следующим по величине ($\geqslant\lambda_1$) собственным значением, а ψ_2 — соответствующей λ_2 собственной функцией, ортогональной к ψ_1. Вообще, если уже известны первые $p-1$ положительных собственных значений $\lambda_1\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{p-1}$ и соответствующая им ортогональная система собственных функций $\psi_1,\ldots,\psi_{p-1}$, то следующее собственное значение равно

$$\lambda_p=\min_y\left[\int_a^b yL(y)\,dx\Big/\int_a^b gy^2\,dx\right], \tag{40}$$

причем теперь рассматриваются те допустимые функции $y(x)$, для которых, кроме (37), выполнены следующие дополнительные условия:

$$\int_a^b g\psi_\nu y\,dx=0\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ p-1). \tag{41}$$

Отрицательные собственные значения могут встретиться лишь в том случае, если $g(x)$ или меняет свой знак, или все время $\leqslant 0$. Отрицательные собственные значения $\lambda_{-1}\geqslant\lambda_{-2}\geqslant\ldots$ вместе с соответствующей ортогональной системой собственных функций $\psi_{-1},\psi_{-2},\ldots$ получаются только что описанным методом, если условие (37) заменить на

$$\int_a^b gy^2\,dx\leqslant 0, \tag{37a}$$

минимум на максимум, λ_ν на $\lambda_{-\nu}$ и ψ_ν на $\psi_{-\nu}$; этот случай можно свести к предыдущему, если в задаче (34) заменить λ, g через $-\lambda$, $-g$ соответственно.

Таким образом, получается совокупность собственных значений

$$\ldots\leqslant\lambda_{-2}\leqslant\lambda_{-1}<(0)<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots \tag{42}$$

(каждое собственное значение берется с соответствующей кратностью; стоящее в скобках число 0 не есть собственное значение) и полная ортогональная система соответствующих собственных функций

$$\ldots,\ \psi_{-2}(x),\ \psi_{-1}(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots, \tag{43}$$

которые можно еще нормировать таким образом, что

$$\int_a^b g\psi_p\psi_q\,dx = \varepsilon_p e_{p,q}, \quad \varepsilon_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}. \tag{44}$$

Если g принимает как положительные, так и отрицательные значения, то существует бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных собственных значений. Если же все время $g \geqslant 0\,(\leqslant 0)$, то, очевидно, существуют только положительные (отрицательные) собственные значения, причем этих значений бесконечно много.

2.14. Применение к разложению по собственным функциям. При сформулированных выше предположениях указанные ниже ряды сходятся и выполнены неравенства [1])

$$\sum \frac{\psi_p^2(x)}{|\lambda_p|} \leqslant \Gamma(x, x), \quad \sum \frac{1}{|\lambda_p|} \leqslant \int_a^b \Gamma(x, x)\,|g(x)|\,dx, \tag{44a}$$

причем $\Gamma(x, \xi)$ представляет собой соответствующую $\lambda = 0$ функцию Грина задачи (34).

Для каждой допустимой функции $F(x)$ с коэффициентами Фурье

$$c_p = \varepsilon_p \int_a^b F(x)\,g(x)\,\psi_p(x)\,dx, \quad \varepsilon_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}$$

имеем

$$\sum |\lambda_p|\,c_p^2 \leqslant \int_a^b FL(F)\,dx \qquad \text{(неравенство Бесселя)},$$

$$\sum \varepsilon_p c_p^2 = \int_a^b g(x)\,F^2(x)\,dx \qquad \text{(равенство Парсеваля)}.$$

Если $\Phi(x)$ — другая допустимая функция с коэффициентами Фурье γ_p, то

$$\sum \varepsilon_p c_p \gamma_p = \int_a^b g(x)\,F(x)\,\Phi(x)\,dx.$$

Ряд $\sum |c_p\psi_p(x)|$ сходится равномерно; если $g(x)$ ни на каком интервале (содержащемся в (a, b)) не обращается тождественно в нуль, то имеет место разложение

$$F(x) = \sum c_p\psi_p(x).$$

[1]) См. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 45 (1939), стр. 775.

2.15. Дополнительные замечания.

(а) *Принцип Рэлея.* Сведе́ние задачи о собственных значениях к некоторой вариационной задаче весьма важно как для проведения доказательств, так и для практического вычисления собственных значений. Например, в случае $g>0$ из (39) непосредственно получаем, что наименьшее собственное значение задачи (34) возрастает, если g убывает, и, далее, что для произвольной допустимой функции $y(x)$, удовлетворяющей условию (37), будет

$$\int_a^b yL(y)\,dx \Big/ \int_a^b gy^2\,dx \geqslant \lambda_1 \quad \text{(принцип Рэлея)}. \tag{45}$$

Например, для задачи

$$-y''=\lambda y; \quad y(0)=y(1)=0$$

функция $y=x(1-x)$ является допустимой, и с ее помощью получаем, в силу (45), оценку $\lambda_1 \leqslant 10$ истинного значения $\lambda_1=\pi^2$.

(б) *Другой вариационный принцип*[1]. Пусть снова для задачи о собственных значениях (34) остаются в силе обозначения и условия, сформулированные в п. 2.13; однако пусть $g\geqslant 0$, $\lambda=0$ может быть собственным значением, и положительная определенность здесь понимается в ином смысле.

Прежде всего составим из краевых условий (34) возможно большее число линейно независимых линейных комбинаций, содержащих лишь производные порядков $\leqslant m-1$; пусть эти «существенные» краевые условия будут

$$U_1(y)=0, \ \ldots, \ U_k(y)=0. \tag{46а}$$

Далее, присоединим сюда еще $n-k$ краевых условий задачи (34), не зависящих от (46а); пусть эти «остаточные» краевые условия будут

$$U_{k+1}(y)=0, \ \ldots, \ U_n(y)=0. \tag{46б}$$

По формуле Дирихле, ч. I, п. 17.6, имеем:

$$\int_a^b yL(y)\,dx=\int_a^b \sum_{\nu=0}^{m}(-1)^\nu f_\nu(x)\,[y^{(\nu)}]^2\,dx+\mathcal{R}[y,\,y]\,\Big|_a^b, \tag{47}$$

где

$$\mathcal{R}[y,\,y]=\sum_{r=0}^{m-1}\ \sum_{p+q=r}(-1)^p\,[f_{r+1}y^{(r+1)}]^{(q)}\,y^{(p)}. \tag{48}$$

С помощью соотношений (46б) исключим из $\mathcal{R}[y,\,y]\,\big|_a^b$ возможно больше производных порядков $\geqslant m$; оказывается, что при этом

[1]) О подробностях см. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 47 (1942).

исключаются даже *все* производные порядков $\geqslant m$. Задача (34) будет теперь положительно определенной в том смысле, что

$$(-1)^\nu f_\nu(x) \geqslant 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, m)$$

и для каждой системы чисел

$$y(a),\ y'(a),\ \ldots,\ y^{(m-1)}(a), \quad y(b),\ y'(b), \ldots,\ y^{(m-1)}(b),$$

удовлетворяющей уравнениям (46а), преобразованная величина $\mathscr{R}[y, y]\Big|_a^b$ неотрицательна. Рассмотрим теперь вариационную задачу (38), в которой, однако, в числителе сделано описанное исключение производных; тогда задача (38) имеет решение $y = \psi_1(x)$ и в том случае, если в качестве допустимых берутся все m раз непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие существенным краевым условиям (46а); минимум является наименьшим собственным значением λ, сама функция $\psi_1(x)$ имеет $2m$ непрерывных производных и представляет собой собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_1.

(в) *Третий вариационный принцип.* В случае $g > 0$ вариационная задача (38) может быть заменена задачей

$$\int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2\,dx \Bigg/ \int_a^b yL(y)\,dx = \min,$$

если только знаменатель здесь > 0 для всякой допустимой функции $y(x) \not\equiv 0$ [1]).

Поэтому для произвольной допустимой функции $y(x)$ указанная выше дробь представляет собой оценку сверху для наименьшего собственного значения. Однако

$$\int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2\,dx \Bigg/ \int_a^b yL(y)\,dx \geqslant \int_a^b yL(y)\,dx \Bigg/ \int_a^b gy^2\,dx \geqslant \lambda_1,$$

т. е. принцип Рэлея дает при той же функции y лучшую оценку.

Например, для задачи, приведенной в конце (а), получаем с помощью допустимой функции

$$y = \frac{x}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$$

значения: $9{,}882 > 9{,}871 > \pi^2$, однако оказывается, что для нахождения первого, менее точного, приближенного значения требуется меньше вычислений.

(г) *Независимое определение собственных значений по Куранту* [2]). С помощью сформулированного в п. 2.13 вариацион-

---

[1]) См. L. Collatz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **19** (1939), стр. 228.

[2]) См. Курант и Гильберт, т. I, стр. 342; E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45** (1939), стр. 778; **46** (1940), стр. 280.

ного принципа собственное значение λ_p может быть найдено лишь после того как уже найдены собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$ и соответствующие им собственные функции. Во многих случаях это бывает неудобно. Этот недостаток может быть устранен, согласно Куранту, с помощью следующего способа определения собственных значений. Пусть $w_1(x), \ldots, w_{p-1}(x)$ — какие-нибудь интегрируемые функции. По этим функциям построим выражения

$$m(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \inf_y \left[\int_a^b yL(y)\,dx \Big/ \int_a^b gy^2\,dx \right],$$

$$M(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \sup_y \left[\int_a^b yL(y)\,dx \Big/ \int_a^b gy^2\,dx \right],$$

где $y(x)$ пробегает все такие допустимые функции, что в выражении для m знаменатель положителен, а в выражении для M — отрицателен, и, кроме того,

$$\int_a^b w_\nu y\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1).$$

Тогда, если g меняет свой знак, то

$$m \leqslant \lambda_p, \quad M \geqslant \lambda_{-p};$$

если $g \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), то второе (первое) неравенство отпадает.

Если теперь варьировать функции $w_1, \ldots, w_{p-1}$, то получим:

$$\lambda_p = \max_w m(w_1, \ldots, w_{p-1}), \quad \lambda_{-p} = \min_w M(w_1, \ldots, w_{p-1}).$$

(д) *Одна теорема об оценках*[1]. Пусть $g^*(x) \gneqq g(x)$, причем функция g^* непрерывна и не равна нулю тождественно; далее, пусть $\overset{*}{\lambda}_p$ — собственное значение задачи (34) с функцией g^* вместо g. Тогда

$$\overset{*}{\lambda}_p \leqslant \lambda_p \qquad (p = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

если только эти собственные значения существуют (следовательно, если $g \geqslant 0$, то лишь $p = 1, 2, \ldots$).

Если $\varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \ldots$ — собственные значения задачи, получающейся из (34) заменой g на $|g|$, то

$$\lambda_{-p} \leqslant -\varkappa_p < 0 < \varkappa_p \leqslant \lambda_p.$$

---

[1]) См. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45** (1939), стр. 780; **46** (1940), стр 280.

[(e) *Случаи нелинейного вхождения параметра*[1]). Можно сформулировать следующее обобщение задачи о собственных значениях. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L(y;\ \lambda)=0, \tag{49}$$

коэффициенты которого зависят от параметра λ, и линейные однородные краевые условия

$$U_\nu(y;\ \lambda)=0 \quad (\nu=1,\ \ldots,\ n), \tag{50}$$

коэффициенты которых также зависят от λ. Число λ_0 называется *собственным значением* такой краевой задачи, если при $\lambda=\lambda_0$ уравнение (49) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее краевым условиям (50); такое решение называется тогда *собственной функцией*.

Задачи о собственных значениях с нелинейным вхождением параметра изучены мало. В частности, получены асимптотические выражения для собственных значений краевой задачи для

$$y^{(n)}+f_{n-1}(x,\ \lambda)\,y^{(n-1)}+f_{n-2}(x,\ \lambda)\,y^{(n-2)}+\ \ldots\ +f_0(x,\ \lambda)\,y=0,$$

где $f_\nu(x, \lambda)$ — многочлены относительно λ степени ν, с линейными краевыми условиями (50), коэффициенты которых — многочлены относительно λ степени n. — *Прим. ред.*]

§ 3. Приближенные методы решения задач о собственных значениях и краевых задач

[Имеется обширнейшая литература, посвященная рассматриваемым в этом параграфе вопросам. Мы укажем только некоторые книги, которые можно использовать для первого ознакомления и в которых можно найти дальнейшие литературные указания:

И. С Березин и Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. II, 1962;

Р. В. Хемминг, Численные методы, 1968;

Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, 1952;

С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, 1970;

С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий, Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, 1965;

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, 1954. — *Прим. ред.*]

3.1. Приближенный метод Галеркина — Ритца[2]). Пусть снова выполнены условия, указанные в п. 2.13; кроме того, пусть теперь $g(x)>0$. Пусть, далее, $u_1(x), \ldots, u_k(x)$ — допустимые функции,

---

[1]) [См. Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917; J. Tamarkin, *Math. Zeitschrift* **27** (1928), стр. 1—54; М. В. Келдыш, *ДАН СССР* **87** (1951), стр. 11—14. — *Прим. ред*]

[2]) См. N. Kryloff, Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique, Paris, 1931.

линейно независимые между собой. Если теперь рассматривать вариационную задачу § 2 (38) не для всех допустимых функций $y(x)$, а лишь для функций, представимых в виде

$$\bar{y}(x)=\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x), \tag{1}$$

то ясно, что получающееся при этом минимальное значение $\bar{\lambda}_1$ будет $\geqslant \lambda_1$. Из вариационной задачи получается, таким образом, для определения a_ν простая задача на минимум. По правилам дифференциального исчисления, получаем для a_ν систему линейных уравнений

$$\sum_{q=1}^{k} a_q \int_a^b u_p [L(u_q)-\lambda g u_q]\,dx=0 \qquad (p=1, \ldots, k);$$

при этом λ следует определить так, чтобы эта система имела нетривиальное решение $a_1, \ldots, a_k$, т. е. λ должно быть нулем детерминанта

$$D(\lambda)=\operatorname{Det}\left|\int_a^b u_p[L(u_q)-\lambda g u_q]\,dx\right| \qquad (p,\ q=1, \ldots, k).$$

$D(\lambda)$ имеет лишь действительные нули. Пусть это будут $\bar{\lambda}_1 \leqslant \bar{\lambda}_2 \leqslant \ldots \leqslant \bar{\lambda}_k$, тогда $\bar{\lambda}_\nu \geqslant \lambda_\nu$. Мы получаем, таким образом, оценку сверху для первых k собственных значений.

Если $g(x)$ меняет свой знак, то u_ν выбирают так, чтобы выполнялись соотношения ортогональности

$$\int_a^b g u_p u_q\,dx=0 \qquad (p \neq q).$$

Если желательно оценить положительные собственные значения, то u_ν выбираются, кроме того, так, что

$$\int_a^b g u_\nu^2\,dx>0 \qquad (\nu=1, \ldots, k).$$

Детерминант $D(\lambda)$ может быть при этом написан в виде

$$D(\lambda)=\operatorname{Det}\left|\int_a^b u_p[L(u_q)-\lambda e_{p,q} g u_q]\,dx\right| \qquad (p,\ q=1, \ldots, k).$$

$D(\lambda)$ опять-таки имеет лишь действительные нули

$$\bar{\lambda}_1 \leqslant \ldots \leqslant \bar{\lambda}_k \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_\nu \geqslant \lambda_\nu.$$

Если желательно оценить отрицательные собственные значения, то u_ν нужно выбирать так, чтобы

$$\int_a^b g u_\nu^2\, dx < 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, k).$$

Тогда $D(\lambda)$ имеет лишь отрицательные нули

$$\bar{\lambda}_{-k} \leqslant \ldots \leqslant \bar{\lambda}_{-1} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}_{-\nu} \leqslant \lambda_{-\nu}.$$

Точность полученного приближения зависит, конечно, от того, с какой точностью функциями u_ν или их линейными комбинациями можно аппроксимировать первые собственные функции. Во многих случаях уже при очень малых значениях k, например $k = 2$ или 3, можно получить практически годные результаты.

3.2. Приближенный метод Граммеля [1]. Будем предполагать, что $g(x) > 0$. Как и в п. 3 1, рассматриваем функции вида

$$y^*(x) = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu u_\nu(x),$$

однако теперь к этим функциям применяем третий вариационный принцип из п. 2.14 (в), т. е. определяем a_ν так, чтобы выражение

$$\int_a^b \frac{1}{g}\,[L(y^*)]^2\, dx \Big/ \int_a^b y^* L(y^*)\, dx$$

принимало минимальное значение. Как и в п. 3.1, находим, что этот минимум $\overset{*}{\lambda}_1$ представляет собой наименьшее из тех значений λ, при которых детерминант

$$D^*(\lambda) = \operatorname{Det}\left| \int_a^b L(u_q)\left[\frac{1}{g} L(u_p) - \lambda u_p\right] dx \right| \qquad (p,\ q = 1, \ldots, k)$$

обращается в нуль. Если $\bar{\lambda}_1$ — приближенное значение, полученное с теми же самыми u_ν по методу п. 3.1, то $\overset{*}{\lambda}_1 \geqslant \bar{\lambda}_1 \geqslant \lambda_1$. Метод Галеркина дает, таким образом, лучшее приближение; однако во многих случаях метод Граммеля в этой упрощенной форме требует меньше вычислительной работы и в то же время уже $\overset{*}{\lambda}_1$ дает достаточно хорошее приближение.

Можно искать еще и следующее приближение (ср. п. 3.4), полагая

$$y^{**}(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu v_\nu(x),$$

[1]) См. R. Grammel, *Ingenieur-Archiv* **10** (1939), стр. 35—46; L. Collatz. *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **19** (1939), стр. 225; **К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, 1950, т. II, 1952.**

где $v_\nu(x)$ — решения краевой задачи

$$L(v_\nu)=g(x)\,u_\nu,\quad U_\mu(v_\nu)=0\qquad (\mu=1,\ \ldots,\ n)$$

или, что сводится к тому же самому,

$$v_\nu(x)=\int\limits_a^b \Gamma(x,\ \xi)\,g(\xi)\,u_\nu(\xi)\,d\xi. \tag{2}$$

Если теперь повторить для y^{**}, v_ν то же, что было выполнено для y^*, u_ν, то получим λ_1^{**} — наименьшее из значений λ, обращающих в нуль детерминант $D^{**}(\lambda)$, который отличается от $D^*(\lambda)$ тем, что в нем всюду вместо u стоят v.

Имеют место неравенства $\lambda_1^*\geqslant\bar\lambda_1\geqslant\lambda_1^{**}\geqslant\lambda_1$, т. е. мы теперь получаем лучшее приближение, чем при применении к функциям u_ν метода Галеркина; при этом, как показывают примеры, улучшение довольно значительно. Для практического применения существенно, что при рассмотрении чистых упругих колебаний можно избежать вычисления функции Грина, входящей в выражение (2).

3.3. Решение неоднородной краевой задачи по методу Галеркина — Ритца. Пусть дана полуоднородная краевая задача

$$L(y)=f(x);\quad U_\mu(y)=0\qquad (\mu=1,\ \ldots,\ n); \tag{3}$$

пусть при этом выполнены условия, указанные в п. 2.13, и пусть $f(x)$ непрерывна. Тогда соответствующая однородная краевая задача не имеет нетривиальных решений и, следовательно, (3) имеет единственное решение $y=\varphi(x)$. Это решение может быть аппроксимировано следующим образом: пусть $u_1(x),\ \ldots,\ u_k(x)$ — допустимые функции, линейно независимые между собой. Выберем в выражении

$$\varphi_k=\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu$$

числа a_ν так, чтобы

$$\int\limits_a^b \varphi_k\,[L(\varphi_k-2f(x)]\,dx=\min,$$

т. е.

$$\sum_{p,\ q=1}^{k} a_p a_q\int\limits_a^b u_p L(u_q)\,dx-2\sum_{p=1}^{k} a_p\int\limits_a^b u_p f\,dx=\min.$$

Числа a_q однозначно определяются уравнениями

$$\sum_{q=1}^{k} a_q\int\limits_a^b u_p L(u_q)\,dx=\int\limits_a^b u_p f\,dx\qquad (p=1,\ \ldots,\ k).$$

Тогда φ_k является приближенным выражением для φ.

[Если же рассматривается общая неоднородная задача

$$L(y) = f(x); \quad U_\mu(y) = \gamma_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, n),$$

то она сводится к задаче вида (3) заменой

$$y = Y + u,$$

где $u(x)$ — произвольная допустимая функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$U_\mu(u) = \gamma_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, n). — \textit{Прим. ред.}]$$

3.4. Метод последовательных приближений[1]). Пусть снова выполнены условия, указанные в п. 2.13, и, кроме того, пусть $g(x) \geqslant 0$. Будем исходить из некоторой произвольной непрерывной функции $y_0(x)$, для которой

$$\int_a^b g y_0^2 \, dx > 0,$$

и построим последовательность функций $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots$ следующим образом: если y_{k-1} уже известна, то y_k определим как решение краевой задачи

$$L(y_k) = g(x)\, y_{k-1}(x); \quad U_\mu(y_k) = 0 \quad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Тогда (см. п. 1.6)

$$y_k(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)\, g(\xi)\, y_{k-1}(\xi)\, d\xi.$$

Если y_0 уже является допустимой функцией для задачи § 2 (34), то y_0 может быть разложена по некоторой полной нормированной ортогональной системе собственных функций $\psi_p(x)$:

$$y_0 = \sum c_p \psi_p(x) \quad \text{и} \quad y_k = \sum_p \frac{c_p}{\lambda_p^k} \psi_p(x).$$

Отсюда следует:

(а) $\sigma_k(x) = \dfrac{y_{k-1}(x)}{y_k(x)}$ при $k \to \infty$ имеет предел, не зависящий от x, и этот предел представляет собой собственное значение λ_r. Далее, $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_r^k y_k(x)$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_r. Если задача о собственных значениях такова, что собственные функции, соответствующие наименьшему

---

[1]) Иногда этот метод связывают с именами Вианелло и Энгессера, в работах которых содержались его основания. По поводу этого метода см. К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, 1950, т. II, 1952.

собственному значению λ_1, не обращаются в нуль на интервале $a < x < b$, то этот метод дает как раз первое собственное значение, если только $y_0 \neq 0$ на интервале $a < x < b$. Как это следует из осцилляционных теорем (п. 9.2 (а₁)), этим свойством обладают, например, задачи второго порядка типа Штурма.

Пример.

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Положим $y_0 = 1$; тогда в качестве приближенных значений для $\lambda_1 = \pi^2$ получаем числа $\sigma_1(1/2) = 8$; $\sigma_2(1/2) = 9{,}6$; $\sigma_3(1/2) = 9{,}84$.

(б) Если положить

$$a_k = \int_a^b g y_\nu y_{k-\nu}\, dx \qquad (\nu = 0,\ 1,\ \ldots,\ k),$$

то a_k не зависит от ν и $0 < a_k^2 \leqslant a_{k-1} a_{k+1}$ при $k \geqslant 1$; таким образом, числа

$$\rho_k = a_{k-1}/a_k \qquad (k \geqslant 1)$$

при возрастании k монотонно убывают; их пределом является собственное значение λ_r. Наименьшее значение получается при тех же предположениях, что и в (а).

В приведенном выше примере $\rho_1 = 12$; $\rho_2 = 10$; $\rho_3 = 9{,}88$.

Так как

$$\rho_{2k} = \int_a^b y_k L(y_k)\, dx \Bigg/ \int_a^b g y_k^2\, dx$$

и при $g > 0$

$$\rho_{2k-1} = \int_a^b \frac{1}{g} [L(y_k)]^2\, dx \Bigg/ \int_a^b y_k L(y_k)\, dx,$$

то из п. 2.14 (в) следует, что каждое $\rho_k \geqslant \lambda_1$.

(в) Если первое собственное значение и соответствующая ему собственная функция $\psi_1(x)$ найдены, то для получения дальнейших собственных функций можно применить тот же метод, беря за $y_0(x)$ некоторую функцию, ортогональную $\psi_1(x)$.

Метод последовательных приближений часто уже после небольшого числа шагов приводит к цели.

3.5. Приближенное решение краевых задач и задач о собственных значениях методом конечных разностей. Основная мысль этого метода состоит в следующем: пусть дана краевая задача

$$L(y) = f(x); \quad U_\mu(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1,\ \ldots,\ n), \tag{4}$$

пусть при этом остаются в силе обозначения и условия, указанные в п. 1.1. Для того чтобы получить приближенное решение этой задачи, которую мы предполагаем разрешимой, разделим отрезок $[a, b]$ на равные части длины $h = (b-a)/m$ и для каждой точки деления $x_\nu = a + \nu h$ напишем уравнение, которое получается из дифференциального уравнения (4), если в нем производные заменить их приближенными выражениями с помощью соответствующим образом выбранных разностных отношений. Такую же замену выполним и для производных, входящих в краевые условия. Тогда для нахождения приближенной величины Y_ν значения $y_\nu = y(a+\nu h)$ искомого решения $y(x)$ мы получим систему (алгебраических) линейных уравнений, и тем самым исходную задачу сведем к задаче «конечной».

Если дана задача о собственных значениях

$$L(y) + \lambda g(x)\,y = 0; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

то коэффициенты получающейся однородной системы линейных уравнений зависят еще от λ. Значение λ следует выбрать так, чтобы система имела нетривиальное решение. Таким образом, для нахождения приближенной величины первого собственного значения мы получаем алгебраическое уравнение.

Превращение дифференциальной задачи в конечную может быть сделано с помощью следующей таблицы:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] + \dfrac{1}{6}h^2R_3, \\ \dfrac{1}{12h}[-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)] + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{18}h^4R_5, \\ \dfrac{1}{60h}[f(x+3h) - 9f(x+2h) + 45f(x+h) - 45f(x-h) + \\ \qquad\qquad + 9f(x-2h) - f(x-3h)] + \dfrac{47}{2100}h^6R_7; \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] + \dfrac{1}{12}h^2R_4, \\ \dfrac{1}{12h^2}[-f(x+2h) + 16f(x+h) - 30f(x) + 16f(x-h) - \\ \qquad\qquad - f(x-2h)] + \dfrac{1}{54}h^4R_6, \\ \dfrac{1}{180h^2}[2f(x+3h) - 27f(x+2h) + 270f(x+h) - 490f(x) + \\ \qquad\qquad + 270f(x-h) - 27f(x-2h) + 2f(x-3h)] + \dfrac{47}{8400}h^6R_8; \end{cases}$$

$$f'''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^3}[f(x+2h)-3f(x+h)+3f(x)-f(x-h)]+\dfrac{5}{6}hR_4,\\ \dfrac{1}{2h^3}[f(x+2h)-2f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)]+\\ \qquad\qquad+\dfrac{17}{60}h^2R_5,\\ \dfrac{1}{8h^3}[-f(x+3h)+8f(x+2h)-13f(x+h)+13f(x-h)-\\ \qquad\qquad-8f(x-2h)+f(x-3h)]+\dfrac{403}{2520}h^4R_7;\end{cases}$$

$$f^{(4)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^4}[f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+\\ \qquad\qquad+f(x-2h)]+\dfrac{17}{90}h^2R_6,\\ \dfrac{1}{6h^4}[-f(x+3h)+12f(x+2h)-39f(x+h)+56f(x)-\\ \qquad\qquad-39f(x-h)+12f(x-2h)-f(x-3h)]+\dfrac{403}{5040}h^4R_8.\end{cases}$$

Применение выражений более высоких порядков дает при той же длине шага увеличение точности.

Здесь R_ρ означает некоторое число, меньшее, чем максимум $|f^{(\rho)}(x)|$ на некотором интервале, содержащем все абсциссы, встречающиеся в приведенных выше выражениях.

Если пользоваться конечными разностями более высоких порядков также и для краевых условий, то при этом могут получиться члены, содержащие значения Y, соответствующие точкам, лежащим вне интервала (a, b). Этого можно избежать, если на концах данного интервала пользоваться приближениями более низких порядков.

Пример. Если для краевой задачи

$$y''+\lambda xy=0;\quad y(0)=y(1)=0$$

положить $m=4$, т. е. $h={}^1/_4$, то по формулам первого приближения получаем систему уравнений

$$Y_2-2Y_1+Y_0+\frac{1}{4}\lambda h^2Y_1=0,$$

$$Y_3-2Y_2+Y_1+\frac{2}{4}\lambda h^2Y_2=0,$$

$$Y_4-2Y_3+Y_2+\frac{3}{4}\lambda h^2Y_3=0.$$

В силу краевых условий эта система сводится к

$$(\lambda h^2-8)Y_1+4Y_2=0,\quad Y_1+(2\lambda h^2-8)Y_2+Y_3=0,\quad Y_2+(3\lambda h^2-8)Y_3=0.$$

Наименьшее значение параметра λ, для которого детерминант этой системы обращается в нуль и, следовательно, при котором эта система имеет нетривиальное решение, равно 17,87. Эта приближенная величина отличается от точной величины 18,956 наименьшего собственного значения на 6%.

Формулы второго приближения приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&-Y_3+16Y_2-30Y_1+16Y_0-Y_{-1}+3\lambda h^2 Y_1=0,\\
&-Y_4+16Y_3-30Y_2+16Y_1-Y_0\quad+6\lambda h^2 Y_2=0,\\
&-Y_5+16Y_4-30Y_3+16Y_2-Y_1\quad+9\lambda h^2 Y_3=0;
\end{aligned}$$

Y_0 и Y_4 выпадают в силу краевых условий; Y_{-1} и Y_5 можно исключить, если заменить также и в граничных точках дифференциальное уравнение конечным уравнением и при этом пользоваться формулами первого приближения; получаем

$$\begin{aligned}
&Y_1-2Y_0+Y_{-1}+0\cdot\lambda h^2 Y_0=0, \quad \text{т. е.} \quad Y_{-1}=-Y_1,\\
&Y_5-2Y_4+Y_3\quad+1\cdot\lambda h^2 Y_4=0, \quad \text{т. е.} \quad Y_5=-Y_3.
\end{aligned}$$

При этом для наименьшего собственного значения получаем приближенную величину 18,86.

С теоретической точки зрения интересно то, что этот метод даже и при более грубом способе расчетов дает приближенные решения, которые при $h\to 0$ стремятся к точному решению. Именно, согласно Планшерелю, имеет место следующее: пусть в краевой задаче

$$[f(x)\,y']'+[g(x)+\lambda]\,y=h(x); \qquad y(0)=y(1)=0 \tag{5}$$

функция $f>0$ и дважды непрерывно дифференцируема, а g и h непрерывны на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$. Если производные $y'(x_\nu)$, $y''(x_\nu)$, $f'(x_\nu)$ заменить через

$$\frac{\Delta y(x_{\nu-1})}{h}, \qquad \frac{\Delta^2 y(x_{\nu-1})}{h^2}, \qquad \frac{\Delta f(x_\nu)}{h} \qquad \left(h=\frac{1}{n}\right),$$

то соответствующая система алгебраических уравнений будет иметь вид

$$\begin{aligned}
n^2 f_\nu(Y_{\nu+1}-2Y_\nu+Y_{\nu-1})+n^2(f_{\nu+1}-f_\nu)(Y_\nu-Y_{\nu-1})+{}&\\
+(g_\nu+\lambda)\,Y_\nu=h_\nu \quad (\nu=1,\ \ldots,\ n-1)&,
\end{aligned}$$

кроме того, краевые условия дают $Y_0=Y_n=0$. Если λ не есть собственное значение соответствующей однородной краевой задачи, т. е. если (5) имеет единственное решение $y(x)$, тогда $Y_\nu\to y(x)$, где $x=\lim\limits_{n\to\infty}(\nu/n)$.

Если $h\equiv 0$, λ_p есть p-е собственное значение задачи и если $\lambda_p^{(n)}$ — упорядоченные по возрастанию нули детерминанта написанной выше линейной системы, то $\lambda_p^{(n)}\to\lambda_p$ при $n\to\infty$.

3.6. Метод возмущений [1]). Основная идея состоит в том, чтобы с помощью решения более простой задачи о собственных значениях найти (хотя бы приближенно) решение другой, «возмущен-

---

[1]) См. также п. 9.10 (б).

ной» задачи. При этом предполагается, что решение возмущенной задачи может быть разложено по степеням некоторого параметра h. Осуществление этой идеи может быть проведено двумя путями.

(а) Пусть дана задача типа Штурма

$$[f(x)y']' + [g(x)+\lambda]y = 0; \tag{6}$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \tag{7}$$

где $(|\alpha|+|\beta|>0,\ |\gamma|+|\delta|>0)$. Пусть, далее, при некотором $h>0$ ряды

$$f = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} f_{\nu}(x), \quad g = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} g_{\nu}(x)$$

сходятся на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ равномерно и абсолютно, и пусть g_ν непрерывны, f_ν непрерывно дифференцируемы, $f_0 \neq 0$ и первый из рядов допускает почленное дифференцирование. Пусть для невозмущенной задачи, состоящей из уравнения

$$(f_0 y')' + (g_0 + \lambda) y = 0 \tag{6_0}$$

и краевых условий (7), n-е (например, первое) собственное значение $\lambda = \varkappa$ и соответствующая нормированная собственная функция $\varphi(x)$ известны; пусть $\varkappa$ — собственное значение кратности 1. Ищем n-е собственное значение μ и соответствующую нормированную собственную функцию $\psi(x)$ для задачи (6), (7) в виде

$$\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} \mu_{\nu}, \quad \psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} h^{\nu} \psi_{\nu}(x), \tag{8}$$

причем предполагаем, что $\mu_0 = \varkappa$, $\psi_0 = \varphi$ и что ψ_ν удовлетворяют граничным условиям (7). Подставим выражения (8) в уравнение (6). Если почленное дифференцирование и перемножение встречающихся при этом рядов допустимо, то, очевидно, $\lambda = \mu$, $y = \psi$ представляют собой решение задачи (6), (7), если

$$(f_0 \psi_\nu')' + (g_0 + \varkappa)\psi_\nu = F_\nu(x) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9}$$

где

$$F_\nu(x) = -\sum_{p=1}^{\nu} \left[(f_p \psi_{\nu-p}')' + (g_p + \mu_p)\psi_{\nu-p} \right].$$

Так как однородная задача (6), (7) имеет ненулевое решение, то неоднородная задача (9), (7) разрешима в том и только в том случае, если (см. п. 1.4)

$$\int_a^b F_\nu \varphi \, dx = 0. \tag{10}$$

Этим условиям можно удовлетворить соответствующим выбором значений μ_ν. В частности, при $\nu = 1$ это условие дает

$$\mu_1 = -\int_a^b [\varphi (f_1\varphi')' + g_1\varphi^2]\, dx.$$

При этом значении μ_1 задача (9), (7) при $\nu = 1$ разрешима и существует нормированное решение ψ_1, ортогональное к φ. В случае $\nu = 2$ можно, далее, определить μ_2 так, чтобы условие (10) выполнялось, и тогда задача (9), (7) снова будет иметь решение ψ_2, нормированное и ортогональное к φ и ψ_1, и т. д.

Если члены рядов (8) быстро убывают, то этот метод может быть использован для приближенного вычисления μ и ψ.

Этот же прием применим и к дифференциальным уравнениям более высоких порядков и к другим краевым условиям.

(б) Пусть теперь уравнение

$$L(y) + \lambda y = 0, \quad L(y) \equiv [f(x)\, y']' + g(x)\, y \tag{11}$$

вместе с условиями (7) представляет собой невозмущенную задачу о собственных значениях, а уравнение

$$L(y) + [hr(x) + \lambda]\, y = 0 \tag{12}$$

с условиями (7) — возмущенную задачу. Обозначим собственные значения и нормированные собственные функции невозмущенной задачи через λ_n, φ_n, а возмущенной — через μ_n, ψ_n. Будем, несколько изменив обозначения, снова искать решение в виде

$$\mu_n = \lambda_n + h\rho_n + h^2\sigma_n + \ldots, \quad \psi_n = \varphi_n + hu_n + h^2 v_n + \ldots$$

Подставив эти выражения в уравнение (12) и приравняв к нулю коэффициенты при h^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} &L(u_n) + \lambda_n u_n = -(r + \rho_n)\, \varphi_n, \\ &L(v_n) + \lambda_n v_n = -(r + \rho_n)\, u_n - \sigma_n \varphi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Если

$$a_{p,q} = \int_a^b u_p \varphi_q\, dx$$

— коэффициенты разложения u_p по собственным функциям φ_q, то из первого из уравнений (13) с помощью формулы Грина получаем

$$(\lambda_p - \lambda_q)\, a_{p,q} = -d_{p,q} - e_{p,q}\rho_p,$$

где

$$d_{p,q} = \int_a^b r\varphi_p\varphi_q\, dx.$$

Таким образом, $\rho_p = -d_{p,p}$ и, если u_p нормировать, то

$$u_p = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{\infty} \frac{d_{p,q}}{\lambda_q \lambda_p} u_q \qquad (p = 1, 2, \ldots).$$

Аналогичным способом из дальнейших уравнений (13) можно определить $\sigma_n, v_n, \ldots$ Этот метод применим также к уравнениям более высокого порядка и к другим самосопряженным краевым условиям.

3.7. Оценки для собственных значений. Будем рассматривать задачу о собственных значениях § 2 (34) при указанных там предположениях; кроме того, пусть $g(x) \geqslant 0$.

(а) *Формула расщепления Дункерлея — Джеффкотта*[1]. Пусть $g(x) = g_1(x) + \ldots + g_k(x)$ (g непрерывно, $\geqslant 0$ и $\not\equiv 0$), пусть, далее, $\lambda_1^{(\nu)}$ означает первое собственное значение задачи о собственных значениях, в которой функция g заменена функцией g_ν; тогда

$$\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\lambda_1^{(\nu)}}.$$

(б) *Формула расщепления Саусвелла*[2]. Если $L(y)$ может быть представлено в виде суммы k дифференциальных форм n-го порядка:

$$L(y) = L_1(y) + \ldots + L_k(y),$$

так что каждая из задач о собственных значениях

$$L_\nu(y) = \lambda g y; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

удовлетворяет условиям, сформулированным в п. 2.13, и если Λ_ν есть наименьшее собственное значение такой задачи, то

$$\lambda_1 \geqslant \sum_{\nu=1}^{k} \Lambda_\nu.$$

(в) *Теорема о включении Темпля*[3]. Пусть $g(x) > 0$ и $y(x)$ — допустимая функция (см. п. 2.13), отличная от нуля на интервале $a < x < b$ и такая, что в этом интервале $y^{-1}L(y) > 0$; пусть, далее, пределы

$$\lim_{x \to a} y^{-1} L(y) \quad \text{и} \quad \lim_{x \to b} y^{-1} L(y)$$

[1] См. H. H. Jeffcott, *Proceedings Soc. London A* **95** (1919), стр. 106.

[2] H. Lamb — R. V. Southwell, *Proceedings Soc. London A* **99** (1921), стр. 272.

[3] См. G. Temple, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **29** (1929), стр. 270; L. Collatz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **19** (1939), стр. 239.

существуют, так что $y^{-1}L(y)$ можно рассматривать как непрерывную функцию на всем замкнутом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда между величинами

$$m = \min_{a \leqslant x \leqslant b} \frac{L(y)}{gy} \quad \text{и} \quad M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} \frac{L(y)}{gy}$$

лежит по крайней мере одно собственное значение λ_r. Если данная задача о собственных значениях такова, что для всех задач о собственных значениях § 2 (34) с произвольными непрерывными функциями $g > 0$, собственные функции, соответствующие наименьшему собственному значению, и только они, не обращаются в нуль на интервале $a < x < b$, то даже $m \leqslant \lambda_1 \leqslant M$.

Как это следует из п. 9.2 ($а_1$), это предположение выполнено, например, для всех задач (второго порядка) о собственных значениях типа Штурма.

(г) *Теорема о включении Крылова — Боголюбова*[1]. Пусть $g(x) > 0$. Положим для произвольной допустимой функции $y(x) \not\equiv 0$

$$\alpha = \int_a^b yL(y)\,dx \Bigg/ \int_a^b gy^2\,dx, \quad \beta^2 = \int_a^b \frac{1}{g}[L(y)]^2\,dx \Bigg/ \int_a^b gy^2\,dx;$$

тогда $\beta^2 \geqslant \alpha^2$ и между $\alpha - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ и $\alpha + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ лежит по крайней мере одно собственное значение.

(д) *Оценки с помощью функции Грина.* В случае $g \geqslant 0$ для λ_1 второе из неравенств § 2 (44а) дает следующую оценку снизу:

$$\frac{1}{\lambda_1} \leqslant \int_a^b \Gamma(x, x)\, g(x)\,dx,$$

где Γ — функция Грина рассматриваемой задачи, соответствующая $\lambda = 0$. Даже и в том случае, если данная задача не является положительно определенной, но если $g > 0$, можно с помощью формулы

$$\frac{1}{\sqrt[k]{V_k}} \leqslant \lambda_1^2 \leqslant \frac{V_{k-1}}{V_k}$$

(п. 2.7 (г)) оценить первое собственное значение. Применимость этой формулы ограничивается тем, что в нее входит функция Грина, которая во многих случаях вычисляется нелегко.

Однако, с другой стороны, существует ряд задач, в которых вычисление функции $\Gamma(x, \xi)$ не представляет труда; к ним принадлежат, например, задачи второго порядка, в которых диффе-

---

[1]) См. Н. Крылов и Н. Боголюбов, *ИАН СССР* (1929), стр. 471; E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **45** (1939), стр. 788—790.

ренциальное уравнение имеет вид $y'' + \lambda g y = 0$, т. е. задачи, в которых дело сводится к нахождению функции Грина для уравнения $y'' = 0$ (см. ч. III, 2.1).

(е) *Оценка снизу по Темплю — Беклею*[1]. Пусть λ_1 есть собственное значение кратности 1, A_2 — некоторая оценка сверху для второго собственного значения λ_2 и $A_2 > \rho_k$, где ρ_k имеет то же значение, что и в п. 3.4 (б). Тогда

$$\lambda_1 \geqslant \frac{A_2 - \rho_{k-1}}{A_2 - \rho_k} \rho_k.$$

(ж) *Оценка снизу по Треффтцу — Ньюингу*[2]. Пусть снова $g > 0$ и λ_1 — собственное значение кратности 1. Тогда

$$0 \leqslant \beta - \lambda_1 \leqslant \beta \sqrt{\frac{l_2 - l_1}{l_1 - \alpha}} \left(\gamma + 2\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{l_2 - \alpha}{l_2 - l_1}}} \right),$$

причем $\gamma = 1 - \alpha\beta^{-1}$, α и β имеют значения, указанные в (г), l_2 и l_1 суть (грубые) оценки снизу для двух первых собственных значений, и предположим еще, что $l_2 > \alpha$. Формула служит для улучшения оценки l_1. Именно, если $l_1 = l_1^{(0)}$ есть некоторая оценка снизу для λ_1, то из приведенной формулы мы получаем новую оценку снизу для λ_1. Вообще, если в эту формулу подставить вместо l_1 некоторую оценку снизу $l_1^{(\nu)}$, то мы получим новую оценку снизу

$$l_1^{(\nu+1)} = \beta - \beta \sqrt{\frac{l_2 - l_1^{(\nu)}}{l_1^{(\nu)} - \alpha}} \left(\gamma + 2\sqrt{\gamma} \sqrt{1 - \sqrt{\frac{l_2 - \alpha}{l_2 - l_1^{(\nu)}}}} \right).$$

Таким образом, получается последовательность оценок снизу $l_1^{(0)}, l_1^{(1)}, \ldots$, и, следовательно, мы можем оценку, первоначально грубую, до известной степени улучшить.

(з) *Оценка снизу для старших собственных значений по Треффтцу — Виллерсу*[3]. Если

$$S_1 = \sum \frac{1}{\lambda_\nu} \quad \text{или} \quad S_2 = \sum \frac{1}{\lambda_\nu^2}$$

и если для первых собственных значений мы имеем оценки сверху

$$A_\nu \geqslant \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k),$$

---

[1]) См. G. Temple, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **29** (1929) стр. 275.

[2]) См. R. A. Newing, *Philos. Magazine* (7), **24** (1937), стр. 114—127.

[3]) См. Willers, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **16** (1936), стр. 336.

найденные, например, по методу Галеркина, то

$$\frac{1}{\lambda_\nu} \leqslant S_1 + \frac{1}{A_\nu} - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{A_p}, \qquad \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqslant S_2 + \frac{1}{A_\nu^2} - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{A_p^2}$$

для $\nu = 1, \ldots, k$ и, кроме того,

$$\frac{1}{\lambda_{k+1}} \leqslant S_1 - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{A_p}, \qquad \frac{1}{\lambda_{k+1}^2} \leqslant S_2 - \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{A_p^2}.$$

Например, согласно п. 2.14, при $g > 0$ имеем

$$S_1 \leqslant \int_a^b \Gamma(x, x)\, g(x)\, dx,$$

и для S_2 соответствующая оценка получится с помощью теории интегральных уравнений.

3.8. Обзор способов вычисления собственных значений и собственных функций. Пусть дана задача о собственных значениях

$$L(y) = \lambda g(x)\, y; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

(а) $\Delta(\lambda)$-*метод*. Здесь не требуется никаких дополнительных предположений. Если для каждого λ можно найти фундаментальную систему решений

$$\varphi_1(x, \lambda), \ \ldots, \ \varphi_n(x, \lambda) \tag{14}$$

дифференциального уравнения, то уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ (см. п. 2.1) может быть решено точно или с помощью приближенных численных методов. Если, таким образом, найдено некоторое собственное значение λ_0, то остается лишь подобрать постоянные C_ν так, чтобы функция

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \varphi_\nu(x, \lambda_0)$$

удовлетворяла краевым условиям рассматриваемой задачи о собственных значениях; тогда y будет собственной функцией.

Если фактическое нахождение системы функций (14) затруднительно, но существование действительных собственных значений известно, то можно всегда для двух значений $\lambda_1 < \lambda_2$ параметра λ найти с помощью приближенных методов соответствующие фундаментальные системы (14). Тогда, если $\Delta(\lambda_1)$ и $\Delta(\lambda_2)$ имеют различные знаки, то между λ_1 и λ_2 лежит по крайней мере одно собственное значение. Уменьшая интервал (λ_1, λ_2) и повторяя этот же прием, можно вычислить собственное значение с любой точностью.

(б) *Переход к интегральному уравнению*. См. п. 2.9. Для теоретических рассмотрений этот прием может быть весьма полезен.

Однако для численного нахождения собственных значений он, вообще говоря, не может быть рекомендован, так как нахождение функции Грина обычно довольно сложно.

(**в**) *Метод возмущений.* См. п. 3.6. Этот метод широко используется физиками. Для оценки погрешности могут быть полезны пп. 2.15 (д); 3.7 (а), (б).

(**г**) *Переход к уравнению в конечных разностях.* См. п. 3.5. Во многих случаях этот метод, требуя сравнительно небольших вычислений, дает примерное представление о первых собственных значениях.

(**д**) *Переход к вариационной задаче.* См. пп. 2.13, 3.1, 3.2. Здесь следует в первую очередь отметить принцип Рэлея, приближенные методы Галеркина и Граммеля, а также теоремы об оценках пп. 2.15 (д), 3.7 (а), (б). Все они являются весьма употребительными приемами для приближенного нахождения собственных значений. Так как эффективность принципа Рэлея и двух других приближенных методов тем больше, чем лучше функция y, соответственно функции $u_1, \ldots, u_k$, аппроксимируют первые собственные функции, то иногда при этом с помощью метода последовательных приближений п. 3.4 находят более точные аппроксимации для первых собственных функций; часто бывает достаточно уже первого приближения.

(**е**) *Метод последовательных приближений.* См. 3.4. Этот метод во многих случаях уже после незначительного числа шагов дает хорошее приближение. Тем не менее с точки зрения вычислительной техники он не всегда удобен.

(**ж**) *Интерполяционный метод.* Как и в методе Галеркина, исходя из k допустимых функций $u_1(x), \ldots, u_k(x)$, составляют функцию

$$y = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu u_\nu(x)$$

и выбирают a_ν и λ так, чтобы функция y в k заданных точках $a \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_k \leqslant b$ удовлетворяла дифференциальному уравнению рассматриваемой задачи. Тогда найденные таким способом число λ и функция $y(x)$ приближенно представляют некоторое собственное значение и соответствующую собственную функцию. Этот метод несколько примитивен, однако его достоинство состоит в том, что он имеет широкую область применения.

(**з**) К перечисленным до сих пор методам относятся также и теоремы об оценках, изложенные в п. 3.7. О задачах о собственных значениях второго порядка см. также п. 9.5. По поводу решения краевых задач для уравнений второго порядка или для систем таких уравнений с постоянными коэффициентами следует еще упомянуть метод преобразования Фурье.

§ 4. Самосопряженные задачи о собственных значениях для уравнения $F(y)=\lambda G(y)$

Приводимое дальше обобщение результатов §§ 1 и 2 принадлежит автору. См. Е. Kamke, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), стр. 231—286.

4.1. Постановка задачи. Значительная часть изложенных до сих пор теорем и методов может быть перенесена на такие задачи о собственных значениях, в которые параметр λ входит более общим образом, но все же лишь такие, что дифференциальное уравнение содержит λ только линейно.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$F(y)=\lambda G(y), \tag{1}$$

где

$$F(y)=\sum_{\nu=0}^{m}(f_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}, \qquad G(y)=\sum_{\nu=0}^{n}(g_\nu y^{(\nu)})^{(\nu)}$$

— заданные самосопряженные дифференциальные формы; пусть, кроме того, как и раньше, даны краевые условия (см. п. 1.1)

$$U_\mu(y)=0 \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ 2m). \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать:

(а) $0\leqslant n<m$.

(б) $f_\nu=f_\nu(x)$ и $g_\nu=g_\nu(x)$ на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ действительны и имеют ν непрерывных производных; кроме того, $f_m\neq 0$; $g_n\not\equiv 0$.

(в) При каждом значении λ задача (1), (2) самосопряженна. Это означает: во-первых, краевая задача, состоящая из дифференциального уравнения $F(y)=0$ и краевых условий (2), самосопряженна, т. е. для двух систем чисел

$$\left.\begin{array}{l} u(a),\ u'(a),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(a),\quad u(b),\ u'(b),\ \ldots,\ u^{(2m-1)}(b),\\ v(a),\ v'(a),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(a),\quad v(b),\ v'(b),\ \ldots,\ v^{(2m-1)}(b),\end{array}\right\} \tag{3}$$

из которых *обе* удовлетворяют уравнениям (2), выполнено равенство

$$\mathcal{F}[u,\ v]\,\big|_a^b=0,$$

где $\mathcal{F}$ обозначает билинейную дифференциальную форму

$$\mathcal{F}[u,\ v]=\sum_{\nu=1}^{m}\ \sum_{p+q=\nu-1}(-1)^p\left[(f_\nu u^{(\nu)})^{(q)}\,v^{(p)}-(f_\nu v^{(\nu)})^{(q)}\,u^{(p)}\right],$$

входящую в формулу Грина (см. ч. I, п. 17.6)

$$\int_a^b[vF(u)-uF(v)]\,dx=\mathcal{F}[u,\ v]\,\big|_a^b;$$

во-вторых,

$$\mathscr{G}[u, v]\,|_a^b = 0$$

для любых двух систем чисел (3), из которых *обе* удовлетворяют уравнениям (2); $\mathscr{G}[u, v]$ здесь обозначает билинейную форму, входящую в формулу Грина

$$\int_a^b [vG(u) - uG(v)]\,dx = \mathscr{G}[u, v]\,|_a^b$$

и представляется в виде, аналогичном приведенному для $\mathscr{F}$.

В задаче о собственных значениях, рассмотренной в § 2, имеем $G(y) = g(x)y$ и $\mathscr{G} \equiv 0$, следовательно, последнее условие, относящееся к G, выполнено само собой.

В соответствии с терминологией, введенной в п. 2.1, под *собственной функцией* задачи (1), (2) мы будем понимать решение, не равное нулю тождественно; каждое значение λ, для которого существует собственная функция, называется, как и раньше, *собственным значением.*

4.2. Общие предварительные замечания. При каждом значении λ для дифференциального уравнения (1) существует фундаментальная система решений

$$y_1(x, \lambda), \ \ldots, \ y_{2m}(x, \lambda),$$

и каждое решение уравнения (1) может быть представлено как их линейная комбинация. Поэтому для каждого собственного значения λ_0 существует $k = k(\lambda_0)$ линейно независимых собственных функций $\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)$, и любая соответствующая λ_0 собственная функция может быть представлена в виде

$$\psi(x) = C_1\psi_1 + \ldots + C_k\psi_k \quad \left(\sum |C_p| > 0\right).$$

Это число k называется *кратностью собственного значения* λ_0; очевидно, что $1 \leqslant k \leqslant 2m$.

Пусть теперь опять фундаментальная система решений $y_p(x, \lambda)$ выбрана так, что

$$y_p^{(q)}(a, \lambda) = e_{p,\,q+1} \qquad (p = 1, \ \ldots, \ 2m; \ q = 0, \ \ldots, \ 2m-1).$$

Тогда детерминант

$$\Delta(\lambda) = \mathrm{Det}\,|\,U_\mu(y_\nu)\,| \qquad (\mu, \nu = 1, \ \ldots, \ 2m)$$

называется, как и раньше, *характеристическим детерминантом* задачи о собственных значениях. $\Delta(\lambda)$ является целой функцией от λ. Если $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то каждое число λ есть собственное значение. Если $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, то существует не более чем счетное множество собственных значений; они совпадают с нулями целой функции $\Delta(\lambda)$ и поэтому не имеют ни одной предельной точки, кроме, может быть, точки $\lambda=\infty$. Собственное значение λ_0 имеет кратность k в том и только в том случае, если матрица детерминанта $\Delta(\lambda_0)$ имеет ранг $2m-k$.

Можно опять (см. п. 2.2) ввести понятие *резольвенты Грина*. Далее, если $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — собственные функции, соответствующие различным собственным значениям λ_1, λ_2, то имеет место *соотношение ортогональности*

$$\int_a^b \psi_1 G(\psi_2)\,dx=0. \tag{4}$$

4.3. Нормальные задачи о собственных значениях. Задача (1), (2) называется *нормальной*, если для каждой собственной функции $\psi(x)$ выполняется неравенство

$$\int_a^b \bar{\psi} G(\psi)\,dx\neq 0,$$

где $\bar{\psi}$ обозначает функцию, комплексно сопряженную с ψ.

Функция $u(x)$ называется *допустимой функцией* для задачи (1), (2), если $u(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков до $2m$ включительно и удовлетворяет краевым условиям (2).

Самосопряженная задача (1), (2) будет заведомо нормальна, если выполнено одно из следующих условий:

(а) $G(y)=g(x)y$, где $g\geqslant 0$, причем $g\not\equiv 0$ (или $g\leqslant 0$, $g\not\equiv 0$) на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$;

(б) для каждой действительной допустимой функции $u(x)\not\equiv 0$

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx>0 \quad (\text{или для каждой } <0);$$

(в) $\lambda=0$ не является собственным значением и для каждой допустимой действительной функции $u(x)$

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx\geqslant 0 \quad (\text{или для каждой } \leqslant 0);$$

(г) для каждой действительной функции $u(x)$

$$\int_a^b u\,F(u)\,dx\geqslant 0 \tag{5}$$

и, кроме того, для каждой такой допустимой функции $u(x)\not\equiv 0$, для которой в формуле (5) имеет место знак равенства, выражение

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx \tag{6}$$

отлично от нуля и имеет один и тот же знак для всех таких функций u.

Если выполнено условие (5), то задача называется *положительно определенной*, причем она называется *строго положительно определенной*, если в (5) имеет место строгое неравенство. Для того чтобы решить, будет ли для некоторой конкретной задачи выполняться одно из условий (б)—(г), пользуются опять-таки в первую очередь формулой Дирихле (ср. п. 2.6 (в)).

Для нормальных самосопряженных задач рассматриваемого здесь более общего вида также имеют место все факты, приведенные в п. 2.6.

4.4. Положительно определенные задачи о собственных значениях. Пусть теперь задача (1), (2) самосопряженна и строго положительно определенна[1]).

(а) При этих условиях существует бесконечно много собственных значений; их можно расположить в виде последовательности

$$\ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \ldots;$$

здесь $\lambda_p>0$ или <0, в зависимости от того, будет ли $p>0$ или <0, и каждое собственное значение встречается столько раз, какова его кратность. Последовательность эта может обрываться не больше чем с одной стороны, и $|\lambda_p|\to\infty$ при $|p|\to\infty$.

(б) Выписанной выше последовательности собственных значений соответствует полная нормированная ортогональная система собственных функций

$$\ldots,\ \psi_{-2}(x),\ \psi_{-1}(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),\ \ldots,$$

т. е. такая система собственных функций, что

$$\int_a^b \psi_p G(\psi_q)\,dx=\frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}e_{p,q},$$

и любая собственная функция, соответствующая некоторому собственному значению λ^*, представима как линейная комбинация

---

[1]) Достаточно предположить задачу просто положительно определенной, однако при сделанных более сильных предположениях формулировки упрощаются.

конечного числа собственных функций из этой системы, соответствующих собственному значению λ^*.

(в) Если существует хотя бы одно положительное собственное значение, то существуют такие допустимые функции $u(x)$, что

$$\int_a^b u\, G(u)\, dx > 0;$$

тогда

$$\lambda_1 = \min_u \left[\int_a^b uF(u)\, dx \Big/ \int_a^b uG(u)\, dx \right],$$

причем минимум берется по всем допустимым функциям u, для которых знаменатель в этой формуле положителен. Если существует хотя бы одно отрицательное собственное значение, то существуют такие допустимые функции $u(x)$, для которых

$$\int_a^b u\, G(u)\, dx < 0;$$

в этом случае соответственно

$$\lambda_{-1} = \max_u \left[\int_a^b u\, F(u)\, dx \Big/ \int_a^b u\, G(u)\, dx \right].$$

(г) Если $\psi_1(x), \ldots, \psi_{p-1}(x)$ — ортогональная система собственных функций, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}$, и если существуют еще и другие положительные собственные значения, то

$$\lambda_p = \min_u \left[\int_a^b u\, F(u)\, dx \Big/ \int_a^b u\, G(u)\, dx \right],$$

если минимум берется по всем таким допустимым функциям $u(x)$, что

$$\int_a^b u\, G(u)\, dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b u\, G(\psi_\nu)\, dx = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, p-1).$$

Если $\psi_{-1}, \ldots, \psi_{-(p-1)}$ — ортогональная система собственных функций, соответствующих собственным значениям $\lambda_{-1}, \ldots, \lambda_{-(p-1)}$, то аналогично

$$\lambda_{-p} = \max_u \left[\int_a^b u\, F(u)\, dx \Big/ \int_a^b u\, G(u)\, dx \right],$$

причем максимум берется по всем таким допустимым функциям, что

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx<0 \quad \text{и} \quad \int_a^b u\,G(\psi_\nu)\,dx=0 \qquad (\nu=-1,\ \ldots,\ -(p-1)).$$

(д) Из (в) получается следующий факт, существенный для численного нахождения собственных значений: если $u(x)$ есть некоторая допустимая функция, такая, что

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx\neq 0,$$

то между 0 и $\int_a^b uF(u)\,dx \Big/ \int_a^b u\,G(u)\,dx$ лежит по крайней мере одно собственное значение.

(е) Если для каждой допустимой функции $u(x)$ выполнено неравенство

$$\int_a^b u\,G(u)\,dx\geqslant 0 \qquad (\leqslant 0),$$

то все собственные значения положительны (отрицательны). Если существует такой отрезок $[\alpha, \beta]$, являющийся частью отрезка $[a, b]$, на котором

$$(-1)^\nu g_\nu(x)\geqslant 0 \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

и если хотя бы одна из этих функций больше нуля, то обязательно существует бесконечное множество положительных собственных значений. Если в формуле (7) для всех ν имеет место противоположное неравенство, то обязательно существует бесконечное множество отрицательных собственных значений. Если на $[a, b]$ существуют подынтервалы обоих родов, то существует бесконечно много как положительных, так и отрицательных собственных значений.

(ж) Далее, остаются в силе:

способ Куранта независимого определения собственных значений (п. 2.15(г)), причем $L(y)$ следует заменить на $F(y)$, а gy^2 — на $yG(y)$;

теорема об оценках п. 2.15 (д), если только задача

$$F(y)=\lambda^* G^*(y); \quad U_\mu(y)=0 \qquad (\mu=1,\ \ldots,\ 2m)$$

также самосопряженна и если для каждой допустимой функции $y(x)$ выполнено неравенство

$$\int_a^b y\, G^*(y)\, dx \geqslant \int_a^b y\, G(y)\, dx;$$

приближенный метод Галеркина (п. 3.1), если за $u_1, \ldots, u_k$ принимаются допустимые функции, удовлетворяющие соотношению ортогональности

$$\int_a^b u_p\, G(u_q)\, dx = 0 \qquad (p \neq q)$$

и неравенствам

$$\int_a^b u_p\, G(u_p)\, dx > 0 \qquad (\text{соответственно } < 0).$$

При этом следует полагать

$$D(\lambda) = \mathrm{Det}\left|\int_a^b u_p\,[F(u_q) - \lambda e_{p,\,q} G(u_q)]\, dx\right| \qquad (p,\, q = 1, \ldots, k).$$

4.5. Разложение по собственным функциям.

(а) Если $\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots$ — полная нормированная ортогональная система собственных функций, то ряд

$$\sum_p \frac{1}{|\lambda_p|}\,[\psi_p^{(\nu)}(x)]^2$$

сходится при $\nu = 0, 1, \ldots, m-1$, и его сумма не превосходит $\Gamma^{(\nu,\,\nu)}(x, x)$, где $\Gamma(x, \xi)$ — функция Грина краевой задачи[1])

$$F(y) = 0, \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, 2m)$$

и

$$\Gamma^{(p,\,q)}(x, \xi) = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial \xi^q}\Gamma(x, \xi).$$

(б) Для непрерывной функции $\Phi(x)$ числа

$$a_p = \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|}\int_a^b \Phi G(\psi_p)\, dx$$

называются ее *коэффициентами Фурье* по отношению к задаче о собственных значениях (1), (2).

---

[1]) Так как для строго положительно определенной краевой задачи (1), (2) $\lambda = 0$ не есть собственное значение, то эта задача не имеет нетривиального решения; поэтому существует функция Грина.

Для коэффициентов Фурье a_p некоторой допустимой функции $\Phi(x)$ выполнены следующие соотношения:

$$\sum_p |\lambda_p| a_p^2 \leqslant \int_a^b \Phi F(\Phi)\, dx \quad \text{(неравенство Бесселя)}$$

и

$$\sum_p \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} a_p^2 = \int_a^b \Phi G(\Phi)\, dx \quad \text{(равенство Парсеваля).}$$

Если $\Psi(x)$ есть также некоторая допустимая функция и b_p — ее коэффициенты Фурье, то

$$\sum_p \frac{\lambda_p}{|\lambda_p|} a_p b_p = \int_a^b \Phi G(\Psi)\, dx.$$

При несколько иных предположениях справедливо другое неравенство Бесселя:

$$\sum_p a_p^2 \leqslant \int \Phi G(\Phi)\, dx.$$

Здесь, как и выше, следует предполагать, что задача (1), (2) самосопряженна и положительно определенна и, кроме того, что Φ является *допустимой относительно G функцией* и что для каждой допустимой относительно G функции $u(x)$ выполнено неравенство

$$\int_a^b u\, G(u)\, dx \geqslant 0.$$

При этом функция $u(x)$ называется *допустимой относительно G*, если она $2n$ раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяет нормированным краевым условиям (2) (ср. п. 2.3), поскольку они содержат лишь производные порядков $\leqslant 2n-1$. Если, в частности, $G(y) = g(x)y$, то каждая непрерывная функция $u(x)$ допустима в указанном смысле.

(в) Для вывода обычных теорем о разложении краевые условия опять должны быть нормированы. Пусть

$$U_\mu^*(y) = 0 \tag{8}$$

те из краевых условий, которые содержат лишь производные порядков $\leqslant m-1$. Задачу (1), (2) мы назовем *замкнутой*, если $Y(x) \equiv 0$ есть единственная $m-1$ раз дифференцируемая функция, которая удовлетворяет краевым условиям (8) и, кроме того, для каждой допустимой функции $u(x)$, удовлетворяет уравнению

$$\int_a^b Y\,G(u)\,dx = 0$$

(см. (г)).

Тогда справедлива следующая теорема разложения: если задача (1), (2) самосопряженна и строго положительно определенна, то для каждой допустимой функции $\Phi(x)$ с коэффициентами Фурье a_p ряды

$$\sum a_p \psi_p^{(\nu)} \qquad (\nu \leqslant m-1)$$

сходятся абсолютно и равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Если, кроме того, задача (1), (2) замкнута, то

$$\Phi(x) = \sum_p a_p \psi_p(x),$$

и это равенство можно почленно дифференцировать $m-1$ раз.

(г) Самосопряженная задача (1), (2) замкнута тогда и только тогда, когда $Y(x) \equiv 0$ является единственной функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

(α) $Y(x)$ имеет $m-1$ непрерывных производных и удовлетворяет краевым условиям (8);

(β) если положить

$$G_n(u) = g_n u^{(n)},$$

$$G_\nu(u) = \frac{d}{dx} G_{\nu+1}(u) + g_\nu u^{(\nu)} \qquad (\nu = n-1, \ldots, 1, 0),$$

то $G_\nu(Y)$ существует для $\nu = 0, 1, \ldots, n$;

(γ) $G_0(Y) = 0$ [1];

(δ) для каждой допустимой функции $u(x)$ справедливо равенство

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \left[u^{(p)} G_{p+1}(Y) - Y^{(p)} G_{p+1}(u)\right]\Big|_a^b = 0.$$

Пример. Пусть $m \geqslant 2$, $n = 1$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$F(y) + \lambda\,[(g_1 y')' + g_0 y] = 0;$$

в число краевых условий пусть входят равенства

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0.$$

Тогда условия (β) и (δ) выполняются автоматически, а условие (γ) дает

$$(g_1 y')' + g_0 y = 0.$$

---

[1] В случае $n = 1$ или $n = 2$ это условие можно заменить условием $G(Y) = 0$.

Поэтому рассматриваемая задача заведомо замкнута, если краевая задача

$$(g_1 y')' + g_0 y = 0, \quad y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0$$

имеет единственное решение $y \equiv 0$. Если $g_1(a) \neq 0$, то обязательно $y \equiv 0$ в каждом интервале, содержащем точку a, в котором $g_1 \neq 0$, то же самое верно и для точки b. Поэтому рассматриваемая задача заведомо замкнута, если $g_1(x)$ обращается в нуль не более чем в одной точке.

§ 5. Краевые и дополнительные условия более общего вида

Пусть снова (см. пп. 1.1 и 2.1) дано уравнение вида

$$L(y) = f(x) \quad \text{или} \quad L(y) + \lambda g(x) y = f(x).$$

Рассматривавшиеся до сих пор краевые условия относились к концам некоторого конечного интервала. Эти условия могут быть обобщены многими различными способами:

(а) Интервал неограничен с одной стороны, например, имеет вид $a \leqslant x < \infty$. Требуется найти решения $y(x)$ данного дифференциального уравнения, которые при $x \to \infty$ стремятся к нулю или ограничены, в то время как в точке a, возможно, заданы еще и краевые условия прежнего типа (разумеется, за исключением той части этих условий, которая относится к точке b). Аналогично для случаев $-\infty < x \leqslant b$ и $-\infty < x < +\infty$.

(б) Если b — особая точка дифференциального уравнения, то требуется найти такое решение, которое при $x \to b$ стремится к нулю или остается ограниченным, в то время как в точке a, возможно, заданы еще и краевые условия прежнего типа. Аналогично обстоит дело в случае, когда $x = a$ или оба конца интервала являются особыми точками [1]).

(в) В n точках $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ заданы значения $y(a_\mu) = \gamma_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, n$) искомой функции [2]).

(г) Обобщение задачи (в): пусть заданы числа $\alpha_{\mu, p}^{(q)}$ и точки $a = a_1 < a_2 < \ldots < a_k = b$. Положим $U_{\mu, p}(y) = \sum_{q=0}^{n-1} \alpha_{\mu, p}^{(q)} y^{(q)}(a_p)$; искомая функция должна удовлетворять условиям

$$\sum_{p=1}^{k} U_{\mu, p}(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n)\,^{3)}.$$

---

[1]) [О случаях (а) и (б) — см. пп. 9.9 и 9.10. Подробное изложение имеется в книгах Наймарка и Коддингтона и Левинсона. — *Прим. ред.*]

[2]) См. Сансоне, т. I, а также H. Geppert, *Math. Ann.* 95 (1926), стр. 368—388; A. Kneschke, *Deutsche Math.* 5 (1941), стр. 384—393.

[3]) См. J. Tamarkin, *Math. Zeitschrift* 27 (1927), стр. 1—54; K. Toyoda, *Tôhoku Math. Journ.* 38 (1933), стр. 343—355.

(д) Искомая функция должна удовлетворять интегральным условиям

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b a_{\mu,\nu}(x)\, y^{(\nu)}(x)\, dx = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n)\,[1].$$

(е) В условия (г) могут входить интегральные члены типа указанных в (д) [2].

(ж) Пусть заданы условия

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \int_a^b y^{(\nu)}(x)\, d\alpha_{\mu,\nu}(x) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

где интегралы понимаются в смысле Римана — Стилтьеса. Эти условия охватывают случаи (в)—(е), а также рассмотренные раньше краевые условия на конечном интервале [3].

Общей чертой всех этих краевых условий является их линейность. В силу этого обстоятельства бо́льшая часть результатов теории, изложенной выше для простейших краевых условий, может быть почти дословно перенесена на эти более общие случаи. Это относится в первую очередь к существованию функции Грина, к сведе́нию краевых задач к интегральным уравнениям, а также, если особые точки отсутствуют и $[a, b]$ — конечный отрезок, то и к детерминанту $\Delta(\lambda)$ и к его роли при определении собственных значений.

---

[1]) См. M. Picone, *Atti Accad. Lincei* (5), **17** (1908), стр. 340—347; (6), 15 (1932), стр. 942—948.

[2]) См. G. Mammana, *Annali Pisa* **15** (1927).

[3]) См. R. D. Carmichael, *Americ. Journ. Math.* **44** (1922), стр. 129—152; N. Cioranescu, *Buletinul Cernauti* 5 (1931), стр. 99—117.

ГЛАВА II

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 6. Краевые задачи и задачи о собственных значениях для систем линейных дифференциальных уравнений

[Вопросы, излагаемые в этом параграфе, рассмотрены в монографии: М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, 1969, гл. III. Там намечены доказательства приводимых теорем, а также указаны оригинальные источники. — *Прим. ред.*]

Для систем во многих случаях дело обстоит так же, как и для одного дифференциального уравнения n-го порядка. В случаях, когда теория будет развиваться аналогично, мы будем ссылаться на соответствующие места гл. I и лишь отметим те моменты, где имеется различие.

6.1. Обозначения и условия разрешимости [1]). Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$u'_\mu(x)=\sum_{\nu=1}^{n} f_{\mu,\nu}(x)\,u_\nu+f_\mu(x)\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n),\tag{1}$$

причем функции f_μ, $f_{\mu,\nu}$ непрерывны на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. С помощью матрицы [2]) ранга n

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} & \beta_{1,1} & \ldots & \beta_{1,n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} & \beta_{n,1} & \ldots & \beta_{n,n}\end{pmatrix}$$

и заданных чисел γ_μ составим краевые условия

$$U_\mu(u)=\gamma_\mu\qquad(\mu=1,\ \ldots,\ n),\tag{2}$$

где

$$U_\mu(u)=\sum_{\varkappa=1}^{n}[\alpha_{\mu,\varkappa}u_\varkappa(a)+\beta_{\mu,\varkappa}u_\varkappa(b)].\tag{3}$$

Требуется определить систему функций $u_1(x),\ldots,u_n(x)$, удовлетворяющих уравнениям (1) и краевым условиям (2). В этом

---

[1]) Ср. пп. 1.1 и 1.2.

[2]) Как и в § 1, вначале не обязательно предполагать, что число строк также равно n.

и состоит *краевая задача* (1), (2). Краевая задача называется *полуоднородной*, если $\gamma_\mu = 0$, и *однородной*, если, кроме того, $f_\mu \equiv 0$. Соответствующая (1), (2) однородная задача имеет, следовательно, вид

$$\left.\begin{aligned} u'_\mu &= \sum_{\nu=1}^{n} f_{\mu,\nu}(x)\, u_\nu \qquad (4)\\ U_\mu(u) &= 0 \qquad (5)\end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Тривиальное решение $u_1 \equiv \ldots \equiv u_n \equiv 0$ однородной задачи мы не будем принимать во внимание. Если для однородной задачи ненулевые решения вообще существуют, то существуют k линейно независимых решений

$$\vec{u}_1 = \{u_{1,1}, \ldots, u_{1,n}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\vec{u}_k = \{u_{k,1}, \ldots, u_{k,n}\}$$

таких, что каждое решение $\vec{u} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ задачи (4), (5) может быть представлено как линейная комбинация этих k решений, т. е. в виде

$$u_1 = \sum_{p=1}^{k} c_p u_{p,1}, \ \ldots, \ u_n = \sum_{p=1}^{k} c_p u_{p,n}.$$

В этом случае краевая задача называется *k-кратно разрешимой*.

Если

$$\varphi_{\nu,1}(x), \ \ldots, \ \varphi_{\nu,n}(x) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

есть фундаментальная система решений системы (4), то однородная краевая задача имеет нетривиальное решение в том и только в том случае, если детерминант

$$\Delta = \mathrm{Det}\,|\, U_\mu(\varphi_\nu)\,| \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

равен нулю; здесь $U_\mu(\varphi_\nu)$ обозначает выражение, получающееся при подстановке в U_μ функций (6). Если Δ имеет ранг r, то задача (4), (5) $(n-r)$-кратно разрешима. Таким образом, или задача (1), (2) имеет единственное решение, или задача (4), (5) имеет хотя бы одно ненулевое решение.

6.2. Сопряженная краевая задача[1]). Система, сопряженная с системой (4), имеет вид

$$v'_\mu = -\sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\mu}(x)\, v_\nu \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Составим дифференциальную форму

$$L_\mu(u) \equiv u'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} f_{\mu,\nu} u_\nu,$$

[1]) Ср. п. 1.3.

и сопряженную с ней форму

$$L_\mu^*(v) \equiv -v'_\mu - \sum_{\nu=1}^{n} f_{\nu,\mu} v_\nu,$$

причем $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$ — функции, имеющие непрерывные первые производные. Тогда, как легко непосредственно проверить, формула Грина принимает вид

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_a^b [v_\mu L_\mu(u) - u_\mu L_\mu^*(v)]\,dx = \sum_{\mu=1}^{n} [u_\mu(b) v_\mu(b) - u_\mu(a) v_\mu(a)]. \quad (9)$$

Если с помощью некоторой матрицы (γ, δ) (как это делалось с помощью матрицы (α, β)) ранга n составить выражения

$$V_\mu(v) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} [\gamma_{\mu,\nu} v_\nu(a) + \delta_{\mu,\nu} v_\nu(b)],$$

а с их помощью — краевые условия

$$V_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \quad (10)$$

то краевая задача (8), (10) называется *сопряженной* с задачей (4), (5), если для любых двух систем чисел

$$u_1(a), \ldots, u_n(a), \quad u_1(b), \ldots, u_n(b),$$
$$v_1(a), \ldots, v_n(a), \quad v_1(b), \ldots, v_n(b),$$

первая из которых удовлетворяет краевым условиям (5), а вторая — краевым условиям (10), выражение, стоящее в правой части формулы (9), обращается в нуль:

$$\sum_{\nu=1}^{n} [u_\nu(b) v_\nu(b) - u_\nu(a) v_\nu(a)] = 0.$$

Это условие эквивалентно равенству

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{\mu,k}\gamma_{\nu,k} - \beta_{\mu,k}\delta_{\nu,k}) = 0 \qquad (\mu,\ \nu = 1, \ldots, n).$$

Краевые задачи (4), (5) и (8), (10) всегда или обе неразрешимы или обе разрешимы, притом с одной и той же кратностью.

Полуоднородная задача (1), (2), где $\gamma_\mu = 0$, разрешима в том и только в том случае, если для каждой системы решений $v_1, \ldots, v_n$ задачи (8), (10) выполнено равенство

$$\sum_{p=1}^{n} \int_a^b f_p(x) v_p(x)\,dx = 0.$$

О самосопряженных задачах см. п. 6.5.

6.3. Матрица Грина[1]**.** Матрица

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{pmatrix} \Gamma_{1,1}(x, \xi) & \ldots & \Gamma_{1,n}(x, \xi) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \Gamma_{n,1}(x, \xi) & \ldots & \Gamma_{n,n}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Грина* краевой задачи (4), (5), если ее n строк образуют фундаментальное решение (см. ч. I, п. 9.7) системы (4) и, кроме того, при каждом ξ ее элементы как функции от x удовлетворяют краевым условиям (5). Матрица Грина существует тогда и только тогда, когда однородная задача (4), (5) не имеет ни одного нетривиального решения, причем в этом случае существует *единственная* матрица Грина. Ее можно получить из приведенного в ч. I, п. 9.7 фундаментального решения, если подобрать величины $c_{p,\nu}(\xi)$ так, чтобы каждая из строк фундаментального решения удовлетворяла краевым условиям[2]. Элементы матрицы Грина $\overline{\Gamma}(x, \xi)$ сопряженной задачи (8), (10) имеют вид $\overline{\Gamma}_{p,q}(x, \xi) = \Gamma_{q,p}(\xi, x)$, и решение полуоднородной задачи (1), (2) при $\gamma_\mu = 0$ дается формулой

$$u_\nu = \sum_{p=1}^{n} \int_a^b \Gamma_{p,\nu}(x, \xi) f_p(\xi)\, d\xi \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

6.4. Задачи о собственных значениях[3]. Пусть даны непрерывные функции $g_{\mu,\nu}(x)$, не все равные нулю тождественно. Составим общую краевую задачу:

$$u'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} (f_{\mu,\nu} + \lambda g_{\mu,\nu}) u_\nu + f_\mu; \quad U_\mu(u) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

содержащую параметр λ, и соответствующую ей однородную краевую задачу (задачу о собственных значениях):

$$u'_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} (f_{\mu,\nu} + \lambda g_{\mu,\nu}) u_\nu; \quad U_\mu(u) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \tag{12}$$

Краевая задача, сопряженная с (12), имеет вид

$$v_\mu = -\sum_{\nu=1}^{n} (f_{\nu,\mu} + \lambda g_{\nu,\mu}) v_\nu; \quad V_\mu(v) = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

где V_μ имеют значение, указанное в п. 6.2. Число λ, для которого однородная задача (12) имеет нулевое решение $u_1, \ldots, u_n$, назы-

---

[1] Ср. пп. 1.5 и 1.6. По поводу обобщенной матрицы Грина см. W. T. Reid, *Americ. Journ. Math.* **53** (1931), стр. 443.

[2] Явное выражение для матрицы Грина см. в работах: Е. Буницкий, К теории функций Грина обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Одесса, 1913; E. Bounitzky, *Journal de Math.* (6), **5** (1909), стр. 65—125.

[3] Ср. пп. 2,1 и 2,2.

вается *собственным значением*, а само это решение — *собственным вектором*. Говорят, что данное собственное значение имеет *кратность* k, если ему соответствует k линейно независимых собственных векторов.

Если (6) — фундаментальная система решений системы уравнений задачи (12) и если функции $\varphi_{\nu,\varkappa} = \varphi_{\nu,\varkappa}(x, \lambda)$ для каждого λ выбраны так, что $\varphi_{\nu,\varkappa}(a, \lambda) = e_{\nu,\varkappa}$ $(\nu, \varkappa = 1, \ldots, n)$, то детерминант $\Delta(\lambda) = \operatorname{Det}|U_\mu(\varphi_\nu)|$ (см. п. 6.1) есть целая функция от λ и ее нули являются собственными значениями задачи (12). Отсюда следует: или каждое λ является собственным значением или существует не более чем счетное множество собственных значений.

Собственные значения задач (12) и (13) совпадают, совпадают также их кратности. Если λ, λ^* — два различных собственных значения, $u_1, \ldots, u_n$ — собственный вектор задачи (12), соответствующий λ, а $v_1, \ldots, v_n$ — собственный вектор задачи (13), соответствующий λ^*, то выполнено следующее *соотношение биортогональности*:

$$\sum_{p,\, q=1}^{n} \int_a^b g_{p,\,q} v_p u_q \, dx = 0.$$

Если $\lambda = 0$ не входит в число собственных значений, то при $\lambda = 0$ для задачи (12) существует матрица Грина, и краевая задача (11) может быть заменена следующей системой интегральных уравнений:

$$u_\nu(x) = \lambda \sum_{p,\, q=1}^{n} \int_a^b \Gamma_{p,\,\nu}(x, \xi)\, g_{p,\,q}(\xi)\, u_q(\xi)\, d\xi + \sum_{p=1}^{n} \int_a^b \Gamma_{p,\,\nu}(x, \xi) f_p(\xi)\, d\xi$$
$$(\nu = 1, \ldots, n).$$

6.5. Самосопряженные задачи о собственных значениях[1]. Система уравнений задачи (12) называется самосопряженной (в широком смысле), если существует такая (не зависящая от λ) матрица $(T_{p,\,q})$, состоящая из непрерывно дифференцируемых функций $T_{p,\,q}(x)$ $(p, q = 1, \ldots, n)$, что $\operatorname{Det}|T_{p,\,q}| \neq 0$ и система функций

$$v_p(x) = \sum_{q=1}^{n} T_{p,\,q}(x)\, u_q(x) \qquad (p = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

пробегает все решения системы уравнений задачи (13), когда система $u_1, \ldots, u_n$ пробегает все решения системы уравнений задачи (12). Для этого необходимо и достаточно, чтобы функции

[1]) См. также ч. I, п. 9.5.

$T_{p,q}$ удовлетворяли уравнениям

$$\left.\begin{aligned} T'_{p,q}+\sum_{\nu=1}^{n}(T_{p,\nu}f_{\nu,q}+T_{\nu,q}f_{\nu,p})=0,\\ \sum_{\nu=1}^{n}(T_{p,\nu}g_{\nu,q}+T_{\nu,q}g_{\nu,p})=0\end{aligned}\right\}\quad (p,\ q=1,\ \ldots,\ n).$$

Задача о собственных значениях (12) называется *самосопряженной*, если система уравнений задачи (12) самосопряженна и если, кроме того, краевые условия задачи (13) после подстановки в них значений $v_\nu(a)$, $v_\nu(b)$, получающихся из (14) при $x=a, b$, совпадают с условиями (12). Это условие эквивалентно равенствам

$$\sum_{p,\ q=1}^{n}\alpha_{\mu,\ p}T^{-1}_{p,\ q}(a)\alpha_{\nu,\ q}=\sum_{p,\ q=1}^{n}\beta_{\mu,\ p}T^{-1}_{p,\ q}(b)\beta_{\nu,\ q}\qquad (\mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ n),$$

где $T^{-1}_{p,q}$ — коэффициенты, получающиеся при решении системы (14) относительно u, т. е. $u_p=\sum\limits_q T^{-1}_{p,q}v_q$.

Согласно Блиссу[1]), самосопряженная задача (12) называется *положительно определенной самосопряженной*, если выполнены еще следующие три условия:

(α) Функции $S_{p,q}(x)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}T_{\nu,p}g_{\nu,q}$ образуют симметричную матрицу $(S_{p,q})$, так что для произвольных комплексных чисел y_p и сопряженных им чисел $\bar y_p$ выражение $\sum\limits_{p,q}S_{p,q}y_p\bar y_q$ есть действительное число.

(β) Всегда $\sum\limits_{p\ q}S_{p,q}y_p\bar y_q\geqslant 0$.

(γ) Если для некоторого решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ какой-либо системы дифференциальных уравнений

$$y'_\nu=\sum_{p=1}^{n}(f_{\nu,p}y_p+g_{\nu,p}g_p)\qquad (\nu=1,\ \ldots,\ n) \tag{15}$$

с непрерывными функциями $g_p(x)$ выполнено тождество

$$\sum_{p,q}S_{p,q}y_p\bar y_q\equiv 0,$$

то $y_1\equiv\ldots\equiv y_n\equiv 0$.

Если самосопряженная задача о собственных значениях для уравнений n-го порядка при $g>0$ заменяется задачей для системы уравнений первого порядка (см. ч. I, § 14), то для этой

---

[1]) См. G. A. Bliss, *Transactions Americ. Math. Soc.* **28** (1926), стр. 561—584; **44** (1938), стр. 413—428.

системы получается, согласно Блиссу, положительно определенная самосопряженная задача о собственных значениях.

Для положительно определенной самосопряженной задачи о собственных значениях справедливо следующее: все собственные значения действительны, поэтому собственные векторы всегда могут быть выбраны также действительными. Кратность собственного значения λ_0 совпадает с той кратностью, которую λ_0 имеет как нуль функции $\Delta(\lambda)$. Существует счетное множество собственных значений, которым соответствует *полная нормированная ортогональная система* собственных векторов $u_{\nu,1}(x),\ldots$ $\ldots, u_{\nu,n}(x)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$, таких, что

$$\sum_{p,\,q=1}^{n}\int_a^b u_{\mu,\,p}S_{p,\,q}u_{\nu,\,q}\,dx=e_{\mu,\,\nu}\qquad(\mu,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots).$$

Если функции $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ удовлетворяют краевым условиям задачи (12) и если, далее, при соответствующем выборе непрерывных функций $g_1(x),\ldots,g_n(x)$ они удовлетворяют условиям (15), то n рядов

$$\varphi_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k u_{k,\,\nu}(x)\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ n),$$

где

$$c_k=\sum_{p,\,q=1}^{n}\int_a^b u_{k,\,p}(\xi)\,S_{p,\,q}(\xi)\,y_q(\xi)\,d\xi,$$

сходятся равномерно на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и

$$\sum_{p=1}^{n}g_{\nu,\,p}(y_p-\varphi_p)\equiv 0\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ n).$$

Если из этих последних равенств следует, что $y_p\equiv\varphi_p$, то, таким образом, мы получаем для отдельных y_p или для всех y_p разложения по компонентам собственных векторов. Это будет верно, очевидно, для всех $p=1,\ldots,n$, если, например, $\operatorname{Det}|g_{p,\,q}|\neq 0$.

[Асимптотика собственных значений регулярных краевых задач и соответствующие теоремы о разложении по собственным функциям приведены в монографии Наймарка, гл. III. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА III

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НИЗШИХ ПОРЯДКОВ

[Краевым задачам и задачам о собственных значениях низших порядков (и особенно второго порядка) посвящена обширнейшая журнальная литература, где получены весьма тонкие результаты. Однако здесь нет возможности ни назвать все эти результаты, ни перечислить все новейшие исследования. Для первоначального ознакомления с вопросами, затронутыми ниже, можно рекомендовать следующие книги:

Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939;

М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, 1969;

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, 1953; т. II, 1954;

Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, 1958;

Ф. Трикоми, Дифференциальные уравнения, 1962;

Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I, 1960;

Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950.

В этих книгах можно найти обоснование и развитие приводимых ниже утверждений, а также необходимые литературные указания. — *Прим. ред.*].

§ 7. Задачи первого порядка

7.1. Линейные задачи. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть для линейного дифференциального уравнения

$$y' + [f(x) + \lambda g(x)]\, y = h(x) \tag{1}$$

ищется решение, которое должно удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям. Здесь не возникает никаких существенных трудностей, поскольку все решения этого уравнения могут быть найдены согласно ч. I, п. 4.3, и поэтому остается лишь выбрать постоянную интегрирования так, чтобы решение удовлетворяло поставленным дополнительным условиям.

Если данная задача однородна, т. е. если $h \equiv 0$ и даны краевые условия

$$y(b) = \alpha y(a) \qquad (\alpha \neq 0), \tag{2}$$

то λ будет собственным значением (ср. п. 2.1), если уравнение при этом значении λ имеет решение, удовлетворяющее условию (2) и не равное нулю тождественно. Так как решения уравнения (1) в этом случае имеют вид

$$y = C\exp\left\{-\int_a^x (f+\lambda g)\,dx\right\},$$

то λ должно удовлетворять уравнению

$$-\int_a^b (f+\lambda g)\,dx = \ln\alpha.$$

Если $\int_a^b g\,dx \neq 0$, то существует бесконечное множество собственных значений. Если λ_0 — некоторое собственное значение, то остальные собственные значения определяются из условий

$$(\lambda-\lambda_0)\int_a^b g\,dx = 2k\pi i \qquad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Они, следовательно, все лежат на некоторой прямой, параллельной мнимой оси комплексной λ-плоскости; λ_0 может быть выбрано действительным в том и только в том случае, если $\alpha > 0$.

Подробно рассмотрена[1]) задача

$$y' = y\sum_{\nu=1}^{n}\frac{g_\nu(x)}{\lambda-\alpha_\nu}; \quad y(a)=y(b).$$

7.2. Нелинейные задачи. Пусть требуется определить такое значение λ, для которого дифференциальное уравнение

$$y' = \lambda f(x, y)$$

имеет интегральную кривую, проходящую через две заданные точки (a, A) и (b, B), $a < b$. Если $B > A$ и, например, f непрерывно дифференцируема и >0 в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $A \leqslant y \leqslant B$, то существует единственное собственное значение.

§ 8. Линейные краевые задачи второго порядка

8.1. Общие замечания. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + f_0(x)\,y = f(x).$$

---

[1]) R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **25** (1923), стр. 155—172.

Если f_ν и f непрерывны и на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ отличны от нуля, то это уравнение, согласно ч. I, п. 24.1, всегда может быть приведено к самосопряженной форме

$$[f(x)\,y']' + g(x)\,y = h(x). \tag{1}$$

Здесь функция f должна быть непрерывно дифференцируема и отлична от нуля, g и h — непрерывны; ниже эти условия всюду будут предполагаться выполненными.

Решения уравнения (1) должны удовлетворять краевым условиям

$$U_\mu(y) = \gamma_\mu \qquad (\mu = 1,\ 2), \tag{2}$$

где

$$U_\mu(y) = \alpha_\mu y(a) + \alpha'_\mu y'(a) + \beta_\mu y(b) + \beta'_\mu y'(b), \tag{3}$$

а матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \beta_1 & \beta'_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \beta_2 & \beta'_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

имеет ранг 2, т. е. U_μ должны быть линейно независимы между собой.

Однородная краевая задача

$$(fy')' + gy = 0; \quad U_\mu(y) = 0 \qquad (\mu = 1,\ 2) \tag{5}$$

самосопряженна тогда и только тогда (см. п. 1.4), когда

$$(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha'_1\alpha_2)\,f(b) = (\beta_1\beta'_2 - \beta'_1\beta_2)\,f(a). \tag{6}$$

Задача, состоящая из уравнения (1) и условий

$$y(a) = \gamma, \qquad y(b) = \delta, \tag{7а}$$

$$y'(a) = \gamma, \qquad y'(b) = \delta, \tag{7б}$$

$$\alpha y(a) + \alpha' y'(a) = \gamma, \quad \beta y(b) + \beta' y'(b) = \delta, \tag{7в}$$

называется краевой задачей первого, второго и третьего рода соответственно; краевые условия (7в) при $\gamma = \delta = 0$ называются также *условиями типа Штурма*. Соответствующие однородные краевые задачи самосопряженны; то же самое в случае $f(a) = f(b)$ относится и к краевой задаче, соответствующей периодическим краевым условиям $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

8.2. Функция Грина. Функция Грина (ср. п. 1.5) краевой задачи (5) имеет вид

$$\Gamma(x,\ \xi) = C_1(\xi)\,\varphi_1(x) + C_2(\xi)\,\varphi_2(x) + g(x,\ \xi);$$

здесь φ_1, φ_2 — фундаментальная система решений уравнения (5), g — так называемое фундаментальное решение (ср. ч. I, п. 17.4):

$$g(x,\ \xi) = \pm\,\frac{\varphi_1(x)\,\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)\,\varphi_2(x)}{2f(\xi)\,W(\xi)}$$

(верхний знак берется при $x \leqslant \xi$, а нижний — при $x \geqslant \xi$),

$$W(\xi) = \varphi_1(\xi)\varphi_2'(\xi) - \varphi_1'(\xi)\varphi_2(\xi)$$

— детерминант Вронского, а C_1 и C_2 должны быть выбраны так, чтобы при каждом фиксированном ξ, $a < \xi < b$, функция Γ удовлетворяла краевым условиям (5). Примеры функций Грина и фундаментальных решений см. ч. III, 2.1, 2.2, 2.6, 2.11 и др.

8.3. Оценки для решений краевых задач первого рода[1]**.**

(а) Если краевая задача, состоящая из уравнения (1) и краевых условий $y(a) = y(b) = 0$, вообще имеет некоторое решение $y(x)$ и $f > 0$, $g \leqslant 0$, то

$$|y| \leqslant (b-a)^2 \frac{H}{\varphi},$$

где

$$H = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |h(x)|, \quad \varphi = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

(б) Отметим следующий результат[2], позволяющий связать решение краевой задачи второго порядка с решением некоторой задачи с начальными условиями первого порядка: пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $0 \leqslant x \leqslant 1$, и пусть $y(x, \lambda)$ — существующее при каждом $\lambda > 0$ решение краевой задачи

$$y'' - \lambda(y' + y) = \lambda f(x); \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \to \infty} y(x, \lambda) = \eta(x) \qquad (0 \leqslant x < 1),$$

где $\eta(x)$ — решение следующей задачи с начальными условиями:

$$\eta' + \eta = -f(x), \quad \eta(0) = 0.$$

8.4. Краевые условия при $|x| \to \infty$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $-\infty < x < +\infty$ и если при некоторых α, β, A выполнены неравенства $0 < \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, $|g(x)| \leqslant A$, то уравнение

$$y'' - f(x)y = g(x)$$

имеет одно и только одно решение, ограниченное на всей прямой $-\infty < x < \infty$[3].

---

[1]) См. M. Picone, *Math. Zeitschrift* **28** (1928), стр. 526; P. Clemente, *Atti Accad Lincei* (6), **15** (1932), стр. 925—931; F. Prete, *Rendiconti Instituto Lombardo* (2), **63** (1930), стр. 1115—1132.

[2]) См. E. Rothe, *Journal of Science Iowa College* **13** (1939), стр. 369—372.

[3]) См. F. H. Murray, *Annals of Math.* (2), **24** (1923), стр. 84.

8.5. Отыскание периодических решений[1]). Пусть рассматривается уравнение $y'' + \alpha^2 y = g(x)$, где $\alpha > 0$, функция $g(x) \not\equiv 0$ и для всех значений x непрерывна и периодична с периодом p. Требуется найти решения, имеющие тот же самый период p, т. е. решения краевой задачи, состоящей из вышеуказанного уравнения и краевых условий

$$y(0) = y(p), \quad y'(0) = y'(p).$$

Решения соответствующего однородного уравнения имеют вид

$$C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

Согласно ч. I, п. 24.2, отсюда можно получить решения неоднородного уравнения, после чего остается, если это вообще возможно, выбрать значения C_1 и C_2 так, чтобы соответствующее решение удовлетворяло краевым условиям. При этом возможны три случая:

(а) Однородная краевая задача не имеет ни одного нетривиального решения, т. е. $\alpha p/(2\pi)$ не целое число. Тогда, согласно замечанию в конце п. 1.2, исходная краевая задача имеет единственное решение.

(б) Однородная краевая задача имеет нетривиальные решения, т. е. $\alpha p/(2\pi) = m$ — целое число (случай резонанса); тогда даже любое решение однородного уравнения является в то же время и решением соответствующей однородной краевой задачи. Далее следует различать случаи:

$$(\text{б}_1) \qquad \int_0^p g(x) \cos \alpha x \, dx = \int_0^p g(x) \sin \alpha x \, dx = 0.$$

Тогда (ср. заключительное замечание в п. 1.4) каждое решение неоднородного уравнения является в то же время и решением краевой задачи, т. е. имеет период p.

(б$_2$) Если случай (б$_1$) не имеет места, то для каждого решения $y(x)$ неоднородного уравнения будет $\overline{\lim\limits_{x \to \pm\infty}} |y(x)| = \infty$, т. е. «амплитуды колебаний» неограничены.

8.6. Одна краевая задача, связанная с изучением течения жидкости. При изучении течения жидкостей в каналах Праудмен[2]) натолкнулся на следующую задачу. Пусть дана краевая

[1]) [Проблема отыскания периодических решений дифференциального уравнения (в частности, второго порядка) имеет громадное прикладное значение и в общем виде далека от своего разрешения. Для первоначального ознакомления с этой проблемой см. Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953; А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959. — *Прим. ред.*]

[2]) J. Proudman, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **24** (1926), стр. 131—139.

задача

$$(fy')' + \lambda y = -1; \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

Для каждого ее решения $y(x, \lambda)$ найдем среднее значение

$$M(\lambda) = \int_0^1 y\,dx.$$

Решение y называется характеристическим для данного числа α, если $M(\lambda) = \alpha\lambda$. Рассматривается, между прочим, вопрос о том, когда функции 0 и $F(x)$ могут быть так разложены по характеристическим функциям $y_\nu(x)$, что

$$0 = \sum a_\nu y_\nu, \quad \text{причем} \quad \sum a_\nu = 1,$$

и

$$F(x) = \sum b_\nu y_\nu, \quad \text{причем} \quad \sum b_\nu = 0.$$

Если в случае приливного течения в канале принимается во внимание вращение Земли, то, согласно Горроксу [1]), приходят к системе

$$(fu')' + (\lambda + i\gamma)\,u = -1, \quad (fv')' + (\lambda - i\gamma)\,v = -1$$

с теми же самыми дополнительными условиями; нужно лишь в этом случае полагать

$$M(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u + v)\,dx.$$

§ 9. Линейные задачи о собственных значениях второго порядка

9.1. Общие замечания. В первую очередь мы будем рассматривать следующий случай. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$f_2(x)\,y'' + f_1(x)\,y' + [f_0(x) + \lambda g(x)]\,y = 0, \tag{1}$$

т. е. параметр λ входит лишь в тот член, в который входит y, и притом только линейно; на рассматриваемом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функции f_ν и g непрерывны и $f_2 \neq 0$. Краевые условия

$$\alpha_\mu y(a) + \beta_\mu y'(a) = \gamma_\mu y(b) + \delta_\mu y'(b) \qquad (\mu = 1,\ 2) \tag{2}$$

линейны и линейно независимы между собой.

[1]) H. Horrocks, *Proceedings Soc. London A* **115** (1927), стр. 184—198.

Согласно ч. I, п. 24.1, уравнение (1) можно написать в виде самосопряженного уравнения

$$[f(x)\,y']' + [\lambda g(x) + h(x)]\,y = 0, \tag{3}$$

причем $f \neq 0$ и непрерывно дифференцируема, а функции g и h непрерывны [1]).

Задача о собственных значениях (3), (2) самосопряженна тогда и только тогда, когда

$$(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,f(b) = (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\,f(a). \tag{4}$$

Этот случай чаще всего встречается в приложениях. Самосопряженные задачи о собственных значениях, в которых $g \neq 0$, всегда также регулярны в смысле п. 2.3.

Следует рассмотреть также более общую задачу о собственных значениях, а именно уравнение

$$[f(x,\ \lambda)\,y']' + g(x,\ \lambda)\,y = 0 \tag{5}$$

с краевыми условиями (2), в которых коэффициенты $\alpha_\mu, \ldots, \delta_\mu$ могут также зависеть от λ. Уравнение (5) эквивалентно системе

$$y' = z/f, \quad z' = -gy.$$

Поэтому задача о собственных значениях может быть записана также в виде

$$y' = F(x,\ \lambda)\,z, \quad z' = -G(x,\ \lambda)\,y \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$A_\mu y(a) + B_\mu z(a) = C_\mu y(b) + D_\mu z(b) \qquad (\mu = 1,\ 2); \tag{7}$$

эта задача самосопряженна тогда и только тогда, когда

$$A_1B_2 - A_2B_1 = C_1D_2 - C_2D_1.$$

В пп. 9.2—9.5 предполагается, что рассматриваемые задачи о собственных значениях самосопряженны. В п. 9.6 рассматриваются несамосопряженные краевые условия и в п. 9.7 — дополнительные условия другого типа.

До сих пор предполагалось, что в уравнении (1) $f_2 \neq 0$. В действительности это предположение не всегда необходимо. Существование решения для дифференциального уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0,$$

согласно теореме Каратеодори (см. ч. I, п. 5.3), можно гарантировать даже и тогда, когда f и g лишь интегрируемы, следовательно, например, если они имеют одну точку разрыва ξ, причем такую, что функция $f(x)\,(x-\xi)^\delta$ при некотором δ, $0 < \delta < 1$, непрерывна в точке ξ. Очевидно, что дифференциальное уравне-

[1]) О более специальной нормальной форме (нормальная форма Лиувилля) см. п. 9.2 (a_1).

ние (1) может быть записано в виде уравнения такого типа, если $f_2(x)$ имеет в одной точке «нуль порядка < 1». Случай, когда $f_2(x)$ имеет нули порядка $\geqslant 1$, рассматривается в п. 9.9.

9.2. Самосопряженные задачи о собственных значениях. Пусть дано дифференциальное уравнение (3), функция f не обращается в нуль и непрерывно дифференцируема, функции g и h непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$; кроме того, даны краевые условия (2). Рассматривается самосопряженная задача, т. е. должны быть выполнены условия (4).

(a) $g(x) \neq 0$. В этом случае можно предполагать, что $f > 0$ и $g > 0$. Особенно часто и детально рассматривается

(a₁) *Задача Штурма*, т. е. случай краевых условий третьего рода (см. п. 8.1) или условий типа Штурма

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$
$$|\alpha| + |\beta| > 0; \qquad |\gamma| + |\delta| > 0$$

(пример см. ч. III, 2.9). В этом случае имеет место

Осцилляционная теорема Штурма. Существует бесконечное множество собственных значений, все собственные значения действительны и могут быть расположены в виде неограниченно возрастающей монотонной последовательности. Каждое собственное значение имеет кратность 1; таким образом все собственные функции $\varphi_n(x)$, соответствующие одному и тому же собственному значению λ_n, отличаются друг от друга лишь на постоянный, отличный от нуля множитель. Каждая собственная функция φ_n имеет в открытом интервале (a, b) ровно n нулей.

Собственные функции удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_a^b g\varphi_p\varphi_q\,dx = 0 \quad \text{при} \quad p \neq q.$$

Если $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — полная нормированная система собственных функций, т. е. если еще выполнено условие $\int_a^b g\varphi_n^2\,dx = 1$, то, наряду с теоремой о разложении п. 2.14, верно, например, еще следующее: для каждой непрерывной кусочно дифференцируемой функции $F(x)$, такой, что $F(a) = 0$, если $\varphi_0(a) = 0$, и $F(b) = 0$, если $\varphi_0(b) = 0$, ряд

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad \text{где} \quad c_n = \int_a^b F(x)\,g(x)\,\varphi_n(x)\,dx,$$

сходится к $F(x)$ абсолютно и равномерно.

Нормальная форма Лиувилля. Если в уравнении (1) f_1/f_2 имеет непрерывную производную первого порядка, а g/f_2 — непрерывную производную второго порядка, то подстановка

$$\eta(\xi) = \Phi(x)\, y(x), \quad \xi = \int_a^x \sqrt{\frac{g}{f_2}}\, dx,$$

где

$$\Phi(x) = \sqrt[4]{\frac{g}{f_2}} \exp \frac{1}{2} \int_a^x \frac{f_1}{f_2}\, dx,$$

приводит уравнение к нормальной форме Лиувилля

$$\eta'' + [\lambda + \varphi(\xi)]\, \eta = 0;$$

здесь

$$\varphi(\xi) = \frac{f_0}{g} + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{f_2}\right)' \left(\frac{f_2}{g}\right)^2 \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{f_2}{g} \frac{\Phi''}{\Phi},$$

причем в правой части этого равенства нужно еще выразить x через ξ. Следует обратить внимание на то, что при этой подстановке меняются, вообще говоря, также и краевые условия и сам отрезок $[a, b]$. Однако условия типа Штурма снова переходят в условия того же типа.

Собственные значения и собственные функции для больших n. Пусть дано дифференциальное уравнение, записанное в нормальной форме Лиувилля:

$$y'' + [\lambda + h(x)]\, y = 0, \tag{8}$$

причем здесь следует предполагать, что $h(x)$ имеет непрерывную производную; в качестве краевых условий возьмем опять краевые условия типа Штурма, указанные в начале п (a₁). Согласно п. 2.12, такая задача о собственных значениях равносильна интегральному уравнению типа Вольтерра:

$$y(x) = \\ = -\beta \cos k(x-a) + \frac{\alpha}{k} \sin k(x-a) - \frac{1}{k} \int_a^x h(\xi)\, y(\xi) \sin k(x-\xi)\, d\xi,$$

где $\lambda = k^2$ и k следует выбрать так, чтобы $y(x)$ удовлетворяли и второму краевому условию. С помощью метода последовательных приближений (см. п. 2.10 и п. 2.12, пример 2) можно приближенно вычислить собственные значения $\lambda_n = k_n^2$ и собственные функции $\varphi_n(x)$. Если положить

$$H(u, v) = \frac{1}{2} \int_u^v h(\xi)\, d\xi,$$

то получаем:

при $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$:

$$k_n = \frac{\pi n}{b-a} - \frac{A}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{где} \quad A = H(a, b) + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta},$$

$$\varphi_n = \cos\frac{\pi n (x-a)}{b-a} + \frac{1}{\pi n}\left[(x-a)\left(H(x, b) - \frac{\gamma}{\delta}\right) - \right.$$
$$\left. -(b-x)\left(H(a, x) + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \sin\frac{\pi n (x-a)}{b-a} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

при $\beta \neq 0$, $\delta = 0$, $\gamma = 1$:

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2(b-a)} - \frac{2B}{(2n+1)\pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{где} \quad B = H(a, b) + \frac{\alpha}{\beta};$$

$$\varphi_n = \cos\frac{(2n+1)\pi (x-a)}{2(b-a)} + \frac{2}{(2n+1)\pi}\left[(x-a) H(x, b) - \right.$$
$$\left. -(b-x)\left(H(a, x) + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right] \sin\frac{(2n+1)\pi (x-a)}{2(b-a)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

при $\beta = 0$, $\delta \neq 0$, $\alpha = 1$:

k_n определяется, как и выше, но $B = \frac{1}{2} H(a, b) - \frac{\gamma}{\delta}$,

$$\varphi_n = \sin\frac{(2n+1)\pi (x-a)}{2(b-a)} - \frac{2}{(2n+1)\pi}\left[(x-a)\left(H(x, b) - \frac{\gamma}{\delta}\right) - \right.$$
$$\left. -(b-x) H(a, x)\right] \cos\frac{(2n+1)\pi (x-a)}{2(b-a)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

при $\beta = \delta = 0$, $\alpha = \gamma = 1$:

$$k_n = \frac{(n+1)\pi}{b-a} - \frac{1}{(n+1)\pi} H(a, b) + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\varphi_n = \sin\frac{(n+1)\pi (x-a)}{b-a} - \frac{1}{(n+1)\pi}[(x-a) H(x, b) -$$
$$-(b-x) H(a, x)] \cos\frac{(n+1)\pi (x-a)}{b-a} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(a_2) *Общие самосопряженные краевые условия.* С помощью соответствующих линейных преобразований общие самосопряженные краевые условия (2), (4) можно привести к виду

$$y(b) = \alpha y(a) + \beta y'(a), \quad y'(b) = \gamma y(a) + \delta y'(a),$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = f(a)/f(b)$. Для этой задачи существует бесконечно много собственных значений. Все эти собственные значения действительны. Осцилляционная теорема для данного случая гласит [1]):

Совокупность собственных значений может быть расположена в виде двух неограниченно возрастающих последовательностей:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \quad \text{и} \quad (\bar\lambda_0 <)\, \bar\lambda_1 < \bar\lambda_2 < \ldots$$

[1]) См. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* **44** (1938), стр. 635—658; A. C. Zaanen, *Compos. math.* 7 (1939), стр. 253—282.

причем: 1) $\bar{\lambda}_0$ существует, только если $\beta < 0$ или $\beta = 0$, $\alpha > 0$, 2) $\lambda_n \leqslant \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$. Если $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, то это число представляет собой собственное значение кратности 2, т. е. *все* решения уравнения (3) при $\lambda = \lambda_n$ являются собственными функциями. Если $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$, то каждое из этих чисел есть простое собственное значение, т. е. все собственные функции $\varphi_n(x)$, соответствующие собственному значению λ_n, отличаются друг от друга неравным нулю постоянным множителем, и то же самое справедливо для собственных функций $\bar{\varphi}_n(x)$, соответствующих $\bar{\lambda}_n$. Если $N(n)$ означает число лежащих на полуоткрытом интервале $a < x \leqslant b$ нулей собственных функций φ_n, $\bar{\varphi}_n$, соответствующих собственным значениям λ_n, $\bar{\lambda}_n$, то $N(n)$ равно

$$\begin{array}{llll} 2n-2 \text{ или } 2n-1 & \text{при} & \beta>0, & \\ 2n-1 & \text{при} & \beta=0, & \alpha<0, \\ 2n-1 \text{ или } 2n & \text{при} & \beta<0, & \\ 2n & \text{при} & \beta=0, & \alpha>0. \end{array}$$

(б) *Функция $g(x)$ может менять знак, но задача о собственных значениях положительно определенна*[1]) (см. п. 2.13), т. е. $\lambda = 0$ не есть собственное значение и

$$-\int_a^b [(fy')'y + hy^2]\,dx = -fyy'\Big|_a^b + \int_a^b \left(fy'^2 - hy^2\right)dx \geqslant 0$$

для каждой дважды непрерывно дифференцируемой функции $y(x)$, удовлетворяющей заданным самосопряженным краевым условиям (2). Это будет, например, в том случае, когда $\lambda = 0$ не есть собственное значение, $f > 0$, $h \leqslant 0$ и, кроме того, $fyy'\big|_a^b = 0$ для каждой функции y, удовлетворяющей указанным условиям. Если краевые условия имеют вид $y(a) = y(b) = 0$ или $y'(a) = y'(b) = 0$, то это последнее предположение, очевидно, выполняется. В этом случае существует бесконечное множество собственных значений и имеется теорема о разложении (см. п. 2.14). Пример см. ч. III, 2.14.

9.3. $y' = F(x, \lambda)z$, $z' = -G(x, \lambda)y$ и краевые условия самосопряженны. Пусть даны краевые условия (7), где коэффициенты также могут зависеть от λ. Число λ называется, как и прежде, собственным значением этой задачи, если при этом значении λ система (6) имеет нетривиальное решение $y(x)$, $z(x)$, удовлетворяющее краевым условиям (7); функции y, z называются при этом собственными функциями или собственными векторами. Функции F, G должны удовлетворять следующим условиям:

---

[1]) Если $g(x)$ меняет знак, но задача о собственных значениях не является положительно определенной, то см. R. G. D. Richardson, *Americ. Journ. Math.* 40 (1918), стр. 283—316.

I. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ непрерывны и $F > 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

II. $F(x, \lambda)$, $G(x, \lambda)$ при фиксированном x и возрастающем λ не убывают; для каждых двух чисел $\lambda_1 < \lambda_2$ существует такое $x_0 = x_0(\lambda_1, \lambda_2)$, что

$$G(x_0, \lambda_1) < G(x_0, \lambda_2)$$

или

$$F(x_0, \lambda_1) < F(x_0, \lambda_2) \quad \text{и} \quad |G(x_0, \lambda_1)| + |G(x_0, \lambda_2)| > 0.$$

III. $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_1} G(x, \lambda) = -\infty, \quad \lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} G(x, \lambda) = +\infty.$

(a) *Краевые условия типа Штурма.*

$$Ay(a) = Bz(a), \quad Cy(b) = Dz(b), \tag{9}$$

где A, B, C, D — непрерывные функции от λ (в частности, они могут быть постоянными) и $|A| + |B| > 0$, $|C| + |D| > 0$. Предполагается:

или $B(\lambda) \equiv 0$,

или $B(\lambda) \neq 0$ и $A(\lambda)/B(\lambda)$ при возрастающем λ не возрастает; далее

или $D(\lambda) \equiv 0$,

или $D(\lambda) \neq 0$ и $C(\lambda)/D(\lambda)$ при возрастающем λ не убывает.

Тогда справедлива следующая осцилляционная теорема[1]): Существует бесконечное множество собственных значений; они могут быть записаны в виде последовательности $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, сходящейся к Λ_2. Каждое собственное значение — простое, т. е. все системы собственных функций $y_n(x)$, $z_n(x)$, соответствующие данному собственному значению λ_n, отличаются друг от друга постоянным, отличным от нуля множителем. Каждая функция $y_n(x)$ имеет в открытом интервале $a < x < b$ точно n нулей.

Гурвиц[2]) исследовал систему

$$y' = [\lambda + f(x)]z, \quad z' = -[\lambda + g(x)]y \tag{10}$$

с краевыми условиями (9), где A, B, C, D — постоянные (см. также § 6): так как $\lambda + f(x)$ может быть равно нулю, то эту задачу нельзя непосредственно рассматривать как частный случай предыдущей. Если f и g непрерывны, то задача (10), (9) всегда имеет бесконечно много собственных значений; все собственные значения действительны и имеют кратность 1; они могут быть расположены в виде последовательности

$$\ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots,$$

---

[1]) См. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 44 (1939), стр. 639.

[2]) См. W. A. Hurwitz, *Transactions Americ. Math. Soc.* 22 (1921), стр. 526—543; Ch. Ch. Camp, *Americ. Journ. Math.* 44 (1922), стр. 25—53.

где $\lambda_{-n} \to -\infty$ и $\lambda_n \to +\infty$. Если $a = 0$, $b = 1$ и если, что всегда возможно, краевые условия (9) записаны в виде

$$y(0)\cos\alpha + z(0)\sin\alpha = 0, \quad y(1)\cos\beta + z(1)\sin\beta = 0,$$

то

$$\lambda_n = \alpha - \beta - \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx + n\pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Собственные функции y_n, z_n, соответствующие λ_n, могут быть нормированы так, что

$$\int_0^1 (y_p y_q + z_p z_q)\,dx = e_{p,\,q}.$$

Тогда $y_n = \sin(\xi_n - \alpha) + O(1/n)$, $z_n = \cos(\xi_n - \alpha) + O(1/n)$, где

$$\xi_n = \lambda_n x + \frac{1}{2}\int_0^x [f(x) + g(x)]\,dx.$$

Если функции $p(x)$, $q(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют краевым условиям, то они могут быть одновременно разложены в два сходящихся ряда:

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n y_n(x), \qquad q(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z_n(x),$$

где $c_n = \int\limits_0^1 (p y_n + q z_n)\,dx$.

(б) *Произвольные самосопряженные краевые условия*, не подходящие под случай (а). Такие условия (см. п. 9.2 (а$_2$)) можно считать записанными в виде

$$y(b) = Ay(a) + Bz(a), \quad z(b) = Cy(a) + Dz(a).$$

При этом A, B, C, D — непрерывные функции от λ, такие, что $AD - BC = 1$.

Кроме условий I — III, предположим следующее: или $B(\lambda) \equiv 0$, или $B(\lambda) \neq 0$ на интервале $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$; таким образом, возможны лишь следующие четыре случая:

$$(\alpha) \quad B > 0, \quad (\beta)\, B \equiv 0, \quad A < 0, \quad (\gamma)\, B < 0, \quad (\delta)\, B \equiv 0, \quad A > 0.$$

Далее, пусть

$$B \cdot \Delta A \geqslant A \cdot \Delta B, \quad D \cdot \Delta C \geqslant C \cdot \Delta D, \quad \Delta A \cdot \Delta D \geqslant \Delta B \cdot \Delta C,$$

где $\Delta A = A(\lambda + \varepsilon) - A(\lambda)$ и т. д. и ε означает во всех членах этих неравенств одно и то же положительное число; неравенства должны быть справедливы для всех достаточно малых значений ε.

Тогда справедлива следующая осцилляционная теорема[1]): Существует бесконечное множество собственных значений; они могут быть расположены в две последовательности,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots \quad \text{и} \quad (\bar{\lambda}_0 <)\, \bar{\lambda}_1 < \bar{\lambda}_2 < \ldots,$$

каждая из которых сходится к Λ_2, и обладают следующими свойствами: $\bar{\lambda}_0$ существует лишь в случаях (γ) и (δ); выполнено неравенство $\lambda_n \leqslant \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$. Если $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$, то это число является собственным значением кратности 2, т. е. все ненулевые решения системы (6) при $\lambda = \lambda_n$ являются собственными функциями. Если $\lambda_n < \bar{\lambda}_n$, то каждое из этих чисел является простым собственным значением, т. е. все системы собственных функций $y_n(x)$, $z_n(x)$, соответствующие собственному значению λ_n, отличаются друг от друга лишь неравным нулю постоянным множителем, и то же самое верно для собственных функций $\bar{y}_n(x)$, $\bar{z}_n(x)$, соответствующих $\bar{\lambda}_n$. Если $N(n)$ обозначает число лежащих на полуоткрытом интервале $a < x \leqslant b$ нулей функций $y_n(x)$, $\bar{y}_n(x)$, соответствующих собственным значениям λ_n, $\bar{\lambda}_n$ (при этом может быть $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$), то $N(n)$ имеет в указанных выше четырех случаях следующие значения:

(α) $2n-2$ или $2n-1$, (β) $2n-1$, (γ) $2n-1$ или $2n$, (δ) $2n$.

В случаях (γ) и (δ) функция $\bar{y}_0$ не имеет ни одного нуля даже на всем отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

9.4. Задачи о собственных значениях и вариационный принцип. Пусть в уравнении (3) $f > 0$, $g \not\equiv 0$ и неотрицательна, $h \leqslant 0$; пусть, далее, $\mathscr{R} = -fyy' \big|_a^b \geqslant 0$ для каждой функции $y(x)$, удовлетворяющей краевым условиям, и, наконец, пусть $\lambda = 0$ не есть собственное значение. Тогда, согласно п. 2.13, наименьшее собственное значение равно

$$\lambda_1 = \min_y \left[-\int_a^b y\,[(fy')' + hy]\,dx \Bigg/ \int_a^b gy^2\,dx \right]$$

или после интегрирования по частям

$$\lambda_1 = \min_y \left[\left\{ \int_a^b (fy'^2 - hy^2)\,dx + \mathscr{R} \right\} \Bigg/ \int_a^b gy^2\,dx \right], \tag{11}$$

причем минимум берется по всем таким функциям $y(x)$, для которых знаменатель $\neq 0$ и которые:

(а) дважды непрерывно дифференцируемы,

(б) удовлетворяют самосопряженным краевым условиям (2).

---

[1]) См. E. Kamke, *Math. Zeitschrift* 44 (1939), стр. 635—658.

Совокупность допустимых функций может быть, согласно п. 2.15 (б), расширена, если из данных краевых условий составить с помощью линейных комбинаций возможно большее число «существенных», т. е. не содержащих производной, краевых условий и дополнить их «остаточными» краевыми условиями, т. е. такими, из которых значения производных не могут быть исключены. С помощью остаточных краевых условий из $\mathcal{R}$ могут быть исключены все производные, так что $\mathcal{R}$ запишется в виде квадратичной формы

$$\mathcal{R}_0 = \alpha y^2(a) + \beta y(a)\, y(b) + \gamma y^2(b),$$

относительно которой предполагается, что она неотрицательна для всех чисел $y(a)$, $y(b)$, удовлетворяющих существенным краевым условиям. Тогда

$$\lambda_1 = \min_y \left[\left\{ \int_a^b (f y'^2 - h y^2)\, dx + \mathcal{R}_0 \right\} \Big/ \int_a^b g y^2\, dx \right]$$

также и в том случае, когда минимум берется по всем функциям $y(x)$, для которых знаменатель не равен нулю и которые:

(а) непрерывны и кусочно гладки,

(б) удовлетворяют существенным краевым условиям.

Функция $y(x)$, для которой этот минимум достигается, будет тогда автоматически дважды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяющей также и остаточным краевым условиям, т. е. будет собственной функцией, соответствующей собственному значению λ_1.

Эти предположения выполняются для следующих краевых условий [1]:

I. $y(a) = 0,\ y(b) = 0$; II. $y(a) = 0,\ y'(b) = -\beta y(b),\ \beta \geqslant 0$;

III. $y(b) = 0,\ y'(a) = \alpha y(a),\ \alpha \geqslant 0$;

IV. $y(a) = y(b),\ f(a)\, y'(a) = f(b)\, y'(b)$;

V. $y'(a) = \alpha y(a) - \beta f(b)\, y(b),\ y'(b) = \beta f(a)\, y(a) - \gamma y(b)$,

$$\alpha,\ \gamma \geqslant 0,\ \beta^2 f(a) f(b) \leqslant \alpha\gamma.$$

Квадратичная форма $\mathcal{R}_0$ в этих случаях имеет вид:

I. $\mathcal{R}_0 = 0$; II. $\mathcal{R}_0 = \beta f(b)\, y^2(b)$;

III. $\mathcal{R}_0 = \alpha f(a)\, y^2(a)$; IV. $\mathcal{R}_0 = 0$;

V. $\mathcal{R}_0 = \alpha f(a)\, y^2(a) - 2\beta f(a) f(b)\, y(a)\, y(b) + \gamma f(b)\, y^2(b)$.

[1] О краевых условиях более общего типа (нелинейных) см. Л. А. Люстерник, *Изв. Харьк. матем. общ-ва* (4), 14 (1937), стр. 139—150.

9.5. О практическом вычислении собственных значений и собственных функций. Здесь следует сослаться на § 3 и прежде всего на метод Галеркина.

Если для уравнения (3) даны краевые условия типа Штурма, то их можно записать в виде:

$$y(a)\cos\alpha = y'(a) f(a) \sin\alpha \qquad (0 \leqslant \alpha < \pi),$$
$$y(b)\cos\beta = y'(b) f(b) \sin\beta \qquad (0 < \beta \leqslant \pi).$$

Если требуется найти собственное значение λ_n, то, применяя метод, указанный в ч. I, п. 25.2 (г), получим, что λ следует выбрать так, чтобы дифференциальное уравнение

$$\vartheta'(x) = f^{-1}\cos^2\vartheta + (\lambda g + h)\sin^2\vartheta \qquad (12)$$

имело решение $\vartheta(x)$, удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(x) = \alpha, \quad \vartheta(b) = \beta + n\pi. \qquad (13)$$

Если наудачу взять некоторое $\lambda = \lambda^*$, то можно тем или иным приближенным способом найти решение $\vartheta(x)$ уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $\vartheta(a) = \alpha$.

Если это $\vartheta(x)$ не удовлетворяет второму из равенств (13), то повторяют то же самое с другим значением λ и т. д. до тех пор, пока второе из условий (13) не будет выполнено с достаточной точностью. С помощью интерполирования между использованными значениями λ вычисления можно сократить.

9.6. Задачи о собственных значениях, не обязательно самосопряженные.

(а) *Регулярные и нерегулярные задачи о собственных значениях.* Задача о собственных значениях

$$f_2(x)y'' + f_1(x)y' + [f_0(x) + \lambda g(x)]y = 0,$$

где $f_2 \neq 0$, $g \neq 0$, с краевыми условиями (2) нерегулярна тогда и только тогда (см. п. 2.3), когда с помощью линейных комбинаций краевые условия могут быть приведены к виду:

$$\alpha y'(a) + \beta y'(b) + \gamma y(a) + \delta y(b) = 0,$$
$$\alpha\omega(a) y(a) - \beta\omega(b) y(b) = 0,$$

где

$$|\alpha| + |\beta| > 0 \quad \text{и} \quad \omega(x) = \sqrt{|g/f_2|}.$$

Во всех остальных случаях задача о собственных значениях регулярна. В частности, регулярны все самосопряженные задачи о собственных значениях. О существовании собственных значений, их асимптотическом поведении и о теоремах разложения для регулярных задач о собственных значениях см. пп. 2.4 и 2.5.

Пример нерегулярной задачи[1]):

$$y'' + [\lambda + h(x)]\,y = 0,$$

$$y'(0) + \alpha y'(1) + \beta y(1) = 0, \quad y(0) - \alpha y(1) = 0.$$

Здесь каждое λ (например при $h=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$) может быть собственным значением. Однако в случае $\beta \neq 0$, а также и в ряде других случаев существует опять-таки лишь счетное множество собственных значений. Для них могут быть даны соответствующие оценки и установлены теоремы о разложении.

(б) $y' = F(x,\lambda)z$, $z' = -G(x,\lambda)y$. *Существование собственных значений.* Если речь идет о существовании хотя бы одного (действительного) собственного значения, то, кроме изложенного в п 9.3, можно сказать следующее[2]).

Общие предположения: при $a \leqslant x \leqslant b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ функции $F(x,\lambda)$ и $G(x,\lambda)$ непрерывны и $F > 0$. Для некоторой последовательности значений $\lambda = l_n$, лежащих на интервале (Λ_1, Λ_2),

$$\lim_{n\to\infty} G(x, l_n) = -\infty \text{ равномерно на отрезке } a \leqslant x \leqslant b;$$

далее, при этих значениях λ функция F ограничена на всем отрезке $[a, b]$ и на каждом меньшем отрезке имеет положительную нижнюю грань[3]). Для некоторой последовательности значений $\lambda = L_n$, лежащих в интервале (Λ_1, Λ_2),

$$\lim_{n\to\infty} G(x, L_n) = +\infty \text{ равномерно на отрезке } a \leqslant x \leqslant b;$$

далее, при этих значениях λ функция F имеет на всем отрезке $[a, b]$ положительную нижнюю грань. Входящие в задачу функции $A(\lambda), \ldots, D(\lambda)$ должны быть непрерывны при $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

I. Собственных значений существует бесконечно много, если краевые условия имеют вид

$$Ay(a) + Bz(a) = 0, \quad Cy(b) + Dz(b) = 0$$

и если на всем интервале $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ или $A(\lambda) \neq 0$, или $B(\lambda) \neq 0$, а также или $C(\lambda) \neq 0$, или $D(\lambda) \neq 0$.

В следующих случаях существует по крайней мере одно собственное значение.

II. $z(a) = Ay(a)$, $y(a) = Cy(b) + Dz(b)$, величины $A(l_n)$, ограничены снизу и далее или

$$D(l_n) = 0, \quad C(l_n) \geqslant C_0 > 0,$$

---

[1]) См. M. H. Stone, *Transactions Americ. Math. Soc.* **29** (1927), стр. 23—53.

[2]) См. H. J. Ettlinger, *Annals of Math.* (2), **21** (1919—1920), стр. 278—290; *Bulletin Americ. Math. Soc.* **27** (1921), стр. 322—325.

[3]) Для теоремы 1 предположение о существовании положительной нижней грани не нужно.

или

$$D(l_n) \geqslant D_0 > 0, \quad C(l_n) \text{ ограничены снизу.}$$

III. $y(a) = Bz(a)$, $z(a) = Cy(b) + Dz(b)$, и далее, на интервале $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$

или $B(\lambda) \geqslant 0$ | или $B(\lambda) < 0$

и, кроме того, при $n = 1, 2, \ldots$

или $D(l_n) = 0$, $C(l_n) \geqslant C_0 > 0$, или $D(l_n) \geqslant D_0 > 0$ и $C(l_n)$ ограничены снизу.	$B(l_n) \leqslant B_0 < 0$ и или $D(l_n) = 0$, $C(l_n) \leqslant C_0 < 0$, или $D(l_n) \leqslant D_0 < 0$ и $C(l_n)$ ограничены сверху.

IV. $y(b) = Ay(a) + Bz(a)$, $z(b) = Cy(a) + Dz(a)$ и $\Delta(\lambda) = AD - BC > 0$, далее $\Delta(\lambda)$ ограничено и или $B(\lambda) \equiv 0$, $A(\lambda) > 0$, $A(l_n) \geqslant A_0 > 0$, $C(l_n)$ ограничены сверху, или $B(\lambda) < 0$, $B(l_n) \leqslant B_0 < 0$, $C(l_n)$ и $D(l_n)$ ограничены сверху, а $A(l_n)$ ограничены снизу.

(в) *Дифференциальные уравнения, в которые параметр входит нелинейно.* Этот круг вопросов разработан пока очень слабо, и здесь имеются лишь результаты, касающиеся отдельных частных примеров. Рассмотрены, например, задача [1])

$$y'' - 2\lambda y' \cos c + \lambda^2 y = 0, \quad c = p\pi/q, \quad 0 < 2p < q,$$

$$y(0) = 0 \qquad (\text{или } y'(0) = 0), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) + \gamma y(1) + \delta y'(1) = 0;$$

задача [2])

$$y'' + [\lambda f_1(x) + f_0(x)]\, y' + [\lambda^2 g_2(x) + \lambda g_1(x) + g_0(x)]\, y = 0$$

с краевыми условиями (2), в которых коэффициенты — многочлены относительно λ; задача [3])

$$y'' + \left(f_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f_\nu(x)}{\lambda - \alpha_\nu}\right) y' + \left\{ g_0(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{g_{1,\nu}(x)}{\lambda - a_\nu} + \frac{g_{2,\nu}(x)}{(\lambda - \alpha_\nu)^2} \right) \right\} y = 0$$

с линейными краевыми условиями (2).

9.7. Дополнительные условия более общего вида.

(а) *Полиномиальные решения.* Пусть дано дифференциальное уравнение

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + \lambda R(x)\, y = 0,$$

где P, Q, R — многочлены и $R \not\equiv 0$. Вместо прежних краевых условий пусть дано следующее дополнительное условие: «$y(x)$

---

[1]) См. J. I. Vass, *Duke Math. Journal* **2** (1936), стр. 151—165.

[2]) R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **31** (1929), стр. 868—906.

[3]) R. E. Langer, там же **32** (1930), стр. 238—250.

есть многочлен». Если существует такая последовательность «собственных значений» λ_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, что каждому λ_n соответствует «собственная функция» вида

$$y_n = \sum_{\nu=0}^{n} c_{n,\nu} x^{\nu} \qquad (c_{n,n}=1),$$

то уравнение должно иметь вид

$$py'' + qy' + \lambda y = 0, \tag{14}$$

где $p = ax^2 + bx + c$, $q = \alpha x + \beta$; тогда обязательно

$$\lambda_n = -an(n-1) - \alpha n.$$

Если эти числа λ_n все различны, то они действительно являются собственными значениями; коэффициенты $c_{n,\nu}$ можно вычислить, подставляя выражение для y_n в дифференциальное уравнение.

Если

$$(gpy')' + \lambda gy = 0$$

есть соответствующее самосопряженное уравнение, то y_n удовлетворяют следующему соотношению ортогональности:

$$\int_u^v g(x)\, y_m(x)\, y_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n),$$

где u, v — два различных нуля функции $p(x)$ (возможно, равных $\pm\infty$).

Далее,

$$h_n y_n = \frac{1}{g} \frac{d^n}{dx^n}(gp^n),$$

где h_n равно коэффициенту при x^n в правой части этого выражения. В качестве частных случаев отсюда получаются полиномы Якоби, Чебышева — Эрмита, Чебышева — Лагерра [1]).

(б) *Прочие дополнительные условия.* Для уравнений второго порядка можно ставить задачи с более общими условиями, чем условия на концах. Помимо приложения общих результатов (см. указания в § 5), были специально разобраны некоторые задачи.

Рассматривалось [2]) уравнение

$$y'' + [h(x) + \lambda]\, y = 0$$

с условиями вида $y(0) = 0$; $y(1) = y(2)$.

---

[1]) [Об этих полиномах см. Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; Г. Сеге, Ортогональные многочлены, 1962; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены), 1966. — *Прим. перев.*] В более общей постановке вопрос рассмотрел S. Bochner, *Math. Zeitschrift* **29** (1929), стр. 730—736.

[2]) См. E. Hilb, *Math. Zeitschrift* **1** (1918), стр. 58—69.

Более общие условия рассматривались [1]) для системы

$$y' = F(x, \lambda) z, \quad z' = -G(x, \lambda) y,$$

а именно:

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu(\lambda)\, y(a_\nu) = 0; \quad y(c) = 0$$

$$(a \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant b; \quad a_1 < c \leqslant b),$$

в частности, условия

$$y(a_1) + y(a_2) = 0, \quad y(c) = 0;$$

а также

$$\alpha(\lambda)\, z(a) = \beta(\lambda)\, y(a), \quad \int_a^b A(x, \lambda)\, y(x)\, dx = 0,$$

где α и β непрерывны и A непрерывна по λ и суммируема по x.

Для уравнения (3) рассматривались [2]) дополнительные условия

$$\int_a^b A(x)\, y\, dx = 0, \quad \int_a^b B(x)\, y\, dx = 0,$$

где A и B — заданные функции.

9.8. Задачи о собственных значениях, содержащие несколько параметров. Дано уравнение вида

$$f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + \left[f_0(x) + g(x) \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu x^\nu\right] y = 0,$$

где на неперекрывающихся отрезках $a_\nu \leqslant x \leqslant b_\nu$ функции f_ν и g непрерывны, $f_2 \neq 0$, $g \neq 0$. Требуется найти «собственные значения» λ и соответствующие им «собственные функции» φ, такие, что каждая φ_ν на отрезке $[a_\nu, b_\nu]$ представляет собой ненулевое решение этого дифференциального уравнения и удовлетворяет краевым условиям:

$$\alpha_\nu \varphi_\nu(a_\nu) + \alpha'_\nu \varphi'_\nu(a_\nu) = 0, \quad \beta_\nu \varphi_\nu(b_\nu) + \beta'_\nu \varphi'_\nu(b_\nu) = 0$$

$$(|\alpha_\nu| + |\alpha'_\nu| > 0, \qquad |\beta_\nu| + |\beta'_\nu| > 0).$$

Для каждой системы целых чисел $k_\nu \geqslant 0$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) существует одна и только одна система собственных значений

[1]) См. W. M. Whyburn, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30** (1928), стр. 630—640.

[2]) См. R. v. Mises, Festschrift Heinrich Weber gewidmet, Leipzig und Berlin, 1912.

$\lambda_0, \ldots, \lambda_n$, такая, что соответствующей значениям $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ краевой задаче на отрезке $[a_\nu, b_\nu]$ удовлетворяет некоторая функция $\varphi_\nu(x)$, имеющая на интервале (a_ν, b_ν) ровно k_ν нулей; все системы собственных значений действительны (осцилляционная теорема Клейна).

9.9. Дифференциальные уравнения с особенностями в граничных точках. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$[F(x, y)\, y']' + G(x, \lambda)\, y = 0$$

с краевыми условиями

$$\text{«}\lim_{x\to a} y(x) \ \text{ и } \ \lim_{x\to b} y(x) \ \text{ существуют».}$$

Предположим следующее: $F > 0$ и G непрерывна при $a < x < b$, $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$; для каждого из этих значений λ функции F и G в точках $x = a$ и $x = b$ регулярны по x. Для каждого λ рассматриваемое уравнение имеет по крайней мере одно решение, регулярное при $x = b$ (это означает, что a и b — слабо особые точки и что характеристические уравнения в этих точках имеют по крайней мере по одному неотрицательному решению (см. ч. I, п. 18.1)). Если x фиксировано и λ возрастает, то F монотонно убывает и G монотонно возрастает (в широком смысле). Наконец, предполагается, что для любых постоянных α и β, таких, что $a < \alpha < \beta < b$,

$$\frac{m_G(\alpha, \beta)}{M_F(\alpha, \beta)} \to \infty \quad \text{при} \quad \lambda \to \Lambda_2,$$

где

$$m_G(\alpha, \beta) = \min_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} G, \quad M_F(\alpha, \beta) = \max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} F.$$

При таких предположениях существует бесконечное множество таких собственных значений λ_n, что число нулей у соответствующих собственных функций неограниченно растет при возрастании n. Если, кроме того,

$$\frac{M_G(\alpha, \beta)}{m_F(\alpha, \beta)} \to -\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to \Lambda_1,$$

то существует одна и только одна собственная функция, не обращающаяся в нуль на интервале $a < x < b$ [1]).

В некоторых случаях указанные краевые условия могут быть усилены. С помощью замены независимого переменного можно интервал (a, b) преобразовать в неограниченный интервал и получить, таким образом, теоремы о задачах для собственных значений, относящиеся к такому интервалу.

---

[1]) W. H. McCrea, R. A. Newing, *Proceedings London Math. Soc.* (2), 37 (1934), стр. 520—534.

9.10. Задачи о собственных значениях на бесконечном интервале.

(а) $y'' + G(x, \lambda) y = 0$ с краевыми условиями «$y(x) \to 0$, $y'(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$». Если G непрерывна при всех x, λ и

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} > 0, \quad \lim_{\lambda \to -\infty} G = -\infty, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} G = +\infty, \quad \lim_{|x| \to \infty} G = -\infty,$$

то существует бесконечное множество собственных значений, причем все они простые и могут быть записаны в виде последовательности $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots, \lambda_n \to \infty$. Каждая собственная функция $\varphi_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет n нулей, и существуют интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2 \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n'^2 \, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, \lambda) \varphi_n^2 \, dx.$$

(б) $y'' + [\lambda + f(x)] y = 0$ с краевыми условиями «функция $y(x)$ ограничена при $-\infty < x < +\infty$».

Это уравнение встречается в волновой механике (уравнение Шредингера) и многократно рассматривалось в литературе [1]). Для приближенного нахождения собственных значений используется ВБК — метод (см. ч. I, п. 25.10), а также метод возмущений (см. п. 3.6).

(в) *Другие задачи.* [Для бесконечного интервала можно ставить много других задач. Одной из наиболее разработанных [2]) является задача

$$(fy')' + hy = \lambda y, \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \int_0^{\infty} y^2 \, dx < \infty.$$

В частности, задача $(fy')' + hy = \lambda y$ с условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, dx < \infty$$

вообще не имеет собственных значений. — *Прим. ред.*]

---

[1]) [См. Д. И. Блохинцев, Основы квантовой механики, 1950; Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, 1963; Л. Шифф, Квантовая механика, 1959, и другие руководства. — *Прим. ред.*]

[2]) [См. подробнее изложение в книгах: Наймарк; Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. I, 1960; Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950. — *Прим. ред.*]

Исследовалось [1]) также поведение решений задачи

$$y'' + [\lambda + f(x)]\,y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad \alpha y(b) + \beta y'(b) = 0 \quad \text{при} \quad b \to \infty.$$

§ 10. Нелинейные краевые задачи и задачи о собственных значениях второго порядка

10.1. Краевые задачи для конечного интервала. Мы будем в основном рассматривать краевые задачи первого рода (п. 8.1):

$$y'' = f(x, y, y'); \quad y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{1}$$

т. е. задачи об отыскании интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через две заданные точки (a, A) и (b, B), $a < b$. При этом всякий раз нужно предполагать следующее:

$$f \text{ непрерывна при } a \leqslant x \leqslant b, \quad -\infty < y, \ y' < +\infty. \tag{V}$$

Тогда существует бесконечное множество интегральных кривых уравнения (1), проходящих через точку (a, A), и существует по крайней мере одна кривая, проходящая через эту точку и имеющая в ней заданное направление $y'(a) = \alpha$. Однако уже для весьма простых уравнений может случиться так, что эти интегральные кривые не достигают прямой $x = b$. Поэтому для того, чтобы данная краевая задача была разрешима, нужны, вообще говоря, некоторые дополнительные предположения.

Краевая задача (1) имеет по крайней мере одно решение, если, кроме (V), выполнено одно из следующих предположений (а) — (д):

(а) $f(x, y, y')$ ограничена [2]). В этом случае соответствующим выбором значения α можно достигнуть того, чтобы интегральная кривая, удовлетворяющая начальным условиям $y(a) = A$, $y'(a) = \alpha$, пересекала прямую $x = b$ выше, соответственно ниже, точки (b, B). Так как точка пересечения при изменении α меняется непрерывно, то, следовательно, существует по крайней мере одно такое значение α, для которого соответствующая интегральная кривая проходит через точку (b, B).

(б) $|f| < C|y|$ для всех достаточно больших значений $|y|$, причем $C < \sqrt{3\pi^3}/(b-a)^2$ [3]).

---

[1]) См. E. Hilb, *Math. Ann.* **76** (1915), стр. 333; W. E. Milne, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30** (1928), стр. 797.

[2]) Следовательно, например, уравнение Дуффинга $y'' + \alpha \sin y = g(x)$ (см. ч. III, 6.19) в случае непрерывности функции $g(x)$ всегда имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее краевым условиям: $y(a) = A$, $y(b) = B$.

[3]) A. Hammerstein, *Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.* **30** (1932), стр. 3—10.

(в) $\dfrac{f(x, y, y')}{|y|+|y'|} \to 0$ равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ при $|y|+|y'| \to \infty$; кроме того, на каждом конечном интервале функция f удовлетворяет по y и y' условию Липшица [1]).

(г) f — монотонно возрастающая, в широком смысле, функция от y, удовлетворяет, как и в (в), условию Липшица, и величина

$$|f(x, y, \bar{y}') - f(x, y, y')|$$

ограничена [1]). Эти предположения выполнены, например, для линейного уравнения $y'' = g(x)y + h(x)$ при $g > 0$, и g, h непрерывны.

(д) f удовлетворяет, как и в (в), условию Липшица и имеет вид $f = \varphi(x, y) + \psi(x, y, y')$, где функция φ непрерывна и монотонно возрастает по y а

$$\frac{\psi}{|y|+|y'|} \to 0$$

при $|y|+|y'| \to \infty$ равномерно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ [1]).

(е) Краевая задача имеет не более одного решения, если f имеет непрерывные частные производные по y, y' и

$$|f_y| \leqslant \alpha, \quad |f_{y'}| \leqslant \beta \quad \text{при} \quad \alpha + \beta < 1$$ [2])

или $f_y \geqslant 0$ [3]).

(ж) Пусть f непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant a$, $|y'| \leqslant \beta$ и пусть

$$b - a \leqslant \min\left(\sqrt{8\beta/M},\ 2\beta/M\right),$$

где $M = \max|f|$. Тогда задача (1) при $A = B = 0$ разрешима [4]).

(з) Пусть при $a \leqslant x \leqslant b$, $\left|y - \dfrac{A+B}{2}\right| \leqslant K$, $|y'| \leqslant L$ функция f непрерывна,

$$|f(x, \bar{y}, \bar{y}') - f(x, y, y')| \leqslant \alpha|\bar{y} - y| + \beta|\bar{y}' - y'|,$$

и пусть

$$\frac{\alpha}{8}(b-a)^2 + \frac{\beta}{2}(b-a) < 1, \quad \frac{1}{2}|B-A| + \frac{M}{8}(b-a)^2 \leqslant K,$$

$$\frac{|B-A|}{b-a} + \frac{M}{2}(b-a) \leqslant L.$$

---

1) G. Scorza Dragoni, *Rendiconti Sem. Mat. Roma* (4), **2** (1938), стр. 177—215, 253 и сл.

2) A. Hammerstein, *Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.* **30** (1932), стр. 3—10.

3) A. Rosenblatt, *Bulletin Sc. Math.* (2), **57** (1933), стр. 105.

4) M. Fukuhara, *Japanese Journal of Math.* **5** (1928), стр. 351—367.

Тогда задача (1) имеет одно и только одно решение, которое может быть получено с помощью последовательных приближений

$$y_n'' = f(x,\ y_{n-1},\ y_{n-1}'),$$

где каждое y_n выбирается так, чтобы были выполнены краевые условия (1); искомым решением является $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ [1]).

(и) Краевая задача

$$y'' = f(x,\ y), \quad y(0) = y(a) = 0$$

разрешима, если $f(x,\ y)$ непрерывна в области $0 \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < y < +\infty$ и если для двух чисел $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0$ выполнены неравенства [2])

$$\int\limits_0^y f(x,\ t)\,dt \geqslant -c_1 y^2 - c_0, \quad 0 < a < \frac{\pi}{\sqrt{2c_1}}.$$

(к) Краевая задача

$$y'' + yf(y'^2) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

разрешима, если выполнены следующие условия: при $z \geqslant 0$ функция $f(z)$ непрерывна, имеет положительную нижнюю грань, монотонно возрастает при возрастании z, в окрестности каждой точки удовлетворяет условию Липшица и существуют такие числа $0 < C_1 < C_2$, $0 < \sigma < 1/2$, что для всех достаточно больших z выполнены неравенства $C_1 z^\sigma < f(z) < C_2 z^\sigma$ [3]).

(л) Краевая задача

$$\frac{d}{dx}[f(x,\ y)\,y'] = g(x,\ y), \qquad y(a) = A, \qquad y(b) = B$$

[или $g(a,\ y(a))\,y'(a) = A$, $y(b) = B$] имеет [4]) одно и только одно решение, если выполнены следующие условия.

При $a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ f и g непрерывны, f имеет положительную нижнюю грань и

$$f(x,\ y_2) \geqslant f(x,\ y_1) \quad \text{при} \quad |y_2| \geqslant |y_1|,$$

$$\left|\frac{1}{f(x,\ y_2)} - \frac{1}{f(x\ \ y_1)}\right| \leqslant M\,|y_2 - y_1|,$$

---

[1]) См. F. Lettenmeyer, *Deutsche Math.* 7 (1942), стр. 56—74.

[2]) A. Hammerstein *Acta Math.* **54** (1930), стр. 120; H. O. Hirschfeld, *Proceedings Cambridge* **32** (1936), стр. 86—95; S. Cinquini, *Bolletino Unione Math. Italiana* **17** (1938), стр. 99—105.

[3]) A. Hammerstein, *Journal f. Math.* **168** (1932), стр. 37—43. Указанные предположения выполнены, например, для уравнения

$$y'' + c^2 y \sqrt[3]{y'^2 + 1} = 0.$$

[4]) T. H. Gronwall, *Annals of Math.* (2), **28** (1927), стр. 355—364.

где M не зависит от x и от y,

$$g(x,\ 0)=0,\quad g(x,\ y_2)>g(x,\ y_1)\quad \text{при}\quad y_2>y_1,$$

и g в каждой ограниченной области удовлетворяет по y условию Липшица.

10.2. Краевые задачи для полуограниченного интервала.

(а) Краевая задача

$$y''=f(x,\ y)\,g(x),\quad y(0)=y_0>0,\quad y(x)\to 0\quad \text{при}\quad x\to\infty$$

имеет одно и только одно решение, если выполнены следующие условия.

При $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ функция f непрерывна, монотонно возрастает при возрастании y, удовлетворяет по y условию Липшица, при каждом фиксированном $y>0$ имеет положительную нижнюю грань и $f(x,\ 0)=0$ для всех $x\geqslant 0$. При $x>0$ функция $g(x)$ непрерывна, положительна и интегрируема на каждом конечном интервале $0<x<a$, однако $\int\limits_0^\infty g(x)\,dx$ расходится [1]).

(б) Уравнение

$$y''=f(x,\ y,\ y') \tag{2}$$

имеет при каждом $y_0>0$ по крайней мере одно решение, удовлетворяющее начальному условию $y(a)=y_0$ и существующее для всех $x\geqslant a$, причем каждая такая интегральная кривая имеет горизонтальную асимптоту, если выполнены следующие условия.

При $a<x<\infty$, $a\leqslant y\leqslant\beta$ $(\beta>y_0)$, $-\infty<y'<+\infty$ f непрерывна и неотрицательна, $f(x,a,0)=0$ ($y=\alpha$ является, следовательно, решением уравнения (2)) и $f(x,\alpha,y')$ — монотонная функция от y'. Если, кроме того, f монотонно возрастает при возрастании x, то существует одно и только одно решение. Если же, кроме того, из существования интеграла

$$\int\limits_a^\infty f(x,\ y(x),\ y'(x))\,dx$$

для каждой функции $y(x)$, имеющей при $x\geqslant a$ отрицательную производную, следует, что

$$\lim_{x\to\infty} y(x)=\alpha,$$

[1]) A. Mambriani, *Atti Accad. Lincei* (6), **9** (1929), стр. 620—622. Теорема применима к уравнению $y''=c^2y^px^q$ $(p\geqslant 1,\ q>-1)$, в частности, следовательно, к уравнению Томаса — Ферми $\sqrt{x}y''=y^3$; см. ч. III, 6.100.

то через точку (a, y_0) проходит интегральная кривая, имеющая асимптоту $y=\alpha$ [1]).

(в) Если дано уравнение

$$\frac{d}{dx}[f(x, y)y'] = g(x, y)$$

с краевыми условиями

$$y(a) = A, \quad y(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty$$

или

$$g(a, y(a))\,y'(a) = A, \quad y(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty,$$

то эта задача имеет решение, и притом единственное, если выполнены условия, указанные в п. 10.1 (л), и, кроме того, если для каждого $c \neq 0$

$$\int_a^\infty g(x, c)\,dx \text{ расходится.}$$

10.3. Задачи о собственных значениях

(а) $$\frac{d}{dx}(F_{y'} - F_y) + 2k\lambda y^{2k-1} = 0, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

причем $F(x, y, y')$ — некоторая $2k+2$ раза непрерывно дифференцируемая функция, однородная степени $2k$ относительно y, y'; при $k=1$ пусть $F_{y'y'}>0$, а при $k>1$ пусть $F_{y'y'} \geqslant 0$, причем $F_{y'y'}=0$ только при $y=y'=0$. Тогда штурмовская теория собственных значений (п. 9.2 (a_1)) может быть в большой мере перенесена на данную задачу [2]).

(б) [3]) $$y'' + \lambda y f(x, y, y') = 0$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{3}$$

Пусть выполнены следующие предположения: функция f при

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad -\infty < y, \ y' < +\infty$$

---

[1]) G. Scorza Dragoni, *Giornale Math.* **69** (1931), стр. 77—112, *Atti Accad. Lincei* (6), **9** (1929), стр. 623—625. Теорема применима к уравнениям, указанным в сноске [1]) на предыдущей странице.

[2]) Л. Люстерник, *Матем. сборник* **44** (1937), стр. 1143—1166; **46** (1938), стр. 227—232.

[3]) См. A. Hammerstein, *Journal f. Math.* **168** (1932), стр. 37—43. Систему $y' = f(x, y, z, \lambda)z$, $z' = g(x, y, z, \lambda)y$ с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$ или $y(a) = z(b) = 0$ рассматривал W. M. Whyburn, *Transactions Americ. Math. Soc.* **30** (1928), стр. 848—854.

непрерывна и имеет положительную нижнюю грань; для каждого λ и каждого α данное уравнение имеет одно и только одно решение, определенное на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y(\xi)=0, \quad y'(\xi)=\alpha \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1).$$

Тогда для каждого фиксированного α существует бесконечно много положительных собственных значений $\lambda=\lambda_n(\alpha)$, причем соответствующие собственные функции, помимо краевых условий (3), удовлетворяют еще и условию $y'(0)=\alpha$. Эти собственные значения зависят, вообще говоря, от α.

(в) Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y''+\lambda y f\left(y'^2\right)=0$$

с краевыми условиями (3); функция $f(z)$ при $z \geqslant 0$ предполагается непрерывной, имеющей положительную нижнюю грань и удовлетворяющей в каждом конечном интервале условию Липшица. Тогда для каждого постоянного α существует бесконечно много собственных функций, удовлетворяющих, кроме краевых условий (3), еще и условию $y'(1)=\alpha$; среди этих собственных функций существуют функции, имеющие $0, 1, 2, \ldots$ нулей на открытом интервале $0<x<1$.

Под эту теорему подходит, например, уравнение

$$y''+\lambda\left(y'^2+1\right)^{3/2}=0,$$

встречающееся в теории продольного изгиба[1]).

§ 11. Краевые задачи и задачи о собственных значениях третьего — восьмого порядков

11.1. Линейные задачи о собственных значениях третьего порядка. Так как не существует самосопряженных линейных дифференциальных форм третьего порядка (см. ч. I, § 26), то не существует и самосопряженных задач о собственных значениях третьего порядка. Поэтому из общих теорем гл. I здесь неприменимы все те, которые относятся к самосопряженным задачам о собственных значениях[2]).

Таким образом, из общих теорем, кроме содержащихся в § 1, остаются, по существу, лишь теоремы о регулярных задачах

---

[1]) См. сноску 3 на стр. 282.

[2]) Для систем дифференциальных уравнений (см. § 6) понятие самосопряженной задачи о собственных значениях несколько шире, чем для одного уравнения, поэтому даже задача о собственных значениях третьего порядка, если ее записать как задачу для системы уравнений, может быть самосопряженной.

о собственных значениях. К этому можно добавить исследование отдельных нерегулярных задач, а также таких задач, в которых краевые условия задаются в трех точках.

Дифференциальное уравнение

$$y''' + \lambda y = 0$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0$$

рассматривалось в следующих работах: J. W. Hopkins, *Transactions Americ. Math. Soc.* **20** (1919), стр. 245—259; D. Jackson, *Proceedings Americ. Acad.* **51** (1916), стр. 383—417; *Bulletin Americ. Math. Soc.* **28** (1922), стр. 37—41; L. E. Ward, там же, **33** (1927), стр. 232—234. То же самое дифференциальное уравнение с общими нерегулярными краевыми условиями рассматривал L. E. Ward, *Transactions Americ. Math. Soc.* **29** (1927), стр. 716—745. В работе, опубликованной там же, **32** (1930), стр. 544—557, рассмотрено это уравнение с краевыми условиями

$$y(\pi) = y\left(e^{\pi i/3}\pi\right) = y\left(e^{-\pi i/3}\pi\right) = 0.$$

Уравнение более общего вида

$$y''' + [\lambda + f(x)]\, y = 0$$

с нерегулярными краевыми условиями рассмотрено в работах: L. E. Ward, *Transactions Americ. Math. Soc.* **34** (1932), стр. 417—434; *Americ. Journ. Math.* **57** (1935), стр. 345—362.

Сансоне[1]) рассматривал задачи о собственных значениях, где даны «краевые условия»

$$y(a) = y(b) = y(c) = 0 \qquad (a < b < c)$$

и одно из уравнений

$$y''' + Ay'' + \lambda(By' + Cy) = 0 \qquad (|B| + |C| > 0), \tag{1}$$

$$[f(x)\, y']'' + \lambda h(x)\, y = 0, \tag{2}$$

$$[f(x)\, y']'' + \lambda\,[(g(x)\, y)' + h(x)\, y] = 0. \tag{3}$$

В случае (1) существует бесконечно много собственных значений. Если в случае (2) $f > 0$ и дважды непрерывно дифференцируема, $h \not\equiv 0$, непрерывна и выражение $(x-b)h(x)$ не меняет знака, то собственные значения существуют; то же имеет место и в случае (3), если там, кроме того, $(x-b)g(x)h(x) \geqslant 0$.

11.2. Линейные задачи о собственных значениях четвертого порядка. Об обозначениях и общих методах решения см. гл. I. Чаще всего рассматриваемая задача о собственных значениях относится к самосопряженному уравнению

$$\text{(a)} \qquad (f_2 y'')'' + (f_1 y')' + f_0 y = \lambda g y$$

---

[1]) G. Sansone, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **62** (1929), стр. 683—692; *Rendiconti Sem. Mat. Padova* **1** (1930), стр. 164—183; **3** (1932), стр. 128—140; *Bolletino Unione Mat. Italiana* **10** (1931), стр. 277—282.

с самосопряженными краевыми условиями; при этом функция $f_\nu = f_\nu(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ имеет ν непрерывных производных, $f_2 \neq 0$ и $g = g(x) \not\equiv 0$ и непрерывна. В первую очередь следует рассмотреть, в частности, случай условий типа Штурма:

$$\alpha_1 y_a + \beta_1 y'_a + \gamma_1 f_{2a} y''_a + \delta_1 \left[(f_2 y'')'_a + f_{1a} y'_a\right] = 0,$$

$$\alpha_2 y_a + \beta_2 y'_a + \gamma_2 f_{2a} y''_a + \delta_2 \left[(f_2 y'')'_a + f_{1a} y'_a\right] = 0,$$

$$\alpha_3 y_b + \beta_3 y'_b + \gamma_3 f_{2b} y''_b + \delta_3 \left[(f_2 y'')'_b + f_{1b} y'_b\right] = 0,$$

$$\alpha_4 y_b + \beta_4 y'_b + \gamma_4 f_{2b} y''_b + \delta_4 \left[(f_2 y'')'_b + f_{1b} y'_b\right] = 0;$$

при этом

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_3 & \gamma_3 \\ \beta_4 & \gamma_4 \end{vmatrix}$$

и индекс a, соответственно b, означает, что следует положить $x = a$, соответственно $x = b$.

Если краевые условия имеют вид

$$y(a) = y'(a) = y(b) = y'(b) = 0,$$

то собственные значения имеют кратность не больше двух, так как, как легко видеть, существует не больше двух линейно независимых решений уравнения (a), для которых $y(a) = y'(a) = 0$ [1]).

По поводу различных методов исследования необходимо указать работы: S. A. Janczewsky, *Annals of Math.* (2), **29** (1928), стр. 521—542; (2), **31** (1930), стр. 663—680; W. M. Whyburn, *Americ. Journ. Math.* **52** (1930), стр. 171—196 (осцилляционные теоремы); A. Davidoglou, *Annales École Norm.* (3), **17** (1900), стр. 359—444; (3), **22** (1905), стр. 539—565 (метод последовательных приближений); E. Bounitzky, *Journal de Math.* (6), **5** (1909), стр. 65—125 (функция Грина и интегральные уравнения); H. Boerner, *Math. Zeitschrift* **34** (1932), стр. 293—319 (бесконечное множество переменных). Девис (H. T. Davis, *Americ. Journ. Math.* **47** (1925), стр. 101—120) исследовал вопрос о том, когда две задачи типа Штурма имеют одинаковые собственные значения и когда собственные значения одной из задач чередуются с собственными значениями другой; далее, с помощью теорем Биркгофа им были получены также асимптотические выражения для собственных значений.

Одна задача о собственных значениях, относящаяся к более специальному уравнению

$$(fy'')'' + gy'' + (ax+b)fy' + \lambda fy = 0,$$

была рассмотрена Зерензеном (Sörensen, *Ingenieur-Archiv* **8** (1937), стр. 381—396).

---

[1]) G. Cimmino, *Math. Zeitschrift* **32** (1930), стр. 30.

(б) *Более общие типы задач о собственных значениях.* Киммино[1]) и Бёрнер[2]) изучали различными методами задачу

$$(f_2y'')''+[(f_1+\lambda g_1)y']'+(f_0+\lambda g_0)y=0,$$
$$y(a)=y'(a)=y(b)=y'(b)=0,$$

в которую, следовательно, параметр λ входит несколько более общим образом. О том же уравнении с произвольными самосопряженными краевыми условиями см. § 4. При этом в краевые условия параметр λ не должен входить. Случаи, в которых это условие не выполнéно, рассмотрены в работах:

W. Sternberg, *Math. Zeitschrift* 3 (1919), стр. 191—208:

$$y^{(4)}+(fy')'+(g-\lambda)y=0$$
$$y(0)=y'(0)=y'(1)=y'''(1)+(\alpha+\lambda\beta)y(1)=0,$$

где $\alpha\geqslant 0$ и β — заданные числа. Рассматриваются вопросы: существование собственных значений, оценки собственных значений и собственных функций, теоремы о разложении.

H. Boerner, *Math. Zeitschrift* **34** (1932), стр. 293—319:

$$(fy'')''-f_0y+\lambda[(g_1y')'+g_0y]=0,$$

с краевыми условиями

$$y(a)=y(b)=0,\quad [fy''+\lambda\alpha y]_{x=a}=0,\quad [fy''-\lambda\beta y]_{x=b}=0$$

или

$$y'(a)=y'(b)=0,\quad [(fy'')'-\lambda\alpha y]_{x=a}=0,\quad [(fy'')'+\lambda\beta y]_{x=b}=0.$$

Рассматриваются вопросы: существование собственных значений, теоремы о разложении.

(в) Для тех краевых задач, в которых дополнительные условия относятся более чем к двум точкам, укажем следующий результат[3]): пусть $a_0,\ldots,a_3$ — действительные числа, $|a_0|+|a_1|+|a_2|>0$, $x_1<x_2<x_3<x_4$. Тогда задача

$$y^{(4)}+a_3y'''+\lambda(a_2y''+a_1y'+a_0y)=0,$$
$$y(x_1)=y(x_2)=y(x_3)=y(x_4)=0$$

имеет бесконечно много собственных значений.

11.3. Линейные задачи для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка[4]). Пусть дана самосопряженная система

$$y''(x)+\lambda(A_{1,1}y+A_{1,2}z)+0,\quad z''(x)+\lambda(A_{2,1}y+A_{2,2}z)=0$$

---

[1]) G. Cimmino, *Math. Zeitschrift* **32** (1930), стр. 4—58.

[2]) H. Boerner, *Math. Zeitschrift* **34** (1932), стр. 293—319.

[3]) G. Sansone, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **64** (1931), стр. 724—736.

[4]) Ср. также § 6 и W. M. Whyburn, *Americ. Journ. Math.* **52** (1930), стр. 171—196.

с краевыми условиями

$$y(a)=y(b)=z(a)=z(b)=0,$$

причем $A_{p,q}=A_{p,q}(x)$ непрерывны на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и удовлетворяют условиям $A_{1,2}=A_{2,1}$, $A_{1,1}>0$, $A_{1,1}A_{2,2}>A_{1,2}^2$. Тогда существует бесконечно много собственных значений; их можно найти следующим образом: положим

$$I(u,\ v)=\int_a^b\left(u'^2+v'^2\right)dx,$$

$$K(u,\ v)=\int_a^b\left(A_{1,1}u^2+2A_{1,2}uv+A_{2,2}v^2\right)dx,$$

$$L(y,\ z,\ u,\ v)=\int_a^b\left(A_{1,1}yu+A_{1,2}yv+A_{2,1}zu+A_{2,2}zv\right)dx;$$

тогда

$$\lambda_1=\min\frac{I(u,\ v)}{K(u,\ v)}$$

есть наименьшее собственное значение, если минимум берется по всем дважды непрерывно дифференцируемым функциям, удовлетворяющим краевым условиям. Если $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1}$ — первые $p-1$ собственных значений и $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ $(\nu=1,\ \ldots,\ p-1)$ — пары собственных функций, соответствующих этим собственным значениям и удовлетворяющие соотношениям ортогональности

$$L(y_\mu,\ z_\mu,\ y_\nu,\ z_\nu)=0\quad\text{при}\quad\mu\neq\nu,$$

то

$$\lambda_p=\min\frac{I(u,\ v)}{K(u,\ v)}$$

есть следующее собственное значение, если минимум берется по всем дважды непрерывно дифференцируемым функциям $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющим краевым условиям и уравнению

$$L(y_\nu,\ z_\nu,\ u,\ v)=0\qquad(\nu=1,\ \ldots,\ p-1).$$

О краевых задачах, которые вместо одного параметра λ содержат несколько параметров, см. R. G D. Richardson, *Transactions Americ. Math. Soc.* **13** (1912), стр. 22—34; *Math. Annalen* **71** (1912), стр. 214—232; **73** (1913), стр. 289—304.

11.4. Нелинейные краевые задачи четвертого порядка. Краевая задача

$$y^{(4)}=f(x,\ y,\ y',\ y'',\ y'''),$$

$$y(a)=\alpha,\quad y'(a)=\beta,\quad y(b)=\gamma,\quad y'(b)=\delta$$

разрешима, если при

$$a \leqslant x \leqslant b; \quad -\infty < y,\ y',\ y'',\ y''' < +\infty$$

функция f непрерывна и ограничена [1]).

Система

$$y_p'' = f_p(x,\ y_1,\ y_1',\ y_2,\ y_2') \quad (p = 1,\ 2)$$

с краевыми условиями

$$y_p(a) = \alpha_p, \quad y_p(b) = \beta_p \quad (p = 1,\ 2)$$

разрешима, если при $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < y_p,\ y_p' < +\infty$ функции f_p непрерывны и ограничены. Если выполнение этих условий предполагать лишь в некоторой части указанной области, то соответствующие формулировки усложняются [2]).

Никлиборк [3]) следующим образом сформулировал баллистическую задачу о том, попадает ли в данную цель снаряд, имеющий заданную начальную скорость v, как «краевую задачу». Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$x''(t) = f(t,\ x,\ y,\ x',\ y'), \quad y''(t) = g(t,\ x,\ y,\ x',\ y').$$

Требуется найти решение $x(t)$, $y(t)$, которое при заданных $v > 0$, a, b и при соответствующим образом подобранном τ удовлетворяет условиям:

$$x(0) = y(0) = 0, \quad x'^2(0) + y'^2(0) = v^2,$$
$$x(\tau) = a, \quad y(\tau) = b.$$

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что эта задача при соответствующих предположениях разрешима.

11.5. Задачи о собственных значениях более высокого порядка. Такие задачи встречаются при исследовании собственных колебаний окружности или цилиндрической поверхности; в частности, Федергофер [4]) рассматривал задачи, приводящиеся к уравнениям вида

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + (1-a)\,y'' + \lambda a y = 0,$$

$$y^{(6)} + (\lambda + \nu)\,y^{(4)} + [\lambda(\nu - a) + a(1 - \sigma^2)]\,y'' + a\lambda(1 - \lambda)\,y = 0$$

---

[1]) G. Zwirner, *Rendiconti Sem. Mat. Padova* **9** (1938), стр. 150—155.

[2]) G. Scorza Dragoni, *Bolletino Unione Mat. Italiana* **14** (1935), стр. 225—230.

[3]) W. Nicliborc, *Berichte Leipzig* **82** (1930), стр. 227—242.

[4]) K. Federhofer, *Akad Wien* **145** (1936), стр. 29—50, 681—688; *Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen*, Hannover (1910), стр. 465; *Ingenieur-Archiv* **6** (1935), стр. 223—225.

и

$$y^{(6)} + (2 + a\lambda)\, y^{(4)} + (1 - \lambda + a\lambda)\, y'' + \lambda\, (1 + a - a\lambda)\, y = 0.$$

У Уолткинга[1]) встречаются уравнения

$$y^{(6)} + 2y^{(4)} + (1 - \lambda)\, y'' + \lambda y = 0$$

и

$$y^{(6)} + (2 + a\lambda)\, y^{(4)} + (1 - \lambda - a\lambda)\, y'' + \lambda\, (1 - a\lambda)\, y = 0.$$

При вычислении критической скорости встречается[2]) система

$$EIz^{(4)} + Ty''' + Fz'' - P\lambda z = 0,$$
$$EIy^{(4)} - Tz''' + Fy'' - P\lambda y = 0$$

с краевыми условиями

$$y\,(0) = y\,(l) = y''\,(0) = y''\,(l) = z\,(0) = z\,(l) = z''\,(0) = z''\,(l) = 0.$$

---

[1]) F. W. Waltking, *Ingenieur-Archiv* **5** (1934), стр. 429—449; **6** (1935), стр. 226—228.

[2]) Maria Nasta, *Atti Accad. Lincei* (6), **12** (1930), стр. 209—216.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

I. Главы I—VII посвящены отдельным дифференциальным уравнениям. На протяжении этих глав независимое переменное обозначается через x, а искомая функция — через y.

II. В рациональных выражениях мы освобождаемся от знаменателя. Например, уравнения

$$y'^2 + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) y' + 1 = 0, \tag{1}$$

$$y' = \frac{Axy + By^2 + \alpha x + \beta y + \gamma}{Ax^2 + Bxy + ax + by + c} \text{ (уравнение Якоби)}, \tag{2}$$

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \text{ (уравнение Бесселя)}, \tag{3}$$

$$y'' = \left(\frac{m^2 - \frac{1}{4}}{x^2} - \frac{k}{x} + \frac{1}{4}\right) y \tag{4}$$

(вырожденное гипергеометрическое уравнение)

записываются в виде:

$$xyy'^2 + (y^2 + x^2)\, y' + xy = 0, \tag{1a}$$

$$(Bxy + Ax^2 + ax + by + c)\, y' = By^2 + Axy + \alpha x + \beta y + \gamma, \tag{2a}$$

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\, y = 0, \tag{3a}$$

$$4x^2y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)\, y. \tag{4a}$$

III. Принцип, по которому располагаются члены внутри уравнения, в общих чертах легко усмотреть без особых объяснений, просмотрев собранные ниже уравнения. В каждом уравнении сначала выписываются члены, содержащие старшую производную, затем члены со следующей по порядку производной и т. д. Внутри каждой из таких групп принимается во внимание «вес» или «ранг» этих членов, и они располагаются по убывающему рангу.

Большинство содержащихся ниже дифференциальных уравнений состоит (как, например, уравнение $x^3y'^2 + x^2yy' + a = 0$) лишь из членов вида

$$ax^{m_0}y^{m_1}y'^{m_2} \ldots y^{(k)^{m_{k+1}}} \qquad (m_\nu \geqslant 0 \text{ и целое});$$

члену такого вида приписывается ранг ниже, чем члену

$$bx^{n_0}y^{n_1}y'^{n_2}\ldots y^{(k)^{n_{k+1}}} \qquad (n_\nu \geqslant 0 \text{ и целое}),$$

если выполнено одно из следующих условий [1]):

(а) если m_r, n_r — последние из несовпадающих показателей степени то $m_r < n_r$;

(б) [2]) Если все $m_\nu = n_\nu$, то

a, b целые и $|a| < |b|$ или

a, b целые, $-a = b > 0$, или

a целое, b не целое или произвольное (оставляемое неопределенным) число.

Если же члены не имеют указанной выше простой структуры, то для отдельных членов каждой группы, содержащих одну и ту же старшую производную $y^{(k)}$, устанавливается следующая возрастающая шкала рангов:

u^ν с целочисленным ν,

u^ν с произвольным (неопределенным) ν,

u^ν с некоторым определенным, нецелочисленным ν,

e^u, $\ln u$, гиперболические функции от u, тригонометрические функции от u, функции произвольного (неопределенного) вида.

Если два члена содержат старшую производную одинаковым образом, то их ранг устанавливается, исходя из тех же принципов, по следующей производной.

Например, в выражении $y'' \operatorname{tg} y' + f(x)\, y'' + y'^2 + xe^y + x$ члены расположены в порядке убывания их рангов.

Эти принципы могут на первый взгляд показаться несколько сложными, однако если просмотреть собранные нами примеры, то к ним легко привыкнуть, и тогда они будут казаться довольно простыми.

IV. Отдельные уравнения располагаются в порядке возрастания ранга первого члена или, если эти ранги совпадают, по возрастанию рангов следующих членов.

Расположение уравнений определяется этим способом все же не вполне однозначно, однако остающиеся возможности произвола настолько незначительны, что они не играют никакой роли, тем более что это касается лишь расположенных по соседству уравнений.

V. Если нужно найти то или иное уравнение, то полезно это уравнение привести к описанному в I—III виду и по возможности объединить входящие в него постоянные.

Примеры. Уравнение Клеро вида

$$y = xy' + y'(1 - y')$$

следует, согласно сказанному, записать в форме

$$y'^2 - (x+1)\, y' + y = 0,$$

а уравнение Клеро вида

$$y = x'y + \sqrt{1 + y'^2}$$

---

[1]) Приводимая ниже классификация не вполне исчерпывающая, и попоэтому ранг определяется не вполне однозначно, однако для наших целей она достаточна.

[2]) Для установления порядка членов внутри одного уравнения пункт (б) не используется, так как члены, отличающиеся лишь числовым коэффициентом, объединяются в один. Однако пункт (б) нужен для установления порядка следования уравнений друг за другом. См. об этом IV.

в форме
$$\sqrt{y'^2+1}+xy'-y=0.$$

Уравнение переменного тока
$$\frac{dI}{dt}+\frac{W}{L}I=\frac{E}{L}\sin\omega t,$$
если в нем t, I заменить через x, y и переобозначить входящие в него постоянные, примет вид
$$y'+ay=b\sin cx.$$

Рассмотрим уравнение
$$\frac{d\left[\lambda(T)\,q\,\dfrac{dT}{dx}\right]}{dx}=-\frac{i^2w(T)}{q}+2\sqrt{\pi q}\,s(T)$$
для коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ излучающей проволоки, нагреваемой электрическим током, где $T=T(x)$ есть температура в точке x, q — поперечное сечение проволоки, i — сила тока, $w(T)$ — удельное сопротивление, $s(T)$ — излучаемая энергия на единицу площади. Если q постоянно, то это уравнение записывается в виде
$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(T)\,T'(x)\right]=g(T),$$
где $g(T)$ — заданная функция; если вместо λ, T ввести обозначения f, y, то получим $[f(y)\,y']'=g(y)$, т. е.
$$f(y)\,y''+f'(y)\,y'^2=g(y); \tag{5}$$
это уравнение находится под номером 6.224.

Если учитывать указанный порядок записи, то можно быстро установить, имеется ли в нашем справочнике данное уравнение, и если да, то на каком именно месте. При этом нужно еще учесть, что уравнение может содержаться в более общем виде. Например, в справочнике нет уравнения
$$2y'^2+3y'-y=0,$$
но есть уравнения
$$ay'^2+by'-y=0 \quad \text{и} \quad y'^2+ay'+by=0,$$
содержащие вышеуказанное как частный случай. Точно так же в справочнике нет уравнения
$$y^3y''+3y^2y'^2=e^y,$$
но есть уравнение (5), которое опять-таки содержит данное как частный случай. Далее следует учитывать, что вид дифференциального уравнения может существенно измениться, если поменять ролями зависимую и независимую переменные. Например, если в уравнении
$$[xf(y)-g(y)]\,y'+1=0$$
принять y за независимую переменную, то оно переходит в уравнение
$$xf(y)-g(y)+x'(y)=0;$$
наконец, если ввести обозначения x, y вместо y, x, то получим линейное уравнение, имеющееся под номером 1.11.

VI. Все решения проверены. Тем не менее, если решение того или иного уравнения используется для какого-либо важного расчета, то его следует снова проверить, так как в такого рода справочнике трудно совершенно избежать описок и опечаток, а также и ошибок по существу. Для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, при такой проверке в первую очередь следует посмотреть, не упущены ли из виду какие-либо решения (особые решения!). Проверка может производиться или путем подстановки в уравнение указываемого решения, или путем нахождения этого решения с помощью кратко излагаемых нами в отдельных случаях методов решения, и использования в случае необходимости цитируемой литературы. В этой литературе содержатся во многих случаях дальнейшие подробности, касающиеся рассматриваемых уравнений.

[VII. Подробное объяснение методов решения тех или иных уравнений можно найти в ч. I или в общеизвестных руководствах:

И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1970;

Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1970;

В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 1958;

Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения 1939;

Н. П. Еругин, Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 1970;

А. Анго, Математика для электро- и радиоинженеров, 1967;

Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, 1951;

Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, 1953; т. II, 1954;

Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, 1954;

Е. Уиттекер и Г. Ватсон, Курс современного анализа, т. I, 1962; т. II, 1963;

Е. Янке, Ф. Эмде и Ф. Лёш, Специальные функции (формулы, графики, таблицы), 1968;

Г. Ватсон, Теория бесселевых функций, т. I, 1949;

Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд. ЛГУ, 1963.

Полезно упомянуть также книгу G. M. Murphy, Ordinary Differential Equations and their solutions, New York, 1960, содержащую как описание методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, так и таблицы таких уравнений с решениями.

При составлении приводимого ниже справочного отдела автором были широко использованы следующие книги:

A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl Braunschweig, 1912; A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Bd. 2—4, Cambridge, 1900—1902; E. Fick, Aufgabensammlung über Differentialgleichungen, München und Berlin, 1930; Ph. Frank, R. v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. 1, 2, Aufl. Braunschweig, 1930 (см. также Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937); G. Julia, Exercices d' Analyse, t. 3, Paris, 1933; E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930; M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935 и многие другие зарубежные издания, довольно старые и малодоступные. Ссылки на эти книги, как правило, опускались.

В третью часть автором были внесены отдельные исправления и дополнения по предложению И. Зборника (Швейцария). — *Прим. ред.*]

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнения с алгебраическими иррациональностями: 1, 57–74, 112–116, 190–192, 209, 266, 332–340, 398, 511, 512, 516, 517, 550, 555–562.

Уравнения с показательными функциями: 2, 4, 5, 7, 37, 75, 88, 117, 131, 134, 206, 211, 259, 341, 342, 387, 459, 463.

Уравнения с логарифмическими функциями: 9, 91, 93, 108, 109, 118–120, 132, 159, 193, 194, 343–346, 357, 373, 392, 563–565.

Уравнения с гиперболическими функциями: 347–349.

Уравнения с тригонометрическими функциями: 3, 5–9, 21, 22, 32, 76–83, 90, 92, 93, 121–125, 152, 154, 195–200, 202, 208, 267, 278, 314, 338, 350–364, 393, 460, 513, 514, 539, 566–569.

Уравнение, содержащее $\operatorname{arctg} x$: 570.

Уравнение с эллиптическими функциями: 49.

Уравнения с произвольными функциями: 10, 11, 16, 33–35, 50, 51, 53–56, 79, 80, 84–87, 110, 126–128, 201, 202, 212, 219, 230, 268, 269, 365–367, 370, 394, 395, 515–517, 551, 552, 561, 571–576.

1—367. Дифференциальные уравнения первой степени относительно y'

1.1. $y' = (a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)^{-1/2}$.

Решение получается непосредственным интегрированием, что приводит, вообще говоря, к эллиптическому интегралу. Общее решение имеет вид

$$R(\wp(y)) = C,$$

где R — рациональная функция и $\wp(y)$ — функция Вейерштрасса с соответствующим образом подобранной парой периодов. [По поводу функции Вейерштрасса см. 2.26. — *Прим. ред.*]

1.2. $y' + ay = ce^{bx}$; линейное уравнение.

$$y = \begin{cases} \dfrac{c}{a+b}\, e^{bx} + Ce^{-ax} & \text{при} \quad a+b \neq 0, \\ cxe^{bx} + Ce^{-ax} & \text{при} \quad a+b = 0. \end{cases}$$

1.3. $y' + ay = b \sin cx$; линейное уравнение.

Как уравнение переменного тока оно встречается обычно в виде

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E_0}{L} \sin \omega t,$$

где $I(t)$ — сила тока в цепи с электродвижущей силой $E_0 \sin \omega t$, омическим сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L. Получающееся, согласно ч. I, п. 4.3, решение может быть с помощью введения «сдвига фаз» γ, где $\operatorname{tg}\gamma = \omega L/R$ ($|\gamma| < \pi/2$), и интегрирования по частям приведено к виду

$$I = e^{-\frac{R}{L}t}\left(I_0 + \frac{\omega L E_0}{R^2+\omega^2L^2}\right) + \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \gamma);$$

здесь I_0 обозначает силу тока в момент времени $t = 0$. При $t \to \infty$

$$I(t) \sim \frac{E_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t - \gamma).$$

[Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953. — *Прим. ред.*]

1.4. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; линейное уравнение.

$$y = e^{-x^2}\left({}^1/_2 x^2 + C\right).$$

1.5. $y' + y\cos x = e^{2x}$; линейное уравнение.

$$y = e^{-\sin x}\left(C + \int e^{2x+\sin x}\,dx\right).$$

1.6. $y' + y\cos x = {}^1/_2 \sin 2x$; линейное уравнение.

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}.$$

1.7. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$; линейное уравнение.

$$y = (x + C)\,e^{-\sin x}.$$

1.8. $y' + y\operatorname{tg} x = \sin 2x$; линейное уравнение.

$$y = -2\cos^2 x + C\cos x.$$

1.9. $y' = (\sin \ln x + \cos \ln x + a)\,y$;
уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = C\exp\{x(\sin \ln x + a)\}.$$

1.10. $y' + f'(x)\,y = f(x)\,f'(x)$; линейное уравнение.

$$y = f(x) - 1 + Ce^{-f(x)}.$$

1.11. $y' + f(x)\,y = g(x)$; линейное уравнение (см. ч. I, п. 4.3).

1.12. $y' + y^2 = 1$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = \pm 1, \quad \operatorname{th}(x + C), \quad \operatorname{cth}(x + C).$$

1.13. $y' + y^2 = ax + b$; уравнение Риккати.
Если (см. ч. I, п. 4.9) подстановкой $u' = yu$ привести уравнение к линейному, то получим $u'' = (ax + b)\,u$, т. е. 2.10.

1.14. $y' + y^2 + ax^m = 0$; уравнение Риккати.
Подстановка $u'(x) = yu$ дает $u'' + ax^m u = 0$, т. е. 2.14.

1.15. $y' + y^2 - 2x^2y + x^4 - 2x - 1 = 0$.
Полагая $u(x) = y - x^2$, получаем $u' + u^2 - 1 = 0$, т. е. 1.12.

1.16. $y' + y^2 + (xy - 1)\,f(x) = 0$; уравнение Риккати.
$y = \dfrac{1}{x}$ является решением. Подстановка $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{u(x)}$ приводит к линейному уравнению $u' - \left(xf + \dfrac{2}{x}\right)u = 1$.

1.17. $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = \frac{C_1 - 4C_2 e^{5x}}{C_1 + C_2 e^{5x}}.$$

1.18. $y' - y^2 - xy - x + 1 = 0$; уравнение Риккати.

$y = -1$ есть решение. Подстановка $y = -1 + \dfrac{1}{u(x)}$ приводит к линейному уравнению $u' + (x-2)u + 1 = 0$.

1.19. $y' = (y + x)^2$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = y + x$, получаем $u' = u^2 + 1$; следовательно, $u = \operatorname{tg}(x + C)$.

1.20. $y' - y^2 + (x^2 + 1)y - 2x = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = y - x^2 - 1$, получаем уравнение Бернулли

$$u' - (x^2 + 1)u = u^2.$$

1.21. $y' - y^2 + y \sin x - \cos x = 0$; уравнение Риккати.
$y = \sin x$ является одним из решений; остальные решения получаются согласно ч. I, п. 4.9.

1.22. $y' - y^2 - y \sin 2x - \cos 2x = 0$; уравнение Риккати.
$y = \operatorname{tg} x$ является одним из решений; остальные решения получаются согласно ч. I, п. 4.9:

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\left(C - \int \frac{e^{-\cos^2 x}}{\cos^2 x}\,dx\right)^{-1}.$$

1.23. $y' + ay^2 = b$; уравнение с разделяющимися переменными.
Это уравнение одновременно является частным случаем специального уравнения Риккати. Интегральная кривая, проходящая через точку (ξ, η), дается уравнениями

$$y = \begin{cases} \eta + b(x - \xi) & \text{при} \quad a = 0, \\[2mm] \dfrac{\eta}{1 + a\eta(x - \xi)} & \text{при} \quad b = 0, \\[2mm] \dfrac{\eta\sqrt{ab} + b \operatorname{th}\sqrt{ab}\,(x - \xi)}{\sqrt{ab} + a\eta \operatorname{th}\sqrt{ab}\,(x - \xi)} & \text{при} \quad ab > 0, \\[2mm] \dfrac{\eta\sqrt{-ab} + b \operatorname{tg}\sqrt{-ab}\,(x - \xi)}{\sqrt{-ab} + a\eta \operatorname{tg}\sqrt{-ab}\,(x - \xi)} & \text{при} \quad ab < 0. \end{cases}$$

1.24. $y' + ay^2 = bx^{\alpha}$; специальное уравнение Риккати; см. ч. I, п. 4.8.

1.25. $y' + ay^2 = bx^{2\alpha} + cx^{\alpha - 1}$; уравнение Риккати.
При $\alpha = -1$ получаем 1.24. При $\alpha \neq -1$ подстановка

$$y = \beta x^{\alpha}\eta(\xi), \quad \xi = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$

приводит к уравнению типа 1.105:

$$\xi\eta' + \alpha\beta\xi\eta^2 + \frac{\alpha}{\alpha + 1}\eta = \frac{b}{\beta}\xi + \frac{c}{(\alpha + 1)\beta}.$$

1.26. $y' = (Ay - a)(By - b)$; уравнение взаимодействия масс.
Это уравнение принадлежит к типу, указанному в ч. I, п. 4.1. Получаем: если $aB - bA \neq 0$, то

$$y = \frac{C_1 b \exp(aB - bA)x - C_2 a}{C_1 B \exp(aB - bA)x - C_2 A} \qquad (C_1^2 + C_2^2 > 0),$$

если $aB - bA = 0$, $A \neq 0$, то

$$y = \frac{a}{A}, \quad y = \frac{a}{A} - \frac{1}{A(Bx + C)}.$$

1.27. $y' + ay(y - x) = 1$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = y - x$, получим уравнение Бернулли
$$u' + a(xu + u^2) = 0.$$

1.28. $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = x^2 - y$, получаем уравнение Бернулли
$$u' + x^3u = xu^2.$$

1.29. $y' - xy^2 - 3xy = 0$; уравнение Бернулли.
$$y = 3\{C \exp(-3x^2/2) - 1\}^{-1}.$$

1.30. $y' + x^{-a-1}y^2 = x^a$, $x > 0$; уравнение Риккати.
При $a \neq 0$ подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $a\xi = -x^{-a}$ приводит к специальному уравнению Риккати (ч I, п. 4.8)
$$\eta' + \eta^2 = (-a\xi)^{-a-\frac{1}{a}},$$
а подстановка $y(x) = x^{a+1}u'(x)/u(x)$ — к линейному уравнению
$$xu'' + (a+1)u' - u = 0.$$

Ватсон, т. I, стр. 104.

1.31. $y' - ax^n(y^2 + 1) = 0$; уравнение с разделяющимися переменными.
$$y = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\dfrac{a}{n+1}\, x^{n+1} + C\right) & \text{при} \quad n \neq -1, \\ \operatorname{tg}(a \ln Cx) & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$$

1.32. $y' + y^2 \sin x = 2\,\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$; уравнение Риккати.
$$y = \frac{1}{\cos x}, \qquad y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{C - \cos^3 x}.$$

1.33. $y' = \dfrac{f'(x)}{g(x)}\, y^2 - \dfrac{g'(x)}{f(x)}$; уравнение Риккати.
$$y = -\frac{g}{f} + f^{-2}\left(C - \int \frac{f'}{gf^2}\, dx\right)^{-1}.$$

1.34. $y' + f(x)y^2 + g(x)y = 0$; уравнение Бернулли.
$$\frac{1}{y} = E(x) \int \frac{f(x)}{E(x)}\, dx, \quad \text{где} \quad E(x) = e^{\int g\, dx}.$$

1.35. $y' + f(x)(y^2 + 2ay + b) = 0$;
уравнение с разделяющимися переменными.
$$y + a = \begin{cases} \dfrac{1}{F} & \text{при} \quad b = a^2, \\ -\alpha \operatorname{tg} \alpha F & \text{при} \quad \alpha^2 = b - a^2 > 0, \\ \alpha \,{}^{\operatorname{th}}_{\operatorname{cth}} \alpha F & \text{при} \quad \alpha^2 = a^2 - b > 0, \end{cases}$$

причем $F = F(x) = \int f(x)\, dx + C$.

1.36. $y' + y^3 + axy^2 = 0$; уравнение Абеля.
Полагая $u(x) = y^{-1} - {}^1/_2 ax^2$, получаем специальное уравнение Риккати

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}ax^2 + u.$$

1.37. $y' = y^3 + ae^x y^2$.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = e^{-x}$, получаем частный случай уравнения 1.169

$$\xi^2\eta' + \xi\eta^3 + a\eta^2 = 0.$$

1.38. $y' = ay^3 + bx^{-3/2}$; уравнение Абеля; уравнение типа 1.52.
Полагая $y = x^{-1/2}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, приходим к типу, указанному в ч. I, п. 4.1

$$\eta' = a\eta^3 + {}^1/_2\eta + b.$$

1.39. $y' = a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0$.
Частный случай уравнения Абеля (ч. I, п. 4.10), к которому применимо сказанное в ч. I, п. 4.1.

1.40. $y' + 3ay^3 + 6axy^2 = 0$; уравнение Абеля.
Полагая $u'(x) = y$, получаем

$$u'' + 3au'^3 + 6axu'^2 = 0, \qquad (1)$$

и отсюда, если u принять за независимое переменное,

$$x'' - 6axx' - 3a = 0. \qquad (2)$$

Это уравнение получается дифференцированием уравнения Риккати

$$x' - 3ax^2 - 3au - 3C = 0,$$

которое подстановкой $v'(u) = -3ax(u)\,v(u)$ приводится к линейному уравнению $v'' + 9av(au + C) = 0$; об этом уравнении см. 2.10.

1.41. $y' + axy^3 + by^2 = 0$; уравнение Абеля.
Полагая $\eta(\xi) = xy$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение 1.39:

$$\eta' + a\eta^3 + b\eta^2 - \eta = 0.$$

1.42. $y' = x(x+2)y^3 + (x+3)y^2$; уравнение Абеля.
Одним из решений является

$$y = -\frac{2}{x(x+2)}.$$

Если функцию $x = x(t)$ выбрать так, чтобы для решений $y(x)$ этого уравнения выполнялось соотношение

$$y(x) = -(x + ct)^{-1}$$

(c произвольно, однако $\neq 0$), то получим уравнение

$$t(x+2)\,x'(t) = x + ct,$$

т. е. уравнение типа 1.237. Из этого уравнения можно, согласно 1.237, получить уравнение типа 6.76. При этом мы получаем интегрируемый в конечном виде случай уравнения данного типа.

1.43. $y' + (3ax^2 + 4a^2x + b)y^3 + 3xy^2 = 0$; уравнение Абеля.
Полагая $y = u'(x)$, получаем

$$u'' + (3ax^2 + 4a^2x + b)u'^3 + 3xu'^2 = 0,$$

и отсюда, если u принять за независимое переменное, для $x = x(u)$ имеем

$$x'' - 3xx' - (3ax^2 + 4a^2x + b) = 0, \qquad (1)$$

т. е.

$$\frac{d}{du}\left(x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax\right) + 2a\left(x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax\right) = b.$$

Это уравнение — линейное относительно выражения, стоящего в скобках. Таким образом,

$$x' - \frac{3}{2}x^2 - 2ax = \frac{b + Ce^{-2au}}{2a}. \tag{2}$$

Отсюда, полагая $x(u) = -\frac{2v'(u)}{3v(u)}$, получаем

$$2v'' - 4av' + \frac{3}{2a}\left(b + Ce^{-2au}\right)v = 0$$

и затем, с помощью подстановки $v(u) = \eta(\xi)$, $\xi = e^{-2au}$, —

$$\xi^2\eta'' + 2\xi\eta' + \frac{3}{16a^3}(C\xi + b)\,\eta = 0;$$

об этом уравнении см. 2.215.

1.44. $y' + 2ax^3y^3 + 2xy = 0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-2} = -\frac{1}{2}a - ax^2 + C\exp 2x^2.$$

1.45. $y' + 2(a^2x^3 - b^2x)\,y^3 + 3by^2 = 0$;
уравнение Абеля, в то же время уравнение типа 1.48. Подстановка

$$y^{-1} + ax^2 - bx = 2a\xi^2, \quad ax + b = (\xi\eta)^{-1}$$

переводит его в уравнение того же типа.

H. Lemke, *Sitzungsberichte Berlin. Math. Ges.* **18** (1920), стр. 26—31.

1.46. $y' - x^ay^3 + 3y^2 - x^{-a}y - x^{-2a} + ax^{-a-1} = 0$; уравнение Абеля.
$y = x^{-a}$ является одним из решений. Полагая $y = x^{-a} + u(x)$, получаем уравнение Бернулли

$$u' + 2x^{-a}u - x^au^3 = 0.$$

1.47. $y' = a(x^n - x)\,y^3 + y^2$; уравнение Абеля.
Если для решения $y(x) \neq 0$ за $x(t)$ принято решение уравнения $x'(t) = -\frac{1}{ty(x)}$, то для этой функции получаем уравнение

$$t^2x'' = -a(x^n - x).$$

1.48. $y' = (ax^n + bx)\,y^3 + cy^2$; уравнение Абеля.

Полагая $y = \alpha\eta(\xi)$, $\xi = \alpha cx$, $\alpha = \frac{1}{c}\left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, получаем уравнение типа 1.47

$$\eta' = -\frac{b}{c^2}(\xi^n - \xi)\,\eta^3 + \eta^2.$$

1.49. $y' + a\wp'(x)\,y^3 + 6a\wp(x)\,y^2 + (2a+1)\frac{\wp''(x)}{\wp'(x)}y + 2(a+1) = 0$

($\wp(x)$ — функция Вейерштрасса); уравнение Абеля.

Полагая $y\wp'(x)+2\wp(x)=2\eta(\xi)$, $a\dfrac{dx}{d\xi}=-\wp'(x)$, получаем уравнение типа 1.39

$$\eta'(\xi)=4\eta^3-g_2\eta-g_3,$$

где g_2, g_3 — инварианты функции $\wp(x)$.

1.50. $y'=f_3(x)y^3+f_2(x)y^2+f_1(x)y+f_0(x)$;
уравнение Абеля (ч. I, п. 4.10).

1.51. $y'=(y-f)(y-g)\left(y-\dfrac{af+bg}{a+b}\right)h+\dfrac{y-g}{f-g}f'+\dfrac{y-f}{g-f}g'$,

$f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$, $f\neq g$; уравнение Абеля (ч. I, п. 4.10). Решения получаются из соотношения

$$|y-f|^a\,|y-g|^b\left|y-\frac{af+bg}{a+b}\right|^{-a-b}=C\exp\left[\frac{ab}{a+b}\int(f-g)^2h\,dx\right].$$

Решениями являются, например, функции

$$y=f,\quad g,\quad \frac{af+bg}{a+b}.$$

M. Chini, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 36 (1903), стр. 1035—1046.

1.52. $y'=ay^n+bx^{\frac{n}{1-n}}$; тип 1.55.

Полагая $y=x^{\frac{1}{1-n}}u(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$xu'=au^n+\frac{u}{n-1}+b.$$

1.53. $y'=\dfrac{f^{1-n}g'}{(ag+b)^n}y^n+\dfrac{f'}{f}y+fg'$, $f=f(x)$, $g=g(x)$; тип 1.55.

Полагая $y=u(x)f(ag+b)$, получаем

$$(ag+b)u'=(u^n-au+1)g';$$

следовательно,

$$\int\frac{du}{u^n-au+1}+C=\frac{1}{a}\ln|ag+b|.$$

1.54. $y'=a^nf^{1-n}g'y^n+\dfrac{f'}{f}y+fg'$, $f=f(x)$, $g=g(x)$; тип 1.55.

Полагая $y=\dfrac{f}{a}u(x)$, получаем $u'=a(u^n+1)g'$, следовательно,

$$ag=\int\frac{du}{u^n+1}+C.$$

1.55. $y'=f(x)y^n+g(x)y+h(x)$.

Если при соответствующем выборе постоянных α, β будет

$$\left(\frac{h}{f}\right)^{1/n}=e^{\int g\,dx}\left[\beta+\alpha\int he^{-\int g\,dx}\,dx\right],$$

т. е. если

$$z=(h/f)^{1/n}$$

есть решение линейного уравнения $z' - gz = \alpha h$, то решения исходного уравнения получаем из равенства

$$y = (h/f)^{1/n} u(x),$$

где u определяется соотношением

$$\int \frac{du}{u^n - \alpha u + 1} + C = \int \left(\frac{f}{h}\right)^{1/n} h\,dx.$$

При $h \equiv 0$ это уравнение сводится к уравнению Бернулли (ч. I, п. 4.5).

M. Chini, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), 57 (1924), стр. 498 и сл.; 58 (1925), стр. 242 и сл.

1.56. $y' + f(x)\,y^a + g(x)\,y^b = 0.$

При $a \neq 1$ подстановка $u(x) = y^{a-1}$ дает

$$u' + (a-1)\,fu^2 + (a-1)\,gu^{\frac{a+b-2}{a-1}} = 0.$$

L. Conte, *Bolletino Unione Mat. Italiana* 11 (1932), стр. 216—219.

1.57. $y' = \sqrt{|y|}.$

Решениями являются $y = 0$ и $y = \operatorname{sign} x \cdot \frac{x^2}{4}$, а также кривые, получающиеся из данных параллельным переносом вдоль оси x, и дифференцируемые кривые, состоящие из кусков этих кривых (рис. 28). Это уравнение представляет собой пример того, что для уравнения с непрерывной правой частью через некоторую точку (здесь — через каждую точку оси x) может проходить несколько интегральных кривых.

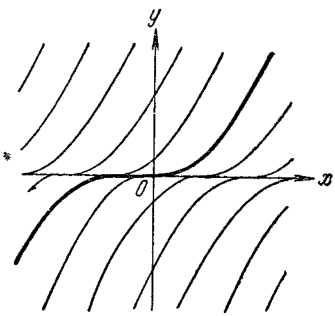

Рис. 28.

1.58. $y' = a\sqrt{y} + bx$;

частный случай уравнения 1.52.

1.59. $y' = a\sqrt{y^2 + 1} + b,\ a \neq 0.$

Если $b/a < -1$, то $y = \pm\sqrt{(b/a)^2 - 1}$ — одно из решений. Подстановка $y = \operatorname{tg} u(x)$ приводит к уравнению

$$\left(\frac{1}{\cos u} - \frac{b}{a + b\cos u}\right) u' = a.$$

Отсюда при $|a| < |b|$ получаем

$$ax = C + \ln\left|\frac{1 + \sin u}{\cos u}\right| - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln\left|\frac{b + a\cos u + \sqrt{b^2 - a^2}\sin u}{a + b\cos u}\right|,$$

а при $|a| > |b|$

$$ax = C + \ln\left|\frac{1 + \sin u}{\cos u}\right| \mp \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin u}{a + b\cos u},$$

причем следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, будет ли

$$(a + b\cos u)(a\cos u + b) > 0 \quad \text{или} \quad < 0.$$

При $b = a$ имеем

$$ax = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right| - \operatorname{tg}\frac{u}{2} + C.$$

Ira Freeman, *Bulletin Americ. Math. Soc.* 31 (1925), стр. 425—429.

1.60. $y' = \pm\sqrt{\dfrac{y^2-1}{x^2-1}}$; уравнение с разделяющимися переменными. При $|x|<1$, $|y|<1$ решения получаем из соотношения

$$\operatorname{Arcsin} y = \pm \operatorname{Arsin} x + C$$

(или, что дает тот же результат, из соотношения

$$y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2} = C),$$

а при $|x|>1$, $|y|>1$ — из соотношения

$$y+\sqrt{y^2-1} = C\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right);$$

кроме того, $y = \pm 1$ — также решения. См. также 1.443.

1.61. $y' = \pm\sqrt{\dfrac{x^2-1}{y^2-1}}$; уравнение с разделяющимися переменными. При $|x|<1$, $|y|<1$ решения получаем из соотношения

$$\operatorname{Arcsin} y + y\sqrt{1-y^2} = C \pm \operatorname{Arcsin} x \pm x\sqrt{1-x^2},$$

а при $|x|>1$, $|y|>1$ — из

$$y\sqrt{y^2-1} - \ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right| = C \pm \left[x\sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right].$$

1.62. $y' = \dfrac{y - x^2\sqrt{x^2-y^2}}{xy\sqrt{x^2-y^2}+x}$.

Полагая $y = xu(x)$, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$x(u^2+1) + \left(x^2u + \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right)u' = 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}x^2(u^2+1) + \operatorname{Arcsin} u + C = 0$$

и

$$y = x\sin\left[C - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right].$$

1.63. $y' = \dfrac{1+y^2}{\left[y+(1+y)^{1/2}\right](1+x)^{3/2}}$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{2}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \int\frac{\sqrt{1+y}}{1+y^2}\,dy = C.$$

1.64. $y' = \pm\dfrac{(ay^2+by+c)^{1/2}}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}$; тип 1.71.

Это уравнение можно решить согласно ч. I, п. 4.1. Общее решение имеет вид

$$(a-C)^2(x^2+y^2) + 2(a^2-C^2)xy + 2b(a-C)(x+y) + b^2 - 4cC = 0.$$

1.65. $y' = \dfrac{(y^3+1)^{1/2}}{(x^3+1)^{1/2}}$; тип 1.71.

Общее решение:

$$x^2y^2 - 4(x+y) + 2Cxy(x+y) + C^2(x-y)^2 + 4C = 0.$$

1.66. $y' = \pm \dfrac{[y(1-y)(1-ay)]^{1/2}}{[x(1-x)(1-ax)]^{1/2}}$; тип 1.71.

Полагая $y = \pm \eta^2(\xi)$, $x = \pm \xi^2$, получаем

$$\eta' = \frac{[(1-\eta^2)(1-a\eta^2)]^{1/2}}{[(1-\xi^2)(1-a\xi^2)]^{1/2}},$$

т. е. уравнение типа 1.68. Общее решение имеет вид

$$[x(1-y)(1-ay)]^{1/2} \mp [y(1-x)(1-ax)]^{1/2} = C(axy-1).$$

1.67. $y' = \pm \dfrac{\sqrt{1-y^4}}{\sqrt{1-x^4}}$; частный случай уравнения 1.68.

Общее решение выражается через функции лемнискаты

$$\sin \operatorname{lemn} y \mp \sin \operatorname{lemn} x = C.$$

Об этих функциях см. Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 375.

1.68. $y' = \pm \dfrac{(ay^4+by^2+1)^{1/2}}{(ax^4+bx^2+1)^{1/2}}$; частный случай уравнения 1.71.

Решение находится из соотношения

$$(ax^2y^2-1)^2 = 2C(x^2+y^2)(ax^2y^2+1) + 4bCx^2y^2 - C^2(x^2-y^2)^2$$

или (что равносильно) из

$$x(ay^4+by^2+1)^{1/2} \mp y(ax^4+bx^2+1)^{1/2} = C(ax^2y^2-1).$$

1.69. $y' = \pm \sqrt{XY}, \quad X = \sum\limits_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu, \quad Y = \sum\limits_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu.$

Решается методом ч. I, п. 4.1. О вычислении встречающихся при этом интегралов см. 1.72.

1.70. $y' = \pm \sqrt{\dfrac{X}{Y}}, \quad X = \sum\limits_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu, \quad Y = \sum\limits_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu.$ См. 1.69.

1.71. $y' = \pm \sqrt{\dfrac{Y}{X}}, \quad X = \sum\limits_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu, \quad Y = \sum\limits_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu.$

Тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.1. О вычислении интегралов, встречающихся при применении метода ч. I, п. 4.1, см. 1.72. Если $b_\nu = a_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots, 4$), то

$$(\sqrt{Y} \pm \sqrt{X})^2 = (y-x)^2[a_4(y+x)^2 + a_3(y+x) + C]$$

есть общее решение; или в другой форме

$$(x^2\sqrt{Y} \pm y^2\sqrt{X})^2 = (y-x)^2[Cx^2y^2 + a_1xy(x+y) + a_0(x+y)^2].$$

1.72. $y' = R_1(x, \sqrt{X}) \cdot R_2(y, \sqrt{Y})$, R_1, R_2 — рациональные функции двух переменных, а X, Y — многочлены: $X = \sum\limits_{\nu=0}^{4} a_\nu x^\nu$, $Y = \sum\limits_{\nu=0}^{4} b_\nu y^\nu$ степени не выше четвертой.

Это — уравнение с разделяющимися переменными типа ч. I, п. 4.1. Если X или Y имеют степень выше двух, то решение сводится к эллиптическим интегралам.

[См. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II; Уиттекер и Ватсон, т. II. Для нахождения численных значений таких интегралов см. Янке, Эмде и Лёш. — *Прим. ред.*]

1.73. $y' = \pm \dfrac{Y^{2/3}}{X^{2/3}}, \quad X = \sum\limits_{\nu=0}^{3} a_\nu x^\nu, \quad Y = \sum\limits_{\nu=0}^{3} a_\nu y^\nu.$

Если α — простой корень многочлена X и

$$X = a_3 (x - \alpha)(x^2 + 2px + q), \quad \beta = \frac{p^2 - q}{\alpha^2 + 2\alpha p + q},$$

то подстановка

$$X = a_3 (x - \alpha)^3 \xi^3, \quad Y = a_3 (y - \alpha)^3 \eta^3$$

приводит к уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pm \sqrt{\frac{\eta^3 + \beta}{\xi^3 + \beta}}.$$

Его решения удовлетворяют, независимо от выбора знака в правой части, уравнению

$$(\xi\eta + \xi\gamma + \eta\gamma)^2 = 4(\xi\eta\gamma + \beta)(\xi + \eta + \gamma),$$

где γ — произвольная постоянная.

Дальнейшие вычисления (не проверенные) показывают, что решения исходного дифференциального уравнения удовлетворяют соотношению

$$XYC = \left[a_3 xyc + \frac{1}{3} a_2 (xy + xc + yc) + \frac{1}{3} a_1 (x + y + c) + a_0\right]^3,$$

где c — произвольная постоянная и $C = \sum\limits_{\nu=0}^{3} a_\nu c^\nu$.

1.74. $y' = f(x)[y - g(x)]\sqrt{(y - a)(y - b)}.$

Подстановка $u^2(x) = \dfrac{y - a}{y - b}$ приводит к уравнению Риккати

$$u' = \pm \frac{1}{2} f[a - g - u^2(b - g)].$$

1.75. $y' - e^{x-y} + e^x = 0.$

Полагая $u(x) = e^y$, получаем

$$y = \ln[1 + C\exp(-e^x)].$$

1.76. $y' = a\cos y + b, \quad a \neq 0;$

уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int \frac{dy}{a\cos y + b} = x + C.$$

Интеграл вычисляется с помощью подстановки

$$\cos y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sin y = \frac{2t}{t^2 + 1}.$$

Если, например, $b^2 > a^2$, то получаем

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{b^2-a^2}=C.$$

1.77. $y' = \cos(ay + bx), \quad a \neq 0.$
Полагая $u(x) = ay + bx$, получаем уравнение 1.76

$$u' = a\cos u + b.$$

1.78. $y' + a\sin(\alpha y + \beta x) + b = 0.$
Из данного уравнения следует

$$\alpha y + \beta x + \arcsin\frac{y'+b}{a} = 0;$$

это — уравнение Лагранжа — Даламбера (ч. I, п. 4.19). Тем самым мы получаем подход к исходному уравнению. Очевидно, что аналогичный результат имеет место и в том случае, когда вместо синуса взята какая-либо другая функция.

D Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* **4** (1935), стр. 150

1.79. $y' + f(x)\cos ay + g(x)\sin ay + h(x) = 0.$
Полагая $u(x) = \operatorname{tg}(ay/2)$, получаем уравнение Риккати

$$2a^{-1}u' + (h-f)u^2 + 2gu + (h+f) = 0.$$

D. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* **4** (1935), стр. 149—152.

1.80. $y' + f\sin y + (1-f')\cos y = f' + 1, \quad f = f(x).$
Полагая $u(x) = \operatorname{tg}(y/2)$, получаем $u' - f' = u(u-f)$, откуда, полагая $v(x) = u - f$, получаем уравнение Бернулли

$$v' = v(v+f).$$

1.81. $y' + 2\operatorname{tg} y\operatorname{tg} x = 1.$
Уравнению удовлетворяют, например, функции $y = (\pi/2) - x + k\pi$ (k — целое). Полагая $\eta(\xi) = \operatorname{tg} y$, $\xi = \operatorname{tg} x$, получаем

$$(\xi^2+1)\eta' = (\eta^2+1)(1-2\xi\eta).$$

Об этом уравнении см. 1.151.

1.82. $y' = a(1+\operatorname{tg}^2 y) + \operatorname{tg} y\operatorname{th} x.$
Довольно сложное поведение интегральных кривых этого уравнения рассматривали B. Gambier, *Enseignement math.* **28** (1929), стр. 245 и H. Milloux, там же, **29** (1930), стр. 86—112.

1.83. $y' = \operatorname{tg}(xy).$
Решения удовлетворяют уравнению

$$\int_0^y e^{\frac{1}{2}t^2}\cos(xt)\,dt = Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

P. Hendlé, *Intermédiaire math.* **25** (1918), стр. 45 и сл.

1.84. $y' = f(ax+by).$
Полагая $u(x) = ax + by$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' = a + bf(u)$.

1.85. $y' = x^{a-1}y^{1-b}f\left(\frac{x^a}{a} \pm \frac{y^b}{b}\right)$.

Полагая $u(y) = \frac{x^a}{a} \pm \frac{y^b}{b}$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' = x^{a-1}[1 \pm f(u)]$.

1.86. $y' = \frac{y - xf(x^2+ay^2)}{x + ayf(x^2+ay^2)}$; см. 1.366.

1.87. $y' = \frac{y}{x}\frac{af(x^cy) + cx^ay^b}{bf(x^cy) - x^ay^b}$; см. 1.367.

1.88. $2y' - 3y^2 - 4ay = b + ce^{-2ax}$; уравнение Риккати, см. 1.43 (2).

1.89. $xy' \pm \sqrt{a^2-x^2} = 0$;
уравнение трактрисы (линии погони), см. 1.492.

$$y = \mp\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \pm\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} \mp \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1.90. $xy' + y = x\sin x$; линейное уравнение.

$$y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x}.$$

1.91. $xy' - y = \frac{x}{\ln|x|}$; линейное уравнение.

$$y = Cx + x\ln|\ln|x||.$$

1.92. $xy' - y = x^2\sin x$; линейное уравнение.

$$y = x(C - \cos x).$$

1.93. $xy' - y = \frac{x\cos\ln|\ln|x||}{\ln|x|}$; линейное уравнение.

$$y = Cx + x\sin\ln|\ln|x||.$$

1.94. $xy' + ay + bx^n = 0$; линейное уравнение.
Случай $x<0$ может быть сведен к случаю $x>0$. При $x>0$ имеем

$$y = \begin{cases} Cx^{-a} - \dfrac{b}{n+a}x^n & \text{при } a \neq -n, \\ Cx^{-a} - bx^{-a}\ln x & \text{при } a = -n. \end{cases}$$

1.95. $xy' + y^2 + x^2 = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u'(x) = x^{-1}y(x)u(x)$, получаем линейное уравнение

$$xu'' + u' + xu = 0;$$

об этом уравнении см. 2.162 (9).

1.96. $xy' - y^2 + 1 = 0$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = \frac{1-Cx^2}{1+Cx^2} \quad \text{и} \quad y = -1.$$

1.97. $xy' + ay^2 - y + bx^2 = 0$; тип. ч. I, п. 4.6 (г).
Полагая $y = xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' = -au^2 - b$.

1.98. $xy' + ay^2 - by + cx^{2b} = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $y = \eta(\xi)$, $\xi = x^b$, получаем уравнение 1.97

$$b(\xi\eta' - \eta) + a\eta^2 + c\xi^2 = 0.$$

1.99. $xy' + ay^2 - by = cx^{\beta}$.
Подстановка $y = \xi\eta(\xi)$, $\xi = x^b$ переводит это уравнение в специальное уравнение Риккати (ч. I. п. 4.8)

$$\eta' + \frac{a}{b}\eta^2 = \frac{c}{b}\xi^{\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\beta}{b} - 2.$$

1.100. $xy' + xy^2 + a = 0$; частный случай уравнения 1.24.

1.101. $xy' + xy^2 - y = 0$; уравнение Бернулли.

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = \frac{2x}{x^2 + C}.$$

1.102. $xy' + xy^2 - y - ax^3 = 0$.
См. 1.201. Пусть $\alpha = \sqrt{|a|}$.
При $a > 0$ решениями являются $y = \alpha x$ и

$$y = \alpha x \operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + C\right),$$

при $a < 0$

$$y = \alpha x \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\alpha x^2 + C\right).$$

1.103. $xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0$; уравнение Риккати.
Если, согласно ч. I, п. 4.9, привести это уравнение с помощью подстановки $u'(x) = -uy$ к линейному уравнению, то получится уравнение 2.123

$$xu'' - (2x^2 + 1)u' + x^3 u = 0,$$

откуда

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}(C_1 + C_2 x^2), \quad y = -\frac{C_1 x + C_2(x^3 + 2x)}{C_1 + C_2 x^2}.$$

1.104. $xy' + axy^2 + 2y + bx = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $y = u(x) - \frac{1}{ax}$, получим $u' + au^2 + b = 0$, следовательно,

$$x = -\int \frac{du}{au^2 + b} + C.$$

Если, в частности $b = -a$, то имеем

$$u = \pm 1, \quad \operatorname{th}(ax - C), \quad \operatorname{cth}(ax - C).$$

1.105. $xy' + axy^2 + by + cx + d = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $\eta'(\xi) = \eta(\xi)\, y(x)$, $\xi = ax$, получаем линейное уравнение 2.120

$$\xi\eta'' + b\eta' + \left(\frac{c}{a}\xi + d\right)\eta = 0.$$

1.106. $xy' + x^a y^2 + \frac{a - b}{2}y + x^b = 0$; уравнение Риккати.

$$y = x^{\frac{1}{2}(b-a)} \operatorname{tg}\left[C - \frac{2}{a+b} x^{\frac{1}{2}(a+b)}\right].$$

1.107. $xy' + ax^{\alpha}y^2 + by = cx^{\beta}$.
Если $b \neq \alpha$, то преобразованием $y = x^{-b}\eta(\xi)$, $\xi = x^{\alpha - b}$ решения этого уравнения однозначно переводятся в решения специального уравнения Риккати (ч. I. п. 4.8).

$$(\alpha - b)\eta' + a\eta^2 = cx^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{2b + \beta - \alpha}{\alpha - b};$$

исходное уравнение называется также раусоновской формой уравнения Риккати.

Ватсон, т. I, стр. 105.

1.108. $xy' - y^2 \ln x + y = 0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-1} = 1 + \ln x + Cx.$$

1.109. $xy' - y(2y \ln x - 1) = 0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-1} - 2(1 + \ln x) = Cx$$

1.110. $xy' + f(x)(y^2 - x^2) - y = 0$; уравнение Риккати.
$y = \pm x$ являются, очевидно, решениями. Поэтому все решения можно найти согласно ч. I, п. 4.9.

1.111. $xy' + y^3 + 3xy^2 = 0$; уравнение Абеля.
Согласно Лиувиллю (R. Liouville, *Acta Math.* **27** (1903), стр. 60), это уравнение может быть решено в квадратурах.

1.112. $xy' = \sqrt{y^2 + x^2} + y$; частный случай уравнения 1.113.

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cx^2.$$

1.113. $xy' + a\sqrt{y^2 + x^2} - y = 0$; однородное уравнение.

$$y = x \operatorname{sh}\left(a \ln \frac{C}{x}\right);$$

в частности, если $a = 1$, то $y = \frac{C}{2} - \frac{x^2}{C}$.

1.114. $xy' - x\sqrt{y^2 + x^2} - y = 0$.
Тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (г).

$$y + \sqrt{y^2 + x^2} = Cxe^x, \quad C \neq 0.$$

1.115. $xy' - x(y - x)\sqrt{y^2 - x^2} - y = 0$.
Полагая $y = xu(x)$, получаем

$$u' = |x|(u - 1)\sqrt{u^2 - 1},$$

откуда, полагая $u = \frac{1}{\cos v}$,

$$v' = \pm x(1 - \cos v);$$

следовательно,

$$\frac{1}{2}x^2 = \pm \operatorname{ctg} \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}C, \quad \text{т. е.} \quad (x^2 - C)^2 = 4\frac{y + x}{y - x}$$

и, наконец,

$$y = x\frac{(x^2 - C)^2 + 4}{(x^2 - C)^2 - 4}, \quad \text{причем} \quad \frac{x(x^2 - C)}{(x^2 - C)^2 - 4} < 0.$$

1.116. $xy' - x\sqrt{(y^2 - x^2)(y^2 - 4x^2)} - y = 0$.
Полагая $y = xu(x)$, получаем

$$u' = x\sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - 4)},$$

$$\frac{1}{2}x^2 + C = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(u^2 - 4)}}.$$

О вычислении интеграла см. 1.72.

1.117. $xy' = x \exp \frac{y}{x} + y + x$; однородное уравнение.

Полагая $xu(x) = y$, получаем $\frac{u'}{e^u + 1} = \frac{1}{x}$; следовательно,

$$\exp \frac{y}{x} = \frac{Cx}{1 - Cx}.$$

1.118. $xy' = y \ln y$; уравнение с разделяющимися переменными.

Имеем $\int \frac{dy}{y \ln y} = \ln \frac{x}{C}$, следовательно, $y = \exp \frac{x}{C}$.

1.119. $xy' - y(\ln xy - 1) = 0$.

Полагая $u(x) = xy$, получаем $xu' = u \ln u$, откуда $xy = e^{Cx}$.

1.120. $xy' - y\left(x \ln \frac{x^2}{y} + 2\right) = 0$.

$$x + \ln \ln (x^2 y^{-1}) = C.$$

M. O. Gonzalez, *Bol. mat.* **11** (1938), стр. 206—209.

1.121. $xy' + \sin(y - x) = 0$.

Полагая $u(x) = x \operatorname{tg} \frac{y-x}{2}$, получаем уравнение Риккати

$$2xu' + u^2 + x^2 = 0,$$

которое подстановкой $u = 2xv'/v$ сводится к уравнению 2.162 (4)

$$x^2 v'' + xv' + \frac{x^2}{4} v = 0.$$

1.122. $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y) \cos y = 0$.

Деля на $\cos^2 y$, получаем уравнение в полных дифференциалах

$$x \operatorname{tg} y - x^3 = C.$$

1.123. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$; однородное уравнение.

$$y = 2x \operatorname{arctg} Cx.$$

1.124. $xy' + x \cos \frac{y}{x} - y + x = 0$; однородное уравнение

$$\cos(y/x) - (C + \ln x) \sin(y/x) = 1.$$

1.125. $xy' + x \operatorname{tg} \frac{y}{x} - y = 0$; однородное уравнение.

$$x \sin(y/x) = C.$$

1.126. $xy' = yf(xy)$.

Это уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 4.7. Подстановка $y = x^{-1}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ переводит его в уравнение $\eta' = \eta[1 + f(\eta)]$, из которого получаем

$$x = \exp \int_C^{xy} \frac{d\eta}{\eta[1 + f(\eta)]}.$$

1.127. $xy' = yf(x^a y^b)$.
Полагая $u(x) = x^a y^b$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $xu' = buf(u) + au$.

1.128. $xy' + ay = f(x)\, g(x^a y)$.
Полагая $u(x) = x^a y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' = x^{a-1} f(x)\, g(u)$.

1.129. $(x+1)\, y' + y(y-x) = 0$; уравнение Бернулли.

$$\frac{1}{y} = Cu - 1 + u \int \frac{dx}{u}, \quad \text{где} \quad u = (x+1)\, e^{-x}.$$

1.130. $2xy' + y = 2x^3$; линейное уравнение.

$$y = \frac{2}{7} x^3 + \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

1.130а. $2xy' = y^2 + 4ixy - 1$ где $i = \sqrt{-1}$.
$y = \dfrac{-iZ_0(x) + Z_1(x)}{iZ_0(x) + Z_1(x)}$, Z — цилиндрическая функция с совпадающими произвольными постоянными при Z_0 и Z_1.
L. Schwarz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 23 (1943), стр. 125. О цилиндрических функциях см. Уиттекер и Ватсон, т. II.

1.131. $(2x+1)\, y' - 4e^{-y} + 2 = 0$.
Полагая $u(x) = e^y$, получаем линейное уравнение

$$u' + \frac{2}{2x+1} u = \frac{4}{2x+1};$$

следовательно, $(2x+1)\, e^y = 4x + C$.

1.132. $3xy' - 3x \ln x \cdot y^4 - y = 0$; уравнение Бернулли.

$$xy^{-3} + \frac{3}{4} x^2 (2 \ln x - 1) = C.$$

1.133. $x^2 y' + y - x = 0$; линейное уравнение.

$$y = \exp \frac{1}{x} \left[C + \int \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) dx \right].$$

Это дифференциальное уравнение интересно тем, что попытка найти его решение в окрестности точки $x = 0$ о виде степенного ряда приводит к расходящемуся ряду

$$y = x - x^2 + 2!\, x^3 - 3!\, x^4 + \ldots,$$

который представляет собой асимптотическое разложение решения для малых значений $x > 0$ (см. ч. I, п. 4.4).

1.134. $x^2 y' - y = x^2 e^{x - \frac{1}{x}}$; линейное уравнение.

$$y = e^{-1/x} (e^x + C).$$

1.135. $x^2 y' = (x-1)\, y$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = Cx \exp(1/x).$$

1.136. $x^2y' + y^2 + xy + x^2 = 0$; однородное уравнение.

$$\frac{x}{y+x} = \ln|x| + C \quad \text{и} \quad y = -x.$$

1.137. $x^2y' - y^2 - xy = 0$; однородное уравнение.

$$x/y = -\ln Cx \quad \text{и} \quad y = 0.$$

1.138. $x^2y' - y^2 - xy = x^2$; однородное уравнение.
Кроме того, это уравнение, будучи разделено на $x(x^2+y^2)$, превращается в уравнение в полных дифференциалах.

$$\operatorname{arctg}(y/x) - \ln x = C.$$

1.139. $x^2(y' + y^2) + ax^k - b(b-1) = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u'(x) = u(x)\,y(x)$, получаем уравнение 2.155 с переменной u вместо x.

1.140. $x^2(y' + y^2) + 4xy + 2 = 0$; уравнение Риккати.

$$y = -\frac{2}{x} \quad \text{и} \quad y = -\frac{x-2C}{x(x-C)}.$$

1.141. $x^2(y' + y^2) + axy + b = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u'(x) = u(x)\,y(x)$, получаем уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3)

$$x^2u'' + axu' + bu = 0.$$

1.142. $x^2(y' - y^2) - ax^2y + ax + 2 = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = xy - 1$, получаем уравнение Бернулли

$$xu' - (ax+3)\,u = u^2.$$

1.143. $x^2(y' + ay^2) = b$; уравнение Риккати; уравнение типа 1.52.
Полагая $u(x) = xy$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $xu' + au^2 - u - b = 0$.

1.144. $x^2\left(y' + ay^2\right) + bx^\alpha + c = 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x) = xy + A$, причем $aA^2 + A + c = 0$, получаем уравнение типа 1.99

$$xu' + au^2 - (2aA+1)\,u + bx^\alpha = 0.$$

1.145. $x^2y' + ay^3 - ax^2y^2 = 0$; уравнение Абеля.
Полагая $u(x) = y^{-1} + ax$, получаем уравнение типа 1.36

$$\frac{dx}{du} + x^3 - \frac{u}{a}x^2 = 0.$$

1.146. $x^2y' + xy^3 + ay^2 = 0$; частный случай уравнения 1.169.

1.147. $x^2y' + ax^2y^3 + by^2 = 0$; уравнение Абеля.

Полагая $y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab}}\,\eta(\xi)$, $\xi = \dfrac{1}{x}\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}$, получаем уравнение типа 1.145

$$\xi^2\eta' = \eta^3 - \xi^2\eta^2.$$

1.148. $(x^2+1)\,y' + xy - 1 = 0$; линейное уравнение.

$$y\sqrt{x^2+1} = C + \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

1.149. $(x^2+1)\,y'+xy=x\,(x^2+1)$; линейное уравнение.

$$y=\frac{x^2+1}{3}+\frac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.150. $(x^2+1)\,y'+2xy=2x^2$; линейное уравнение.

$$y=\frac{2}{3}\,\frac{x^3+C}{x^2+1}.$$

1.151. $(x^2+1)\,y'+(y^2+1)\,(2xy-1)=0$; уравнение Абеля.
С помощью подстановки вида $y=a(x)\,u(x)+b(x)$ можно добиться того, чтобы в уравнение не входили ни постоянные члены, ни члены, содержащие u. Здесь для этого нужно положить $x^4y=(x^2+1)\,u+x^3$. Получаем уравнение вида 1.185 с переменной u вместо y.

1.152. $(x^2+1)\,y'+x\sin y\cos y-x\,(x^2+1)\cos^2 y=0$.
Полагая $u(x)=\operatorname{tg} y$, получаем 1.149 с переменной u вместо y.

1.153. $(x^2-1)\,y'-xy+a=0$; линейное уравнение.

$$y=ax+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.154. $(x^2-1)\,y'+2xy-\cos x=0$; линейное уравнение и одновременно уравнение в полных дифференциалах.

$$(x^2-1)\,y-\sin x=C.$$

1.155. $(x^2-1)\,y'+y^2-2xy+1=0$; уравнение Риккати.
Это уравнение может быть написано в виде

$$(x^2-1)\,\frac{d}{dx}\,(y-x)+(y-x)^2=0.$$

Оно является уравнением с разделяющимися переменным и относительно $u=y-x$. Получаем

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C \quad \text{и} \quad y=x.$$

1.156. $(x^2-1)\,y'-y\,(y-x)=0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-1}=x+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.157. $(x^2-1)\,y'+a\,(y^2-2xy+1)=0$; уравнение Риккати.
Подстановка $y=\dfrac{2a-1}{a}\,x-\dfrac{a-1}{a}\,\dfrac{1}{u(x)}$ приводит к уравнению

$$(x^2-1)\,u'+(a-1)\,(u^2-2xu+1)=0.$$

Если a — натуральное число, то повторным применением указанной подстановки это уравнение может быть сведено к уравнению того же вида, но в котором $a=1$, т. е. к уравнению вида 1.155.

1.158. $(x^2-1)\,y'+axy^2+xy=0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-1}=-a+C\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.159. $(x^2-1)\,y'=2xy\ln y$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$y=\exp C\,(x^2-1).$$

1.160. $(x^2-4)\,y'+(x+2)\,y^2-4y=0$; уравнение Бернулли.

$$\frac{1}{y}=\frac{x+2}{x-2}\,(C+\ln|x+2|).$$

1.161. $(x^2-5x+6)\,y'+3xy-8y+x^2=0$; линейное уравнение.
Кроме того, умножением на $x-2$ оно приводится к уравнению в полных дифференциалах.

$$12y\,(x^2-5x+6)\,(x-2)+x^3\,(3x-8)=C.$$

1.162. $(x-a)\,(x-b)\,y'+y^2+k\,(y+x-a)\,(y+x-b)=0$; уравнение Риккати. Если $k\,(k+1)\neq 0$, то с помощью подстановки $ku\,(x)=y+k\,(y+x)$ это уравнение приводится к уравнению

$$\frac{u'}{(u-a)\,(u-b)}+\frac{k}{(x-a)\,(x-b)}=0.$$

Отсюда следует

$$\frac{u-a}{u-b}\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^k=C \quad \text{при} \quad a\neq b,$$

$$\frac{1}{u-a}+\frac{k}{x-a}=C \quad \text{при} \quad a=b.$$

Если $k=0$, то получаем

$$y\ln C\,\frac{x-a}{x-b}=a-b \quad \text{при} \quad a\neq b,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x-a}=C \qquad \text{при} \quad a=b.$$

Наконец, если $k=-1$, то это уравнение линейное, и мы получаем

$$y=(x-a)\,(x-b)\left[C+\frac{1}{a-b}\ln\frac{x-a}{x-b}\right] \quad \text{при} \quad a\neq b,$$

$$y=a-x+C\,(x-a)^2 \qquad \text{при} \quad a=b.$$

1.163. $2x^2y'-2y^2-xy+2a^2x=0$; уравнение Риккати.
$y=a\sqrt{x}$ является решением; остальные решения могут быть найдены согласно ч. I, п. 4.9.

1.164. $2x^2y'-2y^2-3xy+2a^2x=0$; уравнение Риккати.
$y=a\sqrt{x}-\dfrac{x}{2}$ является решением; остальные решения могут быть найдены согласно ч. I, п. 4.9.

1.165. $x\,(2x-1)\,y'+y^2-(4x+1)\,y+4x=0$; уравнение Риккати.
$y=1$ является решением. Отсюда, согласно ч. I, п. 4.9, получаем

$$y=\frac{2x^2+C}{x+C}.$$

1.166. $2x\,(x-1)\,y'+(x-1)\,y^2-x=0$; см. 1.176 (1).

1.167. $3x^2y'-7y^2-3xy-x^2=0$; однородное уравнение.

$$3\operatorname{arctg}\sqrt{7}\,\frac{y}{x}=C+\sqrt{7}\ln x.$$

1.168. $3(x^2-4)y'+y^2-xy-3=0$; уравнение Риккати.
Если $y=y(x)$ есть решение алгебраического уравнения

$$y^4-6y^2-4xy-3=0,$$

то функция $y=y(x)$ удовлетворяет исходному уравнению Риккати.

1.169. $(ax+b)^2y'+(ax+b)y^3+cy^2=0$; уравнение Абеля.
Определим два числа α, β так, что $\alpha b-\beta a=c$. Тогда подстановка

$$u(x)=\frac{1}{y}-\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}$$

приводит к уравнению

$$u'[(ax+b)u+\alpha x+\beta]=1$$

и решения этого уравнения получаем, если только $u'\neq 0$, из линейного уравнения

$$\frac{dx}{du}=x(au+\alpha)+bu+\beta.$$

1.170. $x^3y'-y^2-x^4=0$; частный случай уравнения 1.187.

$$y=x^2-\frac{x^2}{\ln Cx}.$$

1.171. $x^3y'-y^2-x^2y=0$; уравнение Бернулли.
После деления на x^2y^2 получается уравнение в полных дифференциалах.

$$\frac{x}{y}-\frac{1}{x}=C.$$

1.172. $x^3y'-x^4y^2+x^2y+20=0$; уравнение Риккати.
Если, согласно ч. I п. 4.9, свести это уравнение с помощью подстановки $y=-\dfrac{u'}{xu}$ к линейному уравнению, то получится уравнение вида 2.14

$$x^2u''=20u,$$

следовательно,

$$u=C_1x^{-4}+C_2x^5,\qquad y=\frac{4C_1-5C_2x^9}{C_1x^2+C_2x^{11}}.$$

1.173. $x^3y'-x^6y^2-(2x-3)x^2y+3=0$; уравнение Риккати.
Если это уравнение привести, согласно ч. I, п. 4.9, с помощью подстановки $y=-x^{-3}\dfrac{u'}{u}$ к линейному уравнению, то получим уравнение вида 2.35

$$u''-2u'-3u=0,$$

следовательно,

$$u=C_1e^{3x}+C_2e^{-x},\quad y=-\frac{1}{x^3}\,\frac{3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}}{C_1e^{3x}+C_2e^{-x}}.$$

1.174. $x(x^2+1)y'+x^2y=2$; линейное уравнение.

$$y\sqrt{x^2+1}+2\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}=C.$$

1.175. $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)y+ax^3=0$; линейное уравнение.

$$y=ax+Cx\sqrt{|x^2-1|}.$$

1.176. $x(x^2-1)y'+(x^2-1)y^2-x^2=0$; уравнение Риккати.
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^2$, получаем уравнение

$$2\xi(\xi-1)\eta'+(\xi-1)\eta^2-\xi=0, \tag{1}$$

которое, согласно ч. I, п. 4.9, подстановкой

$$u(\xi)=\exp\int\frac{\eta}{2\xi}\,d\xi$$

сводится к гипергеометрическому уравнению (см. 2.260)

$$\xi(\xi-1)u''+(\xi-1)u'-\frac{1}{4}u=0.$$

О связи этого уравнения с эллиптическими функциями см. Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 390.

1.177. $x^2(x-1)y'-y^2-x(x-2)y=0$; уравнение Бернулли.

$$y=\frac{x^2}{(x-1)C+1}.$$

1.178. $2x(x^2-1)y'+2(x^2-1)y^2-(3x^2-5)y+x^2-3=0$; уравнение Риккати.
$y=1$ является решением. Остальные решения получаются согласно ч. I, п. 4.9:

$$y=1+\frac{1}{z},\qquad z=\sqrt{\left|\frac{x^2-1}{x}\right|}\left(C+\int\frac{1}{x}\sqrt{\left|\frac{x}{x^2-1}\right|}\,dx\right).$$

1.179. $3x(x^2-1)y'+xy^2-(x^2+1)y-3x=0$; уравнение Риккати.
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x+x^{-1}$, получаем уравнение 1.168 с переменными ξ, η вместо x, y.

См. также E. Pascal, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **36** (1903), стр. 329 и сл.

1.180. $(ax^2+bx+c)(xy'-y)-y^2+x^2=0$; уравнение Риккати.
Решениями являются, например, функции $y=\pm x$. Подстановка $y=xu(x)$ сводит это уравнение к уравнению с разделяющимися переменными. Этим путем получаем:

$$\ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right|=C+2\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

1.181. $x^4(y'+y^2)+a=0$; $a\neq 0$; уравнение Риккати.
Полагая $u(x)=x^2y$, получаем $x^2u'+u^2-2xu+a=0$ и отсюда, с помощью подстановки $v(x)=u-x$, приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$x^2v'+v^2+a=0.$$

Если $a=\alpha^2>0$, то отсюда получаем

$$y=\frac{1}{x}+\frac{\alpha}{x^2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{x}+C\right).$$

1.182. $x(x^3-1)y'-2xy^2+y+x^2=0$; уравнение Риккати.
$y=x^2$ является решением. Остальные решения можно получить согласно ч. I, п. 4.9.

1.183. $(2x^4-x)y'-2(x^3-1)y=0$;
уравнение с разделяющимися переменными.

$$(2x^3-1)y^3=Cx^6.$$

1.184. $(ax^2+bx+c)^2(y'+y^2)+A=0$; уравнение Риккати.

Полагая $u(x)=\exp\int y\,dx$, получаем линейное уравнение вида 2.396

$$(ax^2+bx+c)^2u''+Au=0.$$

1.185. $x^7y'+2(x^2+1)y^3+5x^3y^2=0$; уравнение Абеля.
Подстановка $u(x)=y^{-1}$ дает $x^7uu'=5x^3u+2(x^2+1)$, и, далее, подстановка $xv(x)=x^3u+1$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{dx}{dv}-\frac{xv}{2(v^2+1)}+\frac{1}{2(v^2+1)}=0.$$

1.186. $x^ny'+y^2-(n-1)x^{n-1}y+x^{2n-2}=0$; уравнение Риккати.

$$y=x^{n-1}\operatorname{tg}(C-\ln x).$$

1.187. $x^ny'=ay^2+bx^{2n-2}$; уравнение Риккати; в то же время частный случай уравнения 1.189.

$$y=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x^{n-1}u(x),$$

где $u(x)$ определяется из равенства

$$\sqrt{ab}\,\ln x=\int\frac{du}{u^2-\alpha u+1}+C,\text{ причем }\alpha=\frac{n-1}{\sqrt{ab}}.$$

1.188. $x^{2n+1}y'=ay^3+bx^{3n}$; уравнение Абеля и в то же время — частный случай уравнения 1.189.

1.189. $x^{m(n-1)+n}y'=ay^n+bx^{(m+1)n}$; частный случай уравнения 1.53.
Имеем

$$y=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,x^{m+1}u(x),$$

где u определяется равенством

$$\int\frac{du}{u^n-\alpha u+1}+C=b\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ln|x|,\text{ причем }\alpha=\frac{m+1}{b}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

1.190. $\sqrt{x^2-1}\,y'=\pm\sqrt{y^2-1}$; см. 1.60.

1.191. $\sqrt{1-x^2}\,y'=\pm y\sqrt{y^2-1}$, $|x|<1$, $|y|>1$.

$$y=\pm1,\text{ а также }x\sqrt{y^2-1}\pm\sqrt{1-x^2}=Cy.$$

1.192. $y'\sqrt{x^2+a^2}+y-\sqrt{x^2+a^2}+x=0$; линейное уравнение.

$$y=\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\frac{C}{a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right).$$

1.193. $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$; линейное уравнение.

$$y=ax+\frac{C}{\ln x}.$$

1.194. $xy' \ln x - y^2 \ln x - (2\ln^2 x + 1) y - \ln^3 x = 0$; уравнение Риккати.

Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ приводит к уравнению 1.103 с переменными ξ, η вместо x, y. Поэтому

$$(C_1 + C_2 \ln^2 x) y = -C_1 \ln x - C_2 (\ln^3 x + 2\ln x).$$

1.195. $y' \sin x - y^2 \sin^2 x + (\cos x - 3\sin x) y + 4 = 0$; уравнение Риккати.

Подстановка $u(x) = y \sin x$ приводит к уравнению 1.17 с переменной u вместо y.

1.196. $y' \cos x + y + (1 + \sin x)\cos x = 0$; линейное уравнение.

$$\frac{1+\sin x}{\cos x} y = C + \sin x - 2\ln\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}.$$

1.197. $y' \cos x - y^4 - y \sin x = 0$; уравнение Бернулли.

$$y^{-3} = C\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x.$$

1.198. $y' \sin x \cos x - y - \sin^3 x = 0$; линейное уравнение.

$$y = -\sin x + C \operatorname{tg} x.$$

1.199. $y' \sin 2x + \sin 2y = 0$.

Деля на $\cos^2 x \cos^2 y$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x = C.$$

1.200. $(a\sin^2 x + b) y' + ay \sin 2x + Ax(a\sin^2 x + c) = 0$; линейное уравнение.

$$(a\sin^2 x + b) y = C + \frac{1}{8} A [a\cos 2x + 2ax\sin 2x - (2a + 4c) x^2].$$

1.201. $2fy' + 2fy^2 - f'y - 2f^2 = 0$, $f = f(x)$; уравнение Риккати.

Если $f > 0$, то $y = \sqrt{f}$ является решением, так что это уравнение может быть решено согласно ч. I, п. 4.9. Подстановка

$$u(x) = \exp\int y(x)\,dx$$

приводит к уравнению 2.79, с переменной u вместо y, причем $a = {}^1/_2$, $b = -1$.

1.202. $f(x) y' + g(x) \operatorname{tg} y + h(x) = 0$.

Подстановка $u(x) = \operatorname{tg} y$ приводит к уравнению Абеля (см. ч. I, п. 4.10)

$$fu' + gu^3 + hu^2 + gu + h = 0.$$

H. Lemke, *Publications math. Belgrade* 4 (1935), стр. 201—212.

1.203. $yy' + y + x^3 = 0$; см. 6.74 (6).

1.204. $yy' + ay + x = 0$.

$$\ln|y^2 + axy + x^2| - \frac{2a}{\sqrt{4-a^2}} \operatorname{arctg}\frac{2y + ax}{x\sqrt{4-a^2}} = C \quad \text{при } |a| < 2,$$

$$(x \pm y)\exp\frac{x}{x \pm y} = C \quad \text{при } a = \pm 2,$$

$$C_1 |y - \alpha x|^{\alpha} = C_2 |y - \beta x|^{\beta} \quad \text{при } |a| > 2,$$

причем $|C_1| + |C_2| > 0$, $\alpha, \beta = -\frac{1}{2} a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4}$.

1.205. $yy' + ay + \frac{a^2-1}{4}x + bx^n = 0.$

Если равенство $t = \int \frac{dx}{y(x)}$, где $y(x)$ — решение этого уравнения, определяет t как функцию от x и, следовательно, x как функцию от t, то

$$x'(t) = \frac{1}{t'(x)} = y(x),$$

а из данного дифференциального уравнения получаем

$$x'' + ax' + \frac{a^2-1}{4}x + bx^n = 0.$$

Об этом уравнении см 6.26; при $a = -7$, $n = 3/2$ см. также 6.100 (2)

1.206. $yy' + ay + be^x = 2a$; см. 6.76 (4).

1.207. $yy' + y^2 + 4x(x+1) = 0$; уравнение Риккати.
Подстановка $u(x) = y^2$ приводит к линейному уравнению

$$u' + 2u = -8x(x+1), \text{ откуда } y^2 + 4x^2 = Ce^{-2x}.$$

1.208. $yy' + ay^2 - b\cos(x+c) = 0$;
уравнение Бернулли, или линейное относительно y^2.

$$y^2 = \frac{2b}{4a^2+1}[2a\cos(x+c) + \sin(x+c)] + C\exp(-2ax).$$

1.209. $yy' = \pm\sqrt{ay^2+b}$; уравнение с разделяющимися переменными.
Подстановка $u(x) = y^2$ приводит к легко решающемуся уравнению

$$u' = \pm 2\sqrt{au+b}.$$

1.210. $yy' + xy^2 - 4x = 0.$
Подстановка $u(x) = y^2$ приводит к линейному уравнению

$$u' + 2xu = 8x, \text{ откуда } y^2 = 4 + Ce^{-x^2}.$$

1.211. $yy' = x\exp(x/y).$
Если y принять за независимое переменное и положить $x = yu(y)$, то получим уравнение с разделяющимися переменными

$$ye^u uu' = 1 - u^2e^u.$$

1.212. $yy' + f(y^2 \pm x^2)g(x) \pm x = 0.$
Полагая $u(x) = y^2 \pm x^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u' + 2f(u)g(x) = 0$.

1.213. $(y+1)y' = y + x$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

1.214. $(y+x-1)y' - y + 2x + 3 = 0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$\ln[(3y-5)^2 + 2(3x+2)^2] + \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{3y-5}{(3x+2)\sqrt{2}} = C.$$

1.215. $(y+2x-2)y' - y + x + 1 = 0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$\ln\left(x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y + \frac{7}{3}\right) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{3}\,\frac{x+2y-3}{3x-1}\right] = C.$$

1.216. $(y-2x+1)\,y'+y+x=0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$y^2+x^2-xy+y-x+\frac{1}{3}=C\exp\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{3}\,\frac{2y-x+1}{3x-1}\right]\right).$$

1.217. $(y-x^2)\,y'=x$.

Если y принять за независимое переменное, то для $u(y)=x^2$ получим линейное уравнение $u'+2u=2y$, откуда

$$x^2=y-\frac{1}{2}+Ce^{-2y}.$$

1.218. $(y-x^2)\,y'+4xy=0$.

Подстановка $y=x^2u(x)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными $x(u-1)\,u'+2u(u+1)=0$, из которого получаем

$$(y+x^2)^2=Cy.$$

1.219. $[y+g(x)]\,y'=f_2(x)\,y^2+f_1(x)\,y+f_0(x)$;

см. уравнение Абеля (ч. I, п. 4.11).

1.220. $2yy'-xy^2-x^3=0$.

Полагая $u(x)=y^2$, получаем линейное уравнение

$$u'-xu=x^3.$$

1.221. $(2y+x+1)\,y'-(2y+x-1)=0$;

тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$2\ln|6y+3x-1|=3(x-y)+C.$$

1.222. $(2y+x+7)\,y'-y+2x+4=0$; см. ч. I, п. 4.6 (в).

$$\ln|x^2+y^2+6x+4y+13|+\mathrm{arctg}\,\frac{y+2}{x+3}=C.$$

1.223. $(2y-x)\,y'-y-2x=0$; однородное уравнение.

$$y^2-xy-x^2=C.$$

1.224. $(2y-6x)\,y'-y+3x+2=0$;

тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$4\ln|5y-15x+2|=10y-5x+C.$$

1.225. $(4y+2x+3)\,y'-2y-x-1=0$;

тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$8y+4x+5=C\exp(4x-8y-4).$$

1.226. $(4y-2x-3)\,y'+2y-x-1=0$.

Совпадает с 1.225, если y заменить на $-y$.

1.227. $(4y-3x-5)\,y'-3y+7x+2=0$;

тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в), и в то же время — уравнение в полных дифференциалах.

$$4y^2-6xy+7x^2-10y+4x=C.$$

1.228. $(4y+11x-11)\,y'-25y-8x+62=0$;

тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$(y-4x-2)^3=C(2y+x-5).$$

1.229. $(12y - 5x - 8)\, y' - 5y + 2x + 3 = 0;$
тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$(3y - x - 1)(2y - x - 2) = C.$$

1.230 $ayy' + by^2 + f(x) = 0.$
Полагая $u(x) = y^2$, получаем линейное уравнение

$$au' + 2bu + 2f(x) = 0.$$

1.231. $(ay + bx + c)\, y' + \alpha y + \beta x + \gamma = 0;$ см. ч I, п. 4.6 (в).

1.232. $xyy' + y^2 + x^2 = 0;$ однородное уравнение.

$$(2y^2 + x^2)\, x^2 = C.$$

1.233. $xyy' - y^2 + ax^3 \cos x = 0.$
Полагая $u(x) = y^2$, получаем линейное уравнение

$$xu' - 2u + 2ax^3 \cos x = 0,$$

откуда

$$y^2 = x^2 (C - 2a \sin x).$$

1.234. $xyy' - y^2 + xy + x^3 - 2x^2 = 0;$ см. 6.172 (3).

1.235. $(xy + a)\, y' + by = 0, \quad b \neq 0.$
Если y принять за независимое переменное, то получим линейное уравнение

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{b} = -\frac{a}{by},$$

откуда

$$x = e^{-\frac{y}{b}} \left(C - \frac{a}{b} \int \frac{1}{y} e^{\frac{y}{b}} dy \right).$$

1.236. $x(y + 4)\, y' - y^2 - 2y - 2x = 0.$
Это уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I. п. 4.6 (д) причем $\alpha = 1$, $f = 4$, $g = 2x^{-1}y + 2$, $h = x^{-1}y$; получаем

$$(y - x)^2 = Cx\,(2y - x + 4).$$

1.237. $x(y + a)\, y' + by + cx = 0.$
Принимая y за независимое переменное и полагая

$$u(y) = (by + cx)^{-1},$$

получаем уравнение Абеля (ч. I, п. 4.10)

$$u' + by\,(y + a)\, u^3 - (y + a - b)\, u^2 = 0.$$

Подстановка $y(x) = {}^1/_2 a\xi\eta'(\xi)$, $x = \xi^2 e^{\eta(\xi)}$ приводит это уравнение к виду

$$\xi\eta'' + \left(1 + \frac{2b}{a}\right)\eta' + \frac{4c}{a^2}\,\xi e^{\eta} = 0.$$

Об этом уравнении см. 6.76.

1.238. $[x(y + x) + a]\, y' = y(y + x) + b.$
Это уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 4.6 (д), причем $\alpha = 2$, $f = a$, $g = b$, $h = x^{-1}y + 1$. Возможен также следующий подход: полагая

$$u(x) + v(x) = x, \quad \frac{b}{a}\, u(x) - v(x) = y(x),$$

получаем

$$\frac{(a+b)\,uu'}{(a+b)\,u^2+a^2}=\frac{v'}{v};$$

следовательно, $(a+b)\,u^2+a^2=Cv^2$.

1.239. $(xy-x^2)\,y'+y^2-3xy-2x^2=0$.
Умножив на $2x$, получим уравнение в полных дифференциалах, из которого находим:

$$x^2y^2-2x^3y-x^4=C.$$

1.240. $2xyy'-y^2+ax=0$; уравнение Бернулли.
Полагая $u(x)=y^2$, получаем линейное уравнение.

$$y^2+ax\ln x=Cx.$$

1.241. $2xyy'-y^2+ax^2=0$.
Полагая $u(x)=y^2$, получаем линейное уравнение.

$$y^2+ax^2=Cx.$$

1.242. $2xyy'+2y^2+1=0$.
Полагая $u(x)=y^2$, получаем линейное уравнение.

$$(2y^2+1)\,x^2=C.$$

1.243 $x(2y+x-1)\,y'-y(y+2x+1)=0$.
Умножив на $(xy)^{-4/3}$, получим уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$(y-x+1)^3=Cxy.$$

[Исходное уравнение имеет в качестве интегрирующего множителя также $(y-x+1)^{-4}$ — ср. 1.244.
D. Mitrinovitch, *Univerzitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog faculteta, ser. mat. i fiz.*, 27 (1959), стр. 1—4. — *Прим. ред.*]

1.244. $x(2y-x-1)\,y'+y(2x-y-1)=0$.
Умножив на $(y+x+1)^{-4}$, получим уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$(y+x+1)^3=Cxy;$$

кроме того, $y=0$ также является решением.

1.245. $(2xy+4x^3)\,y'+y^2+12x^2y=0$.
Это уравнение можно записать в виде $(4x^3y)'+(xy^2)'=0$; следовательно,

$$4x^3y+xy^2=C.$$

1.246. $x(3y+2x)\,y'+3(y+x)^2=0$.
Умножив на x, получим уравненне в полных дифференциалах.

$$6x^2y^2+8x^3y+3x^4=C.$$

1.247. $(3x+2)(y-2x-1)\,y'=y^2-xy+7x^2+9x+3$.
Подстановка $x=u-{}^2/_3$, $y=v(u)-{}^1/_3$ приводит к однородному уравненню

$$3u(v-2u)\,v'=v^2-uv+7u^2.$$

Отсюда получаем

$$(x+y+1)^2\,(2y-7x-4)=C\,(3x+2).$$

Исходное уравнение может быть также записано в виде

$$y' = w + \frac{1}{w} + 1, \quad \text{где} \quad w = \frac{3x+2}{y-2x-1},$$

и, следовательно, является уравнением типа, рассмотренного в ч. I, п. 4.6 (в).

1.248. $(6xy + x^2 + 3)\, y + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$
Уравнение в полных дифференциалах.

$$3xy^2 + x^2y + 3y + x^2 = C.$$

1.249. $(axy + bx^n)\, y' + \alpha y^3 + \beta y^2 = 0.$
Полагая $u(x) = y^{-1}$, получаем уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{du} - \frac{bu}{\beta u + \alpha} x^n - \frac{a}{\beta u + \alpha} x = 0.$$

1.250. $(Bxy + Ax^2 + ax + by + c)\, y' = (By^2 + Axy + \alpha x + \beta y + \gamma)$;
уравнение Якоби.
Если $c = \gamma = 0$, то имеем тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (д), причем $\alpha = 1$, $f = a + b\frac{y}{x}$, $g = \alpha + \beta\frac{y}{x}$, $h = A + B\frac{y}{x}$. Если условие $c = \gamma = 0$ не выполнено, то подбирают подстановку вида

$$x = \xi + p, \quad y = \eta + q$$

так, чтобы удовлетворить этому условию. Для этого нужно подобрать λ так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{vmatrix} -\lambda & A & B \\ c & a+\lambda & b \\ \gamma & \alpha & \beta+\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

и исходить из уравнений

$$Ap + Bq - \lambda = 0, \quad (a+\lambda)\, p + bq + c = 0, \quad \alpha p + (\beta + \lambda)\, q + \gamma = 0.$$

В общем случае среди решений данного дифференциального уравнения всегда имеется по крайней мере одна линейная функция; поэтому предпочтительнее во всяком случае искать решение в форме $y = rx + s$.

Данное уравнение может быть написано также в виде

$$(xy' - y)(a_3x + b_3y + c_3) - y'(a_1x + b_1y + c_1) + a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Решение этого уравнения в параметрической форме можно получить из решений системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x'_\nu = a_\nu x_1 + b_\nu x_2 + c_\nu x_3 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3)$$

(об этой системе см. ч. I, п. 13.1) по формулам $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$.

[Об уравнении Якоби подробнее см. в книгах: Степанов; Матвеев; Сансоне. — *Прим. ред.*]

1.251. $(x^2y - 1)\, y' + xy^2 - 1 = 0$;
уравнение в полных дифференциалах

$$x\,y^2 - 2\,(x + y) = C.$$

1.252. $(x^2y-1)y'-(xy^2-1)=0.$

Если положить $xt(x)=y(x)$ и затем принять t за независимую переменную, а x за искомую функцию, то получим уравнение Бернулли

$$x'+\frac{1}{t-1}x=\frac{t}{t-1}x^4.$$

G. Lampariello, *Atti Accad. Lincei* (6), **19** (1934), стр. 387 и сл.

[Если заметить, что выражение $(x^2y-1)\,dy-(xy^2-1)\,dx$ имеет интегрирующий множитель $(x-y)^{-4}$, то можно указать другой путь интегрирования исходного уравнения.

D. Mitrinovitch, *Universitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fakulteta, ser. mat. i fiz.*, **27** (1959), стр. 1—4. — *Прим. ред.*]

1.253. $(x^2y-1)y'+8(xy^2-1)=0$; частный случай уравнения 1.265.

1.254. $x(xy-2)y'+x^2y^3+xy^2-2y=0.$

Полагая $u(x)=xy$, получаем $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{u}\right)+\dfrac{1}{x}=0$; следовательно,

$$(xy)^{-2}-(xy)^{-1}+\ln x=C.$$

1.255. $x(xy-3)y'+xy^2-y=0.$

Деля на xy, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$xy-\ln xy^3=C.$$

1.256. $x^2(y-1)y'+(x-1)y=0;$

уравнение с разделяющимися переменными.

$$y=Cxe^{y+\frac{1}{x}}.$$

1.257. $x(xy+x^4-1)y'=y(xy-x^4-1).$

$$(xy-1)\exp\left(xy+\frac{y^2}{2x^2}\right)=C.$$

S. Sispánov, *Bol. mat.* **11** (1938), стр. 200—206.

1.258. $2x^2yy'+y^2=2x^3+x^2.$

Полагая $u(x)=y^2-x^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $x^2u'+u=0$, следовательно,

$$u=Ce^{1/x}.$$

1.259. $2x^2yy'-y^2=x^2e^{x-\frac{1}{x}}.$

Полагая $u(x)=y^2$, получаем линейное уравнение 1.134 с переменной u вместо y.

1.260. $(2x^2y+x)y'-x^2y^3+2xy^2+y=0.$

Деля на x^3y^3, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$(xy)^{-2}+4(xy)^{-1}+2\ln x=C.$$

1.261. $(2x^2y-x)y'-2xy^2-y=0.$

Это уравнение может быть написано в виде

$$2\frac{d}{dx}\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\frac{(xy)'}{x^2y^2}.$$

Поэтому получаем

$$2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+\frac{1}{xy}=C\quad\text{и}\quad y=0.$$

1.262. $(2x^2y - x^3)\,y' + y^3 - 4xy^2 + 2x^3 = 0$; однородное уравнение.

$$C_1 (y-2x)^2 x^2 + C_2 (y^2 - x^2) = 0, \quad \text{где} \quad |C_1| + |C_2| > 0.$$

1.263. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$x^3y^2 + 7x = C.$$

1.264 $2x(x^3y+1)\,y' + (3x^3y - 1)\,y = 0$;
частный случай уравнения 1.328.

$$3x^{21/8}y^{7/4} + 7x^{-3/8}y^{3/4} = C.$$

1.265. $\left(x^{n(n+1)}y - 1\right) y' + 2(n+1)^2 x^{n-1} \left(x^{n^2}y^2 - 1\right) = 0$; см. 6.102 (4).

1.266. $(y-x)\sqrt{x^2+1}\,y' = a\sqrt{(y^2+1)^3}$.
Полагая $y = \dfrac{x + \operatorname{tg} u}{1 - x \operatorname{tg} u}$, получаем

$$u + \operatorname{arctg} x + a \int \frac{du}{\sin u - a} = C.$$

1.267. $yy' \sin^2 x + y^2 \cos x \sin x = 1$.
Полагая $u(x) = y^2$, получаем линейное уравнение.

$$y^2 = \frac{2x + C}{\sin^2 x}.$$

1.268. $f(x)\,yy' + g(x)\,y^2 + h(x) = 0$.
Полагая $u(x) = y^2$, получаем линейное уравнение

$$fu' + 2gu + 2h = 0.$$

1.269. $[g_1(x)\,y + g_0(x)]\,y' = \sum\limits_{\nu=0}^{3} f_\nu(x)\,y^\nu$; см. ч. I, п. 4.11.

1.270. $(y^2 - x)\,y' - y + x^2 = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$y^3 + x^3 - 3xy = C.$$

1.271. $(y^2 + x^2)\,y' + 2x(y + 2x) = 0$;
уравнение в полных дифференциалах и однородное.

$$y^3 + 4x^3 + 3x^2y = C.$$

1.272. $(y^2 + x^2)\,y' - y^2 = 0$; однородное уравнение.

$$\ln y + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{x\sqrt{3}} = C.$$

1.273. $(y^2 + x^2 + a)\,y' + 2xy = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$y^3 + 3x^2y + 3ay = C.$$

1.274. $(y^2 + x^2 + a)\,y' + 2xy + x^2 + b = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$y^3 + x^3 + 3(x^2y + ay + bx) = C.$$

1.275. $(y^2 + x^2 + x)\,y' - y = 0$.
Деля на $x^2 + y^2$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$y + \operatorname{arctg}(y/x) = C.$$

1.276. $(y^2 - x^2)\,y' + 2xy = 0$; однородное уравнение.

$$y = C(x^2 + y^2).$$

1.277. $(y^2+x^4)\,y'-4x^3y=0.$
Полагая $y=\pm u^2(x)$, получаем однородное уравнение.

$$y^2-x^4=Cy \quad \text{и} \quad y=0.$$

1.278. $(y^2+4\sin x)\,y'=\cos x.$
Если принять y за независимое переменное и затем положить $u(y)=\sin x$, то получим линейное уравнение $u'-4u=y^2$, из которого

$$\sin x=Ce^{4y}-\frac{y^2}{4}-\frac{y}{8}-\frac{1}{32}.$$

1.279. $(y^2+2y+x)\,y'+(y+x)^2\,y^2+y\,(y+1)=0.$
Полагая $u(x)=-y\,\dfrac{y+x}{y+1}$, получаем $u'=u^2$; следовательно,

$$y+1=y\,(y+x)\,(x+C).$$

1.280. $(y+x)^2\,y'=a^2.$
Полагая $u(x)=y+x$, получаем

$$y+x=a\operatorname{tg}\frac{y+C}{a}.$$

1.281. $(y^2\pm 2xy-x^2)\,y'\mp y^2+2xy\pm x^2=0$; однородное уравнение.

$$y\pm x=C\,(y^2+x^2).$$

1.282. $(y+3x-1)^2\,y'-(2y-1)\,(4y+6x-3)=0.$
Если положить $y=v(u)+\dfrac{1}{2}$, $x=u+\dfrac{1}{6}$, то в скобках исчезают постоянные члены; таким образом, получаем однородное уравнение $(v+3u)^2\,v'=4v\,(2v+3u)$, откуда

$$\left(y+x-\frac{2}{3}\right)(y-3x)^3=C\left(y-\frac{1}{2}\right)^3.$$

1.283. $3\,(y^2-x^2)\,y'+2y^3-6x\,(x+1)\,y-3e^x=0.$
Полагая $u(x)=y^3-3x^2y$, получаем линейное уравнение.

$$(y^3-3x^2y)\,e^{2x}-e^{3x}=C.$$

1.284. $(4y^2+x^2)\,y'=xy$; однородное уравнение.
Полагая $y=xu(x)$, получаем

$$\ln|y|=\frac{x^2}{8y^2}+C.$$

1.285. $(4y^2+2xy+3x^2)\,y'+y^2+6xy+2x^2=0$;
уравнение в полных дифференциалах и однородное.

$$4y^3+3xy^2+9x^2y+2x^3=C.$$

1.286. $(2y-3x+1)^2\,y'-(3y-2x-4)^2=0$;
тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$(y-4x+6)^5\,(4y-x-9)^5=C\,(5y-5x-3).$$

1.287. $(2y-4x+1)^2\,y'-(y-2x)^2=0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.6 (в).

$$7x-28y+2\ln|7\,(2x-y)^2-8\,(2x-y)+2|+\frac{9}{4}\sqrt{2}\ln\left|\frac{14x-7y-4-\sqrt{2}}{14x-7y-4+\sqrt{2}}\right|=C.$$

1.288. $(6y^2-3x^2y+1)\,y'-3xy^2+x^2=0$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$12y^3-9x^2y^2+6y+2x^3=C.$$

1.289. $(6y-x)^2\,y'-6y^2+2xy+a=0$.
Это уравнение можно написать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(6y-x)^3+x^3+18ax\right]=0;$$

следовательно,

$$(6y-x)^3+x^3+18ax=C.$$

1.290. $(ay^2+2bxy+cx^2)\,y'+by^2+2cxy+dx^2=0$;
уравнение в полных дифференциалах и однородное.

$$ay^3+3bxy^2+3cx^2y+dx^3=C.$$

1.291. $[b\,(\beta y+\alpha x)^2-\beta\,(by+ax)]\,y'+a\,(\beta y+\alpha x)^2-\alpha\,(by+ax)=0,$

$$a\beta-b\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0.$$

$y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x$ является решением. Полагая $y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x+u(x)$, получаем линейное уравнение

$$\beta\,(a\beta-b\alpha)\,u^2\frac{dx}{du}-(a\beta-b\alpha)\,x=b\beta u-b\beta^2u^2.$$

1.292. $(ay+bx+c)^2\,y'+(\alpha y+\beta x+\gamma)^2=0$; см. ч. I, п. 4.6 (в).

1.293. $x\,(y^2-3x)\,y'+2y^3-5xy=0$.
Деля на $x^{27}y^{16}$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$13x^{-25}y^{-15}-5x^{-26}y^{-13}=C.$$

1.294. $x\,(y^2+x^2-a)\,y'-y\,(y^2+x^2+a)=0$.
Полагая $u(x)=xy$, $v(x)=y/x$, получаем $(1+v^{-2})\,v'=au^{-2}u'$; следовательно,

$$y^2-x^2+a=Cxy.$$

1.295. $x\,(y^2+xy-x^2)\,y'-y^3+xy^2+x^2y=0$.
Деля на x^2y^2, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$xy^{-1}+x^{-1}y+\ln xy=C.$$

1.296. $x\,(y^2+x^2y+x^2)\,y'=2y^3+2x^2y^2-x^4$.
$y=-\dfrac{x^2}{2}$ является решением. Полагая $u(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{x^2}$ и принимая u за независимое переменное, получаем уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{du}+\frac{x}{2u}+\left(\frac{u}{2}-\frac{1}{8u}\right)x^3=0.$$

1.297. $2x\,(y^2+5x^2)\,y'+y^3-x^2y=0$; однородное уравнение.

$$x^{3/2}y^5=C\,(3x^2+y^2).$$

1.298. $3xy^2y'+y^3-2x=0$.
Полагая $u(x)=y^3$, получаем линейное уравнение.

$$y^3=x+Cx^{-1}.$$

1.299. $(3xy^2-x^2)\,y'+y^3-2xy=0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$y^3x-x^2y=C.$$

1.300. $6xy^2y' + 2y^3 + x = 0.$
Полагая $u(x) = y^3$, получаем линейное уравнение.

$$4xy^3 + x^2 = C.$$

1.301. $(6xy^2 + x^2)\,y' - y\,(3y^2 - x) = 0.$
Деля на x^2y, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$3y^2 + x \ln xy = Cx.$$

1.302. $(x^2y^2 + x)\,y' + y = 0.$
Деля на x^2y^2, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$xy^2 - 1 = Cxy.$$

1.303. $(xy - 1)^2\,xy' + (x^2y^2 + 1)\,y = 0.$
Полагая $u(x) = xy$, получаем уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим

$$y^2 = C \exp(xy - x^{-1}y^{-1}).$$

1.304. $(10x^3y^2 + x^2y + 2x)\,y' + 5x^2y^3 + xy^2 - 3y = 0.$
Это — уравнение вида $xh_1(x \cdot y)\,y' + yg_1(x \cdot y) = 0$. Поэтому, согласно ч. I, п. 4.13, данное уравнение имеет интегрирующий множитель

$$M = \frac{1}{xy\,(g_1 - h_1)} = -\frac{1}{5xy\,(x^2y^2 + 1)}.$$

Таким образом, получаем

$$4 \ln (x^2y^2 + 1) + \operatorname{arctg}(xy) + 2 \ln y - 3 \ln x = C.$$

1.305. $(y^3 - 3x)\,y' - 3y + x^2 = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$3y^4 - 36xy + 4x^3 = C.$$

1.306. $(y^3 - x^3)\,y' - x^2y = 0$; однородное уравнение.

$$y^3\,(y^3 - 2x^3) = C.$$

1.307. $(y^2 + x^2 + a)\,yy' + (y^2 + x^2 - a)\,x = 0.$
Уравнение в полных дифференциалах. Кроме того, можно воспользоваться подстановкой $u(x) = x^2 + y^2$. Решения даются формулой

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a\,(x^2 - y^2) = C,$$

представляющей собой уравнение семейства овалов Кассини.

1.308. $2y^3y' + xy^2 - x^3 = 0$; однородное уравнение.
Умножая на $x^2 + y^2$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$(x^2 + y^2)^2\,(2y^2 - x^2) = C.$$

1.309. $(2y^3 + y)\,y' - 2x^3 - x = 0.$
Уравнение в полных дифференциалах и в то же время уравнение с разделяющимися переменными.

$$y^4 + y^2 = x^4 + x^2 + C.$$

1.310. $(2y^3 + 5x^2y)\,y' + 5xy^2 + x^3 = 0;$
уравнение в полных дифференциалах и однородное.

$$2y^4 + 10x^2y^2 + x^4 = C.$$

1.311. $(20y^3 - 3xy^2 + 6x^2y + 3x^3)\,y' - y^3 + 6xy^2 + 9x^2y + 4x^3 = 0;$
уравнение в полных дифференциалах.

$$5y^4 - xy^3 + 3x^2y^2 + 3x^3y + x^4 = C.$$

1.312. $\left(\frac{y^2}{b}+\frac{x^2}{a}\right)(yy'+x)+\frac{a-b}{a+b}(yy'-x)=0.$
Полагая $u(x)=x^2$, $v(x)=y^2(x)$, получаем

$$\frac{\frac{u'}{a}+\frac{v'}{b}}{\frac{u}{a}+\frac{v}{b}-1}+\frac{a+b}{2ab}(u'+v')=0;$$

следовательно,

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-1=C\exp\left[-\frac{a+b}{2ab}(x^2+y^2)\right].$$

1.313. $(2ay^3+3axy^2-bx^3+cx^2)\,y'-ay^3+cy^2+3bx^2y+2bx^3=0.$

$$ay^3+bx^3+cxy=C\,(x+y).$$

1.314. $xy^3y'+y^4-x\sin x=0$; уравнение Бернулли.

$$y^4=\left(\frac{16}{x}-\frac{96}{x^3}\right)\sin x-\left(4-\frac{48}{x^2}+\frac{96}{x^4}\right)\cos x+\frac{C}{x^4}.$$

1.315. $(2xy^3-x^4)\,y'-y^4+2x^3y=0.$
Деля на x^2y^2, получаем уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$y^3+x^3=Cxy \quad \text{и} \quad y=0.$$

1.316. $(2xy^3+y)\,y'+2y^2-4=0.$
Принимая y за независимое переменное, получаем линейное уравнение: $\frac{dx}{dy}+\frac{y^3}{y^2-2}x=-\frac{y}{2(y^2-2)}$, и отсюда

$$2xy^2-4x+1=C\exp(-y^2/2).$$

1.317. $(2xy^3+xy+x^2)\,y'+y^2-xy=0.$
Деля на xy^2, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$y^2+\ln|xy|-xy^{-1}=C.$$

1.318. $(3xy^3-4xy+y)\,y'+y^2(y^2-2)=0.$
Умножая на $1+xy^2$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$x^2y^6-2x^2y^4+2xy^4-4xy^2+y^2=C.$$

1.319. $(7xy^3+y-5x)\,y'+y^4-5y=0.$
Умножая на y^3-5, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$10xy\,(y^3-5)^2+2y^5-25y^2=C.$$

1.320. $(x^2y^3+xy)\,y'=1.$
Если вместо x за независимое переменное принять y, то получится уравнение Бернулли:

$$\frac{dx}{dy}-yx-y^3x^2=0,$$

и отсюда

$$x^{-1}=2-y^2+C\exp(-y^2/2).$$

1.321. $(2x^2y^3+x^2y^2-2x)\,y'=2y+1.$
Принимая y за независимое переменное, получаем уравнение Бернулли: $(2y+1)\frac{dx}{dy}=x^2y^2(2y+1)-2x$, и отсюда

$$2y^2-2y+\ln|2y+1|=C-\frac{8}{x(2y+1)}.$$

1.322. $(10x^2y^3-3y^2-2)\,y'+5xy^4+x=0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$5x^2y^4-2y^3+x^2-4y=C.$$

1.323. $(axy^3+c)\,xy'+(bx^3y+c)\,y=0.$

$$ay^2+bx^2-2c\,(xy)^{-1}=C.$$

1.324. $(2x^3y^3-x)\,y'+2x^3y^3-y=0.$

Деля на x^3y^3, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$4(x+y)+(xy)^{-2}=C.$$

1.325. $y\,(y^3-2x^3)\,y'+(2y^3-x^3)\,x=0$; однородное уравнение.

Подстановка $y=xu\,(x)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными, из которого получаем

$$\ln|x|=-\ln|u-1|+\int\frac{(u+1)^3\,du}{(u-1)\,(u^4+u^3+3u^2+u+1)}+C.$$

Интеграл в правой части вычисляется с помощью подстановки $v=u+u^{-1}$; он равен

$$\frac{2}{7}\ln\frac{(v-2)^2}{v^2+v+1}-\frac{2}{7}\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2v+1}{\sqrt{3}}.$$

1.326. $y\,[(ay+bx)^3+bx^3]\,y'+x\,[(ay+bx)^3+ay^3]=0.$

Деля на $(ay+bx)^3$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$(ay+bx)^2\,(x^2+y^2-C)+x^2y^2=0.$$

1.327. $(xy^4+2x^2y^3+2y+x)\,y'+y^5+y=0.$

Деля на $(xy^3-1)^2$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$y^2+xy=C\,(xy^3-1).$$

1.328. $ax^2y^ny'-2xy'+y=0.$

Принимая y за независимое переменное, получаем уравнение Бернулли.

$$x\left(C+\frac{a}{n+2}\,y^{n+2}\right)=y^2.$$

1.329. $y^mx^n\,(axy'+by)+\alpha xy'+\beta y=0$, причем $a\beta-b\alpha\neq 0.$

Полагая $A=\dfrac{m\beta-n\alpha}{a\beta-b\alpha}$, $B=\dfrac{mb-na}{a\beta-b\alpha}$, получаем, что $u\,(x)=y^ax^b$ и $v\,(x)=y^\alpha x^\beta$ при $x>0$ и $y>0$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению:

$$u^{A-1}u'+v^{B-1}v'=0,$$

откуда следует

$$\frac{u^A}{A}+\frac{v^B}{B}=C.$$

1.330. $[a\,(y+x)^b+1]\,y'+a\,(y+x)^b=0.$

$$(b+1)\,y+a\,(y+x)^{b+1}=C\quad\text{при}\quad b\neq-1,$$
$$y+a\ln|y+x|=C\quad\text{при}\quad b=-1.$$

1.330a. $[f\,(x+y)+1]\,y'+f\,(x+y)=0.$

$$y+F\,(x+y)=C,\quad\text{где}\quad F\,(u)=\int f\,(u)\,du.$$

1.331. $y' \sum_{\nu=0}^{p} f_\nu(x)\, y^\nu = \sum_{\nu=0}^{q} g_\nu(x)\, y^\nu.$

Разбор этого уравнения см. P. Appell, *Journ. de Math.* (4), 5 (1889), стр. 361—423.

1.332. $\left(\sqrt{xy}-1\right) xy' - \left(\sqrt{xy}+1\right) y = 0.$

Это уравнение может быть записано в виде

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y}{x} = \frac{(xy)'}{\sqrt{(xy)^3}}.$$

Отсюда получаем

$$\ln\frac{y}{x} + \frac{2}{\sqrt{xy}} = C.$$

1.333. $\left(2x^{5/2}y^{3/2} + x^2y - x\right) y' - x^{3/2}y^{5/2} + xy^2 - y = 0.$

Деля на $(xy)^{5/2}$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$6\,(xy)^{-1/2} - 2\,(xy)^{-3/2} + 3\ln\left(xy^{-2}\right) = C.$$

1.334. $\left(\sqrt{y+x}+1\right) y' + 1 = 0.$

$$y = -x \quad \text{и} \quad y + 2\sqrt{y+x} = C.$$

1.335. $\sqrt{y^2-1}\, y' = \pm\sqrt{x^2-1}$; см. 1.61.

1.336. $\left(\sqrt{y^2+1} + ax\right) y' + \sqrt{x^2+1} + ay = 0.$

Это дифференциальное уравнение может быть написано в виде

$$\sqrt{y^2+1}\, y' + (axy)' + \sqrt{x^2+1} = 0.$$

Почленно интегрируя, получаем

$$y\sqrt{y^2+1} + \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) + 2axy + x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = C.$$

1.337. $\left(\sqrt{y^2+x^2}+x\right) y' = y$; однородное уравнение.

Полагая $\operatorname{sh} u(x) = x/y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $(\operatorname{sign} ux + \operatorname{cth} u)\, u' = x^{-1}$; следовательно,

$$\operatorname{Arsh}\frac{x}{|y|} - \ln|y| = C.$$

1.338. $\left[y\sqrt{y^2+x^2} + (y^2-x^2)\sin\alpha - 2xy\cos\alpha\right] y' + x\sqrt{y^2+x^2} + {}$
$+ 2xy\sin\alpha + (y^2-x^2)\cos\alpha = 0.$

Полагая $x = r(t)\cos t$, $y = r(t)\sin t$, получаем из этого уравнения

$$[\cos(t+\alpha)+1]\, r' = -r\sin(t+\alpha);$$

следовательно, $r = C[1+\cos(t+\alpha)]$, или

$$C(x^2+y^2) = \sqrt{y^2+x^2} - x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

1.339. $\left[x\sqrt{x^2+y^2+1} - y(x^2+y^2)\right] y' - y\sqrt{x^2+y^2+1} - x(x^2+y^2) = 0.$

Деля на $(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+1}$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$\sqrt{x^2+y^2+1} + \operatorname{arctg}(x/y) = C.$$

1.340. $\left(e_1\frac{x+a}{r_1^3}+e_2\frac{x-a}{r_2^3}\right)y'-y\left(\frac{e_1}{r_1^3}+\frac{e_2}{r_2^3}\right)=0;$
$r_1^2=(x+a)^2+y^2$, $r_2^2=(x-a)^2+y^2$; уравнение силовых линий, соответствующих закону Кулона.

Умножая на y, получаем уравнение в полных дифференциалах. Общее решение имеет вид

$$e_1\frac{x+a}{r_1}+e_2\frac{x-a}{r_2}=C.$$

1.341. $(xe^y+e^x)y'+e^y+ye^x=0;$ уравнение в полных дифференциалах.

$$xe^y+ye^x=C.$$

1.342. $x\left(3e^{xy}+2e^{-xy}\right)\left(xy'+y\right)+1=0.$
Деля на x, получаем $\left(3e^{xy}+2e^{-xy}\right)(xy)'+x^{-1}=0$; следовательно,

$$3e^{xy}-2e^{-xy}+\ln|x|=C.$$

1.343. $(\ln y+x)y'=1.$
Принимая y за независимое переменное, получаем линейное уравнение $\frac{dx}{dy}-x=\ln y$; следовательно,

$$x=e^y\left(C+\int e^{-y}\ln y\,dy\right).$$

1.344. $(\ln y+2x-1)y'=2y.$
Деля на y^2, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$2x+\ln y=Cy.$$

1.345. $x(2x^2y\ln y+1)y'=2y.$
Принимая y за независимое переменное, получаем уравнение Бернулли $2y\frac{dx}{dy}=2x^3y\ln y+x.$

$$2y+x^2y^2(2\ln y-1)=Cx^2.$$

1.346. $x(y\ln xy+y-ax)y'=y(ax\ln xy-y+ax).$

$$y=ax+\frac{C}{\ln xy}.$$

1.347. $y'(1+\operatorname{sh}x)\operatorname{sh}y+\operatorname{ch}x(\operatorname{ch}y-1)=0;$
уравнение в полных дифференциалах.

$$(\operatorname{sh}x+1)\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x=C.$$

1.348. $(x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x)y'+y\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}y=0;$
уравнение в полных дифференциалах.

$$y\operatorname{sh}x+x\operatorname{sh}y=C.$$

1.349. $xy'\operatorname{ch}\frac{y}{x}+2x\operatorname{sh}\frac{y}{x}-y\operatorname{ch}\frac{y}{x}=0;$ однородное уравнение.
При $xu(x)=y$ получаем $u'\operatorname{cth}u=-2/x$; следовательно,

$$x^2\operatorname{sh}(y/x)=C.$$

1.350. $y'\cos y-\cos x\sin^2 y-\sin y=0.$
Полагая $u(x)=\sin y$, получаем уравнение Бернулли.

$$\frac{2}{\sin y}+\cos x+\sin x=Ce^{-x}.$$

1.351. $y' \cos y + x \sin y \cos^2 y - \sin^3 y = 0$.
Полагая $u(x) = \operatorname{tg} y$, получаем уравнение Бернулли

$$u' + xu - u^3 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg}^2 y = e^{x^2}\left(C - 2\int e^{-x^2}\,dx\right).$$

1.352. $y'(\cos y - \sin\alpha \sin x)\cos y + (\cos x - \sin\alpha \sin y)\cos x = 0$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$2(y + x) + \sin 2y + \sin 2x - 4\sin\alpha \sin y \sin x = C;$$

таким образом, например, $y = \alpha - x$ есть решение.

1.353. $xy' \cos y + \sin y = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$x \sin y = C.$$

1.354. $(x \sin y - 1)\,y' + \cos y = 0$.
Принимая y за независимое переменное, получаем линейное уравнение $\cos y \dfrac{dx}{dy} + x \sin y = 1$, откуда

$$x = \sin y + C \cos y.$$

1.355. $(x \cos y + \cos x)\,y' - y \sin x + \sin y = 0$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$x \sin y + y \cos x = C.$$

1.356. $(x^2 \cos y + 2y \sin x)\,y' + 2x \sin y + y^2 \cos x = 0$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$x^2 \sin y + y^2 \sin x = C$$

1.357. $xy' \ln x \cdot \sin y + \cos y\,(1 - x \cos y) = 0$.
Полагая $u(x) = \cos y$, получаем уравнение Бернулли

$$xu' \ln x + u\,(xu - 1) = 0,$$

откуда, полагая $v(x) = u^{-1}$, получаем линейное уравнение

$$xv' \ln x + v = x,$$

из которого находим

$$(x + C)\cos y = \ln x.$$

1.358. $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$;
уравнение с разделяющимися переменными.

$$\cos x \cos y = C.$$

1.359. $3y' \sin x \sin y + 5 \cos x \cos^3 y = 0$;
уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{1}{\cos^2 y} = C - \frac{10}{3} \ln \sin x.$$

1.360. $y' \cos^2 ay = b\,(1 - c \cos ay)\sqrt{\cos^2 ay - (1 - c \cos ay)^2}$
Полагая $u(x) = (\cos ay)^{-1} - c$, получаем

$$u' = \pm\, abu\,(u + c)\sqrt{(1 - u^2)\,[(u + c)^2 - 1]}.$$

Решения этого уравнения выражаются через эллиптические функции. Изучение этих решений см. W. Müller, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 10 (1930), стр. 241 и сл.

1.360а. $\left(\cos^2\frac{x}{2}+a\right)y'=y\left(\cos^2\frac{x}{2}-y+a+1\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

Полагая $y(x)=\frac{\xi}{\eta(\xi)}$, $\xi=\frac{1}{\cos^2(2/x)}$, получаем линейное уравнение $(a\xi+1)\eta'+\eta=\xi$; его решение:

$$\eta=\frac{\xi-1}{a+1}+C(a\xi+1)^{-1/a}.$$

1.361. $[x\sin xy+\cos(x+y)-\sin y]\,y'+y\sin xy+\cos(x+y)+\cos x=0;$ уравнение в полных дифференциалах.

$$\cos xy-\sin(x+y)-\cos y-\sin x=C.$$

1.362. $(x^2y\sin xy-4x)\,y'+xy^2\sin xy-y=0.$

Полагая $u(x)=xy$, получаем $\frac{d}{dx}(\cos u+\ln u^4)=\frac{3}{x}$, откуда

$$\cos xy+\ln xy^4=C.$$

1.363. $(xy'-y)\cos^2\frac{y}{x}+x=0;$ однородное уравнение.

Полагая $xu(x)=y$, получаем $u'\cos^2 u=-x^{-1}$, следовательно,

$$\sin\frac{2y}{x}+\frac{2y}{x}+4\ln x=C.$$

1.364. $\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)xy'-\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y=0;$

однородное уравнение.

$$xy\cos(y/x)=C.$$

1.365. $[yf(r)-x]\,y'+y+xf(r)=0$, где $r=x^2+y^2$.

$$\int\frac{f(r)}{r}\,dr=2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C.$$

1.366. $f(x^2+ay^2)(ayy'+x)=y-xy'.$

Полагая $u(x)=x^2+ay^2$, $v(x)=x/y$, получаем уравнение с разделяющнмися переменными $\frac{v'}{v^2+a}=\frac{f(u)}{2u}u'$, откуда

$$\int\frac{dv}{v^2+a}=\int\frac{f(u)}{2u}\,du.$$

1.367. $f(x^cy)(bxy'-a)=x^ay^b(xy'+cy).$

Полагая $u(x)=x^{-a}y^b$, $v(x)=x^cy$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u^{-\frac{2bc}{a+bc}}u'=v^{\frac{2ab}{a+bc}-1}\frac{v'}{f(v)}.$$

368—517. Дифференциальные уравнения второй степени относительно y'

1.368. $y'^2 + ay + bx^2 = 0.$

Для решения этого уравнения переписываем его в виде $y = \alpha y'^2 + \beta x^2$ и применяем к этому уравнению методы ч. I, п. 4.15 (а). При этом получаем уравнение $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2\alpha t}{t - 2\beta x}$. Оно однородно, и его решение может быть выражено в элементарных функциях. Решив его, мы получаем в параметрической форме решения исходного уравнения.

1.369. $y'^2 + y^2 = a^2.$

Решая это уравнение относительно y', получаем два уравнения с разделяющнмися переменными. Из них находим

$$y = a\,\frac{1 - C^2}{1 + C^2}\sin x + a\,\frac{2C}{1 + C^2}\cos x$$

и, кроме того, $y = \pm a$, $y = -a\sin x$.

1.369а. $y'^2 = ay^2 + b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Решая это уравненне относительно y', получаем два уравнения с разделяющимися переменными. Из этих уравнений получаем следующие решения:

если $a = \alpha^2$, $b = \alpha^2\beta^2$, то $y = \beta\,\mathrm{sh}\,\alpha(x + C)$,

еслн $a = \alpha^2$, $b = -\alpha^2\beta^2$, то $y = \beta\,\mathrm{ch}\,\alpha(x + C)$,

если $a = -\alpha^2$, $b = \alpha^2\beta^2$, то $y = \beta\cos\alpha(x + C)$.

1.370. $y'^2 + y^2 = f^2(x).$

Это уравнение может быть сведено к уравнению Абеля. Полагая $y = f\sin u(x)$, получаем уравнение типа 1.202

$$fu' + f'\,\mathrm{tg}\,u = \pm f.$$

1.371. $y'^2 = y^3 - y^2.$

Решая это уравнение относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим для y следующие возможные решения:

$$y = 0;\quad 1;\quad \left(\cos\frac{x + c}{2}\right)^{-2}.$$

1.372. $y'^2 - 4y^3 + ay + b = 0.$

$$x = C + \int\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - ay - b}},$$

т. е. $y = \wp(x + C)$, где $\wp(x)$ — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = a$, $g_3 = b$.

Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 267—269, 333 и сл.

1.373. $y'^2 + a^2y^2(\ln^2 y - 1) = 0.$

Полагая $u(x) = \ln y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $u'^2 = a^2(1 - u^2)$, и отсюда

$$y = \exp\sin a(x + C),\ \text{а также}\ y = e\ \text{и}\ y = e^{-1}.$$

1.374. $y'^2 - 2y' - y^2 = 0.$

Решая уравнение относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными, и далее

$$1 \mp \sqrt{y^2 + 1} + y\ln\left(\sqrt{y^2 + 1} \pm y\right) = y(x + C).$$

1.375. $y'^2 + ay' + bx = 0,\ b \neq 0.$
Решаем уравнение относительно x и применяем результаты ч. I, п. 4.15. Получаем решения в параметрической форме

$$bx = -t^2 - at, \quad by = C - \frac{2}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2.$$

1.376. $y'^2 + ay' + by = 0,\ b \neq 0.$
Решаем уравнение относительно y и применяем результаты ч. I, п. 4.15. Получаем решения в параметрической форме

$$bx = -2t - a\ln t + C, \quad by = -t^2 - at.$$

Можно также решить это уравнение относительно y' и получить таким образом два уравнения с разделяющимися переменными.

1.377. $y'^2 + (x-2)y' - y + 1 = 0;$ уравнение Клеро.

$$y = C(x-2) + C^2 + 1 \quad \text{и} \quad y = x - {}^1/_4 x^2.$$

1.378. $y'^2 + (x+a)y' - y = 0;$ уравнение Клеро.

$$y = C(x+a) + C^2 \quad \text{и} \quad 4y = -(x+a)^2.$$

1.379. $y'^2 - (x+1)y' + y = 0.$
Решая это уравнение относительно y, получаем уравнение Клеро, ч. I, п. 4.18, которое дает

$$y = Cx + C(1-C) \quad \text{и} \quad y = {}^1/_4(x+1)^2.$$

1.380. $y'^2 + 2xy' - y = 0.$
Заменяя $y(x)$ на $-y_1(x)$, получаем уравнение 1.331.

1.381. $y'^2 - 2xy' + y = 0;$ уравнение Лагранжа — Даламбера (ч. I, п. 4.19).

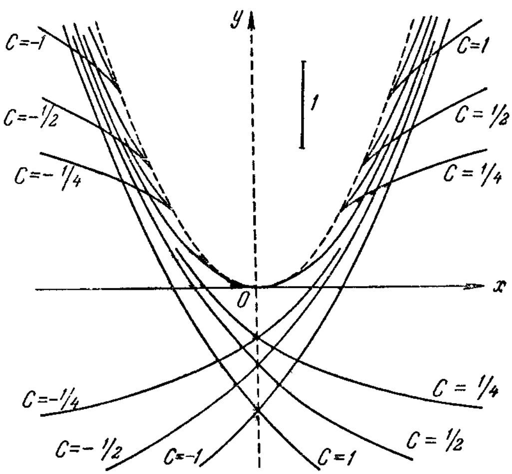

Рис. 29.

$y = 0$, $y = {}^3/_4 x^2$, а также параметрическое представление

$$x = \frac{2}{3}t + \frac{C}{t^2}, \quad y = 2xt - t^2.$$

См. рис. 29.

1.382. $y'^2 + axy' = bx^2 + c.$
Решаем это уравнение относительно y'. При $a^2 + 4b > 0$ получаем

$$y = C - \frac{a}{4}x^2 + \frac{x}{4}\sqrt{(a^2+4b)\,x^2+4c} + \\ + \frac{c}{\sqrt{4a^2+b}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \frac{4c}{a^2+4b}}\right).$$

При $a^2 + 4b \leqslant 0$ это уравнение решается аналогично.

1.383. $y'^2 + axy' + by + cx^2 = 0.$
Это уравнение может быть написано в виде

$$\left(y' + \frac{a}{2}x\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - c\right)x^2 - by.$$

Если $b = 0$, то уравнение решается легко. Если $b \neq 0$, то подстановка $y = x^2u(x)$ приводит к уравнению

$$\left(xu' + 2u + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - c - bu,$$

из которого, полагая $v^2 = {}^1/_4\, a^2 - c - bu$, получаем уравнение с разделяющимися переменными.

1.384. $y'^2 + (ax+b)\,y' - ay + c = 0$, $a \neq 0$; уравнение Клеро.

$$y = (ax+b)\,C + aC^2 + ca^{-1} \quad \text{и} \quad 4ay = 4c - (ax+b)^2.$$

1.385. $y'^2 - 2x^2y' + 2xy = 0$; см. 1.404.

1.386. $y'^2 + ax^3y' - 2ax^2y = 0$; обобщенно-однородное уравнение.
Полагая $y = \eta(\xi)$, $\xi = x^2$, получаем уравнение Клеро

$$\eta = \xi\eta' + 2\frac{\eta'^2}{a}.$$

Отсюда получаем

$$y = aCx^2 + 2aC^2 \quad \text{и} \quad 8y = -ax^4.$$

1.387. $y'^2 + (y' - y)\,e^x = 0.$
Подстановка $y = e^x u(x)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$u' = -{}^1/_2\,(2u+1) \pm {}^1/_2\sqrt{4u+1}.$$

1.388. $y'^2 - 2yy' - 2x = 0$; частный случай уравнения 1.390.
Решая это уравнение относительно x и применяя ч. I. п. 4.15 (б), получаем параметрическое представление решения

$$x = \frac{t^2}{2} - yt,$$

$$y = \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\left(C - \frac{1}{2}\operatorname{Arch}\sqrt{t^2+1}\right).$$

1.389. $y'^2-(4y+1)y'+(4y+1)y=0$.

Интегральные кривые существуют только в полуплоскости $y \geqslant -{}^1/_4$. Полагаем $2u^2(x)=4y+1$ и решаем полученное уравнение относительно u'. Получаем

$$y=C^2e^{2x}+Ce^x \quad \text{и} \quad y=-{}^1/_4.$$

Можно и исходное уравнение решить относительно y'; при этом получается уравнение с разделяющимися переменными.

1.390. $y'^2+ayy'=bx+c$.

Дифференцируем по x, принимаем y за независимое переменное и полагаем $y'(x)=p(y)$. Получаем

$$(ay+2p)\,pp'+ap^2-b=0$$

и отсюда — линейное уравнение

$$(ap^2-b)\frac{dy}{dp}+apy+2p^2=0.$$

В случае $c=0$ см. 1.405.

1.391. $y'^2+(ay+bx)y'+abxy=0$.

Это уравнение может быть записано в виде

$$(y'+ay)(y'+bx)=0$$

и, следовательно, распадается на два уравнения.

1.392. $y'^2-xyy'+y^2\ln ay=0$.

Решая относительно x и применяя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем

$$ay=\exp(Cx-C^2) \quad \text{и} \quad ay=\exp{}^1/_4x^2.$$

1.393. $y'^2+2yy'\operatorname{ctg}x-y^2=0$.

Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим

$$y(1\pm\cos x)=C.$$

1.394. $y'^2+2fyy'+gy^2=(g-f^2)\exp\left(-2\int\limits_a^x f\,dx\right)$,

$f=f(x)$, $g=g(x)$; частный случай уравнения 1.395.

$$y=U\exp\left(-\int\limits_a^x f\,dx\right);$$

при этом

$$U=\begin{cases}\sin\left(\int\limits_a^x\sqrt{g-f^2}\,dx+C\right) & \text{при} \quad g>f^2,\\ C & \text{при} \quad g\equiv f^2,\\ \operatorname{ch}\left(\int\limits_a^x\sqrt{f^2-g}\,dx+C\right) & \text{при} \quad g<f^2.\end{cases}$$

1.395. $y'^2 + 2f(x)yy' + g(x)y^2 + h(x) = 0.$

Подстановка

$$y(x) = \eta(\xi)\exp\left(-\int f\,dx\right), \qquad \xi = \int \sqrt{\pm(g-f^2)}\,dx$$

дает

$$\eta'^2 \pm \eta^2 = \frac{\pm h}{f^2-g}\exp\left(2\int f\,dx\right);$$

остается лишь еще в правой части выразить x через ξ.

D. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* **3** (1934), стр. 172; *Acad. Serbe* **1** (1933), стр. 107—117; **2** (1935), стр. 61—65.

Если для решений $y(x)$ этого уравнения положить $\lambda(x) = \dfrac{y}{y'}$, то получаем

$$y' = \left(\frac{-h}{1+2f\lambda+g\lambda^2}\right)^{1/2}, \qquad y = \lambda\left(\frac{-h}{1+2f\lambda+g\lambda^2}\right)^{1/2}.$$

Правая часть первого равенства должна быть производной правой части второго. Это дает для λ уравнение Абеля (ч. I, п. 4.11)

$$(1+f\lambda)\lambda' = \sum_{\nu=0}^{3} g_\nu(x)\lambda^\nu.$$

T. Peyovitch, *Publications math. Belgrade* **5** (1936), стр. 39—43. D. S. Mitrinovitch, *C. R. Paris* **204** (1937), стр. 1706—1708. См. также 1.461.

1.396. $y'^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0.$

Решая относительно y', получаем уравнения $y' = xy$ и $y' = -y^2$, из которых находим

$$y = C\exp{}^1/_2x^2 \quad \text{и} \quad y = (x+C)^{-1}.$$

1.397. $y'^2 - 2x^3y^2y' - 4x^2y^3 = 0.$

Подстановка $y^{-1} = \eta(\xi)$, $\xi = {}^1/_2x^2$ приводит к уравнению Клеро $\eta = \xi\eta' + {}^1/_4\,\eta'^2$. Таким образом, получаем

$$y = 0, \quad yx^4 + 4 = 0, \quad (Cx^2 + C^2)\,y = 1.$$

1.398. $y'^2 - 3xy^{2/3}y' + 9y^{5/3} = 0.$

Это уравнение можно решить относительно x и затем воспользоваться результатами ч. I, п. 4.15 (б). Проще, однако, применить подстановку $y = u^3$. При этом получается уравнение Клеро $u = xu' - u'^2$, из которого находим

$$y = (Cx - C^2)^3, \text{ а также } y = (x/2)^6.$$

1.399. $2y'^2 + (x-1)\,y' = y$; уравнение Клеро.

$$y = Cx + C\,(2C-1) \quad \text{и} \quad 8y = -(x-1)^2.$$

1.400. $2y'^2 - 2x^2y' + 3xy = 0$; обобщенно-однородное уравнение.

Полагаем $y = x^3\eta(\xi)$, $\xi = \ln|x|$ и далее $u(\xi) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-6\eta}$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$4uu' + 6u^2 \pm 3u = 0,$$

откуда

$$(3y+C)^2 = 2Cx^3 \quad \text{и} \quad y = x^3/6.$$

1.401. $3y'^2 - 2xy' + y = 0$.

Решая относительно y', получаем $3y' = x \pm \sqrt{x^2-3y}$; умножая на $3\left(x \pm \sqrt{x^2-3y}\right)$, получаем уравнение в полных дифференциалах.

$$x\,(2x^2-9y) \pm 2\,(x^2-3y)^{3/2} = C.$$

1.402. $3y'^2 + 4xy' - y + x^2 = 0$.

Полагая $3y = x^2\,(u^2-1)$, получаем $4\,(xu'+u)^2 = 1$; следовательно,

$$y = -\left(\frac{1}{2}x + C\right)^2 + 4C^2.$$

1.403. $ay'^2 + by' - y = 0$.

Решая относительно y и используя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем параметрическое представление решений

$$x = 2at + b\ln t + C, \qquad y = at^2 + bt.$$

1.404. $ay'^2 + bx^2y' + cxy = 0$; обобщенно-однородное уравнение.

Полагая $y = x^3\eta\,(\xi)$, $\xi = \ln|x|$, получаем

$$a\eta'^2 + (6a\eta + b)\,\eta' + 9a\eta^2 + 3b\eta + c\eta = 0.$$

Это уравнение решаем относительно η'. После этого решения получаются с помощью квадратур.

Пример $y'^2 - 2x^2y' + 2xy = 0$,

$$(3y^2-C)^2 = 4x^3y^3 + 4Cx^3\,(x^3-3y).$$

1.405. $ay'^2 + yy' - x = 0$.

Решаем относительно y, дифференцируем по x и принимаем $t = y'$ за независимую переменную. Получаем линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t\,(t^2-1)} + \frac{at}{t^2-1} = 0,$$

откуда находим решения в параметрической форме:

$$x = \begin{cases} \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,(C + a\,\mathrm{Arcsin}\,t) & \text{при} \quad |t| < 1, \\[2ex] \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,(C \mp a\,\mathrm{Arch}\,(\pm t)) & \text{при} \quad t\begin{cases} >1 \\ <-1, \end{cases} \end{cases}$$

$$y = \frac{x}{t} - at;$$

кроме того, $y = \pm\,(x-a)$.

1.406. $ay'^2 - yy' - x = 0$.

Решаем относительно y, дифференцируем по x и принимаем $t = y'$ за независимую переменную. Получаем линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t\,(t^2+1)} - \frac{at}{t^2+1} = 0,$$

откуда находим решения в параметрической форме:

$$x=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\left[C+a\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\left[C+a\operatorname{Arsh}t\right],$$

$$y=at-\frac{x}{t}.$$

1.407. $xy'^2=y.$
Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$y=0 \quad \text{и} \quad (y-x)^2-2C(y+x)+C^2=0.$$

1.408. $xy'^2-2y+x=0.$
Решая относительно y и используя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем решение в параметрической форме:

$$x=\frac{C}{(t-1)^2}\exp\frac{2}{t-1}, \quad y=\frac{x}{2}(t^2+1), \quad \text{и, кроме того,} \quad y=x.$$

1.409. $xy'^2-2y'-y=0$; уравнение Лагранжа — Даламбера.

$$x=\frac{2t-2\ln|t|+C}{(t-1)^2}, \quad y=xt^2-2t;$$

кроме того, $y=0$, $y=x+2$.

1.410. $xy'^2+4y'-2y=0.$
Можно применить способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$y=\left(\frac{t}{t-2}\right)^2\left(C+4\ln|t|+\frac{8}{t}\right), \quad x=\frac{2y-4t}{t^2}$$

и, кроме того, $y=2x+4$.

1.411. $xy'^2+xy'-y=0.$
Решая относительно y и используя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем

$$y=0, \text{ а также } x=Ct^2e^t, \quad y=C(t+1)e^t.$$

1.412. $xy'^2+yy'+a=0.$
Решая относительно y, получаем уравнение Лагранжа — Даламбера.

$$x=\frac{C}{\sqrt{t}}-\frac{a}{3t^2}, \quad y=-C\sqrt{t}-\frac{2a}{3t}.$$

1.413. $xy'^2+yy'-x^2=0.$
Полагая $y=\sqrt{|x|^3}\,u(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$xu'=-2u\pm\frac{1}{2}\sqrt{u^2+4\operatorname{sign}x}.$$

1.414. $xy'^2+yy'+x^3=0.$
Полагая $y=x^2u(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $2xu'=-5u\pm\sqrt{u^2-4}$, и отсюда

$$(3v^2+8)^5x^{12}=Cv^6, \quad \text{где} \quad v=-u\pm\sqrt{u^2-4}.$$

1.415. $xy'^2+yy'-y^4=0.$
Решая относительно x и используя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем

$$y(x-C^2)=C.$$

1.416. $xy'^2+(y-3x)y'+y=0$.
Это уравнение можно рассматривать как однородное и как уравнение Лагранжа — Даламбера. Находим $y=0$, $y=x$ и остальные решения в параметрической форме:

$$xt^{3/2}=C(t+1),\quad yt^{3/2}=C(3t-t^2).$$

1.417. $xy'^2-yy'+a=0$.
Деля на y', получаем уравнение Клеро $y=xy'+\frac{a}{y'}$, и отсюда

$$y=Cx+aC^{-1} \text{ и } y^2=4ax.$$

1.418. $xy'^2-yy'+ay=0$.
Решаем относительно x и используем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем $y=0$ и остальные решения в параметрической форме:

$$x=C(t-a)e^{-t/a},\quad y=Ct^2e^{-t/a}.$$

1.419. $xy'^2+2yy'-x=0$.
Полагая $y=xu(x)$, получаем $xu'+2u=\pm\sqrt{u^2+1}$, и далее подстановка $v(x)=-u\pm\sqrt{u^2+1}$ дает

$$x^3(3v^2-1)^2=Cv^3,$$

следовательно,

$$x^2\left(x^2+3y^2\pm3y\sqrt{y^2+x^2}\right)^2+C\left(y\pm\sqrt{y^2+x^2}\right)^3=0$$

или — что равносильно —

$$x^2(x^2-3y^2)^2-2Cy(y^2-3x^2)-C^2=0.$$

1.420. $xy'^2-2yy'+a=0,\quad a\neq0$.
Решая относительно y, получаем уравнение Лагранжа — Даламбера. Решения можно представить в параметрической форме

$$x=Ct+\frac{a}{3t^2},\quad y=\frac{xt}{2}+\frac{a}{2t}$$

или в виде

$$16ax^3-12x^2y^2-12Caxy+8Cy^3+C^2a^2=0;$$

кроме того, $y=\pm2\sqrt{ax}$.

1.421. $xy'^2-2yy'-x=0$; однородное уравнение.
Интегральные кривые — параболы

$$y=\frac{1}{2}Cx^2-\frac{1}{2C}.$$

1.422. $xy'^2-2yy'+4x=0$.
Полагая $y=2xu(x)$, получаем $x^2u'^2=u^2-1$; следовательно,

$$y=Cx^2+C^{-1} \text{ и } y=\pm2x.$$

1.423. $xy'^2-2yy'+2y+x=0$.
Дифференцируем по x, умножаем полученное уравнение на x и вычитаем исходное уравнение. Получаем

$$2(xy''-y'+1)(xy'-y)=0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения, каждое из которых легко решается. Получаем

$$y=\frac{1}{2}Cx^2+x+\frac{1}{C} \text{ и } y=x(1\pm\sqrt{2}).$$

1.424. $xy'^2+ayy'+bx=0$; однородное уравнение.

Решаем это уравнение относительно y и используем способ, указанный в ч. I, п. 4.15 (а). Если $a\neq-1$, то имеем

$$x=Ct\,|(a+1)\,t^2+b|^{-\frac{a+2}{2(a+1)}},\qquad y=-\frac{x}{at}(t^2+b);$$

При этом могут быть и другие решения, которые теряются из-за предположений, необходимых для применимости метода (см. ч. I, п. 4.14). В частности, если $a=-2$, то получаем $y=Cx^2+\frac{b}{4C}$ и при $b>0$, кроме того, $y=\pm x\sqrt{b}$. При $a=-1$

$$x=Ct\exp\left(-\frac{t^2}{2b}\right),\qquad y=x\left(t+\frac{b}{t}\right).$$

1.425. $(x+1)\,y'^2-(y+x)\,y'+y=0$.

Решая относительно y, получаем уравнение Клеро. Находим

$$y=Cx+\frac{C^2}{C-1}$$

и в параметрической форме:

$$x=\frac{2t-t^2}{(t-1)^2},\qquad y=\left(\frac{t}{t-1}\right)^2.$$

1.426. $(3x+1)\,y'^2-3(y+2)\,y'+9=0$.

Решая относительно y, получаем уравнение Клеро

$$y=xy'+\frac{(y'-3)^2}{3y'};$$

его решения:

$$3Cy=3C^2x+(C-3)^2\ \text{ и }\ y^2+4y=12x.$$

1.427. $(3x+5)\,y'^2-(3y+x)\,y'+y=0$.

Решая относительно y, получаем уравнение Клеро

$$y=xy'+\frac{5y'^2}{3y'-1};$$

его решения:

$$x=-5t\frac{3t-2}{(3t-1)^2},\qquad y=\frac{5t^2}{(3t-1)^2},$$

а также

$$y=Cx+\frac{5C^2}{3C-1}.$$

1.428. $axy'^2+(bx-ay+c)\,y'-by=0$.

Решая относительно y, получаем уравнение Клеро

$$y=xy'+\frac{cy'}{ay'+b};$$

его решения:

$$y=Cx+\frac{cC}{aC+b}$$

и

$$x=-\frac{bc}{(at+b)^2},\qquad y=xt+\frac{ct}{at+b}.$$

1.429. $axy'^2 - (ay + bx - a - b)\,y' + by = 0.$
Дифференцируя по x, получаем уравнение, распадающееся на два уравнения:
$$(2axy' - ay - bx + a + b)\,y'' = 0$$
и отсюда
$$y = Cx + \frac{C(a+b)}{aC - b}, \text{ а также } (ay + bx - a - b)^2 - 4abxy = 0.$$

1.430. $(a_2x + c_2)\,y'^2 + (a_1x + b_1y + c_1)\,y' + a_0x + b_0y + c_0 = 0;$ см. 1.479.

1.431. $x^2y'^2 - y^4 + y^2 = 0.$
Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными.
$$y^{-1} = \sin \ln Cx.$$

1.432. $(xy' + a)^2 - 2ay + x^2 = 0;\ a \neq 0.$
Можно решить это уравнение относительно y и затем применить результаты ч. I, п. 4.15. Другой путь: подстановка $2ay - x^2 = u^2$ дает $xuu' - a(u - a) + x^2 = 0$, и далее, полагая $u - a = xv(x)$, получаем $(xv + a)v' + v^2 + 1 = 0$. Принимая v за независимое переменное, получаем линейное уравнение. Его решение:
$$x = (v^2+1)^{-1/2}\left[C - a\ln\left(v + \sqrt{v^2+1}\right)\right].$$

1.433. $(xy' + y + 2x)^2 = 4\,(xy + x^2 + a).$
Полагая $u = xy + x^2 + a$, получаем $u' = \pm 2\sqrt{u}$.

1.434. $x^2y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0;$ однородное уравнение.
$$2Cy + x^2 = C^2.$$

1.435. $x^2y'^2 - 2xyy' + y\,(y + 1) - x = 0.$
Полагая $y = xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными
$$u' = \pm\sqrt{\frac{1-u}{x^3}}.$$

1.436. $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2\,(1 - x^2) - x^4 = 0.$
Полагая $y = xu(x)$, получаем легко разрешимое уравнение.
$$y = \pm x \operatorname{sh}(x + C).$$

1.437. $x^2y'^2 - (2xy + a)\,y' + y^2 = 0.$
Это — уравнение Клеро: $(xy' - y)^2 = ay'$.
$$y = Cx \pm \sqrt{aC}\quad (aC > 0)\quad \text{и}\quad y = -\frac{a}{4x}.$$

1.438. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0;$ однородное уравнение.
$$xy = C, \qquad x^2y = C.$$

1.439. $x^2y'^2 + 3xyy' + 3y^2 = 0.$
Это уравнение можно записать в форме
$$(xy' + {}^3/_2 y)^2 + {}^3/_4 y^2 = 0,$$
и поэтому оно имеет лишь единственное решение $y = 0$.

1.440. $x^2y'^2 + 4xyy' - 5y^2 = 0.$
Это уравнение — распадающееся: $(xy' + 5y)\,(xy' - y) = 0;$ его решения:
$$y = C_1x^{-5} \quad \text{и} \quad y = C_2x.$$

1.441. $x^2y'^2 - 4x(y+2)y' + 4y(y+2) = 0.$
Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными.

$$y = \frac{1}{2}C^2x^2 - 2Cx \quad \text{и} \quad y = -2.$$

1.442. $x^2y'^2 + (x^2y - 2xy + x^3)y' + (y^2 - x^2y)(1-x) = 0.$
Полагая $y = xu(x)$, получаем распадающееся уравнение

$$(u' + u)(u' + 1) = 0;$$

следовательно, решениями являются кривые

$$y = 0, \quad y = -x^2 + Cx, \quad y = Cxe^{-x}$$

и те гладкие кривые, которые можно из них составить.

1.443. $x(xy' - y)^2 = y'.$
С помощью преобразования Лежандра (ч. I, п. 4.20) получаем $Y^2Y' = X$ и отсюда — решения в параметрической форме:

$$x = Y' = X\left({}^3/_2X^2 - C\right)^{-2/3},$$
$$y = XY' - Y = \left(C - {}^1/_2X^2\right)\left({}^3/_2X^2 - C\right)^{-2/3}.$$

1.444. $x^2y'^2 - y(y - 2x)y' + y^2 = 0.$
Решая относительно x и применяя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем

$$y(C - x) = C^2, \quad y = 4x, \quad y = 0.$$

1.445. $x^2y'^2 + (ax^2y^3 + b)y' + aby^3 = 0.$
Это — распадающееся уравнение: $(y' + ay^3)(x^2y' + b) = 0$; его решения:

$$y^{-2} = 2ax + C \quad \text{и} \quad y = bx^{-1} + C.$$

1.446. $(x^2 + 1)y'^2 - 2xyy' + y^2 - 1 = 0.$
Решая относительно y, получаем уравнение Клеро.

$$(y - Cx)^2 = 1 - C^2 \quad \text{и} \quad y^2 - x^2 = 1.$$

1.447. $(x^2 - 1)y'^2 = 1.$
Решаем это уравнение относительно y'.

$$y = \pm \operatorname{Arch} x + C.$$

1.448. $(x^2 - 1)y'^2 = y^2 - 1$; см. также 1.60.

$$x^2 + y^2 - 2Cxy + C^2 = 1 \quad \text{и} \quad y = \pm 1.$$

1.449. $(x^2 - a^2)y'^2 + 2xyy' + y^2 = 0.$
Это — распадающееся уравнение:

$$(xy' + y + ay')(xy' + y - ay') = 0;$$

его решения:

$$(x \pm a)y = C.$$

1.450. $(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0.$
Решая относительно y, дифференцируя по x и полагая $p(x) = y'$, получаем распадающееся уравнение

$$(xp' - p)(x^2p^2 + x^2 - a^2p^2) = 0,$$

и окончательно

$$y = \frac{1}{2C}(x^2 - a^2 - C^2), \quad \text{а также} \quad y^2 + x^2 = a^2 \qquad (y \neq 0).$$

1.451. $(x^2+a)\,y'^2-2xyy'+y^2+b=0.$
Дифференцируя по x, получаем распадающееся уравнение

$$[(x^2+a)\,y'-xy]\,y''=0;$$

следовательно,

$$bx^2+ay^2+ab=0 \quad \text{и} \quad y=C_1x+C_2, \quad \text{причем} \quad aC_1^2+C_2^2+b=0.$$

1.452. $(2x^2+1)\,y'^2+(y^2+2xy+x^2+2)\,y'+2y^2+1=0.$
Полагая $u(x)=x+y$, $v(x)=xy$, получаем

$$v'^2+uu'v'+(1-v)\,u'^2=0;$$

следовательно,

$$\left(\frac{v'}{u'}\right)^2+u\,\frac{v'}{u'}+1-v=0.$$

Далее, дифференцируя, имеем $(2v'+uu')(u''v'-u'v'')=0$, и отсюда окончательно

$$xy+C\,(x+y)=C^2+1, \quad \text{а также} \quad x^2+y^2+6xy=4.$$

1.453. $(a^2-1)\,x^2y'^2+2xyy'-y^2+a^2x^2=0$
Решаем относительно y и применяем ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$x=C\,(t^2+1)^{-1/2}\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)^{-1/a}, \quad y=xt+ax\sqrt{t^2+1}.$$

1.454. $ax^2y'^2-2axyy'+y^2-a\,(a-1)\,x^2=0$; однородное уравнение.
Это уравнение может быть написано в виде

$$a\,(xy'-y)^2=a\,(a-1)\,x^2+(a-1)\,y^2.$$

Полагая $y=xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим

$$y\pm\sqrt{y^2+ax^2}=Cx^{1+\alpha}, \quad \text{где} \quad \alpha=\sqrt{(a-1)/a}.$$

1.455. $x^3y'^2+x^2yy'+a=0.$
Решаем это уравнение относительно y и дифференцируем по x. Полагая $p(x)=y'$, получаем отсюда распадающееся уравнение $(x^3p^2-a)(p'x^2+2px)=0$, и окончательно

$$Cxy=C^2x+a, \quad \text{а также} \quad xy^2=4a.$$

1.456. $x\,(x^2-1)\,y'^2+2\,(1-x^2)\,yy'+xy^2-x=0.$
Полагая $y=xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $x^2\,(x^2-1)\,u'^2=1-u^2$, и отсюда

$$(y-C)^2=(x^2-1)(1-C^2).$$

1.457. $x^4y'^2-xy'-y=0$; обобщенно-однородное уравнение.

$$xy=C^2x+C \quad \text{и} \quad 4x^2y=-1.$$

1.458. $x^2\,(x^2-a^2)\,y'^2=1.$
Решаем это уравнение относительно y'.

$$ay=\pm\arccos(a/x)+C.$$

1.458a. $[(ax+b)^2+c^2]^2\left(y'^2-n^2a^2\right)+a^2c^2y^2=0.$

Полагая $y(x)=nc\sqrt{\xi^2+1}\ \eta(\xi)$, $\xi=\dfrac{ax+b}{c}$, получаем

$$(\xi^2+1)\,\eta'^2+2\xi\eta\eta'+\eta^2=1.$$

Решая относительно η, получаем уравнение Лагранжа — Даламбера $\eta=-\xi\eta'\pm\sqrt{1-\eta'^2}$. Это уравнение имеет, например, решения $\eta=\pm 1$. Отсюда получаем для исходного уравнения два решения:

$$y=\pm n\sqrt{(ax+b)^2+c^2}.$$

1.459. $e^{-2x}y'^2-(y'-1)^2+e^{-2y}=0.$

Дифференцируем по x и исключаем y. Полагая $p(x)=y'$, получаем распадающееся уравнение

$$[p'+p(p-1)]\left(e^{-2x}p-p+1\right)=0,$$

и отсюда

$$e^{y}=Ce^{x}\pm\sqrt{1+C^2},\quad \text{а также}\quad e^{2y}+e^{2x}=1.$$

1.460. $\left(y'^2+y^2\right)\cos^4 x=a^2.$

$y=a(\cos x)^{-1}$ является решением. Вводя новую функцию $u(x)$ при помощи равенства $y'=y\operatorname{ctg} u$, получаем из данного уравнения $y\cos^2 x=\pm a\sin u$. Отсюда, дифференцируя и исключая y и y' с помощью выписанных соотношений, получаем уравнение 1.81 с переменной u вместо y.

В работе Ch. E. Wilder, *Americ. Math. Monthly* 38 (1931), стр. 17—25 содержится кинематическое истолкование уравнения и анализ интегральных кривых. Решение в квадратурах при натуральных a см. J. Zbornik, *Akad. Wien* 166 (1957), стр. 42 и след.

1.461. $Ay'^2+2Byy'+Cy^2+2Dy'+2Ey+F=0;\ A=A(x),\ B=B(x),\ \ldots$

При $A=0$ имеем уравнение Абеля. Если детерминант

$$\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\equiv 0,$$

то данное уравнение распадается на два линейных.

(a) Если $A\neq 0$, $\Delta=B^2-AC\neq 0$, то данное уравнение можно записать в виде

$$(y'+ay+b)\,(y'+\alpha y+\beta)=c\qquad (c\not\equiv 0).$$

Обозначим первую скобку через $\lambda(x)$. Тогда для каждого решения данного уравнения, если $\lambda\neq 0$, имеем

$$y'+ay+b=\lambda,\quad y'+\alpha y+\beta=c\lambda^{-1};$$

следовательно,

$$y=\frac{\lambda^2-(b-\beta)\,\lambda-c}{(a-\alpha)\,\lambda},\quad y'=\frac{\alpha\lambda^2+(a\beta-\alpha b)\,\lambda-ac}{(\alpha-a)\,\lambda}. \tag{1}$$

Производная правой части первого выражения должна быть равна правой части второго выражения. Таким образом, мы приходим к уравнению Абеля (ч. I, п. 4.11)

$$(\lambda^2+Q)\,\frac{d\lambda}{dx}=(M\lambda^2+N\lambda+P)\,\lambda$$

относительно $\lambda(x)$. Если это уравнение решено, то (1) дает решение первоначального уравнения, в предположении, что для этого решения выполнены условия, вытекающие из применения данного метода.

(б) Если $A \neq 0$, $\Delta \equiv 0$, то данное уравнение имеет вид

$$(Ay' + By)^2 + A(2Dy' + 2Ey + F) = 0.$$

Полагая $\lambda(x) = Ay' + By$, получаем

$$y = -\frac{A\lambda^2 + 2D\lambda + F}{2(AE - BD)} A, \quad y' = \frac{AB\lambda^2 + 2AE\lambda + BF}{2(AE - BD)}$$

и далее так же, как и в случае (а).

D. S. Mitrinovitch, *Publications math. Belgrade* **5** (1936), стр. 10—22; *C. R. Paris* **206** (1938), стр. 568—570.

1.462. $yy'^2 = 1$.
Решаем уравнение относительно y'. Окончательно получаем

$$4y^3 = 9(x + C)^2.$$

1.463. $yy'^2 = e^{2x}$.
Полагая $u(x) = y^{3/2}$, получаем $u' = \pm\, {}^3/_2 e^x$; отсюда находим

$$4y^3 = 9(e^x + C)^2.$$

1.464. $yy'^2 + 2xy' - y = 0$.
Полагая $u(x) = y^2$, получаем уравнение Клеро.

$$y^2 = 2Cx + C^2.$$

1.465. $yy'^2 + 2xy' - 9y = 0$; частный случай уравнения 1.469.
Полагая $u(x) = y^2$, получаем уравнение Лагранжа — Даламбера (ч. I п. 4.19) $u = \frac{x}{9} u' + \frac{1}{36} u'^2$, откуда находим решение в параметрической форме

$$x = \frac{t}{14} + Ct^{1/8}, \quad y^2 = \frac{t}{9} x + \frac{t^2}{36}.$$

1.466. $yy'^2 - 2xy' + y = 0$.
Решив относительно y, применим способ, указанный в ч. I, п. **4.15**. Получаем

$$y^2 = 2Cx - C^2 \quad \text{и} \quad y = \pm x.$$

Иначе: полагаем $u(x) = x^2 - y^2$; получается легко разрешимое уравнение $u'^2 = 4u$. Кроме того, можно поступать, как и в 1.464.

1.467. $yy'^2 - 4xy' + y = 0$.
Решаем относительно x и применяем способ, указанный в ч. I, п. **4.15**. Получаем

$$y^3 = \frac{C}{t(t^2 - 3)}, \quad x = y\frac{t^2 + 1}{4t},$$

или — что равносильно —

$$y^6 - 3x^2y^4 + 2Cx(3y^2 - 8x^2) + C^2 = 0.$$

1.468. $yy'^2 - 4a^2xy' + a^2y = 0$, $a \neq 0$; частный случай уравнения 1.469.
Решая относительно y', получаем однородное уравнение; его общее решение:

$$y^6 - 3a^2x^2y^4 + 6Caxy^2 - 16Ca^3x^3 + C^2 = 0.$$

1.469. $yy'^2 + axy' + by = 0.$

Решаем это уравнение относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Если $a+b \neq 0$, то получаем решение в параметрической форме:

$$x^{-2(a+b)} = Ct^{2a}(t^2+b)^{-2(a+b)}(t^2+a+b)^{a+2b},$$

$$(t^2+b)\,y = -axt.$$

Если $2a+b=0$, $a \geqslant 0$, то $y = \pm x\sqrt{a}$ также будет решением.

Подстановка $u(x) = y^2$ приводит к уравнению Лагранжа — Даламбера (ч. I, п. 4.19)

$$u'^2 + 2axu' + 4bu = 0.$$

1.470. $yy'^2 + x^3y' - x^2y = 0.$

Интегрирование посредством дифференцирования (ч. I, п. 4.14) дает

$$y^2 + Cx^2 = C^2.$$

1.471. $yy'^2 - (y-x)\,y' - x = 0.$

Это уравнение может быть записано в виде распадающегося уравнения $(y'-1)(yy'+x) = 0$. Таким образом, в качестве решений получаем полуокружности $x^2+y^2=C^2$ $(y \neq 0)$ и прямые $y = x + C$, а также линии, которые можно составить из частей двух указанных типов кривых.

1.472. $(y+x)\,y'^2 + 2xy' - y = 0.$

Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем $y=0$ и решение в параметрической форме:

$$x = C(t^2-1), \quad y = C(2t-1).$$

1.473. $(y-2x)\,y'^2 - 2(x-1)\,y' + y - 2 = 0.$

Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем $y=2$ и решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{t^2} + C\frac{t^2+1}{t^2}, \quad y = 2\frac{xt(t+1)-t+1}{t^2+1}.$$

1.474. $2yy'^2 - (4x-5)\,y' + 2y = 0.$

Решаем это уравнение относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15 (а).

$$4y^2 = (4x-5-C)\,C \quad \text{и} \quad y = \pm\left(x - \frac{5}{4}\right).$$

1.475. $4yy'^2 + 2xy' - y = 0$; частный случай уравнения 1.469.

Полагая $u(x) = y^2$, получаем уравнение Клеро $u = xu' + u'^2$ и из него

$$y^2 = Cx + C^2.$$

Решению $4u = -x^2$ уравнения Клеро не соответствует никакое решение исходного уравнения.

1.476. $9yy'^2 + 4x^3y' - 4x^2y = 0.$

Полагая $y^2 = \eta(\xi)$, $\xi = x^2$, получаем уравнение Клеро

$$\eta = \xi\eta' + \frac{9}{4}\eta'^2.$$

Из него находим

$$y^2 = 2Cx^2 + 9C^2.$$

1.477. $ayy'^2 + (2x - b)\,y' - y = 0.$
Делаем подстановку $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = 2x - b$, затем рассматриваем η как независимую переменную и полагаем $\xi = \eta u(\eta)$. Получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\eta^2 u'^2 = u^2 + 4a,$$

и отсюда

$$y^2 = C\,(2x - b + aC);$$

кроме того,

$$\pm 2\sqrt{-a}\;y = 2x - b \quad \text{при} \quad a < 0.$$

1.478. $(ay + b)\left(y'^2 + 1\right) = c,\ c \neq 0.$

Для каждого решения имеем, очевидно, $0 \leqslant \dfrac{ay+b}{c} \leqslant 1$. Поэтому можно выбрать $u(x)$ так, чтобы

$$ay + b = c\sin^2 u. \tag{1}$$

Тогда получаем $2cu'\sin^2 u = \pm a$; следовательно,

$$c\,(u - \sin u \cos u) = \pm ax + C. \tag{2}$$

(1) и (2) дают решения (циклоиды) в параметрической форме. Кроме того, если $c = k\pi$, решением является $y = -ba^{-1} + k\pi$, k — целое.

1.479. $(b_2y + a_2x + c_2)\,y'^2 + (a_1x + b_1y + c_1)\,y' + a_0x + b_0y + c_0 = 0.$
Преобразование Лежандра (ч. I п. 4.20) переводит это уравнение в линейное

$$[A(X) + XB(X)]\,Y' - B(X)\,Y + C(X) = 0,$$

где

$$A(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad B(X) = b_2X^2 + b_1X + b_0,$$

$$C(X) = c_2X^2 + c_1X + c_0.$$

J. Hofmann, *Nova Acta Halle* **110** (1928); в этой работе детально исследуется поведение интегральных кривых вблизи особой точки. См. также W. v. Dyck, *Abhandlungen München* 26 (1914), вып. 10, стр. 36 и сл.; J. Weigel, *Nova Acta Halle* **96** (1912), стр. 277—343.

1.480. $(ay - x^2)\,y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0.$
Если $y'(x) \neq 0$, то x можно рассматривать как функцию от y. Полагая $x = yu(y)$, получаем

$$(Cy + x)^2 = 4ay.$$

1.481. $xyy'^2 + (y^2 + x^2)\,y' + xy = 0$; однородное уравнение.
Решаем это уравнение относительно y'. Получаем

$$y = 0, \quad xy = C, \quad x^2 + y^2 = C^2,$$

а также те гладкие кривые, которые можно составить из полученных.

1.482. $xyy'^2 + (x^2 - y^2 + a)\,y' - xy = 0.$
Полагая $\eta(\xi) = y^2$, $\xi = x^2$, получаем уравнение Клеро

$$\eta = \xi\eta' + a\,\frac{\eta'}{1 + \eta'}$$

и, если $a \neq 0$, получаем софокусные конические сечения

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C + a} = 1 \quad (y \neq 0)$$

и ось $y=0$; при $a=0$ получаем полуокружности

$$x^2+y^2=C^2 \quad (y\neq 0)$$

и прямые $y=Cx$.

1.483. $(2xy-x^2)\,y'^2+2xyy'+2xy-y^2=0$; однородное уравнение. С помощью подстановки $y=xu(x)$ находим

$$x^2+y^2+2C(x+y)+C^2=0.$$

1.484. $(2xy-x^2)\,y'^2-6xyy'-y^2+2xy=0$; однородное уравнение. Это уравнение можно решить аналогично 1.483. Можно также воспользоваться подстановкой $xy=u(x)$, $y-x=v(x)$. При этом получаем $u'=\pm v'\sqrt{2u}$ и отсюда

$$2xy=(y-x+C)^2, \quad \text{а также} \quad y=0.$$

1.485. $axyy'^2-(ay^2+bx^2+c)\,y'+bxy=0$.
Это дифференциальное уравнение представляет собой уравнение линий кривизны поверхности

$$Ax^2+By^2+Cz^2=1,$$

причем

$$a=AB(C-B), \quad b=AB(A-C), \quad c=C(B-A).$$

Подстановка $\eta(\xi)=y^2$, $\xi=x^2$ приводит к уравнению Клеро

$$(\xi\eta'-\eta)(a\eta'-b)=c\eta'.$$

Отсюда получаем

$$(aC-b)\,y^2=C(aC-b)\,x^2-cC,$$

а также

$$ay^2=bx^2\pm 2x\sqrt{-bc}-c.$$

1.486. $y^2y'^2+y^2-a^2=0$.
Решаем это уравнение относительно y. Интегральными кривыми являются $y=\pm a$ и четверти окружностей, получающиеся при пересечении окружностей $(x-C)^2+y^2=a^2$ горизонтальными и вертикальными диаметрами, а также те дифференцируемые кривые, которые из них можно составить.

1.487. $y^2y'^2-6x^3y'+4x^2y=0$.
Подстановка $\eta(\xi)=y^3$, $\xi=x^2$ приводит к уравнению Клеро

$$\eta=\xi\eta'-\frac{1}{9}\eta'^2.$$

Из этого уравнения получаем

$$y^3=3Cx^2-C^2, \quad \text{а также} \quad 4y^3=9x^4.$$

1.488. $y^2y'^2-4ayy'+y^2-4ax+4a^2=0$.
Полагая $u(x)=4ax-y^2$, получаем $u'^2=4u$ и отсюда

$$4ax-y^2=(x+C)^2, \quad \text{а также} \quad y^2=4ax.$$

1.489. $y^2y'^2+2xyy'+ay^2+bx+c=0$
Положив $u(x)=y^2$, дифференцируем по x и затем полагаем $v(x)=u'$. Получаем уравнение, линейное относительно dx/dv.

1.490. $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2+a=0$.
Полагая $u(x)=y^2-x^2$, получаем легко разрешимое уравнение $u'^2+8u+4a=0$, следовательно,

$$y^2=\frac{1}{2}(C^2-a)-(x+C)^2;$$

кроме того, при $a=0$ решениями являются прямые $y=\pm x$.

1491. $y^2y'^2 + 2axyy' + (1-a)\,y^2 + ax^2 + (a-1)\,b = 0.$

Полагая $u(x) = y^2 + ax^2 - b$, получаем легко разрешимое уравнение $u'^2 = 4(a-1)\,u$, из которого находим

$$y^2 + ax^2 - b = (a-1)(x+C)^2, \quad \text{а также} \quad y^2 + ax^2 - b = 0,$$

если только это последнее уравнение имеет действительное решение.

1.492. $(y^2 - a^2)\,y'^2 + y^2 = 0;$

уравнение трактрисы (линии погони) с осью x в качестве направляющей.

Решаем это уравнение относительно y'. При этом получаем уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим

$$a \ln\left|\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| \mp \sqrt{a^2 - y^2} = x + C.$$

1.492а. $(y^2 - b)\,y'^2 + 2(xy - c)\,y' + x^2 - a = 0.$

Поворотом осей координат можно добиться того, чтобы c обратилось в нуль. Поэтому будем рассматривать уравнение

$$(y^2 - b)\,y'^2 + 2xyy' + x^2 - a = 0. \tag{1}$$

При $a = 0$, $b > 0$ получаем окружности $x^2 + (y \pm \sqrt{b})^2 = C^2$. Если $a > 0$, $b = 0$, то, меняя x и y ролями, получаем окружности $(x \pm \sqrt{a})^2 + y^2 = C^2$. В случае $a = b = c^2$ получаем эвольвенты окружности:

$$x = c\,[\cos t + (t - t_0)\sin t], \quad y = c\,[\sin t - (t - t_0)\cos t].$$

При $a > 0$, $b > 0$ получаем эвольвенты эллипса:

$$x = \sqrt{a}\left(\cos t + \frac{\sin t}{s}\int s\,dt\right), \quad y = \sqrt{b}\left(\sin t - \frac{\cos t}{s}\int s\,dt\right),$$

где $s^2 = a\sin^2 t + b\cos^2 t$ и постоянные интегрирования в обоих интегралах равны. Далее, при $a > 0$, $b < 0$ получаем эвольвенты гиперболы:

$$x = \pm\sqrt{a}\left(\operatorname{ch} t - \frac{\operatorname{sh} t}{s}\int s\,dt\right), \quad y = \sqrt{-b}\left(\operatorname{sh} t - \frac{\operatorname{ch} t}{s}\int s\,dt\right),$$

где $s^2 = a\operatorname{sh}^2 t - b\operatorname{ch}^2 t$. В случае $a < 0$, $b > 0$, как и выше, меняем x и y ролями. Соответствующие эвольвенты могут быть построены по точкам с помощью таблиц эллиптических интегралов.

W. Heybey, *Zeischrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 123 и сл.

1.493. $(y^2 - 2ax + a^2)\,y'^2 + 2ayy' + y^2 = 0.$

Уравнение траекторий, ортогональных к семейству окружностей, касающихся параболы $y^2 = 2ax$ и имеющих центры на оси x. Первый способ — рассматривать это уравнение как частный случай уравнения 1.501. Второй способ: принимаем y за независимое переменное, тогда получаем 1.432 с переменными y, x вместо x, y.

1.494. $(y^2 - a^2x^2)\,y'^2 + 2xyy' + (1-a^2)\,x^2 = 0.$

Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$x = \frac{Ct}{\sqrt{t^2+1}}, \quad y = aC - \frac{C}{\sqrt{t^2+1}}.$$

1.495. $[y^2+(1-a)x^2]\,y'^2+2axyy'+(1-a)\,y^2+x^2=0.$
Полагаем $x=r\,(x)\cos\varphi\,(x)$, $y=r\,(x)\sin\varphi\,(x)$. Получаем

$$\ln r=C\pm\varphi\sqrt{a-1},$$

если $a>1$, и $r=C$, если $a=1$; при $a<1$ не существует (действительных) решений.

1.496. $(y-x)^2\left(y'^2+1\right)-a^2\,(y'+1)^2=0.$
Решаем относительно $y-x$ и полагаем $y'=\operatorname{tg}u\,(x)$, причем $|u|<\pi/2$. Получаем

$$x=\pm\,a\sin u+C,\quad y=\mp\,a\cos u+C;$$

следовательно,

$$(x-C)^2+(y-C)^2=a^2,\ \text{кроме того,}\quad y=x\pm a\sqrt{2}.$$

1.497. $3y^2y'^2-2xyy'+4y^2-x^2=0;$
частный случай уравнения 1.491 при $a=-{}^1/_3$, $b=0$.

1.498. $(3y-2)^2\,y'^2+4\,(y-1)=0.$
Решаем относительно y'. Получаем

$$y^2-y^3=(x-C)^2.$$

1.499. $(1-a^2)\,y^2y'^2-2a^2xyy'+y^2-a^2x^2=0.$
Это уравнение может быть сведено к 1.559. Решения:

$$y^2+(x-C)^2=a^2C^2\quad\text{и}\quad(1-a^2)\,y^2=a^2x^2,\quad\text{причем}\quad|a|<1.$$

1.500. $(a-b)\,y^2y'^2-2bxyy'+ay^2-bx^2-ab=0.$
Полагая $u\,(x)=x^2+y^2$, получаем уравнение Клеро. Из этого уравнения находим

$$x^2+y^2=Cx+b-\frac{a-b}{4a}\,C^2\quad\text{и}\quad(a-b)\,y^2-bx^2=(a-b)\,b.$$

1.501. $(ay^2+bx+c)\,y'^2-byy'+dy^2=0.$
Решаем относительно x и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Тем самым данное уравнение сводится к линейному.

1.502. $(ay-bx)^2\left(a^2y'^2+b^2\right)-c^2\,(ay'+b)^2=0.$
Решаем это уравнение относительно $ay-bx$ и дифференцируем по x; полагая $p\,(x)=y'$, получаем распадающееся уравнение

$$(ap-b)\left[(a^2p^2+b^2)^{3/2}\pm abcp'\right]=0$$

и отсюда решения: прямые $ay-bx=\pm\,c\sqrt{2}$ и семейство конгруэнтных эллипсов

$$(bx-C)^2+(ay-C)^2=c^2,$$

центры которых лежат на прямой $ay-bx=0$.

1.503. $(b_2y+a_2x+c_2)^2\,y'^2+(b_1y+a_1x+c_1)\,y'+b_0y+a_0x+c_0=0.$
С помощью преобразования Лежандра (ч. I, п. 4.20) получаем из этого уравнения

$$(b_2X+a_2)^2X^2Y'^2+[2\,(b_2X+a_2)\,(c_2-b_2Y)\,X^2+(b_1X+a_1)\,X+b_0X+a_0]\,Y'+$$
$$+\,(b_2Y-c_2)^2\,X^2+(c_1-b_1Y)\,X+c_0-b_0Y=0.$$

1.504. $xy^2y'^2-(y^3+x^3-a)\,y'+x^2y=0,\ a\neq0.$
Полагая $\eta\,(\xi)=y^3$, $\xi=x^3$, получаем уравнение Клеро. Из этого уравнения находим

$$y^3=C\left(x^3+\frac{a}{C-1}\right),\quad\text{а также}\quad x^3=\frac{a}{(t-1)^2},\quad y^3=tx^3+\frac{at}{t-1}.$$

1.505. $xy^2y'^2 - 2y^3y' + 2xy^2 - x^3 = 0.$

Полагая $u(x) = y^2$, получаем распадающееся уравнение

$$(u' - 2x)(xu' - 4u + 2x^2) = 0.$$

$$y^2 = x^2 + C, \quad y^2 = x^2 + Cx^4.$$

1.506. $x^2(xy^2 - 1)y'^2 + 2x^2y^2(y - x)y' - y^2(x^2y - 1) = 0.$

Решениями являются, например, функции $y = x,\ x^{-2},\ x^{-1/2}$. Полагая $u(x) = x + y + (xy)^{-1}$, $v(x) = xy + x^{-1} + y^{-1}$, получаем

$$3v'^2 - 2uu'v' + vu'^2 = 0.$$

Это уравнение, согласно 1.401, имеет общее решение

$$u(2u^2 - 9v) \pm 2(u^2 - 3v)^{3/2} = C$$

или

$$3v^2(2u^2 + v) + 2Cu(2u^2 - 9v) + 9C^2 = 0.$$

1.507 $(y^4 - a^2x^2)y'^2 + 2a^2xyy' + y^2(y^2 - a^2) = 0.$

$y = \pm a$ являются, очевидно, решениями. Для нахождения общего интеграла решаем это уравнение относительно x

$$x = \frac{y}{y'} \pm \frac{y^2}{ay'}\sqrt{y'^2 + 1}$$

и затем применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем линейное уравнение

$$2p(p^2 + 1)\frac{dy}{dp} - y = \pm a\sqrt{p^2 + 1}, \quad \text{где} \quad p(y) = y'(x).$$

Кинематическое истолкование задачи и изучение поведения интегральных кривых по самому уравнению см. в работе Ch. E. Wilder, *Americ. Math. Monthly* 38 (1931), стр. 17—25.

1.508. $(y^4 + x^2y^2 - x^2)y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0.$

Полагая $y = xu(x)$, получаем $\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 + 1}} = \pm y'$ и отсюда

$$x = \pm y \operatorname{sh}(y + C), \quad \text{а также} \quad y = 0.$$

1.509. $9y^4(x^2 - 1)y'^2 - 6xy^5y' - 4x^2 = 0.$

Полагая $u(x) = y^3$, получаем $(x^2 - 1)u'^2 - 2xuu' - 4x^2 = 0$. Решая это уравнение относительно u и применяя способ, указанный в ч. I, п. 4.15, получаем

$$y^3 = C(x^2 - 1) - C^{-1}.$$

1.510. $x^2(x^2y^4 - 1)y'^2 + 2x^3y^3(y^2 - x^2)y' - y^2(x^4y^2 - 1) = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y^2$, $\xi = x^2$, получаем уравнение 1.506 с переменными ξ, η вместо x, y.

1.511. $\left(a^2\sqrt{y^2 + x^2} - x^2\right)y'^2 + 2xyy' + a^2\sqrt{y^2 + x^2} - y^2 = 0.$

Полагая $x = r(t)\cos t$, $y = r(t)\sin t$, получаем

$$a^2r'^2 = r^3 - a^2r^2$$

и отсюда находим

$$r\cos^2\frac{t + C}{2} = a^2.$$

1.512. $\left[a(y^2+x^2)^{3/2}-x^2\right]y'^2+2xyy'+a(y^2+x^2)^{3/2}-y^2=0.$
Это уравнение можно написать в виде

$$a\left(y'^2+1\right)(x^2+y^2)^{3/2}=(xy'-y)^2.$$

Согласно 1.515, получаем кардиоиды

$$2ar=1+\sin(t+C),$$

где $x=r\cos t$, $y=r\sin t$.

1.513. $y'^2\sin y+2xy'\cos^3 y-\sin y\cos^4 y=0.$
Полагая $u(x)=\operatorname{tg} y$, получаем уравнение Клеро 1.464 с искомой функцией u вместо y.

1.514. $y'^2(a\cos y+b)=c\cos y+d;$
уравнение с разделяющимися переменными.

$$x=\int\left(\frac{a\cos y+b}{c\cos y+d}\right)^{1/2}dy.$$

О вычислении этого интеграла см. Denizot, *Zeitschrift f. Math Phys.* **46** (1901), стр. 471—479.

1.515. $f(x^2+y^2)\left(y'^2+1\right)=(xy'-y)^2.$
Полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, где r и φ можно считать функциями некоторой переменной t, получаем

$$f(r^2)\left(r'^2+r^2\varphi'^2\right)=r^4\varphi'^2,$$

следовательно, при $t=r$

$$\varphi=\pm\int\frac{1}{r}\left[\frac{f(r^2)}{r^2-f(r^2)}\right]^{1/2}dr+C.$$

1.516. $(x^2+y^2)f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(y'^2+1\right)=(xy'-y)^2.$
С помощью подстановки, указанной в 1.515, получаем

$$\ln r=\pm\int\left[\frac{1-f(\cos\varphi)}{f(\cos\varphi)}\right]^{1/2}d\varphi+C.$$

1.517. $(x^2+y^2)f\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(y'^2+1\right)=(xy'-y)^2.$
Это уравнение можно решить по образцу 1.516.

518—544. Дифференциальные уравнения третьей степени относительно y'

1.518. $y'^3=(y-a)^2(y-b)^2.$
Подстановка $u^3(x)=(y-a)(y-b)$ приводит к уравнению

$$u'^2=\frac{4}{9}\left[u^3+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right].$$

Об этом уравнении см. 1.72.

1.519. $y'^3=f(x)(ay^2+by+c)^2.$
Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными. Можно также положить $u^3(x)=ay^2+by+c$, тогда получим $9u'^2=(4au^3+b^2-4ac)f^{2/3}$, т. е. опять уравнение с разделяющи-

мися переменными. При выполнеиии интегрирования появляются эллиптические функции.

Айнс, стр. 458.

1.520. $y'^3 + y' - y = 0.$

Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$x = C + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t|, \quad y = t^3 + t.$$

1.521. $y'^3 + xy' - y = 0$; уравнение Клеро.

$$y = Cx + C^3 \quad \text{и} \quad y = 2\,(-x/3)^{3/2} \qquad (x < 0).$$

1.522. $y'^3 - (x+5)\,y' + y = 0.$

Это уравнение может быть записано в виде

$$y = xy' + y'\left(5 - y'^2\right)$$

и, следовательно, представляет собой уравнение Клеро.

$$y = Cx + C\,(5 - C^2) \quad \text{и} \quad 27y^2 = 4\,(x+5)^3.$$

1.523. $y'^3 - axy' + x^3 = 0, \ a \neq 0.$

При $xy'' - y' \neq 0$ выражение $u\,(x) = y'/x$ является монотонной функцией от x, и потому x можно представить как функцию от u. При $u \neq -1$ получаем

$$x = \frac{au}{u^3+1}.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{du} = y'(x)\,\frac{dx}{du} = a^2\,\frac{u^2\,(1-2u^3)}{(u^3+1)^3}.$$

Решения получаем в параметрической форме:

$$x = \frac{au}{u^3+1}, \quad y = C + \frac{a^2}{6}\,\frac{4u^3+1}{(u^3+1)^2}.$$

Других решений не существует.

1.524. $y'^3 - 2yy' + y^2 = 0.$

Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$x = C \pm 3\sqrt{1-t} + 2\ln\left(1 \mp \sqrt{1-t}\right), \quad y = t\left(1 \pm \sqrt{1-t}\right).$$

1.525. $y'^3 - axyy' + 2ay^2 = 0.$

Дифференцируя по x и исключая y, получаем для $p\,(x) = y'$ распадающееся уравнение

$$\left(2p'^2 - axp' + ap\right)(9p - ax^2) = 0.$$

Первый множитель дает уравнение Клеро. Окончательно получаем

$$y = \frac{a}{4}\,C\,(x-C)^2, \quad \text{а также} \quad y = \frac{a}{27}\,x^3.$$

1.526. $y'^3 - (y^2 + xy + x^2)\,y'^2 + (y^3x + y^2x^2 + yx^3)\,y' - x^3y^3 = 0.$

Это уравнение может быть записано как распадающееся уравнение $(y' - x^2)\,(y' - y^2)\,(y' - xy) = 0$. Отсюда получаем

$$y = \frac{1}{3}\,x^3 + C, \quad y = -\frac{1}{x+C}, \quad y = C\exp\frac{x^2}{2}.$$

1.527. $y'^3 - xy^4y' - y^5 = 0$.
Полагаем $u(x) = y^{-1}$ и дифференцируем по x. Полагая, далее, $v(x) = u'$, получаем уравнение $(3v^2 - x)v' = 0$; окончательно находим

$$y = \frac{C^5}{C^2x - 1}, \quad 4x^3y^2 = 27, \quad y = 0.$$

1.528. $y'^3 + ay'^2 + by + abx = 0$.
Решаем относительно y или относительно x и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решения в параметрической форме

$$2bx = -3t^2 + 2at - 2a^2 \ln(t + a) + C, \quad by = -abx - t^3 - at^2;$$

кроме того, решением является $y = -ax$.

1.529. $y'^3 + xy'^2 - y = 0$; уравнение Лагранжа — Даламбера.

$$x = -\frac{1}{2} - t + \frac{C}{(t-1)^2}, \quad y = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{Ct^2}{(t-1)^2};$$

кроме того, решениями являются $y = 0$ и $y = x + 1$.

1.530. $y'^3 - yy'^2 + y^2 = 0$.
Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем

$$x = t \pm r \mp \ln|r + t - 2| + C, \quad y = \frac{1}{2}t^2 \pm \frac{1}{2}rt, \quad \text{где} \quad r^2 = \sqrt{t^2 - 4t}.$$

1.531. $y'^3 - (y^4 + xy^2 + x^2)y'^2 + (xy^6 + x^2y^4 + x^3y^2)y' - x^3y^6 = 0$.
Это уравнение может быть записано в виде

$$(y' - x^2)(y' - xy^2)(y' - y^4) = 0.$$

Отсюда получаем

$$3y - x^3 = C; \quad x^2y + 2 = Cy; \quad 3xy^3 + 1 = Cy^3.$$

1.532. $ay'^3 + by'^2 + cy' = y + d$.
Используя способ, указанный в ч. I, п. 4.17 (а), получаем решение в параметрической форме:

$$x = C + \frac{3a}{2}t^2 + 2bt + c\ln|t|, \quad y = at^3 + bt^2 + ct - d.$$

1.533. $xy'^3 - yy'^2 + a = 0$.
Это уравнение может быть записано как уравнение Клеро

$$y = xy' + \frac{a}{y'^2}$$

и имеет решения

$$y = Cx + aC^{-2}, \quad 4y^3 = 27ax^2.$$

1.534. $4xy'^3 - 6yy'^2 + 3y - x = 0$.
Решаем относительно y и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем

$$x = C(2t^2 - 1), \quad 3y = C(4t^3 - 1).$$

1.535. $8xy'^3 - 12yy'^2 + 9y = 0$.
Решаем относительно x и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем

$$3Cy^2 = (x + C)^3, \quad \text{а также} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = \pm {}^3/_2 x.$$

1.536. $(x^2-a^2)y'^3+bx(x^2-a^2)y'^2+y'+bx=0.$
Это уравнение может быть записано в виде распадающегося уравнения $(y'+bx)\left[y'^2(x^2-a^2)+1\right]=0$. Отсюда получаем

$$y=-\frac{1}{2}bx^2+C \quad \text{и} \quad y=\pm\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

1.537. $x^3y'^3-3x^2yy'^2+(3xy^2+x^6)y'-y^3-2x^5y=0.$
Это уравнение можно записать в виде $(xy'-y)^3=x^5(2y-xy')$. Полагая $y=xu(x)$, получаем уравнение Клеро

$$u=xu'+u'^3.$$

1.538. $2(xy'+y)^3-yy'=0.$
Полагаем $u(x)=xy$, решаем полученное уравнение относительно u и затем полагаем $v(x)=xu'$; получаем

$$u={}^1/_2v\pm{}^1/_2v\sqrt{1-8v}. \qquad (1)$$

Дифференцируя по x, находим $\dfrac{2v}{x}=v'\pm\dfrac{1-12v}{\sqrt{1-8v}}v'$, и, следовательно,

$$v\left(\sqrt{1-8v}-1\right)\exp 3\sqrt{1-8v}=Cx^2\left(\sqrt{1-8v}+1\right). \qquad (2)$$

(1) и (2) представляют собой параметрическую форму решений.

1.539. $y'^3\sin x-(y\sin x-\cos^2 x)y'^2-(y\cos^2 x+\sin x)y'+y\sin x=0.$
Это — распадающееся уравнение

$$(y'-y)(y'-\sin x)(y'\sin x+1)=0;$$

его решения:

$$y=Ce^x, \quad y=C-\cos x, \quad y=\ln|\operatorname{ctg}(x/2)|+C.$$

1.540. $2yy'^3-yy'^2+2xy'-x=0.$
Это уравнение может быть записано в виде распадающегося уравнения $(2y'-1)\left(yy'^2+x\right)=0$. Таким образом, получаем

$$y=\frac{1}{2}x+C \quad \text{и} \quad |y|^{3/2}\pm|x|^{3/2}=C, \quad \text{где} \quad xy<0.$$

1.541. $y^2y'^3+2xy'-y=0.$
Решаем относительно x, полагаем $u(y)=1/y'$ дифференцируем по y. Получаем $(yu'-u)(2y+u^3)=0$ и отсюда

$$y^2=2Cx+C^3, \quad \text{а также} \quad 32x^3+27y^4=0.$$

1.542. $16y^2y'^3+2xy'-y=0.$
Полагая $u(x)=y^2$, получаем уравнение Клеро $u=xu'+2u'^3$, из которого находим

$$y^2=Cx+2C^3 \quad \text{и} \quad 27y^4+2x^3=0.$$

1.543. $xy^2y'^3-y^3y'^2+x(x^2+1)y'-x^2y=0.$
Полагая $\eta(\xi)=y^2$, $\xi=x^2$, получаем уравнение Клеро, из которого находим

$$x^2=\frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}, \quad y=x^2t+\frac{t}{t^2+1},$$

а также

$$y^2=Cx^2+\frac{C}{C^2+1}.$$

1.544. $x^7y^2y'^3-(3x^6y^3-1)y'^2+3x^5y^4y'-x^4y^5=0.$
Полагая $\eta(\xi)=y^3$, $\xi=x^3$, получаем уравнение Клеро, из которого находим

$$y^3=C^3x^3+C^2 \quad \text{и} \quad 3x^2y=\sqrt[3]{4}.$$

545—576. Дифференциальные уравнения более общего вида

1.545. $y'^4 = (y-a)^3 (y-b)^2$.

Полагая $y - a = u^2(x)$, получаем $4u'^2 = \pm u(u^2 + a - b)$. Об этом уравнении см. 1.72.

1.546. $y'^4 + 3(x-1)y'^2 - 3(2y-1)y' + 3x = 0$.

Решая относительно y, получаем уравнение Лагранжа — Даламбера.

1.547. $y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0$.

Решая относительно x и дифференцируя по x, получаем

$$\left(2yy'' - y'^2\right)\left(y'^2 - 4y^{3/2}\right) = 0$$

и отсюда

$$y = C^2(x - C)^2, \quad \text{а также} \quad 16y = x^4.$$

1.548. $y'^6 = (y-a)^4 (y-b)^3$.

Полагая $y - a = u^3(x)$, получаем $9u'^2 = u^3 + a - b$. Об этом уравнении см. 1.72.

1.549. $x^2\left(y'^2 + 1\right)^3 = a^2$.

Решаем относительно x и применяем способ, указанный в ч. I, п. 4.15. Получаем решения в параметрической форме:

$$x = aT, \quad y = C - at^3 T, \text{ где } T = (t^2+1)^{-3/2}.$$

1.550. $y'^r = ay^s + bx^{\frac{rs}{r-s}}$

Полагая $u(x) = y^{1-\frac{s}{r}}$, получаем однородное уравнение

$$\left(\frac{r}{r-s}\right)^r u'^r = a + b\left(\frac{x}{u}\right)^{\frac{rs}{r-s}}.$$

1.551. $y'^n = f^n(x)(y-a)^{n+1}(y-b)^{n-1}$

Введя новую функцию $u(x)$ при помощи равенства $u^n = \pm \dfrac{y-b}{y-a}$, легко получим

$$\frac{y-b}{y-a} = \left(\frac{b-a}{n} \int f\,dx\right)^n.$$

1.552. $y'^n = f(x)\,g(y)$.

Решая относительно y', получаем уравнение с разделяющимися переменными. Или иначе, что сводится к тому же самому, делаем замену $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \int f^{1/n}\,dx$ и получаем уравнение $\eta'^n = g(\eta)$.

1.553. $ay'^m + by'^n = y$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.17 (а).

При $m \neq 1$, $n \neq 1$ получаем решение в параметрической форме:

$$x = C + \frac{am}{m-1}t^{m-1} + \frac{bn}{n-1}t^{n-1}, \quad y = at^m + bt^n.$$

1.554. $x^{n-1}y'^n - nxy' + y = 0$.

Дифференцируя по x, получаем для $p(x) = y'$ уравнение

$$[nxp' + (n-1)p]\left(x^{n-2}p^{n-1} - 1\right) = 0$$

и отсюда

$$y = Cnx^{\frac{1}{n}} - C^n, \quad \text{а также} \quad y = (n-1)\, x^{\frac{1}{n-1}}.$$

J. Rose, *Mathesis* 44 (1930), стр. 33—36.

1.555. $\sqrt{y'^2+1} + xy' - y = 0$; уравнение Клеро.
Для нелинейного решения получаем параметрические уравнения

$$x = -t\,(t^2+1)^{-1/2}, \quad y = (t^2+1)^{-1/2},$$

т. е. оно представляет собой полуокружность $y = +\sqrt{1-x^2}$, так как здесь $xt < 0$.

1.556. $\sqrt{y'^2+1} - xy'^2 + y = 0$; уравнение Лагранжа — Даламбера.

$$x = \frac{\sqrt{t^2+1} - \ln\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) + C}{(t-1)^2}, \quad y = xt^2 - \sqrt{t^2+1}.$$

1.557. $x\left(\sqrt{y'^2+1} + y'\right) - y = 0$.
Полагая $y = xu\,(x)$, получаем

$$2xuu' + u^2 + 1 = 0$$

и отсюда

$$y = +\sqrt{Cx - x^2}.$$

1.558. $ax\sqrt{y'^2+1} + xy' - y = 0$.
Дифференцируя по x и принимая $t = y'$ за независимую переменную, получаем $-\dfrac{a}{x}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{at + \sqrt{t^2+1}}{t^2+1}$. Решение данного уравнения в параметрической форме определяется уравнениями

$$x^a\,(t^2+1)^{a/2}\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) = C, \quad y = xt + ax\sqrt{t^2+1}.$$

1.559. $y\sqrt{y'^2+1} - ayy' - ax = 0$.
Решаем это уравнение относительно y, дифференцируем по x и исключаем x с помощью исходного уравнения. Получаем $\dfrac{d^2}{dx^2}\,y^2 + 2 = 0$, и отсюда

$$y = \operatorname{sign}(aC)\sqrt{a^2C^2 - (x-C)^2},$$

а также $y\sqrt{1-a^2} = ax$ при $|a| < 1$.

1.560. $ay\sqrt{y'^2+1} = 2xyy' - y^2 + x^2$.
Полагая $u\,(x) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v\,(x) = \dfrac{x^2+y^2}{y}$, получаем из этого уравнения

$$v'\,(u) = \frac{v'\,(x)}{u'\,(x)} = \pm\frac{v^2}{a}\sqrt{v^2 - a^2};$$

следовательно,

$$(u+C)^2 = a^{-2} - v^{-2}.$$

Далее, отсюда следует, что все решения удовлетворяют уравнениям

$$a^2\,[x + C\,(x^2+y^2)]^2 = (x^2+y^2)^2 - a^2y^2$$

или

$$x^2 + y^2 = \pm\, ay.$$

Будет ли решение одного или другого из этих уравнений удовлетворять и исходному дифференциальному уравнению, следует особо проверять в каждом отдельном случае.

1.561. $f(x^2+y^2)\sqrt{y'^2+1} = xy' - y$.
Полагая $x = r(t)\cos t$, $y = r(t)\sin t$, получаем

$$t = \int \frac{f(r^2)}{r\sqrt{r^2 - f^2(r^2)}}\,dr.$$

1.562. $a\sqrt[3]{y'^3+1} + bxy' - y = 0$; уравнение Лагранжа — Даламбера.
При $b \neq 1$ получаем решение в параметрической форме:

$$x = t^{\frac{b}{1-b}}\left[C + \frac{a}{1-b}\int t^{\frac{2b-1}{b-1}}(1+t^3)^{-\frac{2}{3}}\,dt\right],$$
$$y = bxt + a\sqrt[3]{1+t^3}.$$

Кроме того, $y = a$ является решением. При $b = 1$ получается уравнение Клеро (ч. I, п. 4.18).

1.563. $\ln y' + xy' + ay + b = 0$.
Если $a \neq 0$, $a \neq -1$, то решаем это уравнение относительно y и применяем метод, указанный в ч. I, п. 4.15 (а). Получаем решение в параметрической форме:

$$x = \frac{1}{at} + Ct^{-\frac{1}{a+1}}, \quad y = -\frac{1}{a}(xt + \ln t + b).$$

При $a = -1$ получается уравнение Клеро; оно имеет решения

$$y = Cx + \ln C + b \quad \text{и} \quad y = \ln(-1/x) + b - 1 \qquad (x < 0).$$

При $a = 0$ решаем это уравнение относительно x и применяем метод, указанный в ч. I, п. 4.17 (б). Получаем решение в параметрической форме:

$$x = -\frac{\ln t + b}{t}, \quad y = C + (b-1)\ln t + \frac{1}{2}(\ln t)^2.$$

1.564. $\ln y' + a(xy' - y) = 0$; уравнение Клеро.

$$y = Cx + a^{-1}\ln C \quad \text{и} \quad ay + 1 + \ln(-ax) = 0.$$

1.565. $y\ln y' + y' - y\ln y - xy = 0$.
Решая относительно x и применяя способ, рассмотренный в ч. I, п. 4.15 (б), получаем решение в параметрической форме:

$$x = \ln\frac{t}{y} + \frac{t}{y}, \quad \ln y - \frac{t^2}{2y^2} - \frac{t}{y} = C.$$

1.566. $\sin y' + y' = x$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.17 (б).

$$x = t + \sin t, \qquad y = \frac{t^2}{2} + t\sin t + \cos t + C.$$

1.567. $a\cos y' + by' + x = 0$.
Решая относительно x и применяя способ, указанный в ч. I, п. 4.17 (б), получаем решение в параметрической форме:

$$x = -a\cos t - bt, \quad y = C - at\cos t + a\sin t - \frac{b}{2}t^2.$$

1.568. $y'^2 \sin y' = y$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 4.17 (a).

$$y = t^2 \sin t, \quad x = t \sin t - \cos t + C.$$

1.569. $\left(y'^2 + 1\right) \sin^2 (xy' - y) = 1.$

Это — уравнение Клеро: $y = xy' \pm \arcsin \dfrac{1}{\sqrt{y'^2+1}}$; его решения:

$$y = Cx \pm \arcsin \frac{1}{\sqrt{C^2+1}} \quad \text{и} \quad x = \frac{1}{t^2+1}, \quad y = xt + \operatorname{arcctg} t.$$

1.570. $\left(y'^2 + 1\right) (\operatorname{arctg} y' + ax) + y' = 0, \quad a \neq 0.$

Решаем относительно x и применяем способ, рассмотренный в ч. I, п. 4.15. Получаем решение в параметрической форме:

$$-ax = \frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t, \quad -ay = C - \frac{1}{t^2+1}.$$

1.570a. $f(y') = yy' + x.$

Об одном методе решения см. W. Heybey, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 124.

1.571. $ax^n f(y') + xy' - y = 0.$

Дифференцируя по x, получаем для $p(x) = y'$ уравнение

$$anx^{n-1} f(p) + ax^n f'(p)\, p' + xp' = 0;$$

если принять p за независимое переменное, то получим уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dp} + \frac{1}{n} \frac{f'(p)}{f(p)} x + \frac{1}{anf(p)} x^{2-n} = 0.$$

D. S. Mitrinovitch, *Acad. Serbe* **1** (1933), стр. 113 и сл.

1.572. $(xy' - y)^n f(y') + yg(y') + xh(y') = 0.$

С помощью преобразования Лежандра

$$y'(x) = X, \quad x = Y'(X), \quad y(x) = XY'(X) - Y(X)$$

получаем (см. ч. I, п. 4.20) уравнение Бернулли

$$[Xg(X) + h(X)]\, Y' - g(X)\, Y + f(X)\, Y^n = 0.$$

D. S. Mitrinovitch, *Acad. Serbe* **2** (1935), стр. 62.

1.573. $f\left(xy'^2\right) + 2xy' - y = 0.$

1.576 дает решение $[y - f(C)]^2 = 4Cx$.

1.573a. $f(yy' + x) = y^2 \left(y'^2 + 1\right).$

Если $f(u)$ непрерывно дифференцируема, а $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то, дифференцируя по x, получаем

$$[f'(u) - 2yy']\, u'(x) = 0, \quad \text{где} \quad u(x) = yy' + x. \tag{1}$$

Если в уравнении (1) первый множитель в некоторой точке отличен от нуля, то он будет отличен от нуля и в некоторой окрестности этой точки, следовательно, в этой окрестности равен нулю второй множитель и, значит, $u = a$, т. е. $2yy' = -2x + 2a$, откуда

$$y^2 = -(x-a)^2 + b.$$

Подставляя полученное выражение в исходное уравнение, видим, что оно является решением при $b = f(a)$. Таким образом, получаем решение

$$y^2 = f(a) - (x-a)^2.$$

Если в некоторой точке $u' \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки первый множитель в (1) равен нулю, следовательно, $y^2 = \int f'(u)\,dx$. Из равенств $f'(u) = 2yy' = 2(u-x)$ получаем, далее, $(f''-2)\,u' = -2$. Поэтому

$$y^2 = \int f'(u)\,[1 - {}^1/_2 f''(u)]\,du = f(u) - {}^1/_4 f'^2(u) + C.$$

Подставляя эту функцию в уравнение, находим, что $C=0$. Таким образом, получаем решение в параметрической форме:

$$x = u - {}^1/_2 f'(u),$$
$$y^2 = f(u) - {}^1/_4 f'^2(u),$$

если $f''(u) \neq 2$.

Maria di Bello, *Rendiconti Napoli* (4), **10** (1940), стр. 111—114.

1.574. $f\left(x - \frac{3}{2} y'^2\right) + y'^3 = y.$

Дифференцируя, получаем $(1 - 3y'y'')\left[y' - f'\left(x - {}^3/_2 y'^2\right)\right] = 0$. Поэтому

$$y = ({}^2/_3 x - C)^{3/2} + f({}^3/_2 C)$$

и возможно еще

$$y = t^3 + f(x - {}^3/_2 t^2), \quad f'(x - {}^3/_2 t^2) = t.$$

1.575. $y'f(xyy' - y^2) - x^2y' + xy = 0.$

Решения, как легко проверить, даются формулой

$$(y^2 + C)\,f(C) = Cx^2.$$

Получаются ли из этого равенства все решения — это следует каждый раз отдельно проверять.

1.575а. $\Phi(f_x + f_y y',\ f - x(f_x + f_y y')) = 0, \quad f = f(x, y).$

В случае $f = y$ получаем уравнение Клеро, в случае $f = x^2 + y^2$ — уравнение 1.573а. Для того, чтобы получить решение в общем случае, дифференцируем это уравнение по x. Если Φ_u, Φ_v — частные производные функции $\Phi(u, v)$, то имеем

$$(f_x + y'f_y)'\,(\Phi_u - x\Phi_v) = 0.$$

Полагая первый сомножитель равным нулю, получаем решения из уравнения

$$f(x, y) = Ax + B, \quad \text{где} \quad \Phi(A, B) = 0.$$

Остается лишь исследовать, имеет ли уравнение

$$\Phi_u(\ldots) - x\Phi_v(\ldots) = 0$$

какие-либо решения, и какие из них удовлетворяют исходному уравнению.

Maria di Bello, *Rendiconti Napoli* (4), **10** (1940), стр. 281—287.

1.576. $\Phi[f(x, y, y'),\ g(x, y, y')] = 0.$

Если числа a, b таковы, что $\Phi(a, b) = 0$, и если, исключая y' из равенств

$$f(x, y, y') = a, \quad g(x, y, y') = b,$$

мы получаем дифференцируемую функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую обоим этим уравнениям, то $y(x)$ является, очевидно, решением уравнения $\Phi = 0$.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения с алгебраическими иррациональностями: 61, 62, 142, 263, 276.

Уравнения с показательными функциями: 7, 17—20, 33, 34, 49, 51, 61, 63, 90, 99, 100, 109, 156, 158, 283, 344.

Уравнения, содержащие логарифмические функции: 127, 156, 174, 183, 279, 283, 286, 308, 412, 413.

Уравнения с гиперболическими функциями: 21, 64, 65, 414, 415.

Уравнения с тригонометрическими функциями: 3—5, 8, 22—25, 66—71, 88, 91, 175, 177, 178, 217, 218, 416—438.

Уравнения с эллиптическими функциями: 26—28, 72—74, 439—441.

Уравнения с произвольными функциями: 29, 30—32, 36, 38, 75—85, 128, 163, 180, 205, 219—221, 236, 278, 303, 442—445.

1—90. $ay'' + \ldots$

2.1. $y'' = 0.$

$y = C_1 + C_2 x$. Фундаментальное решение: $^1/_2\,|x - \xi|$. Поэтому функция Грина $\Gamma(x, \xi)$ для каждой однородной краевой задачи имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = C_1(\xi) + xC_2(\xi) + {}^1/_2\,|x - \xi|,$$

если только функция Грина существует, т. е. если краевая задача имеет лишь решение $y \equiv 0$. Для краевой задачи с условиями типа Штурма

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

имеем при $x \leqslant \xi$

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{(\alpha x - a\alpha - \beta)(\gamma\xi - b\gamma - \delta)}{(b - a)\alpha\gamma + \alpha\delta - \beta\gamma};$$

при $x \geqslant \xi$ в стоящей справа дроби нужно поменять x и ξ местами. Для задачи с условиями $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$ не существует функции Грина, так как $y = C$ является ненулевым решением этой краевой задачи. Для краевой задачи с условиями

$$\alpha y(a) + \beta y(b) = 0, \qquad \gamma y'(a) + \delta y'(b) = 0$$

функция Грина, если только она вообще существует, имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\beta(\gamma + \delta)\xi - \delta(\alpha + \beta)x + a\alpha\delta - b\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)} & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \\[2ex] \dfrac{\gamma(\alpha + \beta)x - \alpha(\gamma + \delta)\xi + a\alpha\delta - b\beta\gamma}{(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)} & \text{при} \quad x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Для краевой задачи с периодическими условиями

$$y(a)=y(b) \quad y'(a)=y'(b)$$

$y=C$ является ненулевым решением. Поэтому для нее не существует функции Грина в собственном смысле. Обобщенная функция Грина имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(x,\ \xi)=\frac{1}{2}\,|x-\xi|-\frac{(x-\xi)^2}{2(b-a)}-\frac{b-a}{12}.$$

2.2. $y''+y=0$.

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$. Фундаментальное решение: $^1/_2\sin|x-\xi|$.

2.3. $y''+y=\sin nx$.

$$y=\begin{cases} y_0-\dfrac{\sin nx}{n^2-1} & \text{при} \quad n^2\neq 1,\\ y_0\mp {}^1/_2 x\cos x & \text{при} \quad n=\pm 1,\end{cases}$$

где $y_0=C_1\cos x+C_2\sin x=A\sin(x-B)$.

2.4. $y''+y=a\cos bx$.

$$y=\begin{cases} \dfrac{a}{1-b^2}\cos bx+C_1\sin x+C_2\cos x & \text{при} \quad b^2\neq 1,\\ \left(\dfrac{1}{2}\,ax+C_1\right)\sin x+C_2\cos x & \text{при} \quad b=\pm 1.\end{cases}$$

2.5. $y''+y=\sin ax\sin bx$.

Правая часть этого уравнения равна $^1/_2\Re\left[e^{(a-b)\,ix}-e^{(a+b)\,ix}\right]$, поэтому, согласно ч. I, п. 22.2, находим

$$y=\frac{\cos(a-b)\,x}{2-2(a-b)^2}-\frac{\cos(a+b)\,x}{2-2(a+b)^2}+C_1\cos x+C_2\sin x,$$

если $|a+b|\neq 1$ и $|a-b|\neq 1$; при $|a-b|=1$ первую, а при $|a+b|=1$ вторую дробь нужно заменить выражением $^1/_4 x\sin x$.

2.6. $y''-y=0$.

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}=C_1^*\operatorname{ch}x+C_2^*\operatorname{sh}x.$$

Фундаментальное решение: $^1/_2\operatorname{sh}|x-\xi|$. Поэтому для каждой линейной краевой задачи функция Грина имеет вид

$$\Gamma(x,\ \xi)=C_1(\xi)\,e^x+C_2(\xi)\,e^{-x}+\frac{1}{2}\operatorname{sh}|x-\xi|,$$

если только функция Грина вообще существует, т. е. если однородная краевая задача имеет единственное решение $y\equiv 0$. Например, в случае краевых условий $y'(a)=y'(b)=0$ имеем

$$\Gamma(x,\ \xi)=-\frac{\operatorname{ch}(x-a)\operatorname{ch}(\xi-b)}{\operatorname{sh}(b-a)} \quad \text{при} \quad x\leqslant\xi,$$

а в случае краевых условий $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ имеем

$$\Gamma(x,\ \xi)=\frac{e^{x-\xi+b}+e^{\xi-x+a}}{2(e^a-e^b)} \quad \text{при} \quad x\leqslant\xi.$$

Так как обе эти краевые задачи самосопряженны, то в обоих случаях $\Gamma(x,\ \xi)$ для $x\geqslant\xi$ можно получить, поменяв в вышеприведенных выражениях x и ξ местами.

2.7. $y'' - 2y = 4x^2 \exp x^2$.

$$y = \exp x^2 + C_1 \exp x\sqrt{2} + C_2 \exp\left(-x\sqrt{2}\right).$$

2.8. $y'' + a^2 y = \operatorname{ctg} ax$.

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{\sin ax}{a^2} \ln\left|\frac{1-\cos ax}{\sin ax}\right|.$$

2.9. $y'' + \lambda y = 0$.

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} x\sqrt{|\lambda|} + C_2 \operatorname{sh} x\sqrt{|\lambda|} & \text{при} \quad \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 x & \text{при} \quad \lambda = 0, \\ C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \lambda > 0. \end{cases}$$

Приближенные выражения для собственных значений и собственных функций однородной краевой задачи третьего рода имеются в ч. II, п. 9.2 (a_1).

В отдельных случаях для собственных значений и собственных функций легко могут быть найдены явные выражения.

(а) $y(a) = y(b) = 0$.

Собственные значения $\lambda_n = n^2\pi^2/(b-a)^2$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$, собственные функции (нормированные)

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin n\pi \frac{x-a}{b-a}.$$

(б) $y'(a) = y'(b) = 0$.

$\lambda_n = n^2\pi^2/(b-a)^2$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$, собственные функции (нормированные):

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \quad \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos n\pi \frac{x-a}{b-a} \quad \text{при} \quad n \geqslant 1.$$

(в) $y'(a) = \alpha y(a)$, $y'(b) = \alpha y(b)$ $\quad (\alpha \neq 0)$.

λ_n те же, что и в (а), $\varphi_n = \cos n\pi \dfrac{x-a}{b-a} + \alpha \dfrac{b-a}{n\pi} \sin n\pi \dfrac{x-a}{b-a}$.

(г) $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$.

$$\lambda_n = 4n^2\pi^2/(b-a)^2, \quad \varphi_n = C_1 \cos x\sqrt{\lambda_n} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda_n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Кроме λ_0, все собственные значения двукратны.

(д) $y(b) = -y(a)$, $y'(b) = -y'(a)$.

$$\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/(b-a)^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\varphi_n = C_1 \cos x\sqrt{\lambda_n} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda_n}.$$

Собственные значения двукратны.

(е) $y(a) = y(b)$, $y'(a) = -y'(b)$.

Эта задача о собственных значениях не самосопряженна и не регулярна. Каждое λ является собственным значением н притом простым. Собственные функции:

$$\varphi = \begin{cases} \cos k\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right) & \text{при} \quad \lambda = k^2, \\ 1 & \text{при} \quad \lambda = 0, \\ \operatorname{ch} k\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right) & \text{при} \quad \lambda = -k^2. \end{cases}$$

(ж) $cy(0) = y(\pi)$, $y'(0) = cy'(\pi)$ $\quad (c \neq 0, \pm 1)$.

Все собственные значения положительны и определяются из условия $\cos \pi \sqrt{\lambda} = 2c(c^2+1)^{-1}$. Нормированные собственные функции:

$$\varphi_{2n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[(2n+p)x + \alpha] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2n-1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[(2n-p)x - \alpha] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где α определяется условиями

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}, \quad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2+1}} \operatorname{sign}(1-c), \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

а p — условиями:

$$\cos p\pi = 2c(c^2+1)^{-1} \qquad (0 < p < 1).$$

(з) Краевое условие: функция $y(x)$ ограничена при $|x| \to \infty$. Спектр непрерывный, каждое положительное собственное значение двукратно, собственные функции

$$C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0.$$

(и) Если дано дифференциальное уравнение $y'' - a^2 y = 0$, $a > 0$ с краевыми условиями «$y(x)$ ограничено при $-\infty < x < +\infty$», то соответствующая функция Грина имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{1}{2a} \exp(-a|x-\xi|).$$

2.10 $y'' + (ax+b)y = 0$, $a \neq 0$.

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = ax+b$, получаем $a^2\eta'' + \xi\eta = 0$. О решении этого уравнения см. 2.14 и 2.162 (10).

2.11. $y'' - (x^2+1)y = 0$.

$$y = e^{x^2/2}\left(C_1 + C_2 \int e^{-x^2}\,dx\right).$$

В случае краевых условий «$y(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$» функция Грина имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} I(-\infty, x)\, I(\xi, \infty) \exp\dfrac{1}{2}(x^2+\xi^2) & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} I(x, \infty)\, I(-\infty, \xi) \exp\dfrac{1}{2}(x^2+\xi^2) & \text{при} \quad x \geqslant \xi, \end{cases}$$

где $I(u, v) = \int\limits_u^v e^{-t^2}\,dt.$

2.11a. $y'' - (x^2+3)y = 0$

$$y = xe^{\frac{1}{2}x^2}\left(C_1 + C_2 \int \frac{1}{x^2} e^{-x^2}\,dx\right).$$

2.12. $y'' - (x^2+a)y = 0$.

Частный случай вырожденного гипергеометрического уравнения 2.273 (11), нормальная форма уравнения 2.46. Полагая $y(x) = \eta(\xi)$,

$\xi = x\sqrt{2}$, получаем уравнение Вебера 2.87

$$4\eta'' = (\xi^2 + 2a)\,\eta,$$

а полагая $u(x) = y\exp(x/2)$, — уравнение 2.46

$$u'' - 2xu' - (a+1)\,u = 0.$$

Для уравнения $y'' - (x^2+1)\,y + \lambda y = 0$ с краевыми условиями «$y \to 0$ при $|x| \to \infty$» собственные значения равны $\lambda_n = 2n+2$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), а нормированные собственные функции равны

$$\varphi_n(x) = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{-1/2} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

где H_n — полиномы Чебышева — Эрмита (см. 2.46). О функции Грина этой задачи о собственных значениях см. 2.11.

См. Курант и Гильберт, стр. 316.

2.13. $y'' - (a^2x^2 + a)\,y = 0.$

$$y = e^{ax^2/2}\left[C_1 + C_2\int e^{-ax^2}\,dx\right].$$

2.14. $y'' = cx^{\alpha}y.$

Это уравнение тесно связано со специальным уравнением Риккати (ч. I, п. 4.8) и с уравнением Бесселя 2.162. Родственными являются также уравнения 2.60 и 2.105.

Подстановка $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = 1/x$ приводит это уравнение к виду $\eta'' = c\xi^{-\alpha-4}\eta$.

При $\alpha = -2$ исходное уравнение есть уравнение Эйлера; его решения:

$$y = \begin{cases} C_1 x^{\frac{1}{2}+s} + C_2 x^{\frac{1}{2}-s} & \text{при} \quad 4c+1>0, \\ C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x}\,\ln x & \text{при} \quad 4c+1=0, \\ C_1\sqrt{x}\cos(s\ln x) + C_2\sqrt{x}\sin(s\ln x) & \text{при} \quad 4c+1<0, \end{cases}$$

причем $2s = \sqrt{|4c+1|}$.

При $\alpha \neq -2$ полагаем $q = (\alpha+2)/2$, и пусть (верхние знаки относятся к a_ν, а нижние — к b_ν; произведение, в которое не входит ни один сомножитель, считается равным 1)

$$a_\nu,\ b_\nu = \prod_{k=1}^{\nu}\frac{(2k-1)\,q \mp 1}{kq \mp 1} \quad \text{при} \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

если $\pm 1/q$ не равно никакому натуральному числу;

$$a_\nu,\ b_\nu = \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{\nu}\frac{(2k-1)\,q \mp 1}{kq \mp 1} & \text{при} \quad 0 \leqslant \nu \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad \nu > n, \end{cases}$$

если $\pm 1/q = 2n+1$ — нечетное натуральное число;

$$a_\nu,\ b_\nu = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \nu < 2n, \\ \displaystyle\prod_{k=2n+1}^{\nu}\frac{(2k-1)\,q \mp 1}{kq \mp 1} & \text{при} \quad \nu \geqslant 2n, \end{cases}$$

если $\pm 1/q = 2n$ — четное натуральное число; наконец, полагаем

$$U_{1,2} = a_0 \mp \frac{a_1}{1!} X + \frac{a_2}{2!} X^2 \mp \frac{a_3}{3!} X^3 + \ldots,$$

$$V_{1,2} = b_0 \pm \frac{b_1}{1!} X + \frac{b_2}{2!} X^2 \pm \frac{b_3}{3!} X^3 + \ldots,$$

где $X = q^{-1} x^q \sqrt{c}$. Тогда

$$U_1^* = e^X U_1, \qquad U_2^* = e^{-X} U_2,$$

$$V_1^* = e^{-X} V_1, \qquad V_2^* = e^X V_2$$

— решения данного дифференциального уравнения (решение Кели). Если $1/q = 2n+1$, то $C_1 U_1^* + C_2 U_2^*$ есть общее решение и ряды U_1, U_2 обрываются; если $1/q = -(2n+1)$, то $C_1 V_1^* + C_2 V_2^*$ есть общее решение и ряды V_1, V_2 обрываются. Если первое условие не выполнено, то $U_1^* = U_2^*$; если второе условие не выполнено, то $V_1^* = V_2^*$; в этих случаях общим решением будет $C_1 U_1^* + C_2 V_2^*$.

Если $1/q = 2n+1$ и n — целое число, то подстановка $y(x) = \eta(\xi)\,\xi^n$, $q\xi = x^q$ сводит данное уравнение к уравнению типа 2.153, и мы получаем

$$y = x\left(x^{1-2q} D\right)^{n+1}\left[C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{c}}{q} x^q\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{q} x^q\right)\right] \quad \text{при} \quad n \geqslant 0,$$

$$y = \left(x^{1-2q} D\right)^{-n}\left[C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{c}}{q} x^q\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{q} x^q\right)\right] \quad \text{при} \quad n < 0,$$

где $D = d/dx$.

Так как исходное уравнение типа 2.162 (10), то его решения также могут быть непосредственно выражены через функции Бесселя. Это важно потому, что бесселевы функции хорошо изучены и протабулированы.

Если рассматривается задача о собственных значениях

$$y'' + \lambda x^{\nu} y = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0 \qquad (a \leqslant 0,\ b > 0),$$

то для нее существует бесконечно много собственных значений, которые в общем случае асимптотически приближаются к двум прямым на комплексной λ-плоскости. Собственные значения и собственные функции могут быть асимптотически выражены через функции Бесселя. Далее, справедлива теорема о разложении произвольной функции по собственным функциям.

О подробностях см. R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **31** (1929), стр. 1—24.

Для краевой задачи

$$y'' + \frac{y}{4x^2} = 0, \qquad y(a) = y(a+1) = 0 \qquad (a > 0)$$

функция Грина при $x \leqslant \xi$ имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = \sqrt{x\xi}\, \ln\frac{x}{a} \ln\frac{\xi}{a+1}\left[\ln\frac{a+1}{a}\right]^{-1};$$

при $x \geqslant \xi$ в этой формуле x и ξ следует поменять местами.

Ватсон, стр. 102. [Качественные результаты можно извлечь из книги Беллмана, гл. VI.—*Прим. ред.*]

2.15. $y'' = (a^2x^{2n} - 1)\,y$. Решение неизвестно.
Указанные в работе A. C. Banerji, P. L. Bhatnagar, *Proc. Acad. Allahabad* 8 (1938), стр. 85—87 решение и метод его отыскания неверны.

2.16. $y'' + (ax^{2c} + bx^{c-1})\,y = 0$; см. 2.273 (12).

2.17. $y'' + (e^{2x} - \nu^2)\,y = 0$; см. 2.162 (23).

2.18. $y'' + ae^{bx}y = 0$; см. также 2.162 (23).
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \exp bx$, получаем 2.104:

$$b^2\xi\eta'' + b^2\eta' + a\eta = 0.$$

2.19. $y'' = \left(4a^2b^2x^2e^{2bx^2} - 1\right)y$. Решение неизвестно.
Указанные в работе A. C. Banerji, P. L. Bhatnagar, *Proc. Acad. Allahabad* 8 (1938), стр. 87—91 решение и метод его отыскания неверны.

2.20. $y'' + (ae^{2x} + be^x + c)\,y = 0$.
Это — уравнение Хилла 2.30 с мнимым периодом $2\pi i$; полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = ix$, получаем уравнение 2.30 с действительным периодом 2π. Полагая $y = \eta(\xi)\,e^{x/2}$, $\xi = e^x$, получаем уравнение 2.154:

$$\xi^2\eta'' + (a\xi^2 + b\xi + c + {}^1/_4)\,\eta = 0.$$

См. также 2.273 (14).

2.20a. $y'' = (a^2e^{2x} + a(2b+1)\,e^x + b^2)\,y$; частный случай уравнения 2.29.

$$y = E\left(C_1 + C_2\int\frac{dx}{E^2}\right), \quad \text{где} \quad E = \exp(ae^x + bx).$$

2.21. $y'' + (a\,\mathrm{ch}^2\,x + b)\,y = 0$.
Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = ix$ приводит к уравнению типа 2.22. См. также 2.268 и 2.348.

2.22. $y'' + (a\cos 2x + b)\,y = 0$; уравнение Матье.
[Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II, гл. 19; Янке, Эмде и Лёш; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах, 1953; М. Д. О. Стрэтт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Айнс; Сансоне, т. I, гл. VI, § 4; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

Это уравнение можно записать также в виде

$$y'' + (2a\cos^2 x + b - a)\,y = 0,$$

и поэтому подстановка $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = \cos^2 x$ переводит его в уравнение

$$2\xi(\xi - 1)\,\eta'' + (2\xi - 1)\,\eta' - \left(a\xi + \frac{b-a}{2}\right)\eta = 0,$$

т. е. в уравнение типа 2.268. Поэтому 2.268 дает также и метод для решения рассматриваемого здесь уравнения Матье. По поводу других форм уравнения Матье см. опять-таки 2.268.

Далее, данное уравнение, если написать его в виде

$$y'' + (a\cos 2x + \lambda)\,y = 0, \tag{1}$$

можно рассматривать как частный случай уравнения Хилла 2.30, причем следует учитывать, что коэффициент при y имеет период π, а не 2π.

Те понятия и задачи, которые относятся к уравнению Хилла, играют важную роль и в применении к уравнению Матье. В частности, из 2.30 получаем, что для заданных чисел a, λ существуют решение $y(x)$ и характеристический показатель μ, такие, что

$$y(x+\pi)=e^{2\pi\mu}y(x). \tag{2}$$

Если $y_1(x)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, то, согласно ч. I, п. 18.7, характеристический показатель μ определяется уравнением

$$\operatorname{ch} 2\pi\mu = y_1(\pi). \tag{3}$$

Так как $y_1(x)$ может быть с любой степенью точности найдено с помощью приближенных методов ч. I, гл. VIII, то, таким образом, и μ может быть найдено с любой степенью точности.

Другой метод заключается в следующем. Для того, чтобы найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), напишем y в виде ряда $y=e^{2\mu x}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2kix}$ и подставим его в уравнение (1). При этом получим для c_k бесконечную систему однородных линейных уравнений. Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, характеристический показатель μ должен быть выбран так, чтобы выполнялось условие

$$\operatorname{ch}\pi\mu = 1+2\Delta(0)\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda},$$

причем $\Delta(0)$ обозначает детерминант Хилла

$$\Delta(0)=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{a}{\lambda-4} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1 & \frac{a}{\lambda-1} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \frac{a}{\lambda} & 1 & \frac{a}{\lambda} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \frac{a}{\lambda-1} & 1 & \frac{a}{\lambda-1} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \frac{a}{\lambda-4} & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Для малых a можно найти приближенное значение μ из уравнения

$$\operatorname{ch}\pi\mu = 1+2\sin^2\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda}+\frac{\pi a^2}{4(1-\lambda)\sqrt{\lambda}}\sin\pi\sqrt{\lambda}+O(a^4).$$

С помощью введенной выше функции $y_1(x)$ и определяемого уравнением (3) числа μ получаем следующие результаты о совокупности решений уравнения (1):

(a) если $y_1(\pi)>1$, то

$$y=C_1e^{2\mu x}\varphi_1(x)+C_2e^{-2\mu x}\varphi_2(x),$$

где φ_1, φ_2 — периодические функции с периодом π;

(б) если $y_1(\pi) < -1$, то $\mu = \rho + \frac{i}{2}$, ρ действительно,

$$y = C_1 e^{2\rho x}\varphi_1(x) + C_2 e^{-2\rho x}\varphi_2(x),$$

где φ_1, φ_2 — периодические функции с периодом 2π;

(в) если $|y_1(\pi)| < 1$, то $\mu = i\nu$ чисто мнимое, $\cos 2\pi\nu = y_1(\pi)$,

$$y = (C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x)\,\varphi_1(x) + (C_2 \cos \nu x - C_1 \sin \nu x)\,\varphi_2(x),$$

где φ_1, φ_2 — периодические функции с периодом π;

(г) если $y_1(\pi) = \pm 1$, то y представляет собой сумму периодической функции и периодической функции, умноженной на x.

Исследованы периодические решения рассматриваемого уравнения, получающиеся при определенных значениях a, λ (такие значения λ называются *собственными значениями*[1])), в первую очередь решения с периодом 2π. Эти последние называются *функциями Матье первого рода*; при заданном a они могут существовать лишь для $\lambda \geqslant -a$. Если для некоторой пары чисел a, λ такая функция существует, то среди решений данного уравнения, линейно не зависимых от нее, функций Матье первого рода быть не может (кроме случая $\lambda = n^2$, $a = 0$); эти решения называются *функциями Матье второго рода*. Подставляя в функцию Матье ix вместо x, получим так называемые *присоединенные функции Матье первого и второго рода*, они удовлетворяют уравнению

$$y'' - (a \operatorname{ch} 2x + \lambda)\,y = 0.$$

Под *присоединенными функциями Матье третьего рода* понимают такие линейные комбинации функций первого и второго рода, которые при $x \to \infty$ с точностью до постоянного множителя стремятся асимптотически к

$$e^{-x/2} \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{2a}\, e^x\right).$$

Функции Матье первого рода имеют разложения Фурье вида

$$C_n(x, a) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m+1} \cos(2m+1)\,x \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$C_n(x, a) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m} \cos 2mx \qquad (n = 0, 2, 4, \ldots),$$

$$S_n(x, a) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n\,\,2m+1} \sin(2m+1)\,x \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$S_n(x, a) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,\,2m} \sin 2m\,x \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots).$$

---

[1]) Об их вычислении см. в случае действительного a: Ince, *Proceedings Edinburgh* **45** (1926), стр. 20—29, 316—322; **47** (1927), стр. 294—301; в случае мнимого a: H. P. Miltholland, S. Goldstein, *Philos. Magazine* (7), 8 (1929), стр. 834—840. Об оценках для собственных значений уравнения $y'' + 2i\nu y' + (\lambda - \nu^2 + a\cos 2x)\,y = 0$ см. D. H. Weinstein, *Philos. Magazine* (7), 20 (1935), стр. 288—294.

При этом C_0 при заданном a представляет собой четную функцию, являющуюся решением уравнения (1), соответствующим наименьшему *периодическому* собственному значению (см. 2.30); C_1 [S_1] — четное [нечетное] решение, соответствующее наименьшему *полупериодическому* собственному значению; C_2 [S_2] — четное [нечетное] решение, соответствующее следующему *периодическому* собственному значению, и т. д. Эти решения должны быть, кроме того, нормированы так, чтобы

$$\int_0^{2\pi} C_0^2 dx = 2\pi \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} C_n^2 dx = \int_0^{2\pi} S_n^2 dx = \pi \quad \text{при} \quad n \neq 0.$$

При $a = 0$ имеем $S_n = \sin nx$, $C_n = \cos nx$. При фиксированном a функции Матье первого рода образуют ортогональную систему и удовлетворяют однородному интегральному уравнению

$$y(x) = \varkappa \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\sqrt{2a}\,\sin x \sin t}\, y(t)\, dt.$$

Таблицу коэффициентов для разложений функций C_n, S_n при $n = 0, 1, 2$ см. S. Goldstein, *Transactions Cambridge Soc.* **23**, № XI (1927). Асимптотику решений уравнения (1) при комплексных x и больших λ (или больших a) исследовал R. E. Langer, *Transactions Americ. Math. Soc.* **36** (1934), стр. 636—695. Различные вопросы освещены в работах: Nielsen, *Physical Review* (2), **40** (1932), стр. 445—456; Teller, Weigert, *Nachrichten Göttingen* (1932), стр. 218—231; Pitzer, *Journ. Chem. Phys.* **5** (1937), стр. 468, 473; Crawford, там же, **8** (1940), стр. 273; Wilson, *Chem. Rév.* **27** (1940), стр. 31 и Приложение II, табл. 3; Brainer, Weygandt, *Philos. Magazine* (7), **30** (1940), стр. 458; A. Erdélyi, *Math. Zeitschrift* **41** (1936), стр. 653—664.

2.23. $y'' + (a\cos^2 x + b)\, y = 0$; см. 2.22.

2.23a. $$y'' = \left(ab\sin 2x + \frac{a^2 - b^2}{2}\cos 2x + (2bc - a)\sin x + (2ac + b)\cos x + \frac{a^2 + b^2}{2} + c^2\right) y.$$

$$y = E\left(C_1 + C_2 \int \frac{dx}{E^2}\right), \quad \text{где} \quad E = \exp(a\sin x - b\cos x + cx).$$

2.24. $y'' = (1 + 2\,\mathrm{tg}^2 x)\, y$.

$$y = \frac{C_1}{\cos x} + C_2\left(\sin x + \frac{x}{\cos x}\right).$$

2.25. $$y'' = \left[\frac{m(m-1)}{\cos^2 x} + \frac{n(n-1)}{\sin^2 x} + a\right] y.$$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)\cos^m x \sin^n x$, $\xi = \sin^2 x$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260

$$\xi(\xi - 1)\eta'' + [(\alpha + \beta + 1)\xi - \gamma]\eta' + \alpha\beta\eta = 0,$$

где α, $\beta = {}^1/_2(m + n) \pm {}^1/_2\sqrt{-a}$, $\gamma = n + {}^1/_2$. При $m = 0$ или $n = 0$ см. также 2.424 и 2.420.

2.26. $y'' = [A\wp(x) + B]\, y$; уравнение Ламе.

[Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II, гл. 23; Янке, Эмде и Леш; М. Д. О. Стрэтт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Айнс; Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

О задачах, связанных с уравнением Ламе, см. 2.408.

Более подробно исследован случай $A = n(n+1)$, где n — натуральное число. Если ω_1, ω_2 — периоды функции $\wp$, то для уравнения

$$y'' = [n(n+1)\wp(x) + a]\, y \tag{1}$$

каждая из точек $x = k\omega_1 + l\omega_2$ слабо особая с индексами $r = n+1$, $-n$. Решения уравнения (1) мероморфны во всей комплексной x-плоскости. В окрестности точки $x = k\omega_1 + l\omega_2$ существуют решения вида

$$y_1 = (x - k\omega_1 - l\omega_2)^{n+1} Y_1(x), \quad y_2 = (x - k\omega_1 - l\omega_2)^{-n} Y_2(x),$$

где Y_1, Y_2 — функции, регулярные в этой точке.

$n = 1$: решениями уравнения (1) являются функции

$$y = \frac{\sigma(x \pm \alpha)}{\sigma(x)} e^{\mp x\zeta(\alpha)}, \tag{2}$$

где α определяется из условия $\wp(\alpha) = a$ и σ, ζ — функции Вейерштрасса, известные из теории эллиптических функций. [См. ч. I, п. 18.8 — *Прим. ред.*] Если

$$a \neq e_1,\ e_2,\ e_3 \quad \left(e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right),\quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right),$$

то оба решения (2) линейно независимы. Если $a = e_\nu$, то

$$y_1 = \frac{\sigma(x+\omega)}{\sigma(x)} e^{-\eta x/2}, \quad y_2 = [\zeta(x+\omega) + e_\nu x]\, y_1$$

образуют фундаментальную систему решений; при этом

$$\omega = \frac{1}{2}\omega_1,\quad \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2),\quad \frac{1}{2}\omega_2 \text{ и } \eta = \eta_1,\quad \eta_1 + \eta_2,\ \eta_2$$

при $\nu = 1, 2, 3$.

$n = 2$: если $a^2 \neq 3g_2$ (обозначим через g_2, g_3 инварианты функции $\wp(x)$), то решение имеет вид

$$y = \frac{d}{dx} \frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)} e^{-x[\zeta(\alpha) + \beta]},$$

где α — корень уравнения

$$\wp(\alpha) = \frac{a_1^3 + g_3}{3a_1^2 - g_2}, \quad a_1 = \frac{a}{3}, \quad \beta = \frac{\wp'(\alpha)}{2\wp(\alpha) - a_1}.$$

Если $a^2 = 3g_2$, то $y = \wp(x) + \frac{1}{2}a_1$ является решением.

Имеются методы решения уравнения (1) и для других значений n. Например, $y = \wp'(x)$ — решение уравнения $y'' = 12\wp(x)\, y$; уравнение $4y'' = 3\wp(x)\, y$ имеет решения

$$y_1 = [\wp'(x/2)]^{-1/2}, \quad y = \wp(x/2)\, y_1.$$

2.27. $y'' + (a \operatorname{sn}^2 x + b) y = 0$; уравнение Ламе, см. 2.408.

2.28. $y'' = \left(\frac{1}{30} \wp^{(4)}(x) + \frac{7}{3} \wp''(x) + a\wp(x) + b\right) y.$

Решение имеется в книге A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, стр. 464.

2.29. $y'' = \{ [f(x)]^2 + f'(x) \} y.$

Одно из решений: $y = \exp \int f(x)\, dx.$

М. Ельшин, *ДАН СССР* XVIII (1938), стр. 144.

2.30. $y'' + [\Phi(x) + \lambda] y = 0$ с периодической функцией $\Phi(x)$; уравнение Хилла. [Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II, гл. 19; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах, 1953; М. Д. О. Стрэтт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Г. В. Бондаренко, Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний, 1936; Сансоне, т. I, гл. VI; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

Дифференциальные уравнения этого типа часто встречаются в физических, технических и астрономических вопросах. Ряд важных уравнений подпадает частью непосредственно, частью после выполнения соответствующим образом подобранных подстановок под тип уравнения Хилла, например, обобщенное уравнение Лежандра в виде 2.436 и 2.430, вырожденное гипергеометрическое уравнение (см. 2.273, 2.154, 2.20), а также уравнение Бесселя и уравнение Матье.

Далее будет предполагаться, что $\Phi(x)$ имеет действительный период 2π. Тогда это уравнение не может иметь двух линейно независимых решений с периодом 4π, однако, согласно теореме Флоке (ч. I, п. 18.7), оно обязательно имеет решения $y(x)$, которые при соответствующем выборе действительного или комплексного числа μ, называемого *характеристическим показателем*, удовлетворяют функциональному уравнению

$$y(x + 2\pi) = e^{2\pi\mu} y(x). \tag{1}$$

Решение $y(x)$ называется *устойчивым* или *неустойчивым* в зависимости от того, будет ли μ чисто мнимым или же оно будет иметь отличную от нуля действительную часть; решение называется *периодическим* или *полупериодическим* в зависимости от того, будет ли $\exp(2\pi\mu) = +1$ или -1. Соответствующие значения λ и $\bar{\lambda}$ параметра называется *периодическими* или *полупериодическими собственными значениями.*

О вычислении характеристического показателя см. ч. I, п. 18.7. Можно поступать следующим образом: пусть периодическая функция $\Phi(x)$ представлена рядом Фурье: $\Phi(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}{}^{*} a_n e^{inx}$ (звездочка означает, что $n = 0$ при суммировании пропускается); решение, существующее по теореме Флоке, представим соответственно в виде $y = e^{\mu x} \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{inx}$.

Требуется вычислить значения μ и b_n, причем не все b_n должны быть равны нулю. Подставляя выражение для y в уравнение, получаем для b_n бесконечную систему однородных линейных уравнений, которая имеет решение, обладающее требуемыми свойствами, лишь в том случае, если некоторый зависящий от μ бесконечный детерминант равен нулю. Равенство нулю этого детерминанта дает условие для определения μ;

после этого b_n находятся из соответствующих линейных уравнений. Если μ чисто мнимое, то найденные таким образом решения называются *функциями Хилла*; эти функции имеют период $2\pi b$, если $i\mu = a/b$ (a, b — целые). См. также, как частный случай, уравнение Матье 2.22 и далее уравнение 2.236.

По поводу системы Хилла

$$y_p'' = \sum_{q=1}^{n} \Phi_{p,\,q}(x)\, y_q \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

где $\Phi_{p,\,q}$ — периодические функции с одним и тем же периодом, см. G. Lemaitre, O. Godart, *Acad. Belgique Bulletins* (5). 24 (1938), стр. 19—23; L. Cesari, *Memorie Acad. d'Italia* (6), 11 (1940), стр. 663—695.

2.31. $y'' = f(x)\, y$.

Полагая $y' = yu(x)$, получаем уравнение Риккати, ч. I, п. 4.8,

$$u' + u^2 = f(x). \tag{1}$$

Если $u(x)$ — решение этого уравнения, то решения исходного уравнения получаются как решения линейного уравнения первого порядка

$$y' - u(x)\, y = C \exp\left(- \int u\, dx\right),$$

где C — произвольная постоянная.

Если $\varphi_1 \neq 0$ и φ_2 — решения уравнения

$$y'' = [f(x) + a]\, y, \tag{2}$$

при $a = a_1$, a_2, то

$$u(x) = \varphi_1 (\varphi_2/\varphi_1)' \tag{3}$$

есть решение уравнения

$$u'' = \left[\varphi_1 \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\varphi_1} + a_2 - a_1\right] u = \left[2\left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2 - f(x) + a_2 - 2a_1\right] u. \tag{4}$$

Если φ_2 в выражении (3) пробегает все решения уравнения (2), в котором $a = a_2$, то формула (3) дает все решения уравнения (4). Этот факт может быть иногда использован для того, чтобы найти решения более сложного уравнения с помощью решений уравнения более простого.

2.32. $y'' + \left[\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'} - \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right] y = 0,\ g = g(x)$.

См. 2.162 (14).

2.33. $y'' + y' + ae^{-2x} y = 0$.

Это уравнение можно упростить подстановкой $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = e^{-x}$. Получается уравнение 2.9: $\eta'' + a\eta = 0$.

2.34. $y'' - y' + ae^{2x} y = 0$.

Принимая $\xi = -x$ за новое независимое переменное, получаем уравнение 2.33.

2.35. $y'' + ay' + by = 0$; уравнение свободных колебаний.

(а) $\lambda^2 = a^2 - 4b > 0$:

$$y = C_1 \exp \frac{-a + \lambda}{2} x + C_2 \exp \frac{-a - \lambda}{2} x;$$

(б) $\lambda^2 = 4b - a^2 > 0$:

$$y = e^{-ax/2}\left(C_1 \cos \frac{1}{2}\lambda x + C_2 \sin \frac{1}{2}\lambda x\right) = Ae^{-ax/2} \sin \frac{1}{2}\lambda (x - B);$$

(в) $4b = a^2$:

$$y = e^{-ax/2}\,(C_1x + C_2).$$

[См. Степанов, гл. VI, § 1; гл. II, § 2. — *Прим. ред.*]

2.36. $y'' + ay' + by = f(x)$; уравнение вынужденных колебаний.

Подразделяя задачу на те же случаи, что и в 2.35, получаем:

(а) $$y = \frac{2}{\lambda}\int_C^x f(t)\,e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\,\mathrm{sh}\,\frac{\lambda}{2}(x-t)\,dt;$$

(б) $$y = \frac{2}{\lambda}\int_C^x f(t)\,e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\,\sin\frac{\lambda}{2}(x-t)\,dt;$$

(в) $$y = \int_C^x f(t)\,(x-t)\,e^{\frac{1}{2}a(t-x)}\,dt.$$

Кроме того, к этим решениям следует еще добавить в качестве слагаемых соответствующие решения уравнения 2.35.

Пусть функция $f(x)$ периодическая имеет место случай (б); тогда, если только $a \neq 0$, однородное уравнение 2.35 не имеет периодических решений. Согласно ч. II, п. 1.2, отсюда следует, что неоднородное уравнение имеет только одно периодическое решение, причем его период равен периоду $f(x)$.

Если, в частности, в случае (б) $f = c\sin\omega x$, $\omega \neq 0$, $b \neq \omega^2$ или $a \neq 0$, то существует решение

$$y = c\alpha\sin\omega\,(x-\gamma)$$

с «коэффициентом искажения» α, определяемым из равенства

$$\alpha^{-2} = (b-\omega^2)^2 + a^2\omega^2,$$

и «сдвигом фаз»

$$\gamma = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{a\omega}{b-\omega^2}.$$

[Понтрягин, § 12; Степанов, гл. VI, § 1; Д. Стокер, Нелинейные колебания в электрических и механических системах, 1953 г. — *Прим. ред.*]

2.37. $y'' + ay' - (b^2x^2 + c)\,y = 0$; см. 2.273 (11).

2.37а. $y'' + ay' + (be^x + c)\,y = 0$.

$y = e^{-ax/2}Z_\nu\,(2\sqrt{b}\,e^{x/2})$, где $\nu = \sqrt{a^2-4c}$, Z_ν — цилиндрическая функция.

H. Görtler, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 233.

2.37б. $y'' + ay' + be^{2ax}y = 0$.

Полагая $y = \dfrac{\eta(\xi)}{\xi}$, $\xi = e^{ax}$, получаем уравнение 2.9

$$\eta'' + \frac{b}{a^2}\,\eta = 0.$$

2.38. $y'' + 2ay' + f(x)\,y = 0$.

Пусть $a > 0$, $f(x)$ — непрерывная и периодическая функция с периодом p и $m^2 \leqslant f(x) \leqslant M^2$. Если $a^2 \geqslant M^2$, то при $x \to \infty$ каждое решение стремится к нулю. Если $a^2 < M^2$, то решения обладают тем же свойством, если

$$\int_0^p f(x)\,dx \leqslant 4a \operatorname{cth} ap.$$

[Более подробные качественные результаты см., например, в книгах: Беллман, гл. VI; Сансоне, т. II, гл. VII. — *Прим. ред.*]

2.39. $y'' + xy' + y = 0.$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(C_1 + C_2 \int e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx\right).$$

2.40. $y'' + xy' - y = 0.$

$$y = C_1 x + C_2\left[\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) + x\int \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)dx\right].$$

2.41. $y'' + xy' + (n+1)\,y = 0$, n — натуральное число.

Это уравнение получается из 2.39 в результате n-кратного дифференцирования, если потом n-ю производную снова обозначить через y. Поэтому

$$y = \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(C_1 + C_2\int e^{\frac{1}{2}x^2}\,dx\right).$$

2.41a. $y'' + xy' + (bx^2 + a)\,y = 0.$

При $b = {}^1/_4$ имеем:

$$y = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1 e^{x\sqrt{\frac{1}{2}-a}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}-a}}\right) & \text{при} \quad a \neq \frac{1}{2}, \\ e^{-\frac{x^2}{4}}\,(C_1 + C_2 x) & \text{при} \quad a = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2.42. $y'' + xy' - ny = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = ix$, получаем уравнение 2.44 (1) с переменными ξ, η вместо x, y.

2.43. $y'' - xy' + 2y = 0$; частный случай уравнения 2.44.

$$y = (x^2 - 1)\left(C_1 + C_2\int \frac{1}{(x^2-1)^2}\, e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\right).$$

2.44. $y'' - xy' - ay = 0$; уравнение Вебера.

$$y = C_1\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+2)\,\dots\,(a+2\nu-2)}{(2\nu)!}\,x^{2\nu}\right) + \\ + C_2\left(x + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(a+1)(a+3)\,\dots\,(a+2\nu-1)}{(2\nu+1)!}\,x^{2\nu+1}\right).$$

Полагая $y = u(x)\exp {}^1/_4 x^2$, получаем $4u'' = (x^2 + 4a - 2)\,u$, т. е. уравнение Вебера в форме 2.87; полагая $y = \eta(\xi)$, $x = \xi\sqrt{2}$, получаем уравнение 2.46 с величинами ξ, η, $-2a$ вместо x, y, a; полагая $y = \eta(\xi)$, $x = i\xi$, получаем уравнение 2.41 с величинами ξ, η, a вместо x, y, $n+1$.

Случай, когда $-a$ равняется некоторому натуральному числу n, может быть сведен к 2.41. Именно, уравнение

$$y'' - xy' + ny = 0 \tag{1}$$

сводится подстановкой $y = u(x)\exp{}^1/_2x^2$ к уравнению 2.41 с искомой функцией u вместо y. О замкнутом представлении решения при натуральных a см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 42.

2.45. $y'' - xy' + (x-1)y = 0.$

$$y = C_1e^x + C_2e^x \int \exp\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)dx.$$

2.46. $y'' - 2xy' + ay = 0.$

Полагая $y = u(x)\exp\frac{1}{2}x^2$, приводим это уравнение к нормальной форме $u'' + (a + 1 - x^2)u = 0$, а полагая $y(x) = \eta(\xi)\exp{}^1/_4\xi^2$, $\xi = x\sqrt{2}$, получаем уравнение Вебера 2.87: $4\eta'' = (\xi^2 - a - 1)\eta$. Если $a = 2n$, где n — натуральное число, то общее решение

$$y = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}\left(C_1 + C_2\int e^{x^2}dx\right);$$

в частности, *полином Чебышева — Эрмита*

$$y = H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = \sum_{0\leqslant\nu\leqslant\frac{n}{2}} (-1)^\nu C_n^{2\nu}\frac{(2\nu)!}{\nu!}(2x)^{n-2\nu}$$

является решением; полиномы Чебышева — Эрмита появляются также в качестве коэффициентов при разложении в ряд

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!},$$

и при $n \geqslant 1$ имеем $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$.

В случае краевых условий «$y(x)$ растет при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем некоторая степень x» уравнение $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ имеет собственные значения $\lambda = 2n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) и собственные функции H_n.

[Уиттекер и Ватсон, т. II; Курант и Гильберт, т. I, гл. II, § 9; Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; Г. Сеге, Ортогональные многочлены, 1962; Янке, Эмде и Лёш; Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, 1966. — *Прим. ред.*]

2.47. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0.$

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-x^2}.$$

2.48. $y'' - 4xy' + (3x^2 + 2n - 1)y = 0.$

Полагая $y = e^{x^2}u(x)$, получаем уравнение 2.12, в котором $a = -2n - 1$ и y заменено на u.

2.49. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = e^{x^2}.$

Соответствующее однородное уравнение относится к типу 2.55. Полагая $u(x) = ye^{-x^2}$, получаем $u'' + u = 1$, откуда

$$u = 1 + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

2.50. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)\, y = 0.$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x^2}.$$

2.51. $y'' - 4xy' + \left(4x^2 - 3\right) y = e^{x^2}.$

$$y = e^{x^2}\left(C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 1\right).$$

2.52. $y'' + axy' + by = 0.$
Ср. 2.273 (10). В частности, если это уравнение имеет вид

$$y'' + axy' - nay = 0$$

(n — натуральное число), то подстановка $y = \eta(\xi)$, $\xi = ix\sqrt{a/2}$ переводит его в уравнение типа 2.46 с переменными ξ, η вместо x, y, в котором $a = 2n$; его решения, следовательно, могут быть выражены через полиномы Чебышева — Эрмита. См. также 2.303.

N. Schwid, *Transactions Americ. Math. Soc.* **37** (1935), стр. 339—362; J. H. Graf, *Math. Ann.* **56** (1903), стр. 442.

2.53. $y'' + 2axy' + a^2x^2y = 0.$

$$e^{\frac{a}{2}x^2}\, y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch} x\sqrt{a} + C_2 \operatorname{sh} x\sqrt{a} & \text{при} \quad a > 0, \\ C_1 \cos x\sqrt{-a} + C_2 \sin x\sqrt{-a} & \text{при} \quad a < 0. \end{cases}$$

2.54. $y'' + (ax + b)\, y' + (cx + d)\, y = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi) \exp\left(-\dfrac{c}{a}x\right)$, $\xi = \sqrt{|a|}\left(x + \dfrac{ab - 2c}{a^2}\right)$, получаем

$$\eta'' \pm \xi\eta' \pm a^{-3}(c^2 - abc + a^2 d)\, \eta = 0,$$

причем следует брать верхний или нижний знак в зависимости от того, будет ли $a > 0$ или $a < 0$. О получившихся уравнениях см. 2.40—2.44 и 2.52.

2.55. $y'' + (ax + b)\, y' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\, y = 0.$
Полагая $y = u(x) \exp sx^2$, где s — корень уравнения $4s^2 + 2as + \alpha = 0$, получаем уравнение 2.54

$$u'' + [(a + 4s)\, x + b]\, u' + [(\beta + 2bs)\, x + \gamma + 2s]\, u = 0.$$

Если, в частности, исходное уравненне имеет вид

$$y'' - 2(ax + b)\, y' + [(ax + b)^2 - a]\, y = 0,$$

то

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \text{где} \quad y_1 = \exp\left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right) \quad \text{и} \quad y_2 = y_1'.$$

2.56. $y'' - x^2y' + xy = 0.$

$$y_1 = C_1 x + C_2\left(\exp\frac{x^3}{3} - x\int x \exp\frac{x^3}{3}\, dx\right).$$

2.57. $y'' - x^2y' - (x + 1)^2\, y = 0.$

$$y = \left[C_1 + C_2 \int \exp\left(-\frac{1}{3}x^3 - 2x\right) dx\right] \exp\left(\frac{1}{3}x^3 + x\right).$$

2.58. $y'' - x^2(x + 1)\, y' + x(x^4 - 2)\, y = 0.$

$$y = \left[C_1 + C_2 \int \exp\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right) dx\right] \exp\frac{x^3}{3}.$$

2.59. $y''+x^4y'-x^3y=0$; частный случай уравнения 2.60.

$$y=C_1x+C_2x\int x^{-2}\exp\left(-\frac{x^5}{5}\right)dx.$$

2.60. $y''+ax^{q-1}y'+bx^{q-2}y=0.$

При $q=0$ имеем уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3). При $2b=a(q-1)$ это уравнение является частным случаем уравнения 2.162 (16); подстановка $u(x)=y\exp\dfrac{ax^q}{2q}$ сводит его к уравнению $4u''=a^2x^{2q-2}u$, ср. 2.14, 2.162 (10). При $b=-a,\ aq,\ a(q-1)$ частными решениями являются соответственно x, $x\exp\left(-\dfrac{ax^q}{q}\right)$, $\exp\left(-\dfrac{ax^q}{q}\right)$, остальные решения получаются согласно ч. I, п. 24.2.

Решение в замкнутом виде удается получить также при $b=amq$ или $b=a(mq-1)$, m — целое число; см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 43.

2.61. $y''+y'\sqrt{x}+\left(\dfrac{1}{4\sqrt{x}}+\dfrac{x}{4}-9\right)y=x\exp\left(-\dfrac{1}{3}x^{3/2}\right)$

Полагая $u(x)=y\exp\left(\frac{1}{3}x^{3/2}\right)$, получаем

$$u''-9u=x;\quad u=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}-\frac{x}{9}.$$

2.62. $y''-\dfrac{1}{\sqrt{x}}y'+\dfrac{1}{4x^2}\left(x+\sqrt{x}-8\right)y=0.$

$$y=(C_1x^2+C_2x^{-1})\exp\sqrt{x}.$$

2.63. $y''-\left(2e^x+1\right)y'+e^{2x}y=e^{3x}.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=e^x$, получаем уравнение типа 2.36:

$$\eta''-2\eta'+\eta=\xi;\quad \eta=\xi+2+e^{\xi}(C_1+C_2\xi).$$

.63a. $y''+\left(ae^x+b\right)y'+\left(Ae^{2x}+Be^x+C\right)y=0.$

Если $A=-\alpha(a+\alpha)$, $C=-\beta(b+\beta)$, $B=-(a\beta+b\alpha+2\alpha\beta+\alpha)$, то

$$y=\exp(\alpha e^x+\beta x)\left\{C_1+C_2\int\exp\left[-(a+2\alpha)e^x-(b+2\beta)x\right]dx\right\}.$$

Случай $A=0$ получается как при $\alpha=0$, так и при $\alpha=-a$.

2.64. $y''+ay'\operatorname{th}x+by=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\operatorname{sh}x$, получаем уравнение типа 2.298:

$$(\xi^2+1)\eta''+(a+1)\xi\eta'+b\eta=0.$$

При $a=2$ это уравнение может быть записано в виде

$$(y\operatorname{ch}x)''+(b-1)\cdot y\operatorname{ch}x=0$$

и поэтому имеет решения

$$y\operatorname{ch}x=\begin{cases}C_1\cos\alpha x+C_2\sin\alpha x & \text{при}\quad b-1=\alpha^2>0,\\ C_1\operatorname{ch}\alpha x+C_2\operatorname{sh}\alpha x & \text{при}\quad b-1=-\alpha^2<0.\end{cases}$$

2.65. $y''+2ny'\operatorname{cth}x+(n^2-a^2)y=0.$

$$y=\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{ax}+C_1e^{-ax}).$$

2.66. $y'' + y' \operatorname{tg} x + y \cos^2 x = 0.$

$$y = C_1 \cos \sin x + C_2 \sin \sin x.$$

2.66a. $y'' + y' \operatorname{tg} x + ay \cos^2 x = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \sin x$, получаем уравнение 2.9:

$$\eta'' + a\eta = 0.$$

Подстановкой $y = u(x) \cos^{a+1} x$ получаем следующее уравнение:

$$u'' - (a+2)\, u' \operatorname{tg} x + (b - a - 1)\, u = 0.$$

Если n — натуральное число, то уравнение

$$y'' - 2ny' \operatorname{tg} x + by = 0 \qquad (1)$$

имеет решения

$$y = \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx}\right)^n v,$$

где v пробегает решения уравнения $v'' + (b + n^2)\, v = 0$; уравнение

$$y'' + 2ny' \operatorname{tg} x + by = 0 \qquad (2)$$

имеет решения

$$y = \cos^{2n+1} x \left(\frac{1}{\cos x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} v,$$

где v имеет тот же смысл, что и выше. Последнее получается из соответствующего результата для уравнения (1) с помощью вышеуказанной подстановки.

В случае нечетного целого n указанная вначале подстановка приводит к уравнению Лежандра. Для некоторых других частных случаев известны следующие решения:

$b = a + 1$: $\quad y = \cos^{a+1} x \left(C_1 + C_2 \int \cos^{-a-2} x\, dx\right);$

$b = 1 - a$:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \left[\cos^{a-1} x + (a-1) \sin x \int \cos^{a-2} x\, dx\right];$$

$b = 2a + 4$: $\quad y = C_1 \sin x \cos^{a+1} x +$

$$+ C_2 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - (a+3) \sin x \cos^{a+1} x \int \cos^{-a-4} x\, dx\right);$$

$b = 4 - 2a$: $\quad y = C_1 \{(a-2) \sin^2 x + 1\} +$

$$+ C_2 \left\{(a-1) \sin x \cos^{a-3} x + (a-3)\, [(a-2) \sin^2 x + 1] \int \cos^{a-4} x\, dx\right\};$$

$b = (1 - a^2)/4$:

$$y = C_1 (1 + \sin x)^{(a+1)/2} + C_2 (1 - \sin x)^{(a+1)/2}.$$

2.67. $y'' + y' \operatorname{tg} x - y \cos^2 x = 0.$

$$y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}.$$

Обобщение см. J. Z b o r n i k, *ZAMP* 7 (1956). [См. перевод в Дополнениях в конце книги. — *Прим. ред.*]

2.68. $y'' + y' \operatorname{ctg} x + \nu(\nu + 1)\, y = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = \cos x$, получаем уравнение типа 2.240 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.69. $y'' - y' \operatorname{ctg} x + y \sin^2 x = 0.$

$$y = C_1 \cos\cos x + C_2 \sin\cos x.$$

Обобщение см. J. Zbornik, *ZAMP* 7 (1956). [См. перевод в Дополнениях в конце книги. — *Прим. ред.*]

2.70. $y'' + ay' \operatorname{tg} x + by = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \sin x$, получаем уравнение типа 2.249:

$$(\xi^2 - 1)\eta'' + (1 - a)\xi\eta' - b\eta = 0.$$

При $a = -2$ это уравнение может быть записано в виде

$$(y \cos x)'' + (b + 1) \cdot y \cos x = 0,$$

и, следовательно, его решениями будут

$$y \cos x = \begin{cases} C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x & \text{при} \quad b + 1 = \alpha^2 > 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha x + C_2 \operatorname{sh} \alpha x & \text{при} \quad b + 1 = -\alpha^2 < 0. \end{cases}$$

При $a = 2$, $b = 3$ имеем

$$y = C_1 \cos^3 x + C_2 \sin x (1 + 2\cos^2 x).$$

2.71. $y'' + 2ay' \operatorname{ctg} ax + (b^2 - a^2) y = 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$
Полагая $u(x) = y \sin ax$, получаем

$$y \sin ax = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

2.71а. $y'' + ay' \operatorname{ctg} cx + by = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = cx + \dfrac{\pi}{2}$, получаем уравнение 2.70:

$$\eta'' - ac^{-1}\eta' \operatorname{tg} \xi + bc^{-2}\eta = 0.$$

В частности, если $c = 2$, то имеем следующие случаи:

$b = 1 - \dfrac{a^2}{4}$: $\quad y = C_1 \sin^\nu x + C_2 \cos^\nu x, \quad$ где $\quad \nu = 1 - \dfrac{a}{2}$;

$a = 2$, $b = -1$: полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \sin x$, получаем уравнение 2.317 с переменными ξ, η вместо x, y;
$a = 2$, $b = -{}^3/_4$: полагая $y(x)\cos(x/2) = \eta(\xi)$, $\xi = \operatorname{tg}(x/2)$, получаем уравнение 2.317 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.71б. $y'' - 2y' \operatorname{ctg} 2x + ay \operatorname{tg}^2 x = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos x$, получаем уравнение 2.187

$$\xi^2\eta'' - \xi\eta' + a\eta = 0.$$

2.72. $y'' + a\wp'(x) y' + [\alpha + \beta\wp(x) - 4na\wp^2(x)] y = 0.$
См. P. Humbert, *Atti Pontificia Accad.* 81 (1928), стр. 71—84.

2.73. $y'' + \dfrac{\wp^3 - \wp\wp' - \wp''}{\wp' + \wp^2} y' + \dfrac{\wp'^2 - \wp^2\wp' - \wp\wp''}{\wp' + \wp^2} y = 0, \quad \wp = \wp(x).$

$$y = C_1\wp(x) + C_2 e^{\zeta(x)}.$$

[Здесь $\wp$ и ζ — функции Вейерштрасса — см. 2.26. — *Прим. ред.*]

2.74. $y'' + k^2 \dfrac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x} y' + n^2 y \operatorname{dn}^2 x = 0.$

$$y = C_1 \sin n \int \operatorname{dn} x\, dx + C_2 \cos n \int \operatorname{dn} x\, dx.$$

[Здесь $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ — эллиптические функции Якоби. См. о них подробнее Унттекер и Ватсон, т. II, гл. 23; Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Янке, Эмде и Лёш; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

2.75. $y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0$; см. ч. I, § 24.

Если $g \neq 0$ и $\dfrac{1}{|g|}\dfrac{d}{dx}\sqrt{|g|} + \dfrac{f}{\sqrt{|g|}} = a = \text{const}$, то подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \int \sqrt{|g|}\,dx$ приводит к уравнению

$$\eta'' + a\eta' + \eta \operatorname{sign} g = 0,$$

т. е. к уравнению с постоянными коэффициентами.

2.76 $y'' + f(x)\,y' + [f'(x) + a]\,y = g(x)$.

Об исследовании этого уравнения в форме

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \left(\frac{1}{CL}\frac{d}{dt}\frac{R}{L}\right) I = \frac{1}{L}\frac{dR}{dt},$$

где $R = R(t)$ (дифференциальное уравнение суперрегенерации приемника), см. A. Erdelyi, *Annalen Phys.* **415** (1935), стр. 21—43, 380.

2.76a. $y'' + fy' - [a(a+1)f^2 + af']\,y = 0$, $f = f(x)$.

$$y = e^{aF}\left(C_1 + C_2\int e^{-(2a+1)F}\,dx\right), \quad \text{где} \quad F = \int f(x)\,dx.$$

2.77. $y'' + [af(x) + b]\,y' + [cf(x) + d]\,y = 0$.

Если $a^2d - abc + c^2 = 0$, $a \neq 0$, то

$$y = e^{-\frac{c}{a}x}\left(C_1 + C_2\int \exp\left[\left(\frac{2c}{a} - b\right)x - a\int f\,dx\right]dx\right).$$

2.77a. $y'' + (f + g)\,y' + (f' + fg)\,y = 0$; $f = f(x)$, $g = g(x)$.

$$y = e^{-F}\left(C_1 + C_2\int e^{F-G}\,dx\right),$$

где $F = \int f(x)\,dx$, $G = \int g(x)\,dx$.

2.78. $y'' + f(x)\,y' + \left(\dfrac{f^2}{4} + \dfrac{f'}{2} + a\right)y = 0$.

Полагая $u(x) = y\exp\dfrac{1}{2}\int f\,dx$, получаем $u'' + au = 0$.

2.78a. $y'' + 2fy' + \left(f^2 + f' + \dfrac{g''}{2g} - \dfrac{3g'^2}{4g^2} - ag^2\right)y = 0$,

$$f = f(x), \qquad g = g(x), \qquad a \geqslant 0.$$

Решения:

$$y = g^{-1/2}\exp\left[-\int (f \pm \sqrt{a}\,g)\,dx\right].$$

Отсюда общее решение может быть получено согласно ч. I п. 24.2.

2.79. $y'' - a\dfrac{f'(x)}{f(x)}y' + b\,[f(x)]^{2a}\,y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \int f^a\,dx$, получаем $(\eta'' + b\eta)\,f^{2a}(x) = 0$; следовательно, если $f \neq 0$, то $\eta'' + b\eta = 0$.

2.80. $y'' - \left(\dfrac{f'}{f} + 2a\right)y' + \left(a\dfrac{f'}{f} + a^2 - b^2f^2\right)y = 0,\ f = f(x).$

$$y = e^{ax}\left(C_1E + \frac{C_2}{E}\right), \quad \text{где} \quad E = \exp b\int f\,dx.$$

См. O. Olsson, *Arkiv för Mat.* 14 (1920), № 1 и 14.

2.81. $y'' + \left(\dfrac{ff'}{f^2+b^2} - \dfrac{f''}{f'}\right)y' - \dfrac{a^2f'^2}{f^2+b^2}\,y = 0,\ f = f(x).$

$$y = C_1u^a + C_2u^{-a}, \quad \text{где} \quad u = f + \sqrt{f^2+b^2}.$$

2.82. $y'' - \left[\dfrac{g''}{g'} + (2\mu - 1)\dfrac{g'}{g}\right]y' + \left[(\mu^2 - \nu^2)\left(\dfrac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0,$

$g = g(x)$; см. 2.162 (15).

2.83. $y'' - \dfrac{f'}{f}y' + \left[\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{f'}{f}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''}{f} - \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{g''}{g'}\right)^2 + \right.$

$\left. + \dfrac{1}{2}\dfrac{g'''}{g'} + \left(\dfrac{1}{4} - \nu^2\right)\left(\dfrac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0,$

$f = f(x)$, $g = g(x)$; см. 2.162 (13).

2.84. $y'' - \left[2\dfrac{f'}{f} + \dfrac{g''}{g'} - \dfrac{g'}{g}\right]y' +$

$+ \left[\dfrac{f'}{f}\left(2\dfrac{f'}{f} + \dfrac{g''}{g'} - \dfrac{g'}{g}\right) - \dfrac{f''}{f} - \nu^2\left(\dfrac{g'}{g}\right)^2 + g'^2\right]y = 0,$

$f = f(x)$, $g = g(x)$; см. 2.162 (12а).

2.85. $y'' - \left[\dfrac{g''}{g'} + (2\nu - 1)\dfrac{g'}{g} + 2\dfrac{h'}{h}\right]y' +$

$+ \left[\dfrac{h'}{h}\left(\dfrac{g''}{g'} + (2\nu - 1)\dfrac{g'}{g} + 2\dfrac{h'}{h}\right) - \dfrac{h''}{h} + g'^2\right]y = 0,$

$g = g(x)$, $h = h(x)$; см. 2.162 (12б).

2.86. $4y'' + 9xy = 0$; частный случай уравнения 2.14.
Умножая это уравнение на $\frac{1}{4}x^2$, получаем уравнение 2.162 (1).

2.87. $4y'' = (x^2 + a)\,y$; уравнение Вебера.
Об этом уравнении см. 2.273 (13), а также 2.12 и 2.44. Если $a = -2(2n+1)$, n — натуральное число, то одним из решений является

$y = (-1)^n e^{x^2/4}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$, т. е. $y = 2^{-n/2}e^{-x^2/4}H_n(x/\sqrt{2})$, где $H_n(x) =$

$= (-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$ — полином Чебышева — Эрмита (см. 2.46).

2.88. $4y'' + 4y'\operatorname{tg} x - (5\operatorname{tg}^2 x + 2)\,y = 0.$

$$y\sqrt{|\cos x|} = C_1 + C_2(x + \sin x\cos x).$$

2.89. $ay''-(x+ab+c)y'+[b(x+c)+d]y=0$;
частный случай уравнения 2.54.
Полагая $y(x)=e^{bx}\eta(\xi)$, $\xi\sqrt{a}=x-ab+c$, получаем уравнение типа 2.44

$$\eta''-\xi\eta'+d\eta=0.$$

2.90. $a^2y''+a\left(a^2-2be^{-ax}\right)y'+b^2e^{-2ax}y=0$.

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\quad \text{где}\quad y_1=\exp\left(-a^{-2}be^{-ax}\right),\quad y_2=y_1'.$$

91—145. $(ax+b)y''+\ldots$

2.91. $x(y''+y)=\cos x$.

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+\sin x\int\frac{\cos^2 x}{x}\,dx-\cos x\int\frac{\sin 2x}{2x}\,dx.$$

2.92. $xy''+(x+a)y=0$.
Из 2.134 следует, что это уравнение может быть приведено к типу 2.113. О непосредственном исследовании этого уравнения см. M. Frenkel, *Zeitschrift f. Phys.* 95 (1935), стр. 599—629.

2.93. $xy''+y'=0$, т. е. $(xy')'=0$.
$y=C_1+C_2\ln|x|$. Фундаментальное решение:

$$\frac{1}{2}\left|\ln\frac{\xi}{x}\right|.$$

Поэтому функция Грина для каждой однородной краевой задачи имеет вид

$$\Gamma(x,\xi)=C_1(\xi)+C_2(\xi)\ln|x|+\frac{1}{2}\left|\ln\frac{\xi}{x}\right|.$$

В случае краевых условий «$y(1)=\alpha y'(1)$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$»

$$\Gamma(x,\xi)=\begin{cases}\alpha+\ln\xi & \text{при}\quad 0<x\leqslant\xi,\\ \alpha+\ln x & \text{при}\quad \xi\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

2.94. $xy''+y'+ay=0$; см. 2.104.

2.95. $xy''+y'+\lambda xy=0$; частный случай уравнения 2.162 (1).
Краевым условиям «$y(1)=0$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$» соответствуют собственные функции $CJ_0\left(2\sqrt{\lambda x}\right)$, причем собственные значения определяются из уравнения $J_0\left(2\sqrt{\lambda}\right)=0$; здесь J_0 — функция Бесселя.

Курант и Гильберт, стр. 351.

2.96. $xy''+y'+(x+a)y=0$.
Полагая $y=\eta(\xi)\exp(\pm ix)$, $\xi=\mp 2ix$, получаем уравнение 2.113:

$$\xi\eta''+(1-\xi)\eta'-{}^1/_2(1\mp ia)\eta=0.$$

Ватсон, стр. 118—119.

2.97. $xy''-y'+ay=0$; см. 2.106.

2.98. $xy''-y'-ax^3y=0$; частный случай уравнений 2.106 и 2.79.
Пусть $\alpha=\sqrt{|a|}$. Решения имеют вид

$$y=\begin{cases}C_1\operatorname{ch}\frac{1}{2}\alpha x^2+C_2\operatorname{sh}\frac{1}{2}\alpha x^2 & \text{при}\quad a>0,\\[2ex] C_1\cos\frac{1}{2}\alpha x^2+C_2\sin\frac{1}{2}\alpha x^2 & \text{при}\quad a<0.\end{cases}$$

2.99. $xy'' - y' + x^3\left(e^{x^2} - \nu^2\right) y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \exp {}^1/_2\, x^2$, получаем уравнение Бесселя **2.162** с переменными ξ, η вместо x, y

2.100. $xy'' + 2y' - xy = e^x.$

$$y = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{x}(C_1 e^x + C_2 e^{-x}).$$

2.101. $xy'' + 2y' + axy = 0.$

Полагая $u(x) = xy$, получаем $u'' + au = 0$.

2.102. $xy'' + 2y' + ax^2 y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

Полагая $u(x) = xy$, получаем $u'' + axu = 0$, т. е. уравнение 2.14.

2.103. $xy'' - 2y' + ay = 0$; частный случай уравнения 2.106.

2.104. $xy'' + \nu y' + ay = 0$, $a \neq 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

Если $2\nu = 2n + 1$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, то это уравнение получается из 2.130 посредством n-кратного дифференцирования, если a заменить через $2a$, а n-ю производную снова обозначить через y. Отсюда получаем решения:

$$y = \begin{cases} C_1 \dfrac{d^n}{dx^n}\operatorname{ch} 2\sqrt{-ax} + C_2 \dfrac{d^n}{dx^n}\operatorname{sh} 2\sqrt{-ax} & \text{при} \quad ax < 0, \\ C_1 \dfrac{d^n}{dx^n}\cos 2\sqrt{ax} + C_2 \dfrac{d^n}{dx^n}\sin 2\sqrt{ax} & \text{при} \quad ax > 0. \end{cases}$$

Если $\nu = -2n$ (n — натуральное число) и $a = -x$, то решение имеет вид

$$y = (\delta - 1)(\delta - 3)\ \ldots\ (\delta - 2n + 1)\, e^{\pm x} \quad \text{при} \quad \delta = x\frac{d}{dx}.$$

2.105. $xy'' + ay' + bxy = 0$; см. 2.162 (9).

При $a \neq 1$, $x > 0$ подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $x\,|\,q\,| = \xi^q$, $q = (1 - a)^{-1}$ приводит к уравнению типа 2.14: $\eta'' = -b\xi^{2q-2}\eta$. Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = x^2/2$ приводит к уравнению типа 2.104:

$$2\xi\eta'' + (a + 1)\eta' + b\eta = 0.$$

Если $a = 2n$ (n — натуральное число) от,

$$y = C_1 \frac{d^n}{d\xi^n}\exp\left(2\sqrt{-\frac{1}{2}b\xi}\right) + C_2\frac{d^n}{d\xi^n}\exp\left(-2\sqrt{-\frac{1}{2}b\xi}\right) =$$

$$= C_1\left(\frac{1}{x}D\right)^n \exp\left(x\sqrt{-b}\right) + C_2\left(\frac{1}{x}D\right)^n \exp\left(-x\sqrt{-b}\right),$$

где $D = d/dx$. В случае $a = -2n$ см. 5.6.

Если $0 < a < 2$, $a \neq 1$, то при $b < 0$ функции

$$y_1 = \int_0^\pi \operatorname{ch}\left(x\sqrt{-b}\cos t\right)\sin^{a-1} t\, dt,$$

$$y_2 = x^{1-a}\int_0^\pi \operatorname{ch}\left(x\sqrt{-b}\cos t\right)\sin^{1-a} t\, dt$$

образуют фундаментальную систему решений; при $b>0$ фундаментальную систему образуют функции

$$y_1=\int_0^\pi \cos\left(x\sqrt{b}\cos t\right)\sin^{a-1}t\,dt,$$

$$y_2=x^{1-a}\int_0^\pi \cos\left(x\sqrt{b}\cos t\right)\sin^{1-a}t\,dt;$$

если $a=1$, то y_2 следует заменить через

$$\int_0^\pi \operatorname{ch}\left(x\sqrt{-b}\cos t\right)\ln\left(x\sin^2 t\right)dt \qquad (b<0)$$

и соответственно через

$$\int_0^\pi \cos\left(x\sqrt{b}\cos t\right)\ln\left(x\sin^2 t\right)dt \qquad (b>0).$$

Отметим еще, что подстановка $u(x)=x^{a-1}y$ приводит исходное уравнение к виду $xu''+(2-a)u'+bxu=0$.

2.106. $xy''+ay'+bx^{\alpha}y=0$; частный случай уравнения 2.162 (1).
В частности, если это уравнение имеет вид

$$xy''+(1-a)y'+a^2x^{2a-1}y=0,$$

то его решения суть:

$$y=C_1\cos\left(x^a+C_2\right).$$

При $\alpha=1-2a$, $b=-k(a-1)^2$ имеем

$$y=C_1\exp\left(\sqrt{k}\,x^{1-a}\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{k}\,x^{1-a}\right).$$

2.107. $xy''+(x+b)y'+ay=0$.
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-x$, получаем уравнение 2.113 с переменными ξ, η вместо x, y. В частных случаях можно указать следующие решения: при $b=0$, $a=\pm 1$: $y=xe^{-x}$ или $y=x$ в зависимости от знака a;

при $b=1$, $a=1$: $y=e^{-x}$;
при $b=2$, $a=1$: $y=x^{-1}$;
при $b=2$, $a=2$: $x=e^{-x}$.

2.108. $xy''+(x+a+b)y'+ay=0$.
Согласно ч. I, п. 22.4, решения могут быть представлены криволинейными интегралами вида

$$y(x)=\int_\alpha^\beta e^{-xt}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

(критические точки подынтегрального выражения, лежащие на пути интегрирования, должны быть обойдены с помощью маленьких полуокружностей); при этом

a	b	x	α	β
>0	>0	любое	0	1
>0	любое	>0	0	$+\infty$
>0	любое	<0	$-\infty$	0
любое	>0	>0	1	$+\infty$
любое	>0	<0	$-\infty$	1

При $a>0$, $b>0$, $x>0$ решения имеют вид

$$y=C_1\int_0^1 e^{-xt}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt+C_2\int_1^\infty e^{-xt}t^{a-1}(t-1)^{b-1}\,dt.$$

Айнс, стр. 254; J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 47.

2.109. $xy''-xy'-y=x(x+1)e^x$.

$$y=(x^2-x\ln x-1)e^x+C_1xe^x+C_2xe^x\int\frac{dx}{x^2e^x}.$$

2.110. $xy''-xy'-ay=0$; частный случай уравнения 2.113.
Если $a=n$ (n — натуральное число), то

$$y_1=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^xx^n)$$

— решение. Вообще, $y=u^{(n-1)}$, где u — произвольное решение уравнения $xu'-(x+n)u=C$. Если $a=-n$, то

$$y_2(x)=e^xy_1(-x);$$

это решение представляет собой, очевидно, некоторый многочлен и с точностью до постоянного множителя выражается формулой

$$y=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\left(C_n^{n-\nu}\right)^2(n-\nu)!\,\frac{\nu x^\nu}{n}.$$

2.111. $xy''-(x+1)y'+y=0$.

$$y=C_1(x+1)+C_2e^x.$$

2.112. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0$.

$$y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}.$$

2.113. $xy''+(b-x)y'-ay=0$;
вырожденное гипергеометрическое уравнение.

Литература: Ватсон, стр. 100; Янке, Эмде и Лёш; H. A. Webb, J. R. Airey, *Philos. Magazine* (6), **36** (1918), стр. 129—141 — здесь имеются также численные таблицы соответствующих решений; H. Buchholz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 47—58, 101—118. [См. также: Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; А. Кратцер и В. Франц, Трансцендентные функции, 1963; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, 1965. — *Прим. ред.*]

Если b — не целое число, то решение имеет вид

$$y = C_1 F(a, b, x) + C_2 x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x),$$

где

$$F(a, b, x) = {}_1F_1(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)\,x^k}{b(b+1)\dots(b+k-1)\,k!}$$

есть так называемая *функция Похгаммера* или *вырожденная гипергеометрическая функция*, представленная с помощью ряда, сходящегося при всех значениях x (ср. гипергеометрический ряд, 2.260 (10)). Эта функция удовлетворяет следующим функциональным уравнениям:

$$F(a, b, x) = e^x F(b-a, b, -x),$$

$$F(a, b, x) = \frac{a}{b} F'(a+1, b+1, x),$$

$$F(a, b, x) - F'(a, b, x) = \frac{b-a}{b} F(a, b+1, x),$$

$$aF(a, b, x) - bF'(a, b, x) = \frac{a(a-b)}{b(b+1)} xF(a+1, b+2, x).$$

Имеем

$$F(a, a, x) = e^x,$$

причем, по определению, это должно иметь место и для всех $a \lessgtr 0$. Далее, если m — целое неотрицательное число и $b \neq 0, -1, \dots, -(m-1)$, то

$$F(-m, b, x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k \frac{x^k}{b(b+1)\dots(b+k-1)}.$$

Если $a = b = -m$, где m есть целое неотрицательное число, то

$$y = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} = F(-m, -m, x) - \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} F(1, m+2, x)$$

— решение исходного уравнения. Если $b = n$ — натуральное число, то при $n \geqslant 2$, $a \neq 0$ решение имеет вид

$$y = C_1 F(a, n, x) + \\ + C_2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} (n-k-2)!\, C_{a-n+k}^{k} x^{k+1-n} + C_{a-1}^{n-1} \left[F(a, n, x) \ln x + \right.\right. \\ \left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)\,x^k}{n(n+1)\dots(n+k-1)\,k!} \sum_{\nu=0}^{k-1} \left(\frac{1}{a+\nu} - \frac{1}{n+\nu} - \frac{1}{1+\nu} \right) \right] \right\},$$

а при $n=1$, $a\neq 0$ — вид

$$y=C_1F(a,1,x)+C_2\left[F(a,1,x)\ln x+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}C_{a+k-1}^{k}\frac{x^k}{k!}\sum_{\nu=0}^{k-1}\left(\frac{1}{a+\nu}-\frac{2}{1+\nu}\right)\right].$$

Эти решения получаются обоими методами, рассмотренными в ч. I: п. 18.2 и п. 25.7. Случай $b=-n$ может быть сведен к предыдущему переходом к $x^{1-b}F(a-b+1,\,2-b,\,x)$.

Подстановка $y(x)=|x|^{-b/2}\eta(\xi)$, $\xi=\pm x$ переводит это уравнение в вырожденное гипергеометрическое уравнение 2.190 (ср. также 2.273)

$$\xi^2\eta''\mp\xi^2\eta'+\left[\pm\left(\frac{b}{2}-a\right)\xi-\frac{b}{2}\left(\frac{b}{2}-1\right)\right]\eta=0.$$

Полагая $y=e^xu(x)$, получаем уравнение 2.108

$$xu''+(x+b)\,u'+(b-a)\,u=0.$$

Если $n=b-a$ есть натуральное число, то это — уравнение типа 2.116. Поэтому в данном случае исходное уравнение имеет в числе прочих решение

$$y=e^x\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}|x|^{n-b}e^{-x}.$$

Следовательно, уравнение

$$xy''+(m-x)\,y'+ny=0 \tag{1}$$

(m, n — натуральные числа) имеет в числе прочих решение:

$$y=e^x\frac{d^{m+n+1}}{dx^{m+n-1}}x^ne^{-x}=\frac{n!}{(m+n-1)!}L_{m+n-1}^{(m-1)}(x),$$

где $L_n(x)=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}x^ne^{-x}$ — полином Чебышева — Лагерра; уравнение (1) является, таким образом, дифференциальным уравнением полиномов Чебышева — Лагерра (см. 2.137) и некоторых производных от них.

При $\Re a>0$ имеем

$$F(a,b,x)=\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(1+a-b)}{2\pi i\Gamma(a)}\int_{K}t^{-b}(1-t)^{b-a-1}e^{\frac{x}{t}}\,dt,$$

где K — некоторая кривая, идущая из бесконечности, переходящая на интервале $0<t<1$ из нижней t-полуплоскости в верхнюю и затем снова уходящая в бесконечность; например, можно брать интеграл вдоль прямой от $c-i\infty$ до $c+i\infty$, $0<c<1$.

О других интегральных представлениях см. H. Bateman, *Transactions Americ. Math. Soc.* **33** (1931), стр. 817—831. Асимптотику функций $F(a,b+n,x)$, $F(a+n,b+n,x)$, $F(a+n,b,x)$ при $n\to\infty$ рассмотрел O. Perron, *Journ. f. Math.* **151** (1921), стр. 63—78.

Задача о собственных значениях $xy''+(m-x)\,y'+\lambda y=0$ (m — натуральное число) с краевыми условиями «$y(x)$ ограничена при $x\to 0$ и растет не быстрее, чем некоторая степень x, при $x\to\infty$» имеет собственные значения $\lambda = n - m + 1$ $(n = m-1, m, \dots)$ и собственные функции $L_n^{(m-1)}(x)$.

[См. также Курант и Гильберт, стр. 85, 280, 429, 454; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Квантовая механика, 1963; Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948. — *Прим. ред.*]

2.114. $xy'' - 2(x-1)y' - y = 0$; частный случай уравнения 2.273 (5). Полагая $\eta(\xi) = xe^{-x}y$, $\xi = 2x$, получаем уравнение 2.134:

$$4\xi\eta'' = (\xi - 2)\eta.$$

2.115. $xy'' - (3x-2)y' + (2x-3)y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (17).

2.115а. $xy'' + (3x-1)y' - (4x+5a+4)y = 0$.
Полагая $y(x) = e^x\eta(\xi)$, $\xi = -5x$, получаем уравнение 2.113:

$$\xi\eta'' - (\xi+1)\eta' + (a+1)\eta = 0.$$

2.115б. $xy'' + (ax+2)y' - \left(b^2xe^{2x} + \frac{1-a^2}{4}x - a\right)y = 0$.

$$y = \frac{1}{x}\exp\left(be^x - \frac{a+1}{2}x\right)\left\{C_1 + C_2\int \exp(x - 2be^x)\,dx\right\}.$$

2.115в. $xy'' + 2(ax+1)y' + (bxe^x(1-be^x) + a^2x + 2a)y = 0$.

$$y = \frac{1}{x}\exp(-ax - be^x)\left\{C_1 + C_2\int \exp(2be^x)\,dx\right\}.$$

2.116. $xy'' + (ax+b+n)y' + nay = 0$, n — натуральное число.

Решение $y = u^{(n-1)}$, где u — произвольное решение уравнения $xu' + (ax+b)u = C$; при натуральном b имеем $y = e^{-ax}v^{(b-1)}$, где v — произвольное решение уравнения $xv' + (n-ax)v = C$.

2.117. $xy'' - (a+b)(x+1)y' + abxy = 0$, $a < b$.
С помощью ч. I. п. 22.4 получаем

$$y = \left\{C_1\int_\alpha^\beta + C_2\int_\gamma^\delta\right\} e^{xz}(z-a)^{m-1}(z-b)^{n-1}\,dz;$$

при этом $m = a\frac{b+a}{b-a}$, $n = b\frac{a+b}{a-b}$ и $\alpha = a - i\infty$, $\beta = \gamma = a$, $\delta = a + i\infty$, если $0 < a < b$; $\alpha = -\infty$, $\beta = \gamma = a$, $\delta = b$ $(\alpha = a$, $\beta = \gamma = b$, $\delta = +\infty)$, если $a < 0 < b$, $|a| > b$ и $x > 0$ $(x < 0)$. В других случаях следует рассматривать криволинейные интегралы вдоль соответствующего пути в комплексной плоскости.

2.118. $xy'' + [(a+b)x + m + n]y' + (abx + an + bm)y = 0$,
m, n — натуральные числа, $a \neq b$ или $m \neq n$.
Полагая $u(x) = y\exp ax$ и $u(x) = y\exp bx$, получаем уравнения типа 2.116:

$$xu'' + [(b-a)x + m + n]u' + m(b-a)u = 0,$$

$$xu'' + [(a-b)x + n + m]u' + n(a-b)u = 0.$$

Отсюда следует

$$y = C_1e^{-ax}\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}x^{-n}e^{(a-b)x} + C_2e^{-bx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}x^{-m}e^{(b-a)x}.$$

При $a = 0$ и при $b = 0$ среди решений имеются также и многочлены.

2.119. $xy'' - 2(ax+b)y' + (a^2x + 2ab)y = 0.$

$$y = e^{ax}\left(C_1 + C_2x^{2b+1}\right).$$

2.119а. $xy'' + (2ax+b)y' + (cx+ab)y = 0;$
частный случай уравнения 2.162 (17).

$$y = x^{\nu}e^{-ax}Z_{\nu}\left(x\sqrt{c-a^2}\right), \quad \text{где} \quad \nu = (1-b)/2.$$

2.119б. $xy'' + (ax+b)y' - [(a+c)x+b]\,cy = 0.$
Одно из решений $y = e^{cx}$, остальные решения получаются из этого согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.120. $xy'' + (ax+b)y' + (cx+d)y = 0;$
см. предыдущие уравнения, а также 2.138а и 2.273 (9).

Полагая $y = e^{-ax/2}u(x)$, получаем

$$xu'' + bu' + \left[\left(c - \frac{a^2}{4}\right)x + d - \frac{ab}{2}\right]u = 0.$$

При $c = a^2/4$ получаем уравнение 2.104, при $d = ab/2$ — уравнение 2.105.

2.120а. $xy'' + (ax+b)y' + (-c^2x^2 + acx + (b+1)c)\,xy = 0.$

Одно из решений: $y = \exp\left(-\frac{c}{2}x^2\right)$; остальные решения получаются согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.120б. $xy'' + (x^2+1)y' + 2xy = 0.$

$$y = e^{-x^2/2}\left(C_1 + C_2\int \frac{1}{x}e^{x^2/2}\,dx\right).$$

2.121. $xy'' - (x^2 - x)y' + (x-1)y = 0.$

$$y = C_1x + C_2x\int \frac{1}{x^2}\exp\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx.$$

2.122. $xy'' - (x^2 - x - 2)y' - x(x+3)y = 0.$

$$y = \left(C_1 + C_2\int x^{-2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx\right)\exp\frac{1}{2}x^2.$$

2.123. $xy'' - (2ax^2+1)y' + bx^3y = 0.$
Полагая $y(x) = u(x)\exp\left({}^1/_2ax^2\right)$, получим уравнение типа 2.162 (1а): $xu'' - u' + (b - a^2)x^3u = 0$; при $b = a^2$ получаем $u = C_1 + C_2x^2$.

2.124. $xy'' - 2(x^2 - a)y' + 2nxy = 0$; см. 2.210.

2.125. $xy'' + (4x^2 - 1)y' - 4x^3y = 4x^5.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = x^2$, получаем уравнение 2.36:

$$\eta'' + 2\eta' - \eta = \xi;$$

$$y = C_1e^{\alpha x^2} + C_2e^{\beta x^2} - x^2 - 2,$$

где α, β определяются уравнениями $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = -1$.

2.125а. $xy'' + (ax^2 + 2)y' + bx^3y = 0$; тип 2.125б.
Полагая $xy(x) = u(x)$, получаем уравнение 2.55:

$$u'' + axu' + (bx^2 - a)u = 0;$$

при $a = 1$, $b = {}^1/_4$ решение этого уравнения имеет вид

$$u = e^{-\frac{x^2}{4}}\left(C_1e^{x\sqrt{3/2}} + C_2e^{-x\sqrt{3/2}}\right).$$

2.125б. $xy''+(ax^2+b)\,y'+f(x)\,y=0.$

Полагая $y=u(x)\,x^{(1-b)/2}\exp\left(-{}^1/_4ax^2\right)$, получаем уравнение

$$x^2u''+xu'+\left(xf-\frac{a^2}{4}x^4-a\,\frac{b+1}{2}x^2-\frac{(b-1)^2}{4}\right)u=0.$$

Если $f=\dfrac{a(b+1)}{2}x+\dfrac{A}{x}+Bx^3$, или $f=\dfrac{a^2}{4}x^3+\dfrac{A}{x}+Bx$, то полученное уравнение относится к типу 2.162 (1).

2.125в. $xy''+(ax^2+bx+c)\,y'+(Ax^2+Bx+C)\,y=0.$

(а) $A=a(b+k)$, $B=2a-bk-k^2$, $C=b(c-1)+k(c-2)$:

$$y=x^{1-c}\exp\left(-\frac{ax^2}{2}+kx\right)\left\{C_1+C_2\int x^{c-2}\exp\left[\frac{ax^2}{2}-(b+2k)\,x\right]dx\right\}.$$

(б) $A=a(b+k)$, $B=a(c+1)-k(b+k)$, $C=-ck$:

$$y=\exp\left(-\frac{ax^2}{2}+kx\right)\left\{C_1+C_2\int x^{-c}\exp\left[\frac{ax^2}{2}-(b+2k)\,x\right]dx\right\}.$$

(в) $A=-ak$, $B=a(c-1)-k(b+k)$, $C=b(c-1)+k(c-2)$:

$$y=x^{1-c}e^{kx}\left\{C_1+C_2\int x^{c-2}\exp\left[-\frac{ax^2}{2}-(b+2k)\,x\right]dx\right\}.$$

(г) $A=-ak$, $B=-k(b+k)$, $C=-ck$:

$$y=e^{kx}\left\{C_1+C_2\int x^{-c}\exp\left[-\frac{ax^2}{2}-(b+2k)\,x\right]dx\right\}.$$

H. Görtler, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 234.

2.126. $xy''+(2ax^3-1)\,y'+(a^2x^3+a)\,x^2y=0.$

$$y=(C_1+C_2x^2)\exp\left(-{}^1/_3ax^3\right).$$

2.126а. $xy''+\left(ax^b+2\right)y'+cx^{b-1}y=0.$

При $c=a$, $a(b+1)$, ab получаем частные решения x^{-1}, $\exp\left(-ab^{-1}x^b\right)$, $x^{-1}\exp\left(-ab^{-1}x^b\right)$; общие решения получаются согласно ч. I, п. 24.2.

О случаях $c=amb$ или $c=a(mb+1)$ см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 42.

2.126б. $xy''+\left(x^{a+1}-a\right)y'+bx^{2a+1}y=0,\ a\neq-1.$

$$y=C_1e^{\alpha_1X}+C_2e^{\alpha_2X}\quad\text{при}\quad b\neq{}^1/_4,$$

где $X=(a+1)^{-1}x^{a+1}$ и α_1, α_2 — два различных корня уравнения $\alpha^2+\alpha+b=0$. При $b={}^1/_4$ имеем

$$y=e^X\left(C_1+C_2x^{a+1}\right).$$

2.127. $xy''+(2ax\ln x+1)\,y'+(a^2x\ln^2x+a\ln x+a)\,y=0.$

$$y=C_1y_1+C_2y_2,\quad\text{где}\quad y_1=(e/x)^{ax},\quad y_2=y_1'.$$

2.127а. $xy''-2(x\operatorname{tg}x+1)\,y'+2y\operatorname{tg}x=0.$

$$y=C_1(\operatorname{tg}x-x)+C_2(x\operatorname{tg}x+1).$$

2.128. $xy'' + [xf(x) + 2]\, y' + f(x)\, y = 0$

$$xy = C_1 + C_2 \int \exp\left[-\int f(x)\, dx\right] dx.$$

2.129. $(x-3)\, y'' - (4x-9)\, y' + (3x-6)\, y = 0.$

$$y = e^x \left[C_1 + C_2 \int e^{2x} (x-3)^3\, dx\right].$$

2.130. $2xy'' + y' + ay = 0,\ a \neq 0.$

Частный случай уравнения 2.162 (1). Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $2x = \pm \xi^2$, непосредственно получаем

$$y = \begin{cases} C_1 \cos\sqrt{2ax} + C_2 \sin\sqrt{2ax} & \text{при} \quad 2ax > 0, \\ C_1 \operatorname{ch}\sqrt{|2ax|} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{|2ax|} & \text{при} \quad 2ax < 0. \end{cases}$$

2.131. $2xy'' - (x-1)\, y' + ay = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \pm \xi^2$, получаем уравнение 2.44:

$$\pm \eta'' - \xi\eta' + 2a\eta = 0.$$

2.132. $2xy'' - (2x-1)\, y' + ay = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $x = \xi^2$, получаем уравнение 2.46:

$$\eta'' - 2\xi\eta' + 2a\eta = 0.$$

2.133. $(2x-1)\, y'' - (3x-4)\, y' + (x-3)\, y = 0.$

$$y = e^x \left[C_1 + C_2 \int e^{-x/2} (2x-1)^{-5/4}\, dx\right].$$

2.134. $4xy'' - (x+a)\, y = 0.$

Подстановка $y = xe^{-x/2} u(x)$ приводит к уравнению 2.113:

$$xu'' + (2-x)\, u' - \left(\frac{a}{4} + 1\right) u = 0,$$

а подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $x = 2i\xi$ — к уравнению 2.92:

$$\xi\eta'' + (\xi - {}^1\!/_2 ia)\, \eta = 0.$$

2.135. $4xy'' + 2y' - y = 0.$

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{ch}\sqrt{x} + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{x} & \text{при} \quad x > 0, \\ C_1 \cos\sqrt{|x|} + C_2 \sin\sqrt{|x|} & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

2.136. $4xy'' + 4y' - (x+2)\, y = 0$; частный случай уравнения 2.138.

$$y = e^{\frac{1}{2}x} \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-x}}{x}\, dx\right).$$

При краевых условиях «$y(x)$ регулярна в точке $x = 0$ и $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$» функция Грина имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}(x+\xi)} \int_\xi^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt \quad \text{при} \quad x \leqslant \xi;$$

при $x \geqslant \xi$ в правой части этой формулы x и ξ следует поменять местами.

2.137. $4xy''+4y'-(x+2)y+\lambda y=0$. См. также 2.138.

Краевым условиям «$y(x)$ регулярна в точке $x=0$ и $y(x)\to 0$ при $x\to\infty$» соответствуют собственные значения $\lambda=4n$ $(n=0, 1, 2, \dots)$ и собственные функции $e^{-x/2}L_n(x)$ (*ортогональные функции Чебышева — Лагерра*), где

$$L_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu C_n^\nu(n-\nu)!\,x^\nu$$

полиномы Чебышева — Лагерра; они являются коэффициентами в разложении

$$\frac{1}{1-t}e^{\frac{xt}{t-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

См. Курант и Гильберт, стр. 85, 280, 317, 429, 454; Ватсон, стр. 100; Янке, Эмде и Лёш, Таблицы ортонормированных, (на положительной полуоси) функций Чебышева — Лагерра $l_n(x)=$ $=\frac{1}{n!}e^{-x/2}(L_n x)$ для $n=1, 2, \dots, 10$ и $0\leqslant x\leqslant 34$ имеются у F. Tricomi, *Atti della R. Accad. di Scienze Torino* **76** (1941). [См. также литературу, указанную в связи с уравнением 2.46. — *Прим. ред.*]

2.138. $4xy''+4my'-(x-2m-4n)y=0$.

Полагая $y=e^{-x/2}u(x)$, получаем уравнение 2.113 (1) с искомой функцией u вместо y.

2.138a. $4xy''+4(x+a)y'+xy=0$;

частный случай уравнения 2.162 (16).

$$y=x^{(1-a)/2}e^{-x/2}Z_{1-a}(\sqrt{-2ax}).$$

2.139. $16xy''+8y'-(x+a)y=0$.

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$, получаем уравнение 2.87 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.140. $axy''+by'+cy=0$.

Умножив это уравнение на x, получаем частный случай уравнения 2.162 (1). См. также 2.104.

2.141. $axy''+(bx+3a)y'+3by=0$.

$$y=\exp\left(-\frac{b}{a}x\right)\left[C_1+C_2\int x^{-3}\exp\frac{b}{a}x\,dx\right].$$

2.142. $5(ax+b)y''+8ay'+c(ax+b)^{1/5}y=0$.

Полагая $\eta(\xi)=\xi y(x)$, $\xi=(ax+b)^{3/5}$, получаем уравнение с постоянными коэффициентами: $9a^2\eta''+5c\eta=0$.

2.143. $2axy''+(bx+a)y'+cy=0$.

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\pm\xi^2$, получаем уравнение 2.52:

$$\pm a\eta''+b\xi\eta'+2c\eta=0.$$

2.144. $2axy''+(bx+3a)y'+cy=0$.

Полагая $\eta(\xi)=\xi y(x)$, $x=\pm\xi^2$, получаем уравнение 2.52:

$$\pm a\eta''+b\xi\eta'+(2c-b)\eta=0.$$

2.145. $(a_2x+b_2)\,y''+(a_1x+b_1)\,y'+(a_0x+b_0)\,y=0.\ |a_2|+|b_2|>0.$

При $a_2=0$ получаем уравнение типа 2.54. Если $a_2\neq 0$, то подстановка $y(x)=e^{sx}\eta(\xi)$, $a_2\xi=a_2x+b_2$, где s — корень уравнения $a_2s^2+a_1s+a_0=0$, приводит к уравнению

$$a_2\xi\eta''+\left[(2sa_2+a_1)\,\xi+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2}\right]\eta'+$$
$$+\left(\frac{a_2b_0-a_0b_2}{a_2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2}s\right)\eta=0.$$

Если здесь $2sa_2+a_1=0$, то, умножая на ξ, получаем частный случай уравнения 2.162 (1). В общем же случае это уравнение относится к типу вырожденного гипергеометрического уравнения 2.273 (9). О представлении решений с помощью криволинейных интегралов см. ч. I, п. 22.4. О полиномиальных решениях при $a_0=0$ см. ч. I, п. 22.5 и A. Sansone, *Atti Accad. Lincei* (6), **15** (1932), стр. 125—130, 194—197; A. Mambriani, *Annali Pisa* (2), **7** (1938), стр. 191—194.

Если для исходного уравнения

$$(a_0b_1-a_1b_0)(a_1b_2-a_2b_1)=(a_0b_2-a_2b_0)^2,$$

то e^{kx}, где k — общий корень двух уравнений

$$a_2k^2+a_1k+a_0=0,\quad b_2k^2+b_1k+b_0=0,$$

является решением.

2.145a. $(ax+b)\,y''+s(cx+d)\,y'-s^2[(a+c)\,x+b+d]\,y=0.$

Частное решение $y=e^{sx}$, остальные решения находятся согласно ч. I, п. 24.2.

146—221. $x^2y''+\ldots$

2.146. $x^2y''-6y=0$; тип 2.14 и 2.148.

$$y=C_1x^3+C_2x^{-2}.$$

2.147. $x^2y''-12y=0$; тип 2.14 и 2.148.

$$y=C_1x^4+C_2x^{-3}.$$

2.148. $x^2y''+ay=0$; тип 2.14 и 2.187.

$$\frac{y}{\sqrt{x}}=\begin{cases} C_1\cos(b\ln x)+C_2\sin(b\ln x) & \text{при } b^2=a-{}^1/_4>0,\\ C_1x^b+C_2x^{-b} & \text{при } b^2={}^1/_4-a>0,\\ C_1+C_2\ln x & \text{при } a={}^1/_4.\end{cases}$$

2.149. $x^2y''+(ax+b)\,y=0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

2.150. $x^2y''+(x^2-2)\,y=0.$

$$y=C_1\sin(x+C_2)+C_1x^{-1}\cos(x+C_2).$$

2.151. $x^2y''=(ax^2+2)\,y$; частный случай уравнения 2.153.

$$y=C_1\left(\sqrt{a}-x^{-1}\right)e^{x\sqrt{a}}+C_2\left(\sqrt{a}+x^{-1}\right)e^{-x\sqrt{a}}.$$

2.152. $x^2y'' + (a^2x^2 - 6)\,y = 0$; частный случай уравнения 2.153.

$$y = C_1\,[3a^{-1}x^{-1}\cos(ax + C_2) + (1 - 3a^{-2}x^{-2})\sin(ax + C_2)].$$

2.153. $x^2y'' + [ax^2 - \nu(\nu - 1)]\,y = 0$; см. 2.162 (7).

Полагая $u(x) = x^{-\nu}y$, получаем уравнение 2.105 с величинами u, 2ν, a вместо y, a, b. Если $\nu = n$ есть некоторое натуральное число, то имеем

$$y = x^n\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left(C_1e^{x\sqrt{-a}} + C_2e^{-x\sqrt{-a}}\right).$$

Если $-\nu = n$ есть целое неотрицательное число, то $\nu(\nu - 1) = n(n + 1)$; следовательно,

$$y = x^{n+1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1}\left(C_1e^{x\sqrt{-a}} + C_2e^{-x\sqrt{-a}}\right).$$

2.154. $x^2y'' + (ax^2 + bx + c)\,y = 0$.

См. 2.273 (6), а в случае $b = 0$ также 2.153. Полагая $y(x) = \eta(\xi)\sqrt{x}$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение 2.20:

$$\eta'' + \left(ae^{2\xi} + be^{\xi} + c - \frac{1}{4}\right)\eta = 0.$$

В физике рассматриваемое уравнение известно под названием «радиального волнового уравнения». В случае $a = -\beta^2$, $b = -2\alpha\beta$, $c = \alpha - \alpha^2$ имеем

$$y = x^{\alpha}e^{\beta x}\left(C_1 + C_2\int x^{-2\alpha}e^{-2\beta}dx\right).$$

О приближенном решении этого уравнения см. F. Arnot, *Proceedings Cambridge* **32** (1936), стр. 161 – 178; решение в замкнутом виде нашел J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 61. [Результаты этой статьи приводятся в Дополнениях в конце книги. — *Прим. ред.*]

2.155. $x^2y'' + [ax^k - b(b - 1)]\,y = 0$.

Частный случай уравнения 2.162 (1). Полагая $\bar{y} = x^b\eta(\xi)$, $\xi = x^{1-2b}$, получаем уравнение типа 2.14

$$(1 - 2b)^2\,\eta'' + a\xi^r\eta = 0, \text{ где } r = k\,(1 - 2b)^{-1} - 2,$$

а полагая $y = x^{1-b}\eta(\xi)$, $\xi = x^{2b-1}$, получаем другое уравнение типа 2.14

$$(1 - 2b)^2\eta'' + a\xi^s\eta = 0, \text{ где } s = k\,(2b - 1)^{-1} - 2.$$

Если $r = 0$ или $s = 0$, то получаем, таким образом, уравнение с постоянными коэффициентами.

2.156. $x^2y'' + \dfrac{y}{\ln x} = xe^x\,(2 + x\ln x)$,

$$y = e^x\ln x + C_1\ln x + C_2\ln x\int\frac{dx}{\ln^2 x}.$$

2.157. $x^2y'' + ay' - xy = 0$.

О решении этого уравнения с помощью определенных интегралов см. Graf, *Math. Ann.* **56** (1903), стр. 432 и сл.

2.158. $x^2y'' + ay' - (b^2x^2 + ab)\,y = 0$.

$$y = e^{bx}\left[C_1 + C_2\int\exp\left(\frac{a}{x} - 2bx\right)dx\right].$$

2.159. $x^2y'' + xy' - y = ax^2$.

$$y = \frac{a}{3}x^2 + C_1x + \frac{C_2}{x};$$

2.160. $x^2y'' + xy' + ay = 0$; уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3).

$$y = \begin{cases} C_1 |x|^{\nu} + C_2 |x|^{-\nu} & \text{при } a = -\nu^2 < 0, \\ C_1 \sin(\nu \ln |x|) + C_2 \cos(\nu \ln |x|) & \text{при } a = \nu^2 > 0, \\ C_1 + C_2 \ln |x| & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

При рассмотрении задач о собственных значениях (см. об этом также 2.164) пользуются обычно самосопряженной формой этого уравнения, причем полагают $a = -\nu^2$:

$$(xy')' - \nu^2 x^{-1} y = 0.$$

О фундаментальном решении и формуле Грина в случае $\nu = 0$ см. 2.93. Если $\nu > 0$, то фундаментальное решение имеет вид

$$\frac{1}{4\nu} \left| \frac{\xi}{x} - \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\nu} \right|.$$

Задаче с краевыми условиями «$y(x)$ ограничена при $x \to 0$, $\alpha y(1) + \beta y'(1) = 0$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{x^{\nu}}{2\nu} \left(\dfrac{\alpha - \nu\beta}{\alpha + \nu\beta} \xi^{\nu} - \xi^{-\nu} \right) & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \dfrac{\xi^{\nu}}{2\nu} \left(\dfrac{\alpha - \nu\beta}{\alpha + \nu\beta} x^{\nu} - x^{-\nu} \right) & \text{при } x \geqslant \xi. \end{cases}$$

2.161. $x^2y'' + xy' - (x + a) y = 0$; см. 2.162 (3).

2.162. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$; уравнение Бесселя.

[Литература, посвященная уравнению Бесселя и бесселевым функциям, весьма обширна. Подробнейшее изложение имеется в книге Ватсона, т. I; т. II содержит различные таблицы. См. также Уиттекер и Ватсон, т. II, гл. 17; Янке, Эмде и Лёш; Сансоне, т. I, гл. III, § 6; Курант и Гильберт, гл. VII; Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; А. Кратцер и В. Франц, Трансцендентные функции, 1963; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, 1966. Функции Бесселя имеют большое значение в прикладных вопросах; см., например, Т. Карман и И. М. Био, Математические методы в инженерном деле, 1948; Э. Грей и Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, 1953. — *Прим. ред.*]

Уравнение Бесселя относится к типу вырожденного гипергеометрического уравнения 2.273 (ср. также 2.403). В самосопряженной форме оно имеет вид

$$(xy')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right) y = 0.$$

Его инвариант (см. ч. I, п. 25.1):

$$I = 1 + \frac{1 - 4\nu^2}{4x^2}.$$

Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = -x$ не меняет вида этого уравнения. Поэтому, если ограничиться действительными значениями x, достаточно рассматривать область $x > 0$. Если ν — не целое число и мы не ограничиваемся областью $x > 0$, то в дальнейшем под x^ν мы будем понимать однозначную аналитическую функцию в комплексной x-плоскости, разрезанной вдоль луча, идущего из точки $x=0$. То же самое относится и к логарифмическим членам.

Решениями данного дифференциального уравнения являются *бесселевы функции первого рода*

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}$$

(ν не равно никакому отрицательному целому числу; ряд сходится при всех значениях x) и *бесселевы функции второго рода*

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \quad (\nu \text{ — не целое число}),$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\left[\frac{\Gamma'(n+k+1)}{(n+k)!} + \frac{\Gamma'(k+1)}{k!}\right].$$

(n — целое неотрицательное число). Если ν — не целое число, то

$$y_\nu = C_1 J_\nu + C_2 J_{-\nu}$$

есть общее решение; в частности, при $\nu = n + 1/2$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$) общее решение

$$y_{n+1/2} = x^{n+1/2}\left\{\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left[\frac{1}{x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)\right]\right\}.$$

В любом случае (ν можно считать неотрицательным) цилиндрические функции

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu + C_2 Y_\nu \qquad (C_1,\ C_2 \text{ — произвольные постоянные})$$

исчерпывают все решения. Это — трансцендентные функции, и только если 2ν равно нечетному целому числу, они могут быть выражены через так называемые трансцендентные функции (см. 2.14; В а т с о н, стр. 49, 65, 131, 134).

В случае не целого ν детерминант Вронского равен

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2\sin\nu\pi}{\pi x}.$$

Бесселевыми функциями третьего рода или *функциями Ганкеля* называются функции

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x), \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x).$$

Функции $i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$ и $i^{-(\nu+1)}H_\nu^{(2)}(-ix)$ действительны, если для всех степеней берутся главные значения. Роль функций Ганкеля состоит в том, что это — единственные решения уравнения Бесселя, удовлетворяющие краевым условиям

$$\lim_{r\to\infty} H_\nu^{(1)}(re^{i\vartheta}) = 0, \quad \lim_{r\to\infty} H_\nu^{(2)}(re^{-i\vartheta}) = 0$$

($\varepsilon \leqslant \vartheta \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$) (см. Курант и Гильберт, стр. 398).

Функция Бесселя детально исследованы. Из их свойств здесь необходимо отметить следующие.

Для целых n функции J_n являются коэффициентами в разложении

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n,$$

если формально положить $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Далее:

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \quad J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x,$$

и для натуральных значений k:

$$J_{k+1/2}(x) = \frac{(-1)^k (2x)^{k+1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^k}{d(x^2)^k}\left(\frac{\sin x}{x}\right);$$

$$1/2 x J_\nu' = (\nu+1) J_{\nu+1} - (\nu+3) J_{\nu+3} + (\nu+5) J_{\nu+5} - \ldots$$

(ряд из абсолютных значений сходится равномерно в каждом конечном интервале);

$$Y_n(x) = (-2x)^n \frac{d^n Y_0(x)}{d(x^2)^n},$$

$$\frac{\pi}{2} Y_0(x) = J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} J_{2k}(x)$$

($C = 0{,}577\ldots$ — константа Эйлера);

$$\frac{d}{dx} x^\nu Z_\nu(x) = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx} x^{-\nu} Z_\nu(x) = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x),$$

$$2\nu Z_\nu(x) = x\,[Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x)];$$

в первой и третьей из последних трех формул $\nu - 1$, а во второй ν не могут принимать целочисленные отрицательные значения. Для целочисленных $n \geqslant 0$ и больших x имеем

$$\sqrt{\pi x}\, J_{2n}(x) = (-1)^n (\cos x + \sin x) + O(x^{-2}),$$

$$\sqrt{\pi x}\, J_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} (\cos x - \sin x) + O(x^{-2}).$$

Родственные уравнения. Большое число других уравнений встречающихся в различных приложениях математики, может быть сведено к уравнению Бесселя. Для указанных ниже уравнений соответствующие подстановки можно непосредственно усмотреть из вида решений, а отсюда нетрудно найти и преобразования, переводящие эти уравнения друг в друга. Подробности о приведенных здесь уравнениях см. также в соответствующих местах настоящего справочника, там, где эти уравнения приведены.

$$x^2y''+axy'+(bx^m+c)\,y=0,\ m\neq 0; \tag{1a}$$

$$b\neq 0:\quad y=x^{\frac{1-a}{2}}Z_\nu\left(\frac{2}{m}\sqrt{b}\,x^{\frac{m}{2}}\right)\quad \text{при}\quad \nu=\frac{1}{m}\sqrt{(1-a)^2-4c},$$

$$b=0:\quad y=\begin{cases} C_1x^{\frac{1-a+\mu}{2}}+C_2x^{\frac{1-a-\mu}{2}} & \text{при } \mu=\sqrt{(1-a)^2-4c}\neq 0,\\ x^{\frac{1-a}{2}}(C_1+C_2\ln x) & \text{при } (1-a)^2-4c=0.\end{cases}$$

$$x^2y''+(1-2a)\,xy'+(b^2c^2x^{2b}+a^2-\nu^2b^2)\,y=0; \tag{1б}$$

$$y=\begin{cases} x^aZ_\nu(cx^b) & \text{при}\quad b\neq 0,\ c\neq 0,\\ C_1x^{a-b\nu}+C_2x^{a+b\nu} & \text{при}\quad b\neq 0,\ c=0,\quad \nu\neq 0,\\ x^a(C_1+C_2\ln x) & \text{при}\quad b=0\quad \text{или}\quad b\neq 0,\ c=0,\ \nu=0.\end{cases}$$

Частными случаями этих формул являются:

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)\,y=0;\qquad Z_\nu(ix); \tag{2}$$

$$x^2y''+xy'-(x+\nu^2)\,y=0;\qquad Z_{2\nu}\left(2i\sqrt{x}\right); \tag{3}$$

$$x^2y''+xy'+\frac{1}{4}(x-\nu^2)\,y=0;\qquad Z_\nu\left(\sqrt{x}\right); \tag{4}$$

$$x^2y''+xy'+4(x^4-\nu^2)\,y=0;\qquad Z_\nu(x^2); \tag{5}$$

$$x^2y''+(1-2\nu)\,xy'+\nu^2(x^{2\nu}+1-\nu^2)\,y=0;\qquad x^\nu Z_\nu(x^\nu); \tag{6}$$

$$x^2y''-[cx^2+p(p-1)]\,y=0;\quad \sqrt{x}Z_{p-1/2}(i\sqrt{c}x); \tag{7}$$

$$xy''+(1-2\nu)\,y'+xy=0;\quad x^\nu Z_\nu(x); \tag{8}$$

$$xy''-2py'-cxy=0;\quad x^{p+1/2}Z_{p+1/2}\left(i\sqrt{c}x\right); \tag{9}$$

$$y''-cx^{2q-2}y=0;\quad \sqrt{x}Z_{\frac{1}{2q}}\left(iq^{-1}\sqrt{c}\,x^q\right),\ \text{см. также 2.14}; \tag{10}$$

$$y''\pm xy=0;\quad \sqrt{x}\,Z_{1/3}\left({}^2/_3x^{3/2}\right)\quad \sqrt{x}\,Z_{1/3}\left({}^2/_3ix^{3/2}\right). \tag{11}$$

Более общими, чем (1), являются следующие два результата:

$$y''-\left[2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right]y'+$$
$$+\left[\frac{f'}{f}\left(2\frac{f'}{f}+\frac{g''}{g'}-\frac{g'}{g}\right)-\frac{f''}{f}-\nu^2\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0, \tag{12a}$$
$$f=f(x),\quad g=g(x);\quad y=f(x)\,Z_\nu[g(x)];$$

$$y''-\left[\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right]y'+$$
$$+\left[\frac{h'}{h}\left(\frac{g''}{g'}+(2\nu-1)\frac{g'}{g}+2\frac{h'}{h}\right)-\frac{h''}{h}+g'^2\right]y=0, \tag{12б}$$
$$g=g(x),\quad h=h(x);\quad y=h(x)\,[g(x)]^\nu Z_\nu[g(x)].$$

Частные случаи:

$$y''+\frac{f'}{f}y'+\left[\frac{3}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{f''}{f}-\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0;\quad y=\sqrt{\frac{fg}{g'}}Z_\nu(g); \tag{13}$$

$$y''+\left[\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\nu^2\right)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0; \tag{14}$$
$$y=\sqrt{g/g'}Z_\nu(g);$$

$$y''-\left[\frac{g''}{g'}+(2\mu-1)\frac{g'}{g}\right]y'+\left[(\mu^2-\nu^2)\left(\frac{g'}{g}\right)^2+g'^2\right]y=0; \tag{15}$$
$$y=g^\mu Z_\nu(g);$$

$$x^2y''-[(2a-1)+2bcx^c]\,xy'+$$
$$+[a^2-\nu^2\beta^2+(2a-c)\,bcx^c+b^2c^2x^{2c}+\alpha^2\beta^2x^{2\beta}]\,y=0; \tag{16}$$
$$y=x^a\exp(bx^c)\,Z_\nu(\alpha x^\beta);$$

$$x^2y''-[(2a-1)+2bcx^c]\,xy'+$$
$$+[(a^2-\nu^2c^2)+(2a-c)\,bcx^c+(b^2+d^2)\,c^2x^{2c}]=0; \tag{17}$$
$$y=x^a\exp(bx^c)\,Z_\nu(dx^c);$$

$$x^2y''-[(2a-1)\pm 2ibcx^c]\,xy'+[(a^2-\nu^2c^2)\pm(2a-c)\,ibcx^c]\,y=0; \tag{18}$$
$$y=x^a\exp(\pm ibx^c)\,Z_\nu(bx^c);$$

$$x^2(x^2-1)^2y''+[(1-4a)\,x^2-1]\,x\,(x^2-1)\,y'+$$
$$+[(x^2-\nu^2)(x^2-1)^2+4a\,(a+1)\,x^4-2ax^2(x^2-1)]\,y=0; \tag{19}$$
$$y=|x^2-1|^a Z_\nu(x);$$

$$x^2y''+(x-2x^2\operatorname{tg}x)\,y'-(x\operatorname{tg}x+\nu^2)\,y=0;\quad y=\frac{1}{\cos x}Z_\nu(x); \tag{20}$$

$$x^2y''+(x+2x^2\operatorname{ctg}x)\,y'+(x\operatorname{ctg}x-\nu^2)\,y=0;\quad y=\frac{1}{\sin x}Z_\nu(x); \tag{21}$$

$$x^2y''+(x-2x^2f)\,y'+[x^2(1+f^2-f')-xf-\nu^2]\,y=0, \tag{22}$$
$$f=f(x);\quad y=Z_\nu(x)\exp\int f\,dx;$$

$$x^2y''+2axy'+[(b^2e^{2cx}-\nu^2)c^2x^2+a\,(a-1)]\,y=0; \tag{23}$$
$$y=x^{-a}Z_\nu(be^{cx});$$

$$x^4y''+(e^{2/x}-\nu^2)\,y=0;\quad y=xZ_\nu(e^{1/x}); \tag{24}$$

см. также 2.343. Дифференциальные уравнения высших порядков, решения которых выражаются через функции Бесселя, имеются под номерами: 3.6, 3.8, 3.32, 3.35, 3.42, 3.43, 3.51 – 3.53, 3.61, 3.67, 3.83, 4.22. 4.24 – 4.26, 4.33, 4.36 – 4.38; 5.9, 5.11.

См. также J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 21–56.

2.163. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)\,y=f(x)$; неоднородное уравнение Бесселя.

Решения соответствующего однородного уравнения известны из 2.162. Если известно одно частное решение неоднородного уравнения, то тем самым известны и все его решения. Так как

$$J_\nu Y'_\nu-J'_\nu Y_\nu=\frac{2}{\pi x},$$

то (см. ч. I, п. 24.2 (а))

$$\frac{\pi}{2} Y_\nu(x) \int x J_\nu(x) f(x)\,dx - \frac{\pi}{2} J_\nu(x) \int x Y_\nu(x) f(x)\,dx$$

есть решение.

(А) Если $f(x) = x^\rho$, то имеем известные разложения решений в ряды (функции Ломмеля):

(а) $f(x) = x^{\nu+2n}$, n — натуральное число:

$$y = (-1)^{n-1}(n-1)!\,2^{\nu+2n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{\Gamma(\nu+n)}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)};$$

при этом

$$\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu+k+1)} = (\nu+n-1)(\nu+n-2)\ldots(\nu+k+1).$$

(б) $f(x) = x^\rho$, ни $\rho+\nu$, ни $\rho-\nu$ не являются целыми неположительными числами:

$$y = 2^{\rho-2}\,\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+2k}}{\Gamma\left(\frac{\rho+\nu}{2}+k+1\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\nu}{2}+k+1\right)}.$$

(в) $f(x) = x^{\nu-2n}$, n — неотрицательное целое число, ν не равно никакому целому числу $\leqslant n$:

$$y = \frac{\Gamma(\nu-n)}{n!\,2^{-\nu+2n+2}} \left[2J_\nu \ln\frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{\Gamma(\nu-n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-2n+2k} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{\Gamma'(k+1)}{\Gamma(k+1)} + \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} \right) \right];$$

здесь при $n = 0$ первая сумма считается равной нулю.

(Б) $f(x) = \dfrac{4\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}$; решением является *функция Струве*

$$H_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k+1}}{\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\nu+k+\frac{3}{2}\right)}.$$

Если $\varphi(x)$ — некоторое решение исходного уравнения с произвольной функцией $f(x)$, то $x^a \varphi(bx^c)$ $(b \neq 0,\ c \neq 0)$ есть решение уравнения

$$x^2 y'' + (1-2a)\,xy' + (b^2c^2x^{2c} + a^2 - \nu^2c^2)\,y = c^2 x^a f(bx^c), \tag{1}$$

а $x^a e^{bx^c} \varphi(dx^c)$ — решение уравнения

$$x^2y'' - [(2a-1)\,x + 2bcx^{c+1}]\,y' +$$
$$+ [(a^2-\nu^2c^2) + (2a-c)\,bcx^c + (b^2+d^2)\,c^2x^{2c}]\,y = c^2x^a e^{bx^c} f(dx^c). \tag{2}$$

2.164. $x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)\, y = 0.$

Согласно 2.162 (1), решениями являются цилиндрические функции $y = Z_\nu\left(x\sqrt{\lambda}\right)$.

Если ν фиксировано и λ — параметр, значения которого определяются из краевых условий «$y(1) = 0$, $y(x)$ ограничена при $x \to 0$», то соответствующие собственные функции суть $y = J_\nu\left(x\sqrt{\lambda}\right)$, причем собственные значения λ определяются из условия $J_\nu\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$; для n-го собственного значения имеем $\lambda_n \sim (n\pi)^2$. Для задачи с краевыми условиями «$y(x)$ ограничена при $0 < x < \infty$» собственными функциями являются функции Бесселя $y = J_\nu\left(x\sqrt{\lambda}\right)$ $(\lambda \geqslant 0)$; эта задача о собственных значениях имеет, таким образом, непрерывный спектр. Разложению заданной функции $f(x)$ по собственным функциям здесь соответствует интегральное представление

$$f(x) = \int_0^\infty tJ_\nu(tx)\, g(t)\, dt, \qquad \text{где } g(t) = \int_0^\infty \xi J_\nu(\xi t)\, f(\xi)\, d\xi.$$

Курант и Гильберт, стр. 351, стр 414.

2.165. $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - \nu^2)\, y = 0$; см. 2.162 (5).

2.165а. $x^2y'' + (x + a)\, y' - y = 0.$

$$y = C_1(x + a) + C_2 x e^{a/x}.$$

2.166. $x^2y'' - xy' + y = 3x^3.$

$$y = x\,(C_1 + C_2 \ln x) + \frac{3}{4}x^3.$$

2.167. $x^2y'' - xy' + (ax^m + b)\, y = 0$; см. 2.162 (1).

2.168. $x^2y'' + 2xy' = 0$, т. е. $(x^2y')' = 0.$

$y = C_1 + \dfrac{C_2}{x}$; фундаментальное решение: $\frac{1}{2}\,|\, x^{-1} - \xi^{-1} \,|$.

Для краевой задачи с условиями «$y(1) = \alpha y'(1)$, $y(x)$ ограничена при $x \to 0$» функция Грина имеет вид

$$\Gamma(x, \xi) = \begin{cases} \alpha + 1 - \xi^{-1} & \text{при } 0 < x \leqslant \xi, \\ \alpha + 1 - x^{-1} & \text{при } \xi \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

2.169. $x^2y'' + 2xy' + (ax - b^2)\, y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

2.170. $x^2y'' + 2xy' + (ax^2 + b)\, y = 0.$

Частный случай уравнения 2.162 (1). Если $b = -n(n-1)$ (n — натуральное число), то, полагая $y = x^{n-1}u(x)$, получаем уравнение 2.105: $xu'' + 2nu' + axu = 0$. Поэтому, например, уравнение

$$x^2y'' + 2xy' - (a^2x^2 + 2)\, y = 0$$

имеет решения

$$x^2y = C_1(ax - 1)\, e^{ax} + C_2(ax + 1)\, e^{-ax}.$$

2.171. $x^2y'' + 2xy' + [\lambda x^2 + ax - n(n+1)]\, y = 0.$

Если к этому уравнению добавить краевые условия «$y(x)$ стремится к определенному пределу при $x \to 0$ и остается ограниченной при $x \to \infty$», то собственными значениями будут, во-первых, все положительные λ, во-вторых, те отрицательные λ, для которых $l = a/2\sqrt{-\lambda}$ — целое число, большее чем n; таким образом, спектр состоит из непрерывной части и из счетной последовательности, сходящейся к нулю. Собственные функции, соответствующие первой части спектра, можно получить, находя решения этого уравнения в виде степенного ряда. Собственные функции, соответствующие второй части спектра, имеют вид

$$y=x^n\exp\left(-\frac{a}{2l}x\right)L_{n+1}^{(2n+1)}\left(\frac{a}{l}x\right),$$

где L_n — полиномы Чебышева — Лагерра.

Курант и Гильберт, стр. 290—291.

2.172. $x^2y''+2(x-1)y'+ay=0$; частный случай уравнения 2.162 (17).

2.173. $x^2y''+2(x+a)y'-b(b-1)y=0$.

Полагая $y(x)=\eta(\xi)\xi^b e^{-a\xi}$, $\xi=-x^{-1}$, получаем уравнение Бесселя 2.162 (9): $\xi\eta''+2b\eta'-a^2\xi\eta=0$.

2.174. $x^2y''-2xy'+2y=x^5\ln x$.

$$y=C_1x+C_2x^2+\frac{x^5}{12}\left(\ln x-\frac{7}{12}\right).$$

2.175. $x^2y''-2xy'-4y=x\sin x+(ax^2+12a+4)\cos x$.

$$y=C_1x^4+C_2x^{-1}-a\cos x-(2a+1)x^{-1}\sin x.$$

2.176. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$; частный случай уравнения 2.179.

$$y=C_1x\sin x+C_2x\cos x.$$

2.177. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=\dfrac{x^2}{\cos x}$.

$$y=x\sin x\ln|x|-x\cos x\int\limits_0^x\frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx+C_1x\sin x+C_2x\cos x.$$

J. Rose, *Mathesis* 45 (1931), стр. 31.

2.178. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=\dfrac{x^3}{\cos x}$.

$$y=x^2\sin x+x\cos x\ln|\cos x|+C_1x\sin x+C_2x\cos x.$$

2.179. $x^2y''-2xy'+(a^2x^2+2)y=0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

$$y=C_1x\cos ax+C_2x\sin ax.$$

2.180. $x^2y''+3xy'+(x^2+1-\nu^2)y=f(x)$.

Соответствующее однородное уравнение является частным случаем уравнения 2.162 (1) и имеет решение $x^{-1}Z_\nu(x)$. Поэтому данное неоднородное уравнение может быть решено по методу, указанному в ч. I, п. 24.2(a). Если $f(x)=\rho x^{-\nu+2n+1}$ (ρ — произвольно, n — целое число, ν — не целое, или ν — целое и больше n), то решениями будут *функции Ломмеля*

$$\rho\frac{2^{2n-\nu-1}}{\Gamma(\nu-n)}n!\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\nu-k)}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu-1}.$$

Ватсон, стр. 303.

Если $\nu=n$ и

$$f(x)=\begin{cases}x & (n\geqslant 0 \text{ и четное})\\ n & (n\geqslant 0 \text{ и нечетное}),\end{cases}$$

то уравнению удовлетворяют *полиномы Неймана* (полиномы от x^{-1})

$$y = O_n(x) = \frac{1}{4} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \frac{n(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n-1} \quad \text{при } n > 0$$

и $y = O_0(x) = x^{-1}$.

2.181. $x^2y'' + (3x-1)y' + y = 0$.

$$y = \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\left[C_1 + C_2 \int \frac{1}{x} \exp\frac{1}{x}\, dx\right].$$

2.182. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 5x$.

$$y = 5x + C_1x^2 + C_2x^2 \ln|x|.$$

2.183. $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$.

$$y = C_1x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9} \ln|x|.$$

2.184. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^4 - x^2$.

$$y = \frac{x^4}{2} + x^2 \ln|x| + C_1x^2 + C_2x^3.$$

2.185. $x^2y'' + 5xy' - (2x^3 - 4)y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

2.186. $x^2y'' - 5xy' + 8y = x^3 \operatorname{sh} x$.

$$y = C_1x^2 + C_2x^4 - \frac{1}{2}x^2 \operatorname{ch} x + \frac{1}{2}x^4 \int \frac{\operatorname{sh} x}{x^2}\, dx.$$

2.187. $x^2y'' + axy' + by = 0$; уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3).

Определяем α, β из условий: $\alpha + \beta = 1 - a$, $\alpha\beta = b$ Если α и β действительны, то решения имеют вид

$$y = \begin{cases} C_1x^\alpha + C_2x^\beta & \text{при } \alpha \neq \beta, \\ x^\alpha (C_1 + C_2 \ln x) & \text{при } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Если α, $\beta = r \pm is$ комплексны, то решения имеют вид

$$y = x^r [C_1 \cos(s \ln x) + C_2 \sin(s \ln x)].$$

2.187а. $x^2y'' + 2axy' + [(b^2e^{2cx} - \nu^2)x^2 + a(a-1)]y = 0$; см. 2.162 (23).

2.188. $x^2y'' + (ax+b)y' + cy = 0$.

Полагая $y(x) = e^\xi \xi^\nu \eta(\xi)$, $\xi = x^{-1}$, где ν — корень уравнения $\nu^3 + \nu(1-a) + c = 0$, получаем уравнение 2.120:

$$\xi\eta'' + [(2-b)\xi + (2\nu + 2 - a)]\eta' + [(1-b)\xi + 2\nu + 2 - a - b\nu]\eta = 0.$$

При $b = 1$, $c = a - 2$ исходное уравнение имеет решение:

$$y = x^{2-a}e^{1/x}\left(C_1 + C_2 \int x^{a-4}e^{-1/x} dx\right).$$

2.188а. $x^2y'' + (ax+b)y' + (cx^2 + dx + e)y = 0$.

Полагая $y = x^{-a/2}e^{b/2x}u(x)$ (см. ч. I, п. 16.3), получаем уравнение

$$x^2u'' + \left[cx^2 + dx + e + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{a}{2}\right) + b\left(1 - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{x} - \frac{b^2}{4x^2}\right]u = 0;$$

в частности, следовательно, если $b = 0$, получаем

$$x^2u'' + \left[cx^2 + dx + e + \frac{a}{2}\left(1 - \frac{a}{2}\right)\right]u = 0.$$

2.189. $x^2y'' + axy' + (bx^m + c)\,y = 0$; см. 2.162 (1), 6.84.
Решение этого уравнения может быть выражено через элементарные трансцендентные функции в том и только том случае, когда $b=0$ (случай уравнения Эйлера) или когда $4[(a-1)^2-4c] = m^2(2n+1)^2$, где n — натуральное число.

2.190. $x^2y'' \pm x^2y' + (ax+b)\,y = 0$;
вырожденное гипергеометрическое уравнение. См. 2.407.
Полагая $y = u(x)\exp(\mp x/2)$, получаем уравнение 2.273:

$$x^2u'' + \left(-\frac{1}{4}x^2 + ax + b\right)u = 0.$$

При $a=0$ это уравнение является частным случаем уравнения 2.162 (1). В случае верхнего знака при $a=0$, $b=-2$ имеем

$$y = C_1(1-2x^{-1}) + C_2(1+2x^{-1})\,e^{-x}.$$

Уиттекер и Ватсон, т. II.

2.191. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$.

$$y = C_1(x-2)\,x^{-1} + C_2(x+2)(2x)^{-1}e^{-x}.$$

2.191a. $x^2y'' + x^2y' + (ax^2+b)\,y = 0$.
Частный случай уравнения 2.162 (16), получающийся при следующих значениях входящих в него постоянных:

$$a = -b = {}^1/_2,\quad c = \beta = 1,\quad \alpha^2 = a - {}^1/_4,\quad \nu^2 = {}^1/_4 - b.$$

2.192. $x^2y'' + (x^2-1)\,y' - y = 0$.

$$y\exp x = C_1 + C_2\int \exp\left(x - \frac{1}{x}\right)dx.$$

2.193. $x^2y'' + x(x+1)\,y' + (x-9)\,y = 0$.

$$y = \frac{x^2-8x+20}{x^3}\left(C_1 + C_2\int\frac{x^5e^{-x}}{(x^2-8x+20)^2}dx\right).$$

2.194. $x^2y'' + x(x+1)\,y' + (2x-1)\,y = 0$.

$$y = x(x-3)\,e^{-x}\left(C_1 + C_2\int\frac{e^x\,dx}{x^3(x-3)^2}\right).$$

2.195. $x^2y'' + (x+3)\,xy' - y = 0$.

Полагая $y = x^{-3/2}e^{-x/2}u(x)$, получаем в качестве нормальной формы уравнение Уиттекера 2.273: $4x^2u'' = (x^2+6x+7)\,y$.

2.196. $x^2y'' - x(x-1)\,y' + (x-1)\,y = 0$.

$$y = C_1x + C_2x\int x^{-3}e^x\,dx.$$

2.197. $x^2y'' - (x^2-2x)\,y' - (x+a)\,y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (16).

2.198. $x^2y'' - (x^2-2x)\,y' - (3x+2)\,y = 0$.

$$y = xe^x\left(C_1 + C_2\int\frac{e^{-x}}{x^4}dx\right).$$

2.199. $x^2y'' - x(x+4)\,y' + 4y = 0$.

$$y = x^4e^x\left(C_1 + C_2\int x^{-4}e^{-x}\,dx\right).$$

2.200. $x^2y'' + 2x^2y' - \nu(\nu-1)y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (16). При $\nu = n + {}^1/_2$ решения исследованы и протабулированы

T. Okaya, *Proc. Phys.-math. Soc. Japan* (3), 21 (1939), стр. 287—298.

2.201. $x^2y'' + x(2x+1)y' - 4y = 0$.

$$y = C_1 \frac{2x^2 - 4x + 3}{3x^2} + C_2 \frac{2x+3}{x^2} e^{-2x}.$$

2.202. $x^2y'' - 2x(x+1)y' + 2(x+1)y = 0$.

$$y = C_1 x + C_2 x e^{2x}.$$

2.203. $x^2y'' + ax^2y' - 2y = 0$.

$$axy = C_1(ax-2) + C_2(ax+2)e^{-ax}.$$

2.204. $x^2y'' + (a+2b)x^2y' + [(a+b)bx^2 - 2]y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (17).

$$y = C_1\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{2}\right)e^{-bx} + C_2\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{2}\right)e^{-(a+b)x}.$$

2.205. $x^2y'' + ax^2y' + f(x)y = 0$.
Полагая $y = u \exp(-{}^1/_2 ax)$, получаем

$$x^2u'' + \left[f(x) - \frac{1}{4}a^2x^2\right]u = 0.$$

2.205a. $x^2y'' + x(x+a)y' + \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 y = 0$.

Полагая $y = x^{(1-a)/2}u(x)$, получаем уравнение 2.107:

$$xu'' + (x+1)u' + \frac{1-a}{2}u = 0.$$

2.206. $x^2y'' + (2ax+b)xy' + (cx^2 + abx + d)y = 0$;
частный случай уравнения 2.162 (16) при $c = \beta = 1$.

2.206a. $x^2y'' + (2ax+b)xy' + (a^2x^2 + cx + d)y = 0$;
частный случай уравнения 2.162 (16) при $c = 1$, $\beta = {}^1/_2$.

2.207. $x^2y'' + (ax+b)xy' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)y = 0$; см. 2.215.

2.207a. $x^2y'' + (ax+b)xy' + [A(a-A)x^2 + (aB + bA - 2AB)x + B(b-B-1)]y = 0$.

$$y = x^{-B}e^{-Ax}\left(C_1 + C_2\int x^{2B-b}e^{(2A-a)x}dx\right).$$

2.208. $x^2y'' + x^3y' + (x^2-2)y = 0$.

$$y = \frac{C_1}{x} + C_2\left(e^{-x^2/2} - \frac{1}{x}\int e^{-x^2/2}dx\right).$$

2.209. $x^2y'' + (x^2+2)xy' + (x^2-2)y = 0$.

$$y = C_1\frac{E}{x^2} + C_2\left(\frac{1}{x} - \frac{E}{x^2}\int\frac{dx}{E}\right), \text{ где } E = E(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

2.209a. $x^2y'' - x(x^2-1)y' - (x^2+1)y = 0$;
частный случай уравнения 2.162 (17).

$$y = x^{-1}\left(C_1 + C_2e^{x^2/2}\right).$$

2.210. $x^2y'' - 2x(x^2-a)y' + \{2nx^2 + [(-1)^n - 1]a\}y = 0.$
Среди решений имеются многочлены $P_n(x)$, именно, при $a > -1/2$ и $n = 0, 1, 2, \dots$ это будут многочлены, получающиеся, если степени $1, x, x^2, \dots$ ортогонализировать так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} |x|^{2a} P_m(x) P_n(x)\,dx = 0 \text{ при } m \neq n.$$

2.211. $x^2y'' + 4x^3y' + (4x^4 + 2x^2 + 1)y = 0.$
Полагая $u(x) = e^{x^2}y$, получаем уравнение 2.187: $x^2u'' + u = 0$; следовательно,

$$y = \sqrt{x}\,e^{-x^2}[C_1\cos(\alpha\ln x) + C_2\sin(\alpha\ln x)] \text{ при } \alpha = \sqrt{3/4}.$$

2.212. $x^2y'' + (ax^2 + b)xy' + f(x)y = 0;$
см. 2.125а и для частных видов функции $f(x)$ также 2.215.

2.212а. $x^2y'' + (ax^2 + bx + c)xy' + (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)y = 0.$

(а) $A = ar,\ B = as + br - r^2,\ C = bs + cr - 2rs,\ D = s(c - s - 1)$:

$$y = x^{-s}e^{-rx}\left\{C_1 + C_2\int x^{2s-c}\exp\left[(2r-b)x - \frac{ax^2}{2}\right]dx\right\}.$$

(б) $A = a(b - r),\quad B = a(c - s + 1) + r(b - r),\quad C = bs + cr - 2rs,$
$D = s(c - s - 1)$:

$$y = x^{-s}\exp\left(-\frac{ax^2}{2} - rx\right)\left\{C_1 + C_2\int x^{2s-c}\exp\left[\frac{ax^2}{2} + (2r-b)x\right]dx\right\}.$$

2.213. $x^2y'' + (x^3 + 1)xy' - y = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $3\xi = x^3$, получаем уравнение 2.195:

$$\xi^2\eta'' + (\xi + 3)\xi\eta' - \eta = 0.$$

2.214. $x^2y'' + [-x^4 + (2n + 2a + 1)x^2 + (-1)^n a - a^2]y = 0.$
Полагая $y = u(x)x^a\exp(-1/2x^2)$, получаем уравнение 2.210 с искомой функцией u вместо y.

2.215. $x^2y'' + (ax^n + b)xy' + (\alpha x^{2n} + \beta x^n + \gamma)y = 0$, n не обязательно целое.
Если k есть корень уравнения $n^2k^2 + (b - 1)kn + \gamma = 0$, то подстановка $y(x) = \xi^k\eta(\xi)$, $\xi = x^n$ приводит к уравнению

$$n^2\xi\eta'' + [na\xi + 2kn^2 + n(n - 1 + b)]\eta' + (\alpha\xi + kna + \beta)\eta = 0.$$

Это уравнение относится к типу 2.120, а в некоторых случаях, именно когда $4\alpha \neq a^2$ и $2\beta = a(b + n - 1)$, — к типу 2.162 (17); кроме того, в некоторых случаях исходное уравнение сводится к типу 2.162 (16).

$$x^2y'' + (ax^b + 2c)xy' + [a(b + c + d - 1)x^b + c(c - 1) - d(d - 1)]y = 0,$$

$$y = x^{d-c}\exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right)\left[C_1 + C_2\int x^{-2d}\exp\frac{ax^b}{b}dx\right];$$

$$x^2y'' + (ax^b + 2c)xy' + [a(c - d)x^b + c(c - 1) - d(d - 1)]y = 0,$$

$$y = x^{d-c}\left[C_1 + C_2\int x^{-2d}\exp\left(-\frac{ax^b}{b}\right)dx\right].$$

2.216. $x^2y'' + (ax^\alpha + b)xy' + (Ax^{2\alpha} + Bx^\alpha + Cx^\beta + D)y = 0$; см. 2.162 (16).

2.216а. $x^2y'' - 2x^2y'\operatorname{tg} x + ay = 0.$
Полагая $u(x) = y\cos x$, получаем уравнение 2.153

$$x^2u'' + (x^2 + a)u = 0.$$

2.216б. $x^2y'' + 2x^2y' \operatorname{ctg} x + ay = 0$.

Полагая $u(x) = y \sin x$, приходим к тому же уравнению, что и в случае 2.216а.

2.216в. $x^2y'' - (2x \operatorname{tg} x - 1)\,xy' - (x \operatorname{tg} x + a)\,y = 0$.

Полагая $u(x) = y \cos x$, получаем уравнение 2.162:

$$x^2u'' + xu' + (x^2 - a)\,u = 0.$$

2.216г. $x^2y'' + (2x \operatorname{ctg} x + 1)\,xy' + (x \operatorname{ctg} x - a)\,y = 0$.

Полагая $u(x) = y \sin x$, приходим к тому же уравнению, что и в случае 2.216в.

2.217. $x^2y'' - (2x^2 \operatorname{tg} x - x)\,y' - (x \operatorname{tg} x + a)\,y = 0$; см. 2.162 (20).

2.218. $x^2y'' + (2x^2 \operatorname{ctg} x + x)\,y' + (x \operatorname{ctg} x + a)\,y = 0$; см. 2.162 (21).

2.218а. $x^2y'' + xfy' + [xf' + (a-1)\,f + a\,(1-a)]\,y = 0,\ f = f(x)$.

$$y = x^a e^{-F}\left(C_1 + C_2 \int x^{-2a} e^F dx\right), \text{ где } F = \int \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

2.218б. $x^2y'' + x\,(f + 2a)\,y' + [(a + bx)\,f - b^2x^2 + a\,(a-1)]\,y = 0,\ f = f(x)$.

$$y = x^{-a} e^{-bx}\left\{C_1 + C_2 \int \exp\left(2bx - \int \frac{f(x)}{x}\,dx\right) dx\right\}.$$

2.219. $x^2y'' + 2xfy' + (xf' + f^2 - f + ax^2 + bx + c)\,y = 0,\ f = f(x)$.

Полагая $u(x) = y \exp \int \frac{f}{x}\,dx$, получаем уравнение 2.154 с искомой функцией u вместо y.

2.220. $x^2y'' + 2x^2fy' + [x^2\,(f' + f^2 + a) - \nu\,(\nu + 1)]\,y = 0,\ f = f(x)$.

Полагая $u(x) = y \exp \int f\,dx$, получаем уравнение 2.153 с искомой функцией u вместо y.

2.221. $x^2y'' + (x - 2x^2f)\,y' + [x^2\,(1 + f^2 - f') - xf - \nu^2]\,y = 0,\ f = f(x)$; см. 2.162 (22).

222 — 250 $(x^2 \pm a^2)\,y'' + \ldots$

2.222. $(x^2 + 1)\,y'' + xy' + 2y = 0$; частный случай уравнения 2.297.

$$y = C_1 \cos u + C_2 \sin u,\quad u = \sqrt{2}\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

2.223. $(x^2 + 1)\,y'' + xy' - 9y = 0$; частный случай уравнения 2.297.

$$y = C_1\,(4x^2 + 3)\,x + C_2\,(4x^2 + 1)\sqrt{x^2+1}.$$

2.224. $(x^2 + 1)\,y'' + xy' + ay = 0$; частный случай уравнения 2.297.

2.225. $(x^2 + 1)\,y'' - xy' + y = 0$.

$$y = C_1x + C_2x \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

2.225а. $(x^2 + 1)\,y'' - xy' - 24y = 0$.

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = ix$, получаем второй из частных случаев 2.231а с переменными ξ, η вместо x, y.

2.226. $(x^2 + 1)\,y'' + 2xy' - \nu\,(\nu + 1)\,y = 0$; см. 2.240 (1).

2.227. $(x^2 + 1)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$.

$$y = C_1x + C_2\,(x^2 - 1).$$

2.228. $(x^2 + 1)\,y'' + 3xy' + ay = 0$.

Дифференцируя уравнение

$$(x^2 + 1)\,u'' + xu' + (a - 1)\,u = 0, \tag{1}$$

получаем $(x^2+1)\,u''' + 3xu'' + au' = 0$. Поэтому $y = u'$, где u — произвольное решение уравнения (1). Уравнение (1) может быть решено согласно 2.297.

2.229. $(x^2+1)\,y'' + 4xy' + 2y = 2\cos x - 2x$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$(x^2+1)\,y = C_1 + C_2 x - \frac{x^3}{3} - 2\cos x.$$

2.230. $(x^2+1)\,y'' + axy' + (a-2)\,y = 0$;
уравнение в полных дифференциалах.

$$y = (x^2+1)^{(2-a)/2}\left[C_1 + C_2\int (x^2+1)^{(a-4)/2}dx\right].$$

2.231. $(x^2-1)\,y'' - \nu(\nu+1)\,y = 0$;
частный случай уравнения 2.240 (14) при $a = n = 1$.

2.231a. $(x^2-1)\,y'' - xy' + ay = 0$; частный случай уравнения 2.247a.

$$a = -3:\quad y = C_1(2x^3 - 3x) + C_2\,|x^2-1|^{3/2};$$

$$a = -24:\quad y = C_1(64x^6 - 120x^4 + 60x^2 - 5) + C_2 x(8x^2-3)\,|x^2-1|^{3/2}.$$

2.232. $(x^2-1)\,y'' - n(n+1)\,y + P_n'(x) = 0$,
P_n — полином Лежандра n-й степени; Q_n — шаровая функция Лежандра второго рода n-го порядка [см. 2.240.— *Прим. ред.*].

$$y = {}^1/_2\,P_{n-1}(x) + C_1(P_{n+1} - P_{n-1}) + C_2(Q_{n+1} - Q_{n-1}).$$

2.232a. $(x^2-1)\,y'' + ay' - 6y = 0$.
Одно из решений:

$$y = |x+1|^{(2+a)/2}\,|x-1|^{(2-a)/2}\,(4x-a);$$

остальные решения получаются согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.233. $(x^2-1)\,y'' - n(n+1)\,y + Q_n'(x) = 0$.
В обозначениях 2.232 решение имеет вид

$$y = {}^1/_2 Q_{n-1}(x) + C_1(P_{n+1} - P_{n-1}) + C_2(Q_{n+1} - Q_{n-1}).$$

2.234. $(x^2-1)\,y'' + xy' + 2 = 0$.
Линейное уравнение первого порядка относительно y'.
Получаем

$$y = C_1 + C_2 u \pm u^2;$$

если $|x| < 1$, то $u = \arcsin x$, и следует брать верхний знак,
если $|x| > 1$, то $u = \operatorname{Arch} x$, и следует брать нижний знак.

2.235. $(x^2-1)\,y'' + xy' + ay = 0$.
(а) $a = \alpha^2 > 0$. Решения:

$$y = \begin{cases} C_1\cos(\alpha\operatorname{Arch}|x|) + C_2\sin(\alpha\operatorname{Arch}|x|) & \text{при } |x| > 1,\\ C_1\exp(\alpha\arccos x) + C_2\exp(-\alpha\arccos x) & \text{при } |x| < 1.\end{cases}$$

(б) $a = -\alpha^2 < 0$. Решения:

$$y = \begin{cases} C_1\exp(\alpha\operatorname{Arch}|x|) + C_2\exp(-\alpha\operatorname{Arch}|x|) & \text{при } |x| > 1,\\ C_1\cos(\alpha\arccos x) + C_2\cos(\alpha\arcsin x) & \text{при } |x| < 1.\end{cases}$$

(в) Если $a = -n^2$ (n — натуральное число), то в число решений входят полиномы Чебышева

$$T_n(x) = 2^{-n+1}\cos(n\arccos x).$$

Курант и Гильберт, стр. 82—83.

(г) Задача о собственных значениях:

$$(x^2-1)\,y''+xy'-\lambda y=0,\ «y(x) \text{ регулярна при } x=\pm 1»$$

— имеет собственные значения $\lambda=n^2$ (n — целое), а собственными функциями являются полиномы Чебышева $T_n(x)$.

2.236. $(x^2-1)\,y''+xy'+f(x)\,y=0$.

При $|x|<1$ подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\cos\xi$, $k\pi<\xi<(k+1)\pi$ приводит к уравнению $\eta''=\eta f(\cos\xi)$, т. е. к уравнению Хилла 2.30, а при $|x|>1$ подстановка $y=\eta(\xi)$, $|x|=\operatorname{ch}\xi$ приводит к уравнению $\eta''+f(\operatorname{ch}\xi)\,\eta=0$.

Непосредственное изучение исходного уравнения см. А й н с, стр. 519 и сл.; см. также P o o l e, *Proceedings London Math. Soc.* (2), **20** (1922), стр. 374.

2.237. $(x^2-1)\,y''+2xy'=0$.

$$y=C_1+C_2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

Фундаментальное решение: $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{(x-1)(\xi+1)}{(x+1)(\xi-1)}\right|$.

В случае краевых условий «$y(x)$ ограничена в интервале $-1<x<1$» $y=C$ — ненулевое решение. Поэтому для этой краевой задачи существует лишь обобщенная функция Грина, которая имеет вид

$$\tilde{\Gamma}(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)(1+\xi)+\ln 2-\dfrac{1}{2} & \text{при } x\leqslant\xi,\\ -\dfrac{1}{2}\ln(1+x)(1-\xi)+\ln 2-\dfrac{1}{2} & \text{при } x\geqslant\xi.\end{cases}$$

2.238. $(y^2-1)\,y''+2xy'=a$.

$$y=a\ln|x+1|+C_1+C_2\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

2.239. $(x^2-1)\,y''+2xy'-\lambda y=0$.

Это уравнение совпадает, по существу, с уравнением Лежандра 2.240. Краевым условиям «$y(x)$ ограничена на интервале $-1<x<1$» соответствуют (простые) собственные значения $\lambda=n(n+1)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, и нормированные собственные функции $\sqrt{n+{}^1/_2}\,P_n(x)$, где P_n — полиномы Лежандра.

К у р а н т и Г и л ь б е р т, стр. 277—279.

2.240. $(x^2-1)\,y''+2xy'-\nu(\nu+1)\,y=0$; уравнение Лежандра.

[Литература: К у р а н т и Г и л ь б е р т, стр. 77—80, 277—279, 426—427, 448—449; У и т т е к е р и В а т с о н, т. II, гл. 15; Я н к е, Э м д е и Л ё ш; С а н с о н е, т. I, стр. 139—141; Д. Д ж е к с о н, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; М. А. Л а в р е н т ь е в и Б. В. Ш а б а т, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Н. Н. Л е б е д е в, Специальные функции и их приложения, 1963; Д. С. К у з н е ц о в, Специальные функции, 1965; Г. Б е й т м е н и А. Э р д е й и, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, 1965. О связях с уравнениями в частных производных см., например, С. Л. С о б о л е в, Уравнения математической физики, 1954, лекции XXIX, XXX. — *Прим. ред.*]

Это уравнение получается из 2.407 при $a_1=-1$, $b_2=0$, $a_2=a_3=b_1=b_3=1$, $\alpha_1=\beta_1=\alpha_3=\beta_3=0$, $\alpha_2=-\nu$, $\beta_2=\nu+1$ и, следовательно, может быть сведено к гипергеометрическому уравнению 2.260. Далее, оно получается из уравнения 2.410 при $a=1$, $b=2$, $p=2$, $q=0$, $r=-\nu(\nu+1)$, $s=0$.

Часто также под уравнением Лежандра понимают уравнение

$$\eta'' \sin \xi + \eta' \cos \xi + \nu(\nu+1)\eta \sin \xi = 0,$$

получающееся подстановкой $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \cos \xi$.

В самосопряженной форме уравнение имеет вид

$$[(x^2-1)y']' - \nu(\nu+1)y = 0.$$

Инвариант данного уравнения равен

$$I = \frac{1}{(x^2-1)^2} - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2-1}.$$

Подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = -x$ переводит это уравнение само в себя. Поэтому, если ограничиваться действительными значениями x, достаточно рассматривать область $x > 0$. Если же не ограничиваться областью $x > 0$, то x^ν при не целом ν следует рассматривать как однозначную аналитическую функцию в комплексной x-плоскости, разрезанной вдоль луча, идущего из точки $x = 0$. То же самое относится и к логарифмическим членам.

Представление решений степенными рядами.

(А) При $|x| < 1$ получаем, пользуясь вышеуказанной связью между уравнением Лежандра и гипергеометрическим уравнением, решения в следующем виде:

$$y = C_1 F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) + C_2 x F\left(\frac{1-\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

где F — гипергеометрический ряд 2.260 (10).

(Б) При $|x| > 1$ полагаем

$$y_\nu(x) = x^\nu + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{C_\nu^{2k} \cdot C_\nu^k}{C_{2\nu}^{2k}} x^{\nu-2k};$$

при этом 2ν не должно равняться никакому нечетному натуральному числу; если ν — натуральное число, то в приведенной формуле следует опустить все те члены, которые в числителе содержат множитель 0.

(а) 2ν не равно никакому нечетному натуральному числу. Тогда

$$y = C_1 y_\nu + C_2 y_{-\nu-1}$$

представляет собой общее решение.

(б) $2\nu = 2p+1$, p — неотрицательное целое число. Тогда общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_\nu^* + C_2 y_{-\nu-1};$$

при этом

$$y_\nu^* = \sum_{k=0}^{\nu-1/2} (-1)^k \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-2k+1)\, x^{\nu-2k}}{2^k k!\,(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots(2\nu-2k+1)} +$$

$$+ \lambda_\nu(\nu)\, y_{-\nu-1} \ln x + \lambda_\nu(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+2k)\, x^{-\nu-1-2k}}{2^k k!\,(2\nu+3)(2\nu+5)\ldots(2\nu+2k+1)},$$

где

$$\lambda_\rho(\nu)=(-1)^{\nu+1/2}\frac{\rho(\rho-1)\ldots(\rho-2\nu)}{2^{\nu+1/2}(\nu+1/2)!\,(2\rho-1)(2\rho-3)\ldots(2\rho-2\nu+2)},$$

$$A_k=A_k(\nu)=\sum_{\varkappa=1}^{k}\left(\frac{1}{2\varkappa}+\frac{1}{2\nu+2\varkappa+1}\right)-\sum_{\varkappa=1}^{2k}\frac{1}{\nu+\varkappa},$$

и первый член первой суммы в выражении для y_ν^* равен x^ν.

(в) $2\nu=-(2q+1)$, $q=1, 2, 3, \ldots$ Общее решение:

$$y=C_1y_\nu+C_2y^*_{-\nu-1},$$

где y^* имеет значение, указанное в (б).

(г) $\nu=-1/2$. Общее решение:

$$y=C_1y_{-1/2}+C_2y^*_{-1/2};$$

при этом

$$y^*_{-1/2}=y_{-1/2}\ln x+2\sum_{k=1}^{\infty}C_{4k}^{2k}C_{2k}^{k}A_k\left(-\frac{1}{2}\right)(4x)^{-1/2-2k},$$

где A_k имеет значение, указанное в (б).

Функции Лежандра. При $x>1$ полагаем

$$P_\nu(x)=\frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^\nu\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}y_\nu(x)$$

(Γ — гамма-функция Эйлера), если 2ν или отрицательное целое число, или положительное нечетное число, и полагаем

$$Q_\nu(x)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(2\nu+2)}y_{-\nu-1},$$

если 2ν не равно никакому целому числу, меньшему чем -1. Эти функции называются *функциями Лежандра первого* и *второго рода* или также *сферическими функциями* первого и второго рода (зональные гармоники). О представлении этих функций интегралами см. ч. I, п. 19.5.

Если $\nu=n$ — натуральное число, то

$$y=\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\left[C_1+C_2\left(\ln\frac{x+1}{x-1}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{2}{x+1}\right)^k\right)\right]\right\}.$$

J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 50.

При этом мы получаем полином Лежандра первого рода

$$P_n(x)=2^{-n}\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2}(-1)^kC_n^kC_{2n-2k}^nx^{n-2k}=\frac{1}{2^nn!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,$$

откуда

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\qquad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3);$$

в то же время, например,

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, \quad Q_1(x) = \frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1} - 1,$$
$$Q_2(x) = \frac{1}{2}P_2(x)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x.$$

$P_n(x)$ при $-\infty < x < +\infty$ удовлетворяют рассматриваемому уравнению. Для натуральных значений $\nu = n$ и $|x| > 1$ общее решение имеет вид

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x).$$

Детерминант Вронского, используемый для решения неоднородного уравнения, имеет вид

$$W(P_n, Q_n) = P_n Q_n' - P_n' Q_n = (1 - x^2)^{-1}.$$

Функции Лежандра детально исследованы. Здесь необходимо отметить следующее: $P_n(x)$ являются коэффициентами в разложении

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n.$$

Далее,

$$\nu P_\nu(x) = (2\nu - 1)\, x P_{\nu-1}(x) - (\nu - 1)\, P_{\nu-2}(x),$$
$$(x^2 - 1)\, P_\nu'(x) = \nu x P_\nu(x) - \nu P_{\nu-1}(x);$$

отсюда следует

$$x P_\nu'(x) - P_{\nu-1}'(x) = \nu P_\nu(x).$$

Все нули многочлена $P_n(x)$ действительны и лежат между -1 и $+1$. Имеем

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$
$$P_{2n+1}(0) = 0, \qquad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}.$$

$P_n(x)$ образуют на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ ортогональную систему, причем

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Если $f(x)$ имеет на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ ограниченное изменение, то

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

где

$$a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(t)\, P_n(t)\, dt.$$

В частности,

$$x^n = 2^n n! \sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2} \frac{(2n - 4k + 1)(n-k)!}{2^{2k} k!\, (2n - 2k + 1)!} P_{n-2k}(x).$$

О многочленах P_n как решениях задачи о собственных значениях см. 2.239. Функции Лежандра могут быть представлены также с помощью криволинейных интегралов, например,

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(t^2-1)^n}{2^n (t-x)^{n+1}}\, dt,$$

причем в качестве пути интегрирования в комплексной t-плоскости берется замкнутая кривая, обходящая точку $t=x$ в положительном направлении. Далее,

$$P_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(x + \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right)^\nu d\varphi,$$

$$Q_\nu(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\,\operatorname{ch}\varphi\right)^{\nu+1}} \qquad (\nu > -1).$$

О представлении с помощью интегралов см. также ч. I, п. 19.5.

Родственные уравнения. Если обозначить через $y_\nu(x)$ решения уравнения Лежандра, то указанные ниже уравнения будут иметь следующие решения:

$$(x^2+1)\,y'' + 2xy' - \nu(\nu+1)\,y = 0, \qquad y = y_\nu(ix); \qquad (1)$$

$$(x^2-1)\,y'' + 2(n+1)\,xy' - (\nu+n+1)(\nu-n)\,y = 0, \qquad y = y_\nu^{(n)}(x); \qquad (2)$$

$$2x(x-1)\,y'' + [(2\nu+5)\,x - (2\nu+3)]\,y' + (\nu+1)\,y = 0, \qquad (3)$$

$$y = x^{-\frac{\nu+1}{2}}\, y_\nu\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x(x^2+1)\,y'' + (2x^2+1)\,y' - \nu(\nu+1)\,xy = 0, \qquad y = y_\nu\left(\sqrt{x^2+1}\right); \qquad (4)$$

$$x(x^2+1)\,y'' + [2(n+1)\,x^2 + 2n + 1]\,y' - (\nu-n)(\nu+n+1)\,xy = 0, \qquad (5)$$

$$y = y_\nu^{(n)}\left(\sqrt{x^2+1}\right);$$

$$4x^2(x-1)\,y'' + 2x(3x-1)\,y' - \nu(\nu+1)(x-1)\,y = 0, \qquad (6)$$

$$y = y_\nu\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x^2(x^2+1)\,y'' + x(2x^2+1)\,y' - [\nu(\nu+1)\,x^2 + n^2]\,y = 0, \qquad (7)$$

$$y = x^n y_\nu^{(n)}\left(\sqrt{x^2+1}\right), \quad n \geqslant 0 \text{ и целое};$$

$$x^2(x^2-1)\,y'' + 2x^3y' + \nu(\nu+1)\,y = 0, \qquad y = y_\nu(x^{-1}), \qquad (8)$$

$$x^2(x^2-1)\,y'' + 2x^3y' - \nu(\nu+1)(x^2-1)\,y = 0, \qquad y = y_\nu\left(\frac{x^2+1}{2x}\right); \qquad (9)$$

$$x^2(x^2-1)\,y'' + 2x\,[(1-a)\,x^2 + a]\,y' + \{[a(a-1) - \nu(\nu+1)]\,x^2 - a(a+1)\}\,y = 0, \qquad (10)$$

$$y = x^a y_\nu(x);$$

$$x^2(x^2-1)\,y'' - [2bcx^c(x^2-1) + 2(a-1)\,x^2 - 2a]\,xy' + \{b^2c^2x^{2c}(x^2-1) + bc(2a-c-1)\,x^{c+2} - bc(2a-c+1)\,x^c + [a(a-1) - \nu(\nu+1)]\,x^2 - a(a+1)\}\,y = 0, \qquad (11)$$

$$y = x^a \exp(bx^c)\,y_\nu(x);$$

$$(x^2-1)^2\,y'' + 2x(x^2-1)\,y' - [\nu(\nu+1)(x^2-1) + n^2]\,y = 0, \qquad (12)$$

$$y = |x^2-1|^{n/2}\, y_\nu^{(n)}(x), \quad n \geqslant 0 \text{ и целое}.$$

Если ν — натуральное число, то решения

$$P_\nu^n(x) = \left(1 - x^2\right)^{n/2} P_\nu^{(n)}(x), \qquad Q_\nu^n(x) = \left(1 - x^2\right)^{n/2} Q_\nu^{(n)}(x)$$

называются *присоединенными функциями Лежандра* первого и второго родов степени ν и порядка n. См. 2.371.

$$(x^2-1)^2 y'' - 2(2a-1)x(x^2-1)y' + \\ + \{[2a(2a-1) - \nu(\nu+1)]x^2 + 2a + \nu(\nu+1)\} y = 0, \quad (13)$$
$$y = |x^2-1|^a y_\nu(x);$$

$$(x^2-1)^2 y'' + 2(n+1-2a)x(x^2-1)y' + \\ + \{4a(a-n)x^2 - [2a + (\nu+n+1)(\nu-n)](x^2-1)\} y = 0, \quad (14)$$
$$y = |x^2-1|^a y_\nu^{(n)}(x), \quad n \geqslant 0 \text{ и целое;}$$

$$4x^2(x-1)^2 y'' + 2x(x-1)(3x-1)y' - \\ - [\nu(\nu+1)(x-1)^2 + 4n^2 x] y = 0, \quad (15)$$
$$y = C_1 P_\nu^n\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right) + C_2 Q_\nu^n\left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right);$$

$$x(x^2-1)^2 y'' + (x^2-1)(3x^2-1)y' + [x^2 - 1 - (2\nu+1)^2] xy = 0, \quad (16)$$
$$y = |x^2-1|^{-1/2} y_\nu\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right);$$

$$\left(a^2x^{2b} - 1\right)x^2y'' + \left[a^2(b+1)x^{2b} + b - 1\right]xy' - \\ - \nu(\nu+1)a^2b^2x^{2b}y = 0, \quad y = y_\nu\left(ax^b\right); \quad (17)$$

$$\left(b^2x^{2c} - 1\right)x^2y'' + \left[(1+c-2a)b^2x^{2c} + 2a + c - 1\right]xy' + \\ + \left\{b^2\left[a(a-c) - c^2\nu(\nu+1)\right]x^{2c} - a(a+c)\right\} y = 0, \quad (18)$$
$$y = x^a y_\nu(bx^c);$$

$$y'' \sin x + (2n+1)y' \cos x + (\nu-n)(\nu+n+1) y \sin x = 0, \quad (19)$$
$$y = y_\nu^{(n)}(\cos x);$$

$$y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x + [\nu(\nu+1)\sin^2 x - n^2] y = 0, \quad (20)$$
$$y = \sin^n x y_\nu^{(n)}(\cos x);$$

$$f^2g'(g^2-1)y'' + \left[2fgg'^2 - (g^2-1)(fg'' + 2f'g')\right] fy' + \\ + \{(g^2-1)[f'(fg'' + 2f'g') - ff''g'] - \\ - [2f'g + \nu(\nu+1)fg'] fg'^2\} y = 0, \quad f = f(x), \quad g = g(x), \quad (21)$$
$$y = f(x) y_\nu(g(x));$$

$$(x^2-1)^2 y^{(4)} + 10x(x^2-1)y''' + \\ + \{8(3x^2-1) - 2[\mu(\mu+1) + \nu(\nu+1)](x^2-1)\} y'' - \\ - 6x[\mu(\mu+1) + \nu(\nu+1) - 2] y' + \\ + \{[\mu(\mu+1) - \nu(\nu+1)]^2 - 2\mu(\mu+1) - 2\nu(\nu+1)\} y = 0, \quad (22)$$
$$y = y_\mu(x) y_\nu(x) \text{ при } \mu \neq \nu.$$

Об одном уравнении третьего порядка см. 3.82.

2.240a. $(x^2-1)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

$$y = C_1 x + C_2(x^2+1).$$

2.241. $(x^2-1)y'' - 2xy' - (\nu+2)(\nu-1)y = 0;$
частный случай уравнения 2.240 (14) при $n = a = 2$.

2.241a. $(x^2-1)\,y''+3xy'+ay=0.$

Полагая $u(x)=y(x)\sqrt{|x^2-1|}$, получаем уравнение 2.235:

$$(x^2-1)\,u''+xu'+(a-1)\,u=0.$$

2.242. $(x^2-1)\,y''-(3x+1)\,y'-(x^2-x)\,y=0.$

$$y=(x+1)^2e^{-x}\left(C_1+C_2\int\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}e^{2x}\,dx\right).$$

2.243. $(x^2-1)\,y''+4xy'+(x^2+1)\,y=0.$

$$(x^2-1)\,y=C_1\sin x+C_2\cos x.$$

2.244. $(x^2-1)\,y''+2(n+1)\,xy'-(\nu+n+1)(\nu-n)\,y=0,$
n — целое неотрицательное число; см. 2.240 (2).

2.245. $(x^2-1)\,y''-2(n-1)\,xy'-(\nu-n+1)(\nu+n)\,y=0;$
частный случай уравнения 2.240 (14) при $a=n$.

2.246. $(x^2-1)\,y''-2(\nu-1)\,xy'-2\nu y=0.$

$$y=|x^2-1|^{\nu}\left(C_1+C_2\int|x^2-1|^{-\nu-1}\,dx\right).$$

Если $\nu=n$ — натуральное число, то, дифференцируя n раз и полагая $u(x)=y^{(n)}$, получаем уравнение Лежандра 2.240, в котором $\nu=n$, с искомой функцией u вместо y.

2.247. $(x^2-1)\,y''+2axy'+a(a-1)\,y=0.$

$$y=C_1|x+1|^{1-a}+C_2|x-1|^{1-a}.$$

2.247a. $(x^2-1)\,y''+axy'+by=0.$

На интервале $|x|<1$, полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\sin\xi$, получаем уравнение 2.70: $\eta''+(1-a)\,\eta'\operatorname{tg}\xi-b\eta=0$, а при $x>1$, соответственно $x<-1$, полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\pm\operatorname{ch}\xi$, получаем уравнение 2.65: $\eta''+(a-1)\,\eta'\operatorname{cth}\xi+b\eta=0$. Далее, подстановка $y=|x^2-1|^{(2-a)/2}\,u(x)$ переводит исходное уравнение в уравнение

$$(x^2-1)\,u''+(4-a)\,xu'+(2-a+b)\,u=0.$$

Первая из указанных подстановок предпочтительнее, если a — нечетное целое число.

2.248. $(x^2-1)\,y''+axy'+(bx^2+cx+d)\,y=0.$

Полагая $y=e^{-\lambda\xi}\eta(\xi)$, $\xi=x-1$, $\lambda^2=-b$, получаем

$$\xi(\xi+2)\,\eta''+[-2\lambda\xi^2+(a-4\lambda)\,\xi+a]\,\eta'+\\+[(c-a\lambda)\,\xi+b+c+d-a\lambda]\,\eta=0.$$

Об этом уравнении см. 2.261. Об исходном уравнении см. также 2.240 (14). О случае $c=0$ см. J. A. Stratton, *Proceedings USA Academy* **21** (1935), стр. 51—56, 316—321; E. Fisher, *Philos. Magazine* (7), **24** (1937), стр. 245—256.

2.249. $(x^2-1)\,y''+(ax+b)\,y'+cy=0.$

Об этом уравнении см. прежде всего уравнение Лежандра 2.240, а также приведенные там уравнения, решения которых выражаются через функции Лежандра. Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $2\xi=x+1$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260

$$\xi(\xi-1)\,\eta''+\left(a\xi-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\right)\eta'+c\eta=0.$$

О решении этого уравнения с помощью определенных интегралов см. ч. I, § 19.

Если $a>b$ и $a+b>0$, то среди решений имеются многочлены тогда и только тогда, когда $c=n(1-n-a)$, n — некоторое неотрицательное целое число. В этом случае решениями будут полиномы Якоби (см. 2.260). В частности получаем: при $b=0$ — ультрасферические полиномы; при $b=0$, $a=1$ — полиномы Чебышева первого рода

$$T_n(x)=\cos n\vartheta;$$

при $b=0$, $a=2$ — полиномы Лежандра; при $b=0$, $a=3$ — полиномы Чебышева второго рода

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta};$$

при $b=1$, $a=3$

$$U_{2n}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)=\frac{\sin(n+{}^1/_2)\vartheta}{\sin(\vartheta/2)};$$

здесь всюду $x=\cos\vartheta$.

2.250. $(x^2-a^2)y''+8xy'+12y=0$.

$$y=C_1|x+a|^{-3}+C_2|x-a|^{-3}.$$

251—303. $(ax^2+bx+c)y''+\dots$

2.251. $x(x+1)y''-(x-1)y'+y=0$;
гипергеометрическое уравнение 2.260 с независимой переменной $-x$.

$$y=C_1(x-1)+C_2[(x-1)\ln|x|-4x].$$

2.252. $x(x+1)y''+(ax+b)y'+cy=0$.
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-x$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260: $\xi(\xi-1)\eta''+(a\xi-b)\eta'+c\eta=0$.

2.253. $x(x+1)y''+(3x+2)y'+y=0$; частный случай уравнения 2.252.

$$y=x^{-1}(C_1+C_2\ln|x+1|).$$

2.254. $(x^2+x-2)y''+(x^2-x)y'-(6x^2+7x)y=0$.

$$y=(x-1)e^{2x}\left\{C_1+C_2\int\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 e^{-5x}\,dx\right\}.$$

2.255. $x(x-1)y''+ay'-2y=0$
Уравнение в полных дифференциалах; оно эквивалентно линейным уравнениям $x(x-1)y'-(2x-a-1)y=C$, где C — произвольная постоянная.

2.255a. $x(x-1)y''+ay'+by=0$; частный случай уравнения 2.260.
Частные решения:

$b=-6$: $\quad y=|x|^{1+a}|x-1|^{1-a}(4x-a-2)$;
$a=2$, $b=-6$: $\quad y=x^3$;
$a=-2$, $b=-6$: $\quad y=(x-1)^3$;
$a={}^1/_2$, $b=-{}^3/_4$: $\quad y=|x|^{3/2}$.

2.256. $x(x-1)y''+(2x-1)y'-\nu(\nu+1)y=0$.
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=1-2x$, получаем уравнение 2.240 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.257. $x(x-1)y''+[(a+1)x+b]y'=0.$

$$y=C_1+C_2\int |x|^b|x-1|^{-a-b-1}\,dx.$$

Умножив это уравнение на $-x^{-b-1}(1-x)^{a+b}$, приведем его к самосопряженному виду

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-b}(1-x)^{a+b+1}y'\right]=0.$$

При $0<x,\ \xi<1$ фундаментальное решение имеет вид

$$g(x,\xi)=\mp\frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{x}T(t)\,dt \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x\leqslant\xi, \\ x\geqslant\xi, \end{matrix}$$

где $T(t)=t^b(1-t)^{-a-b-1}$.

Краевым задачам с условиями

I. y и y' ограничены при $x\to 0$,

$$(1-x)^{a+b+1}\frac{y'}{y}\to A\neq 0 \quad \text{при} \quad x\to 1;$$

II. y и y' ограничены при $x\to 1$, $x^{-b}\dfrac{y'}{y}\to B\neq 0$ при $x\to 0$;

III. $x^{-b}\dfrac{y'}{y}\to B\neq 0$ при $x\to 0$, $(1-x)^{a+b+1}\dfrac{y'}{y}\to A\neq 0$ при $x\to 1$

соответствуют функции Грина:

$$\Gamma_{\mathrm{I}}(x,\xi)=\frac{1}{A}+\int\limits_{1}^{\xi}T(t)\,dt \qquad (b<0,\ -1<a+b<0);$$

$$\Gamma_{\mathrm{II}}(x,\xi)=-\frac{1}{B}-\int\limits_{0}^{x}T(t)\,dt \qquad (-1<b<0,\ a+b>-1);$$

$$\Gamma_{\mathrm{III}}(x,\xi)=\frac{1}{C}\left(\int\limits_{0}^{x}T\,dt+\frac{1}{B}\right)\left(\int\limits_{1}^{\xi}T\,dt+\frac{1}{A}\right)$$

$$(-1<b<0,\ -1<a+b<0),\quad C=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}+\int\limits_{0}^{1}T\,dt.$$

Эти формулы дают значения Γ лишь при $x\leqslant\xi$; при $x\geqslant\xi$ нужно в правых частях приведенных формул заменить x на ξ и ξ на x.

2.258. $x(x-1)y''+(ax+b)y'+cy=0$; см. 2.260.

При $c=a-2$ это — уравнение в полных дифференциалах; в этом случае оно эквивалентно линейным уравнениям

$$x(x-1)y'+[(a-2)x+b+1]y=C,$$

где C — произвольная постоянная.

(а) $b=c=-a$: $y=(x-1)\left(C_1+C_2\int\frac{dx}{|x|^a(x-1)^2}\right)$;

(б) $b=\frac{1}{2}-a$, $c=\frac{a}{2}-\frac{3}{4}$:

$$y=|x|^{(3-2a)/2}\left(C_1+C_2\int\frac{|x|^{(2a-5)/2}}{\sqrt{|x-1|}}\,dx\right);$$

(в) $b=4$, $c=-3(a+2)$:

$$y=|x-1|^{-a-3}\,[(a+6)x-4]\left\{C_1+C_2\int\frac{x^4|x-1|^{a+2}}{[(a+6)x-4]^2}\,dx\right\};$$

(г) $a=2i-1$, $b=-2i-1$, $c=1-2i$: одно из решений

$$y=5x+4i-3.$$

См. также 2.268, 2.268а, б, 2.269.

2.259. $x(x-1)y''+[(a+1)x+b]\,y'-\lambda y=0$; см. 2.260.

Краевым условиям «$y(x)$ ограничена при $0<x<1$» соответствуют собственные значения $\lambda=n(n+a)$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), а собственными функциями являются полиномы Якоби $F(-n,\ n+a,\ b,\ x)$ (см. 2.260).

2.260. $x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+1)x-\gamma]\,y'+\alpha\beta y=0$;

гипергеометрическое уравнение Гаусса.

[Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II; Курант и Гильберт, стр. 83; Сансоне, т. I, гл. III, § 4,5; В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, 1949, стр. 369—376; Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, 1948; Янке, Эмде и Лёш; Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, 1963; А. Кратцер и В. Франц, Трансцендентные функции, 1963; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, 1965.— *Прим. ред.*]

О гипергеометрических функциях нескольких независимых переменных см. P. Appell, J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques, polynomes d'Hermite, Paris, 1926.

Исходное уравнение запишем кратко в виде

$$H(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ y,\ x)=0; \tag{1}$$

это и эквивалентное с ним по существу уравнение 2.403 охватывают ряд важных частных случаев. Инвариант этого уравнения равен

$$I=\frac{1-\lambda^2}{4x^2}+\frac{1-\mu^2}{4(x-1)^2}+\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{4x(x-1)},$$

где $\lambda=\gamma-1$, $\mu=\alpha+\beta-\gamma$, $\nu=\alpha-\beta$. Вронскиан некоторой фундаментальной системы решений равен

$$y_1y_2'-y_2y_1'=C\,|x|^{-\gamma}\,|1-x|^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Замена переменных в уравнении. Подстановка

$$y(x)=|x|^{1-\gamma}\,\eta(x),\quad x\neq 0, \tag{2}$$

преобразует взаимно однозначно решения уравнения (1) в решения уравнения

$$H(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \eta,\ x)=0; \tag{3}$$

подстановка

$$y(x)=|x-1|^{\gamma-\alpha-\beta}\,\eta(x), \quad x\neq 1, \tag{4}$$

преобразует их в решения уравнения

$$H(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \eta,\ x)=0; \tag{5}$$

подстановка

$$y(x)=|x|^{-\alpha}\,\eta(\xi), \quad \xi=x^{-1}, \quad x\neq 0, \tag{6}$$

— в решения уравнения

$$H(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ \eta,\ \xi)=0, \tag{7}$$

а подстановка

$$y(x)=|x-1|^{-\alpha}\,\eta(\xi), \quad \xi=x/(x-1), \quad x\neq 1, \tag{8}$$

— в решения уравнения

$$H(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \eta,\ \xi)=0. \tag{9}$$

Если допускаются комплексные значения переменных, то знаки абсолютной величины следует отбросить или заменить скобками. О замене переменных см. также 2.407.

Представление решений степенными рядами. Так как подстановки (6) и (8) переводят полупрямые $x>1$ и $x<0$ в интервал $0<\xi<1$, то, если ограничиться действительными значениями x, достаточно искать решение уравнения (1) для интервала $0<x<1$. Это решение может быть представлено гипергеометрическим рядом

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{k!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}x^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^k_{\alpha+k-1}C^k_{\beta+k-1}}{C^k_{\gamma+k-1}}x^k; \tag{10}$$

при этом γ не должно равняться никакому целому неположительному числу. Этот ряд заведомо сходится при $|x|<1$; с помощью аналитического продолжения можно получить однозначную функцию, регулярную во всей комплексной плоскости, разрезанной вдоль действительной оси от $x=1$ до $x=+\infty$. Частные случаи гипергеометрической функции (n — натуральное число):

$$F(\alpha,-n,-n,x)=F(-n,\alpha,-n,x)=\sum_{k=0}^{n}C^k_{\alpha+k-1}x^k;$$

$$F(1,1,1,x)=F(1,\beta,\beta,x)=F(\alpha,1,\alpha,x)=(1-x)^{-1};$$

$$F(-n,\beta,\beta,-x)=(1+x)^n;$$

$$nxF(1-n,1,2,x)=1-(1-x)^n;$$

$$2F\left(-\frac{n}{2},-\frac{n-1}{2},\frac{1}{2},x^2\right)=(1+x)^n+(1-x)^n;$$

$$2nxF\left(-\frac{n-1}{2},-\frac{n}{2}+1,\frac{3}{2},x^2\right)=(1+x)^n-(1-x)^n;$$

$$F(-n,\ 1,\ -n,\ x)=\sum_{k=0}^{n}x^k;$$

$$xF(1,\ 1,\ 2,\ -x)=\ln(1+x);$$

$$2xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ x^2\right)=\ln\frac{1+x}{1-x};$$

$$xF\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right)=\arcsin x;$$

$$xF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ -x^2\right)=\operatorname{arctg} x;$$

$$F\left(-n,\ n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right)=(-1)^n\frac{2^n n!}{1\cdot 3\ldots(2n-1)}P_{2n}(x);$$

$$xF\left(-n,\ n+\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right)=(-1)^n\frac{2^n n!}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}P_{2n+1}(x),$$

где $P_m(x)$ — полином Лежандра;

$$F(-n,\ n+a,\ b,\ x)=\frac{x^{1-b}(1-x)^{b-a}}{b(b+1)\ldots(b+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{b+n-1}(1-x)^{a+n-b}\right],$$

это — полиномы Якоби.

Из (10) непосредственно следует

$$F'(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x),$$

если только γ не равно никакому целому неположительному числу.

Гипергеометрическая функция $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $|x|<1$. При $0<x<1$ общее решение имеет вид:

(а) γ — не целое число:

$$C_1F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)+C_2x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x);$$

(б) $\gamma=-c$ — целое число, $c\geqslant -1$:

$$C_1y+C_2y^*,$$

где

$$y=x^{c+1}F(\alpha+c+1,\ \beta+c+1,\ 2+c,\ x),$$

$$y^*=\begin{cases}\lim\limits_{\gamma\to -c}\Big[F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)-\\ \quad-\dfrac{\lambda_\gamma}{\gamma+c}x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)\Big] & \text{при}\quad c\geqslant 0,\\ \lim\limits_{\gamma\to 1}\dfrac{1}{\gamma-1}\big[F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)-\\ \quad-x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)\big] & \text{при}\quad c=-1\end{cases}$$

и

$$\lambda_\gamma=\begin{cases}C_{\alpha+c}^{c+1}\dfrac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+c)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+c-1)} & \text{при}\quad c\geqslant 1,\\ \alpha\beta & \text{при}\quad c=0,\\ 1 & \text{при}\quad c=-1;\end{cases}$$

y^* может быть представлено также в виде

$$y^* = \lambda_{-c} x^{1+c} \ln x \cdot F(\alpha + c + 1,\ \beta + c + 1,\ 2 + c,\ x) + \\ + \sum_{k=0}^{c} (-1)^k \frac{C^k_{\alpha+k-1} C^k_{\beta+k-1}}{C^k_c} x^k + \lambda_{-c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k_{\alpha+c+k} C^k_{\beta+c+k}}{C^k_{c+k+1}} A_k x^{c+1+k},$$

где

$$A_k = \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\frac{1}{\alpha + c + \varkappa} + \frac{1}{\beta + c + \varkappa} - \frac{1}{c + 1 + \varkappa} - \frac{1}{\varkappa} \right),$$

первый член в $\sum\limits_{k=0}^{c}$ равен единице, при $c = -1$ эта сумма полагается равной нулю и в $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ знаменатели в A_k формально сокращаются с числителями стоящих при A_k выражений даже и в том случае, когда знаменатели в A_k обращаются в нуль.

(в) $\gamma = c$, c — целое число $\geqslant 2$. Подстановка (2) сводит этот случай к случаю (б).

Решения, представляемые определенными интегралами. Одним из решений такого вида является, например,

$$y = \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tx)^{-\alpha}\, dt = \frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x),$$

причем $\gamma > \beta > 0$ и $|x| < 1$. См. также ч. I, п. 19.5; ч. I, п. 25.3.

Решения в конечном виде. Если не считать тех случаев, когда гипергеометрический ряд обрывается, такие решения известны в следующих случаях:

$$H(\alpha,\ \alpha + 1/2,\ 2\alpha + 1,\ y,\ x) = 0, \quad \alpha \neq 0; \tag{11}$$

$$y = C_1 u^{-2\alpha} + C_2 x^{-2\alpha} u^{2\alpha}, \quad u = 1 + \sqrt{1-x}.$$

$$H(\alpha,\ \alpha - 1/2,\ 1/2,\ y,\ x) = 0; \tag{12}$$

$$y = C_1 \left(1 + \sqrt{x}\right)^{1-2\alpha} + C_2 \left(1 - \sqrt{x}\right)^{1-2\alpha}.$$

$$H(\alpha,\ \alpha + 1/2,\ 3/2,\ y,\ x) = 0; \tag{13}$$

$$y = C_1 u^{-1} (1+u)^{1-2\alpha} + C_2 u^{-1} (1-u)^{1-2\alpha}, \quad u = \sqrt{x}.$$

$$H(1,\ \beta,\ \gamma,\ y,\ x) = 0; \tag{14}$$

$$y = |x|^{1-\gamma}\, |x-1|^{\gamma-\beta-1} \left[C_1 + C_2 \int |x|^{\gamma-2}\, |x-1|^{\beta-\gamma}\, dx \right].$$

$$H(\alpha,\ \beta,\ \alpha,\ y,\ x) = 0; \tag{15}$$

$$y = |x-1|^{-\beta} \left[C_1 + C_2 \int |x|^{-\alpha} |x-1|^{\beta-1}\, dx \right].$$

$$H(\alpha,\ \beta,\ \alpha+1,\ y,\ x) = 0; \tag{16}$$

$$y = |x|^{-\alpha} \left[C_1 + C_2 \int |x|^{\alpha-1}\, |x-1|^{-\beta}\, dx \right].$$

Алгебраические решения могут быть найдены следующим образом. Согласно ч. I, п. 25.1, можно найти все решения этого уравнения, если известно одно решение уравнения

$$\{s, x\} = 2I, \tag{17}$$

где I — инвариант исходного уравнения. В ряде случаев можно указать решения уравнения (17) и таким образом изучить совокупность всех алгебраических решений уравнения (1).

В явной форме решения уравнения (17) см. в книге: A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl., Braunschweig, 1912, стр. 238, 239, 240, 244 при α, β, γ, равных

α	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
β	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{7}{24}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
γ	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$

Решения в некоторых частных случаях удается выразить через полные эллиптические интегралы. Это относится, например, к уравнениям:

$$x(x-1)\,y'' + \left(\frac{7}{6}x - \frac{2}{3}\right)\,y' + \frac{1}{144}\,y = 0,$$

$$x(x-1)\,y'' + \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}\right)\,y' + \frac{1}{144}\,y = 0,$$

$$x(x-1)\,y'' + \left(\frac{19}{6}x - \frac{5}{6}\right)y' + \frac{53}{48}\,y = 0.$$

См. G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leur applications, Paris, 1886—1891, т. I, стр. 313.

[Об уравнениях

$$2x(x-1)\,y'' + (3x+1)\,y' - y = 0,$$

$$9x(x-1)\,y'' + 3(3x-1)\,y' - y = 0$$

см. соответственно 2.312 и 2.355. — *Прим. ред.*]

Родственные уравнения. Сюда относятся уже названные вначале уравнения 2.240, 2.403. Обозначим через $y(\alpha, \beta, \gamma, x)$ решения уравнения (1); тогда можно указать решения следующих уравнений:

$$x(x-1)\,y'' + (2x-1)\,y' - \nu(\nu+1)\,y = 0, \tag{18}$$

$$y = y(\nu+1, -\nu, 1, x);$$

$$x^2(x-1)\,y'' + [(a+b+1)\,x + (\alpha+\beta-1)]\,xy' + (abx - \alpha\beta)\,y = 0, \tag{19}$$

$$y = x^{\alpha}y(a+\alpha, b+\alpha, \alpha-\beta+1, x);$$

$$(ax+1)\,x^2y'' + [a(b+2)\,x + (\alpha+\beta+1)]\,xy' + (abx+\alpha\beta)\,y = 0, \tag{20}$$

$$y = x^{-\alpha}y(1-\alpha, b-\alpha, 1-\alpha+\beta, -ax);$$

$$x(x^2-1)y''+(ax^2+b)y'+cxy=0, \tag{21}$$

$$y=y\left(\frac{a-1}{2}+R,\ \frac{a-1}{2}-R,\ \frac{1-b}{2},\ x^2\right) \text{ при } R^2=\frac{(a-1)^2}{4}-c,$$

$$x^2(ax^b-1)y''+(apx^b+q)xy'+(arx^b+s)y=0, \tag{22}$$

$$y=x^c y(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ ax^b),$$

где c, α, β, γ определяются из равенств:

$$c=A_1,\quad (1-\gamma)b=A_2-A_1,\quad b\alpha=A_1+B_1,\quad b\beta=A_1+B_2,$$

а A_1, A_2, B_1, B_2 — корни уравнений

$$A^2-(q+1)A=s,\quad B^2-(p-1)B=-r;$$

$$16(x^3-1)^2y''+27xy=0, \tag{23}$$

$$y=(x^3-1)^{1/4}y\left(\frac{1}{12},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{3},\ x^3\right);$$

$$x(x-1)y''+[(\alpha+\beta+2n+1)x-(\gamma+n)]y'+(\alpha+n)(\beta+n)y=0, \tag{24}$$

$$y=y(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ x)=y^{(n)}(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x).$$

2.261. $x(x+2)y''+2[n+1+(n+1-2\lambda)x-\lambda x^2]y'+$
$+[2\lambda(p-n-1)x+2p\lambda+\mu]y=0.$ См. 2.248.

Если n и $p-n=m$ — натуральные числа, то при сооответствующих значениях параметров λ, μ существуют решения, являющиеся многочленами $(m-1)$ степени. О дальнейших исследованиях таких решений см. A. H. Wilson, *Proceedings Soc. London* A 118 (1928) стр. 617—635.

2.262. $(x+1)^2y''+(x^2+x-1)y'-(x+2)y=0.$

$$y\exp x=C_1+C_2\int(x+1)\exp\frac{x^2+x-1}{x+1}\,dx.$$

2.263. $x(x+3)y''+(3x-1)y'+y=(20x+30)(x^2+3x)^{\frac{7}{3}};$
уравнение в полных дифференциалах.

Интегрируя, получаем линейное уравнение первого порядка

$$x(x+3)y'+(x-4)y=3(x^2+3x)^{10/3}+C.$$

2.264. $(x^2+3x+4)y''+(x^2+x+1)y'-(2x+3)y=0.$

$$y=C_1(x^2+x+3)+C_2e^{-x}.$$

2.265. $(x-1)(x-2)y''-(2x-3)y'+y=0.$
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x-1$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260.

2.266. $(x-2)^2y''-(x-2)y'-3y=0;$
тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.3 (б).

$$y=C_1(x-2)^3+C_2(x-2)^{-1}.$$

2.267. $2x^2y''-(2x^2-5x+\lambda)y'-(4x-1)y=0.$
Точка $x=0$ — сильно особая. Однако для определенных значений λ (собственных значений), а именно для

$$\lambda=\frac{(2\nu+1)^2\pi^2}{8}\qquad(\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),$$

существуют решения, представимые всюду сходящимися рядами

$$y=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k;$$

их коэффициенты равны

$$a_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n\,\Gamma(^1/_2)}{2^n n!\,\Gamma(k+n+{}^3/_2)}.$$

O. Perron, *Acta math.* 48 (1926), стр. 345—351.

Заметим, что исходное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах: $\frac{d}{dx}[2x^2y'-(2x^2-x+\lambda)y]=0$, откуда

$$y=x^{-1/2}e^{u}\left(C_1+C_2\int x^{-3/2}e^{-u}\,dx\right),\quad \text{где}\quad u=x-\frac{\lambda}{2x}.$$

2.267a. $\mathbf{2x(x-1)y''+(x-1)y'-y=0.}$

$$y=C_1(x-1)+C_2\left(2\sqrt{|x|}\begin{cases}+\ (x-1)\ln\left|\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| & \text{при}\quad x>0,\\ -\,2(x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{|x|} & \text{при}\quad x<0.\end{cases}\right)$$

2.268. $\mathbf{2x(x-1)y''+(2x-1)y'+(ax+b)y=0.}$

При $0<x<1$ подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\cos^2\xi$ переводит это уравнение в уравнение Матье 2.22: $\eta''-2(a\cos^2\xi+b)\eta=0$; при $x>1$ подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\operatorname{ch}^2\xi$ — в дифференциальное уравнение присоединенных функций Матье 2.21; наконец, при $x<0$ подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $x=-\operatorname{sh}^2\xi$ — в уравнение $\eta''-2(a\operatorname{sh}^2\xi-b)\eta=0$.

Согласно ч. I, п. 18.2, рассматриваемое уравнение может быть решено с помощью степенных рядов; ввиду наличия множителя $x(x-1)$ эти ряды не обязательно сходятся всюду. Можно, однако, поступать также следующим образом: можно показать, что в комплексной области рассматриваемое уравнение имеет два таких линейно независимых решения $y_1(x)$, $y_2(x)$, что их произведение $Y(x)$ есть целая функция и, следовательно, представима всюду сходящимся рядом

$$Y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1}$$

Согласно 3.26, функция Y удовлетворяет уравнению

$$2x(x-1)Y'''+3(2x-1)Y''+2(2ax+2b+1)Y'+2aY=0. \tag{2}$$

Подставляя (1) в уравнение (2) и полагая $\alpha=2a$, $\beta=2(2b+1)$, получаем соотношения

$$6c_2=\beta c_1+\alpha c_0,\quad 30c_3=2(\beta+6)c_2+3\alpha c_1,$$

$$(n+1)(n+2)(2n+3)c_{n+2}=$$
$$=[2n(n+2)+b](n+1)c_{n+1}+(2n+1)\alpha c_n,\qquad n\geqslant 2.$$

При соответствующем выборе постоянных c_0, c_1 ряд с найденными из этих соотношений коэффициентами c_n всюду сходится. Если теперь переменные снова считать действительными, то в силу равенства $y_1 y_2 = Y$ детерминант Вронского удовлетворяет уравнению

$$\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_2'}{y_2} = \frac{C}{Y\sqrt{|x^2 - x|}};$$

кроме того, имеем $y_1^{-1}y_1' + y_2^{-1}y_2' = Y^{-1}Y'$. Отсюда можно вычислить y_1 и y_2. Подробнее см. F. Lindemann, *Math. Ann.* **22** (1883), стр. 117—123; Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 243.

2.268а. $\mathbf{2x(x-1)y'' - (2x-1)y' + ay = 0.}$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \sin^2(\xi/2)$, получаем уравнение 2.71а:

$$\eta'' - 2\eta' \operatorname{ctg}\xi - \frac{a}{2}\eta = 0.$$

Если, в частности, $a = 2$, то $y = 2x - 1$ — одно из решений.

[2.268б $2x(x-1)y'' + (3x+1)y' - y = 0$; см. 2.260 и 2.312. — *Прим. ред.*]

2.269. $\mathbf{2x(x-1)y'' + [(2\nu+5)x - (2\nu+3)]y' + (\nu+1)y = 0}$; см. 2.240 (3).

2.270. $\mathbf{(2x^2+6x+4)y'' + (10x^2+21x+8)y' + (12x^2+17x+8)y = 0.}$

$$y = (x+2)^4 e^{-3x}\left(C_1 + C_2 \int \frac{|x+1|^{3/2}}{(x+2)^6} e^x\, dx\right).$$

2.271. $\mathbf{4x^2y'' + y = 0}$; тип 2.187.

Краевой задаче с условиями «$y(a) = y(a+1)$» ($a > 0$) соответствует функция Грина

$$\Gamma(x, \xi) = \sqrt{x\xi}\,\frac{\ln\dfrac{x}{a}\ln\dfrac{\xi}{a+1}}{\ln\dfrac{a+1}{a}} \quad \text{при} \quad x < \xi;$$

при $x > \xi$ нужно x и ξ справа поменять местами.

G. Usai, *Giornale Mat.* **63** (1925), стр. 85—97.

2.272. $\mathbf{4x^2y'' + (4a^2x^2 + 1)y = 0}$; частный случай уравнения 2.162 (1).

О функции Грина краевой задачи с условиями «$y(0) = y(1) = 0$», см. G. Usai, *Giornale Mat.* **63** (1925), стр. 85—97.

2.273. $\mathbf{4x^2y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1)y}$; уравнение Уиттекера.

Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 139—163; A. Erdélyi, *Math. Zeitschrift* **42** (1937), стр. 125—143, 641—670; H. Buchholz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 47—58, 101—118. О численных значениях решений см. Янке, Эмде и Леш. [См. также Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра, 1965. — *Прим. ред.*]

Это дифференциальное уравнение представляет собой приведенную форму вырожденного гипергеометрического уравнения (см. 2.407). При $k = 0$ получается приведенная форма уравнения Бесселя 2.162. Это уравнение эквивалентно уравнению 2.113; именно, подстановка $y = x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} u(x)$ приводит к уравнению

$$xu'' + (2m + 1 - x)u' + \left(k - m - \frac{1}{2}\right)u = 0.$$

Обозначим через $y(k, m, x)$ решение исходного уравнения. Каждое

$y(k, m, x)$ есть в то же время и $y(-k, m, -x)$. Поэтому при решении этого уравнения для действительных значений x можно ограничиться областью $x>0$.

Решение уравнения с помощью степенных рядов; см. об этом ч. I, п. 18.2. Пусть

$$ {}_1F_1(a, b, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)x^n}{b(b+1)\ldots(b+n-1)n!} $$

(b не равно никакому целому числу $\leqslant 0$) — сходящийся для всех x ряд Похгаммера (см. 2.113). Если $2m$ не равно никакому целому числу, то общим решением будет

$$ y = C_1 M_{k,\,m}(x) + C_2 M_{k,\,-m}(x), \tag{1} $$

где

$$ M_{k,\,m}(x) = x^{1/2+m} e^{-x/2} {}_1F_1(1/2+m-k,\ 2m+1,\ x) \tag{2} $$

— введенная *Уиттекером* функция, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$ M_{k,\,m}(x) = (-1)^{-1/2-m} M_{-k,\,m}(-x). $$

Если $2m$ — целое число, то по крайней мере один из двух входящих в (1) членов является решением. Общее решение тогда может быть найдено согласно ч. I, п. 18.2, и ч. I, п. 24.2. В частных случаях функция M сводится к другим известным функциям. Например,

$$ M_{0,\,m}(x) = 4^m e^{-m\pi i/2} \Gamma(m+1) \sqrt{x}\, J_m(ix/2) $$

($2m$ не равно никакому отрицательному целому числу), где $J_m(x)$ есть функция Бесселя;

$$ M_{n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} x^{1/4} e^{-x/2} H_{2n}(\sqrt{x}) = $$

$$ = \frac{\Gamma(1/2-n)}{2^n \Gamma(1/2)} x^{1/4} D_{2n}(\sqrt{2x}), $$

$$ M_{n+\frac{3}{4},\,\frac{1}{4}}(x) = (-1)^{n+1} \frac{n!}{2(2n+1)!} x^{1/4} e^{-x/2} H_{2n+1}(\sqrt{x}) = $$

$$ = \frac{\Gamma(-1/2-n)}{2^{n+\frac{1}{2}} \Gamma(-1/2)} x^{1/4} D_{2n+1}(\sqrt{2x}) $$

(n — целое неотрицательное), где H — полиномы Чебышева — Эрмита и D — параболические цилиндрические функции.

Функции Уиттекера $W_{k,\,m}(x)$. Другим решением, детально исследованным Уиттекером, является

$$ W_{k,\,m}(x) = -\frac{1}{2\pi i} \Gamma(\mu) e^{-x/2} x^k \int (-t)^{\mu} \left(1+\frac{t}{x}\right)^{2m+\mu-1} e^{-t}\,dt, $$

где $\mu = k + {}^1/_2 - m$; путь интегрирования (рис. 30) есть кривая, оба конца которой уходят в $+\infty$ и которая обходит точку $t=0$ в положительном направлении и не охватывает точку x (x не лежит на положительной действительной полуоси); для $\arg x$ следует брать главное значение, $|\arg(-t)| \leqslant \pi$ и $\arg(1 + tx^{-1}) \to 0$, если $t \to 0$ вдоль некоторого пути, лежащего внутри области, охватываемой путем интегрирования. Для справедливости написанной выше формулы следует предполагать, что μ не равно никакому целому числу $\leqslant 0$. При $\Re\mu \leqslant -1$ имеем

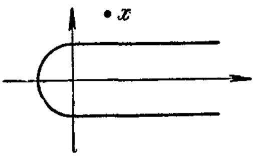

Рис. 30.

$$W_{k,m}(x) = \frac{e^{-x/2}x^k}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty t^{-\mu}\left(1 + \frac{t}{x}\right)^{2m+\mu-1} e^{-t}dt;$$

эта функция является решением и тогда, когда μ — целое число. $W_{k,m}(x)$ и $W_{-k,m}(-x)$ образуют фундаментальную систему решений. Для W имеется асимптотическое разложение

$$W_{k,m}(x) \sim e^{-x/2}x^k \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n} \prod_{\nu=1}^{n} \left[m^2 - \left(k + \frac{1}{2} - \nu\right)^2\right]\right\},$$

$|\arg x| \leqslant \pi - \delta < \pi$, $|x| \to \infty$. Если $k - {}^1/_2 \pm m$ — натуральное число, то ряд обрывается и получается точное представление. Если $2m$ — не целое число, то

$$W_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma({}^1/_2 - m - k)} M_{k,m}(x) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma({}^1/_2 + m - k)} M_{k,-m}(x).$$

Родственные уравнения. Много других уравнений может быть сведено к рассматриваемому уравнению. Соответствующие подстановки можно непосредственно усмотреть из приводимых решений. Если $4\alpha \neq a^2$, $4\gamma \leqslant (b-1)^2$, то уравнение

$$x^2y'' + (ax^n + b)xy' + (\alpha x^{2n} + \beta x^n + \gamma)y = 0 \tag{3}$$

подходит под тип (5); см. также 2.162 (17), 2.215.

$$4x^2y'' - 4x(2a + \beta - 1 + 2bcx^c)y' + [4a(a+\beta) + (1-4m^2)\beta^2 + \\ + 4bc(2a + \beta - c)x^c + 4b^2c^2x^{2c} + 4\alpha\beta^2kx^\beta - \alpha^2\beta^2x^{2\beta}]\,y = 0, \tag{4}$$

$$y = x^a \exp(bx^c)\,y(k, m, \alpha x^\beta);$$

$$4x^2y'' - 4x(2a + c - 1 + 2bcx^c)y' + [4a(a+c) + (1-4m^2)c^2 + \\ + 4c(2ab + \alpha ck)x^c + c^2(4b^2 - \alpha^2)x^{2c}]\,y = 0, \tag{5}$$

$$y = x^a \exp(bx^c)\,y(k, m, \alpha x^c);$$

$$x^2y'' + (ax + b)xy' + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)y = 0, \tag{6}$$

$$y = x^{-b/2}e^{-ax/2}y\left(\frac{2\beta - ab}{2\rho}, m, \rho x\right),$$

где $\rho^2 = a^2 - 4\alpha$, $4m^2 = (b-1)^2 - 4\gamma$, см. также 2.215;

$$4x^2y'' + (4x^2 + 1 - 4\nu^2)\, y = 0, \text{ уравнение Бесселя 2.153;} \tag{7}$$

$$4x^2y'' = (x^2 - 2(2m+1)\,x + 4m^2 - 1)\, y, \tag{8}$$

$$y = x^{(2m+1)/2} e^{-x/2}\left(C_1 + C_2 \int x^{-2m-1} e^x\, dx\right);$$

$$xy'' + (ax+b)\, y' + (cx+d)\, y = 0, \tag{9}$$

$$y = x^{-b/2} e^{-ax/2} y\left(\frac{2d - ab}{2\sqrt{a^2-4c}},\ \frac{1}{2}(b-1),\ x\sqrt{a^2-4c}\right)$$

при $a^2 > 4c$, см. также 2.119;

$$y'' + axy' + by = 0, \tag{10}$$

$$y = x^{-1/2} e^{-ax^2/4} y\left(\frac{b}{2a} - \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{a}{2}x^2\right), \text{ см. также 2.52;}$$

$$y'' + ay' + (b - c^2x^2)\, y = 0, \tag{11}$$

$$y = x^{-1/2} e^{-ax/2} y\left(\frac{4b - a^2}{16c},\ \frac{1}{4},\ cx^2\right);$$

$$y'' + (ax^{c-2} - b^2x^{2c-2})\, y = 0, \tag{12}$$

$$y = x^{(1-c)/2} y\left(\frac{a}{2bc},\ \frac{1}{2c},\ \frac{2b}{c}x^c\right);$$

$$4y'' = (x^2 - 8k)\, y, \text{ уравнение Вебера 2.87,} \tag{13}$$

$$y = x^{-1/2} y\,(k,\ 1/4,\ x^2/2);$$

$$y'' = (a^2e^{2x} + be^x + c^2)\, y, \tag{14}$$

$$y = e^{-x/2} y\,(-b/2a,\ c,\ 2ae^x), \text{ см. также 2.20.}$$

2.274. $4x^2y'' + 4xy' + (x - \nu^2)\, y = 0$; см. 2.162 (4).

2.275. $4x^2y'' + 4xy' + [-x^2 + 2(1 - m + 2\lambda)\, x - m^2 + 1]\, y = 0.$

О приведении к уравнению Уиттекера 2.273 см. 2.278. Если m — натуральное число, то краевым условиям «$y(x)$ ограничено при $x > 0$» соответствуют собственные значения $\lambda = n$ (n целое и $\geqslant m$) и собственные функции

$$y = x^{m/2} e^{-x/2} L_n^{(m)}(x),$$

где L_n — полиномы Чебышева — Лагерра.

2.276. $4x^2y'' + 4xy' - (4x^2 + 1)\, y = 4\sqrt{x^3}\, e^x.$

Соответствующее однородное уравнение относится к типу 2.278. Полагая $u(x) = y\sqrt{x}$, получаем $u'' - u = e^x$, и отсюда

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{x}{2}e^x\right).$$

2.277. $4x^2y'' + 4xy' - (ax^2 + 1)\, y = 0$; тип. 2.162 (1) и 2.278.

$$y = x^{-1/2}\left(C_1 \exp\left(x\sqrt{a}/2\right) + C_2 \exp\left(-x\sqrt{a}/2\right)\right).$$

2.278. $4x^2y'' + 4xy' + f(x)\, y = 0.$

Подстановка $u(x) = y\sqrt{x}$ приводит это уравнение к нормальной форме

$4x^2u'' + [f(x) + 1]\, u = 0.$

2.279. $4x^2y'' + 5xy' - y = \ln x$.
Соответствующее однородное уравнение относится к типу 2.187.

$$y = C_1x^\alpha + C_2x^\beta - \ln x - 1,$$

где α, β — корни уравнения $4s^2 + s = 1$.

2.280. $4x^2y'' + 8xy' - (4x^2 + 12x + 3)\,y = 0$;
частный случай уравнения 2.215.
Одно из решений: $y = e^x\sqrt{x}$.

2.281. $4x^2y'' - 4x\,(2x - 1)\,y' + (4x^2 - 4x - 1)\,y = 0$; тип 2.78.

$$y\sqrt{|x|} = e^x\,(C_1 + C_2x).$$

2.281а. $4x^2y'' + 4x^3y' + (2x^2 - 3)\,y = 0$.

$$y = x^{-1/2}\left(C_1 + C_2e^{-x^2/2}\right).$$

2.282. $4x^2y'' + 4x^3y' + (x^2 + 6)(x^2 - 4)\,y = 0$;
частный случай уравнения 2.162 (17).

$$y = (C_1x^3 + C_2x^{-2})\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right).$$

2.282а. $4x^2y'' + 4x^3y' + (x^4 + ax^2 + b)\,y = 0$.
Частный случай уравнения 2.162 (16); входящие в него постоянные имеют здесь следующие значения: $a = 1/2$, $b = -1/4$, $c = 2$, $\beta = 1$, $\alpha = 1/2\sqrt{a-2}$, $\nu = 1/2\sqrt{1-b}$. В частности, если в данном уравнении $a = 2$, то

$$y = \sqrt{x}\,e^{-x^2/4}\left(C_1x^{\sqrt{1-b}/2} + C_2x^{-\sqrt{1-b}/2}\right),$$

а если $a = b = 1$, то

$$y = \sqrt{x}\,e^{-x^2/4}\,(C_1 + C_2\ln x).$$

2.283. $4x^2y'' + 4x^2y'\ln x + (x^2\ln^2 x + 2x - 8)\,y = 4x^2\sqrt{\dfrac{e^x}{x^x}}$.

Полагая $u(x) = \sqrt{x^x/e^x}\,y$, получаем уравнение $x^2u'' - 2u = x^2$ с общим решением:

$$u = C_1x^2 + \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}x^2\ln x.$$

2.284. $(2x + 1)^2\,y'' - 2\,(2x + 1)\,y' - 12y = 3x + 1$.
Соответствующее однородное уравнение относится к типу ч. I. п. 22.3 (б).

$$y = C_1\,(2x + 1)^3 + C_2\,(2x + 1)^{-1} - \frac{3x}{16} - \frac{5}{96}.$$

2.285. $x\,(4x - 1)\,y'' + [(4a + 2)\,x - a]\,y' + a\,(a - 1)\,y = 0$.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $4x - 1 = \pm\xi^2$, получаем

$$(\xi^2 \pm 1)\,\eta'' + 2a\xi\eta' + a\,(a - 1)\,\eta = 0.$$

Об этом уравнении см. 2.247 и 2.298.

2.285а. $4x\,(x - 1)\,y'' + 4\,(2x - 1)\,y' + y = 0$.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \xi^2$, получаем уравнение 2.317 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.285.б $4x\,(x - 1)\,y'' + 4\,(x - 1)\,y' - y = 0$.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \xi^2$, получаем уравнение 2.316 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.286. $(3x-1)^2 y'' + 3(3x-1) y' - 9y = \ln^2|3x-1|$.

Соответствующее однородное уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 22.3 (б).

$$y = C_1(3x-1) + \frac{C_2}{3x-1} - \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\ln^2|3x-1|.$$

2.286a. $4(x^2-1) y'' + 4(2x-1) y' + y = 0$.

$$y\sqrt{|x+1|} = C_1 + C_2 \begin{cases} \arcsin x & \text{при } |x|<1, \\ \operatorname{Arch} x & \text{при } |x|>1. \end{cases}$$

2.287. $9x(x-1) y'' + 3(2x-1) y' - 20y = 0$; см. 2.260.

[**2.287a.** $9x(x-1) y'' + 3(3x-1) y' - y = 0$. См. 2.260 и 2.355. — *Прим. ред.*]

2.288. $16x^2 y'' + (4x+3) y = 0$.

$$y = x^{1/4}\left(C_1 \cos\sqrt{x} + C_2 \sin\sqrt{x}\right).$$

2.289. $16x^2 y'' + 32xy' - (4x+5) y = 0$.

$$y = C_1\left(x^{-3/4} - x^{-5/4}\right)e^{\sqrt{x}} + C_2\left(x^{-3/4} + x^{-5/4}\right)e^{-\sqrt{x}}.$$

2.290. $(27x^2+4) y'' + 27xy' - 3y = 0$; см. 2.298.

$$y = C_1 u^{1/3} + C_2 u^{-1/3}, \text{ где } u = x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{27}}.$$

J. Zbornik, *ZAMP* 7 (1956).

2.291. $48x(x-1) y'' + (152x-40) y' + 53y = 0$; см. 2.260.

2.292. $50x(x-1) y'' + 25(2x-1) y' - 2y = 0$; тип 2.260.

$$y = C_1 u^{1/5} + C_2 u^{-1/5}, \text{ где } u = x - \frac{1}{2} + \sqrt{x(x-1)}.$$

J. Zbornik, *ZAMP* 7 (1956).

2.293. $144x(x-1) y'' + (120x-48) y' + y = 0$; см. 2.260.

2.294. $144x(x-1) y'' + (168x-96) y' + y = 0$; см. 2.260.

2.295. $ax^2 y'' + bxy' + (cx^2 + dx + e) y = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Полагая $y = e^{\alpha x} x^{\beta} \eta(\xi)$, $\xi = \gamma x$, где

$$a\alpha^2 = -c, \quad a\beta^2 + (b-a)\beta = -e, \quad \gamma = -2\alpha,$$

получаем уравнение 2.113:

$$\xi\eta'' - (\xi - A)\eta' + B\eta = 0,$$

где $aA = 2a\beta + b$, $2cB = (2a\alpha\beta + b\alpha + d)\alpha$. Для того, чтобы эта подстановка могла быть выполнена в действительной области, должно быть $ac < 0$.

Полагая $y = \eta(\xi) x^{-\frac{b}{2a}}$, $\xi = 2x\sqrt{-\frac{c}{a}}$, получаем уравнение Уиттекера 2.273:

$$4\xi^2\eta'' = (\xi^2 + A\xi + B)\eta,$$

где $aA = -2d\sqrt{-c/a}$, $a^2 B = b^2 - 2ab - 4ae$.

См. также 2.171; Курант и Гильберт, стр. 290—291.

2.296. $a_2 x^2 y'' + (a_1 x^2 + b_1 x) y' + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) y = 0$.

Полагая $y = x^{\alpha} u(x)$, где α — корень уравнения

$$a_2\alpha^2 + (b_1 - a_2)\alpha + c_0 = 0, \qquad (1)$$

получаем уравнение 2.120:

$$a_2xu''+(a_1x+2a_2\alpha+b_1)u'+(a_0x+a_1\alpha+b_0)u=0.$$

Об этом уравнении см. также 2.278 (9) и 2.145. Полагая $y=x^{\alpha}e^{\beta x}u(x)$, где опять α определяется из уравнения (1), получаем уравнение

$$a_2xu''+[(2a_2\beta+a_1)x+(2a_2\alpha+b_1)]u'+$$
$$+[(a_2\beta^2+a_1\beta+a_0)x+(2a_2\alpha\beta+a_1\alpha+b_1\beta+b_0)]u=0,$$

которое может быть еще упрощено соответствующим выбором β.

2.297. $(ax^2+1)y''+axy'+by=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\alpha x=\operatorname{sh}\alpha\xi$, $a=\alpha^2>0$, получаем уравнение

$$\eta''+b\eta=0.$$

Если $a=-\alpha^2<0$, то снова полагаем $y(x)=\eta(\xi)$ и далее

$$\alpha x=\sin\alpha\xi \quad \text{при} \quad |\alpha x|<1, \qquad |\alpha x|=\operatorname{ch}\alpha\xi \quad \text{при} \quad |\alpha x|>1.$$

Тогда получаем уравнение $\eta''+b\eta=0$, соответственно $\eta''-b\eta=0$.

2.298. $(ax^2+1)y''+bxy'+cy=0.$

Если $b=(2n+1)a$ (n — натуральное число), то это уравнение получается n-кратным дифференцированием из уравнения 2.297

$$(ax^2+1)y''+axy'+(c-na)y=0,$$

если затем n-ю производную снова обозначить через y. Другими случаями, в которых решение может быть представлено в конечном виде, являются следующие:

$$(a-b)^2-4ac=(2n+1)^2a^2;$$
$$(a-b)^2-4ac=[(2n+1)a-b]^2.$$

A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl., Braunschweig, 1912, стр. 210, 755.

При произвольном $a\neq0$ уравнение может быть упрощено подстановкой $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi^2=|a|x^2$.

2.299. $(a^2x^2-1)y''+2a^2xy'=0.$

$$y=C_1+C_2\ln\left|\frac{ax+1}{ax-1}\right|.$$

Краевой задаче с условиями «$y(0)=y(1)=0$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{1}{2aS}\ln\left|\frac{ax-1}{ax+1}\right|\cdot\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{a\xi-1}{a\xi+1}\right|, \qquad S=\ln\left|\frac{a+1}{a-1}\right|.$$

Здесь предполагается $x\leqslant\xi$; если $x\geqslant\xi$, то справа x и ξ следует поменять местами.

2.300. $(a^2x^2-1)y''+2a^2xy'-2a^2y=0.$

$$y=C_1x+C_2\left(ax\ln\left|\frac{ax+1}{ax-1}\right|-2\right).$$

Краевым условиям «$y(0)=y(1)=0$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x,\xi)=x\left(\xi-1+\frac{a}{2}\xi\ln\left|\frac{a\xi+1}{a\xi-1}\cdot\frac{a-1}{a+1}\right|\right),$$

здесь предполагается, что $x\leqslant\xi$; если же $x\geqslant\xi$, то справа следует x и ξ поменять местами.

G. Usai, *Giornale Mat.* 63 (1925), стр. 96 и сл.

2.301. $(ax^2+bx)\,y''+2by'-2ay=0.$

$$xy=C_1+C_2\,(ax+b)^3.$$

2.302. $A_2\,(ax+b)^2\,y''+A_1\,(ax+b)\,y'+A_0\,(ax+b)\,y=0;$ см. ч. I, п. 22.3 (б).

2.303. $(ax^2+bx+c)\,y''+(dx+e)\,y'+fy=0,\ a\neq0.$

Пусть p, q — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Если $p\neq q$, то, полагая $y=\eta(\xi)$, $x=p+(q-p)\,\xi$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260:

$$\xi(\xi-1)\,\eta''+\left(\frac{d}{a}\,\xi+\frac{dp+e}{a\,(q-p)}\right)\eta'+\frac{f}{a}\,\eta=0.$$

Если $p=q$, то принимаем за k корень уравнения $ak^2+(a-d)\,k+f=0$. Полагая $y=\xi^k\,\eta(\xi)$, $x=p+\xi^{-1}$, получаем уравнение 2.120

$$a\xi\eta''-[(dp+e)\,\xi+d-2a\,(k+1)]\,\eta'-k\,(dp+e)\,\eta=0.$$

Пусть уравнение $an\,(n-1)+dn+f=0$ имеет целочисленный положительный корень, и пусть n — наименьший из таких корней. Тогда среди решений имеется многочлен степени $\leqslant n$. Полагая $y_0=y$, $y_{\nu+1}=y'_\nu$, получаем для каждого решения y путем последовательного дифференцирования цепь уравнений

$$(ax^2+bx+c)\,y_{m+2}+[(2ma+d)\,x+mb+e]\,y_{m+1}=$$
$$=(n-m)\,[(n+m-1)\,a+d]\,y_m\quad(m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

При $m=n$ правая часть обращается в нуль. Если функция y_n выбрана так, что $y_{n+1}=y'_n$, $y_{n+2}=y''_n$ удовлетворяют этому последнему уравнению, и если функции $y_{n-1},\ \dots,\ y_1,\ y_0$ определяются последовательно с помощью вышеуказанной системы уравнений, то y_0 есть решение исходного уравнения. Если положить $y_n=1$, то таким путем получается многочлен, удовлетворяющий данному уравнению.

Abbé Lainé, *Enseignement math.* 23 (1923), стр. 163 и сл.

При $d=a$, $2e=b$ общее решение:

$$y=C_1\sin u\sqrt{f}+C_2\cos u\sqrt{f},$$

где $u=\int(ax^2+bx+c)^{-1/2}\,dx.$

304 — 341. $(ax^3+\dots)\,y''+\dots$

2.304. $x^3y''+xy'-(2x+3)\,y=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^{-1}$, получаем уравнение 2.198 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.304а. $x^3y''+xy'+ay=0.$

Если $a=-1$, то $y=x\,(C_1+C_2e^{1/x})$

Если $a=-2$, то $y=e^{1/x}\left(C_1+C_2\int e^{-1/x}\,dx\right).$

2.304б. $x^3y''+(ax+b)\,y=0.$

Деля это уравнение на x, получим уравнение типа 2.155, где $k=-1.$

2.305. $x^3y''+2xy'-y=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^{-1}$, получаем уравнение 2.114:

$$\xi\eta''+2\,(1-\xi)\,\eta'-\eta=0.$$

2.305а. $x^3y'' + ax^2y' + (bx + c)\,y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

2.306. $x^3y'' + x^2y' + (ax^2 + bx + a)\,y = 0$.

Для комплексных x, таких, что $|x| = 1$, подстановка $y(x) = \eta(\xi)$, $x = e^{2i\xi}$ приводит к уравнению Матье 2.22:

$$\eta'' = (16a\cos^2\xi + 4b - 8a)\,\eta.$$

2.307. $x^3y'' + x(x + 1)\,y' - 2y = 0$.

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = x^{-1}$, получаем уравнение 2.113, в котором $a = 2$, $b = 1$ и переменные x, y заменены через ξ, η.

Одно из решений: $y = (1 + x^{-1})\exp x^{-1}$.

2.308. $x^3y'' - x^2y' + xy = \ln^3 x$.

$$y = C_1x + C_2x\ln x + \frac{1}{8x}(6 + 9\ln x + 6\ln^2 x + 2\ln^3 x).$$

2.309. $x^3y'' - (x^2 - 1)\,y' + xy = 0$.

Точка $x = 0$ — сильно особая, $x = \infty$ — слабо особая. Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = x^{-1}$, получаем уравнение 2.212:

$$\xi^2\eta'' - (\xi^2 - 3)\,\xi\eta' + \eta = 0.$$

2.310. $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 1$.

Соответствующее однородное уравнение есть уравнение Эйлера ч. I, п. 22.3. Поэтому для данного уравнения имеем

$$xy = \frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1 + C_2\ln|x|.$$

2.310а. $x^3y'' + (ax + b)\,xy' + (cx + d)\,y = 0$.

Полагая $y = x^k u(x)$, где $k = -d/b$, получаем уравнение 2.188:

$$x^2u'' + [(a + 2k)\,x + b]\,u' + [k(a + k - 1) + c]\,u = 0.$$

Если $c = 0$, $d = b(a - 2)$, то $y = e^{b/x}$ — одно из решений; остальные решения получаются отсюда согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.311. $x(x^2 + 1)\,y'' + (2x^2 + 1)\,y' - \nu(\nu + 1)\,xy = 0$.

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi^2 = x^2 + 1$, получаем уравнение Лежандра 2.240 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.311а. $x(x^2 + 1)\,y'' - 2(x^2 + 1)\,y' + 2xy = 0$.

$$y = C_1(x^2 + 1) + C_2[(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - x].$$

2.311б. $x(x^2 + 1)\,y'' - (x^2 + 1)\,y' + xy = 0$.

Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = i/x$, получаем уравнение 2.316 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.312. $x(x^2 + 1)\,y'' + 2(x^2 - 1)\,y' - 2xy = 0$.

Разделив это уравнение на x^3, получим уравнение в полных дифференциалах.

$$(1 + x^2)\,y = C_1 + C_2x^3.$$

J. Zbornik, *Akad. Wien* 166 (1957).

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = -x^2$, получаем уравнение 2.260:

$$2\xi(\xi - 1)\,\eta'' + (3\xi + 1)\,\eta' - \eta = 0.$$

2.313. $x(x^2 + 1)\,y'' + [2(n + 1)\,x^2 + 2n + 1]\,y' - (\nu - n)(\nu + n + 1)\,xy = 0$; см. 2.240 (5).

2.314. $x(x^2 + 1)\,y'' - [2(n - 1)\,x^2 + 2n - 1]\,y' + (n + \nu)(n - \nu - 1)\,xy = 0$; частный случай уравнения 2.357.

2.315. $x(x^2-1)y''+y'+ax^3y=0.$
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^2-1$, получаем уравнение 2.130:

$$4\xi\eta''+2\eta'+a\eta=0.$$

2.315а. $x(x^2-1)y''+(x^2+1)y'-xy=0$; частный случай уравнения 2.318.

$$y=C_1E^*(x)+C_2[E(x)-K(x)]$$

при $-1<x<1$ Об обозначениях см. 2.316.

2.316. $x(x^2-1)y''+(x^2-1)y'-xy=0$; частный случай уравнения 2.318.

$$y=C_1E(x)+C_2[E^*(x)-K^*(x)] \qquad (-1<x<+1),$$

где $K(x)$, $E(x)$ — нормальные эллиптические интегралы первого и второго рода:

$$K(x)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}, \qquad E(x)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

и $K^*(x)=K(x^*)$, $E^*(x)=E(x^*)$, где $x^2+x^{*2}=1$.

[См., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Янке, Эмде и Лёш; Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

2.316а. $x(x^2-1)y''-2(x^2-1)y'+2xy=0.$

$$y=(x^2-1)\left\{C_1+C_2\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{2x}{x^2-1}\right)\right\}.$$

2.317. $x(x^2-1)y''+(3x^2-1)y'+xy=0$; частный случай уравнения 2.318.

$$y=C_1K(x)+C_2K^*(x) \qquad (-1<x<1);$$

об обозначениях см. 2.316.

2.318. $x(x^2-1)y''+(ax^2+b)y'+cxy=0$; см. 2.260 (21).

(а) $c=-(a+b)(b+1)$: частное решение $y=x^{b+1}$;

(б) $b=0$, $c=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)$: частные решения $y=(x\pm1)^{-2c/a}$;

(в) $c=-2(a+1)$: частное решение $y=x^2+\frac{b-1}{a+1}$.

Остальные решения в этих случаях находятся согласно ч. I, п. 24.2 (б).

(г) $b=1-a$: в области $x^2<1$, полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\sin\xi$, получаем уравнение 2.71а:

$$\eta''+(a-1)\eta'\operatorname{ctg}\xi-c\eta=0,$$

а в области $x^2>1$, полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\pm\operatorname{ch}\xi$, получаем уравнение 2.64:

$$\eta''+(a-1)\eta'\operatorname{th}\xi+c\eta=0.$$

(д) $a=-2(\nu-1)$, $b=2\nu$, $c=\nu(\nu-1)$: частный случай уравнения 2.240 (18), в котором $a=\nu$, $b=1$, $c=-1$.

(е) $a=3$, $b=-1$, $c={}^3/_4$. полагая $y(x)\sqrt{1+x}=\eta(\xi)$, $\xi=\sqrt{(1+x)^{-1}(1-x)}$, получаем уравнение 2.317 с переменными ξ, η вместо x, y.

(ж) Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\sqrt{1-x^2}$, получаем уравнение

$$\xi(\xi^2-1)\eta''+(a\xi^2-a-b+1)\eta'+c\xi\eta=0.$$

Если $a=-2(\nu-1)$, $b=-1$, $c=\nu(\nu-1)$, то это — уравнение в случае (д) с переменными ξ, η вместо x, y.

2.319. $x(x^2+2)y''-y'-6xy=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=-{}^1/_2x^2$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260, в котором $\alpha=1$, $\beta=-{}^3/_2$, $\gamma={}^1/_4$.

Исходное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах, а потому оно сводится к уравнению

$$x(x^2+2)y'-3(x^2+1)y=C.$$

2.320. $x(x^2-2)y''-(x^3+3x^2-2x-2)y'+(x^2+4x+2)y=0.$

$$y=C_1(x-1)+C_2x^2e^x.$$

2.320а. $x^2(x+1)y''-(x-1)xy'+(2x+1)y=0.$

Полагая $y=e^{i\ln x}u(x)$, получаем гипергеометрическое уравнение

$$x(x+1)u''+[(2i-1)x+2i+1]u'+(1-2i)u=0.$$

Непосредственно видно, что $u=(2i-1)x+2i+1$ есть решение. Подставляя это значение u в выражение для y и отделяя действительную часть от мнимой, получаем решение

$$y=C_1[(x-1)\cos\ln x+2(x+1)\sin\ln x]+$$
$$+C_2[2(x+1)\cos\ln x-(x-1)\sin\ln x].$$

2.321. $x^2(x+1)y''-x(2x+1)y'+(2x+1)y=0.$

$$y=C_1x+C_2x(x+\ln x).$$

2.322. $x^2(x+1)y''+2x(3x+2)y'+2(3x+1)y=0.$ См. 2.443б.

$$x^2(x+1)y=C_1+C_2x.$$

2.322а. $x^2(x-1)y''+x(x+1)y'-y=0;$

частный случай уравнения 2.260 (19).

$$y=x(x-1)^{-1}(C_1+C_2\ln x).$$

2.323. $x^2(x-1)y''+2x(x-2)y'-2(x+1)y=0.$

Это уравнение относится к типу 2.325. Полагая $y=x^{-1}u(x)$, получаем уравнение 2.255:

$$x(x-1)u''-2u'-2u=0.$$

Отсюда получаем

$$x^2y=C_1+C_2(x-1)^3.$$

2.324. $x^2(x-1)y''-x(5x-4)y'+(9x-6)y=0;$

частный случай уравнения 2.260 (19).

$$y=C_1x^3+C_2(x^2+x^3\ln|x|).$$

2.325. $x^2(x-1)y''+[(a+b+1)x+(\alpha+\beta-1)]xy'+(abx-\alpha\beta)y=0;$

см. 2.260 (19).

2.325a. $x^2(x-1)\,y''+(ax+b)\,xy'+(cx+d)\,y=0.$

Пусть k — действительный корень уравнения $k^2-(b+1)\,k=d$. Полагая $y=x^k u(x)$, получаем уравнение 2.260:

$$x(x-1)\,u''+[(a+2k)\,x+b-2k]\,u'+[c+k(a+k-1)]\,u=0.$$

В случае комплексного $k=\alpha+i\beta$ соответствующее преобразование также применимо; именно, нужно положить

$$x^k=x^\alpha e^{i\beta\ln x}=x^\alpha\,[\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)].$$

Частные случаи

(а) $b=-2,\ c=0,\ d=6$: при $k=-3$ получаем уравнение 2.258 (в):

$$x(x-1)\,u''+[(a-6)\,x+4]\,u'-3(a-4)\,u=0.$$

(б) $c=0,\ d=(a+b)(a-1)$: одно из решений $y=x^{1-a}$, остальные решения получаются согласно ч. I, п. 24.2 (б).

(в) $a=-2,\ b=4,\ c=2,\ d=-6$: при $k=2$ получаем уравнение $(x-1)\,u''+2u'=0$, откуда $u=C_1+C_2(x-1)^{-1}$.

(г) $a=b=-1,\ c=2,\ d=-1$: при $k=i$ получаем уравнение 2.258 (г); следовательно,

$$y=C_1\,[(5x-3)\cos\ln x-4\sin\ln x]+C_2\,[(5x-3)\sin\ln x+4\cos\ln x].$$

2.326. $x(x+1)^2\,y''+x(x+1)\,y'+y=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x+1$, получаем уравнение типа 2.325.

$$(x+1)\,y=C_1x+C_2(x\ln|x|-1).$$

2.327. $x^2(x-2)\,y''-2xy'+y=0$; частный случай уравнения 2.410.

2.328. $x(x-1)^2\,y''-2y=0.$

$$y=C_1\frac{x}{x-1}+C_2\left(x+1-\frac{x}{x-1}\ln x^2\right).$$

2.329. $x(x-1)(x-a)\,y''+\{(\alpha+\beta+1)\,x^2-[\alpha+\beta+1+a(\gamma+\delta)-\delta]\,x+a\gamma\}\,y'+$
$+(\alpha\beta x-q)\,y=0;$

уравнение Хейна (K. Heun, *Math. Ann.* **33** (1889), стр. 161—179).

Частными случаями уравнения Хейна являются: гипергеометрическое уравнение 2.260 (при $a=1$ и $q=\alpha\beta$ отпадает множитель $x-1$; при $a=q=0$ отпадает множитель x); уравнение Ламе 2.408 (если уравнение Хейна записать в виде (14)).

Уравнение Хейна будем записывать в виде

$$H(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ x)=0; \tag{1}$$

пусть

$$Y=y(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ x) \tag{2}$$

— его решение.

Замена переменных в уравнении. Решения уравнения (1) могут быть выражены через решения некоторых определенных преобразованных уравнений. При заданных постоянных $a,\ \ldots,\ \delta$ каждая из указанных ниже совокупностей функций совпадает с множеством функций (2):

$$y(1-a,\ \alpha\beta-q;\ \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma,\ 1-x); \tag{3}$$

$$|x|^{1-\gamma}\,y(a,\ q_1;\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \delta,\ x), \tag{4}$$

где $q_1=q+(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)-\alpha\beta+\delta(\gamma-1);$

$$|x|^{1-\gamma} y\left(\frac{1}{a}, \frac{q_1}{a}; \alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \frac{x}{a}\right), \quad (5)$$

где $q_1 = q + (\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1) - \alpha\beta + \delta(\gamma-1)(1-a)$;

$$|x|^{-\alpha} y(a^{-1}, q_1; \alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \delta, x^{-1}), \quad (6)$$

где $q_1 = qa^{-1} + \alpha(\alpha-\gamma+1) + \alpha a^{-1}(\delta-\beta) - \alpha\delta$. Комбинируя эти результаты, можно получить многие другие совокупности функций, совпадающие с совокупностью (2), например следующие, в которых значения постоянной q не участвуют:

$$y(a^{-1}; \alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, xa^{-1}), \quad (7)$$

$$y(1-a^{-1}; \alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \gamma, 1-xa^{-1}), \quad (8)$$

$$|x|^{-\alpha} y(a; \alpha-\gamma+1, \alpha+\gamma-1, \alpha-\beta+1, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, x^{-1}a), \quad (9)$$

$$|x|^{-\alpha} y\left(1-\frac{1}{a}; \alpha, \alpha-\gamma+1, \delta, \alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right), \quad (10)$$

$$|x|^{-\alpha} y\left(\frac{a}{a-1}; \alpha, \alpha-\gamma+1, \delta, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \frac{a(x-1)}{x(a-1)}\right), \quad (11)$$

$$|x-1|^{-\alpha} y\left(\frac{a}{a-1}; \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha-\beta+1, \frac{x}{x-1}\right), \quad (12)$$

$$|x-1|^{-\alpha} y\left(1-\frac{1}{a}; \alpha, \alpha-\delta+1, \gamma, \alpha+\beta-\gamma-\delta+1, \frac{x(a-1)}{a(x-1)}\right). \quad (13)$$

Построение решений. Из совпадения (2) и (5) можно для решения уравнения (1) извлечь следующее: если $a \neq 0$, то можно ограничиться случаем $|a| \geqslant 1$. В случае $a > 1$ интервалы $x < 0$, $1 < x < a$, $x > a$ преобразуются в интервал $0 < \xi < 1$ подстановками

$$\xi = \frac{x}{x-1}, \quad \frac{a(x-1)}{x(a-1)}, \quad \frac{a}{x},$$

а в случае $a < -1$ интервалы $x < a$, $a < x < 0$, $x > 1$ преобразуются в интервал $0 < \xi < 1$ подстановками

$$\xi = \frac{a}{x}, \quad \frac{(a-1)x}{a(x-1)}, \quad \frac{x-1}{x}.$$

В силу того что (12), (11) и (9), а также (9), (13) и (10) совпадают с (2), и так как соответствующие новые постоянные удовлетворяют условию $|a| \geqslant 1$, в дальнейшем можно ограничиться интервалом $0 < x < 1$.

При $|a| \geqslant 1$ существует (см. ч. I, п. 25.7) решение уравнения (1), которое может быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося при $|x| < 1$:

$$F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n,$$

если только γ не равно никакому целому неположительному числу; коэффициенты c_n определяются рекуррентными формулами

$$a\gamma c_1 = q,$$

$$a(n+1)(\gamma+n) c_{n+1} = \left[a(\gamma+\delta+n-1) + \alpha+\beta-\delta+n+\frac{q}{n}\right] nc_n -$$

$$- [(n-1)(n-2) + (n-1)(\alpha+\beta+1) + \alpha\beta]\, c_{n-1}.$$

Если γ — не целое число, то (см. (4))

$$|x|^{1-\gamma} F(a,\ q_1;\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \delta,\ x)$$

— линейно независимое от предыдущего решение уравнения (1). Если γ — целое число, то совокупность решений получается аналогично случаю гипергеометрического уравнения, например, по методу Фробениуса, ч. I, п. 18.2.

О более детальном исследовании случая $\alpha+\beta=1$, $\gamma=\delta={}^1/_2$ см. G. R. Goldsbrough. *Proceedings Soc. London A*, **130** (1931), стр. 157—167.

Родственные уравнения. Если a_1, a_2, a_3 все различны, то подстановка $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}$ переводит уравнение

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,y''+(Ax^2+Bx+C)\,y'+(Dx+E)\,y=0 \quad (14)$$

$[4D\leqslant(A-1)^2]$ в уравнение (1) с переменными ξ, η вместо x, y; при этом

$$a=\frac{a_3-a_1}{a_2-a_1},\quad q=-\frac{Da_1+E}{a_2-a_1},$$

$$\alpha,\ \beta={}^1/_2(A-1)\pm{}^1/_2\sqrt{(A-1)^2-4D},$$

$$a\gamma=\frac{Aa_1^2+Ba_1+C}{(a_2-a_1)^2},\quad (1-a)\,\delta=\frac{Aa_2^2+Ba_2+C}{(a_2-a_1)^2}.$$

2.330. $\boldsymbol{(x-a)(x-b)(x-c)\,y''+(Ax^2+Bx+C)\,y'+(Dx+E)\,y=0.}$

См. 2.329 (14) и 2.408 (3). О возникающей здесь задаче о собственных значениях и об осцилляционной теореме Клейна см. ч. II, п. 9.8.

2.331. $\boldsymbol{2x^2(x-2)\,y''-x(x-4)\,y'+(x-3)\,y=0.}$

$$y=C_1\sqrt{|x|}+C_2\sqrt{|x(x-2)|}.$$

2.332. $\boldsymbol{4x^2(x+1)\,y''-4x^2y'+(3x+1)\,y=0.}$

Если вместо x принять за независимое переменное $-x$, то получится частный случай уравнения 2.260 (19).

$$y=\sqrt{|x|}\,[C_1+C_2(x+\ln|x|)].$$

2.333. $\boldsymbol{4x^2(x-1)\,y''+2x(3x-1)\,y'-\nu(\nu+1)(x-1)\,y=0}$; см. 2.240 (6).

2.334. $\boldsymbol{4x^2(x-1)\,y''+4[(a+1)x-1]\,xy'+[(a^2-b^2)x+c^2]\,y=0.}$

Это уравнение типа 2.260 (19). О решении с помощью криволинейных интегралов см. Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 206.

2.335. $\boldsymbol{4x(x-1)^2\,y''+2(x-1)(3x-1)\,y'+(ax+b)\,y=0.}$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=\xi^2$, получаем

$$(\xi^2-1)^2\,\eta''+2\xi(\xi^2-1)\,\eta'+(a\xi^2+b)\,\eta=0.$$

Об этом уравнении см. 2.240 (12).

2.336. $\boldsymbol{(x-1)(2x-1)^2\,y''-(3x-1)\,y=0.}$

$$y=(x-1)\sqrt{|2x-1|}\left\{C_1+C_2\left[\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{x-1}\right]\right\}.$$

2.337. $\boldsymbol{4(x+a)^2(x+b)\,y''+2(x+a)(3x+a+2b)\,y'+(a-b)\,y=0,\ a\neq b.}$

$$y=|x+a|^{-1/2}(C_1+C_2|x+b|^{1/2}).$$

2.338. $(9x-2)x^2y''-3x(6x-1)y'-3y=0.$

Общее решение

$$y=C_1(54x^3-18x^2+x)+C_2(9x^2-2x)^{3/2}.$$

J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957).

2.339 $(ax+1)x^2y''+[a(b+2)x^2+(c-d+1)x]y'+(abx-cd)y=0.$

Полагая $y(x)=x^{-c}\eta(\xi)$, $\xi=-ax$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260, в котором $\alpha=1-c$, $\beta=b-c$, $\gamma=1-c-d$ и переменные x, y заменены через ξ, η Представление решений в явном виде с помощью рядов — см. A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2 Aufl., Braunschweig, 1912, стр. 207, 741.

2.340. $(ax+b)x^2y''-2x(ax+2b)y'+2(ax+3b)y=0.$

$$(ax+b)y=x^2(C_1+C_2x).$$

2.341. $(ax+b)x^2y''+(2ax+b)xy'+(a\nu x-b)y=A(ax+b)x^3.$

О решении соответствующего однородного уравнения см. 2.410. Одно из решений неоднородного уравнения имеет вид

$$y=\frac{A}{\nu+12}\left[x^3+\frac{b}{a}\,\frac{\nu+4}{\nu+6}\,x^2-\frac{b^2}{a^2}\,\frac{3(\nu+4)}{(\nu+2)(\nu+6)}\,x\right].$$

E. Honegger, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **7** (1927), стр. 120.

342—396. $(ax^4+\ldots)y''+\ldots$

2.342. $x^4y''+ay=0$; тип 2.14.

$$y=\begin{cases} x\left(C_1e^{\alpha/x}+C_2e^{-\alpha/x}\right) & \text{при} \quad a=-\alpha^2<0,\\ x\left(C_1\cos\dfrac{\alpha}{x}+C_2\sin\dfrac{\alpha}{x}\right) & \text{при} \quad a=\alpha^2>0.\end{cases}$$

2.342a. $x^4y''=(2x^2\pm1)y$;

частный случай уравнения 2.155 при $k=-2$.

Для верхнего знака: $y=C_1(x^2-x)e^{1/x}+C_2(x^2+x)e^{-1/x}$; для нижнего знака:

$$y=C_1\left(x^2\cos\frac{1}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)+C_2\left(x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}\right).$$

2.343. $x^4y''-[a(a-1)x^2+b(x+b)]y=0.$

$$y=(ax+b)Z_a(\xi)+biZ'_a(\xi), \qquad \xi=bix^{-1},$$

где Z_a — цилиндрические функции (см. 2.162).

2.344. $x^4y''\left(e^{2/x}-\nu^2\right)y=0$; см. 2.162 (24).

2.345. $x^4y''+xy'-2y=0.$

$$y=C_1xE+C_2\left(x^2-xE\int\frac{dx}{E}\right), \quad \text{где} \quad E=\exp\frac{1}{2x^2}.$$

2.346. $x^4y''-(a+b)x^2y+[(a+b)x+ab]y=0.$

$$y=\begin{cases} C_1xe^{-a/x}+C_2xe^{-b/x} & \text{при} \quad a\neq b,\\ (C_1+C_2x)e^{-a/x} & \text{при} \quad a=b.\end{cases}$$

2.347. $x^4y'' + x^3y' + y = 0$; частный случай уравнения 2.162 (1).

2.347a. $x^4y'' + x^3y' + (\pm x - 1)\, y = 0.$

$$y = e^{\mp 1/x}\left(C_1 + C_2 \int x^{-1} e^{\pm 2/x}\, dx\right).$$

2.348. $x^4y'' + x^3y' + [a(x^4+1) + bx^2]\, y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение 2.21:

$$\eta'' + (2a \operatorname{ch} 2\xi + b)\,\eta = 0.$$

2.349. $x^4y'' + (x^2+1)\, xy' + y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \dfrac{1}{2x^2}$, получаем уравнение 2.113:

$$\xi\eta'' + (1-\xi)\,\eta' + {}^1\!/_2\,\eta = 0.$$

2.349a. $x^4y'' + (x^2-1)\, xy' - (x^2-1)\, y = 0.$

$$y = x\left(C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\right).$$

2.350. $x^4y'' + 2x^3y' + a^2y = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^{-1}$, находим

$$y = C_1 \cos\frac{a}{x} + C_2 \sin\frac{a}{x}.$$

2.351. $x^4y'' + (2x^2+1)\, xy' - y = 0.$

$$y = C_1E + C_2E \int \frac{dx}{x^2E}, \quad \text{где} \quad E = \exp\frac{1}{2x^2}.$$

2.352. $x^4y'' + 2x^2(x+a)\, y' + by = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^{-1}$, получаем $\eta'' - 2a\eta' + b\eta = 0.$

2.353. $x^4y'' - (2x^2-1)\, xy' + y = 0.$

$$y = \frac{1}{x}(x^4 + 2x^2 - 1)\left(C_1 + C_2 \int \frac{x^4 \exp(2x^2)^{-1}}{(x^4+2x^2-1)^2}\, dx\right).$$

2.354. $x^4y'' - (2x^2-1)\, xy' + 2y = 0.$

$$y = \left(5 - \frac{1}{x^2}\right)\left(C_1 + C_2 \int \frac{x^6}{(5x^2-1)^2} \exp\frac{1}{2x^2}\, dx\right).$$

2.354a. $x^4y'' + ax^3y' + (bx^2 + cx^m)\, y = 0.$

После деления на x^2 — частный случай уравнения 2.162 (1).

2.354б. $x^4y'' + (ax + 2b)\, x^2y' + (cx^4 + dx^2 + ex + f)\, y = 0.$

Делим на x^2. Получаем частный случай уравнения 2.162 (16), если только выполнены по крайней мере два из следующих трех равенств:

$$c = 0, \quad e = (a-2)\, b, \quad f = b^2.$$

2.355. $x(x^3+1)\, y'' + (x^3-1)\, y' - x^2y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = -x^3$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260:

$$\xi(\xi-1)\,\eta'' + \left(\xi - \frac{1}{3}\right)\eta' - \frac{1}{9}\,\eta = 0.$$

После деления на x^2, получаем уравнение в полных дифференциалах:

$$y = u^{1/3}\left(C_1 + C_2 \int x u^{-4/3}\, dx\right), \quad \text{где} \quad u = x^3 + 1.$$

J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957).

2.356. $x^2(x^2+1)y''+x(2x^2+1)y'-[\nu(\nu+1)x^2+n^2]y=0$; см. 2.240 (7).

2.357. $x^2(x^2+1)y''+(ax^2+a-1)xy'+(bx^2+c)y=0$.

Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi^2=x^2+1$ получаем

$$(\xi^2-1)^2\eta''+a\xi(\xi^2-1)\eta'+(b\xi^2+c-b)\eta=0.$$

При соответствующих соотношениях между постоянными это уравнение является частным случаем уравнения 2.240 (13).

2.358. $x^2(x^2-1)y''-(x^2-2)(xy'-y)=0$; частный случай уравнения 2.410.

$$y=C_1x+C_2x\cdot\begin{cases}\arcsin x & \text{при} \quad |x|<1,\\ \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) & \text{при} \quad |x|>1.\end{cases}$$

2.359. $x^2(x^2-1)y''+2x^3y'+\nu(\nu+1)y=0$; см. 2.240 (8).

2.360. $x^2(x^2-1)y''+2x^3y'-\nu(\nu+1)(x^2-1)y=0$; см. 2.240 (9).

2.361. $x^2(x^2-1)y''-2x^3y'-[a(a+3)x^2-a(a+1)]y=0$;
см. 2.362 при $n=a$.

2.362. $x^2(x^2-1)y''-2x^3y'-[(a-n)(a+n+1)x^2(x^2-1)+$
$+2ax^2+n(n+1)(x^2-1)]y=0$.

Это уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 18.6. Если n — натуральное число, то общее решение имеет вид

$$y=x^{-n}\left[C_1e^{\lambda x}P(x)+C_2e^{-\lambda x}Q(x)\right],$$

где $\lambda^2=(a-n)(a+n+1)$, а P, Q — многочлены степени не больше $2n+2$. При $n=a$ или $n=-a-1$ (здесь n не обязательно должно быть целым) получается уравнение типа 2.410. Общее решение:

$$y=C_1x^{-a}+C_2\left(\frac{x^{a+3}}{2a+3}-\frac{x^{a+1}}{2a+1}\right),$$

если только знаменатели в этом выражении отличны от нуля.

2.362а. $x^2(x^2-1)y''+(3x^2-1)xy'+y=0$; частный случай уравнения 2.363а.

Полагая $xy=u(x)$, получаем уравнение 2.315а с искомой функцией u вместо y.

2.362б. $x^2(x^2-1)y''+3(x^2-1)xy'-y=0$; частный случай уравнения 2.363а.

Полагая $u(x)=xy$, получаем уравнение 2.316 с искомой функцией u вместо y.

2.363. $x^2(x^2-1)y''+(ax^2+a-2)xy'+b(x^2-1)y=0$.

Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $2x\xi=x^2+1$ получаем

$$(\xi^2-1)\eta''+a\xi\eta'+b\eta=0.$$

При $a=3$, $b=1$ имеем

$$y=\frac{x}{x^2-1}(C_1+C_2\ln x).$$

[О случае $a=1$ см. 2.235. — *Прим ред.*]

2.363а. $x^2(x^2-1)y''+(ax^2+b)xy'+cy=0$.

Если $c=(a+b)(a-1)$, то $y=x^{1-a}$ есть частное решение; остальные решения находятся согласно изложенному в ч. I, п. 24.2 (б).

Полагая $y=x^ru(x)$, где r — корень уравнения $r^2-(b+1)r=c$, получаем уравнение 2.318:

$$x(x^2-1)u''+[(a+2r)x^2+b-2r]u'+r(a+r-1)u=0.$$

2.364. $x^2(x^2-1)y'' - [2bcx^c(x^2-1)+2(a-1)x^2-2a]\,xy' + \{b^2c^2x^{2c}(x^2-1) + bc(2a-c-1)x^{c+2} - bc(2a-c+1)x^c + [a(a-1)-\nu(\nu+1)]\,x^2 - a(a+1)\}\,y = 0$; см. 2.240 (11).

2.365. $(x^2+1)^2 y'' + ay = 0$.

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} C_1\cos(\alpha\operatorname{arctg} x) + C_2\sin(\alpha\operatorname{arctg} x) & \text{при} \quad a+1=\alpha^2>0, \\ C_1\operatorname{ch}(\alpha\operatorname{arctg} x) + C_2\operatorname{sh}(\alpha\operatorname{arctg} x) & \text{при} \quad a+1=-\alpha^2<0, \\ C_1 + C_2\operatorname{arctg} x \quad \text{при} \quad a=-1. \end{cases}$$

2.366. $(x^2+1)^2 y'' + 2x(x^2+1)y' + y = 0$; частный случай уравнения 2.79. В самосопряженной форме:

$$[(x^2+1)\,y']' + (x^2+1)^{-1}\,y = 0.$$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $x = \operatorname{tg}\xi$, получаем уравнение

$$\eta'' + \eta = 0;$$

его решения $\sin\xi$, $\cos\xi$. Отсюда

$$y\sqrt{x^2+1} = C_1 + C_2 x.$$

2.367. $(x^2+1)^2 y'' + 2x(x^2+1)y' + [a^2(x^2+1)^2 - n(n+1)(x^2+1) + m^2]\,y = 0$. Это уравнение аналогично уравнению 2.372.

2.368. $(x^2+1)^2 y'' + ax(x^2+1)y' + by = 0$. Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x\,(x^2+1)^{-1/2}$, получаем

$$(\xi^2-1)\,\eta'' - (a-3)\,\xi\eta' - b\eta = 0.$$

2.369. $(x^2-1)^2 y'' + ay = 0$.

$$y = \begin{cases} \sqrt{|x^2-1|}\left[C_1\cos\left(\alpha\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right) + C_2\sin\left(\alpha\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right)\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad a-1=4\alpha^2>0, \\ (x+1)\left[C_1\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|^{(2\alpha-1)/2} + C_2\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|^{-(2\alpha+1)/2}\right] \\ \qquad\qquad\qquad \text{при} \quad a-1=-4\alpha^2<0, \\ \sqrt{x^2-1}\left(C_1 + C_2\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|\right) \quad \text{при} \quad a=1. \end{cases}$$

2.370. $(x^2-1)^2 y'' + 2x(x^2-1)y' - a^2y = 0$; частный случай уравнения 2.79. При $a>0$ имеем

$$y = C_1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{a/2} + C_2\left|\frac{x+1}{x-1}\right|^{a/2};$$

краевой задаче с условиями «$y(x)$ ограничена при $|x|<1$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a(\xi^2-1)^3}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\,\dfrac{1-\xi}{1+\xi}\right)^{a/2} & \text{при} \quad x\leqslant\xi, \\ \dfrac{1}{2a(\xi^2-1)^3}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\,\dfrac{1+\xi}{1-\xi}\right)^{a/2} & \text{при} \quad x\geqslant\xi. \end{cases}$$

2.371. $(x^2-1)^2 y''+2x(x^2-1)y'-[\lambda(x^2-1)+a^2]y=0.$

Полагая $y=|x^2-1|^{a/2}u(x)$, получаем

$$(x^2-1)u''+2(a+1)xu'+[a(a+1)-\lambda]u=0.$$

Об этом уравнении см. 2.244. Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $x=i\operatorname{ctg}\xi$, получаем уравнение

$$\eta''\sin^2\xi-(a^2\sin^2\xi-\lambda)\eta=0,$$

а полагая $y(x)=\eta(\xi)|\sin\xi|^{-1/2}$, $x=\cos\xi$, — уравнение

$$\eta''\sin^2\xi+\left[\left(\lambda+\frac{1}{4}\right)\sin^2\xi-\left(a^2-\frac{1}{4}\right)\right]\eta=0,$$

т. е. уравнение типа 2.424. Таким образом, исходное уравнение интегрируемо в конечном виде, если $\lambda=-n(n-1)$ (n — натуральное число) или если $a+1/2$ — натуральное число.

E. G. C. Poole, *Journ. London Math. Soc.* **5** (1930), стр. 189—191.

Если $\lambda=\nu(\nu+1)$ и $a=n$ — натуральное число, то данное уравнение совпадает с 2.240 (12), т. е. с уравнением присоединенных функций Лежандра. Если $a=n$ фиксировано и даны краевые условия «$y(x)$ регулярна при $x=1$ и при $x=-1$», то собственными значениями являются $\lambda=m(m+1)$, а собственными функциями — присоединенные функции Лежандра $P_m^n(x)$, удовлетворяющие соотношению ортогональности

$$\int_0^1 P_{m_1}^n(x)P_{m_2}^n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при}\quad m_1\neq m_2,\\ \dfrac{2}{2m+1}\,\dfrac{(m+n)!}{(m-n)!} & \text{при}\quad m_1=m_2=m\geqslant n.\end{cases}$$

О получении решений в замкнутом виде см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 42.

2.372. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'+[(ax^2+bx+c)(x^2-1)-k^2]y=0.$

При $a=b=0$ см. 2.371. В общем случае, полагая $y=(x^2-1)^{k/2}u(x)$, получаем уравнение 2.248:

$$(x^2-1)u''+2(k+1)xu'+[ax^2+bx+c+k(k+1)]u=0.$$

A. H. Wilson, *Proceedings Soc. London A* **118** (1928), стр. 617—647.

2.373. $(x^2-1)^2y''+2x(x^2-1)y'-[a^2(x^2-1)^2+n(n+1)(x^2-1)+m^2]y=0.$

При $a=0$ получается уравнение 2.240 (12). С помощью решения этого уравнения первоначальное уравнение может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра. H. J. Priestley, *Proceedings London Math. Soc.* (2) **20** (1922), стр. 37—50.

2.374. $(x^2-1)^2y''-2(2a-1)x(x^2-1)y'+$
$+\{[2a(2a-1)-\nu(\nu+1)]x^2+2a+\nu(\nu+1)\}y=0$; см. 2.240 (13).

2.375. $(x^2-1)^2y''+2(n+1-2a)x(x^2-1)y'+\{4a(a-n)x^2-$
$-[2a+(\nu+n+1)(\nu-n)](x^2-1)\}y=0$; см. 2.240 (14).

2.376. $x^2(x^2+a)y''+x(2x^2+a)y'+by=0.$

Это уравнение типа 2.442, и подстановкой $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x^{-1}$ оно приводится к уравнению 2.297 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.377. $(x^2 \pm a^2)^2 y'' + b^2 y = 0.$

Уравнение изгиба сжатого стержня с двойными стенками параболического сечения. Для верхнего знака (суженный стержень) имеем

$$y = \sqrt{x^2+a^2}\,(C_1 \cos u + C_2 \sin u),$$
$$u = a^{-1}\sqrt{a^2+b^2}\,\operatorname{arctg}(x/a);$$

для нижнего знака (стержень с выступами) имеем

$$y = \sqrt{a^2-x^2}\,(C_1 \cos u + C_2 \sin u),$$
$$u = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, \quad |x| < a.$$

2.378. $x^2 (x-1)^2 y'' + 2x (x^2-1) y' - 2 (x^2-x-1) y = 0.$

$$y = \frac{x^2}{x-1}\left\{ C_1 + C_2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \right] \right\}.$$

2.378a. $x (x-1)(x+1)^2 y'' + 2x (x+1)(x-3) y' - 2 (x-1) y = 0.$

Полагая $u(x) = (x+1)^2 y$, получаем уравнение

$$x (x-1) u'' - 2xu' + 2u = 0;$$

его общее решение:

$$u = C_1 x + C_2 (1 - x^2 + 2x \ln x).$$

2.379. $(x+1)^2 (x^2+2x+3) y'' - 12y = 0.$

$$y = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}\left[C_1 + C_2 \left(x + \frac{x+1}{x^2+2x+3} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) \right].$$

2.380. $x^2 (x-a)^2 y'' + by = 0.$

При $m(m-1)a^2 = -b$ имеем

$$y = C_1 |x|^m |x-a|^{1-m} + C_2 |x|^{1-m} |x-a|^m.$$

2.381. $x^2 (x-a)^2 y'' + by = cx^2 (x-a)^2.$

При $m(m-1)a^2 = -b$ имеем

$$y = \frac{-c}{a(2m-1)} \left[|x|^{1-m} |x-a|^m \int |x|^m |x-a|^{1-m}\,dx - \right.$$
$$\left. - |x|^m |x-a|^{1-m} \int |x|^{1-m} |x-a|^m\,dx \right].$$

2.382. $(x-a)^2 (x-b)^2 y'' = cy, \qquad a \neq b.$

Полагая $y = (x-b)\,\eta(\xi)$, $\xi = \ln \dfrac{x-a}{x-b}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами: $(a-b)^2 (\eta'' - \eta') = c\eta$. Таким образом,

$$y = C_1 |x-a|^{(1+\lambda)/2} |x-b|^{(1-\lambda)/2} + C_2 |x-a|^{(1-\lambda)/2} |x-b|^{(1+\lambda)/2},$$

где $\lambda^2 = 4c(a-b)^{-2} + 1 \neq 0.$

2.383. $(x-a)^2 (x-b)^2 y'' + [(1+\alpha+\beta)(x-a)^2 (x-b) +$
$+ (1-\alpha-\beta)(x-b)^2 (x-a)]\, y' + \alpha\beta (a-b)^2 y = 0;$ см. 2.407 (4).

2.383a. $x^2 (x-1)(2x-1) y'' + 2 (x-2)(2x-1) xy' - 2 (x-1) y = 0.$

Полагая $u(x) = x^2 y$, получим уравнение

$$(x-1)(2x-1) u'' - 2 (2x-1) u' + 4u = 0,$$

которое подстановкой $u(x) = \eta(\xi)$, $\xi = 2x - 1$ приводится к гипергеометрическому уравнению 2.260 и имеет общее решение

$$u = C_1(2x-1) + C_2[2x^2 - 1 - (2x-1)\ln(2x-1)].$$

2.383б. $2x(x-1)(x+1)^2 y'' + 2(2x-1)(x+1)^2 y' + y = 0.$

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \sqrt{(1-x)(1+x)^{-1}}$, получим уравнение 2.317 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.384. $4x^4 y'' - [(a^2-1)x^2 - 2(a+3)bx + b^2]\,y = 0.$

$$y = e^{-b/2x} x^{(3-a)/2} \left(\frac{a+1}{x} - \frac{b}{x^2}\right)\left(C_1 + C_2 \int x^a e^{b/x}\,dx\right) - C_2 e^{b/2x} x^{(3+a)/2}.$$

2.385. $4(x^2+1)^2 y'' + (ax^2 + a - 3)\,y = 0.$

При $a > 1$

$$y = (x^2+1)^{1/4}(C_1 \cos X + C_2 \sin X),$$

где $X = {}^1\!/_2 \sqrt{a-1}\,\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

При $a < 1$ нужно $a-1$, cos, sin заменить соответственно через $1-a$, ch, sh.

2.385а. $4(x^2-1)^2 y'' + (x^2+2)\,y = 0.$

$$y = \begin{cases} \sqrt[4]{1-x^2}\,(C_1 + C_2 \operatorname{Arcsin} x) & \text{при } |x| < 1, \\ \sqrt[4]{x^2-1}\,(C_1 + C_2 \operatorname{Arch} x) & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

2.386. $(2x+1)^2(x^2+x+1)\,y'' - 18y = 0.$

$$y = \frac{x^2+x+1}{(2x+1)^2}\left\{C_1 + C_2 \int \frac{(2x+1)^4}{(x^2+x+1)^2}\,dx\right\}.$$

2.387. $4(x^2+x+1)^2 y'' - 3y = 0.$

$$y = \sqrt{x^2+x+1}\left(C_1 + C_2 \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.388. $4x^2(x-1)^2 y'' + 2x(x-1)(3x-1)\,y' + [\nu(\nu+1)(x-1) - a^2 x]\,y = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $x = \xi^{-2}$, получим уравнение 2.240(12), в котором n, x, y заменены через a, ξ, η.

2.389. $4x^2(x-1)^2 y'' + 2x(x-1)(3x-1)\,y' - [\nu(\nu+1)(x-1)^2 + 4n^2 x]\,y = 0$; см. 2.260(15).

2.390. $16x^2(x-1)^2 y'' + 3y = 0$; частный случай уравнения 2.382.

2.391. $x^2(ax^2+1)\,y'' - x(7ax^2+5)\,y' + 5(3ax^2+1)\,y = 0.$

$$y = C_1 x^5 + C_2 x(2ax^2+1).$$

2.392. $a(x^2-1)^2 y'' + bx(x^2-1)\,y' + (cx^2+dx+e)\,y = 0.$

Если p, q выбраны так, что

$$4aq(q-1) + 2bq + c + d + e = 0, \quad (p-q)[2a(p+q-1)+b] = d,$$

то подстановка $y(x) = (x+1)^p (x-1)^q \eta(\xi)$, $\xi = {}^1\!/_2(x+1)$ приводит к гипергеометрическому уравнению 2.260 относительно η.

2.393. $ax^2(x-1)^2 y'' + (bx^2+cx+d)\,y = 0.$

Если p, q выбраны так, что

$$ap(p-1) + d = 0, \quad aq(q-1) + b + c + d = 0,$$

то подстановка $y=x^p(x-1)^q u(x)$ приводит к гипергеометрическому уравнению 2.260:

$$ax(x-1)u''+2a[(p+q)x-p]u'+(2apq-c-2d)u=0.$$

2.394. $x^2(ax+b)^2y''+2x(ax+b)^2y'+cy=0.$

Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=\frac{\sqrt{|c|}}{b}\ln\frac{x}{ax+b}$, получим уравнение с постояниыми коэффициентами:

$$\sqrt{|c|}\,\eta''+b\eta'+\operatorname{sign}c\cdot\sqrt{|c|}\,\eta=0.$$

2.395. $(ax+b)^4y''+y=0.$
Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=ax+b$, получаем уравнение 2.14: $a^2\xi^4\eta''+\eta=0$. Отсюда находим

$$\eta=C_1\xi\cos\frac{1}{a\xi}+C_2\xi\sin\frac{1}{a\xi}.$$

2.396. $(ax^2+bx+c)^2y''+Ay=0.$
Полагая

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}\,\eta(\xi),\quad \xi=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c},$$

получаем уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\eta''+\left(A+ac-\frac{1}{4}b^2\right)\eta=0.$$

Этот метод применим, если трехчлен ax^2+bx+c не имеет нулей в рассматриваемом интервале. Если он имеет два различных нуля, то оказывается применимым метод 2.382.

397—410. $(ax^n+\dots)y''+\dots;\ n\geqslant 5$

2.397. $x^5y''+xy'-y=0$; частный случай уравнения 2.442.

$$y=C_1x+C_2x\int\frac{1}{x^2}\exp\frac{1}{3x^3}\,dx.$$

2.398. $x(x^2-1)^2y''+(x^2-1)(3x^2-1)y'+[x^2-1-(2\nu+1)^2]xy=0.$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)\sqrt{\frac{1}{2}\xi+1}$, $\xi=\frac{1+x^2}{1-x^2}$, получаем уравнение Лежандра 2.240 с переменными ξ, η вместо x, y.

2.399. $(x+1)(x-1)^2(3x+5)^2y''-(3x+1)(x-1)(3x+5)^2y'+36(x+1)^3y=0.$
Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $12\xi=(x-1)^3(3x+5)$, получаем уравнение 2.14: $4\xi^2\eta''+\eta=0$. Отсюда находим

$$y=\sqrt{|\xi|}\,(C_1+C_2\ln|\xi|).$$

2.400. $x^6y''-x^5y'+ay=0.$
Полагая $y=x^2\eta(\xi)$, $\xi=x^{-2}$, получаем $4\eta''+a\eta=0$.

2.401. $x^6y''+(3x^2+a)x^3y'+by=0.$
Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=x^{-2}$, приходим к уравнению

$$4\eta''-2a\eta'+b\eta=0.$$

2.402. $x^2(x^2-1)^2y''+[(1-4a)x^2-1]x(x^2-1)y'+$
$+[(x^2-\nu^2)(x^2-1)^2+4a(a+1)x^4-2ax^2(x^2-1)]y=0;$
см. 2.162(19).

2.403 $$y''+y'\sum_{n=1}^{3}\frac{1-\alpha_n-\beta_n}{x-c_n}+$$

$$+\frac{y}{(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)}\sum_{n=1}^{3}\frac{\alpha_n\beta_n(c_n-c_{n-1})(c_n-c_{n+1})}{x-c_n}=0,$$

причем $\sum(\alpha_n+\beta_n)=1$, $c_{n+3}=c_n$; уравнение Римана.

Это уравнение тесно связано с гипергеометрическим уравнением 2.260; его решения обозначают, следуя Риману,

$$P\left\{\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \end{matrix}\right\}.$$

Подробнее см. 2.407.

2.404. $4x^6y''+4x^3(2x^2+1)y'-(2x^2-1)y=0.$

$$y=\left(C_1+\frac{C_2}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{4x^2}\right).$$

2.405. $4x^6y''-4x^3(2x^2+1)y'+(8x^4+10x^2+1)y=0.$

$$y=(C_1+C_2x)\,x\exp\left(-\frac{1}{4x^2}\right).$$

2.406. $16(x^3-1)^2y''+27xy=0.$

Подстановка $y=(x^3-1)^{1/4}u(x)$ дает

$$16(x^3-1)u''+24x^2u'-3xu=0;$$

отсюда, полагая $u=\eta(\xi)$, $\xi=x^3$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260:

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{7}{6}\xi-\frac{2}{3}\right)\eta'-\frac{1}{48}\eta=0.$$

2.407. $$y''+y'\sum_{n=1}^{3}(1-\alpha_n-\beta_n)\frac{b_n}{b_nx-a_n}-$$

$$-\frac{y}{(b_1x-a_1)(b_2x-a_2)(b_3x-a_3)}\sum_{n=1}^{3}\alpha_n\beta_n\frac{\Delta_n\Delta_{n-1}}{b_nx-a_n}=0,$$

где $\sum(\alpha_n+\beta_n)=1,\quad |a_n|+|b_n|>0,$

$$\Delta_n=a_nb_{n+1}-a_{n+1}b_n\neq 0,\quad a_{n+3}=a_n,\quad b_{n+3}=b_n.$$

[Литература: Уиттекер и Ватсон, т. I, стр. 283, т. II, стр. 76; Сансоне, т. I, гл. III; В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950. — *Прим. ред.*]

Запишем это уравнение в виде

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x \\ b_1 & b_2 & b_3 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y \end{array}\right\}=0. \qquad (1)$$

В литературе рассматривается случай $b_n=1$; случай $b_n=0$ рассматривается с помощью предельного перехода. При $a_1=b_2=0$, $a_3=b_3=1$, $\alpha_1=\alpha_3=0$, $\alpha_2=\alpha$, $\beta_1=1-\gamma$, $\beta_2=\beta$, $\beta_3=\gamma-\alpha-\beta$ уравнение (1) переходит в гипергеометрическое уравнение 2.260. При $a_1 = b_2 = 0$, $b_1 = a_2 = a_3 = 1$, $b_3 = b$, $\alpha_1 = {}^1/_2 + m$, $\beta_1 = {}^1/_2 - m$, $\alpha_2 = -b^{-1}$, $\beta_2 = 0$, $\alpha_3 = -k + b^{-1}$, $\beta_3 = k$ получаем из (1)

$$y'' + \frac{b-1}{bx-1}y' + \frac{y}{x(bx-1)}\left[\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{x} + k\,\frac{1-kb}{bx-1}\right] = 0 \qquad (2)$$

и отсюда при $b \to 0$ получаем вырожденное гипергеометрическое уравнение 2.273 в виде 2.190:

$$x^2y'' + x^2y' + \left(\frac{1}{4} - m^2 + kx\right)y = 0. \qquad (3)$$

При $\alpha_3 + \beta_3 = 1$, $\alpha_3\beta_3 = 0$, $b_n \neq 0$ получаем уравнение

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha-\beta}{x-a} + \frac{1+\alpha+\beta}{x-b}\right)y' + \frac{\alpha\beta(a-b)^2}{(x-a)^2(x-b)^2}y = 0. \qquad (4)$$

Если $a \neq b$, то это уравнение имеет решения

$$y = \begin{cases} C_1\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^\alpha + C_2\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^\beta & \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \\[2ex] C_1\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^\alpha + C_2\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right|^\alpha \ln\left|\dfrac{x-a}{x-b}\right| & \text{при} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Подстановка

$$y(x) = \frac{|b_2x - a_2|^{r+s}}{|b_1x - a_1|^r\,|b_3x - a_3|^s}\,\eta(\xi), \qquad \xi = \frac{Ax+B}{Cx+D}, \qquad (5)$$

где $AD - BC \neq 0$, переводит решения $y(x)$ уравнения (1) в решения $\eta(\xi)$ уравнения

$$\left\{\begin{array}{ccc|ccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \alpha_1 + r & \alpha_2 - r - s & \alpha_3 + s & \xi \\ B_1 & B_2 & B_3 & \beta_1 + r & \beta_2 - r - s & \beta_3 + s & \eta \end{array}\right\} = 0 \qquad (6)$$

и обратно; при этом $A_n = Aa_n + Bb_n$, $B_n = Ca_n + Db_n$.

При $r = -\alpha_1$, $s = -\alpha_3$, $A = b_1/\Delta_3$, $B = -a_1/\Delta_3$, $C = -b_2/\Delta_2$, $D = a_2/\Delta_2$ уравнение (6) сводится к гипергеометрическому уравнению. Поэтому в данном случае решения $y(x)$ уравнения (1) получатся, если $\eta(\xi)$ в (5) пробегают решения этого гипергеометрического уравнения.

О представлении решений с помощью криволинейных интегралов см. ч. I, п. 22.6.

2.408. $x(x^2 - a_1)(x^2 - a_2)(x^2 - a_3)y'' +$

$$+ [x^2(x^2 - a_1)(x^2 - a_2) + x^2(x^2 - a_1)(x^2 - a_3) +$$
$$+ x^2(x^2 - a_2)(x^2 - a_3) - (x^2 - a_1)(x^2 - a_2)(x^2 - a_3)]\,y' +$$
$$+ (Ax^2 + B)\,y = 0;$$ уравнение Ламе.

[Литература: Уиттекер и Ватсон, т. II, гл. 23; Янке, Эмде и Лёш, М. Д. О. Стрэтт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935; Айнс; Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, 1970; М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965; Д. С. Кузнецов, Специальные функции, 1965; Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, 1967. — *Прим. ред.*]

Это уравнение получится, если в уравнении в частных производных $\Delta u + k^2 u = 0$ перейти к эллиптическим координатам. Этим происхождением данного дифференциального уравнения объясняются и обычные для него постановки задач.

Другие записи этого уравнения:

$$y'' + \left(\frac{1}{x^2-a_1} + \frac{1}{x^2-a_2} + \frac{1}{x^2-a_3} - \frac{1}{x^2}\right) xy' + \frac{(Ax^2+B)\,x^2}{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}\, y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}\left[\frac{1}{x}\sqrt{(x^2-a_1)(x^2-a_2)(x^2-a_3)}\, y'\right]' + (Ax^2+B)\, y = 0. \quad (2)$$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^2$, получим из (1) уравнение 2.329 (14):

$$\eta'' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi-a_1} + \frac{1}{\xi-a_2} + \frac{1}{\xi-a_3}\right)\eta' + \frac{A\xi+B}{4(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)}\,\eta = 0. \quad (3)$$

Если $\wp(x)$ есть $\wp$-функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$\wp'^2 = 4(\wp-e_1)(\wp-e_2)(\wp-e_3), \quad \text{где} \quad e_n = a_n - {}^1/_3\,(a_1+a_2+a_3),$$

то, полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $x^2 = \wp(\xi) + {}^1/_3\,(a_1+a_2+a_3)$, получаем из (1) уравнение 2.26:

$$\eta'' + [A\wp(\xi) + B]\,\eta = 0. \quad (4)$$

Подстановка $\eta(\xi) = y(x)$, $x^2 = a_3 + (a_2-a_3)\,\mathrm{sn}^2\,\xi$ $(a_1 > a_2 > a)$ приводит уравнение (1) к виду

$$\eta'' + \left(\frac{a_2-a_3}{a_1-a_3}\,A\,\mathrm{sn}^2\,\xi + \frac{a_3A+B}{a_1-a_3}\right)\eta = 0. \quad (5)$$

(4) и (5) называются соответственно использованным в подстановках эллиптическим функциям *вейерштрассовой и якобиевой формами уравнения Ламе*; (1) и (3) называются его *алгебраическими формами.*

Специальный выбор значения A. Обычно полагают $A = -n(n+1)$ (n — неотрицательное целое число); далее полагают $B = -\lambda$. Получающиеся таким образом из (1)—(5) уравнения обозначим номерами от (1a) до (5a). Как уже было отмечено, уравнение (3a) принадлежит к типу 2.329 (14), и поэтому оно в указанных в 2.329 обозначениях имеет решение

$$\eta = y\left(\frac{a_1-a_3}{a_2-a_3},\ \frac{4n(n+1)\,a_3+\lambda}{4(a_2-a_3)};\ \frac{n+1}{2},\ -\frac{n}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{\xi-a_3}{a_2-a_3}\right)$$

(здесь уже n не обязательно должно быть целым). Далее, уравнение (3a) имеет два решения, произведение которых представляет собой многочлен n-й степени от ξ; этот многочлен удовлетворяет (ср. 3.26) уравнению

$$2(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)\,\eta''' + [9\xi^2 - 6(a_1+a_2+a_3)\,\xi + 3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]\,\eta'' - 2[(n^2+n-3)\,\xi + a_1+a_2+a_3+\lambda]\,\eta' - n(n+1)\,\eta = 0 \quad (6)$$

и может быть найден из этого уравнения, если в него подставить выражение $\eta = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu (\xi - a_1)^\nu$ и подобрать соответствующим образом значения c_ν. Тогда, как и в случае уравнения 2.268, с помощью этого многочлена могут быть найдены решения уравнения (3а). Тем самым получаются и решения уравнений (1а), (4а), (5а). Соответствующее (6) уравнение, получающееся из (4а), имеет вид

$$\eta''' - [4n(n+1)\wp(\xi) + \lambda]\,\eta' - 2n(n+1)\wp'(\xi)\,\eta = 0. \tag{7}$$

При $a_3 = 0$, $a_2 = a_1 = 1$, $\lambda = m^2 - n(n+1)$ (m — натуральное число) (1а) переходит в уравнение 2.240 (12) присоединенных полиномов Лежандра.

Функции Ламе. Рассмотрим, далее, следующий вопрос: как нужно выбрать параметр λ (собственное значение), чтобы уравнение (3а) имело решения вида

$$P(\xi), \quad \sqrt{\xi - a_\nu}\,P(\xi),$$
$$\sqrt{(\xi - a_\mu)(\xi - a_\nu)}\,P(\xi), \quad \sqrt{(\xi - a_1)(\xi - a_2)(\xi - a_3)}\,P(\xi),$$

где P — некоторый многочлен? Эти решения называются *функциями Ламе* 1, 2, 3, 4-го рода и первого разряда. Постановка вопроса и решения непосредственно переносятся с помощью указанных подстановок на уравнения (1а), (4а), (5а). Подставляя, например, в уравнение ряд

$$\eta = \sum_{\nu \geqslant 0} c_\nu (\xi - a_2)^{(n-2\nu)/2} \qquad (a_1 > a_2 > a_3),$$

получаем, что при четном m функции Ламе первого рода существуют. В общем случае число λ может быть выбрано так, что при четном n существуют функции Ламе первого и третьего родов, а при нечетном n — второго и четвертого родов; например, при $n = 2$ имеем

$$\lambda = \frac{1}{6}\lambda_{1,2}, \quad \text{где} \quad \lambda_{1,2} = -2\sum a_\nu \pm \sqrt{\sum a_\nu^2 - \sum a_\mu a_\nu}.$$

Всего при заданном n существует $2n+1$ линейно независимых функций Ламе.

Линейно независимые решения, получаемые из функций первого разряда согласно ч. I, п. 24.2, называются *функциями Ламе второго разряда.*

2.409. $x^{2a}y'' + ax^{2a-1}y' + b^2y = 0.$

$$y = C_1 \sin bu + C_2 \cos bu, \quad \text{где} \quad u = (a-1)^{-1}x^{1-a} \qquad (a \neq 1).$$

[При $a = 1$ получаем уравнение Эйлера (см. ч. I, п. 22.3). — *Прим. ред.*]

2.410. $x^2(ax^b - 1)y'' + (apx^b + q)xy' + (arx^b + s)y = 0.$

Находим корни A_1, A_2 и B_1, B_2 уравнений

$$A^2 - (q+1)A - s = 0, \quad B^2 - (p-1)B + r = 0$$

и определяем c, α, β, γ из равенств:

$$c = A_1, \quad (1-\gamma)b = A_2 - A_1, \quad b\alpha = A_1 + B_1, \quad b\beta = A_1 + B_2.$$

Тогда искомые решения имеют вид

$$y = x^c\eta(ax^b),$$

где $\eta(\xi)$ — решение гипергеометрического уравнения 2.260:

$$\xi(\xi-1)\eta''+[(\alpha+\beta+1)\xi-\gamma]\eta'+\alpha\beta\eta=0.$$

О случаях, когда решение удается найти в замкнутом виде см. A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 1912, стр. 210, 756; L. Euler, Institutiones Calculi Integralis, Petersburg, 1824—1827, т. II, стр. 183.

2.410а. $y''\operatorname{ch}^2 a(x-x_0)=by$.

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $a(x-x_0)=\ln\dfrac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ $(0<\xi<1)$, где x пробегает все действительные числа, приведем данное уравнение к виду

$$\xi(\xi^2-1)\eta''+(3\xi^2-1)\eta'+4a^{-2}b\xi\eta=0.$$

Если $4b=a^2$, то получается уравнение 2.317. С помощью подстановки

$$y(x)=\eta(\xi),\quad a(x-x_0)=\ln\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\qquad(0<\xi<1)$$

исходное уравнение приводится к гипергеометрическому уравнению

$$\xi(\xi-1)\eta''+(2\xi-1)\eta'+a^{-2}b\eta=0.$$

2.410б. $y''\operatorname{sh}^2 a(x-x_0)=by$.

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $a(x-x_0)=\pm\ln\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+1}}$ $(\xi>0)$, где x пробегает все действительные числа, приведем данное уравнение к виду

$$\xi(\xi^2+1)\eta''+(3\xi^2+1)\eta'=4a^{-2}b\xi\eta.$$

411—445. Прочие дифференциальные уравнения

2.411. $(e^x+1)y''=y$.

Полагая $\eta(\xi)=y(x)$, $\xi=e^x$, получаем

$$\xi^2(\xi+1)\eta''+\xi(\xi+1)\eta'-\eta=0,$$
$$y=C_1(1+e^{-x})+C_2[-1+(1+e^{-x})\ln(1+e^x)].$$

[Более общий результат см. D. Mitrinovitch, *Universitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fak., ser. mat. i fiz.* 27 (1959), стр. 1—4; см. перевод в Дополнениях в конце книги. — *Прим. ред.*]

2.412. $xy''\ln x-y'-yx\ln^3 x=0$.

$$y=C_1\left(\frac{x}{e}\right)^x+C_2\left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

2.412а. $x^2y''\ln x+y=0$.

$$y=C_1\ln x+C_2\left(x-\ln x\int\frac{dx}{\ln x}\right).$$

2.413. $x^2(\ln x-1)y''-xy'+y=0$.

$$y=\left(C_1+C_2\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\,dx\right)\ln x.$$

2.414. $y''\operatorname{sh}^2 x-[a^2\operatorname{sh}^2 x+n(n-1)]y=0$.

$$y=\operatorname{sh}^n x\left(\frac{1}{\operatorname{sh}x}\frac{d}{dx}\right)^n(C_1e^{ax}+C_2e^{-ax})\quad\text{при}\quad a\neq 0.$$

2.415. $y'' \operatorname{sh}^2 x + 2ny' \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + (n^2 - a^2) y \operatorname{sh}^2 x = 0$; см. 2.65.

2.415а. $y'' \sin x - y' + ay \sin x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 0$.

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos \frac{x}{2}$, получаем уравнение 2.160:

$$\xi^2\eta'' + \xi\eta' + 4a\eta = 0.$$

2.416. $y'' \sin x + (2n+1) y' \cos x + (\nu - n)(\nu + n + 1) y \sin x = 0$; см. 2.240 (19).

2.417. $y'' \sin x + (\sin^2 x - \cos x) y' + y \sin^3 x = 0$.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos x$, получаем уравнение 2.35:

$$\eta'' - \eta' + \eta = 0; \quad \eta = e^{\xi/2}\left(C_1 \cos \frac{\xi\sqrt{3}}{2} + C_2 \sin \frac{\xi\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.417а. $4y'' \sin x + 4y' + y \sin x = 0$.

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos \frac{x}{2}$, получим уравнение 2.315а с переменными ξ, η вместо x, y.

2.418. $(x \cos x - \sin x) y'' + xy' \sin x - y \sin x = 0$.

$$y = C_1 x + C_2 \sin x.$$

2.419. $x^2 y'' \cos x + (x^2 \sin x - 2x \cos x) y' + (2 \cos x - x \sin x) y = 0$.

$$y = C_1 x + C_2 x \sin x.$$

2.420. $y'' \cos^2 x - [a \cos^2 x + n(n-1)] y = 0$; частный случай уравнения 2.25.
Если n — натуральное число, то

$$y = \cos^n x \left(\frac{1}{\cos x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

2.420а. $y'' \cos^2 x + ay' \sin 2x + by = 0$.

(а) $b = 2a$: $\quad y = \cos^{2a} x \left(C_1 + C_2 \int \cos^{-2a} x \, dx\right)$;

(б) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$: $\quad y = \sqrt{|\cos x|}\left(C_1 \sin \frac{x}{2} + C_2 \cos \frac{x}{2}\right)$;

(в) $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\beta^2 < 0$: $\quad y = C_1 \left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)^\beta + C_2 \left(\frac{1 - \sin x}{\cos x}\right)^\beta$;

(г) $a = -{}^3/_2$, $b = -24$:

$$y = \frac{1}{\cos^6 x}\{C_1 \sin x \,(5 \sin^2 x + 3) + C_2 (\sin^6 x - 15 \sin^4 x - 45 \sin^2 x - 5)\}.$$

2.420б. $y'' \cos^2 x - y' \sin x \cos x + y(a \cos^4 x - 1) = 0$.
Полагая $u(x) = y \cos x$, получаем уравнение 2.66а:

$$u'' + u' \operatorname{tg} x + au \cos^2 x = 0.$$

2.420в. $y'' \cos^2 x + 6y' \cos^2 x \operatorname{ctg} 2x - 24y = 0$.
Полагая $u(x) = y \cos^6 x$, получаем уравнение, не содержащее u, которое, следовательно, имеет частное решение $u = 1$. Таким образом, мы получаем одно решение данного уравнения и можем найти все остальные согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.421. $y'' \cos^2 ax + (n-1) ay' \sin 2ax + na^2 y \,[(n-1) \sin^2 ax + \cos^2 ax] = 0$.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad \text{где} \quad y_1 = \cos^n ax, \quad y_2 = y_1'.$$

2.422. $y'' \sin^2 x - 2y = 0.$

$$y = C_1 \operatorname{ctg} x + C_2 (1 - x \operatorname{ctg} x).$$

2.423. $y'' \sin^2 x + ay = 0.$ См. также 2.424.
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \operatorname{ctg} x$, получаем уравнение 2.226:

$$(\xi^2 + 1)\eta'' + 2\xi\eta' + a\eta = 0.$$

2.424. $y'' \sin^2 x - [a \sin^2 x + n(n-1)]\, y = 0$; см. 2.25.

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x - \dfrac{\pi}{2}$, получаем уравнение 2.420 с переменными ξ, η вместо x, y. Поэтому для натурального n

$$y = \sin^n x \left(\frac{1}{\sin x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(C_1 e^{x\sqrt{a}} + C_2 e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

При $a = -m^2$ получаем периодические решения.
W. v. Koppenfels, *Math. Ann.* **112** (1936), стр. 44.

2.425. $y'' \sin^2 x - [a^2 \cos^2 x + (3 - 2a)\cos x + 3(1 - a)]\, y = 0.$

$$y = C_1 u + C_2 u \int \frac{dx}{u^2},$$

где $u = (2a - 1)\sin^a x + (3 - 2a)\sin^{a-2} x\,(\cos x + 1).$

2.426. $y'' \sin^2 x - \left[a^2 \cos^2 x + b \cos x + \left(\dfrac{b}{2a - 3}\right)^2 - 3a + 2\right] y = 0.$

Частное решение:

$$y = [(2\alpha + 1)\cos x + 2\beta] \sin^{\alpha+\beta}\frac{x}{2} \cos^{\alpha-\beta}\frac{x}{2},$$

где $\alpha = a - 1$, $\beta = b(2a - 3)^{-1}$; остальные решения могут быть найдены отсюда согласно ч. I, п. 24.2.

2.427. $y'' \sin^2 x - \{[a^2b^2 - (a + 1)^2] \sin^2 x + a(a + 1)\, b \sin 2x + a(a - 1)\}\, y = 0.$

$$y = C_1 u + C_2 \left[v + (2a + 1)\, u \int v^2\, dx\right],$$

где

$$u = e^{abx} \sin^a x\,(\cos x + b \sin x), \quad v = e^{-abx} \sin^{-a-1} x.$$

2.428. $y'' \sin^2 x + (a \cos^2 x + b \sin^2 x + c)\, y = 0.$

Следует выразить одну из тригонометрических функций через другую и заменить соответственно переменную x через $\dfrac{\pi}{2} - x$ или $x - \dfrac{\pi}{2}$.
Далее см. 2.420, 2.424, 2.431.

2.429. $y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x - y = 0.$

$$y = \frac{C_1}{\sin x} + C_2 \operatorname{ctg} x = c_1 \operatorname{tg}\frac{x}{2} + c_2 \operatorname{ctg}\frac{x}{2}.$$

2.430. $y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x + [\nu(\nu + 1)\sin^2 x - n^2]\, y = 0.$ См. 2.240 (20).

2.430а. $y'' \sin^2 x + y'(\cos x + 2)\sin x + ay = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \operatorname{tg}(x/2)$, получаем уравнение 2.187:

$$\xi^2\eta'' + 3\xi\eta' + a\eta = 0.$$

2.430б. $y'' \cos x \sin x - y'(3\cos x + 2)\cos x - 2y(\cos x + 1)\sin x = 0.$

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 [\sin^2 x + 2\cos x \ln(\cos x)].$$

2.430в. $y'' \cos x \sin x + (a \sin^2 x + b) y' + cy \cos x \sin x = 0.$

(а) $c = (b-1)(a+b-1)$: $\quad y = \sin^{1-b} x$;
(б) $c = (b+1)(a+b+1)$: $\quad y = \cos^{a+b+1} x$;
(в) $c = 2(a+2)$: $\quad y = \sin^{1-b} x \cos^{a+b+1} x$;
(г) $a = b = 1,\ c = 2$: $\quad y = 1 + \cos^2 x$;
(д) $a = 2,\ c = 24$: $\quad y = \sin^{1-b} x \cos^{b+3} x \left(8 \sin^2 x + b - 3\right)$.

Остальные решения получаются в этих случаях согласно ч. I, п. 24.2 (б).
(е) $a = 2\nu - 1,\quad b = 1,\quad c = -\nu(\nu - 1)$: полагая $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \cos x$, получаем уравнение 2.240 (18) (в котором $a = \nu,\ b = 1,\ c = -1$):

$$\xi(\xi^2 - 1)\eta'' - [2(\nu - 1)\xi^2 - 2\nu]\eta' + \nu(\nu - 1)\xi\eta = 0.$$

2.431. $y'' \sin 2x - y' \cos 2x + 2y \sin 2x = 0.$

$$y = \left(C_1 + C_2 \int \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\cos^2 2x}\, dx\right) \cos 2x.$$

2.432. $4y'' \sin^2 x + 4y' \sin x \cos x - (17 \sin^2 x + 1) y = 0$;
частный случай уравнения 2.434.

$$y = |\sin x|^{-1/2} \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}\right).$$

2.433. $4x^2 y'' \cos^2 x + 4x^2 y' \sin x \cos x +$
$$+ \left(2x^2 + x^2 \sin^2 x - 24 \cos^2 x\right) y = 4x^2 \cos^{5/2} x.$$

Полагая $y = u(x)\sqrt{\cos x}$, получаем неоднородное уравнение Эйлера (см. ч. I, п. 22.3): $x^2 u'' - 6u = x^2$, откуда

$$u = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} - \frac{x^2}{4}.$$

2.434. $ay'' \sin^2 x + by' \sin x \cos x + (c \cos^2 x + d \cos x + e) y = 0.$
Полагая $\eta(\xi) = y(x),\ \xi = \cos x$, получаем уравнение 2.392, в котором x, y, b заменены через ξ, η, $a + b$.

2.435. $y'' \sin^3 x - 4y \sin 3x = 0.$

$$y = C_1 \sin^4 x + C_2 \frac{\cos x}{\sin^3 x}(5 + 6 \sin^2 x + 8 \sin^4 x + 16 \sin^6 x).$$

2.436. $4y'' \sin^2 x + [4\nu(\nu + 1) \sin^2 x - \cos^2 x + 2 - 4n^2] y = 0$; см. 2.430.

2.436а. $y'' \cos x \sin^2 x + y' \sin^3 x + ay \cos^3 x = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \sin x$, получаем уравнение 2.187:

$$\xi^2 \eta'' + a\eta = 0.$$

2.436б. $y'' \cos x \sin^2 x - y' \sin^3 x - \nu(\nu + 1) y \cos x = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \sin x$, получаем уравнение 2.240 (8).

2.437. $y'' \sin x \cos^2 x - y'(3 \sin^2 x + 1) \cos x - y \sin^3 x = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi),\ \xi = \cos x$, получаем уравнение 2.187:

$$\xi^2 \eta'' + 4\xi\eta' - \eta = 0;\quad \eta = C_1 \xi^{(-3+\sqrt{13})/2} + C_2 \xi^{(-3-\sqrt{13})/2}$$

2.437а. $y'' \cos^2 x \sin x + y' (a \sin^2 x + b) \cos x + cy \sin x = 0.$

(а) $c = a(b+1)$: $\quad y = \cos^a x;$

(б) $c = (a+2)(b-1)$: $\quad y = \operatorname{tg}^{1-b} x;$

(в) $c = 2(a+b-1)$: $\quad y = \sin^{1-b} x \cos^{a+b-1} x;$

(г) $b = -(a+3), \quad c = -24$: $\quad y = \dfrac{\sin^{a+4} x}{\cos^6 x} [(a-2)\cos^2 x + 8].$

Остальные решения находятся отсюда согласно ч. I, п. 24.2 (б).

2.437б. $y'' \cos^2 x \sin x + y' (a \sin^2 x - 1) \cos x + by \sin^3 x = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \cos x$, получаем уравнение 2.187:

$$\xi^2\eta'' + (1-a)\xi\eta' + b\eta = 0.$$

2.438. $y'' \cos^2 x \sin^2 x - [a \cos^2 x \sin^2 x + m(m-1)\sin^2 x + n(n-1)\cos^2 x]\, y = 0$; см. 2.25.

2.439. $[\wp(x) - \wp(a)]\, y'' - \wp'(x)\, y' - \{n(n+1)[\wp(x) - \wp(a)]^2 - \wp''(a)\}\, y = 0.$
[Здесь $\wp(x)$ — функция Вейерштрасса; см. 2.26. — *Прим. ред.*]
Решение см. G. H. Halphen; Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, стр. 569.

2.440. $(\wp' + \wp^2)\, y'' + (\wp^3 - \wp\wp' - \wp'')\, y' + (\wp'^2 - \wp^2\wp' - \wp\wp'')\, y = 0, \quad \wp = \wp(x).$

$$y = C_1\wp(x) + C_2 e^{\zeta(x)}.$$

[Здесь $\zeta(x)$ — функция Вейерштрасса; см. 2.26. — *Прим. ред.*]

2.441. $(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a)\, y'' - (2 \operatorname{sn} x + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)\, y' + 2[1 - 2(k^2+1)\operatorname{sn}^2 a + 3k^2 \operatorname{sn}^4 a]\, y = 1.$
[Здесь $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ — эллиптические функции Якоби; см. 2.74. — *Прим. ред.*]
Решение см. A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Gambridge, 1900—1902, т. III, стр. 463.

2.442. $f(x)\, y'' + xy' - y = 0.$
Частное решение: $y = x$. Остальные решения находятся согласно ч. I, п. 24.2.

2.443. $f(x)\, y'' + \dfrac{1}{2} f'(x)\, y' + g(x)\, y = 0.$
Если $f > 0$, то подстановка

$$\eta(\xi) = y(x), \quad \xi = \int \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}$$

приводит к уравнению $\eta'' + g(x)\eta = 0$, в котором еще нужно выразить x через ξ.

2.443а. $fy'' + (f^2 - f')\, y' + af^3 y = 0, \quad f = f(x).$

Полагая $y = e^{\alpha F} u(x)$, где $F = \int f(x)\, dx$ и α — корень уравнения $\alpha^2 + \alpha + a = 0$, получаем уравнение, не содержащее u и, следовательно, имеющее решение $u \equiv 1$. Таким образом, если $a \neq 1/4$, получаем общее решение

$$y = C_1 e^{\alpha_1 F} + C_2 e^{\alpha_2 F},$$

где α_1, α_2 — корни уравнения $\alpha^2 + \alpha + a = 0$.

[**2.443б.** $f(x)\, y'' + 2f'(x)\, y' + f''(x)\, y = Q(x).$
Общее решение

$$y = \frac{C_1 + C_2 x}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \iint Q(x)\, dx\, dx.$$

Этот результат (при $Q \equiv 0$) позволяет указать новые, не названные автором случаи интегрируемости в конечном виде многих из собранных выше уравнений, например: 2.303, 2.329, 2.420в и т. д. — *Прим. ред.*]

2.444. $fy'' - af'y' + bf^{2a+1}y = 0$, $f = f(x)$; см. 2.79.

2.444а. $fy'' + (fg + f' + 1)\, y' + gy = 0$, $f = f(x)$, $g = g(x)$.

$$y = e^{-F}\left\{C_1 + C_2 \int \frac{1}{f} \exp\left(F - \int g\, dx\right) dx\right\}, \quad \text{где} \quad F = \int \frac{dx}{f}.$$

2.445. $f^2g'(g^2 - 1)\, y'' + \left[2fgg'^2 - (g^2 - 1)(fg'' + 2f'g')\right] fy' +$

$$+ \{(g^2 - 1)[f'(fg'' + 2f'g') - ff''g'] - [2f'g + \nu(\nu + 1) fg'] fg'^2\}\, y = 0,$$

$f = f(x)$, $g = g(x)$; см. 2.240 (21).

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Уравнения с показательными функциями: 5, 18, 27.
Уравнения с логарифмическими функциями: 46, 55, 63.
Уравнения с тригонометрическими функциями: 5, 22, 82.
Уравнения с эллиптическими функциями: 9—14, 28.
Уравнения с произвольными функциями: 15, 23—26, 33, 45, 83.

3.1. $y''' + \lambda y = 0$.

$$y = \begin{cases} C_1 + C_2 x + C_3 x^2 & \text{при } \lambda = 0, \\ C_1 e^{-kx} + e^{kx/2}\left(C_2 \cos \frac{1}{2} kx\sqrt{3} + C_3 \sin \frac{1}{2} kx\sqrt{3}\right) & \text{при } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

где k — действительный корень уравнения $\lambda = k^3$.

3.2. $y''' + ax^3 y = bx$.

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^2$, получаем уравнение 3.34:

$$2\xi\eta''' + 3\eta'' + \frac{a}{8}\xi\eta = \frac{b}{8}.$$

3.3. $y''' = ax^b y$.

Полагая $\eta(\xi) = x^{b/3} y(x)$, $\xi = cx^{(3+b)/3}$, получаем уравнение 3.60:

$$\xi^3\eta''' + (1 - \nu^2)\xi\eta' + (\nu^2 - 1 - ac^{-3}\nu^3\xi^3)\eta = 0,$$

в котором $(b+3)\nu = 3$.

3.4. $y''' + 3y' - 4y = 0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.1.

$$y = C_1 e^x + (C_2 \cos \alpha x + C_3 \sin \alpha x) e^{-x/2}, \text{ где } \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

3.4а. $y''' \pm xy' \pm ny = 0$, n — целое число.

$$y = u^{(n-1)}, \text{ где } u \text{ — решение уравнения } u'' \pm xu = C.$$

3.5. $y''' - a^2 y' = e^{2ax} \sin^2 x$.

$$y = C_1 + C_2 e^{ax} + C_3 e^{-ax} + \\ + \left(\frac{1}{12a^3} + \frac{(4 - 11a^2)\sin 2x + 3a(4 - a^2)\cos 2x}{4(a^2+1)(a^2+4)(9a^2+4)}\right) e^{2ax}.$$

3.6. $y''' + 2axy' + ay = 0$; частный случай уравнения 3.15.

Общее решение:

$$y = C_1 u^2 + C_2 uv + C_3 v^2,$$

где u, v — фундаментальная система решений уравнения типа 2.14: $2y'' + axy = 0$, выражающаяся в бесселевых функциях.

3.7. $y''' - x^2y'' + (a+b-1)xy' - aby = 0.$

Следующие три ряда, сходящиеся при всех значениях x, образуют фундаментальную систему решений, если только для коэффициентов выполнены определенные неравенства:

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{ab(a-3)(b-3)\ldots(a-3\nu+3)(b-3\nu+3)}{(3\nu)!} x^{3\nu},$$

$$x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a-1)(b-1)(a-4)(b-4)\ldots(a-3\nu+2)(b-3\nu+2)}{(3\nu+1)!} x^{3\nu+1},$$

$$\frac{x^2}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a-2)(b-2)(a-5)(b-5)\ldots(a-3\nu+1)(b-3\nu+1)}{(3\nu+2)!} x^{3\nu+2}.$$

Подробнее см. A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 1912, стр. 207, 741.

3.8. $y''' + x^{2c-2}y' + (c-1)x^{2c-3}y = 0$; частный случай уравнения 3.67.

3.9. $y''' - 3[2\wp(x) + a]y' + by = 0.$

$$y = \sum_{\nu=1}^{3} C_\nu \frac{\sigma(x+\alpha_\nu)}{\sigma(x)\,\sigma(\alpha_\nu)} e^{\lambda_\nu x},$$

где α_1, α_2, α_3 — корни уравнения

$$b\wp'(x) + (3a^2 - g_2)\wp(x) + \frac{1}{4}b^2 - a^3 - g_3 = 0$$

(нужно предполагать, что эти корни различны и что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$), а $\lambda_\nu = -\zeta(\alpha_\nu) + \dfrac{2\wp'(\alpha_\nu) + b}{2a - 4\wp(\alpha_\nu)}$. [Относительно обозначений см. 2.26. — *Прим. ред.*]

3.10. $y''' + (1-n^2)\wp(x)y' + \frac{1}{2}[(1-n^2)\wp'(x) - a]y = 0.$

Пусть $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_3$, т. е. $g_2 = 0$. При $n = 2$ получаем три решения

$$y = \frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)} e^{-x\zeta(\alpha)},$$

где α — один из трех корней уравнения $\wp'(\alpha) = a$. При $n = 4$ получаем

$$y = \frac{d^2}{dx^2} \frac{\sigma(x+\alpha)}{\sigma(x)} e^{-x[\zeta(\alpha)+\beta]},$$

причем α, β определяются из уравнений

$$\wp'(\alpha) = \frac{a}{45} \frac{\lambda^2 - 10\lambda - 15}{(\lambda-1)^2},$$

$$\beta = -\frac{5\wp'(\alpha) + a}{5(\lambda-3)\wp(\alpha)}, \quad \text{где } \lambda = \frac{16a^2}{a^2 + 45^2 g_3}.$$

Если $a^2 = 135g_3$, то указанные выше формулы не годятся. В этом случае имеем решения

$$y_1 = \wp'(x) - \frac{a}{15}, \quad y_2 = xy_1 + 2\wp(x),$$

$$y_3 = \left(\frac{15\wp'(x)}{a} + 1\right)[\zeta(x-\alpha) + \zeta(x - \varepsilon\alpha) + \zeta(x - \varepsilon^2\alpha)] + 6\zeta(x),$$

где $15\wp'(\alpha) = -a$ и ε — первообразный кубический корень из 1.

3.11. $y''' - [4n(n+1)\wp(x) + a]\,y' - 2n(n+1)\wp'(x)\,y = 0$; см. 2.408 (7).

3.12. $y''' + [A\wp(x) + a]\,y' + B\wp'(x)\,y = 0$.
Решение см. G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, стр. 564; A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, стр. 462.

3.13. $y''' - (3k^2\,\mathrm{sn}^2\,x + a)\,y' + (b + c\,\mathrm{sn}^2\,x - 3k^2\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x)\,y = 0$.
[Относительно обозначений см. 2.74. — *Прим. ред.*]
Решение см. A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, стр. 463.

3.14. $y''' - (6k^2\,\mathrm{sn}^2\,x + a)\,y' + by = 0$.
Решение там же, где и для 3.13.

3.15. $y''' + 2f(x)\,y' + f'(x)\,y = 0$; частный случай уравнения 3.26.

$$y = C_1u_1^2 + C_2u_1u_2 + C_3u_2^2,$$

где u_1, u_2 — фундаментальная система решений уравнения $2u'' + f(x)\,u = 0$.

3.16. $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.1.

$$y = C_1e^{-2x} + (C_2\cos x + C_3\sin x)e^{2x}.$$

3.17. $y''' - 2y'' - a^2y' + 2a^2y = \mathrm{sh}\,x$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.2.
Полагая $u(x) = y' - 2y$, получаем уравнение $u'' - a^2u = \mathrm{sh}\,x$.

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{ax} + C_3e^{-ax} + \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x}{3(a^2-1)} & \text{при } a^2 \neq 1, \\ -\dfrac{x+1}{2}e^x - \dfrac{3x+1}{36}e^{-x} & \text{при } a^2 = 1. \end{cases}$$

3.18. $y''' - 3ay'' + 3a^2y' - a^3y = e^{ax}$.

$$y = \left(\frac{x^3}{6} + C_1 + C_2x + C_3x^2\right)e^{ax}.$$

3.19. $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$; см. ч. I, п. 22.1.

3.20. $y''' - 6xy'' + 2(4x^2 + 2a - 1)\,y' - 8axy = 0$;
частный случай уравнения 3.26.

$$y = C_1u^2 + C_2uv + C_3v^2,$$

где u, v — фундаментальная система решений уравнения 2.46.

3.21. $y''' + 3axy'' + 3a^2x^2y' + a^3x^3y = 0$.

$$e^{\frac{1}{2}ax^2}\,y = \begin{cases} C_1 + C_2\,\mathrm{ch}\,x\sqrt{3a} + C_3\,\mathrm{sh}\,x\sqrt{3a} & \text{при } a > 0, \\ C_1 + C_2\cos x\sqrt{|3a|} + C_3\sin x\sqrt{|3a|} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

3.22. $y''' - y''\sin x - 2y'\cos x + y\sin x = \ln x$;
уравнение в полных дифференциалах.

Дважды интегрируя, получаем линейное уравнение первого порядка

$$y' - y\sin x = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + C_1 + C_2x.$$

3.23. $y''' + f(x)\,y'' + y' + f(x)\,y = 0.$
Полагая $u(x) = y'' + y$, получаем уравнение $u' + f(x)\,u = 0$. Отсюда

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\left(\sin x\int E\cos x\,dx - \cos x\int E\sin x\,dx\right),$$

где $E = \exp\left(-\int f\,dx\right)$.

3.24. $y''' + f(x)(x^2y'' - 2xy' + 2y) = 0$; частный случай уравнения 3.83.

$$y = C_1x + C_2x^2 + C_3\left(x\int x^{-2}u\,dx - x^2\int x^{-3}u\,dx\right),$$

где $u = \exp\left[-\int x^2 f(x)\,dx\right]$.

3.25. $y''' + fy'' + gy' + (fg + g')\,y = 0,\ f = f(x),\ g = g(x).$
Решениями являются решения уравнения второго порядка

$$Ey'' + gEy = C,$$

где $E = \exp\int f\,dx$ и C произвольно.

3.26. $y''' + 3fy'' + (f' + 2f^2 + 4g)\,y' + (4fg + 2g')\,y = 0,\ f = f(x),\ g = g(x).$

$$y = C_1u^2 + C_2uv + C_3v^2,$$

где $u(x)$, $v(x)$ — фундаментальная система решений уравнения

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = 0.$$

К дифференциальным уравнениям третьего порядка, сводимым таким же способом к уравнениям второго порядка, принадлежат, в частности, антисамосопряженные уравнения

$$[f(fy')']' + 2gy' + g'y = 0;$$

соответствующее уравнение второго порядка имеет вид

$$2f(fy')' + gy = 0.$$

О подробностях см. Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 84.

3.27. $4y''' - 8y'' - 11y' - 3y = -18e^x$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.2.

$$y = C_1e^{3x} + (C_2 + C_3x)e^{-x/2} + e^x.$$

3.28. $27y''' - 36n^2\wp(x)\,y' - 2n(n+3)(4n-3)\,\wp'(x)\,y = 0.$
Решение см. G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, стр. 553.

3.29. $xy''' + 3y'' + xy = 0.$
Полагая $u(x) = xy(x)$, получаем $u''' + u = 0$.

3.30. $xy''' + 3y'' - ax^2y = 0.$
Полагая $u(x) = xy(x)$, получаем $u''' = axu$. Об этом уравнении см. 5.3.

3.31. $xy''' + (a+b)\,y'' - xy' - ay = 0,\ a>0,\ b>0.$
Согласно ч. I, п. 22.4, получаем

$$y = \sum_{\nu=1}^{3} C_\nu \int_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} |t|^{a-1} |t^2-1|^{\frac{1}{2}b-1} e^{-tx}\,dt;$$

при этом $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_2 = +1$; кроме того, если $x>0$, то $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = +\infty$, а если $x<0$, то $\alpha_3 = -\infty$, $\beta_3 = -1$.

3.32. $xy''' - (x+2\nu)\,y'' - (x-2\nu-1)\,y' + (x-1)\,y = 0;$
частный случай уравнения 3.83.

$$y = C_1 e^x + x^{\nu+1}\,[C_2 J_{\nu+1}(ix) + C_3 Y_{\nu+1}(ix)],$$

где J_ν и Y_ν — функции Бесселя (см. 2.162).

3.33. $xy''' + (x^2-3)\,y'' + 4xy' + 2y = f(x).$
Это — уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя, получаем уравнение второго порядка, которое опять-таки является уравнением в полных дифференциалах и сводится к линейному уравнению

$$xy' + (x^2-5)\,y = \int dx \int f(x)\,dx.$$

3.34. $2xy''' + 3y'' + axy = b,\ a \neq 0.$
Согласно ч. I, п. 22.4, получаем

$$y = \sum_{\nu=1}^{4} C_\nu \int_{0}^{\alpha_\nu} \frac{e^{xz}}{\sqrt{2z^3+a}}\,dz;$$

здесь α_1, α_2, α_3 — корни уравнения $2\alpha^3 + a = 0$, $\alpha_4 = -\infty$ или $+\infty$ в зависимости от того, будет ли $x>0$ или $x<0$; кроме того,

$$\sqrt{a}\,(C_1 + \ldots + C_4) + b = 0;$$

интеграл берется вдоль прямой линии.

3.35. $2xy''' - 4\,(x+\nu-1)\,y'' + (2x+6\nu-5)\,y' + (1-2\nu)\,y = 0;$
частный случай уравнения 3.83.

$$y = C_1 e^x + x^\nu e^{x/2}\,[C_2 J_\nu(ix/2) + C_3 Y_\nu(ix/2)],$$

где J_ν, Y_ν — функции Бесселя (см. 2.162).
[См. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957). — *Прим. ред.*]

3.36. $2xy''' + 3\,(2ax+k)\,y'' + 6\,(bx+ak)\,y' + (2cx+3bk)\,y = 0,\ k>0.$
Согласно ч. I, п. 22.4, получаем

$$y = \sum_{\nu=0}^{4} C_\nu \int_{0}^{\alpha_\nu} e^{xz}\,[P(z)]^{\frac{1}{2}k-1}\,dz,$$

где $P(z) = z^3 + 3az^2 + 3bz + c$, а α_1, α_2, α_3 — корни этого многочлена, которые предполагаются различными, $\alpha_4 = \mp\infty$ при $x \gtrless 0$, $C_1 + \ldots + C_4 = 0$.

3.37. $(x-2)\,xy''' - (x-2)\,xy'' - 2y' + 2y = 0.$
Полагая $u(x) = y' - y$, получаем уравнение второго порядка

$$x\,(x-2)\,u'' - 2u = 0.$$

Среди решений этого уравнения имеется, согласно второй половине 2.303, квадратный многочлен, а именно, $u = x(x-2)$; отсюда, согласно ч. I, п. 24.2, находим второе решение

$$u = x(x-2)\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - 2(x-1).$$

Таким образом, получаем

$$y = C_1x^2 + C_2e^x + C_3e^x \int e^{-x}\left[x(x-2)\ln\left|\frac{x}{x-2}\right| - 2(x-1)\right]dx.$$

3.38. $(2x-1)y''' - 8xy' + 8y = 0.$

Очевидные решения: x и e^{2x}. Таким образом, согласно ч. I, п. 17.2, это уравнение может быть сведено к линейному уравнению первого порядка.

3.39. $(2x-1)y''' + (x+4)y'' + 2y' = 0$; уравнение в полных дифференциалах. Решения находим из уравнения первого порядка

$$(2x-1)y' + xy = C_1x + C_0.$$

3.40. $x^2y''' - 6y' + ax^2y = 0.$

Полагая $y(x) = x^2u(x)$, получаем уравнение 3.66 с искомой функцией u вместо y.

3.41. $x^2y''' + (x+1)y'' - y = 0.$

Существует решение вида $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$, причем этот ряд сходится для всех x; именно, выбираем a_0, a_1 так, чтобы a_0/a_1 было равно бесконечной непрерывной дроби (см. ч. I, п. 25.3)

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2^2} + \frac{1|}{|3^2} + \frac{1|}{|4^2} + \ldots,$$

и полагаем $a_{n+2} = a_n - n^2a_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

См. O. Perron, *Math. Ann.* **66** (1909), стр. 448.

3.42. $x^2y''' - xy'' + (x^2+1)y' = 0.$

$$y = C + xZ_1(x),$$

где Z_1 — цилиндрическая функция первого порядка.

3.43. $x^2y''' + 3xy'' + (4a^2x^{2a} + 1 - 4\nu^2a^2)y' + 4a^3x^{2a-1}y = 0$; частный случай уравнения 3.66.

$$y = C_1J_\nu^2(x^a) + C_2J_\nu(x^a)Y_\nu(x^a) + C_3Y_\nu^2(x^a).$$

3.44. $x^2y''' - 3(x-m)xy'' + [2x^2 + 4(n-m)x + m(2m-1)]y' -$

$$- 2n(2x - 2m + 1)y = 0;$$

частный случай уравнения 3.26.

$$y = C_1u^2 + C_2uv + C_3v^2,$$

где u, v — фундаментальная система решений уравнения 2.113(1).

См. G. Palamà, *Annali di Mat.* (4), **18** (1939), стр. 320.

3.45. $x^2y''' + 4xy'' + (x^2+2)y' + 3xy = f(x).$

Умножая на x, получаем уравнение в полных дифференциалах. Таким образом, приходим к уравнению

$$x^3y'' + x^2y' + x^3y = \int xf(x)\,dx + C.$$

3.46. $x^2y''' + 5xy'' + 4y' = \ln x$; уравнение в полных дифференциалах.

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3\,\frac{\ln x}{x} + \frac{x}{4}(\ln x - 2).$$

3.47. $x^2y''' + 6xy'' + 6y' = 0$.

$$y = C_1 + C_2x^{-1} + C_3x^{-2}.$$

3.48. $x^2y''' + 6xy'' + 6y' + ax^2y = 0$.
Полагая $u(x) = x^2y$, получаем $u''' + au = 0$. Таким образом, находим

$$x^2y = C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x} + C_3e^{\alpha_3 x},$$

где α_1, α_2, α_3 — корни уравнения $\alpha^3 + a = 0$.

3.49. $x^2y''' - 3(p+q)xy'' + 3p(3q+1)y' - x^2y = 0$,
p, q — натуральные числа.

$$y = \prod_{\mu=0}^{p-1}(\delta - 3\mu - 1)\prod_{\nu=0}^{q-1}(\delta - 3\nu - 2)\sum_{k=1}^{3}C_ke^{\omega_k x},$$

где $\delta = x\dfrac{d}{dx}$ и ω_ν — три корня уравнения $\omega^3 = 1$. См. J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, *Quarterly Journ. Oxford* **1** (1930), стр. 190. Обобщения см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 42.

3.50. $x^2y''' - 2(n+1)xy'' + (ax^2 + 6n)y' - 2axy = 0$.
Пусть n — натуральное число. Тогда это уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 18.6. Имеем

$$y = C_1 + C_2x^4 + C_3x^{2n+1} \quad \text{при} \quad a = 0;$$

$$y = C_1\left(ax^2 + 4n - 2\right) + C_2e^{x\sqrt{-a}}P(x) + C_3e^{-x\sqrt{-a}}Q(x)$$

при $a \neq 0$; здесь P и Q — многочлены степени не выше $2n+2$.

3.51. $x^2y''' - (x^2 - 2x)y'' - (x^2 + \nu^2 - {}^1/_4)y' + (x^2 - 2x + \nu^2 - {}^1/_4)y = 0$;
частный случай уравнения 3.83.

$$y = Ce^x + \sqrt{x}\,Z_\nu(ix),$$

где Z_ν — цилиндрическая функция.

3.52. $x^2y''' - (x+\nu)xy'' + \nu(2x+1)y' - \nu(x+1)y = 0$;
частный случай уравнения 3.83.

$$y = Ce^x + x^{(\nu+1)/2}Z_{\nu+1}\left(2\sqrt{\nu x}\right),$$

где $Z_{\nu+1}$ — цилиндрическая функция.

3.53. $x^2y''' - 2(x^2 - x)y'' + (x^2 - 2x + {}^1/_4 - \nu^2)y' + (\nu^2 - {}^1/_4)y = 0$;
частный случай уравнения 3.83.

$$y = C_1e^x + \sqrt{x}\,e^{x/2}Z_\nu(ix/2),$$

где Z_ν — цилиндрическая функция.

3.54. $x^2y''' - (x^4 - 6x)y'' - (2x^3 - 6)y' + 2x^2y = 0$.
Точка $x = 0$ слабо особая. Характеристическое уравнение (см. ч. I, п. 18.1): $r(r+1)(r+2) = 0$. Одно из решений $y = x^{-2}$. Таким образом, это уравнение может быть сведено к линейному уравнению второго порядка.

3.55. $(x^2+1)y''' + 8xy'' + 10y' = 3 - \dfrac{1}{x^2} + 2\ln x$;
уравнение в полных дифференциалах.

Интегрируя, снова получаем уравнение в полных дифференциалах. Таким образом, решения получаем из уравнения первого порядка

$$(x^2+1)\,y'+4xy=(x^2+1)\ln x+C_0+C_1x.$$

3.56. $(x^2+2)\,y'''-2xy''+(x^2+2)\,y'-2xy=0.$

$$y=C_1x^2+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

3.57. $2x\,(x-1)\,y'''+3\,(2x-1)\,y''+(2ax+b)\,y'+ay=0.$

Это — уравнение типа 3.26. Общее решение:

$$y=C_1y_1^2+C_2y_1y_2+C_3y_2^2,$$

где y_1, y_2 — два линейно независимых решения гипергеометрического уравнения

$$2x\,(x-1)\,y''+3\,(2x-1)\,y'+\left(\frac{a}{2}x+\frac{b}{4}-\frac{1}{2}\right)y=0.$$

3.58. $4x^2y'''+(x^2+14x-1)\,y''+4\,(x+1)\,y'+2y=0.$

Уравнение в полных дифференциалах.

$$4x^2y'+(x^2-2x-1)\,y=C_1+C_2x;$$

$$y=\sqrt{x}\,\exp\left(-\frac{x^2+1}{4x}\right)\left[C_0+\int\left(C_1'x^{-5/2}+C_2x^{-3/2}\right)\exp\frac{x^2+1}{4x}\,dx\right].$$

Точка $x=0$ сильно особая. Все же, согласно ч. I, п. 18.4 это уравнение должно иметь решение, регулярное в окрестности точки $x=0$. Одним из таких решений является

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu,$$

где

$$a_0=\operatorname{ch}\frac{1}{2},\quad a_1=-\operatorname{sh}\frac{1}{2},$$

$$a_\nu=\left(-\frac{1}{4}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1/2)}{4^{2k}k!\,\Gamma(\nu+k+1/2)}.$$

O. Perron, *Math. Ann.* 48 (1926), стр. 345—351.

3.59. $(ax+b)\,xy'''+(\alpha x+\beta)\,y''+xy'+y=f(x).$

Уравнение в полных дифференциалах. Поэтому его решения получаются из уравнения

$$(ax+b)\,xy''+[(\alpha-2a)\,x+\beta-b]\,y'+(x+2a-\alpha)\,y=\int f(x)\,dx+C.$$

3.60. $x^3y'''+(1-\nu^2)\,xy'+(ax^3+\nu^2-1)\,y=0.$ См. также 3.3.

Уравнение относится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 18.6. При $\nu=\pm1$ получается уравнение с постоянными коэффициентами, при $a=0$ — уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3). Если $a\neq0$ и ν — натуральное число $\neq1$, то

$$y=x^{1-\nu}\sum_{k=1}^{3}C_ke^{-\lambda_kx}P_k(x),$$

где $\lambda_k^3=a$ и P_k — некоторый определенный многочлен степени не выше $3(\nu-1)$. Если через y_ν обозначить решение данного уравнения при произвольном (в том числе и комплексном) ν, то имеем

$$y_{\nu+3}=ay_\nu+(2\nu+3)\,x^{-1}y_\nu''-(2\nu+3)(\nu+1)\left(x^{-2}y_\nu'-x^{-3}y_\nu\right);\qquad(1)$$

мы получаем все решения $y_{\nu+3}$, когда y_ν пробегает все решения. Так как функции $y_{\pm 1} = \exp(-\lambda x)$, соответствующие трем значениям λ, удовлетворяющим уравнению $\lambda^3 = a$, образуют фундаментальную систему решений, то с помощью (1) можно найти все y_n для всех тех значений n, которые не делятся на 3; например

$$y_2 = (x^{-1} + \lambda)\, e^{-\lambda x} \quad (\lambda^3 = a).$$

Решение в замкнутом виде см. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957), стр. 42.

3.61. $x^3 y''' + [4x^3 + (1 - 4\nu^2)\, x]\, y' + (4\nu^2 - 1)\, y = 0;$
частный случай уравнения 3.67.

$$y = C_1 x J_\nu^2(x) + C_2 x J_\nu(x)\, Y_\nu(x) + C_3 x Y_\nu^2(x).$$

3.62. $x^3 y''' + (ax^{2\nu} + 1 - \nu^2)\, xy' + [bx^{3\nu} + a(\nu - 1)\, x^{2\nu} + \nu^2 - 1]\, y = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = x^{\nu-1} y(x)$, $\nu\xi = x^\nu$, получаем уравнение с постоянными коэффициентами $\eta''' + a\eta' + b\eta = 0$.

См. A. Chiellini, *Rendiconti Cagliari* **9** (1939), стр. 142—155.

3.63. $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 6x^3(x - 1)\ln x - x^3(x + 8).$

Однородное уравнение принадлежит к типу, рассмотренному в ч. I, п. 22.3.

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + C_3 x \ln x + \frac{10x - 27}{90}\, x^3 \ln x - \frac{25x + 9}{225}\, x^3.$$

3.64. $x^3 y''' + 3x^2 y'' + (1 - a^2)\, xy' = 0;$
тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.3.

$$y = C_1 + C_2 x^a + C_3 x^{-a} \quad \text{при} \quad a^2 \neq 1.$$

3.65. $x^3 y''' - 4x^2 y'' + (x^2 + 8)\, xy' - 2(x^2 + 4)\, y = 0.$

Полагая $y = xu(x)$, $u'' + u = v(x)$, получаем уравнение $xv' = v$. Отсюда находим

$$y = C_1 x^2 + C_2 x \cos x + C_3 x \sin x.$$

3.66. $x^3 y''' + 6x^2 y'' + (ax^3 - 12)\, y = 0.$

Это уравнение получается, если уравнение 3.48 разделить на x^2, продифференцировать и затем y' обозначить снова через y. Отсюда находим решения исходного уравнения:

$$y = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x}\right)\right], \quad \text{где} \quad \alpha^3 + a = 0.$$

3.67. $x^3 y''' + 3(1 - a)\, x^2 y'' + [4b^2 c^2 x^{2c+1} + (1 - 4\nu^2 c^2 + 3a(a - 1))\, x]\, y' + [4b^2 c^2 (c - a)\, x^{2c} + a(4\nu^2 c^2 - a^2)]\, y = 0.$

$$y = C_1 x^a J_\nu^2(u) + C_2 x^a J_\nu(u)\, Y_\nu(u) + C_3 x^a Y_\nu^2(u),$$

где $u = bx^c$ и J_ν, Y_ν — функции Бесселя (см. 2.162). См. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Leipzig, 1904, стр. 147.

3.68. $x^3 y''' + (x + 3)\, x^2 y'' + 5(x - 6)\, xy' + (4x + 30)\, y = 0.$

Общее решение (J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957))

$$y = x^5 \frac{d^6}{dx^6}\left\{x^2 \frac{d^2}{dx^2}\left[x^{-5} e^{-x}\left(\int (C_1 + C_2 \ln x)\, x^4 e^x\, dx + C_3\right)\right]\right\}.$$

Два линейно независимых решения:

$$y_1 = x^{-6} - \frac{4^2 x^{-5}}{6(30-4\cdot 5)} + \frac{3^2\cdot 4^2 x^{-4}}{5\cdot 6(30-3\cdot 4)(30-4\cdot 5)} - \frac{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2 x^{-3}}{4\cdot 5\cdot 6(30-2\cdot 3)(30-3\cdot 4)(30-4\cdot 5)} + \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 4^2 x^{-2}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(30-1\cdot 2)(30-2\cdot 3)(30-3\cdot 4)(30-4\cdot 5)},$$

$$y_2 = x^5 - \sum_{n=6}^{\infty}(-1)^n \frac{7^2\cdot 8^2\ldots(n+1)^2 x^n}{5\cdot 6\ldots(n-1)(6\cdot 7-30)(7\cdot 8-30)\ldots(n(n+1)-30)}.$$

3.69. $x^3y''' + x^2y''\ln x + 2xy' - y = 2x^3.$

Деля на x^2 и дважды интегрируя, получаем линейное уравнение

$$xy' + (\ln x - 2)\,y = \frac{x^3}{3} + C_1 + C_2x.$$

3.70. $(x^2+1)\,xy''' + 3(2x^2+1)\,y'' - 12y = 0.$

Умножая на x, получаем уравнение в полных дифференциалах; интегрируя его, снова получаем уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$y = C_1(2x^2+1) + C_2xu + C_3\left(2x + \frac{2}{3x} - xu\ln\frac{u+1}{u-1}\right),$$

где $u = \sqrt{x^2+1}$.

3.71. $(x+3)\,x^2y''' - 3(x+2)\,xy'' + 6(x+1)\,y' - 6y = 0.$

$$y = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3(x+1).$$

3.72. $2(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\,y''' + [9x^2 - 6(a_1+a_2+a_3)\,x + 3(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)]\,y'' - 2[(n^2+n-3)\,x + b]\,y' - n(n+1)\,y = 0$; см. 2.408 (6)

3.73. $(x+1)\,x^3y''' - (4x+2)\,x^2y'' + (10x+4)\,xy' - 4(3x+1)\,y = 0.$

$$y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x + C_3(x + x^3 + x^2\ln^2 x).$$

3.74. $4x^4y''' - 4x^3y'' + 4x^2y' = 1.$

Однородное уравнение после деления на x приводится к типу, рассмотренному в ч. I, п. 22.3.

$$y = C_1 + C_2x^2 + C_3x^2\ln x - \frac{1}{36x}.$$

3.75. $(x^2+1)\,x^3y''' - (4x^2+2)\,x^2y'' + (10x^2+4)\,xy' - 4(3x^2+1)\,y = 0.$

$$y = C_1x^2 + C_2(x^3+x) + C_3x^2\ln|x|.$$

3.76. $x^6y''' + x^2y'' - 2y = 0.$

Одно из решений: $y = x^2$. Точка $x=0$ сильно особая, $x=\infty$ слабо особая. Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = x^{-1}$, получаем уравнение 3.54 с переменными ξ, η вместо x, y.

3.77. $x^6y''' + 6x^5y'' + ay = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^{-1}$, получаем уравнение 3.40 с переменными ξ, η вместо x, y.

3.78. $x^2(x^4+2x^2+2x+1)y'''-(2x^6+3x^4-6x^2-6x-1)y''+$
$$+(x^6-6x^3-15x^2-12x-2)y'+(x^4+4x^3+8x^2+6x+1)y=0.$$
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{1/x}.$$

3.79. $(x-a)^3(x-b)^3y'''-cy=0,\ a\neq b.$

Полагая $y(x)=(x-b)^2\eta(\xi)$, $\xi=\ln\dfrac{x-a}{x-b}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами
$$(a-b)^3(\eta'''-3\eta''+2\eta')-c\eta=0.$$

3.80. $y'''\sin x+(2\cos x+1)y''-y'\sin x=\cos x$;
уравнение в полных дифференциалах.
Решения получаются из линейного уравнения первого порядка
$$y'\sin x+y=C_0+C_1x-\cos x.$$

3.81. $(\sin x+x)y'''+3(\cos x+1)y''-3y'\sin x-y\cos x=-\sin x$;
уравнение в полных дифференциалах
Полагая $u(x)=(\sin x+x)y$, получаем $u'''=-\sin x$; отсюда находим
$$(\sin x+x)y=-\cos x+C_0+C_1x+C_2x^2.$$

3.82. $y'''\sin^2x+3y''\sin x\cos x+[\cos 2x+4\nu(\nu+1)\sin^2x]y'+2\nu(\nu+1)y\sin 2x=0.$
$$y=C_1u^2+C_2uv+C_3v^2,$$
где u, v — фундаментальная система решений уравнения Лежандра, причем аргумент x в u и v заменен через $\cos x$.

3.83. $\dfrac{d}{dx}L(y)+A(x)L(y)=0,\qquad L(y)\equiv f(x)y''+g(x)y'+h(x)y,$ где $f\neq 0$, g, h непрерывно дифференцируемы.

Этому уравнению удовлетворяют, очевидно, решения уравнения $L(y)=0$. Можно выбрать $A(x)$ так, чтобы это уравнение имело, кроме того, своим решением заданную функцию $\varphi(x)$.

(а) Если
$$L\equiv x^2y''+(1-2a)xy'+(a^2-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c})y,$$
то решения уравнения $L(y)=0$ известны из 2.162 (1). Если положить
$$A=-\frac{(x-a+1)^2+x-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c-1}(2c+x)}{(x-a)^2+x-\nu^2c^2+b^2c^2x^{2c}},$$
то соответствующее уравнение имеет общее решение
$$y=C_1e^x+x^a[C_2J_\nu(bx^c)+C_3Y_\nu(bx^c)],$$
где J_ν, Y_ν — функции Бесселя (см. 2.162).

(б) Если
$$L\equiv x^2y''-[(2a-1)x+2bcx^{c+1}]y'+[(a^2-\nu^2c^2)+(2a-c)bcx^c+$$
$$+(b^2+d^2)c^2x^{2c}]y,$$
то решения уравнения $L(y)\equiv 0$ известны из 2.162 (17). Если $A(x)$ выбрано так, что
$$-A[(x-a)^2-\nu^2c^2+x+(2a-c)bcx^c-2bcx^{c+1}+(b^2+d^2)c^2x^{2c}]=$$
$$=(x-a+1)^2-\nu^2c^2+x+(2a-c)bc^2x^{c-1}+(2a-3c-2)bcx^c-$$
$$-2bcx^{c+1}+2c^3(b^2+d^2)x^{2c-1}+c^2(b^2+d^2)x^{2c},$$
то соответствующее уравнение имеет общее решение вида
$$y=C_1e^x+x^a\exp(bx^c)[C_2J_\nu(dx^c)+C_3Y_\nu(dx^c)].$$

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Уравнения с показательными функциями: 4,40
Уравнения с гиперболическими функциями: 5,9.
Уравнения с тригонометрическими функциями: 12, 15, 41, 42.
Уравнения с эллиптическими функциями: 10.
Уравнения с произвольными функциями: 2, 11, 14, 43, 44.

4.1. $y^{(4)}=0$.

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

Используя введенные в 4.44 обозначения для фундаментального решения, краевых условий и функций Грина, имеем

$$g_2(x,\ \xi)=\frac{|x-\xi|^3}{12}$$

и при $a=0,\ b=1$

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\mathrm{I,I}}&=x^2\xi^2(3x+3\xi-2x\xi-6)+x^2(3\xi-x),\\
12\Gamma^{\mathrm{I,II}}&=-x^3\xi^3+3x^2\xi^2(x+\xi)-9x^2\xi^2+2x^2(3\xi-x),\\
6\Gamma^{\mathrm{I,III}}&=-x^3+3x^2\xi,\\
6\Gamma^{\mathrm{II,II}}&=x\xi(x^2+\xi^2+2)-x^3-3x\xi^2.
\end{aligned}$$

Написанные выше формулы дают $\Gamma(x,\ \xi)$ при $x\leqslant\xi$; поменяв справа x и ξ местами, получим $\Gamma(x,\ \xi)$ при $x\geqslant\xi$. $\Gamma^{\mathrm{II,III}}$ и $\Gamma^{\mathrm{III,III}}$ не существуют, так как соответствующая краевая задача имеет нетривиальные решения, а именно C_1+C_2x. В качестве обобщенных функций Грина, нормированных так, чтобы они были ортогональны к этим решениям, получаем

$$\tilde{\Gamma}^{\mathrm{II,III}}=\frac{|x-\xi|^3}{12}-\frac{x^3+\xi^3}{12}+x\xi\left(\frac{33}{144}-\frac{x+\xi}{4}+\frac{x^2+\xi^2}{4}-\frac{x^4+\xi^4}{40}\right),$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mathrm{III,III}}=\frac{|x-\xi|^3}{12}+\frac{x^5+\xi^5}{20}-(x^4+\xi^4)\left(\frac{x\xi}{10}+\frac{1}{6}\right)+$$
$$+(x^3+\xi^3)\left(\frac{x\xi}{4}+\frac{1}{12}\right)-(x+\xi)\left(\frac{x\xi}{4}+\frac{11}{210}\right)+\frac{13}{35}x\xi+\frac{1}{105}.$$

4.2. $y^{(4)}+4y=f(x)$ с краевыми условиями

$$\left.\begin{matrix} y=0, & y'=0\\ y=0, & y''=0\\ y''=0, & y'''=0\end{matrix}\right\}\ \text{при } x=0, \text{ соответственно при } x=l.$$

Решение можно искать в виде

$$y = C_1 y_1(x) + \ldots + C_4 y_4(x) + \int_0^x y_4(x-\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$y_1 = \operatorname{ch} x \cos x, \qquad y_2 = {}^1/_2 (\operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x),$$
$$y_3 = {}^1/_2 \operatorname{sh} x \sin x, \qquad y_4 = {}^1/_4 (\operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x).$$

Коэффициенты C_ν следует подобрать так, чтобы y удовлетворяло краевым условиям.

M. Kourensky, *Tôhoku Math. Journ.* **39** (1934), стр. 192—199.

4.3. $y^{(4)} + \lambda y = 0$.

(а) Фундаментальные системы решений:

при $\lambda = 0$: $1,\ x,\ x^2,\ x^3$;

при $\lambda = 4k^4 > 0$: $\operatorname{ch} kx \cos kx$, $\operatorname{ch} kx \sin kx$, $\operatorname{sh} kx \cos kx$, $\operatorname{sh} kx \sin kx$;

при $\lambda = -k^4 < 0$: $\operatorname{ch} kx$, $\operatorname{sh} kx$, $\cos kx$, $\sin kx$.

(б) Задачи о собственных значениях, в которых краевые условия имеют вид

$$y^{(p)}(a) = y^{(q)}(a) = y^{(r)}(b) = y^{(s)}(b) = 0.$$

В нижеследующей таблице эти краевые условия обозначаются символом $(p, q; r, s)$. Далее, для краткости полагаем: $K = k(b-a)$,

$$\alpha = \cos K \operatorname{ch} K, \quad \beta = \sin K \operatorname{sh} K, \quad \gamma = \cos K \operatorname{sh} K, \quad \delta = \sin K \operatorname{ch} K,$$
$$u_1(x, k) = \operatorname{ch} k(x-a) + \cos k(x-a),$$
$$u_2(x, k) = \operatorname{ch} k(x-a) - \cos k(x-a),$$
$$u_3(x, k) = \operatorname{sh} k(x-a) + \sin k(x-a),$$
$$u_4(x, k) = \operatorname{sh} k(x-a) - \sin k(x-a).$$

Собственными значениями являются числа $\lambda = -k^4$, где k определяется уравнениями, стоящими во втором столбце приведенной ниже таблицы. За исключением случая (2,3; 2,3) собственные значения — простые. Звездочка в начале строки указывает, что соответствующая задача самосопряженна.

Остальные задачи о собственных значениях вида $(p, q; r, s)$ могут быть подстановкой $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = -x$ сведены к задачам, указанным в таблице. Для задач о собственных значениях, связанных с проблемой колебаний стержня, находят, наряду с собственными значениями, функции Грина и таким образом получают разрешающие ядра соответствующих интегральных уравнений.

(в) Периодическим краевым условиям

$$y^{(\nu)}(a) = y^{(\nu)}(b) \qquad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

соответствуют собственные значения $\lambda_n = -[2n\pi/(b-a)]^4$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; кроме λ_0, все λ_n двукратны. Значениям λ_n $(n > 0)$ отвечают собственные функции

$$C_1 \cos \frac{2n\pi}{b-a} x + C_2 \sin \frac{2n\pi}{b-a}.$$

Значению $\lambda_0 = 0$ отвечает собственная функция $y = \mathrm{const} \neq 0$.

Краевые условия	Собственные значения	Собственные функции
* (0,1; 0,1) [1]	$\alpha = 1,\ k \neq 0$	
* (0,1; 0,2) [2]	$\gamma = \delta$	$u_2(b, k)\, u_4(x, k) - u_4(b, k)\, u_2(x, k)$
(0,1; 0,3)	$K = n\pi$	
(0,1; 1,2)	$(n = 1, 2, \ldots)$	$u_1(b, k)\, u_4(x, k) - u_3(b, k)\, u_2(x, k)$
* (0,1; 1,3)	$\gamma + \delta = 0$	$\cos K u_2(x, k) + \sin K u_4(x, k)$
* (0,1; 2,3) [3]	$\alpha + 1 = 0$	$u_1(b, k)\, u_4(x, k) - u_3(b, k)\, u_2(x, k)$
* (0,2; 0,2) [4]	$K = n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\sin k(x - a)$
(0,2; 0,3)	$\gamma + \delta = 0$	$\cos K \operatorname{sh} k(x - a) + \operatorname{ch} K \sin k(x - a)$
(0,2; 1,2)	$\gamma + \delta = 0$	$\sin K \operatorname{sh} k(x - a) + \operatorname{sh} K \sin k(x - a)$
* (0,2; 1,3)	$K = \dfrac{2n - 1}{2}\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$	$\sin k(x - a)$
* (0,2; 2,3) [5]	$\gamma = \delta$	$\sin K \operatorname{sh} k(x - a) + \operatorname{sh} K \sin k(x - a)$
(0,3; 0,3)	$\alpha = 1$	$u_3(b, k)\, u_2(x, k) - u_2(b, k)\, u_3(x, k)$
(0,3; 1,2)	$\alpha + 1 = 0$	$u_4(b, k)\, u_2(x, k) - u_1(b, k)\, u_3(x, k)$
(0,3; 1,3)	$\gamma = \delta$	$(x - a)(x + a - 2b)$ при $k = 0$, кроме того: $\cos K u_2(x, k) - \sin K u_3(x, k)$
(0,3; 2,3)	$K = n\pi$ $(n = 0, 1, \ldots)$	$x - a$ при $k = 0$, кроме того: $u_2(b, k)\, u_2(x, k) - u_3(b, k)\, u_3(x, k)$
(1,2; 1,2)	$\alpha = 1$	1 при $k = 0$, кроме того: $u_3(b, k)\, u_1(x, k) - u_2(b, k)\, u_4(x, k)$
(1,2; 1,3)	$\gamma = \delta$	1 при $k = 0$, кроме того: $\cos K u_1(x, k) - \sin K u_4(x, k)$
(1,2; 2,3)	$K = n\pi$ $(n = 0, 1, \ldots)$	1 при $k = 0$, кроме того: $u_1(b, k)\, u_1(x, k) - u_4(b, k)\, u_4(x, k)$
* (1,3; 1,3)	$K = n\pi$ $(n = 0, 1, \ldots)$	$\cos k(x - a)$
* (1,3; 2,3)	$\gamma + \delta = 0$	1 при $k = 0$, кроме того: $\cos K \operatorname{ch} k(x - a) + \operatorname{ch} K \cos k(x - a)$
(2,3; 2,3) [6]	$\alpha = 1$	$C_1 + C_2 x$ при $k = 0$, кроме того: $u_4(b, k)\, u_1(x, k) - u_2(b, k)\, u_3(x, k)$

[1] При поперечных колебаниях стержня эти краевые условия выполнены в случае стержня, жестко закрепленного в обоих концах.

[2] Левый конец стержня закреплен жестко, правый шарнирно.

[3] Левый конец стержня жестко закреплен, правый свободен.

[4] Оба конца стержня закреплены шарнирно.

[5] Левый конец стержня закреплен шарнирно, правый свободен.

[6] Оба конца стержня свободны.

4.4. $y^{(4)}-12y''+12y=16x^4\exp x^2$.

Соответствующее однородное уравнение легко разрешимо. Подстановка $u(x)=e^{-x^2}y$ переводит данное неоднородное уравнение в уравнение

$$u^{(4)}+8xu'''+24x^2u''+32x^3u'+16x^4u=16x^4,$$

одно из решений которого есть $u=1$. Таким путем получаем

$$y=e^{x^2}+C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3e^{\beta x}+C_4e^{-\beta x},$$

где $\alpha^2=6+2\sqrt{6}$, $\beta^2=6-2\sqrt{6}$.

4.5. $y^{(4)}+2a^2y''+a^4y=\operatorname{ch} ax$;

тип, рассмотреный в ч. I, п. 22.2; см. также 4.6 при $\lambda=1$.

$$y=(C_1+C_2x)\sin ax+(C_3+C_4x)\cos ax+\frac{1}{4a^4}\operatorname{ch} ax.$$

4.6. $y^{(4)}+(\lambda+1)a^2y''+\lambda a^4y=0$, $a>0$, с краевыми условиями

$$y(0)=y'(0)=y(2\pi/a)=y'(2\pi/a)=0.$$

Собственные значения: $\lambda=0$ (простое) и $\lambda=n^2$ при $n=1, 2, \ldots$ (двукратные); собственные функции:

$$\cos ax-1 \quad \text{и} \quad C_1(\cos nax-n\cos ax)+C_2(\sin nax-n\sin ax).$$

G. Gimmino, *Math. Zeitschrift* 32 (1930), стр. 30.

4.7. $y^{(4)}+a(bx-1)y''+aby'+\lambda y=0$.

Об этом уравнении с определенными однородными краевыми условиями см. W. Meyer zur Capellen, *Annalen Phys.* 407 (1932), стр. 1—27.

4.7a. $y^{(4)}-2a^2y''+a^4y-\lambda(ax-b)\left(y''-a^2y\right)=0$;

уравнение теории турбулентности.

Полагая

$$z(x)=y''-a^2y, \tag{1}$$

получаем

$$z''-a^2z+\lambda(ax-b)z=0. \tag{2}$$

Если даны краевые условия

$$y(0)=y'(0)=0, \quad y(1)=y'(1)=0, \tag{3}$$

то

$$2ay=e^{ax}\int_0^x e^{-ax}z\,dx-e^{-ax}\int_0^x e^{ax}z\,dx$$

— решение уравнения (1), удовлетворяющее двум первым из краевых условий (3). Для того, чтобы удовлетворить и двум последним краевым условиям, за $z(x)$ следует принять такое решение уравнения (2), что $\int_0^1 e^{-ax}z\,dx=\int_0^1 e^{ax}z\,dx=0$. Можно применить также метод ч. II, § 4.

4.8. $y^{(4)}+\left(ax^2+b\lambda+c\right)y''+\left(\alpha x^2+\beta\lambda+\gamma\right)y=0$.

Приближенное решение задачи о собственных значениях:

$$y^{(4)}-2\varkappa^2y''+\varkappa^4y+iq\left(1-\lambda\varkappa^{-1}+x^2\right)\left(y''-\varkappa y\right)+2iqy=0,$$
$$y(-1)=y'(-1)=y(1)=y'(1)=0,$$

см. в работе S. Goldstein, *Proceedings Cambridge* 32 (1936), стр. 40—66.

Краевую задачу

$$y^{(4)}-\alpha^2y''-[\alpha^2+\lambda(\beta+x(1-x))](y''-\alpha^2y)=2\lambda y,$$
$$y(0)=y'(0)=y(1)=y'(1)=0$$

изучал A. Davidoglu, *C. R. Roumanie* 1 (1936), стр. 3—7.

4.9. $y^{(4)}+a\wp(x)y''+b\wp'(x)y'+[c\wp''(x)+d]y=0.$

Отдельные частные случаи см. G. H. Halphan, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, Paris, 1886—1891, т. II, стр. 558; *Mémoires par divers Savants* (2), 28 (1884), № 1, стр. 269—291.

4.10. $y^{(4)}-(12k^2\operatorname{sn}^2x+a)y''+by'+(\alpha\operatorname{sn}^2x+\beta)y=0.$

См. A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1900—1902, т. III, стр. 463.

4.11. $y^{(4)}+10fy''+10f'y'+3(f''+3f^2)y=0,\quad f=f(x).$

$$y=C_1u^3+C_2u^2v+C_3uv^2+C_4v^3,$$

где u, v — фундаментальная система решений уравнения $u''+f(x)u=0$.

4.12. $y^{(4)}+2y'''-3y''-4y'+4y=32\sin 2x-24\cos 2x;$

тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.2.

$$y=(C_1+C_2x)e^x+(C_3+C_4x)e^{-2x}+\sin 2x.$$

4.13. $y^{(4)}+4axy'''+6a^2x^2y''+4a^3x^3y'+a^4x^4y=0.$

$$y=\sum_{n=1}^{4}C_ne^{-\frac{1}{2}ax^2+s_nx},$$

где s_n — корни уравнения $s^4-6as^2+3a^2=0$. В случае, когда эти корни мнимые, следует перейти к тригонометрическим функциям.

4.14. $y^{(4)}+6fy'''+(4f'+11f^2+10g)y''+$

$$+(f''+7ff'+6f^3+30fg+10g')y'+3(2f'g+5fg'+6f^2g+g''+3g^2)y=0,$$
$$f=f(x),\quad g=g(x).$$

$$y=C_1u^3+C_2u^2v+C_3uv^2+C_4v^3,$$

где u, v — фундаментальная система решений уравнения

$$u''+f(x)u'+g(x)u=0.$$

4.15. $4y^{(4)}-12y'''+11y''-3y'=4\cos x;$

тип, рассмотренный в ч. I, п. 22.2.

$$y=C_1+C_2e^{x/2}+C_3e^x+C_4e^{3x/2}+\frac{18\sin x-14\cos x}{65}.$$

4.16. $xy^{(4)}+5y'''=24.$

$$y=\frac{4}{5}x^3+C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{C_4}{x^2}.$$

4.17. $xy^{(4)}-(6x^2+1)y'''+12x^3y''-(9x^2-7)x^2y'+2(x^2-3)x^3y=0.$

$\exp(x^2)$ и $\exp(x^2/2)$ являются решениями. Таким образом, это уравнение, согласно ч. I, п. 17.2, может быть сведено к уравнению второго порядка.

4.18. $x^2y^{(4)}-2(\nu^2x^2+6)y''+\nu^2(\nu^2x^2+4)y=0.$

Решением является

$$y=x^{-1/2}Z_{1/2}(i\nu x),$$

где Z_ν — цилиндрические функции (см. 2.162).

4.19. $x^2y^{(4)}+2xy'''+ay=bx^2.$

Общее решение:

$$y=\frac{b}{a}x^2+\sqrt{x}\sum_{\nu=1}^{4}C_\nu Z_1(2a_\nu\sqrt{x}),$$

где Z_1 — цилиндрическая функция, а a_ν, $\nu=1, 2, 3, 4$ — корни уравнения $u^4=-a$.

4.20. $x^2y^{(4)}+4xy'''+2y''=0.$

Уравнение можно переписать в виде $(x^2y'')''=0$, откуда

$$y=C_1+C_2x+C_3\ln|x|+C_4x\ln|x|.$$

Фундаментальное решение: $g(x, \xi)=-|x-\xi|+\dfrac{1}{2}(x+\xi)\ln\left|\dfrac{x}{\xi}\right|$. Краевой задаче с условиями «$y(1)=y'(1)=0$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x, \xi)=1-x\xi+\begin{cases} x-\xi+(x+\xi)\ln\xi & \text{при} \quad x\leqslant\xi,\\ \xi-x+(x+\xi)\ln x & \text{при} \quad x\geqslant\xi.\end{cases}$$

4.21. $x^2y^{(4)}+6xy'''+6y''=0$; см. 4.27.

4.22. $x^2y^{(4)}+6xy'''+6y''-\lambda^2y=0$;

уравнение поперечных колебаний остроконечного стержня; частный случай уравнения 4.25.

Уравнение можно переписать также в виде $x^{-1}(x^3y'')''-\lambda^2y=0$.

$$y=\frac{d}{dx}\left[C_1J_0(2\sqrt{\lambda x})+C_2Y_0(2\sqrt{\lambda x})+C_3J_0(2i\sqrt{\lambda x})+C_4Y_0(2i\sqrt{\lambda x})\right]=$$
$$=x^{-1/2}\left[C_1J_1(2\sqrt{\lambda x})+C_2Y_1(2\sqrt{\lambda x})+C_3J_1(2i\sqrt{\lambda x})+C_4Y_1(2i\sqrt{\lambda x})\right].$$

В случае краевых условий «$y(1)=y'(1)=0$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$» собственными значениями являются корни уравнения

$$\frac{d}{d\lambda}\left[J_0(2\sqrt{\lambda})\,J_0(2i\sqrt{\lambda})\right]=0,$$

а собственными функциями, соответствующими этим λ, — функции

$$J_0(2i\sqrt{\lambda})\frac{d}{dx}J_0(2\sqrt{\lambda x})+J_0(2\sqrt{\lambda})\frac{d}{dx}J_0(2i\sqrt{\lambda x}).$$

4.23. $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''=0$; см. 4.34.

4.24. $x^2y^{(4)}+8xy'''+12y''-\lambda^2y=0$; частный случай уравнения 4.25.

$$xy=C_1J_2(u)+C_2Y_2(u)+C_3J_2(iu)+C_4Y_2(iu),$$

где $u=2\sqrt{\lambda x}$ В случае краевых условий «$y(1)=y'(1)=0$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$» собственными значениями являются корни уравнения

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{d}{d\lambda}J_0(2\sqrt{\lambda})\cdot\frac{d}{d\lambda}J_0(2i\sqrt{\lambda})\right]=0,$$

а собственными функциями, соответствующими этим λ, — функции

$$\frac{d}{d\lambda} J_0\left(2i\sqrt{\lambda}\right) \frac{d^2}{dx^2} J_0\left(2\sqrt{\lambda x}\right) + \frac{d}{d\lambda} J_0\left(2\sqrt{\lambda}\right) \frac{d^2}{dx^2} J_0\left(2i\sqrt{\lambda x}\right).$$

Краевые условия «$y''(a) = y'''(a) = y(b) = y'(b) = 0$» рассмотрел N. Mononobe, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **1** (1921), стр. 444—451.

4.25. $x^2y^{(4)} + (2n - 2\nu + 4)\, xy''' + (n - \nu + 1)(n - \nu + 2)\, y'' - \frac{b^4}{16}\, y = 0$; частный случай уравнения 4.37.

$$y = x^c\left[C_1 J_\mu(u) + C_2 Y_\mu(u) + C_3 J_\mu(iu) + C_4 Y_\mu(iu)\right],$$

где $2c = \nu - n$, $\mu = n - \nu$, $u = b\sqrt{x}$. Если решение, соответствующее $n = 0$, обозначить через y_ν, то для целых и положительных значений n имеем также $y = y_\nu^{(n)}$.

4.26. $x^3y^{(4)} + 2x^2y''' - xy'' + y' - a^4x^3y = 0$; частный случай уравнения 4.37.

$$y = C_1 J_0(ax) + C_2 Y_0(ax) + C_3 J_0(aix) + C_4 Y_0(aix).$$

4.27. $x^3y^{(4)} + 6x^2y''' + 6xy'' = 0$, т. е. $\left(x^3y''\right)'' = 0$.

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^{-1} + C_4 \ln|x|.$$

Фундаментальное решение: $g(x, \xi) = \frac{|x^2 - \xi^2|}{4x\xi} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{\xi}\right|$.

Для краевой задачи с условиями «$y(1) = y'(1) = 0$, $y(x)$ ограничена при $x \to 0$» функция Грина равна

$$\Gamma(x, \xi) = -1 + (x + \xi) - \frac{x\xi}{2} - \begin{cases} \left(\frac{x}{2\xi} + \ln\xi\right) & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \\ \left(\frac{\xi}{2x} + \ln x\right) & \text{при} \quad x \geqslant \xi. \end{cases}$$

4.28. $x^4y^{(4)} - 2n(n+1)\, x^2y'' + 4n(n+1)\, xy' + \left[ax^4 + n(n+1)(n+3)(n-2)\right] y = 0$,

n — натуральное число; частный случай уравнения, рассмотренного в ч. I, п. 18.6.

Решение:

$$y = x^{-n}\sum_{\nu=1}^{4} C_\nu e^{\lambda_\nu x} P_\nu(x) \qquad \text{при } a \neq 0;$$

здесь λ_ν — четыре различных между собой корня уравнения $\lambda^4 + a = 0$, а P_ν — некоторый определенный многочлен степени не выше $4n$. При $a = 0$ получаем уравнение Эйлера (ч. I, п. 22.3).

4.29. $x^4y^{(4)} + 4x^3y''' - \left(4n^2 - 1\right) x^2y'' + \left(4n^2 - 1\right) xy' - 4x^4y = 0$.

Частное решение:

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n+4\nu}}{\nu!\,(n+\nu)!\,(n+2\nu)!}.$$

J. C. Costello, Philos. Magazine (7), **21** (1936), стр. 308—318.

4.30. $x^4y^{(4)}+4x^3y'''-(4n^2-1)x^2y''-(4n^2-1)xy'+(4n^2-1-4x^4)y=0.$
Частное решение (см. 4.29):

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n+4\nu+1}}{\nu!\,(n+\nu)!\,(n+2\nu+1)!}.$$

4.31. $x^4y^{(4)}+4x^3y'''-(4n^2+3)x^2y''+(12n^2-3)xy'-(12n^2-3+4x^4)y=0.$
Частное решение (см. 4.29):

$$y=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n+4\nu-1}}{\nu!\,(n+\nu)!\,(n+2\nu-1)!}.$$

4.32. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+\left[4x^4+(7-\rho^2-\sigma^2)x^2\right]y''+$
$$+\left[16x^3+(1-\rho^2-\sigma^2)x\right]y'+(8x^2+\rho^2\sigma^2)y=0.$$
Решения получаются из 4.33 при $2\mu=\rho+\sigma$, $2\nu=\rho-\sigma$.

4.33. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+\left[4x^4+(7-2\mu^2-2\nu^2)x^2\right]y''+$
$$+\left[16x^3+(1-2\mu^2-2\nu^2)x\right]y'+\left[8x^2+(\mu^2-\nu^2)^2\right]y=0.$$
$$y=C_1J_\mu(x)J_\nu(x)+C_2J_\mu(x)Y_\nu(x)+C_3Y_\mu(x)J_\nu(x)+C_4Y_\mu(x)Y_\nu(x),$$
если $\mu^2\neq\nu^2$; здесь J, Y обозначают функции Бесселя (см. 2.162). Более общий случай см. 4.36.

4.34. $x^4y^{(4)}+8x^3y'''+12x^2y''=0.$
Уравнение можно переписать в виде $(x^4y'')''=0$, откуда
$$y=C_1+C_2x+C_3x^{-1}+C_4x^{-2}.$$

Фундаментальное решение: $g(x,\xi)=-\dfrac{|x-\xi|}{4x\xi}+\dfrac{|x^3-\xi^3|}{12x^2\xi^2}.$

Краевой задаче с условиями «$y(1)=y'(1)=0$, $y(x)$ ограничена при $x\to 0$» соответствует функция Грина

$$\Gamma(x,\xi)=-1+\frac{x+\xi}{2}-\frac{x\xi}{3}+\begin{cases}\dfrac{1}{2\xi}-\dfrac{x}{6\xi^2} & \text{при } x\leqslant\xi,\\[2mm] \dfrac{1}{2x}-\dfrac{\xi}{6x^2} & \text{при } x\geqslant\xi.\end{cases}$$

4.35. $x^4y^{(4)}+8x^3y'''+12x^2y''+ay=0$; уравнение Эйлера.

При $a<1$: $y=x^{-1/2}(C_1x^{m_1}+\ldots+C_4x^{m_4})$, где $m_\nu^2=\dfrac{5}{4}\pm\sqrt{1-a}$;

при $a=1$: $y=x^{-\frac{1}{2}+m_1}(C_1+C_2\ln x)+x^{-\frac{1}{2}+m_2}(C_3+C_4\ln x)$,

где $m_{1,2}=\pm{}^1/_2\sqrt{5}$;

при $a>1$: $y=x^{-1/2}\left[(C_1x^\alpha+C_2x^{-\alpha})\cos(\beta\ln x)+\right.$
$$\left.+(C_3x^\alpha+C_4x^{-\alpha})\sin(\beta\ln x)\right],$$
где $\alpha=\sqrt{r}\cos(\varepsilon/2)$, $\beta=\sqrt{r}\sin(\varepsilon/2)$, причем r и ε определяются из условий $r^2=a+\dfrac{9}{16}$, $\sqrt{a-1}=r\sin\varepsilon$, $5=4r\cos\varepsilon$.

Исходное уравнение можно переписать также в виде $(x^4y'')''+ay=0$. Если рассмотреть неоднородное уравнение с правой частью

$$(x^4y'')''+ay=Ax^2+Bx+C,$$

то его частное решение:

$$y=\frac{A}{a+24}x^2+\frac{B}{a}x+\frac{C}{a}.$$

4.36. $x^4y^{(4)}+(6-4a)x^3y'''+\left(4b^2c^2x^{2c}+A\right)x^2y''+$
$+[4Bb^2c^2x^{2c}+(2a-1)C]xy'+(4Db^2c^2x^{2c}+E)y=0,$

где

$$A=6(a-1)^2-2c^2(\mu^2+\nu^2)+1,\quad B=3c-2a+1,$$
$$C=2c^2(\mu^2+\nu^2)-2a(a-1)-1,\quad D=(a-c)(a-2c),$$
$$E=(\mu c+\nu c+a)(\mu c+\nu c-a)(\mu c-\nu c+a)(\mu c-\nu c-a).$$

Общее решение:

$$y=x^a[C_1J_\mu(u)J_\nu(u)+C_2J_\mu(u)Y_\nu(u)+C_3Y_\mu(u)J_\mu(u)+C_4Y_\mu(u)Y_\nu(u)],$$

где $u=bx^c$, причем предполагается, что $\mu^2\neq\nu^2$. Подстановка $y=x^az(u)$ сводит это уравнение к уравнению 4.33.

4.37. $x^4y^{(4)}+A_3x^3y'''+A_2x^2y''+A_1xy'+A_0y=0,$

где

$$A_3=6-4a-4c,$$
$$A_2=2(a^2-\nu^2c^2)+4(a+c-1)^2+4(a-1)(c-1)-1,$$
$$A_1=[2(\nu^2c^2-a^2)-(2a-1)(2c-1)](2a+2c-1),$$
$$A_0=(a^2-\nu^2c^2)(a^2+4ac+4c^2-\nu^2c^2)-b^4c^4x^{4c}.$$

Общее уравнение:

$$y=x^a[C_1J_\nu(u)+C_2Y_\nu(u)+C_3J_\nu(iu)+C_4Y_\nu(iu)],\ \text{где}\ u=bx^c.$$

4.38. $\nu^4x^4y^{(4)}+(4\nu-2)\nu^3x^3y'''+(\nu-1)(2\nu-1)\nu^2x^2y''-\frac{1}{16}b^4x^{\frac{2}{\nu}}y=0.$

$$y=\sqrt{x}[C_1J_\nu(u)+C_2Y_\nu(u)+C_3J_\nu(iu)+C_4Y_\nu(iu)],\ \text{где}\ u=bx^{\frac{1}{2\nu}}.$$

4.39. $\left(x^2-1\right)^2y^{(4)}+10x\left(x^2-1\right)y'''+$
$+\{8(3x^3-1)-2[\mu(\mu+1)+\nu(\nu+1)](x^2-1)\}y''-$
$-6x[\mu(\mu+1)+\nu(\nu+1)-2]y'+$
$+\{[\mu(\mu+1)-\nu(\nu+1)]^2-2\mu(\mu+1)-2\nu(\nu+1)\}y=0;$

см. 2.240 (22).

4.40. $\left(e^x+2x\right)y^{(4)}+4\left(e^x+2\right)y'''+6e^xy''+4e^xy'+e^xy=\frac{1}{x^5}.$

Полагая $u(x)=(e^x+2x)y$, получаем $u^{(4)}=x^{-5}$, откуда

$$(e^x+2x)y=\frac{1}{24x}+C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

4.41. $y^{(4)}\sin^4x+2y'''\sin^3x\cos x+y''\sin^2x\left(\sin^2x-3\right)+$
$+y'\sin x\cos x(2\sin^2x+3)+(a^4\sin^4x-3)y=0;$

дифференциальное уравнение жесткой нагруженной сферической оболочки.

Если $a^4 = \lambda^2 + 1$, то получаем

$$LL(y) + \lambda^2 y = 0, \text{ где } L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \operatorname{ctg} x \frac{d}{dx} - \operatorname{ctg}^2 x.$$

Уравнение распадается на произведение двух сопряженных уравнений второго порядка $L(y) + i\lambda y = 0$, $L(y) - i\lambda y = 0$, имеющих комплексно-сопряженные решения, так что можно ограничиться решением первого из этих уравнений. Подстановка $y = \eta(\xi)\sin x$, $\xi = \sin^2 x$ сводит это уравнение к гипергеометрическому уравнению 2.260:

$$\xi(\xi - 1)\eta'' + \left(\frac{5}{2}\xi - 2\right)\eta' + \frac{1 - i\lambda}{4}\eta = 0.$$

4.42. $y^{(4)} \sin^6 x + 4y''' \sin^5 x \cos x - 6y'' \sin^6 x - 4y' \sin^5 x \cos x + y \sin^6 x = f(x)$.

Полагая $u(x) = y \sin x$, получаем $u^{(4)} \sin^5 x = f(x)$.

4.43. $f(x)\left[y^{(4)} - 2a^2 y'' + a^4 y\right] + 2f'(x)\left[y''' - a^2 y'\right] = 0$.

Решения: $e^{\pm ax}$. Подстановка $y = e^{\pm ax} \int z(x)\,dx$ приводит это уравнение к уравнению

$$fz''' + 2(2af + f')z'' + 2a(2af + 3f')z' + 4a^2 f'z = 0,$$

которое подстановкой $z = e^{-2ax} \int u(x)\,dx$ сводится к уравнению

$$fu'' + 2(f' - af)u' - 2af'u = 0.$$

Полагая здесь $v(x) = f(x)u(x)$, получим $(v'' - 2av')f - f''v = 0$. Это уравнение становится особенно простым, если $f'' = 0$, т. е. если $f(x)$ — линейная функция.

4.44. $[f(x)y'']'' = 0$.

$$y = C_1 + C_2 x + \int_a^x \frac{x - t}{f(t)}(C_3 + C_4 t)\,dt$$

или же

$$y = C_1 + C_2 x + C_3\varphi(x) + C_4\psi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \int_a^b \frac{|x - t|}{f(t)}\,dt, \qquad \psi(x) = \int_a^b \frac{|x - t|\,t}{f(t)}\,dt \tag{1}$$

на каждом отрезке $[a, b]$, на котором $f \neq 0$ и дважды непрерывно дифференцируема. Фундаментальное решение:

$$g_1(x, \xi) = \int_a^b \frac{|x - t|\,|\xi - t|}{4f(t)}\,dt$$

или же

$$g_2(x, \xi) = \frac{|x - \xi|}{x - \xi} \int_\xi^x \frac{(x - t)(t - \xi)}{2f(t)}\,dt.$$

В случае поперечных колебаний стержня встречаются следующие краевые условия:

I. $y=y'=0$ (жестко закрепленный или зажатый конец),
II. $y=y''=0$ (опертый или шарнирно закрепленный конец),
III. $y''=y'''=0$ (свободный конец).

Ниже у функций Грина первый (второй) верхний индекс указывает, какое из этих краевых условий задается на левом (правом) конце $x=a$ $(x=b)$; например, $\Gamma^{\mathrm{I,II}}(x, \xi)$ обозначает функцию Грина, соответствующую задаче с краевыми условиями «$y(a)=y'(a)=y(b)=y''(b)=0$». Введем еще следующие сокращенные обозначения:

$$\alpha=\int_a^b \frac{dt}{f(t)}, \quad \beta=\int_a^b \frac{t\,dt}{f(t)}, \quad \gamma=\int_a^b \frac{t^2\,dt}{f(t)}.$$

В принятых обозначениях функции Грина для различных краевых задач записываются следующим образом:

$$\Gamma^{\mathrm{I,I}}=g_1(x, \xi)+\frac{1}{4(\alpha\gamma-\beta^2)}\{\varphi(x)[\beta\psi(\xi)-\gamma\varphi(\xi)]+ \\ +\psi(x)[\beta\varphi(\xi)-\alpha\psi(\xi)]\}.$$

При этом предполагается, что $\alpha\gamma-\beta^2\neq 0$. Если $\alpha\gamma-\beta^2=0$, то функции Грина не существует, так как соответствующая краевая задача имеет нетривиальное решение; именно,

$$y=C_3\varphi(x)+C_4\psi(x),$$

где C_3, C_4 — ненулевое решение системы

$$\alpha C_3+\beta C_4=0, \quad \beta C_3+\gamma C_4=0.$$

$$N\cdot\Gamma^{\mathrm{I,II}}=N\cdot g_1(x, \xi)+ \\ +(x-b)[(\xi-b)(\alpha\gamma-\beta^2)+(\gamma-b\beta)\varphi(\xi)+(b\alpha-\beta)\psi(\xi)]- \\ -\varphi(x)[(\xi-b)(b\beta-\gamma)+b^2\varphi(\xi)-b\psi(\xi)]+ \\ +\psi(x)[(\xi-b)(b\alpha-\beta)+b\varphi(\xi)-\psi(\xi)],$$

где $N=4(b^2\alpha-2b\beta+\gamma)$. Если $N=0$, то функции Грина не существует, так как соответствующая краевая задача имеет нетривиальное решение; именно

$$y=b\beta-\gamma-(b\alpha-\beta)x-b\varphi(x)+\psi(x).$$

$$4\Gamma^{\mathrm{I\,III}}=4g_1(x, \xi)+\gamma-\beta\xi-\psi(\xi)+[\alpha\xi-\beta+\varphi(\xi)]x+\xi\varphi(x)-\psi(x).$$

При $a=0$, $b=1$ имеем

$$4\Gamma^{\mathrm{II,II}}=4g_1(x, \xi)+\gamma+(\beta-2\gamma)\xi-\psi(\xi)+ \\ +[\beta-2\gamma+(\alpha-4\beta+4\gamma)\xi+2\psi(\xi)-\varphi(\xi)]x-\xi\varphi(x)+(2\xi-1)\psi(x).$$

$\Gamma^{\mathrm{II,III}}$ и $\Gamma^{\mathrm{III,III}}$ не существуют, так как соответствующие краевые задачи имеют ненулевые решения, а именно $C(x-a)$ и C_1+C_2x. В этих случаях можно построить обобщенные функции Грина.

ГЛАВА V

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

5.1. $y^{(5)}+2y'''+y'=ax+b\sin x+c\cos x.$

$$y=\frac{a}{2}x^2+\frac{b}{8}x^2\cos x-\frac{c}{8}x^2\sin x+$$
$$+C_1+C_2\sin x+C_3\cos x+C_4x\sin x+C_5x\cos x.$$

5.2. $y^{(6)}+y=\sin\frac{3}{2}x\sin\frac{1}{2}x.$

Правая часть равна $\Re\,[{}^1/_2\,(e^{ix}-e^{2ix})]$. Поэтому, согласно ч. I, п. 22.2, получаем

$$y=\frac{x}{12}\sin x+\frac{1}{126}\cos 2x+A_1\cos(x+B_1)+$$
$$+A_2e^{x\sqrt{3/4}}\cos\left(\frac{x}{2}+B_2\right)+A_3e^{-x\sqrt{3/4}}\cos\left(\frac{x}{2}+B_3\right).$$

5.3. $y^{(n)}-axy=b,\ a>0.$

С помощью преобразования Лапласа (ч. I, п. 19.2) получаем

$$y=\sum_{\nu=0}^{n}C_\nu\varepsilon_\nu\int_0^\infty\exp\left(\varepsilon_\nu xt-\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}\right)dt,$$

где $\varepsilon_\nu=\exp\frac{2\nu\pi i}{n+1}$, $\sum\limits_{\nu=0}^{n}C_\nu=\frac{b}{a}$.

5.4. $y^{(n)}+ax^\nu y'+a\nu x^{\nu-1}y=0.$

Это — уравнение в полных дифференциалах и сводится к уравнению $(n-1)$ порядка: $y^{(n-1)}+ax^\nu y=C$ (C произвольно).

5.4a. $y^{(n)}=ax^2y'+bxy'+cy.$

Решение получается с помощью интегрального преобразования:

$$y=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}}u^\alpha v^\beta\sum_{\nu=1}^{n}C_\nu e^{\lambda_\nu uvx}\,du\,dv$$

$\left(\alpha>-1,\ \beta>-1,\ \lambda_\nu^n=a\right).$

5.5. $y^{n} + ay^{(n-1)} = f(x)$.

Общее решение при $a = 0$:

$$y = \sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu x^\nu + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt,$$

где x_0 может быть выбрано произвольно. При $a \neq 0$, полагая $y^{(n-1)} = u(x)$, получаем линейное уравнение

$$u' + au = f(x).$$

$(n-1)$-кратное интегрирование, которое еще остается выполнить после решения этого уравнения, можно, как и в предыдущем случае, заменить однократным.

Если речь идет об исследовании решений при больших значениях x, то может быть полезна следующая запись: при $a < 0$ имеем

$$y = Ce^{-ax} + \sum_{\nu=0}^{n-2} C_\nu x^\nu + \int_{x}^{\infty} \left(\frac{f(t)}{|a|^{n-1}} \sum_{\nu=0}^{n-2} |a|^\nu \frac{(x-t)^\nu}{\nu!} - e^{a(t-x)} \right) dt,$$

если только интеграл $\int_{x}^{\infty} |t|^{n-2}\,|f(t)|\,dt$ сходится; при $a > 0$ нужно лишь $\int_{x}^{\infty}$ заменить через $\int_{\infty}^{x}$.

5.6. $xy^{(n)} - mny^{(n-1)} + axy = 0$, m и n — натуральные числа, $n \geqslant 2$.

$$y = x^{(m+1)\,n-1} \left(x^{1-n} \frac{d}{dx} \right)^m \frac{u}{x^{n-1}},$$

где $u(x)$ пробегает все решения уравнения $u^{(n)} + au = 0$.

См. J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957).

5.7. $xP(D)\,y + Q(D)\,y = 0$, P и Q — многочлены, $D = d/dx$.

Если $\exp\left(xt + \int \frac{Q(t)}{P(t)}\,dt \right)\Big|_a^b = 0$, то одно из решений

$$y = \int_a^b \frac{1}{P(t)} \exp\left[xt + \int \frac{Q(t)}{P(t)}\,dt \right] dt.$$

Айнс, стр. 272.

5.8. $xy^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} [(aA_{\nu+1} - A_\nu)\,x + A_{\nu+1}]\,y^{(\nu)}$.

Пусть $f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} A_{\nu+1}\lambda^\nu$. Решения:

$$y = e^{\lambda x}, \qquad \text{если} \quad f(\lambda) = 0;$$

$$y = e^{ax}\left(x - \frac{f'(a)}{f(a)} \right), \qquad \text{если} \quad f(a) \neq 0.$$

5.9. $x^n y^{(2n)} = ay.$

$$y = x^{n/2} \sum_{k=1}^{n} Z_n \left(2\alpha_k i \sqrt{x}\right),$$

где Z_n — цилиндрические функции, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — корни уравнения $\alpha^n = \sqrt{a}$.

См. Ватсон, стр. 120.

5.10. $x^{2n} y^{(n)} = ay, \ a \neq 0.$

С помощью легко доказываемой формулы

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{n-1} e^{a/x} = (-1)^n a^n x^{-n-1} e^{a/x}$$

получаем, что $y = x^{n-1} \exp(-r/x)$ есть решение, если $r^n = a$. Беря n различных значений r, удовлетворяющих этому условию, получаем n линейно независимых решений.

5.11. $x^{n+1/2} y^{(2n+1)} = ay.$

$$y = x^{(2n+1)/4} \sum_{k=0}^{2n} C_k \left[J_{-n-1/2}\left(2\alpha_k \sqrt{x}\right) + iJ_{n+1/2}\left(2\alpha_k \sqrt{x}\right)\right],$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ — корни уравнения $\alpha^{2n+1} = -ai$.

См. Ватсон, стр. 120; J. Zbornik, *Akad. Wien* **166** (1957).

5.12. $(x-a)^n (x-b)^n y^{(n)} = cy, \ a \neq b.$

Полагая $y = (x-b)^{n-1} \eta(\xi)$, $\xi = \ln \dfrac{x-a}{x-b}$, получаем уравнение с постоянными коэффициентами.

5.13. $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu C_{\lambda-\nu-1}^{n-\nu} P^{(n-\nu)}(x)\, y^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu C_{\lambda-\nu-1}^{n-\nu-1} Q^{(n-\nu-1)}(x)\, y^{(\nu)} = 0,$

$\displaystyle P = \prod_{\nu=1}^{n-1} (x - a_\nu), \quad Q = P(x) + \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu \frac{P(x)}{x - a_\nu}$; уравнение Тиссо, см. ч. I, п. 22.6.

ГЛАВА VI

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнения с алгебраическими иррациональностями: 13, 15, 22, 25, 60—67, 88, 100—102, 166, 177, 218, 220, 231, 234.

Уравнения с показательными функциями: 14, 15, 83, 242.

Уравнения с логарифмическими функциями: 113, 222.

Уравнения с гиперболическими функциями: 16.

Уравнения с тригонометрическими функциями: 17—19, 29, 48, 49, 121, 223.

Уравнения с произвольными функциями: 20, 29, 33—39, 41, 44, 51—55, 59, 68—70, 72, 85, 101, 103, 114—116, 122, 123, 129, 131, 136, 139, 148, 149, 152, 161, 167, 170, 187, 196—204, 224, 225, 230, 235, 241, 247—249.

* * *

Исследование многих уравнений, рассматриваемых в этой главе, а также ряд других нелинейных уравнений можно найти в следующих работах: P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 1 и сл.; B. Gambier, там же, **33** (1910), стр. 1 и сл.; R. Garnier, *Annales École Norm.* (3), **34** (1917), стр. 239—353. [Некоторые подробности можно найти в книге Беллмана; несколько уравнений разобрано у Сансоне, т. II, гл. XII. — *Прим. ред.*]

1 — 72. $ay'' = F(x, y, y')$

6.1. $y'' = y^2$.

Согласно ч. I, п. 23.1, получаем $x = \int \left(\frac{2}{3}y^3 - C_1\right)^{-1/2} dy + C_2$; следовательно,

$$y = \wp\left(\frac{x}{\sqrt{6}} - C_2\right),$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 0$ и $g_3 = C_1$ (C_1 — произвольно). [По поводу функции Вейерштрасса см. 2.26. — *Прим. ред.*]

6.2. $y'' = 6y^2$.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $pp' = 12y^2$; следовательно, $y' = \pm\sqrt{4y^3 - C_1}$, откуда

$$y = \wp(x + C_2),$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса с инвариантами $g_2 = 0$ и $g_3 = C_1$.

6.3. $y'' = 6y^2 + x$.

Это уравнение определяет так называемую *трансцендентную функцию Пенлеве*. Подробнее см. Айнс, стр. 443, 463; P. Appell, *Bulletin Soc. Math. France* **45** (1917), стр. 150—153; E. Juttner, *Zeitshrift*

f. Math. Phys. **58** (1910), стр. 385—409 (применение к химическим задачам). [Подробное изложение теории уравнений Пенлеве с указанием оригинальных статей см. в книге В. В Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 1950, гл. 3. — *Прим. ред.*]

6.4. $y'' - 6y^2 + 4y = 0.$
Из ч. I, п. 23.1 следует, что это уравнение может быть сведено к уравнению $y'^2 - 4y^3 + 4y^2 + C = 0$. Решение этого уравнения приводит к эллиптическим интегралам. В число решений входят (при $C = 0$) функции

$$y = \frac{1}{\sin^2(x + C_1)}.$$

О решении с помощью методов теории функций см. Уиттекер и Ватсон, т. II, стр. 269.

6.5. $y'' + ay^2 + bx + c = 0.$
При $b = 0$ это уравнение, согласно ч. I, п. 23.1, эквивалентно уравнению $y'^2 + \frac{2}{3}ay^3 + cy = C$, разрешимому в эллиптических функциях; ср. 1.71. В случае $b \neq 0$ подстановка $y(x) = \alpha\eta(\xi)$, $\xi = \beta(x + b^{-1}c)$ приводит исходное уравнение к виду

$$\eta'' + \frac{a\alpha}{\beta^2}\eta^2 + \frac{b}{\alpha\beta^3}\xi = 0;$$

при соответствующем выборе величин α и β получаем уравнение 6.3:

$$\eta'' = 6\eta^2 + \xi.$$

6.6. $y'' - 2y^3 - xy + a = 0.$
Это уравнение приводит к новым функциям, так называемым трансцендентным функциям Пенлеве; см. 6.3.

6.7. $y'' = ay^3.$
Решениями являются, например, функции

$$y = \sqrt{2/a}\,(x - C)^{-1} \qquad (C \text{ — произвольно}).$$

Согласно ч. I, п. 23.1, данное уравнение можно свести к уравнению $y'^2 = \frac{1}{4}ay^4 + C$, т. е. к уравнению, которое, согласно 1.71, разрешимо в эллиптических функциях.

6.8. $y'' - 2a^2y^3 + 2abxy - b = 0.$
Каждое решение уравнения Риккати $y' + ay^2 - bx = 0$ удовлетворяет и данному уравнению. См., далее, B. Gambier, Acta Math. **33** (1910), стр. 32 и сл.

6.9. $y'' + ay^3 + bxy + cy + d = 0.$
При $a = 0$ или $b = 0$ получаются более простые частные случаи. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то с помощью подстановки $y = \lambda\eta(\xi)$, $\xi = \mu(bx + c)$ данное уравнение можно свести к рассматривавшейся Пенлеве нормальной форме

$$\eta'' = 2\eta^3 + \xi\eta + \alpha.$$

Это последнее уравнение приводит к новым функциям, так называемым трансцендентным функциям Пенлеве; см. 6.3.

6.10. $y'' + ay^3 + by^2 + cy + d = 0.$
Согласно ч. I, п. 23.1, получается уравнение 1.71:

$$y'^2 + \frac{1}{2}ay^4 + \frac{2}{3}by^3 + cy^2 + 2dy + C = 0.$$

6.11. $y'' + ax^{\nu}y^{n} = 0$; уравнение Эмдена — Фаулера.
Частное решение:

$$y = \alpha x^{\beta}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{2+\nu}{1-n}, \qquad \alpha^{n-1} = -\frac{(\nu+2)(\nu+n+1)}{a(n-1)^2}.$$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^{-1}$, получаем уравнение 6.74:

$$\xi\eta'' + 2\eta' + a\xi^{-\nu-3}\eta^{n} = 0.$$

При $a = -1$, $\nu = 1 - n$ см. 6.102; при $a = -1$, $\nu = -{}^1/_2$, $n = {}^3/_2$ см. 6.100. [Подробное изложение теории уравнения Эмдена — Фаулера содержится в книге Беллман, гл. VII. — *Прим. ред.*]

6.12. $y'' + (n+1)a^{2n}y^{2n+1} - y = 0$.
Принимая y за независимое переменное и полагая $p(y) = y'(x)$, получаем, в силу $y'' = pp'(y)$, уравнение первого порядка, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными:

$$y'(x) = \pm y\sqrt{a^{2n}y^{2n} - 1 + C}.$$

6.13. $y'' = (ay^2 + bxy + cx^2 + \alpha y + \beta x + \gamma)^{-3/2}$, $a \neq 0$.
Полагая $2au(x) = 2ay + bx + \alpha$, получаем уравнение 6.101:

$$(Ax^2 + Bx + C)^{3/2}u'' = \left(\frac{au^2}{Ax^2 + Bx + C} + 1\right)^{-3/2},$$

где A, B, C определяется равенствами:

$$4aA = 4ac - b^2, \qquad 2aB = 2a\beta - b\alpha, \qquad 4aC = 4a\gamma - \alpha^2.$$

6.14. $y'' = e^{y}$.
Пользуясь сказанным в ч. I, п. 23.1, получаем

$$x = \int (2\exp y + C_1)^{-1/2}\,dy + C_2;$$

интеграл может быть вычислен с помощью подстановки

$$t = (2\exp y + C_1)^{1/2}.$$

6.15. $y'' + ae^{x}y^{-1/2} = 0$; см. 6.242.

6.16. $y'' + e^{x}\operatorname{sh} y = 0$.
Решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, представляется рядом

$$y = x - \frac{x^3}{3!} - 2\frac{x^4}{4!} - 3\frac{x^5}{5!} - 2\frac{x^6}{6!} + 17\frac{x^7}{7!} + 128\frac{x^8}{8!} + 549\frac{x^9}{9!} + \ldots$$

M. Chini, *Giornale Mat.* 58 (1920), стр. 35—53.

6.17. $y'' + a\sin y = 0$; уравнение колебаний маятника.
Как уравнение колебаний маятника это уравнение обычно пишется в виде

$$\varphi''(t) + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0. \tag{1}$$

Для решения $y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$, получаем, согласно ч. I, п. 23.1:

$$y' = \pm\sqrt{2a\cos y + \beta^2 - 2a\cos\alpha}$$

следовательно,

$$x - x_0 = \int_{\alpha}^{y} [2a\cos y + \beta^2 - 2a\cos\alpha]^{-1/2}\, dy,$$

и если положить $\sin\frac{1}{2}y = ku$, $k^2 = \sin^2\frac{1}{2}\alpha + \frac{\beta^2}{4a}$, то

$$\sqrt{a}\,(x - x_0) = \int_{k^{-1}\sin(\alpha/2)}^{u} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}};$$

это — эллиптический интеграл. При $\alpha = 0$, $|k| < 1$ получаем

$$\sin\frac{1}{2}y = k \operatorname{sn}\sqrt{a}\,(x - x_0),$$

где функция Якоби sn имеет модуль k.

[См., например, Ш.-Ж. де ла Валле Пуссен, Лекции по теоретической механике, 1948, т. I, стр, 183; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953, стр. 24; О. Блакьер, Анализ нелинейных систем, 1969, стр. 26. — *Прим. ред.*]

6.18. $y'' + \alpha^2 \sin y = \beta \sin x$; специальное уравнение Дуффинга. См. 6.19.

6.19. $y'' + \alpha^2 \sin y = \beta f(x)$; обобщенное уравнение Дуффинга.

[Литература: Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953; И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, 1955; Сансоне, т. II, гл. XII, § 4; Т. Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, 1968; О. Блакьер, Анализ нелинейных систем, 1969. — *Прим. ред.*]

Уравнения 6.18 и 6.19 встречаются при исследовании колебаний, в частности колебаний маятника. В случае $\beta = 0$ см. 6.17. Здесь мы будем предполагать, что $\beta \neq 0$. Для уравнения 6.18 можно поставить краевую задачу с периодическими краевыми условиями:

$$«y(0) = y(2\pi) \qquad y'(0) = y'(2\pi)». \tag{1}$$

Если $\alpha^2 < 1$, то при любом β эта краевая задача имеет единственное решение; в случае $\alpha^2 > 1$ имеется несколько решений. Приближенно решение можно найти, полагая $y \approx A\sin x$, где A находится из уравнения $A^2 - 2\alpha^2 J_1(A) + \beta = 0$ (J_1 — функция Бесселя). Для уравнений 6.18 и 6.19 можно поставить краевую задачу с краевыми условиями:

$$«y(0) = y(\pi) = 0». \tag{2}$$

Согласно ч. II, п. 10.1, при произвольных α, β существует по крайней мере одно решение соответствующей краевой задачи, а при $\alpha^2 < 1$ — только одно решение. Единственность решения при фиксированном α для всех достаточно больших $|\beta|$ имеет место, если в уравнении 6.19 функция $f(x)$ такова, что производная $u'(x)$ от решения краевой задачи $u'' = f(x)$, $u(0) = u(\pi)$ имеет лишь конечное число нулей. При постоянном β число решений уравнения 6.19 с краевыми условиями (2) неограниченно растет при $\alpha \to \infty$. Существенны, далее, так называемые разветвляющиеся решения, т. е. такие решения $y(x)$, для которых краевая задача

$$\varphi''(x) + \alpha^2 \cos y(x) \cdot \varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$$

имеет решение $\varphi(x) \not\equiv 0$.

6.20. $y'' = x^{-3/2} f\left(yx^{-1/2}\right)$.

Полагая $u(x) = yx^{-1/2}$, получим $\frac{d}{dx}(u'x)^2 = \frac{1}{2} uu' + 2f(u)u'$, откуда

$$\int \left[C_1 + \frac{1}{4}u^2 + 2\int f(u)\,dx\right]^{-1/2} du = C_2 + \ln|x|.$$

6.21. $y'' - 3y' - y^2 - 2y = 0$; см. 6.73.

6.22. $y'' - 7y' + 12y - y^{3/2} = 0$; см. 6.100 (1).

6.23. $y'' + 5ay' - 6y^2 + 6a^2y = 0$.

$$y = a^2C_1^2e^{-2ax}\wp\left(C_1e^{-ax} + C_2,\ 0,\ -1\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 53, уравнение (6).

6.24. $y'' + 3ay' - 2y^3 + 2a^2y = 0$.

$$y = -iaC_1e^{-ax}\,\mathrm{sn}_{k^2=-1}\left(C_1e^{-ax} + C_2\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 53, уравнение (5).

6.25. $y'' - \frac{3n+4}{n}y' - \frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}y\left(y^{\frac{n}{n+1}} - 1\right) = 0$; см. 6.102 (2).

6.26. $y'' + ay' + by^n + \frac{a^2-1}{4}y = 0$.

Полагая $y = \xi^\alpha\eta(\xi)$, $\xi = e^x$, $\alpha = (1-a)/2$, получим уравнение 6.74:

$$\xi\eta'' + 2\eta' + b\xi^{\alpha n - \alpha - 1}\eta^n = 0.$$

6.27. $y'' + ay' + bx^\nu y^n = 0$; см. 6.74.

6.28 $y'' + ay' + be^y = 2a$; см. 6.76 (3).

6.29. $y'' + ay' + \varphi(x)\sin y = 0$, $\varphi(x)$ — периодическая функция.

См.: A. Erdélyi, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **14** (1934), стр. 235—247; F. Tricomi, *C. R. Paris*, **193** (1931), стр. 635 и сл. *Atti Accad. Lincei* (6), **18** (1933), стр. 26—28, *Annali Pisa* (2), **2** (1933), стр. 1—20.

6.30. $y'' + yy' - y^3 = 0$; см. 6.32 и 6.33.

6.31. $y'' + yy' - y^3 + ay = 0$, $a \neq 0$; частный случай уравнения 6.35.

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{3}}\,\frac{\wp'(u,\ 12,\ C_1)}{\wp(u,\ 12,\ C_1) - 1}, \qquad u = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{a}{3}} + C_2.$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 54, уравнение (8).

6.32. $y'' + (y + 3a)y' - y^3 + ay^2 + 2a^2y = 0$.

$$y = C_1e^{-ax}\frac{\wp'(u,\ 0,\ 1)}{\wp(u,\ 0,\ 1)}, \quad \text{где} \quad u = \begin{cases} C_1a^{-1}e^{-ax} + C_2 & \text{при} \quad a \neq 0, \\ C_1x + C_2 & \text{при} \quad a = 0. \end{cases}$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 54, уравнение (7).

6.33. $y'' + (y + 3f)y' - y^3 + y^2f + y(f' + 2f^2) = 0$, $f = f(x)$.

(а) Полагая $y(x) = \xi'(x)\eta(\xi)$, где $\xi(x)$ удовлетворяет уравнению $\xi'' = -f\xi'$, получаем уравнение $\eta'' + \eta\eta' - \eta^3 = 0$, т. е. частный случай исходного уравнения при $f = 0$; об этом новом уравнении см. 6.32.

(б) Полагая $u(x) = \exp\left(-\int f\,dx\right)$, $v(x) = \exp\int y\,dx$, можно данное уравнение записать в виде $\frac{d}{dx}\left(\frac{v''}{u^2v^2} - \frac{u'v'}{u^3v^2}\right) = 0$. Отсюда получаем $\dfrac{v''}{u^2v^2}-\dfrac{u'v'}{u^3v^2}=\dfrac{3}{2}C_1$ или $\dfrac{d}{dx}\dfrac{v'}{u^2}=3C_1v^2v'$, что приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$v'^2=u^2(C_1v^3+C_2).$$

Айнс, стр. 446 и сл.

6.34. $y''+yy'-y^3-\left(\dfrac{f'}{f}+f\right)(3y'+y^2)+$

$$+\left(af^2+3f'+3\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)y+bf^3=0,\quad f=f(x).$$

(а) Полагая $y(x)=\xi'\eta(\xi)$, $\xi=\exp\int f\,dx$, получаем

$$\eta''+\eta\eta'-\eta^3+(a-2)\frac{\eta}{\xi^2}+\frac{b}{\xi^3}=0,$$

т. е. частный случай исходного уравнения при $f=x^{-1}$.

(б) При $a=14$, $b=24$ данное уравнение имеет решения:

$$y(x)=f\frac{\xi^3u'+2}{\xi^2u-1},$$

где $\xi=\exp\int f\,dx$, а $u(\xi)$ — произвольное решение уравнения $u''=6u^2$.

См. Айнс, стр. 446.

6.35. $y''+\left(y-\dfrac{3f'}{2f}\right)y'-y^3-\dfrac{f'}{2f}y^2+\left(f+\dfrac{f'^2}{f^2}-\dfrac{f''}{2f}\right)y=0$, $f=f(x)$.

(а) Полагая $y=\xi'(x)\eta(\xi)$, $a\xi'^2=f(x)$, получаем уравнение 6.31 с переменными ξ, η вместо y, x.

(б) Полагая

$$u(x)=1+\exp\int y\,dx,\quad v(x)=2u''-u'\frac{f'}{f}-(u^2-1)f,$$

получаем из исходного уравнения $\dfrac{v'}{v}-\dfrac{f'}{f}-\dfrac{2u'}{u-1}=0$; следовательно, $v=C(u-1)^2f$, и, значит,

$$2\frac{u'u''}{f}-u'^2\frac{f'}{f^2}=[C(u-1)^2+u^2-1]u'.$$

Отсюда окончательно имеем уравнение

$$u'^2=f(x)[C_1(u-1)^3+(u-1)^2+C_2],$$

разрешимое, согласно ч. I, п. 4.1, в эллиптических функциях (см. 1.71).

См. P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 33, уравнение (10); Айнс, стр. 446.

6.36. $y''+2yy'+f(x)y'+f'(x)y=0.$

Полагая $u(x)=y+\dfrac{1}{2}f$, получаем уравнение Риккати

$$u'+u^2=\frac{1}{2}f'+\frac{1}{4}f^2+C.$$

6.37. $y''+2yy'+f(x)(y'+y^2)=g(x).$

Полагая $u(x)=y'+y^2$, получаем $u'+f(x)u=g(x)$. Таким образом, исходное уравнение сводится к специальному уравнению Риккати и к линейному уравнению первого порядка. См. P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 31, уравнение (2); Айнс, стр. 444.

6.38. $y'' + 3yy' + y^3 + f(x)\,y = g(x)$.

Полагая $u'(x) = yu$, получаем линейное уравнение

$$u''' + f(x)\,u' - g(x)\,u = 0.$$

6.39. $y'' + [3y + f(x)]\,y' + y^3 + f(x)\,y^2 = 0$.

Полагая $u' = yu$, получаем $u''' = f(x)\,u''$. См. Айнс, стр. 445.

6.40. $y'' - 3yy' - (3ay^2 + 4a^2y + b) = 0$; см. 1.43 (1).

6.41. $y'' - [3y + f(x)]\,y' + y^3 + f(x)\,y^2 = 0$.

Полагая $y(x) = -u(x)$, получаем уравнение 6.39, в котором y, f заменены через u, $-f$.

6.42. $y'' - 2ayy' = a$; см. 1.40 (2).

6.43. $y'' + ayy' + by^3 = 0$.

Это—уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (a). Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем уравнение $pp' + ayp + by^3 = 0$, которое подстановкой $p(y) = y^2u(t)$, $t = \ln y$ приводится к уравнению $uu' + 2u^2 + au + b = 0$; отсюда находим

$$t = -\int \frac{u\,du}{2u^2 + au + b} + C_1.$$

Этот интеграл может быть вычислен; найдя u, мы должны еще решить уравнение $y'(x) = y^2u(\ln y)$, которое дает

$$x = \int \frac{dy}{y^2u(\ln y)} + C_2.$$

Этот метод может быть применен лишь если $y'(x) \neq 0$.

Подробное изучение решений в случае $a = -4$, $b = 2$ см. H. Seifert, *Jahresbericht DMV* **52** (1942), стр. 75—79.

6.44. $y'' + f(x, y)\,y' + g(x, y) = 0$.

Если $g_y - f_x = fX - X^2 - X'$, где X — некоторая функция только от x, то решения данного уравнения в каждой односвязной области плоскости xy совпадают с решениями уравнения первого порядка

$$\varphi(x)\,y' + \psi(x, y) = C,$$

где $\varphi = \exp\int X\,dx$, $\psi_x = g\varphi$, $\psi_y = (f - X)\,\varphi$

6.45. $y'' + ay'^2 + by = 0$.

Это уравнение встречается при исследовании затухающих малых колебаний, если затухание пропорционально квадрату скорости; см. также 6.46 и 6.48. Полагая $v(y) = y'^2$, получаем линейное уравнение $v' + 2av + 2by = 0$; отсюда следует

$$y'^2 = Ce^{-2ay} + \frac{b}{2a^2}(1 - 2ay) \tag{1}$$

и, наконец,

$$x = C_1 + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

где Y обозначает правую часть уравнения (1).

6.46. $y'' + ay'\,|y'| + by' + cy = 0$, $a > 0$, $b \geqslant 0$, $c > 0$.

Уравнение малых колебаний с квадратичным затуханием (для произвольного закона сопротивления см. 6.72). Подстановка

$$y(x) = \frac{\eta(\xi)}{2a}, \quad \xi = x\sqrt{c}$$

приводит это уравнение к нормальной форме

$$\eta'' + {}^1/_2\eta' \mid \eta' \mid + B\eta' + \eta = 0, \quad \text{где} \quad B = bc^{-1/2}. \tag{1}$$

Решения этого уравнения можно составить из решений двух уравнений

$$\eta'' \pm {}^1/_2\eta'^2 + B\eta' + \eta = 0; \tag{2}$$

решениями η уравнения с верхним знаком являются, очевидно, функции $-\bar{\eta}$, где $\bar{\eta}$ пробегает совокупность решений уравнения с нижним знаком.

В случае $B = 0$ уравнение (1) (также и для комплексных значений ξ) детально исследовано. В этом случае решения уравнения

$$\eta'' + {}^1/_2\eta' \mid \eta' \mid + \eta = 0 \tag{3}$$

можно следующим образом получить из решений $\eta = S(\xi, a)$ уравнения

$$\eta'' - {}^1/_2\eta'^2 + \eta = 0 \tag{4}$$

с начальными условиями $\eta(0) = a$, $\eta'(0) = 0$: если подлежащее построению решение существует при $\xi_0 < \xi < \infty$ и если оно в точках $\xi_1 < < \xi_2 < \ldots$ имеет амплитуды $a_1, a_2, \ldots$, причем, скажем, $\eta(\xi_1) < 0$, т. е. $\eta(\xi_1) = -a_1$, то следует положить

$$\eta = \begin{cases} \ S(\xi - \xi_1, -a_1) & \text{при} \quad \xi_0 < \xi \leqslant \xi_1, \\ -S(\xi - \xi_1, a_1) = -S(\xi - \xi_2, -a_2) & \text{при} \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \\ S(\xi - \xi_2, a_2) = S(\xi - \xi_3, -a_3) & \text{при} \quad \xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

W. E. Milne, *Oregon Publication* 2_2 (1923); *Oregon Publication Math.* 1_1 (1929). Там напечатаны обширные числовые таблицы для нахождения решений уравнений (1) и (3). О приближенных решениях см. W. Müller, *Ingenieur-Archiv* **5** (1934), стр. 306—315; M; Hampl, там же **6** (1935), стр. 213—216. [См. также Сансоне, т. II, гл. XII, § 1, 2; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953, гл. III, § 11; А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959, гл. VIII, § 9. — *Прим. ред.*]

6.47. $y'' + ay'^2 + by' + cy = 0$.

Полагая $v(y) = y'(x)$, получаем уравнение Абеля (см. ч. I, п. 4.11)

$$vv' + av^2 + bv + cy = 0.$$

6.48. $y'' + ay'^2 + b \sin y = 0$.

Это уравнение встречается при изучении затухающих колебаний маятника, когда затухание пропорционально квадрату скорости. Полагая $v(y) = y'^2$, получаем линейное уравнение:

$$v' + 2av + 2b \sin y = 0.$$

Отсюда получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$[y'(x)]^2 = Ce^{-2ay} + \frac{2b}{4a^2 + 1}(\cos y - 2a \sin y).$$

В случае, когда речь идет о малых колебаниях, вместо $\sin y$ можно взять y — см. 6.45. [Подробные физические и математические рассмотрения, связанные с проблемами колебаний, см. в книгах: А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959; Б. В. Булгаков, Колебания, 1955; Дж. Стокер, Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 1953, и др. — *Прим. ред.*]

6.49. $y'' + ay'|y'| + b\sin y = 0.$
Решения этого уравнения можно получить, найдя, согласно 6.48, решения уравнений

$$y'' + ay'^2 + b\sin y = 0 \quad \text{при} \quad y' > 0,$$
$$y'' - ay'^2 + b\sin y = 0 \quad \text{при} \quad y' < 0$$

и затем составив из них решения данного уравнения.

6.50. $y'' + ayy'^2 + by = 0$; тип 6.53.
Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем уравнение Бернулли

$$pp' + ayp^2 + by = 0.$$

6.51. $y'' + f(y)y'^2 + g(x)y' = 0.$
Деля на y', получаем уравнение в полных дифференциалах. Его решения получаются из равенства

$$\ln|y'| + \int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx = C.$$

Кроме того, конечно, $y = C$ при любом C есть решение.

6.52. $y'' - \dfrac{f'(y)}{f(y)}y'^2 + g(x)y' + h(x)f(y) = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, где $\xi = \xi(x)$ — решение уравнения

$$\xi'' + g(x)\xi' + h(x) = 0,$$

сводимого к линейному уравнению первого порядка, получим

$$\xi'^2\eta'' - \frac{f'(\eta)}{f(\eta)}\xi'^2\eta'^2 + h(x)[f(\eta) - \eta'] = 0;$$

этому уравнению заведомо удовлетворяют, например, решения уравнения $\eta'(\xi) = f(\eta)$.

Мы получим также интеграл исходного уравнения, решая систему

$$y'(x) = uf(y), \quad u'(x) = -g(x)u - h(x),$$

в которой сначала следует проинтегрировать второе уравнение, а потом первое.

6.53. $y'' + \varphi(y)y'^2 + f(x)y' + g(x)\psi(y) = 0.$
Если $\varphi(y) = \dfrac{1 - \psi'(y)}{\psi(y)}$, $F(x) = \int f(x)\,dx$,

$$g(x) = e^{-2F(x)}\left[\pm\exp\left(2\int e^{-F(x)}dx\right) - \nu^2\right],$$

то, полагая $\eta(\xi) = \exp\int\dfrac{dy}{\psi(y)}$, $\xi = \exp\int e^{-F(x)}dx$, получаем уравнение Бесселя 2.162:

$$\xi^2\eta'' + \xi\eta' + (\pm\xi^2 - \nu^2)\eta = 0.$$

R. Müller, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 19 (1939), стр. 46.

6.54. $y'' + f(y)y'^2 + g(y)y' + h(y) = 0;$
тип, рассмотренный в ч. I, п. 15.3 (а).

Полагая $p(y) = y'(x)$, получим уравнение Абеля (см. ч. I, п. 4.11): $pp' + f(y)p^2 + g(y)p + h(y) = 0$. Если $g \equiv 0$, то это уравнение сводится к уравнению Бернулли; в случае $h \equiv 0$ получается уравнение. См. также 6.224.

6.54а. $y'' + f(x, y)\, y'^3 = 0.$

Принимая y за независимое переменное, получаем для $x = x(y)$ уравнение $x'' = f(x, y)$.

6.55. $y'' + (y'^2 + 1)\,[f(x, y)\, y' + g(x, y)] = 0.$

Если для данных f и g существует такая функция $\psi(x, y)$, что $\psi_x = g$ и $\psi_y = f$, то решения данного уравнения получаются из уравнения

$$y' + \operatorname{tg}(\psi + C) = 0.$$

6.56. $y'' + ay\,(y'^2 + 1)^2 = 0.$

Уравнение меридианной кривой поверхности вращения постоянной гауссовой кривизны a.

Согласно ч. I, п. 15.3 (а), получаем

$$x = \int \sqrt{\frac{ay^2 + C_1}{1 - ay^2 - C_1}}\, dy + C_2.$$

6.57. $y'' = a\,(xy' - y)^{\nu}$; частный случай уравнения 6.59.

Полагая $y = xu(x)$, получаем для u' уравнение Бернулли или (при $\nu = 1$) линейное уравнение: $xu'' + 2u' = ax^{2\nu} u'^{\nu}$.

6.58. $y'' = kx^a y^b y'^c$.

Если $b + c \neq 1$, то это уравнение можно рассматривать как обобщенно-однородное (ч. I, п. 15.2). Полагая

$$y = x^{\frac{c-a-2}{b+c-1}}\, \eta(\xi), \quad \xi = \ln x,$$

получаем в этом случае

$$\eta'' + \frac{c - 2a - b - 3}{b + c - 1}\eta' - \frac{a + b + 1}{b + c - 1}\,\frac{c - a - 2}{b + c - 1}\eta = k\eta^b \left(\eta' + \frac{c - a - 2}{b + c - 1}\eta\right)^c$$

и отсюда, полагая $\eta'(\xi) = p(\eta)$, находим

$$pp' + \frac{c - 2a - b - 3}{b + c - 1}p - \frac{a + b + 1}{b + c - 1}\,\frac{c - a - 2}{b + c - 1}\eta = k\eta^b \left(p + \frac{c - a - 2}{b + c - 1}\eta\right)^c.$$

6.59. $y'' + \left(y' - \dfrac{y}{x}\right)^a f(x, y) = 0.$

Здесь предполагается, что f или зависит только от x, или является однородной функцией от x, y со степенью однородности -1, т. е. $f(x, y) = x^{-1}\varphi(y/x)$. Подстановка $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ приводит к уравнению

$$\eta'' + e^{\xi} f(e^{\xi}, e^{\xi}\eta)\, \eta'^a + \eta' = 0. \tag{1}$$

Если f зависит только от x, то уравнение (1) представляет собой относительно $u(\xi) = \eta'$ уравнение Бернулли (ч. I, п. 4.5). Если f — однородная функция со степенью однородности -1, то уравнение (1) дает $\eta'' + \varphi(\eta)\,\eta'^a + \eta' = 0$; таким образом, получаем для $p(\eta) = \eta'(\xi)$ линейное уравнение первого порядка $pp' + \varphi(\eta)\, p^a + p = 0$.

A. Chiellini, *Bolletino Unione Mat. Italiana* **12** (1933), стр. 14.

6.60. $y'' = a\sqrt{y'^2 + 1}.$

Это — уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а). Оно представляет собой уравнение цепной линии. Для цепной линии $a = \gamma/H$, где γ — вес цепи на единицу длины и H — горизонтальное натяжение. Если точки подвеса (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) $(\xi_1 < \xi_2)$, длина цепи

$L > \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2}$ и γ даны, то $H = \gamma(\xi_2 - \xi_1)/2\rho$, где ρ — однозначно определенное решение уравнения

$$\frac{\operatorname{sh}\rho}{\rho} = \frac{\sqrt{L^2 - (\eta_2 - \eta_1)^2}}{\xi_2 - \xi_1};$$

искомое решение имеет вид

$$y = \frac{H}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{H}(x - C_1) + C_2,$$

где C_1 и C_2 определяются из того условия, что кривая должна проходить через точки (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2).

6.61 $y'' = a\sqrt{y'^2 + 1} + b$; уравнение цепного моста.

В случае $b = 0$ см. 6.60. Общий случай: во-первых, если положить $y'(x) = v(x)$, то получается уравнение 1.59 с искомой функцией v вместо y; таким образом, согласно 1.59, получаем x как функцию от u, причем $\operatorname{tg} u = y'$; во-вторых, если в заданном уравнении положить $\operatorname{tg} u = y'(x)$ и рассматривать u как функцию от y, то получим

$$\frac{\sin u}{\cos^2 u\,(a + b\cos u)} \frac{du}{dy} = 1,$$

и, следовательно,

$$a^2 y = C^* + a\frac{1}{\cos u} + b\ln\left|\frac{(a+b)\cos u}{a + b\cos u}\right|.$$

Это равенство вместе с приведенным в 1.59 выражением для x образует параметрическое представление искомого решения с параметром u.

Ira Freeman, *Bulletin Americ. Math. Soc.* **31** (1925), стр. 425—429.

6.62. $y'' = a\sqrt{y'^2 + by^2}$.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем однородное уравнение:

$$pp' = a\sqrt{p^2 + by^2}.$$

6.63. $y'' = a\left(y'^2 + 1\right)^{3/2}$.

Полагая $u(x) = y'$, получаем

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = a^{-2}.$$

6.64. $y'' = 2ax\left(y'^2 + 1\right)^{3/2}$; см. ч. I, п. 15.3 (б).

$$y = C_1 + \int \frac{ax^2 + C_2}{\sqrt{1 - (ax^2 + C_2)^2}}\,dx.$$

6.65. $y'' = ay\left(y'^2 + 1\right)^{3/2}$.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $2(p^2 + 1)^{-1/2} + ay^2 = C$. Поэтому остается лишь решить уравнение

$$y' = \pm\frac{1}{ay^2 - C}\sqrt{4 - (ay^2 - C)^2}.$$

Краевая задача

$$y'' + \lambda y\left(y'^2 + 1\right)^{3/2} = 0;$$

$$y(-a) = y(+a) = 0, \quad y(x) > 0 \quad \text{при} \quad |x| < a$$

имеет одно и только одно решение для каждого λ, удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{2\gamma^2}{a^2}<\lambda<\frac{\pi^2}{a^2}, \quad \text{где} \quad \gamma=\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{1-t^4}}=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{s}{1-s^2}}\,ds;$$

интегральные кривые расположены симметрично относительно оси y, максимальное значение η решения удовлетворяет неравенству $2a\lambda(\pi-\gamma)\eta<\pi^2$.

R. Caccioppoli, *Portugaliae Mathematica* 3 (1942), стр. 79—86.

6.66. $y''=2a(y+bx+c)\left(y'^2+1\right)^{3/2}$.

Полагая $u(x)=y+bx+c$, получаем $u''[(u'-b)^2+1]^{-3/2}=2au$. Умножив это уравнение на u' и проинтегрировав, получим

$$\frac{bu'-(b^2+1)}{\sqrt{(u'-b)^2+1}}=au^2+C;$$

отсюда, если принять u за независимое переменное, имеем

$$x'(u)=\frac{b}{b^2+1}\pm\frac{au^2+C}{b^2+1}\left[(b^2+1)-(au^2+C)^2\right]^{-1/2}.$$

Таким образом, x можно выразить через u с помощью эллиптических интегралов.

I. Malkin, *Math. Zeitschrift* 101 (1929), стр. 3.

6.67. $y''+y^3y'-yy'\sqrt{4y'+y^4}=0$.

Полагая $u^2=4y'+y^4$, получаем из данного уравнения, если $u\neq 0$, что $u'=2yy'$, т. е. $u=y^2+C$. Таким образом, окончательно получаем решения

$$y=C, \quad 3(x+C)y^3=4,$$

$$y=C_1\operatorname{tg}\left(C_1^3x+C_2\right), \quad y=C_1\operatorname{th}\left(C_1^3x+C_2\right).$$

6.68. $y''=f(y', ax+by)$, $b\neq 0$.

Полагая $u(x)=ax+by(x)$, получаем уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а): $u''=f\left(\dfrac{u'-a}{b}, u\right)$.

6.69. $y''=yf\left(x, \dfrac{y'}{y}\right)$.

Полагая $y'=u(x)y$, получаем уравнение первого порядка:

$$u'=f(x, u)-u^2.$$

6.70. $y''=x^{a-2}f\left(\dfrac{y}{x^a}, \dfrac{xy'}{x^a}\right)$; обобщенно-однородное уравнение.

Полагая $y(x)=x^a\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$, получаем уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а):

$$\eta''+(2a-1)\eta'+a(a-1)\eta=f(\eta, \eta'+a\eta).$$

6.71. $8y''+9y'^4=0$.

$$(y+C_1)^3=(x+C_2)^2.$$

6.72. $ay''+R(y')+cy=0$; уравнение затухающих колебаний с произвольным законом сопротивления $R(y')$.

Пусть $a>0$, $b\geqslant 0$, $c>0$ — постоянные, и $R(v)=[b+f(v)]\,v$ — некоторая непрерывная на всей прямой $-\infty<v<+\infty$ четная функция; пусть, далее, $f(0)=0$, $f'(v)$ при $v\geqslant 0$ существует, непрерывна, неотрицательна, а для $v>0$ даже строго положительна. Тогда для решений данного уравнения справедливо следующее ($v=y'$).

Каждое решение существует в некотором интервале $X<x<\infty$, и в этом интервале av^2+cy^2 монотонно убывает при возрастании x, далее $av^2+cy^2\to 0$ при $x\to\infty$ и $\to\infty$ при $x\to X$. Если $4ac-b^2\leqslant 0$, то каждое решение имеет не больше одного нуля и, следовательно, колебания отсутствуют. Пусть теперь $4ac-b^2>0$. Тогда каждое решение имеет бесконечное множество нулей, амплитуды каждого из решений монотонно стремятся к нулю. Если, кроме того, $\lim\limits_{v\to\infty} f(v)>a+c-b$, то каждое решение имеет наименьший нуль и первый экстремум, а расстояние между каждыми двумя нулями и каждыми двумя экстремальными точками больше, чем $\sqrt{a/c}$; далее, в этом случае существует критическое решение $y=\eta(x)$, амплитуды которого $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ связаны с амплитудами $a_1, a_2, \ldots$ произвольного решения соотношениями $a_1\geqslant\alpha_1>a_2\geqslant\alpha_2>\ldots$ [См. литературу, указанную в 6.46 и 6.48. — *Прим. ред.*]

73—103. $f(x)\,y''=F(x, y, y')$

6.73. $xy''+2y'-xy^n=0$.

Это — иная форма уравнения Эмдена — Фаулера 6.74. Можно применить указанные там подстановки к этому уравнению, и тогда получится, например, уравнение $u''=x^{1-n}u^n$ — аналог уравнения 6.74 (3). Об этом уравнении см. 6.100 и 6.102. Если $n=2$, то $y=2x^{-2}$ — одно из решений, и подстановка $y(x)=x^{-2}\eta(\xi)$, $\xi=\ln x$ приводит к уравнению

$$\eta''-3\eta'-2\eta=\eta^2$$

а отсюда, полагая $\eta'(\xi)=p(\eta)$, получаем

$$p'(\eta)=3+\eta(\eta-2)\,p^{-1}.$$

Численные решения последнего уравнения имеются в работе D. R. Hartree, *Memoires Manchester* 81 (1937), стр. 1—9, в том числе и такие решения, что $y\sim 2x^{-2}$ при $x\to\infty$.

6.74. $xy''+2y'+ax^{\nu}y^n=0$, $a>0$; уравнение Эмдена — Фаулера.

[Литература: Беллман, гл. VII; Сансоне, т. II, гл. XII, § 5. В этих книгах содержится подробное изложение теории уравнения Эмдена — Фаулера и указаны оригинальные источники. — *Прим. ред.*] См. также 6.76.

В случае $a=-1$ см. 6.73. Здесь мы будем предполагать, что $a>0$.

При $n=1$ получаем уравнение типа 2.162 (1). При $n\neq 1$ подстановка $y=a^{1/(n-1)}\bar{y}$ приводит к уравнению

$$xy''+2y'+x^{\nu}y^n=0, \tag{1}$$

причем мы вместо $\bar{y}$ опять пишем y. При $\nu=1$ получается уравнение Эмдена для политропного газового шара. Частное решение уравнения (1):

$$y=cx^{-\mu},\quad \text{где } \mu=(\nu+1)/(n-1),\ c^{n-1}=\mu(1-\mu).$$

Полагая $y(x)=\eta(\xi)$, $\xi=x^{-1}$, получаем из (1) уравнение

$$\eta''+\xi^{-\nu-3}\eta^n=0, \tag{2}$$

а полагая $u(x)=xy$, — уравнение

$$u''+x^{\nu-n}u^n=0; \tag{3}$$

подстановка $\eta(\xi)=\xi^{\mu}v(t)$, $t=\ln\xi$ приводит уравнение (2) к виду

$$v''+(2\mu-1)v'+\mu(\mu-1)v+v^n=0, \tag{4}$$

и отсюда, полагая $v'(t)=p(v)$, имеем

$$pp'+(2\mu-1)p+\mu(\mu-1)v+v^n=0. \tag{5}$$

В конечном виде представить решения этих уравнений можно лишь в некоторых частных случаях (см. ниже).

Об уравнении (1) доказано следующее: если $n\geqslant 0$, $\nu>-1$, то для каждого $C>0$ имеется одно и только одно решение $y(x)$, существующее при $x>0$, такое, что $y(x)\to 0$ при $x\to+0$; оно положительно на интервале $0<x<\left[C^{1-n}\nu(\nu+1)\right]^{1/(\nu+1)}$, и его производная удовлетворяет начальному условию $x^2y'\to 0$ при $x\to 0$; принимая во внимание эти начальные условия для y и y', можно найти y методом последовательных приближений. Далее, если $2\nu-n+3>0$, то уравнение $y(x)=0$ имеет по крайней мере один положительный корень; если $2\nu-n+3\leqslant 0$; то $y>0$ для всех $x>0$ и $y\to 0$ при $x\to+\infty$.

Пусть теперь $\nu=1$ (уравнение Эмдена). При $n=0$ общим решением уравнения (1) является

$$y=C_1+\frac{C_2}{x}-\frac{x^2}{6},$$

а при $n=1$

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

Уравнение (5) для $p=p(v)$ в этом случае записывается в виде

$$pp'-\frac{n-5}{n-1}p-\frac{2(n-3)}{(n-1)^2}v+v^n=0, \tag{5a}$$

следовательно, в частности,

$$pp'+p+v^3=0 \quad \text{при} \quad n=3, \tag{6}$$

$$pp'=\frac{1}{4}v-v^5 \quad \text{при} \quad n=5. \tag{7}$$

Последнее уравнение имеет общее решение

$$v'^2(t)=p^2=\frac{v^2}{4}-\frac{v^6}{6}+C_1,$$

и если положить $C_1=0$, то при $n=5$ уравнение (1) будет иметь решение

$$y^2=\frac{3C}{x^2+3C^2}.$$

Если $y(x)$ есть некоторое решение уравнения (1), то $C^{2/(n-1)}y(x)$ также является решением. Поэтому интегральные кривые, проходящие через ось y, могут быть получены, если известны решения, удовлетворяющие условиям $y(0)=0$ и $y(0)=1$.

6.75. $xy''+2y'+xe^y=0$; см. 6.76 и 6.172.

6.76. $xy'' + ay' + bxe^y = 0.$

Литература: R. Emden, Gaskugeln, Leipzig und Berlin, 1907; H. Lemke, *Journ. f. Math.* 142 (1913), стр. 118—137. См. также 6.74.

Условимся исходное уравнение обозначать номером (1). Если $b(a-1) > 0$, то

$$y = \ln \frac{2a-2}{bx^2} \tag{2}$$

— одно из решений. Подстановка $y(x) = \bar{y}(\bar{x})$, $\bar{x} = x\sqrt{|b|}$ приводит (1) к уравнению того же вида, в котором $b = \pm 1$, а подстановка $y = \eta(\xi) - 2\xi$, $\xi = \ln x$ — к уравнению

$$\eta'' + (a-1)\eta' + be^{\eta} = 2a - 2; \tag{3}$$

полагая $\eta'(\xi) = p(\eta)$, получаем

$$pp' + (a-1)p + be^{\eta} = 2a - 2. \tag{4}$$

С уравнением (1) связано также уравнение 6.77. Полагая $u(t) = xy'(x)$, $t = x^2e^y$, получаем из (1) уравнение 1.237:

$$t(u+2)u' + (a-1)u + bt = 0. \tag{5}$$

Подстановка $y = r(s) + \ln \frac{2a-2}{bx^2}$, $s = x^{1-a}$ приводит уравнение (1) в случае $b(a-1) > 0$ к виду

$$(a-1)s^2r'' + 2(e^r - 1) = 0. \tag{6}$$

(а) $a = 0$. Получаем $y' = \pm\beta\sqrt{C_1 \mp e^y}$, где $\beta = \sqrt{2|b|}$, причем под корнем нужно брать верхний знак или нижний в зависимости от того, будет $b > 0$ или < 0. Далее получается:

$$\text{при } C_1 = c^2 > 0: \quad c^2e^{-y} = \begin{cases} \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2}c\beta(x - C_2) & \text{при} \quad b > 0, \\ \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2}c\beta(x - C_2) & \text{при} \quad b < 0; \end{cases}$$

$$\text{при } C_1 = -c^2 < 0: \quad c^2e^{-y} = \sin^2 \frac{1}{2}c\beta(x - C_2);$$

при $C_1 = 0$: $e^{-y} = -\frac{1}{2}b(x - C_2)^2$. Оба последних случая возможны при $b < 0$.

(б) $a = 1$. Тогда из (5) вытекает $u^2 + 4u + 2bt + 4C = 0$; следовательно, учитывая (1), получаем для y' уравнение Риккати $2x^2y'' = x^2y'^2 + 2xy' + 4C$; подстановкой $y' = -2v'/v$ оно приводится к уравнению Эйлера (ч I, п. 22.3): $x^2v'' - xv' + Cv = 0$.

(в) $a = 2$. Одно решение получаем из (2). В общем виде уравнение (1) в этом случае, по-видимому, не может быть решено в элементарных функциях. Интегральные кривые уравнения (4) примыкают в виде спиралей к точке $\eta = \ln 2$, $p = 0$; графики кривых см. в указанной книге Эмдена.

(г) $a \neq 0$ и $\neq 1$. Для этого случая Лемке исследовал вид решений вблизи точки $x = 0$ с помощью разложений в ряды.

6.77. $xy'' + ay' + bx^{5-2a}e^y = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = x^{3-a}$ $(a \neq 3)$, получаем уравнение 6.76:

$$\xi\eta'' + \frac{2}{3-a}\eta' + \frac{b}{(3-a)^2}\xi e^{\eta} = 0.$$

6.78. $xy'' + (y-1)\,y' = 0.$
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \ln|x|$, получаем $\eta'' - 2\eta' + \eta\eta' = 0$. Поэтому данное уравнение второго порядка может быть сведено к уравнению первого порядка $2\eta' = 4\eta - \eta^2 + C$, которое решается согласно ч. I, п. 4.1.

6.79. $xy'' - x^2y'^2 + 2y' + y^2 = 0.$
Обобщенно-однородное уравнение. Согласно ч. I, п. 15.2, получаем решения: $y = 0$ и

$$x = \exp\left\{\int \left(C_1e^{\eta} + 2\eta + 1\right)^{-1} d\eta + C_2\right\}, \quad \text{где } \eta = xy.$$

6.80. $xy'' + a\,(xy' - y)^2 = b.$
Полагая $y = xu(x)$, получаем для u' уравнение Риккати

$$x^2u'' + ax^4u'^2 + 2xu' = b,$$

и отсюда, полагая $ax^2u' = v'/v$, — линейное уравнение $v'' = abv$.

6.81. $2xy'' + y'^3 + y' = 0.$

$$(y + C_1)^2 = 2C_2x - C_2^2.$$

6.82. $x^2y'' = a\,(y^n - y).$
Полагая $y(x) = x^{(1-k)/2}\,\eta(\xi)$, $\xi = x^k$, $k = \sqrt{1-4a}$, получаем уравнение 6.11:

$$\eta'' = \frac{a}{1-4a}\,\xi^{\frac{n-1}{2k} - \frac{n+3}{2}}\,\eta^n.$$

6.83. $x^2y'' + a\,(e^y - 1) = 0$; см. 6.76 (6).

6.84. $x^2y'' - (2a + b - 1)\,xy' + [\lambda^2b^2x^{2b} + a\,(a + b)]\,y = 0,\ \lambda \neq 0,\ b \neq 0.$

$$y = x^a\,(C_1\cos\lambda x^b + C_2\sin\lambda x^b).$$

6.85. $x^2y'' + (a + 1)\,xy' = x^af\,(x^ay,\ xy' + ay).$
Полагая $y = x^{-a}\eta(\xi)$, $\xi = x^a/a$, получаем уравнение, рассмотренное в ч. I, п. 15.3 (а): $\eta'' = f(\eta,\ \eta')$.

6.86. $x^2y'' + a\,(xy' - y)^2 = bx^2.$
Полагая $y = xu(x)$, получаем

$$xu'' + ax^2u'^2 + 2u' = b.$$

Это — уравнение Риккати относительно u'. Из него, полагая $axu' = v'/v$, получаем уравнение 2.162 (1): $x^2v'' + xv' - abx^2 = 0$.

6.87. $x^2y'' + ayy'^2 + bx = 0.$
Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение, рассмотренное в ч. I, п. 15.3 (а): $\eta'' + a\eta\,(\eta' + \eta)^2 + \eta' + b = 0$.

6.88. $x^2y'' = \sqrt{ax^2y'^2 + by^2}\,.$
Обобщенно-однородное уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.2. Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение $\eta'' + \eta' = \pm\sqrt{a\,(\eta' + \eta)^2 + b\eta^2}$ типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а), которое подстаиовкой $p(\eta) = \eta'(\xi)$ приводится к однородному уравнению

$$p\,(p' + 1) = \pm\sqrt{a\,(p + \eta)^2 + b\eta^2}.$$

6.89. $(x^2 + 1)\,y'' + y'^2 + 1 = 0.$
Полагая $p(x) = y'$, находим

$$y = C_1 + C_2x + \left(C_2^2 + 1\right)\ln|x - C_2| \ \text{ и } \ y = -{}^1\!/_2x^2 + C.$$

6.90. $4x^2y'' - x^4y'^2 + 4y = 0$.

Обобщенно-однородное уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.2. Полагая $y(x) = x^{-2}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем уравнение

$$4\eta'' - \eta'^2 + 4\eta\eta' - 20\eta' + 4\eta(7 - \eta) = 0,$$

которое, согласно ч. I, п. 15.3 (а), может быть сведено к уравнению первого порядка.

6.91. $9x^2y'' + ay^3 + 2y = 0$.

Полагая $y = x^{1/3}\eta(\xi)$, $\xi = x^{1/3}$, получаем уравнение $\eta'' + a\eta^3 = 0$, которое, согласно изложенному в ч. I, п. 23.1, может быть сведено к уравнению первого порядка, разрешимому в эллиптических функциях.

6.92. $x^3(y'' + yy' - y^3) + 12xy + 24 = 0$; частный случай уравнения 6.34 (б).

$$y = \frac{x^3u' + 2}{x(x^2u - 1)},$$

где u — произвольное решение уравнения $u'' = 6u^2$.

6.93. $x^3y'' = a(xy' - y)^2$.

Обобщенно-однородное уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.2. Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем легко разрешимое уравнение, из которого находим

$$y = \frac{x}{a}\ln\frac{x}{C_1x + C_2}.$$

6.94. $2x^3y'' + (2x^3y + 9x^2)y' - 2x^3y^3 + 3x^2y^2 + axy + b = 0$.

(а) Полагая $y(x) = \xi'(x)\eta(\xi)$, $\xi = -2|x|^{-1/2}$, получаем

$$\xi^3(\eta'' + \eta\eta' - \eta^3) + (2a - 12)\xi\eta - 4b = 0.$$

(б) При $a = 12$, $b = -6$ имеем решения

$$y = \frac{u' - 1}{u - x}, \tag{1}$$

где $u(x)$ — произвольное решение уравнения $x^3u'^2 = u^3 + C$ (C — произвольно). То, что формула (1) действительно дает *решения*, легко проверить; то, что формула (1) дает *все* решения, следует из того, что среди решений (1) можно найти такое, которое удовлетворяет произвольным начальным условиям для y и y' в любой точке $x \neq 0$.

6.95. $2(4x^3 - x^k)(y'' + yy' - y^3) + (12x^2 - kx^{k-1})(3y' + y^2) + axy + b = 0$.

(а) Полагая $y(x) = \xi'(x)\eta(\xi)$, $\xi' = (4x^3 - x^k)^{-1/2}$, получаем

$$2(\eta'' + \eta\eta' - \eta^3) + [(a - 24)x + k(k-1)x^{k-2}]\eta + b\sqrt{4x^3 - x^k} = 0,$$

где еще остается выразить x через ξ; при $k = 0, 1, 2$ это можно сделать с помощью эллиптических функций.

(б) Если $k = 1$, $a = 48$, $b = -24$, то данное уравнение имеет решение

$$y = \frac{u' - 1}{u' - x},$$

где $u(x)$ — произвольное решение уравнения $(4x^3 - x)u'^2 = 4u^3 - u + C$ (C — произвольно); оно может быть выражено, следовательно, через эллиптические функции.

6.96. $x^4y'' + a^2y^\nu = 0$.

При $\nu = 1$ получается тип 2.14. Если $\nu \neq 1$, то

$$y = \left(\frac{2(\nu - 3)x^2}{a^2(\nu - 1)^2}\right)^{1/(\nu-1)}$$

— одно из решений. См. 6.74 и 6.76.

6.97 $x^4 y'' - (2xy + x^3)\, y' + 4y = 0.$

Обобщенно-однородное уравнение. Пользуясь подстановкой $y(x) = x^2 \eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ и затем полагая $\eta'(\xi) = u(\eta)$, получаем $u' = 2(\eta - 1)$ и $u = 0$; следовательно,

$$\eta - 1 = \begin{cases} C_1 \operatorname{tg}(C_1 \xi + C_2) & \text{при } C = C_1^2, \\ -C_1 \operatorname{th}(C_1 \xi + C_2),\ -C_1 \operatorname{cth}(C_1 \xi + C_2) & \text{при } C = -C_1^2; \end{cases}$$

кроме того, $(\xi + C)(1 - \eta) = 1$ и $\eta = C$.

6.98. $x^4 y'' - x^2 y'^2 - x^3 y' + 4y^2 = 0.$

Обобщенно-однородное уравнение. Используя ч. I, п. 15.2, получаем $y = 0$, а также

$$x = \exp\left\{ \int (C_1 e^{\eta} - 4\eta - 2)^{-1}\, d\eta + C_2 \right\}, \qquad y = x^2 \eta$$

6.99. $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0.$

Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = x^{-1}$ или $u(x) = xy' - y$, получаем легко разрешимое уравнение, из которого находим

$$y = C_1 x + x \arcsin \frac{C_2}{x}.$$

6.100. $y'' \sqrt{x} = y^{3/2}$; уравнение Томаса — Ферми.

[Теорема существования и единственности для этого уравнения содержится в книге С а н с о н е, т. II, гл. XII, § 7. Там же указаны оригинальные статьи.— *Прим. ред.*].

Одно из решений:

$$y = 144 x^{-3}.$$

Однако в теории Томаса — Ферми требуется найти такое решение, что «$y(0) = 1$, $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$»; существование такого решения следует из теоремы Каратеодори (ч. I, п. 5.3) и результатов Мамбриани (ч. II, п. 10.2 (а)). Для этого решения имеем вблизи точки $x = 0$

$$x = 1 - 1{,}58x + {}^4/_3 x^{3/2} + \ldots,$$

а для больших x

$$y \approx (1 + z)^{-3{,}886}, \quad \text{где} \quad z = \left(x/\sqrt[3]{144}\right)^{0{,}772}.$$

Это решение затабулировано (V. B u s h, S. H. C a l d w e l l, *Physical Review* (2), 38 (1931), стр. 1898—1901).

Если в правой части рассматриваемого уравнения стоит знак минус, то получается уравнение, содержащееся в уравнениях Эмдена 6.74 (2) и (3). Указанные там подстановки могут быть применены также и к уравнению Томаса — Ферми. Это уравнение обобщенно-однородно и подстановкой $y = x^{-3}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ приводится к уравнению

$$\eta'' - 7\eta' + 12\eta - \eta^{3/2} = 0, \tag{1}$$

из которого, полагая $p(\eta) = \eta'(\xi)$, получаем

$$pp' - 7p + 12\eta - \eta^{3/2} = 0. \tag{2}$$

Подстановка $y = x^{-3}\xi$, $x = \exp \int \eta(\xi)\, d\xi$ приводит к уравнению Абеля $\eta' + 7\eta^2 + (\sqrt{\xi} - 12)\,\xi\eta^3 = 0.$

6.101. $(ax^2+bx+c)^{3/2}\,y'' = f\left(\dfrac{y}{(ax^2+bx+c)^{1/2}}\right)$.

Полагая $u(x) = (ax^2+bx+c)^{-1/2}\,y(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(ax^2+bx+c)^2\,u'^2 = \left(\frac{1}{4}\,b^2 - ac\right)u^2 + 2\int f(u)\,du$$

6.102. $x^{\frac{n}{n+1}}\,y'' = y^{\frac{2n+1}{n+1}}$.

При $n=1$ получается уравнение Томаса — Ферми 6.100; см. также 6.73 и 6.74. Одно из решений

$$y = \varphi(x) = \left[2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\right]^{1+\frac{1}{n}} x^{-1-\frac{2}{n}}. \qquad (1)$$

Это решение, однако, не удовлетворяет краевым условиям задачи Томаса — Ферми: «$y(0) = y_0 \neq 0$, $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$». То, что решение, удовлетворяющее этим условиям, существует, следует из ч. II, п. 10.2.

Подстановка $\eta(\xi) = y(x)/\varphi(x)$, $\xi = \ln x$ приводит к уравнению

$$\eta'' - \frac{3n+4}{n}\,\eta' - \frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}\,\eta\left(\eta^{n/(n+1)} - 1\right) = 0, \qquad (2)$$

откуда, принимая η за независимую переменную и полагая $u(\eta) = \eta'(\xi)$, получаем

$$uu' = \frac{3n+4}{n}\,u + \frac{2(n+1)(n+2)}{n^2}\,\eta\left(\eta^{n/(n+1)} - 1\right). \qquad (3)$$

Наконец, применяя подстановку

$$u(\eta) = \frac{n+2}{n}\,\eta\left[1 - t^{n(n+1)}v(t)\right], \qquad \eta = t^{(n+1)(n+2)},$$

получаем уравнение

$$v'(t) = -2(n+1)^2\,\frac{t^{n(n+1)-1}v^2 - t^{n-1}}{t^{n(n+1)}\,v - 1}. \qquad (4)$$

G. Lampariello, *Atti Accad Lincei* (6), **19** (1934), стр. 284—290, 386—393

6.103 $f^2y'' + ff'y' = \Phi(y, fy')$, $f = f(x)$.

Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}$, получаем уравнение типа ч. I, п. 15.3 (а): $\eta'' = \Phi(\eta, \eta')$.

104—187. $f(x)\,yy'' = F(x, y, y')$

6.104. $yy'' = a$; см. ч. I, п. 23.1.

$$x = \int (2a\ln y + C_1)^{-1/2}\,dy + C_2.$$

6.105. $yy'' = ax$, $a \neq 0$.

При нахождении решений, удовлетворяющих начальным условиям $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, возможны следующие случаи:

а) $c_0 = c_1 = 0$ $\qquad y = \pm\sqrt{\dfrac{4a}{3}\,x^3}$;

б) $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$ $\qquad y = c_1x + c_2x^2 + \ldots$;

этот ряд заведомо сходится при $|x| < c_1^2/|a|$; его первые коэффициенты:

$$c_2 = \frac{a}{2c_1}, \quad c_3 = -\frac{c_2^2}{3c_1}, \quad c_4 = \frac{2c_2^3}{9c_1^2}, \quad c_5 = -\frac{17c_2^4}{90c_1^3};$$

в) $c_0 \neq 0$: согласно общим теоремам (см. ч. I, п. 6.3), решение может быть представлено в окрестности точки $x=0$ сходящимся степенным рядом.

6.106. $yy'' = ax^2, \quad a \neq 0.$

Если $y(x)$ означает решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = c_0$, $y'(0) = c_1$, то возможны следующие случаи:

а) $c_0 = c_1 = 0$: $\qquad y = \pm x^2 \sqrt{\dfrac{a}{2}}$;

б) $c_0 = 0, \quad c_1 \neq 0$: $\qquad y = c_1 x(1 + b_1x^2 - b_2x^4 + b_3x^6 - \ldots)$;

этот ряд заведомо сходится при $|x| < \sqrt{\dfrac{3c_1^2}{|a|}}$; его первые коэффициенты:

$$b_1 = \frac{a}{6c_1^2}, \quad b_2 = \frac{3}{10}b_1^2, \quad b_3 = \frac{13}{70}b_1^3, \quad b_4 = \frac{25}{168}b_1^4;$$

если $a > 0$, $c_1 > 0$, $x > 0$, то y положительно, монотонно возрастает вместе с x и при $x \to \infty$ нмеем

$$\frac{y'}{2x} \to \sqrt{\frac{1}{2}a}, \quad y'' \to \sqrt{2a};$$

в) $c_0 \neq 0$: согласно общим теоремам, решение может быть представлено в окрестности точки $x=0$ сходящимся степенным рядом.

F. Mertens, *Akad. Wien* **126** (1917), стр. 3—7; W. Wirtinger, там же, **128** (1919), стр. 3—8.

6.107. $yy'' + y'^2 - a = 0.$

$$y^2 = ax^2 + C_1x + C_2 \quad \text{и} \quad y = \pm x\sqrt{a} + C.$$

6.108. $yy'' + y^2 = ax + b.$

О графическом решении см. J. J. Muller, *Revue Électricité* **42** (1937), стр. 389—406, 419—434.

6.109. $yy'' + y'^2 - y' = 0$; см. ч. I, п. 15.3 (а).

$$y = C \quad \text{и} \quad x = y + C_1 \ln|y - C_1| + C_2.$$

6.110. $yy'' - y'^2 + 1 = 0$; тип 6.165, см. также ч. I, п. 15.3 (а).

$$C_1y = \operatorname{sh}(C_1x + C_2), \quad C_1y = \sin(C_1x + C_2) \quad \text{и} \quad y = \pm x + C.$$

6.111. $yy'' - y'^2 - 1 = 0$; тип 6.165, см. также ч. I, п. 15.3 (а).

$$C_1y = \operatorname{ch}(C_1x + C_2) \text{ — цепная линия.}$$

6.112. $yy'' - y'^2 + e^{2x}(ay^4 + b) + e^x y(cy^2 + d) = 0.$

Полагая $\eta(\xi) = y(x)$, $\xi = e^x$, получаем уравнение 6.171:

$$\xi(\eta\eta'' - \eta'^2) + \eta\eta' + \xi(a\eta^4 + b) + c\eta^3 + d\eta = 0.$$

6.113. $yy'' - y'^2 - y^2 \ln y = 0.$

Полагая $u(x) = \ln y$, получаем

$$\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

6.114. $yy'' - y'^2 - y' + fy^3 + y^2 \dfrac{d}{dx} \dfrac{f'}{f} = 0, \ f = f(x).$

Решения получаются из уравнения первого порядка

$$\left(y' + \frac{f'}{f} y \pm 1\right)^2 + 2y^2 \left(yf + \int f\,dx\right) = 0.$$

Айнс, стр. 450.

6.115. $yy'' - y'^2 + f(x)\,y' - y^3 - f'(x)\,y = 0.$

Решения получаются из уравнения первого порядка

$$(y' - f)^2 = 2y^2 \left(y - \int f\,dx + C\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 24, уравнение (3).

6.116. $yy'' - y'^2 + f'y' - y^4 + fy^3 - f''y = 0; \ f = f(x).$

Решения получаются из уравнения первого порядка

$$(y' - f')^2 - y^2 (y - f)^2 = Cy^2.$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 24, уравнение (2); Айнс, стр. 450.

6.117. $yy'' - y'^2 + ayy' + by^2 = 0.$

Полагая $y' = yu(x)$, получаем линейное уравнение: $u' + au + b = 0$.

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 55, уравнение (15).

6.118. $yy'' - y'^2 + ayy' + by^3 - 2ay^2 = 0$; см. 6.172 (2).

6.119. $yy'' - y'^2 - (ay - 1)\,y' - 2b^2y^3 + 2a^2y^2 + ay = 0.$

Если $a \neq 0$, то

$$y = -\frac{1}{2a} + e^{2ax}(u^2 + C), \quad \text{где} \quad u' = be^{-ax}\left[(u^2 + C)\,e^{2ax} - \frac{1}{2a}\right];$$

если $a = 0$, $b \neq 0$, то

$$y = -x + u^2 + C, \quad \text{где} \quad u' = b(u^2 + C - x).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 54, уравнение (12).

6.120. $yy'' - y'^2 + a(y - 1)\,y' - y(y + 1)(b^2y^2 - a^2) = 0.$

$$y = -1 + Ce^{-ax}\frac{1 + u^2}{1 - u^2}, \quad \text{где} \quad \frac{2}{b}u' = Ce^{-ax}(u^2 + 1) + u^2 - 1.$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 54, уравнение (11).

6.121. $yy'' - y'^2 + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\,yy' + (\cos^2 x - \nu^2 \operatorname{ctg}^2 x)\,y^2 \ln y = 0.$

$$y = \exp[Z_\nu(\sin x)], \qquad Z_\nu \text{ — цилиндрическая функция.}$$

R. Müller, *Zeitschrift f. angew Math. Mech.* 19 (1939), стр. 46.

6.122. $yy'' - y'^2 + f(x)\,yy' + g(x)\,y^2 = 0.$

Полагая $y' = yu(x)$, получаем линейное уравнение: $u' + fu + g = 0$.

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 38, уравнение (6).

6.123. $yy'' - y'^2 + (fy^2 + g)\, y' + f'y^3 - g'y = 0, \quad f = f(x), \quad g = g(x).$

Решениями являются решения уравнения Риккати $y' + fy^2 + Cy - g = 0$. См. P. Painlevé, *Acta. Math.* **25** (1902), стр. 24, уравнение (1); Айнс, стр. 450.

6.124. $yy'' - 3y'^2 + 3yy' - y^2 = 0.$

Обобщенно-однородное уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.2. Полагая $y' = yu(x)$, получаем уравнение Риккати $u' = 2u^2 - 3u + 1$ с общим решением $(1 - 2Ce^x)\, u = 1 - Ce^x$, и отсюда окончательно находим

$$(2e^x - C_1)\, y^2 = C_2 e^{2x}.$$

6.125. $yy'' = ay'^2.$

Деля на yy', получаем уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя, получаем $y' = C\,|\,y\,|^a$, и отсюда

$$y = \begin{cases} |\,C_1 x + C_0\,|^{1/(1-a)} & \text{при} \quad a \neq 1, \\ C_1 e^{Cx} & \text{при} \quad a = 1. \end{cases}$$

6.126. $yy'' + a\left(y'^2 + 1\right) = 0$; см. 6.165 и 6.54.

$$x = \int \left(C_1 y^{-2a} - 1\right)^{-1/2} dy + C_2.$$

При $a = 1, \ -1, \ 1/2, \ -1/2$ получаем соответственно полуокружности, цепные линии, циклоиды и параболы.

6.127. $yy'' + ay'^2 + by^3 = 0$; см. 6.165 и 6.54.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $ypp' + ap^2 + by^3 = 0$; подстановка $p(y) = y^{3/2} u(t)$, $t = \ln y$ приводит это уравнение к уравнению Бернулли

$$uu' + \left(a + \frac{3}{2}\right) u^2 + b = 0.$$

Отсюда получаем

$$t = -\int \frac{u\,du}{(a + 3/2)\, u^2 + b} + C = -\frac{1}{2a+3} \ln \left[\left(a + \frac{3}{2}\right) u^2 + b\right] + C;$$

следовательно,

$$y'^2 = y^3 \left(Cy^{-2a-3} - \frac{2b}{2a+3}\right).$$

Уравнение типа Бернулли получается также после подстановки $y'(x) = u(y)$:

$$yu' - au - by^3u^3 = 0.$$

6.128. $yy'' + ay'^2 + byy' + cy^2 + dy^{1-a} = 0.$

Полагая

$$y = \begin{cases} e^u & \text{при} \quad a = -1, \\ u^{1/(a+1)} & \text{при} \quad a \neq -1, \end{cases}$$

получаем для $u(x)$ уравнение с постоянными коэффициентами: $u'' + bu' + c + d = 0$ и соответственно $u'' + bu' + (a+1)\, cu = -(a+1)\, d$.

6.129. $yy'' + ay'^2 + f(x)\, yy' + g(x)\, y^2 = 0.$

Полагая $y = u^{1/(a+1)}$, получаем линейное уравнение

$$u'' + fu' + (a+1)\, gu = 0.$$

6.130. $yy'' + ay'^2 + by^2y' + cy^4 = 0$; см. 6.54 и 6.165.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $ypp' + ap^2 + by^2p + cy^4 = 0$; далее, подстановка $p(y) = y^2u(t)$, $t = \ln y$ приводит к уравнению $uu' + (a+2)u^2 + bu + c = 0$; его решение:

$$t = -\int \frac{u\,du}{(a+2)u^2 + bu + c} + C_1.$$

После того, как этот интеграл вычислен и получившееся уравнение решено относительно u, остается решить уравнение $y'(x) = y^2u(\ln y)$, из которого получаем

$$x = \int \frac{dy}{y^2u(\ln y)} + C_2.$$

6.131. $yy'' - \dfrac{a-1}{a}y'^2 - fy^2y' + \dfrac{a}{(a+2)^2}f^2y^4 - \dfrac{a}{a+2}f'y^3 = 0,\ f = f(x).$

Полагая $u(x) = y\exp\left(-\dfrac{2}{a+2}\displaystyle\int yf\,dx\right)$, получаем

$$auu'' - (a-1)u'^2 = 0.$$

С помощью подстановки $u' = uv(x)$ находим отсюда $u = C\,|x + C^*|^a$; следовательно, так как функция $w(x) = y^{-1}$ удовлетворяет по определению u линейному уравнению

$$w' + \frac{u'}{u}w + \frac{a}{a+2}f = 0,$$

то имеем

$$y = -\frac{(a+2)\,|x + C_1|^a}{a\displaystyle\int |x + C_1|^a f(x)\,dx + C_2}.$$

Айнс, стр. 453.

6.132. $yy'' - (y'^2 + 1) - 2ay(y'^2 + 1)^{3/2} = 0.$

Дифференциальное уравнение меридианной кривой поверхности вращения постоянной средней кривизны a.

При $a = 0$ получаем цепную линию

$$C_1y = \operatorname{ch}(C_1x + C_2).$$

При $a = \pm 1$ получаем эллиптический интеграл

$$x = \int \frac{y^2 + C_1}{\sqrt{y^2 - (y^2 + C_1)^2}}\,dy + C_2.$$

Интегральные кривые описываются фокусом конического сечения, катящегося по некоторой прямой.

6.133 $(y + x)y'' + y'^2 - y' = 0$; уравнение в полных дифференциалах.

$$(y + x)y' - 2y = C.$$

6.134. $(y - x)y'' - 2y'(y' + 1) = 0$; частный случай уравнения 6.136.

$$y = C, \quad y = C - x, \quad y = C_1 + \frac{C_2}{x - C_1}.$$

6.135. $(y-x)y''+(y'+1)\left(y'^2+1\right)=0$; частный случай уравнения 6.136.
Находим $y+x=C_1$, а также и другие решения из уравнения 1.502: $(y-x)^2\left(y'^2+1\right)-C_2^2(y'+1)^2=0$, т. е.

$$(x-C_3)^2+(y-C_3)^2=C_2^2.$$

6.136. $(y-x)y''+f(y')=0$.
Решения. $y=ax+C_1$, где a — корни уравнения $f(a)=0$. Остальные решения находятся из уравнения

$$(y-x)\varphi(y')=C_2, \quad \text{где} \quad \varphi(u)=\exp\left(\int\frac{u-1}{f(u)}\,du\right).$$

6.137. $2yy''+y'^2+1=0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.54.

$$C_1\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{C_1-y}}-\sqrt{y(C_1-y)}=x+C_2$$

или в параметрической форме (уравнение циклоид)

$$x=C_1(t-\sin t)+C_2, \qquad y=C_1(1-\cos t).$$

6.138. $2yy''-y'^2+a=0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.224.
Решения получаются из уравнения $y'^2-a=Cy$.

6.139. $2yy''-y'^2+f(x)y^2+a=0, \quad a>0$.
Частный случай уравнения 6.165. Если u, v — два решения линейного уравнения $4y''+f(x)y=0$, удовлетворяющие условию $(uv'-u'v)^2=a$, то $y=uv$ — решение исходного уравнения.

6.140. $2yy''-y'^2-8y^3=0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.224.
Решения получаются из уравнения $y'^2=4y^3+Cy$, разрешнмого в эллиптических функциях. См. 6.146.

6.141. $2yy''-y'^2-8y^3-4y^2=0$; частиый случай уравнений 6.165 и 6.224.
Решения получаются из уравнения $y'^2=4y^3+4y^2+Cy$, разрешимого в эллиптических функциях. См. 6.146.

6.142. $2yy''-y'^2-8y^3-4xy^2=0$.
Полагая $y=\pm u^2$, получаем уравнеиие 6.9 и соответственно 6.6:

$$u''\mp 2u^3-xu=0.$$

6.143. $2yy''-y'^2+ay^3+by^2=0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.224.
Полагая $y=u^2$, получаем $4u''+au^3+bu=0$, и отсюда, полагая $p(u)=u'(x)$, находим $2(p^2)'+au^3+bu=0$.

6.144. $2yy''-y'^2+ay^3+2xy^2+1=0, \quad a\neq 0$.
Если $y(x)\neq 0$ — решение этого уравнения, то определим $u(x)$ равенством $y'=2uy-1$. Тогда нз заданиого уравнеиия получаем

$$ay=-4u'-4u^2-2x \tag{1}$$

и

$$u''-2u^3-xu-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=0. \tag{2}$$

Обратно, если u — решение уравнения (2), то из (1) получаем решение исходного уравнения. Таким образом, исходиое уравнение сводится к уравнению (2), т. е. к уравнению типа 6.6. См. Айнс, стр. 456.

6.145. $2yy''-y'^2+ay^3+bxy^2=0$.
Полагая $y=u^2$, получаем уравнение 6.9: $4u''+au^3+bxu=0$.

6.146. $2yy'' - y'^2 - 3y^4 = 0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.224.

Решения получаются из уравнения $y'^2 = y^4 + Cy$, разрешимого в эллиптических функциях. См. Айнс, стр. 453—456.

6.147. $2yy'' - y'^2 - 3y^4 - 8xy^3 - 4(x^2 + a)y^2 + b = 0$.

В общей форме это уравнение не может быть решено в элементарных функциях; его решениями являются так называемые трансцендентные функции Пенлеве (см. 6.3). См. B. Gambier, *Acta Math.* **33** (1910), стр. 31, уравнение (3); Айнс, стр. 463 и сл.

6.148 $2yy'' - y'^2 + 3fyy' - 8y^3 + 2(f' + f^2)y^2 = 0$, $f = f(x)$.

Это уравнение может быть сведено к уравнению первого порядка:

$$(y' + fy)^2 = 4y\left\{y^2 + C\exp\left(-2\int f\,dx\right)\right\}.$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 35, уравнение (3).

6.149. $2yy'' - y'^2 + 4y^2y' + y^4 + f(x)y^2 + 1 = 0$.

Полагая $y = u'/u$, получаем $2u'u''' - u''^2 + fu'^2 + u^2 = 0$, откуда, дифференцируя, приходим к линейному уравнению

$$u^{(4)} + fu'' + \frac{1}{2}f'u' + u = 0.$$

Айнс, стр. 454 и сл.

6.150. $2yy'' - 3y'^2 = 0$; частный случай уравнения 6.224.

Разделив это уравнение на yy', можно его проинтегрировать:

$$y = C_1(x + C_2)^{-2} \quad \text{и} \quad y = C.$$

6.151. $2yy'' - 3y'^2 - 4y^2 = 0$; тип 6.224.

Принимая y за независимое переменное, получаем для $p(y) = y'(x)$ однородное уравнение $2ypp' - 3p^2 - 4y^2 = 0$ и отсюда

$$y\cos^2(x + C_1) = C_2.$$

6.152. $2yy'' - 3y'^2 + f(x)y^2 = 0$.

Полагая $u(x) = |y|^{-1/2}$, получаем линейное уравнение $4u'' = f(x)u$.

6.153. $2yy'' - 6y'^2 + ay^5 + y^2 = 0$; тип 6.224.

Полагая $p(y) = y'$, получаем уравнение Бернулли

$$p' - \frac{3p}{y} + \frac{ay^4 + y}{p} = 0; \qquad 4p^2 = 4ay^5 + y^2 + Cy^6.$$

6.154. $2yy'' - y'^2(y'^2 + 1) = 0$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 15.3 (a).

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем уравнение $y = 2C\dfrac{y'^2}{y'^2 + 1}$, т. е. уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 4.17 (a). Отсюда

$$x = 2C_1\frac{t}{t^2 + 1} + 2C_1\operatorname{arctg} t + C_2, \qquad y = 2C_1\frac{t^2}{t^2 + 1},$$

или, если положить $t = \operatorname{tg}(u/2)$, то

$$x = C_1u + C_1\sin u + C_2, \qquad y = C_1(1 - \cos u),$$

т. е. получаем семейство циклоид, точки возврата которых лежат на оси x. См. Айнс, стр. 84.

6.155. $2(y-a)y''+y'^2+1=0$. См. также 6.224.
Применяя метод ч. I, п. 15.3 (а) получим

$$2x=C_1\pm\sqrt{(y-a+C_2)(a-y)}\mp C_2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a-y}{y-a+C_2}}.$$

6.156. $3yy''-2y'^2=ax^2+bx+c$.
Трижды дифференцируя, получаем $3yy^{(5)}+5y'y^{(4)}=0$, и отсюда $y^{(4)}=C|y|^{-5/3}$; далее, исключая из этих уравнений производные высших порядков, получаем

$$(2Ry'-3R'y)^2=9(b^2-4ac)y^2-2R^3+CR|y|^{4/3},$$

где $R=ax^2+bx+c$. Если ввести функцию $u(x)$ равенством $u^3y^2=R^3$, то она определится из уравнения

$$\int u^{-1}[9(b^2-4ac)+C_1u-2u^3]^{-1/2}\,du\pm\int\frac{dx}{3R}=C_2,$$

если только входящие сюда знаменатели не обращаются в нуль.

6.157. $3yy''-5y'^2=0$; тип 6.224.

$$y^2=(C_1x+C_2)^{-3}.$$

6.158. $4yy''-3y'^2+4y=0$; частный случай уравнения 6.238.
Полагая $y=\pm u^2$, получаем уравнение 6.138: $2uu''-u'^2\pm1=0$. Полагая $y'(x)=\sqrt{u(y)}$, получаем линейное уравнение

$$2yu'-3u+4y=0.$$

6.159. $4yy''-3y'^2-12y^3=0$; частный случай уравнения 6.224.
Подстановки, указанные в 6.158, дают соответственно:

$$2uu''-u'^2\mp3u^4=0\ (\text{тип } 6.146),\qquad 2yu'-3u-12y^3=0.$$

6.160. $4yy''-3y'^2+ay^3+by^2+cy=0$; частный случай уравнений 6.165 и 6.224.
К этому уравнению могут быть применены преобразования, рассмотренные в 6.158.

6.161. $4yy''-3y'^2+\left(6y^2-2\dfrac{f'}{f}y\right)y'+y^4-2\dfrac{f'}{f}y^3+gy^2+fy=0,$

$$f=f(x),\qquad g=g(x).$$

$$4y=-f\left(2u'+u^2-\frac{f'}{f}+\frac{g}{4}\right)^{-1},$$

где $u=v'/v$. Здесь v — решение линейного уравнения

$$v'''=\frac{3f'}{2f}v''+\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}-\frac{g}{4}\right)v'+\frac{1}{8}\left(\frac{f'}{f}g-f-g'\right)v.$$

6.162. $4yy''-5y'^2+ay^3=0$; частный случай уравнения 6.224.
При $a=-4\alpha^2$ решением является, например, функция

$$y=(\alpha x+C)^{-2}.$$

Полагая $y=u^{-4}$, получаем уравнение 6.209: $u^3u''=a/16$. Метод, указанный в 6.224, приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $y'^2+ay^3=A|y|^{5/2}$, из которого находим

$$x+B=\int\frac{dy}{\sqrt{A|y|^{5/2}-ay^3}}.$$

Для вычисления этого интеграла пользуемся подстановкой $y = \pm u^{-2}$. Если $a \neq 0$, то получаем

$$y = \frac{\pm 16C_1^2}{[(C_1x + C_2)^2 \pm a]^2},$$

а также $y = (Dx + C)^{-2}$, где $4D^2 = -a$, а если $a = 0$, то $y = (C_1x + C_2)^{-4}$. См. также E. Makai, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **22** (1942), стр. 167.

6.163. $12yy'' - 15y'^2 + 8y^3 = 0$; частный случай уравнения 6.224.

$$y[(x + C_1)^2 + C_2]^2 = 6C_2.$$

6.164. $nyy'' - (n-1)y'^2 = 0$; частный случай уравнения 6.224.

$$y = (C_1x + C_2)^n.$$

6.165. $ayy'' + by'^2 + c_4y^4 + c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0$; тип 6.224.
Это уравнение может быть сведено к линейному уравнению

$$\frac{1}{2}ayu' + bu + c_4y^4 + c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0$$

относительно функции $u = u(y)$; для этого следует положить $y'(x) = p(y)$, $p^2 = u$. В случае $a = 1$, $b = -1$ получаем из этого линейного уравнения

$$y'^2 + c_4y^4 + 2c_3y^3 + 2c_2y^2 \ln|y| - 2c_1y - c_0 = Cy^2,$$

а в случае $a = 2$, $b = -1$ получаем

$$y'^2 + \frac{1}{3}c_4y^4 + \frac{1}{2}c_3y^3 + c_2y^2 + c_1y \ln|y| - c_0 = Cy.$$

Если логарифмические члены отсутствуют, то решения этих уравнений выражаются через эллиптические функции. Если $a = -2b$, $c_1 = 0$, то можно поступать следующим образом: дифференцируем исходное уравнение по x и делим на y; получаем

$$ay''' + 4c_4y^2y' + 3c_3yy' + 2c_2y' = 0,$$

следовательно,

$$ay'' + \frac{4}{3}c_4y^3 + \frac{3}{2}c_3y^2 + 2c_2y + C = 0;$$

комбинируя это уравнение с исходным, имеем

$$by'^2 = \frac{1}{3}c_4y^4 + \frac{1}{2}c_3y^3 + c_2y^2 + Cy - c_0.$$

B. Gambier, *Acta Math.* **33** (1910), стр. 27.

6.166. $ayy'' + by'^2 - \dfrac{yy'}{\sqrt{x^2 + c^2}} = 0$.

Полагая $y' = yu(x)$, получаем уравнение Бернулли

$$u' - \frac{u}{a\sqrt{x^2 + c^2}} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)u^2 = 0.$$

Можно поступать также следующим образом: деля исходное уравнение на yy', получаем

$$\frac{d}{dx}\left\{a \ln|y'| + b \ln|y| - \ln\left(x + \sqrt{x^2 + c^2}\right)\right\} = 0,$$

откуда

$$y^{(a+b)/a} = C_1 + C_2\left(x+\sqrt{x^2+c^2}\right)^{1/a}\left(\sqrt{x^2+c^2} - ax\right).$$

6.167. $ayy'' - (a-1)\,y'^2 + (a+2)\,fy^2y' + f^2y^4 + af'y^3 = 0,\ f = f(x).$
Полагая

$$y = \frac{v(x)}{\int fv\,dx},$$

получаем

$$vv'' = \frac{a-1}{a}\,v'^2;$$

следовательно,

$$v = (C_1x + C_0)^a.$$

6.168. $(ay+b)\,y'' + cy'^2 = 0.$
Если это уравнение разделить на $(ay+b)\,y'$, то затем его можно проинтегрировать. Получаем

$$ay + b = \begin{cases} (C_1x + C_0)^{a/(a+c)} & \text{при} \quad a + c \neq 0, \\ C_0e^{C_1x} & \text{при} \quad a + c = 0. \end{cases}$$

6.169. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$
Это уравнение можно записать в виде $x(y^2)'' = (y^2)'$. Отсюда получаем

$$y^2 = C_1x^2 + C_2.$$

6.170. $xyy'' + xy'^2 + ayy' + f(x) = 0.$
Полагая $u(x) = y^2$, получаем линейное уравнение $xu'' + au' + 2f(x) = 0$, и отсюда

$$u = C_1 + C_2x^{1-a} - 2\int x^{-a}\left(\int x^{a-1}f(x)\,dx\right)dx.$$

6.171. $xyy'' - xy'^2 + yy' + axy^4 + by^3 + cy + dx = 0.$
В общем случае это уравнение не может быть решено в элементарных функциях. См. Айнс, стр. 450 (XIII).

6.172. $xyy'' - xy'^2 + ayy' + bxy^3 = 0.$
Это уравнение можно записать в виде

$$x\frac{d^2}{dx^2}\ln y + a\frac{d}{dx}\ln y + bxy = 0.$$

Таким образом, полагая $u(x) = \ln y$, получаем уравнение 6.76 с искомой функцией u вместо y. Если положить $b = \pm\beta^2$, то подстановка $y(x) = \bar{y}(\bar{x})$, $\bar{x} = \beta x$ приводит к уравнению

$$xyy'' - xy'^2 + ayy' \pm xy^3 = 0, \tag{1}$$

где черточки над x и y опущены. Одно из решений уравнения (1) есть

$$y = \pm(2a-2)\,x^{-2}.$$

Подстановка $y = x^{-2}\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$ приводит уравнение (1) к виду

$$\eta\eta'' - \eta'^2 + (a-1)\,\eta\eta' \pm \eta^3 + (2-2a)\,\eta^2 = 0, \tag{2}$$

и далее, полагая $\eta'(\xi) = p(\eta)$, получаем

$$\eta pp' - p^2 + (a-1)\,\eta p \pm \eta^3 + (2-2a)\,\eta^2 = 0. \tag{3}$$

См., далее, 6.76.

6.173. $xyy'' + 2xy'^2 + ayy' = 0$; частный случай уравнения 6.51.
Полагая $u(x) = y^3$, получаем уравнение $xu'' + au' = 0$, откуда

$$y^3 = C_1 + C_2 x^{1-a}.$$

6.174. $xyy'' - 2xy'^2 + (y+1)\,y' = 0$;
обобщенно-однородное уравнение (ч. I, п. 15.2).
Полагая $y(x) = \eta(\xi)$, $\xi = \ln|x|$, получаем уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а). Решения:

$$y = C, \quad y = \frac{1}{2}\ln|x|, \quad 2Cy = \operatorname{tg}(C\ln|x|), \quad 2Cy = \operatorname{cth}(C\ln|x|).$$

6.175. $xyy'' - 2xy'^2 + ayy' = 0$; частный случай уравнения 6.51.
Полагая $u(x) = y^{-1}$, получаем $xu'' + au' = 0$. Отсюда находим:

$$\frac{1}{y} = \begin{cases} C_1 + C_2 x^{1-a} & \text{при} \quad a \neq 1, \\ C_1 + C_2 \ln x & \text{при} \quad a = 1. \end{cases}$$

6.176. $xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0$.
Деля на xy, получаем уравнение типа 6.51.

$$y^{-3} = C_1 + C_2 x^{-3}.$$

6.177. $xyy'' + \left(\dfrac{ax}{\sqrt{b^2 - x^2}} - x\right) y'^2 - yy' = 0$.
Полагая $y' = yu(x)$, получаем для u уравнение Бернулли. Таким образом, находим решения $y = C$ и

$$y = C_1 \exp\left\{\frac{1}{a}\sqrt{b^2 - x^2} + \frac{C_2}{a^2}\ln\left(C_2 - a\sqrt{b^2 - x^2}\right)\right\}.$$

6.178. $x(y+x)\,y'' + xy'^2 - (y-x)\,y' - y = 0$; обобщенно-однородное уравнение.
Полагая $u(x) = y + x$, $v = u'/u$, снова приходим к однородному уравнению; решая его, получаем

$$(y+x)^2 = C_1 x^2 + C_2.$$

Быстрее ведет к цели подстановка $u(x) = (y+x)^2$; она приводит к уравнению $xu'' - u' = 0$.

6.179. $2xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$; уравнение типа 6.51.

$$y = C_1\left(\sqrt{|x|} + C_2\right)^2.$$

6.180. $x^2(y-1)\,y'' - 2x^2y'^2 - 2x(y-1)\,y' - 2y(y-1)^2 = 0$.

Полагая $y = 1 + \dfrac{1}{u(x)}$, получаем уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 22.3: $x^2u'' - 2xu' + 2u = -2$, имеющее общее решение

$$u = -1 + C_1 x + C_2 x^2.$$

6.181. $x^2(y+x)\,y'' - (xy' - y)^2 = 0$.
Полагая $y + x = xu(x)$, $v = u'/u$, получаем уравнение $xv' + 2v = 0$; далее находим

$$y = -x + xC_1\exp(C_2 x^{-1}).$$

6.182. $x^2(y-x)\,y'' = a(xy' - y)^2$.
Подстановка $y - x = xu(x)$ приводит к уравнению

$$xuu'' - axu'^2 + 2uu' = 0,$$

и отсюда, полагая $v(x)=u'/u$, получаем уравнение Бернулли

$$xv'+(1-a)xv^2+2v=0.$$

Подстановка $w(x)=v^{-1}$ сводит его к линейному уравнению

$$w'-2x^{-1}w=1-a,$$

имеющему общее решение $w=(a-1)x+Cx^2$. Таким образом, при $a\neq 1$ получаем

$$u=\pm|C_0+C_1x^{-1}|^{1/(1-a)}.$$

6.183. $2x^2yy''-x^2(y'^2+1)+y^2=0$; частный случай уравнения 6.139.

$$y=x\left(C_1+\sqrt{4C_1C_2-1}\ln|x|+C_2\ln^2|x|\right).$$

6.184. $ax^2yy''+bx^2y'^2+cxyy'+dy^2=0.$

Если $a+b=0$, то полагаем $y'=yu(x)$; получаем линейное уравнение $ax^2u'+cxu+d=0$. Если $a+b\neq 0$, то, полагая

$$y=u^\alpha,\quad u=u(x),\quad \alpha=\frac{a}{a+b},$$

получаем уравнение Эйлера

$$a\alpha x^2u''+c\alpha xu'+du=0.$$

6.185. $x(x+1)^2yy''-x(x+1)^2y'^2+2(x+1)^2yy'-a(x+2)y^2=0.$

Полагая $y'=u(x)y$, получаем для u линейное уравнение, из которого находим

$$y=C_1|x+1|^a\cdot\exp(C_2x^{-1}).$$

6.186. $8(x^3-1)yy''-4(x^3-1)y'^2+12x^2yy'-3xy^2=0.$

Полагая $y=\eta^2(\xi)$, $\xi=x^3$, получаем гипергеометрическое уравнение 2.260:

$$\xi(\xi-1)\eta''+\left(\frac{7}{6}\xi-\frac{2}{3}\right)\eta'-\frac{1}{48}\eta=0.$$

6.187. $f(x)yy''+g(x)y'^2+h(x)yy'+k(x)y^2=0.$

Полагая $u(x)=y'/y$, получаем уравнение Риккати

$$fu'+(f+g)u^2+hu+k=0;$$

если $g=-f$, то полученное уравнение будет даже линейным.

188—225. $f(x, y)y''=F(x, y, y')$

6.188. $y^2y''=a$; уравнение свободного падения.

Получаем $yy'^2+2a=Cy$. Это уравнение легко может быть решено, если принять y за независимое переменное, т. е. если рассматривать уравнение

$$y=(Cy-2a)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2.$$

6.189. $y^2y''+yy'^2+ax=0$. См. также 6.190.

Полагая $y^{-1}=u'(x)$, получаем $-u'u'''+3u''^2+axu'^5=0$ и затем, принимая u за независимое переменное, приходим к линейному уравнению $x'''(u)+ax(u)=0$.

6.190. $y^2y'' + yy'^2 = ax + b$. При $b = 0$ см. также 6.189.

Полагая $u(x) = y^2$, получаем уравнение $u''\sqrt{u} = 2ax + 2b$. Умножая это последнее на $u'^2u^{-1/2} - 4(ax+b)$, приходим к уравнению в полных дифференциалах. Интегрируя, получаем

$$u'^3 - 12u'\sqrt{u}\,(ax+b) + 8a\sqrt{u^3} + 8a^{-1}(ax+b)^3 = C,$$

т. е.

$$y^3y'^3 - 3y^2y'(ax+b) + ay^3 + a^{-1}(ax+b)^3 = C.$$

6.191. $(y^2+1)\,y'' - (2y-1)\,y'^2 = 0$.

Согласно ч. I, п. 15.3 (а), получаем

$$y = \operatorname{tg}\ln(C_1x + C_2).$$

Можно также использовать то обстоятельство, что исходное уравнение, будучи разделено на y^2+1, превращается в уравнение в полных дифференциалах.

6.192. $(y^2+1)\,y'' - 3yy'^2 = 0$; уравнение типа 6.224.

$$[1 - (C_1x + C_2)^2]\,y^2 = (C_1x + C_2)^2.$$

6.193. $(y^2+x)\,y'' + 2(y^2-x)\,y'^3 + 4yy'^2 + y' = 0$.

Принимая за независимое переменное y вместо x, получаем для $x = x(y)$ уравнение $(y^2+x)\,x'' - 2(y^2-x) - 4yx' - x'^2 = 0$; далее, подстановка $v(y) = y^2 + x$ приводит к уравнению $vv'' = v'^2$, из которого находим

$$y^2 + x = C_1\exp(C_2y),\ \text{ а также }\ y = C.$$

6.193а. $(y^2+x^2)\,y'' + (y'^2+1)(xy'-y) = 0$.

Как и в случае уравнения 6.194, получаем

$$\operatorname{arctg} y' + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_1' \quad \text{или} \quad y' + \frac{y}{x} = \left(1 - y'\,\frac{y}{x}\right)C_1.$$

Это — однородное уравнение. Полагая $y = xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x(C_1u + 1)\,u' + C_1u^2 + 2u - C_1 = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$x^2(C_1u^2 + 2u - C_1) = C_2, \quad \text{т. е.} \quad 2xy + C_1(y^2 - x^2) = C_2.$$

6.194. $(y^2+x^2)\,y'' - (y'^2+1)(xy'-y) = 0$.

Из данного уравнения следует

$$\operatorname{arctg} y' - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C_1 \quad \text{или} \quad y' - \frac{y}{x} = \left(1 + y'\,\frac{y}{x}\right)C_1.$$

Далее, вводя полярные координаты $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$r = C_2e^{C_1\varphi}.$$

6.195. $(y^2+x^2)\,y'' - 2(y'^2+1)(xy'-y) = 0$.

Интегральными кривыми являются верхние и нижние половины окружностей

$$x^2 + y^2 + C_1x + C_2y = 0,$$

проходящих через начало координат, а также прямые $y = Cx$.

6.196. $2y(y-1)y''-(2y-1)y'^2+f(x)y(y-1)y'=0.$
Решения получаются из уравнения

$$y'^2=Cy(y-1)\exp\left(-\int f\,dx\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 40, уравнение (3).

6.197. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2+f(y)=0.$ Уравнение типа 6.224.
Если $f\equiv 0$, то решениями будут

$$y=-\operatorname{tg}^2(C_1x+C_2) \quad \text{и} \quad y=\operatorname{th}(C_1x+C_2).$$

6.198. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2+4yy'(fy+g)+$
$+4y^2(y-1)(g^2-f^2-g'-f')=0,\quad f=f(x),\quad g=g(x).$
Решения получаются из уравнения

$$[y'-2(f+g)y]^2=y(y-1)^2u^2, \quad \text{где} \quad u=C\exp\int(g-f)\,dx.$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 39, уравнение (1).

6.199. $2y(y-1)y''-(3y-1)y'^2-4(fy+g)yy'-$
$-(y-1)^3(\varphi^2y^2-\psi^2)-4y^2(y-1)(f^2-g^2-f'-g')=0,$
f, g, φ, ψ — такие функции от x, что $\varphi'=2f\varphi$, $\psi'=-2g\psi$.
Это уравнение эквивалентно системе

$$y'=-2(y-1)u+y(y-1)\varphi-2y(f+g),$$
$$yu'=-(y-1)u^2-2yug+\frac{y-1}{4}\psi^2.$$

Исключая отсюда y, получаем для $u(x)$ уравнение, эквивалентное уравнению Риккати

$$u'+u^2+(2g-\varphi)u=\frac{1}{4}\psi^2+v, \quad \text{где} \quad v'=2(f-g)v.$$

6.200. $3y(y-1)y''-2(2y-1)y'^2+f(y)=0$; уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а), а также 6.224.
Если $f\equiv 0$, то решаем это уравнение относительно y''/y'. Получаем $y'^3=Cy^2(y-1)^2$; о дальнейшем исследовании этого уравнения см. 1.519.

6.201. $4y(y-1)y''-3(2y-1)y'^2+f(y)=0$; уравнение типа 6.224.
Решения получаются из уравнения первого порядка

$$|y(y-1)|^{-3/2}y'^2\pm\int f(y)\,|y(y-1)|^{-5/2}\,dy=C.$$

В некоторых случаях удобна подстановка $u^2(x)=1-y^{-1}$. Если $f\equiv 0$, то проще решить исходное уравнение относительно y''/y'. При этом получается $y'^4=Cy^3(y-1)^3$. См. Айнс, стр. 459—460.

6.202. $ay(y-1)y''+(by+c)y'^2+f(y)=0.$
Умножив это уравнение на

$$y^{-\alpha}(y-1)^{-\beta}, \text{ где } \alpha=1+ca^{-1}, \quad \beta=1-(b+c)a^{-1},$$

получаем уравнение вида 6.224.

6.203. $ay(y-1)y'' - (a-1)(2y-1)y'^2 + f(x)y(y-1)y' = 0.$

Решения получаются из уравнения

$$y' = Cy^{(a-1)/a}(y-1)^{(a-1)/a} \exp\left(-\frac{1}{a}\int f\,dx\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 41.

6.204. $aby(y-1)y'' - [(2ab-a-b)y + (1-a)b]\,y'^2 + f(x)y(y-1)y' = 0.$

Решения получаются из уравнения

$$y' = Cy^{(a-1)/a}(y-1)^{(b-1)/b} \exp\left(-\frac{1}{ab}\int f\,dx\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* 25 (1902), стр. 41.

6.205. $xy^2y'' = a.$

Это уравнение может быть приведено к виду 6.101, где $a = 1$, $b = c = 0$, $f(s) = as^{-2}$. Полагая $y = xu(x)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$x^4u'^2 = -2au^{-1} + C.$$

6.206. $(x^2-a^2)(y^2-a^2)y'' - (x^2-a^2)yy'^2 + x(y^2-a^2)y' = 0.$

Полагая $u(x) = |y^2-a^2|^{-1/2}y'$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(x^2-a^2)y'^2 = C(y^2-a^2).$$

6.207. $2x^2y(y-1)y'' - x^2(3y-1)y'^2 + 2xy(y-1)y' +$

$$+ (ay^2+b)(y-1)^3 + cxy^2(y-1) + dx^2y^2(y+1) = 0.$$

Это уравнение не может быть решено в классических трансцендентных функциях. См. Айнс, стр. 458 (XXXIX).

6.208. $x^3y^2y'' + (xy'-y)^3(y+x) = 0$; уравнение типа 6.59.

Полагая $y(x) = x\eta(\xi)$, $\xi = \ln x$, получаем

$$\eta^2\eta'' + (\eta+1)\eta'^3 + \eta^2\eta' = 0;$$

если, далее, $p(\eta) = \eta'(\xi)$, то приходим к уравнению Риккати

$$\eta^2p' + (\eta+1)p^2 + \eta^2 = 0.$$

6.209 $y^3y'' = a$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 15.3 (а).

$$(C_1x - C_2)^2 + C_1y^2 + a = 0 \quad \text{и} \quad y^2 = 2x\sqrt{-a} + C.$$

Можно воспользоваться также тем, что это дифференциальное уравнение, будучи умножено на $2yy'$, обращается в уравнение в полных дифференциалах.

6.210. $(y^3+y)y'' - (3y^2-1)y'^2 = 0;$

уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3 (а).

$$y = C \quad \text{и} \quad (C_1x + C_0)(y^2+1) = 1.$$

6.211. $2y^3y'' + y^4 - a^2xy^2 = 1.$

Очевидно, что ни одна из интегральных кривых не имеет общих точек с осью x. Так как вместе с $y(x)$ и $-y$ также является решением, то можно ограничиться рассмотрением полуплоскости $y > 0$. Каждая интегральная кривая может быть неограниченно продолжена в обе стороны. Из уравнения следует, что ни одно решение не может монотонно убывать при $x \to \infty$. Существует в точности одна интегральная кривая, которая для всех достаточно больших x выпукла вверх (исключительное решение); для этой интегральной кривой справедливо асимптотическое разложение

$$y \sim \sqrt{x}\left(a_0 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} + \dots\right).$$

Каждая из остальных интегральных кривых имеет бесконечное число точек перегиба и обладает тем свойством, что функция $y(x) - a\sqrt{x}$ имеет бесконечное множество экстремумов, убывающих при $x \to \infty$ и таких, что их абсциссы стремятся к ∞; для этих решений при соответствующем выборе постоянных имеем

$$y = a\sqrt{x} + C_1 \sin\left(x + \frac{C_1^2}{12x^2}\ln x - C_1\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

G. Ascoli, *Rendiconti Istituto Lombardo* (2), **69** (1936), стр. 167—197.

6.212. $2y^3y'' + y^2y'^2 = ax^2 + bx + c.$

Если для некоторого решения $y(x) \neq 0$ принять $\xi = \int \frac{dx}{y(x)}$ за независимое переменное и положить $\eta(\xi) = y(x)$, то получается уравнение $2\eta\eta'' - \eta'^2 = ax^2 + bx + c$. Отсюда, дважды дифференцируя по x, находим

$$2\eta''' = 2ax + b, \quad \eta^{(4)} = a\eta. \qquad (1)$$

Таким образом, для $\eta(\xi)$ получается линейное уравнение 4.3. Если $\eta(\xi)$ — решение этого уравнения, то из первого из уравнений (1) находим x как функцию от ξ, а тем самым и ξ как функцию от x и окончательно получаем $y(x) = \eta(\xi(x))$. Среди найденных таким образом функций должны содержаться решения исходного уравнения.

L. Euler, Institutiones Calculi Integralis, Petersburg, 1824—1827, т. II, стр. 138—143. Здесь же имеется способ приведения этого уравнения к уравнению первого порядка.

6.213. $$2(y-a)(y-b)(y-c)\,y'' - [(y-a)(y-b) + (y-a)(y-c) + (y-b)(y-c)]\,y'^2 + [(y-a)(y-b)(y-c)]^2\left\{A + \frac{B}{(y-a)^2} + \frac{C}{(y-b)^2} + \frac{D}{(y-c)^2}\right\} = 0.$$

Частный случай уравнения 6.224. См. Айнс, стр. 461 где указано, что это уравнение разрешимо в эллиптических функциях. См. также B. Gambier, *Acta Math.* **33** (1910), стр. 48.

6.214. $(4y^3 - g_2y - g_3)\,y'' - \left(6y^2 - \frac{1}{2}g_2\right)y'^2 = 0$, g_2, g_3 — постоянные.

$$y = \wp(C_1x + C_0, g_2, g_3).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 25, уравнение (1).

6.215. $(4y^3 - g_2y - g_3)\,[y'' + f(x)\,y'] = \left(6y^2 - \frac{1}{2}g_2\right)y'^2.$

Решения получаются из уравнения

$$y' = C\sqrt{4y^3 - g_2y - g_3}\,\exp\left(-\int f\,dx\right).$$

P. Painlevé, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 42, уравнение (1).

6.216. $2x(x-1)y(y-1)(y-x)y'' -$
$$- x(x-1)(3y^2 - 2xy - 2y + x)y'^2 + 2y(y-1)(2xy - y - x^2)y' -$$
$$- y^2(y-1)^2 - f(x)[y(y-1)(y-x)]^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Если $\varphi(u, x)$ — определенная интегралом $u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{ds}{\sqrt{s(s-1)(s-x)}}$ эллиптическая функция с (зависящими от x) периодами $2\omega_1(x)$, $2\omega_2(x)$, то данное уравнение имеет решения
$$y = \varphi(u + C_1\omega_1 + C_2\omega_2, x), \tag{1}$$
где $u(x)$ — решение линейного уравнения
$$4x(x-1)u'' + 4(2x-1)u' + u = f(x).$$
Если $f \equiv 0$, то в выражении (1) можно положить $u = 0$.

См. А й н с, стр. 476, 462.

6.217. $2x^2(x-1)^2 y(y-1)(y-x)y'' - x^2(x-1)^2(3y^2 - 2xy - 2y + x)y'^2 +$
$$+ 2x(x-1)y(y-1)(2xy - y - x^2)y' + ay^2(y-1)^2(y-x)^2 +$$
$$+ bx(y-1)^2(y-x)^2 + c(x-1)y^2(y-x)^2 + dx(x-1)y^2(y-1)^2 = 0.$$

Это уравнение, вообще говоря, не может быть решено в классических трансцендентных функциях. В случае $a = b = c = 0$, $d = -1$ см. 6.216.

См. А й н с, стр. 462.

6.218. $(k^2y^2 - 1)(y^2 - 1)y'' +$
$$+ \left[(k^2 + 1 - 2k^2y^2)y + a\sqrt{(k^2y^2 - 1)(y^2 - 1)}\right]y'^2 = 0, \qquad a,\ k \neq 0;$$
частный случай уравнения 6.54.
$$y = \operatorname{sn}[a^{-1}\ln(C_1x + C_0),\ k].$$

P. P a i n l e v é, *Acta Math.* **25** (1902), стр. 5; А й н с, стр. 462 и сл.

6.219. $(y^2 + ax^2 + 2bx + c)^2 y'' + dy = 0.$

Деля на коэффициент при y'' и умножая на $ax(xy' - y) + b(2xy' - y) + cy'$, приходим к уравнению в полных дифференциалах. Интегрируя, получаем
$$(ax^2 + 2bx + c)y'^2 - 2(ax + b)yy' + ay^2 + \frac{dy^2}{y^2 + ax^2 + 2bx + c} = C.$$

Можно также заданное уравнение упростить с помощью подстановки $y = u(x)\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$. Если, в частности, исходное уравнение имеет вид
$$(y^2 + x^2)^2 y'' + ay = 0,$$
то, умножив его на $2x(y^2 + x^2)^{-2}(xy' - y)$, получаем уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя затем, приходим к однородному уравнению
$$(xy' - y)^2 - \frac{ax^2}{x^2 + y^2} = C.$$

6.220. $y''\sqrt{y} = a$; тип, рассмотренный в ч. I, п. 23.1.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $pp' = y^{-1/2}$; следовательно,
$$y'(x) = p = 2\sqrt{a\sqrt{y} + C}.$$

6.221. $\sqrt{y^2+x^2}\,y''=a\left(y'^2+1\right)^{3/2}$; обобщенно-однородное уравнение.

$$x=C_1\frac{\cos t}{\sin s-a},\quad y=C_1\frac{\sin t}{\sin s-a},\quad \text{где}\quad t=C_2-\int\frac{\sin s}{\sin s-a}\,ds.$$

6.222. $y(1-\ln y)\,y''+(1+\ln y)\,y'^2=0.$

Полагая $u(x)=\ln y$, получаем легко разрешимое уравнение, из которого находим

$$y=C\quad \text{и}\quad \ln y=\frac{x+C_1}{x+C_2}.$$

6.223. $(a\sin^2 y+b)\,y''+ay'^2\sin y\cos y+A(a\sin^2 y+c)\,y=0.$

Принимая y за независимое переменное, получаем для $u(y)=y'^2$ линейное уравнение 1.200 с величинами u, y, $2A$ вместо u, x, A

6.224. $f(y)\,y''+af'(y)\,y'^2+g(y)=0.$

Разделив это уравнение на $f(y)$, получим уравнение типа 6.54. Указанный там прием сводит это уравнение к некоторому уравнению Бернулли. Второй метод: если данное уравнение умножить на $\pm 2|f|^{2a-1}y'$ (берется верхний знак или нижний в зависимости от того, будет $f>0$ или <0), то сумма двух первых членов будет равна производной от $|f|^{2a}y'^2$, т. е. исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$|f|^{2a}y'^2\pm 2\int|f|^{2a-1}g\,dy=C.$$

6.225. $f(y)\,y''-f'(y)\,y'^2=f^2(y)\,\Phi\left(x,\ \frac{y'}{f(y)}\right).$

Полагая $u(x)=y'/f(y)$, получаем

$$u'=\Phi(x,\ u).$$

226—249. Прочие дифференциальные уравнения

6.226. $y'y''-x^2yy'-xy^2=0.$

Уравнение в полных дифференциалах. Получаем

$$y'^2-x^2y^2=C.$$

6.227. $(xy'-y)\,y''+4y'^2=0.$

Полагая $u(x)=y'/y$, получаем обобщенно-однородное уравнение. Далее, полагая $\eta(\xi)=xu(x)$, $\xi=\ln|x|$, получаем уравнение с разделяющимися переменными $(1-\eta)\,\eta'=\eta(\eta+1)^2$. Наконец, подстановка $t(\xi)=(\eta+1)^{-1}$ дает $(2t-1)\,t'=t-1$, откуда находим решения в параметрической форме:

$$x=C_1(t-1)\,e^{2t},\qquad y=C_2\,te^{-2t}.$$

6.228. $(xy'-y)\,y''=\left(y'^2+1\right)^2.$

Уравнение эвольвент всех окружностей с центром в начале координат. См. Serret, Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, т. III, Leipzig und Berlin, 1924, стр. 347.

6.229. $ax^3y'y''+by^2=0.$

Полагая $u(x)=y'/y$, получаем $ax^3u(u'+u^2)+b=0$. Это обобщенно-однородное уравнение. Подстановка $xu=\eta(\xi)$, $\xi=\ln|x|$ дает

$$a\eta(\eta'-\eta+\eta^2)+b=0.$$

6.230. $f_1 y'y'' + f_2 yy'' + f_3 y'^2 + f_4 yy' + f_5 y^2 = 0,\ f_\nu = f_\nu(x),\ f_1 \neq 0.$

Если f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы, то подстановка

$$\eta(\xi) = y(x) \exp \int \frac{f_2}{f_1}\, dx, \quad \frac{d\xi}{dx} = \exp \int \frac{2f_2 - f_3}{f_1}\, dx$$

приводит это уравнение к виду $\eta'\eta'' + g(\xi)\eta\eta' + h(\xi)\eta^2 = 0$. Если здесь $h(\xi) = {}^1/_2 g'(\xi)$, то решения этого уравнения удовлетворяют, очевидно, уравнению

$$\eta'^2 + g\eta^2 = C.$$

Подстановка $u(x) = y'/y$ сводит исходное уравнение к уравнению типа Абеля (ч. I, п. 4.11). Если f_ν — постоянные, то это уравнение имеет решения вида Ce^{ax}.

6.231. $(2y^2y' + x^2)\, y'' + 2yy'^3 + 3xy' + y = 0.$

Уравнение в полных дифференциалах. Поэтому его решения находятся из уравнения $y^2y'^2 + x^2y' + xy = C$.

6.232. $\left(y'^2 + y^2\right) y'' + y^3 = 0$; обобщенно-однородное уравнение.

Полагая $y = e^u$, получаем

$$u = C_1 + \frac{1}{2} \ln |\sin (x\sqrt{3} + C_2)| \pm \int \left[1 + \frac{3}{4} \operatorname{ctg}^2 (x\sqrt{3} + C_2)\right]^{1/2} dx.$$

6.233. $[y'^2 + a(xy' - y)]\, y'' = b.$

Дифференцируем это уравнение по x и затем исключаем $xy' - y$ с помощью исходного уравнения. Полагая $p(x) = y'(x)$, имеем $bp'' + (2p + ax)\, p'^3 = 0$, или если принять p за независимое переменное, то для $x = x(p)$ получаем уравнение

$$x'' - ab^{-1}x = 2b^{-1}p.$$

6.234. $\left(a\sqrt{y'^2 + 1} - xy'\right) y'' = y'^2 + 1.$

С помощью подстановки, указанной в ч. I, п. 15.3 (б), получаем уравнение первого порядка; решение в параметрической форме

$$x = \frac{at + C_1}{v}, \quad y = \frac{C_1 t - a}{v} - C_1 \ln(t + v) + C_2,$$

где $v = \sqrt{t^2 + 1}$.

6.235. $f(y')\, y'' + g(y)\, y' + h(x) = 0.$

Из данного уравнения получаем

$$\int f(y')\, dy' + \int g(y)\, dy + \int h(x)\, dx = C,$$

т. е. это уравнение второго порядка может быть сведено к уравнению первого порядка.

6.236. $y''^2 = ay + b.$

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $(pp')^2 = ay + b$ и отсюда приходим к легко разрешимому уравнению первого порядка

$$y'^2 = \frac{4}{3a}(ay + b)^{3/2} + C.$$

6.237. $a^2y''^2 - 2axy'' + y' = 0.$

Полагая $y' = u(x)$, получаем уравнение первого порядка. Исходное уравнение можно переписать в виде

$$(ay'' - x)^2 = x^2 - y'.$$

6.238. $2(x^2+1)\,y''^2 - x(4y'+x)\,y'' + 2(y'+x)\,y' - 2y = 0.$

Дифференцируя, получаем $[4(x^2+1)\,y'' - 4xy' - x^2]\,y''' = 0$, и отсюда

$$16y = (X+C)^2 + 2x(X+C)\sqrt{x^2+1} - 3x^2,$$

где $X = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, а также $y = C_1x^2 + C_2x + 4C_1^2 + C_2^2$. Кривые первого семейства являются огибающими кривых второго семейства.

6.239. $3x^2y''^2 - 2(3xy'+y)\,y'' + 4y'^2 = 0.$

Решениями данного уравнения будут функции

$$y = C_1^2x^2 + C_1C_2x + C_2^2$$

и функции $y = Cx^{1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}}$ — решения линейного уравнения $3x^2y'' - 3xy' - y = 0$.

6.240. $(9x^3 - 2x^2)\,y''^2 - 6x(6x-1)\,y'y'' - 6yy'' + 36xy'^2 = 0.$

Решениями данного уравнения будут функции

$$y = C_1^2x^3 + C_1C_2x + C_2^2,$$

а также функции

$$y = CEx\sqrt{4x-1} \quad \text{и} \quad y = \frac{C}{E}\,x\sqrt{4x-1},$$

где $E = \exp\int \frac{2\sqrt{9x^2-2x}}{4x^2-x}\,dx$, являющиеся решениями линейного уравнения $(9x^3-2x^2)\,y'' - 3x(6x-1)\,y' - 3y = 0$.

6.241. $\sum\limits_{p,\,q=0}^{2} f_{pq}(x)\,y^{(p)}y^{(q)} = 0.$ Ср. 6.230.

Известны условия того, чтобы решения этого уравнения можно было представить в виде

$$y = C_1^2u_1 + C_1C_2u_2 + C_2^2u_3,$$

где u_1, u_2, u_3 — решения некоторого линейного уравнения третьего порядка, а также условия того, чтобы при этом еще существовали особые решения, удовлетворяющие некоторому линейному уравнению второго порядка.

P. Appell, *Journ. de Math.* (4), **5** (1889), стр. 410.

6.242. $yy''^2 = ae^{2x}.$

Уравнение пространственного тока смещения в цилиндрическом конденсаторе. Полагая $y = x^{4/3}u$, получаем уравнение

$$\left(x^2u'' + \frac{8}{3}\,xu' + \frac{4}{9}\,u\right)\sqrt{u} = \pm\sqrt{a}e^x.$$

Если решение удовлетворяет условиям $y(0) = y'(0) = 0$, то можно получить удобное для вычислений разложение по степеням x.

6.243. $(a^2y^2 - b^2)\,y''^2 - 2a^2yy'^2y'' + (a^2y'^2 - 1)\,y'^2 = 0.$

Полагая $p(y) = y'(x)$, принимаем y за независимое переменное и дифференцируем по y; в результате этого получаем распадающееся уравнение $[(a^2y^2 - b^2)\,p' - a^2yp]\,p'' = 0$. Отсюда находим

$$y = C_1e^{C_2x} \pm \frac{1}{a}\sqrt{b^2 + C_2^{-2}} \quad \text{и} \quad y = \pm\frac{b}{a}\cos\frac{x+C}{b}.$$

6.244. $(x^2yy'' - x^2y'^2 + y^2)^2 = 4xy\,(xy' - y)^3.$

Полагая $y = xu(x)$, получаем $(uu'' - u'^2)^2 = 4uu'^3$ и отсюда, полагая $v = u'/u$, имеем $v'^2 = 4v^3$. Из последнего уравнения: $(x + C)^2\,v = 1$, т. е.

$$u = C_0\exp\frac{1}{C-x}.$$

6.245. $(2yy'' - y'^2)^3 + 32y''\,(xy'' - y')^3 = 0.$

$$C_1C_2^3y = (C_1^2x + 1)^2 + 2C_2^2 \quad \text{и} \quad y^2 = 8x.$$

6.246. $\sqrt{ay''^2 + by'^2} + cyy'' + dy'^2 = 0;$

уравнение типа, рассмотренного в ч. I, п. 15.3.

Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $\sqrt{ap'^2 + b} + cyp' + dp = 0.$

6.246а. $f(y'' + y) = y''^2 + y'^2.$

Дифференцируя, получаем $[f'(y'' + y) - 2y'']\,(y''' + y') = 0$. Из уравнения $y''' + y' = 0$ находим решения

$$y = A\sin(x + B) + C, \quad \text{где} \quad A^2 = f(C).$$

Если же приравнять нулю выражение, стоящее в квадратных скобках, то, полагая $y'' + y = u$, получаем особое решение в параметрической форме:

$$x = \int\frac{2 - f''(u)}{\sqrt{4f(u) - f'^2(u)}}\,du, \qquad y = u - \frac{1}{2}f'(u).$$

E. Goursat, *Nouvelles Annales Math.* (4), 20 (1920), стр. 385.

6.247. $F\left(y + \dfrac{y'^2}{y''},\ x + \dfrac{y' - y'^3}{2y''}\right) = 0.$

Решения получаем из равенства

$$(y - a)^2 = 2C\,(x - b) + C^2,$$

если при этом $F(a, b) = 0$. Вопрос о том, получаются ли таким способом все решения, требует специального исследования. См. G. Boole, A Treatise of Differential Equations, Cambridge, 1859, стр. 225.

6.248. $F(y'',\ y' - xy'',\ y - xy' + {}^1\!/_2x^2y'') = 0.$

Решениями этого уравнения заведомо являются все функции вида

$$y = {}^1\!/_2ax^2 + bx + c, \quad \text{если} \quad F(a, b, c) = 0.$$

См. Айнс, стр. 64.

6.249. $F\left(x-\frac{y'^2+1}{y''}y',\ y+\frac{y'^2+1}{y''},\ \frac{(y'^2+1)^{3/2}}{y''}\right)=0.$

Это — уравнение Клеро второго порядка. Если числа a, b, r принадлежат области определения функции $F(u, v, w)$ и если они удовлетворяют уравнению $F(a, b, r)=0$, то одной из интегральных кривых является окружность

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

См. Serret, Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, т. III, Leipzig und Berlin, 1924, стр. 403—406.

ГЛАВА VII

НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО И БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

7.1 $y''' = a^2\left(y'^5 + 2y'^3 + y'\right)$.

7.19 дает параметрическое представление решений:

$$ax = \int \Omega(u)\,du + C_2, \qquad ay = \int u\Omega(u)\,du + C_3,$$

где

$$\Omega^{-1} = \sqrt{C_1 + {}^1/_3\,(u^2+1)^3}.$$

7.2. $y''' + yy'' - y'^2 + 1 = 0$.

Это уравнение встречается в теории вязкой жидкости. Решение краевой задачи, состоящей из этого уравнения и условий «$y(0) = y'(0) = 0$, $y'(x) \to 1$ при $x \to \infty$», может быть найдено в виде степенного ряда.

См. В. Дюрэнд, Аэродинамика, т. III, 1937—1940, стр. 92.

7.3. $y''' - yy'' + y'^2 = 0$.

Это уравнение может быть приведено к уравнению Абеля (см. ч. I, п. 4.11) Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $pp'' + p'^2 - yp' + p = 0$; далее, подстановка $p(y) = y^2 u(\eta)$, $\eta = \ln y$ приводит к уравнению $uu'' + u'^2 + 7uu' - u' + 6u^2 - u = 0$, и, наконец, полагая $u'(\eta) = q(u)$, находим

$$uqq' + q^2 + (7u - 1)\,q + 6u^2 - u = 0.$$

См. также J. Chazy, *Acta Math.* **41** (1918), стр. 63.

7.4. $y''' + ayy'' = 0$; уравнение пограничного слоя.

Полагая $y = \alpha\bar{y}$, получаем $\bar{y}''' + a\alpha\bar{y}\bar{y}'' = 0$; таким образом, уравнения с различными значениями коэффициента a легко переводятся друг в друга. Это уравнение может быть сведено, согласно ч. I, п. 15.3 (а), к уравнению Абеля (ч. I, п. 4.11). Полагая $p(y) = y'(x)$, получаем $pp'' + p'^2 + ayp' = 0$; отсюда с помощью подстановки $p(y) = y^2 u(\eta)$, $\eta = \ln y$ приходим к уравнению

$$uu'' + u'^2 + 7uu' + au' + 6u^2 + 2au = 0$$

и, далее, полагая $u'(\eta) = q(u)$, имеем

$$uqq' + q^2 + (7u + a)\,q + 6u^2 + 2au = 0.$$

Краевая задача, состоящая из исходного уравнения при $a = 1$ и краевых условий «$y(0) = y'(0) = 0$, $y'(x) \to 2$ при $x \to \infty$» и встречающаяся при изучении обтекания пластинки ламинарным потоком воздуха, имеет решение, представимое в виде степенного ряда.

См. В. Дюрэнд, Аэродинамика, т. III, 1937—1940, стр. 85.

7.5. $x^2y''' + xy'' + (2xy - 1)\,y' + y^2 = f(x)$.

Уравнение в полных дифференциалах. Оно может быть, таким образом, сведено к уравнению

$$x^2y'' - xy' + xy^2 = \int f(x)\,dx.$$

7.6. $x^2y''' + x(y-1)\,y'' + xy'^2 + (1-y)\,y' = 0$.

Деля на x^2, получаем уравнение в полных дифференциалах, которое сводится к уравнению $xy'' + (y-1)\,y' = Cx$.

7.7. $yy''' - y'y'' + y^3y' = 0$.

Деля на y^2, получаем уравнение в полных дифференциалах, которое дает $\dfrac{y''}{y} + \dfrac{1}{2}\,y^2 = C$. Умножив это уравнение на yy', получаем снова уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$y' = \pm\sqrt{C_0 + C_1y^2 - {}^1/_4y^4}.$$

7.7а. $yy''' + ay'y'' + f(y)\,y' = 0$.

Умножая на y^{a-1}, получаем уравнение в полных дифференциалах, из которого находим

$$y^ay'' + \int y^{a-1}f(y)\,dy = C_1.$$

Умножив это уравнение на $2y'y^{-a}$, снова можем его проинтегрировать и, таким образом, приходим к уравнению первого порядка

$$y'^2 = C_2 + 2\int y^{-a}\left[C_1 - \int y^{a-1}f(y)\,dy\right]dy.$$

K. Wieghardt, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **23** (1943), стр. 125.

7.7б. $y^2y''' + 3yy'' = y''\sqrt{16y^3y'' + 1}$; см. 7.12а.

7.8. $4y^2y''' - 18yy'y'' + 15y'^3 = 0$.

Это уравнение может быть написано в виде $-8y^{7/2}\dfrac{d^3}{dx^3}\,y^{-1/2} = 0$. Таким образом, получаем

$$y = C \quad \text{и} \quad y^{-1/2} = C_2x^2 + C_1x + C_0.$$

7.9. $9y^2y''' - 45yy'y'' + 40y'^3 = 0$.

Умножая на $y^{-11/3}$, получаем уравнение в полных дифференциалах и, таким образом, приходим к уравнению типа, рассмотренного в ч. I, п. 23.1:

$$9y^{-5/3}y'' - 15y^{-8/3}y'^2 = C.$$

Проще всего решения исходного уравнения получаются с помощью подстановки $u(x) = y^{-2/3}$. Получаем $u''' = 0$ и, следовательно,

$$y^2 = (C_2x^2 + C_1x + C_0)^{-3}.$$

7.10. $2y'y''' - 3y''^2 = 0$.

С помощью 6.150 получаем $y = \dfrac{Ax + B}{Cx + D}$, где A, B, C, D — произвольные числа.

7.11. $(y'^2+1)\,y'''-3y'y''^2=0.$

С помощью 6.192 получаем совокупность всех окружностей

$$(y-C_1)^2+(x-C_2)^2=C_3^2.$$

7.12. $(y'^2+1)\,y'''-(3y'+a)\,y''^2=0.$

Полагая $p(x)=y'$, получаем уравнение типа 6.54. Таким образом, имеем $p'(x)=C(p^2+1)^{3/2}\exp(a\operatorname{arctg}p)$ и далее, полагая $t=\operatorname{arctg}p$, получаем решения в параметрической форме

$$x=C_2+C_1e^{-at}(a\cos t-\sin t),\quad y=C_3+C_1e^{-at}(a\sin t+\cos t).$$

При $a\neq 0$ это — логарифмические спирали, а при $a=0$ — окружности.

7.12а. $\dfrac{d}{dx}(\varphi(y)\,y'')=f(y)\,F(\varphi(y)\,y''),\quad f\neq 0.$

Так как x в это уравнение не входит явно, то, согласно ч. I, п. 15.3 (а), можно понизить порядок уравнения. Можно поступить так: решаем уравнение

$$u'(t)=F(u) \tag{1}$$

и полагаем $v(y)=\int f(y)\,dy$; последнее уравнение определяет $y=Y(v)$ как функцию от v. Полагая $v=v(t)$, составляем с помощью функции $Y(v)$ уравнение

$$v''(t)=\frac{u(t)}{\varphi(Y(v))\,f(Y(v))}. \tag{2}$$

Для некоторого решения $v(t)$ этого уравнения полагаем

$$x=\int\frac{dt}{f(Y(v(t)))}$$

и отсюда находим $t=t(x)$ как функцию от x. Тогда

$$y(x)=Y(v(t(x)))$$

представляет собой решение исходного уравнения.

Уравнение 7.7б получается при

$$\varphi(y)=y^3,\quad f(y)=y^{-2},\quad F(u)=\sqrt{16u+1}.$$

В этом случае уравнение (1) имеет вид $u'(t)=u\sqrt{16u+1}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{16u}=\operatorname{sh}^2\frac{t-t_0}{2}\quad\text{и}\quad\frac{1}{16u}=-\operatorname{ch}^2\frac{t-t_0}{2}.$$

Уравнение (2) принимает поэтому вид

$$16v''\operatorname{sh}^2\frac{t-t_0}{2}+v=0\quad\text{и}\quad 16v''\operatorname{ch}^2\frac{t-t_0}{2}-v=0.$$

Это — уравнения 2.410а и 2.410б.

7.13. $y''y'''=a\sqrt{b^2y''^2+1}.$

Полагая $u(x)=y''^2$, получаем уравнение $u'=2a\sqrt{b^2u+1}$. Наконец, с помощью 7.19 получаем решение в параметрической форме

$$x=C_1+\frac{v}{ab^2}\quad\left(v=\sqrt{b^2u^2+1}\right),$$

$$y=C_2+C_3\frac{v}{ab^2}+\frac{u^3}{6a^2b^2}+\frac{u}{2a^2b^4}-\frac{v}{2a^2b^5}\ln(bu+v).$$

7.14. $y'y^{(4)} - y''y''' + y'^3 y''' = 0$; см. 7.8 и 7.16.

7.15. $y'(fy')''' - y''(fy')'' + y'^3 (fy')' + 2qy'^2 \sin y +$
$$+ (qy'' - q'y') \cos y = 0, \quad f = f(x), \; q = q(x).$$

Уравнение тонкого стержня, изогнутого под действием силы, направленной вдоль его оси; за независимое переменное x принимается длина дуги кривой, форму которой принимает стержень. Если в соответствии с этим заменить x через s и, кроме того, вместо y написать ϑ, то наше уравнение примет вид
$$\vartheta'(f\vartheta')''' - \vartheta''(f\vartheta')'' + \vartheta'^3 (f\vartheta')' + 2q\vartheta'^2 \sin\vartheta + (q\vartheta'' - q'\vartheta') \cos\vartheta = 0,$$
где $f = f(s)$, $q = q(s)$, $\vartheta = \vartheta(s)$. Умножая на $(\vartheta')^{-2} \cos\vartheta$, получим уравнение в полных дифференциалах. Интегрируя и умножая на ϑ', имеем
$$(f\vartheta')'' \cos\vartheta + (f\vartheta')' \vartheta' \sin\vartheta - q\cos^2\vartheta = C_1\vartheta'.$$
Разделив на $\cos^2\vartheta$, можно проинтегрировать еще раз, после чего, умножив на $\cos\vartheta$, получим
$$(f\vartheta')' = C_1 \sin\vartheta + C_2 \cos\vartheta + \cos\vartheta \int_{s_0}^{s} q(\sigma)\, d\sigma.$$
Перейдя к прямоугольным координатам x, y, которые вводятся уравнениями
$$x'(s) = \cos\vartheta, \quad y'(s) = \sin\vartheta,$$
мы можем проинтегрировать еще раз, что дает
$$f\vartheta' = C_1 y + C_2 x + C_3 + \int_{s_0}^{s} q(\sigma)\,[x(s) - x(\sigma)]\, d\sigma.$$

7.16. $3y''y^{(4)} - 5y'''^2 = 0$.

С помощью 6.157 получаем
$$(x + C_1 x + C_2)^2 = C_3 x + C_4.$$

7.17. $9y''^2 y^{(5)} - 45y''y'''y^{(4)} + 40y'''^3 = 0$.

Согласно 7.9, получаем
$$(y + C_1 x + C_2)^2 = C_3 x^2 + C_4 x + C_5.$$

7.18. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right)$.

Полагая $u(x) = y^{(n-1)}$, получаем $u' = f(u)$. Находим u из равенства
$$x = \int \frac{du}{f(u)} + C$$
и, интегрируя $n-1$ раз, получаем y. Параметрическая форма решения:
$$x = \int_C^u \frac{du}{f(u)}, \quad y = \int_{C_1}^{u} \frac{du_1}{f(u_1)} \int_{C_2}^{u_1} \frac{du_2}{f(u_2)} \cdots \int_{C_{n-1}}^{u_{n-2}} \frac{u_{n-1}\, du_{n-1}}{f(u_{n-1})}.$$

7.19. $y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right)$.

Полагая $u(x) = y^{(n-2)}$, получаем уравнение $u'' = f(u)$ типа, рассмотренного в ч. I, п. 23.1. Разрешая равенство

$$x = \pm \int \left[C_1 + 2\int f(u)\,du\right]^{-1} du + C$$

относительно u и интегрируя $n-2$ раза, получаем y. Параметрическая форма решения:

$$x = \int\limits_C^u \frac{du}{\varphi(u)}, \qquad y = \int\limits_{C_1}^u \frac{du_1}{\varphi(u_1)} \int\limits_{C_2}^{u_1} \frac{du_2}{\varphi(u_2)} \ldots \int\limits_{C_{n-2}}^{u_{n-3}} \frac{u_{n-2}\,du_{n-2}}{\varphi(u_{n-2})},$$

где $\varphi(u) = \pm\left[C + 2\int f(u)\,du\right]^{1/2}$.

ГЛАВА VIII

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Предварительные замечания

В нижеследующих системах дифференциальных уравнений, в отличие от предыдущего изложения, независимая переменная обозначается через t, а искомые функции — через $x, y, z, \ldots$

Ввиду того, что общее число приводимых систем незначительно, нет необходимости объяснять те принципы, по которым устанавливается порядок следования систем внутри каждого из разделов.

[Что касается дальнейших примеров и теории, то можно обратиться к тем книгам, которые были указаны в «Предварительных замечаниях» к части III. — *Прим. ред.*]

1—18. Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

8.1. $\boldsymbol{x' = ax,\ y' = by}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; частный случай системы 8.5.

$$x = C_1 e^{at}, \quad y = C_2 e^{bt}.$$

Если рассматривать эти решения как параметрические уравнения некоторой кривой в плоскости xy, то возможны следующие случаи:

(а) $a = b$. Кривые представляют собой лучи $C_2 x = C_1 y$, выходящие из начала координат. Начало координат является узлом.

(б) $a \neq b$, $ab > 0$. Начало координат снова является узлом. Если, например, $a = 1$, $b = 2$, то интегральные кривые суть параболы $y = Cx^2$ и оси координат; во всех этих кривых начало координат нужно исключить.

(в) $a \neq b$, $ab < 0$. Начало координат является седлом. Если, апример, $a = 1$, $b = -1$, то интегральные кривые — гиперболы $xy = C$ и оси координат с исключенной точкой (0, 0).

8.2. $\boldsymbol{x' = ay,\ y' = -ax}$, $a \neq 0$; частный случай системы 8.3.

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at, \quad y = C_2 \cos at - C_1 \sin at;$$

это — окружности в плоскости xy.

8.3. $\boldsymbol{x' = ay,\ y' = bx}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; частный случай системы 8.5.

Следует различать два случая:

(а) $ab > 0$. Полагая $s^2 = ab$, имеем

$$x = C_1 a e^{st} + C_2 a e^{-st}, \quad y = C_1 s e^{st} - C_2 s e^{-st}.$$

Если рассматривать эти решения как параметрические уравнения некоторой кривой в плоскости xy, то интегральными кривыми являются гиперболы

$$bx^2 - ay^2 = C \qquad (C \gtrless 0)$$

и их асимптоты $bx^2 = ay^2$, за исключением точки (0, 0); при $a = b$ получаем равносторонние гиперболы. Начало координат является седлом.

(б) $ab < 0$. Полагая $s^2 = -ab$, имеем

$$x = C_1 a \cos st + C_2 a \sin st, \qquad y = C_2 s \cos st - C_1 s \sin st.$$

Это — параметрические уравнения эллипсов

$$|b|\, x^2 + |a|\, y^2 = C^2;$$

при $b = -a$ получаем окружности с центром в начале координат, которое представляет собой особую точку (центр).

8.4. $\boldsymbol{x' = ax - y}$, $\boldsymbol{y' = x + ay}$; частный случай системы 8.5.

$$x = e^{at}(C_1 \sin t + C_2 \cos t), \qquad y = e^{at}(C_2 \sin t - C_1 \cos t).$$

Отсюда получаем

$$x^2 + y^2 = \left(C_1^2 + C_2^2\right) e^{2at}.$$

При $a = 0$ интегральными кривыми являются окружности с центром в начале координат. При $a \neq 0$ кривые закручиваются вокруг начала координат в виде спиралей. Начало координат представляет собой фокус.

8.5. $\boldsymbol{x' = ax + by}$, $\boldsymbol{y' = cx + dy}$. См. ч. I, пп. 7.2; 7.3; 13.1.

[Подробное доказательство излагаемых фактов можно найти, например, в книгах: Петровский; Понтрягин; Степанов; А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959, и др. — *Прим. ред.*]

(А) $ad - bc \neq 0$. Начало координат $x = y = 0$ является единственной точкой покоя (в смысле, указанном в ч. I. п. 7.2) этой системы; оно будет

узлом при $(a-d)^2 + 4bc = 0$;
узлом при $(a-d)^2 + 4bc > 0$, $ad - bc > 0$;
седлом при $(a-d)^2 + 4bc > 0$, $ad - bc < 0$;
фокусом при $(a-d)^2 + 4bc < 0$, $a + d \neq 0$;
центром при $(a-d)^2 + 4bc < 0$, $a + d = 0$.

Характеристическое уравнение (см. ч. I, п. 13.1) имеет вид

$$s^2 - (a + d)\, s + ad - bc = 0.$$

(а) $(a-d)^2 + 4bc > 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня s_1 и s_2. Если числа A_ν, B_ν определяются уравнениями

$$A_\nu (a - s_\nu) + bB_\nu = 0, \quad A_\nu c + (d - s_\nu) B_\nu = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2),$$

то функции

$$x_\nu = A_\nu e^{s_\nu t}, \quad y_\nu = B_\nu e^{s_\nu t} \qquad (\nu = 1,\ 2)$$

образуют фундаментальную систему решений для данной системы.

(б) $(a-d)^2+4bc<0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $s=\sigma\pm i\tau$ $(\tau\neq 0)$. Решение рассматриваемой системы имеет вид:

$$x=e^{\sigma t}\{bC_1\sin\tau t+bC_2\cos\tau t\},$$
$$y=e^{\sigma t}\{[(\sigma-a)C_1-\tau C_2]\sin\tau t+[\tau C_1+(\sigma-a)C_2]\cos\tau t\}.$$

(в) $(a-d)^2+4bc=0$, $a\neq d$.

$$x=\left[2bC_1+\left(2bt+\frac{2b}{a-d}\right)C_2\right]\exp\frac{a+d}{2}t,$$

$$y=[(d-a)C_1+((d-a)t+1)C_2]\exp\frac{a+d}{2}t.$$

(г) $a=d\neq 0$, $b=0$.

$$x=C_1e^{at},\quad y=(cC_1t+C_2)e^{at}.$$

(д) $a=d\neq 0$, $c=0$.

$$x=(bC_1t+C_2)e^{at},\quad y=C_1e^{at}.$$

(Б) $ad-bc=0$, $a^2+b^2>0$. Вся прямая $ax+by=0$ состоит из особых точек. Рассматриваемая система может быть написана в виде

$$x'=ax+by,\quad y'=\lambda(ax+by).$$

При $a+\lambda b\neq 0$ решение имеет вид

$$x=bC_1+C_2\exp(a+\lambda b)t,\ y=-aC_1+\lambda C_2\exp(a+\lambda b)t,$$

а при $a+\lambda b=0$ — вид

$$x=C_1(b\lambda t-1)+bC_2t,\quad y=\lambda^2bC_1t+(b\lambda^2t+1)C_2.$$

8.6. $ax'+by'=\alpha x+\beta y$, $bx'-ay'=\beta x-\alpha y$; частный случай системы 8.5.

Эти дифференциальные уравнения можно преобразовать таким образом, чтобы одно из них содержало лишь производную x', а другое — лишь y'. Получаем решения:

$$x=e^{At}(C_1\cos Bt+C_2\sin Bt),\quad y=e^{At}(C_2\cos Bt-C_1\sin Bt),$$

причем A, B определяются из уравнений

$$(a^2+b^2)A=a\alpha+b\beta,\ (a^2+b^2)B=a\beta-b\alpha$$

и $a\beta-b\alpha$ должно быть отлично от нуля. Если же $a\beta-b\alpha=0$, но $|a|+|b|>0$, то существует такое число λ, что $\alpha=\lambda a$, $\beta=\lambda b$. Тогда решения записываются в виде:

$$x=C_1e^{\lambda t},\quad y=C_2e^{\lambda t}.$$

8.7. $x'=-y$, $y'=2x+2y$; частный случай системы 8.5.

$$x=e^t[C_1\sin t+C_2\cos t],\quad y=e^t[(C_2-C_1)\sin t-(C_2+C_1)\cos t].$$

8.8. $x'+3x+4y=0$, $y'+2x+5y=0$; частный случай системы 8.5.

$$x=2C_1e^{-t}+C_2e^{-7t},\quad y=-C_1e^{-t}+C_2e^{-7t}.$$

8.9. $x'=-5x-2y$, $y'=x-7y$; частный случай системы 8.5.

$$x=[2C_1\cos t+2C_2\sin t]e^{-6t},$$
$$y=[(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t]e^{-6t}.$$

8.10. $x' = a_1x + b_1y + c_1, \quad y' = a_2x + b_2y + c_2.$

Решения соответствующей однородной системы известны из 8.5. Поэтому, согласно ч. I, п. 8.1, достаточно найти какое-нибудь одно решение рассматриваемой системы.

(А) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Решением будет $x = A$, $y = B$, причем A, B определяются из уравнений

$$a_1A + b_1B + c_1 = 0, \quad a_2A + b_2B + c_2 = 0.$$

(Б) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1^2 + b_1^2 > 0$. В этом случае рассматриваемая система имеет вид

$$x' = ax + by + c_1, \quad y' = \lambda(ax + by) + c_2.$$

Если $r = a + b\lambda \neq 0$, то

$$x = br^{-1}(c_1\lambda - c_2)t - r^{-2}(ac_1 + bc_2), \quad y = \lambda x + (c_2 - \lambda c_1)t$$

является одним из решений. Если $a + b\lambda = 0$, то одним из решений будет

$$x = {}^1/_2 b(c_2 - c_1\lambda)t^2 + c_1t, \quad y = \lambda x + (c_2 - c_1\lambda)t.$$

8.11. $x' + 2y = 3t$, $y' - 2x = 4$.

Соответствующая однородная система может быть решена согласно 8.5. Одно из решений неоднородной системы находится согласно ч. I, п. 8.3 (то же самое и для случаев 8.12, 8.13, 8.15—8.18). Таким образом находим общее решение:

$$x = -\frac{5}{4} + C_1\cos 2t - C_2\sin 2t, \quad y = \frac{3}{2}t + C_1\sin 2t + C_2\cos 2t.$$

8.12. $x' + y = t^2 + 6t + 1$, $y' - x = -3t^2 + 3t + 1$.

$$x = 3t^2 - t - 1 + C_1\cos t + C_2\sin t, \quad y = t^2 + 2 + C_1\sin t - C_2\cos t.$$

8.13. $x' + 3x - y = e^{2t}$, $y' + x + 5y = e^t$.

$$900x = 36e^t + 175e^{2t} + (C_1 + C_2 + C_2t)e^{-4t},$$
$$900y = 144e^t - 25e^{2t} - (C_1 + C_2t)e^{-4t}.$$

8.14. $x' + y' + 2x + y = e^{2t} + t$, $x' + y' - x + 3y = e^{-t} - 1$.

Здесь нельзя поступать так, как в предыдущих случаях, так как мы не можем разъединить $x' + y'$. Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$3x - 2y = e^{2t} - e^{-t} + t + 1. \tag{1}$$

Решив это уравнение относительно y и подставив найденное значение в первое из исходных уравнений, получим линейное уравнение, содержащее только x; из него находим

$$x = Ce^{-7t/5} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}.$$

Подставляя полученное выражение в (1), находим y.

8.15. $x' + y' - y = e^t$, $2x' + y' + 2y = \cos t$.

$$x = e^t + \frac{5}{17}\sin t - \frac{3}{17}\cos t + C_1 + 3C_2e^{4t},$$

$$y = -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{17}\sin t + \frac{4}{17}\cos t - 4C_2e^{4t}.$$

8.16. $4x'+9y'+2x+31y=e^t,\ 3x'+7y'+x+24y=3.$

Решаем эту систему относительно x' и y' и затем поступаем, как и в случае 8.11. Получаем

$$x=\frac{31}{26}e^t-\frac{93}{17}+(C_1\cos t+C_2\sin t)\,e^{-4t},$$

$$y=-\frac{2}{13}e^t+\frac{6}{17}+[(C_1-C_2)\sin t-(C_1+C_2)\cos t]\,e^{-4t}.$$

8.17. $4x'+9y'+11x+31y=e^t,\ 3x'+7y'+8x+24y=e^{2t}.$

По образцу 8.16 получаем

$$x=\frac{31}{25}e^t-\frac{49}{36}e^{2t}+(C_1t+C_2)\,e^{-4t},$$

$$y=-\frac{11}{25}e^t+\frac{19}{36}e^{2t}-(C_1t+C_1+C_2)\,e^{-4t}.$$

8.18. $4x'+9y'+44x+49y=t,\ 3x'+7y'+34x+38y=e^t.$

$$x=\frac{19}{3}t-\frac{56}{9}-\frac{29}{7}e^t+C_1e^{-6t}+C_2e^{-t},$$

$$y=-\frac{17}{3}t+\frac{55}{9}+\frac{24}{7}e^t+4C_1e^{-6t}-C_2e^{-t}.$$

19—25. Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

8.19. $x'=xf(t)+yg(t),\ y'=-xg(t)+yf(t).$

$$x=(C_1\cos G+C_2\sin G)\,F,\quad y=(-C_1\sin G+C_2\cos G)\,F,$$

где $F=\exp\int f(t)\,dt,\ G=\int g(t)\,dt.$

8.20. $x'+(ax+by)f(t)=g(t),\ y'+(cx+dy)f(t)=h(t).$

(a) $ad-bc\neq 0$. Умножаем первое уравнение на α, второе на β и складываем их. Получаем

$$\alpha x'+\beta y'+[(\alpha a+\beta c)\,x+(\alpha b+\beta d)\,y]\,f(t)=\alpha g+\beta h. \tag{1}$$

Затем выбираем α, β так, чтобы при соответствующем выборе числа s выполнялись равенства

$$\alpha a+\beta c=s\alpha \quad \text{и} \quad \alpha b+\beta d=s\beta.$$

Для этого s должно быть корнем характеристического уравнения

$$s^2-(a+d)\,s+ad-bc=0.$$

Тогда, полагая $z(t)=\alpha x+\beta y$, получаем из (1) линейное уравнение

$$z'+szf(t)=\alpha g(t)+\beta h(t), \tag{2}$$

которое непосредственно решается. Если характеристическое уравнение имеет два различных корня s_1, s_2, то можно применить указанный прием для s_1 и s_2 и получить для z_ν с величинами α_ν, β_ν ($\nu=1,\ 2$) два уравнения (2). Решив оба эти уравнения, получаем из

$$\alpha_1x+\beta_1y=z_1,\quad \alpha_2x+\beta_2y=z_2$$

решения исходной системы.

(б) $ad - bc = 0$, $|a| + |b| > 0$. Исходная система может быть записана в виде

$$x' + (ax + by) f(t) = g(t), \quad y' + \lambda (ax + by) f(t) = h(t).$$

Решения получаются из уравнения

$$x' + (a + b\lambda) x f(t) = g(t) + bf(t) \int (\lambda g - h)\, dt$$

и из уравнения $y = \lambda x + \int (h - \lambda g)\, dt$.

8.21. $x' = x \cos t,\ y' = xe^{-\sin t}$.

$$x = C_1 \exp \sin t, \quad y = C_1 t + C_2.$$

8.22. $tx' + y = 0,\ ty' + x = 0$.

$$x = C_1 t + C_2 t^{-1},\ y = -C_1 t + C_2 t^{-1}.$$

8.23. $tx' + 2x = t,\ ty' - (t+2)x - ty = -t$.

$$x = \frac{t}{3} + C_1 t^{-2},\ \ y = -x + C_2 e^t.$$

8.24. $tx' + 2(x - y) = t,\ ty' + x + 5y = t^2$.

$$x = \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15} + 2C_1 t^{-3} + C_2 t^{-4},\ \ y = -\frac{t}{20} + \frac{2t^2}{15} - C_1 t^{-3} - C_2 t^{-4}.$$

8.25. $t^2 (1 - \sin t) x' = t(1 - 2\sin t) x + t^2 y$,
$t^2 (1 - \sin t) y' = (t \cos t - \sin t) x + t(1 - t\cos t) y$.

$$x = C_1 t^2 + C_2 t, \quad y = C_1 t + C_2 \sin t.$$

26—43. Системы двух дифференциальных уравнений порядка выше первого

8.26. $x' + y' + y = f(t),\ x'' + y'' + y' + x + y = g(t)$.

Единственное решение:

$$x = g + g' - f - f' - f'', \quad y = f + f'' - g'.$$

На первый взгляд может показаться, что это противоречит теореме существования (ч. I. п. 5.2). Но эта теорема относится лишь к системам, которые можно написать в такой форме, что слева стоят лишь производные искомых функций, причем в каждое уравнение входят производные лишь от одной функции, а в правые части уравнений производные не входят. Эта форма записи для вышеуказанной системы невозможна.

8.27. $2x' + y' - 3x = 0,\ x'' + y' - 2y = e^{2t}$.

$x = {}^1\!/_4 e^{2t} + C_1 e^t + [4C_2 \cos \alpha t + 4C_3 \sin \alpha t]\, e^{t/2}$.

$y = -{}^1\!/_8 e^{2t} + C_1 e^t + \left[\left(-7C_2 - C_3\sqrt{23}\right)\cos \alpha t + \left(C_2\sqrt{23} - 7C_3\right)\sin \alpha t\right] e^{t/2}$,

где $\alpha = \sqrt{23}/2$.

8.28. $x' - y' + x = 2t,\ x'' + y' - 9x + 3y = \sin 2t$.

$$x = (C_1 + C_2 t)\, e^t + 3C_3 e^{-3t} - \frac{36}{325} \sin 2t - \frac{2}{325} \cos 2t + 2t + 4,$$

$$y = [2C_1 + C_2(2t - 1)]\, e^t + 2C_3 e^{-3t} + \frac{16}{325} \cos 2t - \frac{37}{325} \sin 2t + 6t + 10.$$

8.29. $x' - x + 2y = 0,\ x'' - 2y' = 2t - \cos 2t.$

Исключая y, получаем

$$x = 2C_1 + 4C_2e^{t/2} - t^2 - 4t + \frac{\sin 2t + 4\cos 2t}{34},$$

$$y = C_1 + C_2e^{t/2} - \frac{t^2}{2} - t + 2 + \frac{9\sin 2t + 2\cos 2t}{68}.$$

8.30. $tx' - ty' - 2y = 0,\ tx'' + 2x' + tx = 0.$

$$x = C_2\frac{\cos t}{t} + C_3\frac{\sin t}{t},$$

$$y = \frac{C_1}{t^2} + C_2\left(\frac{\cos t}{t} - \frac{2\sin t}{t^2}\right) + C_3\left(\frac{\sin t}{t} + \frac{2\cos t}{t^2}\right).$$

8.31. $x'' + a^2y = 0,\ y'' - a^2y = 0,\ a \neq 0$; частный случай системы 8.32.

$$x = (C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t)\,e^{\alpha t} + (C_3\cos\alpha t + C_4\sin\alpha t)\,e^{-\alpha t},$$
$$y = (C_1\sin\alpha t - C_2\cos\alpha t)\,e^{\alpha t} + (-C_3\sin\alpha t + C_4\cos\alpha t)\,e^{-\alpha t},$$

где $2\alpha^2 = a^2$.

8.32. $x'' = ax + by,\ y'' = cx + dy.$

Характеристическое уравнение (ср. ч. I, п. 13.1):

$$s^4 - (a+d)\,s^2 + ad - bc = 0.$$

(А) $ad - bc \neq 0$.

(а) $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$. Характеристическое уравнение имеет четыре различных корня $s_1, \ldots, s_4$. Решение имеет вид

$$x = \sum_{\nu=1}^{4} A_\nu e^{s_\nu t},\quad y = \sum_{\nu=1}^{4} B_\nu e^{s_\nu t},$$

где A_ν, B_ν определяются из уравнений

$$A_\nu\left(a - s_\nu^2\right) + B_\nu b = 0,\quad A_\nu c + B_\nu\left(d - s_\nu^2\right) = 0.$$

(б) $(a-d)^2 + 4bc = 0,\ a \neq d$. Фундаментальная система решений:

$$x_{1,2} = \left[2bt \pm \frac{4b}{a-d}\sqrt{2(a+d)}\right]E,\quad y_{1,2} = (d-a)\,tE,$$
$$x_{3,4} = 2btE,\quad y_{3,4} = \left[(d-a)\,t \pm 2\sqrt{2(a+d)}\right]E,$$

где

$$E = \exp\left(\pm t\sqrt{(a+d)/2}\right).$$

(в) $a = d \neq 0,\ b = 0$: $x = C_1E,\ y = \left(\frac{1}{2}C_1\frac{c}{\sqrt{a}}t + C_2\right)E.$

(г) $a = d \neq 0,\ c = 0$: $x = \left(\frac{1}{2}C_1\frac{b}{\sqrt{a}}t + C_2\right)E,\ y = C_1E.$

(Б) $ad - bc = 0,\ a^2 + b^2 > 0$. Рассматриваемая система может быть записана в виде

$$x'' = ax + by,\quad y'' = \lambda\,(ax + by).$$

(а) $a+b\lambda\neq 0$.

$$x=C_1\exp\left(t\sqrt{a+b\lambda}\right)+C_2\exp\left(-t\sqrt{a+b\lambda}\right)+C_3bt+C_4b,$$
$$y=C_1\lambda\exp\left(t\sqrt{a+b\lambda}\right)+C_2\lambda\exp\left(-t\sqrt{a+b\lambda}\right)-C_3at-C_4a.$$

(б) $a+b\lambda=0$:

$$x=C_1bt^3+C_2bt^2+C_3t+C_4,\quad y=\lambda x+6C_1t+2C_2.$$

8.33. $x''=a_1x+b_1y+c_1,\ y''=a_2x+b_2y+c_2$.

Соответствующая однородная система может быть решена согласно 8.32. Поэтому достаточно найти какое-нибудь одно решение неоднородной системы.

(А) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Решением будет $x=A$, $y=B$, где A, B определяются из уравнений

$$a_1A+b_1B+c_1=0,\quad a_2A+b_2B+c_2=0.$$

(Б) $a_1b_2-a_2b_1=0$, $a_1^2+b_2^2>0$. В этом случае рассматриваемую систему можно записать в виде

$$x''=ax+by+c_1,\quad y''=\lambda(ax+by)+c_2.$$

Если $r=a+b\lambda\neq 0$, то

$$x=\frac{b}{2r}(\lambda c_1-c_2)t^2-\frac{1}{r^2}(ac_1+bc_2),\quad y=\lambda x+\frac{1}{2}(c_2-\lambda c_1)t^2$$

является одним из решений. Если $a+b\lambda=0$, то одним из решений будет

$$x=b(c_2-\lambda c_1)\frac{t^4}{4!}+c_1\frac{t^2}{2},\quad y=\lambda x+\frac{1}{2}(c_2-\lambda c_1)t^2$$

8.34. $x''+x+y=-5,\ y''-4x-3y=-3$; частный случай системы 8.33.

$$x=18-[tC_1+(t-1)C_2]e^t-[tC_3+(t+1)C_1]e^{-t},$$
$$y=-23+[(2t+2)C_1+2tC_2]e^t+[(2t-2)C_3+2tC_4]e^{-t}.$$

8.35. $x''=[3\cos^2(at+b)-1]c^2x+\frac{3}{2}c^2y\sin 2(at+b),$

$y''=[3\sin^2(at+b)-1]c^2y+\frac{3}{2}c^2x\sin 2(at+b).$

Из этих уравнений следует ($\tau=at+b$):

$$x''\cos\tau+y''\sin\tau=2c^2(x\cos\tau+y\sin\tau),$$
$$x''\sin\tau-y''\cos\tau=c^2(y\cos\tau-x\sin\tau),$$

и, далее, если положить $u(t)=x\cos\tau+y\sin\tau$, $v(t)=x\sin\tau-y\cos\tau$, то

$$u''+2av'-(2c^2+a^2)u=0,\quad v''-2au'+(c^2-a^2)v=0.$$

Таким образом, данная система приводится к системе уравнений с постоянными коэффициентами.

8.36. $x''+6x+7y=0,\ y''+3x+2y=2t$.

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+7C_3\cos 3t+7C_4\sin 3t+\frac{14t}{9},$$
$$y=-C_1e^t-C_2e^{-t}+3C_3\cos 3t+3C_4\sin 3t-\frac{4t}{3}.$$

8.37. $x'' - ay' + bx = 0,\ y'' + ax' + by = 0.$

Уравнения такого типа встречаются при исследовании горизонтального движения маятника, если при этом учитывается вращение Земли.

$$x = C_1 \cos \alpha t + C_2 \sin \alpha t + C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t,$$
$$y = -C_1 \sin \alpha t + C_2 \cos \alpha t - C_3 \sin \beta t + C_4 \cos \beta t,$$

при $a^2 + 4b > 0$; $2\alpha,\ 2\beta = a \pm \sqrt{a^2 + 4b}$.

8.38. $a_1 x'' + b_1 x' + c_1 x - Ay' = Be^{i\omega t},\ a_2 y'' + b_2 y' + c_2 y + Ax' = 0.$

Уравнения колебаний судна и судового гироскопа. Соответствующая однородная система может быть решена согласно ч. I, п. 13.2. Решение неоднородной системы ищем в виде

$$x = Ae^{i\omega t}, \quad y = Be^{i\omega t}.$$

E. Hahnkamm, *Ingenieur-Archiv* 5 (1934), стр. 169—178.

8.39. $x'' + a(x' - y') + b_1 x = c_1 e^{i\omega},\ y'' + a(y' - x') + b_2 y = c_2 e^{i\omega t}.$

Дифференциальные уравнения фрикционно связанной колебательной системы. Для их решений справедливо то же самое, что и для 8.38.

О подробном исследовании решений см. E. Hahnkamm, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* 13 (1933), стр. 183—202.

8.40. $a_{11} x'' + b_{11} x' + c_{11} x + a_{12} y'' + b_{12} y' + c_{12} y = 0,$

$a_{21} x'' + b_{21} x' + c_{21} x + a_{22} y'' + b_{22} y' + c_{22} y = 0.$

Эта система может быть решена общим методом ч. I, § 13. См. также W. Quade, *Ingenieur-Archiv* 6 (1935), стр. 15—34.

8.41. $x'' - 2x' - y' + y = 0,\ y''' - y'' + 2x' - x = t.$

$$x = -t - 2 + 2C_1 e^{-t} - (2C_2 t + C_3)\, e^t,$$
$$y = -2 - 3C_1 e^{-t} + (C_2 t^2 + C_3 t + C_4)\, e^t.$$

8.42. $x'' + y'' + y' = \operatorname{sh} 2t,\ 2x'' + y'' = 2t.$

$$x = \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} - \frac{1}{16} e^{2t} - \frac{2t+1}{8} e^{-2t} + C_1 + C_2 t + C_3 e^{-2t},$$
$$y = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{2t+1}{4} e^{-2t} - 2C_3 e^{-2t} + C_4.$$

8.43. $x'' - x' + y' = 0,\ x'' + y'' - x = 0.$

$$x = C_1 e^t + C_2 \alpha e^{\alpha t} + C_3 \beta e^{\beta t}, \quad y = C_4 - C_2 e^{\alpha t} - C_3 e^{\beta t},$$

где $2\alpha = 1 + \sqrt{5}$, $2\beta = 1 - \sqrt{5}$.

45—57. Системы более чем двух дифференциальных уравнений

8.44. $x' = 2x,\ y' = 3x - 2y,\ z' = 2y + 3z.$

Эти уравнения могут быть решены последовательно одно за другим.

$$x = 4C_1 e^{2t}, \quad y = 3C_1 e^{2t} + 5C_2 e^{-2t}, \quad z = -6C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}.$$

8.45. $x' = 4x,\ y' = x - 2y,\ z' = x - 4y + z.$

Эти уравнения могут быть решены последовательно одно за другим.

$$x = 18C_1 e^{4t}, \quad y = 3C_1 e^{4t} + 3C_2 e^{-2t}, \quad z = 2C_1 e^{4t} + 4C_2 e^{-2t} + C_3 e^t.$$

8.46. $x' = y - z,\ y' = x + y,\ z' = x + z.$

$$x = C_1 + C_2 e^t, \quad y = -C_1 + (C_2 t + C_3)\,e^t, \quad z = -C_1 + (C_2 t - C_2 + C_3)\,e^t.$$

8.47. $x' - y + z = 0,\ y' - x - y = t,\ z' - x - z = t.$

Из этих уравнений следует $y' - z' = y - z$, т. е. $y - z = C_1 e^t$. Теперь можно легко решить первое из уравнений, а затем и оба остальные. Таким образом, получаем

$$x = C_1 e^t + C_2, \quad y = (C_1 t + C_3)\,e^t - t - 1 - C_2, \quad z = y - C_1 e^t.$$

8.48. $ax' = bc\,(y - z),\ by' = ca\,(z - x),\ cz' = ab\,(x - y).$

$$x = C_0 + rC_1 \cos rt + a^{-1}bc\,(C_2 - C_3)\sin rt,$$
$$y = C_0 + rC_2 \cos rt + ab^{-1}c\,(C_3 - C_1)\sin rt,$$
$$z = C_0 + rC_3 \cos rt + abc^{-1}\,(C_1 - C_2)\sin rt,$$

где $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $a^2C_1 + b^2C_2 + c^2C_3 = 0$. Из этих уравнений непосредственно находим $a^2x' + b^2y' + c^2z' = 0$ и, следовательно,

$$a^2x + b^2y + c^2z = C,$$

т. е. интегральные кривые $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, $z = z\,(t)$ являются плоскими кривыми.

8.49. $x' = cy - bz,\ y' = az - cx,\ z' = bx - ay$

$$x = aC_0 + rC_1 \cos rt + (cC_2 - bC_3)\sin rt,$$
$$y = bC_0 + rC_2 \cos rt + (aC_3 - cC_1)\sin rt,$$
$$z = cC_0 + rC_3 \cos rt + (bC_1 - aC_2)\sin rt,$$

где $r^2 = a^2 + b^2 + c^2$, $aC_1 + bC_2 + cC_3 = 0$. Из этих уравнений непосредственно находим $ax' + by' + cz' = 0$, и, следовательно,

$$ax + by + cz = C,$$

т. е. интегральные кривые $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$ $z = z\,(t)$ являются плоскими кривыми. Далее, $xx' + yy' + zz' = 0$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^*,$$

т. е. интегральные кривые лежат одновременно на шаре.

Следовательно, решениями являются окружности.

8.50. $x' = hy - gz,\ y' = fz - hx,\ z' = gx - fy,\ f = f\,(t),\ g = g\,(t),\ h = h\,(t).$

Прежде всего получаем

$$x^2 + y^2 + z^2 = C^2.$$

Из решения, соответствующего $C = 1$, все остальные получаются умножением на произвольную постоянную. Достаточно поэтому рассмотреть случай $C = 1$. Если при $C = 1$ ввести новые функции $\xi\,(t)$, $\eta\,(t)$ равенствами $x + iy = \xi\,(1 - z)$, $x - iy = \eta^{-1}\,(z - 1)$, то для ξ получится уравнение Риккати

$$\xi' = \frac{g + if}{2}\,\xi^2 - ih\xi + \frac{g - if}{2}$$

и такое же уравнение для η.

8.51. $x' = x + y - z,\ y' = y + z - x,\ z' = z + x - y.$

$$xe^{-t} = C_0 + C_1\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_2 - C_3)\sin t\sqrt{3},$$
$$ye^{-t} = C_0 + C_2\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_3 - C_1)\sin t\sqrt{3},$$
$$ze^{-t} = C_0 + C_3\sqrt{3}\cos t\sqrt{3} + (C_1 - C_2)\sin t\sqrt{3},$$

где $C_1 + C_2 + C_3 = 0.$

8.52. $x' = -3x + 48y - 28z,\ y' = -4x + 40y - 22z,\ z' = -6x + 57y - 31z.$

$$x = 3C_1e^t + 4C_2e^{2t} + 2C_3e^{3t},\quad y = 2C_1e^t + C_2e^{2t} + 2C_2e^{3t},$$
$$z = 3C_1e^t + C_2e^{2t} + 3C_3e^{3t}.$$

8.53. $x = 6x - 72y + 44z,\ y' = 4x - 43y + 26z,\ z' = 6x - 63y + 38z.$

$$x = 2C_1 + 3C_2e^{2t} + 4C_3e^{-t},\quad y = 2C_1 + 2C_2e^{2t} + C_3e^{-t},$$
$$z = 3C_1 + 3C_2e^{2t} + C_3e^{-t}.$$

8.54. $x' = ax + \gamma y + \beta z,\ y' = \gamma x + by + \alpha z,\ z' = \beta x + \alpha y + cz.$

Характеристическое уравнение:

$$(s-a)(s-b)(s-c) - \alpha^2(s-a) - \beta^2(s-b) - \gamma^2(s-c) - 2\alpha\beta\gamma = 0.$$

Если положить

$$a - \alpha^{-1}\beta\gamma = b - \alpha\beta^{-1}\gamma = c - \alpha\beta\gamma^{-1} = \rho,$$

то получаем решения:

$$x = C_1e^{\rho t} + \frac{c}{\alpha}e^{\sigma t},\quad y = C_2e^{\rho t} + \frac{c}{\beta}e^{\sigma t},\quad z = C_3e^{\rho t} + \frac{c}{\gamma}e^{\sigma t},$$

где $C_1\alpha^{-1} + C_2\beta^{-1} + C_3\gamma^{-1} = 0,\quad \sigma = \rho + \alpha^{-1}\beta\gamma + \alpha\beta^{-1}\gamma + \alpha\beta\gamma^{-1}.$

8.55. $tx' = 2x - t,\ t^3y' = -x + t^2y + t,\ t^4z' = -x - t^2y + t^3z + t.$

Можно прежде всего решить первое из этих уравнений, а затем второе и потом третье.

$$x = t + C_1t^2,\quad y = C_1 + C_2t,\quad z = C_1t^{-1} + C_2 + C_3t.$$

8.56. $atx' = bc(y-z),\ bty' = ca(z-x),\ ctz' = ab(x-y).$

Решения получатся из решений системы 8.48, если в последних заменить t через $\ln|t|$.

8.57.
$$\begin{aligned}
x_1' &= \qquad\qquad + ax_2 \qquad + bx_3\cos ct + bx_4\sin ct,\\
x_2' &= -ax_1 \qquad\qquad\qquad + bx_3\sin ct - bx_4\cos ct,\\
x_3' &= -bx_1\cos ct - bx_2\sin ct \qquad\qquad + ax_4,\\
x_4' &= -bx_1\sin ct + bx_2\cos ct - ax_3.
\end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что их решения удовлетворяют системе

$$x_1'' + cx_2' + mx_1 = 0,\quad x_2'' - cx_1' + mx_2 = 0$$

и такой же системе, в которой x_1, x_2 заменены через x_3, x_4; здесь $m = a^2 + b^2 + ac$. Каждая из этих двух систем является системой типа 8.37 Если $c^2 + 4m > 0$, то в решениях системы 8.37 нужно лишь выбрать значения постоянных так, чтобы эти решения удовлетворяли рассматриваемой системе. Поступая таким образом, получаем:

$$\begin{aligned}
x_1 &= C_1\cos\alpha t + C_2\sin\alpha t + C_3\cos\beta t + C_4\sin\beta t,\\
x_2 &= C_1\sin\alpha t - C_2\cos\alpha t + C_3\sin\beta t - C_4\cos\beta t,\\
x_3 &= \gamma C_1\sin\beta t + \gamma C_2\cos\beta t + \delta C_3\sin\alpha t + \delta C_4\cos\alpha t,\\
x_4 &= -\gamma C_1\cos\beta t + \gamma C_2\sin\beta t - \delta C_3\cos\alpha t + \delta C_4\sin\alpha t,
\end{aligned}$$

где $\alpha,\ \beta = \frac{1}{2}c \pm \frac{1}{2}\sqrt{(2a+c)^2 + 4b^2},\ b\gamma = a + \alpha,\ b\delta = a + \beta.$

ГЛАВА IX

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1—17. Системы двух дифференциальных уравнений

9.1 $x' = -x(x+y),\ y' = y(x+y)$.

Из этих уравнений получаем $yx' + xy' = 0$, т. е. $xy = C$. Таким образом, эта система сводится к одному уравнению с разделяющимися переменными $x' + x^2 + C = 0$.

9.2. $x' = (ay+b)x,\ y' = (cx+d)y$.

Из этих уравнений следует

$$\left(a + by^{-1}\right) y' = \left(c + dx^{-1}\right) x', \quad \text{т. е.} \quad y^b e^{ay} = Cx^d e^{cx}.$$

О дальнейшем исследовании решений в связи с некоторыми биологическими проблемами см. V. Volterra, *Rendiconti Sem. Mat. Milano* 3 (1930), стр. 158 и сл.

9.3. $x' = [a(px+qy)+\alpha]x,\ y' = [b(px+qy)+\beta]y$.

Отсюда следует $y^a x^{-b} = Ce^{(a\beta - b\alpha)t}$. См. V. Volterra, *Rendiconti Sem. Mat. Milano* 3 (1930), стр. 158 и сл. О дальнейшем исследовании этих уравнений в связи с некоторыми биологическими проблемами см. также A. J. Lotka, *Journ. Washington Acad.* 22 (1932), стр. 461—469; V. A. Kostitzin, *Actualités scientif.* 96 (1934).

9.4. $x' = h(a-x)(c-x-y),\ y' = k(b-y)(c-x-y)$.

Из этих уравнений следует $|y-b|^h = C|x-a|^k$. Таким образом, эта система может быть сведена к одному уравнению относительно x или y. Если в области $0 \leqslant x < a$, $0 \leqslant y < b$, $x + y < c$ требуется найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = y(0) = 0$, то получаем уравнение

$$x' = h(c-a-b)(a-x) + h(a-x)^2 + hba^{-k/h}(a-x)^{(k+h)/h}$$

и соответствующее уравнение для y. См. H. J. Curnow, *Journ. London Math. Soc.* 3 (1928), стр. 88—92. Подробное изучение этих уравнений в связи с некоторыми химическими проблемами см. J. G. van der Corput, H. J. Backer, *Proceedings Amsterdam* 41 (1938), стр. 1058—1073.

9.5 $x' = y^2 - \cos x,\ y' = -y\sin x$.

Отсюда следует $3y\cos x = y^3 + C$.

См. Е. Иконников, *ЖТФ* 4 (1937), стр. 433—437.

9.6. $x' = -xy^2 + x + y,\ y' = x^2y - x - y$.

Решения удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 2\ln|xy-1| = C$.

9.7. $x' = x + y - x(x^2 + y^2)$, $y' = -x + y - y(x^2 + y^2)$.

Если за независимое переменное принять $-t$ вместо t, то получим 9.8.

9.8. $x' = -y + x(x^2 + y^2 - 1)$, $y' = x + y(x^2 + y^2 - 1)$.

$$x = \frac{\cos t}{\sqrt{1 + Ce^{2t}}}, \qquad y = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + Ce^{2t}}};$$

при $C = 0$ это окружность в плоскости xy; при $C < 0$ $(t < -1/2 \ln|C|)$ получаются спирали, лежащие вне окружности, соответствующей $C = 0$; при $C > 0$ получаются спирали, которые одним концом асимптотически приближаются к упомянутой окружности, а другим — навиваются на точку $(0, 0)$.

9.9. $x' = -yr^2$, $y'(t) = \begin{cases} (x-1)r^2 & \text{при} \quad r^2 \geqslant 2x, \\ \left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y^2}{2x}\right) r^2 & \text{при} \quad r^2 < 2x, \end{cases}$ где $r^2 = x^2 + y^2$.

Интегральные кривые — окружности (без точки $(0, 0)$)

$$x = 2\rho/N, \quad y = 4\rho^3/N$$

при $0 < \rho \leqslant 1$ и $N = 4\rho^4 t^2 + 1$, примыкающие к началу координат, и полные окружности

$$x = \frac{\rho^2 - 1}{N}[\rho \sin(\rho^2 - 1)t - 1], \quad y = -\frac{1}{N}\rho(\rho^2 - 1)\cos(\rho^2 - 1)t$$

при $\rho > 1$, $N = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\rho^2 - 1)t$, охватывающие окружности первого типа.

9.10. $x' = -y + \begin{cases} x(r^2 - 1)\sin\dfrac{1}{r^2 - 1}, \\ 0, \end{cases}$

$y' = x + \begin{cases} y(r^2 - 1)\sin\dfrac{1}{r^2 - 1}, \\ 0, \end{cases}$

где $r^2 = x^2 + y^2$, и при $r^2 \neq 1$ берется первая строка, а при $r^2 = 1$ — вторая.

Вводя полярные координаты $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, получаем из данной системы

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \begin{cases} r(r^2 - 1)\sin\dfrac{1}{r^2 - 1} & \text{при} \quad r \neq 1, \\ 0 & \text{при} \quad r = 1. \end{cases}$$

Среди интегральных кривых имеется бесконечное множество окружностей (соответствующих бесконечному множеству нулей функции $\sin\dfrac{1}{r^2 - 1}$), сходящихся к окружности $r = 1$. Между двумя следующими друг за другом окружностями расположены спирали, асимптотически приближающиеся к каждой из этих двух окружностей.

9.11. $(t^2 + 1)x' = -tx + y$, $(t^2 + 1)y' = -x - ty$.

$$x = \frac{C_1 + C_2 t}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{C_2 - C_1 t}{t^2 + 1}.$$

9.12. $(x^2 + y^2 - t^2)x' = -2tx$, $(x^2 + y^2 - t^2)y' = -2ty$.

Полагая $u(t) = x^2 + y^2$, получаем $(u - t^2)u' + 4tu = 0$, следовательно, $(x^2 + y^2 + t^2)^2 = C_1(x^2 + y^2)$; далее $C_2 x = C_3 y$ $(|C_2| + |C_3| > 0)$.

9.13. $x'^2+tx'+ay'-x=0,\ x'y'+ty'-y=0.$

Дифференцируя и исключая y, получаем уравнение с разделяющимися переменными $\left[3x'^2+4x't+t^2-x\right]x''=0$. Уравнение $x''=0$ приводит к решению

$$x=C_1t+C_2,\quad ay=\left(C_2-C_1^2\right)(t+C_1).$$

Обращение в нуль первого множителя приводит к уравнению 1.402 и дает решение

$$x=-{}^1/_4t^2+2Ct+12C^2,\quad ay=C\,(t+4C)^2.$$

9.14. $x=tx'+f\,(x',\,y'),\ y=ty'+g\,(x',\,y')$; система уравнений Клеро.

Решениями являются: прямые

$$x=ta+f\,(a,\,b),\quad y=tb+g\,(a,\,b)$$

с произвольными a, b; огибающие этих прямых и непрерывно дифференцируемые кривые, составленные из отрезков кривых этих двух типов.

9.15. $x''=ae^{2x}-e^{-x}+e^{-2x}\cos^2 y,\quad y''=e^{-2x}\sin y\cos y-\dfrac{\sin y}{\cos^3 y}.$

См. C. Störmer, *Zeitschrift f. Astrophysik* **1** (1930), стр. 237—274; G. Schulz, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.* **14** (1934), стр. 233.

9.16. $x''=\dfrac{kx}{r^3},\quad y''=\dfrac{ky}{r^3}$, где $r^2=x^2+y^2$.

Уравнения движения материальной точки в плоскости xy под действием некоторой гравитационной силы. Эта система может быть решена по образцу системы 9.26 или же следующим образом: переходя по формулам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $r=r\,(t)$, $\varphi=\varphi\,(t)$ к полярным координатам, получаем

$$r^2\varphi'=C_1,\quad r'^2+r^2\varphi'^2=-2kr^{-1}+C_2;$$

далее, если $C_1\neq 0$, т. е. если движение совершается не по проходящей через начало координат прямой, то

$$\frac{dr}{d\varphi}=\pm\frac{r}{C_1}\left(C_2r^2-2kr-C_1^2\right)^{1/2},$$

и, следовательно,

$$r\left[C\cos(\varphi-\varphi_0)-k\right]=C_1^2,\quad C^2=C_2C_1^2+k^2.$$

Это — уравнение некоторого конического сечения.

9.17. $x''=-\dfrac{C\,(y)\,f\,(v)}{v}\,x',\quad y''=-\dfrac{C\,(y)\,f\,(v)}{v}\,y'-g$, где $v^2=x'^2+y'^2$.

Дифференциальные уравнения координат x, y летящего снаряда; здесь g — ускорение силы тяжести, $C\,(y)\,f\,(v)$ — закон сопротивления, соответствующий плотности воздуха на высоте y. Если ϑ — угол между касательной к траектории и осью Ox, т. е. если $x'=v\cos\vartheta$, $y'=v\sin\vartheta$, то данные дифференциальные уравнения можно написать также в виде

$$(v\cos\vartheta)'=-C\,(y)\,f\,(v)\cos\vartheta,\quad (v\sin\vartheta)'=-C\,(y)\,f\,(v)\sin\vartheta-g.$$

Из этих уравнений следует

$$y'(\vartheta)=-g^{-1}v^2\operatorname{tg}\vartheta, \tag{1}$$

$$\frac{d}{d\vartheta}(v\cos\vartheta)=\frac{C\,(y)}{g}\,vf\,(v)\quad\text{при}\quad v=v\,(\vartheta). \tag{2}$$

Второе из этих уравнений называется *основным уравнением внешней баллистики.*

Если можно с достаточной точностью считать, что $C(y)$ не зависит от y, то уравнение (2) может быть решено независимо. Подстановка

$$v(\vartheta) = e^{u(\tau)}, \quad \tau = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \tag{3}$$

приводит уравнение (2) к виду

$$u'(\tau) = \operatorname{th} \tau + Cg^{-1} f(e^u); \tag{2a}$$

в этой форме данное уравнение может быть для любого закона сопротивления $f(v)$ с достаточной точностью решено графически. В частности, при $f(v) = av^n + b$ уравнение (2) превращается в уравнение Бернулли относительно $v(\vartheta)$; если $f(v) = a \ln v + b$, то подстановка $u(\vartheta) = \ln v$ приводит (2) к линейному уравнению. Таким образом, в обоих этих случаях уравнение (2) может быть решено в квадратурах.

Если же $C(y)$ нельзя принять за постоянную, то, пользуясь заменой (3) и полагая $y(\vartheta) = z(\tau)$, получаем из уравнения (1)

$$z'(\tau) = -g^{-1} e^{2u} \operatorname{th} \tau. \tag{1a}$$

[Некоторые подробности и дальнейшие ссылки можно найти в книге Сансоне, т. II, гл. XII, § 1. — *Прим. ред*].

18—29. Системы более чем двух дифференциальных уравнений

9.18. $x' = y - z,\ y' = x^2 + y,\ z' = x^2 + z.$

Из этих уравнений следует $x' - y' + z' = 0$, т. е. $x - y + z = C$. Используя это равенство, находим

$$x = C_1 + C_2 e^t, \quad y = -C_1^2 + (2C_1C_2t + C_3)e^t + C_2^2 e^{2t},$$
$$z = y - x + C_1.$$

9.19. $ax' = (b - c)yz,\ by' = (c - a)zx,\ cz' = (a - b)xy.$

Из этих уравнений легко следует:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = C_1, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = C_2.$$

Решая эти уравнения относительно y и z и подставляя полученные выражения в первое из исходных уравнений, приходим к одному уравнению первого порядка, разрешимому в эллиптических функциях.

Иначе, полагаем

$$bcu = (a - b)(a - c)x^2, \qquad acv = (b - a)(b - c)y^2,$$
$$abw = (c - a)(c - b)z^2, \qquad -3\zeta = u + v + w.$$

Тогда имеем $\zeta + u = e_1$, $\zeta + v = e_2$, $\zeta + w = e_3$, причем $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, и эта система сводится к уравнению

$$\zeta'^2 = 4(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3),$$

разрешимому в эллиптических функциях.

9.20. $x' = x(y - z),\ y' = y(z - x),\ z' = z(x - y).$

Интегральными кривыми являются пересечения поверхностей

$$x + y + z = C_1 \quad xyz = C_2.$$

9.21. $x' + y' = xy,\ y' + z' = yz,\ x' + z' = xz.$

См. G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Paris, 1886—1891, т. I, стр. 330.

9.22. $x' = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}y,\ y' = 2xy - 3z,\ z' = 3xz - \frac{1}{6}y^2.$

См. там же, где и 9.21, стр. 331.

9.23. $x' = x(y^2 - z^2),\ y' = y(z^2 - x^2),\ z' = z(x^2 - y^2).$

Интегральными кривыми являются пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = C, \quad xyz = C_2.$$

9.24. $x' = x(y^2 - z^2),\ y' = -y(x^2 + z^2),\ z' = z(x^2 + y^2).$

Интегральными кривыми являются пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_1, \quad yz = xC_2.$$

9.25. $x' = -xy^2 + x + y, \quad y' = x^2y - x - y, \quad z' = y^2 - x^2$

Интегральными кривыми являются пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + \ln z^2 = C_1, \quad z(xy - 1) = C_2,$$

9.26. $x'' = \frac{\partial F}{\partial x},\quad y'' = \frac{\partial F}{\partial y},\quad z'' = \frac{\partial F}{\partial z},$

где $F = F(r)$ — некоторая функция от $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; дифференциальные уравнения движения материальной точки под действием центральной силы.

Эти уравнения можно написать в векторной форме следующим образом:

$$\ddot{\mathfrak{x}} = \operatorname{grad} F \quad \text{или} \quad \ddot{\mathfrak{x}} = \frac{F'(r)}{r}\mathfrak{x}$$

($\mathfrak{x}$ — вектор с координатами $x,\ y,\ z$). Легко получаем:

$$\dot{\mathfrak{x}}^2 = 2(F + C_1) \qquad \text{(закон сохранения энергии)},$$

$$[\mathfrak{x} \times \dot{\mathfrak{x}}] = \mathfrak{c} \qquad \text{(закон площадей)},$$

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{c}) = 0 \qquad \text{(каждая траектория есть плоская кривая)}.$$

Сам вектор $\mathfrak{x}(t)$ можно получить следующим образом: равенствами

$$t = \int \frac{r\,dr}{R} + C_2, \quad \varphi = \int \frac{C_3}{rR}\,dr,$$

где $C_3 = |\mathfrak{c}|$, $R^2 = 2r^2(F + C_1) - C_3^2$, величина r и (через посредство r) величина φ определяются как функции от t. Тогда рассматриваемая система имеет решения

$$\mathfrak{x} = r(\mathfrak{a}\cos\varphi + \mathfrak{b}\sin\varphi),$$

причем должны выполняться равенства $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = 1,\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 0.$

9.27. $(x - y)(x - z)x' = f(t), \quad (y - x)(y - z)y' = f(t), \quad (z - x)(z - y)z' = f(t).$

Решения получаются из уравнений

$$x + y + z = C_1, \quad xy + yz + zx = C_2, \quad xyz = C_3 + \int f(t)\,dt.$$

9.28.
$$x_1'(t)\sin x_2 = x_4 \sin x_3 + x_5 \cos x_3,$$
$$x_2'(t) = x_4 \cos x_3 - x_5 \sin x_3,$$
$$x_3'(t) + x_1'(t)\cos x_2 = a,$$
$$x_4'(t) - (1 - \lambda)ax_5 = -m \sin x_2 \cos x_3,$$
$$x_5'(t) + (1 - \lambda)ax_4 = m \sin x_2 \sin x_3.$$

Эти уравнения встречаются в теории гироскопа. Там вместо $x_1, \ldots, x_5$ используются обозначения ψ, ϑ, φ, ω_1, ω_2; этими измененными обозначениями будем дальше пользоваться и мы. Из двух последних уравнений рассматриваемой системы получаем

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2m \cos\vartheta = C_1 \tag{1}$$

и отсюда, с помощью первых двух уравнений,

$$\psi'^2 \sin^2\vartheta + \vartheta'^2 - 2m\cos\vartheta = C_1. \tag{1a}$$

Аналогичным образом получается

$$(\omega_1 \sin\varphi + \omega_2 \cos\varphi) \sin\vartheta + a\lambda \cos\vartheta = C_2 \tag{2}$$

или

$$\psi' \sin^2\vartheta + a\lambda\cos\vartheta = C_2. \tag{2a}$$

Из (1a) и (2a) следует

$$\vartheta'^2 \sin^2\vartheta = -2m\cos^3\vartheta - \left(C_1 + a^2\lambda^2\cos^2\vartheta\right) + 2\left(m + a\lambda C_2\right)\cos\vartheta + C_1 - C_2^2,$$

и отсюда, полагая $u(t) = \cos\vartheta$, получаем

$$u'^2 = -2m(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

где u_1, u_2, u_3 действительны.

Таким образом, исходная система может быть сведена к уравнению 1.71, разрешимому в эллиптических функциях.

9.29. $x_\nu'' = \dfrac{\partial E}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, где $F = F(r)$, $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Если ввести вектор $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то решение получается буквально так же, как и в 9.26, за исключением закона площадей, который здесь имеет вид $x_\mu' x_\nu - x_\mu x_\nu' = C_{\mu,\nu}$.

ДОПОЛНЕНИЯ

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1])

И. Зборник

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + Gy' + Hy = 0 \tag{1}$$

с коэффициентами $G = G(x)$ и $H = H(x)$, которые на некотором интервале непрерывны и не равны тождественно нулю. Преобразование

$$u = \int \exp\left(-\int G(x)\,dx\right)dx, \quad v(u) = y(x), \tag{2}$$

приводит уравнение (1) к виду

$$(u')^2 \frac{d^2v}{du^2} + Hv = 0, \tag{3}$$

где H и u' должны быть представлены с помощью (2) как функции от u.

Если $v = F(u)$ есть решение уравнения (3), то решение уравнения (1) получается в замкнутом виде:

$$y = F\left(\int \exp\left(-\int G(x)\,dx\right)dx\right). \tag{4}$$

Так как уравнение

$$F(u)\frac{d^2v}{du^2} - \frac{d^2F}{du^2}v = 0, \tag{5}$$

относящееся к типу (3), имеет известное общее решение

$$v = F(u)\left[C_1 + C_2 \int \frac{du}{F^2(u)}\right], \tag{6}$$

то уравнение

$$F(f)\left[y'' - \frac{f''}{f'}y'\right] - \frac{d^2F}{df^2}(f')^2 y = 0, \tag{7}$$

где $F(f)$ — произвольная функция, а $f(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $f' \neq 0$, есть наиболее общий вид тех уравнений (1), которые могут быть решены указанным способом. Именно, подстановкой

[1]) J. Zbornik, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* 7 (1956), стр. 64—74.

$u=f(x)$, $v(u)=y(x)$ уравнение (7) сводится к (5), поэтому общее решение уравнения (7):

$$y=F(f)\left[C_1+C_2\int\frac{df}{F^2(f)}\right]. \tag{8}$$

Разберем некоторые типы уравнений (1), интегрирующиеся в квадратурах приведенным выше методом. Мы будем указывать для них подстановку (2) и общее решение.

1°. К уравнению

$$\frac{d^2v}{du^2}+qv=0$$

с постоянным q, имеющему общее решение

$$v=C_1\exp\left(iu\sqrt{q}\right)+C_2\exp\left(-iu\sqrt{q}\right)=c_1\sin\left(u\sqrt{q}\right)+c_2\cos\left(u\sqrt{q}\right),$$

приводятся следующие уравнения:

(1.1) $y''-\left(\frac{f''}{f'}\right)y'-b^2(f')^2y=0$; $f=f(x)$, $f'\neq 0$ (ч. III, 2.79).

$$u=f;\quad y=C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}.$$

(1.2) $y''-\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}\right)y'-b^2g^{2a}f^2y=0$; $f(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$.

$$u=\int fg^a\,dx;\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}.$$

(1.3) $y''-cy'-b^2e^{2cx}y=0$ (ч. III, 2.33, 2.34).

$$u=\frac{e^{cx}}{c};\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}.$$

(1.4) $y''+\left(\frac{ff'}{f^2+a^2}-\frac{f''}{f'}\right)y'-\frac{b^2(f')^2}{f^2+a^2}y=0$; $f=f(x)\neq\pm ia$, $f'\neq 0$ (ч. III, 2.81).

$$u=\ln\left[f+\sqrt{f^2+a^2}\right];\quad y=C_1\left(f+\sqrt{f^2+a^2}\right)^b+C_2\left(f+\sqrt{f^2+a^2}\right)^{-b}.$$

(1.5) $(x^2+2Ax+B)y''+(x+A)y'-m^2y=0$.

$$u=\ln\left(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B}\right);$$

$$y=C_1\left(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B}\right)^m+C_2\left(x+A+\sqrt{x^2+2Ax+B}\right)^{-m}.$$

При $m=1/(2n+1)$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$ и $C_2=C_1(A^2-B)^m$ решение $y(x)$ удовлетворяет соотношению

$$y^{2n+1}+a_1C_1C_2y^{2n-1}+a_2(C_1C_2)^2y^{2n-3}+\ldots+a_n(C_1C_2)^ny=2C_1^{2n+1}(x+A)$$

где для коэффициентов имеется рекуррентная формула:

$$a_0=0,$$

$$a_k=-C_{2n+1}^k-a_1C_{2n-1}^{k-1}-a_2C_{2n-2}^{k-2}-\ldots-a_{k-1}C_{2n-2k+3}^1.$$

(1.6) $(27x^2+4)y''+27xy'-3y=0$ (ч. III, 2.290).
Частный случай (1.5).

(1.7) $50x(x-1)y''+25(2x-1)y'-2y=0$ (ч. III, 2.292).
Частный случай (1.5).

(1.8) $(x^2+1)y''+xy'+2y=0$ (ч. III, 2.222).
Частный случай (1.5).

(1.9) $(x^2-x)^2 y''+(2x-1)(x^2-x)y'-m^2y=0.$

$$u=\ln\frac{x-1}{x};\quad y=C_1\left(\frac{x-1}{x}\right)^m+C_2\left(\frac{x}{x-1}\right)^m.$$

(1.10) $y''+k^2\dfrac{\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x}y'+n^2y\operatorname{dn}^2x=0$ (ч. III, 2.74).

$$u=\int\operatorname{dn}x\,dx;\quad y=C_1\sin nu+C_2\cos nu.$$

(1.11) $y''-f'y'+b^2e^{2f}y=0,\quad f=f(x).$

$$u=\int e^f\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu.$$

(1.12) $y''-m\operatorname{ctg}xy'+b^2\sin^{2m}xy=0.$
Частный случай (1.11) при $f=m\ln\sin x$.

$$u=\int\sin^m x\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu.$$

(1.13) $y''-\operatorname{ctg}xy'+\sin^2xy=0$ (ч. III, 2.69).
Частный случай (1.12) при $m=b=1$.

$$y=C_1\sin\cos x+C_2\cos\cos x.$$

(1.14) $y''+m\operatorname{tg}xy'+b^2\cos^{2m}xy=0.$
Частный случай (1.11) при $f=m\ln\cos x$.

$$u=\int\cos^m x\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu.$$

(1.15) $y''+\operatorname{tg}xy'-\cos^2xy=0$ (ч. III, 2.67).
Частный случай (1.14) при $m=1$, $b=i$.

$$y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}.$$

(1.16) $y''\sin 2x-2my'+2b^2\operatorname{tg}^{2m-1}x\sin^2xy=0.$
Частный случай (1.11) при $f=m\ln\operatorname{tg}x$.

$$u=\int\operatorname{tg}^m x\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu.$$

(1.17) $\sin 2xy''-y'+2b^2\sin^2xy=0.$
Частный случай (1.16) при $m={}^1/_2$.

$$u=\int\operatorname{tg}^{1/2}x\,dx;\quad y=C_1\sin bu+C_2\cos bu.$$

(1.18) $x\ln xy''-ny'-a^2x\ln^{2n+1}xy=0.$
Частный случай (1.11) при $f=\ln(\ln^n x)$, $b=ia$.

$$u=\int\ln^n x\,dx=x\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\ln^k x;$$

$$y=C_1e^{au}+C_2e^{-au}.$$

(1.19) $x\ln xy''-y'-x\ln^3 xy=0$ (ч. III, 2.412).
Частный случай (1.18) при $a=n=1$.

$$y=C_1\left(\frac{x}{e}\right)^x+C_2\left(\frac{e}{x}\right)^x.$$

(1.20) $x^4y''+2x^3y'+a^2y=0$ (ч. III, 2.350).

$$u=-\frac{1}{x};\qquad y=C_1\sin\frac{a}{x}+C_2\cos\frac{a}{x}.$$

(1.21) $y''-n\operatorname{th}xy'-a^2\operatorname{cth}^{2n}xy=0$.
Частный случай (1.11) при $f=n\ln\operatorname{cth}x$.

$$u=\int\operatorname{cth}^n x\,dx;\qquad y=C_1e^{au}+C_2e^{-au}.$$

(1.22) $y''-2\operatorname{ctg}2xy'-\sin^2 2xy=0$.

$$u={}^1/_2\sin^2 x;\qquad y=C_1\exp(\sin^2 x)+C_2\exp(-\sin^2 x).$$

(1.23) $(x^2-1)y''+xy'-ay=0$ (ч. III, 2.235).
Частный случай (1.5) при $A=0$, $B=-1$, $m=\sqrt{a}$.

$$y=C_1\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\sqrt{a}}+C_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-\sqrt{a}}.$$

(1.24) $x^{2n}x^2y''+[(n+1)x^n+na]x^nxy'-n^2a^2e^{2a/x^n}y=0$.

$$u=-\frac{1}{an}\exp\left(\frac{a}{x^n}\right);\quad y=C_1\exp\left(e^{a/x^n}\right)+C_2\exp\left(-e^{a/x^n}\right).$$

(1.25) $y''-(a+2cx)y'-b^2\exp(2ax+2cx^2)y=0$.

$$u=\exp(ax+cx^2);\quad y=C_1e^{bu}+C_2e^{-bu}.$$

(1.26) $y''-\left(\frac{f''}{f'}+2a\right)y'-\left(b^2(f')^2-a\frac{f''}{f'}-a^2\right)y=0;$

$$f=f(x),\qquad f'\neq 0 \text{ (ч. III, 2.80)}.$$

Подстановка $y=e^{ax}z$ приводит к уравнению (1.1) с z вместо y.

$$y=e^{ax}\left(C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}\right).$$

(1.27) $y''-\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}+2c\right)y'+\left[c\left(\frac{f'}{f}+a\frac{g'}{g}\right)-b^2g^{2a}f^2+c^2\right]y=0;$

$$f=f(x)\neq 0,\quad g=g(x)\neq 0.$$

Подстановка $y=e^{cx}z$ приводит к уравнению (1.2) с z вместо y.

$$y=e^{cx}\left[C_1\exp\left(b\int g^af\,dx\right)+C_2\exp\left(-b\int g^af\,dx\right)\right].$$

(1.28) $x^2y''-\left(x\frac{f''}{f'}+2c\right)xy'+\left(-b^2(f')^2x^2+c\frac{f''}{f'}x+c^2+c\right)y=0.$

Подстановка $y=x^cz$ приводит к уравнению (1.1) с z вместо y.

$$y=x^c\left[C_1e^{bf}+C_2e^{-bf}\right].$$

(1.29) $$x^2y'' - \left[x\left(\frac{f''}{f'} + 2a\right) + 2c\right]xy' + \left[x^2\left(a^2 + a\frac{f''}{f'} - b^2(f')^2\right) + x\left(2ac + c\frac{f''}{f'}\right) + c(c+1)\right]y = 0; \quad f = f(x), \quad f' \neq 0.$$

Подстановка $y = x^c e^{ax} z$ приводит к уравнению (1.1) с z вместо y.

$$y = x^c e^{ax}\left[C_1 e^{bf} + C_2 e^{-bf}\right].$$

2°. К уравнению

$$u^2 \frac{d^2v}{du^2} - n(n-1) = 0$$

с вещественным n, имеющему общее решение

$$v = \begin{cases} C_1 u^n + C_2 u^{1-n} & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ \sqrt{u}\,(C_1 + C_2 \ln u) & \text{при} \quad n = 1/2, \end{cases}$$

приводятся следующие уравнения:

(2.1) $$y'' - \left(\frac{f''}{f'}\right)y' - n(n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 y = 0; \quad f = f(x) \neq 0, \ f' \neq 0.$$

$$u = f; \quad y = \begin{cases} C_1 f^n + C_2 f^{1-n} & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ \sqrt{f}\,(C_1 + C_2 \ln f) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.2) $y'' + \operatorname{tg} xy' - n(n-1)\operatorname{ctg}^2 xy = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \sin x$.

$$y = \begin{cases} C_1 \sin^n x + C_2 \sin^{1-n} x & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ \sqrt{\sin x}\,(C_1 + C_2 \ln \sin x) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.3) $\sin^2 2xy'' - 4\sin^2 x \sin 2xy' - 4n(n-1)y = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \operatorname{tg} x$.

$$y = \begin{cases} C_1 \operatorname{tg}^n x + C_2 \operatorname{tg}^{1-n} x & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ \sqrt{\operatorname{tg} x}\,(C_1 + C_2 \ln \operatorname{tg} x) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.4) $xy'' - (2x^2 + 1)y' - 4n(n-1)x^3y = 0.$

$$u = \frac{1}{2}e^{x^2}; \quad y = \begin{cases} C_1 e^{nx^2} + C_2 e^{(1-n)x^2} & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ e^{x^2/2}(C_1 + C_2 x^2) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.5) $$y'' - \left(\frac{f''}{f'} + 2a\right)y' - \left[n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2} - a^2 - a\frac{f''}{f'}\right]y = 0.$$

Подстановка $y = e^{ax}z$ приводит к уравнению (2.1) с z вместо y.

$$y = \begin{cases} e^{ax}(C_1 f^n + C_2 f^{1-n}) & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ e^{ax} f^{1/2}(C_1 + C_2 \ln f) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.6) $$x^2y'' - \left(x\frac{f''}{f'} + 2c\right)xy' + \left[-n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2}x^2 + c\frac{f''}{f'}x + c(c+1)\right]y = 0.$$

Подстановка $y = x^c z$ приводит к уравнению (2.1) с z вместо y.

$$y = \begin{cases} x^c(C_1 f^n + C_2 f^{1-n}) & \text{при} \quad n \neq 1/2, \\ x^c f^{1/2}(C_1 + C_2 \ln f) & \text{при} \quad n = 1/2. \end{cases}$$

(2.7) $$xy'' - \left[x\left(\frac{f''}{f'} + 2a\right) + 2c\right]xy' +$$
$$+ x^2\left(a^2 + a\frac{f''}{f'} - n(n-1)\frac{(f')^2}{f^2}\right) + x\left(2ac + c\frac{f''}{f'}\right) + c(c+1)\Big]y = 0.$$

Подстановка $y = x^c e^{ax} z$ приводит к уравнению (2.1) с z вместо y.

$$y = \begin{cases} x^c e^{ax}\left(C_1 f^n + C_2 f^{1-n}\right) & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ x^c e^{ax} f^{1/2}\left(C_1 + C_2 \ln f\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

(2.8) $x^2 y'' + xy' - n(n-1)\dfrac{y}{\ln^2 x} = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \ln x$.

$$y = \begin{cases} C_1 \ln^n x + C_2 \ln^{1-n} x & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ \ln^{1/2} x\left(C_1 + C_2 \ln\ln x\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

(2.9) $y'' - (1 + e^x)y' - n(n-1)e^{2x}y = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \exp(e^x)$.

$$y = \begin{cases} C_1 \exp(ne^x) + C_2 \exp((1-n)e^x) & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ \exp({}^1/_2\, e^x)\left(C_1 + C_2 e^x\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

(2.10) $y'' - (\cos x - \operatorname{tg} x)y' - n(n-1)\cos^2 x y = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \exp(\sin x)$.

$$y = \begin{cases} C_1 \exp(n \sin x) + C_2 \exp((1-n)\sin x) & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ \exp\left(\dfrac{\sin x}{2}\right)\left(C_1 + C_2 \sin x\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

(2.11) $y'' - \left(\dfrac{g''}{g'} + g'\right)y' - n(n-1)(g')^2 y = 0; \quad g = g(x), \quad g' \neq 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \exp g$.

$$y = \begin{cases} C_1 \exp(ng) + C_2 \exp[(1-n)g] & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ \exp(g/2)\left(C_1 + C_2 g\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

(2.12) $\cos^4 x y'' + \cos^2 x\,(2 \operatorname{tg} x \cos^2 x - 1)y' - n(n-1)y = 0.$

Частный случай (2.1) при $f = \exp(\operatorname{tg} x)$.

$$y = \begin{cases} C_1 \exp(n \operatorname{tg} x) + C_2 \exp((1-n)\operatorname{tg} x) & \text{при} \quad n \neq {}^1/_2, \\ \exp\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}\right)\left(C_1 + C_2 \operatorname{tg} x\right) & \text{при} \quad n = {}^1/_2. \end{cases}$$

3°. К уравнению

$$\frac{d^2 v}{du^2} + b^2 u^{2r-2} v = 0$$

с постоянным b (ч. III, 2.162 (10)), имеющему общее решение

$$v = \sqrt{u}\, Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r}u^r\right), \quad \text{где } Z \text{ — цилиндрическая функция,}$$

приводятся следующие уравнения:

(3.1) $y'' - \frac{f''}{f'} y' + b^2 (f')^2 f^{2r-2} y = 0; \quad f = f(x), \quad f' \neq 0.$

$$u = f; \quad y = \sqrt{f}\, Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} f^r\right).$$

(3.2) $y'' - y' + b^2 e^{-2x} y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = e^x$, $r = -1$.

$$y = e^x [C_1 \sin(be^{-x}) + C_2 \cos(be^{-x})].$$

(3.3) $y'' + y' + b^2 e^{2x} y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = e^{-x}$, $r = -1$.

$$y = e^{-x} [C_1 \sin(be^x) + C_2 \cos(be^x)].$$

(3.4) $y'' - ay' + a^2 b^2 e^{2rax} y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = e^{ax}$.

$$y = \exp\left(\frac{ax}{2}\right) Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} e^{rax}\right).$$

(3.5) $y'' + \operatorname{tg} x y' + b^2 \cos^2 x \sin^{2r-2} x y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = \sin x$.

$$y = \sin^{1/2} x Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} \sin^r x\right).$$

(3.6) $y'' - \operatorname{th} x y' + b^2 \operatorname{cth}^2 x \operatorname{sh}^{2r-2} x y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = \operatorname{sh} x$.

$$y = \operatorname{sh}^{1/2} x Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} \operatorname{sh}^r x\right).$$

(3.7) $xy'' - (1 + 2x^2) y' + 4b^2 x^3 e^{2rx^2} y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = e^{x^2}$.

$$y = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} e^{rx^2}\right).$$

(3.8) $x^2 y'' + xy' + b^2 \ln^{2r-2} x y = 0.$
Частный случай (3.1) при $f = \ln x$.

$$y = \ln^{1/2} x Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} \ln^r x\right).$$

(3.9) $y'' - \left(\frac{f''}{f'} + 2a\right) y' + \left[b^2 (f')^2 f^{2r-2} + a^2 + a \frac{f''}{f'}\right] y = 0.$
Подстановка $y = e^{ax} z$ приводит к уравнению (3.1) с z вместо y.

$$y = e^{ax} \sqrt{f}\, Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} f^r\right).$$

(3.10) $x^2 y'' - \left(x \frac{f''}{f'} + 2c\right) xy' + \left[b^2 (f')^2 f^{2r-2} x^2 + c \frac{f''}{f'} x + c^2 + c\right] y = 0.$
Подстановка $y = x^c z$ приводит к уравнению (3.1) с z вместо y.

$$y = x^c \sqrt{f}\, Z_{\frac{1}{2r}} \left(\frac{b}{r} f^r\right).$$

(3.11) $xy'' - \left[x\left(\frac{f''}{f'} + 2a\right) + 2c\right] xy' +$

$$+\left[x^2\left(a^2 + a\frac{f''}{f'} + b^2 (f')^2 f^{2r-2}\right) + x\left(2ac + c\frac{f''}{f'}\right) + c(c+1)\right] y = 0.$$

Подстановка $y = x^c e^{ax} z$ приводит к уравнению (3.1) с z вместо y.

$$y = x^c e^{ax} \sqrt{f}\, Z_{\frac{1}{2r}}\left(\frac{b}{r} f^r\right).$$

4°. К уравнению

$$(e^{2u} - 1)\frac{d^2 v}{du^2} - 4e^{2u} v = 0,$$

которое имеет общее решение

$$v = (e^{2u} - 1)\left[C_1 + C_2 \ln\left(1 - e^{-2u}\right)\right] + C_2,$$

приводятся следующие уравнения:

(4.1) $y'' - \frac{f''}{f'} y' - 4\frac{e^{2f}}{e^{2f} - 1} (f')^2 y = 0.$

$$u = f;\quad y = (e^{2f} - 1)\left[C_1 + C_2 \ln\left(1 - e^{-2f}\right)\right] + C_2.$$

(4.2) $x(x^{2n} - 1) y'' + (x^{2n} - 1) y' - 4n^2 x^{2n-1} y = 0.$
Частный случай (4.1) при $f = n \ln x$.

$$y = (x^{2n} - 1)\left[C_1 + C_2 \ln\left(1 - x^{-2n}\right)\right] + C_2.$$

(4.3) $x(x^2 - 1) y'' + (x^2 - 1) y' - 4xy = 0.$
Частный случай (4.2) при $n = 1$.

$$y = (x^2 - 1)\left[C_1 + C_2 \ln(1 - x^{-2})\right] + C_2.$$

(4.4) $\cos^2 x y'' - \operatorname{ctg} x y' - 4y = 0.$
Частный случай (4.1) при $f = -\ln\cos x$.

$$y = \operatorname{tg}^2 x\,(C_1 + 2C_2 \ln\sin x) + C_2.$$

(4.5) $(1 - e^{2x})^2 y'' - 2(1 - e^{2x}) y' - 4e^{2x} y = 0.$
Частный случай (4.1) при $f = -{}^1/_2 \ln\left(1 - e^{2x}\right)$.

$$y = (C_1 + 2C_2 x)\exp\frac{2x}{1 - e^{2x}} + C_2.$$

(4.6) $x(x - 1)^2 y'' + x(x - 1) y' - y = 0$ (ч. III, 2.326).

Получается из (4.5) заменой $\xi = e^{2x}$, если после этого новую независимую переменную обозначить снова через x.

$$y = x(x - 1)^{-1}\left[C_1 + C_2 \ln x\right] - C_2.$$

(4.7) $y'' - \frac{y'}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} - 4y = 0.$

Частный случай (4.1) при $f = \ln\operatorname{ch} x$.

$$y = \operatorname{sh}^2 x\,(C_1 + 2C_2 \operatorname{th} x) + C_2.$$

5°. К уравнениям

$$\sin^2 u \frac{d^2v}{du^2} - 2v = 0 \quad \text{или} \quad \cos^2 u \frac{d^2v}{du^2} - 2v = 0$$

с общим решением

$$v = (C_1 - C_2 u) \operatorname{ctg} u + C_2 \quad \text{или} \quad v = (C_1 + C_2 u) \operatorname{tg} u + C_2$$

приводятся следующие уравнения:

(5.1) $y'' - \frac{f''}{f'} y' - 2\left(\frac{f'}{\sin f}\right)^2 y = 0.$

$$u = f; \quad y = (C_1 - C_2 f) \operatorname{ctg} f + C_2.$$

(5.2) $y'' - \frac{f''}{f'} y' - 2\left(\frac{f'}{\cos f}\right)^2 y = 0.$

$$u = f; \quad y = (C_1 + C_2 f) \operatorname{tg} f + C_2.$$

(5.3) $y'' + \operatorname{th} x y' - 2y = 0$ (ч. III, 2.64).

Частный случай (5.1) при $f = \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

$$y = \left(C_1 - C_2 \arcsin\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right) \operatorname{sh} x + C_2.$$

(5.4) $(a^2 - x^2)^2 y'' - x(a^2 - x^2) y' - 2a^2 y = 0.$

Частный случай (5.2) при $f = \arcsin(x/a)$.

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left(C_1 + C_2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C_2.$$

(5.5) $(1 - x^2)^2 y'' - x(1 - x^2) y' - 2y = 0.$

Частный случай (5.4) при $a = 1$.

$$y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}(C_1 + C_2 \arcsin x) + C_2.$$

(5.6) $(1 - e^{-2x}) y'' + y' - 2y = 0.$

Частный случай (5.3) при $f = \operatorname{arctg}(e^{2x} - 1)^{1/2}$.

$$y = \sqrt{e^{2x} - 1}\left(C_1 + C_2 \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x} - 1}\right) + C_2.$$

(5.7) $(x^2 + 1) y'' + 2xy' - 2y = 0.$

Частный случай (5.2) при $f = \operatorname{arctg} x$.

$$y = x(C_1 + C_2 \operatorname{arctg} x) + C_2.$$

ДОПОЛНЕНИЯ К КНИГЕ Э. КАМКЕ[1])

Д. Митринович

Публикуемая серия заметок имеет целью заполнить некоторые пробелы в Сборнике дифференциальных уравнений Э. Камке, пополнить и обобщить содержащиеся там результаты, уточнить некоторые библиографические указания и т. п. Кроме того, мы укажем несколько приемов, позволяющих провести некую классификацию дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы в квадратурах или в специальных функциях (функциях Бесселя, Лежандра и др).

I.

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x\,[ax^p y^q + f\,(xy)]\,dy + y\,[bx^p y^q + g\,(xy)]\,dx = 0 \tag{1}$$

с постоянными a, b, p, q; $f\,(u)$ и $g\,(u)$ и их производные — непрерывные функции от u ($u = xy$). Интегрирующий множитель для этого уравнения будем искать в виде

$$W = F\,(xy)\,G\,(x^2 y),$$

где $F\,(u)$ и $G\,(z)$ — функции аргументов указанного вида: $u = xy$, $z = x^2 y$. Если интегрирующий множитель W существует, то из (1) получаем соотношение

$$xy\,[(a-b)\,x^p y^q + f - g]\,\frac{F'}{F} + x^2 y\,[(2a-b)\,x^p y^q + 2f - g]\,\frac{G'}{G} + \\ + [a\,(p+1) - b\,(q+1)]\,x^p y^q + f - g + xy\,(f' - g') = 0, \tag{2}$$

где $F' = dF/du$, $G' = dG/dz$. В (2) переменные разделяются, если выполнены, например, такие условия:

$$a = b; \quad zG'/G = q - p. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{F'\,(u)}{F\,(u)} = \frac{p-q-1}{u} - \frac{f'\,(u) - g'\,(u)}{f\,(u) - g\,(u)} + \frac{1}{u}\,\frac{(p-q)\,f\,(u)}{f\,(u) - g\,(u)}. \tag{4}$$

---

[1]) D. S. Mitrinovitch,

I. *Janresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* 58 (1956), стр. 58—60.

II. *Bulletin de la Société des mathematiciens et physiciens de la R. P. de Serbie* (Весник друштва математичара и физичара народне республике Србиjе) **7** (1955), стр. 161—164.

III. *Bollettino della Unione Matematica Italiana* (3), **11** (1956), стр. 168—171.

IV. *Glasnik matematičko — fizički i astronomski* (2), **11** (1956), стр. 7—10.

V. *Univerzitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fakulteta, serija matematika i fizika* **11** (1957), стр. 1—10.

VI. Там же **27** (1959), стр. 1—4.

(Случай $f(u) \equiv g(u)$ весьма прост, и мы его рассматривать не будем). Из соотношений (3) и (4) определяется интегрирующий множитель:

$$W = \frac{x^{q-p-1}y^{-1}}{f(xy) - g(xy)} \exp\left\{(p-q\int \frac{f(xy)\,d\ln(xy)}{f(xy)-g(xy)}\right\}.$$

В частности, уравнение

$$x[x^p y^{p+1} + f(xy)]\,dy + y[x^p y^{p+1} + f(xy) - 1]\,dx = 0,$$

относящееся к типу (1), имеет интегрирующим множителем функцию

$$W = y^{-1}\exp\left\{-\int f(xy)\,d\ln(xy)\right\}.$$

Уравнение (1) при $a = b = 0$ непосредственно интегрируется в квадратурах. Таким образом, *уравнение* (1) *при* $a = b$ *интегрируется в квадратурах*. О частном случае уравнения (1) при $f(xy) = \mathrm{const}$ и $g(xy) = \mathrm{const}$, но a не обязательно равном b, см. ч. III, 1.329.

2°. Если параметры a_k, b_k, c_k, d_k, p, q, r, s, λ, μ удовлетворяют некоторым (опущенным здесь) условиям, то тот же прием с успехом применим, например, к следующим типам уравнений:

$$x[a_1 x^p y^q + f(x^r y^s)]\,dy + y[a_2 x^p y^q + g(x^r y^s)]\,dx = 0$$

— интегрирующий множитель можно искать в виде $W = F(xy)\,G(x^r y^s)$;

$$x[a_1 x^p y^q + b_1 x^r y^s + f(xy)]\,dy + y[a_2 x^p y^q + b_2 x^r y^s + g(xy)]\,dx = 0$$

— интегрирующий множитель можно искать в виде $W = F(xy)\,G(x^2 y)\,H(xy^2)$ или лучше $W = x^\lambda y^\mu F(xy)$;

$$x[a_1 x^p + b_1 x^2 y + c_1 xy^2 + d_1]\,dy + y[a_2 x^p + b_2 x^2 y + c_2 xy^2 + d_2]\,dx = 0$$

— интегрирующий множитель можно искать в виде $W = F(x^2 y)\,G(xy^2)\,H(y/x)$.

3°. Дифференциальное уравнение

$$x[F(x^p y^q) + G(x^r y^s)]\,dy + y[f(x^p y^q) + g(x^r y^s)]\,dx = 0, \tag{5}$$

где $ps - qr \neq 0$, подстановкой $x^p y^q = u$, $x^r y^s = v$ приводится к виду

$$u[p(F(u) + G(v)) - q(f(u) + g(v))]\,dv + \\ + v[s(f(u) + g(v)) - r(F(u) + G(v))]\,du = 0. \tag{6}$$

Указанная связь между уравнениями (5) и (6) дает возможность иногда сделать интересные выводы относительно решения уравнения (5).

II.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{\alpha f f'}{f^2+\beta} - \frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\gamma (f')^2}{f^2+\beta}\,y = 0, \tag{1}$$

где α, β, γ — некоторые постоянны. Это уравнение после преобразования $y(x) = \sigma(f)$ (σ — дифференцируемая функция от $f(x)$) приводится к виду

$$(af^2 + 1)\frac{d^2\sigma}{df^2} + bf\frac{d\sigma}{df} + c\sigma = 0, \tag{2}$$

где $a = \beta^{-1}$, $b = \alpha\beta^{-1}$, $c = \gamma\beta^{-1}$, что совпадает с уравнением ч. III, 2.298. Известные случаи интегрируемости в квадратурах уравнения (2) (см. ч. III, 2.297, 2.298, 2.299, 2.300) могут быть использованы для получения случаев интегрируемости уравнения (1). Например, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{A^2ff'}{A^2f^2+1}-\frac{f''}{f'}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{B^2(f')^2}{A^2f^2+1}y=0, \tag{3}$$

где A и B — постоянные, имеет в качестве частных решений следующие функции:

$$y_1(x)=\left(Af+\sqrt{A^2f^2+1}\right)^{B/A},$$

$$y_2(x)=\left(Af+\sqrt{A^2f^2+1}\right)^{-B/A}.$$

Уравнение (3) совпадает с уравнением ч. III, 2.81. Аналогично решается уравнение ч. III, 2.290.

III.

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x^{\alpha}y^{\beta}(y')^{\gamma}+Ay^{\lambda}(y')^{\mu}+Bx^{\nu}=0, \tag{1}$$

где $x>0$, $y>0$, $y'=dy/dx>0$, а α, β, γ, λ, μ, ν, A, B — действительные постоянные, причем

$$AB\neq 0;\quad |\alpha|+|\nu|>0;\quad |\beta|+|\lambda|>0;\quad |\gamma|+|\mu|>0. \tag{2}$$

(Случаи, исключающиеся условиями (2), просты, и мы их рассматривать не будем.) Замена переменных $x=e^{\xi}$, $y(x)=e^{k\xi}\eta(\xi)$, где k — действительное число, которое мы определим после, приводит к уравнению

$$\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}\exp\left[(k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu)\,\xi\right]+$$
$$+A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}\exp\left[(k(\lambda+\mu)-(\mu+\nu))\,\xi\right]+B=0.$$

Если выбрать k так, чтобы

$$k(\beta+\gamma)+\alpha-\gamma-\nu=0,\quad k(\lambda+\mu)-\mu-\nu=0, \tag{3}$$

то окончательно получим уравнение

$$\eta^{\beta}(k\eta+\eta')^{\gamma}+A\eta^{\lambda}(k\eta+\eta')^{\mu}+B=0, \tag{4}$$

в которое переменная ξ явно не входит. О его решении см. 3°.

Анализ системы (3) позволяет заключить следующее. Если

$$\beta+\gamma\neq 0,\ (\beta+\gamma)(\mu+\nu)+(\lambda+\mu)(\alpha-\gamma-\nu)=0, \tag{5}$$

то $k=(\gamma-\alpha+\nu)(\beta+\gamma)^{-1}$. Если $\beta+\gamma=0$, $\alpha-\gamma-\nu=0$, $\lambda+\mu\neq 0$, то тогда $k=(\mu+\nu)(\lambda+\mu)^{-1}$. Если $\beta+\gamma=0$, $\alpha-\gamma-\nu=0$, $\lambda+\mu=0$ и $\mu+\nu=0$, то k произвольно. В последнем случае уравнение (1) имеет вид

$$x^{\lambda-\beta}\left(\frac{y}{y'}\right)^{\beta}+A\left(\frac{y}{y'}\right)^{\lambda}+Bx^{\lambda}=0.$$

2°. Уравнение

$$(y')^m+axy^{n-1}y'+by^n=0 \tag{6}$$

(a, b, m, n — постоянные и $m\neq n$), которое можно записать также в виде

$$y^{1-n}(y')^{m-1}+by(y')^{-1}+ax=0, \tag{7}$$

есть частный случай уравнения (1) при

$$\alpha=0;\ \beta=1-n;\ \gamma=m-1;\ \lambda=1;\ \mu=-1;\ \nu=1.$$

Так как для уравнения (7) условия (5) выполнены, то можно взять $k = m(m-n)^{-1}$. Если $m=n$, то (6) непосредственно интегрируется.

3°. Для интегрирования уравнения (4) можно применить следующий прием. Если положить $k\eta + \eta' = t\eta^{\sigma}$, где σ — подлежащая определению величина, а t — новая переменная, то уравнение (4) переходит в уравнение

$$t^{\gamma}\eta^{\beta+\gamma\sigma} + At^{\mu}\eta^{\lambda+\mu\sigma} + B = 0.$$

Предполагая, что $\gamma \neq \mu$, выберем теперь σ так, чтобы $\beta + \gamma\sigma = \lambda + \mu\sigma$, т. е. $\sigma = (\lambda - \beta)(\gamma - \mu)^{-1}$. Тогда решение запишется так:

$$\eta(t) = \left\{-\frac{B}{t^{\gamma} + At^{\mu}}\right\}^{\frac{\gamma-\mu}{\gamma\lambda-\mu\beta}}, \qquad \xi(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{a\eta}{t\eta^{\sigma} - k\eta},$$

где t_0 — числовая постоянная, выбираемая соответствующим образом.

Таким образом: *если выполнены условия* (5) *и, кроме того,* $\gamma \neq \mu$, $\gamma\lambda - \mu\beta \neq 0$, *то уравнение* (1) *интегрируется в квадратурах.*

В книге Э. Камке можно найти около двадцати уравнений (не считая уравнений типа Лагранжа — Даламбера и однородных), являющихся частными случаями уравнения (1), причем все они, как правило, интегрируются другими способами. Указанный выше метод позволяет решить единым приемом следующие уравнения: ч. III, 1.385; 1.386; 1.397; 1.404; 1.413; 1.414; 1.415; 1.455; 1.457; 1.470; 1.476; 1.487; 1.525; 1.527; 1.541; 1.542; 1.550; 1.554.

4°. Метод интегрирования, указанный в 1°, применим также к уравнениям более общего вида

$$\sum_{n=1}^{N} A_n x^{\alpha_n} y^{\beta_n} (y')^{\gamma_n} = 0 \quad (N \text{ — натуральное число})$$

в случае, когда постоянные величины A_n, α_n, β_n, γ_n удовлетворяют некоторым (опущенным здесь) условиям. Несколько частных уравнений такого вида при $N=4$ имеется в книге Э. Камке.

IV.

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x(A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1)\,dy + \\ + y(A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2)\,dx = 0, \qquad (1)$$

где $A_n, \ldots, F_n$ $(n = 1, 2)$ — постоянные. Если выполнено условие

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \equiv k \quad (k = \text{const}), \qquad (2)$$

где

$$P(x, y) \equiv (3A_1 - A_2)x^2 + 2(B_1 - B_2)xy + (C_1 - 3C_2)y^2 + \\ + (2D_1 - D_2)x + (E_1 - 2E_2)y + (F_1 - F_2);$$

$$Q(x, y) \equiv (pA_1 - qA_2)x^2 + (pB_1 - qB_2)xy + (pC_1 - qC_2)y^2 + \\ + (pD_1 - qD_2)x + (pE_1 - qE_2)y + (pF_1 - qF_2),$$

то интегрирующий множитель для уравнения (1) можно искать в виде

$$W = (x^p y^q)^{-k},$$

где p и q — некоторые постоянные.

2°. Рассмотрим случаи, когда может выполняться условие (2).

Первый случай: $p \neq q$. В этом случае условие (2) справедливо, если

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{kp-3}{kq-1} A_1; \quad B_2 = \frac{kp-2}{kq-2} B_1; \quad C_2 = \frac{kp-1}{kq-3} C_1; \\ D_2 &= \frac{kp-2}{kq-1} D_1; \quad E_2 = \frac{kp-1}{kq-2} E_1; \quad F_2 = \frac{kp-1}{kq-1} F_1, \end{aligned}\right\}$$

где k отлично от $\frac{1}{q}$, $\frac{2}{q}$, $\frac{3}{q}$. Таким образом: *уравнение* (1) *интегрируется в квадратурах посредством использования интегрирующего множителя, если коэффициенты* $A_2, \ldots, F_2$ *определяются соотношениями* (3), *где коэффициенты* $A_1, \ldots, F_1$, *как и параметры* p, q, k, *произвольны.*

Этому результату можно придать еще другую формулировку. Положим, что матрица $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2, и пусть, например, $\delta \equiv \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда интегрирующий множитель для уравнения (1) имеет вид

$$W = x^{\lambda} y^{\mu},$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 3A_1 - A_2 & -A_2 \\ 2B_1 - 2B_2 & -B_2 \end{vmatrix}, \quad \mu = \begin{vmatrix} A_1 & 3A_1 - A_2 \\ B_1 & 2B_1 - 2B_2 \end{vmatrix},$$

если только выполняются следующие равенства:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 3A_1 - A_2 \\ B_1 & B_2 & 2B_1 - 2B_2 \\ C_1 & C_2 & C_1 - 3C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 3A_1 - A_2 \\ B_1 & B_2 & 2B_1 - 2B_2 \\ D_1 & D_2 & 2D_1 - D_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 3A_1 - A_2 \\ B_1 & B_2 & 2B_1 - 2B_2 \\ E_1 & E_2 & E_1 - 2E_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 2A_1 - A_2 \\ B_1 & B_2 & 2B_1 - 2B_2 \\ F_1 & F_2 & F_1 - F_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Отсюда видно, что уравнение (1) интегрируется в квадратурах, если восемь из двенадцати его коэффициентов произвольны, тогда как остальные четыре подчинены простым условиям. Если $\delta \neq 0$, то в качестве этих четырех коэффициентов можно взять C_1, D_1, E_1, F_1 и подчинить их условиям (3).

Если, к примеру, $A_1 = B_1 = A_2 = 1$, $B_2 = 2$, то условия (4) таковы: $C_2 = 5C_1$; $D_2 = 4D_1/3$; $E_2 = 5E_1/2$; $F_2 = 5F_1/3$, и уравнение

$$x\,(x^2 + xy + C_1 y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1)\,dy +$$
$$+ y\left(x^2 + 2xy + 5C_1 y^2 + \frac{4}{3} D_1 x + \frac{5}{2} E_1 y + \frac{5}{3} F_1\right) dx = 0$$

имеет интегрирующий множитель $W = x^{-6} y^{-4}$.

Второй случай: $p = q$.

α) Если $F_1 = F_2$, $B_1 \neq B_2$, то получаем из (2), что

$$kp = 2; \quad A_2 = -A_1; \quad C_2 = -C_1; \quad D_2 = 0; \quad E_1 = 0.$$

Таким образом, уравнение

$$x\,(A_1 x^2 + B_1 xy + C_1 y^2 + D_1 x + F_1)\,dy +$$
$$+ y\,(-A_1 x^2 + B_2 xy - C_1 y^2 + E_2 y + F_1)\,dx = 0$$

интегрируется в квадратурах с помощью интегрирующего множителя $W = x^{-2}y^{-2}$.

β) Если $B_1 = B_2$, $F_1 \neq F_2$, то получаем из (2), что

$$kp = 1; \quad A_1 = 0; \quad C_2 = 0; \quad D_1 = 0; \quad E_2 = 0.$$

Таким образом, уравнение

$$x\,(B_1 xy + C_1 y^2 + E_1 y + F_1)\,dy + y\,(A_2 x^2 + B_1 xy + D_2 x + F_2)\,dx = 0$$

интегрируется в квадратурах с помощью интегрирующего множителя $W = (xy)^{-1}$.

γ) Если $B_1 = B_2$, $F_1 = F_2$, $A_1 \neq A_2$, $A_1 A_2 \neq 0$, то получаем из (2), что уравнение (1) при

$$B_2 = B_1; \quad C_2 = \frac{A_1}{A_2} C_1; \quad D_2 = \frac{A_1 + A_2}{2A_1} D_1; \quad E_2 = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} E_1; \quad F_2 = F_1,$$

где A_1, A_2, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 произвольны, интегрируется в квадратурах с помощью интегрирующего множителя

$$W = (xy)^{(A_2 - 3A_1)/(A_1 - A_2)}.$$

δ) Если $B_1 = B_2$, $F_1 = F_2$, $A_1 = A_2$, то результат получается в несколько иной форме.

3°. Метод, изложенный выше, применим для решения вопроса об интегрируемости в квадратурах уравнения

$$xS(x, y)\,dy + yT(x, y)\,dx = 0,$$

где $S(x, y)$ и $T(x, y)$ — полиномы от двух переменных.

V.

1°. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(n+k)} - f(x)\,L[y] = 0; \tag{1}$$

здесь

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}\,\nu!\,C_n^{\nu} x^{n-\nu} y^{(n-\nu)},$$

$$0! = 1; \quad y^{(0)} = y, \quad y^{(r)} = \frac{d^r y}{dx^r}, \qquad r = 1, \ldots, n+k.$$

Полагая $L[y] = z$, будем иметь, последовательно дифференцируя,

$$\left.\begin{aligned} z' &= x^n y^{(n+1)}, \\ z'' &= (x^n)'\,y^{(n+1)} + x^n y^{(n+2)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z^{(k)} &= \sum_{r=1}^{k} C_{k-1}^{r-1} \left(x^n\right)^{(k-r)} y^{(n+r)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $(x^n)^{(s)} = \dfrac{d^s (x^n)}{dx^s}$.

Исключая k величин $y^{(n+1)}, \ldots, y^{(n+k)}$ из $k+1$ соотношения (1) и (2), получаем:

$$\begin{vmatrix} z' & x^n & 0 & \ldots & 0 \\ z'' & (x^n)' & x^n & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{(k-1)} & (x^n)^{(k-2)} & C^1_{k-2}(x^n)^{(k-3)} & \ldots & x^n \\ z^{(k)} & (x^n)^{(k-1)} & C^1_{k-1}(x^n)^{(k-2)} & \ldots & C^{k-2}_{k-1}(x^n)' \end{vmatrix} + (-1)^k x^{kn} f(x)\, z = 0.$$

После раскрытия определителя порядка k, имеющегося здесь, придем к следующему уравнению:

$$x^k z^{(k)} + a_1 x^{k-1} z^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1} x z' - x^{n+k} f(x)\, z = 0, \tag{3}$$

где коэффициенты a_r есть функции n и k, а именно

$$a_r = (-1)^r r!\, C^r_{k-1} C^r_{n+r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Уравнение (3) записывается также в следующей форме:

$$z^{(k)} + g_1(x)\, z^{(k-1)} + g_2(x)\, z^{(k-2)} + \ldots + g_{k-1}(x)\, z' - f(x)\, x^n z = 0,$$

где

$$g_r(x) = (-1)^{r-1} C^r_{k-1} (x^n)^{(r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Окончательно, линейное уравнение (1) сводится к (3) с помощью линейного уравнения $L[y] = z$. Общее решение однородного уравнения $L[y] = 0$ есть

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n \qquad (C_p \text{ — постоянные}).$$

Для нахождения общего решения неоднородного уравнения $L[y] = z$ достаточно применить метод вариации постоянных.

При $k = 2, 3, 4$ уравнение (3) имеет соответственно вид

$$x^2 z'' - n x z' - x^{n+2} f(x)\, z = 0; \tag{4}$$

$$x^3 z''' - 2n x^2 z'' + n(n+1)\, x z' - x^{n+3} f(x)\, z = 0; \tag{5}$$

$$x^4 z'''' - 3n x^3 z''' + 3n(n+1)\, x^2 z'' - n(n+1)(n+2)\, x z' - x^{n+4} f(x)\, z = 0. \tag{6}$$

Если уравнения (4), (5), (6) интегрируются в замкнутом виде, то соответствующие уравнения (1) при $k = 2, 3, 4$ также интегрируются. Покажем это на нескольких примерах.

2°. Возьмем уравнение (ч. III, 2.162 (6))

$$x^2 z'' + (1 - 2\nu)\, x z' + \nu^2 (x^{2\nu} + 1 - \nu^2)\, z = 0, \tag{7}$$

решение которого будет выражаться через цилиндрическую функцию:

$$z = x^\nu Z_\nu(x^\nu), \qquad Z_\nu(t) = \begin{cases} C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t), & \text{если } \nu \text{ не целое;} \\ C_1 J_\nu(t) + C_2 N_\nu(t), & \text{если } \nu \text{ целое.} \end{cases}$$

(C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $J_\nu(t)$ и $N_\nu(t)$ — функции Бесселя первого и второго родов). Сравнивая (4) и (7), получим, что уравнение (4) разрешимо в замкнутом виде, в частности, если

$$n = 2\nu - 1; \quad f(x) \equiv \nu^2 \left[(\nu^2 - 1)^2 x^{-2\nu-1} - x^{-1} \right].$$

(Заметим, что теперь ν может иметь лишь вид $p/2$, где p целое, тогда как в (7) никакого ограничения на ν нет.) Окончательно, общее решение уравнения (1), соответствующего в этом случае уравнению (4):

$$x^{2\nu+1}y^{(2\nu+1)} - \nu^2(x^2-\nu^2+1)\left[x^{2\nu-1}y^{(2\nu-1)} - \right.$$
$$\left. - 1!\,C^1_{2\nu-1}x^{2\nu-2}y^{(2\nu-2)} + \ldots + (-1)^{2\nu-1}(2\nu-1)!\,C^{2\nu-1}_{2\nu-1}y\right] = 0,$$

выражается в бесселевых функциях.

Сравнивая уравнение (4) с уравнением (ч. III, 2.162 (8))

$$xz'' + (1-2\nu)z' + xz = 0, \tag{8}$$

получим, что уравнение (4) разрешимо в замкнутом виде, в частности, если $n = 2\nu - 1$; $f(x) \equiv -x^{-2\nu+1}$, ибо известно, что решение уравнения (8) есть $z = x^{\nu}Z_{\nu}(x)$. Тогда уравнение (1), соответствующее в этом случае уравнению (4):

$$x^{2\nu}y^{(2\nu+1)} + x^{2\nu-1}y^{(2\nu-1)} - 1!\,C^1_{2\nu-1}x^{2\nu-2}y^{(2\nu-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{2\nu-1}(2\nu-1)!\,C^{2\nu-1}_{2\nu-1}y = 0,$$

интегрируется в бесселевых функциях.

Применим теперь тот же метод к уравнению (ч. III, 2.162 (1а))

$$x^2z'' + axz' + (bx^m + c)z = 0 \quad (m \neq 0,\ a,\ b,\ c - \text{постоянные}), \tag{9}$$

которое содержит (7) и (8) как частные случаи. Общее решение уравнения (9) выражается через цилиндрические или элементарные функции.

Сравнивая (4) и (9), находим, что уравнение (4) разрешимо в замкнутом виде, в частности, если

$$n = -a; \qquad f(x) \equiv -x^{a-2}(bx^m + c), \tag{10}$$

где для a возможны целые отрицательные значения. Если ввести условия (10) в уравнение вида (1), соответствующее $k = 2$:

$$y^{(n+2)} - f(x)\,L\,[y] = 0,$$

то получим линейное уравнение, решения которого выражаются через функции Бесселя и элементарные функции.

Среди уравнений этого типа имеется также следующее:

$$\alpha x^p y^{(n+2)} + x^n y^{(n)} - 1!\,C^1_n x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + (-1)^n n!\,C^n_n y = 0$$

(n — натуральное, α, p — произвольные), общее решение которого выражается через функции Бесселя. В книге Э. Камке не содержится это уравнение, нет даже его частных случаев:

$$\alpha x^p y''' + xy' - y = 0, \qquad \alpha x^p y'''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Сравнивая уравнение (4) с другими уравнениями, соответствующим образом подобранными, можно получать дальнейшие результаты. Так, например, можно использовать в упомянутых целях следующие уравнения: ч. III, 2.97; 2.98; 2.99; 2.103; 2.104; 2.105; 2.106; 2.138; 2.140; 2.176; 2.179; 2.187; 2.400; 2.409 и т. д. При этом получаются уравнения, разрешимые в специальных функциях.

Уравнение (ч. III, 2.138)

$$xz'' + az' - \frac{1}{4}(x - 2a - 4b)z = 0 \quad (a,\ b - \text{постоянные}) \tag{11}$$

превращается с помощью преобразования $z = ue^{-x/2}$ в уравнение

$$xu'' + (b - x)u' - au = 0 \quad (\text{ч. III, 2.113}),$$

которое является вырожденным гипергеометрическим уравнением. Сравнивая (6) с (14), получим, что уравнение (6) разрешимо в замкнутом виде, в частности, при условии

$$n = -a; \quad f(x) \equiv \frac{1}{4} x^{a-2}(x - 2a - 4b), \tag{12}$$

где a может принимать целые отрицательные значения. В этом случае соответствующее уравнение вида (1):

$$y^{(n+2)} - f(x)\dot{L}[y] = 0$$

будет иметь решения, которые выражаются через вырожденные гипергеометрические функции (функции Похгаммера). Если разность $b - a$ есть целое положительное число, то решение этого уравнения при условии (12) выражается также в элементарных функциях.

3°. Рассмотрим одновременно с уравнением (5) уравнение (ч. III, 3.49)

$$x^2z''' - 3(p+q)xz'' + 3p(3q+1)z' - x^2z = 0 \tag{13}$$

(p и q — натуральные). Решение уравнения получается в замкнутом виде. Уравнение (5) совпадает с (13), если выполнены условия

$$2n = 3(p+q); \quad n(n+1) = 3p(3q+1); \quad f(x) \equiv x^{-n},$$

т. е. для всех положительных p и q, удовлетворяющих диофантову уравнению

$$3(p+q)^2 + 2(p+q) = 4p(3q+1), \tag{14}$$

которое можно записать также в виде

$$p = \frac{2}{3}\frac{1}{t-1}; \quad q = \frac{2}{3}\frac{t}{t-1} \qquad (t \neq 1),$$

где t — параметр. Уравнение (14) распадается на два: $p = q$ и $p - q = {}^2/_3$. Так как неопределенное уравнение $p - q = {}^2/_3$ не имеет никакого целочисленного решения, то из уравнения $p = q$ получаем решение общего уравнения (14) в натуральных числах: $p = N$, $q = N$ (N — натуральное).

Окончательно, *дифференциальное уравнение*

$$x^{3N}y^{(3N+3)} - x^{3N}y^{(3N)} + 1!\,C_{3N}^1 x^{3N-1}y^{(3N-1)} - 2!\,C_{3N}^2 x^{3N-2}y^{(3N-2)} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{3N}(3N)!\,C_{3N}^{3N}y = 0$$

интегрируется в замкнутом виде.

Кроме указанного случая, затруднительно нахождение других уравнений, интегрируемых в замкнутом виде, которые можно было бы сравнивать с (5). Это еще труднее, если рассматривать уравнение (6).

4°. Теперь мы рассмотрим другой тип линейных уравнений, а именно:

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) L_{N_k}[y] = 0 \qquad (N_k - \text{натуральные}), \tag{15}$$

где

$$L_N[y] \equiv x^N y^{(N)} - 1!\,C_N^1 x^{N-1}y^{(N-1)} + 2!\,C_N^2 x^{N-2}y^{(N-2)} + \ldots + (-1)^N N!\,C_N^N y.$$

Дифференциальная форма $L_N[y]$, если положить в ней $y = xz$, упростится: $L_N[(xz)] = x^{N+1}z^{(N)}$, а уравнение (15) примет вид

$$\sum_{k=1}^{n} x^{N_k+1} f_k(x)\, z^{(N_k)} = 0. \tag{16}$$

Порядок уравнения (16) есть $\nu = \max(N_1, N_2, \ldots, N_n)$. Если положить $\mu = \min(N_1, N_2, \ldots, N_n)$, то уравнение (24) подстановкой $W = z^{(\mu)}$ приводится к линейному уравнению порядка $\nu - \mu$, которое мы назовем *уравнением E*. Уравнение (16) имеет частные решения: $x, x^2, \ldots, x^{\mu}$.

Возьмем в качестве примера

$$f_1(x)(x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y) + f_2(x)(x^2y'' - 2xy' + 2y) + f_3(x)(xy' - y) = 0.$$

В этом случае уравнение (16) и *уравнение E* примут соответственно вид

$$x^2 f_1(x)\, z''' + x f_2(x)\, z'' + f_3(x)\, z' = 0,$$
$$x^2 f_1(x)\, u'' + x f_2(x)\, u' + f_3(x)\, u = 0.$$

5°. Применим этот метод для решения линейных уравнений третьего и четвертого порядка. Возьмем уравнение

$$y''' + f(x)(x^2y'' - 2xy' + 2y) + g(x)(xy' - y) = 0;$$

подстановкой $y = xz$ и затем $z' = u$ оно превращается в

$$xu'' + [x^3 f(x) + 3]\, u' + x^2 g(x)\, u = 0.$$

Уравнение

$$y^{(4)} + f(x)(x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y) + \\ + g(x)(x^2y'' - 2xy' + 2y) + h(x)(xy' - y) = 0 \tag{17}$$

с помощью подстановки $y = xz$ и затем $z' = u$ превращается в

$$xu''' + [x^4 f(x) + 4]\, u'' + x^3 g(x)\, u' + x^2 h(x)\, u = 0. \tag{18}$$

Если известно уравнение типа (18), решение которого выражается в квадратурных и специальных функциях, то можно построить уравнение (17), интегрируемое также в замкнутом виде.

6°. Уравнение (1) с помощью подстановки $y = xt$, $t = t(x)$ превращается в

$$xu^{(k)} + (k+n)\, u^{(k-1)} - x^{n+1} f(x)\, u = 0, \tag{19}$$

где $t^{(n)} = d^n t/dx^n$ обозначено через u. Уравнение (3) переходит в (19) после замены переменных $x^{n+1}t^{(n)} = z$, что легко доказать, если положить $y = xt$ в равенстве $L[y] = z$. Указанный факт может быть использован для интегрирования некоторых дифференциальных уравнений. Покажем это на примере уравнения (ч. III, 2.409)

$$x^{2a}u'' + ax^{2a-1}u' + (a-1)^2 u = 0,$$

которое интегрируется в элементарных функциях. Оно может быть записано в виде

$$xu'' + au' + (a-1)^2 x^{1-2a} u = 0, \tag{20}$$

а уравнение (19) при $k = 2$ имеет вид

$$xu'' + (n+2)\, u' - x^{n+1} f(x)\, u = 0. \tag{21}$$

Если сравнить (21) с (20), то видно, что уравнение (21) интегрируется, например, если

$$n = a - 2; \quad f(x) \equiv -(a-1)^2 x^{-3a-2},$$

где $a > 2$ — натуральное число. Окончательно: *уравнение типа* (1)

$$y^{(a)} + (a-1)^2 x^{-3a+2} \sum_{\nu=0}^{a-2} (-1)^{\nu} \nu! \, C_{a-2}^{\nu} x^{a-2-\nu} y^{(a-2-\nu)} = 0$$

при $a > 2$ и натуральном интегрируется в квадратурах.

VI.

1°. Рассмотрим уравнение (ч. III, 1.257)

$$x(Ax^4 + Bxy + C)\,dy = y(Dx^4 + Exy + F)\,dx, \tag{1}$$

где A, B, C, D, E, F — постоянные. Положим $x^4 = u$, $xy = v$; тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{du}{dv} = \frac{4u[Au + Bv + C]}{v[(A+D)u + (B+E)v + (C+F)]}.$$

Если $D = -A$, то получается уравнение Бернулли, и, следовательно, уравнение (1) интегрируется в квадратурах.

Более общее уравнение

$$x(Ax^k + Bxy + C)\,dy = y(Dx^k + Exy + F)\,dx, \qquad k = \text{const}, \tag{2}$$

подстановкой $x^k = u$, $xy = v$ приводится к виду

$$\frac{du}{dv} = \frac{ku(Au + Bv + C)}{v[(A+D)u + (B+E)v + (C+F)]}. \tag{3}$$

При $D = -A$ уравнение (3) есть уравнение Бернулли и, следовательно, (2) в этом случае интегрируется в квадратурах.

2°. Рассмотрим уравнение

$$y'' + (ax^2 + bx + c)y' + (Ax + B)y = 0, \tag{4}$$

где a, b, c, A, B — постоянные. Дифференцируя это равенство n раз, получим следующее:

$$y^{(n+2)} + (ax^2 + bx + c)y^{(n+1)} + [(2an + A)x + (bn + B)]y^{(n)} + \\ + [n(n-1)a + nA]y^{(n-1)} = 0.$$

Пусть $-A/a$ $(a \neq 0)$ есть нуль или натуральное число; тогда возьмем $n = 1 - a^{-1}A$ и, положив $y^{(n)} = z$, сведем уравнение (4) к виду

$$z'' + (ax^2 + bx + c)z' + \left[(2a - A)x + b\left(1 - \frac{A}{a}\right) + B\right]z = 0. \tag{5}$$

Уравнения (5) и (4) одного типа, и если одно из них интегрируется в замкнутом виде, то это же верно для другого.

Рассмотрим для примера уравнение (ч. III, 2.56)

$$y'' - x^2 y' + xy = 0, \tag{6}$$

интегрируемое в квадратурах. Так как $-A/a = 1$, то уравнению (6) соответствует следующее уравнение типа (5): $z'' - x^2 z' - 3xz = 0$, разрешимое в квадратурах. Его частным решением будет $z = x \exp(x^3/3)$.

Если рассмотреть в качестве (4) уравнение $y'' + ax^2y' - axy = 0$, имеющее частное решение $y = x$, то соответствующее уравнение типа (5) будет иметь вид $z'' + ax^2z' + 3axz = 0$.

3°. Рассмотрим нелинейное уравнение (ч. III, 6.227)

$$(xy' - ay)\, y'' + b\,(y')^2 = 0, \tag{7}$$

где a и b — постоянные. Если положить $y = \exp \int u\, dx$, то (7) перейдет в

$$(xu - a)(u' + u^2) + bu^2 = 0. \tag{8}$$

Теперь подстановка $u = \eta e^{-\xi}$, $x = e^{\xi}$ приводит уравнение (8) к виду

$$(\eta - a)\left(\frac{d\eta}{d\xi} - \eta + \eta^2\right) + b\eta = 0,$$

откуда окончательно получаем уравнение

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta - \eta^2 - \frac{b\eta^2}{\eta - a}$$

с разделяющимися переменными. Следовательно, уравнение (7) интегрируется в квадратурах.

4°. Следующее уравнение (ч. III, 2.411)

$$\left(ae^{bx} + b^{-2}\right) y'' = y$$

(a, b — постоянные) интегрируется, ибо сразу выписывается частное решение:

$$y_1 = e^{-bx} + ab^2.$$

* * *

Продолжением этого цикла работ являются следующие статьи (указаны также их рефераты, опубликованные в Реферативном журнале «Математика»):

D. S. Mitrinović, D. Ž. Djoković, Dopune Kamke-ovom delu. VII, Univerzitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fakulteta, serija matematika i fizika, **78—83** (1962), стр. 16—18. РЖМат, 1963, 7 Б 166.

D. S. Mitrinović, D. Ž. Djoković, Compléments au traité de Kamke. VIII, там же **84—91** (1963), стр. 19—20. РЖМат, 1963, 10 Б 173.

D. S. Mitrinović, D. Ž. Djoković, Compléments au traité de Kamke. IX, там же **107—108** (1963), стр. 78—79. РЖМат, 1963, 12 Б 247.

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Compléments au traité de Kamke. X, Publications de l'institut mathematique (Beograd), т. 3 (1963), стр. 61—68. РЖМат, 1964, 12 Б 157.

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Compléments au traité de Kamke. XI, Матем. весник, кн. 1, № 3 (1964), стр. 181—185, РЖМат, 1965, 12 Б 174.

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Compléments au traité de Kamke. XII, Univerzitet u Beogradu. Publikacije elektrotehničkog fakulteta, serija matematika i fizika, **175—179** (1967), стр. 15—21. РЖМат, 1967, 11 Б 223.

D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Dopune Kamke-ovom delu. XIII, там же **210—228** (1968), стр. 43—48. РЖМат, 1968, 11 Б 182.

НОВЫЙ СПОСОБ КЛАССИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ИХ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ [1]

И. Зборник

(Реферат)

[Статья представляет собой изложение нового метода униформизации линейных дифференциальных уравнеиий, позволяющего находить решение обширного класса уравнений единым способом.

Именно, рассматриваются линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка вида

$$l[y] \equiv E_1[y] + Bx^r E_2[y] = 0 \tag{1}$$

или

$$l[y] \equiv E_1[y] + Bx^r E_2[y] = H(x), \tag{2}$$

где B и r — произвольные действительные или комплексные постоянные, а E_1 и E_2 — операторы Эйлера:

$$E_1[y] \equiv \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu x^\mu y^{(\mu)}, \quad E_2[y] \equiv \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu x^\mu y^{(\mu)};$$

здесь m, n — целые α_μ и β_μ — постоянные числа. Будем считать, что (1) — уравнение m-го порядка, т. е. $m > n$. Из числа известных уравнений второго порядка к этому типу относятся: уравнение Лежандра, гипергеометрическое и вырожденное гипергеометрическое уравнения, уравиение Бесселя, уравнения для полиномов Чебышева — Лагерра и Чебышева — Эрмита и др.

Для решения уравнения (1) предлагается новый операционный способ. Основная идея этого способа состоит в том, что оператор $l[y]$ представляется по определенному закону в виде произведения «элементарных операторов»:

$$l[y] = \left(\prod_{i=1}^{m} l_{p_i} + Bx^r \prod_{j=1}^{n} l_{q_j}\right)[y], \tag{3}$$

где $l_s[y] = xy' - sy$. С помощью получившихся элементарных операторов строятся специальные выражения $L_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, такие, что общее

---

[1] J. Zbornik, *Sitzungsberichte Österreichische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abt.* II *a*, **166 (1957)**, стр. 21—62.

решение уравнения (1) запишется в форме: $y = \sum_{i=1}^{m} C_i L_i(x)$, где C_i — произвольные постоянные. В качестве иллюстрации дается решение предложенным методом конкретных примеров, получаются интересные новые замкнутые представления решений перечисленных выше классических уравнений Лежандра, Бесселя и др.

В частности, указано, что следующие уравнения из книги Э. Камке представляют собой частные случаи уравнения второго порядка типа (1):

ч. III, 2.101 — при	$B = a$,	$r = 2$	$(\lambda = 1)$,
2.130 — при	$B = a/2$,	$r = 1$	$(\lambda = 0)$,
2.176 — при	$B = 1$,	$r = 2$	$(\lambda = -1)$,
2.179 — при	$B = a^2$,	$r = 2$	$(\lambda = -1)$,
2.276 — при	$B = -1$,	$r = 2$	$(\lambda = 1/2)$,
2.277 — при	$B = -a$,	$r = 2$	$(\lambda = 1/2)$,
2.288 — при	$B = 1/4$,	$r = 1$	$(\lambda = -1/4)$,
2.342 — при	$B = a$,	$r = -2$	$(\lambda = -1)$,
2.350 — при	$B = a^2$,	$r = -2$	$(\lambda = 0)$,
2.400 — при	$B = a$,	$r = -4$	$(\lambda = -2)$,
2.409 — при	$B = (a-1)^2$,	$r = 2(1-a)$	$(\lambda = 0)$,
6.84 — при	$B = \lambda^2 b^2$,	$r = 2b$	$(\lambda = -a)$

и потому могут быть решены одним и тем же приемом. Именно, преобразование

$$x = \left(\frac{1}{B} r^2 \xi\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x^{\lambda} y(x) = z(\xi) \tag{4}$$

приводит при соответственно подбираемом λ любое из перечисленных уравнений к уравнению (ч. III, 2.104)

$$\xi z'' + \frac{1}{2} z' + z = 0.$$

Найдены решения в замкнутом виде для следующих уравнений:

1°. $x^2 y'' + x(Bx^r - a - b + 1) y' - a(Bx^r - b) y = f(x)$, где a, b, B, r — постоянные, $f(x)$ — произвольная функция.

$$y = x^a \left\{ C_1 + \int x^{b-a-1} \exp\left(-\frac{B}{r} x^r\right) \left[C_2 + \int x^{-b-1} f(x) \exp\left(\frac{B}{r} x^r\right) dx \right] dx \right\},$$

2. $x(x^\nu + 1) y'' + [(a - b + \nu) x^\nu + a] y' + b(1 - a - \nu) x^{\nu-1} y = 0$, где a, b, ν — постоянные (ч. III, 2.355).

$$y = (x^\nu + 1)^{\frac{b}{\nu}} \left[C_1 + C_2 \int x^{-a} (x^\nu + 1)^{-\frac{b+\nu}{\nu}} dx \right].$$

3. *Радиальное волновое уравнение* (ч. III, 2.154):

$$x^2 y'' + \left(A^2 x^2 + Abx + \frac{1}{4} - c^2\right) y = 0,$$

где A, b, c — постоянные.

а) Если $\frac{1}{2}\, ib = \frac{1}{2} + c + n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то ч стное решение:

$$y = (Ax)^{\frac{1}{2}+c} e^{iAx} \sum_{k=0}^{n} a_k (Ax)^k,$$

где

$$a_k = \frac{(2i)^k C_n^k}{k!\, C_{2n+k}^k}.$$

б) Если $\frac{1}{2}\, ib = \frac{1}{2} + c - n$, $n = 1, 2, \ldots$, то общее решение:

$$y = \xi^{c+\frac{1}{2}} e^{i\xi} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left[\frac{C_1 + C_2 \int E\, d\xi}{E\xi} \right],$$

где $\xi = Ax$; $E = \xi^{2c-n} e^{2i\xi}$.

в) Если $b = in$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то общее решение:

$$y = x^{c+\frac{1}{2}} e^{iAx} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{-c+\frac{n}{2}} e^{-iAx} Z_{c-\frac{n}{2}}(x) \right].$$

— Ред.]

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ДОПОЛНЕНИЯ