FORMULAIRE de MATHÉMATIQUES
À L'USAGE des PHYSICIENS et des INGÉNIEURS

FASCICULE IX

FONCTIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Sous la direction
de J. KAMPÉ DE FERIET

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
1957

Ж. КАМПЕ де ФЕРЬЕ, Р. КЕМПБЕЛЛ,
Г. ПЕТЬО, Т. ФОГЕЛЬ

ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СПРАВОЧНОЕ РУКОВОДСТВО

Перевод с французского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.2 (03)
К 18

СОДЕРЖАНИЕ

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Эта книга является кратким справочником по теории специальных функций, чаще всего встречающихся при решении задач математической физики—гипергеометрической функции, функций и многочленов Лежандра, различных ортогональных многочленов (Чебышева, Лагерра, Эрмита), цилиндрических функций и функций Матье. Кроме того, она содержит изложение общих понятий теории ортогональных функций. Так как теория специальных функций необъятна, то главной трудностью при написании книги был, несомненно, отбор приводимых в ней формул. Нам кажется, что авторы удачно справились с этой задачей, отобрав формулы, чаще всего встречающиеся при решении конкретных вопросов. При сравнительно небольшом объеме книга содержит почти все необходимое для инженера или физика по специальным функциям. Если читателю потребуются более полные сведения о специальных функциях, то рекомендуем обратиться к книге: И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4. Физматгиз, 1962, или к трехтомному изданию «Higher Transcendental Functions», изд. MC Graw Hille.

При переводе книги были проверены формулы и исправлены (к сожалению, многочисленые) ошибки оригинала. Кроме того, существенно пополнены библиография и список таблиц специальных функций.

Н. Виленкин

ПРЕДИСЛОВИЕ

Интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных (чаще всего второго порядка) занимает центральное место в математической физике XIX века. Наиболее важными примерами вопросов, приводящих к таким уравнениям, являются ньютоновский потенциал, распространение тепла в твердых телах, безвихревое движение идеальной жидкости, распространение волн в упругих средах, колебания струн, мембран и пластинок, распространение электромагнитных колебаний.

Под влиянием Коши была создана общая теория таких уравнений, основанная на теоремах существования и единственности. В этой теории решения давались в виде степенных рядов, коэффициенты которых могут быть вычислены по рекуррентным формулам, исходя из начальных условий и граничных значений. Но уже с самого начала, часто еще до установления общих теорем, основоположники математической физики заметили, что во многих случаях свойства искомых решений легче установить, пользуясь вместо разложений в степенные ряды разложениями по некоторым специальным функциям.

Классическим примером применения этих методов является решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

лежащего в основе теории ньютоновского и электростатического потенциалов.

Чтобы изучить притяжение сфероида, естественно ввести сферические координаты (r, θ, φ) точки (x, y, z)

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\theta$$

и искать решения уравнения Лапласа, разлагающиеся в произведение трех функций, каждая из которых зависит лишь от одной координаты

$$u=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

При этом получаются решения вида

$$u_{m,n}=r^{-(n+1)}P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,$$
$$v_{m,n}=r^{-(n+1)}P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

(m, n — целые неотрицательные числа), в которые входят специальные функции $P_n^m(\cos\theta)$. Потенциал заданной притягивающей массы изображается в виде ряда по специальным решениям $u_{m,n}$, $v_{m,n}$ (*ряда Лапласа*).

По мере того как решение аналогичных задач приводило ко все новым и новым специальным функциям, литература, посвященная этим функциям, стала быстро увеличиваться и сейчас является необозримой. Быстро возрастает и число формул (рекуррентных соотношений, интегральных представлений, разложений в ряды и т. д.), доказанных для каждого класса специальных функций. Следует отметить, однако, что далеко не все полученные в этой области результаты представляют одинаковый интерес; одной из самых трудных задач является выяснение вопроса, какие результаты имеют общее математическое значение, а какие интересны лишь коллекционерам математических безделушек. Разумеется, не могло быть и речи о том, чтобы дать в этой книге исчерпывающее описание всех функций, встречающихся в математической физике, с полным перечислением всех свойств, которыми они обладают, всех относящихся к ним формул.

Мы сделали выбор, ограничившись лишь функциями, которые показались нам наиболее важными (разумеется, этот выбор был более или менее субъективен). Для каждой из этих функций мы указывали наиболее важные свойства, дающие как бы панораму известных свойств. Библиография также отнюдь не претендует на полноту (заметим, что например, библиография в некоторых трактатах по бесселевым функциям занимает несколько десятков страниц); мы хотели лишь указать читателю, которому понадобились бы более подробные сведения о тех или иных функциях, наиболее полные и легко доступные руководства.

Параграфам, посвященным различным видам специальных функций, предшествуют четыре параграфа, имеющих целью дать руководящую нить, с помощью которой читатель сможет преодолеть густой лес частных результатов. Первые два параграфа посвящены общей теории гипергеометрических функций, поскольку почти все функции, встречающиеся в задачах математической физики, являются частными случаями гипергеометрических функций. Следующие два параграфа содержат теорию ортогональных функций, позволяющую унифицировать результаты о разложениях по многочленам Лежандра, Эрмита и т. д. Развитие теории ортогональных функций тесно связано с теорией линейных интегральных уравнений.

В конце книги приведена глава, дающая краткое описание опубликованных таблиц специальных функций.

I. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Обозначения. Обозначим через (C_0), (C_0'), (C_1) и (C_1') области на плоскости (X) комплексного переменного $x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x)$, задаваемые неравенствами $|x| < 1$, $|x| > 1$, $|x-1| < 1$, $|x-1| > 1$, а через (E_0) и (E_1) — полуплоскости $\mathrm{Re}(x) < \frac{1}{2}$, $\mathrm{Re}(x) > \frac{1}{2}$.

Области, которые получаются из (X) с помощью разрезов вдоль некоторых отрезков вещественной оси, обозначаются следующим образом:

Разрез	$(1, \infty)$;	$(-\infty, 0)$;	$(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$;		$(0, \infty)$;	$(0, 1)$;	$(-\infty, 1)$,
Область	(X_1);	(X_2);	(X_3);		(X_4);	(X_5)	(X_6)

Для целых неотрицательных значений n положим

$$(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

откуда

$$(\alpha, 0) = 1,$$

$$(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad n > 0.$$

В частности,

$$(1, n) = 1\cdot 2\ldots n = n!$$

и

$$\frac{(-\alpha, n)}{(1, n)} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} = (-1)^n C_n^\alpha.$$

История. Весьма частный случай гипергеометрического ряда встречается у Уоллиса (1655). В общем виде этот ряд был изучен Эйлером (1769, 1778), который открыл многие его фундаментальные свойства. В частности, он нашел представление этого ряда с помощью определенного интеграла и дифференциальные уравнения, которым он удовлетворяет. Но только Гаусс (1813) дал строгую теорию этих рядов и нашел их область сходимости. Он ввел ставшее классическим обозначение $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, нашел линейные зависимости между смежными функциями и систематически интегрировал дифференциальные уравнения с помощью рядов F.

Е. Куммер (1832), применивший впервые прилагательное «гипергеометрический» к гауссовским рядам, выразил 24 частных решения гипергеометрического уравнения с помощью рядов F. В глубоком мемуаре он изучил рациональные и алгебраические преобразования гипергеометрического ряда и нашел много примеров таких преоб-

(m, n — целые неотрицательные числа), в которые входят специальные функции $P_n^m(\cos\theta)$. Потенциал заданной притягивающей массы изображается в виде ряда по специальным решениям $u_{m,n}$, $v_{m,n}$ (*ряда Лапласа*).

По мере того как решение аналогичных задач приводило ко все новым и новым специальным функциям, литература, посвященная этим функциям, стала быстро увеличиваться и сейчас является необозримой. Быстро возрастает и число формул (рекуррентных соотношений, интегральных представлений, разложений в ряды и т. д.), доказанных для каждого класса специальных функций. Следует отметить, однако, что далеко не все полученные в этой области результаты представляют одинаковый интерес; одной из самых трудных задач является выяснение вопроса, какие результаты имеют общее математическое значение, а какие интересны лишь коллекционерам математических безделушек. Разумеется, не могло быть и речи о том, чтобы дать в этой книге исчерпывающее описание всех функций, встречающихся в математической физике, с полным перечислением всех свойств, которыми они обладают, всех относящихся к ним формул.

Мы сделали выбор, ограничившись лишь функциями, которые показались нам наиболее важными (разумеется, этот выбор был более или менее субъективен). Для каждой из этих функций мы указывали наиболее важные свойства, дающие как бы панораму известных свойств. Библиография также отнюдь не претендует на полноту (заметим, что например, библиография в некоторых трактатах по бесселевым функциям занимает несколько десятков страниц); мы хотели лишь указать читателю, которому понадобились бы более подробные сведения о тех или иных функциях, наиболее полные и легко доступные руководства.

Параграфам, посвященным различным видам специальных функций, предшествуют четыре параграфа, имеющих целью дать руководящую нить, с помощью которой читатель сможет преодолеть густой лес частных результатов. Первые два параграфа посвящены общей теории гипергеометрических функций, поскольку почти все функции, встречающиеся в задачах математической физики, являются частными случаями гипергеометрических функций. Следующие два параграфа содержат теорию ортогональных функций, позволяющую унифицировать результаты о разложениях по многочленам Лежандра, Эрмита и т. д. Развитие теории ортогональных функций тесно связано с теорией линейных интегральных уравнений.

В конце книги приведена глава, дающая краткое описание опубликованных таблиц специальных функций.

I. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Обозначения. Обозначим через (C_0), (C_0'), (C_1) и (C_1') области на плоскости (X) комплексного переменного $x = \operatorname{Re}(x) + i\operatorname{Im}(x)$, задаваемые неравенствами $|x| < 1$, $|x| > 1$, $|x-1| < 1$, $|x-1| > 1$, а через (E_0) и (E_1) — полуплоскости $\operatorname{Re}(x) < \frac{1}{2}$, $\operatorname{Re}(x) > \frac{1}{2}$.

Области, которые получаются из (X) с помощью разрезов вдоль некоторых отрезков вещественной оси, обозначаются следующим образом:

Разрез	$(1, \infty)$;	$(-\infty, 0)$;	$(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$;	$(0, \infty)$;	$(0, 1)$;	$(-\infty, 1)$,
Область	(X_1);	(X_2);	(X_3);	(X_4);	(X_5)	(X_6)

Для целых неотрицательных значений n положим

$$(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

откуда

$$(\alpha, 0) = 1,$$
$$(\alpha, n) = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1), \quad n > 0.$$

В частности,

$$(1, n) = 1\cdot 2\ldots n = n!$$

и

$$\frac{(-\alpha, n)}{(1, n)} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\ldots n} = (-1)^n C_n^\alpha.$$

История. Весьма частный случай гипергеометрического ряда встречается у Уоллиса (1655). В общем виде этот ряд был изучен Эйлером (1769, 1778), который открыл многие его фундаментальные свойства. В частности, он нашел представление этого ряда с помощью определенного интеграла и дифференциальные уравнения, которым он удовлетворяет. Но только Гаусс (1813) дал строгую теорию этих рядов и нашел их область сходимости. Он ввел ставшее классическим обозначение $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$, нашел линейные зависимости между смежными функциями и систематически интегрировал дифференциальные уравнения с помощью рядов F.

Е. Куммер (1832), применивший впервые прилагательное «гипергеометрический» к гауссовским рядам, выразил 24 частных решения гипергеометрического уравнения с помощью рядов F. В глубоком мемуаре он изучил рациональные и алгебраические преобразования гипергеометрического ряда и нашел много примеров таких преобразований. Он показал, что разыскание таких преобразований связано с решением некоторого уравнения третьего порядка.

Риман (1856) установил современную точку зрения на гипергеометрический ряд. Он уточнил понятие гипергеометрической функции и рассмотрел, как изменяются ее ветви, когда x обходит три особые точки 0, 1 и ∞, а также изучил строение группы, связанной с гипергеометрическим уравнением. Обращая задачу, он показал, что задание особых точек и преобразования ветвей при обходе вокруг каждой из этих точек определяет функцию.

Шварц (1871) открыл новый подход, показав, что отношение $s(x)$ двух решений гипергеометрического уравнения (которое удовлетворяет уравнению третьего порядка) задает конформное отображение полуплоскости иа треугольник, образованный дугами окружностей. Он нашел все случаи, когда гипергеометрическая функция является рациональной или алгебраической функцией от x. Изучение обратной функции $x(s)$ связано с открытием А. Пуанкаре (1881) фуксовых функций.

Гипергеометрический ряд определяемый равенством

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,\ n)\,(\beta,\ n)}{(\gamma,\ n)\,(1,\ n)}\,x^{n},$$

зависит от четырех величин α, β, γ, x, которые Гаусс назвал соответственно 1-м, 2-м, 3-м и 4-м элементами; этот ряд является целым рядом по x, рядом многочленов от α и β, рядом факультетов *) по γ.

Элементы α и β играют, очевидно, симметричную роль. Коэффициент a_n при x^n принимает конечное ненулевое значение, за исключением следующих случаев.

1. Если γ — нуль или целое отрицательное число, то начиная с некоторого места, a_n принимает бесконечное значение.

2. Если как γ, так и α (или β) — нули или целые отрицательные числа, то, начиная с некоторого места, a_n является неопределенностью вида $\frac{0}{0}$.

3. Если α (или β) — нуль или целое отрицательное число, то, начиная с некоторого места, a_n равно нулю; ряды сводятся к многочленам по x степени $|\alpha|$ (или $|\beta|$).

При любых комплексных числах α, β, γ, (за исключением указанных выше случаев) гипергеометрический ряд сходится в круге (C_0); на границе этого круга ряд является

1) абсолютно сходящимся, если $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$;

2) условно сходящимся, кроме точки $x=1$, если

$$-1<\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)\leqslant 0;$$

*) Рядом факультетов называют ряд следующего вида:

$$\Omega(z)=a_0+\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{a_{\nu+1}}{z(z+1)\cdots(z+\nu)}.$$

(*Прим. перев.*)

3) расходящимся, если $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<-1$.

При $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0$ имеем:

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

Примеры

$$(1-x)^{-\alpha}=F(\alpha,\ \beta;\ \beta;\ x),$$

$$\ln\frac{1}{1-x}=x\,F(1,\ 1;\ 2;\ x),$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2x\,F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right),$$

$$\arcsin x=x\,F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ x^2\right),$$

$$\operatorname{arctg} x=x\,F\left(\frac{1}{2},\ 1;\ \frac{3}{2};\ -x^2\right),$$

$$\cos(\nu\arcsin x)=F\left(\frac{\nu}{2},\ -\frac{\nu}{2};\ \frac{1}{2};\ x^2\right),$$

$$\sin(\nu\arcsin x)=\nu x\,F\left(\frac{1+\nu}{2},\ \frac{1-\nu}{2};\ \frac{3}{2};\ x^2\right).$$

Эллиптические интегралы:

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right),$$

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right).$$

В параграфах 5, 6 и т. д. будут указаны выражения различных видов многочленов (Якоби, Лежандра, Гегенбауэра, и т. д.) через ряды F.

Гипергеометрическая функция; главные ветви. Аналитическое продолжение ряда $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ определяет многозначную функцию переменной x, называемую *гипергеометрической функцией* $\mathcal{F}(\alpha,\beta;\gamma;x)$. Единственными ее особыми точками являются $x=0$, $x=1$, $x=\infty$. Продолжая ряд $F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ аналитически на плоскость, разрезанную вдоль луча $(+1,\ +\infty)$, получаем $\overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta;\gamma;x)$ — *главную ветвь гипергеометрической функции*. Эта ветвь голоморфна во всей области (X_1), которая образует главную звезду функции. Точка $x=0$ является, вообще говоря, особой точкой для всех других ветвей, кроме главной ветви.

Смежные и ассоциированные функции. Две функции, $\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)$ и $\mathcal{F}(\alpha', \beta'; \gamma'; x)$, такие, что одна из трех разностей $|\alpha-\alpha'|$, $|\beta-\beta'|$, $|\gamma-\gamma'|$ равна единице, а две другие равны нулю, называются *смежными*.

Существуют шесть функций, смежных с данной.

Гипергеометрическая функция $\mathcal{F}$ и две смежные с ней функции связаны линейным однородным равенством, коэффициенты которого являются многочленами от α, β, γ, x.

Вот один из примеров 15 равенств между смежными функциями:

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)x\,\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma+1; x)-\gamma(\gamma-1)(1-x)\,\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma-1; x)+ \\ +\gamma[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta-1)x]\,\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)=0.$$

Функции вида $\mathcal{F}(\alpha+m, \beta+n; \gamma+p; x)$, где m, n и p — любые целые числа, называются функциями, *ассоциированными* с $\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)$.

Три функции, ассоциированные с $\mathcal{F}$, связаны линейным однородным равенством, коэффициенты которого являются многочленами от α, β, γ, x. В частности, функция, ассоциированная с $\mathcal{F}$, может быть линейно выражена через $\mathcal{F}$ и одну из шести функций, смежных с $\mathcal{F}$.

Производные гипергеометрической функции

$$\frac{d^k}{dx^k}\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)=\frac{(\alpha, k)(\beta, k)}{(\gamma, k)}\mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k; \gamma+k; x).$$

Интеграл Эйлера. Если $\operatorname{Re}(\gamma)>\operatorname{Re}(\beta)>0$, то главная ветвь гипергеометрической функции задается во всей области (X_1) интегралом

$$B(\beta, \gamma-\beta)\,\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta; \gamma; x)= \\ =\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du=\int_0^1 U(u)\,du,$$

который берется по прямолинейному отрезку $[0, 1]$. Многозначная функция $U(u)$ имеет точки ветвления 0, 1, ∞, $1/x$; мы выбираем такую ветвь этой функции, что при $u=0$ имеем $\arg u=0$, $\arg(1-u)=0$, $\arg(1-ux)=0$. Поэтому

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

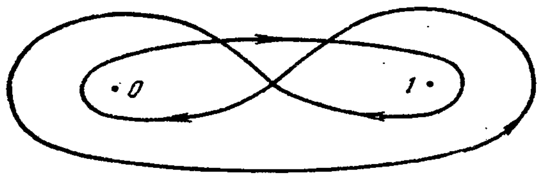

Рис. 1.

Интеграл Жордана — Похгаммера. Можно освободиться от ограничения $\operatorname{Re}(\gamma)>\operatorname{Re}(\beta)>0$, заменив прямолинейный путь интегрирования для функции $U(u)$ контуром, обходящим каждую из точек 0 и 1 в двух противоположных направлениях. Такие контуры можно свести к типичной форме двойной петли $\mathfrak{L}_{0,1}$ (рис. 1).

Положим $\varepsilon(p, q)=-4\sin p\pi\sin q\pi\,B(p, q)$. Для любых α, β и γ имеем в области (X_1)

$$\varepsilon(\beta, \gamma-\beta)\,\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)=\int_{\mathfrak{L}_{0,1}} u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-ux)^{-\alpha}\,du.$$

Эта формула задает главную ветвь для всех значений α, β и γ, за исключением следующих случаев:

1. Если β или $\gamma-\beta$ — целые положительные числа, то функция ε и интеграл одновременно обращаются в нуль.

2. Если γ — нуль или целое отрицательное число, то ε обращается в нуль, в то время как интеграл отличен от нуля.

Интеграл Меллина — Бернса. Если α и β не являются ни нулями, ни целыми отрицательными числами, то главная ветвь задается в области (X_1) интегралом

$$\overline{\mathcal{F}}(\alpha, \beta; \gamma; x)= \\ =\frac{1}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\,\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(\gamma+s)}\,\Gamma(-s)\,(-x)^s\,ds.$$

Контур интегрирования является мнимой осью, дополненной:

1) малым полукругом, таким, что полюсы $\Gamma(-s)$ лежат справа от него;

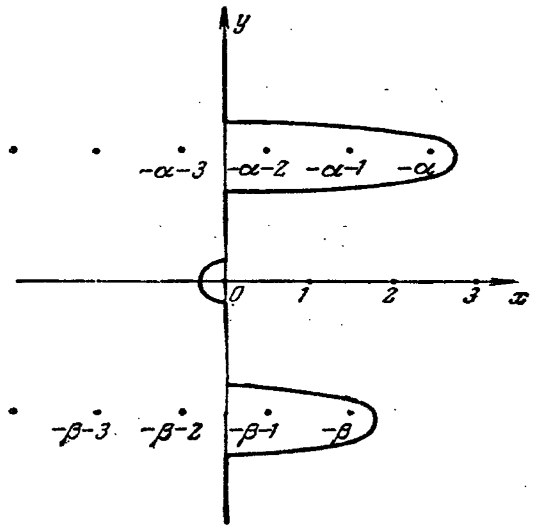

Рис. 2.

2) обходами, оставляющими слева полюсы $\Gamma(\alpha+s)$ (или $\Gamma(\beta+s)$), если $\operatorname{Re}(\alpha)<0$ (или $\operatorname{Re}(\beta)<0$) (рис. 2).

В исключительных случаях гипергеометрическая функция сводится к многочлену.

Формулы преобразования. Якоби заметил, что если сделать в интеграле Эйлера подстановки

$$u = 1 - v, \quad u = \frac{v}{1 - x + vx}, \quad u = \frac{1 - v}{1 - vx},$$

то мы получим интеграл того же типа.

Для гипергеометрической функции имеют место три формулы преобразования, справедливые в (X_1):

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x) = (1 - x)^{-\alpha}\, \mathcal{F}\left(\alpha, \gamma - \beta; \gamma; \frac{x}{x - 1}\right) =$$

$$= (1 - x)^{-\beta}\, \mathcal{F}\left(\gamma - \alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{x - 1}\right) =$$

$$= (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}\, \mathcal{F}(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma; x).$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x) = A\, \mathcal{F}(\alpha, \beta; \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - x) +$$

$$+ B (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta}\, \mathcal{F}(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - x),$$

$$A = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}, \quad B = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)},$$

$$\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x) = C(-x)^{-\alpha}\, \mathcal{F}\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma; \alpha + 1 - \beta; \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ D(-x)^{-\beta}\, \mathcal{F}\left(\beta + 1 - \gamma, \beta; \beta + 1 - \alpha; \frac{1}{x}\right),$$

$$C = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\beta)}, \quad D = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Первая формула справедлива в (X_3); мы предполагаем, что $\arg(1 - x) = 0$ на отрезке $[0, 1]$. Вторая формула справедлива в (X_4); здесь предполагаем $\arg(-x) = 0$ на $(-\infty, 0)$.

Дифференциальное уравнение Эйлера — Гаусса. Функция $\mathcal{F}(\alpha, \beta; \gamma; x)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, коэффициенты которого рациональны относительно α, β, γ и x:

$$x(1 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Решение гипергеометрического уравнения голоморфно на всей комплексной плоскости, за исключением быть может точек $x = 0$, 1, ∞, которые являются регулярными особыми точками. Если ни одно из чисел γ, $\gamma - \alpha - \beta$, $\alpha - \beta$ не является нулем или целым числом, то в окрестности каждой из особых точек существуют два независимых регулярных интеграла.

Полагая

$$y(x) = x^{\frac{\gamma}{2}}(1 - x)^{\frac{\gamma - \alpha - \beta - 1}{2}}\, Y(x),$$

мы сведем уравнение Эйлера — Гаусса к приведенной форме:

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + R(\lambda, \mu, \nu, x)\, Y = 0,$$

где

$$R = \frac{1}{4}\left[\frac{1 - \lambda^2}{x^2} + \frac{1 - \nu^2}{(x - 1)^2} - \frac{1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2}{x(x - 1)}\right],$$

$$\lambda^2 = (1 - \gamma)^2, \quad \mu^2 = (\alpha - \beta)^2, \quad \nu^2 = (\gamma - \alpha - \beta)^2.$$

Рациональная функция R весьма просто преобразуется при шести дробно-линейных преобразованиях

$$x, \quad \frac{x}{x - 1}, \quad 1 - x, \quad \frac{1}{1 - x}, \quad \frac{x - 1}{x}, \quad \frac{1}{x},$$

переводящих три особые точки 0, 1, ∞ друг в друга.

Если функция $Y(\lambda, \mu, \nu, x)$ удовлетворяет обычному гипергеометрическому уравнению, то ему удовлетворяют и 48 функций

$$Y(\pm\lambda, \pm\mu, \pm\nu, x), \quad \frac{1}{1 - x}\, Y\left(\pm\lambda, \pm\nu, \pm\mu, \frac{x}{x - 1}\right),$$

$$Y(\pm\nu, \pm\mu, \pm\lambda, 1 - x) \quad (1 - x)\, Y\left(\pm\mu, \pm\nu, \pm\lambda, \frac{1}{1 - x}\right),$$

$$(1 - x)\, Y\left(\pm\nu, \pm\lambda, \pm\mu, \frac{x - 1}{x}\right), \quad x\, Y\left(\pm\mu, \pm\lambda, \pm\nu, \frac{1}{x}\right).$$

Отсюда вытекают 24 решения уравнения Эйлера — Гаусса (таблица Куммера); каждое из этих решений имеет вид

$$y_{m,n}^{(a)} = x^{\rho_l}(1 - x)^{\sigma_l}\, \mathcal{F}(\alpha_l, \beta_l; \gamma_l; x_l(x)),$$

где $x_l(x)$ — одно из шести указанных выше дробно-линейных преобразований. Индекс $a = 0$, 1, ∞ указывает точку, для которой $x_l(a) = 0$; столбец 2 служит для указания области плоскости (X), соответствующей кругу $|x_l(x)| < 1$, т. е. области сходимости соответствующего гипергеометрического ряда. Для уточнения главной ветви $\overline{y}_{m,n}^{(a)}$ внутри этой области выберем в качестве $\mathcal{F}$ сумму гипергеометрического ряда; кроме того, члены $(1 - x)^{-\alpha}$, $x^{1-\gamma}, \ldots$, на которые умножается $\mathcal{F}$, выберем следующим образом: если $a = 0$ или 1, то берутся ветви, для которых $\arg x = \arg(1 - x) = 0$ на $(0, +1)$, а если $a = \infty$, то ветви для которых $\arg(-x) = \arg(1 - x) = 0$ на $(-\infty, 0)$.

В третьем столбце указываем область плоскости (X), в которой аналитическое продолжение главной ветви $\overline{y}_{m,n}^{(a)}$ остается однозначным.

Для каждого значения a индекс m принимает значения 1 и 2, а n — значения 0, 1, 2, и 3 (если $n = 0$, то этот индекс опускают).

Индексы выбраны так, чтобы главные ветви $\overline{y}^{(a)}_{1,n'}$, $\overline{y}^{(a)}_{1,n''}$ были двумя независимыми решениями, регулярными в окрестности точки $x=a$.

В силу формул преобразования Эйлера имеем:

$$\overline{y}^{(a)}_{m,n} = \overline{y}^{(a)}_{m,n'},$$

что позволяет всегда ограничиться шестью интегралами, для которых $n=0$.

Таблицы Куммера

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x), \qquad (C_0)\ (X_1)$$

$$y_{1,1}^{(0)} = (1-x)^{-\alpha}\,\mathcal{F}\left(\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ \frac{x}{x-1}\right), \qquad (E_0)\ »$$

$$y_{1,2}^{(0)} = (1-x)^{-\beta}\,\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \frac{x}{x-1}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{1,3}^{(0)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\mathcal{F}(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma;\ x), \qquad (C_0)\ »$$

$$y_2^{(0)} = x^{1-\gamma}\,\mathcal{F}(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma;\ 2-\gamma;\ x), \qquad »\ (X_3)$$

$$y_{2,1}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\,\mathcal{F}\left(\alpha+1-\gamma,\ 1-\beta;\ 2-\gamma;\ \frac{x}{x-1}\right), \qquad (E_0)\ (X_3)$$

$$y_{2,2}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\,\mathcal{F}\left(1-\alpha,\ \beta+1-\gamma;\ 2-\gamma;\ \frac{x}{x-1}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{2,3}^{(0)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\mathcal{F}(1-\alpha,\ 1-\beta;\ 2-\gamma;\ x), \qquad (C_0)\ »$$

$$y_1^{(1)} = \mathcal{F}(\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ 1-x), \qquad (C_1)\ (X_2)$$

$$y_{1,1}^{(1)} = x^{-\alpha}\,\mathcal{F}\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma;\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ \frac{x-1}{x}\right), \qquad (E_1)\ (X_2)$$

$$y_{1,2}^{(1)} = x^{-\beta}\,\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma,\ \beta;\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ \frac{x-1}{x}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{1,3}^{(1)} = x^{1-\gamma}\,\mathcal{F}(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma;\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ 1-x), \qquad (C_1)\ »$$

$$y_2^{(1)} = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,\mathcal{F}(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ 1-x), \qquad (C_1)\ (X_3)$$

$$y_{2,1}^{(1)} = x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha;\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x}\right), \qquad (E_1)\ »$$

$$y_{2,2}^{(1)} = x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(1-\beta,\ \gamma-\beta;\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{2,3}^{(1)} = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}(1-\alpha,\ 1-\beta;\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ 1-x), \qquad (C_1)\ (X_4)$$

$$y_1^{(\infty)} = (-x)^{-\alpha}\,\mathcal{F}\left(\alpha,\ \alpha+1-\gamma;\ \alpha+1-\beta;\ \frac{1}{x}\right), \qquad (C_0')\ »$$

$$y_{1,1}^{(\infty)} = (1-x)^{-\alpha}\,\mathcal{F}\left(\alpha,\ \gamma-\beta;\ \alpha+1-\beta;\ \frac{1}{1-x}\right), \qquad (C_1')\ »$$

$$y_{1,2}^{(\infty)} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(1-\beta,\ \alpha+1-\gamma;\ \alpha+1-\beta;\ \frac{1}{1-x}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{1,3}^{(\infty)} = (-x)^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(1-\beta,\ \gamma-\beta;\ \alpha+1-\beta;\ \frac{1}{x}\right), \qquad (C_0')\ »$$

$$y_2^{(\infty)} = (-x)^{-\beta}\,\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma,\ \beta;\ \beta+1-\alpha;\ \frac{1}{x}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{2,1}^{(\infty)} = (1-x)^{-\beta}\,\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha,\ \beta;\ \beta+1-\alpha;\ \frac{1}{1-x}\right), \qquad (C_1')\ »$$

$$y_{2,2}^{(\infty)} = (-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(\beta+1-\gamma,\ 1-\alpha;\ \beta+1-\alpha;\ \frac{1}{1-x}\right), \qquad »\ »$$

$$y_{2,3}^{(\infty)} = (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\times$$
$$\times\,\mathcal{F}\left(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha;\ \beta+1-\alpha;\ \frac{1}{x}\right). \qquad (C_0')\ »$$

Если решение регулярно в окрестности особой точки уравнения, то при обходе этой особой точки ветвь такого решения умножается на постоянную.

Обход против часовой стрелки точек $x=0,\ 1,\ \infty$ преобразует ветви

$$\overline{y}_1^{(0)} \text{ и } \overline{y}_2^{(0)},\quad \overline{y}_1^{(1)} \text{ и } \overline{y}_2^{(1)},\quad \overline{y}_1^{(\infty)} \text{ и } \overline{y}_2^{(\infty)},$$

регулярные в окрестностях этих точек, соответственно в

$$\overline{y}_1^{(0)} \text{ и } e^{2\pi i(1-\gamma)}\overline{y}_2^{(0)};\quad \overline{y}_1^{(1)} \text{ и } e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\overline{y}_2^{(1)};\quad e^{2\pi i\alpha}\overline{y}_1^{(\infty)} \text{ и } e^{2\pi i\beta}\overline{y}_2^{(\infty)}.$$

Этот результат позволяет получить продолжение одной из шести главных ветвей, когда x пересекает один из разрезов. Он дает также возможность определить *группу* гипергеометрического уравнения.

Если одно из выражений $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\alpha-\beta$ является целым неотрицательным числом, то могут существовать регулярные в окрестностях особых точек решения гипергеометрического уравнения, которые содержат логарифмы.

В таблице Куммера ветви $\bar{y}_1^{(0)}$ и $\bar{y}_2^{(0)}$ дают два независимых регулярных решения в окрестности точки $x=0$. Но если $\gamma=1$, то эти две функции совпадают; если $1-\gamma$ — целое число, отличное от нуля, то функции $y_1^{(0)}$ и $y_2^{(0)}$ соответственно могут не иметь смысла.

Чтобы определить изменения, которые надо при этом внести в таблицу, достаточно заменить пару решений $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$ парой решений, состоящей из той функции, которая сохраняет смысл, и функции

$$y_3^{(0)} = C\left[\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)y_1^{(0)} + \right.$$
$$\left. + \Gamma(\gamma-1)\Gamma(\alpha+1-\gamma)\Gamma(\beta+1-\gamma)y_1^{(0)}\right],$$

которая, очевидно, является решением и сохраняет смысл, когда $1-\gamma$ стремится к любому целому значению. Чтобы выразить результат в явном виде, обозначим через k, k', k'' три таких целых числа, что $0 \leqslant k' \leqslant k \leqslant k''$; через $P(\alpha, \beta; k; x)$ — многочлен степени $k-1$:

$$P(\alpha, \beta; k; x) = -\sum_{n=1}^{k} \frac{(1, n-1)(-k, n)}{(1-\alpha, n)(1-\beta, n)} x^{k-n};$$

через $\Phi(\alpha, \beta; \gamma; x)$ — функцию, главная ветвь которой, однозначная в (X_1), задается внутри (C_0) сходящимся рядом

$$\Phi(\alpha, \beta; \gamma; x) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)(\beta, n)}{(\gamma, n)(1, n)} [\Psi(\alpha+n) + \Psi(\beta+n) - \Psi(\gamma+n) - \Psi(1+n)] x^n,$$

где

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

1. $\gamma = 1$:

$$y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta; 1; x),$$
$$y_3^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta; 1; x) \ln x + \Phi(\alpha, \beta; 1; x).$$

2. $\gamma = 1 + k$, α (или β) $\neq 1 + k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta; 1+k; x),$$
$$y_3^{(0)} = \mathcal{F}(\alpha, \beta; 1+k; x) \ln x + \Phi(\alpha, \beta; 1+k; x) + x^{-k} P(\alpha, \beta; k; x).$$

3. $\gamma = 1 + k$, α (или β) $= 1 + k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(1+k', \beta; 1+k; x),$$
$$y_2^{(0)} = x^{-k}\mathcal{F}(1+k'-k, \beta-k; 1-k; x).$$

4. $\gamma = 1 - k$, α (или β) $\neq -k'$:

$$y_2^{(0)} = x^k \mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k; 1+k; x),$$
$$y_3^{(0)} = x^k \mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k; 1+k; x) \ln x + x^k \Phi(\alpha+k, \beta+k; 1+k; x) +$$
$$+ P(\alpha+k, \beta+k; k; x).$$

5. $\gamma = 1 - k$, α (или β) $= -k'$:

$$y_1^{(0)} = \mathcal{F}(-k', \beta; 1-k; x),$$
$$y_2^{(0)} = x^k \mathcal{F}(\alpha+k, \beta+k; 1+k; x).$$

Изучение пар $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$ и $y_1^{(\infty)}$, $y_2^{(\infty)}$, когда $\gamma-\alpha-\beta$ или $\alpha-\beta$ — целое число, протекает точно так же, как и приведенное здесь.

Уравнение Шварца. Введем обозначение:

$$[S]_x = \frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2.$$

Отношение $s(x)$ двух частных решений гипергеометрического уравнения удовлетворяет дифференциальному уравнению Шварца

$$[s]_x = 2R(\lambda, \mu; \nu; x).$$

Обратно, если $s(x)$ — частное решение этого уравнения, то функции

$$Y_1(x) = \left(\frac{ds}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad Y_2(x) = s\left(\frac{ds}{dx}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

являются двумя независимыми решениями нормального гипергеометрического уравнения.

Пусть параметры λ, μ, ν вещественны и таковы, что

$$0 \leqslant \lambda, \mu, \nu \leqslant 2.$$

Тогда решение $s(\lambda, \mu; \nu; x)$ уравнения Шварца задает конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im}(x) > 0$ на треугольник ABC, ограниченный дугами окружностей, вершины A, B, C соответствуют при этом точкам 0, ∞, 1, стороны BA, AC, CB — отрезкам $(-\infty, 0]$, $[0, +1]$, $[+1, -\infty)$, внутренние углы треугольника равны соответственно $\pi\lambda$, $\pi\mu$, $\pi\nu$.

БИБЛИОГРАФИЯ

Лебедев Н. Н. [6].
Appell P. et Kampé de Fériet J. [15].
Kampé de Fériet J. [21].
Klein F. [22].
Snow C. [33].

II. ОБОБЩЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

1. *Обобщенной гипергеометрической функцией* называется любая аналитическая функция комплексного переменного, определенная в окрестности начала координат степенным рядом

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

отношение двух последовательных коэффициентов a_n которого является рациональной функцией индекса n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{A_0 n^p+A_1 n^{p-1}+\ldots+A_p}{B_0 n^{q+1}+B_1 n^q+\ldots+B_{q+1}},$$

при этом A_j, B_k являются вещественными или комплексными числами, не зависящими от n. *Гипергеометрическая функция Гаусса* соответствует частному случаю, когда

$$P(n)=(n+\alpha)(n+\beta); \quad Q(n)=(n+\gamma)(n+1).$$

Выражая многочлены $P(n)$ и $Q(n)$ через их корни, можно записать любую обобщенную функцию в канонической форме:

$${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1,n)\ldots(\alpha_p,n)}{(\beta_1,n)\ldots(\beta_q,n)}\,\frac{x^n}{(1,n)},$$

при этом предполагается, что ни одно из β не является целым отрицательным числом. Если хотя бы одно из α является целым отрицательным числом, ряд сводится к многочлену.

Если $p>q+1$, то обобщенный гипергеометрический ряд сходится лишь в единственной точке $x=0$; если $p=q+1$, то он сходится внутри круга $|x|<1$; если $p<q+1$, он сходится во всей комплексной плоскости и определяет целую функцию от x. Число q называется *порядком*, а $q+1-p$ — *классом* функции ${}_pF_q$; если $q=p+1$ (нулевой класс), то говорят, что функция является *полной*.

Примеры

Порядок $q=0$:

$${}_1F_0(\alpha;\ x)=(1-x)^{-\alpha},$$
$${}_0F_0(x)=e^x.$$

Порядок $q=1$:

${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)=F(\alpha,\beta;\gamma;x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса;

${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=\Phi(\alpha,\gamma;x)$ — функция Куммера;

${}_0F_1(\gamma;x)=J(\gamma,x)$ — функция, сводящаяся к функции Бесселя.

Порядок $q=2$:

${}_3F_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2;x)$ — функция Клаузена.

Все функции ${}_pF_q$, где $p<q+1$, могут быть получены из полной функции порядка q путем предельного перехода:

$${}_{p-1}F_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1};\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\ x)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}{}_pF_q\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1},\frac{1}{\varepsilon};\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\ \varepsilon x\right).$$

В этом случае часто говорят, что функция ${}_{p-1}F_q$ является вырожденной функцией ${}_pF_q$. Например, функция Куммера является вырожденной функцией Гаусса:

$$\Phi(\alpha,\gamma;x)=\lim_{\varepsilon\to 0}F\left(\alpha,\frac{1}{\varepsilon};\ \gamma;\ \varepsilon x\right).$$

Точно так же

$$J(\gamma;x)=\lim_{\varepsilon\to 0}F\left(\frac{1}{\varepsilon},\frac{1}{\varepsilon};\ \gamma;\ \varepsilon^2 x\right).$$

Функция ${}_pF_q(\alpha_1,\ldots,\alpha_p;\ \beta_1,\ldots,\beta_q;\ x)$ является частным решением обобщенного гипергеометрического уравнения

$$x^q(\mu_{q+1}-\lambda_{q+1}x)\frac{d^{q+1}y}{dx^{q+1}}+\ldots+(\mu_1-\lambda_1 x)\frac{dy}{dx}-\lambda_0 y=0.$$

Если заданы

$$P(n)=(\alpha_1+n)\ldots(\alpha_p+n),$$
$$Q(n)=(\beta_1+n)\ldots(\beta_q+n)(1+n),$$

то коэффициенты λ_j и μ_k определяются из уравнений

$$\lambda_0=P(0),\quad 1\cdot\lambda_1=P(1)-P(0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (1,j)\lambda_j=\sum_{r=0}^{j}\frac{(-j,r)}{(1,r)}P(j-r),$$
$$\mu_0=Q(-1)=0,\quad 1\cdot\mu_1=Q(0)-Q(-1)=Q(0),\ \ldots$$
$$\ldots,\ (1,j)\mu_j=\sum_{r=0}^{j}\frac{(-j,r)}{(1,r)}Q(j-1-r).$$

При этом, если $p < q+1$, то коэффициенты $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{q+1}$ равны нулю.

Функция $u = {}_pF_q(\alpha_1, \ldots, \alpha_p; \beta_1, \ldots, \beta_q; x)$ удовлетворяет уравнению

$$\{\delta(\delta+\rho_1-1)\ldots(\delta+\rho_q-1) - x(\delta+\alpha_1)\ldots(\delta+\alpha_p)\}\, u = 0,$$

где

$$\delta = x\frac{d}{dx}.$$

Примеры

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = F(\alpha, \beta; \gamma; x) \qquad \text{(Гаусс)}$$

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\,y' - \alpha\beta y = 0;$$

$$ {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \Phi(\alpha, \gamma; x) \qquad \text{(Куммер)}$$

$$xy'' + (\gamma - x)\,y' - \alpha y = 0;$$

$$ {}_0F_1(\gamma; x) = J(\gamma, x) \qquad \text{(Бессель)}$$

$$xy'' + \gamma y' - y = 0;$$

$$ {}_3F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; x) \qquad \text{(Клаузен)}$$

$$x^2(1-x)y''' + [1+\beta_1+\beta_2-(3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x]\,xy'' +$$
$$+ [\beta_1\beta_2 - (1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)x]\,y' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 y = 0.$$

Формула Эйлера обобщается на все полные гипергеометрические функции порядка q. Эти функции могут быть выражены интегралами

$$ {}_{q+1}F_q = C\int_0^1\ldots\int_0^1 u_1^{\alpha_1-1}(1-u_1)^{\beta_1-\alpha_1-1}\ldots u_q^{\alpha_q-1}(1-u_q)^{\beta_q-\alpha_q-1}\times$$
$$\times(1-u_1\ldots u_q x)^{-\alpha_{q+1}}\,du_1\ldots du_q,$$

$$C = \frac{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_q)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_q)\Gamma(\beta_q-\alpha_q)}.$$

Имеет место формула Меллина

$$\frac{\Gamma(\alpha_1)\ldots\Gamma(\alpha_q)}{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_q)}\Gamma(\alpha_{q+1})\,{}_{q+1}F_q =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+s)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1}+s)}{\Gamma(\beta_1+s)\ldots\Gamma(\beta_q+s)}\Gamma(-s)(-x)^s\,ds,$$

которая содержит как частный случай формулу Бернса; путем интегрирования является мнимая ось, дополненная дугами, выбранными так, чтобы оставить слева полюсы функции $\Gamma(\alpha_1+s)\ldots\Gamma(\alpha_{q+1}+s)$ и справа полюсы функции $\Gamma(-s)$.

II. В приложениях чаще всего встречаются гипергеометрические функции порядка 1; функция Гаусса ${}_2F_1$ ввиду ее особой важности была рассмотрена в предыдущем разделе. Функция ${}_0F_1$, которая сводится к функции Бесселя, будет изучена вместе с цилиндрическими функциями; мы займемся здесь функцией Куммера ${}_1F_1$ и эквивалентной ей функцией Уиттекера. Если γ не является целым отрицательным числом, то функция Куммера есть целая функция, определенная во всей комплексной плоскости x сходящимся рядом

$$ {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \Phi(\alpha; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)}\frac{x^n}{(1, n)}.$$

Если α — целое отрицательное число, то Φ сводится к многочлену

$$\Phi(-n; \gamma; x) = \frac{x^{1-\gamma}e^x}{(\gamma, n)}\frac{d^n}{dx^n}(x^{\gamma+n-1}e^{-x}).$$

Функция Φ является частным решением уравнения Куммера

$$xy'' + (\gamma - x)\,y' - \alpha y = 0.$$

Если γ не является целым числом, то это уравнение в окрестности точки $x=0$ имеет два различных регулярных решения, каждое из них представляется рядом, сходящимся во всей плоскости x:

$$y_0^{(1)} = \Phi(\alpha, \gamma; x),$$
$$y_0^{(2)} = x^{1-\gamma}\,\Phi(\alpha+1-\gamma; 2-\gamma; x).$$

В окрестности точки $x=\infty$ существуют два асимптотических решения *)

$$y_\infty^{(1)} = (-x)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha, n)(\alpha-\gamma+1, n)}{(1, n)}(-x)^{-n},$$

$$y_\infty^{(2)} = x^{\alpha-\gamma}e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma-\alpha, n)(1-\alpha, n)}{(1, n)}x^{-n}.$$

Функция Φ удовлетворяет следующим уравнениям в конечных разностях:

$$\alpha\,\Phi(\alpha+1; \gamma+1; x) = (\alpha-\gamma)\,\Phi(\alpha; \gamma+1; x) + \gamma\,\Phi(\alpha; \gamma; x),$$
$$\alpha\,\Phi(\alpha+1; \gamma; x) = (x+2\alpha-\gamma)\,\Phi(\alpha; \gamma; x) + (\gamma-\alpha)\,\Phi(\alpha-1; \gamma; x).$$

Ее производная выражается следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\Phi(\alpha; \gamma; x) = \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1; \gamma+1; x).$$

*) Относительно определения асимптотических разложений см. Эрдейи [13]. (*Прим. перев.*)

Наконец, имеет место формула преобразования

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = e^x\, \Phi(\gamma-\alpha;\ \gamma;\ -x).$$

Если $\gamma-\alpha$ — целое отрицательное число, то Φ является произведением многочлена от x на показательную функцию.

При $0 < \operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}(\gamma)$ справедливо интегральное представление

$$\Phi(\alpha;\ \gamma;\ x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1} e^{ux}\, du.$$

Во многих приложениях вместо функции Φ применяется функция Уиттекера $M_{k,m}(x)$, определяемая следующим образом:

$$M_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, \Phi\left(m-k+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ x\right),$$

$$M_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(m-k+\frac{1}{2},\ n\right)}{(2m+1,\ n)\,(1,\ n)}\, x^n.$$

Если $2m$ не является целым отрицательным числом, то

$$x^{-m-\frac{1}{2}} M_{k,m}(x) = (-x)^{-m-\frac{1}{2}} M_{-k,m}(x).$$

Если p — целое неотрицательное число, то

$$M_{p+m+\frac{1}{2},\, m}(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}-m}\, e^{\frac{x}{2}}}{(2m+1,\ p)} \frac{d^p}{dx^p}\left(x^{p+2m} e^{-x}\right).$$

При замене функции Φ функцией $M_{k,m}$ мы получаем более симметричное дифференциальное уравнение

$$y'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{\frac{1}{4}-m^2}{x^2}\right] y = 0.$$

В случае, когда $2m$ не является целым числом, общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = A\, M_{k,m}(x) + B\, M_{k,-m}(x).$$

Особенно удобным во многих приложениях является специальное частное решение, а именно, функция Уиттекера $W_{k,m}(x)$; при $\operatorname{Re}\left(k-\frac{1}{2}-m\right) \leqslant 0$ она определяется формулой

$$W_{k,m}(x) = \frac{x^k e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)} \int_0^{\infty} u^{m-k-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{u}{x}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-u}\, du.$$

Если $k-\frac{1}{2}-m$ не является целым отрицательным числом, то

$$W_{k,m}(x) = -\frac{1}{2\pi i}\, \Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right) x^k e^{-\frac{x}{2}} \times \\ \times \int_C (-u)^{m-k-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{u}{x}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-u}\, du,$$

где контур C выходит из ∞, обходит в положительном направлении точку $u=0$ и возвращается в ∞, причем точка $u=-x$ лежит вне этого контура; при этом полагают $|\arg x| < \pi$. Кроме того, полагают $|\arg(-u)| \leqslant \pi$ и берут значение $\arg\left(1+\frac{u}{x}\right)$, которое стремится к нулю, когда $u \to 0$ вдоль кривой, расположенной внутри контура C.

Если $2m$ не является целым числом, то при $|\arg x| < \frac{3\pi}{2}$ имеем:

$$W_{k,m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{k,m}(x) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{k,-m}(x).$$

Если $|\arg x| \leqslant \pi-\alpha < \pi$, то при больших значениях x имеет место асимптотическое разложение

$$W_{k,m}(x) = x^k e^{-\frac{x}{2}} \times \\ \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right] \ldots \left[m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right] \frac{1}{n!\,x^n}\right].$$

Примеры

а) Неполная Γ-функция:

$$\gamma(n,\ x) = \int_0^x t^{n-1} e^{-t}\, dt,$$

$$\gamma(n,\ x) = \Gamma(n) - x^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} W_{\frac{n-1}{2},\, \frac{n}{2}}(x).$$

б) Интегральный логарифм:

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},$$

$$\operatorname{li}(x) = -(-\ln x)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} W_{-\frac{1}{2},\, 0}(-\ln x).$$

в) Интеграл вероятности:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} W_{-\frac{1}{4},\, \frac{1}{4}}(x^2).$$

г) Функции параболического цилиндра. Функция $D_n(x)$ является частным решением уравнения Вебера

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^2\right) y = 0,$$

$$D_n(x) = 2^{\frac{n}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} W_{\frac{n}{2}+\frac{1}{4},\, -\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Если n — целое число, то $D_n(x)$ выражается через многочлен Эрмита.

III. Определены и изучены также обобщенные гипергеометрические функции многих переменных; мы ограничимся случаем двух (комплексных) переменных x и y. В этом случае гипергеометрические функции определяются двойными рядами

$$F(x, y) = \sum_{m,\, n} a_{m,\, n} x^m y^n,$$

коэффициенты которых удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{a_{m+1,\, n}}{a_{m,\, n}} = \frac{P(m, n)}{R(m, n)}, \qquad \frac{a_{m,\, n+1}}{a_{m,\, n}} = \frac{Q(m, n)}{S(m, n)}.$$

Здесь P, Q, R и S — многочлены от m и n, подчиненные лишь следующим условиям:

1. Степени P и Q не превышают соответственно степеней R и S.
2. R и S не обращаются в нуль ни для каких целых положительных значений m и n.
3. Выполняются условия совместности

$$\frac{P(m, n+1)\, Q(m, n)}{R(m, n+1)\, S(m, n)} = \frac{P(m, n)\, Q(m+1, n)}{R(m, n)\, S(m+1, n)}$$

(эти условия нужны для того, чтобы значение коэффициента $a_{m+1,\, n+1}$, вычисленное с помощью перехода $a_{m,\, n} \to a_{m+1,\, n} \to a_{m+1,\, n+1}$, совпадало со значением, вычисленным с помощью перехода $a_{m,\, n} \to a_{m,\, n+1} \to a_{m+1,\, n+1}$).

Гипергеометрические функции двух переменных существенно отличаются от гипергеометрических функций одного переменного. Так как многочлены $P(n)$ и $Q(n)$ от одного переменного можно разложить на множители первой степени, то гипергеометрические функции одного переменного всегда можно привести к каноническому виду. Это разложение невозможно, вообще говоря, для P, Q, R, S; поэтому для функций двух переменных нет канонических форм.

Лучше всего изучены гипергеометрические функции, для которых многочлены имеют специальную форму:

$$P(m, n) = \prod_{l=1}^{\mu} (\alpha_l + m + n) \prod_{l=1}^{\nu} (\beta_l + m),$$

$$Q(m, n) = \prod_{l=1}^{\mu} (\alpha_l + m + n) \prod_{l=1}^{\nu} (\beta'_l + n),$$

$$R(m, n) = (m+1) \prod_{l=1}^{\rho} (\gamma_l + m + n) \prod_{l=1}^{\sigma} (\delta_l + m),$$

$$S(m, n) = (n+1) \prod_{l=1}^{\rho} (\gamma_l + m + n) \prod_{l=1}^{\sigma} (\delta'_l + n).$$

Такие функции обозначаются следующим образом:

$$F\left(\begin{array}{c|l|c} \mu & \alpha_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, \alpha_\mu & \\ \nu & \beta_1,\ \beta'_1,\ \ldots\ldots\ldots, \beta_\nu,\ \beta'_\nu & x,\ y \\ \rho & \gamma_1,\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \gamma_\rho & \\ \sigma & \delta_1,\ \delta'_1,\ \ldots\ldots\ldots, \delta_\sigma,\ \delta'_\sigma & \end{array}\right).$$

Целое число $q = \rho + \sigma$ определяет *порядок* функции; неотрицательное число $\rho + \sigma + 1 - (\mu + \nu)$ — *ее класс*; функции класса 0 называются *полными*.

Следующие четыре полные функции первого порядка были введены и изучены П. Аппелем:

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \alpha & \\ 1 & \beta,\ \beta' & x,\ y \\ 1 & \gamma & \\ 0 & & \end{array}\right) = F_1(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ x,\ y),$$

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \alpha & \\ 1 & \beta,\ \beta' & x,\ y \\ 0 & & \\ 1 & \delta,\ \delta' & \end{array}\right) = F_2(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \delta,\ \delta';\ x,\ y),$$

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \\ 2 & \beta_1,\ \beta_1',\ \beta_2,\ \beta_2' & x,\ y \\ 1 & \gamma & \\ 0 & & \end{array}\right) = F_3(\beta_1,\ \beta_1',\ \beta_2,\ \beta_2';\ \gamma;\ x,\ y),$$

$$F\left(\begin{array}{c|c|c} 2 & \alpha_1, \alpha_2 & \\ 0 & & x,\ y \\ 0 & & \\ 1 & \delta,\ \delta' & \end{array}\right) = F_4(\alpha_1,\ \alpha_2;\ \delta,\ \delta';\ x,\ y).$$

Все гипергеометрические функции удовлетворяют системе уравнений в частных производных, коэффициенты которых являются многочленами по x и y. Эти коэффициенты могут быть вычислены, если известны многочлены P, Q, R, S.

Пример. Функция $F_1(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ x,\ y)$ является частным решением системы уравнений

$$x(1-x) z_{xx} + y(1-x) z_{xy} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x] z_x - \beta z_y - \alpha\beta z = 0,$$

$$x(1-y) z_{xy} + y(1-y) z_{yy} + [\gamma - (\alpha + \beta' + 1)y] z_y - \beta' z_x - \alpha\beta' z = 0.$$

Гипергеометрические функции двух переменных обладают также замечательными представлениями с помощью определенных интегралов. Например,

$$\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\beta')\,\Gamma(\gamma-\beta-\beta')}{\Gamma(\gamma)} F_1(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ x,\ y) =$$

$$= \iint\limits_D u^{\beta-1} v^{\beta'-1} (1-u-v)^{\gamma-\beta-\beta'-1} (1-ux-vy)^{-\alpha}\, du\, dv,$$

где

$$D = \{(u,\ v) : u \geqslant 0,\ \ v \geqslant 0,\ \ 1-u-v \geqslant 0\}.$$

Многие свойства гипергеометрической функции Гаусса (уравнения в конечных разностях, линейные преобразования и т. д.) были распространены на гипергеометрические функции двух переменных, по большей части на четыре функции Аппеля.

От случая двух переменных легко перейти к случаю n комплексных переменных; функция, определяемая рядом

$$F(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{m_1,\ \ldots,\ m_n} a_{m_1,\ \ldots,\ m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n},$$

называется *обобщенной гипергеометрической функцией*, если отношения

$$\frac{a_{m_1+1,\ \ldots,\ m_n}}{a_{m_1,\ \ldots,\ m_n}},\ \ldots,\ \frac{a_{m_1,\ \ldots,\ m_n+1}}{a_{m_1,\ \ldots,\ m_n}}$$

являются рациональными функциями индексов $m_1,\ \ldots,\ m_n$ (Горн, 1889).

Одно из наиболее важных приложений обобщенных гипергеометрических функций n переменных состоит в следующем утверждении, вытекающем из работ Капелли (1907), Меллина (1915), Белардинелли (1920) и Биркеланда (1920).

Корни любого алгебраического уравнения всегда могут быть выражены в виде обобщенных гипергеометрических функций от коэффициентов этого уравнения.

БИБЛИОГРАФИЯ

Appell P. et Kampe de Feriet J. [15].
Bailey W. N. [16].
Belardinelli G. [16a].
Buchholz H. [17].
Nörlung [28].
Tricomi F. [34].

III. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть V_n — векторное пространство n измерений; *скалярное произведение двух векторов*: F с компонентами $f_1, \ldots, f_n$ и G, с компонентами $g_1, \ldots, g_n$, определяется выражением

$$(F, G) = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i. \tag{1}$$

Два вектора называются *ортогональными* друг другу, если $(F, G) = 0$. Скалярное произведение вектора F на себя называют *квадратом* его *нормы* и пишут:

$$(F, F) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 \equiv \|F\|^2. \tag{2}$$

В трехмерном евклидовом пространстве норма вектора есть не что иное, как его длина; вектор, норма которого равна 1, называется *нормированным*.

Можно рассматривать $f_1, \ldots, f_n$ как множество значений, принимаемых некоторой функцией $F(P)$ в точках $P_1, \ldots, P_n$, лежащих на оси. Эти точки условно изображают n измерений пространства V_n; каждый вектор из V_n изображается тогда функцией, определенной на множестве $(P_1, \ldots, P_n)$. Легко распространить это понятие на случай, когда точки P_i образуют непрерывное множество D; пространство V имеет тогда бесконечно много измерений, и оно определяется заданием D и класса функций $F(P)$, $P \in D$, определенных на этом множестве.

В дальнейшем мы будем брать в качестве D отрезок $[a, b]$ вещественной оси и в качестве класса функций $f(x)$ множество $L_m^2(D)$ функций, имеющих суммируемый квадрат относительно меры $m(x)$ в смысле Лебега — Стильтьеса. Однако наши рассмотрения непосредственно распространяются на случай, когда D является областью в пространстве многих переменных, а x — точка этой области. Пространство $L_m^2(D)$ является примером *функционального пространства*.

Можно доказать, что произведение двух функций из пространства $L_m^2(D)$ интегрируемо по мере $m(x)$. Это делает законным следующее определение: назовем *скалярным произведением двух функций* $f(x)$ и $g(x)$ рассматриваемого пространства (E)

выражение

$$(f, g) = \int_D f(x)\, g(x)\, dm(x). \tag{3}$$

Две функции называются *ортогональными* друг другу, если

$$(f, g) = 0. \tag{4}$$

Выражение

$$\|f\|^2 = (f, f) = \int_D [f(x)]^2\, dm(x) \tag{5}$$

является *квадратом нормы* $f(x)$. Норма функции $f(x)$ равна нулю, если эта функция почти всюду равна нулю в (D) *). Такие функции мы будем называть *нулевыми*. Функция, норма которой равна 1, называется *нормированной*.

Если f и g — две функции из (E), то справедливо **н е р а в е н с т в о Ш в а р ц а**

$$\|fg\| \leqslant \|f\|\,\|g\|. \tag{6}$$

Знак $=$ имеет место лишь в случае, когда $Af + Bg$ (где A и B — постоянные) является нулевой функцией.

На практике обычно встречаются два частных случая общего определения (3):

а) Если мера m имеет непрерывную производную $p(x)$, которая не принимает отрицательных значений на D, то

$$(f, g) = \int_D f(x)\, g(x)\, p(x)\, dx, \tag{7}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега; если это скалярное произведение равно нулю, то говорят, что функции f и g *ортогональны относительно веса* $p(x)$.

б) Еще более частным случаем является случай, когда $m(x) = x$ и

$$(f, g) = \int_D f(x)\, g(x)\, dx. \tag{8}$$

Если вес не задан явно, то ортогональность двух функций чаще всего понимается в смысле равенства (8). Заметим, что если функции f и g ортогональны в области D относительно веса $p(x)$, то функции $p^{\frac{1}{2}} f$ и $p^{\frac{1}{2}} g$ ортогональны в той же области в узком смысле, выражаемом формулой (8).

в) Полезно отметить более редко встречающийся частный случай, который важен в некоторых приложениях: это случай, когда

*) «Почти всюду» условно означает «всюду, за исключением содержащегося в D множества меры нуль». Если $\|f-g\| = 0$, то f и g могут отличаться друг от друга лишь на множестве меры нуль; в этом случае говорят, что их расстояние равно нулю. Мы будем отождествлять две функции, совпадающие почти всюду.

распределение элементарных масс m дискретно. Если m равно нулю всюду, кроме некоторого множества точек x_j, то очевидно, что интеграл Стильтьеса сводится к сумме $\sum_{j=1}^{r} f(x_j)\, g(x_j)\, m(x_j)$. Встречаются, особенно в теории упругости, задачи, в которых дискретное распределение накладывается на непрерывное распределение и, следовательно, ортогональность двух функций f и g выражается соотношением вида

$$\int_D f(x)\, g(x)\, p(x)\, dx + \sum_{i=1}^{r} p_i f(x_i)\, g(x_i) = 0. \tag{9}$$

С другой стороны, следующие два обобщения понятия ортогональности функций играют большую роль в математической физике:

а) Рассматриваются функции вещественного переменного x, которые могут принимать комплексные значения. В этом случае *эрмитово скалярное произведение* определяют формулой

$$(f,\ g) = \int_D f(x)\, g^*(x)\, dx = (g,\ f)^*, \tag{10}$$

где z^* обозначает величину, комплексно сопряженную с z; эрмитова норма f есть $(f,\ f^*)^{\frac{1}{2}}$; ортогональность f и g выражается равенством $(f,\ g) = 0$.

б) Если M — линейный дифференциальный оператор, то скалярное произведение двух функций f и g относительно M определяют как выражение вида

$$(f,\ g) = \int_D fM(g)\, dx. \tag{11}$$

Определенная таким образом *обобщенная ортогональность*, вообще говоря, не симметрична относительно f и g: из того, что $(f,\ g) = 0$, еще не следует равенство $(g,\ f) = 0$.

Таким образом, две функции могут быть ортогональными в этом смысле без того, чтобы быть биортогональными. Если оператор M выражается формулами $M(z) = p(x)z$ или же $M(z) = z$, то обобщенная ортогональность сводится к ортогональности, выражаемой формулой (8) или (9).

Последовательности ортогональных функций. Пусть дана конечная последовательность $\{f_i(x)\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, функций из (E). Говорят, что элементы этой последовательности *линейно независимы*, если из выполнения почти всюду в D соотношения

$$\left\| \sum A_i f_i(x) \right\| = 0,$$

где A_i — постоянные числа, вытекает, что все коэффициенты A_i равны нулю (отсюда очевидно, что нулевая функция не может входить в последовательность линейно независимых функций). Если $\{f_i(x)\}$ — бесконечная последовательность функций, то входящие

в нее функции называются *линейно независимыми*, если указанное выше условие выполняется для любого конечного числа элементов этой последовательности.

Для того чтобы функции $\{f_i\}$ из (E) были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы их определитель Грама обращался в нуль:

$$G(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} (f_1,\ f_1) & (f_1,\ f_2) \ldots (f_1,\ f_n) \\ (f_2,\ f_1) & (f_2,\ f_2) \ldots (f_2,\ f_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (f_n,\ f_1) & (f_n,\ f_2) \ldots (f_n,\ f_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Если r — наибольший из порядков отличных от нуля миноров определителя G, то последовательность $\{f_i\}$ содержит r линейно независимых элементов.

Пусть дана последовательность $\{f_i\}$ линейно независимых функций. Всегда можно образовать одну и только одну последовательность, состоящую из линейных комбинаций этих функций, такую, что все элементы этой последовательности нормированы и попарно ортогональны. Иными словами, существует такая последовательность $\left\{\varphi_i(x) = \sum A_i f_i(x)\right\}$, где A_i — постоянные величины, что

$$(\varphi_i,\ \varphi_j) = \delta_{ij} \tag{12}$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Явное выражение ортогональной нормированной системы функций, полученной из функций $\{f_i\}$, таково:

$$\varphi_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|^{\frac{1}{2}}}; \qquad \varphi_i = \frac{f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} (f,\ \varphi_j)\, \varphi_j}{\left\| f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} (f,\ \varphi_j)\, \varphi_j \right\|^{\frac{1}{2}}}, \quad i > 1.$$

Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ — ортогональное нормированное множество элементов из (E), которое может быть как конечным, так и бесконечным. Любое конечное подмножество множества $\{\varphi_i\}$ обладает тем свойством, что для любой функции f из (E) величина

$$\int_D \left[f - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right]^2 dm(x) \tag{13}$$

принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда $c_i = (f,\ \varphi_i)$. Этот минимум равен

$$\mathfrak{M} = \|f\|^2 - \sum (f,\ \varphi_i)^2,$$

причем

$$\mathfrak{M} \geqslant 0 \tag{14}$$

(*неравенство Бесселя*). Отсюда вытекает, что ряд $\sum (f,\ \varphi_i)^2$ сходится.

Говорят, что последовательность функций $\{\Psi_i\}$ из (E) *сходится в среднем* к f, если

$$\lim_{i \to \infty} \int_D [f(x) - \Psi_i(x)]^2\, dm(x) = 0. \qquad (15)$$

Если последовательность $\left\{ \Psi_i = \sum_{j=1}^{i} (f, \varphi_j) \varphi_j \right\}$ сходится в среднем к f, то $\mathfrak{M} = 0$, и тогда

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)^2$$

(**теорема Парсеваля**). Если это равенство выполняется для заданной ортогональной нормированной системы $\{\varphi_i\}$ и для всех функций f из (E), то система называется *замкнутой*. Она называется *полной*, если в (E) не существует ни одной ненулевой функции, ортогональной ко всем φ_i *).

Из того, что сумма $\sum_{i=1}^{j} c_i \varphi_i$ сходится в среднем к f, не следует, очевидно, что $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i = f$ в смысле обычной сходимости; но если ряд сходится, то его сумма обязательно равна f.

Можно доказать, что если D имеет конечную меру, то любая система попарно ортогональных функций в (E) состоит лишь из конечного или счетного множества элементов; любая полная ортогональная система функций состоит из счетного множества элементов.

При тех же условиях, если $\{\varphi_i\}$ — нормированная ортогональная система функций и $\{a_i\}$ — такое множество чисел, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ сходится, то последовательность $\left\{ \sum_{n=1}^{i} a_n \varphi_n \right\}$ сходится в среднем к функции f из (E), причем $a_i = (f, \varphi_i)$. Это — **теорема Фишера — Рисса**.

Из этой теоремы вытекает, что любая замкнутая последовательность полна. Верно и обратное утверждение.

Критерий замкнутости. Необходимое и достаточное условие того, что ортогональная нормированная последовательность $\{\varphi_i\}$ замкнута, заключается в выполнении условия

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)^2$$

*) Некоторые авторы называют полной последовательность, которую мы назвали здесь замкнутой, и наоборот. Это смешение не опасно в силу теоремы, которую мы сформулируем несколько позже.

для всех функций f из (E). Достаточно проверить, что это условие выполняется хотя бы для одного множества элементов $\{f_i\}$ из (E), линейные комбинации которых всюду плотны.

Если a — фиксированная точка из D и $\mu(x)$ — мера отрезка $[a, x]$, где $x \in D$, то необходимое и достаточное условие замкнутости ортогональной нормированной системы функций $\{\varphi_i\}$ имеет вид:

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_a^x \varphi_i\, dm(x) \right)^2.$$

Если система функций $\{\varphi_i\}$ ортогональна и нормирована относительно веса $p(x)$, то необходимое и достаточное условие замкнутости этой системы имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_D \varphi_i(x) e^{xz\sqrt{-1}} p(x)\, dx \right|^2 = \int_D p(x)\, dx$$

для всех вещественных z.

В последующих параграфах будет указан критерий замкнутости, связанный с дифференциальным уравнением, которому удовлетворяют функции ортогональной нормированной системы.

Свойства замкнутых систем. Пусть даны замкнутая ортогональная нормированная система функций $\{\varphi_i(x)\}$ и любые две функции $f(x)$ и $g(x)$ из (E). Если

$$(f, \varphi_i) = (g, \varphi_i)$$

для всех i, то функции f и g почти всюду равны в D.

Для любой последовательности чисел $\{a_i\}$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ сходится, и для любой замкнутой ортогональной нормированной системы функций $\{\varphi_i\}$ существует однозначно определенная функция f из (E), такая, что

$$a_i = (f, \varphi_i).$$

Мы уже говорили, что если система функций $\{\varphi_i\}$ ортогональна и нормирована, то разложение

$$\sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i$$

дает наилучшее приближение f с помощью линейной комбинации функций φ_i. Если система замкнута и ряд сходится, то его сумма равна f. Это разложение единственно и полностью характеризует функцию f из (E). Коэффициенты (f, φ_i) этого разложения обычно называют *коэффициентами Фурье* функции f относительно системы $\{\varphi_i\}$. (Фурье рассматривал их для замкнутой системы тригонометрических функций $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$). Они могут рассматриваться как *координаты* функции f в функциональном пространстве (E) относительно декартовой системы координат $\{\varphi_i\}$. Изменение системы координат, т. е. переход от разложения по функциям $\{\varphi_i\}$ к разложениям по функциям другой ортогональной замкнутой системы $\{\Psi_j\}$ может быть выполнен с помощью следующей теоремы:

Если $\{\varphi_i\}$ — замкнутая ортогональная нормированная система функций, то для любой пары функций f и g из (E) имеем:

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)(g, \varphi_i).$$

В частности, если $\{\varphi_i\}$ и $\{\Psi_j\}$ — две замкнутые ортогональные и нормированные системы, то для любой функции f из (E) имеем:

$$(f, \varphi_i) = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \Psi_j)(\Psi_j, \varphi_i).$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\Psi_j, \varphi_i)(\Psi_j, \varphi_k) = \delta_{ik}.$$

Ортогональные функции и краевые задачи. Пусть дана линейная дифференциальная система

$$\left.\begin{aligned} &L(\varphi) + \lambda p(x)\varphi = 0, \\ &U_k[\varphi(a); \varphi(b)] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где

$$L = \sum_{s=1}^{n} p_s(x) \frac{d^s}{dx^s}, \quad U_k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{jk} \left(\frac{d^j\varphi}{dx^j}\right)_{x=a} + \beta_{jk} \left(\frac{d^j\varphi}{dx^j}\right)_{x=b},$$

α и β — постоянные и x принадлежит отрезку $[a, b]$; пусть λ_i — собственные значения, а φ_i — собственные функции этой системы. Сопряженная система

$$\overline{L}(\varphi) + \lambda p\varphi = 0,$$
$$\overline{U}_k[\varphi(a); \varphi(b)] = 0$$

имеет те же собственные значения λ_i, а собственными функциями для нее являются $\overline{\varphi}_i$. Отсюда вытекает *формула Грина*: если $i \neq j$, то

$$\int_a^b \varphi_i \overline{\varphi}_j p(x)\, dx = 0.$$

В частности, если система (16) самосопряжена, то собственные функции попарно ортогональны.

Рассмотрим в пространстве (E) подпространство (E'), состоящее из элементов $f(x)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные до n-го порядка включительно, и удовлетворяющих условиям

$$U_k[f(a); f(b)] = 0.$$

Если заданная система (16) самосопряжена и оператор L таков, что $\int_a^b f L(f)\, dx$ имеет один и тот же знак для всех f из (E'), то можно доказать, что система (16) имеет бесконечно много собственных значений, причем все эти значения вещественны и соответствующая система ортогональных нормированных функций замкнута; для этих функций

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) p(x)\, dx = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \delta_{ij}.$$

При этих условиях любая функция f из пространства (E') может быть разложена в ряд по системе $\{\varphi_i\}$, имеющий вид

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \int_a^b f(x)\varphi_i(x) p(x)\, dx. \tag{17}$$

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится; при этом

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\, c_i^2 \leqslant \int_a^b fL(f)\, dx \qquad \text{(неравенство Бесселя)},$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} c_i^2 = \int_a^b f^2(x) p(x)\, dx = \|f\|^2 \qquad \text{(теорема Парсеваля)}.$$

Если $\widehat{f}$ — другая функция из (E') и $\widehat{c}_i$ — коэффициенты Фурье этой функции относительно системы $\{\varphi_i\}$, то имеем:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} c_i\widehat{c}_i = \int_a^b f(x)\widehat{f}(x) p(x)\, dx = (f, \widehat{f}).$$

Эти результаты могут быть обобщены на дифференциальные системы более общего вида

$$\left.\begin{aligned} &L(\varphi) + \lambda M(\varphi) = 0, \\ &U_k[\varphi(a); \varphi(b)] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

при условии, что эти системы самосопряжены, а дифференциальные операторы L и M таковы, что $\int_a^b fL(f)\,dx$ и $\int_a^b fM(f)\,dx$ имеют соответственно одни и те же знаки для всех функций f из (E'), и ортогональность понимается в обобщенном смысле (11).

Разложение (17) играет большую роль в математической физике, так как оно позволяет свести решение неоднородной краевой задачи

$$L(\varphi)+\hat{\lambda}M(\varphi)=r(x); \quad U_k=0; \quad r\in(E') \qquad (18')$$

(а также задачи

$$L(\varphi)+\hat{\lambda}M(\varphi)=0; \quad U_k=q(x); \quad q\in(E'),$$

которая сводится к задаче (18')) к нахождению собственных функций дифференциальной системы (18). Для этого достаточно представить искомое решение системы (18) в виде ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$ и подставить в дифференциальное уравнение. Умножая обе части на φ_i и интегрируя, найдем:

$$c_i=\frac{1}{\lambda-\lambda_i}\int_a^b r(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

Дифференциальная система (16) связана с рассмотрением потенциала скоростей динамической системы, кинетическая энергия которой равна $\frac{1}{2}\int_a^b[\varphi(x)]^2 p(x)\,dx$. Здесь $p(x)$ задает распределение масс. Если добавить к этой системе массы, сосреодотченные в точках $x=x_s$ отрезка $[a, b]$, то полная кинетическая энергия примет вид

$$\frac{1}{2}\int_a^b p(x)[\varphi(x)]^2\,dx+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} p_s[\varphi(x_s)]^2.$$

Собственные функции нагруженной системы всюду, за исключением точек разрыва $x=x_s$, удовлетворяют системе (16), причем можно показать, что в этом случае свойство ортогональности относительно веса $p(x)$ записывается в виде

$$\int_a^b \varphi_i\varphi_j p\,dx+\sum_{s=1}^{n} p_s\varphi_i(x_s)\,\varphi_j(x_s)=\delta_{ij},$$

т. е. в виде (12).

Результаты аналогичного вида получаются, если предположить, что потенциальная энергия системы содержит добавочные члены, соответствующие изолированным точкам отрезка.

Ортогональность и базисы в пространстве Гильберта. Использованное выше выражение скалярного произведения имеет смысл лишь в случае, когда рассматриваются функции, удовлетворяющие определенным условиям; точнее, когда мы находимся в классе функций L^2. Однако проведенные выше рассмотрения сохраняют силу и в более общих случаях. Чтобы дать представление об этом, изложим элементы более общей теории, имеющей место в абстрактном пространстве, для которого пространство L^2 является лишь частным примером.

Назовем *пространством Гильберта* H множество элементов любой природы (не обязательно функций), удовлетворяющих следующим аксиомам:

1. Существует ассоциативная и коммутативная операция, называемая *сложением*, которая сопоставляет двум элементам из H элемент из H.

2. Существует ассоциативная, коммутативная и дистрибутивная относительно сложения операция, называемая *умножением на элемент из поля* K (чаще всего — поля комплексных чисел), применение которой к элементу из H вновь дает элемент из H.

Если $f, g, h\in H$, $a, b\in K$, то имеем (знак $+$ обозначает как сложение в H, так и сложение в K):

$$f+g\in H; \quad f+g=g+f; \quad f+(g+h)=(f+g)+h;$$
$$(f+g=g+h)\to f=h,$$
$$a(f+g)=af+ag; \quad (a+b)f=af+bf; \quad (ab)f=a(bf)\in H.$$

Из этих аксиом вытекает, что в пространстве H имеется *нулевой элемент*, обозначаемый 0, такой, что $f+0=f$ и что $a0=0$, $0f=0$.

3. Существует операция, называемая *скалярным произведением*, которая сопоставляет любой паре элементов f и g из H элемент из K, обозначаемый (f, g), причем

$$(af, g)=a(f, g); \quad (f+g, h)=(f, h)+(g, h);$$
$$(f, g)=(g, f)^*; \quad (f, f)\geqslant 0; \quad (f, 0)=0.$$

Отсюда вытекает, что если $(f, f)=0$, то $f=0$. Квадратный корень из (f, f), обозначаемый $\|f\|$, называется *нормой* f; норма обладает следующими свойствами:

$$\|af\|=|a|\,\|f\|; \quad \|f+g\|<\|f\|+\|g\|; \quad \|(-1)f\|\equiv\|-f\|=\|f\|.$$

Число $\|f-g\|$ называется *расстоянием от* f *до* g; оно удовлетворяет, очевидно, неравенству треугольника

$$\|f-g\|\leqslant\|f-h\|+\|h-g\|.$$

Норма f является непрерывным функционалом от f, т. е. если $f_n\to f$, то $\|f_n\|\to\|f\|$. Точно так же (f, g) является непрерывным функционалом от f и g.

Пространство H называется *полным*, если для любой последовательности f_n элементов из H, такой, что $\lim_{m,n\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$, существует элемент f, расстояние которого до f_n стремится к нулю, когда $n \to \infty$.

Легко показать, что функциональное пространство L^2 является гильбертовым пространством и что скалярное произведение, определенное выше в L^2, обладает свойствами, характеризующими скалярное произведение в H. Сходимость последовательности элементов из H можно определить двумя способами: можно сказать, что последовательность элементов f_n сходится к f, если для всех $g \in H$ числовая последовательность (f_n, g) сходится к (f, g), когда $n \to \infty$ (слабая сходимость); можно рассматривать и случай, когда $\|f_n - f\|$ стремится к 0 при возрастании n (сильная сходимость, аналогичная сходимости в среднем, определенной в L^2).

Как и выше, мы назовем два элемента из H *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, и назовем систему элементов φ_i *ортонормированной*, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$. Элементы такой последовательности всегда линейно независимы. В самом деле, если скалярно умножить $\sum a_i\varphi_i$, $a_i \in K$, на φ_j, то мы получим a_j; отсюда вытекает, что линейная комбинация может равняться нулю лишь в случае, когда все коэффициенты a_i равны нулю.

Множество всех линейных комбинаций элементов f_i образует *линейное многообразие* $V(f_i)$. Говорят, что множество $\{f_i\}$ *полно*, если $V(f_i)$ совпадает с пространством H; наименьшая мощность полного множества в H называется *размерностью* H. Из многообразия в H всегда можно извлечь ортонормированную последовательность элементов с помощью процесса ортогонализации Шмидта, описанного на стр. 33 для пространства L^2; эта последовательность будет счетной, если H имеет счетную размерность.

Если даны две последовательности φ_i, Ψ_i в H, такие, что $(\varphi_i, \Psi_j) = \delta_{ij}$, то они образуют *биортогональную нормированную систему*; если обе системы полны в H, то биортогональная система называется *полной*. Понятие биортогональной системы является в некотором смысле обобщением рассмотренного выше понятия ортонормированной системы.

Полная ортогональная система в H образует *базис*, т. е. каждый элемент из H может быть представлен в виде линейной комбинации элементов базиса, коэффициентами которой являются, очевидно, скалярные произведения (f, φ_i): для доказательства достаточно записать, что расстояние от f до линейной комбинации $\sum a_i\varphi_i$ равно нулю. Далее, если известна биортогональная система $\{\varphi_i, \Psi_i\}$, то любую функцию $f \in H$ можно единственным образом записать в одном из двух следующих видов:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)\, \Psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \Psi_i)\, \varphi_i.$$

Ряды $\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \varphi_i)|^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \Psi_i)|^2$ сходятся.

Обратно, в полном пространстве всегда существует элемент, скалярные произведения которого на элементы данного базиса имеют заданные значения, если ряд из квадратов модулей этих значений сходится.

Неравенство Бесселя и теорема Парсеваля, сформулированные выше для пространства L^2, могут быть легко установлены для общего случая гильбертова пространства.

БИБЛИОГРАФИЯ

Курант Р. и Гильберт Д. [5].
Морс Ф. М. и Фешбах Г. [8].
Tricomi F. [35].
Vogel T. [36].

IV. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Пусть на конечном или бесконечном промежутке (a, b) задана неубывающая функция $\Psi(x)$, для которой существуют все моменты

$$\alpha_k = \int_a^b x^k \, d\Psi(x) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

причем $\alpha_0 > 0$.

1. Всегда существует последовательность многочленов $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., имеющих соответственно степени 0, 1, ... (называемых *ортогональными многочленами Чебышева*). Эти многочлены однозначно с точностью до постоянного множителя определяются соотношениями ортогональности

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) \, d\Psi(x) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

2. Последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ бесконечна, за исключением случая, когда $\Psi(x)$ имеет лишь конечное число ν точек роста на отрезке a, b; в последнем случае система содержит лишь ν многочленов $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{\nu-1}(x)$.

3. Все нули многочленов $\varphi_n(x)$ вещественны, просты и заключены между a и b.

Если $d\Psi(x) = p(x)\,dx$, то функция $p(x)$ называется *весом*.

Соотношения ортогональности (1) могут быть записаны в одной из следующих трех эквивалентных форм:

$$\alpha) \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) \, d\Psi(x) = 0, \qquad m \neq n; \; m, n = 0, 1, \ldots;$$

$$\beta) \int_a^b \varphi_n(x) x^k \, d\Psi(x) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots; \; k < n;$$

$$\gamma) \int_a^b \varphi_n(x) G_{n-1}(x) \, d\Psi(x) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Здесь $G_s(x)$ — произвольный многочлен степени $\leqslant s$.

Если

$$\int [\varphi_n(x)]^2 \, d\Psi(x) = 1,$$

то многочлены φ_n называются *нормированными*.

Основные нормированные ортогональные многочлены

Многочлены	Наименование многочленов	Промежуток	Вес
$\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$	Лежандра	$(-1, +1)$	1
$2^m \Gamma(m) \left[\frac{(n+m)\, n!}{2\pi\Gamma(2m+n)}\right]^{\frac{1}{2}} \times C_n^m(x)$	Гегенбауэра	$(-1, +1)$	$(1 - x^2)^{m - \frac{1}{2}}$
$\left(\frac{\varepsilon_n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} T_n(x)$ $(\varepsilon_0 = 2,\ \varepsilon_n = 1,$ при $n \geqslant 1)$	Чебышева	$(-1, +1)$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$(2\pi)^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} H_n(x)$	Эрмита	$(-\infty, \infty)$	$e^{-\frac{x^2}{2}}$
$\left[\frac{\Gamma(\alpha+n)\,(\gamma, n)\,(\alpha+2n)}{n!\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}\right]^{1/2} \times G_n(\alpha, \gamma, x)$	Якоби	$(0, 1)$	$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$
$\left[\frac{n!}{\Gamma(1+\alpha+n)}\right]^{\frac{1}{2}} L_n^{\alpha}(x)$	Лагерра	$(0, \infty)$	$x^{\alpha} e^{-x}$

БИБЛИОГРАФИЯ

Сеге Г. [9].
Tricomi F. [35].
Vogel T. [36].

V. МНОГОЧЛЕНЫ ЯКОБИ

Гипергеометрические многочлены, введенные Якоби в 1859 г. являются частным случаем гипергеометрической функции

$$G_n(\alpha,\ \gamma,\ x)=F(-n,\ \alpha+n;\ \gamma;\ x)=$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-n,\ k)}{(1,\ k)}\,\frac{(\alpha+n,\ k)}{(\gamma,\ k)}\,x^k.$$

Четыре первых многочлена Якоби имеют следующий вид:

$$G_0(\alpha,\ \gamma,\ x)=1,$$
$$G_1(\alpha,\ \gamma,\ x)=1-\frac{\alpha+1}{\gamma}\,x,$$
$$G_2(\alpha,\ \gamma,\ x)=1-2\,\frac{\alpha+2}{\gamma}\,x+\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)}{\gamma(\gamma+1)}\,x^2,$$
$$G_3(\alpha,\ \gamma,\ x)=1-3\,\frac{\alpha+3}{\gamma}\,x+\frac{3(\alpha+3)(\alpha+4)}{\gamma(\gamma+1)}\,x^2-\frac{(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\,x^3.$$

Многочлен Якоби выражается формулой

$$G_n(\alpha,\ \gamma,\ x)=\frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma,\ n)}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\right];$$

n корней многочлена G_n различны и лежат на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$. Функции G_n являются решениями следующего дифференциального уравнения:

$$x(1-x)\,y''+[\gamma-(\alpha+1)\,x]\,y'+n(\alpha+n)\,y=0.$$

Частные случаи. Многочлены Лежандра (см. VI)

$$P_n(x)=G_n\left(1,\ 1,\ \frac{1-x}{2}\right).$$

Многочлены Чебышева (см. VIII)

$$T_n(x)=G_n\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1-x}{2}\right).$$

Многочлены Гегенбауэра (см. VI)

$$C_n^{\nu}(x)=(-1)^n\,\frac{(2\nu,\ n)}{(1,\ n)}\,G_n\left(2\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \frac{1+x}{2}\right).$$

Производящая функция для многочленов Якоби имеет вид

$$(1-x)^{1-\gamma}(1+x)^{\gamma-\alpha}\times$$
$$\times\frac{\left(t-1+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{\gamma-1}\left(t+1-\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{\alpha-\gamma}}{t^{\alpha-1}\sqrt{1-2tx+t^2}}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(-\gamma,\ n)}{(1,\ n)}\,G_n\left(\alpha,\ \gamma,\ \frac{1-x}{2}\right)t^n.$$

Соотношения ортогональности для этих многочленов таковы:

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}\,G_m(\alpha,\ \gamma,\ x)\,G_n(\alpha,\ \gamma,\ x)\,dx=$$
$$=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+n)\,(\gamma,\ n)}\,\dfrac{n!}{\alpha+2n}, & n=m.\end{cases}$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Сеге Д. [9].

VI. МНОГОЧЛЕНЫ И ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Многочлены Лежандра. Многочлены $P_n(x)$ или коэффициенты Лежандра (1785) определяются с помощью разложения

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n$$

$$\text{при } |t|<\min|x\pm\sqrt{x^2-1}|,$$

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,\frac{1}{t^{n+1}}$$

$$\text{при } |t|>\max|x\pm\sqrt{x^2-1}|,$$

откуда следует

$$P_n(x)=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\times$$

$$\times\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\ldots\right].$$

В зависимости от того, четно или нечетно n, имеем следующие выражения для многочленов Лежандра:

$$P_{2n}(x)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\times$$

$$\times\left[1-\frac{2n(2n+1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{2n(2n-2)(2n+1)(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4-\ldots\right],$$

$$\Gamma_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots 2n}x\times$$

$$\times\left[1-\frac{2n(2n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}x^2+\frac{2n(2n-2)(2n+3)(2n+5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^4-\ldots\right].$$

Отсюда

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,$$

$$P_{2n+1}(0)=0,\quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Первые многочлены Лежандра имеют вид

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x,$$

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\qquad P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),$$

$$P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),\qquad P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),$$

$$P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5),$$

$$P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x),$$

$$P_8(x)=\frac{1}{128}(6\,435x^8-12\,012x^6+6\,930x^4-1\,260x^2+35),$$

$$P_9(x)=\frac{1}{128}(12\,155x^9-25\,740x^7+18\,018x^5-4\,620x^3+315x).$$

Многочлены Лежандра выражаются с помощью гипергеометрического ряда

$$P_n(x)=F\left(-n,\ n+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

Полагая $x=\cos\theta$, получаем

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left[\cos n\theta+\frac{1}{1}\,\frac{n}{(2n-1)}\cos(n-2)\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\,\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta+\ldots\right],$$

$$P_0(\cos\theta)=1,\qquad P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$

$$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1),\qquad P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta),$$

$$P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 2\theta+9),$$

$$P_5(\cos\theta)=\frac{1}{128}(63\cos 5\theta+35\cos 3\theta+30\cos\theta),$$

$$P_6(\cos\theta)=\frac{1}{512}(231\cos 6\theta+126\cos 4\theta+105\cos 2\theta+50).$$

Соотношения ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1}P_m(x)\,P_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } m=n,\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1}x^k P_n(x)\,dx=0\quad\text{при } k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

$$\int_0^1 x^k P_n(x)\,dx = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+2)}{(k+n+1)(k+n-1)\ldots(k-n+3)},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{2n}(\cos\theta)\,d\theta = \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_{2n+1}(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{C_{2n}^n C_{2n+2}^{n+1}}{2^{4n+2}}.$$

Формула Олинда Родрига (1816):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Интегральные представления. Лаплас (1825):

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x \pm \sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x\pm\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}, \qquad |\arg x| < \frac{\pi}{2}.$$

Мелер (1872):

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\theta \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\Psi}{\sqrt{2(\cos\Psi-\cos\theta)}}\,d\Psi,$$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\Psi}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\Psi)}}\,d\Psi.$$

Многочлены Гегенбауэра. Многочлены Гегенбауэра $C_n^\nu(x)$ определяются с помощью производящей функции

$$(1-2tx+t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^\infty C_n^\nu(x)\,t^n$$

и сводятся к многочленам Лежандра при $\nu = \frac{1}{2}$. Имеем:

$$C_n^\nu(x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu)} F\left(-n,\ n+2\nu;\ \nu+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu}\theta\, C_m^\nu(\cos\theta)\, C_n^\nu(\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2^{2\nu-1}}\,\dfrac{\Gamma(2\nu+n)}{n!\,(\nu+n)\,[\Gamma(\nu)]^2}, & m = n. \end{cases}$$

Дифференциальные уравнения Лежандра. Многочлены $P_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0.$$

Это уравнение есть частный случай уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \nu(\nu+1)\,y = 0 \qquad (1)$$

при $\nu = n$ (целое положительное). Если $|x| < 1$, то уравнение (1) имеет решение при всех значениях ν, называемое *функцией Лежандра первого рода*:

$$P_\nu(x) = F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

Этот гипергеометрический ряд (см. главу I) сходится, если $|x-1| < 2$;

$$P_\nu(\cos\theta) = F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1;\ \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Имеют место равенства

$$P_\nu(x) = P_{-\nu-1}(x),$$

$$P_\nu(0) = -\frac{\sin\nu\pi}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right).$$

Решением уравнения (1) является также *функция Лежандра второго рода*. В случае, когда ν не является отрицательным числом, она определяется равенством

$$Q_\nu(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{\nu+1}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\, x^{-\nu-1} F\left(\frac{\nu+1}{2},\ \frac{\nu+2}{2};\ \nu+\frac{3}{2};\ \frac{1}{x^2}\right).$$

Этот ряд сходится при $|x| > 1$. В частности,

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \qquad Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x.$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{4}(5x^3-3x)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{x+1}{x-1} - W_{n-1}(x),$$

где (Кристоффель):

$$W_{n-1}(x) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(x) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(x) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(x) + \ldots$$

Имеют место неравенства

$$|P_\nu(\cos\theta)| < \frac{2}{\sqrt{\nu\pi\sin\theta}}; \qquad |Q_\nu(\cos\theta)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu\sin\theta}}.$$

Рекуррентные формулы:

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(x) - (2\nu+1)xP_\nu(x) + \nu P_{\nu-1}(x) = 0,$$

$$(x^2-1)P'_\nu(x) = \nu xP_\nu(x) - \nu P_{\nu-1}(x),$$

$$P'_{\nu+1}(x) - xP'_\nu(x) = (\nu+1)P_\nu(x),$$

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(x) - 2(\nu+1)xQ_\nu(x) + \nu Q_{\nu-1}(x) = 0, \qquad \nu \neq 0,$$

$$Q_1(x) - xQ_0(x) + 1 = 0,$$

$$Q'_{\nu+1}(x) - xQ'_\nu(x) = (\nu+1)Q_\nu(x),$$

$$(x^2-1)Q'_\nu(x) = \nu xQ_\nu(x) - \nu Q_{\nu-1}(x).$$

Присоединенные многочлены Лежандра. Решая с помощью разделения переменных уравнение Лапласа в сферических координатах, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2\theta}\right]y = 0.$$

Полагая в этом уравнении $\cos\theta = x$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right]y = 0. \qquad (2)$$

Если ν и μ являются целыми числами n, m, где $m = 0, 1, \ldots, n$, то частные решения уравнения (2) называются *присоединенными многочленами Лежандра* или, иначе, *сферическими функциями первого рода целого порядка*:

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x),$$

$$P_n^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}\times$$
$$\times F\left(m-n,\ m+n+1;\ m+1;\ \frac{1-x}{2}\right) =$$
$$= \frac{(-1)^m(n+m)!}{2^m m!(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left\{1 - \frac{(n-m)(m+n+1)}{1!(m+1)}\frac{1-x}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(m+n+1)(n+m+2)}{2!(m+1)(m+2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - \ldots\right\} =$$
$$= \frac{(-1)^m(2n)!}{2^n n!(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left[x^{n-m} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)}x^{n-m-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-m-4} - \ldots\right] =$$
$$= \frac{(-1)^m(2n)!}{2^n n!(n-m)!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}x^{n-m}F\left(\frac{m-n}{2}, \frac{m-n+1}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{x^2}\right).$$

Соотношения ортогональности. Имеем:

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_n^{m'}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq m', \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при} \quad m' = m, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}e^{\pm im\varphi}e^{\mp im'\varphi}P_n^m(\cos\theta)P_n^{m'}(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') +$$
$$+ 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Присоединенные функции Лежандра. Пусть $\nu+\mu$ не равно целому отрицательному числу. Тогда уравнение (2) имеет линейно независимые решения $P_\nu^\mu(x)$ и $Q_\nu^\mu(x)$, называемые *присоединенными функциями Лежандра первого* и *второго рода* и определеляемые равенствами

$$P_\nu^\mu(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{\mu}{2}}F\left(-\nu,\ \nu+1;\ 1-\mu;\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$Q_\nu^\mu(x)=\frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[P_\nu^\mu(x)\cos\mu\pi-\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\right].$$

Последнее выражение теряет смысл, если $\mu=\pm m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ В этом случае полагают

$$Q_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}Q_\nu(x),$$

$$Q_\nu^{-m}(x)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(x),$$

$$P_\nu^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\nu(x).$$

В частности,

$$P_\nu^\mu(0)=\frac{\sqrt{\pi}\,2^\mu}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+1}{2}\right)},$$

$$Q_\nu^\mu(0)=-2^{\mu+1}\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)},$$

$$\left[\frac{d}{dx}P_\nu^\mu(x)\right]_{x=0}=\frac{2^{\mu+1}\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\sqrt{\pi}},$$

$$\left[\frac{d}{dx}Q_\nu^\mu(x)\right]_{x=0}=2^\mu\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)},$$

$$P_0^\mu(\cos\theta)=\frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\operatorname{ctg}^\mu\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$P_\nu^\mu(-x)=\cos((\nu+\mu)\pi)\,P_\nu^\mu(x)-\frac{2}{\pi}\sin((\nu+\mu)\pi)\,Q_\nu^\mu(x),$$

$$P_\nu^{-\nu}(\cos\theta)=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^\nu.$$

Рекуррентные соотношения:

$$P_{-\nu-1}^\mu(x)=P_\nu^\mu(x),$$

$$(1-x^2)\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}=(\nu+1)\,x\,P_\nu^\mu(x)-(\nu-\mu+1)\,P_{\nu+1}^\mu(x)=$$
$$=-\nu x\,P_\nu^\mu(x)+(\nu+\mu)\,P_{\nu-1}^\mu(x)=$$
$$=-\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x)-\mu x\,P_\nu^\mu(x)=$$
$$=(\nu-\mu+1)(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu-1}(x)+\mu x\,P_\nu^\mu(x),$$

$$(2\nu+1)\,x\,P_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)\,P_{\nu+1}^\mu(x)+(\nu+\mu)\,P_{\nu-1}^\mu(x),$$

$$P_\nu^{\mu+2}(x)+2(\mu+1)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}P_{\nu+1}^{\mu+1}(x)+$$
$$+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)\,P_\nu^\mu(x)=0,$$

$$(\nu-\mu)(\nu-\mu+1)\,P_{\nu+1}^\mu(x)=(\nu+\mu)(\nu+\mu+1)\,P_{\nu-1}^\mu(x)+$$
$$+(2\nu+1)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x),$$

$$P_{\nu-1}^\mu(x)-x\,P_\nu^\mu(x)=(\nu-\mu+1)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu-1}(x),$$

$$x\,P_\nu^\mu(x)-P_{\nu+1}^\mu(x)=(\nu+\mu)\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu-1}(x),$$

$$(\nu-\mu)\,x\,P_\nu^\mu(x)-(\nu+\mu)\,P_{\nu-1}^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x),$$

$$(\nu-\mu+1)\,P_{\nu+1}^\mu(x)-(\nu+\mu+1)\,x\,P_\nu^\mu(x)=\sqrt{1-x^2}\,P_\nu^{\mu+1}(x).$$

Интегральные представления:

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma\left(-\mu+\frac{1}{2}\right)}\int_0^\theta\frac{\cos\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

$$0<\theta<\pi,\quad \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2},$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta)=\frac{1}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\int_0^\infty e^{-t\cos\theta}J_\mu(t\sin\theta)\,t^\nu\,dt,$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{Re}(\mu+\nu+1)>0.$$

Асимптотические разложения. Если μ вещественно и $|\nu|\gg1$, $|\nu|\gg\mu$, $|\arg\nu|<\pi$, то

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta-\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{\sqrt{2\sin\theta}}\left[1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right].$$

Если ν и μ вещественны и положительны, $\nu \gg \mu$, то

$$P_\nu^\mu(\cos\theta) = \nu^\mu \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta) = \nu^\mu \sqrt{\frac{2}{\pi\nu\sin\theta}}\cos\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4} + \frac{\mu\pi}{2}\right] + O\left(\frac{1}{\nu^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$\varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \nu \gg \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ряды многочленов Лежандра. Многочлены $P_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$. Любая функция $f(x) \in L^2[-1, 1]$ разлагается в смысле сходимости в среднем на этом отрезке (см. главу III) в ряд по многочленам Лежандра.

Если рассматривать x как комплексное переменное, имеем следующую теорему:

Всякая функция $f(x)$, голоморфная внутри эллипса с фокусами -1 и $+1$, может быть представлена в виде ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

который равномерно сходится внутри этого эллипса.

БИБЛИОГРАФИЯ

Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. [2].
Гобсон Е. В. [3].
Лебедев Н. Н. [6].
Сеге Д. [9].
Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. [12].
Lense J. [23].
Mac Robert T. M. [24].
Robin L. [32].
Snow C. [33].

VII. СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферическими многочленами $P_n(x, y, z)$ называют однородные многочлены от переменных x, y, z, удовлетворяющие уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) P_n(x, y, z) = 0.$$

Существуют $2n+1$ линейно независимых друг от друга многочленов $P_n(x, y, z)$ степени n (например, при $n = 2$ — пять многочленов $x^2 - z^2$, $y^2 - z^2$, yz, zx, xy).

Если перейти от координат x, y, z к сферическим координатам r, θ, φ по формулам

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

то многочлены $P_n(x, y, z)$ примут вид

$$P_n(r, \theta, \varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi),$$

где Y_n зависят лишь от угловых переменных θ и φ.

Функции $Y_n(\theta, \varphi)$ называются *сферическими функциями Лапласа* или *сферическими гармониками на поверхности.* Функции $r^n Y_n(\theta, \varphi)$ и $\frac{1}{r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi)$, т. е. решения уравнения Лапласа, называются *пространственными сферическими гармониками.*

Существует $2n+1$ сферических функций Лапласа порядка n.

Эти функции $Y_n(\theta, \varphi)$ являются решениями уравнения в частных производных

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + n(n+1) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] Y_n(\theta, \varphi) = 0.$$

Отсюда вытекает общее выражение функции $Y_n(\theta, \varphi)$ через многочлены Лежандра

$$Y_n(\theta, \varphi) = a_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} (a_m \cos m\varphi + b_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ — произвольные постоянные.

Функции $Y_n^0 = P_n(\cos\theta)$, которые обращаются в нуль на последовательности параллелей, рассекающих сферу на зоны, часто называют *зональными сферическими функциями.* Функции

$$P_n^n(\cos\theta)\cos n\varphi \text{ и } P_n^n(\cos\theta)\sin n\varphi,$$

которые обращаются в нуль на множестве меридианов, рассекающих сферу на n секторов, называют *секториальными сферическими функциями*. Функции $P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ и $P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$, $0 < m < n$, которые обращаются в нуль как на последовательности параллелей, так и на последовательности меридианов, рассекающих зону на четырехугольники, называют *тессеральными сферическими функциями*.

Часто, особенно в квантовой механике, применяют $2n+1$ сферических функций:

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

где $-n \leqslant m \leqslant n$.

Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ ортогональны на единичной сфере. Через $\overline{Y}_n^m(\theta, \varphi)$ обозначают функции, комплексно сопряженные с функциями $Y_n^m(\theta, \varphi)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi} Y_n^m(\theta, \varphi)\,\overline{Y}_{n'}^{m'}(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\right] d\varphi = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,\frac{4\pi}{2n+1}\,\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

В спектроскопии и ядерной физике часто используют *нормированные сферические функции*

$$\mathfrak{Y}_n^m(\theta, \varphi) = \left[\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Для этих функций

$$\overline{\mathfrak{Y}}_n^m(\theta, \varphi) = (-1)^m\,\mathfrak{Y}_n^{-m},$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\mathfrak{Y}_n^m(\theta, \varphi)\,\mathfrak{Y}_{n'}^{m'}(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\right] d\varphi = \delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Функции $Y_n^m(\theta, \varphi)$ образуют полную ортогональную систему функций на сфере.

Любая функция $f(\theta, \varphi)$, непрерывная вместе с производными до второго порядка включительно, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям Лапласа.

Имеем:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigl[a_{n,0}P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}(a_{n,m}\cos m\varphi + b_{n,m}\sin m\varphi)\,P_n^m(\cos\theta)\Bigr],$$

где коэффициенты $a_{n,0}$, $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ определяются формулами

$$a_{n,0} = \frac{2n+1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\,P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$a_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

$$b_{n,m} = \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\,P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

В частности, пусть

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Тогда

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\cos\theta)\,P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\cos m(\varphi - \varphi')\,P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta'),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} Y_n(\theta, \varphi)\,P_n(\cos\gamma)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}\,Y_n(\theta', \varphi').$$

В квантовой механике рассматривают оператор

$$L_x = -ih\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = ih\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_y = -ih\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = -ih\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$L_z = -ih\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) = -ih\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$L^2 = (L_x)^2 + (L_y)^2 + (L_z)^2.$$

Тогда имеем:

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = -h^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_l^m = h^2 l(l+1)\,Y_l^m(\theta, \varphi),$$

где l — целое положительное число, $-l \leqslant m \leqslant l$.

Таким образом, функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ являются собственными функциями оператора L^2, соответствующими собственным значениям $h^2 l(l+1)$.

Имеют место соотношения

$$(L_x + iL_y)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = \\ = he^{i(m+1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)P_l^m(\cos\theta) = -hY_l^{m+1}(\theta, \varphi),$$

$$(L_x - iL_y)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = -he^{i(m-1)\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)P_l^m = \\ = h(l+m)(l-m+1)\, Y_l^{m-1}(\theta, \varphi),$$

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = hmY_l^m(\theta, \varphi).$$

Рекуррентные соотношения для многочленов Лежандра позволяют легко вывести *формулы Дарвина*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = \\ = \frac{1}{2l+1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right) f(r)\, Y_{l-1}^{m+1} - \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right) f(r)\, Y_{l+1}^{m+1}\right],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = \\ = \frac{-1}{2l+1}\left[(l+m)(l+m-1)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right) f(r)\, Y_{l-1}^{m-1} - \right. \\ \left. -(l-m+1)(l-m+2)\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right) f(r)\, Y_{l+1}^{m-1}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(r)\, Y_l^m(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2l+1}\left\{(l+m)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{l+1}{r}\right) f(r)\, Y_{l-1}^m + \right. \\ \left. +(l-m+1)\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l}{r}\right) f(r)\, Y_{l+1}^m\right\}.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. [2].
Гобсон Е. В. [3].
Lense J. [23].
Mac Robert T. M. [24].

VIII. МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

Тригонометрические многочлены Чебышева (1899) *первого рода* $T_n(x)$ и *второго рода* $U_n(x)$ задаются выражениями

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right],$$

$$U_n(x) = \sin(n \arccos x) = \frac{1}{2i}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n - (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right],$$

откуда

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + \\ + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - C_n^6 x^{n-6}(1-x^2)^3 + \ldots,$$

$$U_n(x) = \sqrt{1-x^2}\left[C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3}(1-x^2) + C_n^5 x^{n-5}(1-x^2)^2 - \ldots\right],$$

$$T_n(x) = 2^{n-1}\left[x^n - \frac{n}{1!\,2^2}x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!\,2^4}x^{n-4} - \right. \\ \left. - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!\,2^6}x^{n-6} + \ldots\right],$$

$$U_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,2^{n-1}\left[x^{n-1} - \frac{n-2}{1!\,2^2}x^{n-3} + \right. \\ \left. + \frac{(n-3)(n-4)}{2!\,2^4}x^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!\,2^6}x^{n-7} + \ldots\right].$$

Имеем:

$$T_{-n}(x) = T_n(x), \quad U_{-n}(x) = -U_n(x).$$

Аналогично вводятся многочлены

$$V_n(x) = \cos(n \arcsin x), \quad W_n(x) = \sin(n \arcsin x),$$

для которых

$$V_{2n}(x) = (-1)^n T_{2n}(x), \qquad V_{2n+1}(x) = (-1)^n U_{2n+1}(x),$$

$$W_{2n}(x) = (-1)^{n+1} U_{2n}(x), \quad W_{2n+1}(x) = (-1)^n T_{2n+1}(x).$$

Имеем:

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0,$$

$$U_n(1) = 0, \quad U_n(-1) = 0, \quad U_{2n}(0) = 0, \quad U_{2n+1}(0) = (-1)^n.$$

В частности,

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,\quad T_2(x)=2x^2-1,$$
$$T_3(x)=4x^3-3x,\quad T_4(x)=8x^4-8x^2+1,$$
$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,$$
$$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1,$$
$$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x,$$
$$T_8(x)=128x^8-256x^6+160x^4-32x^2+1,$$
$$T_9(x)=256x^9-576x^7+432x^5-120x^3+9x,$$
$$T_{10}(x)=512x^{10}-1280x^8+1120x^6-400x^4+50x^2-1,$$

$$T_n(x)=(-1)^n 2^n\frac{n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

$$U_0(x)=0,\quad U_1(x)=\sqrt{1-x^2},\quad U_2(x)=\sqrt{1-x^2}\,2x,$$
$$U_3(x)=\sqrt{1-x^2}\,(4x^2-1),\quad U_4(x)=\sqrt{1-x^2}\,(8x^3-4x),$$
$$U_5(x)=\sqrt{1-x^2}\,(16x^4-12x^2+1).$$
$$U_6(x)=\sqrt{1-x^2}\,(32x^5-32x^3+6x),$$
$$U_7(x)=\sqrt{1-x^2}\,(64x^6-80x^4+24x^2-1),$$
$$U_8(x)=\sqrt{1-x^2}\,(128x^7-192x^5+80x^3-8x),$$
$$U_9(x)=\sqrt{1-x^2}\,(256x^8-448x^6+240x^4-40x^2+1),$$
$$U_{10}(x)=\sqrt{1-x^2}\,(512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x).$$

$$U_n(x)=(-1)^{n-1}2^n n\frac{n!}{(2n)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\frac{d}{dx}T_n(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x),$$
$$\frac{d}{dx}U_n(x)=-\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x).$$

Производящие функции. Имеем:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)\,t^n,\qquad t<1,$$

$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n T_n(x)\,t^n,\qquad \begin{matrix}\varepsilon_n=2 \text{ при } n>0,\\ \varepsilon_0=1,\end{matrix}$$

$$\ln\frac{1}{\sqrt{t^2-2tx+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(x)\frac{t^n}{n},\qquad t<1,$$

$$\frac{1}{t^2-2tx+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)\,t^{n-1},\qquad t<1.$$

Дифференциальные уравнения. Функции $T_n(x)$ и $U_n(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения

$$(1-x^2)\,y''-xy'+n^2y=0.$$

Рекуррентные соотношения:

$$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0,$$
$$U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)=0.$$

Соотношения ортогональности:

$$\int_{-1}^{1}T_n(x)\,T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi}\cos n\theta\cos m\theta\,d\theta=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0,\\ \pi, & m=n=0\end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1}U_n(x)\,U_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\pi}\sin n\theta\sin m\theta\,d\theta=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0,\\ 0, & m=n=0.\end{cases}$$

Корни многочленов $T_n(x)=0$ и $U_n(x)=0$ вещественны, различны, перемежаются и лежат на отрезке $[-1,+1]$, причем $x=\pm 1$ являются корнями $U_n(x)$.

БИБЛИОГРАФИЯ

Сеге Д. [9].
Rainville [31].

IX. МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА

Многочлены Эрмита $H_n(x)$ (иногда обозначаемые $He_n(x)$) были определены Эрмитом в 1864 г. с помощью производящей функции

$$e^{tx-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Из этого равенства вытекает

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

Некоторые авторы вместо многочленов $H_n(x)$ рассматривают многочлены $H_n^*(x)$, которые определяются формулой

$$H_n^*(x) = 2^{\frac{n}{2}} H_n(\sqrt{2}\,x).$$

Формулы для многочленов H_n легко преобразуются в формулы для H_n^*; например, производящая функция принимает вид

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^*(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Далее,

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Общее выражение многочленов Эрмита дается формулой

$$H_n(x) = x^n - \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1}x^{n-2} + \frac{1}{2^2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4} - \ldots = \sum_{j=0}^{j\leqslant\frac{n}{2}} \frac{(-1)^j}{2^j}\frac{(-n,\,2j)}{(1,\,j)}\,x^{n-2j};$$

$H_n(x)$ является многочленом степени n по x, который содержит лишь члены той же четности, что и x^n:

$$H_{2n}(-x) = H_{2n}(x),$$
$$H_{2n+1}(-x) = -H_{2n+1}(x).$$

Можно записать $H_n(x)$ по возрастающим степеням x в двух различных формах в зависимости от четности n:

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}\left[1 - 2\frac{n}{1\cdot 2}x^2 + 2^2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \ldots\right],$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n+1)!}{n!}\left[x - 2\frac{n}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + 2^2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \ldots\right].$$

Эти выражения непосредственно отождествляются с рядами Куммера (см. главу II):

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}\,{}_1F_1\left(-n;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n+1)!}{n!}\,x\,{}_1F_1\left(-n;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

Мы имеем:

$$H_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{n!}, \qquad H_{2n+1}(0) = 0,$$

$$H'_{2n}(0) = 0, \qquad H'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n+1)!}{n!}.$$

Явные выражения первых многочленов Эрмита таковы:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = x, \quad H_2 = x^2 - 1,$$
$$H_3 = x^3 - 3x, \quad H_4 = x^4 - 6x^2 + 3, \quad H_5 = x^5 - 10x^3 + 15x,$$
$$H_6 = x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15, \quad H_7 = x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x,$$
$$H_8 = x^6 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105.$$

Производной многочлена Эрмита снова является многочлен Эрмита:

$$\frac{d^k H_n}{dx^k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)H_{n-k}, \quad 0 < k \leqslant n.$$

Отсюда вытекает

$$H_n(x+h) = H_n(x) + \frac{n}{1}hH_{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}h^2H_{n-2}(x) + \ldots$$

Между тремя последовательными многочленами Эрмита имеет место рекуррентное соотношение:

$$H_n(x) - xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad n \geqslant 2.$$

Уравнение $H_n(x)=0$ имеет n вещественных корней, перемежающихся с корнями уравнения $H_{n+1}(x)=0$, попарно симметричных относительно начала координат и не превосходящих по абсолютному значению величины $\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Многочлены H_n можно представить в виде определителя

$$H_n(x)=\begin{vmatrix} x & n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & n-2 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & n-3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Они допускают также интегральное представление

$$H_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x+iy)^n e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Формула сложения:

$$\frac{(a_1^2+\dots+a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}}{\mu!}H_\mu\left[\frac{a_1x_1+\dots+a_nx_n}{\sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}}\right]=$$

$$=\sum_{m_1+\dots+m_n=\mu}\frac{a_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{a_n^{m_n}}{m_n!}H_{m_1}(x_1)\dots H_{m_n}(x_n).$$

Частные случаи:

(α) $a_1=\dots=a_n=1,\quad x_1=\dots=x_n=x,$

$$n^{\frac{\mu}{2}}H_\mu(\sqrt{n}\,x)=\sum_{m_1+\dots+m_n=\mu}\frac{\mu!}{m_1!\dots m_n!}H_{m_1}(x)\dots H_{m_n}(x),$$

(β) $n=2,\quad a_1=a_2=1,\quad x_1=\sqrt{2}\,x,\quad x_2=\sqrt{2}\,y.$

$$2^\mu H_\mu(x+y)=\sum_{p+q+r+s=\mu}\frac{\mu!}{p!\,q!\,r!\,s!}H_p(x)H_q(x)H_r(y)H_s(y).$$

Дифференциальные уравнения. Многочлены $H_n(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$y''-xy'+ny=0.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A_n(y)=\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+ny.$$

Тогда

$$\frac{d^k}{dx^k}A_n(y)=A_{n-k}\left(\frac{d^ky}{dx^k}\right).$$

Если y является решением дифференциального уравнения

$$A_n(y)=0,$$

то его производная порядка k удовлетворяет уравнению

$$A_{n-k}(y)=0.$$

Если n — целое число, то общее решение дифференциального уравнения Эрмита можно представить в виде

$$y=AH_n(x)+Bh_n(x).$$

Функции $h_n(x)$ — *функции Эрмита второго рода*, не сводятся к многочленам и могут быть выражены лишь с помощью трансцендентных функций

$$e^{\frac{x^2}{2}}\quad\text{и}\quad\int_0^x e^{\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Функции второго рода выражаются с помощью вырожденных гипергеометрических функций

$$h_{2n}(x)=(-1)^n2^n n!\,x\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}-n;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$h_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}2^n n!\,{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}-n;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

при этом

$$h_{2n}(0)=0,\qquad h_{2n+1}(0)=(-1)^{n+1}2^n n!$$

$$h'_{2n}(0)=(-1)^n2^n n!,\qquad h'_{2n+1}(0)=0.$$

Так же как и для функций H_n, из свойств оператора $A_n(y)$ вытекает, что для h_n

$$\frac{d^kh_n}{dx^k}=n(n-1)\dots(n-k+1)\,h_{n-k},\quad 0<k\leqslant n.$$

Определитель Вронского дает следующее соотношение между решениями H_n и h_n дифференциального уравнения Эрмита

$$H_n(x)h'_n(x)-H'_n(x)h_n(x)=n!\,e^{\frac{x^2}{2}},\quad n\geqslant 0,$$

или иначе

$$H_n(x)h_{n-1}(x)-H_{n-1}(x)h_n(x)=(n-1)!\,e^{\frac{x^2}{2}},\quad n\geqslant 1.$$

Отсюда следует

$$h_0(x) = \int_0^x e^{\frac{y^2}{2}}\,dy,$$

$$h_1(x) = H_1(x)\,h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}}$$

и вообще

$$h_n(x) = H_n(x)\,h_0(x) - G_{n-1}(x)\,e^{\frac{x^2}{2}},$$

где G_{n-1} — многочлен от x. Вот первые такие многочлены

$$G_0 = 1, \qquad G_1 = x, \qquad G_2 = x^2 - 2,$$

$$G_3 = x^3 - 5x, \qquad G_4 = x^4 - 9x^2 + 8, \qquad G_5 = x^5 - 14x^3 + 33x.$$

Функция второго рода может быть выражена в следующем виде, аналогичном указанному ранее для H_n:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\frac{x^2}{2}} h_0(x)\right].$$

Соотношения ортогональности. Многочлены $H_n(x)$ образуют полную ортогональную систему (см. главы III и IV) на оси $(-\infty, +\infty)$ относительно веса $p(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x)\,H_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \sqrt{2\pi}\,n!, & m = n. \end{cases}$$

Для всех функций $f(x)$, таких, что

$$x^n e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \in L(-\infty, +\infty), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

коэффициенты Фурье имеют вид

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)\,f(x)\,dx.$$

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x)$$

сходилось к $f(x)$ в заданной точке, состоит в том, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,k!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \left[H_{k+1}(x)\,H_k(y) - H_k(x)\,H_{k+1}(y)\right] dy$$

стремилось к нулю, когда $k \to +\infty$.

Вместо многочленов $H_n(x)$ часто используют функции $D_n(x)$ (*функции параболического цилиндра*; см. главу II):

$$D_n(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} H_n(x).$$

Эти функции образуют полную ортогональную нормированную систему на оси

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D_m(x)\,D_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению Вебера

$$y'' = \left[\frac{x^2}{4} - \left(n + \frac{1}{2}\right)\right] y.$$

Если

$$e^{-\frac{x^2}{4}} f(x) \in L^2(-\infty, +\infty),$$

то коэффициенты Фурье B_n функции $f(x)$ определяются формулами

$$B_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}} D_n(x)\,f(x)\,dx.$$

Они удовлетворяют неравенству

$$|B_n| \leqslant \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} [f(x)]^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n D_n(x)$$

сходится в среднем к $e^{-\frac{x^2}{4}} f(x)$, т. е.

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\frac{x^2}{4}} f(x) - \sum_{k=0}^{n} B_k D_k(x)\right]^2 dx = 0.$$

Функция $D_n(x)$ является собственной функцией интегрального уравнения первого рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)\,\varphi(y)\,dy$$

с симметричным ядром

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \exp\left[-\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}\,\frac{x^2+y^2}{4} + \frac{\xi}{1-\xi^2}\,xy\right],$$

$$0 < \xi < 1$$

соответствующей собственному значению $\lambda = \xi^{-n}$.

Если для функции $f(x)$ найдется такая функция $g(x) \in L^2$ $(-\infty, +\infty)$, что

$$e^{-\frac{x^2}{4}} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\,g(y)\,dy,$$

то разложение

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n D_n(x)$$

абсолютно и равномерно сходится на любом конечном отрезке.

Можно рассматривать также сходимость рядов по многочленам Эрмита, коэффициенты A_n которых даны a priori (без предположения, что эти коэффициенты A_n являются коэффициентами Фурье).

Если положить $\nu = \frac{n}{2}$ или $\nu = \frac{n-1}{2}$ в зависимости от того, четно или нечетно n, то

$$\frac{1}{n!}\,|H_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^\nu}\,\frac{1}{\nu!}\,e^{x\sqrt{2\nu}}.$$

Отсюда вытекает, что если радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{n!}{\nu!}\,x^n$$

больше, чем 1, то разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x)$$

абсолютно сходится для всех x, причем эта сходимость равномерна на любом конечном отрезке.

Примеры разложений. Если p — целое положительное число или нуль, то

$$\frac{x^p}{p!} = \sum_{k=0}^{k<\frac{p}{2}} \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{k!\,(p-2k)!}\,H_{p-2k}(x).$$

Отсюда вытекает, что между коэффициентами a_n степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

и коэффициентами A_n ряда многочленов

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x)$$

имеют место соотношения Нильса Нильсона:

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\frac{(n+2k)!}{k!}\,a_{n+2k},$$

$$a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}\,\frac{(n+2k)!}{k!}\,A_{n+2k}.$$

Вот, для примера, разложение функции Куммера:

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma, n)\,(1, n)}\,{}_2F_2\left(\frac{\alpha+n}{2}, \frac{\alpha+n+1}{2}; \frac{\gamma+n}{2}; \frac{\gamma+n+1}{2}; \frac{1}{2}\right) H_n(x).$$

Для любой функции, определяемой экспоненциальной суммой

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j e^{\alpha_j x},$$

можно непосредственно получить, используя производящую функцию, разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x),$$

где

$$A_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^{p} c_j \alpha_j^n e^{\frac{\alpha_j^2}{2}}.$$

Например,

$$\operatorname{ch} tx = e^{\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(x),$$

$$\operatorname{sh} tx = e^{\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x),$$

$$\cos tx = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} H_{2n}(x),$$

$$\sin tx = e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} H_{2n+1}(x).$$

Уравнение теплопроводности. Многочлены Эрмита встречаются в теории распространения тепла в бесконечном стержне; уравнение Фурье

$$u_t - u_{xx} = 0$$

допускает экспоненциальное решение вида

$$u(x, t) = e^{\alpha x + \alpha^2 t}.$$

Разложим это решение по степеням α:

$$e^{\alpha x + \alpha^2 t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} P_n(x, t).$$

Тогда многочлены

$$P_n(x, t) = x^n + \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} t + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} x^{n-4} t^2 + \ldots,$$

являются решениями уравнения теплопроводности, приводящимися к x^n при $t = 0$. Они выражаются следующим образом через многочлены Эрмита:

$$P_n(x, t) = (i\sqrt{2t})^n H_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right).$$

Интегральное представление многочленов H_n позволяет выразить $P_n(x, t)$ в виде интеграла Пуассона — Фурье

$$P_n(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} y^n \, dy.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Cere Д. [9].
Appell P. et Kampé de Feriet J. [15].
Rainville [31].

X. МНОГОЧЛЕНЫ ЛАГЕРРА

Многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1)$ определяются с помощью соотношений ортогональности

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Gamma(\alpha+1) C_{n+\alpha}^n \text{*)} & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Коэффициент при x^n имеет такой же знак, как и $(-1)^n$, и мы пишем:

$$L_n(x) \text{ вместо } L_n^{(0)}(x).$$

Имеем:

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} \, dx = \delta_{mn}.$$

Далее,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!},$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}),$$

$$L_n(x) = 1 - C_n^1 x + C_n^2 \frac{x^2}{2!} - C_n^3 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2},$$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{6},$$

$$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^4}{24},$$

*) В книге И. С. Градштейна и И. М. Рыжика, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4 принята нормировка $\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)$. (*Прим. перев.*)

$$L_5(x) = 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{x^5}{120},$$

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad L_n^{(\alpha)}(0) = C_{n+\alpha}^n,$$

$$L_n^{(-n)}(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

$$L_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x.$$

Представление через гипергеометрическую функцию:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}\, {}_1F_1(-n;\, \alpha+1;\, x).$$

Производящая функция:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)\, t^n, \quad |t| < 1.$$

Дифференциальные уравнения:

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)\, y' + ny = 0, \quad y = L_n^{(\alpha)}(x);$$

$$xz'' + (x+1)\, z' + \left(n + \frac{\alpha}{2} + 1 - \frac{\alpha^2}{4x}\right) z = 0, \quad z = e^{-x} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x);$$

$$u'' + \left(\frac{2n+\alpha+1}{2x} + \frac{1-\alpha^2}{4x^2} - \frac{1}{4}\right) u = 0, \quad u = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha+1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x);$$

$$v'' + \left(4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) v = 0, \quad v = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha + \frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x^2).$$

Рекуррентные формулы:

$$n L_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)\, L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)\, L_{n-2}^{(\alpha)}(x),$$
$$n = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots;$$

$$(n + \alpha + 1)\, L_n^{(\alpha)}(x) - (n+1)\, L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = x \sum_{\nu=0}^{n} L_\nu^{(\alpha)}(x) = x L_n^{(\alpha+1)}(x);$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} L_\nu^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x); \quad L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha+1)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x);$$

$$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_n^{(\alpha+1)}(x) = x^{-1}\left\{n L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)\, L_n^{(\alpha)}(x)\right\}.$$

Связь с функциями Бесселя:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n = e^t (xt)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{tx}), \quad \alpha > -1,$$

и при $\alpha = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} t^n = e^t J_0(2\sqrt{tx}),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = e^{-x} \frac{x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha\{2\sqrt{tx}\}\, dt,$$

$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ \alpha > -1$$

$$(\alpha \leqslant -1, \text{ если } n + \alpha > -1).$$

Связь с многочленами Эрмита:

$$H_{2n}(x) = (-2)^n n!\, L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{ или } H_{2n}^*(x) = (-1)^n 2^{2n} n!\, L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}(x^2),$$

$$H_{2n+1}(x) = (-2)^n n!\, x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

или

$$H_{2n+1}^*(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n!\, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2).$$

Формулы суммирования:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)]^2 = e^x;$$

$$(1+t)^x e^{-xt} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha-n)}(x)\, t^n \qquad (|t| < 1);$$

$$\int_0^t L_n(x)\, dx = L_n(t) - L_{n+1}(t);$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^t L_n(x)\, dx\right]^2 = e^t - 1 \qquad (t \geqslant 0);$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha-\beta+k)}{k!\,\Gamma(\alpha-\beta)}L_{n-k}^{(\beta)}(x);$$

$$\left(L_n^{(\alpha)}(x)\right)^2=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n-2k)!\,(2k)!\,L_{2k}^{(2\alpha)}(2x)}{\Gamma(\alpha+k+1)\,(n-k)!};$$

$$L_n^{(\alpha)}(x)\,L_n^{(\alpha)}(y)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_{n-k}^{(\alpha+2k)}(x+y)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\,\frac{(xy)^k}{k!};$$

$$L_n^{(\alpha)}(x+y)=e^y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\,y^kL_n^{(\alpha+k)}(x).$$

Многочлены Сонина:

$$T_\alpha^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}\,L_n^{(\alpha)}(x).$$

Иногда через $L_n(x)$ и $L_n^{(k)}(x)$ обозначают многочлены

$$L_n^*(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}).$$

Тогда

$$L_n^{*(k)}=\frac{d^k}{dx^k}\,L_n^*(x),$$

$$\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^*(x)}{n!}\,t^n,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}L_n^*(x)\,L_m^*(x)\,dx=(n!)^2\,\delta_{mn}.$$

Между $L_n^*(x)$ и $L_n(x)$ имеют место следующие соотношения:

$$L_n^*(x)=n!\,L_n(x),$$

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(k)}(x)\,t^n=(-t)^{-k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{*(k)}(x)}{n!}\,t^n.$$

В теории атома водорода встречается следующая функция Лагерра:

$$y_{n,k}=e^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{k-1}{2}}\,L_n^{*(k)}(x).$$

Она является решением дифференциального уравнения

$$xy''+2y'+\left(n-\frac{k-1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{k^2-1}{4x}\right)y=0.$$

Теория атома водорода приводит, в частности, к интегралам вида

$$I_{n,m}^k(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{k-1}L_n^{*(k)}(x)\,L_m^{*(k)}(x)\,x^p\,dx,$$

для которых

$$I_{n,n}^k(1)=\frac{(n!)^3}{(n-k)!};\quad I_{n,n}^k(2)=\frac{(n!)^2}{(n-k)!}(2n-k+1);$$

$$I_{n,n}^k(3)=\frac{(n!)^3}{(n-k)!}(6n^2-6nk+k^2+6n-3k+2).$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Сеге Д. [9].
Pinney E. [30].
Rainville [31].

XI. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Коэффициенты или *функции Бесселя* целого индекса рассматривались Л. Эйлером (1764) и систематически изучались Бесселем в 1824 г.; они определяются с помощью производящей функции

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n.$$

Теперь часто рассматривают более общий случай, называя *цилиндрическими функциями* или *функциями Бесселя* некоторые частные решения дифференциального уравнения Бесселя

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{\lambda^2}{x^2}\right)y=0,$$

где λ — вещественное или комплексное число.

Мы будем обозначать общее решение этого уравнения — линейную комбинацию двух частных решений, символом $Z_\lambda(x)$.

1. **Цилиндрические функции первого рода или функции Бесселя $J_\lambda(x)$.** Они определяются следующим образом:

а) Для всех значений λ — разложением

$$J_\lambda(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\lambda+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k};$$

$J_\lambda(x)$ является аналитической функцией комплексного переменного x при всех значениях x (за исключением быть может точки $x=0$) и аналитической функцией от λ для всех значений λ.

Функции $J_\lambda(x)$ сводятся к вырожденной гипергеометрической функции (см. главу II):

$$J_\lambda(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}{}_0F_1\left(\lambda;\ -\frac{x^2}{2}\right).$$

б) При $\mathrm{Re}(\lambda)\geqslant 0$ как частный случай $Z_\lambda(x)$, удовлетворяющий краевым условиям: $Z_\lambda(0)$ конечно и $Z_\lambda(x)$ стремится к нулю, когда $|x|\to+\infty$.

в) При $\mathrm{Re}(\lambda)>-\frac{1}{2}$ — с помощью интегралов Пуассона:

$$J_\lambda(x)=\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\cos\theta)\sin^{2\lambda}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}e^{ix\cos\theta}\sin^{2\lambda}\theta\,d\theta.$$

г) При $\lambda=n$ целом $J_n(x)$ является коэффициентом при t^n в разложении

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_n(x)\,t^n.$$

В частности,

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x).$$

Отсюда вытекает, что

$$e^{ix\sin\theta}=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[J_{2n}(x)\cos 2n\theta+iJ_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta\right],$$

а потому

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta.$$

В частности,

$$J_{2n}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x\sin\theta)\cos 2n\theta\,d\theta,$$

$$J_{2n+1}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x\sin\theta)\sin(2n+1)\theta\,d\theta.$$

2. **Цилиндрические функции второго рода $N_\lambda(x)$.** Эти функции определяются для любого λ формулой

$$N_\lambda(x)=\frac{J_\lambda(x)\cos\lambda\pi-J_{-\lambda}(x)}{\sin\lambda\pi}.$$

Если $\lambda = n$ — целое число, то это выражение должно быть заменено его пределом. При этом получают выражение

$$N_n(x) = \lim_{\lambda \to n} \frac{1}{\pi}\left[\frac{d}{d\lambda} J_\lambda(x) - (-1)^n \frac{d}{d\lambda} J_{-\lambda}(x)\right],$$

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{(n-r+1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} -$$

$$-\left(\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{\pi}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+r} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+r}\right],$$

$$N_n(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma - \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\right) - \right.$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-n} J_r(x) -$$

$$\left. - \sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r \frac{(n+2r)!}{r!\,(n+r)!} J_{n+2r}(x)\right].$$

В частности,

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + 2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}}{r!} J_{2r}(x)\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) - \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}\right)\right].$$

3. Цилиндрические функции третьего рода или функции Ганкеля. Эти функции определяются с помощью функций $J_\lambda(x)$ и $N_\lambda(x)$ формулами

$$H_\lambda^{(1)}(x) = J_\lambda(x) + iN_\lambda(x) = \frac{i}{\sin\lambda\pi}\left[e^{-i\lambda\pi} J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)\right],$$

$$H_\lambda^{(2)}(x) = J_\lambda(x) - iN_\lambda(x) = \frac{-i}{\sin\lambda\pi}\left[e^{i\lambda\pi} J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)\right].$$

4. Отрицательные значения параметра. Мы имеем:

$$J_{-\lambda}(x) = J_\lambda(x)\cos\lambda\pi - N_\lambda(x)\sin\lambda\pi,$$

$$N_{-\lambda}(x) = J_\lambda(x)\sin\lambda\pi + N_\lambda(x)\cos\lambda\pi,$$

$$H_{-\lambda}^{(1)}(x) = e^{i\lambda\pi} H_\lambda^{(1)}(x), \quad H_{-\lambda}^{(2)}(x) = e^{-i\lambda\pi} H_\lambda^{(2)}(x).$$

В частности, если n целое, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x).$$

5. Периодичность. Предположим, что $\arg x$ имеет главное значение $-\pi < \arg x < +\pi$ и что

$$\arg(xe^{ik\pi}) = k\pi + \arg x.$$

Тогда

$$J_\lambda(xe^{ik\pi}) = e^{ik\lambda\pi} J_\lambda(x),$$

$$N_\lambda(xe^{ik\pi}) = e^{-ik\lambda\pi} N_\lambda(x) + 2i\,\frac{\sin k\lambda\pi}{\operatorname{tg}\lambda\pi} J_\lambda(x),$$

$$N_{-\lambda}(xe^{ik\pi}) = e^{-ik\lambda\pi} N_{-\lambda}(x) + 2i\,\frac{\sin k\lambda\pi}{\sin\lambda\pi} J_{-\lambda}(x),$$

$$H_\lambda^{(1)}(xe^{ik\pi}) = e^{-ik\lambda\pi} H_\lambda^{(1)}(x) - 2e^{-i\lambda\pi}\frac{\sin k\lambda\pi}{\sin\lambda\pi} J_\lambda(x),$$

$$H_\lambda^{(2)}(xe^{ik\pi}) = e^{-ik\lambda\pi} H_\lambda^{(2)}(x) + 2e^{i\lambda\pi}\frac{\sin k\lambda\pi}{\sin\lambda\pi} J_\lambda(x).$$

В частности,

$$J_n(xe^{i\pi}) = (-1)^n J_n(x),$$

$$N_n(xe^{ik\pi}) = (-1)^{kn}\left[N_n(x) + 2ikJ_n(x)\right],$$

$$H_n^{(1)}(xe^{ik\pi}) = (-1)^{kn}\left[H_n^{(1)}(x) - 2kJ_n(x)\right],$$

$$H_n^{(2)}(xe^{ik\pi}) = (-1)^{kn}\left[H_n^{(2)}(x) + 2kJ_n(x)\right].$$

6. Вронскиан. Обозначим через

$$W(f, g) = f'g - fg'$$

определитель Вронского. Тогда

$$W(J_\lambda, J_{-\lambda}) = -\frac{2\sin\lambda\pi}{\pi x},$$

$$W(J_\lambda, N_\lambda) = \frac{2}{\pi x},$$

$$W\left(H_\lambda^{(1)}, H_\lambda^{(2)}\right) = -\frac{4i}{\pi x}.$$

7. Представления с помощью контурных интегралов. Пусть

$$|\arg x| < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда

$$J_\lambda(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty-i\pi}^{\infty+i\pi} e^{i(x\,\mathrm{sh}\,t-\lambda t)}\,dt, \qquad (C_1)$$

$$H_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty+i\pi} e^{x\,\mathrm{sh}\,t-\lambda t}\,dt, \qquad (C_2)$$

$$H_\lambda^{(2)}(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty-\pi i} e^{x\,\mathrm{sh}\,t-\lambda t}\,dt, \qquad (C_3)$$

где контуры интегрирования изображены на рис. 3.

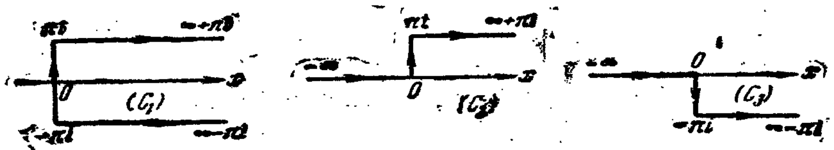

Рис. 3.

8. Рекуррентные соотношения. Исходя из

$$\frac{d}{dx}[x^\lambda Z_\lambda(x)] = x^\lambda Z_{\lambda-1}(x); \qquad \frac{d}{dx}[x^{-\lambda}Z_\lambda(x)] = -x^{-\lambda}Z_{\lambda+1}(x),$$

выводим, что

$$Z_{\lambda-1}(x)+Z_{\lambda+1}(x) = \frac{2\lambda}{x}Z_\lambda(x); \qquad Z_{\lambda-1}(x)-Z_{\lambda+1}(x) = 2\frac{dZ_\lambda}{dx}.$$

Следовательно, при $\lambda = n$ все Z_n могут быть выражены через Z_0 и $Z_1 = Z_0'$.

9. Формула Ломмеля. Пусть $Z_\lambda(\alpha x)$ и $Z_\mu(\beta x)$ являются двумя решениями уравнения Бесселя. Тогда

$$\int\left[(\alpha^2-\beta^2)x - \frac{\lambda^2-\mu^2}{2}\right]Z_\lambda(\alpha x)\,Z_\mu(\beta x)\,dx = x\left[\beta Z_\lambda(\alpha x)\,Z_\mu'(\beta x) - \alpha Z_\mu(\beta x)\,Z_\lambda'(\alpha x)\right],$$

$$\int x\,[Z_\lambda(\alpha x)]^2\,dx = \frac{x^2}{2}\left[(Z_\lambda(\alpha x))^2 - Z_{\lambda-1}(\alpha x)\,Z_{\lambda+1}(\alpha x)\right].$$

В частности, если α_r и α_s являются двумя различными решениями уравнения

$$J_\lambda(x) = 0,$$

то

$$\int_0^1 J_\lambda(\alpha_r x)\,J_\lambda(\alpha_s x)\,dx = \begin{cases} 0, & r \neq s \\ \frac{1}{2}\left[J_\lambda'(\alpha_r)\right]^2, & r = s. \end{cases}$$

10. Полуцелые значения параметра. При $\lambda = n + \frac{1}{2}$ имеем:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[A_n \sin\left(x - n\frac{\pi}{2}\right) + B_n\cos\left(x - n\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

$$J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[A_n \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) - B_n\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right],$$

где

$$A_n = \sum_{r=0}^{r<\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r)!}\,\frac{(n+2r)!}{(n-2r)!}\,(2x)^{-2r},$$

$$B_n = \sum_{r=0}^{r<\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}\,\frac{(n+2r+1)!}{(n-2r+1)!}\,(2x)^{-2r-1}.$$

В частности,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

11. Асимптотические выражения Ганкеля. Если положить (r целое положительное)

$$[\lambda, r] = \frac{1}{r!}\,\frac{\Gamma\left(\lambda+r+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda-r+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2^{2r}r!}(4\lambda^2-1^2)(4\lambda^2-3^2)\ldots[4\lambda^2-(2r-1)^2],$$

$$[\lambda, 0] = 1,$$

то при $x \gg 1$ и $x \gg \lambda$ имеем:

$$H_\lambda^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{r=0}^{p-1}\frac{(-1)^r[\lambda, r]}{(2ix)^r}+O(x^{-p})\right],$$

$$H_\lambda^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\lambda\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[\sum_{r=0}^{p-1}\frac{[\lambda, r]}{(2ix)^r}+O(x^{-p})\right],$$

$$J_\lambda(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left(\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\frac{[\lambda, 2r]}{(2x)^{2r}}+O(x^{-2p})\right)\cos\left(x-\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^r\frac{[\lambda, 2r+1]}{(2x)^{2r+1}}+O(x^{-2p-1})\right)\sin\left(x-\lambda\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Эта формула применима при больших значениях $|x|$ при условии что $|\arg x|<\pi$.

12. Асимптотические формулы Никольсона:

$$J_n(x)\sim\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2(x-n)}{x}}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}}(x-n)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]+J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}}(x-n)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]\right\}$$

при $x>n$;

$$J_n(x)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(n-x)}{3x}}\, e^{\frac{2\pi i}{3}} H_{\frac{1}{3}}^{(1)}\left[i\,\frac{2^{\frac{3}{2}}(n-x)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]$$

при $x<n$;

$$N_n(x)\sim-\sqrt{\frac{2(x-n)}{3x}}\left\{J_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}}(x-n)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]-J_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2^{\frac{3}{2}}(x-n)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{x}}\right]\right\}$$

при $x>n$.

13. Теоремы сложения и умножения:

$$Z_0\left(\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\right)=Z_0(R)\,J_0(r)+2\sum_{n=1}^{\infty}Z_n(R)\,J_n(r)\cos n\varphi,$$

откуда, в частности, следует, что

$$J_0\left(\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi}\right)=J_0(R)\,J_0(r)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_n(R)\,J_n(r)\cos n\varphi.$$

При $|x|<|t|$ имеем:

$$Z_\lambda(x+t)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}Z_{\lambda-r}(t)\,J_r(x),\qquad Z_\lambda(x-t)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}Z_{\lambda+r}(t)\,J_r(x);$$

$$e^{ikr\cos\theta}=\sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)i^n J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n(\cos\theta),$$

$$J_\lambda(-kr)=k^\lambda\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(\lambda^2-1)^r}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^r J_{\lambda+r}(r).$$

14. Корни $J_\lambda(x)$. Уравнение $J_\lambda(x)=0$, где $\lambda>-1$, имеет бесконечно много вещественных корней. Все эти корни простые и перемежаются с корнями функции $J_{\lambda+1}$; через $\alpha_{\lambda, n}$ обозначим n-й корень уравнения $J_\lambda(x)=0$, считая, что эти корни упорядочены в порядке возрастания их величин. Тогда при $\lambda>-1$ имеем:

$$0<\alpha_{\lambda, 1}<\alpha_{\lambda+1, 1}<\alpha_{\lambda, 2}<\alpha_{\lambda+1, 2}<\dots$$

Уравнение

$$AJ_\lambda(x)+Bx\,J_\lambda'(x)=0$$

имеет бесконечно много простых вещественных корней, причем корни этого уравнения перемежаются с корнями уравнения

$$CJ_\lambda(x)+Dx\,J_\lambda'(x)=0,$$

если постоянные A, B, C, D таковы, что $AD-BC\neq 0$.

Если α_λ — наименьший положительный корень уравнения $J_\lambda(x)=0$, то

$$\sqrt{\lambda(\lambda+2)}<\alpha_\lambda<\sqrt{\frac{4}{3}(\lambda+1)(\lambda+5)}.$$

Теорема Шафхейтлина. При $\lambda>\frac{1}{2}$ корни уравнения

$$J_\lambda(x)\cos\alpha-N_\lambda(x)\sin\alpha=0\qquad(0\leqslant\alpha<\pi),$$

которые больше, чем $\frac{(2\lambda+1)(2\lambda+3)}{\pi}$, расположены на отрезках

$$\left[\left(n+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi-\alpha,\quad\left(n+\frac{\lambda}{2}+\frac{3}{4}\right)\pi-\alpha\right],\quad n=0, 1, 2, \dots$$

Асимптотические выражения корней: Для больших корней уравнения

$$J_\lambda(x)\cos\alpha-N_\lambda(x)\sin\alpha=0$$

имеет место асимптотическое разложение

$$x_n=\left(n+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha-\frac{4\lambda^2-1}{8\left[\left(n+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha\right]}-$$
$$-\frac{(4\lambda^2-1)(28\lambda^2-31)}{384\left[\left(n+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi-\alpha\right]^3}-\dots$$

15. Интеграл Сонина. При $\lambda > -1$, $\mu > -1$ имеем:

$$J_{\lambda+\mu+1}(x) = \frac{x^{\mu+1}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+1)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} J_\lambda(x \sin\theta) \sin^{\lambda+1}\theta \cos^{2\mu+1}\theta \, d\theta.$$

16. Модифицированные функции (функции мнимого аргумента). Это функции

$$I_\lambda(x) = e^{-\lambda \frac{\pi}{2} i} J_\lambda\left(x e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = e^{-\lambda\frac{\pi}{2} i} J_\lambda(ix) =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!\,\Gamma(\lambda+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2r}, \qquad -\pi < \arg x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$I_\lambda(x) = e^{3\lambda\frac{\pi}{2} i} J_\lambda\left(x e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right), \qquad \frac{\pi}{2} < \arg x < \pi$$

и

$$K_\lambda(x) = \frac{i\pi}{2} e^{i\lambda\frac{\pi}{2}} H_\lambda^{(1)}(ix),$$

являющиеся решениями модифицированного уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + \lambda^2) y = 0.$$

17. Функции Кельвина. Это функции $\mathrm{ber}_\lambda(x)$, $\mathrm{bei}_\lambda(x)$, $\mathrm{her}_\lambda(x)$, $\mathrm{hei}_\lambda(x)$, $\mathrm{ker}_\lambda(x)$, $\mathrm{kei}_\lambda(x)$, определяемые формулами

$$\mathrm{ber}_\lambda(x) \pm i\,\mathrm{bei}_\lambda(x) = J_\lambda\left(x e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}\right),$$

$$\mathrm{her}_\lambda(x) \pm i\,\mathrm{hei}_\lambda(x) = H_\lambda^{(1)}\left(x e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}\right),$$

$$\mathrm{ker}_\lambda(x) \pm i\,\mathrm{kei}_\lambda(x) = K_\lambda\left(x e^{\pm\frac{\pi i}{4}}\right),$$

При $\lambda = 0$ имеем:

$$\mathrm{ker}(x) = -\frac{\pi}{2}\mathrm{hei}(x), \quad \mathrm{kei}(x) = \frac{\pi}{2}\mathrm{her}(x),$$

где $\mathrm{ker}(x) \equiv \mathrm{ker}_0(x)$ и т. п. Далее,

$$\mathrm{ber}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots, \quad \mathrm{bei}\,x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots$$

18. Уравнения, которые сводятся к уравнениям Бесселя. Функция

$$y(x) = x^\alpha Z_\lambda(\beta x^\gamma)$$

является решением уравнения

$$y'' - \frac{2\alpha-1}{x} y' + \left(\beta^2\gamma^2 x^{2\gamma-2} + \frac{\alpha^2-\lambda^2\gamma^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Функция

$$y(x) = \sqrt{x} Z_{p+\frac{1}{2}}(\sqrt{a}\,x)$$

является решением уравнения

$$y'' + \left[a - \frac{p(p+1)}{x^2}\right] y = 0.$$

Общее решение уравнения

$$y'' - \frac{2p}{x} y' - a^2 y = 0$$

имеет вид

$$y(x) = x^{p+\frac{1}{2}} Z_{p+\frac{1}{2}}(aix).$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Ватсон Г. Н. [1].
Грей Э. и Мэтьюз Г. Б. [4].
Лебедев Н. Н. [6].
Nielsen N. [27].
Petiau G. [29].

XII. ФУНКЦИИ МАТЬЕ

Функциями Матье называются решения уравнения

$$y'' + (p - 2q\cos 2x)\,y = 0, \qquad \text{(M)}$$

имеющие период 2π.

Они существуют лишь в случае, когда p и q удовлетворяют одному из следующих четырех трансцендентных уравнений *):

$$(1)\quad -\frac{p}{2} - \frac{q^2\,|}{|\,4-p} - \ldots - \frac{q^2\,|}{|\,4r^2-p} - \ldots = 0,\quad p = a_{2n}(q),$$

$$(2)\quad q+1 - \frac{q^2\,|}{|\,9-p} - \ldots - \frac{q^2\,|}{|\,(2r+1)^2-p} - \ldots = p,\quad p = a_{2n+1}(q),$$

$$(3)\quad -q+1 - \frac{q^2\,|}{|\,9-p} - \ldots - \frac{q^2\,|}{|\,(2r+1)^2-p} - \ldots = p,\quad p = b_{2n+1}(q),$$

$$(4)\quad 4-p - \frac{q^2\,|}{|\,16-p} - \ldots - \frac{q^2\,|}{|\,(2r+2)^2-p} - \ldots = 0,\quad p = b_{2n+2}(q).$$

Уравнение (1) имеет бесконечно много корней. Пусть $p = a_{2n}(q)$ является таким корнем, что $a_{2n}(0) = 4n^2$. Тогда уравнение (M) имеет четное решение с периодом π:

$$\mathrm{ce}_{2n}(x, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)}(q)\cos 2rx.$$

Точно так же, если $a_{2n+1}(q)$ является таким решением уравнения (2), что $a_{2n+1}(0) = (2n+1)^2$, мы получаем четное решение уравнения (M), имеющее период 2π:

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(x, q) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)}(q)\cos(2r+1)x;$$

коэффициенты $A_{2r}^{(2n)}(q)$, $A_{2r+1}^{(2n+1)}(q)$ таковы, что

$$\lim_{q\to 0} A_r^{(n)}(q) = \delta_r^n,$$

*) Обозначение $b_0 + \frac{b_1\,|}{|\,a_1} + \frac{b_2\,|}{|\,a_2} + \ldots$ означает непрерывную дробь.

причем

$$\lim_{q\to 0}\mathrm{ce}_n(x, q) = \cos nx\ (n \neq 0).$$

Коэффициенты $A_r^{(n)}$ определяются условиями

$$\frac{A_r^{(n)}}{A_{r-2}^{(n)}} = \frac{-q}{r^2 - p + q\,\dfrac{A_{r+2}^{(n)}}{A_r^{(n)}}};$$

$$2\left[A_0^{(2n)}\right]^2 + \sum_{1}^{\infty}\left[A_{2r}^{(2n)}\right]^2 = 1 \quad\text{и}\quad \sum_{r=0}^{\infty}\left[A_{2r+1}^{(2n+1)}\right]^2 = 1.$$

Обозначим через $b_{2n+1}(q)$ корни уравнения (3). Они приводят к нечетным периодическим решениям уравнения (M)

$$\mathrm{se}_{2n+1}(x, q) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)x \qquad (\text{период } 2\pi),$$

в то время как корни $b_{2n}(q)$ уравнения (4) приводят к решениям

$$\mathrm{se}_{2n}(x, q) = \sum_{r=1}^{\infty} B_{2r}^{(2n)}\sin 2rx \qquad (\text{период } \pi)$$

уравнения (M).

Коэффициенты $B_r^{(n)}$ определяются формулами

$$\frac{B_r^{(n)}}{B_{r-2}^{(n)}} = \frac{-q}{r^2 - p + q\,\dfrac{B_{r+2}^{(n)}}{B_r^{(n)}}} \quad\text{и}\quad \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_{2r+1}^{(2n+1)}\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[B_{2r+2}^{(2n+2)}\right]^2 = 1.$$

Соотношения между функциями $\mathrm{ce}_n(x, q)$ и $\mathrm{se}_n(x, q)$:

$$\mathrm{ce}_n(k\pi + x) = \mathrm{ce}_n(k\pi - x);$$

$$\mathrm{se}_n(k\pi + x) = -\mathrm{se}_n(k\pi - x);$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(x, -q) = (-1)^n\,\mathrm{ce}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2} - x, q\right);$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(x, -q) = (-1)^n\,\mathrm{se}_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2} - x, q\right).$$

Ортогональность:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{se}_n(x)\,\mathrm{ce}_n(x)\,dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{se}_m(x)\,\mathrm{se}_n(x)\,dx = \int_0^{2\pi}\mathrm{ce}_m(x)\,\mathrm{ce}_n(x)\,dx = \delta_m^n.$$

Модифицированные функции Матье. Заменяя x на ix, мы преобразуем уравнение (M) к виду

$$y'' + (p - 2q\,\mathrm{ch}\,2x)\,y = 0. \tag{M'}$$

Решения этого уравнения, имеющие период $2\pi i$ (модифицированные функции Матье), обозначаются через

$$\mathrm{ceh}_n(x, q) = \mathrm{ce}_n(ix, q); \quad \mathrm{seh}_n(x, q) = -i\,\mathrm{se}_n(ix, q).$$

Разложения по функциям Бесселя. Если $q > 0$ ($q = k^2$), то

$$\mathrm{ce}_{2n}(x) = \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k\cos x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} I_{2r}(2k\sin x);$$

$$\mathrm{ce}_{2n+1}(x) = \frac{-\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kA_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\cos x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{ctg}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} I_{2r+1}(2k\sin x);$$

$$\mathrm{se}_{2n+1}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{tg}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\cos x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{kB_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} I_{2r+1}(2k\sin x);$$

$$\mathrm{se}_{2n+2}(x) =$$

$$= -\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{tg}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k\cos x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{ctg}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} I_{2r+2}(2k\sin x);$$

$$\mathrm{ceh}_{2n}(x) = \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} J_{2r}(2k\,\mathrm{sh}\,x);$$

$$\mathrm{ceh}_{2n+1}(x) = -\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kA_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{cth}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,x);$$

$$\mathrm{seh}_{2n+1}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{th}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{kB_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} J_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,x);$$

$$\mathrm{seh}_{2n+2}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{th}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{cth}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} J_{2r+2}(2k\,\mathrm{sh}\,x).$$

Интегральные уравнения. Обыкновенные функции Матье удовлетворяют однородному интегральному уравнению с симметричным ядром вида

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{ce}_n(x)\\ \mathrm{se}_n(x)\end{array}\right\} = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} K(x, \theta) \begin{array}{l}\mathrm{ce}_n(\theta)\\ \mathrm{se}_n(\theta)\end{array} d\theta.$$

Обычно ядра K берутся в виде (если $q > 0$, $q = k^2$):

для $\mathrm{ce}_{2n}(x)$: $\cos(k\cos\theta\cos x)$ и $\mathrm{ch}(k\sin\theta\sin x)$,

» $\mathrm{ce}_{2n+1}(x)$: $\sin(k\cos\theta\cos x)$ и $\cos\theta\cos x\,\mathrm{ch}(k\sin\theta\sin x)$,

» $\mathrm{se}_{2n+1}(x)$: $\mathrm{sh}(k\sin\theta\sin x)$ и $\sin\theta\sin x\cos(k\cos\theta\cos x)$,

» $\mathrm{se}_{2n}(x)$: $\cos\theta\cos x\,\mathrm{sh}(k\sin\theta\sin x)$ и $\sin\theta\sin x\sin(k\cos\theta\cos x)$.

Вторые решения (функции Матье второго рода). Если параметр p в уравнении (M) принимает собственные значения a_n или b_n, то второе решение этого уравнения не имеет периода: когда $p = a_n$, второе решение, соответствующее $\mathrm{ce}_n(x)$, имеет вид

$$\mathrm{in}_n(x) = x c_n(q)\,\mathrm{ce}_n(x) + w_n(x),$$

а при $p = b_n$ второе решение имеет вид

$$\mathrm{jn}_n(x) = x s_n(q)\,\mathrm{se}_n(x) + \omega_n(x),$$

где функции w_n и ω_n периодичны (и табулированы для некоторых значений q).

Для вторых решений уравнения (M′) пользуются разложениями в ряды по функциям Бесселя.

Функции $\mathrm{ceh}_n(x)$ (решению с периодом $2i\pi$ модифицированного уравнения (M′)) сопоставляют два вторых решения, одно из них разлагают по функциям Y_n, а второе — по функциям K_n (соответственно $\mathrm{Fey}_n(x)$ и $\mathrm{Fek}_n(x)$). Функции $\mathrm{se}_n(x)$ соответствуют $\mathrm{Gey}_n(x)$ и $\mathrm{Gek}_n(x)$.

Если $p = a_{2n}$, то

$$\mathrm{Fey}_{2n}(x) = \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} Y_{2r}(2k\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} Y_{2r}(2k\,\mathrm{sh}\,x)$$

или

$$\mathrm{Fek}_{2n}(x) = \frac{\mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} K_{2r}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x) =$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0, q)}{\pi A_0^{(2n)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r}^{(2n)} K_{2r}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x),$$

$$\mathrm{Fey}_{2n}(x) = i\,\mathrm{ceh}_{2n}(x) - 2\,\mathrm{Fek}_{2n}(x);$$

если же $p = a_{2n+1}$, то

$$\mathrm{Fey}_{2n+1}(x) = -\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kA_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r A_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{kA_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{cth}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,x)$$

или

$$\mathrm{Fek}_{2n+1}(x) = -\frac{\mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k A_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$= \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0, q)}{\pi k A_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{cth}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) A_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x),$$

$$\mathrm{Fey}_{2n+1}(x) = i\,(\mathrm{ceh}_{2n+1}(x) + 2\,\mathrm{Fek}_{2n+1}(x));$$

если $p = b_{2n+1}$, то

$$\mathrm{Gey}_{2n+1}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{kB_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{th}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{kB_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} Y_{2r+1}(2k\,\mathrm{sh}\,x)$$

или

$$\mathrm{Gek}_{2n+1}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k B_1^{(2n+1)}}\,\mathrm{th}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) B_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0, q)}{\pi k B_1^{(2n+1)}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r B_{2r+1}^{(2n+1)} K_{2r+1}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+1}(x) = i\,(\mathrm{seh}_{2n+1}(x) + 2\,\mathrm{Gek}_{2n+1}(x)).$$

Наконец, если $p = b_{2n+2}$, то

$$\mathrm{Gek}_{2n+2}(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{\pi k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{th}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} K_{2r+2}(-2ik\,\mathrm{ch}\,x),$$

$$= -\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{\pi k^2 B_2^{(2n+2)}}\,\mathrm{cth}\,x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} K_{2r+2}(-2ik\,\mathrm{sh}\,x),$$

или

$$\mathrm{Gey}_{2n+2}(x) = -\frac{\mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}, q\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \,\mathrm{th}\, x \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} Y_{2r+2}(2k \,\mathrm{ch}\, x),$$

$$= \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0, q)}{k^2 B_2^{(2n+2)}} \,\mathrm{cth}\, x \sum_{r=0}^{\infty} (2r+2) B_{2r+2}^{(2n+2)} Y_{2r+2}(2k \,\mathrm{sh}\, x),$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+2}(x) = i\, \mathrm{seh}_{2n+2}(x) - 2\, \mathrm{Gek}_{2n+2}(x).$$

Для вторых решений уравнения таких разложений по бесселевым функциям не существует, потому что соответствующие ряды расходятся.

Асимптотические значения.

1) Если $q > 0$, то при больших значениях переменного x для функций $\mathrm{seh}_n(x)$ и $\mathrm{ceh}_n(x)$ имеем (здесь положено $ke^x = v$):

$$\mathrm{ceh}_{2n}(x) \sim \frac{\mathrm{ce}_{2n}(0)\, \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} k A_0^{(2n)}}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(ke^x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\, p_{2n}}{\sqrt{\pi v}} \sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{ceh}_{2n+1}(x) \sim \frac{\mathrm{ce}_{2n+1}(0)\, \mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\frac{\pi}{2} k^3 A_1^{(2n+1)}}} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(ke^x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\, p_{2n+1}}{\sqrt{\pi v}} \cos\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{seh}_{2n+1}(x) \sim -\frac{\mathrm{se}'_{2n+1}(0)\, \mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) A_1^{(2n+1)}}{\mathrm{ce}_{2n+1}(0)\, \mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) B_1^{(2n+1)}} \mathrm{ceh}_{2n+1}(x) =$$

$$= \frac{s_{2n+1}}{p_{2n+1}} \mathrm{ceh}_{2n+1}(x),$$

$$\mathrm{seh}_{2n+2}(x) \sim \frac{\mathrm{se}'_{2n+2}(0)\, \mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right) A_0^{(2n+2)}}{-k^2\, \mathrm{ce}_{2n+2}(0)\, \mathrm{ce}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right) B_2^{(2n+2)}} \mathrm{ceh}_{2n+2}(x) =$$

$$= \frac{s_{2n+2}}{p_{2n+2}} \mathrm{ceh}_{2n+2}(x).$$

$$\mathrm{Fey}_{2n}(x) \sim -p_{2n} \sqrt{2}\, (\pi v)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{Fey}_{2n+1}(x) \sim -p_{2n+1} \sqrt{2}\, (\pi v)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+1}(x) \sim -s_{2n+1} \sqrt{2}\, (\pi v)^{-\frac{1}{2}} \sin\left(v + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{Gey}_{2n+2}(x) \sim -s_{2n+2} \sqrt{2}\, (\pi v)^{-\frac{1}{2}} \cos\left(v + \frac{\pi}{4}\right).$$

2) При больших значениях q ($q > 0$, x конечно) имеем:

$$\begin{array}{l} \mathrm{ce}_m(x) \sim C_m \\ \mathrm{se}_{m+1}(x) \sim S_{m+1} \end{array} \left\{ e^{2k \sin x} \cos^{2m+1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \pm e^{-2k \sin x} \sin^{2m+1}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \frac{1}{\cos^{m+1} x},$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{ceh}_m(x) \sim C_m \\ \mathrm{seh}_{m+1}(x) \sim S_{m+1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \left[2k \,\mathrm{sh}\, x - (2m+1)\, \mathrm{arctg}\left(\mathrm{th}\, \frac{x}{2}\right)\right] \right\} \frac{1}{2^{m-\frac{1}{2}} \sqrt{\mathrm{ch}\, x}},$$

где

$$C_{2n} = \frac{(-1)^n\, 2^{2n-\frac{1}{2}}\, \mathrm{ce}_{2n}(0)\, \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{A_0^{(2n)} \sqrt{k\pi}},$$

$$C_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{ce}_{2n+1}(0)\, \mathrm{ce}'_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k A_1^{(2n+1)} \sqrt{k\pi}},$$

$$S_{2n+1} = \frac{(-1)^n\, 2^{2n-\frac{1}{2}}\, \mathrm{se}'_{2n+1}(0)\, \mathrm{se}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k B_1^{(2n+1)} \sqrt{k\pi}},$$

$$S_{2n+2} = \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{se}'_{2n+2}(0)\, \mathrm{se}'_{2n+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{k^2 B_2^{(2n+2)} \sqrt{k\pi}}.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

Мак-Лахлан Н. В. [7].
Стретт М. Д. О. [11].
Campbell R. [18].
Meixner J., Schäfke F. W. [25].

XIII. СВЕДЕНИЯ О ТАБЛИЦАХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В течение последних двадцати лет было создано много таблиц значений специальных функций, причем число их все время возрастает. Отметим особо собрания таблиц, выпущенные Британской ассоциацией для развития наук, Гарвардским университетом, Национальным бюро стандартов Соединенных Штатов и Академией наук Советского Союза.

Специальный журнал Mathematical tables and aids to computation (MTAC) возник в 1943 г. при Национальном исследовательском совете в Вашингтоне. Он сообщает о новых математических таблицах, замеченных ошибках в старых таблицах и публикует многочисленные статьи о методах и технике численного анализа.

В Индексе математических таблиц Флетчера, Миллера, Розенхида (Лондон, 1946) можно найти библиографические данные и точные указания о многих математических таблицах *).

Мы укажем здесь некоторые таблицы, касающиеся наиболее важных из рассмотренных выше функций.

Абрамов А. А., Таблицы $\ln \Gamma(z)$ в комплексной области, Москва, 1953.

Белоусов С. Л., Таблицы нормированных присоединенных полиномов Лежандра, Москва, 1956.

Берлянд О. С., Гаврилова Р. И., Прудников А. П., Таблицы интегральных функций ошибок и полиномов Эрмита, Минск, 1961.

Деконосидзе Е. Н., Таблицы цилиндрических функций от двух переменных, Москва, 1956.

Журина М. И. Кармазина Л. Н., Таблицы функций Лежандра $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x)$, т. I. Москва, 1960.

Кармазина Л. Н., Таблицы полиномов Якоби, Москва, 1954.

Кармазина Л. Н. и Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от мнимого аргумента и интегралов от них, Москва, 1958.

Карпов К. А. и Разумовский С. Н., Таблицы интегрального логарифма, Москва, 1956.

Люстерник Л. А., Акушский И. Я., Диткин В. А., Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат, 1949.

Носова Л. Н.. Таблицы функций Томсона и их первых производных, Москва, 1960.

Сегал Б. И., Семендяев К. А., Пятизначные математические таблицы, изд. 3, Физматгиз, 1952.

Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка, Москва, 1955.

Таблицы значений функций Бесселя от мнимого аргумента (отв. ред. Виноградов И. М., Четаев Н. Г.), Москва, 1950.

Таблицы интегрального синуса и косинуса (отв. ред. Диткин В. А.), Москва, 1954.

Таблицы интегральной показательной функции (отв. ред. Диткин В. А.), Москва, 1954.

Таблицы функций Бесселя дробного индекса (перевод с английского), т. I, II, Москва, 1959.

*) См. также А. В. Лебедев и Р. М. Федорова, Справочник по математическим таблицам, Москва, 1956, и дополнение к нему Н. М. Бурунова, Справочник по математическим таблицам, Москва, 1959 (*Прим. перев.*).

Фок В. А., Таблицы функций Эйри, Москва, 1946.

Чистова Э. А., Таблицы функций Бесселя от действительного аргумента и интегралов от них, Москва, 1958.

Таблицы некоторых специальных функций имеются также в известной книге: Бронштейн И. Н. и Семендяев К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, изд. 9, Физматгиз, 1962.

Horenstein W., Tables of the confluent hypergeometric function and related functions, National bureau of Standards USA, Applied Mathematics series, № 3.

Middleton D., Johnson V., A tabulation of selected confluent hypergeometric functions, Office of Naval Research, Technical Report, n. 140, Cruft Laboratory, Harvard University.

Prévost G., Tables de fonctions sphériques et de leurs intégrales pour calculer les coefficients du développement en série de polynômes de Laplace d'une fonction de deux variables indépendantes, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1933.

Comrie L. J., Legendre polynomials, British Association for the advancement of sciences, Mathematical Tables, т. A, 1946.

Tables of Associated Legendre Functions, National Bureau of Standards USA, Mathematical Tables Project, № 18.

Robin L. et le Gall P., Tables des fonctions de Legendre associées, Centre National d'études des télécommunications, Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1952.

Jones C. W. Miller J. C. P., Conn J. F. C, Pankhurst R. C., Tables of Chebyshev Polynomials, Proceed. Roy. Soc. Edinburgh, 1946, т. 62, стр. 187—203.

Lanczos C., Tables of Chebychev Polynomials, National Bureau of Standards USA, Applied Math. Service, n. 9, 1952.

Lowan A. N., Tables of Functions and of zeros of functions. National Bureau of Standards USA, Applied Mathematics Series, № 37 (содержат таблицы нулей многочленов Лежандра $P_n(x)$ порядка от 1 до 16 и нулей первых 15 многочленов Лагерра).

Bessel functions, т. 1, functions of orders zero and unity, т. 2; functions of positive integer ordre 2 to 20. British Association for the Advancement of Sciences, Mathematical Tables, тт. 6, 10.

Tables of the Bessel functions, Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Harvard University Press.

т. 3: $J_0(x)$, $J_1(x)$, $0 \leqslant x < 25$, $\Delta x = 0{,}001$; $25 \leqslant x < 100$, $\Delta x = 0{,}01$, 18 décimales;

т. 4: J_2, J_3; т. 5: J_4, J_5, J_6;

т. 6: 7, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, de J_7 à J_{100}, $0 \leqslant x < 100$, $\Delta x = 0{,}01$, 10 décimales.

Tables of Spherical Bessel Functions: Mathem. Tables Project, National Bureau of Standards USA, т. 1 et 2, $\sqrt{2/\pi x}\, J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, $n = 0\ (1)\ 30$, $0 < x < 25$.

Tables of $J_0(z)$, $J_1(z)$, Mathem. Tables Project, National Bureau of Standards USA, $J_0(\rho e^{i\varphi})$, $J_1(\rho e^{i\varphi})$, pour $\rho = 0\ 0{,}01)\ 10$, $\varphi = 0°\ (5°)\ 90°$, 10 décimales.

Blanch G., Tables relating to Mathieu Functions (Characteristic values, coefficient and joining factors) National Bureau of Standards, Computation Laboratory, № 25.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ИЛ, ч. 1, 2, 1949.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958.
3. Гобсон Е. В., Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
4. Грей Э. и Мэтьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
5. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, Гостехиздат, тт. 1, 2, 1951.
6. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.
7. Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, ИЛ, 1953.
8. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, т. 1, 1958, т. 2, 1960.
9. Сеге Д., Ортогональные многочлены, ИЛ, 1962.
10. Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Гостехиздат, 1954.
11. Стретт М. Д. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков—Киев, 1935.
12. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, Гостехиздат, ч. 1, 1933, ч. 2, 1934.
13. Эрдейи А., Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
14. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, 1949.
15. Appell P. et Kampe de Feriet J., Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d' Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
16. Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, n°32, Cambridge University Press, 1935.
16a. Belardinelli G., Fonctions hypergéométrique de plusieurs variables et résolution analytique des équations algébriques générales, Paris, Gauthier-Villars, 1960.
17. Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion, Springer, Berlin, 1953.
18. Campbell R., Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique, Masson et Cie, Paris, 1955.
19. Frank Ph. et von Mises R., Die Differential und Integralgleichngen der Mechanik und Physik (2 тома), Vieweg, Braunschweig, 1930 (т. 2 переведен на русский; см. 20).
20. Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. 2, Гостехиздат, 1937.
21. Kampé de Feriet J., La fonction hypergéométrique, Mémorial des Sciences mathématiques n. 85, Gauthier-Villars, Paris, 1937.
22. Klein F., Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Berlin, 1933.
23. Lense J., Kugelfunktionen, Leipzig, 1954.
24. Mac Robert T. M., Spherical Harmonics, Methuen et Co, 2 ème édition, 1947.
25. Meixner J., Schäfke. F. W, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin, 1954.
26. Nielsen N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig, 1906.
27. Nielsen N., Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig, 1904.
28. Nörlund, Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre superieur Kobenhavn, 1956.

29. Petiau G., La théorie des fonctions de Bessel exposée en vue de ses applications à la physique mathématique, Centre National de la Recherche Scientifique, 1955.
30. Pinney E., Laguerre functions in the mathematical foundations of the electromagnetic theory of the paraboloidal reflector, Journ. of Math. and Physics (MIT), т. 25, 1946, 49—79.
31. Rainville, Special functions, New Jork, 1960.
32. Robin L., Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroidales, Gauthier-Villars.
33. Snow C., Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory, National Bureau of Standards, Applied Mathematical series 19, Washington, 1952.
34. Tricomi F., Fonctions hypergéométriques confluentes, Paris, 1960.
35. Tricomi F., Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer, éditeur, Berlin, 1955.
36. Vogel T., Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux limites de la physique mathématique, Centre National de la Recherche Scientifique, éditeur, Paris, 1953.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ